ŒUVRES

DE LAGUERRE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
26680 Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES
DE LAGUERRE

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. CH. HERMITE, H. POINCARÉ et E. ROUCHÉ,
MEMBRES DE L'INSTITUT.

TOME II.

GÉOMÉTRIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

GÉOMÉTRIE.

SUR

LA THÉORIE DES FOYERS,

PAR M. E. LAGUERRE-WERLY, DE BAR-LE-DUC,
Élève de l'Institution Barbet.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1852.

1. Soit une conique ayant pour foyer le point $[\alpha, \beta]$, son équation sera de la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=X^2,$$

X étant une fonction linéaire de x et de y, ou bien encore

$$\{(x-\alpha)+\sqrt{-1}(y-\beta)\}\{(x-\alpha)-\sqrt{-1}(y-\beta)\}=X^2.$$

Sous cette dernière forme, on voit que cette conique est tangente aux deux droites

$$(x-\alpha)+\sqrt{-1}(y-\beta)=0$$

et

$$(x-\alpha)-\sqrt{-1}(y-\beta)=0.$$

Réciproquement, si une conique est tangente à ces deux droites, elle a pour foyer le point $[\alpha, \beta]$. Cette propriété analytique peut être employée pour trouver les coordonnées des quatre foyers d'une conique donnée par son équation.

Il suit de là que les coniques confocales doivent être regardées comme tangentes à deux mêmes droites, les coniques bi-confocales comme inscrites dans un même quadrilatère dont les quatre sommets sont les quatre foyers communs. Ces propriétés *projectives* des foyers nous permettront de généraliser leurs propriétés *métriques*.

2. Ainsi, de la théorie des coniques bi-confocales, nous pourrons tirer tous les théorèmes relatifs aux coniques inscrites dans un même quadrilatère.

Considérons, par exemple, trois coniques bi-confocales; par un point extérieur, menons-leur des tangentes : ces trois couples de tangentes auront une bissectrice commune; donc ils formeront un faisceau en involution. En généralisant, nous retrouverons le théorème de Desargues.

3. Deux coniques bi-confocales se coupent orthogonalement. L'homographie généralise ainsi ce théorème :

Si deux coniques inscrites dans un même quadrilatère se coupent, les deux tangentes menées au point d'intersection, et les droites obtenues en joignant ce point à deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit, forment un faisceau harmonique.

4. La considération des foyers imaginaires peut être souvent utile; je ne citerai qu'un exemple.

Considérons une conique et deux tangentes à cette conique; joignons le point d'intersection des deux tangentes aux quatre foyers; les trois couples de droites ainsi obtenues auront une bissectrice commune; donc ils formeront un faisceau en involution.

En généralisant, nous trouverons ce théorème, cas particulier de celui de Desargues :

Si une conique est inscrite dans un quadrilatère, que par un point extérieur on mène deux tangentes à cette conique, et puis, qu'on joigne ce point aux quatre sommets du quadrilatère, on obtiendra un faisceau en involution (1).

(1) Le théorème sur le quadrilatère qu'on lit dans la *Géométrie supérieure*, p. 249, combiné avec celui-ci, donne lieu à un troisième théorème.

5. Je citerai encore quelques théorèmes, conséquences immédiates des principes précédents :

1° Le lieu des centres des coniques tangentes à deux droites données et ayant un foyer fixe est une droite.

2° Une conique inscrite dans un angle étant donnée, le problème suivant : « Construire une conique tangente à la première et aux deux côtés de l'angle en deux points donnés, » est, en général, susceptible de deux solutions. Les deux points de contact cherchés et le sommet de l'angle sont en ligne droite.

3° Considérons trois coniques confocales, et, par un point pris dans le plan de ces coniques, menons six tangentes. Joignons les six points de contact au foyer commun, nous obtiendrons ainsi trois couples de droites ayant une bissectrice commune; donc elles formeront un faisceau en involution.

En généralisant, nous aurons le théorème suivant :

Théorème. — *Si trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites se coupant en* P, *et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes; en joignant les six points de contact au point* P, *on aura un faisceau en involution.*

SUR

LA THÉORIE DES FOYERS,

PAR M. EDMOND LAGUERRE-VERLY,
Élève de l'Institution Barbet.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1853.

I.

1. Considérons trois coniques ayant un même foyer F et, sur une droite arbitraire FZ passant par ce foyer, prenons trois points A, B et C, correspondant respectivement aux trois coniques. Menons par chacun de ces points deux tangentes à la conique correspondante, et joignons les six points de contact au foyer : nous obtiendrons ainsi trois couples de droites ayant pour bissectrice commune la ligne FZ; donc ils formeront un faisceau en involution.

En généralisant par l'homographie cette propriété, nous obtiendrons le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites se coupant en* O, *et que, sur une droite* OZ *passant par ce point, on prenne trois points* A, B, C *correspondant aux trois coniques; si, par chacun de ces points, on mène des tangentes à la conique correspondante, en joignant les six points de contact ainsi obtenus au point* O, *on obtiendra un faisceau en involution.*

Remarque. — Si les trois coniques se réduisent à une seule, on retombe sur la proposition suivante, due à M. Chasles :

Si trois cordes d'une conique se coupent en un même point,

les six points qu'elles interceptent sur la conique sont en involution; c'est-à-dire qu'en joignant ces six points à un point quelconque de la conique, on a un faisceau en involution.

Si les trois points A, B et C se confondent, on obtient le théorème énoncé t. XI, p. 292.

J'indiquerai encore les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME II. — *Si une conique variable est assujettie à rester tangente à deux droites fixes* A *et* B, *le lieu des pôles d'une droite* D *passant par le point de rencontre de* A *et de* B *par rapport à cette conique variable, est une droite* H *passant par ce même point de rencontre. Les quatre droites* D, A, H, B *forment un faisceau harmonique.*

THÉORÈME III. — *Si trois coniques sont inscrites dans un même angle, et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes, les deux tangentes menées à une même conique couperont la polaire du sommet de l'angle, relativement à cette conique, en deux points; et si l'on joint au sommet de l'angle les six points de rencontre ainsi obtenus, on aura un faisceau en involution.*

2. *Coniques biconfocales.* — Une conique ayant deux foyers fixes peut être considérée comme tangente à quatre droites fixes; les théorèmes relatifs aux coniques biconfocales peuvent donc être étendus aux coniques inscrites dans un même quadrilatère. Je citerai quelques exemples de cette transformation.

Soient trois coniques biconfocales; par un point extérieur menons-leur six tangentes. Ces tangentes auront deux à deux la même bissectrice; donc elles formeront un faisceau en involution. En généralisant par homographie, on obtiendra la proposition suivante, corrélative d'un théorème de M. Sturm :

Si trois coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes, ces six tangentes formeront un faisceau en involution.

Le problème suivant : *Construire une conique inscrite dans* *un quadrilatère et passant par un point donné* A, a en général deux solutions.

Si au point A on mène les deux tangentes aux deux coniques satisfaisant à la question, et qu'on joigne ce point à deux sommets opposés du quadrilatère, on obtiendra un faisceau harmonique.

3. Considérons n coniques situées dans un même plan, les $4n$ foyers de ces coniques seront $4n$ sommets de n quadrilatères respectivement circonscrits à ces courbes, et les côtés opposés de ces quadrilatères convergeront tous vers deux mêmes points P et Q situés sur la *droite de l'infini* (¹).

Observation. — Chaque côté renferme un foyer réel et un foyer imaginaire.

Il suit de là que :

Si l'on transforme homographiquement n coniques situées dans un même plan, aux foyers de ces coniques correspondront les sommets de n quadrilatères respectivement circonscrits à ces coniques transformées, et les côtés opposés de ces quadrilatères se couperont en deux mêmes points P *et* Q *situés sur la droite répondant homographiquement à celle de l'infini.*

Inversement, cette remarque peut servir à résoudre ce problème :

Deux points A *et* B *étant pris dans le plan d'une conique, transformer la figure homographiquement, en sorte que les points correspondant à* A *et* B *soient des foyers de la conique transformée.*

On peut remarquer de plus que, si un cercle se trouve dans le plan des coniques données, il se transforme suivant une conique passant par les deux points fixes P et Q.

Comme application de ce principe, considérons trois coniques inscrites dans un même angle; si nous joignons le sommet de cet

(¹) Expression employée par M. Poncelet.

angle aux douze foyers de ces coniques, nous obtiendrons ainsi six couples de droites ayant une bissectrice commune; donc trois quelconques d'entre elles forment un faisceau en involution.

On tire de là le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si trois coniques sont inscrites dans un même angle* A, *et que par deux points extérieurs* P *et* Q *on leur mène des tangentes, les tangentes menées de ces deux points à une même conique formeront un quadrilatère donnant deux couples de sommets opposés, et nous aurons, en considérant les trois coniques, six couples de sommets; en joignant trois quelconques de ces couples au sommet* A *on obtiendra un faisceau en involution.*

II.

Les deux droites représentées par les équations

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}(x-\alpha)=0$$

et

$$(y-\beta)-\sqrt{-1}(x-\alpha)=0,$$

que nous avons considérées dans l'étude des foyers des coniques (t. XI, p. 290), jouissent d'une propriété très remarquable, contenue dans la proposition suivante :

Si un angle constant tourne autour du point (α, β), *ses côtés et les droites représentées par les équations*

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}(x-\alpha)=0,$$
$$(y-\beta)-\sqrt{-1}(x-\alpha)=0,$$

forment dans chaque position de l'angle mobile un faisceau dont le rapport anharmonique est constant. Si l'angle mobile est droit, le faisceau est harmonique.

Les conséquences de ce principe sont nombreuses. Considérons un angle constant tournant autour du foyer d'une conique, les cordes interceptées dans la conique enveloppent deux coniques confocales et doublement tangentes à la première.

On tire de cette proposition le théorème suivant :

Théorème V. — *Si un angle* O *est circonscrit à une conique, et qu'un angle variable tourne autour du point* O *de manière que ses côtés fassent dans chacune de ces positions, avec les côtés de l'angle fixe, un faisceau dont le rapport anharmonique soit constant, les cordes interceptées dans la conique par les côtés de l'angle variable enveloppent deux coniques inscrites dans l'angle* O *doublement tangentes à la première* (Chasles, *Géométrie supérieure*, p. 448).

Je citerai encore les théorèmes suivants :

Théorème VI. — *Si un angle variable tourne autour d'un point fixe* O *pris dans le plan d'une conique, en sorte que ses côtés fassent constamment, avec deux droites passant par ce point, un faisceau harmonique, les cordes interceptées dans la conique par les côtés de l'angle variable enveloppent deux coniques.*

Si le point O est sur la conique, la corde interceptée passe par un point fixe.

Théorème VII. — *Si un angle variable tourne autour d'un point pris sur une conique, en sorte que ses côtés fassent constamment, avec deux droites passant par ce point, un faisceau dont le rapport anharmonique soit constant, la corde interceptée dans la conique par l'angle variable enveloppe une autre conique doublement tangente à la première au point* O (Chasles, *Géométrie supérieure*, p. 450) (¹).

