SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES

DANS LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE [1].

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1872.

I. — Généralités sur les surfaces a génératrices circulaires.

1. On sait, depuis les travaux de Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite de l'infini. Je désignerai par I et J ces deux points remarquables que, dans une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (janvier 1865), j'ai proposé de nommer *ombilics du plan*. J'appelle *droite isotrope* toute droite du plan considéré qui passe par l'un des points I et J; l'ensemble de ces droites forme deux systèmes bien distincts, l'un composé de droites parallèles entre elles et passant par le point I, l'autre de droites également parallèles et passant par le point J.

Par tout point d'un plan passent deux droites isotropes de systèmes différents, dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Dans un plan réel, toute droite isotrope renferme un point réel et n'en renferme évidemment qu'un; c'est le point où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée [2].

(1) Une Note de l'auteur, sur le même sujet, a paru dans le journal *L'Institut*, n° 1898.

(2) Je dis que deux points sont imaginairement conjugués, lorsque leurs coordonnées, prises par rapport à un système d'axes réels quelconque, sont des quantités imaginaires conjuguées. Un point réel est à lui-même son conjugué.

Deux courbes sont imaginairement conjuguées, lorsque les équations de chacune d'elles se déduisent des équations de l'autre en changeant le signe du symbole imaginaire i.

Une courbe réelle est à elle-même sa propre conjuguée.

Si, par un point fixe, réel ou imaginaire, on mène divers plans, chacun de ces plans contient deux droites isotropes passant par le point fixe. Les droites ainsi obtenues sont situées sur un même cône du second degré, que l'on peut aussi considérer comme une sphère de rayon nul ayant pour centre le point fixe et qui jouit de toutes les propriétés de la sphère. Ainsi, par exemple, toute section plane de ce cône est un cercle, et le centre du cercle est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le plan.

Je désignerai sous le nom de *cône isotrope* le cône ainsi formé par toutes les droites isotropes qui passent par un même point. Tous les cônes isotropes coupent le plan de l'infini suivant une même conique, commune à toutes les sphères tracées dans l'espace et que l'on peut appeler l'*ombilicale*.

Par une droite, on peut généralement mener deux plans tangents à l'ombilicale; j'appellerai ces plans *plans isotropes*. Le couple de plans isotropes, passant par une droite donnée, est coupé par un plan perpendiculaire à cette droite suivant deux droites isotropes. Par une droite isotrope, on ne peut faire passer qu'un seul plan isotrope, puisque cette droite coupe le plan de l'infini en un point de l'ombilicale.

2. Ces définitions établies, concevons un point imaginaire de l'espace a, et le point a' qui lui est imaginairement conjugué. Par chacun de ces points passe un cône isotrope; les deux cônes ainsi obtenus se coupent suivant un cercle réel A, dont le plan est perpendiculaire à la droite réelle qui joint les deux points imaginairement conjugués a et a'; le centre de ce cercle est le point réel O, qui est le milieu du segment aa', et, la distance Oa étant représentée par Ri, son rayon a pour valeur la grandeur réelle R.

Il est clair que les deux points imaginaires a et a' déterminent complètement le cercle A; réciproquement, étant donné le cercle réel A, par ce cercle on ne peut faire passer que deux cônes isotropes dont les sommets sont les points a et a'. La position de ce cercle dans l'espace détermine donc complètement ces deux points.

Je dirai que le cercle réel A, ainsi déterminé, est le *cercle représentatif* du couple de points imaginaires a et a', couple que je désignerai par la notation (A); réciproquement, le cercle A, déterminé comme précédemment par les deux points a et a', sera désigné par la notation (a, a').

Le cercle A ou (a, a') représente ainsi l'ensemble des deux points imaginaires conjugués a et a'; dans certaines questions, il est nécessaire de pouvoir distinguer ces deux points l'un de l'autre. A cet effet, on peut imaginer que le cercle A soit décrit dans un certain sens par un point mobile; le sens dans lequel il sera supposé décrit déterminera celui des deux points a et a' dont il sera la représentation. Afin de fixer les idées, supposons que dans un système de coordonnées quelconque, mais d'ailleurs réel, les coordonnées d'un point m soient respectivement

$$x = a + \alpha i, \quad y = b + \beta i, \quad z = c + \gamma i;$$

le sens dans lequel on supposera décrit le cercle représentatif du point m sera tel qu'un spectateur, ayant l'œil placé à l'origine des coordonnées, voie le point mobile, décrivant le cercle, se mouvoir dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ou en sens inverse, suivant que la quantité $a\alpha + b\beta + c\gamma$ est positive ou négative.

Il est évident d'ailleurs que, si cette quantité a un signe donné pour le point m, elle aura le signe contraire pour le point imaginairement conjugué m', dont les coordonnées sont

$$x = a - \alpha i, \quad y = b - \beta i, \quad z = c - \gamma i.$$

3. Dans la plupart des recherches de géométrie, on a à considérer, par couples, des points réels ou qui ne sont pas imaginairement conjugués. J'étendrai à ce cas les notions établies précédemment. Ainsi, a et b désignant deux points quelconques de l'espace, je désignerai par (a, b) le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes ayant pour sommets ces deux points; ce cercle sera généralement imaginaire et ne deviendra réel que dans le cas, examiné précédemment, où les points considérés sont imaginairement conjugués. De même, C désignant un cercle quelconque de l'espace, je dénoterai par le symbole (C) les deux points qui sont les sommets des cônes isotropes passant par ce cercle.

4. Considérons dans l'espace une courbe géométrique quelconque, réelle ou du moins (pour le moment je me restreindrai à ce cas de beaucoup le plus intéressant) définie par des équations réelles; c'est-à-dire telle que, lorsqu'elle passe par un point imaginaire, elle passe également par le point imaginairement conjugué.

Étant donné un cercle réel de l'espace, ce cercle représente un couple de points imaginairement conjugués; et, pour que ces points appartiennent à la courbe donnée, il est nécessaire que le cercle satisfasse à certaines conditions déterminées par la nature de la courbe et dont l'étude forme, pour ainsi dire, un prolongement géométrique de la théorie de cette courbe elle-même. Pour éclaircir ces considérations générales et montrer les diverses questions auxquelles elles se rattachent, j'en ferai tout d'abord, et avec quelques détails, l'application aux courbes gauches qui résultent de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, en m'appuyant sur les propriétés connues des surfaces *anallagmatiques*.

5. M. Moutard a appelé *surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* des surfaces qui peuvent être regardées comme l'enveloppe de sphères mobiles qui coupent orthogonalement une sphère fixe, tandis que leurs centres décrivent une surface du second degré; dans tout ce qui suit, je les désignerai simplement sous le nom de *surfaces anallagmatiques;* leur degré, qui est, en général, le quatrième, peut d'ailleurs s'abaisser au troisième, lorsque la surface lieu des centres des sphères mobiles est un paraboloïde, et même au second, puisque les surfaces du second degré sont comprises dans la famille des surfaces anallagmatiques.

La définition donnée ci-dessus peut être légèrement modifiée de la façon suivante. Étant donnés une sphère fixe S et un plan quelconque P coupant cette sphère suivant un cercle C, on peut, par ce cercle, faire passer deux cônes isotropes. Soient p et p' les sommets de ces cônes; ces deux points, qui, d'après ce que j'ai dit ci-dessus, pourraient être représentés par la notation (C), sont réciproques par rapport à la sphère S; pour abréger le discours, je dirai que ces deux points sont associés au plan P et, réciproquement, que le plan P est le plan associé aux points p et p' [1].

[1] Voir, *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868), ma Note sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques.

Cela posé, on peut définir une surface anallagmatique donnée R comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S, des différents plans que l'on peut mener tangentiellement à une surface du second degré A. L'intersection des surfaces S et A est une biquadratique F qui est l'une des cinq focales de la surface; les quatre autres focales correspondent aux quatre modes de génération dont la surface est susceptible ([1]). En chaque point m de la surface anallagmatique, la normale passe par le point où le plan associé au point m touche la surface A.

Soit G une génératrice rectiligne de cette dernière surface, et soient a, a' les points où cette génératrice s'appuie sur la focale F. On voit facilement que, tandis que le plan mobile qui sert à décrire la surface se déplace le long de la droite G en tournant autour de cette droite, les points associés au plan tangent dans ses diverses positions décrivent un cercle; et ce cercle est précisément l'intersection des deux cônes isotropes ayant pour sommets les points a et a', cercle que nous pouvons désigner par la notation (a, a'). A chaque génératrice rectiligne de A correspond donc une génératrice circulaire de R; et, comme chacun des plans tangents à la surface A passe par une génératrice rectiligne de même système que G, on voit que la surface anallagmatique peut être considérée comme engendrée par les différents cercles correspondant aux génératrices du même système que G. Aux génératrices rectilignes de A, du système différent de celui de G, correspond un autre système de sections circulaires de R; les deux systèmes ainsi obtenus forment un groupe de cercles que, pour plus de clarté, je dirai appartenir au mode de génération défini par la focale F, ou simplement à la focale F. A chacun des quatre autres modes de génération de la surface correspond un autre groupe de cercles situés sur la surface et appartenant à la focale définissant le mode de génération considéré. On peut donc définir, de la façon suivante, les surfaces anallagmatiques au moyen de leurs sections circulaires.

Étant donnée une biquadratique sphérique F, si l'on fait passer par cette courbe une surface du second degré quelconque et si,

([1]) Voir, *Bulletin de la Société philomathique* (janvier 1868), ma Note sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques.

pour chaque génératrice rectiligne d'un système donné de cette surface, on construit le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes, ayant pour sommets les points où cette génératrice s'appuie sur la courbe, le lieu des cercles ainsi obtenus est une surface anallagmatique ayant F pour focale; et le système formé par ces cercles appartient à cette focale.

6. Dans ce qui précède, je n'ai fait aucune hypothèse sur la nature de la surface A, non plus que sur sa position relative par rapport à la sphère S. Les génératrices rectilignes de A peuvent être imaginaires, ou bien, étant réelles, elles peuvent traverser la sphère et la couper en deux points réels. Dans ces deux cas, les sections circulaires correspondantes de l'anallagmatique sont imaginaires. Pour qu'un cercle C, correspondant à une génératrice rectiligne, soit réel, il faut et il suffit évidemment que cette génératrice soit réelle et extérieure à la sphère; elle coupe alors cette sphère en deux points imaginairement conjugués de la focale F, et le cercle C est ce que j'ai appelé le *cercle représentatif* de ces deux points.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un système de sections circulaires d'une surface anallagmatique, appartenant à une focale F *de cette surface, est réel, les points imaginaires représentés par ces cercles sont situés sur la courbe* F.

Si l'on imagine toutes les surfaces anallagmatiques, qui ont pour focale une biquadratique sphérique donnée F, et toutes les sections circulaires réelles de ces surfaces qui appartiennent à F, on obtiendra les cercles représentatifs de tous les points imaginaires de la courbe F. En effet, si un cercle C représente un point imaginaire de F, la droite réelle qui joint les points imaginaires (C), détermine avec la courbe F un hyperboloïde à une nappe, et cet hyperboloïde détermine une surface anallagmatique ayant F pour focale et passant par le cercle C. D'où la conclusion suivante :

Pour qu'un cercle réel représente un couple de points imaginaires situés sur une biquadratique sphérique donnée F, *il faut et il suffit que ce cercle soit situé sur une surface anal-*

lagmatique ayant F *pour focale et qu'il appartienne au mode de description caractérisé par cette focale.*

7. La façon dont j'ai défini au n° 5 les surfaces anallagmatiques, au moyen de leurs sections circulaires, s'étend d'elle-même au cas où ces surfaces ont un plan de symétrie; dans ce cas, l'une des sphères principales se réduit à un plan, ainsi que la surface du second degré correspondante, et les définitions que j'ai données précédemment, la définition comme enveloppes de sphères et la définition par points, deviennent illusoires. Mais, avant d'aborder ce sujet, il est nécessaire d'exposer quelques considérations très simples sur la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

Étant donnés un point quelconque a, réel ou imaginaire, et le cône isotrope ayant ce point pour sommet, il est clair que, par une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques, ce cône isotrope se transforme en un autre cône isotrope ayant pour sommet le point qui correspond au point a. Si donc on a deux points quelconques a et b, au cercle (a, b) correspondra après la transformation le cercle (α, β), α et β désignant les points qui correspondent aux points a et b.

Imaginons une surface anallagmatique comme le lieu des différents cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... déterminés par les points où les génératrices d'une surface du second ordre aa', bb', cc', ... s'appuient sur une biquadratique sphérique F, et effectuons sur cette figure une transformation par rayons vecteurs réciproques. La courbe F se transformera en une autre biquadratique sphérique Φ; sur cette courbe Φ, aux points a, a', b, b', ... correspondront des points α, α', β, β', ..., et la surface transformée de la surface donnée sera le lieu des cercles (α, α'), (β, β'), ... D'où l'on peut, en passant, tirer cette conséquence, que les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, ... sont, comme les droites aa', bb', cc', ..., les génératrices d'une même surface du second ordre.

Considérons maintenant une biquadratique sphérique F et une surface du second degré quelconque A, passant par cette courbe. Toutes les génératrices d'un même système de A, telles que aa', peuvent être obtenues en choisissant arbitrairement une génératrice ss' de l'autre système et en menant des plans par cette der-

nière génératrice. Ces divers plans couperont la sphère suivant des cercles passant par les deux points fixes s et s' et chacun de ces cercles coupera la courbe F en deux points variables a et a situés sur une même génératrice de A; le lieu des cercles (a, a') est l'anallagmatique définie par la surface A et la focale F; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, par deux points fixes s et s', d'une biquadratique sphérique F, *on mène un cercle variable rencontrant la courbe* F *aux deux points a et a', le lieu des cercles (a, a') est une surface anallagmatique ayant* F *pour focale.*

Transformons maintenant la figure précédente en prenant le pôle de transformation sur la sphère qui contient la courbe F; la surface anallagmatique donnée se transforme en une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan qui correspond à la sphère. La focale F se transforme en une anallagmatique plane Φ sur laquelle se trouvent les deux points σ et σ' correspondant aux points s et s'; et l'on obtient la proposition suivante :

Si, par deux points fixes σ et σ' d'une anallagmatique plane Φ, on mène un cercle variable coupant la courbe Φ aux points α et α', le lieu des cercles (α, α') est une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan de la focale Φ.

Le second système de sections circulaires appartenant à la focale Φ s'obtiendrait facilement : en effet, étant mené par σ et par σ' un cercle quelconque coupant la focale en deux points α et α'; si, par ces deux points, on mène un cercle variable rencontrant Φ aux points ρ et ρ', les différents cercles tels que (ρ, ρ') constitueront ce second système de sections circulaires.

Les plans des différents cercles tels que (α, α') ont pour traces, sur le plan de la focale Φ, les perpendiculaires élevées sur les segments $\alpha\alpha'$ en leurs points milieux. Toutes ces perpendiculaires, il est facile de le voir, enveloppent une conique ayant pour foyers les foyers singuliers de l'anallagmatique Φ [1]. D'où l'on peut conclure que, quand une série de surfaces anallagmatiques a pour

[1] *Voir*, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (janvier 1863), ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes*, etc.

focale commune une anallagmatique plane, les traces des cylindres enveloppés par les plans des cercles de ces surfaces appartenant à cette focale, sur le plan de symétrie, sont des coniques homofocales ayant pour foyers communs les foyers singuliers de la focale.

8. La proposition précédente n'est, du reste, qu'un cas particulier d'un théorème relatif aux anallagmatiques en général et que l'on peut établir très simplement.

Considérons une surface anallagmatique quelconque R, ayant pour focale une biquadratique sphérique F. Les plans des divers cercles de la surface, appartenant à cette focale, enveloppent un cône ayant pour sommet le centre de la sphère S, sur laquelle est située la focale; et ces plans sont perpendiculaires aux diverses génératrices de la surface du second degré A passant par la focale qui détermine la surface R. Pour trouver les droites focales de ce cône, je rappellerai que ces droites sont les intersections des divers plans isotropes qu'on peut lui mener tangentiellement. Or, les perpendiculaires à un plan isotrope touchant l'*ombilicale* en un point donné ω sont les diverses droites isotropes passant par ce point correspondant aux plans isotropes tangents au cône, donc des génératrices isotropes de A, et réciproquement. Une génératrice isotrope de A doit percer le plan de l'infini en un point de l'ombilicale, et aussi en un point de la trace de la surface A sur le même plan. Soient Ω l'ombilicale et a, b, c, d les quatre points où cette courbe rencontre la focale F; la surface A passant par cette focale, sa courbe d'intersection avec le plan de l'infini est une conique passant par les points a, b, c et d, et il est clair que les génératrices isotropes de A sont les huit génératrices passant par ces quatre points. Les traces, sur le plan de l'infini, des quatre plans qui leur sont perpendiculaires et qui passent par le centre de la sphère, sont les quatre droites menées tangentiellement à l'ombilicale par les quatre points a, b, c et d; les focales du cône sont donc les six droites conjuguées deux à deux qui joignent le centre de la sphère aux divers points d'intersection p, q, r, s, t, u des quatre tangentes. On voit que ces focales sont complètement déterminées par la focale F et ne dépendent en aucune façon de la surface particulière A. On peut donc énoncer cette proposition :

Si l'on considère une série de surfaces anallagmatiques

homofocales, et si, pour chacune de ces surfaces, on construit le cône enveloppe des cercles appartenant à l'une de ses focales, tous les cônes ainsi obtenus sont homofocaux.

J'ajouterai que les focales de ces cônes sont les focales singulières des cônes ayant pour base la focale de la surface anallagmatique considérée, et, pour sommet, le centre de la sphère sur laquelle cette courbe est située. Mais, pour abréger, je laisse de côté la démonstration de ce point de détail [1].

9. Je reviens maintenant au mode de description des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie, donné au n° 7, pour montrer comment il s'applique aux surfaces du second ordre. Ces dernières s'obtiennent lorsque la focale, qui, en général, est une courbe anallagmatique plane, se réduit à une conique. Soit donc une conique quelconque C réelle (ou du moins ayant une équation réelle) et a, a' deux points fixes pris sur cette conique. Par ces deux points, menons un cercle quelconque coupant la conique en α et en α'; d'après ce qui a été dit ci-dessus, le lieu des cercles tels que (α, α') est une surface du second ordre ayant pour focale C. D'après un théorème élémentaire bien connu, toutes les droites telles que $\alpha\alpha'$ ont une direction fixe. On peut donc énoncer la proposition suivante qu'il serait très simple, d'ailleurs, d'établir directement :

Si l'on mène, dans le plan d'une conique, une série de droites parallèles à une direction fixe D, *en désignant par* a *et* a' *les deux points d'intersection de la conique avec une quelconque de ces droites, le lieu des cercles tels que* (a, a') *est une surface du second ordre ayant pour focale la conique donnée.*

Supposons que C soit une ellipse; imaginons toutes les droites réelles parallèles à une droite fixe D et extérieures à l'ellipse; chacune de ces droites rencontre l'ellipse en deux points imagi-

[1] *Voir*, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, le n° 4 de ma Communication du 23 mars 1867 : *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré.*

nairement conjugués, représentés par un cercle réel; tous les cercles réels ainsi obtenus, quand la droite se déplace, constituent l'un des systèmes de sections circulaires d'un hyperboloïde à deux nappes ayant pour focale l'ellipse donnée. Si le système des droites considéré était parallèle à une droite D' faisant avec le grand axe de l'ellipse un angle supplémentaire de l'angle que fait D avec ce même axe, les cercles représentatifs des points d'intersection de l'ellipse avec ces diverses droites constitueraient le second système de sections circulaires de l'hyperboloïde mentionné ci-dessus.

Si nous imaginons l'infinité d'hyperboloïdes à deux nappes qui ont pour focale l'ellipse C, leurs diverses sections circulaires représenteront tous les points imaginaires situés sur cette ellipse. D'où l'on peut conclure le théorème suivant :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une ellipse donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un hyperboloïde à deux nappes ayant cette ellipse pour focale.

De même :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une hyperbole donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un ellipsoïde ayant cette hyperbole pour focale.

10. Il existe, relativement au système de deux cercles situés sur une même sphère, une propriété très simple, qui a de fréquentes applications dans la géométrie de la sphère et dans la théorie des surfaces anallagmatiques. Je vais l'exposer brièvement, en en supprimant la démonstration, d'ailleurs très facile à suppléer.

Soient deux cercles C et D situés sur une même sphère, et par conséquent se coupant en deux points. Le cercle C représente deux points de l'espace c et c', qui sont réciproques par rapport à la sphère et que l'on pourrait désigner par la notation (C); le cercle D représente de même deux points réciproques d et d'. Les quatre points c, c', d et d' sont d'ailleurs dans un même plan passant par le centre de la sphère. Cela posé, par les deux cercles

donnés, on peut faire passer deux cônes, et les sommets de ces cônes sont les deux points de rencontre respectifs des droites cd et $c'd'$ et des droites cd' et $c'd$.

Supposons les cercles C et D réels; supposons-les, en outre, décrits dans un sens déterminé, en sorte que chacun d'eux représente un point imaginaire et un seul; le point c, par exemple, étant représenté par le cercle C et le point d par le cercle D. La droite imaginaire cd est imaginairement conjuguée à la droite $c'd'$; ces deux droites étant dans le même plan se coupent en un point réel, que l'on peut définir comme étant le point réel situé sur cd; et, d'après ce que j'ai dit plus haut, ce point est le sommet d'un cône passant par C et D. Mais ici l'on peut ajouter qu'un spectateur, dont l'œil serait placé au sommet du cône, verrait les cercles C et D décrits en sens inverse; en sorte que, si le mobile qui est censé décrire l'un d'eux lui paraît se mouvoir dans le sens des aiguilles d'une montre, le mobile qui est supposé décrire l'autre lui paraîtra se mouvoir dans l'autre sens.

Cette dernière remarque est souvent utile pour fixer le sens que l'on doit affecter à un cercle représentant un point imaginaire.

Considérons maintenant une surface anallagmatique R, définie par la surface du second degré A et la focale F située sur cette surface, et les deux systèmes de génératrices circulaires de l'anallagmatique appartenant à cette focale. Soit C un cercle fixe de l'un de ces systèmes, représentant deux points c et c' de la focale; soit D un cercle quelconque de l'autre système, représentant deux points d et d' de la focale. Les cercles C et D sont situés sur une même sphère, et l'on sait d'ailleurs que les droites cc' et dd' sont deux génératrices, de systèmes différents, de la surface A. D'après ce qui a été dit plus haut, les sommets des cônes qui passent par les cercles C et D sont les deux points r et s, où se coupent respectivement les droites cd' et $c'd$ d'une part, les droites cd et $c'd'$ d'autre part. Le lieu décrit par les sommets de ces cônes, lorsque, le cercle C étant fixe, le cercle D se déplace sur la surface R, est donc l'intersection des deux cônes ayant pour base la focale F et pour sommets les points c et c'. Ces cônes sont du troisième degré; leur intersection, qui est du neuvième degré, se compose d'abord de la génératrice cc', de la focale et du lieu cherché; ce dernier est donc du quatrième ordre.

D'où l'on peut conclure la proposition suivante :

Étant pris, sur une surface anallagmatique, un cercle quelconque appartenant à une focale F *de cette surface, par ce cercle et par un cercle quelconque* D *du second système circulaire appartenant à cette focale, on peut faire passer deux cônes; le lieu décrit par le sommet de ces cônes, lorsque, le cercle* C *étant fixe, le cercle* D *se déplace sur la surface, est une courbe du quatrième ordre faisant partie de l'intersection des deux cônes, qui ont pour base commune la focale* F *et pour sommets les deux points de cette focale que représente le cercle* C.

11. Dans ce qui précède, j'ai montré comment on peut déterminer les conditions géométriques auxquelles un cercle doit satisfaire pour représenter un couple de points situés sur une biquadratique sphérique donnée, en groupant deux à deux les divers points de cette courbe de façon qu'à l'ensemble de tous les couples de points corresponde l'ensemble des génératrices circulaires d'une surface anallagmatique. Chaque mode de groupement est défini par une surface du second ordre, de telle sorte que deux points quelconques de la courbe, qui se correspondent, se trouvent sur une même génératrice de la surface.

Soit, en général, une courbe gauche géométrique quelconque G; imaginons une surface réglée V, telle que chacune de ses génératrices s'appuie en deux points sur cette courbe. Soient aa', bb', cc', ... les génératrices consécutives de cette surface; les cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... engendreront une autre surface, que je dirai *dérivée* de la courbe G. D'une même courbe donnée on peut ainsi déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, et chacune de ces surfaces dérivées correspond à un certain mode de groupement des points de la courbe, défini par la surface réglée V.

Lorsque la courbe G est plane, les droites, telles que aa', bb', ..., qui joignent les points conjugués de cette courbe, ne forment plus une surface gauche, mais enveloppent une courbe plane, qui peut aussi servir à définir le groupement des points. Dans ce cas, et lorsque la courbe G est d'un degré supérieur à deux, chacune des tangentes à l'enveloppe plane rencontrant G en

plus de deux points, il est nécessaire de fixer ceux des points de rencontre que l'on doit grouper ensemble. Pour éviter cette difficulté, il est alors généralement préférable de définir chaque couple de points par d'autres considérations ne donnant lieu à aucune ambiguïté, comme je l'ai fait au n° 7, en traitant des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie.

On peut toujours, d'ailleurs, sauf dans le cas très particulier où la courbe plane G est un cercle, effectuer une transformation par rayons vecteurs réciproques, de façon que cette courbe devienne une courbe gauche sphérique [1].

12. D'une courbe gauche donnée on peut, comme je l'ai montré, déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, dérivées de cette courbe.

Réciproquement, étant donnée une surface quelconque à génératrices circulaires, on peut toujours la considérer comme une surface dérivée d'une certaine courbe gauche G. En désignant par C, C', C'', ... les diverses génératrices circulaires de la surface, cette courbe est le lieu des points (C), (C'), (C''), ...; et la surface réglée V, qui détermine le mode de groupement des points de la courbe, est le lieu des axes des différents cercles.

13. Parmi l'infinité de surfaces dérivées d'une courbe gauche G, se trouve en particulier la *développable isotrope*, circonscrite à cette courbe; j'entends par là la surface développable circonscrite à la fois à l'ombilicale et à la courbe donnée. Tous les plans qui lui sont tangents sont, par conséquent, des plans isotropes, et ses génératrices, comme nous allons le voir, sont des droites isotropes.

Soit m un point quelconque de G; pour construire les génératrices de la surface développable isotrope qui passent en ce point, menons la tangente à la courbe en m, et soit t le point où cette tangente perce le plan de l'infini. Menons par t les deux tangentes à l'ombilicale Ω et soient a et b leurs points de contact. Les plans

[1] *Voir*, comme application de ces considérations, mon *Étude géométrique sur la cyclide* (journal *L'Institut* et *Bulletin de la Société philomathique*, novembre 1871).

tma et tmb sont deux plans isotropes tangents à la courbe G, et les génératrices correspondantes de la développable sont les droites isotropes ma et mb. Remarquons maintenant que, la droite ab étant la polaire du point t par rapport à l'ombilicale, le plan mba est perpendiculaire à la tangente mt; les génératrices de la développable, qui passent au point m, sont donc les deux droites isotropes passant par ce point dans le plan normal à la courbe.

J'imagine maintenant une droite passant par le point m et par le point m', pris sur la courbe G, à une distance infiniment petite de m. Les cônes isotropes ayant ces deux points pour sommets se coupent suivant un cercle, dont le plan, perpendiculaire à mm', passe par le milieu de ce segment, et dont le rayon, égal à mm', est par conséquent infiniment petit. Le point m' venant à se confondre avec le point m, le plan du cercle d'intersection devient normal à la courbe au point m, le rayon de ce cercle devient nul et ce cercle se réduit à deux droites isotropes. Donc, quand une droite est tangente à une courbe gauche, le cercle, correspondant aux deux points de la courbe, qui sont réunis au point de contact, se compose des deux droites isotropes qui passent par ce point dans le plan normal à la courbe.

D'où cette conclusion : la développable isotrope, circonscrite à une courbe gauche, est la surface dérivée de cette courbe, lorsque la surface réglée, qui fixe le groupement de ses points, est la développable formée par les tangentes à la courbe.

Appliquons ces résultats à la recherche de la focale d'une courbe sphérique quelconque H; on sait, d'ailleurs, que cette focale est la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H.

En désignant par S la sphère qui contient cette courbe, pour qu'un point donné m soit situé sur une surface Σ dérivée de H, il est nécessaire et suffisant que le plan, associé au point m par rapport à la sphère ([1]), coupe la courbe H en deux points situés sur une génératrice de la surface réglée γ, qui détermine le groupement de points correspondant à la surface Σ. Si l'on considère en particulier la développable isotrope, qui correspond à la développable ayant H pour arête de rebroussement, pour qu'un point m

([1]) Sur l'expression « plan associé à un point », *voir* n° 5.

soit situé sur cette développable isotrope, il faut et il suffit que le plan associé au point m soit tangent à la courbe H.

Si m est un point de la focale, c'est-à-dire de la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H, le plan associé à m est doublement tangent à H.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La focale d'une courbe sphérique est le lieu des points associés (par rapport à la sphère qui contient la courbe) *aux divers plans doublement tangents à cette courbe.*

14. En particulier, supposons que la courbe donnée soit une biquadratique sphérique; on a, dans ce cas, quatre systèmes de plans doublement tangents à cette courbe et qui correspondent aux quatre cônes du second degré sur lesquels on peut la placer. La focale se compose donc de quatre biquadratiques sphériques. Pour les construire, considérons un de ces cônes K et son sommet O; la biquadratique correspondante est le lieu des points associés aux plans tangents à ce cône. Ces plans tangents passant par le point fixe O, la courbe est située sur la sphère ayant ce point pour centre et coupant orthogonalement la sphère S, et elle est l'intersection de cette sphère par le cône supplémentaire du cône K dont le sommet est le centre de S.

Si la biquadratique donnée est une focale d'une surface anallagmatique, les quatre autres biquadratiques que l'on en déduit ainsi constituent avec elle la focale ordinaire de cette anallagmatique. On sait d'ailleurs que ces cinq courbes sont situées sur cinq surfaces du second degré homofocales; les trois coniques focales communes à ces surfaces constituent la focale singulière de l'anallagmatique.

15. *Remarques sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.* — Lorsqu'une surface passe par l'ombilicale, sa focale complète se compose généralement de deux courbes distinctes (dont chacune peut elle-même se décomposer en plusieurs autres). Les plans isotropes tangents à la surface, dont le point de contact est à distance finie, enveloppent une développable dont la ligne double est la *focale ordinaire* de la surface; la dévelop-

pable circonscrite le long de l'ombilicale a pour ligne double la *focale singulière*.

Pour prendre l'exemple le plus simple, on voit que la focale ordinaire d'une anallagmatique se compose de cinq biquadratiques sphériques qui ont entre elles les relations que j'ai indiquées plus haut, et que sa focale singulière se compose de trois coniques.

Une surface du second degré n'a généralement pas de focale singulière et sa focale ordinaire se compose de trois coniques; une sphère n'a qu'une focale singulière qui se réduit à son centre.

Quand on transforme une surface par rayons vecteurs réciproques, on voit facilement que la focale ordinaire de la transformée est la transformée de la focale ordinaire de la surface primitive.

Mais il n'en est pas de même relativement à la focale singulière. Pour voir ce qui a lieu dans ce cas, je ferai remarquer que tout point (réel ou imaginaire) de l'espace situé à distance finie est représenté par un cercle de l'espace dont le rayon est fini et dont le centre est situé également à distance finie.

Généralement, un point situé à l'infini n'est pas susceptible de mode de représentation, le cercle qui le représenterait étant alors rejeté entièrement à l'infini; il faut le définir par l'une quelconque des droites qui s'y croisent.

Lorsque le point considéré dans le plan de l'infini se trouve sur l'ombilicale, le cercle qui le représente se réduit à une droite dont la direction seule est déterminée. Un point de l'ombilicale n'a donc pas, à proprement parler, de représentation; mais si on le considère comme appartenant à une nappe d'une surface donnée, la droite qui le représente est alors déterminée; c'est la droite réelle du plan tangent à la nappe de la surface au point considéré.

Une sphère ayant une nappe unique, on voit que chaque point de l'ombilicale (considéré comme appartenant à la sphère) est représenté par une droite unique passant par le centre de cette sphère, si l'on suppose ce centre réel, en sorte que tous les points de l'ombilicale seront représentés par le système de toutes les droites qui rayonnent autour de ce point.

Une surface anallagmatique ayant deux nappes qui se coupent suivant l'ombilicale, chaque point de cette courbe est représenté par deux droites réelles; l'ensemble de toutes les droites que l'on obtient ainsi forme une *congruence* qui représente l'ombilicale.

Les considérations qui précèdent permettent d'établir facilement la proposition suivante :

Si l'on transforme une surface S en S' par une transformation par rayons vecteurs réciproques; au moyen d'une sphère décrite autour d'un point O comme centre avec un rayon égal à R :

1° *La focale ordinaire de S a pour transformée la focale ordinaire de S';*

2° *Pour obtenir la focale singulière de S' considérons le cône isotrope ayant pour sommet le point O; il coupe S suivant une courbe à double courbure, à laquelle on peut circonscrire une infinité de plans doublement tangents enveloppant une surface développable Σ.*

La courbe polaire réciproque de cette surface, par rapport à la sphère décrite du point O comme centre avec $\frac{R}{\sqrt{2}}$ comme rayon, est la focale cherchée.

16. Si, en particulier, on considère une surface anallagmatique S, le cône isotrope ayant pour foyer le point O coupe l'anallagmatique suivant une biquadratique. La développable doublement circonscrite à cette courbe se compose de trois cônes du second degré, qui ont pour polaires, relativement à la sphère dont je viens de parler, les trois focales singulières de S'.

II. — Propriétés des normales aux surfaces anallagmatiques [1].

Proposition fondamentale.

17. Je rappellerai d'abord quelques notions importantes relatives aux surfaces anallagmatiques.

On peut définir une surface anallagmatique Σ comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S_1, des divers plans qui touchent une surface du second degré (ou *quadrique*) A_1.

[1] *Voir*, à ce sujet, *Bulletin de la Société philomathique*, janvier 1868, ma Note *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques*.

L'intersection de S_1 et de A_1 est une biquadratique sphérique F_1 qui constitue l'une des focales ordinaires de Σ.

On sait, d'après M. Moutard, que la même surface est susceptible de quatre autres modes de génération semblables, au moyen de quatre autres quadriques A_2, A_3, A_4, A_5, et de quatre sphères correspondantes S_2, S_3, S_4, S_5.

Les quatre biquadratiques F_2, F_3, F_4, F_5 suivant lesquelles se coupent respectivement ces quadriques et ces sphères, constituent avec F_1 la focale ordinaire complète de Σ, et toutes ces courbes sont reliées entre elles de la façon que j'ai indiquée dans le Chapitre précédent.

Des nombreuses relations qui ont lieu entre ces diverses surfaces, je rappellerai seulement les suivantes, dont j'aurai besoin dans ce qui suit.

En désignant respectivement par O_1, O_2, O_3, O_4 et O_5 les cinq centres des sphères :

1° Quatre quelconques d'entre eux forment un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère qui a pour centre le cinquième point et par rapport à la quadrique correspondante ; ainsi le tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ est conjugué par rapport à S_5 et à A_5.

D'où il suit que O_5 est le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, ou encore que la droite O_4O_5 est perpendiculaire au plan $O_1O_2O_3$.

2° Deux quelconques des cinq sphères se coupent suivant un plan qui contient les centres des trois autres. Ainsi, le plan radical des sphères S_1 et S_2, que je désignerai par la notation P_{12}, est le plan $O_3O_4O_5$.

L'axe radical des trois sphères S_1, S_2 et S_3, que je désignerai par la notation D_{45}, est la droite O_4O_5.

18. Ceci posé, soient S_i et S_j deux sphères principales de l'anallagmatique Σ, et A_i, A_j les quadriques correspondantes.

M désignant un point quelconque de Σ et (M) le cône isotrope dont ce point est le sommet, le plan associé à M par rapport à S_i touche A_i en un point m_i que l'on peut appeler le *point correspondant de* M *sur* A_i ; ce plan est d'ailleurs le plan radical de S_i et de (M) considéré comme une sphère de rayon nul. De même, le plan associé à M par rapport à S_j touche A_j en un point m_j correspondant aussi à M, et ce plan est le plan radical de S_j et de (M).

D'après un théorème connu, ces deux plans radicaux se coupent sur le plan radical P_{ij} des deux sphères S_i et S_j.

On peut donc énoncer la proposition fondamentale suivante :

Théorème I. — *Si l'on désigne par m_i et m_j deux points correspondants sur les quadriques A_i et A_j, les plans tangents en ces points se coupent suivant une droite* E *située dans le plan P_{ij}. La droite m_im_j est normale à l'anallagmatique Σ, et le pied de la normale est situé dans le plan mené par D_{ij}, perpendiculairement à* E.

Comme l'on a dix plans P_{ij}, on voit, d'après le théorème précédent, que le système des normales à une anallagmatique donnée peut être engendré de dix façons différentes, au moyen de deux quadriques homofocales. De là résultent encore d'autres modes de génération de ces droites, au moyen de trois ou de quatre quadriques.

Ce sont ces diverses conséquences que je me propose d'étudier et de développer dans les paragraphes qui suivent.

Génération du système des droites normales à une même surface anallagmatique au moyen de deux quadratiques homofocales.

19. De la proposition qui précède on déduit facilement le théorème suivant :

Théorème II. — *Étant données deux quadriques homofocales A_1 et A_2 et un plan arbitraire P_{12}, si, de chaque droite* E *de ce plan on mène des plans tangents aux deux quadriques, et si l'on joint deux à deux les points de contact appartenant à des surfaces différentes, toutes les droites ainsi obtenues sont normales à une même surface anallagmatique Σ.*

J'ajouterai que la *surface Σ est le lieu des points d'intersection de chacune des normales avec le plan mené par la droite, qui est le lieu des pôles du plan P_{12} par rapport aux surfaces homofocales à A_1 et A_2, perpendiculairement à la droite* E *correspondant à la normale.* On a ainsi un mode simple et direct de génération de la congruence de droites formée par les normales à une anallagmatique; et, comme je l'ai fait remarquer, cette congruence peut être engendrée, de la même façon, de dix manières différentes.

Tout ceci se rattache à l'étude de deux complexes de droites remarquables, que l'on peut définir ainsi qu'il suit :

Étant données arbitrairement deux quadriques, et m, m' désignant deux points pris respectivement sur chacune de ces surfaces, le premier complexe est composé des droites mm' telles que les plans tangents en ces points se coupent sur une droite fixe. Le deuxième complexe (réciproque du premier) est composé des droites d'intersection des plans tangents en m et en m' quand la droite mm' s'appuie sur une droite fixe.

20. La construction précédente donne, pour chaque point m de A_1, deux des normales à Σ qui s'y croisent; comme ces deux droites doivent être symétriques par rapport au plan tangent à ce point, on en déduit la proposition suivante :

Théorème III. — *Si, par une droite* D, *prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans tangents à deux quadriques homofocales* A_1, A_2, *et qui la touchent respectivement en* p_1, q_1 *et* p_2, q_2, *la normale menée en* p_1 *à la quadrique* A_1 *est dans le plan des deux droites* p_1p_2 *et* p_1q_2, *et fait avec elles des angles égaux.*

Si l'on considère le quadrilatère $p_1q_1p_2q_2$, on voit que deux côtés consécutifs quelconques de ce quadrilatère, p_1q_1 et q_1p_2 par exemple, sont également inclinés sur la normale en q_1, et que leur plan contient cette normale; d'où cette conséquence curieuse :

Théorème IV [1]. — *Étant données deux quadriques homofocales quelconques, si un rayon lumineux, mené d'une façon quelconque dans l'espace, se réfléchit une première fois sur la première surface, une seconde fois sur la deuxième, une troisième fois sur la première, et enfin une quatrième fois sur la deuxième, après ces quatre réflexions, il reprend la même route, en sorte que, quel que soit le nombre de réflexions analogues qu'il éprouve, il parcourt constamment les quatre côtés du même quadrilatère.*

[1] Il est bien clair que l'on doit choisir d'une façon convenable les points de réflexion; de plus, on peut remarquer que deux des rayons réfléchis sont virtuels.

En s'appuyant sur la théorie bien connue des caustiques, on déduit de là la proposition suivante, qui s'applique également aux coniques homofocales [1] et donne alors comme cas particulier la propriété focale qui sert de définition à l'ellipse et à l'hyperbole.

Théorème V. — *Étant données deux quadriques homofocales quelconques, si, par une droite prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans qui touchent respectivement ces surfaces aux points* p_1, p_2 *et* q_1, q_2, *la somme de deux côtés consécutifs du quadrilatère formé par ces quatre points est égale à la somme des deux autres, en sorte que l'on a*

$$p_1q_1 + q_1p_2 = p_2q_2 + q_2p_1.$$

21. Aux propositions précédentes se rattache un mode de transformation de droites dans l'espace, qui mérite d'être signalé.

Étant données deux quadriques homofocales A et B et une droite quelconque D, considérons un des points où cette droite rencontre A, et soit a ce point; soit de même b un des points où la droite coupe B, les plans tangents en a et en b se coupent suivant une droite par laquelle on peut encore faire passer un plan tangent à A et un plan tangent à B; Δ désignant la droite qui joint leurs points de contact, je dirai que D et Δ sont des droites correspondantes conjuguées.

A une droite quelconque de l'espace D correspondent quatre droites Δ; si un rayon lumineux est dirigé suivant la droite D, après s'être réfléchi successivement sur chacune des deux qua-

[1] Il est presque inutile de dire que tous les théorèmes énoncés dans ce Mémoire s'appliquent également aux anallagmatiques et aux coniques planes, ainsi qu'aux courbes sphériques analogues.

driques, sa direction coïncidera avec celle d'une des droites conjuguées Δ, et l'on obtiendra ces quatre droites en choisissant, de toutes les façons possibles, les points où se fait la réflexion.

Du théorème de Malus il résulte d'ailleurs que si un système de droites D est normal à une même surface, il en est de même des systèmes des droites conjuguées.

22. Le système des droites normales à une anallagmatique Σ étant défini comme je l'ai fait dans le n° 19 au moyen des deux quadriques homofocales A_1 et A_2 et du plan fixe P_{12}, on peut se proposer de déterminer tous les autres éléments qui définissent Σ.

En conservant les notations du n° 20, si l'on désigne en outre par K_j^i la conique suivant laquelle le plan P_{ij} coupe la quadrique A_i, on obtiendra facilement les propositions suivantes :

Les centres O_1 et O_2 des sphères correspondant aux quadriques A_1 et A_2 sont respectivement les pôles du plan P_{12} par rapport à ces surfaces. Les centres des trois autres sphères sont les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre points d'intersection des coniques K_2^1 et K_1^2.

Si l'on circonscrit une surface développable à la quadrique A_1 et à la conique K_1^2, les trois autres coniques doubles de cette surface sont les coniques K_1^3, K_1^4 et K_1^5, et la développable est circonscrite à la sphère S_1.

De là résulte, en particulier, une construction très simple des diverses quadriques A_1, A_2, A_3, ..., lorsque la surface anallagmatique est définie par l'une d'elles et la sphère correspondante.

Théorème VI. — *Une surface anallagmatique étant définie par une surface du second degré et une sphère, la développable circonscrite à ces deux surfaces a quatre lignes doubles qui sont des coniques. D'après un théorème dû à M. Chasles, par chacune de ces coniques on peut faire passer une quadrique homofocale à la première; les cinq quadriques ainsi déterminees sont précisément celles au moyen desquelles on peut engendrer la surface.*

23. Le système des normales à une surface anallagmatique Σ peut être *en général* engendré de dix manières différentes par le mode de construction que j'ai indiqué ci-dessus.

Si la surface a un plan de symétrie, quatre de ces modes de génération ne peuvent être généralement appliqués et deviennent illusoires.

On peut, en effet, définir cette surface au moyen d'une quadrique et d'une sphère S ayant son centre dans un des plans de symétrie H de cette quadrique; les centres des autres sphères principales de l'anallagmatique sont les sommets des cônes passant par l'intersection de la quadrique et de la sphère S. Dans le cas considéré, l'un de ces centres étant à l'infini, la sphère, la quadrique et le plan fixe correspondant se confondent tous les trois avec le plan de symétrie H; la proposition fondamentale ne peut donc plus s'appliquer, et il est nécessaire d'étudier directement ce cas spécial.

Mais avant d'aborder cette étude, je dois encore faire une remarque sur un cas singulier qui semble présenter quelque intérêt.

24. Les normales à une surface anallagmatique ayant trois plans de symétrie peuvent être considérées comme le lieu des diverses droites qui joignent les points de deux quadriques homofocales pour lesquels les plans tangents sont parallèles.

Considérons maintenant deux quadriques homofocales, et soit H un de leurs plans de symétrie; prenons une droite quelconque E située dans ce plan, et menons par cette droite des plans tangents à ces deux surfaces; les droites qui joignent les points de contact situés sur l'une des surfaces aux points de contact situés sur l'autre sont toutes normales à une même série de surfaces parallèles pour lesquelles on saura même déterminer les lignes de courbure.

Dans le cas général (celui où le plan H n'est pas un plan de symétrie), on sait que, parmi ces surfaces parallèles, se trouve une anallagmatique; dans le cas singulier que je considère, cette anallagmatique est rejetée à l'infini.

Je remarque, en effet, que le lieu des pôles du plan H, par rapport aux quadriques homofocales aux quadriques données, est l'axe Oz perpendiculaire au plan de symétrie H; les points de contact des plans menés par E aux deux quadriques sont situés sur un cercle dont le plan est perpendiculaire à E, et, par conséquent, parallèle au plan mené par Oz, perpendiculairement à cette droite. Il en résulte, d'après la construction donnée dans le n° 16, que tous les points de l'anallagmatique sont rejetés à l'infini.

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES

DE LA

THÉORIE DES SURFACES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1872.

1.

Les beaux travaux de MM. Bonnet, Bour et Codazzi ont notablement perfectionné la théorie des surfaces ; les formules fondamentales de cette théorie me paraissent pouvoir être exposées d'une façon assez simple....

Je suppose les différents points de la figure rapportés à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et les coordonnées des points de la surface exprimées en fonction de deux variables indépendantes u et v.

Soient (u) et (v) les courbes de la surface obtenues en donnant respectivement à u et à v des valeurs constantes.

Imaginons un trièdre trirectangle MX, MY, MZ, qui se déplace de façon que son sommet M décrive la surface, l'arête MZ lui étant normale ; les deux arêtes MX et MY sont constamment situées dans le plan tangent en M, mais leur mouvement reste indéterminé.

Soient

$$\begin{matrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, \\ \cos\xi, & \cos\eta, & \cos\zeta, \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \end{matrix}$$

les cosinus que font respectivement les axes MX, MY, MZ avec les axes fixes Ox, Oy, Oz.

Si l'on passe d'un point quelconque (u, v) de la surface à un point infiniment voisin $(u + du,\ v + dv)$, d'après une formule bien connue sur le déplacement infiniment petit d'un corps invariable (¹), on a les neuf relations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} d\cos\alpha &= +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\xi + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\lambda,\\ d\cos\xi &= -(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\alpha - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos\lambda,\\ d\cos\lambda &= -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\alpha + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos\xi,\\ d\cos\beta &= +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\upsilon + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\mu,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Je n'écris que les quatre premières de ces relations, les autres s'en déduisant immédiatement; M, N, P, Q, R et S désignent six fonctions données de u et de v.

II.

Comme les développements qui suivent s'appuient surtout sur les formules données (²) par M. Serret pour les lignes à double courbure, je transcrirai ici ces formules.

Soient

$$\begin{array}{lll} \cos a, & \cos b, & \cos c,\\ \cos x, & \cos y, & \cos z,\\ \cos l, & \cos m, & \cos n \end{array}$$

les cosinus des angles que font respectivement, avec les axes fixes Ox, Oy et Oz, la tangente à la courbe, la normale principale et l'axe du plan osculateur.

Désignons de plus par ds un élément infiniment petit de la courbe, par r le rayon de courbure et par t le rayon de torsion en ce point.

Les formules de M. Serret sont contenues dans le Tableau sui-

(¹) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. VI, la Note de M. Picart : *Nouvelle théorie du déplacement continu d'un corps solide*, p. 160.

(²) Voir *Calcul différentiel* de Lacroix, t. II, p. 284 et 299.

vant :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &d\cos a = \cos x\,\frac{ds}{r}, \qquad d\cos l = \cos x\,\frac{ds}{t},\\ &d\cos b = \cos y\,\frac{ds}{r}, \qquad d\cos m = \cos y\,\frac{ds}{t},\\ &d\cos c = \cos z\,\frac{ds}{r}, \qquad d\cos n = \cos z\,\frac{ds}{t};\\ &d\cos x = -\cos a\,\frac{ds}{r} - \cos l\,\frac{ds}{t},\\ &d\cos y = -\cos b\,\frac{ds}{r} - \cos m\,\frac{ds}{t},\\ &d\cos z = -\cos c\,\frac{ds}{r} - \cos n\,\frac{ds}{t}. \end{aligned}\right.$$

Elles sont, on le voit facilement, contenues dans les formules générales (1).

Je suppose maintenant, en conservant toutes les notations précédentes, que la ligne considérée soit tracée sur la surface donnée.

La droite MZ étant normale à la surface, en désignant par i l'angle que fait la courbe avec l'axe MX, et par ϖ l'angle que fait la normale principale de la courbe avec la normale à la surface, les formules d'Euler donnent le système de formules suivant :

$$\begin{aligned} &\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma = \cos i,\\ &\cos a\cos\xi + \cos b\cos\upsilon + \cos c\cos\zeta = \sin i,\\ &\cos a\cos\lambda + \cos b\cos\mu + \cos c\cos\nu = 0;\\ &\cos x\cos\alpha + \cos y\cos\beta + \cos z\cos\gamma = \sin\varpi\sin i,\\ &\cos x\cos\xi + \cos y\cos\upsilon + \cos z\cos\zeta = -\sin\varpi\cos i,\\ &\cos x\cos\lambda + \cos y\cos\mu + \cos z\cos\nu = \cos\varpi;\\ &\cos l\cos\alpha + \cos m\cos\beta + \cos n\cos\gamma = -\cos\varpi\sin i,\\ &\cos l\cos\xi + \cos m\cos\upsilon + \cos n\cos\zeta = \cos\varpi\cos i,\\ &\cos l\cos\lambda + \cos m\cos\mu + \cos n\cos\nu = \sin\varpi. \end{aligned}$$

Si maintenant nous différentions ces neuf équations en tenant compte des relations (1) et (2), nous obtiendrons, après quelques réductions faciles, le Tableau suivant :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{ds}{r}\sin\varpi = di + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv,\\ &\frac{ds}{r}\cos\varpi = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\sin i,\\ &-d\varpi + \frac{ds}{t} = -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\sin i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos i \end{aligned}\right.$$

qui donne les trois premières équations fondamentales de la théorie des courbes tracées sur les surfaces.