Dans ce qui précède, nous sommes partis d'un théorème particulier pour nous élever au théorème général; mais il arrive souvent que ce dernier est plus simple et plus facile à démontrer; alors on peut en tirer le théorème particulier.

On verra un exemple de cette méthode dans ce qui va suivre.

(¹) Ces théorèmes ont été communiqués à M. Terquem avant la publication de la *Géométrie supérieure*.

III.

Définition. — Soit un point α, β pris dans le plan d'une conique, les droites représentées par

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}(x-\alpha)=0, \qquad (y-\beta)-\sqrt{-1}(x-\alpha)=0$$

couperont la conique en quatre points donnant deux cordes réelles. Quoique les théorèmes suivants s'appliquent aussi aux cordes imaginaires, nous ne considérerons que les premières; pour abréger, je les nommerai les *droites directrices* du point α, β. Soient $X=0$ et $Y=0$ les équations de ces deux droites, l'équation de la conique pourra se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda XY;$$

donc :

Théorème VIII. — *Le carré de la distance d'un point de la conique à un point fixe* α, β *est au produit des distances de ce même point aux deux droites directrices correspondantes, dans un rapport constant.*

Remarque. — Si le point F coïncide avec l'un des foyers de la conique, les deux droites directrices se confondent toutes deux avec la directrice correspondante.

Si la conique est un cercle, une des droites directrices est toujours à l'infini.

Considérons une conique dans un plan, et soient A, A′, B, B′ quatre points pris arbitrairement sur cette conique; menons la droite AA′ et joignons un point quelconque de la conique aux quatre points A, A′, B, B′; nous obtiendrons ainsi quatre droites coupant la corde AA′ aux quatre points A, A′, b, b', et si nous joignons ces quatre points à un point fixe O pris dans le plan, les quatre droites AO, A′O, bO, b'O forment un faisceau dont le rapport anharmonique sera constant.

Maintenant, si nous transformons homographiquement cette figure, en sorte que les deux droites OA et OA′ se projettent suivant les droites dont les équations sont

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}(x-\alpha)=0, \qquad (y-\beta)-\sqrt{-1}(x-\alpha)=0,$$

α et β étant les coordonnés du point correspondant au point O, on obtiendra le théorème suivant :

Théorème IX. — *Soient* F *un point fixe pris dans le plan d'une conique,* A *et* A′ *deux points pris sur cette conique; un angle dont les côtés passent constamment par les points* A *et* A′, *et dont le sommet se meut sur la conique, intercepte sur une des droites directrices correspondant au point* F *un segment vu de ce point sous un angle constant.*

Remarque. — Ce théorème a encore lieu quand le point F coïncide avec l'un des foyers de la conique; je ferai remarquer que, dans ce cas, l'angle constant est la moitié de l'angle AFA′.

Si les points A, A′ et le pôle de la droite directrice que l'on considère sont en ligne droite, l'angle constant est droit.

Parmi les applications que l'on peut faire du théorème précédent, je citerai la suivante :

Trois segments étant donnés sur une droite, déterminer le point du plan d'où ces trois segments sont vus sous le même angle.

Ce problème peut se résoudre au moyen de la règle et du compas.

4. Problème. — *Un système d'angles* A, B, C, ..., *situés dans un plan, étant liés par une équation quelconque* $F(A, B, C, \ldots) = 0$, *trouver la relation qui lie les angles correspondants* A′, B′, C′, ..., *quand on transforme la figure homographiquement.*

Solution. — Soient P, Q les deux points correspondant, sur la seconde figure, aux deux points qui, dans la première figure, sont situés respectivement sur la droite de l'infini et sur les deux droites $y = xi$, $y = -xi$.

Les deux côtés de l'angle A′ dans la seconde figure et les droites A′P, A′Q formeront un faisceau dont nous désignerons le rapport anharmonique par a; désignons de même par b, c, d, ... les

rapports correspondant aux autres angles, la relation cherchée est

$$F\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log b}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log c}{2\sqrt{-1}}, \ldots\right) = 0, \tag{1}$$

la caractéristique log désignant des logarithmes népériens.

N. B. — M. Chasles, dans sa *Géométrie supérieure*, p. 446, § 623, ne donne la solution de ce problème que quand les angles A, B, C, ... ont même sommet ou quand ils sont égaux.

On pourrait se proposer la même question pour un système d'angles situés d'une manière quelconque dans l'espace; mais la question est alors plus complexe et demande quelques développements que nous ne pouvons donner ici.

Remarque. — Il suit de là que toute relation entre des angles est projective; pour ne donner qu'un exemple, nous prendrons ce théorème élémentaire :

La somme des angles d'un polygone plan est un multiple de deux droits.

Si on le transforme homographiquement au moyen du problème précédent, on trouvera le théorème de Carnot relatif aux segments qu'une transversale intercepte sur les côtés d'un polygone.

Je ne m'arrêterai pas sur les conséquences que l'on en peut tirer pour les polygones inscrits ou circonscrits aux coniques, et notamment aux théorèmes que M. Poncelet a donnés à ce sujet dans ses *Propriétés projectives*.

Nous donnerons prochainement les démonstrations de ces diverses propositions et du théorème suivant :

5. Théorème X. (Nous appelons ici *foyers d'une surface de révolution du second ordre* les deux foyers communs à toutes les sections faites suivant l'axe.) — *Le lieu des foyers des surfaces de révolution circonscrites à une surface du second ordre est un système de trois coniques situées dans les trois plans principaux de la surface* (1).

(1) Ce sont les courbes *polaires* de M. Chasles.

On déduit comme corollaire le théorème de M. Steiner sur les sommets des cônes de révolution circonscrits à un ellipsoïde.

6. Théorème XI. — *Soit un cône circonscrit à une surface du second ordre; tout plan cyclique du cône coupera la surface suivant une conique dont le sommet du cône sera un foyer.*

Nous joignons ici un exemple pour éclaircir la formule (1) (p. 13).

7. Soient un cercle et deux points A et B pris arbitrairement sur ce cercle, M un point quelconque de la circonférence, et O son centre; on aura

$$2.\widehat{AMB} = \widehat{AOB}.$$

Si nous transformons la figure homographiquement, le cercle se projettera suivant une conique, le point O se projette en O′, et, comme il est facile de le voir, les points P et Q seront les points de contact des tangentes menées à cette conique par le point O′; A et B se projetteront en A′ et B′. Cela posé, joignons les points A′ et B′ au point O′, et appelons a le rapport anharmonique du faisceau O′P, O′A′, O′B′, O′Q (en regardant les droites OP et OQ comme conjuguées).

Joignons les quatre points A′, B′, P, Q à un point quelconque M de la conique, et appelons b le rapport anharmonique du faisceau MA′, MP, MB′, MQ (en regardant les droites MP et MQ comme conjuguées); d'après la formule (1), nous devons avoir

$$2\left(\frac{\log b}{2\sqrt{-1}}\right) = \frac{\log a}{2\sqrt{-1}},$$

ou

$$2\log b = \log a,$$

et en passant des logarithmes aux nombres

$$b^2 = a,$$

d'où le théorème suivant :

Si quatre points conjugués deux à deux sont sur une

conique, le rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces points sont vus du pôle de la droite qui joint deux points conjugués est égal au carré du rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces quatre points sont vus d'un point quelconque de la conique.

SUR LES FOYERS,

Par MM. LAGUERRE-VERLY et Joseph SACCHI, de Pavie.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1853.

Si le coefficient angulaire d'une tangente menée par un point à une conique rapportée à des axes se coupant sous l'angle γ est égal à $\cos\gamma \pm \sin\gamma.\sqrt{-1}$, ce point est un foyer.

Cette propriété analytique des foyers, généralisation de celle qui a été indiquée par Plücker, offre un moyen très simple pour déterminer les coordonnées des foyers dans le cas le plus général.

Soient α et β les coordonnées d'un foyer de la conique rapportée à deux axes formant l'angle γ, et posons

$$\begin{array}{ll} m = B^2 - 4AC, & l = D^2 - 4AF, \\ l' = E^2 - 4CF, & k = 2AE - BD, \\ k' = 2CD - BE, & n = DE - 2BF, \\ P = m\beta^2 - 2k'\beta + l', & Q = m\alpha^2 - 2k\alpha + l, \\ R = m\alpha\beta - k'\alpha - k\beta - n; & \end{array}$$

l'équation de la tangente à la conique, en nommant p le coefficient angulaire, est

$$my = mpx - pk + k' \pm \sqrt{p^2(k^2 - ml) - 2p(kk' + mn) + k'^2 - ml'},$$

qui doit être satisfaite par

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad p = \cos\gamma \pm \sin\gamma\sqrt{-1};$$

mettant ces valeurs de x et de y, et résolvant l'équation par rapport à p, on a

$$p = \frac{R}{Q} \pm \sqrt{\frac{PQ - R^2}{Q^2}}\sqrt{-1},$$

donc

$$\cos\gamma = \frac{R}{Q}, \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{(PQ - R^2)}}{Q};$$

ainsi

$$Q\cos\gamma - R = 0, \quad Q - P = 0,$$

équations qui déterminent les valeurs de α, β, coordonnées des foyers.

Prenant pour axes les diamètres conjugués égaux, l'équation $Q - P = 0$ représente le système des deux axes principaux.

Note. — Soit $y + ex = 0$ l'équation d'une tangente passant par l'origine on a

$$l' - 2en + le^2 = 0 \quad \text{(t. II, p. 108).}$$

Si l'origine est un foyer

$$l = l', \quad n = l\cos\gamma;$$

d'où l'on tire

$$e = \cos\gamma \pm i\sin\gamma.$$

SUR

LES COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1865.

I. On appelle en général *foyer d'une courbe plane* un point tel que deux des tangentes menées de ce point à la courbe rencontrent la droite de l'infini aux deux points I et J communs à tous les cercles tracés dans le plan (¹).

Soit une courbe plane réelle de degré n et de classe μ, et supposons d'abord qu'elle ne passe pas par les points I et J dont je viens de parler.

Par le point I on pourra mener μ tangentes à la courbe; par le point J passera également un faisceau de μ tangentes. Les intersections de ces deux faisceaux fourniront les μ^2 foyers de la courbe; μ d'entre eux seront réels et suffiront pour déterminer tous les autres. Nous nommerons ces points *foyers ordinaires*, ou simplement *foyers* lorsqu'il n'y aura lieu de craindre aucune ambiguïté.

Si la courbe donnée passe par les points I et J, soit i le nombre

(¹) Il serait nécessaire, vu l'importance de ces points et leur fréquent usage en Géométrie, de leur assigner un nom spécial. On pourrait les appeler *ombilics du plan;* ils jouent en effet, par rapport aux courbes tracées dans le plan, le même rôle que les ombilics situés à l'infini sur un ellipsoïde par rapport aux courbes tracées sur cette surface.