Les quantités $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, ... étant, par leur définition même, des différentielles exactes, en exprimant que cette condition est remplie, on obtiendra les trois relations contenues dans le Tableau suivant :

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{M}}{dv}-\frac{d\mathrm{N}}{du}&=\mathrm{RS}-\mathrm{PQ},\\ \frac{d\mathrm{P}}{dv}-\frac{d\mathrm{S}}{du}&=\mathrm{MQ}-\mathrm{RN},\\ \frac{d\mathrm{R}}{dv}-\frac{d\mathrm{Q}}{du}&=\mathrm{NP}-\mathrm{MS}.\end{aligned}\right.$$

III.

Supposons maintenant que les courbes (u) et (v) déterminent sur la surface un réseau orthogonal, et que les axes $M\mathrm{X}$ et $M\mathrm{Y}$ soient, en chaque point, tangents aux deux courbes qui s'y croisent à angle droit.

En désignant par ds un élément linéaire quelconque de la surface, soit

$$ds^2=\mathrm{E}^2du^2+\mathrm{G}^2dv^2,$$

d'où

$$ds\cos i=\mathrm{E}\,du,\qquad ds\sin i=\mathrm{G}\,dv,$$

et

$$\begin{aligned} ds\cos a&=\mathrm{E}\,du\cos\alpha+\mathrm{G}\,dv\cos\xi,\\ ds\cos b&=\mathrm{E}\,du\cos\beta+\mathrm{G}\,dv\cos\upsilon,\\ ds\cos c&=\mathrm{E}\,du\cos\gamma+\mathrm{G}\,dv\cos\zeta.\end{aligned}$$

Je remarque, avec M. Bonnet [1], que par définition ces trois dernières quantités sont des différentielles exactes; exprimant ces conditions, en tenant compte des équations (1), nous obtiendrons les relations contenues dans le Tableau suivant :

$$(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{E}}{dv}=-\mathrm{GM},\qquad \mathrm{ES}+\mathrm{GR}=0,\\ &\frac{d\mathrm{G}}{du}=\mathrm{EN},\qquad \tan i=\frac{\mathrm{G}\,dv}{\mathrm{E}\,du}.\end{aligned}\right.$$

(1) *Mémoire sur la théorie des surfaces*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, XLIIe cahier, p. 35).

J'ai introduit dans ce Tableau la valeur de $\operatorname{tang} i$, en fonction de u et de v.

On a ainsi, en A, B, C, toutes les formules fondamentales relatives au cas où les courbes (u) et (v) sont orthogonales.

Il resterait à prouver que, si les fonctions M, N, P, Q, R, S, E, G satisfont aux équations aux différences partielles contenues dans les Tableaux (B) et (C), ces fonctions déterminent effectivement une surface; pour cette démonstration, je renverrai au Mémoire de M. Bonnet, déjà cité.

IV.

Considérons maintenant le cas général; soit 2ω l'angle sous lequel, en un point quelconque de la surface, se coupent les courbes (u) et (v) qui se croisent en ce point.

Nous choisirons les axes $M\mathrm{X}$ et $M\mathrm{Y}$, de telle sorte qu'ils coïncident avec les bissectrices de cet angle.

En désignant par ds un élément linéaire quelconque de la surface, posons

$$ds^2=\mathrm{E}^2du^2+2\mathrm{EG}\cos 2\omega.du\,dv+\mathrm{G}^2dv^2,$$

d'où

$$ds\cos i=(\mathrm{E}\,du+\mathrm{G}\,dv)\cos\omega,\qquad ds\sin i=(\mathrm{E}\,du-\mathrm{G}\,dv)\sin\omega,$$

et

$$ds\cos a=(\mathrm{E}\,du+\mathrm{G}\,dv)\cos\omega\cos\alpha+(\mathrm{E}\,du-\mathrm{G}\,dv)\sin\omega\cos\xi;$$

je ne transcris pas les valeurs de $ds\cos b$ et $ds\cos c$.

Si nous exprimons que ces trois dernières quantités sont des différentielles exactes, nous obtiendrons les relations contenues dans le Tableau suivant, où j'ai transcrit la valeur de $\operatorname{tang} i$,

$$(\mathrm{C}')\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\mathrm{E}}{dv}-\frac{d\mathrm{G}}{du}\right)\frac{1}{\operatorname{tang}\omega}&=\mathrm{E}\left(\mathrm{N}+\frac{d\omega}{dv}\right)+\mathrm{G}\left(\mathrm{M}-\frac{d\omega}{du}\right),\\ \left(\frac{d\mathrm{E}}{dv}+\frac{d\mathrm{G}}{du}\right)\operatorname{tang}\omega&=-\mathrm{E}\left(\mathrm{N}+\frac{d\omega}{dv}\right)+\mathrm{G}\left(\mathrm{M}-\frac{d\omega}{du}\right),\\ (\mathrm{GR}+\mathrm{EQ})\sin\omega&=(\mathrm{ES}-\mathrm{GP})\cos\omega,\\ \operatorname{tang} i&=\frac{\mathrm{E}\,du-\mathrm{G}\,dv}{\mathrm{E}\,du+\mathrm{G}\,dv}\operatorname{tang}\omega.\end{aligned}\right.$$

Les Tableaux (A), (B), (C′) renferment toutes les formules fondamentales relatives au cas le plus général.

En terminant, je ferai remarquer que les considérations précédentes s'appliquent, sans modification, au cas de l'espace, lorsqu'on en détermine les points par les intersections successives de trois séries quelconques de surfaces.

Je reviendrai sur ce sujet.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES SECTIONS CONIQUES

QUI SE RATTACHENT

A L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION D'EULER.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1872.

1. Tous les géomètres connaissent, depuis les découvertes de Poncelet et de Jacobi, les liens étroits qui rattachent entre elles la théorie des fonctions elliptiques et les propriétés des polygones qui sont à la fois inscrits dans une section conique et circonscrits à une autre conique.

Bien que cette question soit maintenant parfaitement connue, je crois cependant, pour les lecteurs des *Nouvelles Annales*, devoir la développer dans tous ses détails.

2. Étant donnée une conique dont l'équation soit

$$f(x, y) = 0,$$

j'appelle *puissance* d'un point par rapport à cette conique la valeur que prend le polynome $f(x, y)$, quand on substitue à x et à y les valeurs des coordonnées de ce point; et je m'appuierai principalement sur les deux lemmes suivants, dont le premier est une conséquence immédiate d'un théorème bien connu de Newton, sur les transversales des courbes algébriques.

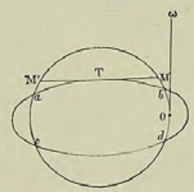
Lemme I. — *Soient* M *et* M′ *deux points situés dans le plan d'une conique, et* α, β *les deux points où la droite* MM′ *coupe la conique; cela posé, les puissances des points* M *et* M′, *relativement à cette courbe, sont proportionnelles aux produits*

$$M\alpha . M\beta \quad \text{et} \quad M'\alpha . M'\beta.$$

Lemme II. — *Soient* M *et* M′ *deux points situés dans le plan d'une conique; si, par ces deux points, on mène un cercle quelconque qui coupe la conique en a, b, c, d, les puissances des points* M *et* M′, *par rapport à la conique, sont proportionnelles aux produits*

$$\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}c.\mathrm{M}d \quad \text{et} \quad \mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d \text{ (1)}.$$

3. Cela posé, considérons un cercle et une conique se coupant aux points a, b, c et d. Imaginons une tangente mobile qui roule



sur la conique; soit T le point où elle touche cette conique, et M, M′ les deux points où elle coupe le cercle.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, le rayon du cercle pris pour unité, et nous fixerons la position de chaque point du cercle par l'angle que fait la droite, joignant le point donné à un point fixe O pris sur le cercle, avec la tangente Oω menée au cercle en ce point.

La tangente mobile occupant une certaine position, déplaçons-la infiniment peu; φ et φ' désignant les angles qui fixent les positions des points M et M′,

$$2d\varphi \quad \text{et} \quad 2d\varphi'$$

mesureront les arcs décrits par ces points, et l'on aura évidemment

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{MT}} = \frac{d\varphi'}{\mathrm{M'T}}.$$

(1) Voir, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1865, ma Note *Sur les propriétés générales des courbes algébriques*, et, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX, p. 188, une Note de M. Grant intitulée : *Démonstration d'un théorème de Géométrie.*

Désignons, pour un instant, par

$$\pi(\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad \pi(\mathrm{M}')$$

les puissances des points M et M′ relativement à la conique; on a, en vertu du lemme I,

$$\frac{\pi(\mathrm{M})}{\pi(\mathrm{M}')} = \frac{\overline{\mathrm{MT}}^2}{\overline{\mathrm{M'T}}^2};$$

d'autre part, en vertu du lemme II,

$$\frac{\pi(\mathrm{M})}{\pi(\mathrm{M}')} = \frac{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}c.\mathrm{M}d}{\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{M'T}} = \frac{\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}c.\mathrm{M}d}}{\sqrt{\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d}},$$

et, par conséquent,

$$\text{(1)} \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}c.\mathrm{M}d}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d}}.$$

4. Désignons par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

les angles qui fixent les positions des points a, b, c, d sur le cercle; nous aurons

$$\mathrm{M}a = 2\sin(\varphi - \alpha), \qquad \mathrm{M}'a = 2\sin(\varphi' - \alpha), \qquad \ldots;$$

et l'équation précédente deviendra, en développant et divisant par $\cos^2\varphi$,

$$\frac{d\tan\!g\,\varphi}{\sqrt{(\tan\!g\,\varphi - \tan\!g\,\alpha)(\tan\!g\,\varphi - \tan\!g\,\beta)(\tan\!g\,\varphi - \tan\!g\,\gamma)(\tan\!g\,\varphi - \tan\!g\,\delta)}}$$
$$= \frac{d\tan\!g\,\varphi'}{\sqrt{(\tan\!g\,\varphi' - \tan\!g\,\alpha)(\tan\!g\,\varphi' - \tan\!g\,\beta)(\tan\!g\,\varphi' - \tan\!g\,\gamma)(\tan\!g\,\varphi' - \tan\!g\,\delta)}};$$

ou encore, en posant pour abréger

$$\tan\!g\,\varphi = x, \qquad \tan\!g\,\varphi' = y, \qquad \tan\!g\,\alpha = \mathrm{A}, \qquad \tan\!g\,\beta = \mathrm{B}, \qquad \ldots,$$

$$\text{(1)}' \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{\sqrt{(x-\mathrm{A})(x-\mathrm{B})(x-\mathrm{C})(x-\mathrm{D})}} \\ &\quad = \frac{dy}{\sqrt{(y-\mathrm{A})(y-\mathrm{B})(y-\mathrm{C})(y-\mathrm{D})}}; \end{aligned} \right.$$

c'est l'équation différentielle dont l'étude sert de base à la théorie des fonctions elliptiques, et qui a été intégrée pour la première fois par Euler.

5. Les considérations géométriques qui précèdent donnent immédiatement cette intégrale. On satisfait évidemment, en effet, à l'équation précédente [ou à l'équation (1)], si l'on suppose que les angles φ et φ' correspondent à deux points M et M', tels que la corde MM' enveloppe une conique passant par les points a, b, c et d; comme l'équation des coniques qui passent par ces points renferme une constante arbitraire, on voit que l'on a l'intégrale générale de l'équation.

Considérons trois points quelconques a, b, c communs au cercle et à la conique; on sait que, MT désignant une tangente quelconque à cette conique, et (a), (b), (c) désignant les distances à cette droite des points a, b, c, on a, quelle que soit la tangente, la relation

$$\lambda\sqrt{(a)}+\mu\sqrt{(b)}+\nu\sqrt{(c)}=0,$$

où λ, μ, ν désignent des quantités constantes pour la même conique, mais qui renferment une quantité arbitraire, si l'on considère toutes les coniques qui passent par les points a, b, c et d.

Joignons aux points M et M' les points a, b et c; les aires des triangles $\mathrm{M}a\mathrm{M}'$, $\mathrm{M}b\mathrm{M}'$, $\mathrm{M}c\mathrm{M}'$, ayant même base, sont entre elles comme leurs hauteurs

$$a),\quad (b),\quad (c);$$

les aires de ces triangles, dont les angles aux sommets sont égaux, sont entre elles comme les produits

$$a\mathrm{M}.a\mathrm{M}',\quad b\mathrm{M}.b\mathrm{M}',\quad c\mathrm{M}.c\mathrm{M}';$$

on a donc

$$\frac{(a)}{a\mathrm{M}.a\mathrm{M}'}=\frac{(b)}{b\mathrm{M}.b\mathrm{M}'}=\frac{(c)}{c\mathrm{M}.c\mathrm{M}'}.$$

D'où

$$\lambda\sqrt{a\mathrm{M}.a\mathrm{M}'}+\mu\sqrt{b\mathrm{M}.b\mathrm{M}'}+\nu\sqrt{c\mathrm{M}.c\mathrm{M}'}=0,$$

et nous avons là l'intégrale générale des équations (1) et (1').

En introduisant les angles φ, φ', α, ..., ou plutôt leurs tangentes y, x, A, ..., elle prendra la forme connue [1]

$$\lambda\sqrt{(y-\mathrm{A})(x-\mathrm{A})}+\mu\sqrt{(y-\mathrm{B})(x-\mathrm{B})}+\nu\sqrt{(y-\mathrm{C})(x-\mathrm{C})}=0.$$

6. La forme précédente de l'intégrale, bien qu'élégante, a le défaut de ne pas mettre en évidence la constante arbitraire qui y entre et de ne pas contenir symétriquement les quantités A, B, C, D.

Pour trouver une autre forme de l'intégrale, je prendrai pour point de départ la proposition suivante :

Théorème. — *Soit une conique passant par quatre points a, b, c et d d'un cercle; une tangente mobile roule sur cette conique. Si l'on désigne par* M *et* M' *les deux points où, dans une de ses positions, cette tangente coupe le cercle, et si l'on partage d'une façon quelconque en deux groupes a et b, c et d, les quatre points communs au cercle et à la conique, le rapport*

$$\frac{\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d}-\sqrt{\mathrm{M}c.\mathrm{M}d.\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b}}{\mathrm{MM}'}$$

reste constant, lorsque la tangente se déplace tangentiellement à la conique.

Il résulte de là que, K désignant une constante arbitraire, l'intégrale de l'équation d'Euler est

$$\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d}-\sqrt{\mathrm{M}c.\mathrm{M}d.\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b}=\mathrm{K}.\mathrm{MM}',$$

ou encore, en introduisant les quantités x, y, A, B, ...,

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x-\mathrm{A})(x-\mathrm{B})(y-\mathrm{C})(y-\mathrm{D})}\\&\quad-\sqrt{(y-\mathrm{A})(y-\mathrm{B})(x-\mathrm{C})(x-\mathrm{D})}=\mathrm{K}(x-y).\end{aligned}$$

7. Le résultat précédent, qui est peut-être nouveau, peut se mettre sous la forme suivante :

Étant donnée l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

[1] Darboux, *Recherches sur les surfaces orthogonales* (*Annales scientifiques de l'École Normale*, t. II).

où $f(x)$ représente un polynome du quatrième degré en x, si l'on décompose d'une manière arbitraire le polynome $f(x)$ en deux facteurs du second degré, en posant

$$f(x) = \theta(x)\varphi(x),$$

l'intégrale générale de cette équation est

$$\frac{\sqrt{\theta(x)\varphi(y)} - \sqrt{\theta(y)\varphi(x)}}{x-y} = \mathrm{K},$$

K *désignant une constante arbitraire.*

SUR LA SURFACE DE STEINER.

Bulletin de la Société philomathique; 1872.

Les lignes asymptotiques de la surface de Steiner ont été données par M. Clebsch; on en déduit facilement les lignes asymptotiques de la surface de troisième ordre à quatre points nodaux qui en est la réciproque.

En étudiant récemment cette dernière surface, j'en ai retrouvé les lignes asymptotiques sous une forme qui paraîtra peut-être présenter quelque intérêt, même après les recherches dont je viens de parler.

Soit M un point quelconque de la cubique à quatre points nodaux; d'après la propriété fondamentale de cette surface, le cône circonscrit à la surface, qui a pour sommet le point M, se décompose en deux cônes du second degré dont chacun touche la surface suivant une cubique gauche.

Cela posé, les deux surfaces développables, qui ont ces cubiques pour arêtes de rebroussement, coupent la surface suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point M.

Soit tracée sur la surface une ligne asymptotique quelconque Z; de chacun des points de cette courbe on peut mener deux cônes du second degré circonscrits à la surface. La cubique gauche, qui est la courbe de contact d'un de ces cônes, est l'arête de rebroussement d'une surface développable passant par Z.

Je dirai que cette cubique appartient à l'asymptotique Z. Toutes les cubiques qui appartiennent à Z passent par les quatre points nodaux; les cônes circonscrits à la surface suivant ces courbes ont leurs sommets sur Z; les surfaces développables dont elles sont les arêtes de rebroussement contiennent cette courbe.

Deux quelconques d'entre elles, indépendamment des quatre points nodaux, se coupent en un cinquième point qui est le sommet d'un cône du second degré passant par ces deux cubiques.

SUR LA

REPRÉSENTATION DES FORMES BINAIRES

DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE.

Bulletin de la Société philomathique; 1872.

On peut représenter une forme binaire sur une ligne droite par n points de cette droite correspondant aux racines de l'équation que l'on obtient en égalant la forme à zéro. On peut dans ce but employer aussi une courbe quelconque, plane ou gauche, de genre zéro, et un grand nombre de propriétés du système de points situés sur cette courbe, que j'appellerai courbe fondamentale, se déduiront immédiatement de celles des formes qu'ils représentent.

La courbe fondamentale étant choisie, on pourra aussi d'une façon plus simple représenter des groupes de points (ou des formes) par un certain nombre d'éléments (points ou droites) qui pourront les déterminer; ce mode de représentation variera d'ailleurs suivant la nature de la courbe choisie.

Étant données deux formes du même degré f et φ, j'appellerai, pour abréger, *faisceau de ces formes* l'ensemble des formes comprises dans l'expression $f + \lambda\varphi$; un faisceau est évidemment déterminé quand on connaît deux des formes qu'il contient.

Pour éclaircir ceci par un exemple, prenons une conique H pour courbe fondamentale; une forme quadrique sera déterminée par deux points de cette conique, ou bien, si l'on veut, par la droite qui joint ces deux points. C'est ce dernier mode de représentation que nous emploierons (*voir* à ce sujet un remarquable article de M. Weyr, *sur l'involution de degré supérieur*, Crelle, t. 72). Cela posé, on voit que toutes les formes quadratiques d'un faisceau sont représentées par des droites concourant en un même point, qui représentera ce faisceau. D'où l'on déduit immédiatement que la propriété connue de l'hexagone de Pascal peut s'énoncer algébriquement de la façon suivante :

Étant donnée une équation du sixième degré $f(x) = 0$ *dont les racines soient* α_i, *si l'on pose pour abréger*

$$\Lambda_{kh} = (x - \alpha_k)(x - \alpha_k),$$

on pourra déterminer six facteurs numériques λ, μ, λ', μ', λ'' *et* μ'' *de telle sorte que l'on ait identiquement*

$$\lambda \Lambda_{12} + \mu \Lambda_{45} = \lambda' \Lambda_{23} + \mu' \Lambda_{56} = \lambda'' \Lambda_{34} + \mu'' \Lambda_{16}.$$

Cette propriété de six points d'une droite appliquée à une conique donne le théorème de Pascal ; appliquée à une cubique, elle fournit à la fois des propriétés de six points quelconques de cette courbe (et par conséquent de six points quelconques de l'espace) et des propriétés de sept points quelconques situés sur cette cubique.

Dans ce qui suit, je considérerai spécialement une cubique gauche fondamentale K. Une forme quadratiqne sera déterminée par deux points de cette courbe et représentée par la sécante qui joint ces deux points. Les droites représentatives d'un faisceau de formes quadratiques sont les génératrices (sécantes de la cubique) d'une quadrique passant par K ; une telle surface représentera donc un faisceau de formes quadratiques.

Cela posé, la propriété que je viens d'énoncer relativement aux racines de l'équation du sixième degré donnera immédiatement la proposition suivante :

Étant pris sept points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sur K, il y existe une droite D (sécante de la cubique) qui rencontre les neuf droites contenues dans les deux tableaux suivants :

E.......	3	(12)	(54)	1	(23)	(56)	2	(34)	(16)
	6	(12)	(54)	4	(23)	(56)	5	(34)	(16)
F.......	7	(12)	(54)	7	(23)	(56)	7	(34)	(16)

La droite D rencontre donc les six droites contenues dans le tableau E, ce qui fournit une propriété de six points quelconques

de l'espace (cette propriété se rattache d'ailleurs à de belles propositions données par M. P. Serret sur les cubiques gauches).

Le tableau F montre en outre que la droite D ayant été déterminée au moyen des points 1, 2, 3, 4, 5 et 6, tout plan sécant mené par D rencontre les côtés de l'hexagone, dont ils sont les sommets, en six points situés deux à deux sur trois droites concourantes.

Le point de concours décrit, lorsqu'on fait varier le plan, la cubique gauche déterminée par les six points.

Dans ce qui précède, 3 (12) (54) désigne la droite qui, passant par le point 3, rencontre les droites 12 et 54 ; les autres notations ont une signification analogue.

On peut énoncer ces résultats de la façon suivante :

« Un hexagone étant inscrit dans une cubique, par la courbe et chaque couple de côtés opposés de l'hexagone on peut faire passer une quadrique ; les trois quadriques ainsi obtenues ont une génératrice commune qui est une sécante de la cubique. »

Une forme cubique est déterminée par trois points de K ; les plans osculateurs de la courbe en ces points passent par un point p situé, comme on le sait, par un beau théorème de M. Chasles, dans le plan P qui contient les trois points. Je dirai que le point p et le plan P sont associés ; si le point p parcourt une droite, le plan P tourne autour d'une autre droite qui est associée à la première. Je représenterai une forme cubique par le point associé au plan qui contient les trois points de K qui la déterminent.

Une forme cubique représentée par un point p est déterminée par les trois points de contact a, b, c des plans osculateurs que l'on peut mener de ce point à la courbe. Si l'on prend les conjugués harmoniques de chacun des points a, b, c par rapport aux deux autres, on obtient un autre système de trois points qui détermine le covariant cubique de la forme ; les plans osculateurs en ces points se coupent en un point p' représentatif du covariant.

Cela posé, les deux points p et p' sont situés sur une même sécante de la cubique et partagent harmoniquement le segment intercepté par la courbe sur cette sécante. Je dirai que les deux points se correspondent par rapport à la cubique.

Le faisceau de la forme représenté par le point p est représenté par la sécante qui passe par ce point.

J'ajouterai la remarque suivante :

« Le plan polaire d'un point donné relativement à la surface développable S, dont K est l'arête de rebroussement, est le plan associé au point correspondant. »

Étant données deux formes cubiques représentées par les points p et q, les différentes formes contenues dans le faisceau qu'elles déterminent sont représentées par les différents points de la droite pq. Une droite dans l'espace représentera donc un faisceau de formes cubiques.

Si une droite rencontre une génératrice de S, leur point de rencontre représente une forme cubique ayant un facteur carré. D'où cette conséquence :

« Une droite (représentant un faisceau) rencontre quatre génératrices de S ; les quatre points où ces droites touchent K représentent le Jacobien du réseau. »

Étant donnée une forme biquadratique F représentée par quatre points de K, menons les tangentes en ces points. Ces quatre droites n'étant jamais sur une même quadrique, il n'y a que deux droites D et D′ qui les rencontrent toutes.

Donc F est le Jacobien des deux faisceaux de formes cubiques, lesquels sont représentés par les droites D et D′.

Ces deux droites sont associées par rapport à la cubique. Je représenterai la forme F par ces deux droites ou simplement par l'une d'entre elles, puisque par là même l'autre sera déterminée.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR LA

SURFACE RÉCIPROQUE DE LA SURFACE DE STEINER.

Nouvelles Annales de Mathématiques ; 1872 et 1873.

I. — *Détermination des lignes asymptotiques de la surface* (¹).

1. La théorie de cette surface se rattache intimement, comme je me propose de le faire voir dans cette Note, à la théorie des formes biquadratiques simultanées.

Soient a, b, c, d et e cinq fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes x, y et z ; nous pouvons considérer les valeurs que prennent ces fonctions en un point de l'espace comme les coordonnées (pentaédriques) de ce point ; il est clair d'ailleurs qu'entre ces coordonnées d'un point existe une relation linéaire, satisfaite identiquement, et que je mettrai sous la forme

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0, \tag{1}$$

α, β, γ, δ et ε désignant les constantes numériques que je rattacherai au polynome du quatrième degré

$$\omega = \alpha t^4 + 4\beta t^3 + 6\gamma t^2 + 4\delta t + \varepsilon ;$$

en posant

$$u = a t^4 + 4 b t^3 + 6 c t^2 + 4 d t + e,$$

(¹) Les lignes asymptotiques de la surface de Steiner (qui sont réciproques des lignes que nous étudions ici) ont été trouvées pour la première fois par M. Clebsch (*Journal de Borchardt*, t. LXVIII, p. 1).

Sur la relation qui a lieu entre les lignes asymptotiques d'une surface et celles de la réciproque, *voir* une Note de M. Mannheim (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. I, p. 198).

on voit que la relation précédente exprime que l'invariant quadratique simultané des formes u et ω est égal à zéro.

2. L'équation $u = 0$ (1), si l'on y considère t comme un paramètre variable, représente un plan mobile qui enveloppe une surface du sixième ordre, dont l'équation est

$$i^3 - 27 j^2 = 0, \tag{2}$$

si l'on représente respectivement par i et j l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme u. Les équations de son arête de rebroussement sont

$$i = 0 \quad \text{et} \quad j = 0.$$

La surface que je me propose d'étudier est la surface du troisième ordre $\mathcal{K}$, dont l'équation est

$$j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on désigne par $\mathcal{S}$ la surface du second ordre (ou quadrique) représentée par l'équation

$$i = ae - 4bd + 3c^2 = 0,$$

on voit, en considérant l'équation (2), que la surface développable dont j'ai parlé plus haut touche $\mathcal{K}$ tout le long de l'intersection de cette surface avec $\mathcal{S}$, c'est-à-dire tout le long de son arête de rebroussement.

D'où la conséquence suivante :

La cubique $\mathcal{K}$ est coupée par la quadrique $\mathcal{S}$ suivant une de ses lignes asymptotiques.

3. Il est facile de voir qu'en réalité les considérations précédentes nous conduisent à la détermination complète des lignes asymptotiques de $\mathcal{K}$.

(1) Voir Cayley : *On a certain sextic developpable* (*Quarterly Journal*, t. IX); *Note sur quelques tores sextiques* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. II).

Considérons le système linéaire numérique

$$\begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r', \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix}$$

dont, pour plus de simplicité, je supposerai le déterminant égal à l'unité, et le système composé suivant

$$\begin{matrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{matrix} \times \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{matrix} \times \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix} = \begin{matrix} a' & b' & c' \\ b' & c'' & d'. \\ c' & d' & c' \end{matrix}$$

Si l'on choisit les nombres $p, q, r, \ldots$ de telle sorte que l'on ait $c'' = c'$, il est clair que l'on aura

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & d' \\ c' & d' & e' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

et l'équation de $\mathcal{K}$ s'obtiendra en égalant à zéro l'une ou l'autre de ces deux expressions; mais l'on n'aura pas en général

$$a'e' - 4b'd' + 3c'^2 = ae - 4bd + 3c^2,$$

c'est-à-dire

$$i' = i.$$

L'équation $i' = 0$ représentera donc une nouvelle quadrique coupant $\mathcal{K}$ suivant une de ses lignes asymptotiques, et la question qui s'offre à nous est la suivante :

Les nombres $p, q, r, \ldots$ étant choisis de telle sorte que la relation $c'' = c'$ soit satisfaite, trouver les différentes valeurs que peut prendre l'expression

$$i' = a'e' - 4b'd' + 3c'^2.$$

4. J'emploierai dans la suite de ce Chapitre les notations dont je me suis servi dans mon Mémoire sur le calcul des systèmes linéaires (1); une grande lettre représentera un système linéaire,

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXV.

Pour éclaircir ces notations par quelques exemples, soit

$$\Lambda = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix}$$

la même lettre affectée de l'indice zéro ou de l'indice 1 le système réciproque ou le système inverse, et la caractéristique Δ la valeur du déterminant du système linéaire qu'elle précède.

Cela posé, en calculant les quantités c'' et c', on trouve que, pour qu'elles soient égales, on doit avoir la relation

$$(3)\quad \begin{cases} pra + (pr' + rp')b + (pr'' + rp'' + r'p')c + (p'r'' + r'p'')d + p''r''e \\ \quad = q^2 a + 2qq'b + (2qq'' + q'^2)c + 2q'q''d + q''^2 e; \end{cases}$$

cette relation doit être identique et elle ne peut différer que dans la forme de la relation (1). On en déduit, ρ désignant une certaine quantité numérique, la série d'égalités

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} &= \frac{pr - q^2}{\varepsilon} = \frac{pr' + rp' - 2qq'}{-4\delta} = \frac{pr'' + rp'' + p'r' - 2qq'' - q'^2}{6\gamma} \\ &= \frac{p'r'' + r'p'' - 2q'q''}{-4\beta} = \frac{p''r'' - q''^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\mathrm{I} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad A = \begin{matrix} \varepsilon & -2\delta & \gamma \\ -2\delta & 4\gamma & -2\beta \\ \gamma & -2\beta & \alpha \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H} = \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix},$$

on déduit facilement des égalités précédentes l'équation

$$(4)\qquad \mathrm{HIH}_1 = \rho A + \theta \mathrm{I},$$

θ désignant une autre quantité numérique dont il est inutile d'écrire la valeur.

Réciproquement, si le système H est choisi de telle manière que le produit HIH_1 soit de la forme $\rho A + \theta \mathrm{I}$, ρ et θ désignant des constantes (*systèmes simples*), les relations (3) sont satis-

et a la valeur du déterminant de ce système linéaire; on aura

$$\mathrm{A}_1 = \begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_0 = \begin{matrix} \dfrac{da}{d\alpha} & \dfrac{da}{d\alpha'} & \dfrac{da}{d\alpha''} \\ \dfrac{da}{d\beta} & \dfrac{da}{d\beta'} & \dfrac{da}{d\beta''} \\ \dfrac{da}{d\gamma} & \dfrac{da}{d\gamma'} & \dfrac{da}{d\gamma''} \end{matrix};$$

d'où, par suite,

$$\mathrm{A}_0 \mathrm{A} = a = \Delta(\mathrm{A}).$$

faites; et si nous faisons

$$\mathrm{A} = \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{matrix},$$

et posons

$$\mathrm{H}_1 \mathrm{AH} = \mathrm{A}',$$

on voit que les systèmes A' et A sont de la même forme.

La recherche des systèmes de transformation que nous devons employer est donc ramenée à la résolution de l'équation (4), où A et I désignent des systèmes donnés et où l'un des nombres ρ et θ peut être choisi arbitrairement.

Ces deux nombres sont reliés entre eux par une relation que l'on établira facilement en égalant les déterminants des deux membres de l'équation (4).

On trouve ainsi

$$2 = \Delta(\rho A + \theta \mathrm{I}) = 4 j_0 \rho^3 - 2 i_0 \rho^2 \theta + 2\theta^3,$$

d'où

$$(4')\qquad 2 j_0 \rho^3 - i_0 \rho^2 \theta + \theta^3 = 1.$$

Telle est la relation qui relie les nombres ρ et θ; j_0 et i_0 désignent respectivement l'invariant cubique et l'invariant quadratique de la forme ω.

5. La valeur du déterminant que j'ai transcrite ci-dessus se déduit immédiatement de la formule suivante, facile à vérifier, et dont je me servirai dans ce qui suit,

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta[\mathrm{A}(Ax + \mathrm{I}y) - z] \\ \quad = -z^3 + z(iy^2 + 2hxy + kx^2) + j(4 j_0 x^3 - 2 i_0 x^2 y + 2y^3). \end{cases}$$

Dans cette identité, où x, y, z désignent des quantités arbitraires, j'ai écrit, pour abréger,

$$h = \alpha \frac{dj}{da} + \beta \frac{dj}{db} + \gamma \frac{dj}{dc} + \delta \frac{dj}{dd} + \varepsilon \frac{dj}{de}$$

et

$$-k = 4(ac - b^2)(\gamma\varepsilon - \delta^2) - (ad - bc)(\beta\varepsilon - \gamma\delta) + \dots,$$

k désignant l'invariant quadratique simultané des hessiens de u et de ω.

6. Ayant choisi l'une quelconque des solutions de l'équation (4), où les nombres ρ et θ satisfont à la relation (4)', on en déduira un système A' de même forme que le système A.

Les coordonnées a', b', c', ... qui entrent dans ce nouveau système sont reliées par une identité de la forme

$$a'\varepsilon' - 4b'\delta' + 6c'\gamma' - 4d'\beta' + e'\alpha' = 0,$$

et je me propose d'abord de déterminer la valeur des constantes qui entrent dans cette relation, ou encore le système A' que l'on peut former avec elles et qui est analogue à A.

A cet effet, je remarque que l'on a, d'après l'équation (5),

$$\Delta(\mathrm{A}A - z) = -z^3 + kz + 4jj_0,$$

et que, si le second membre de cette relation ne contient pas de terme en z^2, c'est précisément en vertu de l'identité (1).

Pour trouver A', il faut donc le déterminer par la condition que le développement de l'expression

$$\Delta(\mathrm{A}'A' - z)$$

manque du terme en z^2.

Il suffit pour cela de déterminer deux quantités λ et μ, de telle sorte que l'expression

$$A' = \mathrm{H}_0(\lambda A + \mu \mathrm{I})\mathrm{H}_{01}$$

ait la même forme que A (c'est-à-dire que le terme du milieu soit le quadruple de chacun des termes de la diagonale secondaire du système).

En effet, en remplaçant respectivement A' et A' par leurs valeurs, on a identiquement

$$\Delta(\mathrm{A}'A' - z) = \Delta[\mathrm{H}_1\mathrm{AHH}_0(\lambda A + \mu \mathrm{I})\mathrm{H}_{01} - z] = \Delta[\mathrm{A}(\lambda A + \mu \mathrm{I}) - z],$$

expression dont la valeur, en vertu de la formule (5), manque bien du terme en z^2.

7. Les nombres ρ, θ, λ et μ ayant été déterminés comme je l'ai dit ci-dessus, en désignant par i', h', k', ... les quantités analogues à i, h, k, ..., mais relatives aux systèmes A' et A', la formule (5) donne la relation

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta[\mathrm{A}'(A'x + \mathrm{I}y) - z] = {} & -z^3 + z(i'y^2 + 2h'xy + k'x^2) \\ & + j(4j'_0x^3 - 2i'_0x^2y - 2y^3); \end{aligned}\right.$$

le déterminant qui précède devient, si l'on remplace dans son expression A' et A' par leurs valeurs

$$\Delta\{\mathrm{H}_1\mathrm{AH}[\mathrm{H}_0(\lambda A + \mu\mathrm{I})\mathrm{H}_{01}x + \mathrm{I}y] - z\},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\Delta(\lambda x\mathrm{H}_1\mathrm{A}A\mathrm{H}_{01} + \mu x\mathrm{H}_1\mathrm{AIH}_{01} + y\mathrm{H}_1\mathrm{AHI} - z),$$

ou encore, en multipliant à droite par H_1 le système compris sous le signe Δ et en le divisant ensuite à gauche par H_1,

$$\Delta(\lambda x\mathrm{H}_1\mathrm{A}A + \mu x\mathrm{AI} + y\mathrm{AHIH}_1 - z),$$

ou encore, en vertu de la formule (4),

$$\Delta\{\mathrm{A}[(\lambda x + \rho y)A + (\mu x + \theta y)\mathrm{I}] - z\}.$$

Si l'on développe ce déterminant au moyen de la formule (5), on obtient l'expression

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & -z^3 + z[i(\mu x + \theta y)^2 + 2h(\lambda x + \rho y)(\mu x + \theta y) + k(\lambda x + \rho y)^2 \\ & \quad + j[4j_0(\lambda x + \rho y)^3 - 2i_0(\lambda x + \rho y)^2(\mu x + \theta y) + 2(\mu x + \theta y)^3. \end{aligned}\right.$$

8. Les polynomes (7) et (6) doivent être identiques, quelles que soient les variables x, y, z; en identifiant ces deux expressions, on obtient les relations contenues dans le Tableau suivant :

Tableau A.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & 2j_0\rho^3 - i_0\rho^2\theta + \theta^3 = 1, \\ & 6j_0\lambda\rho^2 - i_0\rho^2\mu - 2i_0\lambda\rho\theta + 3\mu\theta^2 = 0; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 2j'_0 &= 2j_0\lambda^3 - i_0\lambda^2\mu + \mu^3, \\ i'_0 &= i_0\lambda^2\theta + 2i_0\lambda\rho\mu - 6j_0\lambda^2\rho - 3\mu^2\theta; \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} i' &= \theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k, \\ h' &= \mu\theta i + (\lambda\theta + \rho\mu)h + \lambda\rho k, \\ k' &= \mu^2 i + 2\lambda\mu h + \lambda^2 k. \end{aligned}\right.$$

Je laisse momentanément de côté ces relations, sur lesquelles j'aurai à revenir plus tard; je me contenterai de faire observer que la première des équations (3) du Tableau précédent donne la solution de la question principale que je m'étais proposée.

Toutes les quadriques fournies par l'équation

$$i' = \theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k = 0,$$

où le rapport $\frac{\rho}{\theta}$ peut varier d'une façon arbitraire, coupent $\mathcal{K}$ suivant une de ses lignes asymptotiques; et comme par chacun des points de cette surface passent deux de ces quadriques, on obtient ainsi le système complet des asymptotiques cherchées.

II. — *Propriétés des lignes asymptotiques.*

9. Considérons une ligne asymptotique quelconque Z de la surface $\mathcal{K}$; cette ligne est l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan dont l'équation est

$$u = at^4 + 4bt^3\tau + 6ct^2\tau^2 + 4dt\tau^3 + e\tau^4 = 0,$$

$t:\tau$ désignant un paramètre variable.

Lorsqu'on donne à ce paramètre une valeur déterminée, l'équation précédente représente un plan osculateur de Z et tangent à $\mathcal{K}$, que j'appellerai simplement *plan* (t). J'appellerai *tangente* (t) la tangente à Z au point où le plan (t) lui est osculateur; ses équations sont

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{d\tau} = 0.$$

Enfin j'appellerai *point* (t) le point de contact de cette tangente; ses équations sont

$$at^2 + 2bt\tau + c\tau^2 = 0,$$
$$bt^2 + 2ct\tau + d\tau^2 = 0,$$
$$ct^2 + 2dt\tau + e\tau^2 = 0.$$

Je dirai indifféremment que $t:\tau$ (ou t) est le paramètre de ce point, de la tangente en ce point à l'asymptotique et du plan osculateur dont cette tangente est la caractéristique.

Les relations précédentes et l'équation (1) permettent d'exprimer les coordonnées d'un point quelconque de Z en fonction de son paramètre; on obtient ainsi le Tableau suivant :

Tableau B.

$$\begin{aligned}
a &= -4\alpha t^3\tau^3 - 12\beta t^2\tau^4 - 12\gamma t\,\tau^5 - 4\delta\tau^6,\\
b &= 3\alpha t^4\tau^2 + 8\beta t^3\tau^3 + 6\gamma t^2\tau^4 - \varepsilon\tau^6,\\
c &= -2\alpha t^5\tau - 4\beta t^4\tau^2 + 4\delta t^2\tau^4 + 2\varepsilon t\tau^5,\\
d &= \alpha t^6 - 6\gamma t^4\tau^2 - 8\delta t^3\tau^3 - 3\varepsilon t^2\tau^4,\\
e &= 4\beta t^6 + 12\gamma t^5\tau - 12\delta t^4\tau^2 + 4\varepsilon t^3\tau^3.
\end{aligned}$$

10. Étant donné un point M, dont les coordonnées soient a', b', c', d' et e', posons pour un instant

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' & c+\lambda c' \\ b+\lambda b' & c+\lambda c' & d+\lambda d' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' & e+\lambda e' \end{vmatrix} = j + \lambda j_0 + \lambda^3 j' + \lambda^3 j' \ (^1);$$

d'après la méthode donnée par Joachimsthal, on obtient l'équation du cône circonscrit à $\mathcal{K}$ et ayant pour sommet le point M, en égalant à zéro le discriminant de la forme cubique contenue dans le second membre de l'égalité précédente. Si le point M est sur Z, on a

$$j' = 0,$$

et l'équation du cône circonscrit devient

$$j_0^2 - 4jj'_0 = 0.$$

On peut dans cette équation exprimer, en employant les formules du Tableau B, les coordonnées du point M en fonction de son paramètre t, et je ferai remarquer qu'*après la substitution les invariants j_0, j, j'_0 deviendront des covariants des formes u et ω.*

Comme un covariant est déterminé par son terme du degré le plus élevé en t, il me suffira, pour calculer chacun des covariants dont je viens de parler, de supposer a', b' et c' égaux à zéro, et de remplacer respectivement d' et e' par αt^6 et $4\beta t^6$. Il viendra ainsi

$$j_0 = [4\beta(ac - b^2) - 2\alpha(ad - bc)]t^6 + \ldots;$$

(1) Pour éviter toute confusion, je ferai remarquer qu'ici j_0, j'_0, j n'ont pas le même sens que dans le paragraphe précédent.

d'où l'on voit que j_0 est égal à $-2J_0$, J_0 désignant le jacobien de ω et du hessien de u, en sorte que

$$J_0 = [\alpha(ad-bc) - 2\beta(ac-b^2)]t^6 + \ldots.$$

On obtient de même

$$j'_0 = -a\alpha^2 u'^2 + \ldots,$$

d'où

$$j'_0 = -\omega^2 u;$$

par suite, l'équation du cône circonscrit à $\mathcal{K}$ et ayant pour sommet le point (t) est

$$J_0^2 + \omega^2 ju = 0.$$

11. Le coefficient du terme le plus élevé dans le covariant $J_0^2 + \omega^2 ju$ est

$$t'^2 \{ [\alpha(ad-bc) - 2\beta(ac-b^2)]^2 + a\alpha^2(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3) \},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$t'^2(ac-b^2)[\alpha^2(ae-c^2) - 4\alpha\beta(ad-bc) + 4\beta^2(ac-b^2)].$$

Si l'on désigne par H le hessien de u et par G le covariant

$$[\alpha^2(bd-c^2) - \alpha\beta(ad-bc) + \beta^2(\alpha\gamma-\beta^2)]t^8 + \ldots,$$

on voit que l'on a identiquement

$$J_0^2 + \omega^2 ju = H(\omega^2 i + 4G);$$

d'où il suit que le cône circonscrit se décompose en deux cônes du second ordre, *propriété caractéristique de la surface réciproque de la surface de Steiner* (1).

Remarque. — Les deux cônes ainsi obtenus se distinguent très nettement par la forme de leur équation; je dirai que le cône dont l'équation est

$$H = 0$$

appartient à l'asymptotique Z, et je le désignerai par la notation $\mathcal{H}_t$; il est clair que le second cône *appartient* à la deuxième ligne asymptotique qui passe par le point (t).

(1) Sur la surface de Steiner, voir *Borchardt*, t. LXIII : CREMONA, *Sur la surface du quatrième ordre*, etc., p. 315 et suiv. — *Borchardt*, t. LXIV : KUMMER, *Ueber die Flächen des vierten Grades;* WEIERSTRASS, *Note zur vorstehenden Abhandlung;* SCHRÖTER, *Ueber die Steiner'sche Fläche.*

12. Soient (t) et (t') deux points de l'asymptotique Z; considérons le premier émanant de u,

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E} &= t(at'^3 + 3bt'^2\tau' + 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3) \\ &\quad + \tau(bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + e\tau'^3). \end{aligned} \right.$$

L'équation $\mathcal{E} = 0$ représente un plan passant évidemment par la tangente (t'); si, laissant le point (t) fixe, on fait varier le point (t'), ce plan enveloppe une surface du quatrième ordre ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche.

L'équation de cette surface s'obtient en égalant à zéro le discriminant de $\mathcal{E}$ (par rapport à t' et τ'); comme ce discriminant est un covariant de u et de ω, il suffit de calculer son terme du degré le plus élevé qui est

$$[4(ac-b^2)(bd-c^2) - (ad-bc)^2]t^4,$$

ou encore

$$[aj - (ac-b^2)i]t^4.$$

L'équation de la surface développable, que j'appellerai Σ_t, est donc

$$ju - iH = 0.$$

13. Pour tous les points de l'arête de rebroussement de Σ_t, on doit avoir

$$\frac{at+b\tau}{bt+c\tau} = \frac{bt+c\tau}{ct+d\tau} = \frac{ct+d\tau}{dt+e\tau},$$

ou encore

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} (ac-b^2)t^2 + (ad-bc)t\tau + (bd-c^2)\tau^2 &= 0, \\ (ad-bc)t^2 + (ac-c^2)t\tau + (be-dc)\tau^2 &= 0, \\ (bd-c^2)t^2 + (be-cd)t\tau + (ce-d^2)\tau^2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le déterminant de ces trois équations est égal à j^2, ainsi qu'il est facile de le vérifier; comme il est nul par les points de la courbe, il en résulte qu'elle est située sur la surface $\mathcal{K}$.

Elle est également située sur le cône $\mathcal{H}_t$; l'équation de ce cône peut en effet se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &t^2[(ac-b^2)t^2+(ad-bc)t\tau+(bd-c^2)\tau^2] \\ &\quad +t\tau[(ad-bc)t^2+(ae-c^2)t\tau+(be-cd)\tau^2] \\ &\quad +\tau^2[(bd+c^2)t^2+(be-cd)t\tau+(ce-d^2)\tau^2]=0. \end{aligned}$$

D'où cette conclusion :

L'arête de rebroussement de la développable Σ_t est la cubique gauche, suivant laquelle la surface $\mathcal{X}$ est touchée par le cône circonscrit à la surface, appartenant à l'asymptotique Z, et ayant pour sommet le point (t).

De là on déduira facilement les propositions suivantes :

Théorème I. — *Les cônes du second degré circonscrits à $\mathcal{X}$, ayant leur sommet sur une ligne asymptotique Z de cette surface et appartenant à cette ligne asymptotique, touchent $\mathcal{X}$ suivant des cubiques gauches. Les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent $\mathcal{X}$ suivant la ligne Z.*

Théorème II. — *Étant pris un point* M *sur la surface $\mathcal{X}$, le cône, circonscrit à la surface et dont ce point est le sommet, se compose de deux cônes du second ordre. Chacun d'eux touche $\mathcal{X}$ suivant une cubique gauche; les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent $\mathcal{X}$ suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point* M.

14. Les cônes du second degré circonscrits à $\mathcal{X}$ et qui *appartiennent* à l'asymptotique Z touchent cette surface suivant des cubiques gauches que je dirai aussi appartenir à l'asymptotique.

Toutes les cubiques appartenant à cette asymptotique passent par les quatre points satisfaisant aux équations

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e};$$

ces points sont d'ailleurs les points de rebroussement de l'asymptotique et les points coniques de $\mathcal{X}$; leurs paramètres sont les racines de l'équation $\omega=0$.

Indépendamment de ces quatre points, deux cubiques appartenant à l'asymptotique Z se coupent en un cinquième point.

Ce point est le sommet d'un cône du second degré qui contient les deux cubiques.

Pour démontrer cette proposition, je m'appuierai sur le lemme suivant que l'on établira facilement :

Une surface développable du quatrième ordre (ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche) étant considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile

$$f(\lambda)=0,$$

$f(\lambda)$ désignant un polynome du troisième degré en λ, les différents cônes du second ordre qui passent par l'arête de rebroussement sont donnés par l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le covariant quadratique de $f(\lambda)$.

Cela posé, la cubique gauche, suivant laquelle la surface $\mathcal{X}$ est touchée par le cône du second ordre ayant le point (t) pour sommet et appartenant à l'asymptotique Z, est l'enveloppe du plan mobile défini par l'équation (8) (t' étant considérée comme la variable). L'équation générale des cônes du second ordre passant par cette cubique sera donc, en vertu du lemme précédent,

$$\begin{vmatrix} at+b\tau & bt+c\tau & ct+d\tau \\ bt+c\tau & ct+d\tau & dt+e\tau \\ t'^2 & -t'\tau' & t'^2 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &t'^2[(ac-b^2)t^2+(ad-bc)t\tau+(bd-c^2)\tau^2] \\ &\quad +t'\tau'[(ad-bc)t^2+(ae-c^2)t\tau+(be-cd)\tau^2] \\ &\quad +t'^2[(bd-c^2)t^2+(be-cd)t\tau+(ce-d^2)\tau^2]=0. \end{aligned} \right.$$

Je remarque maintenant que cette équation est symétrique par rapport à t et t'; d'où les propositions suivantes :

Théorème III. — *Si de deux points (t) et (t') situés sur l'asymptotique Z, on mène les cônes du second ordre circonscrits à $\mathcal{X}$ et appartenant à cette asymptotique, les deux* *cubiques gauches de contact sont situées sur un même cône du second ordre, dont le sommet est le point d'intersection des deux cubiques distinct des quatre points nodaux de* $\mathfrak{X}$.

Remarque. — Ce cône est défini par l'équation (10).

THÉORÈME IV. — *Étant donnée une cubique quelconque passant par les quatre points coniques de* $\mathfrak{X}$, *la surface développable, dont cette cubique est l'arête de rebroussement, coupe* $\mathfrak{X}$ *suivant une de ses lignes asymptotiques* Z.

Si l'on considère les divers cônes du second degré qui contiennent cette cubique, ils coupent $\mathfrak{X}$ *suivant les diverses cubiques appartenant à* Z, *en sorte que les développables dont elles sont les arêtes de rebroussement contiennent toutes* Z, *et que les développables circonscrites à* $\mathfrak{X}$ *le long de ces cubiques sont des cônes du second ordre dont les sommets sont situés sur* Z.

15. Il est facile d'étendre les résultats précédents à une asymptotique quelconque Z_ρ résultant de l'intersection de $\mathfrak{X}$ avec la quadrique

$$\theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k = 0.$$

A cet effet, j'établirai d'abord une formule très simple et que j'aurai souvent l'occasion d'employer.

Soit, en conservant les notations du § I, le système linéaire gauche

$$\mathrm{U} = \begin{matrix} 0 & t^2 & t\tau \\ -t^2 & 0 & t^2 \\ -t\tau & -\tau^2 & 0 \end{matrix},$$

d'où

$$\mathrm{U}_0 = \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -t\tau & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau^2 & -t\tau & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix};$$

le produit HUH_1 est aussi un système gauche que je ferai égal à [1]

$$\mathrm{V} = \begin{matrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{matrix},$$

[1] Il est important de ne pas confondre ici le système linéaire H avec le hessien de u que j'ai désigné par la même lettre.

en sorte que l'on aura

$$\mathrm{V}_0 = \begin{matrix} z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} z & -y & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

et par suite

$$\mathrm{H}_{01} \times \begin{matrix} \tau^2 \\ -t\tau \\ t^2 \end{matrix} = \begin{matrix} z \\ -y \\ x \end{matrix}.$$

De l'équation (4) on déduit

$$\mathrm{H}(\mathrm{I} + \mathrm{U})\mathrm{H}_1 = \rho\mathrm{A} + \theta\mathrm{I} + \mathrm{V},$$

d'où

$$\Delta(\mathrm{I} + \mathrm{U}) = \Delta(\rho\mathrm{A} + \theta\mathrm{I} + \mathrm{V}).$$

Représentons, pour abréger, par $\varphi(x, y, z)$ la forme quadratique

$$\alpha x^2 + 4\gamma y^2 + \varepsilon z^2 + 4\delta zy + 4\beta yx + 2\gamma xz;$$

en développant la relation précédente, on obtiendra l'équation

$$(11) \qquad \rho\varphi(x, y, z) + 2\theta(xz - y^2) = 0,$$

en sorte que, quand le rapport $t : \tau$ prend toutes les valeurs possibles, les variables x, y, z restent constamment liées par la relation (11).

16. Cela posé, d'après ce que j'ai démontré plus haut, l'équation générale des cônes circonscrits appartenant à l'asymptotique Z s'obtient en égalant à zéro le hessien de u; on peut donc l'écrire de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} + \begin{matrix} \tau^4 & -\tau^3 t & \tau^2 t^2 \\ -\tau^3 t & \tau^2 t^2 & -\tau t^3 \\ \tau^2 t^2 & -\tau t^3 & t^4 \end{matrix} \Bigg| = 0,$$

ou simplement

$$\Delta(\mathrm{A} + \mathrm{U}_0) = 0.$$

Les cônes circonscrits appartenant à l'asymptotique Z_ρ auront par suite pour équation

$$\Delta(\mathrm{A}' + \mathrm{U}_0) = \Delta(\mathrm{H}_1\mathrm{AH} + \mathrm{U}_0) = \Delta(\mathrm{A} + \mathrm{H}_{10}\mathrm{U}_0\mathrm{H}_0) = 0,$$

ou encore

$$\Delta(\mathrm{A} + \mathrm{V}_0) = 0,$$

ou enfin en développant

$$\begin{aligned} f = (ac - b^2)x^2 + (ae - c^2)y^2 + (ce - d^2) \\ + 2(be - cd)yz + 2(bd - c^2)zx + 2(ad - bc)xy = 0. \end{aligned}$$

Telle est l'équation générale des cônes du second ordre circonscrits à $\mathfrak{X}$ et appartenant à l'asymptotique Z_ρ, les variables x, y, z étant assujetties à satisfaire à l'équation (11).

17. L'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent les cubiques gauches appartenant à l'asymptotique Z (*Cf*, n° **14**) peut se mettre sous la forme

$$\Delta\left\{\mathrm{A} + \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} = 0.$$

L'équation analogue pour les cubiques appartenant à l'asymptotique Z_ρ sera

$$\begin{aligned} &\Delta\left[\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathrm{H} + \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \\ &= \Delta\left\{\mathrm{A} + \mathrm{H}_{01} \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \times \mathrm{H}_0\right\}, \end{aligned}$$

ou encore, en vertu des relations que j'ai établies plus haut,

$$\Delta\left\{\mathrm{A} + \begin{matrix} z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} z' & -y' & x' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} = 0.$$

D'où la conclusion suivante :

Si l'on désigne par x, y, z et x', y', z' deux systèmes de variables satisfaisant respectivement à l'équation (11), *l'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent les cubiques appartenant à l'asymptotique Z_ρ est*

$$x'\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + z'\frac{df}{dz} = 0.$$

Je désigne ici par f la même forme quadratique que dans le numéro précédent.

Les équations des cubiques gauches elles-mêmes sont

$$\begin{aligned} (ac - b^2)x + (ad - bc)y + (bd - c^2)z = 0, \\ (ad - bc)x + (ae - c^2)y + (be - cd)z = 0, \\ (bd - c^2)x + (be - cd)y + (ce - d^2)z = 0. \end{aligned}$$

18. Je ferai encore quelques remarques sur les propositions précédentes.

Par tout point M, pris sur la surface $\mathfrak{X}$, passent deux cubiques appartenant à l'asymptotique Z; ces deux courbes définissent parfaitement le point M, dont on peut ainsi fixer la position sur la surface par les valeurs des paramètres t et t' des points de Z qui sont les sommets des cônes touchant la surface suivant les cubiques considérées.

En un point (t, t') de $\mathfrak{X}$, l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 = t'^2(at^2 + 2bt\tau + c\tau^2) + 2t'\tau'(bt^2 + 2ct\tau + d\tau^2) \\ + \tau'^2(ct^2 + 2dt\tau + e\tau^2) = 0; \end{aligned}$$

on voit ici apparaitre l'émanant principal de u; les deux autres émanants

$$\mathcal{E}' = t'(at^3 + 3bt^2\tau + 3ct\tau^2 + d\tau^3) + \tau'(bt^3 + 3ct^2\tau + 3dt\tau^2 + e\tau^3)$$

et

$$\mathcal{E} = t(at'^3 + 3bt'^2\tau' - 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3) + \tau(bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + e\tau^3)$$

représentent, comme nous l'avons vu, les plans passant par le point (t, t') et les tangentes (t) et (t'), ou encore les plans osculateurs des cubiques, appartenant à l'asymptotique Z, qui se croisent au plan considéré.

Le plan tangent au point (t, t') passe évidemment par les deux points (t) et (t').

Il serait facile d'exprimer en fonction des paramètres t et t' les coordonnées du point (t, t'); mais je laisse de côté cette recherche, qui me serait inutile en ce moment.

III. — *Sur les lignes nodales des surfaces développables dont les asymptotiques sont les arêtes de rebroussement* [1].

19. La surface développable $\mathcal{D}$, dont la sextique Z est l'arête de rebroussement, a pour ligne nodale une quartique $\mathfrak{N}$ dont il est facile d'obtenir les équations.

Pour tout point de cette courbe, l'équation

$$u = 0$$

a deux couples de racines égales; elle est donc définie par le système d'équations

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e},$$

d'où l'on déduit, en vertu de l'identité,

$$\alpha\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(ac - b^2) - 2\delta(ad - bc) + \gamma(ae + 2bd - 3c^2)\\ - 2\beta(be - cd) + \alpha(ce + d^2) = 0.\end{aligned}$$

---

[1] On sait (*voir* CAYLEY, *loc. cit.*) que ces lignes nodales sont des courbes du quatrième ordre et de seconde espèce (c'est-à-dire par lesquelles on ne peut faire passer qu'une seule surface du second ordre) : dans tout ce qui suit, je les appellerai, pour abréger, simplement *quartiques*, en réservant le nom de *biquadratiques* aux courbes du quatrième ordre qui résultent de l'intersection de deux surfaces du second ordre. J'appellerai de même *sextiques* les courbes du sixième ordre et de quatrième classe qui sont les asymptotiques de la surface réciproque de la surface de Steiner Les sextiques sont les réciproques des surfaces développables qui ont des quartiques pour arêtes de rebroussement.

Les paragraphes qui suivent peuvent être considérés comme un chapitre partiel de la théorie des quartiques et des sextiques.

A ce sujet, il ne sera peut-être pas inutile d'indiquer le sens géométrique des deux équations

$$i = 0 \quad \text{et} \quad j = 0.$$

Relativement à la surface de Steiner, elles donnent lieu aux deux propositions suivantes :

I. *Étant donnée une quartique, l'enveloppe des plans qui coupent cette courbe en quatre points équiharmoniques est la surface du second ordre que l'on peut mener par la quartique.*

II. *Étant donnée une quartique, l'enveloppe des plans qui coupent cette courbe en quatre points harmoniques est la surface de Steiner dont cette quartique est une asymptotique.*

Telle est l'équation de la quadrique $\mathfrak{Q}$, qui contient la ligne nodale; en conservant les notations du § I, on voit que cette équation est

$$h = 0.$$

D'après le Tableau A, l'équation générale des quadriques $\mathfrak{Q}_\rho$, contenant les nodales relatives aux diverses asymptotiques de la surface, sera donc

$$\mu\theta i + (\lambda\theta + \rho\mu)h + \lambda\rho k = 0,$$

le rapport $\mu : \lambda$ étant lié au rapport $\rho : \theta$ par la relation

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{2\rho(3j_0\rho - i_0\theta)}{i_0\rho^2 - 3\theta_2}.$$

Toutes ces quadriques, ainsi que les quadriques $\mathcal{S}_\rho$, sont comprises dans le réseau (i, h, k).

20. On peut, par une quartique donnée $\mathfrak{N}$, faire passer une infinité de surfaces réglées du troisième ordre. Prenons, en effet, arbitrairement une corde de cette courbe, c'est-à-dire une droite s'appuyant sur elle en deux points; tout plan passant par cette corde fixe rencontre de nouveau la courbe en deux points. Le lieu des cordes mobiles qui les joignent est évidemment une surface réglée du troisième ordre ayant la corde fixe pour ligne double.

Il est facile d'obtenir l'équation de cette surface.

A cet effet, je considérerai le covariant du sixième degré de u

$$L = (a^2d + 3b^3 - 3abc)t^6 + \ldots$$

(on sait que tous ses coefficients s'annulent pour les points de la ligne nodale) et l'émanant principal de L

$$L_0 = t'^3\frac{d^3L}{dt^3} + 3t'^2\tau'\frac{d^3L}{dt^2\,d\tau} + 3t'\tau'^2\frac{d^3L}{dt\,d\tau^2} + \tau'^3\frac{d^3L}{d\tau^3};$$

l'équation

$$L_0 = 0$$

représente une surface du troisième ordre qui contient la quartique $\mathfrak{N}$; il est facile de voir que cette surface est réglée.

On a, en effet, en conservant les notations précédentes et en posant, pour abréger,

$$u' = at'^4 + 4bt'^3\tau' + 6ct'^2\tau'^2 + 4dt'\tau'^3 + e\tau t',$$

l'identité suivante

$$u\mathcal{E}^2 - u'\mathcal{E}'^2 = (t\tau' - t'\tau)^3 L_0 \text{ (1)};$$

d'où l'on voit que l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$u\mathcal{E}^2 - u'\mathcal{E}'^2 = 0,$$

équation d'une surface réglée dont les diverses génératrices sont données par le système simultané d'équations

$$u = \lambda^2 u' \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \lambda\mathcal{E},$$

où λ désigne un paramètre arbitraire.

21. Les équations de la droite double de cette surface sont

$$\mathcal{E} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = 0,$$

et telle est l'équation générale (renfermant deux paramètres arbitraires t et t') des cordes de la quartique.

La seconde directrice rectiligne de cette surface a pour équations

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u' = 0.$$

---

(1) Sur cette identité, voir (*Bulletin de la Société philomathique* et journal *L'Institut*, mars 1872), ma Note *Sur les covariants doubles des formes binaires.*

La proposition fondamentale relative aux covariants doubles peut s'énoncer ainsi :

Étant donné un système quelconque S *de formes binaires, tout covariant double de ce système peut se mettre sous la forme*

$$(A) + (B)\omega + (C)\omega^2 + \ldots;$$

(A), (B), ... *désignant des émanants des formes* A, B, *et ces formes étant elles-mêmes des covariants du système* S; ω *représente le covariant double général*

$$xy' - yx'.$$

Depuis la publication de la Note dont je viens de parler, j'ai reconnu que M. Clebsch s'était appuyé sur la même proposition dans son Ouvrage sur les formes binaires; je crois toutefois pouvoir faire remarquer à ce sujet que, dès 1860, je l'avais communiquée à M. Hermite en lui faisant connaître les premiers principes d'une nouvelle théorie des formes binaires qui est restée inédite.

Si l'on convient d'appeler *droite appartenant à une développable* les droites qui résultent de l'intersection de deux plans tangents à cette développable, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème V. — *Étant donnée une quartique quelconque, cette courbe est la ligne nodale d'une surface développable du sixième ordre et de la quatrième classe; par toute droite appartenant à cette surface développable et la quartique, on peut faire passer une surface réglée du troisième ordre.*

22. L'équation générale des surfaces réglées du troisième ordre passant par la quartique $\mathcal{Q}$ peut se mettre encore sous une autre forme remarquable, et qui résulte de l'identité

$$(t\tau' - t'\tau)L_0 = uH' - u'H;$$

d'où l'équation

$$uH' - u'H = 0$$

et la conséquence suivante :

La courbe d'intersection de deux cônes quelconques appartenant à l'asymptotique $\mathcal{Z}$ *et la quartique* $\mathcal{Q}$ *sont situées sur une même surface réglée du troisième ordre.*

Cette même surface réglée contient aussi la courbe du dixième ordre qui est l'intersection (partielle) des surfaces développables dont les arêtes sont les deux cubiques suivant lesquelles la surface $\mathcal{K}$ est touchée par les deux cônes dont je viens de parler.

Ces deux surfaces (*voir* n° **12**) ont, en effet, pour équations

$$ju - iH = 0 \quad \text{et} \quad ju' - iH' = 0;$$

en éliminant j et u, on obtient l'équation précédente, ce qui démontre la proposition énoncée.

23. Lorsque l'on fait

$$t' = t,$$

les deux directrices rectilignes des surfaces du troisième ordre se confondent, et l'on obtient les variétés singulières signalées par

M. Cayley (*voir* SALMON : *Analytic Geometry of three dimensions*, § 447).

L'équation de ces surfaces est $L = 0$.

24. Par la sextique Z et la quartique $\mathcal{N}$, on peut faire passer une infinité de surfaces du quatrième ordre dont l'équation est

$$3ju - 2i\mathrm{H} = 0.$$

Je ferai remarquer encore, et je reviendrai plus tard sur ce sujet, que la ligne nodale $\mathcal{N}$ est située sur la surface de Steiner $\mathfrak{S}$, qui est la polaire réciproque de $\mathcal{H}$ par rapport à la quadrique $\mathcal{S}$.

IV. — *Sur les polygones que l'on peut circonscrire à une sextique gauche.*

25. Soit une sextique gauche Z, définie comme l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan variable

$$u = at^4 + 4bt^3\tau + 6ct^2\tau^2 + 4dt\tau^3 + e\tau^4 = 0.$$

Supposons que les tangentes, en deux points (t) et (t') de cette courbe, se rencontrent en un point M (qui appartient nécessairement à la nodale $\mathcal{N}$).

Les équations de ces tangentes sont

$$\begin{aligned} at^3 + 3bt^2\tau + 3ct\tau^2 + e\tau^3 &= 0,\\ bt^3 + 3ct^2\tau + 3dt\tau^2 + e\tau^3 &= 0,\\ at'^3 + 3bt'^2\tau' + 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3 &= 0,\\ bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + c\tau'^3 &= 0. \end{aligned}$$

Ces quatre équations et l'équation identique

$$a\varepsilon - 4b\beta + 6c\gamma - 4d\delta + e\alpha = 0$$

devant être satisfaites pour les coordonnées du point M, on obtiendra la relation qui lie entre eux les paramètres t et t', en égalant à zéro le déterminant de ce système d'équations.

La valeur de ce déterminant peut s'obtenir immédiatement en remarquant que c'est un covariant double de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de ce polynome, et du sixième degré par rapport aux variables t, τ et aux variables t, τ'; en se reportant

à la Note qui précède le paragraphe précédent, on voit immédiatement que ce déterminant a pour valeur

$$(t\tau' - t'\tau)^4\mathcal{F}_0,$$

$\mathcal{F}_0$ désignant l'émanant principal de ω

$$t'^2(\alpha t^2 + 2\beta t\tau + \gamma\tau^2) + 2t'\tau'(\beta t^2 + 2\gamma t\tau + \delta\tau^2) + \tau'^2(\gamma t^2 + 2\delta t\tau + \varepsilon\tau'^2);$$

en sorte que la relation qui existe entre les paramètres t et t' est

$$\mathcal{F}_0 = 0.$$

Les coordonnées du point M s'expriment facilement en fonction des paramètres t et t', et sont données par le système d'équations

$$\frac{a}{1} = \frac{2a}{-(t+t')} = \frac{6c}{t^2 + 4tt' + t'^2} = \frac{2d}{-tt'(t+t')} = \frac{e}{t^2t'^2}\ (^1).$$

26. L'équation

$$\mathcal{F}_0 = 0$$

donne lieu à une remarque importante.

C'est l'intégrale de l'équation d'Euler qui sert de base à la théorie des fonctions elliptiques.

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME VI. — *Si l'on peut circonscrire un polygone gauche à une sextique, on peut lui circonscrire une infinité de polygones du même nombre de côtés.*

Remarque. — Il est clair que, pendant que les côtés du polygone roulent sur la sextique, ses sommets décrivent la quartique $\mathcal{N}$.

On a ainsi un polygone mobile dont les sommets se meuvent sur une quadrique, tandis que ses côtés enveloppent une courbe tracée sur une autre quadrique; c'est un point particulier d'une question digne, je crois, d'intérêt, et sur laquelle je reviendrai. Je me suis déjà occupé du problème général dans une Communication faite à la Société philomathique, en m'appuyant sur l'extension à l'espace de la théorie de Jacobi relative aux courbes planes du second ordre, extension que j'ai fait connaître dans une Note pré-

(1) Ici, pour simplifier l'écriture, j'ai fait, comme je le ferai souvent dans la suite, $\tau = \tau' = 1$.

sentée à l'Institut sur l'*Intégration d'une certaine classe d'équations différentielles*.

27. En particulier, si l'on peut circonscrire un triangle à une sextique Z, on peut en circonscrire une infinité ; en d'autres termes, si l'on peut mener un plan tritangent à la sextique, on peut lui en mener une infinité.

Si l'on se reporte à la relation

$$\mathfrak{J}_0 = 0,$$

on verra facilement que ce cas se présente quand on a

$$i_0 = 0.$$

Comme l'a remarqué M. Cremona (¹), cette relation signifie que les quatre points cuspidaux de Z sont en rapport équiharmonique.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Quand les quatre points cuspidaux d'une sextique sont en rapport équiharmonique, on peut mener à cette courbe une infinité de plans tritangents.

Je montrerai plus loin que, dans ce cas, la sextique est située sur un cône du second degré.

28. La considération de l'équation $\mathfrak{J}_0 = 0$ montre aussi facilement que la condition, pour que l'on puisse circonscrire à la sextique Z un quadrilatère, est

$$j_0 = 0.$$

D'où, en se reportant aux observations déjà citées de M. Cremona, la proposition suivante :

Quand les quatre points cuspidaux d'une sextique sont en rapport harmonique, on peut lui circonscrire une infinité de quadrilatères gauches.

(¹) *Voir* les Notes de M. Cayley *Sur les torses sextiques* déjà citées.

M. Cayley a remarqué (¹) que, quand l'on a $j_0 = 0$, la sextique est l'arête de rebroussement d'une surface développable circonscrite à deux quadriques se touchant d'un contact simple.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Quand deux quadriques ont entre elles un contact simple, on peut circonscrire une infinité de quadrilatères gauches à l'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à ces deux quadriques.

V. — *Digression sur les covariants doubles des formes binaires.*

29. Comme, dans tout ce qui suit, les covariants doubles des formes u et ω se présentent très fréquemment, les considérations suivantes, quoique très simples, ne paraîtront peut-être pas inutiles.

Soient les formes $u(x, y)$ et $\omega(x, y)$, dans lesquelles j'ai, pour un instant, substitué aux variables t et τ de nouvelles variables x et y.

On a évidemment, en conservant les notations précédentes,

$$u(tx + t'y, \tau x + \tau' y) = ux^4 + 4\mathcal{E}'x^3y + 6\mathcal{E}_0 x^2y^2 + 4\mathcal{E}xy^3 + u'y^4,$$

et de même

$$\omega(tx + t'y, \tau x + \tau' y) = \omega x^4 + 4\mathfrak{J}'x^3y + 6\mathfrak{J}_0 x^2y^2 + 4\mathfrak{J}xy^3 + \omega' y^4,$$

en posant

$$\mathfrak{J}' = t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2\tau + 3\gamma t\tau^2 + \delta\tau^3) + \tau'(\beta t^3 + 3\gamma t^2\tau + 3\delta t\tau^2 + \varepsilon\tau^3),$$

. . . .

Soit maintenant F un covariant double quelconque de u et de ω ; on a, par suite de la définition même des covariants,

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, tx + t'y, \tau x + \tau' y, tx' + t'y', \tau x' + \tau' y') \\ &\quad = (t\tau' - t'\tau)^{-m}\,\mathrm{F}(u, \mathcal{E}', \ldots, \omega, \mathfrak{J}', \ldots, x, y, x', y'); \end{aligned}$$

(¹) Notes *Sur les torses sextiques* déjà citées.

d'où, en faisant dans cette identité $x=1$, $y=0$, $x'=0$, $y'=1$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}(a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, t, \tau, t', \tau')\\ &\quad=(t\tau'-t'\tau)^{-m}\,\mathrm{F}(u, \mathcal{E}', \ldots, \omega, \mathcal{F}', \ldots, 1, 0, 0, 1).\end{aligned}$$

De là résultent les conclusions suivantes :

1° Un covariant double (et il en est de même évidemment d'un covariant simple et d'un invariant) est déterminé quand on connaît son terme principal, c'est-à-dire le terme auquel se réduit le covariant quand on y fait $t=1$, $\tau=0$, $t'=0$, $\tau'=1$.

On obtient, à une certaine puissance près de $(t\tau'-t'\tau)$, la valeur du covariant en remplaçant respectivement dans le terme principal $a, b, c, \ldots$ par $u, \mathcal{E}', \mathcal{E}_0, \ldots$, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, par $\omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \ldots$.

2° Si l'on veut établir une relation entre des éléments géométriques dépendant de deux points de la sextique Z, on pourra toujours supposer que les paramètres de ces deux points sont 0 et ∞; de la relation qui a lieu dans ce cas particulier, on déduira la relation générale en remplaçant respectivement $a, b, c, \ldots$ et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par les émanants que j'ai mentionnés ci-dessus.

30. Pour faire une application simple des considérations qui précèdent, je remarquerai que l'on a

$$ae-4bd+3c^2=(t\tau'-t'\tau)^{-4}[uu'-4\mathcal{E}\mathcal{E}'+4\mathcal{E}_0^2].$$

L'équation de la quadrique S peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$uu'-4\mathcal{E}\mathcal{E}'+4\mathcal{E}_0^2=0.$$

Les plans osculateurs de la sextique Z aux points (t) et (t'), dont les équations sont

$$u=0 \quad \text{et} \quad u'=0,$$

coupent S suivant deux coniques situées sur le cône dont l'équation est

$$4\mathcal{E}_0^2-4\mathcal{E}\mathcal{E}'=0;$$

le sommet de ce cône est défini par les équations

$$\mathcal{E}_0=0, \quad \mathcal{E}=0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'=0.$$

Ce point est d'ailleurs le point (t, t') de la surface $\mathfrak{X}$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème VII. — *Étant donnée une sextique Z, si l'on mène deux plans osculateurs quelconques de cette courbe, ils coupent la quadrique, qui contient Z, suivant deux coniques; le sommet d'un des cônes qui passe par ces deux coniques se trouve sur la surface $\mathfrak{X}$, dont Z est une asymptotique; et, quand ces plans se déplacent de toutes les manières possibles, le sommet de ce cône décrit la surface $\mathfrak{X}$.*

Remarque. — On peut, par ces deux coniques, mener un deuxième cône; le sommet de ce cône décrit une surface que j'étudierai dans la suite de ce Mémoire.

VI. — *Centre et plan central d'une sextique gauche.*

31. Outre l'invariant

$$a\varepsilon-4b\delta+6c\gamma-4d\beta+e\alpha,$$

qui est identiquement nul, les deux polynomes u et ω ont un autre invariant, du premier degré relativement aux coefficients de u,

$$\begin{aligned}h_0=&\,a(\gamma\varepsilon-\delta^2)+2b(\gamma\delta-\beta\varepsilon)+c(\alpha\varepsilon+2\beta\delta-3\gamma^2)\\ &+2d(\beta\gamma-\alpha\delta)+e(\alpha\gamma-\beta^2).\end{aligned}$$

L'équation $h_0=0$ représente un plan Π; pour trouver les points d'intersection de ce plan avec la sextique Z, il faut remplacer a, b, c, ... par leurs valeurs tirées du Tableau B; le résultat devant être un covariant de ω, il suffit de calculer son terme du degré le plus élevé et par conséquent de faire a, b, c égaux à zéro, et

$$d=\alpha t^5 \quad \text{et} \quad e=4\beta t^6;$$

il vient ainsi, comme premier terme de ce covariant,

$$2[3\alpha\beta\gamma-\alpha^2\delta-2\beta^3]t^6;$$

d'où l'on conclut que les paramètres des points où le plan Π rencontre la sextique Z sont les racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le covariant du sixième degré de ω [1].

Les paramètres des quatre points stationnaires de Z étant les racines de l'équation $\omega = 0$, on déduit de là et des propriétés bien connues du covariant du sixième degré d'une forme biquadratique la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Les quatre points stationnaires d'une sextique Z peuvent être partagés de trois façons différentes en deux groupes de deux points; à chaque mode de groupement correspond sur la courbe une division en involution donnant lieu à deux points doubles. Les droites qui joignent les trois couples de points doubles sont situées dans un même plan* Π, *qui est le plan central de la sextique.*

Comme je le montrerai plus tard, ces trois droites sont situées sur la surface $\mathcal{X}$, dont Z est une asymptotique.

32. Il est facile de conclure de ce qui précède qu'il ne peut exister d'autres covariants de u et de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de u, que ceux que je viens d'examiner.

En égalant, en effet, à zéro un tel covariant, on a l'équation d'un plan qui rencontre Z en six points dont les paramètres sont les racines d'une équation que l'on obtient en égalant à zéro un covariant de ω du sixième degré. Or il n'existe qu'un seul covariant de ce degré; la proposition que je viens d'énoncer est donc démontrée.

De là diverses conséquences importantes.

En premier lieu, h_0 étant le seul invariant linéaire par rapport aux coefficients de u (sauf $a\varepsilon - 4b\delta + \ldots$, qui est identiquement

---

[1] Les points cuspidaux d'une sextique sont souvent désignés sous le nom de *points stationnaires*.

Par tout point (t) d'une sextique Z, on peut mener en effet un plan P osculateur de cette courbe et différent du plan (t); le paramètre t' de ce plan s'obtient en égalant à zéro l'émanant

$$\mathfrak{F}' = t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2 + 3\gamma t + \delta) + (\beta t^3 + 3\gamma t^2 + 3\delta t + \varepsilon) = 0.$$

Si le paramètre (t) satisfait à la relation $\omega = 0$, on voit que l'on a $t' = t$ et le plan P se confond avec le plan (t).

nul), si l'on passe de la sextique Z à la sextique Z_ρ, en employant les substitutions dont j'ai parlé au paragraphe I, h_0 devra, à un facteur numérique près, conserver la même valeur; et, en effet, on vérifie facilement que l'on a, en conservant les notations de ce même paragraphe,

$$h'_0 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2 h_0.$$

D'où la proposition suivante :

Théorème IX. — *Toutes les sextiques qui sont les asymptotiques d'une surface* $\mathcal{X}$ *ont même plan central.*

Je dirai que ce plan est aussi le *plan central* de $\mathcal{X}$; comme je l'ai déjà fait observer, il coupe cette surface suivant trois droites.

33. *Équation de la surface du quatrième ordre qui contient les lignes nodales correspondant aux asymptotiques de la surface* $\mathcal{X}$.

Pour tous les points de la courbe $\mathcal{N}$, qui est la ligne nodale de la surface développable ayant Z pour arête de rebroussement, on a

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e} = \frac{3j}{2i}.$$

On déduit de là

$$\frac{-k}{4h_0} = \frac{3j}{2i},$$

d'où

$$6jh_0 + ik = 0,$$

et encore

$$(12) \qquad 6jh_0 + ik - h^2 = 0.$$

Cette équation représente une surface du quatrième ordre Ω qui contient la nodale $\mathcal{N}$; en se reportant aux formules (3) du Tableau A, on voit que l'on a

$$i'k' - h'^2 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2(ik - h^2);$$

en vertu de la formule donnée dans le numéro précédent, on a donc identiquement

$$6jh'_0 + i'k' - h'^2 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2[6jh_0 + ik - h^2];$$

d'où l'on déduit facilement que la surface Ω contient les nodales $\mathfrak{N}_\rho$, dont le lieu est ainsi donné par l'équation (12).

34. Il y existe un point O de l'espace dont les coordonnées s'expriment au moyen des coefficients de u et du hessien de u.

Les coordonnées de ce point sont déterminées par le système suivant d'équations

$$\frac{a}{3j_0\alpha - 2i_0(\alpha\gamma - \beta^2)} = \frac{b}{3j_0\beta - 2i_0\dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{2}} = \frac{c}{3j_0\gamma - 2i_0\dfrac{\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2}{6}},$$

....

On vérifie facilement que les quantités a, b, c, ... sont les coordonnées d'un point, car elles satisfont identiquement à la relation

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0. \tag{1}$$

Cela posé, si l'on détermine le plan polaire du point O par rapport à une quadrique quelconque du réseau (i, h, k), c'est-à-dire à une quadrique dont l'équation soit de la forme

$$\mathrm{A}i + \mathrm{B}h + \mathrm{C}k = 0,$$

il est clair que l'équation de ce plan s'obtiendra en égalant à zéro un invariant de u et de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de u.

D'après ce que j'ai dit plus haut, son équation est nécessairement

$$h_0 = 0.$$

D'où la proposition suivante :

Théorème X. — *Le plan central* Π *de la surface* $\mathfrak{X}$ *a même pôle relativement à toutes les quadriques du réseau* (i, h, k).

Je dirai que ce pôle est *le centre de la surface* $\mathfrak{X}$ *et des diverses sextiques qui sont les asymptotiques de cette surface.*

VII. — *Sur les droites qui sont situées sur la surface* $\mathfrak{X}$.

35. Si une droite peut être placée sur la surface $\mathfrak{X}$, elle rencontre $\mathcal{S}$ en deux points situés sur l'asymptotique Z. Cette droite

est donc une corde de la sextique Z. Pour trouver la relation qui existe entre les paramètres des extrémités de cette corde, je supposerai qu'ils soient respectivement 0 et ∞, en faisant

$$t = 1, \quad \tau = 0, \quad t' = 0 \quad \text{et} \quad \tau' = 1.$$

D'après le Tableau B, les coordonnées de ces points seront donc

$$a = b = c = 0, \quad d = \alpha, \quad e = 4\beta,$$

et

$$a = -4\delta, \quad b = -\varepsilon, \quad c = d = e = 0.$$

Désignons par $\varkappa$ un paramètre variable; les coordonnées d'un point quelconque de la corde seront données par les équations

$$a = -4\delta, \quad b = -\varepsilon, \quad c = 0, \quad d = \varkappa\alpha, \quad e = 4\varkappa\beta.$$

On a

$$\begin{vmatrix} -4\delta & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & \varkappa\alpha \\ 0 & \nu\alpha & -4\varkappa\beta \end{vmatrix} = 4\varkappa(\varepsilon^2\beta - \varkappa\alpha^2\delta);$$

d'où l'on voit que la valeur du paramètre $\varkappa$ correspondant au troisième point de rencontre de la corde avec $\mathfrak{X}$ est donnée par l'équation

$$\varepsilon^2\beta - \varkappa\alpha^2\delta = 0;$$

si la corde est située tout entière sur la surface, cette équation doit être satisfaite pour une infinité de valeurs de $\varkappa$. On doit donc avoir

$$\varepsilon^2\beta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha^2\delta = 0;$$

d'où l'on déduit, d'après les propositions données n° **29**, les relations suivantes, qui existent entre les paramètres des extrémités d'une corde de Z située sur la surface,

$$\omega'^2\mathfrak{F}' = 0 \quad \text{et} \quad \omega^2\mathfrak{F} = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}&(\alpha t'^4 + 4\beta t'^3 + 6\gamma t'^2 + 4\delta t' + \varepsilon)^2 \\ &\quad\times[t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2 + 3\gamma t + \delta) + (\beta t^3 + 3\gamma t^2 + 3\delta t + \varepsilon)] = 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(\alpha t^4 + 4\beta t^3 + 6\gamma t^2 + 4\delta t + \varepsilon)^2 \\ &\quad\times[t(\alpha t'^3 + 3\beta t'^2 + 3\gamma t' + \delta) + (\beta t'^3 + 3\gamma t'^2 + 3\delta t' + \varepsilon)] = 0.\end{aligned}$$

36. On peut satisfaire à ces relations de deux façons distinctes :

1° En faisant

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega' = 0.$$

Les racines de ces équations sont les paramètres des quatre points stationnaires de Z (qui sont les quatre points coniques de $\mathcal{X}$) ; on en conclut que les six arêtes du tétraèdre dont ces points sont les sommets sont situées sur la surface.

2° En faisant

$$\dot{\mathfrak{J}} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathfrak{J}}' = 0.$$

Pour résoudre ce système d'équations, je remarque que, en éliminant t' entre ces deux équations, le résultat est un covariant dont le premier terme est

$$\alpha(\alpha^2\delta + 2\beta^3 - 3\alpha\beta\gamma)t'^2.$$

Ce covariant est donc $\omega\Gamma_0$, Γ_0 désignant le covariant du sixième degré de ω.

Laissant de côté le facteur étranger ω, on voit que les paramètres des extrémités des cordes cherchées seront les racines de l'équation

$$\Gamma_0 = 0.$$

Soient z_1, z_2 et z_3 les racines de l'équation (¹)

$$z^3 - i_0 z + 2f_0 = 0 ;$$

on sait que Γ_0 est le produit des trois facteurs

$$\sqrt{z_1\omega - 2\eta}, \quad \sqrt{z_2\omega - 2\eta}, \quad \sqrt{z_3\omega - 2\eta}$$

où η représente le hessien de ω.

Les deux racines de l'équation

$$\sqrt{z_1\omega - 2\eta} = 0$$

sont les paramètres des extrémités d'une corde située sur la surface. Je désignerai cette corde par la lettre D_1. Aux deux autres facteurs correspondront deux autres cordes D_2 et D_3 ; il suit d'ail-

(¹) *Voir* SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 180 et suiv.

leurs de ce que j'ai dit au n° 31 que ces trois droites sont l'intersection de la surface $\mathcal{X}$ par le plan central Π (¹).

A cette occasion, je ferai remarquer que le théorème donné au n° 31 peut s'énoncer d'une façon un peu plus générale de la manière suivante :

Si l'on coupe une asymptotique quelconque $\mathcal{X}$ par une quadrique du réseau (i, h, k), cette quadrique rencontre la courbe en quatre points distincts des points coniques. Si l'on partage d'une façon quelconque ces points d'intersection en deux systèmes de deux points, la droite qui joint les deux points doubles de l'involution déterminée par ces deux systèmes est une des droites de la surface $\mathcal{X}$ située dans le plan central.

VIII. — *Pôles et plans polaires relativement à la surface $\mathcal{S}$. Applications diverses.*

37. Considérons un point dont les coordonnées soient a', b', c', d', e'.

L'équation du plan polaire de ce point, relativement à la quadrique $\mathcal{S}$, est évidemment

$$a'\frac{di}{da} + b'\frac{di}{db} + c'\frac{di}{dc} + d'\frac{di}{dd} + e'\frac{di}{de} = 0,$$

ou bien

$$ae' - 4bd' + 6cc' - 4db' + ea' = 0.$$

Si la quadrique $\mathcal{S}$ est telle que l'on ait $i_0 = 0$, les coordonnées du centre de la surface $\mathcal{X}$ (n° 34) sont α, β, γ, δ, ε.

L'équation du plan polaire de ce point est donc

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

et, cette relation étant identiquement satisfaite, on en conclut que le plan polaire est indéterminé ; par suite :

Lorsque, pour une asymptotique Z, on a $i_0 = 0$, cette asym-

(¹) Il est clair que tout ce qui précède suppose que la forme ω ne présente aucune particularité. J'examinerai plus tard les cas particuliers où ω aurait un facteur triple ou deux facteurs carrés.

ptotique est située sur un cône du second degré dont le sommet est le centre de la courbe.

38. Soit un plan

$$a\varepsilon_0 - 4b\delta_0 + 6c\gamma_0 - 4d\beta_0 + e\alpha_0 = 0;$$

on voit immédiatement que les coordonnées du pôle de ce plan sont données par le système d'équations

$$\frac{a}{2i_0\alpha_0 - \varkappa\alpha} = \frac{b}{2i_0\beta_0 - \varkappa\beta} = \frac{c}{2i_0\gamma_0 - \varkappa\gamma} = \frac{d}{2i_0\delta_0 - \varkappa\delta} = \frac{e}{2i_0\varepsilon_0 - \varkappa\varepsilon},$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\varkappa = \alpha\varepsilon_0 - 4\beta\delta_0 - 6\gamma\gamma_0 - 4\delta\beta_0 + e\alpha_0.$$

Il est facile, en effet, de vérifier :

1° Que les quantités déterminées par les équations précédentes sont effectivement les coordonnées d'un point, car elles satisfont à l'identité

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0;$$

2° Que le plan polaire de ce point, par rapport à $\mathcal{S}$, est le plan donné.

39. Comme application des formules précédentes, considérons un plan tangent quelconque à la surface $\mathcal{H}$. Comme nous l'avons vu (n° 18), son équation est

$$\mathcal{E}_0 = at^2t'^2 + 2b(tt'^2 + t^2t') + c(t^2 + 4tt' + t'^2) + 2d(t + t') + e = 0;$$

on a, dans ce cas,

$$\varkappa = \mathfrak{F}_0,$$

et les coordonnées du pôle de ce plan sont données par le système d'équations

$$(13) \qquad \frac{a}{2i_0 - \mathfrak{F}_0\alpha} = \frac{b}{-i_0(t + t') - \mathfrak{F}_0\beta} = \ldots = \frac{c}{2i_0t^2t'^2 - \mathfrak{F}_0\varepsilon}.$$

Supposons le point tellement choisi sur la surface $\mathcal{H}$ que l'on ait

$$\mathfrak{F}_0 = 0,$$

les coordonnées du pôle seront données par les équations

$$\frac{a}{1} = \frac{2b}{-(t + t')} = \ldots = \frac{e}{t^2t'^2};$$

en se reportant au n° 25, on voit que le point ainsi déterminé est le point de la nodale $\mathcal{N}$, qui est l'intersection des tangentes (t) et (t'); le plan polaire de ce point touche par conséquent la surface $\mathcal{H}$ au point (t, t').

D'où encore cette conséquence :

La surface développable, qui est la polaire réciproque de la nodale $\mathcal{N}$ relativement à la quadrique $\mathcal{S}$, est circonscrite à $\mathcal{H}$.

40. D'après ce que je viens de dire, on voit que la surface de Steiner $\mathcal{E}$, qui est la polaire réciproque de $\mathcal{H}$ relativement à la quadrique $\mathcal{S}$, contient la nodale $\mathcal{H}$.

Cherchons l'équation de cette surface; il faut, pour l'obtenir, éliminer t et t' entre les équations (13). A cet effet, $\varkappa$ désignant une quantité inconnue, je suppose que la valeur commune des rapports contenus dans ces équations soit égale à $\frac{\varkappa}{\mathfrak{F}_0}$. On mettra facilement ces équations sous la forme suivante :

$$\frac{2i_0\varkappa}{\mathfrak{F}_0} = \frac{a + \varkappa\alpha}{1} = \frac{b + \varkappa\beta}{\frac{-(t + t')}{2}} = \frac{c + \varkappa\gamma}{\frac{t^2 + 4tt' + t'^2}{6}} = \ldots = \frac{e + \varkappa\varepsilon}{t^2t'^2}.$$

Je remarque maintenant que ces équations expriment que la forme $u + \varkappa\omega$ est un carré parfait; or, pour que cela soit possible, on doit avoir entre les invariants de u et de ω la relation suivante [1] :

$$(A - 48B)^2 - R = 0.$$

Dans cette formule, A et B représentent deux combinants qui, dans le cas actuel où

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

s'expriment, au moyen des invariants que nous avons introduits,

[1] Salmon, *Higher Algebra*, §§ 213 et 214.

par les formules suivantes :

$$A = 4 i_0 i \qquad \text{et} \qquad B = -\frac{k}{4} - \frac{1}{6} i_0 i;$$

R représente le résultant des équations u et ω. Par suite, la relation précédente (qui est évidemment l'équation de la surface ϖ) devient

$$144 (k + i_0 i)^2 - R = 0.$$

Il est clair que l'équation $R = 0$ représente les plans osculateurs de la sextique Z en ses quatre points stationnaires; ces plans touchent la surface ϖ le long de quatre coniques situées sur la quadrique

$$k + i_0 i = 0.$$

Cette quadrique est la polaire réciproque relativement à $\mathcal{S}$ d'une quadrique Υ à laquelle sont circonscrits les quatre cônes nodaux de la surface [1].

La forme de l'équation précédente montre qu'elle représente une quadrique passant par l'intersection des deux quadriques $i = 0$ et $k = 0$.

Je dirai, pour abréger, que la quadrique $k = 0$ est adjointe à la quadrique $\mathcal{S}$ $(i = 0)$, et je la désignerai par la notation $\mathcal{S}'$. Cela posé, la remarque précédente donne lieu, relativement à la surface Υ, à la proposition suivante :

THÉORÈME XI. — *Si l'on considère une quadrique quel-*

(1) Pour un point conique de la surface $\mathcal{H}$, l'équation $\omega = 0$ étant satisfaite, de la formule donnée (n° 10) il résulte que l'équation du cône, circonscrit à $\mathcal{H}$ et ayant ce point pour sommet, est

$$J_0^2 - 0.$$

Le cône circonscrit est donc un cône du second degré double; c'est un des cônes nodaux de la surface.

Il est important de remarquer que les *quatre cônes nodaux appartiennent à toutes les asymptotiques.*

Sur ces cônes, et en général sur la théorie de la surface qui fait l'objet de ce Mémoire, *voir :*

STURM, *Uber die Römische Fläche von Steiner* (*Math. Ann.*, III);

ECKARDT, *Beiträge zur analytischen Geometrie* (*Math. Ann.*, V);

TOWNSEND, *On the Nodal Cones of Quadrinodal Cubics* (*Quarterly Journal*, X).

conque $\mathcal{S}_\rho$, passant par une asymptotique de $\mathcal{H}$, et la quadrique adjointe $\mathcal{S}'_\rho$, la développable, circonscrite à $\mathcal{S}_\rho$ le long de leur intersection, est circonscrite à la quadrique Υ.

Réciproquement, si l'on circonscrit à Υ et à $\mathcal{S}_\rho$ une surface développable, la courbe suivant laquelle cette développable touche $\mathcal{S}_\rho$ est située sur $\mathcal{S}'_\rho$.

IX. — *Sur les fonctions qui jouent le rôle d'invariants relativement aux substitutions qui permettent de passer d'une asymptotique de $\mathcal{H}$ aux autres asymptotiques de la surface.*

41. Étant donnée une asymptotique quelconque Z de la surface $\mathcal{H}$, on peut, en général (sauf un cas particulier que j'examinerai tout à l'heure), en déduire toutes les autres asymptotiques au moyen des substitutions dont j'ai parlé au paragraphe I.

Ces substitutions peuvent être définies par le système linéaire

$$\begin{matrix} \rho & \theta \\ \lambda & \mu, \end{matrix}$$

et il y existe un certain nombre de fonctions des coefficients a, b, c, ... qui, quand on y effectue ces substitutions, ne changent pas de valeur, ou, pour parler plus exactement, sont simplement multipliées par une puissance de $(\rho\mu - \lambda\theta)$.

Ces fonctions, lorsqu'on les égale à zéro, représentent des surfaces indépendantes de l'asymptotique particulière qui sert de base au système de coordonnées et ne dépendant que de la surface $\mathcal{H}$ elle-même.

Telles sont, par exemple, les fonctions $ik - h^2$ et h_0, qui donnent lieu aux relations

$$i'k' - h'^2 = (\rho\mu - \lambda\theta)^2 (ik - h^2)$$

et

$$h_0 = (\rho\mu - \lambda\theta)^2 (ik - h^2).$$

L'équation $ik - h^2 = 0$ représente, comme nous l'avons vu, l'enveloppe des quadriques $\mathcal{S}_\rho$, et l'équation $h_0 = 0$ est celle du plan central.

Les fonctions qui jouissent de cette propriété jouent évidemment un rôle important dans la théorie de la surface $\mathcal{H}$; outre celles dont je viens de parler, il est facile d'en trouver plusieurs autres.

Il résulte, en effet, des formules données au n° 7 du paragraphe I, que, par la substitution

$$\begin{matrix} \rho & 0 \\ \lambda & \mu, \end{matrix}$$

les formes

$$ix^2 + 2hxy + ky^2 \quad \text{et} \quad x^3 - i_0 xy^2 + 2j_0 y^3$$

se changent respectivement en

$$i'x^2 + 2h'xy + k'y^2 \quad \text{et} \quad x^3 - i'_0 xy^2 + 2j'_0 y^3.$$

De là résulte que les invariants de ce système de formes sont des fonctions jouissant de la propriété dont je viens de parler.

Nous aurons à considérer (¹) :

1° L'invariant quadratique

$$i_0^2 i + 18 j_0 h + 3 i_0 k;$$

je désignerai par Θ la quadrique dont l'équation s'obtient en égalant à zéro cet invariant;

2° Le résultant de ces formes ; j'étudierai de préférence les facteurs de ce résultant.

En désignant, comme au n° 36, par z_1, z_2 et z_3 les trois racines de l'équation

$$z^3 - i_0 z + 2j_0 = 0,$$

je m'occuperai des surfaces représentées par les équations

$$\begin{aligned} z_1^2 i + 2z_1 h + k &= 0, \\ z_2^2 i + 2z_2 h + k &= 0, \\ z_3^2 i + 2z_3 h + k &= 0. \end{aligned}$$

(¹) SALMON, *Algèbre supérieure*, § 157.

SUR LA REPRÉSENTATION

SUR UN PLAN DE LA SURFACE DU TROISIÈME ORDRE

QUI EST LA RÉCIPROQUE DE LA SURFACE DE STEINER.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1872.

1. On dit qu'une surface S peut être représentée sur un plan P, lorsque à chaque point M de la surface correspond un point unique et bien déterminé du plan, et réciproquement lorsque à chaque point du plan correspond un point unique et bien déterminé de la surface.

Lorsque le point M de la surface décrit une courbe, le point m, qui lui correspond sur le plan, décrit une autre courbe qui est, pour ainsi dire, l'image de la première, et l'on comprend que les propriétés des courbes tracées sur la surface puissent se déduire de celles des courbes qui sont leurs images.

La projection stéréographique, qui constitue un des moyens que l'on peut employer pour représenter, dans le sens que je viens d'indiquer, la sphère sur le plan, a déjà depuis longtemps familiarisé les géomètres avec ces considérations qui permettent non seulement de transporter à la sphère les propriétés descriptives et métriques des figures planes, mais encore, en sortant de la sphère, d'établir des propriétés importantes des figures dans l'espace.

Le but de cette Note est d'appliquer la même méthode à l'étude d'une surface remarquable du troisième ordre, que j'ai déjà étudiée analytiquement dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (¹).

(¹) *Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner*, 2ᵉ série, t. XI, 1872.

2. Il est facile de voir qu'une surface quelconque du troisième ordre peut être représentée sur un plan.

Une telle surface contient en général 27 droites; soient D et D′ deux de ces droites qui ne sont pas dans un même plan.

Par un point M de la surface on peut mener une droite unique et bien déterminée qui s'appuie sur D et D′, cette droite rencontrera un plan P arbitrairement choisi en un point bien déterminé m; réciproquement, le point m étant donné, on ne pourra mener par ce point qu'une droite s'appuyant sur D et D′; cette droite rencontrera la surface du troisième ordre en deux points situés respectivement sur D et D′, et en un troisième point M distinct de ces points et parfaitement déterminé.

On obtient ainsi, on le voit, une représentation de la surface sur le plan P; on aurait évidemment pu, dans le même but, employer au lieu des droites D et D′ une cubique gauche quelconque tracée sur la surface, car une des propriétés caractéristiques de cette courbe consiste en ce que, par chaque point de l'espace, on ne peut mener qu'une seule droite qui la rencontre en deux points (¹).

3. Dans ce qui suit, je m'occuperai spécialement de la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre S qui contient les six arêtes d'un tétraèdre T.

En prenant ce tétraèdre pour tétraèdre de référence, on voit que l'équation d'une pareille surface est de la forme

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{u}=0.$$

La surface qui lui est réciproque (c'est-à-dire la surface qui est, par rapport à une surface du second degré, le lieu des pôles des plans qui lui sont tangents) est une surface du quatrième ordre; et cette nouvelle surface jouit de la propriété d'être coupée

(¹) Sur la représentation sur un plan d'une surface du troisième ordre, *voir* le beau Mémoire de M. Cremona : *Sur les surfaces du troisième ordre*, et la *Géométrie de situation*, de M. Reye, p. 172 et 299.

M. Cremona a aussi publié (*Comptes rendus de l'Institut lombard*, 1867) un Mémoire sur la représentation sur un plan de la surface de Steiner, mais je n'ai pu en prendre connaissance.

suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents, c'est donc la *surface* dite *de Steiner*.

On en conclut que, si l'on considère un cône circonscrit à S, et ayant pour sommet un point de cette surface, ce cône se compose de deux cônes du second degré; la courbe de contact se décompose aussi en deux courbes distinctes qui sont évidemment des cubiques gauches.

4. Quand on étudie la représentation sur un plan de la surface S, on voit facilement que l'on peut effectuer la représentation de telle sorte qu'à toute courbe plane de S corresponde, sur le plan, une cubique passant par six points fixes (II) qui sont les sommets d'un quadrilatère complet Q, et qui correspondent d'ailleurs aux six arêtes du tétraèdre situé sur S.

Cela posé, soient A et B deux points de S et a, b les points qui leur correspondent sur le plan; soient, de plus, C le troisième point où la droite AB rencontre S et c le point correspondant.

Toutes les sections planes de S, qui passent par A et B, passent également par le point C; les cubiques qui sont leurs images passent donc aussi toutes par le point c, d'où il suit que ce point est le *neuvième point* commun aux cubiques qui passent par les points a et b et les six sommets du quadrilatère Q.