Toutes les sphères ont en commun une courbe plane du second ordre située à l'infini. On pourrait l'appeler *courbe ombilicale* ou simplement *ombilicale*. Il est clair que les ombilics d'un plan quelconque sont les points d'intersection de ce plan avec l'ombilicale.

des branches de la courbe qui passent par chacun de ces deux points. Les faisceaux de tangentes menées à la courbe par les points I et J formeront deux groupes bien distincts. Le premier groupe, composé des tangentes qui touchent la courbe en un point autre que les ombilics, fournira $(\mu - 2i)$ foyers réels ordinaires, entièrement analogues à ceux dont nous avons parlé ci-dessus. L'autre groupe, formé des tangentes ayant leur point de contact en un des points I et J sur la droite de l'infini, fournira i foyers réels que l'on doit considérer comme doubles et que nous appellerons *foyers singuliers*.

Les foyers ordinaires et les foyers singuliers jouent le plus souvent un rôle très différent dans la Géométrie des courbes planes. Les courbes du quatrième ordre, ayant pour points doubles à l'infini les points I et J et étudiées par M. Moutard sous le nom d'*anallagmatiques du quatrième ordre,* nous offrent un exemple simple de ces deux espèces de foyers et de leur rôle divers. On sait que ces courbes peuvent être considérées de quatre manières différentes comme l'enveloppe de cercles coupant orthogonalement un cercle directeur fixe et ayant leurs centres sur une conique. Une anallagmatique a deux foyers singuliers réels, qui sont les deux foyers réels communs aux quatre coniques qui peuvent servir à la description de la courbe, et seize foyers ordinaires, dont quatre réels, situés respectivement quatre par quatre sur les quatre cercles directeurs correspondant aux quatre coniques homofocales déjà mentionnées.

Dans tout ce qui suit nous supposerons essentiellement que les courbes considérées ne passent pas par les points I et J, et par conséquent qu'elles n'ont pas de foyers singuliers.

De nos théorèmes généraux il sera d'ailleurs facile, dans chaque cas, de déduire les théorèmes particuliers qui doivent leur être substitués lorsque la courbe a des foyers singuliers.

Pour éviter des répétitions inutiles, dans tous les théorèmes énoncés ci-dessous nous conviendrons de désigner constamment par n et par μ le degré et la classe des courbes considérées.

II. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe plane algébrique, et soit M un point de son plan dont les coordonnées soient ξ et η; la valeur de la fonction $f(x, y)$, quand on y substitue les coordonnées ξ et η du point M, savoir $f(\xi, \eta)$, ne dépend que de la position du point M par rapport à la courbe. Elle est nulle pour tous les points de la courbe, qui dans son plan sépare les régions où cette fonction a une valeur positive des régions où elle a une valeur négative. Dans les théorèmes qui suivent, nous ne considérerons que sa valeur absolue. Nous l'appellerons la *puissance* du point M relativement à la courbe, en nous servant d'une dénomination déjà employée par Steiner pour le cercle.

La puissance d'un point n'est jusqu'à présent définie qu'à une constante arbitraire près; nous achèverons de la déterminer au moyen du premier des théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe plane, on mène un cercle quelconque, le produit des distances de ce point aux* $2n$ *points d'intersection de ce cercle et de la courbe est égal à la puissance du point* M *par rapport à la courbe, multipliée par la* $n^{ième}$ *puissance du rayon.*

On peut supposer, dans ce théorème, que le cercle se réduise à une droite quelconque passant par le point M et à la droite de l'infini; on obtient ainsi un théorème connu dont on déduit facilement les théorèmes de Newton et de Carnot. Nous n'insisterons pas sur ces faciles déductions, non plus que sur le cas où le point M se trouve sur la courbe elle-même.

Théorème II. — *Si un cercle est tracé dans le plan d'une courbe plane, la demi-somme des angles que font avec une direction fixe arbitraire les* $2n$ *rayons du cercle aboutissant aux points d'intersection, est égale, à un multiple près de* π, *à la somme des angles que font les* n *asymptotes avec cette même direction.*

Relativement aux coniques, le théorème précédent se réduit à cette propriété bien connue : quand un cercle coupe une conique, les bissectrices des angles formés par les cordes communes sont parallèles aux axes.

Théorème III. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les* $\mu + n$ *droites qui la coupent sous un angle donné* V, *le produit de toutes les longueurs comprises entre le point* M *et les pieds de ces droites est égal au produit des*

distances du point M *aux* μ *foyers réels de la courbe, multiplié par la puissance du point* M, *le tout divisé par* $(2 \sin V)^n$.

Le produit considéré devient évidemment *minimum*, quand les droites sont normales à la courbe; en d'autres termes, quand $\sin V = 1$.

On a dans ce cas le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les* $(\mu + n)$ *normales à la courbe, le produit des longueurs comprises entre le point* M *et les pieds des normales est égal au produit des distances du point* M *aux* μ *foyers réels, multiplié par la puissance du point* M, *le tout divisé par* 2^n.

Lorsque dans le théorème III on suppose $V = 0$, on obtient pour le produit des $(\mu + n)$ longueurs une valeur infinie; ce qui doit être, car le groupe des droites passant par le point M et rencontrant la courbe sous un angle nul comprend, outre les μ tangentes passant par ce point, les n parallèles aux asymptotes. Le produit des tangentes est donné par le théorème suivant :

Théorème V. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les tangentes à cette courbe, le produit des longueurs comprises sur les tangentes entre le point* M *et les points de contact est égal au produit des distances du point* M *aux* μ *foyers réels, multiplié par la puissance du point* M, *le tout divisé par* 2^n *et par le produit des distances de ce point aux asymptotes de la courbe.*

Des théorèmes IV et V on déduit la proposition suivante :

Théorème VI. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les tangentes et les normales à cette courbe, le produit des longueurs comprises sur les tangentes entre le point* M *et les points de contact, multiplié par le produit des distances de ce point aux asymptotes, est égal au produit des longueurs comprises entre le point* M *et les pieds des normales.*

Théorème VII. — *Par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe plane, menons les* $\mu + n$ *droites qui la coupent sous un angle donné* V. *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+\mu}$ *les angles que font ces* *droites avec un axe fixe arbitraire; soient $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ les angles que font avec le même axe les droites joignant le point* M *aux μ foyers réels, et $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ les angles de cet axe avec les asymptotes de la courbe. Tous ces angles sont reliés entre eux par la relation suivante, qui doit être vérifiée à un multiple près de π,*

$$\sum \lambda - \sum \zeta = \sum f + n\mathrm{V}.$$

Remarque. — Le second membre de l'équation précédente ne dépendant que de l'angle V et de la position relative du point M et des foyers de la courbe, la propriété exprimée par cette équation constitue une propriété générale des courbes de même classe ayant les mêmes foyers.

Si, dans le théorème précédent, on suppose $\mathrm{V} = 0$, les angles des asymptotes avec l'axe fixe disparaissent d'eux-mêmes de la relation donnée ci-dessus, et l'on obtient le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les tangentes à cette courbe, la somme des angles que font ces tangentes avec une direction fixe arbitraire est égale à la somme des angles que font avec cette même direction les droites joignant le point* M *aux foyers réels de la courbe.*

Remarque. — Relativement aux coniques, cette proposition donne ce théorème bien connu de M. Poncelet : Les tangentes menées d'un point à une conique sont également inclinées sur les droites joignant ce point aux foyers.

La considération des courbes tracées sur la sphère conduit à des théorèmes généraux analogues aux théorèmes énoncés dans cette Note relativement aux courbes planes. Nous nous contenterons ici de cette mention, sans entrer dans de plus longs détails à ce sujet.

Lorsqu'une courbe est tangente à la droite de l'infini, elle admet pour foyers les divers points où elle la touche; dans l'application des théorèmes énoncés ci-dessus, il est nécessaire de tenir compte de ces foyers situés à l'infini.

SUR LA DÉTERMINATION

DU

RAYON DE COURBURE DES LIGNES PLANES.

Bulletin de la Société philomathique; 1867.

Si, en un point M d'une courbe, on imagine construite la parabole surosculatrice de la courbe, la position du foyer F de cette parabole donnera d'une façon très nette, non seulement la valeur du rayon de courbure au point considéré, mais encore la variation que cette valeur éprouve en passant à un point infiniment voisin, en un mot la déviation de la courbure.

Cette déviation est mesurée, comme on le sait, par la tangente de l'angle que fait la normale au point M avec la droite joignant ce point au foyer F; quant au rayon de courbure, sa valeur est double de la longueur de la projection sur la normale du segment de droite MF.

Le but de cette Note est d'exposer brièvement quelques propriétés générales des courbes algébriques, qui permettent dans beaucoup de cas de déterminer géométriquement en un point d'une courbe la position du foyer de la parabole surosculatrice. La méthode qui en découle me paraît, par son principe, différer entièrement de celles qui ont été employées jusqu'ici; et l'on peut l'appliquer du reste, complètement, à toutes les courbes de troisième et de quatrième classe.

Le théorème fondamental sur lequel je m'appuierai dans la recherche actuelle est l'un de ceux que j'ai donnés très succinctement dans les *Comptes rendus* (janvier 1865).

Avant de l'énoncer, j'expliquerai quelques expressions nouvelles dont je vais me servir, et qui, dans beaucoup de recherches géométriques, sont utiles par leur précision et leur brièveté.

Imaginons dans un plan deux systèmes de n droites A et B, et prenons arbitrairement un axe fixe H dans ce plan ; si la somme des angles que font avec l'axe fixe des droites du système A est égale à un multiple de π près à la somme des angles que font avec ce même axe les droites du système B, je dirai que les deux systèmes A et B ont *même orientation*. Ils jouiront alors de la propriété énoncée ci-dessus relativement à tout autre axe situé dans le plan.

Soient P un point situé dans un plan et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n autres points de ce plan ; menons les droites $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$ et sur chacune de ces droites portons une longeur égale à l'inverse du segment correspondant. — Considérons ces longueurs comme représentant des forces ; composons-les, et sur la direction de leur résultante portons, à partir du point P, une longueur égale à l'inverse de la $n^{\text{ième}}$ partie de cette résultante. L'extrémité a du segment ainsi déterminé *sera dite le centre harmonique des points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *relativement au point* P, et la longueur Pa sera la *moyenne harmonique* entre les longueurs $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$.

En adoptant pour un moment les notations de M. de Saint-Venant, qui représente simplement la composition des longueurs par le signe de l'addition, on voit que le mode de définition donné plus haut du centre harmonique revient à l'équation suivante :

$$\frac{n}{Pa} = \frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \cdots + \frac{1}{PA_n}.$$

La désignation nouvelle que je propose ici renferme, on le voit, comme cas particulier, celle qui a été employée par Maclaurin et qui est consacrée par l'usage ; elle ne peut donc donner lieu à aucune espèce de confusion et en somme n'introduit aucun terme nouveau dans le langage géométrique.

Je ferai à ce sujet les remarques suivantes, dont l'application se présente fréquemment :

1° Si le point P est à l'infini, le centre harmonique d'un système de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se confond avec leur centre de gravité.