Pour déterminer facilement ce neuvième point, supposons, pour un instant, que les points a et b soient les ombilics du plan, c'est-à-dire les points de l'infini où se croisent tous les cercles de ce plan. Si l'on délaisse un des côtés du quadrilatère Q, les trois autres côtés déterminent un triangle, et le cercle circonscrit à ce triangle constitue, avec le côté dont j'ai parlé, une cubique passant par les huit points a, b et (II); ce cercle passe donc par le neuvième point.

D'où cette proposition :

En prenant, trois à trois, les quatre côtés d'un quadrilatère complet, on détermine quatre triangles; les cercles circonscrits à ces triangles se coupent en un même point O, *qui est le neuvième point commun aux cubiques qui passent par les ombilics du plan et par les six sommets du quadrilatère.*

Imaginons la parabole inscrite dans ce quadrilatère, les quatre triangles dont je viens de parler lui sont circonscrits, et l'on sait que le cercle circonscrit à un triangle, circonscrit lui-même à une parabole, passe par le foyer de cette courbe.

Le point O est donc le foyer de cette parabole, ou encore le point de rencontre des tangentes qu'on peut lui mener par les ombilics.

5. Revenant maintenant au cas général, nous voyons que pour construire le neuvième point commun aux courbes du troisième ordre, qui passent par les six sommets d'un quadrilatère complet et deux points donnés a et b, il suffit d'inscrire dans le quadrilatère une conique tangente à ab, et par les points a et b de mener des tangentes à cette courbe; le point d'intersection de ces droites est le point cherché.

En d'autres termes, *si trois points* A, B *et* C *de la surface* S *sont en ligne droite, leurs images a, b et c sur le plan forment un triangle dans lequel on peut inscrire une conique inscrite dans le quadrilatère* Q.

Pour abréger, j'appellerai simplement *coniques du faisceau* les coniques inscrites dans le quadrilatère Q.

6. Considérons une droite tangente au point A à la surface S, ou, si l'on veut, passant par le point A et le point infiniment voisin A'; si l'on désigne par a et a' les images des points A et A', on voit que, pour obtenir l'image du troisième point où la tangente rencontre la surface, il suffit de construire une conique du faisceau tangente à aa', et de mener par a la seconde tangente à cette conique; le point de contact b de cette tangente est l'image du point cherché.

D'où les conséquences suivantes :

1° *Le plan mené au point* A, *tangentiellement à* S, *coupe cette surface suivant une courbe du troisième ordre à point double, lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point a aux coniques du faisceau.*

2° *Les lignes asymptotiques de la surface* S *ont pour images les coniques du faisceau.*

En effet, soit t une tangente à l'une de ces coniques et touchant

cette courbe au point a, le point de contact de la deuxième tangente, qu'on peut mener du point a à la conique, se confond avec le point lui-même, la proposition est donc démontrée [1].

3° *Si l'on circonscrit à la surface les deux cônes du second degré qui ont pour sommet un point* A *de cette surface, les deux cubiques de contact ont pour images les tangentes aux deux coniques du réseau qui se croisent au point a.*

7. Soient z une conique du réseau représentant l'asymptotique Z de la surface S et M un point de cette asymptotique; il est le sommet de deux cônes du second degré circonscrits à S et qui la touchent suivant deux cubiques gauches dont l'une est représentée par la tangente menée en m à la cubique z; je dirai que cette cubique *appartient* à l'asymptotique Z, en sorte que l'ensemble des cubiques appartenant à cette courbe sera représenté par l'ensemble des droites tangentes à z.

En se reportant au n° 7, on déduira facilement de cette définition la proposition suivante :

La surface développable, qui a pour arête de rebroussement une cubique appartenant à une asymptotique Z, *coupe la surface suivant cette asymptotique.*

D'où encore :

Si l'on circonscrit à S *les deux cônes du second degré qui ont pour sommet un point* M *de cette surface, les surfaces développables dont les courbes de contact sont les arêtes de rebroussement coupent* S *suivant les asymptotiques qui se croisent au point* M.

8. Soient une cubique quelconque appartenant à l'asymptotique Z et A l'un de ses points; joignons A à un autre point quel-

---

[1] Clebsch a le premier trouvé les asymptotiques de la surface de Steiner dont on déduit, par réciprocité, les asymptotiques de la surface donnée.

M. Darboux (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. I, p. 355) a, d'une façon plus générale, déterminé les lignes asymptotiques des surfaces comprises dans l'équation

$$Ax^n + By^n + Cz^n + Dt^n = 0.$$

conque B de la cubique, la droite ainsi obtenue rencontre S en un point C dont il est facile d'avoir l'image.

En effet, a et b étant les images des points A et B et c l'image du point C, il suffit (n° 5), pour construire le point c, de considérer la conique σ qui est tangente à ab et de mener par les points a et b deux tangentes à cette courbe; le point d'intersection de ces deux droites, qui est le point c, est nécessairement sur la tangente menée par le point a; d'où cette conséquence importante :

Étant donnée une cubique quelconque appartenant à l'asymptotique Z, *si l'on imagine un cône quelconque du second degré contenant cette cubique, il coupe la surface* S *suivant une seconde cubique qui appartient également à l'asymptotique* Z;

Ou autrement :

Deux cubiques appartenant à la même asymptotique sont situées sur un même cône du second degré, ayant pour sommet le point d'intersection de ces courbes qui est distinct des sommets du tétraèdre fondamental T.

9. Lemme. — *Quand un tétraèdre est inscrit dans une cubique gauche, toute corde de la cubique coupe les faces du tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Soient maintenant deux cubiques quelconques appartenant à une asymptotique Z; ces deux cubiques sont toutes deux circonscrites au tétraèdre T et sont situées sur un même cône du second degré; elles ont donc une infinité de cordes communes; on déduit, de là et du lemme précédent, la proposition suivante :

Les cordes de toutes les cubiques appartenant à l'asymptotique Z *coupent les faces du tétraèdre* T *en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Leur ensemble constitue ainsi le complexe remarquable du second ordre étudié par MM. Chasles, Reye, Lie, Darboux [1].

[1] *Voir* notamment Reye, *Geometrie der Lage*, t. II, p. 126 et 299.

En particulier, les tangentes aux cubiques font partie du complexe ainsi que les tangentes à l'asymptotique Z qui est l'enveloppe de ces cubiques. Par suite :

Les tangentes à une asymptotique Z *rencontrent les quatre faces du tétraèdre* T *en quatre points dont le rapport anharmonique est une quantité constante* ζ, *et le complexe* (Z) *des droites, qui sont partagées dans le même rapport par les faces du tétraèdre, se compose des cordes des cubiques appartenant à cette asymptotique* [1].

On déduit encore de ce qui précède les propositions suivantes :

Étant données deux cubiques gauches situées sur un même cône du second ordre, ces deux cubiques se coupent en quatre points A, B, C *et* D *distincts du sommet du cône; cela posé, les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, se coupent suivant une courbe du dixième ordre et une courbe* K *du sixième ordre et de quatrième classe; cette courbe* K, *les deux cubiques gauches et les six arêtes du tétraèdre* ABCD *sont situées sur une même surface du troisième ordre dont* K *est une asymptotique.*

Le cône du complexe ayant pour sommet un point donné de la surface S *est le cône du second degré qui contient les deux cubiques appartenant à l'asymptotique* Z *et se croisant en ce point.*

Tous les cônes circonscrits à S *et ayant leur sommet sur* Z *sont des cônes du complexe.*

10. Une droite quelconque de l'espace, rencontrant la surface fondamentale S aux points A, B et C, peut être représentée par le triangle abc, dont les sommets sont les images des points A, B et C.

Une droite de l'espace aura donc pour image un triangle circonscriptible à une conique du faisceau.

En particulier, toutes les droites du complexe (Z) ont pour

[1] *Cf.* Sophus Lie, *Ueber Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen* (*Math. Ann.*, t. V).

images les divers triangles que l'on peut circonscrire à la conique z.

Soient abc l'un de ces triangles et α, β, γ les points où z est respectivement touchée par les côtés bc, ca, ab. Le plan mené par A tangentiellement à S coupe cette surface (n° 6, 1°) suivant une cubique à point double qui a pour image le lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point a aux coniques du faisceau; cette courbe, et par suite le plan tangent, passe donc par les points de l'asymptotique qui ont leurs images en β et γ; on démontrerait de même que les plans menés en B et C, tangentiellement à S, passent respectivement par les points de l'asymptotique dont les images sont γ, α et α, β.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on coupe la surface S *par une droite quelconque du complexe* (Z), *les plans tangents, menés à la surface aux trois points de rencontre, forment un trièdre dont les trois arêtes rencontrent* Z.

Autrement :

Si les trois faces d'un trièdre circonscrit à la surface S *la touchent en trois points situés en ligne droite, des neuf points d'intersection des arêtes du trièdre avec la surface, il y en a trois qui sont situés sur une même asymptotique.*

Réciproquement :

Un triangle quelconque étant inscrit dans une asymptotique Z, *on peut toujours construire un trièdre dont les faces passent par les côtés de ce triangle et qui touchent la surface en trois points situés en ligne droite. Cette droite appartient au complexe* (Z).

11. Soit K une conique quelconque située dans le plan sur lequel on fait l'image de la surface; on peut construire deux coniques du faisceau C et C′ telles qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire des triangles inscrits dans K.

L'ensemble des triangles circonscrits à C représente un système de droites s'appuyant sur K en trois points; K est donc l'intersection de S par une surface réglée V. Comme, d'ailleurs, la même

courbe est l'intersection de S par les droites dont l'image est formée par les triangles circonscrits à C′, on voit que la surface V admet deux systèmes de génératrices rectilignes; c'est par conséquent une surface du second ordre qui, d'ailleurs, passe par les quatre sommets du tétraèdre T.

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Toute conique du plan est l'image d'une courbe du sixième ordre, intersection de S *et d'une surface du second ordre passant par les sommets du tétraèdre* T;

Et réciproquement :

Si l'on coupe la surface S *par une surface du second ordre passant par les sommets du tétraèdre* T, *la courbe d'intersection a pour image une conique.*

12. En particulier, une asymptotique Z de la surface est située sur une surface du second ordre qui admet deux systèmes de génératrices rectilignes (G) et (G′).

Si l'on applique aux points de rencontre de la courbe et de ces droites la dernière proposition du n° 10, on obtient les théorèmes suivants :

Par chaque génératrice G, *on peut mener quatre plans tangents à la surface; des quatre points de contact trois sont sur une même ligne droite* D, *qui appartient au complexe* (Z) *et qui engendre une surface du second ordre* (A) *coupant* S *suivant une courbe* A; *le quatrième point de contact décrit une courbe* A′.

Par chaque génératrice G′, *on peut mener quatre plans tangents à la surface; un des points de contact est situé sur la courbe* A, *les trois autres sont sur une ligne droite* D′ *qui engendre la surface du second ordre* (A′) *qui contient la courbe* A′.

On déduit de là que *la surface développable circonscrite à* S *et à la surface du second ordre qui contient l'asymptotique* Z *se décompose en deux surfaces du quatrième ordre touchant* S *le long des courbes* A *et* A′.

13. Les beaux théorèmes de Poncelet sur les polygones circonscrits à une conique, tandis que leurs sommets décrivent d'autres coniques, conduisent à plusieurs propriétés intéressantes de la surface S, relativement surtout aux diverses surfaces réglées que l'on peut faire passer par des courbes tracées sur ces surfaces; je reviendrai plus tard sur ce sujet qui, pour être convenablement traité, exige une étude préalable du théorème de Poncelet lui-même.

SUR

L'APPLICATION DE LA THÉORIE DES FORMES BINAIRES

A LA GÉOMÉTRIE DES COURBES

TRACÉES SUR UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1872.

I. — *Considérations préliminaires.*

1. Bien que les considérations suivantes puissent être appliquées à toutes les surfaces algébriques, et en particulier au plan [1], je ne les développerai, dans ce Mémoire, que relativement aux courbes que l'on peut tracer sur une surface du second ordre.

Soit S une surface du second ordre, elle possède deux systèmes de génératrices rectilignes; avec M. Chasles [*Théorie des courbes tracées sur l'hyperboloïde à une nappe* (*Comptes rendus*, 1861)] j'appellerai *directrices* les droites de l'un de ces systèmes, en réservant le nom de *génératrices* aux droites de l'autre système.

Prenons arbitrairement sur S une conique K que je désignerai sous le nom de *conique fondamentale;* cette courbe est *unicursale,* c'est-à-dire qu'on peut désigner chacun de ses points par la valeur d'un paramètre t et de telle sorte qu'à chaque valeur du paramètre corresponde un point unique de la courbe.

Soit M un point de la surface S; par ce point passe une directrice de la surface coupant K en un point unique, dont je désignerai le paramètre par x; par ce même point passe une généra-

[1] Le cas du plan présente naturellement un très grand intérêt, mais demande pour l'application de la théorie quelques explications dans lesquelles je n'ai pas voulu entrer ici.

trice de la surface coupant K en un point unique, dont je désignerai le paramètre par y. Il est clair, du reste, que le point M est complètement déterminé et sans ambiguïté par les deux quantités x et y; je les appellerai les *coordonnées du point* M.

L'équation d'une courbe tracée sur S sera de la forme $f(x,y)=0$; son degré p, relativement à la variable x, indiquant en combien de points elle est coupée par une génératrice quelconque, et son degré q, relativement à la variable y, indiquant en combien de points elle est coupée par une directrice. (*Voy.* Chasles, *loc. cit.*)

2. On connaît le procédé ingénieux employé par Plücker pour rendre homogène l'équation $f(x, y) = 0$, en remplaçant les variables x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; nous emploierons ici un procédé analogue en remplaçant x par $\frac{x}{x'}$ et y par $\frac{y}{y'}$. De cette façon, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur S deviendra

$$F(x, x'; y, y') = 0,$$

le polynome F étant homogène et du degré p par rapport aux deux variables x et x', homogène et du degré q par rapport aux variables y et y'.

3. Cela posé, je rappellerai d'abord ce que l'on nomme *émanant* d'une forme binaire ou d'un polynome algébrique homogène à deux indéterminées.

Soit $U(x, x')$ un tel polynome; on appelle *émanants* de ce polynome les divers polynomes compris dans les expressions suivantes :

$$y\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dx'},$$

$$\frac{1}{2}\left(y^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2yy'\frac{d^2U}{dx\,dx'} + y'^2\frac{d^2U}{dx'^2}\right),$$

$$\frac{1}{2.3}\left(y^3\frac{d^3U}{dx^3} + 3y^2y'\frac{d^3U}{dx^2\,dx'} + 3yy'^2\frac{d^3U}{dx\,dx'^2} + y'^3\frac{d^3U}{dx'^3}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont la loi est facile à saisir.

Pour abréger, je désignerai ces émanants par la notation $(U)_1$, $(U)_2$, $(U)_3$, ...; la parenthèse indiquant un émanant de la forme U, et l'indice qui lui est adjoint le degré de cet émanant par rapport aux lettres y et y'.

Lorsqu'une forme est de degré pair, elle possède un émanant dans lequel les variables x et y entrent au même degré; j'appellerai cet émanant *émanant principal* de la forme, et je le désignerai par la notation (U), en omettant l'indice adjoint à la parenthèse, lorsque cela ne donnera lieu à aucune ambiguïté.

4. Il résulte de ce qui précède que tout émanant d'une forme U se réduit à cette forme lorsque l'on identifie les variables x, x' et y, y'.

Soit U la forme du degré $(p+q)$ à laquelle se réduit le polynome $F(x, x'; y, y')$ lorsqu'on fait $x' = x$ et $y' = y$; l'expression

$$F(x, x'; y, y') - (U)_q$$

est homogène et du degré p par rapport aux variables x et x', homogène et du degré q par rapport aux variables y et y'; de plus elle s'annule lorsqu'on fait $x = x'$ et $y = y'$, elle est donc divisible par

$$yx' - xy' = \omega,$$

et l'on peut poser

$$F(x, x'; y, y') = (U)_q + \omega F_1(x, x'; y, y'),$$

F_1 désignant un polynome du degré $p-1$ par rapport aux variables x, x', et du degré $q-1$ par rapport aux variables y, y'.

On peut appliquer au polynome F_1 le même raisonnement et, en continuant de proche en proche, mettre l'équation d'une courbe, tracée sur la surface du second ordre S, sous la forme suivante :

$$\Phi = (U)_q + \omega(V)_{q-1} + \omega^2(W)_{q-2} + \ldots = 0,$$

où U, V, W, ... désignent respectivement des polynomes entiers en x et x', des degrés $p+q$, $p+q-2$, $p+q-4$, ...

5. En particulier, si l'on a $p = q$, l'équation de la courbe pourra se mettre sous la forme

$$\Phi = (U) + \omega(V) + \omega^2(W) + \ldots = 0,$$

où U, V et W désignent respectivement des polynomes entiers en x et x', des degrés $2p$, $2(p-1)$, $2(p-2)$; et je ferai observer que, dans ce cas, Φ est homogène et du degré p par rapport aux quantités $x-y$, xy et $x+y$ [1].

6. Par la forme précédente que j'ai donnée à l'équation d'une courbe algébrique, on voit que cette équation s'obtient en égalant à zéro un polynome Φ, qui est un covariant double des formes U, V, W, ...; on sait, en effet, que ω est un covariant double de toutes les formes et qu'un émanant quelconque d'une forme est un covariant double de cette forme.

De là résulte que l'étude de cette courbe se rattache intimement à l'étude simultanée de ces formes; je ne veux pas dire par là qu'elle s'y réduise, car, pour étudier complètement une courbe, il est nécessaire de la comparer avec d'autres courbes qui introduisent d'autres formes dans cette étude.

On pourra toujours néanmoins, dans un calcul relatif à un certain nombre de courbes, faire en sorte que l'on n'ait à considérer que des invariants ou des covariants d'un système de formes binaires, et profiter de leurs propriétés connues pour en déduire des propriétés géométriques de ce système de courbes, ou pour simplifier les opérations.

S'il s'agit, par exemple, de calculer un covariant simple, il suffira de calculer son premier terme; s'il s'agit d'un invariant, on pourra le calculer sous sa forme canonique [2].

7. Éclaircissons ceci par un exemple. Je ferai auparavant remarquer que, si O désigne le pôle du plan de la conique fondamentale K par rapport à la surface S, les coordonnées d'un point M de cette surface étant x et y, les coordonnées du point M' où le rayon OM perce S sont y et x. De là résulte que si une courbe peut être placée sur un cône ayant pour sommet le point O, son équation doit être symétrique en x et y; elle doit être par conséquent de la forme

$$(\mathrm{U})+\omega^2(\mathrm{W})+\ldots=0,$$

et ne pas contenir les puissances impaires de ω.

---

(1) Ici, pour abréger, je fais, comme je le ferai plus communément, dans la suite de ce Mémoire, $x'=y'=1$.

(2) *Voir* en général, sur cette théorie des formes, l'*Algèbre supérieure* de SALMON (Paris, Gauthier-Villars).

En particulier, considérons une biquadratique gauche tracée sur S, c'est-à-dire la courbe du quatrième ordre qui résulte de l'intersection de S par une surface du second ordre n'ayant avec elle aucune génératrice commune. Comme on peut la placer sur quatre cônes différents, son équation pourra, de quatre façons différentes, se mettre sous la forme

$$(\mathrm{U})+k\omega^2=0,$$

k désignant une constante et U un polynome du quatrième degré; si l'on fait

$$\mathrm{U}=ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e,$$

l'équation de la courbe sera par conséquent

$$y^2(ax^2+2bx+c)+2y(bx^2+2cx+d)+(cx^2+2dx+e)+k(y-x)^2=0. \tag{1}$$

Pour trouver les génératrices de la surface qui touchent la courbe, il faut chercher pour quelles valeurs de y, x acquiert des racines égales. Ces valeurs seront données par l'équation $\mathrm{F}(y)=0$, où F désigne le discriminant de l'équation précédente pris par rapport à x; de même, pour une raison de symétrie, les directrices de la surface tangentes à la courbe seront déterminées par l'équation $\mathrm{F}(x)=0$.

Quelle est l'équation générale des biquadratiques tangentes à quatre directrices données et pouvant être placées sur un cône dont le sommet est en O?

Il est clair que, pour résoudre cette question, il faut déterminer de la façon la plus générale le polynome U et la constante k de telle façon que le discriminant $\mathrm{F}(x)$ soit un polynome donné.

On voit aussi facilement que le problème est identique avec l'intégration de l'équation différentielle d'Euler, qui sert de point de départ à la théorie des fonctions elliptiques. En effet, l'équation (1), étant successivement ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et de y, peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$\mathrm{M}x^2+2\mathrm{N}x+\mathrm{P}=0 \quad \text{et} \quad \mathrm{M}'y^2+2\mathrm{N}'y+\mathrm{P}'=0,$$

d'où l'on déduit par la différentiation

$$(\mathrm{M}x+\mathrm{N})\,dx+(\mathrm{M}'y+\mathrm{N}')\,dy=0;$$

évidemment

$$Mx + N = \sqrt{F(x)} \quad \text{et} \quad M'y + N' = \sqrt{F(y)},$$

l'équation devient donc

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{F(y)}};$$

et l'on voit que, pour intégrer cette équation, il faut (ce qui est précisément la méthode de Cauchy) déterminer le polynome U et la constante k de la façon que j'ai indiquée.

Comme le discriminant $F(x)$ est un covariant de la forme U, il suffit de calculer son premier terme; en ne conservant dans U que les termes du degré le plus élevé en x, il se réduit à $x^2(ay^2 + 2by + c + k)$, d'où l'on voit que le terme de $F(x)$ du degré le plus élevé en x est $(ac - b^2)x^4 + kax^4$; par suite on a $F(x) = H + kU$, H désignant le hessien de U.

8. Supposons maintenant que nous remplacions U par $\alpha U + 6\beta H$, α et β désignant des quantités numériques indéterminées. Sans faire de nouveau calcul, on sait, par les importantes formules dues à M. Cayley, que H devient $(\alpha\beta S + 9\beta^2 T)U + (\alpha^2 - 3\beta^2 S)H$ [1], S et T désignant les invariants fondamentaux de la forme U.

Par suite $F(x)$ devient $MU + (\alpha^2 - 3\beta^2 S + 6k\beta)H$, M désignant un nombre dont il est inutile d'écrire la valeur.

Pour que le discriminant $F(x)$ prenne donc (à un facteur numérique près) une valeur donnée U, il suffit de choisir la constante k de façon que l'équation $\alpha^2 - 3\beta^2 S + 6k\beta = 0$ soit satisfaite. D'où la proposition suivante :

Soit U *un polynome quelconque du quatrième degré; en désignant par* H *son hessien et par* S *son invariant quadratique, l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{dx}{\sqrt{U(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{U(y)}}$$

est

$$6\beta(\alpha U + 6\beta H)_2 + (3\beta^2 S - \alpha^2)(x - y)^2 = 0,$$

[1] SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 183.

le rapport $\alpha : \beta$ *étant la constante arbitraire introduite par l'intégration.*

La parenthèse affectée de l'indice 2 désigne ici l'émanant principal de la forme $\alpha U + 6\beta H$.

II. — *Équation d'une section plane; système de coordonnées dans l'espace.*

9. L'équation d'une conique tracée sur la surface est de la forme

$$y(Ax + B) + (Bx + C) + K(y - x) = 0; \tag{2}$$

je considérerai les quantités A, B, C, K, qui entrent dans cette équation, comme les coordonnées du point de l'espace dont le plan polaire par rapport à la surface est le plan de la conique.

On pourrait aussi les regarder comme les coordonnées tangentielles de ce plan, et je le ferai quelquefois; mais généralement je les emploierai comme coordonnées ponctuelles.

Cela posé, étant données les équations de deux coniques

$$y(Ax + B) + (Bx + C) + K(y - x) = 0$$

et

$$y(A'x + B') + (B'x + C') + K'(y - x) = 0,$$

on voit, par un calcul facile, que la condition nécessaire et suffisante, pour que le plan d'une de ces coniques contienne le pôle du plan de l'autre, est contenue dans la relation suivante : $AC' + CA' - 2BB' + 2KK' = 0$. Par suite, l'équation du plan polaire (par rapport à la surface) du point de l'espace dont les coordonnées sont A', B', C', K' est

$$AC' + CA' - 2BB' + 2KK' = 0;$$

et, cette équation étant linéaire par rapport aux variables, il en résulte que le système de coordonnées employé est simplement un système particulier de coordonnées tétraédrales.

10. Dans tout ce qui suit, on voit que j'emploierai simultanément deux systèmes de coordonnées, dont l'un (en x et y) ne se rapporte qu'aux courbes tracées sur la surface, tandis que l'autre (en A, B, C, K) s'étend à tous les points de l'espace.

La même équation, suivant que l'on y considérera les x, y ou les A, B, C, K comme les coordonnées courantes, présentera un sens différent.

11. Cherchons les coordonnées rectilignes d'un point (x, y) de la surface. En désignant par X, Y les coordonnées courantes, la conique suivant laquelle la surface est coupée par le plan polaire du point (ici cette conique se réduit à deux droites) a pour équation

$$(\mathrm{X}-x)(\mathrm{Y}-y)=\mathrm{XY}-y\mathrm{X}-x\mathrm{Y}+xy=0;$$

si l'on identifie cette équation avec l'équation (2), on en déduit les relations

$$\frac{\mathrm{A}}{1}=\frac{\mathrm{B}+\mathrm{K}}{-x}=\frac{\mathrm{B}-\mathrm{K}}{-y}=\frac{\mathrm{C}}{xy},$$

d'où encore

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{A}}{1}=\frac{\mathrm{B}}{-\frac{x+y}{2}}=\frac{\mathrm{C}}{xy}=\frac{\mathrm{K}}{\frac{y-x}{2}}.$$

Ces formules serviront à trouver en coordonnées rectilignes l'équation d'une courbe donnée en *coordonnées de la surface*, et je ferai, à ce sujet, cette remarque importante que si, dans un invariant de la forme (A, B, C) et d'un nombre quelconque d'autres formes, on remplace respectivement A, B, C, K par les valeurs données ci-dessus, le résultat sera un covariant du système composé de ces formes.

12. En particulier, supposons que l'équation d'une courbe M soit de même degré p par rapport à x et à y; on sait que (nº 5), dans ce cas, son équation est homogène par rapport aux quantités $x-y$, $x+y$ et xy; en remplaçant ces quantités par les expressions données, on obtiendra l'équation d'une surface de degré p, qui contiendra la courbe et dont cette dernière constituera l'intersection complète avec la surface du second degré fondamentale [1]; et je ferai observer que cette équation sera un invariant du système de formes qui caractérisent la courbe.

---

[1] *Voir*, à ce sujet, la Note de M. Halphen, même Tome, p. 19.

Ainsi, l'équation d'une biquadratique étant

$$y^2(ax^2+2bx+c)+2y(bx^2+2cx+d)+cy^2+2dx+e+k(y-x)^2=0,$$

on pourra la mettre sous la forme

$$ax^2y^2+2bxy(x+y)+c[(y+x)^2+2xy]+2d(x+y)+e+k(y-x)^2=0,$$

d'où l'on déduira, en employant le tableau (3), l'équation en coordonnées rectilignes d'une des surfaces du second degré qui contient la biquadratique

$$a\mathrm{C}^2-4b\mathrm{BC}+c(4\mathrm{B}^2+2\mathrm{AC})-4d\mathrm{BA}+e\mathrm{A}^2+4k\mathrm{K}^2=0,$$

ou simplement $\mathrm{E}+2k\mathrm{K}^2=0$, en désignant par E l'invariant fondamental des formes (A, B, C) et (a, b, c, d, e)

$$\tfrac{1}{2}a\mathrm{C}^2-2b\mathrm{BC}+c(2\mathrm{B}^2+\mathrm{AC})-2d\mathrm{BA}+\tfrac{1}{2}e\mathrm{A}^2.$$

13. Si l'on élimine les variables x et y entre les équations (3), on obtient évidemment l'équation en coordonnées rectilignes de la surface du second degré S. Cette équation est $\mathrm{K}^2+\mathrm{D}=0$, en représentant, comme je le ferai constamment dans la suite de ces recherches, par D l'invariant $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2$ de la forme (A, B, C).

III. — *Recherche de la forme la plus simple que l'on peut donner à l'équation d'une courbe; groupes de courbes.*

14. On peut, en faisant varier la conique fondamentale, donner une infinité de formes à l'équation d'une courbe donnée M.

Les formules de transformation peuvent évidemment (sans nuire à leur généralité) être mises sous la forme

$$\mathrm{X}=x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta},$$

α, β, γ et δ désignant des quantités numériques; en sorte que l'on dispose de trois constantes arbitraires.

La chose la plus importante est d'obtenir une équation de la courbe donnée dans laquelle entre le moins de formes possible.

A ce point de vue, on établit facilement que l'équation des cubiques gauches peut, d'une infinité de façons, être mise sous une forme qui ne contienne qu'une forme binaire cubique; sa forme générale est en effet

$$(ax^3+3bx^2+3cx+d)_1+(a'x+b'y)(y-x)=0,$$

et l'on peut, d'une infinité de manières, disposer des trois constantes arbitraires en sorte que a' et b' s'évanouissent.

L'équation de la biquadratique peut (comme on le sait déjà) être mise, de quatre façons différentes, sous une forme où n'apparaît qu'un polynome du quatrième degré.

L'équation générale de la quartique gauche, c'est-à-dire de la courbe du quatrième ordre par laquelle on ne peut faire passer qu'une surface du second ordre, est

$$(ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e)_1+(a'x^2+2b'x+c')(y-x)=0,$$

et un calcul simple fait voir que l'on peut, d'une seule façon, disposer des constantes arbitraires en sorte que a', b' et c' s'évanouissent; on peut donc mettre l'équation de la quartique (et cela d'une seule manière bien déterminée) sous une forme où n'apparaît qu'une seule forme biquadratique; ce sera pour nous l'équation réduite de la courbe.

15. Étant donné un système quelconque de formes, je classerai dans un même groupe toutes les courbes dont l'équation ne dépend que de ces formes et de leurs divers covariants, et je dirai que toutes ces courbes constituent les formes du groupe.

Ainsi, étant donnée une forme biquadratique U, les courbes qui appartiendront à son groupe seront toutes celles dont l'équation renferme seulement la forme U elle-même, son hessien H et son covariant du sixième degré J.

Si l'on s'en tient aux courbes dont le degré ne dépasse pas 4, on voit que ce groupe contient seulement des biquadratiques et des quartiques gauches.

Toutes les biquadratiques du groupe forment un système conjugué par rapport à un tétraèdre fixe qui caractérise le groupe; c'est-à-dire que les sommets de ce tétraèdre sont les sommets des quatre cônes qui contiennent chacune de ces courbes. Les quartiques jouissent de propriétés analogues par rapport à ce tétraèdre.

C'est le groupe dont je viens de parler que je veux étudier d'abord dans la suite de ces recherches.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1872 et 1873.

1. *Les coniques, inscrites dans un quadrilatère fixe, qui touchent une courbe de troisième classe donnée* K, *sont au nombre de douze. Les douze points de contact, les neuf points de rebroussement de* K *et les six sommets du quadrilatère circonscrit sont situés sur une même courbe du cinquième ordre.*

En effet, soient

$$(a, b, c, d)(\lambda, \mu)^2=0, \qquad (A, B, C)(\lambda, \mu)^2=0, \qquad (A', B', C')(\lambda, \mu)^2=0$$

les équations respectives d'une courbe de troisième classe K et de deux coniques C et C' inscrites dans le quadrilatère Q.

L'équation

$$J=\begin{vmatrix} ac-b^2 & ad-bc & bd-c^2 \\ A & B & C \\ A+\lambda A' & B+\lambda B' & C+\lambda C' \end{vmatrix}=0$$

(qui est indépendante de λ) représente une courbe du cinquième ordre P [1].

L'invariant J s'annule :

1° Pour $ac-b^2=ad-bc=bd-c^2=0$: donc P contient les neuf points de rebroussement de K;

2° Pour $a=b=A+\lambda A'=B+\lambda B'=0$: donc P contient les douze points des coniques tangentes à K et inscrites dans Q;

3° Pour $A+\lambda A'=B+\lambda B'=C+\lambda C'=0$: donc P contient les six sommets du quadrilatère Q.

2. *Étant donnés, sur l'ovale de Cassini dont les foyer ssont f et g, deux points a et b, désignons par α et β les points où les normales en a et b coupent l'axe de la courbe qui renferme les foyers, et par i le point où cet axe est coupé par la perpendi-*

---

[1] *Voir* mon *Mémoire de Géométrie analytique* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XVII, § II).

culaire élevée sur le milieu du segment ab, démontrer la relation

$$\frac{1}{i\beta} - \frac{1}{i\alpha} = \frac{1}{ig} - \frac{1}{if}.$$

3. *En un point* M *d'un tore, on mène une droite* MT, *située dans le plan tangent. Soient a et b les points où cette droite coupe la surface; menons les deux sphères qui, passant par* M, *touchent la surface aux points a et b; désignons par* α *et* β *les centres de ces sphères et par* I *le point milieu du segment* $\alpha\beta$.

Cela posé, si, par le point M, *nous menons une droite parallèle à la droite qui joint le point* I *au centre du tore, dirigée dans le même sens et de longueur double, le point extrême de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans le tore par le plan normal passant par* MT.

SUR

LES CONES DU SECOND DEGRÉ

QUI PASSENT

PAR SIX POINTS DONNÉS DE L'ESPACE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1873.

1. Un grand nombre de propriétés intéressantes des surfaces du second ordre (ou *quadriques*) qui passent par six points donnés de l'espace dépendent de la décomposition d'un polynome du sixième degré en la somme de quatre carrés.

Dans cette Note, je me restreindrai au cas le plus simple où on le met sous la forme d'une somme de trois carrés, ce qui correspond, au point de vue géométrique, à l'étude des cônes du second ordre que l'on peut mener par six points ([1]).

2. Comme, dans tout ce qui suit, je m'appuie surtout sur quelques propriétés des cubiques gauches, je crois tout d'abord devoir les rappeler brièvement.

Soit $a\lambda^3 + 3b\lambda^2 + 3c\lambda + d = 0$ l'équation d'un plan mobile, λ désignant une variable numérique arbitraire; ce plan enveloppe une surface du quatrième ordre, dont l'arête de rebroussement est une cubique gauche K, définie par le système d'équations

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d};$$

([1]) *Voir*, à ce sujet : HIERHOLZER, *Sur une surface du quatrième ordre* (*Math. Ann.*, t. IV, p. 172).

à chaque valeur de λ correspond un plan osculateur de la cubique dont je désignerai le point de contact sous le nom de *point* (λ), en disant que λ est le paramètre de ce point. On voit facilement, d'ailleurs, que les coordonnées de ce point sont données par les formules

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{-\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} = \frac{d}{-\lambda^3}.$$

3. L'équation d'un plan quelconque étant

$$a\delta - 3b\gamma + 3c\beta - d\alpha = 0,$$

on voit que ce plan coupe la cubique K en trois points dont les paramètres sont les racines de l'équation $\alpha\lambda^3 + 3\beta\lambda^2 + 3\gamma\lambda + \delta = 0$; ces points définissent d'ailleurs complètement le plan, en sorte qu'on peut le considérer comme déterminé par le pôlynome du troisième degré qui forme le premier membre de cette équation.

Dans ce qui suit, si A représente d'une façon générale l'équation d'un plan, A′ désignera le polynome qui a pour racines les paramètres des points où ce plan coupe la cubique. Le degré de ce polynome A′ s'abaissera du reste, si le plan passe par le point de la cubique dont le paramètre est infini; l'équation $m = 0$, par exemple, où m désigne une constante, est l'équation du plan osculateur en ce point.

4. Étant donnés six points dans l'espace, on peut mener par ces six points une infinité de cônes du second ordre dont les sommets sont situés sur une surface du quatrième ordre S. Les différentes génératrices de ces cônes forment un *complexe* de droites du sixième ordre; en effet, étant pris arbitrairement un point M de l'espace, pour qu'une droite passant par ce point soit une droite du complexe, il faut et il suffit que l'on puisse construire un cône du second ordre ayant son sommet sur cette droite, et passant par les six points donnés ainsi que par le point M.

Or, d'après un beau Mémoire de M. Hesse (*Crelle*, t. 49), le lieu des sommets des cônes du second ordre que l'on peut mener par sept points donnés est une courbe gauche du sixième ordre Q; le cône du complexe, qui est le cône projectif de cette courbe, est donc aussi du sixième ordre.

5. La surface S est le lieu des courbes Q. On peut, par les six points donnés, mener une cubique gauche bien déterminée K; soit $V = 0$ l'équation du sixième degré dont les racines sont les paramètres de ces points. Je ferai remarquer que le degré de cette équation peut s'abaisser au cinquième, si le système de coordonnées est tellement choisi que le paramètre d'un des points donnés soit égal à l'infini.

Considérons un des cônes du second ordre que l'on peut mener par les six points; son équation peut se mettre, d'une infinité de façons, sous la forme $AC - B^2 = 0$, où $A = 0$ et $C = 0$ désignent les équations de deux plans tangents quelconques à ce cône, et $B = 0$ l'équation du plan des génératrices de contact. Les paramètres des points de rencontre du cône avec la cubique sont évidemment les racines de l'équation $A'C' - B'^2 = 0$; on doit donc avoir $V = B'^2 - A'C'$. Et réciproquement, si l'on met le polynome du sixième degré V sous la forme précédente, on en déduira l'équation d'un cône du second ordre passant par les six points.

6. Étant donnée une droite quelconque du complexe, c'est-à-dire une génératrice d'un cône du second ordre passant par les six points, on peut la déterminer par l'équation $A = 0$ du plan tangent au cône le long de cette droite, et par l'équation $B = 0$ du plan mené par cette droite et par le point de la cubique dont le paramètre est l'infini.

De cette façon, on voit que le polynome B′ sera simplement du second ordre, et l'on devra avoir $V = B'^2 - A'C'$. Soient p, q, r les racines de l'équation $A' = 0$; pour chacune de ces racines, on aura $B' = \sqrt{V}$; et, le polynome B′ étant du second degré, on pourra le déterminer par la formule de Lagrange.

Si l'on pose pour un instant $A' = f(\lambda) = (\lambda - p)(\lambda - q)(\lambda - r)$ et $B' = \varphi(\lambda)$, on aura

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) = {} & \sqrt{V(p)}\frac{(x-q)(x-r)}{f'(p)} \\ & + \sqrt{V(q)}\frac{(x-p)(x-r)}{f'(q)} + \sqrt{V(r)}\frac{(x-p)(x-q)}{f'(r)}.\end{aligned}$$

On déduirait facilement de là les équations $A = 0$ et $B = 0$ des plans qui déterminent la droite du complexe, et l'on voit que ses quatre coordonnées s'exprimeront au moyen des variables p, q, r; l'élimination de ces variables entre les équations qui donnent ces coordonnées fournira l'équation elle-même du complexe.

7. Un plan quelconque est tangent à quatre cônes du complexe. En effet, $A = 0$ étant l'équation de ce plan, si l'on pose

$$A' = (\lambda - p)(\lambda - q)(\lambda - r),$$

on voit, par ce qui précède, que les génératrices de contact sont déterminées par l'expression $\varphi(\lambda) = 0$, expression qui, à cause des doubles signes, est susceptible de quatre valeurs.

Les équations de ces quatre droites (dans le plan donné) sont de la forme

$$M + N + P = 0, \quad M + N - P = 0, \quad M - N + P = 0, \quad M - N - P = 0,$$

$M = 0$, $N = 0$ et $P = 0$ étant les équations des côtés du triangle formé par les trois points où le plan donné coupe la cubique gauche K.

D'où cette conclusion :

Un plan pris arbitrairement est tangent à quatre cônes du complexe; les génératrices de contact forment un quadrilatère complet; les trois points de rencontre des diagonales de ce quadrilatère sont les points où le plan coupe la cubique gauche K.

8. Le lien intime qui existe, d'après les considérations précédentes, entre la décomposition en trois carrés d'un polynome du sixième degré et le problème qui consiste à construire les différents cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace, nous indique naturellement le rôle que jouent ces cônes dans la théorie des fonctions ultra-elliptiques du premier ordre.

Soit, en effet, $AC - B^2 = 0$ l'équation d'un de ces cônes; le plan mobile dont l'équation est $T = A\rho^2 + 2B\rho + C = 0$, ρ désignant une variable arbitraire, enveloppe ce cône; et les paramètres de ses points de rencontre avec la cubique K sont donnés par l'équation

$$T' = A'\rho^2 + 2B'\rho + C' = 0. \tag{1}$$

Le plan mobile se déplaçant, si l'on fait varier à la fois ρ et le

paramètre λ, on aura par la différentiation

$$\frac{dT'}{d\lambda}d\lambda + 2(A'\rho + B')\,d\rho = 0,$$

ou, comme $A'\rho + B' = \sqrt{B'^2 - A'C'} = \sqrt{V}$, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{dT'}{d\lambda}d\lambda + 2\sqrt{V}\,d\rho = 0, \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{V}} = -\frac{2\,d\rho}{\dfrac{dT'}{d\lambda}}.$$

En désignant par a et b deux constantes quelconques, on déduit de là

$$\frac{(a + b\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{V}} = -\frac{2(a + b\lambda)}{\dfrac{dT'}{d\lambda}}d\rho; \tag{2}$$

or $\dfrac{dT'}{d\lambda}$ est un polynome du second degré en λ; par suite, d'après un théorème d'Euler bien connu, si l'on fait la somme, pour toutes les racines de l'équation (1), des valeurs que prend alors le second membre de l'équation (2), le résultat est identiquement nul. On a donc aussi, quels que soient a et b,

$$\frac{(a + bx)\,dx}{\sqrt{V(x)}} + \frac{(a + by)\,dy}{\sqrt{V(y)}} + \frac{(a + bz)\,dz}{\sqrt{V(z)}} = 0,$$

x, y et z désignant les paramètres des trois points où le plan qui enveloppe le cône coupe la cubique.

On déduit de là la proposition suivante :

Étant donnés, sur une cubique gauche, six points dont les paramètres sont les racines de l'équation du sixième degré $V = 0$, *si l'on considère un quelconque des cônes du second ordre qui passent par ces six points et deux des plans tangents à ce cône, en désignant respectivement par* x_0, y_0 *et* z_0 *les paramètres des points où le premier de ces plans coupe la cubique, et par* x_1, y_1 *et* z_1 *les paramètres des points d'intersection relatifs au second plan, on a les deux relations*

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{V(x)}} + \int_{y_0}^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{V(y)}} + \int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{V(z)}} = 0$$

et

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{V(x)}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{y\,dy}{\sqrt{V(y)}} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{V(z)}} = 0.$$

9. Les équations transcendantes qui précèdent déterminent x_1 et y_1, quand x_0, y_0, z_0 et z_1 sont donnés; on peut aussi, d'après les considérations qui précèdent, les déterminer géométriquement.

Qu'on imagine, en effet, le plan passant par les points (x_0), (y_0) et (z_0), et l'un quelconque des quatre cônes du complexe qui lui sont tangents. On pourra, par le point (z_1), mener le plan tangent à ce cône, et l'un quelconque de ces plans, par son intersection avec la cubique, donnera les points (x_1) et (y_1). Comme il y a lieu de considérer quatre cônes, on voit par suite qu'on trouvera quatre systèmes de solutions.

10. En terminant ces brèves indications sur le problème géométrique que je me proposais de traiter, je ferai remarquer l'analogie complète des résultats obtenus avec ceux donnés par Jacobi relativement aux fonctions elliptiques.

Il obtient, comme on le sait, la construction géométrique de l'addition de ces fonctions, en faisant rouler une tangente sur l'une quelconque des coniques qui passent par quatre points fixes, dont la position détermine sur une conique un polynome du quatrième degré. Pour effectuer géométriquement l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce, il suffit de faire rouler un plan sur l'un quelconque des cônes du second ordre que l'on peut mener par six points de l'espace dont la position, sur la cubique gauche qui les renferme, détermine un polynome du sixième degré.

SUR

LA BIQUADRATIQUE SPHÉRIQUE

ET SUR

LA DÉTERMINATION DU PLAN OSCULATEUR

EN UN POINT DE CETTE COURBE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1873.

1. J'appellerai simplement *biquadratique sphérique* la courbe qui résulte de l'intersection d'une sphère S et d'une surface du second ordre.

On peut aussi la considérer à un autre point de vue ([1]). Soit une conique quelconque K; la développable, circonscrite à cette conique et à la sphère S, touche cette sphère le long d'une courbe qui est, comme on le sait, la biquadratique sphérique. Cette développable a d'ailleurs, indépendamment de la conique K, trois autres lignes doubles K_1, K_2 et K_3, qui sont également des coniques et qui jouent, par rapport à la courbe, exactement le même rôle.

2. Une biquadratique sphérique a seize foyers ordinaires; c'est-à-dire qu'il y existe quatre génératrices de la sphère de chacun des systèmes (*droites isotropes*), qui sont tangentes à la courbe. Leurs intersections mutuelles déterminent ses seize foyers *ordinaires;* il est clair d'ailleurs que, la biquadratique étant supposée

([1]) Voir, *Bulletin de la Société philomathique*, mars 1867, ma Note *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère avec une surface du second ordre.*

réelle, quatre de ces foyers sont réels et déterminent complètement tous les autres.

Dans ce qui suit, je désignerai par F, F_1, F_2 et F_3 ces quatre foyers réels. Les seize foyers sont aussi, comme on le voit facilement, les points d'intersection de la sphère avec les coniques K, K_1, K_2 et K_3.

D'où il résulte que les foyers réels peuvent être situés tous les quatre sur l'une de ces coniques, ou être distribués deux par deux sur deux d'entre elles; à ce point de vue, nous distinguerons donc deux classes de biquadratiques : celles de première classe où les foyers réels appartiennent à la même conique, celles de seconde classe où ils sont répartis entre deux coniques.

3. Soit M un point de la sphère S; on sait que par ce point passent deux biquadratiques ayant pour foyers les points F, F_1, F_2 et F_3, et que ces deux courbes se coupent à angle droit.

Pour construire les tangentes en ce point, je distinguerai deux cas :

1° Si la biquadratique est de première espèce, menons un plan par le point M et deux quelconques des foyers réels, et un second plan par ce même point et les deux autres foyers.

Cela posé, *si l'on désigne par* Mt *et* Mt' *les traces de ces plans sur le plan tangent à la sphère au point* M, *les deux bissectrices de l'angle* $t'Mt$ *sont les tangentes aux biquadratiques qui se croisent au point* M.

2° Si la biquadratique est de seconde espèce, appelons F et F_1 les foyers qui se trouvent sur une des coniques, F_2 et F_3 ceux qui se trouvent sur une deuxième conique, et menons respectivement des plans par le point M et les droites FF_1, F_2F_3.

Cela posé, *si l'on désigne par* Mt *la trace du premier plan et par* Mt' *une droite perpendiculaire à la trace du second sur le plan tangent à la sphère au point* M, *les deux bissectrices de l'angle* $t'Mt$ *sont les tangentes aux deux biquadratiques qui se croisent au point* M.

4. Ayant ainsi déterminé les tangentes aux biquadratiques qui passent par un point de la sphère, proposons-nous de construire, pour l'une d'entre elles, le plan osculateur.

A cet effet, je rappellerai une notion géométrique dont je me suis déjà servi dans une Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique*, en février 1867.

Soient M un point de l'espace, et A_1, A_2, ..., A_n, n autres points donnés; déterminons un second point N par la relation suivante

$$\frac{n}{MN} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MA_2} + \ldots + \frac{1}{MA_n},$$

où $\frac{1}{MN}$, $\frac{1}{MA_1}$, ... ne désignent pas les inverses des longueurs MN, MA_1, ..., mais bien des *quantités géométriques* égales à ces inverses en valeur absolue, et portées dans les directions des droites joignant M aux points N, A_1, ..., en sorte que ces quantités se composent comme des forces.

En donnant plus d'extension à la dénomination bien connue due à Maclaurin, nous dirons que le point N, déterminé comme je viens de le dire, est le centre harmonique du point M relativement aux points A_1, A_2, ..., A_n.

On peut remarquer, à ce sujet, que, si les points M, A_1, A_2, ... sont sur une même sphère, il en sera de même du point N.

Cette définition étant admise, on a ce théorème :

En un point quelconque M *d'une biquadratique sphérique, le plan osculateur passe par le centre harmonique du point* M *par rapport aux quatre foyers réels de la courbe.*

On en déduit la construction suivante :

La tangente au point M *ayant été déterminée, comme je l'ai dit précédemment, par* M *et les foyers* F *et* F_1, *faisons passer un cercle sur lequel nous prendrons le point* φ *conjugué harmonique de* M *par rapport à* F *et* F_1; *par* M *et les deux autres foyers faisons passer un cercle sur lequel nous prendrons le point* φ' *conjugué harmonique de* M *par rapport à ces deux foyers. Faisons enfin passer un cercle par les trois points* M, φ *et* φ'; *le point* μ *de ce cercle, conjugué harmonique de* M *par rapport à* φ *et* φ', *déterminera, avec la tangente, le plan osculateur de la courbe au point* M.

5. La conique sphérique est un cas particulier de la biquadratique; les quatre foyers réels sont respectivement les points d'intersection F et F_1, F_2 et F_3 de la sphère avec les deux focales réelles du cône du second degré dont elle est la base.

La construction précédente se simplifie alors un peu; en effet, les points F et F_1 étant alors diamétralement opposés, le conjugué harmonique de M par rapport à ces deux points est le second point où la sphère est rencontrée par la perpendiculaire abaissée de M sur la focale FF_1. La même chose a lieu pour les deux autres foyers.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donné un point M *sur une conique sphérique, si de ce point on abaisse sur les deux focales réelles de la courbe des perpendiculaires rencontrant la sphère en* m *et* m', *le plan osculateur de la courbe au point* M *passe par le conjugué harmonique de ce point relativement aux points* m *et* m'.

6. Il est presque inutile de faire remarquer que les propositions précédentes s'appliquent aux coniques et aux courbes planes (*anallagmatiques du quatrième ordre*) qui sont les projections stéréographiques des biquadratiques sphériques.

Relativement à ces dernières courbes, on a le théorème suivant :

En un point quelconque M *d'une anallagmatique du quatrième ordre, le cercle osculateur passe par le centre harmonique du point* M *relativement aux quatre foyers réels de la courbe.*

7. J'ajouterai quelques mots sur le problème analogue relatif aux surfaces (*anallagmatiques du quatrième ordre*) qui, dans l'espace, correspondent aux biquadratiques sphériques.

Ces surfaces, d'après un beau théorème dû à M. Moutard, peuvent être considérées de cinq façons différentes comme l'enveloppe de sphères qui se déplacent en coupant orthogonalement une sphère fixe, tandis que leur centre décrit une surface du second ordre.

Les cinq surfaces du second ordre au moyen desquelles on peut décrire ainsi la surface sont homofocales. Une normale menée en

un point M de la surface anallagmatique rencontre chacune de ces surfaces en deux points dont l'un est conjugué au point M.

Cela posé, on a la proposition suivante :

Quand une normale à une surface anallagmatique se déplace, le rapport anharmonique de quatre quelconques des cinq points conjugués où elle coupe les cinq surfaces homofocales demeure constant (1).

On déduit de là, comme on le voit facilement, une construction des rayons de courbure principaux de l'anallagmatique, en s'appuyant sur cette propriété bien connue, que les normales en deux points infiniment voisins d'une ligne de courbure sont dans un même plan, et en employant le théorème de Brianchon.

Mais le problème est susceptible d'une solution plus élégante reposant sur des considérations très générales que j'ai données dans une Note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques, etc.*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique*, en décembre 1871.

Cette solution se déduit de la proposition très simple qui suit.

Appelons *centre d'une surface anallagmatique* le centre C commun aux cinq surfaces du second ordre homofocales qui permettent de la décrire.

Cela posé :

Étant donnée une droite quelconque MT *touchant une anallagmatique au point* M, *cette tangente rencontre de nouveau la surface en deux points; désignons par* I *le milieu de la droite joignant les centres des sphères qui touchent la surface en ces points et passent par* M. *Si, par le point* M, *on mène une droite parallèle à* IC, *dirigée dans le même sens et de longueur double, l'extrémité de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans la surface par le plan normal passant par* MT.

---

(1) J'ai communiqué verbalement ce théorème à la Société philomathique en mai 1868, et précisément dans le but d'en déduire la construction des rayons de courbure principaux de l'anallagmatique. Depuis, M. Darboux l'a obtenu de son côté et en a développé les principales conséquences dans un *Mémoire sur la cyclide* inséré aux *Annales de l'Ecole normale supérieure*, 1872.

MÉMOIRE SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA SPHÈRE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1873.

I. — *Considérations préliminaires sur le rapport anharmonique dans le plan.*

1. Je rappellerai d'abord la signification de quelques termes et de quelques notations que j'emploierai constamment dans ce Mémoire.

On sait que tous les cercles tracés dans un plan se coupent en deux points fixes situés sur la droite de l'infini; je les désignerai sous le nom d'*ombilics du plan;* les droites du plan, qui convergent vers ces points, ont respectivement, si l'on suppose la figure rapportée à des axes rectangulaires, pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$.

Je désignerai les droites, dont le coefficient angulaire est $+i$, sous le nom de *droites isotropes du premier système;* l'ombilic par lequel elles passent, par la lettre I. Les *droites isotropes du second système* ont leur coefficient angulaire égal à $-i$; elles passent toutes par le second ombilic que je désignerai par la lettre J.

2. Soit un point imaginaire α d'un plan; par ce point passent une droite isotrope du premier système contenant un seul point réel A et une droite isotrope du second système contenant un seul point réel A'. Il est clair que ces deux points sont complètement déterminés par le point α, et que réciproquement ce dernier est déterminé sans ambiguïté par les points A et A'.

Je dirai [1] que AA' est le segment représentatif du point α, A étant l'origine et A' l'extrémité de ce segment.

[1] *Voir* ma Note *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. IX).

Je rappellerai à ce sujet les deux propositions fondamentales suivantes :

Si les segments AA', BB', CC', ... *représentent des points en ligne droite, le polygone* ABC... *formé par les origines des segments et le polygone* A'B'C'... *formé par leurs extrémités, sont semblables et inversement placés.*

Étant donnés deux points imaginaires représentés par les segments AA' *et* BB', *le carré de la distance de ces deux points est une quantité imaginaire, dont le module est le produit des longueurs* AB *et* A'B', *et dont l'argument est l'angle dont il faut faire tourner la droite* AB *autour du point* A, *le point* B *se mouvant sur un cercle dans le sens direct (c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre) jusqu'à ce que cette droite soit parallèle à* A'B' *et dirigée dans le même sens.*

3. Étant données deux droites D et D' situées dans un plan, j'appellerai *angle de la droite* D *avec la droite* D', et je désignerai par la notation $\widehat{DD'}$, l'angle dont il faut faire tourner, *dans le sens direct,* la droite D pour qu'elle vienne coïncider avec D'. Il est clair que, cette coïncidence obtenue, une nouvelle rotation égale à π ramènera de nouveau la coïncidence. L'angle de deux droites est donc déterminé à un multiple près de π.

Supposons maintenant que, non seulement les droites D et D' soient données, mais encore que, sur chacune d'elles, on donne le sens dans lequel on doit compter les longueurs positives; j'appellerai alors *angle de la droite* D *avec la droite* D' l'angle dont il faut faire tourner la droite D dans le sens direct, jusqu'à ce qu'elles coïncident et que sur chacune d'elles les longueurs positives soient comptées dans le même sens.

Un tel angle est évidemment déterminé à un multiple près de 2π, et, par suite, toutes ses lignes trigonométriques sont parfaitement déterminées.

4. Étant donnés trois points A, B, D, je désignerai par la notation $\widehat{BAD}$ l'angle de la droite BA (BA étant considéré comme un segment positif) avec la droite DA (DA étant également considéré comme un segment positif).

C'est, par conséquent, l'angle dont il faut faire tourner (dans le sens des aiguilles d'une montre) le point B pour qu'il se rabatte, non seulement sur la droite AD, mais encore du même côté que le point D, par rapport au sommet de l'angle A.

Si deux arcs de courbe BA et DA se croisent, sur une sphère, au point A, j'appellerai *angle de l'arc* BA *avec l'arc* DA, et je désignerai par la notation $\widehat{\mathrm{BAD}}$ l'angle dont il faut faire tourner la droite menée par le point A tangentiellement à l'arc AB et dirigée dans le même sens, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la droite menée par le point A tangentiellement à l'arc AD et dirigée dans le même sens, le mouvement ayant lieu dans le sens des aiguilles d'une montre pour un spectateur placé au-dessus de la sphère.

5. Soient trois points *réels* A, B, C. Menons par ces points trois droites isotropes du premier système; une droite quelconque D tracée dans le plan les rencontre en trois points α, β, γ, et il est clair que le rapport $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}$ est indépendant de la direction de la droite D.

Pour évaluer ce rapport, on peut donc supposer cette droite réelle, et, en se reportant aux propositions données (n° 2), ou bien par une recherche directe très facile, on trouve

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} e^{\widehat{\mathrm{BAC}}.i}.$$

Il est important de remarquer que, dans cette formule, AB et AC sont des quantités essentiellement positives.

6. Considérons maintenant quatre points *réels* du plan A, B, C, D; les quatre droites isotropes du premier système passant par ces points forment un faisceau, dont le rapport anharmonique a généralement une valeur imaginaire $re^{\theta i}$. Je dirai que cette quantité est le *rapport anharmonique* des quatre points A, B, C, D, et je la désignerai, suivant l'usage habituel, par la notation (A, B, C, D); la quantité r, qui est essentiellement positive, sera dite le *module* du rapport anharmonique et l'angle θ l'*argument* de ce rapport.

Pour évaluer ces quantités, coupons le faisceau de droites isotropes par une droite quelconque qui les rencontre aux points α, β, γ et δ. On aura (A, B, C, D) $= \frac{\alpha\beta}{\alpha\delta} : \frac{\gamma\beta}{\gamma\delta}$, ou, en vertu de la formule donnée dans le numéro précédent,

$$(\mathrm{A, B, C, D}) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} : \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}} e^{(\widehat{\mathrm{BAD}} - \widehat{\mathrm{BCD}})i}.$$

D'où les conclusions suivantes :

Étant donnés quatre points réels d'un plan A, B, C, D, *le module de leur rapport anharmonique* (quantité essentiellement positive) *est égal à* $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} : \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}}$, *et l'argument de ce rapport est l'angle* $\widehat{\mathrm{BAD}} - \widehat{\mathrm{BCD}}$ *ou encore l'angle* $\widehat{\mathrm{ABC}} - \widehat{\mathrm{ADC}}$.

Remarque. — Il est évident que l'argument est déterminé à un multiple près de 2π.

7. Si l'on avait mené par les points A, B, C, D les droites isotropes du second système, le faisceau ainsi obtenu aurait eu pour rapport anharmonique $re^{-\theta i}$; je dirai, de deux rapports anharmoniques qui ont même module et qui ne diffèrent que par le signe de l'argument, qu'ils sont *improprement égaux*.

Si quatre points sont situés sur un cercle (ou sur une droite), les faisceaux, passant par ces points et chacun des ombilics, ont même rapport anharmonique; le rapport anharmonique de ces quatre points est donc réel. D'où cette conclusion :

Si quatre points d'un plan sont situés sur une même circonférence (ou sur une même droite), l'argument de leur rapport anharmonique est un multiple de π.

La réciproque est évidemment vraie.

Lorsque quatre points se trouvent ainsi sur une circonférence (ou sur une droite), le rapport anharmonique, tel que je l'ai défini dans le numéro précédent, a évidemment la même valeur que le rapport tel qu'on le définit habituellement. Il n'y a, par suite, aucune ambiguïté à craindre dans l'extension que j'ai donnée à la signification du mot *rapport anharmonique*.

8. Étant donnés quatre points α, β, γ, δ situés sur une droite réelle ou imaginaire, soient AA′, BB′, CC′, DD′ les segments représentatifs de ces points; de la définition que j'ai donnée ci-dessus, il résulte immédiatement que le rapport anharmonique des quatre points α, β, γ, δ est égal à celui des points A, B, C, D.

Il en est de même lorsque ces points sont situés sur une circonférence.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si quatre points sont situés sur une circonférence (*ou une droite*) *réelle ou imaginaire, leur rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des quatre points réels qui sont les origines des segments représentatifs de ces droites, ou bien encore au rapport anharmonique des quatre points réels qui en sont les extrémités.*

9. Pour faire une application simple de cette proposition, je prendrai pour point du départ la propriété suivante, fondamentale dans la théorie des sections coniques : *Étant donnée une conique tangente à quatre droites fixes, toute tangente à cette conique coupe les quatre tangentes fixes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant;* et je supposerai qu'une ou plusieurs de ces droites deviennent imaginaires.

Considérons, par exemple, un triangle circonscrit à une conique et la droite isotrope du premier système issue d'un de ses foyers F, cette droite et les trois côtés du triangle forment un quadrilatère circonscrit à la conique. Une tangente mobile coupe les côtés du triangle aux points α, β, γ et la droite isotrope en un point imaginaire représenté par un segment dont l'origine est le point F. On en conclut que le rapport anharmonique des quatre points α, β, γ et F demeure constant, lorsque la tangente mobile se déplace. Par suite des formules données (n° 6), on a donc

$$\frac{F\alpha.\beta\gamma}{F\beta.\alpha\gamma} = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\alpha F \beta} - \widehat{\alpha\gamma\beta} = \text{const.},$$

d'où

$$\widehat{\alpha F \beta} = \text{const.} + \widehat{\alpha\gamma\beta}.$$

Au premier abord, on pourrait croire que l'angle $\widehat{\alpha F \beta}$ est con-

stant, puisque les points α, β, γ sont en ligne droite; mais il faut remarquer que, d'après nos conventions (n° 4), $\widehat{\alpha\gamma\beta}$ est égal à o ou à π, suivant que le point γ est en dehors du segment $\alpha\beta$ ou dans l'intérieur de ce segment; l'angle $\widehat{\alpha F \beta}$ peut donc varier d'une demi-circonférence.

Quant à l'angle des deux droites $F\alpha$ et $F\beta$ (ces droites étant considérées indépendamment de leur direction), il demeure constant.

Considérons encore une droite T tangente à une conique, les deux tangentes isotropes issues du foyer F, et la tangente isotrope du second système issue du foyer G; ces quatre droites forment un quadrilatère circonscrit à la conique. Soit T′ une tangente quelconque à cette conique rencontrant la tangente fixe en α; elle coupe les droites isotropes du premier système issues des foyers en des points imaginaires dont les segments ont pour origine ces foyers eux-mêmes, et la droite isotrope du second système issue du foyer F en un point représenté par un segment dont l'extrémité est en F; l'origine de ce segment est donc le point F′ symétrique de F par rapport à la tangente mobile.

D'où l'on voit que le rapport anharmonique des quatre points α, F, F′ et G demeure constant, lorsque la tangente mobile se déplace.

On déduit de là les relations suivantes entre les divers éléments du quadrilatère $FF'\alpha G$:

$$\widehat{F\alpha G} - \widehat{FF'G} = \text{const.}, \qquad \widehat{F'\alpha G} - \widehat{F'FG} = \text{const.},$$

$$\widehat{F\alpha F'} - \widehat{FGF'} = \text{const.}, \qquad \widehat{FG\alpha} - \widehat{FF'\alpha} = \text{const.}, \qquad (^1),$$

$$\frac{G\alpha.FF'}{F\alpha.GF'} = \text{const.}, \qquad \frac{G\alpha.FF'}{GF.F'\alpha} = \text{const.}$$

Si l'on remarque que FG est constant et que $F'\alpha = F\alpha$, les deux dernières égalités donneront

$$FF' = \text{const.} \times \frac{F\alpha}{G\alpha} \qquad \text{et} \qquad GF' = \text{const.}$$

D'où l'on déduit, en particulier, cette propriété bien connue que

(1) Il est presque inutile de faire remarquer que ces diverses relations se réduisent à deux relations distinctes.

le lieu du point F′ est une circonférence de cercle ayant pour centre le foyer G.

10. Je ne m'étendrai pas davantage sur les nombreuses relations métriques que l'on peut déduire de la proposition fondamentale de la théorie des coniques et qu'elle renferme ainsi *comme cas particuliers*.

Je ferai seulement l'observation suivante : bien que, dans les théorèmes que nous obtenons ainsi, les éléments de la figure soient essentiellement supposés réels (en vertu même du mode de démonstration), ils n'en sont pas moins vrais dans toute leur généralité; rien n'empêche donc, dans ces nouvelles propositions, de supposer que certains éléments deviennent imaginaires et d'en déduire de nouvelles relations (1).

(1) En général, quand dans une figure certains éléments deviennent imaginaires, toute relation relative à cette figure donne deux relations, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire. D'une proposition donnée on déduit donc deux autres propositions généralement distinctes.

Il peut arriver néanmoins qu'elles se confondent, ou que l'une des deux exprime une simple identité, ou bien encore que l'une d'entre elles serve seulement à lever une ambiguïté et à fixer le signe dont une quantité doit être affectée.

Comme exemple de ce dernier cas je prendrai la proposition suivante :

La somme des distances d'un point d'une ellipse aux deux foyers imaginaires situés sur le petit axe est constante et égale à $2bi$, *b désignant la longueur du petit axe.*

Au sujet de ce théorème je ferai observer que les distances dont il s'agit étant comptées sur des droites différentes, il est impossible *a priori* de fixer leur valeur. En désignant donc par φ et γ les deux foyers imaginaires de l'ellipse et par $M\varphi$ et $M\gamma$ deux quelconques des valeurs dont sont susceptibles les distances du point M de l'ellipse aux foyers φ et γ, le théorème précédent s'exprime par l'égalité suivante :

$$\varepsilon . M\varphi + \eta . M\gamma = 2bi,$$

ε et η étant des constantes dont la valeur est $+1$ ou -1.

F et G désignant les deux foyers réels de l'ellipse, on a $\varphi = (F, G)$ et $\gamma = (G, F)$; j'exprime ainsi que φ et γ ont respectivement pour segments représentatifs les segments FG et GF.

Le point M, *étant supposé réel*, d'après la formule donnée au n° 2, on a, λ désignant l'angle positif, inférieur à un droit, que fait avec la normale MN chacun des rayons vecteurs FM et GM,

$$M\gamma = \sqrt{MF.MG}\, e^{\lambda i} \quad \text{et} \quad M\varphi = \sqrt{MF.MG}\, e^{-\lambda i};$$

11. Soient deux faisceaux homographiques de droites isotropes du premier système; le premier de ces faisceaux est déterminé par le système S des points réels A, B, C, ... situés sur les rayons qui le composent; le second est également déterminé par un système S′ de points réels A′, B′, C′, ...

Cela posé, il résulte immédiatement de cette définition que *le rapport anharmonique de quatre points quelconques du système* S *est proprement égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants du système* S′. Je dirai que ces deux systèmes sont *proprement anharmoniques*.

Soient un faisceau de droites isotropes du premier système déterminé par un système S de points réels A, B, C, ..., et un faisceau homographique de droites isotropes du deuxième système déterminé par un système S′ de points réels A′, B′, C′, ...; on voit immédiatement que *le rapport anharmonique de quatre points quelconques du système* S *est improprement égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants du système* S′. Je dirai que ces deux systèmes sont *improprement anharmoniques*.

Lorsqu'on transforme une figure Σ par rayons vecteurs réciproques, la transformée est improprement anharmonique à Σ; en sorte que, quel que soit le nombre des transformations analogues que l'on opère, la figure transformée sera toujours proprement ou improprement anharmonique à la figure primitive, suivant que le nombre des transformations sera pair ou impair.

on déduit de là

$$\sqrt{MF.MG}\,(\varepsilon e^{-\lambda i} + \eta e^{\lambda i}) = 2bi,$$

ou, en égalant de part et d'autre les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\sqrt{MF.MG}\,(\varepsilon + \eta)\ \cos\lambda = 0,$$
$$\sqrt{MF.MG}\,(\eta - \varepsilon)\, i \sin\lambda = 2bi.$$

La première équation montre que l'on a $\varepsilon = -\eta$; portant cette valeur dans la seconde équation et élevant au carré, après avoir supprimé le facteur -4, il vient :

$$MF \sin\lambda . MG \sin\lambda = b^2,$$

ou bien $FP.GQ = b^2$, en désignant par P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente en M.

12. De la notion qui précède résulte immédiatement la proposition suivante :

Si, sur une droite (ou un cercle) réelle ou imaginaire, on a une série de points représentés par des segments dont les origines forment un polygone P; *si, sur une autre droite (ou un autre cercle), on a une série homographique de points représentés par des segments dont les origines forment un polygone* P′, *les deux polygones* P *et* P′ *sont proprement anharmoniques.*

Pour faire une application de cette proposition, considérons une conique réelle K et une droite imaginaire α tangente à cette courbe, que, par suite, touchera également la droite α' imaginairement conjuguée de la première. Une droite réelle mobile tangente à K rencontre α en un point (A, A′), et α' au point imaginairement conjugué (A′, A).

Pendant le déplacement de la tangente, le point (A, A′) se meut sur une droite; donc la figure (A), décrite par le point A, est semblable à la figure (A′), décrite par le point A′, et inversement placée, et les deux figures sont *improprement anharmoniques.* D'autre part, en vertu de cette propriété fondamentale des coniques que la tangente détermine sur α et α' des divisions homographiques, les figures (A) et (A′) sont *proprement anharmoniques;* il en résulte (n° 8) que les courbes (A) et (A′) sont toutes deux des cercles.

D'où les conclusions suivantes :

Quatre droites réelles tangentes à une conique réelle coupent une droite imaginaire quelconque tangente à cette conique en quatre points représentés par des segments dont les origines sont situées sur une même circonférence.

Si un point mobile M *décrit une circonférence, tandis qu'un autre point* M′ *décrit une autre circonférence en sens inverse et dans le même temps, le point milieu* I *de la corde* MM′ *décrit une conique et la droite menée en* I *perpendiculairement à la corde enveloppe une autre conique.*

13. Tous les théorèmes relatifs à la division homographique

sur une même droite ou sur des droites différentes donnent évidemment lieu à autant de théorèmes correspondants relatifs à deux systèmes de points *proprement anharmoniques;* pour les développer, je n'aurais qu'à transcrire ici plusieurs chapitres de la *Géométrie supérieure* et des *Sections coniques* de M. Chasles. J'éviterai au lecteur la peine de relire, sous une autre forme, des propositions bien connues et les emploierai, dans la suite de ce Mémoire, toutes les fois qu'elles me seront utiles, sans entrer dans plus de détails à ce sujet.

Je ferai cependant la remarque suivante, à cause de son fréquent emploi. On connaît (*Sections coniques*, p. 99) le théorème suivant :

Si l'on a, sur une droite, une série de points en involution, les conjugués harmoniques d'un point P *quelconque de cette droite, relatifs aux couples de points de l'involution, déterminent une série de points* (P); *à un autre point* P′ *de la droite correspond une autre série* (P′); *les deux divisions* (P) *et* (P′) *sont homographiques.*

D'où cette conséquence pour une figure plane :

Étant donnée dans un plan une figure en involution (¹), *les conjugués harmoniques d'un point quelconque* P *du plan déterminant une figure* (P); *à un autre point* P′ *correspond une autre figure* (P′); *les deux figures* (P) *et* (P′) *sont proprement anharmoniques.*

J'appellerai *courbe en involution* une courbe dont les points peuvent se grouper deux à deux, de telle sorte que deux points conjugués M et M′ fassent partie d'un système de points en involution. On déduit alors de ce qui précède la proposition suivante :

Si l'on prend successivement les points conjugués harmoniques de divers points du plan par rapport aux couples de

(¹) Par la propriété fondamentale de l'involution, on voit que A et A′ étant deux points conjugués, ces deux points et les deux points doubles P et Q sont situés sur un même cercle; de plus, les quatre points A, A′, P et Q déterminent sur ce cercle une division harmonique.

points conjugués d'une courbe en involution, les diverses courbes ainsi obtenues sont proprement anharmoniques.

En particulier, si, pour un point du plan, la courbe est un cercle, elle sera également un cercle pour tout autre point; ainsi le lieu des points milieux des cordes joignant les points conjugués est un cercle. La courbe en involution qui jouit de cette propriété est par là même complètement définie, et je l'ai déjà étudiée dans une Note *Sur les cassiniennes* publiée dans le *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868). Ses nombreuses propriétés se déduisent du reste avec la plus grande facilité, en employant les considérations qui précèdent, des simples et élégantes relations données par M. Chasles dans sa *Géométrie supérieure*, relativement à un système de segments en involution et aux milieux de ces segments.

14. Soient (A) et (A′) deux systèmes de points improprement anharmoniques, le faisceau déterminé par le système (A) et l'ombilic I et le faisceau déterminé par le second système et l'ombilic J sont homographiques; par suite, tous les points imaginaires (A, A′) sont situés sur un même cercle. D'où cette conclusion :

Si deux systèmes de points (A) *et* (A′) *sont improprement anharmoniques, tous les points imaginaires* (A, A′) *sont situés sur un même cercle.*

Réciproquement :

Si un certain nombre de points (A, A′), (B, B′), ... *sont situés sur un même cercle, les deux systèmes de points* A, B, ... *et* A′, B′, ... *sont improprement anharmoniques.*

SUR UN GENRE PARTICULIER DE SURFACES

DONT ON PEUT INTÉGRER LES LIGNES GÉODÉSIQUES.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1873.

Si l'on considère les surfaces pour lesquelles l'élément de longueur est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{v} + \frac{dv^2}{u},$$

on vérifie aisément que leurs lignes géodésiques sont données par l'équation

$$\frac{\cos^3 i}{\sqrt{v^3}} + \frac{\sin^3 i}{\sqrt{u^3}} = \text{const.},$$

i désignant l'angle que fait la ligne géodésique avec la courbe $v = \text{const.}$

SUR LES NORMALES

ABAISSÉES D'UN POINT DONNÉ

SUR UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1874.

1. Étant données une surface du second ordre et une conique située sur cette surface, il semble, au premier abord, que l'on puisse toujours déterminer trois points de cette conique, de telle façon que les normales, menées à la surface en ces points, se coupent en un même point; le nombre des équations de condition auxquelles on doit satisfaire est en effet égal au nombre des constantes arbitraires dont on peut disposer.

Il est remarquable que les coniques jouissant de la propriété que je viens d'énoncer ne puissent être arbitrairement choisies, et que leurs plans enveloppent une surface de quatrième classe Σ.

Réciproquement, étant donné un plan quelconque Π tangent à Σ, il lui correspond une droite Δ, dont voici la propriété principale :

Si d'un point M, *pris arbitrairement sur* Δ, *on mène des normales à la surface du second ordre, trois des pieds de ces normales décrivent la conique de cette surface située dans le plan* Π, *et les côtés du triangle dont ils constituent les sommets enveloppent une autre conique, les pieds des trois autres normales décrivant une conique située dans un second plan* Π' *tangent à* Σ.

Je dirai que les plans Π et Π' sont deux plans conjugués de la surface Σ, et que la droite Δ lui est associée.

2. Pour plus de commodité dans le langage, je considérerai aussi les deux pôles P et P' des plans Π et Π' relativement à la surface du second ordre; je dirai également que P et P' sont deux points conjugués de la surface du quatrième ordre S, qui est la polaire réciproque de Σ par rapport à la surface du second ordre et que la droite Δ leur est associée.

Cela posé, si d'un point M de l'espace on mène les six normales à la surface du second ordre, les plans tangents en ces points forment un hexaèdre ayant dix couples de sommets opposés joints entre eux par dix diagonales.

Il est clair que ces dix couples de sommets sont dix couples de points conjugués de la surface S.

Je dirai que l'hexaèdre ainsi défini appartient à la surface du second ordre et a pour centre le point M.

3. Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de la surface du second ordre; X, Y, Z les coordonnées d'un point quelconque M; ξ, η, ζ et ξ', η', ζ' les coordonnées d'un couple quelconque de sommets opposés de l'hexaèdre ayant pour centre le point M.

En introduisant des quantités auxiliaires λ, μ, ν définies par les équations

$$\lambda=\frac{\eta\zeta'+\zeta\eta'}{b^2-c^2},\qquad \mu=\frac{\zeta\xi'+\xi\zeta'}{c^2-a^2},\qquad \nu=\frac{\xi\eta'+\eta\xi'}{a^2-b^2},\tag{1}$$

on établira facilement les six relations

$$\xi\xi'=-a^2,\qquad \eta\eta'=-b^2,\qquad \zeta\zeta'=-c^2,\tag{2}$$

$$\xi+\xi'=\mu Z-\nu Y,\qquad \eta+\eta'=\nu X-\lambda Z,\qquad \zeta+\zeta'=\lambda Y-\mu X.\tag{3}$$

4. Les équations (2), qui établissent une relation si simple entre deux sommets opposés de l'hexaèdre, ont déjà été données, sous une forme un peu différente, dans un beau Mémoire de Joachimstahl [1].

[1] *De æquationibus quarti et sexti gradus quæ in theoria linearum et superficierum secundi ordinis occurrunt* (*Journal de Crelle*, t. 53).

Des équations (3) on déduit les relations

$$\lambda(\xi+\xi')+\mu(\eta+\eta')+\nu(\zeta+\zeta')=0,$$
$$X(\xi+\xi')+Y(\eta+\eta')+Z(\zeta+\zeta')=0.$$

Entre la première et les équations (1) et (2) on peut éliminer ξ', η', ζ' ainsi que λ, μ, ν, et l'on obtient l'équation suivante de la surface S :

$$c^2(a^2-b^2)^2x^2y^2+a^2(b^2-c^2)^2y^2z^2+b^2(c^2-a^2)^2z^2x^2$$
$$-b^2c^2(b^2-c^2)^2x^2-c^2a^2(c^2-a^2)^2y^2-a^2b^2(a^2-b^2)z^2=0.$$

De la seconde résulte la proposition suivante :

Étant donné un hexaèdre quelconque appartenant à une surface du second ordre, et ayant pour centre le point M, *le plan mené par le centre* O *de cette surface perpendiculairement au rayon* OM *passe par les milieux des dix diamètres de l'hexaèdre.*

5. Étant donné un couple de points conjugués (ξ, η, ξ', η') de la surface S, les équations (3), en y considérant X, Y, Z comme des coordonnées courantes, représentent la droite Δ associée aux deux points conjugués.

D'où les propositions suivantes :

La droite Δ *associée à un couple de points conjugués* (P, P') *de la surface* S *est située dans le plan mené par le centre de la surface du second ordre perpendiculairement à la droite qui joint ce centre au milieu du segment* PP'.

Toutes les droites Δ *sont doublement tangentes à la surface* Θ *lieu des centres de courbure de la surface du second ordre.*

6. La surface polaire réciproque Θ étant du quatrième ordre, il en résulte que, par un point quelconque M de l'espace, on peut mener vingt-huit droites doublement tangentes à Θ ; ces vingt-huit droites se composent des trois groupes de droites suivantes :

1° Les six normales menées du point M à la surface;

2° Les six droites Δ se croisant en ce point, et qui sont les

associées des dix couples de sommets opposés de l'hexaèdre ayant pour centre le point M;

3° Douze autres tangentes doubles situées sur un cône du troisième ordre et formant un groupe de Steiner.

7. Les surfaces réglées, formées par les normales que l'on peut élever aux différents points d'une conique située sur une surface du second ordre, constituent un groupe de surfaces remarquables, étudiées d'abord par M. Chasles et comprises comme cas particulier dans la famille des *quadrispinales;* il importe de distinguer parmi elles celles dont la base est située dans un plan tangent à la surface Σ; on voit, d'après ce qui précède, que ses génératrices se rencontrent trois à trois en un même point d'une droite fixe.

SUR LES DROITES

QUI SONT DOUBLEMENT TANGENTES

A LA SURFACE LIEU DES CENTRES DE COURBURE D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1874.

1. Quelques considérations géométriques très simples permettent d'établir et de compléter, sur certains points, les propositions que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie relativement aux *normales que l'on peut mener d'un point donné à une surface du second ordre*.

Étant donnée une surface du second ordre S, les droites perpendiculaires à leur polaire relativement à S forment un complexe remarquable du second ordre; elles rencontrent évidemment S en deux points tels que les normales se croisent en un même point.

Considérons un triangle ABC situé sur S, et tel que les trois normales en ces points se rencontrent en un même point M; les côtés du triangle sont circonscrits à la conique du complexe située dans son plan, et ses sommets sont situés sur la conique K suivant laquelle le plan coupe S; le plan doit par conséquent couper S suivant une conique dans laquelle on puisse inscrire un triangle circonscrit à la conique du complexe, et, par suite, il enveloppe une surface. Remarquons maintenant que, d'après le théorème de Poncelet, on peut construire, dans le plan, une infinité de triangles tels que ABC; par suite, la surface réglée formée par les normales menées aux différents points de K, ou, en me servant d'une expression déjà employée par M. Mannheim, la normalie ayant pour directrice K, a une ligne triple qui, puisque la normalie est du quatrième ordre, est nécessairement une droite Δ.

Il est bien clair que, puisque, des six pieds des normales que

l'on peut abaisser de chacun des points de Δ, trois décrivent la conique K, les trois autres décrivent une autre conique K', et l'on voit qu'une droite telle que Δ peut être définie par cette propriété, que le lieu des pieds des normales menées de chacun des points de la droite à la surface se décompose en deux coniques [1].

Je vais maintenant établir que toutes ces droites Δ sont doublement tangentes à la surface lieu des centres de courbure de S.

2. Considérons, en général, une surface quelconque Σ et sa développée Θ; a désignant un point quelconque de Θ, je représenterai par A le point correspondant de Σ, c'est-à-dire celui pour lequel une des sections principales a pour centre de courbure A.

Cela posé, soient D une droite quelconque et K le lieu des pieds des normales que l'on peut, de chacun des points de D, abaisser sur la surface. En laissant de côté, pour un instant, le cas où D serait normale à Σ, je ferai les remarques suivantes au sujet des points de rencontre de cette droite et de Θ.

Si, en un de ces points A, la droite traverse la développée, la courbe K ne présente aucune singularité au point correspondant a, et elle est tangente en ce point à l'une des lignes de courbure.

Si, en un de ces points B, la droite touche la développée, la courbe K présente un point double au point correspondant b, et les tangentes, menées aux deux branches en ce point, diffèrent généralement des tangentes aux lignes de courbure.

On sait enfin que, si la droite était l'une des normales de la surface Σ touchant la développée en C et C', la courbe K présenterait, au point correspondant c, un point double dont les deux branches toucheraient les deux lignes de courbure.

De là résulte une dépendance mutuelle entre les singularités de la courbe K et les particularités des divers points d'intersection de la droite D avec la développée : ainsi l'on peut, en particulier, énoncer les propositions suivantes :

Le complexe des droites tangentes à la développée se com-

[1] Depuis que ma première Note a été écrite, j'ai reconnu que le théorème ci-dessus énoncé est dû à M. Desboves, qui a aussi étudié les droites Δ dans sa *Nouvelle théorie des normales à une surface du second degré*.

pose de toutes les droites pour lesquelles la courbe K *possède un point double.*

Si l'on fait abstraction des normales à la surface, la congruence formée par les droites doublement tangentes à la développée se compose de toutes les droites pour lesquelles la courbe K *possède deux points doubles.*

3. Pour faire l'application de ce qui précède à la surface du second ordre S, je remarquerai que la courbe K est alors une biquadratique gauche qui présentera deux points doubles dans deux cas différents.

1° En premier lieu, la courbe K peut se décomposer en deux coniques, et l'on obtient les droites Δ dont j'ai parlé plus haut.

Par chaque point de l'espace, comme je l'ai fait remarquer dans ma précédente Communication, passent dix droites Δ.

2° En second lieu, la courbe K peut se décomposer en une cubique gauche et une génératrice de S.

Si l'on considère le paraboloïde formé par les normales le long d'une de ces génératrices G, toutes les génératrices de ce paraboloïde de même système que G donneront des droites pour lesquelles cette décomposition a lieu, et on les obtiendra toutes en considérant l'ensemble de tous les paraboloïdes normaux le long des diverses génératrices.

La congruence qu'elles forment se compose donc de deux congruences distinctes : l'une composée des génératrices des paraboloïdes normaux le long de toutes les génératrices d'un même système de S; l'autre composée des génératrices des paraboloïdes normaux le long des génératrices de l'autre système.

Par chaque point de l'espace passent six droites appartenant à chacune de ces congruences, et situées sur les paraboloïdes normaux le long des douze génératrices qui passent par les pieds des normales que l'on peut abaisser du point donné sur la surface.

4. En résumé, on voit que les vingt-huit droites doublement tangentes à la développée, que l'on peut mener par un point M de l'espace, se distribuent en quatre groupes :

1° Les six normales que l'on peut mener de ce point;

2° Les dix droites Δ;

3° Six droites situées sur des paraboloïdes normaux le long de six génératrices d'un même système de S;

4° Six droites situées sur des paraboloïdes normaux le long de six génératrices de l'autre système.

La détermination de ces vingt-huit droites dépend uniquement de la résolution de l'équation du sixième degré qui donne les pieds des normales.

5. Je ferai remarquer, en terminant, que les considérations qui précèdent s'appliquent à d'autres surfaces qu'à celles du second ordre.

On peut énoncer, en particulier, cette propriété des surfaces réglées :

Si l'on considère le paraboloïde formé par les normales d'une surface réglée le long d'une génératrice, non seulement toutes les normales sont doublement tangentes à la développée de la surface, mais encore il en est de même de toutes les génératrices de l'autre système de ce paraboloïde.

SUR L'APPLICATION

DE LA

THÉORIE DES FORMES BINAIRES

A LA GÉOMÉTRIE PLANE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1874.

1. Dans ce Mémoire, je considère, pour simplifier le langage, les figures comme rapportées à un système de coordonnées rectilignes x et y; la variable z est toujours supposée égale à l'unité, et je ne l'introduis que quand cela est utile pour la symétrie des formules.

Cela posé, $\omega = ux + vy + wz = 0$ étant l'équation d'une droite, si les coefficients u, v et w sont liés entre eux par une relation homogène et du degré n, $F(u, v, w) = 0$, la droite enveloppe une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe K.

Si l'on pose

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = U(\lambda, \mu),$$

l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ donne, pour un système de valeurs de x et de y, les coefficients angulaires des diverses tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe. On peut la désigner sous le nom d'*équation mixte* de la courbe, et, dans un Mémoire (¹) antérieur, j'ai déjà exposé les conséquences les plus élémentaires qui résultent de cette notion.

(¹) *Mémoire de Géométrie analytique* (*Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XVII).

Mais, pour les développer utilement, plusieurs problèmes doivent être résolus, et en particulier le suivant : *Déterminer les équations mixtes des courbes que l'on obtient en égalant à zéro les divers covariants de* F.

Tout d'abord, on aura à considérer les diverses polaires des droites du plan relativement à K, tant à cause de leur simplicité que du rôle principal qu'elles jouent dans cette théorie, puis la hessienne de K.

En désignant respectivement par $W = 0$, $\Pi = 0$ et $\varpi = 0$ les équations mixtes de la hessienne, de la première et de la seconde polaire de la droite $\omega = 0$, on obtient la relation suivante

$$\omega^2 W = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix} \quad (^1).$$

Cette forme remarquable du polynome W est susceptible d'un grand nombre d'applications, et *même sans qu'il soit nécessaire de déterminer les coefficients de* Π *et de* ϖ. En particulier, je citerai les deux propositions suivantes, qui jouent un rôle important dans la théorie des courbes de troisième et de quatrième classe :

1° *Si deux courbes de troisième classe* K *et* K′, *ayant respectivement pour équation mixte*

$$(a, b, c, d)(\lambda, \mu)^3 = 0 \quad \text{et} \quad (a', b', c', d')(\lambda, \mu)^3 = 0,$$

ont les mêmes tangentes de rebroussement, le polynome

$$ad' - 3bc' + 3cb' - da'$$

est identiquement nul.

2° *Étant donnée une courbe de quatrième classe, dont l'équation mixte soit*

$$U = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)^4 = 0,$$

désignons par $(A, B, C, D, E, F, G)(\lambda, \mu)^6$ *le covariant sextique*

(¹) Suivant un usage habituel, étant donnée une fonction quelconque Z de λ et de μ, et de degré n, je pose $Z_1 = \frac{1}{n}\frac{dZ}{d\lambda}$, $Z_{11} = \frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda^2}$, ...

de U, *et considérons une courbe quelconque de sixième classe tangente aux vingt-quatre tangentes de rebroussement de la première courbe. L'équation mixte de la courbe de sixième classe étant*

$$(a', b', c', d', e', f', g')(\lambda, \mu)^6 = 0,$$

le polynome $Ag' + 6Bf' + 15Ce - 20Dd' + 15Ec' - 6Fb' + Ga'$ *est identiquement nul.*

2. Il est néanmoins nécessaire d'obtenir la valeur des coefficients de Π; on pourrait les exprimer facilement, mais par des formules dénuées de symétrie, au moyen des dérivées partielles des coefficients de U.

Il est préférable de suivre une autre marche, et, à cet égard, je distinguerai deux cas suivant que la courbe est de classe paire $2n$ ou de classe impaire $2n+1$. Dans le premier cas, on considérera n couples de variables $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, ... fonctions de n invariants de U et de leurs dérivées partielles; en représentant par Δ le discriminant de U, et par V, V′, V″, ... n de ses covariants du degré $2n$ convenablement choisis, W sera donné par une expression de la forme

$$\Delta W = (\mathfrak{x} V_1 + \mathfrak{y} V_2) + (\mathfrak{x}' V'_1 + \mathfrak{y}'_1 V'_2) + \ldots.$$

Si la courbe est de classe $(n+1)$, W s'exprimera également au moyen de n émanants et du produit d'un contrevariant de F par un de ses covariants du degré $2n+1$.

Pour éclaircir ce qui précède, je donne ici les résultats pour les courbes de troisième et de quatrième classe :

1° Soient $U = 0$ l'équation mixte d'une courbe de troisième classe; Δ son discriminant et H son hessien. Soit de plus Θ le cayleyen de F (c'est-à-dire le contrevariant de F qui, égalé à zéro, représente la cayleyenne de la courbe). En posant

$$\mathfrak{x} = -v\Delta + \frac{\omega}{6}\frac{d\Delta}{dy}, \qquad \mathfrak{y} = u\Delta - \frac{\omega}{6}\frac{d\Delta}{dx},$$

on aura

$$\Delta\Pi = \mathfrak{x} U_1 + \mathfrak{y} U_2 - 2\omega\Theta H.$$

2° Soient $U = 0$ l'équation mixte d'une courbe de quatrième

classe, Δ son discriminant, H son hessien, S son invariant quadratique et T son invariant cubique.

En posant

$$\mathfrak{x} = \frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dy} - v\Delta, \qquad \mathfrak{y} = -\frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dx} + u\Delta,$$

$$\mathfrak{x}' = 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy}, \qquad \mathfrak{y}' = -2\frac{dT}{dx} + 3T\frac{dS}{dx},$$

on aura

$$\Delta\Pi = \mathfrak{x} U_1 + \mathfrak{y} U_2 + \frac{\omega}{3}(\mathfrak{x}' H_1 + \mathfrak{y}' H_2).$$

3. Le cayleyen Θ d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe se déduit facilement de la proposition suivante, dans l'énoncé de laquelle j'ai conservé toutes les notations précédentes :

Le résultant de H *et du jacobien de* U *et de* H *est* $\omega^{2(n-2)}\Delta\Theta$.

En l'appliquant aux courbes de quatrième classe, on obtient cette relation remarquable

$$\Delta^3\Theta = pTU(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') + qH(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'),$$

où p et q désignent des invariants de U de l'ordre 18 et de l'ordre 20, et T l'invariant du troisième ordre.

Une formule de M. Salmon indique que, dans ce cas, la cayleyenne a 126 points doubles; l'équation précédente montre qu'ils se réduisent à 21 points quadruples. Ces points δ jouissent de la propriété que les tangentes, menées de chacun d'eux à la courbe, ont leurs points de contact en ligne droite. On peut remarquer aussi que l'équation $U(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') = 0$ représente la courbe du trente-sixième ordre, jouissant de la propriété que, des tangentes menées d'un de ses points à la courbe, trois sont en ligne droite (¹).

(¹) En général, si la polaire d'une droite se décompose en un point P et une courbe résiduelle, le point P est un point $2(n-2)$*tuple* de la cayleyenne.

Si d'un point (x, y) on mène des tangentes à la courbe de quatrième classe K, l'équation de la tangente menée en ce point à la conique qui le contient, ainsi que les quatre points de contact, est

$$\xi\left(2S\frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx}\right) + \eta\left(2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy}\right) + \zeta\left(2S\frac{dT}{dz} - 3T\frac{dS}{dz}\right) = 0;$$

cette même équation, si l'on y regarde ξ, η, ζ comme des paramètres arbitraires,

4. L'introduction des polynomes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, ... se justifie par cette considération importante, que l'on n'a jamais à traiter que des invariants ou covariants de U; on peut donc (quoique ce soit complètement fictif) supposer la forme U réduite à sa forme canonique.

Ainsi l'on pourra prendre pour équations mixtes des courbes de troisième et de quatrième classe les équations réduites

$$\lambda^3 + \mu^3 = \text{o}, \qquad \lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4 = \text{o}.$$

De même, pour la surface de troisième classe (car tout ce que j'ai dit dans cette Note s'applique aux surfaces algébriques), on pourra prendre pour équation mixte de la surface l'équation très simple

$$\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 + 6m\lambda\mu\nu = \text{o}.$$

Dans le présent Mémoire, je n'ai exposé que les points principaux de la théorie; dans d'autres Mémoires spéciaux, j'en développerai les conséquences relativement aux courbes de troisième et de quatrième classe, ainsi que pour les surfaces de troisième classe.

---

et x, y, z comme les coordonnées courantes, représente la courbe la plus générale du neuvième ordre, que l'on peut mener par les 52 points singuliers de la courbe.

L'équation de la courbe la plus générale du huitième ordre, que l'on peut mener par les 28 points doubles et les 21 po nts $\hat{\delta}$, est

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \dfrac{dS}{dx} & \dfrac{dS}{dy} & \dfrac{dS}{dz} \\ \dfrac{dT}{dx} & \dfrac{dT}{dy} & \dfrac{dT}{dz} \end{vmatrix} = \text{o}.$$

SUR L'APPLICATION

DE LA

THÉORIE DES FORMES BINAIRES

A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1875.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATION MIXTE DE LA POLAIRE D'UNE DROITE.

1. Dans ce Mémoire, je rapporterai les figures que j'aurai à considérer à un triangle de référence dont les côtés auront respectivement pour équations

$$x = \text{o}, \qquad y = \text{o} \qquad \text{et} \qquad z = \text{o}.$$

Dans le but de simplifier le langage (ce qui ne diminue en rien la généralité des résultats obtenus), je supposerai que la droite $z = \text{o}$ coïncide avec la droite de l'infini, en sorte que je supposerai toujours z égal à l'unité, ainsi que toutes les variables analogues z', ζ, ζ', ... que j'aurai occasion d'introduire; je les mettrai néanmoins en évidence toutes les fois que cela sera nécessaire pour la clarté ou la simplicité des formules.

Cela posé, $ux + vy + wz = \text{o}$ désignant l'équation d'une droite mobile et $F(u, v, w)$ une forme ternaire, homogène et du degré n, si les paramètres u, v et w sont liés entre eux par la relation

$$(1) \qquad F(u, v, w) = \text{o},$$

la droite enveloppe une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe K, dont l'équation (1) est l'équation tangentielle.

Soit (x, y) un point quelconque du plan et $\frac{\mu}{\lambda}$ le coefficient angulaire d'une quelconque des tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe K; cette tangente, en désignant par X, Y, Z les coordonnées courantes, a pour équation

$$\mu(X - x) - \lambda(Y - y) = 0,$$

ou encore

$$\mu X - \lambda Y + \lambda y - \mu x = 0;$$

on en déduit la relation

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = 0,$$

qui a pour racines les coefficients angulaires des n tangentes que l'on peut mener du point donné à la courbe.

Si l'on pose

$$(2) \qquad F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = U(\lambda, \mu),$$

U est une forme binaire du degré n par rapport aux variables λ et μ, dont les coefficients sont des polynomes du degré n en x et y; cette forme satisfait d'ailleurs évidemment à l'équation aux différences partielles

$$\lambda \frac{dU}{dx} + \mu \frac{dU}{dy} = 0.$$

Je dirai que l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ est l'*équation mixte* de la courbe K. J'ai déjà développé quelques-unes des conséquences les plus immédiates que l'on peut tirer de cette notion dans un Mémoire publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (¹), et je rappellerai à ce sujet la proposition suivante, dont je ferai un usage continuel :

Soit un nombre quelconque de courbes représentées par les équations mixtes

$$f_0(\lambda, \mu) = 0, \quad f_1(\lambda, \mu) = 0, \quad f_2(\lambda, \mu) = 0, \quad \ldots;$$

si l'on considère un invariant quelconque I *des formes* $f_0, f_1,$

(¹) *Mémoire de Géométrie analytique*, 2ᵉ série, t. XVII, 1872.

$f_2, \ldots,$ *l'équation* $I = 0$ *représente une courbe dont le degré est égal au poids de l'invariant.*

Il est utile ici de remarquer que, si I était un polynome de degré inférieur au poids de l'invariant, relativement aux variables x et y, on devrait, en rendant le polynome homogène, introduire comme facteur une certaine puissance de z, en sorte que la courbe $I = 0$ contiendrait un certain nombre de fois la droite de l'infini.

2. Le problème principal, que l'on doit résoudre pour employer utilement les équations mixtes dans les questions de Géométrie analytique, est le suivant :

Étant donnée une courbe K *ayant pour équation tangentielle* $F(u, v, w) = 0$ *et pour équation mixte* $U(\lambda, \mu) = 0$, *déduire de cette équation mixte, de ses invariants et des contrevariants de la forme* F, *les équations mixtes des courbes dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les divers covariants de* F.

Et tout d'abord je m'occuperai, tant à cause de leur simplicité qu'à cause de leur importance, des covariants doubles qui représentent les polaires des divers ordres des droites du plan par rapport à K.

3. Dans tout ce qui suit, en désignant par Z une fonction homogène quelconque, du degré n, des variables λ et μ, je représenterai, selon l'usage habituel, par Z_1 et Z_2 les quantités $\frac{1}{n}\frac{dZ}{d\lambda}$ et $\frac{1}{n}\frac{dZ}{d\mu}$, et de même par Z_{11}, Z_{12}, Z_{22} les quantités $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda^2}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda\, d\mu}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\mu^2}$.

D'une façon analogue, je représenterai par F_1, F_2 et F_3 le résultat que l'on obtient en remplaçant dans $\frac{1}{n}\frac{dF}{du}$, $\frac{1}{n}\frac{dF}{dv}$, $\frac{1}{n}\frac{dF}{dw}$ les variables u, v et w par μ, $-\lambda$ et $\lambda y - \mu x$.

F_{11}, F_{12}, ... représenteront de même le résultat que l'on obtient en faisant la même substitution dans $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2F}{du^2}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2F}{du\, dv}$, ...

Cela posé, étant donnée une droite ayant pour équation

$$\omega = ux + vy + wz = 0,$$

l'équation mixte de sa première polaire est

$$u F_1 + v F_2 + w F_3 = 0.$$

En différentiant successivement par rapport à λ, μ, x et y la relation (2), on obtient les relations suivantes :

$$(3)\qquad U_1 = -F_2 + y F_3, \qquad U_2 = F_1 - x F_3,$$

$$(4)\qquad F_3 = -\frac{1}{n\mu}\frac{dU}{dx} = \frac{1}{n\lambda}\frac{dU}{dy};$$

par suite, en désignant par $\Pi_\omega = 0$ l'équation de la polaire [1] de la droite $\omega = 0$, on a

$$\Pi_\omega = u U_2 - v U_1 + \omega F_3.$$

La polaire de la droite de l'infini a évidemment pour équation $F_3 = 0$; en posant

$$(4')\qquad F_3 = \Pi,$$

on a donc

$$(5)\qquad \Pi_\omega = u U_2 - v U_1 + \omega \Pi.$$

4. Posons

$$U = (a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n$$

et

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots \between \lambda, \mu)^{n-1},$$

la comparaison des formules (4) et (4') donne immédiatement les relations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dy} = n\alpha, & \dfrac{db}{dy} = (n-1)\beta, & \dfrac{dc}{dy} = (n-2)\gamma, & \ldots, \\[2ex] \dfrac{da}{dx} = 0, & \dfrac{db}{dx} = -\alpha, & \dfrac{dc}{dx} = -2\beta, & \ldots, \end{cases}$$

qui permettent d'exprimer les fonctions α, β, γ, ... au moyen des

---

(1) Ici, comme dans toute la suite de ce Mémoire, je désigne simplement sous le nom de *polaire* de la droite sa *première* polaire, qui est de la $(n-1)^{\text{ième}}$ classe.

dérivées partielles des coefficients de U; mais, comme je le montrerai dans la suite de ce Mémoire, elles nous seront surtout utiles pour exprimer ces dérivées en fonction des coefficients de Π.

5. Soit une courbe K' de classe n' et ayant pour équation mixte $V(\lambda, \mu) = 0$; étant menée une tangente à cette courbe, proposons-nous de trouver le lieu des points M où elle est coupée par sa polaire.