2° Si l'on considère seulement 2 points A_1 et A_2, leur centre harmonique a se trouvera sur la circonférence passant par les points A_1, A_2 et P et les quatre points P, a, A_1, A_2 diviseront harmoniquement la circonférence.

J'énoncerai de la façon suivante le théorème qui me sert de point de départ :

Théorème I. — *Si par un point* P *situé dans le plan d'une courbe plane réelle de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on joint ce point aux n foyers réels de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation.* (Théorème VII des *Comptes rendus*.)

On déduit immédiatement de là le théorème suivant :

Théorème II. — *Si, par un point* P, *pris dans le plan d'une courbe plane réelle de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, le centre harmonique des n points de contact relativement au point* P *est le même que le centre harmonique des n foyers réels.*

En particulier, si l'on suppose le point P à l'infini, on obtient un système de tangentes parallèles ; le centre de gravité des points de contact est le même que celui des foyers ; il est donc fixe : théorème bien connu que l'on doit à M. Chasles.

En appliquant le théorème II à un point infiniment voisin de la courbe, on en déduit la proposition suivante relative à la détermination du foyer de la parabole surosculatrice :

Théorème III. — *Par un point* M *d'une courbe plane de classe n, menons à la courbe les* $(n-2)$ *tangentes différentes de celle qui a son point de contact en ce point ; sur la direction de chaque tangente, et du côté opposé à celui où se trouve le point de contact, portons une longueur égale à l'inverse du segment compris entre le point* M *et ce point de contact ; joignons le point* M *aux n foyers, et sur chacune de ces droites portons, du côté où se trouve le foyer correspondant, une longueur égale à l'inverse de la distance du point* M *à ce foyer.*

Si nous composons toutes ces longueurs entre elles en les considérant comme des forces, et si, sur la direction de la résultante, nous portons à partir du point M *une longueur égale à l'inverse de cette résultante, l'extrémité de la droite ainsi obtenue sera le foyer de la parabole surosculatrice au point* M.

Remarque. — Si un des foyers de la courbe se trouve à l'infini, il est clair que, dans le théorème précédent, il n'y a pas à en tenir compte.

Si tous les foyers étaient à l'infini, la position seule des tangentes interviendrait dans l'application du théorème. Ce cas se présente parfois; ainsi, lorsque les extrémités d'un segment de droite de longueur donnée sont assujetties à se mouvoir, chacune sur une courbe algébrique donnée, l'enveloppe de cette droite est une courbe de l'espèce indiquée; et ce caractère seul, d'avoir tous ses foyers à l'infini, suffit pour établir relativement à cette courbe un grand nombre de propriétés dignes de remarque.

Une courbe de ce genre est l'épicycloïde à trois points de rebroussement; c'est une courbe de troisième classe ayant tous ses foyers à l'infini.

Le théorème précédent appliqué à cette courbe fournit la propriété suivante :

Par un point M d'une telle épicycloïde, menons la tangente à la courbe qui n'a pas son point de contact au point M lui-même et soit t le point de contact de cette tangente; si nous prolongeons tM d'une longueur égale à elle-même, l'extrémité de la longueur ainsi obtenue sera le foyer de la parabole surosculatrice de l'épicycloïde au point M.

SUR LES COURBES

RÉSULTANT

DE L'INTERSECTION D'UNE SPHÈRE AVEC UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ.

Bulletin de la Société philomathique; 1867.

1. On sait, depuis les travaux de M. Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite de l'infini. Je désignerai par I et J ces deux points remarquables, que, dans une Note publiée dans les *Comptes rendus* (janvier 1865), j'ai proposé de nommer *ombilics du plan*. J'appelle *droite isotrope* toute droite du même plan qui passe par l'un des points I et J; l'ensemble de ces droites forme deux systèmes bien distincts, l'un composé de droites parallèles entre elles et passant par le point I, l'autre de droites également parallèles et passant par le point J.

Par tout point d'un plan passent deux droites isotropes de systèmes différents, dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Dans un plan réel, toute droite isotrope renferme un point réel, et n'en renferme évidemment qu'un; c'est le point où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée.

De la considération des droites isotropes découlent, pour les courbes algébriques, deux notions fondamentales : la première est celle des foyers que, d'après Plücker, je définirai comme les points de concours des diverses droites isotropes que l'on peut mener tangentiellement à la courbe; relativement à ces foyers, il y a lieu de faire une distinction importante entre les foyers ordinaires et les foyers singuliers (voir *Comptes rendus*, 1865); la deuxième est celle des droites *conjointes* relativement à un point.

Si par un point M, pris dans le plan d'une courbe, on mène les deux droites isotropes qui se coupent en ce point, les $2n$ points d'intersection de la courbe et des droites seront situés, deux à deux, sur n droites réelles; je nommerai ces droites les conjointes du point M relatives à la courbe, en me servant d'une expression déjà employée, à peu près dans le même sens, par M. Chasles dans la théorie des coniques. Si l'on prend la polaire réciproque de la courbe par rapport à un cercle décrit du point M comme centre, les n foyers de la transformée seront les pôles des conjointes du point M.

2. Toutes les sphères décrites dans l'espace ont en commun une conique imaginaire située sur le plan de l'infini (Poncelet), et que l'on peut appeler *ombilicale*. Les ombilics d'un plan quelconque sont les points où ce plan coupe l'ombilicale. — Toutes les droites isotropes passant par un point de l'espace formeront un cône s'appuyant sur l'ombilicale, et que je nommerai *cône isotrope*. Par une droite, on peut mener deux plans tangents à l'ombilicale; je désignerai de tels plans sous le nom de *plans isotropes;* pour un plan isotrope, les deux ombilics, qui sont généralement distincts, se confondent entre eux.

La surface développable circonscrite à une surface quelconque et à l'ombilicale sera dite *développable isotrope* de cette surface; les lignes doubles seront les focales de la surface; il y a lieu d'ailleurs de distinguer les focales singulières et les focales ordinaires.

3. Toutes les génératrices rectilignes d'une sphère sont des droites isotropes; le plan tangent, en un point P de cette sphère, la coupe suivant les deux droites isotropes de ce plan tangent qui passent au point P. Sur une sphère donnée, imaginons deux génératrices i et j de systèmes différents et se coupant en un point réel P de cette sphère; les autres génératrices isotropes de la surface se partageront en deux groupes : l'un, I, formé des génératrices de même système que i et rencontrant toutes la droite j; l'autre, J, formé des génératrices de même système que j et rencontrant toutes la droite i.

Si l'on fait une projection stéréographique sur un plan parallèle au plan tangent en P, les génératrices de la sphère du système I

se projetteront suivant un système de droites isotropes parallèles à j, et celles du système J, suivant un système de droites isotropes parallèles à i. — Cette propriété est fondamentale dans la théorie de la projection stéréographique.

4. Soit tracée sur une sphère une courbe algébrique que, pour plus de simplicité, je supposerai réelle. — Imaginons les tangentes à la courbe qui sont des droites isotropes du système I, et soit n le nombre de ces tangentes; il y aura également n droites isotropes du système J, qui seront tangentes à la courbe, et l'ensemble de ces $2n$ droites formera un réseau dont les n^2 points de rencontre seront les foyers de la courbe; on peut prendre de différentes façons n de ces points, de sorte que deux quelconques d'entre eux ne se trouvent pas sur une même droite isotrope; ces n points formeront alors un système indépendant. — Parmi les n^2 foyers, il y a toujours n foyers réels, et il n'y en a que n; ils forment un système indépendant, et par conséquent permettent de déterminer tous les autres. — Si l'on joint par une droite deux foyers réels quelconques, la polaire de cette droite coupera la sphère en deux points imaginaires, qui seront des foyers de la courbe; réciproquement la polaire de la droite réelle, qui passe par deux foyers imaginaires conjugués, coupe la sphère en deux foyers réels.

A proprement parler, les courbes sphériques n'ont pas de foyers singuliers, c'est-à-dire de tangentes isotropes dont le point de contact soit sur l'ombilicale. Nous donnerons cependant ce nom aux points dont voici la définition : prenons deux points imaginairement conjugués de l'intersection de la courbe avec l'ombilicale, les génératrices isotropes passeront par ces points, se couperont en deux points réels diamétralement opposés. Nous nommerons ces points *foyers singuliers*. Ils jouissent de la propriété suivante, que, si l'on considère un cône ayant pour sommet le centre de la sphère et pour base la courbe, ce cône admet pour focales singulières les droites joignant les couples des foyers singuliers. — Un cercle sur la sphère n'a pas de foyers ordinaires; il n'a que deux foyers singuliers, qui sont ses pôles sphériques [1] :

[1] Pour éviter toute confusion dans la suite, je désignerai constamment les pôles sphériques d'un cercle sous le nom de *foyers;* le centre d'un cercle sera le

En général, l'intersection d'une sphère avec une surface de degré m a $2m$ foyers singuliers et $2m(m-7)$ foyers ordinaires.

Lorsqu'on projette stéréographiquement une courbe, les génératrices isotropes de la sphère se projettent suivant des droites isotropes; il en résulte que les foyers ordinaires de la courbe se projettent suivant les foyers ordinaires de la transformée. Il n'en est pas de même des foyers singuliers; pour les obtenir, on considérera l'une quelconque des surfaces qui, avec la sphère, définissent la courbe, et l'on prendra son intersection avec le plan tangent au pôle de transformation. — Les polaires des conjointes de ce pôle, relativement à l'intersection dont je viens de parler, couperont le plan de projection aux foyers singuliers de la transformée.

5. Je considérerai spécialement dans cette Note les courbes qui résultent de l'intersection d'une sphère par une surface du second degré. Elles ont été déjà l'objet des travaux d'un grand nombre de géomètres, notamment de MM. Quetelet, Dandelin, Chasles. M. Darboux a aussi publié divers Notes très intéressantes à ce sujet (*Nouvelles Annales de Math.* et *Annales de l'École normale*, 1865).

Ces courbes correspondent exactement sur la sphère aux courbes planes remarquables étudiées par M. Moutard, et qu'il a nommées *anallagmatiques du quatrième ordre*. Par analogie, je les désignerai brièvement sous le nom d'*anallagmatiques sphériques*.

Un telle courbe peut être placée sur quatre cônes du second degré (Poncelet). Soit C l'un de ces cônes et T son sommet; si l'on considère les divers plans tangents que l'on peut mener à ce cône, on voit immédiatement que la courbe peut être considérée comme l'enveloppe des cercles suivant lesquels ils coupent la sphère. Mais il importe de définir la suite de ces cercles par des considérations qui soient purement relatives à la sphère. Dans ce but, je remarquerai d'abord que tous les cercles considérés coupent orthogonalement le cercle de la sphère dont le sommet T est le pôle, cercle que je désignerai par S; en second lieu, que les foyers

---

point de son plan qui porte ce nom, et son pôle, le pôle de son plan par rapport à la sphère.

de ces cercles se trouvent sur le cône supplémentaire du cône C, ayant pour centre le centre de la sphère.