En désignant par $\omega = 0$ l'équation d'une de ces tangentes, je remarque d'abord qu'en désignant par λ' et μ' les coordonnées courantes, l'équation mixte de sa polaire est, en vertu de l'équation (5),

$$u U_2(\lambda', \mu') - v U_1(\lambda', \mu') + \omega \Pi(\lambda', \mu') = 0;$$

son équation en coordonnées cartésiennes est le discriminant (par rapport à λ' et μ') de l'équation précédente. Le point M, satisfaisant à l'équation $\omega = 0$, satisfera donc à l'équation $\Delta = 0$, Δ désignant le discriminant du polynome $u U_2(\lambda', \mu') - v U_1(\lambda', \mu')$.

Le coefficient angulaire de la tangente est d'ailleurs $\frac{u}{-v} = \frac{\mu}{\lambda}$; l'équation du lieu cherché s'obtiendra donc en éliminant λ et μ entre l'équation $V(\lambda, \mu) = 0$ et l'équation $\Delta = 0$, les variables u et v ayant été préalablement remplacées par μ et $-\lambda$ dans le polynome Δ.

D'où la proposition suivante :

Théorème I. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et* $V(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes de deux courbes* K *et* K', *on obtiendra l'équation du lieu des points où les tangentes à* K' *sont coupées par leurs polaires relativement à* K, *en éliminant* λ *et* μ *entre l'équation* $V(\lambda, \mu) = 0$ *et l'équation* $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, Δ *désignant le discriminant pris par rapport à* λ' *et* μ' *du polynome* $\lambda \frac{dU}{d\lambda'} + \mu \frac{dU}{d\mu'}$.

Il est clair que les considérations précédentes s'appliquent également aux polaires des divers ordres relativement à la courbe K; on peut donc énoncer cette proposition plus générale :

Théorème II. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et* $V(\lambda, \mu) = 0$

les équations mixtes des deux courbes K *et* K′, *on obtiendra l'équation du lieu des points où les tangentes à* K′ *sont coupées par leurs* $m^{\text{ièmes}}$ *polaires relativement à* K, *en éliminant* λ *et* μ *entre l'équation* $V(\lambda, \mu) = 0$ *et l'équation* $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, Δ *désignant le discriminant pris par rapport à* λ' *et* μ' *de l'émanant*

$$\left(\lambda \frac{d}{d\lambda'} + \mu \frac{d}{d\mu'}\right)^m U.$$

6. Soit, pour faire une application simple du théorème précédent, une courbe de quatrième classe K^4, dont l'équation mixte est

$$U = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)^4 = 0.$$

En considérant la première polaire, on voit que Δ est le discriminant du polynome $(a\lambda + b\mu)\lambda'^3 + 3(b\lambda + c\mu)\lambda'^2\mu' + \ldots$, discriminant qui est de la forme $p\mathrm{TU} + q\mathrm{SH}$, en désignant par H le hessien de U, et par T et S son invariant cubique et son invariant quadratique.

Par suite, l'équation du lieu des points où les tangentes à K^4 rencontrent leurs polaires s'obtient en égalant à zéro le résultant de U et de $p\mathrm{TU} + q\mathrm{SH}$, c'est-à-dire $(S^3 - 27T^2)^2 S^4$.

On sait d'ailleurs que $S^3 - 27T^2 = 0$ est l'équation de K^4 en coordonnées cartésiennes et que $S = 0$ est l'équation de la courbe du quatrième ordre S, qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de K^4; de là la proposition suivante :

Théorème III. — *Étant donnée une courbe de quatrième classe* K^4, *une quelconque de ses tangentes est coupée par sa polaire en six points, dont deux sont confondus au point de contact; les quatre autres points d'intersection décrivent, lorsque la tangente se déplace, la courbe de quatrième ordre* S, *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K^4.

Réciproquement, si, par un point M *de* S, *on mène les quatre tangentes à* K^4, *leurs polaires relativement à cette courbe passent par* M.

7. L'application la plus importante du théorème II est relative

au cas de la polaire conique; Δ est alors le discriminant de

$$\lambda'^2 \frac{d^2 U}{d\lambda^2} + 2\lambda'\mu' \frac{d^2 U}{d\lambda\, d\mu} + \mu'^2 \frac{d^2 U}{d\mu^2},$$

c'est-à-dire le hessien de U; d'où la proposition suivante :

Théorème IV. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et par* $V(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes de deux courbes* K *et* K′, *par* $H(\lambda, \mu)$ *le hessien de* $U(\lambda, \mu)$, *l'équation du lieu des points, où les tangentes à* K′ *sont coupées par leur conique polaire relativement à* K, *s'obtient en égalant à zéro le résultant des polynomes* $H(\lambda, \mu)$ *et* $V(\lambda, \mu)$.

En particulier, soit M un point du plan ayant pour coordonnées ξ et η; en posant pour abréger, comme je le ferai toujours par la suite,

$$X = x - \xi \quad \text{et} \quad Y = y - \eta,$$

l'équation mixte de ce point est

$$\lambda Y - \mu X = 0;$$

d'où cette conclusion :

Le lieu des points où les diverses droites qui passent par un point (ξ, η) *sont rencontrées par leurs coniques polaires, relativement à la courbe* $U(\lambda, \mu) = 0$, *a pour équation*

$$H(X, Y) = 0.$$

On a ainsi l'interprétation géométrique du hessien de la forme U; quant à l'équation $U(X, Y) = 0$, elle représente, comme on le sait, l'ensemble des tangentes que l'on peut mener du point (ξ, η) à la courbe.

8. Considérons la courbe K ayant pour équation mixte $U(\lambda, \mu) = 0$; si une droite se meut tangentiellement à la hessienne de cette courbe, sa conique polaire se compose de deux points, ou encore, si on la considère comme une courbe du second ordre, de la droite qui joint ces deux points, cette droite étant comptée deux fois. Le lieu des intersections des tangentes à la hessienne avec leurs coniques polaires est donc une courbe double, la cay-

leyenne de K; la proposition suivante permettra d'obtenir son équation :

Théorème V. — *Étant donnée une courbe* K *ayant pour équation mixte* $U(\lambda, \mu) = 0$, *en désignant par* $H(\lambda, \mu)$ *le hessien de* U *et par* $W(\lambda, \mu) = 0$ *l'équation mixte de la hessienne de* K, *si l'on forme le résultant de* $H(\lambda, \mu)$ *et de* $W(\lambda, \mu)$, *ce résultant est un carré parfait* R^2 *et* $R = 0$ *est l'équation cartésienne de la cayleyenne de* K.

CHAPITRE II.

ÉQUATION MIXTE DE LA HESSIENNE D'UNE COURBE, ÉQUATION DE LA CAYLEYENNE.

9. Étant données une courbe K de classe n, dont l'équation tangentielle est

$$F(u, v, w) = 0,$$

et l'équation mixte

$$U(\lambda, \mu) = F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = 0,$$

l'équation tangentielle de sa hessienne est, comme on le sait,

$$\frac{1}{n(n-1)} \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{du^2} & \dfrac{d^2F}{du\,dv} & \dfrac{d^2F}{du\,dw} \\ \dfrac{d^2F}{du\,dv} & \dfrac{d^2F}{dv^2} & \dfrac{d^2F}{dv\,dw} \\ \dfrac{d^2F}{du\,dw} & \dfrac{d^2F}{dv\,dw} & \dfrac{d^2F}{dw^2} \end{vmatrix} = 0;$$

son équation mixte sera par suite

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Des équations (3) et (4) on déduit

$$\begin{aligned} U_{11} &= F_{22} - 2yF_{23} + y^2F_{33}, \\ U_{12} &= -F_{12} + xF_{23} + yF_{13} - xyF_{33}, \\ U_{22} &= F_{11} - 2xF_{13} + x^2F_{33}. \end{aligned}$$

En désignant par $\Pi = 0$ l'équation de la polaire de la droite de

l'infini, l'équation (4') donne $\Pi = F_3$; d'où les relations

$$\Pi_1 = -F_{23} + yF_{33}, \qquad \Pi_2 = F_{13} - xF_{33}.$$

En posant d'ailleurs $F_{33} = \varpi$, on sait que $\varpi = 0$ est l'équation mixte de la deuxième polaire de la droite de l'infini.

Des relations qui précèdent résulte l'identité

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} F_{22} - 2yF_{23} + y^2F_{33} & -F_{12} + xF_{23} + yF_{13} - xyF_{33} & -F_{23} + yF_{33} \\ -F_{12} + xF_{23} + yF_{13} - xyF_{33} & F_{11} - 2xF_{13} + x^2F_{33} & F_{13} - xF_{33} \\ -F_{23} + yF_{33} & F_{13} - xF_{33} & F_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & y \\ -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}.$$

L'équation mixte de la hessienne s'obtient en égalant à zéro le déterminant qui précède; d'où la proposition suivante :

Théorème VI. — *En désignant respectivement par* $U(\lambda, \mu) = 0$, $\Pi(\lambda, \mu) = 0$ *et* $\varpi(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes d'une courbe, de la première polaire et de la deuxième polaire de la droite de l'infini relativement à cette courbe, l'équation mixte de la hessienne de la courbe est* $W(\lambda, \mu) = 0$, W *désignant le polynome*

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix}.$$

10. Cette forme remarquable de l'équation mixte donne lieu à diverses conséquences importantes que l'on peut en déduire, sans que l'on ait même besoin de déterminer l'expression des coefficients de Π et ϖ.

En particulier, je citerai les deux propositions suivantes, relatives aux courbes de troisième et de quatrième classe :

Théorème. — *En désignant par* $(a, b, c, d) = 0$ [1] *l'équa-*

[1] Ici, comme je le ferai souvent dans la suite quand il n'y aura lieu de

tion mixte d'une courbe de troisième classe K *et par* $(a', b', c', d') = 0$ *l'équation mixte d'une courbe quelconque de même classe* K' *tangente aux neuf tangentes de rebroussement de la première, si l'on forme l'invariant*

$$I = ad' - 3bc' + 3cb' - da',$$

ce polynome est identiquement nul.

Démonstration. — Comme I est un *combinant* des deux formes (a, b, c, d) et (a', b', c', d'), il suffit de démontrer la proposition pour l'une quelconque des courbes du faisceau (K, K'), par exemple pour la hessienne. Supposons (a, b, c, d) réduite à la forme canonique $\lambda^3 + \mu^3$, on aura simplement $I = d' - a'$. Or, en posant

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{et} \quad \varpi = (A, B),$$

on déduit du théorème précédent :

$$(a', b', c', d') = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha\lambda + \beta\mu \\ 0 & \mu & \beta\lambda + \gamma\mu \\ \alpha\lambda + \beta\mu & \beta\lambda + \gamma\mu & A\lambda + B\mu \end{vmatrix};$$

d'où

$$a' = -\beta^2 \quad \text{et} \quad d' = -\beta^2;$$

par suite

$$I = \beta^2 - \beta^2 = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

Théorème. — *En désignant par* $U = (a, b, c, d, e) = 0$ *l'équation mixte d'une courbe de quatrième classe* K *et par* (A, B, C, D, E, F, G) *le covariant sextique de* U, *par* $(a', b', c', d', e', f', g') = 0$ *l'équation mixte d'une courbe quelconque de sixième classe* K' *tangente aux vingt-quatre tangentes de rebroussement de* K; *si l'on forme l'invariant* $I = Ag' - 6Bf' + 15Ce' - 20Dd' + 15Ec' - 6Fb' + Ga'$, *ce polynome est identiquement nul.*

Démonstration. — La hessienne étant tangente aux vingt-quatre

---

craindre aucune ambiguïté, je pose, pour abréger,

$$(a, b, c, d)(\lambda, \mu)^3 = (a, b, c, d).$$

tangentes de rebroussement de K, l'équation mixte de K' sera de la forme $W(\lambda, \mu) + U(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu)$, $V(\lambda, \mu) = 0$ étant l'équation mixte d'une conique quelconque.

Si nous supposons U réduite à sa forme canonique

$$\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^2,$$

on a simplement

$$I = (1 - 9m^2)(b' - f').$$

Or le théorème V donne la relation

$$\begin{aligned}(a', b', c', d', e', f', g') &= (\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4)(P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2) \\ &+ \begin{vmatrix} \lambda^2 + m\mu^2 & 2m\lambda\mu & \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 \\ 2m\lambda\mu & m\lambda^2 + \mu^2 & \beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda\mu + \delta\mu^2 \\ \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 & \beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda\mu + \delta\mu^2 & P'\lambda^2 + 2Q'\lambda\mu + R'\mu^2 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad \varpi = (P', Q', R') \quad \text{et} \quad V = (P, Q, R).$$

On déduit de là, après quelques réductions faciles,

$$6b' = 6f' = 2Q + 2mQ' - 4\beta\gamma$$

et, par suite,

$$I = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

11. On peut donner à la formule énoncée dans le théorème V une forme un peu plus générale et d'un usage plus commode pour les applications.

Soient $\Pi_\omega = 0$ et $\varpi_\omega = 0$ les équations mixtes de la première polaire et de la deuxième polaire de la droite

$$\omega = ux + vy + wz = 0;$$

on aura, d'après la formule (5),

$$\Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega\Pi.$$

On en déduit, en désignant par $\Pi_{\omega,1}$, $\Pi_{\omega,2}$, ... les quantités analogues Π_1 et Π_2, mais relatives à Π_ω,

$$\begin{aligned}\Pi_{\omega,1} &= uU_{12} - vU_{11} + \omega\Pi_1, \\ \Pi_{\omega,2} &= uU_{22} - vU_{12} + \omega\Pi_2, \\ \varpi_\omega &= u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega\varpi',\end{aligned}$$

$\varpi' = 0$ étant l'équation mixte de la polaire de la droite de l'infini, relativement à la première polaire de la droite $\omega = 0$, ou, ce qui est la même chose, de la polaire de cette droite relativement à la première polaire de la droite de l'infini.

On a donc

$$\varpi' = u\Pi_2 - v\Pi_1 + \omega\varpi$$

et, par suite,

$$(5') \qquad \varpi_\omega = u\Pi_{\omega,2} - v\mathrm{H}_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi.$$

On déduit

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_{\omega,1} \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_{\omega,2} \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & \varpi_\omega \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & uU_{12} - vU_{11} + \omega\Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & uU_{22} - vU_{12} + \omega\Pi_2 \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi \end{vmatrix}$$

$$= \omega \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ uU_{12} - vU_{11} + \omega\Pi_1 & uU_{22} - vU_{12} + \omega\Pi_2 & u\Pi_2 - v\Pi_1 + \omega\varpi \end{vmatrix}$$

$$= \omega^2 \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix} = \omega^2 W(\lambda, \mu);$$

d'où la formule suivante, qui permet d'exprimer le polynome $W(\lambda, \mu)$ au moyen des deux premières polaires d'une droite quelconque $\omega = ux + vy + wz = 0$:

$$(7) \qquad \omega^2 W(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_{\omega,1} \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_{\omega,2} \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & \varpi_\omega \end{vmatrix} = \varpi_\omega H - \Omega,$$

en posant

$$\Omega = U_{11}\Pi_{\omega,2}^2 - 2U_{12}\Pi_{\omega,1}\Pi_{\omega,2} + U_{22}\Pi_{\omega,1}$$

et en désignant par H le hessien de U.

12. J'ai montré (théorème IV) que le résultant de H et de W était égal à Θ^2, Θ désignant le contrevariant de la forme primitive $F(u, v, w)$ qui, égale à zéro, donne l'équation de la cayleyenne;

on déduit de ce qui précède

$$W = \frac{\varpi H - \Omega}{\omega};$$

le résultant Θ^2 est donc le résultant de H et de $\frac{-\Omega}{\omega}$; d'où la proposition suivante :

Théorème. — *Si l'on forme le résultant du polynome* H *et* $-\Omega$, *ce résultant est un carré parfait dont la racine est égale à* $\omega^{2(n-2)}\Theta$.

Remarque I. — Le premier terme de Ω est d'un poids égal à 2, le dernier terme de H d'un poids égal à $2(n-1)$: leur résultant est donc d'un poids égal à $4(n-2) + 6(n-1)(n-2)$, et, en vertu de la proposition fondamentale donnée (1), Θ est du degré

$$2(n-2) + 3(n-1)(n-2) - 2(n-2) = 3(n-1)(n-2).$$

C'est en effet, comme on le sait, le degré de la cayleyenne.

Remarque II. — La proposition précédente donne une infinité de formes pour Θ, puisque u, v et w sont arbitraires; on peut, par exemple, remplacer ces quantités par les dérivées partielles d'un contrevariant quelconque Φ de F, et la proposition précédente donnera une expression de $\Phi^{2(n-2)}\Theta$.

Remarque III. — On peut trouver d'autres expressions de Θ souvent plus faciles à calculer. On a, par exemple, identiquement

$$\Omega U = [\Pi_{\omega,1}(\lambda U_{12} + \mu U_{22}) - \Pi_{\omega,2}(\lambda U_{11} + \mu U_{12})]^2 - H(\lambda\Pi_{\omega,1} + \mu\Pi_{\omega,2})^2.$$

Le résultant de H et de ΩU, c'est-à-dire $(\omega^{2(n-2)}\Theta\Delta)^2$, en désignant par Δ le discriminant de U (1), est donc égal au résultant de H et de

$$[\Pi_{\omega,1}(\lambda U_{12} + \mu U_{22}) - \Pi_{\omega,2}(\lambda U_{11} + \mu U_{12})]^2.$$

D'où cette conséquence :

Si l'on forme le résultant de H *et de* $\Pi_{\omega,1}U_2 - \Pi_{\omega,2}U_1$, *ce résultant est égal à* $\omega^{2(n-2)}\Delta\Theta$.

---

(1) Δ est le *réciprocant* de F; l'équation $\Delta = 0$ représente en coordonnées cartésiennes la courbe K.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DE L'ÉQUATION MIXTE DE LA POLAIRE D'UNE DROITE.

13. Les formules (6) données précédemment (4) permettent d'exprimer les coefficients de l'équation mixte de la polaire de la droite de l'infini (et par suite de la polaire d'une droite quelconque) au moyen des dérivées partielles des coefficients de U; mais il est préférable d'introduire les dérivées partielles d'un certain nombre d'invariants de cette forme.

Je m'appuierai sur la proposition suivante :

Théorème VII. — *Étant donné un invariant quelconque* I *de la forme* U, *en désignant son poids par* i, *on a les deux équations*

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha \dfrac{dI}{db} + 2\beta \dfrac{dI}{dc} + 3\gamma \dfrac{dI}{dd} + \ldots = \mathfrak{y}_1, \\ n\alpha \dfrac{dI}{da} (n-1)\beta \dfrac{dI}{db} + (n-2)\gamma \dfrac{dI}{dc} - \ldots = \mathfrak{x}_1, \end{cases}$$

où $(a, b, c, \ldots) = 0$ *est l'équation mixte de* K *et* $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$ *l'équation mixte de la polaire de la droite* $\omega = 0$ *et où j'ai posé, pour abréger,*

$$\mathfrak{x}_1 = -ivI + \omega \frac{dI}{dy}, \qquad \mathfrak{y}_1 = uiI - \omega \frac{dI}{dx}.$$

Démonstration. — Des formules (5) et (6) on déduit facilement les relations suivantes :

$$(6')\quad \begin{cases} n\alpha = \omega \dfrac{da}{dy} + n(ub - va), \\ (n-1)\beta = \omega \dfrac{db}{dy} + (n-1)(uc - vb), \\ (n-2)\gamma = \omega \dfrac{dc}{dy} + (n-2)(ud - vc) + \ldots, \\ 0 = \dfrac{du}{dx}, \quad \alpha = -\omega \dfrac{db}{dx} + ub - v\ . \quad 2\beta = -\omega \dfrac{dc}{dx} + 2(uc - vb) \ldots; \end{cases}$$

par suite, on a

$$\begin{aligned} \omega \frac{dI}{dx} &= \frac{dI}{db}(-\alpha + ub - va) + \frac{dI}{dc}(-2\beta + 2uc - 2vb) + \ldots \\ &= -\alpha \frac{dI}{db} - 2\beta \frac{dI}{dc} - 3\gamma \frac{dI}{dd} + u\left(b \frac{dI}{db} + 2c \frac{dI}{dc} + \ldots\right) \\ &\quad - v\left(a \frac{dI}{db} + 2b \frac{dI}{dc} + \ldots\right) \end{aligned}$$

ou encore, d'après les propriétés bien connues des invariants,

$$\omega \frac{dI}{dx} = -\left(\alpha \frac{dI}{db} + 2\beta \frac{dI}{dc} + 3\gamma \frac{dI}{dd} + \ldots\right) + uiI;$$

d'où enfin

$$\alpha \frac{dI}{db} + 2\beta \frac{dI}{dc} + 3\gamma \frac{dI}{dd} + \ldots = + uiI - \omega \frac{dI}{dx}.$$

L'autre formule se démontrerait de la même manière.

14. Dans l'application des formules précédentes, je considérerai deux cas suivant que la courbe K est de classe paire ou de classe impaire.

Dans le premier cas, le nombre des coefficients α, β, ... inconnus est pair; considérons $\frac{n}{2}$ invariants I, I′, I″, ... de la forme U et désignons par $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_{1'}$, $\mathfrak{y}_{1'}$, ... les polynomes formés de la façon indiquée au moyen des dérivées partielles de ces invariants : nous obtiendrons n équations linéaires de la forme (8), qui permettront d'exprimer les coefficients inconnus en fonction des coefficients de U et des polynomes $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_{1'}$, ...

L'introduction de ces polynomes se trouve justifiée par le fait important que le polynome Π_ω devient alors un covariant multiple de U, les divers couples de variables étant λ, μ; $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$; ....

15. Si la courbe est de classe impaire, nous choisirons $\frac{n-1}{2}$ invariants qui fourniront $(n-1)$ relations linéaires entre les inconnues; une dernière relation linéaire peut être obtenue de la façon suivante. La méthode est évidemment générale, mais je ne l'exposerai que pour le cas d'une courbe de cinquième classe.

Soient $U = (a, b, c, d, e, f) = 0$ l'équation mixte d'une courbe de cinquième classe et (A, B, C, D) un covariant quelconque du troisième ordre de U; en désignant, pour un instant, par $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \varepsilon_0) = 0$ l'équation de la polaire de la droite de l'infini, posons

$$\Upsilon = \begin{vmatrix} a & b & \alpha_0 & A & 0 \\ 4b & 4c & 4\beta_0 & 3B & A \\ 6c & 6d & 6\gamma_0 & 3C & 3B \\ 4d & 4e & 4\delta & D & 3C \\ e & f & \varepsilon_0 & 0 & D \end{vmatrix};$$

en appelant $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = 0$ l'équation mixte de la polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$, on déduira de la formule (5)

$$\omega\Upsilon = \begin{vmatrix} a & b & \alpha & A & 0 \\ 4\beta & 4c & 4\beta & 3B & A \\ 6c & 6d & 6\gamma & 3C & 3B \\ 4d & 4e & 4\delta & D & 3C \\ e & f & \varepsilon & 0 & D \end{vmatrix};$$

d'où l'on conclut que V est un contrevariant de la forme fondamentale F [1].

En développant cette égalité, on obtiendra une équation linéaire qui, avec les $n-1$ autres précédemment obtenues, permettra d'exprimer les coefficients de Π_ω.

16. Des relations établies plus haut, n° **13**, on peut déduire une proposition générale, dont se déduisent un grand nombre de propriétés des courbes algébriques.

Soit I un invariant quelconque de U, en sorte que l'on ait les relations

$$\alpha\frac{dI}{db} + 2\beta\frac{dI}{dc} + 3\gamma\frac{dI}{dd} + \ldots = uiI - \omega\frac{dI}{dx},$$

$$n\alpha\frac{dI}{da} + (n-1)\beta\frac{dI}{db} + (n-2)\gamma\frac{dI}{dc} + \ldots = -viI + \omega\frac{dI}{dy}.$$

Considérons la courbe K′ composée de la polaire de la droite

[1] Il est bien clair que ce procédé peut être varié de bien des manières et que (si n est > 4) il peut être aussi employé quand n est pair.

Cette équation, ainsi que beaucoup de celles établies dans ce Mémoire, est susceptible de diverses interprétations géométriques; mais leur développement m'écarterait trop de mon sujet principal.

$\omega = 0$ et d'un point ξ, η; en posant $X = x - \xi$ et $Y = y - \eta$, l'équation mixte de ce point est

$$\lambda Y - \mu X = 0;$$

par suite, l'équation mixte de K′ est

$$n\left[\alpha\lambda^{n-1} + (n-1)\beta\lambda^{n-2}\mu + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\gamma\lambda^{n-3}\mu^2 + \ldots\right](\lambda Y - \mu X) = 0,$$

ou bien encore

$$[n\alpha Y,\ (n-1)\beta Y - \alpha X,\ (n-2)\gamma Y - 2\alpha X,\ \ldots](\lambda, \mu)^n = 0.$$

En représentant le premier membre de cette équation par $(a', b', c', \ldots)$, on trouvera, par la valeur de l'invariant,

$$\mathfrak{J} = a'\frac{dI}{da} + b'\frac{dI}{db} + c'\frac{dI}{dc} + \ldots,$$

$$\mathfrak{J} = Y\left[n\alpha\frac{dI}{da} + (n-1)\beta\frac{dI}{db}\cdots\right] - X\left(\alpha\frac{dI}{db} + 2\beta\frac{dI}{dc}\cdots\right),$$

ou encore, en vertu des relations transcrites ci-dessus,

$$\mathfrak{J} = \omega\left(X\frac{dI}{dx} + Y\frac{dI}{dy}\right) - iI(uX + vY).$$

Posons

$$u\xi + v\eta + z\zeta = \omega',$$

on aura

$$uX + vY = \omega - \omega'$$

et

$$\mathfrak{J} = \omega\left[(x-\xi)\frac{dI}{dx} + (y-\eta)\frac{dI}{dy} - iI\right] + i\omega' I.$$

Remarquons maintenant que le poids i de l'invariant I est précisément le degré de ce polynome en x, y, z; d'après le théorème des fonctions homogènes, on aura donc

$$(9)\qquad \omega\left(\xi\frac{dI}{dx} + \eta\frac{dI}{dy} + \zeta\frac{dI}{dz}\right) = i\omega' I - \mathfrak{J}$$

et, par suite, si le point ξ, η est sur la droite $\omega = 0$,

$$(10)\qquad \omega\left(\xi\frac{dI}{dx} + \eta\frac{dI}{dy} + \zeta\frac{dI}{dz}\right) = -\mathfrak{J}.$$

Je ferai remarquer que la quantité entre parenthèses dans le premier membre de cette équation représente, quand on l'égale à zéro, la polaire du point (ξ, η) relativement à la courbe $I = 0$.

17. Le cas particulier le plus intéressant à considérer est celui où, K étant de classe paire, on considère l'invariant quadratique I de U.

En convenant d'appeler *faisceaux harmoniques* deux faisceaux de n droites, tels que les équations du degré n qui les déterminent aient leur invariant quadratique nul, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Étant donnée une courbe K de classe* $2n$, *si l'on considère la courbe C du degré* $2n$, *dont l'équation s'obtient en égalant à zéro l'invariant quadratique de l'équation mixte de K et le lieu des points d'où l'on voit suivant deux faisceaux harmoniques :* 1° *la polaire d'une droite quelconque D, prise par rapport à K, et un point M de cette droite;* 2° *la courbe K, ce lieu se compose de la droite D elle-même et de la courbe du* $(2n-1)$ *ordre qui est la polaire du point M relativement à C.*

CHAPITRE IV.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX COURBES DE TROISIÈME ET DE QUATRIÈME CLASSE.

18. Considérons une courbe de troisième classe K, dont l'équation mixte soit

$$U = (a, b, c, d) = 0;$$

soit Δ son discriminant, en sorte que $\Delta = 0$ est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes. En appelant H et J le hessien et le covariant cubique de U, je poserai, pour abréger,

$$H = (A, B, C) \quad \text{et} \quad J = (a', b', c', d').$$

Cela posé, en considérant l'invariant Δ, les équations (8) donnent les relations

$$\alpha \frac{d\Delta}{db} + 2\beta \frac{d\Delta}{dc} + 3\gamma \frac{d\Delta}{dd} = 6u\Delta - \omega \frac{d\Delta}{dx},$$
$$3\alpha \frac{d\Delta}{da} + 2\beta \frac{d\Delta}{db} + \gamma \frac{d\Delta}{dc} = -6v\Delta + \omega \frac{d\Delta}{dy},$$

que l'on peut écrire

$$-d'\alpha + 2c'\beta - b'\gamma = -v\Delta + \frac{1}{6}\omega \frac{d\Delta}{dy} = \mathfrak{r},$$
$$c'\alpha - 2b'\beta + a'\gamma = u\Delta - \frac{1}{6}\omega \frac{d\Delta}{dx} = \mathfrak{y}.$$

Posons en outre (*voir* n° 15)

$$\omega\Theta = \begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ c & d & \gamma \end{vmatrix};$$

Θ est un contrevariant de la forme $F(u, v, w)$ qui, égalé à zéro, donne l'équation tangentielle de K; dans le cas actuel, l'équation $\Theta = 0$ représente, comme il est facile de le voir, la cayleyenne de K [1].

Le déterminant développé donne l'égalité

$$\alpha C - 2\beta B + \gamma A = \omega\Theta,$$

qui, jointe aux égalités précédentes, permet d'obtenir α, β et γ par les formules

$$(11) \qquad \begin{cases} \Delta\alpha = a\mathfrak{r} + b\mathfrak{y} - 2A\omega\Theta, \\ \Delta\beta = b\mathfrak{r} + c\mathfrak{y} - 2B\omega\Theta, \\ \Delta\gamma = c\mathfrak{r} + d\mathfrak{y} - 2C\omega\Theta, \end{cases}$$

qui, quand on réduit U à sa forme canonique $a\lambda^3 + d\mu^3$, prennent la forme très simple suivante :

$$(11') \qquad \begin{cases} \Delta\alpha = a\mathfrak{r}, \\ \Delta\beta = -ad\omega\Theta, \\ \Delta\gamma = d\mathfrak{y}. \end{cases}$$

En désignant, comme je l'ai fait jusqu'ici, par $H_\omega = 0$ l'équation de la polaire de la droite $\omega = 0$, relativement à la courbe K, on aura

$$(12) \qquad \Delta H_\omega = \mathfrak{r} U_1 + \mathfrak{y} U_2 - 2\omega\Theta H.$$

L'équation en coordonnées cartésiennes de cette polaire est

$$\alpha\gamma - \beta^2 = 0;$$

---

[1] *Voir* mon *Mémoire de Géométrie analytique*, déjà cité, n° 14.

en nous servant de la forme canonique de la forme U, on trouve immédiatement

$$\Delta^2(\alpha\gamma-\beta^2)=ad\mathfrak{x}\mathfrak{y}-a^2d^2\omega^2\Theta^2;$$

d'où, généralement,

$$\Delta^2(\alpha\gamma-\beta^2)=\mathrm{H}(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\omega^2\Delta\Theta^2.$$

19. Considérons maintenant une courbe de quatrième classe K ayant pour équation mixte $\mathrm{U}=(a,b,c,d,e)=0$; soient S et T les invariants quadratique et cubique de U; son discriminant Δ est égal à $\mathrm{S}^3-27\mathrm{T}^2$, et l'on sait d'ailleurs que $\Delta=0$ est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes. Je représenterai, pour abréger, le hessien H de U par la notation (a', b', c', d', e').

Cela posé, en considérant les invariants S et T, les formules (8) donnent les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha e-3\beta d-3\gamma c-\delta b &= -\phantom{\tfrac{3}{2}}v\mathrm{S}+\frac{\omega}{4}\frac{d\mathrm{S}}{dy}=-\mathrm{S}_1,\\
-\alpha d+3\beta c-3\gamma b+\delta a &= \phantom{-\tfrac{3}{2}}u\mathrm{S}-\frac{\omega}{4}\frac{d\mathrm{S}}{dx}=-\mathrm{S}_2,\\
\alpha e'-3\beta d'+3\gamma c'-\delta b' &= -\frac{3}{2}v\mathrm{T}+\frac{\omega}{4}\frac{d\mathrm{T}}{dy}=-\mathrm{T}_1,\\
-\alpha d'+3\beta c'-3\gamma b'+\delta a' &= \frac{3}{2}u\mathrm{T}-\frac{\omega}{4}\frac{d\mathrm{T}}{dx}=-\mathrm{T}_2,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= a(18\mathrm{TT}_1-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_1)+b(18\mathrm{TT}_2-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_2)\\
&\quad+a'(18\mathrm{TS}_1-12\mathrm{ST}_1)+b'(18\mathrm{TS}_2-12\mathrm{ST}_2),\\
\Delta\beta &= b(18\mathrm{TT}_1-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_1)+c(18\mathrm{TT}_2-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_2)\\
&\quad+b'(18\mathrm{TS}_1-12\mathrm{ST}_1)+c'(18\mathrm{TS}_2-12\mathrm{ST}_2),\\
\Delta\gamma &= c(18\mathrm{TT}_1-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_1)+d(18\mathrm{TT}_2-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_2)\\
&\quad+c'(18\mathrm{TS}_1-12\mathrm{ST}_1)+d'(18\mathrm{TS}_2-12\mathrm{ST}_2,\\
\Delta\delta &= d(18\mathrm{TT}_1-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_1)+d(18\mathrm{TT}_2-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_2)\\
&\quad+d'(18\mathrm{TS}_1-12\mathrm{ST}_1)+e'(18\mathrm{TS}_2-12\mathrm{ST}_2).
\end{aligned}$$

Posons enfin, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= 18\mathrm{TT}_1-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_1=\frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dy}-v\Delta,\\
\mathfrak{y} &= 18\mathrm{TT}_2-\mathrm{S}^2\mathrm{S}_2=-\frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dx}+u\Delta,
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{x}'=2\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{dy}-3\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{dy},\qquad \mathfrak{y}'=-2\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{dx}+3\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{dx};$$

on aura enfin

$$(13)\qquad\left\{\begin{aligned}
\Delta\alpha &= a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y}+\frac{3\omega}{2}(a'\mathfrak{x}'+b'\mathfrak{y}'),\\
\Delta\beta &= b\mathfrak{x}+c\mathfrak{y}+\frac{3\omega}{2}(b'\mathfrak{x}'+c'\mathfrak{y}'),\\
\Delta\gamma &= c\mathfrak{x}+d\mathfrak{y}+\frac{3\omega}{2}(c'\mathfrak{x}'+d'\mathfrak{y}'),\\
\Delta\delta &= d\mathfrak{x}+e\mathfrak{y}+\frac{3\omega}{2}(d'\mathfrak{x}'+e'\mathfrak{y}');
\end{aligned}\right.$$

d'où encore

$$(14)\qquad \Delta\mathrm{H}_\omega=\mathfrak{x}\mathrm{U}_1+\mathfrak{y}\mathrm{U}_2+\frac{3\omega}{2}(\mathfrak{x}'\mathrm{H}_1+\mathfrak{y}'\mathrm{H}_2).$$

20. J'ai montré (nº 12, *Remarque III*) qu'en désignant par Θ l'équation de la cayleyenne de K, $\omega^4\Delta\Theta$ était le résultant de H et du polynome $\mathrm{H}_{\omega,1}\mathrm{U}_2-\mathrm{H}_{\omega,2}\mathrm{U}_1$; dans le cas actuel, ce polynome se compose de deux parties : la première

$$\mathfrak{x}(\mathrm{U}_{11}\mathrm{U}_2-\mathrm{U}_{12}\mathrm{U}_1)+\mathfrak{y}(\mathrm{U}_{21}\mathrm{U}_2-\mathrm{U}_{22}\mathrm{U}_1)$$

est exactement divisible par H : il n'y a donc pas à en tenir compte; la seconde

$$\mathrm{Z}=\frac{\omega}{4}\times\frac{\mathfrak{x}'(\mathrm{H}_{11}\mathrm{U}_2-\mathrm{H}_{12}\mathrm{U}_1)+\mathfrak{y}'(\mathrm{H}_{12}\mathrm{U}_2-\mathrm{H}_{22}\mathrm{U}_1)}{\Delta};$$

le résultant de Z et de H est donc égal à $\omega^4\Delta\Theta$. Sans faire de calcul, on voit que ce résultat est le produit par $\frac{\omega^4}{\Delta^4}$ d'un covariant du quatrième degré et du vingtième ordre; on a donc

$$\Delta^3\Theta=p\,\mathrm{TU}(\mathfrak{x}',\mathfrak{y}')+q\,\mathrm{H}(\mathfrak{x}',\mathfrak{y}'),$$

p et q désignant des invariants de U (fonctions entières, par conséquent, de S et de T) du seizième et du dix-huitième ordre.

SUR LES

SINGULARITÉS DES COURBES DE QUATRIÈME CLASSE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1875.

1. Une courbe de quatrième classe K possède vingt-huit points doubles δ et vingt-quatre points de rebroussement ρ. Il existe en outre dans son plan vingt et une droites P telles que la première polaire de chacune d'elles, relativement à K, se décompose en un point p et une conique résiduelle; aux vingt et une droites P correspondront donc vingt et un points remarquables p, que nous aurons à considérer en même temps que les points singuliers.

Je rappellerai à ce sujet que les soixante-treize points δ, ρ et p sont les points communs aux trois courbes

$$2S = \frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dz} - 3T\frac{dS}{dz} = 0,$$

où S et T désignent respectivement l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme $U = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)$ qui, égalée à zéro, donne l'équation mixte de la courbe K [1].

2. Étant données deux équations à une inconnue, de degré m, $F = 0$ et $F' = 0$ déterminant par leurs racines deux systèmes de points situés sur une même droite (*ou deux faisceaux de droites passant par un même point*), je dirai que ces systèmes (*ou ces faisceaux*) sont *harmoniques*, si l'invariant quadratique des deux

[1] Voir (*Comptes rendus*, 16 mars 1874) la Note accompagnant la présentation de mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie plane.*

formes F et F' est nul; cette notion est, on le voit, une simple extension de la notion bien connue relative à deux systèmes de deux points (*ou à deux faisceaux de deux droites*).

Cela posé,

$$(a, b, c, \ldots, h, k, l) = 0 \tag{1}$$

et

$$(a', b', c', \ldots, h', k', l') = 0 \tag{2}$$

étant les équations mixtes de deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe K^n et K'^n, il est clair que le lieu des points d'où l'on voit ces courbes suivant deux faisceaux harmoniques s'obtient en égalant à zéro l'invariant quadratique des deux formes (1) et (2); ce lieu est donc une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré ayant pour équation

$$(I) = al' - nbK' + \frac{n(n-1)}{1.2}ch' + \ldots + la' = 0, \tag{3}$$

et je la désignerai sous le nom de *courbe harmonique* des deux courbes K^n et K'^n.

A ce sujet, je ferai remarquer que, si n est impair, I ne change pas quand on remplace respectivement a par $a + \lambda a'$, b par $b + \lambda b'$, ...; si donc C^n est la courbe harmonique de K^n et de K'^n, ce sera également la courbe harmonique de deux quelconques des courbes du faisceau déterminé par K^n et K'^n, et je dirai que c'est la courbe harmonique de ce faisceau.

3. Cela posé, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Étant donnée une courbe de quatrième classe* K, *si l'on considère les différentes droites que l'on peut mener par un point* M, *leurs premières polaires, relativement à* K, *forment un faisceau de courbes de troisième classe dont la* courbe harmonique *est la droite polaire du point* M, *relativement à la courbe du quatrième ordre* $\mathfrak{S}$ *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

Démonstration. — Soient, comme ci-dessus,

$$U = (a, b, c, d, e) = 0$$

l'équation mixte de la courbe K; S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U. On sait que la courbe $\mathfrak{H}$ a pour équation $S = 0$.

Pour simplifier les calculs, je supposerai la forme U réduite à sa forme canonique, en sorte que l'on aura simplement

$$\begin{aligned} U &= \lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4,\\ H &= m\lambda^4 + (1-3m^2)\lambda^2\mu^2 + m\mu^4,\\ S &= 1+3m^2 \quad \text{et} \quad T = m - m^3. \end{aligned}$$

En appelant ξ, η, ζ les coordonnées du point M, désignons par

$$\omega = ux + vy + wz = 0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0$$

les équations de deux quelconques des droites qui se croisent au point M.

Désignons de plus par $\Delta = S^2 - 27T^2$ le discriminant de la forme U, et par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ les équations mixtes des premières polaires des deux droites précédentes relativement à K; d'après la formule (13) donnée dans mon *Mémoire sur l'application des formes binaires* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 120), on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \mathfrak{r} + \frac{3\omega}{2} m\mathfrak{r}', & \Delta\alpha_0 &= \mathfrak{r}_0 + \frac{3\omega_0}{2} m\mathfrak{r}',\\ \Delta\beta &= m\mathfrak{y} + \frac{\omega}{4}(1-3m^2)\mathfrak{y}', & \Delta\beta_0 &= m\mathfrak{y}_0 + \frac{\omega}{4}(1-3m^2)\mathfrak{y}',\\ \Delta\gamma &= m\mathfrak{r} + \frac{\omega}{4}(1-3m^2)\mathfrak{r}', & \Delta\varphi_0 &= m\mathfrak{r}_0 + \frac{\omega}{4}(1-3m^2)\mathfrak{r}',\\ \Delta\delta &= \mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2} m\mathfrak{y}', & \Delta\delta_0 &= \mathfrak{y}_0 + \frac{3\omega}{2} m\mathfrak{y}', \end{aligned}$$

où $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{y}'$ ont la même signification que dans le Mémoire précité (p. 119), et $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{y}_0$ représentent les quantités analogues à $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{y}$, dans lesquelles u, v, w ont été remplacés par u_0, v_0 et w_0.

Cela posé, en désignant par $I = 0$ l'équation de la courbe harmonique du faisceau formé par les polaires des droites qui se croisent au point M, on aura

$$I = \alpha\delta_0 - 3\beta\gamma_0 + 3\gamma\beta_0 - \delta\alpha_0,$$

et

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^2 I = {} & (1+3m^2)(\mathfrak{r}\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{y}\mathfrak{r}_0)\\ & + \frac{9}{4}(m-m^3)[\mathfrak{r}'(\omega\mathfrak{y}_0 - \omega_0\mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'(\omega\mathfrak{r}_0 - \omega_0\mathfrak{r})]; \end{aligned} \right.$$

on a d'ailleurs

$$1 + 3m^2 = S, \qquad m - m^3 = T,$$

$$\mathfrak{r}\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{y}\mathfrak{y}_0 = \frac{\Delta}{12}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right),$$

ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$S_0 = \xi\frac{dS}{dx} + \eta\frac{dS}{dy} + \zeta\frac{dS}{dz},$$

$$T_0 = \xi\frac{dT}{dx} + \eta\frac{dT}{dy} + \zeta\frac{dT}{dz},$$

$$\mathfrak{r}\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{y}\mathfrak{r}_0 = \frac{\Delta}{12}(3S^2S_0 - S\,4TT_0),$$

puis

$$\mathfrak{r}'(\omega\mathfrak{y}_0 - \omega\mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'(\omega\mathfrak{r}_0 - \omega_0\mathfrak{r}) = \Delta(2ST_0 - 3TS_0).$$

En substituant ces valeurs dans (4), on obtiendra

$$\Delta^2 I = \frac{S\Delta}{12}(3S^2S_0 - S^4TT_0) + \frac{9T\Delta}{4}(2ST_0 - 3TS_0),$$

d'où, réductions faites,

$$I = \frac{S_0}{4} = \frac{1}{4}\left(\xi\frac{dS}{dx} + \eta\frac{dS}{dy} + \zeta\frac{dS}{dz}\right).$$

Ce qui démontre la proposition énoncée.

4. En particulier, considérons une droite P, telle que sa première polaire, relativement à K, se décompose en un point p et une conique. Si l'on prend un point quelconque M de cette droite, le réseau formé par les premières polaires des droites qui se croisent en M comprend en particulier le point p et la conique résiduelle; on en conclut que la courbe harmonique du faisceau passe par le point p. D'ailleurs cette courbe est la première polaire de M relativement à $\mathfrak{H}$; donc, réciproquement, d'après un théorème connu, la droite polaire de p, relativement à $\mathfrak{H}$, passe par le point M, et, comme ce point a été pris arbitrairement sur la droite P, cette droite n'est autre que la polaire de p.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Si la première polaire d'une droite* P, *relativement à la courbe de quatrième classe* K, *se décompose en un point p et une conique résiduelle, la droite* P *est la droite polaire de p, relativement à la courbe du quatrième ordre* $\mathfrak{S}$, *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

D'où encore cette conséquence :

Les vingt et une droites P *sont les droites polaires relativement à* $\mathfrak{S}$ *des vingt et un points p.*

La proposition précédente peut se démontrer directement ainsi qu'il suit :

En désignant par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$ l'équation mixte de la première polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$, je remarque que, si cette polaire se décompose en une conique et un point p, pour les coordonnées de ce point, on devra avoir $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, la tangente à la polaire étant en ce point entièrement indéterminée.

On a d'ailleurs, pour un tel point (n° 1), $\mathfrak{r}' = 0$ et $\mathfrak{y}' = 0$; d'après la formule (13) déjà citée de mon précédent Mémoire, on aura donc

$$a\mathfrak{r} + b\mathfrak{y} = 0, \quad b\mathfrak{r} + c\mathfrak{y} = 0, \quad c\mathfrak{r} + d\mathfrak{y} = 0, \quad d\mathfrak{r} + e\mathfrak{y} = 0.$$

Il en résulte que $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{y}$ sont nuls; autrement (a, b, c, d, e) serait une puissance exacte, c'est-à-dire que les quatre tangentes menées du point p à K se confondraient en une seule, ce qui est impossible.

Les coordonnées du point p satisfont donc aux quatre équations

$$\mathfrak{r}' = 0, \quad \mathfrak{y}' = 0, \quad \mathfrak{r} = 0, \quad \mathfrak{y} = 0,$$

ou bien

$$2S\frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \qquad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0,$$

$$\omega\frac{d\Delta}{dx} - 12u\Delta = 0, \qquad \omega\frac{d\Delta}{dy} - 12v\Delta = 0.$$

Remplaçons, dans les deux dernières relations, Δ par sa valeur $S^3 - 27T^2$, puis $\frac{dT}{dx}$ et $\frac{dT}{dy}$ par leurs valeurs tirées des deux pre-

mières; il viendra simplement, après avoir supprimé le facteur Δ,

$$\omega\frac{dS}{dx} = 4Su, \qquad \omega\frac{dS}{dy} = 4Sv,$$

d'où encore, en vertu du théorème sur les fonctions homogènes,

$$\omega\frac{dS}{dz} = 4Sw.$$

La droite polaire du point p, relativement à S, a pour équation

$$X\frac{dS}{dx} + Y\frac{dS}{dy} + Z\frac{dS}{dz} = 0$$

ou, en vertu des relations précédentes,

$$uX + vY + wZ = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

5. Étant données deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe K^n et K'^n, désignons par I l'invariant quadratique qui, égalé à zéro, donne l'équation de la courbe harmonique des courbes données; si le polynome I est identiquement nul, K^n et K'^n jouissent de la propriété d'être vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques. Je dirai alors qu'elles forment un *couple harmonique;* si, de plus, n est impair, deux quelconques des courbes du faisceau (K^n, K'^n) formeront un couple harmonique, et je dirai que le *faisceau est harmonique.*

Étant donnée une courbe K^n, dont l'équation mixte est

$$(a, b, \ldots, k, l) = 0,$$

on peut rechercher s'il est possible de lui adjoindre une autre courbe de même classe K'^n, qui constitue avec elle un couple harmonique.

En désignant par $(a', b', \ldots, k', l') = 0$ l'équation mixte de K'^n, il faut déterminer les polynomes $a', b', \ldots$, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$I = al' - nbk' + \ldots = 0.$$

Nous disposons, à cet effet, des $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients de l'équation de K'^n; la courbe représentée par $I = 0$ étant de degré n, il en résulte que les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients inconnus doivent satisfaire à un nombre égal d'équations linéaires sans second membre; j'appellerai Δ le déterminant de ce système d'équations.

6. Il est important maintenant de distinguer le cas où n est pair et le cas où n est impair.

Si n est impair, le système d'équations est toujours satisfait pour

$$a = a', \qquad b = b', \qquad \ldots;$$

par conséquent on a toujours $\Delta = 0$. De plus, on sait que, si l'on a une solution qui diffère de celle-là, il y en a une infinité; en d'autres termes, comme je l'ai déjà fait observer, les diverses courbes qui constituent avec la courbe donnée un couple harmonique forment un faisceau.

On pourra donc supposer que l'un des coefficients inconnus est nul, et l'on aura à trouver $\frac{(n+1)(n+2)-1}{2}$ inconnues satisfaisant à $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations linéaires sans second membre, ce qui, en général, exige que deux relations entre les coefficients soient satisfaites.

On peut donc énoncer cette proposition :

Étant donnée une courbe de classe impaire, deux conditions doivent être satisfaites pour que cette courbe fasse partie d'un réseau harmonique.

On voit facilement, d'après cela, qu'un système de deux points ne peut former un couple harmonique, ce qui, géométriquement, était évident *a priori*.

Relativement aux courbes de troisième classe, il est très remarquable que les conditions nécessaires soient toujours satisfaites et que toute courbe de troisième classe fasse partie d'un faisceau harmonique. Cela résulte de la proposition suivante, que j'ai démontrée dans le *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires*, etc., déjà cité (*Journal de Mathématiques*, p. 108) :

Une courbe quelconque de troisième classe et sa hessienne sont vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques.

7. Si la courbe K^n est de classe paire, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle fasse partie d'un couple harmonique est que $\Delta = 0$; et je vais d'abord chercher comment on peut facilement former ce déterminant.

Représentons symboliquement, comme l'ont fait MM. Aronhold et Clebsch, par $(au + bv + cw)^2 = 0$ l'équation tangentielle de K^n, en convenant, dans le développement du trinome, de remplacer le produit $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ par le coefficient $a_{\alpha\beta\gamma}$; l'équation mixte de cette courbe sera

$$[a\mu - b\lambda + c(\lambda y - \mu x)]^n = 0 \quad \text{ou} \quad [(cy-b)\lambda + (a-cx)\mu]^n = 0.$$

Semblablement, l'équation mixte d'une seconde courbe K'^n sera symboliquement

$$[(\gamma y - \beta)\lambda + (\alpha - \gamma x)\mu]^n = 0.$$

L'équation symbolique de la courbe harmonique des deux courbes données sera, par suite,

$$[(cy-b)(\alpha - \gamma x) - (\gamma y - \beta)(a - cx)]^n = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$[x(b\gamma - c\beta) + y(c\alpha - a\gamma) + z(a\beta - b\alpha)]^n = 0.$$

Si l'on suppose que K^n et K'^n constituent un couple harmonique, les divers coefficients du développement de ce trinome doivent être nuls.