En désignant par G la conique sphérique résultant de l'intersection de la sphère par ce cône supplémentaire, on peut donc énoncer le théorème suivant :

L'anallagmatique sphérique peut être considérée comme l'enveloppe de cercles dont les foyers décrivent une conique sphérique, et qui coupe orthogonalement un cercle fixe.

Par l'anallagmatique considérée passent, outre le cône C, trois autres cônes C_1, C_2, C_3. Désignons respectivement par S_1, S_2, S_3 et G_1, G_2, et G_3 les cercles et les coniques sphériques relatives à ces cônes et analogues à S et à G; l'anallagmatique pourra être engendrée, au moyen de l'une quelconque de ces coniques, de la façon définie ci-dessus.

Il y a donc, en tout, quatre modes différents de génération.

Le plan polaire de chacun des sommets passant par les trois autres, il en résulte que chacun des cercles S, S_1, S_2 et S_3 coupe orthogonalement les trois autres; les quatre cônes C, C_1, C_2 et C_3 sont homocycliques, donc les quatre coniques G, G_1, G_2 et G_3 sont homofocales.

6. Projetons stéréographiquement l'anallagmatique sphérique. On voit immédiatement que si l'on désigne par s la projection du cercle S et par k la projection de la conique polaire du cône G relativement à la sphère, conique que j'appellerai K, la courbe résultant de la projection de l'anallagmatique sphérique pourra être considérée comme l'enveloppe d'un cercle mobile coupant orthogonalement le cercle s, tandis que son centre parcourt la conique k. — C'est donc une anallagmatique plane; et, comme l'anallagmatique sphérique, elle admet quatre modes de génération.

Il est important d'établir que les quatre coniques directrices, correspondant aux quatre modes de génération, sont homofocales.

A cet effet, soient O le pôle de transformation et i et j les deux génératrices isotropes passant par ce point. On sait que les droites isotropes du plan N, sur lequel se fait la projection, forment deux systèmes distincts : l'un, que je désignerai par I_0, est formé de droites parallèles à i; l'autre, que je désignerai par J_0, de droites parallèles à j. — Considérons une droite isotrope du système I_0, qui soit tangente à k; les droites I_0 et i sont dans un même plan, qui, contenant la génératrice i, est tangent à la sphère; il est tangent aussi à la conique K. Par suite, il est tangent aux coniques K_1, K_2 et K_3, et son intersection avec le plan N doit être tangente aux coniques k_1, k_2 et k_3. Ce que je viens de dire des droites du système I_0 s'applique aux droites de l'autre système. Les quatre coniques considérées ont donc mêmes tangentes isotropes, et par conséquent sont homofocales.

(Toutes ces propriétés des anallagmatiques planes ont été signalées pour la première fois par M. Moutard en 1861).

On démontrerait d'une façon analogue que la projection stéréographique d'une anallagmatique plane sur une sphère est une anallagmatique sphérique.

7. Au lieu de considérer l'anallagmatique comme résultant de l'intersection de la sphère par le cône C, on peut la considérer comme la courbe de contact de la développable circonscrite à la sphère et à la conique K.

Cette façon de considérer la courbe est peut-être celle qui se prête le mieux à la démonstration géométrique de ses propriétés.

J'indiquerai d'abord rapidement la disposition de ses foyers. Elle a quatre foyers singuliers, qui sont les foyers communs aux quatre coniques G, G_1, G_2 et G_3. Elle a seize foyers ordinaires, qui sont les points d'intersection de chacune des coniques K, K_1, K_2 et K_3, avec celui des cercles S, S_1, S_2 et S_3 qui lui correspond. Quatre de ces foyers sont réels; ils peuvent être tous les quatre sur un des cercles que je viens de mentionner, ou être distribués deux à deux sur deux de ces cercles. De là deux classes principales dans l'ensemble des anallagmatiques.

8. *Propriété géométrique relative à trois foyers quelconques situés sur un même cercle.* — Considérons, par exemple, le cercle S et f, g, h, trois foyers situés sur ce cercle; ces trois points se trouvent également sur la conique K. Soit M un point de la courbe sphérique; le plan Q tangent à la sphère en ce point coupe le plan R de la conique K, suivant une droite μV tangente à cette conique. Or, les trois points f, g et h étant sur la sphère, fM^2, gM^2 et hM^2 sont respectivement proportionnelles aux distances de ces mêmes points au plan Q ou encore à la tangente μV. En appelant x, y et z ces distances, l'équation de la conique en coordonnées tangentielles est de la forme

$$\lambda\sqrt{x} + \mu\sqrt{y} + \rho\sqrt{z} = 0.$$

Si maintenant nous remplaçons x, y et z par les quantités proportionnelles fM, gM et hM, il viendra pour l'équation de l'anallagmatique

$$\lambda fM + \mu gM + \rho hM = 0.$$

La même méthode permet d'établir d'autres relations remarquables; ainsi, si l'on peut inscrire dans le cercle S un quadrilatère circonscrit à la conique K (auquel cas on pourra le faire d'une infinité de façons); en désignant par α, β, γ, δ les sommets consécutifs d'un tel quadrilatère, la courbe sphérique correspondante satisfera à une relation de la forme

$$\frac{m\alpha - m\gamma}{m\beta - m\delta} = \text{const}.$$

Les courbes que l'on peut définir ainsi forment dans l'ensemble des anallagmatiques un groupe très remarquable; mais leurs plus importantes propriétés dépendent de considérations différentes de celles que je viens d'exposer. On pourrait les distinguer sous le nom général de *cassiniennes,* par analogie avec l'ellipse de Cassini, qui peut être considérée comme leur type principal.

9. Étant donnés quatre points f, g, h et k situés sur un même cercle d'une sphère, proposons-nous de faire passer par un point M pris sur cette sphère une anallagmatique ayant les points donnés pour foyers ordinaires.

Soit RV la trace du plan tangent en M sur le plan du cercle; le problème se réduit évidemment à construire dans ce plan une conique tangente RV et passant par les points donnés. Or, les points de contact des deux coniques satisfaisant à la question, points que je désigne par p et q, sont les points doubles d'une involution formée par les points de rencontre de la droite RV avec les différentes coniques que l'on peut faire passer par les points donnés. En particulier, le cercle qui les contient est une de ces coniques; soient α et α' les points où il coupe RV. Les quatre points p, q; α, α' sont en rapport harmonique; il en est de même du faisceau de droites Mp, Mq; Mα, Mα'. Mais les droites Mα, Mα' sont deux droites isotropes; donc l'angle pMq est droit; et comme Mp et Mq sont respectivement les normales aux anallagmatiques qui satisfont au problème et qui correspondent respectivement aux points p et q, il s'ensuit que ces courbes se coupent à angle droit.

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DE

LA GÉOMÉTRIE AU CALCUL INTÉGRAL.

Bulletin de la Société philomathique; 1867.

§ I. — En étudiant les beaux théorèmes découverts par M. Poncelet sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à des coniques, Jacobi a montré, le premier, le lien intime qui unit cette théorie à celle des fonctions elliptiques et fait voir comment, en employant un système de cercles ayant même axe radical, on pouvait effectuer géométriquement l'addition et la multiplication des fonctions elliptiques. En terminant son Mémoire, Jacobi avait fait remarquer que la considération plus générale d'un système de coniques devait conduire à des résultats analogues à ceux qu'il avait rencontrés; je ne pense pas qu'il ait depuis développé cette indication et poussé plus loin cette recherche qui lui paraissait digne d'intérêt.

M. Chasles, dans un Mémoire publié dans les *Comptes rendus* en 1844, a repris cette idée en suivant une voie moins directe que celle de Jacobi et donné une représentation géométrique très élégante de l'addition des fonctions elliptiques au moyen d'un système de coniques homofocales.

Le but de cette Note est de résoudre d'une façon complète et générale la question posée par Jacobi.

§ II. — Pour abréger, je désignerai, dans ce qui suit, par puissance d'un point relativement à une courbe la valeur que prend le premier membre de l'équation de cette courbe $f(x, y) = 0$, lorsque l'on substitue aux variables les valeurs des coordonnées de ce point. La puissance d'un point est une fonction qui ne dépend évidemment que de la forme de la courbe et de la position relative du point; la définition précédente ne la définit qu'à un facteur constant près.

§ III. — Considérons, dans un même plan, deux coniques fixes A et B. Menons à la conique A une tangente quelconque T, et soient m et μ les deux points où cette tangente coupe la conique B. Si la droite T se déplace en restant tangente à A, pour un déplacement infiniment petit, elle tournera autour de son point de contact t; soient m' et μ' les points où, dans sa nouvelle position, elle coupe la conique B. Appelons V le point de rencontre des droites mm' et $\mu\mu'$, la théorie des transversales fournit immédiatement la relation suivante où, pour abréger, j'ai écrit ds et $d\sigma$ au lieu de mm' et $\mu\mu'$,

$$\frac{ds}{mt.mV} = \frac{d\sigma}{\mu t.\mu V}.$$

D'après un théorème connu, les tangentes mV et μV sont proportionnelles aux racines cubiques des rayons de courbure r et ρ de la courbe aux points m et μ; d'après le théorème de Newton sur les transversales, les segments mt et μt sont proportionnels aux racines carrées des puissances des points m et μ relativement à la conique A; en désignant ces puissances par $\pi(m)$ et $\pi(\mu)$, on peut donc écrire la relation suivante,

$$(1) \qquad \frac{ds}{\sqrt[3]{r}\sqrt{\pi(m)}} = \frac{d\sigma}{\sqrt[3]{\rho}\sqrt{\pi(\mu)}}.$$

§ IV. — Dans cette équation différentielle, les variables sont séparées; si nous exprimons que la droite $m\mu$ est tangente à A, nous aurons une intégrale particulière de cette équation. Mais, lorsque l'on a un faisceau de coniques ayant quatre points communs, le rapport des puissances de deux points quelconques situés sur l'une de ces courbes par rapport à une autre courbe quelconque du faisceau est constant, quelle que soit cette dernière courbe. Donc on peut, au lieu de la conique A, considérer une quelconque des coniques qui passent par les quatre points d'intersection de A et de B; et si l'on exprime que la droite $m\mu$

est tangente à cette conique, on obtiendra l'intégrale générale de l'équation (1).

§ V. — Cette intégrale générale peut être représentée par un faisceau de coniques ayant quatre points communs; ou, si l'on préfère se représenter le déplacement de la droite $m\mu$ par celui de son pôle, par un faisceau de coniques inscrites dans un même quadrilatère. Les deux cas particuliers les plus remarquables sont fournis, d'un côté, par un système de cercles ayant même axe radical et, de l'autre, par un système de coniques homofocales. Dans le cas où la conique B est une ellipse, on peut simplifier l'équation (1); soient, en effet,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de cette ellipse rapportée à ses axes et $f(x, y) = 0$ l'équation de la conique A rapportée à ces mêmes axes.