On aura, par suite, les diverses équations

$$\begin{array}{lll}
(a\beta - b\alpha)^n = 0, & (a\beta - b\alpha)^{n-1}(c\gamma - c\beta) = 0, & \ldots, \\
(b\gamma - c\beta)^n = 0, & (b\gamma - c\beta)^{n-1}(a\beta - b\alpha) = 0, & \ldots, \\
(c\alpha - a\gamma)^n = 0, & (c\alpha - a\gamma)^{n-1}(a\beta - b\alpha) = 0, & \ldots;
\end{array}$$

et Δ sera le déterminant de ces $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations, si l'on y considère comme inconnues les diverses puissances de α, β et γ.

J'ai calculé par ce procédé la valeur de Δ, relative à la courbe générale de quatrième classe; je transcris ici l'expression de cet invariant, qui, comme je le ferai voir tout à l'heure, présente quelque intérêt dans l'étude des points de rebroussement de la courbe.

Pour simplifier l'écriture, j'ai adopté les notations de M. Salmon (*Higher curves*, p. 251), et pris pour équation de la courbe K l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &au^4 + bv^4 + cw^4 + 6fv^2w^2 + 6gw^2u^2 + 6hu^2v^2 \\ &\quad + 12lu^2vw + 12mv^2wu + 12nw^2uv + 4a_2u^3v \\ &\quad + 4a_3u^3w + 4b_1v^3u + 4b_3v^3w + 4c_1w^3u + 4c_2w^3v = 0. \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}
0 & c & b & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & -b_3 \\
c & 0 & a_1 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & -c_1 & 0 & 0 \\
b & a & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\
6f & 0 & 0 & a & h & g & 2l & -a_3 & -a_2 & -3n & 0 & 0 & -3m & 0 & 0 \\
0 & 6g & 0 & h & b & f & -b_3 & 2m & -b_1 & 0 & -3l & 0 & 0 & -3n & 0 \\
0 & 0 & 6h & g & f & c & -c_2 & -c_1 & 2n & 0 & -a & -3m & 0 & 0 & -3l \\
0 & 0 & 0 & -2a_3 & 4m & -2c_1 & -n & 2g & -l & 3c_2 & 0 & -3h & -3f & 0 & 3a_2 \\
0 & 0 & 0 & -2a_2 & -2b_1 & 4n & -m & -l & 2h & -3f & 3a_3 & 0 & 3b_3 & -3g & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4l & -2b_3 & -2c_2 & 2f & -n & -m & 0 & 3g & 3b_1 & 0 & 3c_1 & -3h \\
0 & 0 & -4b_1 & -2n & 0 & 0 & 0 & c_2 & -f & 0 & c_1 & b_3 & 0 & -c & 3m \\
-4c_2 & 0 & 0 & 0 & 2l & 0 & -g & 0 & a_3 & c_1 & 0 & a_2 & 3n & 0 & -b \\
0 & -4a_3 & 0 & 0 & 0 & -2m & b_1 & -h & 0 & b_3 & a_2 & 0 & -a & 3l & 0 \\
0 & -4c_1 & 0 & -2m & 0 & 0 & 0 & -f & b_3 & 0 & 3n & -b & 0 & c_2 & b_1 \\
0 & 0 & -4a_2 & 0 & -2n & 0 & c_1 & 0 & -g & -c & 0 & 3l & c_2 & 0 & a^3 \\
-4b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2l & -h & a_2 & 0 & 3m & -a & 0 & b_1 & a_3 & 0
\end{vmatrix}.$$

8. Une courbe du sixième ordre étant déterminée par vingt-sept points, on ne peut pas, en général, faire passer une telle courbe par les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe K; mais on peut, à cet égard, énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe soient situés sur une courbe du sixième ordre est que l'invariant Δ' soit nul.*

Ce théorème résulte immédiatement de la proposition suivante :

Si les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe K *sont situés sur une courbe du sixième ordre, elle fait partie d'un couple harmonique; la réciproque est également vraie.*

Démonstration. — Soit $U = (a, b, c, d, e) = o$ l'équation mixte de K; supposons que cette courbe constitue un couple harmonique avec la courbe K′ dont l'équation mixte est

$$(a', b', c', d', e') = o.$$

En désignant respectivement par S, T, I et J l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U, l'invariant quadratique de U et de U′, et l'expression $a'\dfrac{dT}{da} + b'\dfrac{dT}{db}, \ldots,$ j'ai démontré [*Mémoire de Géométrie analytique*, n° 37 (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XVII)], que la courbe du dixième ordre, représentée par l'équation

$$2SJ - 3TI = o,$$

passait par les vingt-quatre points de rebroussement et les vingt-huit points doubles de K. Les deux courbes K et K′ constituant un couple harmonique, on a identiquement $I = o$; la courbe du dixième ordre se décompose donc en deux courbes du quatrième et du sixième ordre $S = o$ et $J = o$. D'ailleurs $\mathfrak{S}$ ne rencontre K qu'en ses points de rebroussement; les vingt-huit points doubles se trouvent donc sur la courbe du sixième ordre $J = o$.

Réciproquement, si les vingt-huit points doubles sont situés sur une courbe du sixième ordre C dont l'équation soit $W = o$, je dis que K fait partie d'un couple harmonique. Pour le démontrer,

je m'appuierai sur la proposition suivante (*Mémoire de Géométrie analytique*, n° 38) :

Si, par les cinquante-deux points singuliers d'une courbe de quatrième classe K, *on fait passer une courbe quelconque du dixième ordre, cette courbe rencontre* K *en seize points distincts des points singuliers; les tangentes menées à* K *en ces seize points touchent une courbe de quatrième classe.*

Puisque les vingt-huit points δ sont une courbe du sixième ordre C, l'ensemble des courbes $\mathfrak{S}$ et C détermine une courbe du dixième ordre passant par les cinquante-deux points singuliers; $\mathfrak{S}$ ne rencontre d'ailleurs K qu'en ses points de rebroussement; par suite, en vertu du théorème précédent, les tangentes menées à K aux points où cette courbe est coupée par C (abstraction faite des points doubles) forment un polygone Q dans lequel on peut inscrire une infinité de courbes de quatrième classe.

$U' = o$ désignant l'équation mixte d'une quelconque des courbes inscrites dans ce polygone, on aura nécessairement

$$2SJ - 3TI = SW,$$

d'où

$$S(2J - W) = 3TI,$$

et par suite, en désignant par μ un facteur numérique,

$$S = 3\mu I \quad \text{et} \quad T = \mu(2J - W).$$

Considérons maintenant la courbe de quatrième classe

$$U - 3\mu U' = o,$$

inscrite évidemment dans le polygone Q; l'invariant I relatif à cette courbe et à K est égal à $S - 3\mu I$ et, par suite des relations précédentes, il est identiquement nul.

Les courbes déterminées par les équations

$$U = o \quad \text{et} \quad U = 3\mu U' = o$$

constituent donc un couple harmonique et la proposition est complètement démontrée.

SUR LES POLAIRES D'UNE DROITE

RELATIVEMENT

AUX COURBES ET AUX SURFACES ALGÉBRIQUES.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1875.

I.

1. Je m'appuierai, dans tout ce qui suit, sur la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Étant donnés un nombre quelconque de courbes* K, K′, K″, ... *et un lieu* C *défini par la condition qu'il existe une relation, du reste arbitraire, entre les directions d'un certain nombre des tangentes que l'on peut mener aux courbes données par un point de ce lieu; appelons* C_0 *le lieu que l'on obtient en remplaçant, dans la définition de la courbe C, la courbe* K *par les points de contact des tangentes qu'on peut lui mener par un point* M *du plan : cela posé, la droite polaire du point* M, *relativement à la courbe* C, *se confond avec la droite polaire du même point relativement à la courbe* C_0 [1].

Démonstration. — Soient

$$(1) \qquad U = (a, b, c, \ldots) = 0, \qquad U' = (a', b', c', \ldots) = 0, \qquad \ldots$$

les équations mixtes des courbes K, K′, ..., et

$$V(a, b, \ldots; a', b', \ldots) = 0$$

[1] J'emploie ici les notations de mon *Mémoire sur l'application des formes binaires à la Géométrie* (*Journ. de Math.*, 3e série, t. I).

l'équation cartésienne de la courbe C; cherchons d'abord ce que devient cette équation quand on substitue à la courbe K les points de contact des tangentes menées à cette courbe par un point (x, y) du plan. Soit $\omega = ux + vy + wz = 0$ l'équation d'une droite quelconque; l'équation mixte de la première polaire relativement à K est

$$(2) \qquad u U_2 - v U_1 + \omega \Pi = 0,$$

$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$ étant l'équation de la première polaire de la droite de l'infini; si nous éliminons λ et μ entre les équations (1) et (2), nous obtiendrons l'équation cartésienne des tangentes menées à K aux points de rencontre de cette courbe avec la droite donnée; si ensuite, en faisant pour abréger $X = \xi - x$, $Y = \eta - y$, et en considérant ξ et η comme les coordonnées courantes, nous remplaçons respectivement dans l'équation ainsi obtenue u, v et ω par μ', $-\lambda'$ et $\lambda' Y - \mu' X$, nous aurons l'équation mixte des points de contact des tangentes menées du point (x, y) à la courbe K. Faisant d'abord la substitution indiquée dans l'équation (2), il vient

$$(2') \qquad \lambda' \frac{dU}{dx} \mu' + \frac{dU}{dy} + n(\lambda' Y - \mu' X)\,\Pi(\lambda, \mu) = 0,$$

et c'est entre cette équation et l'équation (1) que nous devons éliminer λ et μ; comme nous avons à déterminer la droite polaire du point (ξ, η) relativement à C_0, j'observe d'abord que l'on peut négliger les puissances de X et de Y supérieures à la première. L'équation mixte des points de contact devient alors simplement, en supprimant les accents,

$$(3) \qquad U(\lambda, \mu) + n(\lambda Y - \mu X)\,\Pi(\lambda, \mu) = 0,$$

ou encore

$$(a, b, c) + [n\alpha Y, (n-1)\beta Y - \alpha X, (n-2)\gamma Y - 2\beta X, \ldots].$$

Il résulte de là que l'équation de la courbe C_0 s'obtiendra (en négligeant toujours les puissances de X et de Y supérieures à la première) en y remplaçant respectivement a, b, c, ... par $\alpha + n\alpha Y$, $b + (n-1)\beta Y - \alpha X$, $c + (n-2)\gamma Y - 2\beta X$, ..., et en substituant aux lettres x et y les lettres ξ, η dans les polynomes a', b', ..., a'', b'', ..., ...

Désignant, pour un instant, les résultats de cette substitution par A', B', ..., A'', B'', ..., ..., l'équation de la courbe C_0 sera

$$V_1 = V(a + n\alpha Y, \ldots;\ A', B', \ldots;\ A'', B'', \ldots) = 0,$$

et l'équation de la droite polaire du point (x, y) relativement à C_0

$$\xi\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right) + \eta\left(\frac{dV_1}{d\eta}\right) + \rho\left(\frac{dV_1}{d\rho}\right) = 0,$$

les lettres ξ et η étant de nouveau remplacées par les lettres x et y dans les dérivées partielles.

On a évidemment

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right) = -\alpha\frac{dV}{db} - 2\beta\frac{dV}{dx} - \ldots + \frac{dV}{da'}\frac{da'}{dx} + \ldots + \frac{dV}{da''}\frac{da''}{dx} + \ldots,$$

ou, en vertu de formules que j'ai données dans le Mémoire déjà cité,

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right) = \frac{dV}{da}\frac{da}{dx} + \frac{dV}{db}\frac{dV}{dx} + \ldots + \frac{dV}{da'}\frac{da'}{dx} + \ldots + \frac{dV}{da''}\frac{da''}{dx} + \ldots = \frac{dV}{dx}.$$

On démontrerait de même que $\left(\frac{dV_1}{d\eta}\right) = \frac{dV}{dy}$ et $\left(\frac{dV_1}{d\zeta}\right) = \frac{dV}{dz}$.

La proposition est donc complètement établie.

Remarque. — Dans la définition de la courbe C_0, on voit que la courbe K a été remplacée par un système de points; il est clair que l'on pourrait faire de même pour chacune des autres courbes K', K'', ..., et même pour toutes ces courbes.

2. La proposition précédente permet de résoudre dans un grand nombre de cas intéressants le problème suivant qui comprend, en particulier, le problème de la construction de la tangente :

Étant donnée une courbe, construire la droite polaire d'un point du plan relativement à cette courbe.

Ainsi, la podaire d'une courbe K étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle droit cette courbe et un point fixe P, on a immédiatement la proposition suivante :

Étant donnée la podaire C *d'un point* P *relativement à une courbe* K, *la polaire* [1] *d'un point* M *du plan relativement à la podaire est la polaire du même point relativement aux divers cercles ayant pour diamètres les droites qui joignent le point* P *aux points de contact des tangentes menées du point* M *à la courbe* K.

Semblablement, une spirique A étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle donné α une conique B, on peut énoncer ce théorème :

La polaire d'un point M *relativement à la spirique* A *est la polaire de ce même point relativement aux deux cercles capables de l'angle donné et ayant pour corde commune la droite qui joint les points de contact des tangentes menées de* M *à la conique* B.

3. Les conséquences les plus importantes du théorème I sont contenues dans les propositions suivantes que j'ai déjà données dans une Note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques* [2] :

Théorème II. — *Étant données deux courbes quelconques* K^m *et* K^n, *de classe respectivement égale à* m *et à* n, *la polaire d'un point quelconque* M, *relativement aux* mn *tangentes communes à ces courbes, est la polaire du même point relativement aux* mn *droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de* M *à* K^m *aux points de contact des tangentes menées du même point à* K^n.

Théorème III (corrélatif du précédent). — *Étant données deux courbes quelconques* C^m *et* C^n, *d'ordre respectivement égal à* m *et à* n, *le pôle d'une droite quelconque, relativement aux* mn *points d'intersection de ces courbes, est le pôle de la même droite relativement aux* mn *points d'intersection des tangentes menées à* C^m *aux points où cette courbe rencontre la droite avec les tangentes menées à* C^n *en ses points de rencontre avec la droite.*

---

[1] Ici, comme dans la suite de cette Note, j'appelle simplement *polaire* d'un point la *droite polaire* de ce point.

[2] *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, mai 1875.

THÉORÈME IV. — *La polaire d'un point quelconque relativement à une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe est la polaire du même point relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes que l'on peut mener du point à la courbe.*

Remarque. — Si la courbe a des tangentes d'inflexion et des tangentes doubles, ces droites doivent être considérées comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque tangente double et trois fois chaque tangente d'inflexion.

THÉORÈME V (corrélatif du précédent). — *Le pôle d'une droite quelconque relativement à une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre est le pôle de la même droite relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ points d'intersection des tangentes menées à la courbe aux points où elle est rencontrée par la droite.*

Remarque. — Si la courbe a des points doubles et des points de rebroussement, ces points doivent être considérés comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque point double et trois fois chaque point de rebroussement.

II.

4. Considérons une courbe gauche quelconque K et une droite de l'espace Δ; par cette droite, menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement aux points d'intersection du plan et de la courbe; lorsque le plan tourne autour de la droite, le lieu du pôle est une droite que j'appellerai la *polaire de* Δ relativement à la courbe gauche et que je désignerai par la notation $\Delta(K)$.

Poncelet a donné de belles propriétés de ces polaires [1]; on voit immédiatement, par exemple, que la polaire d'une droite relativement à une courbe gauche est la polaire de cette droite

[1] *Propriétés projectives des figures*, Section IV. Poncelet, au lieu du mot *polaire*, emploie l'expression d'*axe des moyennes harmoniques*.

relativement aux tangentes menées à cette courbe aux points où elle est coupée par un plan quelconque mené par la droite. Je ne crois pas que, jusqu'ici, on ait indiqué comment on peut déterminer la polaire d'une droite relativement à une courbe, lorsque au lieu de donner cette courbe on la définit comme l'intersection de deux surfaces. Je m'occuperai simplement ici du cas où la courbe est l'intersection complète de deux surfaces, les autres cas se ramenant évidemment à celui-là.

Du théorème III on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME VI. — *Une courbe gauche étant l'intersection complète de deux surfaces* S *et* S', *la polaire d'une droite relativement à cette courbe est la polaire de cette même droite relativement aux diverses droites d'intersection des plans menés tangentiellement à* S *aux points où cette surface rencontre la droite avec les plans menés tangentiellement à* S' *aux points où la droite coupe cette surface.*

5. Considérons une surface quelconque Σ et une droite de l'espace Δ; par cette droite menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement à la courbe d'intersection de la surface et du plan (la courbe étant considérée comme étant d'une classe donnée); lorsque le plan tourne autour de la droite, le pôle décrit une droite que j'appellerai la *polaire de* Δ, relativement à la surface et que je représenterai par la notation $\Delta(\Sigma)$.

Cette polaire peut être évidemment encore définie comme l'enveloppe des plans polaires des différents points de Δ relativement aux cônes circonscrits à Σ et ayant ces points pour sommets (ces cônes étant considérés comme d'un ordre donné).

Par suite, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à son ordre, c'est-à-dire n'a ni ligne double ni ligne de rebroussement, on déduit immédiatement du théorème V la proposition suivante :

THÉORÈME VII. — *Si une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de cette droite relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$*

droites suivant lesquelles se coupent les plans qui touchent la surface aux points où elle rencontre la droite.

De même, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à sa classe, le théorème IV donne la proposition suivante corrélative de la précédente :

Théorème VIII. — *Si une surface de $n^{\text{ième}}$ classe n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de la droite relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite donnée.*

6. En particulier, si l'on considère une surface développable G ayant pour arête de rebroussement une courbe gauche K et un point quelconque M de la droite Δ, le plan polaire de M, relativement à l'ensemble des plans osculateurs de la courbe qui passent par ce point, enveloppe, quand le point M se déplace sur la droite, la polaire de cette droite relativement à G.

Si la développable G est définie au moyen de deux surfaces inscrites S et S′, on a le théorème suivant corrélatif du théorème VI :

Théorème IX. — *Une surface développable G étant la développable complète circonscrite à deux surfaces S et S′, la polaire d'une droite relativement à cette développable est la polaire de cette droite relativement aux droites qui joignent chacun des points de contact des plans menés par la droite tangentiellement à S à chacun des points de contact des plans menés par la même droite tangentiellement à S′.*

7. En particulier, considérons une suite de surfaces homofocales du second ordre (Σ) inscrite dans la développable isotrope Γ.

Soient Σ et Σ' deux quelconques de ces surfaces; d'une droite Δ on peut leur mener quatre plans tangents, les droites qui joignent les points de contact sur l'une des surfaces avec les points de contact sur l'autre forment un quadrilatère gauche Q.

De ce qui précède, il résulte que :

La polaire de la droite Δ par rapport au quadrilatère Q [1] *est la même, quelles que soient les deux surfaces homofocales considérées, et se confond avec la polaire de cette même droite relativement à la développable isotrope circonscrite.*

En particulier, si la surface Σ' se réduit à l'ombilicale, la polaire de Δ se réduit à la polaire de cette droite relativement aux normales que l'on peut mener à Σ aux deux points où cette surface est touchée par les plans tangents qu'on peut lui mener par Δ. D'où cette conséquence :

Étant donnés un système de surfaces homofocales du second ordre (Σ) et une droite fixe Δ, si par Δ on mène les plans tangents à une surface quelconque Σ du système et si l'on prend la polaire de Δ relativement aux normales qu'on peut mener à Σ aux deux points de contact, la polaire de Δ relativement à ces normales est la même quelle que soit la surface du système que l'on considère et elle se confond avec la polaire relativement à la développable isotrope circonscrite au système [2].

III.

8. Les deux théorèmes généraux VII et VIII s'appliquent, avec quelques modifications, à toute surface donnée, en sorte qu'ils fournissent en réalité deux moyens distincts de construire la polaire d'une droite donnée relativement à cette surface. Il serait facile d'énoncer à ce sujet les propositions générales, mais je crois

[1] Ce quadrilatère Q jouit encore de plusieurs autres propriétés intéressantes; ainsi *la somme de deux de ses côtés contigus est égale à la somme des deux autres* [*Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace* (*Nouv. Ann. de Math.*, 1872)].

[2] Cette proposition s'étend évidemment à un système de surfaces homofocales quelconques; on peut la considérer comme l'extension à l'espace de ce théorème que j'ai donné depuis longtemps :

Le centre harmonique d'un point, par rapport aux points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, est le centre harmonique du même point relativement aux n foyers de la courbe.

inutile de le faire et je me contenterai d'énoncer les résultats relatifs à deux surfaces particulières des plus simples.

Considérons, en premier lieu, une cubique gauche K et la développable du quatrième ordre G dont elle est l'arête de rebroussement; soient $\Delta(K)$ et $\Delta(G)$ les polaires d'une même droite Δ relativement à la courbe gauche et à la développable (*Cf.* n^{os} 4 et 6).

Si, d'un point quelconque M de la droite Δ, on mène le cône contenant la courbe K, ce cône est du troisième degré et de la quatrième classe; il a trois plans d'inflexion, qui sont les plans osculateurs que l'on peut mener à K par le point M. Le plan polaire de M relativement à ce cône contient la polaire $\Delta(K)$; du théorème IV et des considérations ci-dessus développées (n° 6) résulte la proposition suivante :

Théorème X. — *En désignant par t l'ensemble des six droites qui joignent deux à deux les quatre points de la courbe* K, *dont les tangentes s'appuient sur* Δ, *on a la relation*

$$2\Delta(t) = \Delta(K) + 3\Delta(G).$$

9. Concevons maintenant que, par la droite Δ, on mène un plan quelconque; il coupe la surface G suivant une courbe du quatrième ordre et de la troisième classe ayant pour point de rebroussement ses trois points de rebroussement sur K. Le pôle de Δ relativement à cette courbe est sur $\Delta(G)$; du théorème V résulte la proposition suivante :

Théorème XI. — *En désignant par* T *l'ensemble des six droites suivant lesquelles se coupent les plans osculateurs menés aux points de* K, *dont les tangentes s'appuient sur* Δ, *on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(G) + 3\Delta(K).$$

Remarque. — On déduit de là

$$4\Delta(G) = 3\Delta(t) - \Delta(T)$$

et

$$4\Delta(K) = 3\Delta(T) - \Delta(t);$$

on voit que les polaires d'une droite relativement à K et à G sont déterminées quand on connaît les quatre tangentes à la courbe qui la rencontrent. Par suite :

Deux droites Δ *et* Δ', *conjuguées par rapport à la cubique gauche* K, *ont mêmes polaires relativement à cette cubique, et relativement à la développable dont elle est l'arête de rebroussement.*

Ces deux polaires sont également conjuguées par rapport à la cubique.

10. Considérons en second lieu une surface réglée S du troisième ordre (et par conséquent de troisième classe); appelons D la directrice double de cette surface et D′ la seconde directrice rectiligne; on sait que tout plan passant par D′ est doublement tangent à la surface.

Cela posé, soient Δ une droite quelconque de l'espace et $\Delta(S)$ sa polaire relativement à S; si l'on mène par Δ un plan quelconque, il coupe S suivant une courbe du troisième ordre et de la quatrième classe ayant pour point double le point de rencontre de ce plan avec D. Du théorème IV, on déduit la proposition suivante :

Théorème XII. — *En désignant par t le triangle formé par les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à* S *par la droite* Δ, *on a*

$$2\Delta(t) = \Delta(S) + 2\Delta(D).$$

11. Prenons maintenant un point quelconque M sur la droite Δ et imaginons le cône circonscrit à la surface et ayant ce point pour sommet; ce cône est de la troisième classe et du quatrième ordre; il a pour plan double le plan mené par le point M et par la droite D′.

Du théorème V résulte donc la proposition suivante :

Théorème XIII. — *En désignant par* T *les arêtes du trièdre formé par les plans menés tangentiellement à* S *en ses points de rencontre avec* Δ, *on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(S) + 2\Delta(D').$$

Des deux relations précédentes, on déduit

$$\Delta(T) + \Delta(D) = \Delta(t) + \Delta(D'),$$

identité sur laquelle je reviendrai plus tard.

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1875.

Dans l'avant-dernier numéro des *Comptes rendus*, M. Ribaucour a donné cette élégante proposition, démontrée depuis géométriquement par M. Mannheim :

Le rayon de courbure géodésique d'une courbe Σ à courbure normale constante est les $\frac{2}{3}$ du rayon de courbure géodésique de la section plane Σ', ayant même tangente et surosculée par un cercle.

Considérons sur une surface quelconque deux courbes Σ et Σ' se touchant au point M. Soient ρ et r le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe Σ au point M ; ϖ l'angle que fait en ce point le plan osculateur à la courbe avec la normale à la surface ; désignons par des lettres accentuées les valeurs des mêmes quantités relatives à la courbe Σ'.

Portons enfin sur chacune des deux courbes, à partir du point M, une même longueur infiniment petite ds.

On aura d'abord, en vertu d'une expression donnée par M. Ossian Bonnet de la torsion géodésique,

$$d\varpi - \frac{ds}{r} = d\varpi' - \frac{ds}{r'}; \tag{1}$$

puis, en vertu d'une relation que j'ai donnée (*Bulletin de la Société philomathique*, t. VII, p. 51),

$$\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{2}{3}\frac{ds}{r}\right) + \frac{1}{3}\frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tang}\varpi'\left(d\varpi' - \frac{2}{3}\frac{ds}{r'}\right) + \frac{1}{3}\frac{d\rho}{\rho'}, \tag{2}$$

ou encore, en introduisant, relativement à la première courbe, le

rayon R de la section normale à la surface et tangente en M à Σ,

$$-\frac{1}{3}\frac{dR}{R}\frac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right) = \operatorname{tang}\varpi'\left(d\varpi' - \frac{2}{3}\frac{ds}{r'}\right) + \frac{1}{3}\frac{d\rho'}{\rho'}. \tag{2 bis}$$

Supposons maintenant que Σ soit une courbe à courbure normale constante et Σ' la courbe plane ayant même tangente et surosculée par un cercle ; on aura évidemment $dR = 0$, $d\rho' = 0$ et $r' = \infty$.

Les équations (1) et (2 *bis*) deviennent alors

$$d\varpi - \frac{ds}{r} = d\varpi' \quad \text{et} \quad \frac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right) = \operatorname{tang}\varpi'\, d\varpi';$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varpi' = \frac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi,$$

formule qui est l'expression analytique du théorème ci-dessus énoncé.

SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1875-1876.

1. Soit une cubique fondamentale $U = 0$; en adoptant les notations de M. Salmon (*Higher plane curves*, p. 183 et suiv.), je désignerai par S et T les deux invariants de U, par H son hessien et par F, P et Q ses contrevariants principaux. La hessienne de la courbe aura donc pour équation $H = 0$; l'équation tangentielle de la courbe elle-même sera $F = 0$; et l'équation tangentielle de la cayleyenne $P = 0$.

La cubique fondamentale et sa hessienne déterminent un faisceau (U); une courbe quelconque de ce faisceau a pour équation $U + 6\rho H = 0$; je la désignerai par la notation U_ρ.

Je considérerai en même temps le faisceau tangentiel des courbes déterminées par l'équation $F - 6\rho P^2 = 0$, et je désignerai par la notation F_ρ la courbe de ce faisceau qui correspond à une valeur déterminée de ρ.

2. Un système de trois points étant déterminé sur une droite par les racines d'une équation obtenue en égalant à zéro un polynome du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$

j'appellerai *points covariants du système* les points déterminés sur la droite par les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le polynome du second degré

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)x + (bd - c^2)$$

covariant du précédent.

3. Cela posé, on a les propositions suivantes :

I. *Une droite quelconque D du plan de U rencontrant cette courbe en un système de trois points, les deux points covariants de ce système sont situés sur une même cubique du faisceau* (U).

Cette cubique rencontre D en un troisième point que j'appellerai le *centre de la droite*.

II. *Par tout point M du plan passent quatre droites ayant le point M pour centre; je les appellerai les* rayons *du point* M.

III. *Si, d'un point quelconque M de la cubique U_ρ, on mène des tangentes à la conique polaire de M par rapport à U, ces tangentes enveloppent la surface de sixième classe F_ρ.*

IV. *Des six tangentes que l'on peut mener d'un point M de U à la courbe F_ρ, deux sont les tangentes menées du point M à sa conique polaire relativement à U, les quatre autres sont les rayons du point M.*

V. *Si une droite se meut tangentiellement à F_ρ, son centre décrit la cubique U_ρ.*

VI. *Si une droite touche F_ρ au point A et rencontre U_ρ aux points a, b, c, les quatre points A, a, b, c forment un système harmonique.*

4. Voici quelques conséquences de cette dernière proposition :

Étant donnée une cubique U, si l'on cherche les courbes jouissant de la propriété qu'une quelconque de leurs tangentes est partagée harmoniquement par leur point de contact et les trois points où elle rencontre la cubique U, on trouve que ces courbes sont algébriques, et il est facile d'en obtenir une construction géométrique [1].

A toute cubique U se rattache en effet une intégrale elliptique $\int dV$ qui jouit de la propriété suivante : désignons, en général, par (M) la valeur de cette intégrale prise depuis un point convenablement choisi jusqu'à un point M pris arbitrairement sur cette

[1] *Voir*, sur ce sujet, ma Note *Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre*, 22 (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XV).

courbe; la condition nécessaire et suffisante pour que trois points A, B, C de la courbe soient en ligne droite peut s'exprimer par la relation

$$(A)+(B)+(C)\equiv 0,$$

le signe de la congruence indiquant que la somme, qui se trouve dans le premier membre, est de la forme $mp+nq$, m et n désignant des nombres entiers, p et q les deux périodes de l'intégrale.

Si une droite tourne autour d'un point A de la courbe, en désignant par B et C les deux points variables où cette droite mobile coupe la courbe, on aura, en vertu de ce qui précède,

$$(A)=0,$$

et, par suite,

$$(B)+(C)\equiv 0,$$

ce qui donne géométriquement l'intégrale de l'équation

$$dV+dV'=0.$$

Si maintenant on désigne par A′ le point conjugué harmonique de A relativement à B et à C, on voit que la droite, en tournant infiniment peu autour du point A′, décrit sur la courbe deux segments infiniment petits égaux à ceux qu'elle décrivait en tournant autour du point A, l'un de ces segments étant décrit dans un sens contraire.

On a donc, dans ce cas,

$$dV-dV'=0,$$

équation dont l'intégrale est $(B)-(C)\equiv 0$.

D'où cette conclusion :

Si une courbe est telle, qu'une quelconque de ses tangentes rencontrant la cubique U *en trois points* A, B, C, *son point de contact soit le conjugué harmonique du point* A *relativement à* B *et à* C, *les points variables* B *et* C *sont reliés par la relation*

$$(B)-(C)\equiv 0.$$

De là encore une construction géométrique simple de ces courbes.

Soient, en effet, b et c deux points fixes pris sur la courbe et M un point mobile décrivant cette courbe. Menons les droites Mb et Mc et appelons B et C les points où elles coupent respectivement U; je dis que la droite BC enveloppe une courbe jouissant de la propriété énoncée. Les trois points M, b, B étant en effet en ligne droite, ainsi que les points M, c, C, on a

$$(M)+(b)+(B)\equiv 0,$$
$$(M)+(c)+(C)\equiv 0;$$

d'où

$$(B)-(C)\equiv(c)-(b)\equiv \text{const.}$$

Il est clair, d'ailleurs, que, pour obtenir toutes les courbes cherchées, il suffit, un des points b étant choisi arbitrairement et restant fixe, de faire varier le point C.

5. Quelque simple que soit la construction géométrique que je viens de donner, elle se prêterait peut-être difficilement à la recherche de l'équation générale des courbes elles-mêmes.

Le théorème VI donné ci-dessus (3) permet d'y arriver facilement.

On voit, en effet, qu'étant donnée une cubique U_ρ, la courbe de sixième classe F_ρ est une solution de la question; or, U_ρ étant une courbe déterminée, comme on peut prendre pour cubique fondamentale une quelconque des cubiques du faisceau (U), on voit qu'il lui correspond une infinité de courbes F_ρ dont l'ensemble donne la solution complète du problème.

Pour achever la solution, changeons U en $U+6\lambda H$, λ étant un nombre indéterminé; H, P et F deviennent alors respectivement (Salmon, *loc. cit.*, p. 189 et suiv.)

$$(-2S\lambda-T\lambda^2+8S^2\lambda^3)U+(1+12S\lambda^2+2T\lambda^3)H,$$
$$P+Q\lambda-12SP\lambda^2+4(SQ-TP)\lambda^3$$

et

$$(1+24S\lambda^2+8T\lambda^3-48S^2\lambda^4)F$$
$$-24(\lambda+2T\lambda^4)P^2-24(\lambda^2-4S\lambda^4)PQ-8\lambda^3Q^2;$$

par suite, U_ρ devient

$$U[1-2S\lambda-T\lambda^2+8S^2\lambda^3]+6H[\lambda+\rho(1+12S\lambda^2+2T\lambda^3)],$$

ou simplement U, si l'on détermine ρ par la condition

$$\rho = \frac{-\lambda}{1 + 12 S\lambda^2 + 2 T\lambda^3}.$$

En effectuant la même transformation dans F_ρ, cette expression devient, réductions faites,

$$\begin{aligned}&(1 + 24 S\lambda^2 + 8 T\lambda^3 - 48 S^2\lambda^4)\\ &\quad\times [(1 + 12 S\lambda^2 + 2 T\lambda^3)F - 18\lambda P^2 - 12\lambda^2 PQ - 2\lambda^3 Q^2];\end{aligned}$$

l'équation générale des courbes considérées est donc

$$(1 + 12 S\lambda^2 + 2 T\lambda^3)F - 18\lambda P^2 - 12\lambda^2 PQ - 2\lambda^3 Q^2 = 0.$$

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES ALGÉBRIQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1875.

1. Une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe peut être considérée comme une courbe d'ordre $n(n-1)$. Étant donnée une telle courbe $K^n = C^{n(n-1)}$, les polaires des divers ordres d'un point M du plan relativement à $C^{n(n-1)}$ dépendent, en général, non seulement des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point M à la courbe, mais encore des singularités de la courbe. Il est remarquable que *la droite polaire* du point M ne dépende que des points de contact; on a en effet la proposition suivante :

Théorème I. — *Si, d'un point* M *pris dans le plan d'une courbe de* $n^{\text{ième}}$ *classe* $K^n = C^{n(n-1)}$, *on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on considère les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *droites qui joignent deux à deux les points de contact, la droite polaire de* M *relativement à* $C^{n(n-1)}$ *est la droite polaire du même point relativement aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *droites considérées.*

Démonstration [1]. — Soient $\omega = ux + vy + wz = 0$ l'équation d'une droite D du plan;

$$U = (a, b, c, \ldots) = 0$$

l'équation mixte de K^n et $\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ l'équation mixte de

[1]) J'emploie ici les notations dont je me suis servi dans mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique* *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I).

la polaire de la droite de l'infini relativement à K^n. L'équation mixte de la polaire de D relativement à K^n est (*F. B.*, n° 4) $uU_2 - vU_1 + \omega\Pi = 0$; si l'on élimine λ et μ entre cette équation et l'équation (1), on obtient l'équation $T = 0$ des $n(n-1)$ tangentes menées à K^n aux points de rencontre de cette courbe et de D. Si, en posant pour abréger $X = \xi - x$ et $Y = \eta - y$ (ξ et η désignant les coordonnées courantes), on remplace, dans le résultant T, u, v et ω respectivement par μ, $-\lambda$ et $\lambda Y - \mu X$, l'expression T' ainsi obtenue étant égalée à zéro donne l'équation mixte des points de contact des n tangentes menées du point (x, y) à la courbe. Enfin, si l'on forme le discriminant de T', ce discriminant sera un carré parfait R^2 et l'équation $R = 0$ représentera les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites mentionnées dans l'énoncé du théorème. Il faut maintenant former l'équation de la droite polaire du point (x, y) relativement à la courbe $R = 0$, ou, ce qui est la même chose, relativement à la courbe $R^2 = 0$; et je remarque d'abord qu'il suffit de calculer dans le discriminant R^2 le terme constant et les termes du premier degré en X et en Y, en négligeant les termes du second degré.

Le résultant T, quand on y néglige les termes en ω d'un degré supérieur au premier, est simplement $U(-v, u) + n\omega\Pi(-v, u)$, comme on le voit facilement en se servant de la formule élémentaire qui donne la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples; on déduit de là

$$T' = U(\lambda, \mu) + n(\lambda Y - \mu X)\,\Pi(\lambda, \mu),$$

ou

$$T' = (a, b, c, \ldots) + [n\alpha Y, (n-1)\beta Y - \alpha X, (n-2)\gamma X - 2\beta X], \ldots;$$

d'où, en négligeant toujours les puissances de X et de Y supérieures à la première et en appelant Δ le discriminant de U (égalé à zéro il donne l'équation de $C^{n(n-1)}$)

$$R^2 = \Delta + n\alpha Y\frac{d\Delta}{da} + [(n-1)\beta Y - \alpha X]\frac{d\Delta}{db} + \ldots;$$

d'où encore, en se rappelant que $\Pi = 0$ représente la polaire de la droite de l'infini et en employant une formule donnée dans le Mémoire déjà cité (*F. B.*, n° 13),

$$R^2 = \Delta + X\frac{d\Delta}{dx} + Y\frac{d\Delta}{dy},$$

la polaire du point (x, y) relativement à R^2 est

$$n(n-1)\Delta + (\xi - x)\frac{d\Delta}{dx} + (\eta - y)\frac{d\Delta}{dy} = 0,$$

ou, en vertu du théorème connu sur les fonctions homogènes,

$$\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz} = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

2. Si la courbe de $n^{\text{ième}}$ classe K^n est une courbe C^m d'ordre inférieur à $n(n-1)$, le théorème précédent lui est applicable en la considérant comme une courbe d'ordre $n(n-1)$ obtenue en adjoignant à C^m ses t tangentes doubles (chacune d'elles étant comptée deux fois) et ses i tangentes d'inflexion (chacune d'elles étant comptée trois fois).

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe et du même ordre $K^n = C^m$, possédant t tangentes doubles et i tangentes d'inflexion, si l'on désigne respectivement par* D, I, T *et* Δ *les droites polaires d'un point* M *du plan relativement à la courbe* C^m, *à l'ensemble des tangentes doubles, à l'ensemble des tangentes d'inflexion et à l'ensemble des droites qui joignent, deux à deux, les points de contact des tangentes menées du point* M *à* K^n, *la droite* Δ *est la polaire du point* M *relativement au triangle formé par les droites* D, T *et* I, *ces droites étant supposées de poids proportionnel aux nombres* m, $2t$ *et* $3i$.

En d'autres termes, si par le point M on mène une sécante quelconque rencontrant respectivement les droites D, T, I et Δ aux points d', t', i' et δ', on a la relation

$$\frac{u(n-1)}{M\delta'} = \frac{m}{Md'} + \frac{2t}{Mt'} + \frac{3i'}{Mi'}.$$

3. En particulier, si la courbe considérée se décompose en deux courbes distinctes, on obtient la proposition suivante :

Théorème III. — *Étant données deux courbes quelconques de* *classe n et n', K^n et $K^{n'}$, la droite polaire d'un point quelconque M du plan, relativement à leurs nn' tangentes communes, est la droite polaire du même point relativement aux nn' droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de M à K^n aux points de contact des tangentes menées de M à $K^{n'}$.*

Si la courbe $K^{n'}$ se réduit à un point P, on obtient le théorème suivant :

Si l'on considère les tangentes menées d'un point P à une courbe de $n^{ième}$ classe K^n, la droite polaire d'un point quelconque M du plan, relativement à l'ensemble de ces tangentes, est la droite polaire du même point relativement aux droites qui joignent au point P les points de contact des tangentes à K^n issues du point M.

Si, en particulier, on suppose que les droites issues du point P soient *isotropes*, on retrouve ce théorème que j'ai déjà donné dans ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bull. de la Société phil.*, 1867).

Si, d'un point M, on mène les n tangentes à une courbe de classe n, le centre harmonique du point M, relativement aux n points de contact, est le même que le centre harmonique du même point relativement aux n foyers réels de la courbe.

4. Si la courbe donnée est une courbe de troisième classe $K^3 = C^6$, on voit que la polaire d'un point M, relativement à C^6, est la polaire de ce point relativement au triangle formé par les points de contact des tangentes issues de M.

Si M est sur la cayleyenne de K^3, ces points sont en ligne droite; donc cette droite est la polaire de M relativement à C^6, d'où ces conséquences :

La hessienne de K^3 est l'enveloppe des droites polaires, relativement à C^6, des points de la cayleyenne de K^3.

Une droite, tangente en M à K^3, coupe C^6 en quatre points distincts de M; les trois pôles de M, relativement à ces quatre points, sont les points où la droite coupe la cayleyenne.

5. On déduit de la théorie des polaires réciproques une série de théorèmes analogues aux précédents et relatifs aux pôles d'une droite par rapport à une courbe donnée. Il est inutile de les énoncer; leur considération, néanmoins, est indispensable, notamment dans l'application des propositions précédentes à la théorie des surfaces algébriques.

SUR UNE SURFACE DE QUATRIÈME CLASSE

DONT ON PEUT DÉTERMINER

LES LIGNES DE COURBURE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1876.

1. Les propriétés générales des surfaces du quatrième ordre ayant une ligne double du second ordre et des surfaces de quatrième classe, corrélatives des précédentes, qui sont doublement inscrites dans un cône du second ordre, sont actuellement bien connues. L'étude des variétés de ces surfaces peut néanmoins offrir quelque intérêt à l'égard de leurs propriétés métriques; la surface qui fait l'objet de cette Note peut être considérée comme une des corrélatives de l'anallagmatique du quatrième ordre à centre ou comme une transformée homographique de la surface parallèle à l'ellipsoïde : on peut construire ses lignes de courbure, et sa définition géométrique très simple la rattache étroitement aux surfaces du second ordre; on peut la définir ainsi qu'il suit :

2. Soient S et s deux surfaces homofocales du second ordre, et P un de leurs plans principaux communs; par une droite D prise arbitrairement dans le plan P, menons un plan touchant la surface S au point M, et un plan touchant la surface S au point m. D'après un théorème connu, dû à M. Chasles, la droite Mm est perpendiculaire à D : on peut donc par D mener un plan perpendiculaire à Mm; appelons μ le point d'intersection de ces deux plans.

Lorsque D se déplace dans le plan P, le point μ décrit une surface Σ, et c'est cette surface dont je veux étudier les propriétés; je dirai, pour simplifier le langage, qu'à la droite D du plan P

correspondent respectivement les points M, m et μ des surfaces S, s et Σ; en sorte qu'à chaque droite du plan correspondent deux points sur chacune des surfaces du second ordre, et quatre points sur la surface Σ.

3. En premier lieu, j'établirai la proposition suivante :

En un point quelconque μ de la surface Σ, la normale à la surface est la droite μmM qui joint les points correspondants sur les surfaces du second ordre homofocales.

A cet effet, considérons un point quelconque A situé sur la droite D, correspondant au point μ; le cône Θ, ayant pour sommet le point A et circonscrit à la surface Σ, touchera cette dernière au point μ, et, si l'on remarque que $Mm\mu$ est dans l'espace perpendiculaire au plan μD, on pourra définir ainsi qu'il suit le cône Θ, ou plutôt la courbe sphérique Θ' suivant laquelle ce cône est coupé par une sphère Q ayant pour centre le point A.

D'après un théorème connu, les traces sur la sphère Q des cônes circonscrits à S et s, et ayant pour sommet le point A, sont deux coniques sphériques homofocales S' et s'; le plan principal P coupe cette sphère suivant un arc sphérique P' commun à S' et à s'. Par un point quelconque d' de P', menons un arc de grand cercle touchant S' en M', et un arc de grand cercle touchant S' en m'; puis, par d', menons un arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc de grand cercle qui joint M' et m'. En appelant μ' leur point d'intersection, on voit que, quand d' se déplacera sur P', μ' décrira la courbe de contour apparent Θ'.

Si la proposition que je veux démontrer est vraie, la tangente menée à Θ' au point μ' sera l'arc de grand cercle $\mu' d'$; et réciproquement cette proposition sera démontrée si la tangente sphérique au contour apparent est déterminée comme je viens de l'indiquer, quand l'œil est placé en un point quelconque de D, ou encore comme un plan est déterminé par deux des droites qu'il contient quand l'œil est placé en deux points distincts de D. Or, comme je vais le faire voir, cette construction de la tangente sphérique est facile à vérifier quand l'œil est placé en un des deux points où la droite D rencontre S.

4. Soit H un de ces deux points : la surface S est vue de ce

point, suivant une ellipse sphérique S′, et la surface s suivant les deux foyers f et φ de cette ellipse située sur l'arc de grand cercle perpendiculaire à P′.

Il s'agit donc de vérifier le théorème suivant :

Si d'un point d' de l'axe P′ d'une ellipse sphérique S′ on mène un arc de grand cercle touchant cette ellipse en M′, et si par d' on mène un arc de grand cercle perpendiculaire à fM′, f désignant l'un des deux foyers de f et φ de S′ situés sur un arc de grand cercle perpendiculaire à P′, leur point d'intersection μ décrit une courbe sphérique tangente à l'arc de grand cercle $\mu d'$; ou, en d'autres termes, le lieu du point μ est un cercle ayant pour centre le point f.

Ce théorème s'établit facilement dans le cas plus général où le point d', au lieu de décrire l'axe $f\varphi$, décrit un arc de grand cercle quelconque perpendiculaire à P′.

A cet effet, je ferai remarquer qu'il est évident lorsqu'on remplace l'ellipse sphérique par une ellipse plane et que le point M′ se meut parallèlement à l'un des axes; cela résulte immédiatement de ce qu'une conique plane et un cercle ayant pour centre l'un de ses foyers sont deux courbes homologiques; si maintenant on projette cette conique et les axes sur une sphère ayant pour centre un point de la droite menée par le foyer, perpendiculairement au plan de la conique, on obtient le lemme sur lequel je viens de m'appuyer.

La construction de la normale à la surface Σ, que j'ai donnée ci-dessus, est donc entièrement démontrée.

5. Quelques remarques sur ce qui précède ne seront pas inutiles. En premier lieu, on voit que les courbes sphériques de contour apparent de la surface Σ, quand l'œil est placé en un point de P, sont susceptibles d'une définition entièrement analogue à celle de la surface Σ, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Étant données deux ellipses sphériques homofocales, si, par un point quelconque D, on mène des arcs de grand cercle tangents aux deux ellipses, et si l'on projette orthogonalement le point D sur l'arc de grand cercle qui joint le point de contact des tangentes avec les ellipses, le pied μ de l'arc projetant décrit une courbe sphérique tangente à l'arc de grand cercle μD.

Il est à peine utile d'indiquer qu'un théorème analogue a lieu pour les coniques homofocales planes.

6. Les surfaces S et s sont respectivement coupées par le plan P, suivant des ellipses E et e qui sont des coniques doubles de Σ.

Des résultats précédents (n° 4) il résulte immédiatement que :

Le cône circonscrit à la surface Σ et ayant pour sommet un point H de la conique E se compose de deux cônes de révolution coupant le plan P suivant les tangentes que l'on peut mener du point H à la conique e, et ayant pour axes les génératrices de S qui se croisent au même point.

Ces quatre cônes ont en commun quatre plans tangents; deux d'entre eux se coupent suivant la tangente menée au point H à la conique E : ce sont les plans tangents à la surface en ce point; les deux autres, qui sont doublement tangents à Σ, se coupent suivant une perpendiculaire au plan P.

Il est facile de déterminer le degré de leur enveloppe. La surface Σ est de quatrième classe; en effet, le plan P ne touche évidemment pas la surface et à une droite quelconque de ce plan correspondent quatre points de la surface, et par conséquent quatre plans tangents.

Par suite, le cylindre doublement circonscrit dont je viens de parler est du second ordre, et il est facile de voir que sa trace sur le plan P est une conique homofocale à E et e.

D'où cette proposition :

La surface corrélative de la surface Σ est une surface du quatrième ordre ayant une conique double.

De là se déduiraient facilement diverses conséquences relatives aux coniques doubles de Σ et aux cônes du second degré qui lui sont circonscrits, mais je crois inutile de m'étendre à ce sujet.

7. D'après ce qui précède, on voit que toutes les droites telles que Mm sont normales à une même surface. Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant, que j'ai donné, il y a déjà quelques années (¹) :

Étant données deux surfaces du second degré homofocales, si, par une droite D *située dans un plan fixe* P, *on mène des plans qui touchent respectivement ces surfaces en* M *et en* m, *toutes les cordes telles que* Mm *sont normales à une série de surfaces.*

Dans le cas général, cette série de surfaces comprend une surface anallagmatique du quatrième ordre ; mais, comme je l'ai fait remarquer dans un des Mémoires cités ci-dessus, lorsque le plan fixe P est un plan principal commun aux deux surfaces du second ordre, cette anallagmatique disparaît et est rejetée entièrement à l'infini.

Il importait, dans ce cas, de définir géométriquement et d'une façon simple une surface particulière coupant orthogonalement le système des rayons ; d'après ce qui précède, on voit que la surface Σ précédemment définie donne la solution de la question. Cette surface se comporte relativement aux anallagmatiques du quatrième ordre comme l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement relativement au cercle. Dans le cas général, on sait, comme je l'ai montré, déterminer les groupes de rayons qui forment des surfaces développables ; il en résulte que l'on saura déterminer les lignes de courbure de Σ ; mais, bien que cette détermination soit comprise comme cas particulier dans les propositions que j'ai données antérieurement sur ce sujet, je crois cependant utile de la faire directement.

8. *Étant donnée une conique quelconque* K *passant par les points d'intersection des coniques* E *et* e, *si la droite* D *se déplace tangentiellement à* K, *le point* μ *correspondant décrit une ligne de courbure de* Σ.

(¹) *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* (*Bulletin de la Société philomathique*, 1868). — *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872).

Démonstration. — Soient D une tangente quelconque à K touchant cette courbe au point A ; M, m et μ les points qui correspondent respectivement à D sur les surfaces S, s et Σ. Si la droite D, par un déplacement infiniment petit, tourne autour du point A, les points M, m et μ viennent respectivement en M′, m' et μ'. Les plans polaires de A relativement aux surfaces S et s étant perpendiculaires à P, on voit que les droites MM′ et mm' se projettent sur ce plan suivant les polaires de A relativement aux coniques E et e ; d'où il suit, puisque les coniques E, e et K ont quatre points communs, que ces projections se coupent sur la tangente en A à la conique K ; en d'autres termes, les droites MM′ et mm' se coupent dans l'espace, les normales en μ et μ' sont donc dans un même plan et $\mu\mu'$ est tangente à une des lignes de courbure qui se croisent au point μ.

Corollaire. — *Étant donné le plan tangent à la surface* Σ *au point* μ, *si l'on désigne par* D *la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan* P *et par* A *et* B *les points où la droite* D *touche les deux coniques du faisceau* (E, e) *qui lui sont tangentes, les droites* μA *et* μB *sont les directions des axes de l'indicatrice au point* μ.