En posant $x = a\cos\lambda$ et $y = b\sin\lambda$, et en désignant par L et λ les valeurs de l'amplitude aux points m et μ, la relation (1) deviendra

$$\frac{dL}{\sqrt{f(a\cos L,\ b\sin L)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{f(a\cos\lambda,\ b\sin\lambda)}}.$$

§ VI. — Examinons en particulier le cas où la conique B se réduit à un cercle. En désignant par a, b, c, d les points d'intersection de ce cercle avec la conique A, l'on a

$$\frac{\pi(m)}{\pi(\mu)} = \frac{ma.mb.mc.md}{\mu a.\mu b.\mu c.\mu d}$$

et l'équation différentielle (1) devient

$$(2) \qquad \frac{ds}{\sqrt{ma.mb.mc.md}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{\mu a.\mu b.\mu c.\mu d}}.$$

La forme qui résulte de cette équation, pour la différentielle de l'intégrale elliptique de première espèce la plus générale, est celle qui se prête le mieux aux considérations de la Géométrie pure. Je reviendrai du reste plus tard sur ce point en traitant de la théorie géométrique de la transformation des intégrales elliptiques.

§ VII. — L'équation (2) peut se mettre immédiatement sous la forme de l'équation différentielle d'Euler; fixons la position de chaque point du cercle par sa distance à un point fixe arbitraire et soient L, λ, A, B, C, D les valeurs des angles correspondant aux points m, μ, a, b, c, d; la relation (2) pourra s'écrire ainsi :

$$\frac{d\mathrm{L}}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{L}-\mathrm{A})\sin\frac{1}{2}(\mathrm{L}-\mathrm{B})\sin\frac{1}{2}(\mathrm{L}-\mathrm{C})\sin\frac{1}{2}(\mathrm{L}-\mathrm{D})}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\lambda-\mathrm{A})\sin\frac{1}{2}(\lambda-\mathrm{B})\sin\frac{1}{2}(\lambda-\mathrm{C})\sin\frac{1}{2}(\lambda-\mathrm{D})}},$$

ou bien en posant $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{Z} = x$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda = \xi$,

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{A})(x-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{B})(x-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{C})(x-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{D})}} = \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{A})(\xi-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{B})(\xi-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{C})(\xi-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{D})}}.$$

§ VIII. — On peut donner à l'équation différentielle d'Euler une autre interprétation géométrique et qui mérite d'être signalée [1]. On sait qu'une anallagmatique plane peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles orthogonaux à un cercle fixe B et dont les centres décrivent une conique A. Je modifierai légèrement cette définition et présenterai de la façon suivante le mode de description de la courbe : soit menée à A une tangente réelle extérieure au cercle et la coupant par suite en deux points imaginaires conjugués m et μ. Si l'on mène les quatre droites *isotropes* (2) passant par ces points, ces droites se rencontreront en deux autres points réels M et M'; le lieu de ces points sera l'anallagmatique définie ci-dessus.

Il est évident que les points M et M' sont réciproques par rapport au cercle fixe B.

Pour fixer la position d'un point quelconque du plan, je prendrai pour coordonnées les segments interceptés sur un axe fixe entre les intersections de cet axe avec les droites isotropes issues du point donné et un point fixe de cet axe que je prendrai pour origine des coordonnées.

---

[1] Elle a été remarquée pour la première fois par M. Darboux (*Annales de l'École normale* 1865)

Dans ce système, en désignant par x, y et x', y' les coordonnées respectives de deux points, par d leur distance et θ l'angle que fait avec l'axe fixe la droite qui les joint, on a évidemment

$$x - x' = de^{-\theta i} \qquad \text{et} \qquad y - y' = de^{-\theta i},$$

formules où, suivant l'usage habituel, i désigne le symbole $\sqrt{-1}$, Soient maintenant z et y les coordonnées du point M de l'anallagmatique définie ci-dessus, l'origine des coordonnées étant placée, pour plus de simplicité, au centre du cercle B; α, β, γ, δ les abscisses des points de rencontre de ce cercle avec la conique A; ces quatre points sont les foyers de l'anallagmatique. Soient α', β', γ', δ' les ordonnées de ces mêmes points; leurs valeurs sont, du reste (le cercle et la conique étant supposés réels), imaginairement conjuguées des valeurs des abscisses.

La relation [1]

$$\frac{ds}{\sqrt{ma.mb.mc.md}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{\mu a.\mu b.\mu c.\mu d}}$$

pourra se mettre sous la forme suivante, où λ désigne un angle réel constant, ne dépendant que de la position des foyers sur le cercle,

$$(3) \qquad \frac{dx\, e^{\lambda i}}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} = \frac{dy\, e^{-\lambda i}}{\sqrt{(y-\alpha')(y-\beta')(y-\gamma')(y-\delta')}}$$

et, d'après ce qui a été dit plus haut, l'intégrale générale de cette équation sera fournie par l'équation des anallagmatiques, ayant pour foyers les quatre points dont les coordonnées sont α, α'; β, β'; γ, γ' et δ, δ'.

§ IX. — On aurait pu, en partant d'une propriété géométrique très simple des anallagmatiques, écrire immédiatement l'équation différentielle précédente. Mais la marche que j'ai suivie, quoique plus longue, a l'avantage de faire voir d'une façon nette comment les propriétés des anallagmatiques relatives aux intégrales elliptiques se rattachent à la théorie de Jacobi. Ces courbes se présentent nécessairement quand on veut étudier la marche de l'inté-

---

[1] *Voir* ma Communication, séance du 23 mars.

grale pour des valeurs imaginaires de la variable. Tout le temps que la droite tangente à la conique coupe le cercle en deux points réels, la marche simultanée de ces deux points représente d'une manière précise la marche de l'intégrale. Dès qu'elle devient extérieure au cercle, au lieu des points imaginaires m et μ où elle coupe ce cercle, il faut considérer les points réels de l'anallagmatique M et m qui leur correspondent.

On a d'ailleurs la relation très simple suivante entre les éléments différentiels relatifs au cercle et l'anallagmatique :

$$\frac{ds}{\sqrt{ma.mb.mc.md}} = \frac{dS}{\sqrt{Ma.Mb.Mc.Md}}\sqrt{-1}.$$

Pour chaque point du plan, outre l'anallagmatique donnant lieu à la relation précédente, il passe une anallagmatique coupant orthogonalement la première et fournissant la relation suivante :

$$\frac{ds}{\sqrt{ma.mb.mc.md}} = \frac{dS}{\sqrt{Ma.Mb.Mc.Md}}.$$

Les considérations précédentes montrent l'importance des courbes anallagmatiques du quatrième ordre dans l'étude de la représentation géométrique des intégrales elliptiques, lorsqu'on y introduit la considération des imaginaires; cette considération, du reste, me semble indispensable si l'on veut approfondir les propriétés des coniques qui se rapportent à la théorie des fonctions elliptiques, théorie dans laquelle la considération des fonctions imaginaires joue un rôle capital.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

SURFACES ANALLAGMATIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. M. Moutard a le premier étudié d'une façon complète les surfaces anallagmatiques, c'est-à-dire les surfaces du quatrième ordre qui ont pour ligne double *l'ombilicale* ([1]). Il a montré que ces surfaces pouvaient être définies géométriquement, comme l'enveloppe des sphères dont les centres parcourent une surface du second degré A et qui coupent orthogonalement une sphère fixe S. Cette sphère peut être désignée sous le nom de sphère directrice de la surface; son centre est évidemment un pôle principal de l'anallagmatique engendrée. Au point de vue géométrique, il est avantageux de modifier un peu la définition précédente et de la présenter ainsi : A la surface du second degré donnée A, on mène un plan tangent quelconque qui coupe la sphère directrice S suivant un cercle; par ce cercle, on peut faire passer deux cônes *isotropes*, dont les sommets sont évidemment deux points réciproques par rapport à la sphère directrice. Ces deux points, lorsque le plan tangent prend toutes les positions possibles sur la surface A, engendrent la surface anallagmatique, enveloppe des sphères ayant leur centre sur la surface A et coupant orthogonalement la sphère directrice.

2. M. Moutard a montré que la surface ainsi définie pouvait être engendrée de cinq manières différentes au moyen de cinq sur-

([1]) *Voir* le *Bulletin de la Société philomathique*, t. IV. Séance du 6 avril 1867.

faces du second ordre A, A_1, A_2, A_3 et A_4, et de cinq sphères directrices correspondant à ces surfaces; que, par suite, la surface anallagmatique possédait cinq pôles principaux de transformation.

Je me propose dans cette Note d'exposer de quelle façon sont reliées entre elles les surfaces du second ordre qui peuvent servir à la génération d'une anallagmatique donnée et comment elles se rattachent géométriquement aux focales de cette anallagmatique.

Les focales d'une surface sont, comme on le sait, les lignes doubles de la développable *isotrope* qui lui est circonscrite. M. Chasles a le premier donné cette notion de *focale* dans son *Aperçu historique*, etc., et montré d'une façon précise ce qui était le point délicat de la question, la notion qui dans l'espace correspondait à la notion du foyer dans le plan. Il a développé du reste depuis les idées qu'il avait alors émises, et je renverrai notamment sur ce sujet à une Note *Sur les surfaces du second ordre homofocales*, insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (11 juin 1860), Note à laquelle, du reste, j'aurai, dans ce qui suit, plusieurs fois occasion de me rapporter.

Une surface anallagmatique étant définie par une surface du second degré A et une sphère directrice S, appelons C l'anallagmatique sphérique qui résulte de leur intersection; la même surface peut être définie par quatre autres surfaces du second degré A_1, A_2, A_3, A_4 et quatre sphères directrices correspondantes S_1, S_2, S_3, S_4. Soient C_1, C_2, C_3, C_4 les intersections respectives de ces surfaces, on voit immédiatement que les anallagmatiques sphériques C_1, C_2, C_3, C_4 sont les focales de la surface anallagmatique donnée.

Ces cinq focales ne sont pas indépendantes entre elles. Car, étant pris l'une d'elles, C, par exemple, si on lui circonscrit une surface développable *isotrope*, cette surface développable, outre la courbe primitive C, renfermera d'autres lignes doubles qui seront évidemment aussi des focales de la surface proposée.

Or, ces autres lignes doubles seront précisément les quatre anallagmatiques C_1, C_2, C_3, C_4.

De là résulte immédiatement le théorème suivant, qui mérite peut-être, par sa simplicité, d'être explicitement énoncé. Soient une courbe M résultant de l'intersection de deux surfaces du

second ordre P et Q, et une section plane quelconque R de la surface P, la surface développable circonscrite à la fois aux courbes M et R admet, comme lignes doubles, outre la courbe M, quatre autres courbes du quatrième ordre, et chacune de ces courbes est située sur une surface du second ordre passant par la conique R.

3. L'arête de rebroussement de la développable *isotrope* circonscrite à une surface du second degré jouit d'une propriété curieuse signalée par M. Moutard dans les *Nouvelles Annales*; elle consiste en ce que la projection de cette arête sur chacun des plans principaux de la surface est la développée de la focale contenue dans ce plan. Il existe une propriété analogue relativement aux surfaces anallagmatiques. Considérons une sphère directrice quelconque A et soient O son centre et E l'arête de rebroussement de la développable *isotrope* circonscrite, le cône ayant pour sommet le point O et pour base la courbe E coupera la sphère correspondante A suivant le lieu des centres de courbures sphériques de la focale située sur cette sphère.

4. Lorsqu'une surface, telle que la surface anallagmatique considérée, contient l'*ombilicale*, la développable isotrope qui lui est circonscrite se décompose en deux surfaces distinctes. L'une est l'enveloppe des plans, pour lesquels le point de contact avec la surface n'est pas sur l'*ombilicale* même; les lignes doubles de cette surface sont les *focales ordinaires*, et dans le cas actuel elles se composent des cinq anallagmatiques sphériques dont j'ai parlé ci-dessus.

L'autre est l'enveloppe des plans qui touchent la surface le long de l'ombilicale et ses lignes doubles sont les *focales singulières*. Dans le cas actuel, ces focales singulières se composent de trois coniques qui sont les *focales ordinaires* communes aux cinq surfaces A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 qui peuvent servir à la génération de l'anallagmatique.

Les focales singulières, tout en jouissant des propriétés générales des focales, s'en séparent cependant en certains points; ainsi, tandis que les focales ordinaires se transforment, par la méthode des rayons vecteurs réciproques, en focales ordinaires de la transformée, il n'en est pas de même des focales singulières. Les surfaces du système triple orthogonal, découvert par M. Moutard et formé de surfaces anallagmatiques, ont les mêmes focales ordinaires, mais leurs focales singulières varient pour chaque surface.

5. Considérons une surface anallagmatique définie, comme il a été dit au n° 1, au moyen d'une surface du second degré A et d'une sphère directrice S.

La développable circonscrite à ces deux surfaces a quatre lignes doubles qui sont des coniques. Soient K_1, K_2, K_3 et K_4 ces quatre coniques. D'après un théorème dû à M. Chasles (*loc. cit.*), par chacune de ces coniques on peut faire passer une surface homofocale à A. *Les quatre surfaces du second degré ainsi déterminées seront précisément les surfaces* A_1, A_2, A_3, A_4, *au moyen desquelles, d'après le théorème de M. Moutard, on peut engendrer la surface.*

Étant prise une de ces surfaces, par exemple la surface A_1, qui passe par la conique K_1, il sera facile de déterminer la sphère directrice correspondante. En effet, que l'on mène le plan de la conique K_1, il coupera la surface A suivant une conique. Si l'on circonscrit à cette dernière conique et à la surface A_1 une surface développable, cette surface, d'après un théorème de M. Chasles (*loc. cit.*), sera circonscriptible à une sphère, et *cette sphère sera précisément la sphère directrice correspondant à la surface* A.

6. Divers théorèmes relatifs, soit aux surfaces du second ordre homofocales, soit aux surfaces anallagmatiques, découlent des considérations précédentes. Je me bornerai à énoncer les deux suivants :

Théorème I. — *Étant données deux surfaces homofocales du second ordre et un plan fixe* H, *par une droite* D *tracée dans ce plan, menons les plans tangents aux deux surfaces. En joignant les points de contact appartenant à des surfaces différentes, nous obtiendrons quatre droites. Toutes les droites ainsi obtenues, lorsque* D *se déplace dans le plan* H, *sont normales à une même surface anallagmatique.*

Soient S, T les coniques suivant lesquelles le plan H coupe les deux surfaces homofocales données; construisons une conique quelconque passant par les quatre points d'intersection de S et de T; si la droite D se meut tangentiellement à cette conique, les droites obtenues par la construction précédente formeront une surface développable, et par conséquent traceront sur l'anallagmatique une de ses lignes de courbure.

Théorème II. — *Étant données deux surfaces homofocales* A *et* B *et une droite* D, *menons par cette droite les plans tangents aux deux surfaces, et soient b et b′ les points de contact relatifs à la surface* B, *à l'un des points de contact relatifs à la surface* A; *les droites ab et ab′ sont dans un même plan avec la normale au point a et également inclinées sur cette normale.*

7. Les considérations que j'ai exposées dans cette Note au sujet des surfaces anallagmatiques s'appliquent évidemment aux courbes planes anallagmatiques. Je me dispenserai donc d'énoncer les propositions relatives à ces courbes.

SUR LES

CASSINIENNES PLANES ET SPHÉRIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. On peut considérer une anallagmatique sphérique comme le lieu des points de contact des plans tangents à une conique fixe K et à une sphère. Soit S le cercle suivant lequel le plan de la conique coupe la sphère; si l'on peut inscrire dans le cercle S un quadrilatère circonscrit à la conique K (et alors, d'après le théorème de Poncelet, on pourra le faire d'une infinité de façons) en désignant par α, β, γ, δ les sommets consécutifs d'un tel quadrilatère, les divers points m de l'anallagmatique satisferont à une relation de la forme

$$\frac{m\alpha . m\gamma}{m\beta . m\delta} = \text{const.}$$

J'ai signalé cette propriété dans une Note insérée au *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1867).

Les courbes qui jouissent de cette propriété constituent dans l'ensemble des anallagmatiques un groupe remarquable et jouissant de propriétés spéciales dignes d'intérêt. Je les désignerai sous le nom de *cassiniennes*, par analogie avec l'ellipse de Cassini qui peut être regardée comme leur type principal.

2. Je vais donner ici une autre définition de ces courbes, qui, quoique moins simple peut-être en apparence que la précédente, se prête bien mieux aux recherches géométriques.

Soit, en général, tracée sur une sphère une anallagmatique: par cette courbe passent quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère. Prenons une quel-

conque des arêtes de ce tétraèdre et l'arête opposée qui est sa polaire par rapport à la sphère. Il sera facile d'établir les propositions suivantes. Toute droite qui passe par un point a de l'anallagmatique et qui s'appuie sur les deux arêtes du tétraèdre considérées, coupe la sphère en un second point b qui appartient aussi à l'anallagmatique. Je dirai que les deux points a et b sont conjugués, et, pour simplifier le langage, j'appellerai simplement *corde* la droite qui joint deux points conjugués. Si l'on désigne par P et Q les points où l'une des arêtes considérées coupe la sphère, il résulte de ce qui précède que deux points conjugués quelconques et les points P et Q sont toujours situés sur un même cercle et partagent ce cercle harmoniquement. Par suite, si l'on appelle I le point milieu du segment PQ, il en résulte que le produit des distances du point I à deux points conjugués quelconques est constant et que les droites qui joignent ce point milieu aux deux points conjugués sont dans le même plan que la droite PQ et également inclinées sur cette droite [1].

3. Comme dans un tétraèdre il existe trois couples d'arêtes opposées, on voit que, pour une anallagmatique donnée, on peut imaginer trois modes de groupement des points.

Or, si la courbe est une *cassinienne*, on pourra choisir les deux arêtes du tétraèdre de telle sorte que les points conjugués fournis par le mode de groupement correspondant jouissent de la propriété suivante :

Si l'on prend le conjugué harmonique d'un point quelconque de la sphère P *par rapport à chaque couple de points conjugués* [2], *c'est-à-dire si, sur le cercle passant par le point* P *et chaque couple de points conjugués, on prend le conjugué harmonique de ce point, le lieu des points ainsi obtenus est un cercle.*

Pour abréger, je désignerai simplement ce cercle sous le nom de *cercle correspondant au point* P.

[1] Le point I est donc pour l'anallagmatique un des points que M. Moutard a désignés sous le nom de *pôles secondaires de transformation*.

[2] Voir *Bulletin de la Société philomathique*, février 1867.

La propriété précédente est caractéristique et peut servir de définition à la cassinienne.

Considérons une sphère et deux droites quelconques dont chacune soit la polaire réciproque de l'autre par rapport à la sphère. Sur cette sphère on peut tracer une infinité de courbes jouissant de la propriété énoncée au n° 2, que toute droite passant par un point de la courbe et s'appuyant sur les deux droites fixes dont je viens de parler rencontre la sphère en un second point de la courbe. Je désignerai les deux points de la courbe situés sur une telle droite sous le nom de *points conjugués*. Maintenant, considérons le lieu des points qui sont conjugués harmoniques d'un point R de la sphère, par rapport aux différents couples de points conjugués d'une courbe quelconque de l'espèce dont je viens de parler. Si ce lieu est un cercle pour une position particulière quelconque du point P, il en sera de même quelle que soit la position de ce point sur la sphère et la courbe considérée sera une cassinienne.

Dans tout ce qui suit, je considérerai exclusivement le mode de groupement qui donne lieu à la proposition énoncée ci-dessus; en sorte que le point conjugué d'un point de la courbe sera parfaitement déterminé. Des deux arêtes du tétraèdre considérées, il y en a toujours une qui coupe la sphère en deux points réels; je désignerai ces deux points par les lettres P et Q.

Ceci posé, on établira facilement les propositions suivantes :

4. *Si l'on considère une corde quelconque d'une cassinienne, c'est-à-dire la droite qui joint deux points conjugués, sa polaire réciproque par rapport à la sphère, sur laquelle est tracée la cassinienne, rencontrera cette sphère en deux points conjugués de la courbe et sera par conséquent aussi une corde.*

De là résulte que la surface engendrée par toutes les cordes, surface qui est du quatrième degré, est à elle-même sa polaire réciproque.

5. La propriété précédente constitue une propriété caractéristique des cassiniennes et l'on peut énoncer la propriété suivante :

Si une anallagmatique est telle qu'une droite passant par deux points de cette courbe ait pour polaire, par rapport à la sphère sur laquelle elle est tracée, une droite rencontrant la courbe en deux points, cette anallagmatique est une cassinienne dont la droite proposée ainsi que sa polaire sont des cordes; et alors, d'après le théorème précédent, il y a une infinité de droites qui jouissent de la même propriété.

6. *Si* A *désigne le cercle correspondant à un point* R *de la sphère, les cercles correspondant aux divers points du cercle* A *passeront par le point* R.

7. *Le cercle correspondant à un point de la courbe lui est tangent en ce point et coupe la courbe en deux autres points qui sont conjugués.*

8. Considérons une corde quelconque d'une cassinienne; par cette corde on peut mener quatre plans tangents à la courbe. Deux des points de contact se trouveront sur la polaire de la corde, les deux autres seront deux points conjugués. Si, par la corde qui joint ces deux derniers points, on mène des plans tangents à la courbe, deux des points de contact seront les points conjugués formant les extrémités de la première corde considérée.

Deux cordes liées ensemble de la façon que je viens d'indiquer seront dites *cordes associées*.

Leur propriété principale est renfermée dans la proposition suivante :

Toute droite qui touche la sphère sur laquelle est tracée une cassinienne en un point de cette courbe et rencontre une de ses cordes, rencontre aussi la corde qui lui est associée.