Connaissant, comme je l'ai montré plus haut, huit cônes de révolution circonscrits à la surface et la touchant au point μ, on pourrait construire sans peine les grandeurs de ces axes ; mais les constructions que l'on déduit immédiatement de cette considération ne me paraissent pas assez simples pour être rapportées ici.

9. Examinons, dans quelques cas particuliers remarquables, ce que devient la surface Σ.

Si la surface s se réduit à la focale de S située dans le plan P, Σ se confond avec S, et l'on retrouverait ainsi, si on le voulait, les lignes de courbure de cette dernière surface.

Si s se réduit à une focale de S située dans un plan perpendiculaire à P, Σ est une *cyclide de Dupin*. Supposons enfin que les surfaces S et s se confondent ; soient M un point quelconque de S et MQ la perpendiculaire abaissée de ce point sur P, il est facile de voir que la droite Mm est alors la symétrique de MQ relativement au plan tangent mené en M à la surface S ; en d'autres termes, Mm provient de la réflexion du rayon MP sur cette surface, et l'on voit, conformément au théorème de Dupin, que tous les rayons réfléchis sont normaux à Σ. De la construction donnée par le point μ on déduit d'ailleurs que $M\mu = MP$; la surface Σ est donc, dans ce cas, une *anticaustique par réflexion de la surface du second ordre, les rayons incidents étant parallèles à l'un de ses axes.*

10. De la construction que j'ai donnée des lignes de courbure de Σ on déduit facilement que les développables, lieu des normales le long d'une de ces lignes de courbure, coupent les surfaces du second ordre S et s suivant un système de lignes conjuguées : je veux dire qu'en chaque point de l'une de ces surfaces les tangentes aux courbes du système qui s'y croisent forment un système de droites conjuguées relativement à l'indicatrice en ce point.

De là diverses conséquences intéressantes découlant immédiatement de cette proposition due à M. Ribaucour : « Si les développables lieu des normales à une surface découpent un réseau conjugué sur une surface du second ordre S, elles y découpent un second réseau également conjugué; elles tracent deux réseaux conjugués sur chacune des surfaces homofocales à S. Chacune des développables est elle-même circonscrite à une surface du second ordre homofocale à S [1] ».

11. Il est facile de démontrer que la surface Σ la plus générale est *une anticaustique par réfraction d'une surface du second ordre, les rayons incidents étant parallèles à l'un des axes de cette surface.*

A cet effet, par une droite D du plan P menons un plan touchant la surface S en M et les deux plans tangents à s; en appelant m et m' les points de contact de ces derniers plans, si l'on mène par D des plans respectivement perpendiculaires à Mm et à Mm', ils couperont ces droites en deux points μ et μ' situés sur la surface Σ, et que je désignerai sous le nom de *points associés* de cette surface relativement à S. D'une proposition que j'ai donnée

[1] *Notice sur les travaux mathématiques de M. Ribaucour*, 1873.

antérieurement [1] il résulte que les droites $M\mu$ et $M\mu'$ sont également inclinées sur le plan MD, et que, par suite, les longueurs $M\mu$ et $M\mu'$ sont égales.

Imaginons maintenant la sphère ayant pour centre le point M et pour rayon $M\mu$; cette sphère, d'après les propositions précédentes, touche la surface Σ aux points μ et μ'; les plans tangents menés à Σ en ces points se coupent d'ailleurs sur le plan P suivant la droite D qui est située dans le plan mené en M tangentiellement à S. On en conclut immédiatement que le rayon de la sphère varie proportionnellement à la distance de son centre au plan P. La surface Σ, qui est l'enveloppe de cette sphère, est donc, pour un indice de réfraction convenablement déterminé, une anticaustique de S, les rayons incidents étant perpendiculaires au plan P.

12. Une partie des résultats précédents peut facilement être généralisée. En se reportant, en effet, à la proposition que j'ai rappelée ci-dessus (n° 7), on voit que l'anallagmatique, trajectoire orthogonale du système de rayons qu'elle définit, est rejetée à l'infini, non seulement quand le plan fixe P est un plan principal commun aux deux surfaces homofocales, mais encore dès qu'il passe par leur centre; les surfaces trajectoires de ces rayons doivent donc être considérées comme des surfaces parallèles à une anallagmatique rejetée à l'infini.

Pour étudier directement ces surfaces, considérons d'abord une anallagmatique Σ_0 déterminée par une surface du second ordre S et une sphère Θ d'un rayon donné arbitrairement; étant donné un point quelconque M sur la surface S, en désignant par D la distance de M à la sphère (distance comptée sur une tangente) et par δ la distance constante du centre de la sphère à un plan quelconque P passant par le centre de S, si l'on considère une sphère ayant pour

[1] *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* (*Bulletin de la Société philomathique*, 18 janvier 1868).

Étant données deux surfaces homofocales A *et* B *et une droite* D, *menons par cette droite les plans tangents aux deux surfaces, et soient b et b' les points de contact relatifs à la surface* B, *à l'un des points de contact relatif a à la surface* A; *les droites ab, ab' sont dans un même plan avec la normale au point a et également inclinées sur cette normale.*

centre le point M et pour rayon la longueur $(D - \delta)$, l'enveloppe de ces sphères est une surface parallèle à l'anallagmatique Σ_0.

Si maintenant on imagine que le centre de la sphère Θ s'éloigne indéfiniment suivant une direction perpendiculaire au plan P, son rayon conservant toujours du reste une valeur finie, l'anallagmatique Σ_0 est alors rejetée à l'infini : la longueur $(D - \delta)$ devient la distance du point M au plan P et la surface Σ parallèle à Σ_0 une anticaustique par réflexion de S, les rayons incidents étant perpendiculaires à P.

Pour déterminer les lignes de courbure de cette anticaustique, je rappellerai les propositions suivantes, que j'ai données dans ma Note *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* déjà citée.

Étant donnée une surface anallagmatique Σ_0 définie au moyen d'une surface de second ordre S *et d'une sphère directrice* Θ, *imaginons la surface développable qui leur est circonscrite : elle a pour lignes doubles quatre coniques planes;* H *désignant l'une quelconque de ces coniques et* Q *son plan,* H *est situé sur une surface du second ordre s homofocale à* S. *Si par une droite* D, *prise arbitrairement dans le plan* Q, *on mène un plan tangent à* S *et un plan tangent à s, la droite qui joint les points de contact est normale à* Σ_0.

Imaginons une quelconque des coniques passant par les quatre points communs au plan Q *et aux surfaces* S *et s; lorsque la droite* D *roulera sur cette conique, les normales à* Σ_0 *correspondantes formeront une surface développable et traceront une ligne de courbure sur cette surface et sur toutes celles qui lui sont parallèles.*

13. Appliquons cette proposition au cas où la sphère Θ s'éloigne à l'infini dans une direction Π perpendiculaire au plan P, son rayon demeurant fini. La surface développable circonscrite se réduit alors sensiblement à deux cylindres infiniment peu différents l'un de l'autre et dont les génératrices sont sensiblement parallèles à Π. Une seule de ses lignes doubles est à distance finie : c'est une conique différant infiniment peu de la section de la surface S par le plan conjugué à la direction Π; la surface homofocale qui la renferme diffère elle-même infiniment peu de S; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Considérons des rayons lumineux parallèles à une direction Π *et venant se réfléchir sur une surface de second ordre* S; *soit* Ω *la courbe de contact de cette surface avec la développable* (¹) *isotrope qui lui est circonscrite. Le plan conjugué à la direction* Π *rencontre* Ω *en quatre points; considérons l'une quelconque des coniques qui passe par ces quatre points; sa polaire, relativement à* S, *est un cylindre du second ordre coupant* S *suivant une biquadratique. Les rayons réfléchis le long de cette biquadratique forment une surface développable, et par conséquent déterminent sur l'anticaustique une ligne de courbure.*

14. Les mêmes considérations s'appliquent au cas de la réfraction, en supposant que la sphère Θ, en s'éloignant à l'infini, demeure toujours inscrite dans un cône de révolution donné.

On obtient ainsi le théorème suivant :

Étant données deux surfaces homofocales du second ordre S *et s et un plan fixe* P *passant par leur centre commun, si, par une droite* D *prise arbitrairement dans le plan* P, *on mène un plan tangent à* S *et un plan tangent à s, la droite qui joint les points de contact engendre, lorsque* D *se déplace, un système de rayons.*

Tous ces rayons peuvent être considérés comme provenant de rayons incidents parallèles et se réfractant sur S *avec un indice de réfraction convenablement choisi; ils peuvent être également considérés comme provenant des rayons incidents parallèles et se réfractant sur s, la direction de ces seconds rayons et leur indice de réfraction étant généralement différents de la première direction et du premier indice de réfraction.*

Ces rayons sont normaux à deux anticaustiques par réfrac-

(¹) J'appelle ainsi la développable dans laquelle sont inscrites toutes les surfaces homofocales à S.

tion, la première relative à la surface S *et la deuxième à la surface* s, *et l'on peut déterminer les lignes de courbure de ces anticaustiques.*

Je ne sais si l'on avait remarqué les rapports étroits qui relient entre elles la théorie des anticaustiques des surfaces du second ordre et la théorie des surfaces homofocales, non plus que la détermination simple qui en résulte de leurs lignes de courbure.

SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES

DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Annales de Mathématiques, 1876.

En désignant, en un point d'une ellipse, par ρ le rayon de courbure de cette ellipse, et par $\frac{d\rho}{ds}$ la dérivée de ce rayon par rapport à l'arc, Maclaurin a montré comment la valeur de cette dérivée pouvait se déduire de l'angle que fait la normale à l'ellipse au point considéré avec le diamètre qui passe en ce point. On peut, si l'on veut, énoncer de la façon suivante le théorème de Maclaurin :

En un point M *d'une ellipse, portons sur la tangente une longueur égale à* $\frac{1}{\rho}$ *et sur la normale une longueur égale à* $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho}$, *la résultante de ces deux longueurs, composées comme des forces, est perpendiculaire au diamètre* OM.

Les lignes géodésiques des surfaces du second ordre jouissent d'une propriété semblable :

Si, en un point M *d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre, nous portons sur la tangente* MT *à cette courbe une longueur égale à* $\frac{1}{\rho}$, *sur la normale principale une longueur égale à* $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho}$, *et sur la normale au plan osculateur une longueur égale à* $\frac{1}{r}$ (r désignant le rayon de torsion au point considéré), *la résultante de ces trois longueurs composées comme des forces est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la direction* MT.

J'ai considéré ici, pour simplifier l'énoncé, les composantes $\frac{1}{\rho}$, $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{r}$; mais il est plus convenable, dans d'autres applications, de considérer les composantes proportionnelles $\frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho^{\frac{4}{3}}}$ et $\frac{\sqrt[3]{\rho}}{r}$, ces composantes conservant d'ailleurs les directions que j'ai indiquées.

Pour abréger, appelons, si l'on veut, pour un instant, *axe de courbure* au point M la composante ainsi définie ; on pourra énoncer la proposition suivante :

Si MT *et* M'T' *désignent deux droites quelconques touchant une même ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre aux points* M *et* M', *la projection de l'axe de courbure en* M *sur la tangente en* M' *est égale à la projection de l'axe de courbure en* M' *sur la tangente en* M.

Si MT et M'T' étaient tangentes à deux lignes géodésiques différentes, tracées sur une même surface du second ordre, le rapport des deux projections dont je viens de parler demeurerait constant lorsque les droites se déplaceraient tangentiellement aux lignes géodésiques; à quoi j'ajouterai que les projections sont encore égales si les deux lignes géodésiques sont tangentes à une même ligne de courbure.

SUR LES COURBES GAUCHES

ET

SUR LA VALEUR DE LA TORSION EN UN POINT D'UNE LIGNE GÉODÉSIQUE

TRACÉE SUR UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1875-1876.

1. Considérons une courbe gauche quelconque rapportée à trois axes rectangulaires et dont les équations soient $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, X, Y et Z étant trois fonctions données d'une même variable indépendante t. En chaque point m de cette ligne, menons une droite $m\mu$ normale à cette courbe et dont la longueur, ainsi que la direction, soient fixées à chaque instant par la valeur de la variable t correspondant au point m. Projetons ensuite sur la corde mm' les segments normaux $m\mu$ et $m'\mu$ menés respectivement par les extrémités de cette corde; je me propose d'abord d'évaluer la somme algébrique de ces projections.

En désignant par ω cette somme, par A, B, C les dérivées de X, Y, Z par rapport à t et par L, M, N les projections sur les axes du segment $m\mu$, on a évidemment

$$\begin{aligned} \mathrm{MM}'.\omega &= \sum\left(dx + \frac{d^2x}{1.2} + \frac{d^3x}{1.2.3}\cdots\right)\left(2\mathrm{L} + d\mathrm{L} + \frac{d^2\mathrm{L}}{1.2}\cdots\right) \\ &= \sum\left(\mathrm{A}\,dt + \frac{\mathrm{A}'dt^2}{1.2} + \frac{\mathrm{A}''dt^3}{1.2.3}\cdots\right)\left(2\mathrm{L} + d\mathrm{L} + \frac{d^2\mathrm{L}}{1.2}\cdots\right). \end{aligned}$$

Je poserai, pour abréger,

$$(1) \qquad \mathrm{MM}'.\omega = \mathrm{P}_1\frac{dt^2}{1.2} + \mathrm{P}_2\frac{dt^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathrm{P}_n dt^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots,$$

le coefficient de dt étant nul dans ce développement, en vertu de l'équation $\Sigma \mathrm{AL} = 0$, qui exprime que le segment est normal à la courbe.

2. Des considérations très simples montrent immédiatement que chaque coefficient d'ordre pair P_{2n} s'exprime linéairement au moyen des coefficients d'ordre inférieur et de leurs dérivées; il s'annule donc en même temps que ces derniers; par suite, la formule (1) montre que ω ne peut être qu'un infiniment petit d'*ordre impair*.

P_1 et P_2 étant identiquement nuls, on voit que généralement la quantité ω sera du troisième ordre; si elle est d'un ordre supérieur, elle sera du cinquième ordre et l'équation suivante devra être satisfaite :

$$\Sigma \mathrm{A}''\mathrm{L} + 3\Sigma \mathrm{A}'\mathrm{L}' = 0. \tag{2}$$

Si elle est d'un ordre supérieur au cinquième, elle sera du septième, avec la condition suivante :

$$\Sigma \mathrm{A}^{\mathrm{IV}}\mathrm{L} + 5\Sigma \mathrm{A}'''\mathrm{L}' + 10\Sigma \mathrm{A}''\mathrm{L}'' = 0. \tag{3}$$

Enfin, si elle est d'un ordre supérieur au septième, elle sera *identiquement nulle,* avec la condition

$$\Sigma \mathrm{A}^{\mathrm{VI}}\mathrm{L} + 7\Sigma \mathrm{A}^{\mathrm{V}}\mathrm{L}' + 21\Sigma \mathrm{A}^{\mathrm{IV}}\mathrm{L}'' + 35\Sigma \mathrm{A}'''\mathrm{L}''' = 0, \tag{4}$$

et alors la courbe *pourra être placée sur une surface du second ordre.*

3. Si l'on se propose, étant donnée une courbe, de trouver un système de segments normaux ayant cette courbe pour base et tels que ω soit une quantité infiniment petite du septième ordre, on devra déterminer les segments par les équations (2) et (3).

Je les transformerai d'abord en définissant, en chaque point de la courbe, le segment normal par ses deux projections U et W sur la normale principale et sur la binormale en ce point. En désignant, suivant l'usage habituel, par ρ et par r le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe au point considéré, et en prenant l'arc s comme variable indépendante, les formules (2) et (3) se mettront facilement, au moyen des formules de M. Serret, sous la

forme suivante :

$$\mathrm{U}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) + 3\frac{d\mathrm{U}}{\rho}\,\frac{2}{r\rho}\,\mathrm{W}\, ds = 0, \tag{2'}$$

$$\left\{\begin{aligned} & 10\, d^2\mathrm{U}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) - 10\frac{d^2\mathrm{W}\, ds}{r\rho} + 5\, d\mathrm{U}\left[d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) ds^2\right] \\ & + 5\, d\mathrm{W}\, ds\left[\frac{2}{r}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\, d\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ & + \mathrm{U}\left[d^3\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{9}{\rho^2} - \frac{3}{r^2}\right) ds^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{12\, ds^2}{r\rho}\, d\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ & + \mathrm{W}\, ds\left[\frac{2}{r}\, d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\, d^2\left(\frac{1}{r}\right)\right. \\ & \qquad \left. + 7\, d\left(\frac{1}{r}\right) d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{6}{r\rho}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) ds^2\right] = 0. \end{aligned}\right. \tag{3'}$$

En éliminant W entre les deux équations précédentes, on obtiendra une équation linéaire et du troisième ordre pour déterminer U; on voit donc que, la courbe étant donnée, le problème que je m'étais proposé a une infinité de solutions, qui toutes peuvent se déduire de trois solutions indépendantes, conséquence à laquelle quelques propositions géométriques très simples conduiraient directement.

4. Laissant de côté ces considérations générales, ainsi que les conséquences qui en découlent relativement aux équations différentielles (entre r, ρ et s) qui définissent les courbes que l'on peut tracer sur une surface de second ordre, les biquadratiques gauches (par lesquelles on peut faire passer une infinité simple de surfaces du second ordre), et les cubiques gauches (par lesquelles on peut faire passer une infinité double de surfaces du second ordre), je vais rechercher quelles sont les courbes que l'on peut prendre comme base de segments normaux dirigés suivant *les normales principales de la courbe* et jouissant de la propriété que ω soit du septième ordre.

On devra, dans les équations précédentes, poser $\mathrm{W} = 0$; l'équation (2') s'intègre alors immédiatement et donne

$$\mathrm{U} = \alpha\rho^{\frac{1}{3}},$$

α désignant une constante arbitraire. Portons cette valeur de U dans l'équation (3'); il vient, toutes réductions faites,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} & 9d^3\left(\frac{1}{\rho}\right) - 45\rho\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{36}{\rho^2}\, ds^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ & \quad + 40\rho^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + 18\, ds^2\left[\frac{6}{r\rho}\, d\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{4}{r^2}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est remarquable que cette équation puisse s'intégrer sans établir aucune relation entre ρ et r; si on l'intègre en effet en considérant $\frac{1}{r}$ comme la fonction inconnue (ce qui ne présente aucune difficulté), on trouve que la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, et l'on obtient l'intégrale suivante :

$$(6)\qquad 1\rho\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) = C\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{4}{3}} - 3\rho\,\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds^2} + 4\rho^2\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)^2}{ds^2},$$

C désignant une constante arbitraire.

Telle est la relation qui doit exister entre la torsion et la courbure d'une courbe pour qu'elle jouisse de la propriété énoncée ci-dessus.

5. En particulier, on peut remarquer que, si une ligne géodésique est tracée sur une surface du second ordre quelconque, en portant en chaque point de la courbe sur la normale principale une longueur proportionnelle à $\sqrt[3]{\rho}$, les segments ainsi obtenus jouissent de la propriété que la somme algébrique des projections de deux d'entre eux, sur la corde qui joint leurs pieds, est identiquement nulle; la quantité que j'ai appelée ω étant nulle, on voit qu'en chaque point d'une telle ligne géodésique la torsion est donnée par la relation (6), la constante C ayant une valeur convenablement déterminée.

SUR LES LIGNES DE COURBURE

DES

SURFACES DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France, 1876.

1. Soient A une surface du second ordre et K l'une quelconque de ses lignes de courbure. On peut faire passer par K une infinité de surfaces du second ordre; soit A' l'une quelconque d'entre elles. Cela posé :

La surface développable, circonscrite à A *et* A', *touche* A *suivant une de ses lignes de courbure.*

En d'autres termes :

Étant donné un plan tangent quelconque à la surface A *qui la touche au point* M, *on peut, par* K, *mener deux autres surfaces du second ordre qui touchent le plan; si l'on désigne par* A *et* B *leurs points de contact, les droites* MA *et* MB *sont les tangentes aux lignes de courbure de* A *qui se croisent au point* M.

2. Les *surfaces quadricuspidales*, étudiées par M. de la Gournerie, jouissent de propriétés analogues à celles des surfaces du second ordre A'.

Si, par la biquadratique K, *on mène une quadricuspidale quelconque, la surface développable circonscrite à* A *et à la quadricuspidale touche* A *suivant une de ses lignes de courbure.*

SUR LE LIEU DES POINTS TELS, QUE LES TANGENTES MENÉES DE CES POINTS A DEUX COURBES PLANES SOIENT ÉGALES ENTRE ELLES.

Bulletin de la Société mathématique de France, 1877.

1. Soient S et S′ deux courbes planes, m et m' deux points situés respectivement sur ces courbes et tels que, les tangentes menées en ces points se coupant en t, on ait $mt = m't$.

Pour déterminer le lieu du point t, je m'appuierai sur le lemme suivant, dont l'évidence est immédiate :

Si l'on fait la perspective stéréographique des courbes S et S′ sur une sphère, en appelant O le centre de la projection, Σ et Σ' les courbes perspectives de S et de S′, μ et μ' les points correspondant à m et m', les tangentes menées en μ et μ' aux courbes Σ et Σ' se rencontrent en un point de l'espace Θ qui est situé sur le rayon Ot.

La réciproque est évidemment vraie.

2. De ce lemme résulte immédiatement la construction suivante du lieu des points t.

Faisons, sur une sphère quelconque, la perspective stéréographique des courbes données S et S′ et imaginons les deux surfaces développables qui ont pour arêtes de rebroussement les deux courbes perspectives Σ et Σ'. Ces deux surfaces se coupent suivant une courbe gauche K; imaginons maintenant le cône ayant pour base K et pour sommet le centre O de la perspective : *ce cône coupera le plan de* S *et de* S′ *suivant le lieu cherché.*

3. Étant donnée une courbe plane S, on peut se proposer de déterminer une courbe T telle que deux des tangentes que l'on

peut mener de chacun des points de cette courbe à S soient égales entre elles.

Pour résoudre ce problème, faisons sur une sphère quelconque la projection stéréographique de S. La courbe perspective Σ est l'arête de rebroussement d'une surface développable; soit K la ligne nodale de cette surface.

Si l'on imagine le cône ayant pour base K et pour sommet le centre O de la perspective, *ce cône coupe le plan de* S *suivant la courbe* T.

SUR LES NORMALES

QUE L'ON PEUT MENER

D'UN POINT DONNÉ A UNE CONIQUE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1877

1. Je m'appuierai sur les deux propositions suivantes :

Théorème I. — *Si l'on considère trois des normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, la droite qui joint le point* M *au centre du cercle circonscrit aux trois pieds de ces normales a pour conjuguée harmonique, relativement à ces trois normales, la quatrième normale, que l'on peut mener du point* M *à la courbe.*

Théorème II. — *Si l'on désigne par a, b, c, d les pieds des normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, et par* A, B, C, D *les centres des cercles circonscrits aux triangles bcd, cda, dab et abc, les droites menées respectivement par ces points parallèlement aux normales* Ma, Mb, Mc *et* Md *se coupent en un même point* μ.

Ce point est situé sur la droite qui joint le point M *au centre de la conique, de l'autre côté de ce centre et à une distance moitié moindre.*

En conservant les notations précédentes, on déduit du théorème I que la droite MA est l'une des deux droites qui constituent la polaire conique de Ma relativement aux droites Mb, Mc et Md.

Déterminons les directions des quatre normales par des paramètres qui soient les racines de l'équation du quatrième degré

$$\mathrm{U} = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4;$$

en désignant par H et S le hessien et l'invariant quadratique de U, on obtiendra la proposition suivante :

Les directions des quatre droites MA, MB, MC, MD *sont déterminées par les racines de l'une des équations suivantes :*

$$\mathrm{H} + \sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{H} - \sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U} = 0,$$

2. Théorème III. — *Si l'on mène par le point* M *deux parallèles aux axes de la conique et si l'on joint ce point au centre de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété suivante : la conjuguée harmonique de l'une quelconque d'entre elles, relativement aux deux autres, se confond avec la conjuguée harmonique de la même droite relativement au faisceau des normales passant par le point* M.

Analytiquement, si $\frac{\xi}{\eta}$ est le paramètre définissant une quelconque des directions dont je viens de parler, les directions des deux autres sont déterminées par les racines de l'équation

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\xi^2(ax^2+2bxy+cy^2)+2\xi\eta(bx^2+2cxy+dy^2) \\ &\qquad +\eta^2(cx^2+2dxy+ey^2)\pm\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}(x\eta-y\xi)^2=0, \end{aligned} \right.$$

le radical étant pris avec un signe convenable.

3. Étant données quatre droites passant par un même point M, on peut se proposer de déterminer les coniques qui coupent orthogonalement ces quatre droites. Laissant de côté les cercles ayant pour centre le point M, on voit qu'il y a encore une infinité de solutions; le problème sera complètement déterminé, si l'on assujettit les coniques à passer par un point donné sur l'une des droites ou à toute autre condition analogue.

On trouve alors quatre solutions, et le problème peut se résoudre au moyen de la règle et du compas.

Si l'on veut, en effet, chercher le lieu des centres des coniques satisfaisant à la question, on voit qu'il se compose de droites dont les directions sont déterminées par les valeurs de $\frac{x}{y}$, pour lesquelles les racines de l'équation (1) en (ξ, η) correspondent à deux directions rectangulaires. Si l'on représente par

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0$$

l'équation correspondant aux directions parallèles aux asymptotes du cercle, les directions des droites, qui joignent M aux centres des coniques satisfaisant à la question, correspondront aux racines de l'équation

$$\begin{aligned}[(a\gamma - 2b\beta + c\alpha)x^2 + 2(b\gamma - 2c\beta + d\alpha)xy + (c\gamma - 2d\beta + e\alpha)y^2]^2 \\ - \frac{S}{3}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)^2 = 0,\end{aligned}$$

équation du quatrième degré, résoluble par l'extraction de simples racines carrées.

4. Géométriquement, le problème proposé peut se résoudre de la façon suivante : menons un cercle quelconque passant par M et coupant les normales données en a, b, c, d; appelons A, B, C, D les tangentes menées au cercle par ces points. On peut construire deux coniques tangentes à ces quatre droites, et telles qu'on puisse circonscrire à chacune d'elles un triangle ayant ses sommets sur la conique donnée. Soit K l'une de ces coniques; on la déterminera de la façon suivante : construisons les deux droites qui constituent la conique polaire de Oa par rapport au faisceau Ob, Oc, Od; choisissons arbitrairement l'une de ces droites, et soit α le point où elle coupe le cercle. Cela posé, la conique K sera déterminée par cinq tangentes, qui seront A, B, C, D et la droite αa.

Par le centre du cercle, nous pourrons mener deux tangentes à la conique ainsi définie. Soient p et q les points où l'une de ces tangentes coupe le cercle; construisons le troisième sommet r du triangle circonscrit à K, inscrit dans le cercle et ayant pour côté le segment pq. Ces constructions peuvent évidemment s'effectuer sans tracer la conique K.

Si alors, par le point r, on mène des parallèles aux droites rectangulaires Mp et Mq, on pourra construire une conique ayant pour axes ces parallèles et normale aux quatre droites.

On obtiendra ainsi, au moyen de la règle et du compas, les quatre solutions du problème.

Je ferai observer, en terminant, que les quatre droites, qui joignent au point M les points d'intersection du cercle et de K, contiennent les centres des cercles circonscrits aux divers triangles déterminés par les pieds des quatre normales.

SUR LES NORMALES

QUE L'ON PEUT MENER

D'UN POINT DONNÉ A UNE CONIQUE.

Bulletin de la Société mathématique de France, 1877.

1. Je m'appuierai sur le beau théorème suivant, dû à M. Liouville [1] :

Si, aux quatre points d'intersection d'un cercle et d'une conique, on mène des normales à la conique, et si, par le centre du cercle, on mène une sécante quelconque, le centre harmonique du centre du cercle, par rapport aux quatre points où la sécante coupe les normales, est situé à l'infini.

Considérons maintenant [2] les quatre normales Ma, Mb, Mc et Md, que d'un point M on peut abaisser sur une conique donnée. Désignons par A le centre du cercle qui passe par les pieds b, c, d de trois de ces normales, déterminons le point M′ symétrique du point M par rapport au centre O de la conique, et par ce point menons une parallèle M′a' à la normale Ma. Puisque OM′ = OM, il est clair que a et a' sont deux points diamétralement opposés de la conique, et, d'après une élégante proposition due à Joachimsthal, on sait que les quatre points a', b, c, d sont situés sur un même cercle.

Par suite, d'après le théorème de M. Liouville, si l'on mène par

(1) *Mémoire sur quelques propositions générales de Géométrie et sur la théorie de l'élimination* (*Journal de Mathématiques*, t. VI, 1re série, p. 403).

(2) Le lecteur est prié de faire la figure.

le point A une sécante quelconque, le conjugué harmonique de A par rapport aux quatre points où la sécante coupe les droites M′a', Mb, Mc, Md est situé à l'infini.

Considérons, en particulier, la sécante Aμ parallèle à M′a' et par conséquent à Ma, le point de rencontre avec M′a' étant rejeté à l'infini, on en déduit immédiatement que Ma est la conjuguée harmonique de MA relativement au faisceau des normales Mb, Mc, Md.

Supposons maintenant que la sécante passe par le point M, on aura

$$\frac{1}{A\alpha} + \frac{3}{AM} = 0,$$

d'où il suit

$$\alpha A = \frac{AM}{3}.$$

Menons par le point A une parallèle à Ma, et soit μ le point où cette parallèle coupe le diamètre OM; le point μ décrira le segment MM′ dans le rapport de 3 à 1. On voit donc qu'il est situé sur le prolongement du rayon MO et à une distance du centre égale à la moitié de ce rayon; ce point sera d'ailleurs le même, quelle que soit celle des quatre normales que l'on considère.

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si l'on considère trois des normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, la droite qui joint le point* M *au centre du cercle circonscrit aux trois pieds de ces normales a pour conjuguée harmonique, relativement à ces trois normales, la quatrième normale que l'on peut mener du point* M *à la courbe.*

Théorème II. — *Si l'on désigne par a, b, c, d les pieds des quatre normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, et par* A, B, C, D *les centres des cercles circonscrits aux triangles bcd, cda, dab et abc, les droites menées respectivement par ces points, parallèlement aux normales* Ma, Mb, Mc *et* Md, *se coupent en un même point μ.*

Ce point est situé sur la droite qui joint le point M *au centre de la conique, de l'autre côté de ce centre et à une distance moitié moindre.*

2. Il résulte de là que, si l'on considère l'une quelconque des normales Ma que l'on peut mener par le point M, la droite MA, qui joint ce point au centre du cercle circonscrit au triangle bcd, est l'*une* des deux droites qui constituent la polaire conique de Ma relativement au faisceau Mb, Mc, Md.

Par suite, si l'on détermine pour chacune des normales sa polaire conique par rapport aux trois autres, on obtiendra huit droites sur lesquelles se trouveront les quatre centres A, B, C et D des cercles circonscrits.

Soit

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dx^3 + ey^4 = 0$$

une équation du quatrième degré dont les racines déterminent les directions des quatre normales issues du point M, et α une racine de cette équation déterminant une des normales. Les directions des trois autres seront données par l'équation

$$\frac{U}{x - \alpha y} + ax^3 + (4b + a\alpha)x^2y + \ldots = 0,$$

et la polaire conique de la première normale, par rapport aux trois autres, par l'équation

$$\alpha[3ax^2 + 2(4b + a\alpha)xy + \ldots] + [(4b + a\alpha)x^2 + \ldots] = 0.$$

Pour obtenir l'équation déterminant les huit droites dont j'ai parlé plus haut, il faut éliminer α entre cette relation et la relation $U(\alpha, 1) = 0$; comme, d'ailleurs, le résultat doit être un covariant de U, nous n'avons besoin que de calculer le terme du degré plus élevé. Nous ferons donc $y = 0$, et il restera à éliminer α entre les équations $a\alpha + b = 0$ et $U(\alpha, 1) = 0$; le résultant, multiplié par x^8, devient

$$x^8(-3b^4 + 6cab^2 - 4da^2b + ea^3) = (ac - 4bd + 3c^2)a^2x^8 - 3(ac - b^2)x^8.$$

Si donc on désigne par H le hessien de U, et par S son invariant quadratique, l'équation qui détermine les huit droites est

$$SU^2 - 3H^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$H + \sqrt{\frac{S}{3}}\,U = 0 \quad \text{et} \quad H - \sqrt{\frac{S}{3}}\,U = 0.$$

Comme je le montrerai plus loin, le faisceau des quatre droites MA, MB, MC et MD est déterminé par l'une de ces équations.

3. Théorème III. — *Si l'on joint le point* M *au centre* O *de la conique, et si, par le même point, on mène des parallèles* MX *et* MY *aux axes de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété suivante :*

La conjuguée harmonique de chacune d'elles, par rapport au faisceau des normales issu du point M, *se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux deux autres droites.*

La vérification de ce théorème se fait très simplement en remarquant que, si l'on rapporte la conique à ses axes, l'équation qui donne les coefficients angulaires de normales issues du point (ξ, η) est

$$b^2\xi^2m^4 - 2b^2\eta\xi m^3 + (b^2\eta^2 + a^2\xi^2 - c^4)m^2 - 2a^2\eta\xi m + a^2\eta^2 = 0.$$

4. Soit, comme précédemment, $U = 0$ l'équation qui détermine les directions des quatre normales issues du point M; pour abréger, je dirai simplement que c'est l'équation de ces normales, et je me servirai d'une expression semblable pour les autres systèmes de droites que j'aurai à considérer. Soit, de plus,

$$u = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

l'équation de deux quelconques des trois droites MO, MX et MY. Le théorème précédent montre qu'un certain invariant des formes u et U doit être nul; pour calculer cet invariant, je supposerai la forme U réduite à sa forme canonique, en posant $\alpha = \gamma = 0$, et les deux droites auront simplement pour équation $xy = 0$; soit, de plus, $x\eta - y\xi = 0$ l'équation de la troisième droite.

Les conjuguées harmoniques de $x = 0$, relativement à $U = 0$ et $y(x\eta - y\xi) = 0$, sont respectivement

$$dx + ey \quad \text{et} \quad x\eta - 2y\xi;$$

d'après le théorème précédent, on a donc

$$2d\xi + e\eta = 0.$$

De même, les conjuguées harmoniques de $y = 0$, relativement à

$U = 0$ et $x(x\eta - y\xi) = 0$, sont respectivement

$$ax + by \quad \text{et} \quad 2x\eta - y\xi;$$

on a donc également

$$a\xi + 2b\eta = 0.$$

Éliminant ξ et η entre les relations précédentes, il vient

$$ac - 4bd = 0.$$

Écrivons maintenant la relation suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &16(\alpha\gamma - \beta^2)^2(ae - 4bd + 3c^2) \\ &\quad - 3(a\gamma^2 + 4c\beta^2 + e\alpha^2 - 4b\beta\gamma + 2c\gamma\alpha - 4d\alpha\beta)^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

où, comme on le voit, le premier membre ne renferme que des invariants de U et de u [1]. D'ailleurs, quand on y fait $\alpha = \gamma = 0$, cette relation se réduit à la relation $ae - 4bd = 0$, que nous venons de trouver. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on désigne respectivement par $u = 0$ et $U = 0$ les équations des quatre normales issues du point M et de deux quelconques des droites OM, OX et OY, les invariants des formes u et U sont reliés par la relation (1).

5. Désignons par $\frac{\xi}{\eta}$ et $\frac{x}{y}$ les paramètres qui fixent les directions de deux quelconques des droites OM, OX et OY; on pourra poser évidemment

$$\frac{\alpha}{y\eta} = \frac{-2\beta}{y\xi + x\eta} = \frac{\gamma}{x\xi},$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtiendra la relation suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi^2(ax^2 + 2bxy + cy^2) + 2\xi\eta(bx^2 + 2cxy + dy^2) \\ &\quad + \eta^2(cx^2 + 2dxy + ey^2) \pm \sqrt{\frac{S}{3}}(x\eta - y\xi)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation déterminera, quand on se donnera la direction $\frac{\xi}{\eta}$ de l'une des trois droites, les directions des deux autres.

---

[1] *Voir* SALMON, *Higher Algebra*, 3e édition, p. 200.

6. Je me proposerai maintenant le problème suivant :

Déterminer les coniques qui coupent orthogonalement quatre droites données passant par un même point M.

Je ferai abstraction des cercles ayant pour centre le point M et qui satisfont évidemment au problème; il y a encore une infinité de solutions, et l'on pourra préciser la question en assujettissant, par exemple, les coniques à passer par un point fixe pris sur l'une des droites.

Je désignerai, comme ci-dessus, par $U = 0$ l'équation des quatre droites données. Cela posé, pour déterminer les droites qui joignent le point M aux centres des coniques qui sont des solutions du problème, il suffira d'exprimer que les racines de l'équation (2) en (ξ, η) correspondent à deux directions rectangulaires.

Soit

$$u = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0$$

l'équation des deux droites isotropes passant par le point M. En posant, pour abréger,

$$(c\alpha - 2b\beta + a\gamma)x^2 + 2(d\alpha - 2c\beta + b\gamma)xy + (e\alpha - 2d\beta + c\gamma)y^2 = w,$$

on obtiendra l'équation suivante :

$$(3)\qquad w \pm \sqrt{\frac{S}{3}}\,u = 0.$$

Le lieu des centres des coniques cherchées se compose donc de quatre droites que l'on peut déterminer par l'extraction de simples racines carrées.

L'une de ces droites étant déterminée, on prendra arbitrairement un de ses points que l'on regardera comme le centre d'une conique normale aux quatre droites données. L'équation (2) déterminera les directions des axes de cette conique, et il sera facile de trouver la longueur de ses axes.

7. Comme je l'ai montré (n° 2), les quatre droites, qui joignent le point M aux centres A, B, C et D des cercles qui sont circonscrits aux triangles que l'on peut former avec les pieds des nor-

males, sont déterminées par quatre des racines de l'équation

$$\left(\mathrm{H}+\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}\right)\left(\mathrm{H}-\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}\right)=0.$$

De ce que je viens de dire plus haut il résulte que, le polynome U étant donné, on peut, en extrayant de simples racines carrées, déterminer toutes les coniques normales aux quatre droites, et par suite déterminer le faisceau MA, MB, MC et MD. Ce faisceau doit par suite, comme je l'avais énoncé, avoir pour équation

$$\mathrm{H}+\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}=0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}-\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}=0;$$

autrement ces deux équations seraient résolubles par l'adjonction de simples racines carrées, ce que l'on sait généralement être impossible.

8. *Étant données quatre droites passant par un même point et déterminées par l'équation $u=0$, il est clair qu'il existe une infinité de systèmes de trois droites jouissant de la propriété que la conjuguée harmonique de chacune d'elles relativement aux deux autres se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux quatre droites données.*

En désignant par $\frac{\xi}{\eta}$ le paramètre d'une droite arbitrairement choisie, les racines de l'équation (2) détermineront deux autres droites, formant avec la première un système jouissant de la propriété énoncée.

Coupons les quatre droites données par une conique K passant par leur point de rencontre et choisie du reste arbitrairement; soient α, β, γ et δ les points où ces droites rencontrent la conique; un quelconque des systèmes de trois droites, jouissant de la propriété énoncée, rencontrera la conique en trois points p, q et r; ces trois points formeront les sommets d'un triangle inscrit dans K, et il est clair que ce triangle sera déterminé dès que l'on connaîtra un de ses sommets. On en conclut immédiatement que tous ces triangles enveloppent une conique K′.

Considérons les quatre tangentes communes que l'on peut mener à K et à K′ et le point où l'une de ces tangentes touche K; si l'on

prend ce point comme sommet d'un triangle inscrit dans K et circonscrit à K′, on voit facilement que deux des sommets de ce dernier triangle seront confondus au point de contact.

Or en faisant, dans l'équation (2), $x=\xi$ et $y=\eta$, on obtient l'équation $u=0$; donc les tangentes menées aux points α, β, γ et δ à la conique K sont tangentes à K′.

Tous les triangles satisfaisant à la question s'obtiendront donc en construisant les deux coniques touchant les tangentes menées en α, β, γ et δ à K, et jouissant de la propriété qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire un triangle inscrit dans K; on sait alors que l'on pourra en inscrire une infinité et tous ces triangles satisferont au problème proposé.

9. De là résulte la détermination suivante des coniques coupant orthogonalement quatre droites données passant par un même point M.

Par M faisons passer un cercle quelconque K rencontrant les droites données aux points α, β, γ et δ et menons en ces points les tangentes au cercle.

Nous pouvons déterminer deux coniques différentes tangentes à ces quatre droites et jouissant de la propriété qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire un triangle inscrit dans K.

Soit K′ l'une de ces coniques; sans qu'il soit besoin de la tracer, on pourra la supposer déterminée, par exemple, par une cinquième tangente. Par le centre du cercle menons une tangente à K′; soient p et q les points où cette tangente coupe le cercle et construisons le troisième sommet r d'un triangle inscrit dans le cercle et circonscrit à K′.

Cela posé, *si par le point r on mène deux droites $r\mathrm{X}$ et $r\mathrm{Y}$ parallèles à $\mathrm{M}p$ et $\mathrm{M}q$, on pourra construire une conique ayant pour axes $r\mathrm{X}$ et $r\mathrm{Y}$ et coupant orthogonalement les quatre droites issues du point* M.

On obtiendra ainsi, par la règle et le compas, les quatre solutions du problème.

NOTE A.

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE CONIQUE, CONNAISSANT SES AXES ET DEUX DROITES QUI LUI SONT NORMALES.

Soient OX et OY les axes de la conique; Ma et Mb les deux droites données; je me propose de déterminer les points α et β où les deux droites sont respectivement normales à la conique cherchée; il sera alors facile de la déterminer complètement.

Soit i le milieu du segment $\alpha\beta$: j'ai démontré que *la droite* Δ *menée par* i *perpendiculairement à* $\alpha\beta$ *passe par les milieux des segments interceptés sur les axes par les deux normales* Ma *et* Mb. Connaissant ces deux normales, on construira facilement la droite Δ et il suffira de déterminer sur cette droite un point i, tel que la perpendiculaire, menée en ce point à Δ, rencontrât les droites Ma et Mb en deux points équidistants du point i.

La construction à laquelle on est ainsi conduit serait souvent défectueuse dans la pratique; la suivante sera peut-être préférable.

La proposition que j'ai rappelée plus haut peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Étant données deux droites normales à une conique aux points α *et* β, *ces deux normales, la droite menée par le point milieu* i *de la corde* $\alpha\beta$ *et perpendiculairement à cette corde, la corde* $\alpha\beta$ *et les deux axes de la conique forment un ensemble de six droites tangentes à une même parabole, dont la directrice est la droite* Oi.

Pour obtenir le point i, il suffira donc, d'après une propriété bien connue, de construire le point de rencontre P des hauteurs du triangle formé par les deux normales données et l'un des axes; le point i sera alors déterminé par le point de rencontre de Δ et de la droite qui joint le point P au centre de la conique.

Le point i étant déterminé, en menant par ce point une perpendiculaire à Δ, on obtiendra les pieds des normales α et β.

Si l'on suppose que les normales Ma et Mb se confondent, on retrouve alors une élégante construction du centre de courbure d'une conique donnée par M. Mannheim.

NOTE B.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NORMALES AUX COURBES ET AUX SURFACES DU SECOND ORDRE.

1. J'ai démontré plus haut la propriété suivante des normales que l'on peut mener d'un point à une conique.

Si l'on joint un point quelconque M *au centre d'une conique et si l'on mène par ce point des parallèles aux axes de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété que la conjuguée harmonique de chacune d'elles, relativement aux deux autres, se confond avec la conjuguée harmonique relativement aux quatre normales que l'on peut mener du point* M *à la conique.*

Cette propriété étant évidemment projective, on en déduit immédiatement la proposition suivante :

Étant donnés un point M *et l'hyperbole équilatère qui passe par les pieds* a, b, a, d *des quatre normales que l'on peut mener du point* M *à une conique, si l'on joint un point quelconque de l'hyperbole aux quatre points* a, b, c *et* d, *on obtient quatre droites normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.*

En particulier, les points a, b, c, d sont sur l'hyperbole, et, si l'on considère trois quelconques de ces points, en vertu d'un théorème bien connu, le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par ces trois points se trouve également sur cette courbe. D'où les conséquences suivantes :

Étant donnés sur une conique quatre points tels que les normales en ces points soient concourantes, si l'on joint un quelconque de ces points aux trois autres, les trois droites ainsi obtenues sont normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.

Les trois hauteurs d'un quelconque des triangles, que l'on peut former avec trois de ces points, sont également normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.

2. Considérons maintenant une surface du second ordre dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, soit

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1; \tag{1}$$

pour déterminer les pieds des normales à cette courbe qui passent par le point (α, β, γ) nous adjoindrons à l'équation (1) les équations

$$\frac{x-\alpha}{\frac{x}{a}}=\frac{y-\beta}{\frac{y}{b}}=\frac{z-\gamma}{\frac{z}{c}},$$

ou, en désignant par ξ une quantité indéterminée,

$$x=\frac{a\alpha}{a-\xi}, \qquad y=\frac{b\beta}{b-\xi}, \qquad z=\frac{c\gamma}{c-\xi};$$

en donnant à ξ toutes les valeurs possibles, les formules précédentes déterminent les divers points d'une cubique gauche K passant par les six pieds des normales, les paramètres de ces points étant d'ailleurs donnés par les racines de l'équation

$$\frac{a\alpha^2}{(\xi-a)^2}+\frac{b\beta^2}{(\xi-b)^2}+\frac{c\gamma^2}{(\xi-c)^2}=1,$$

ou, sous forme entière et en introduisant pour l'homogénéité une quantité η égale à l'unité,

$$\begin{aligned}\mathrm{U}=(\xi-a\eta)^2(\xi-b\eta)^2(\xi-c\eta)^2-a\alpha^2\eta^2(\xi-b\eta)^2(\xi-c\eta)^2\\ -b\beta^2\eta^2(\xi-c\eta)^2(\xi-a\eta)^2-c\gamma^2\eta^2(\xi-a\eta)^2(\xi-b\eta)^2=0.\end{aligned}$$

Le centre de la surface et les trois points à l'infini sur les axes sont également situés sur K et leurs paramètres sont respectivement ∞, a, b et c : ce sont les racines de l'équation

$$\mathrm{W}=\eta(\xi-a\eta)(\xi-b\eta)(\xi-c\eta)=0.$$

Je vais établir maintenant que le conjugué harmonique de l'un quelconque des quatre points déterminés par l'équation $\mathrm{W}=0$, relativement aux trois autres, se confond avec son conjugué harmonique relativement aux six pieds des normales.

Considérons, par exemple, le point A dont le paramètre est a; en posant, pour abréger,

$$\mathrm{V}=\eta(\xi-b\eta)(\xi-c\eta),$$

le conjugué harmonique de A relativement aux points (∞, b, c) sera déterminé par l'équation

$$\xi'\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\xi}\right)+\eta'\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\eta}\right)=0, \tag{2}$$

la lettre ξ ayant été remplacée par la lettre a dans les dérivées partielles.

D'autre part, le conjugué harmonique du point A relativement aux pieds des six normales, sera déterminé par l'équation

$$\xi'\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\xi}\right)+\eta'\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\eta}\right)=0,$$

où, dans les dérivées partielles, on doit également faire $\xi=a$. Il est clair, dans cette hypothèse, que l'on peut supprimer dans U tous les termes qui renferment $(\xi-a\eta)$ au carré et remplacer U par V^2; l'équation précédente devient alors

$$\mathrm{V}\left[\xi'\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\xi}\right)+\eta'\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\eta}\right)\right]=0,$$

et, en la comparant à l'équation (2), on en déduit la proposition que je voulais démontrer.

3. Cette proposition peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Par un point M de l'espace menons des parallèles aux trois axes d'une surface du second ordre, puis joignons ce point au centre de la surface, nous obtiendrons ainsi quatre droites (D) : ces droites et les normales que du point M on peut mener à la surface, seront situées sur un même cône du second ordre.

Cela posé :

La conjuguée harmonique de l'une quelconque des droites (D), *relativement aux trois autres, se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux six normales.*

NOTE C.

SUR UN INVARIANT DE DEUX FORMES CUBIQUES QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE DES NORMALES A UNE CONIQUE.

1. En général, trois droites passant par un même point ne sont pas normales à une conique ayant pour axes deux droites données.

Soit

$$u = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$$

une équation du troisième degré déterminant les directions des axes et de la droite qui joint un point donné M au point d'intersection des axes; soit de plus

$$u' = a'x^3 + 3b'x^2y + 3c'xy^2 + d'y^3 = 0$$

une équation déterminant les directions des trois droites passant par le point M. La condition nécessaire et suffisante pour que ces trois droites soient normales à une conique ayant pour axes les droites données est

$$\begin{aligned}\Delta = 2(ad' - 3bc' + 3cb' - da')^2 + 9[(ad - bc)(a'b' - b'c') \\ - 2(ac - b^2)(b'd' - c'^2) - 2(bd - c^2)(a'c' - b'^2)] = 0.\end{aligned}$$

2. L'invariant Δ des deux formes cubiques u et u', qui, on le remarquera, est un *combinant*, se présente dans plusieurs autres questions de Géométrie.

Soient, sur une conique, deux systèmes de trois points a, b, c et a', b', c', déterminés respectivement par les racines des équations $u = 0$ et $u' = 0$.

1° *Si l'on considère les sommets du triangle formé par les tangentes en a', b', c' à la conique donnée, la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois points et les points a, b, c soient sur une même conique est $\Delta = 0$.*

2° *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse par les trois points a, b, c faire passer une conique, pour laquelle a', b', c' soit un triangle autopolaire, est encore $\Delta = 0$.*

3. Soient, sur une cubique gauche, deux systèmes de trois points a, b, c et a', b', c', déterminés respectivement par les racines de deux équations $u = 0$ et $u' = 0$.

1° *La condition nécessaire et suffisante pour que le plan des trois points a', b', c' rencontre, en trois points en ligne droite, les tangentes menées en a, b et c à la cubique, est $\Delta = 0$.*

2° *Si l'on a la relation $\Delta = 0$, les traces, sur un plan osculateur quelconque, des tangentes menées à la cubique en a, b et c et des côtés du triangle a', b', c', sont situées sur une même conique.*

4. De l'expression de l'invariant Δ se déduit immédiatement la proposition suivante :

Étant données une cubique gauche K *et deux tangentes quelconques à cette cubique, ces droites et la courbe déterminent une surface du second ordre* S; *soit* D *l'intersection des plans osculateurs à* K *aux points de contact des deux tangentes.*

Si, par D, *on mène un plan sécant quelconque* P, *les tangentes à* K, *aux points où cette courbe rencontre le plan, déterminent une surface du second ordre circonscrite à* S *le long d'une conique située dans le plan* P.