9. Cette propriété donne lieu au théorème suivant :

Si une droite se déplace en s'appuyant sur deux droites fixes et en restant tangente à une sphère, la courbe suivant laquelle la surface ainsi engendrée touche la sphère est une cassinienne dont les deux droites fixes sont deux cordes; et, d'après la proposition précédente, *la cassinienne ainsi obtenue peut être engendrée d'une infinité de façons au moyen de deux cordes associées quelconques de la courbe.*

10. Une cassinienne est complètement définie lorsqu'on connaît

les deux points P et Q, qui sont conjugués harmoniques par rapport à tous les couples de points conjugués, et le cercle A correspondant à un point R de la sphère.

Soient M un point quelconque de la sphère et N son réciproque par rapport au cercle A, je veux dire le point où la sphère est percée par la droite qui joint le point M au pôle du plan du cercle. Il est facile de déterminer sur la sphère deux points α et γ, qui soient en rapport anharmonique avec les points M et R, ainsi qu'avec les points P et Q. On peut, si l'on veut, considérer les droites PQ et MR ainsi que leurs polaires; il y aura deux droites qui les rencontreront toutes les quatre, et ces droites seront elles-mêmes polaires réciproques. Par suite, il y en aura une et une seule qui coupera la sphère en des points réels; ces deux points seront les deux points α et γ cherchés. On déterminerait de même deux points β et δ qui soient conjugués harmoniques par rapport aux couples de points N, R et P, Q.

Cela posé, un point quelconque m de la cassinienne considérée satisfera à la relation suivante :

$$\frac{m\alpha . m\gamma}{m\beta . m\delta} = \text{const.}$$

On voit que les points α et γ sont deux points conjugués de la sphère, en prenant ce mot dans le sens où je l'ai employé au n° 3, c'est-à-dire que la droite $\alpha\gamma$ rencontre la droite fixe PQ ainsi que sa polaire; il en est de même des points β et δ. De plus il est évident que l'un des quatre points peut être pris arbitrairement. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une cassinienne et étant pris arbitrairement sur la sphère sur laquelle elle est tracée un couple quelconque de points conjugués, il est toujours possible de trouver un autre couple de points conjugués, de telle sorte que le produit des distances d'un point de la courbe aux points du premier couple soit dans un rapport constant avec le produit des distances du même point aux points du second couple.

11. En particulier, il y existe toujours sur une sphère un couple de points conjugués qui sont diamétralement opposés. Pour les obtenir il suffit de mener par le centre de la sphère une droite

s'appuyant sur la droite PQ et sur sa polaire. Désignons par a et a' ce couple de points; on pourra déterminer d'après le théorème précédent deux autres points c et d, tels que pour tout point de la courbe l'on ait la relation

$$\frac{ma . ma'}{mc . md} = \text{const.},$$

ou encore

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\widehat{ma} . \sin\frac{1}{2}\widehat{ma'}}{mc . md} = \text{const.};$$

et, comme $\sin\frac{1}{2}\widehat{ma'} = \cos\frac{1}{2}\widehat{ma}$, la relation précédente pourra s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\sin\widehat{ma}}{mc . md} = \text{const.}$$

D'où la proposition suivante :

Étant donnée une cassinienne, on peut toujours déterminer un diamètre de la sphère sur laquelle elle est tracée et deux points fixes de cette sphère, de telle sorte que le produit des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux points fixes divisé par la distance de ce même point au diamètre donne un quotient constant.

12. *Si par une corde d'une cassinienne fixe et deux points conjugués quelconques, on mène des plans, ces divers plans forment un faisceau en involution, et les deux plans doubles de l'involution coupent la sphère suivant deux cercles orthogonaux.*

13. *Soient* A, B *et* C, D *deux couples quelconques de points conjugués d'une cassinienne; et soient* a, b, c, d *les points de la sphère qui leur sont diamétralement opposés;* m *désignant un point quelconque de la courbe, la différence des aires des triangles sphériques* mac *et* mbd *est constante.*

14. Les cassiniennes se changent en cassiniennes par une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques. Aux

couples de points conjugués de la première courbe correspondent des couples de points conjugués de la transformation.

En particulier, au moyen d'une projection stéréographique, les cassiniennes sphériques se transforment en cassiniennes planes. Je me bornerai, au sujet de ces courbes, à énoncer quelques propriétés que ne partagent pas les cassiniennes sphériques.

Si l'on désigne par a, b et c, d deux couples quelconques de points conjugués, la différence des angles sous lesquels ces segments ac et bd sont vus d'un point quelconque de la courbe est constante.

15. *Dans le cas où la cassinienne est du troisième degré, la différence de ces angles est nulle.*

On peut donc dire que la cassinienne cubique est *le lieu d'où deux segments de droite sont vus sous des angles égaux.*

L'on en déduit que, *si l'on joint un point fixe de la courbe à tous les couples de points conjugués, toutes les droites ainsi obtenues sont également inclinées sur deux droites fixes rectangulaires.*

16. Le lieu des points milieux des droites qui joignent les points conjugués d'une cassinienne plane est un cercle. Lorsque la cassinienne est du troisième degré, ce cercle se réduit à une droite.

Par chaque point de ce cercle (ou de cette droite) passent deux *cordes* de la cassinienne se coupant orthogonalement.

L'enveloppe des cordes d'une cassinienne plane est une courbe de quatrième classe ayant pour foyers les deux foyers singuliers de la courbe et les deux points fixes du plan qui sont en rapport harmonique avec chaque couple de points conjugués.

Lorsque la cassinienne est du troisième degré, elle n'a plus qu'un foyer singulier et l'enveloppe des cordes est alors une courbe de troisième classe.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette dernière courbe se compose de la cassinienne elle-même et de la droite, lieu des points milieux des droites qui joignent les points conjugués.

17. Les cassiniennes cubiques planes ont été depuis longtemps étudiées sous le nom de *focales*. On peut consulter à ce sujet divers travaux de MM. Quetelet, Dandelin et Chasles dans les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles* et la *Correspondance mathématique de Quetelet*.

Le Tome V de cette dernière collection renferme à ce sujet un très intéressant Mémoire de M. Van Rees, qui y a donné les propriétés énoncées dans le n° 15 et en a déduit les principales conséquences.

SUR LES

SECTIONS CIRCULAIRES DES SURFACES ANALLAGMATIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. Étant donnés une sphère fixe S et un plan quelconque P, par le cercle d'intersection de la sphère et du plan on peut faire passer deux cônes *isotropes*. Soient p et p' les sommets de ces cônes; ces deux points sont réciproques par rapport à la sphère S; pour abréger le discours, je dirai que ces deux points sont associés au plan P, et réciproquement que le plan P est le plan associé au point p et au point p'.

Cela posé, on peut énoncer les deux lemmes suivants :

Lemme I. — *Si un plan pivote autour d'un point fixe* O, *le lieu des points associés au plan dans ses diverses positions est une sphère ayant pour centre le point* O *et coupant orthogonalement la sphère fixe* S.

Lemme II. — *Si un plan tourne autour d'une droite fixe, le lieu des points associés au plan dans ses diverses positions est un cercle ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère* S *sur la droite et coupant orthogonalement cette sphère.*

2. Une surface anallagmatique peut être définie comme le lieu des points associés par rapport à une sphère S des divers plans qui touchent une surface du second degré A. L'intersection de la surface A et de la sphère S est d'ailleurs une des focales de la surface. A chaque point de l'anallagmatique est associé un plan qui

touche la surface A en un certain point correspondant au premier; à toute courbe tracée sur l'anallagmatique correspondra une certaine courbe formée par les points de contact avec la surface A des divers plans associés aux points de la courbe tracée sur l'anallagmatique.

Des deux lemmes que j'ai donnés ci-dessus on déduit immédiatement les deux propositions suivantes :

La normale en un point M *d'une anallagmatique est la droite qui joint ce point au point correspondant sur la surface* A.

Étant donnés une courbe C *tracée sur l'anallagmatique et un point* M *de cette courbe, si l'on désigne par* c *la courbe correspondante tracée sur la surface du second degré* A *et par* m *le point de cette courbe qui correspond au point* M, *le plan normal en* M *à la courbe* C *est le plan qui passe par ce point et par la tangente conjuguée de la tangente menée en* m *à la courbe* c.

3. Pour faire une application de ces propositions très simples, je démontrerai brièvement le beau théorème donné par M. Moutard sur l'orthogonalité des surfaces anallagmatiques homofocales.

Les surfaces d'un système homofocal peuvent être engendrées au moyen d'une sphère fixe S et des diverses surfaces du second ordre passant par une anallagmatique sphérique K située sur cette sphère.

Cherchons les surfaces d'un tel système qui passent par un point de l'espace M. Pour cela, menons par ce point un cône isotrope, il coupera la sphère suivant un cercle C, dont le plan P sera le plan associé au point M. Le problème est évidemment ramené à mener par la courbe K une surface du second degré tangente au plan P. Or ce plan devant être tangent à la surface cherchée, doit la couper suivant deux droites renfermant nécessairement les quatre points d'intersection de la courbe K avec le cercle C. On aura donc trois solutions, et les trois points de contact correspondant à ces trois solutions seront les trois points de concours des diagonales du quadrilatère formé par les quatre points d'intersection dont je viens de parler. En désignant par p, q, r ces trois points d'intersection, il résulte de la première proposition établie au n° 2 que les normales aux trois surfaces homofocales passant par le point M sont les droites Mp, Mq, Mr. Mais les trois points p, q, r sont les sommets d'un triangle conjugué par rapport au cercle C; les droites Mp, Mq, Mr forment donc un trièdre conjugué par rapport au cône ayant pour base C et pour sommet le point M; c'est-à-dire par rapport à un cône isotrope, donc elles forment un trièdre trirectangle.

4. Sur une surface anallagmatique il existe dix systèmes de sections circulaires qui ont été découverts par M. Moutard. Leur existence résulte très simplement de la définition donnée au n° 2. Que l'on imagine en effet un plan se mouvant tangentiellement à la surface A, de façon que son point de contact décrive une génératrice g de cette surface; pendant ce mouvement le plan tangent tournera autour de cette génératrice; le lieu des points qui lui sont associés par rapport à la sphère S sera donc un cercle coupant orthogonalement cette sphère. A toutes les génératrices de la surface A du même système que g correspondra un système de sections circulaires de l'anallagmatique; un autre système de sections circulaires correspondra au second système de génératrices rectilignes de la surface A.

Comme l'anallagmatique est susceptible de cinq modes de génération différentes, l'on voit que l'on obtiendra ainsi cinq groupes de sections circulaires, chaque groupe comprenant deux systèmes distincts.

Deux cercles d'un même groupe et de même système ne se rencontrent jamais.

Deux cercles d'un même groupe et de systèmes différents se coupent en deux points et sont par conséquent situés sur une même sphère.

Deux cercles de groupes différents se coupent toujours en un point.

Les sections circulaires d'une anallagmatique jouissent d'un grand nombre de propriétés analogues à celles des génératrices rectilignes des surfaces du second ordre; je me contenterai ici de mentionner la suivante, semblable de tous points à une propriété fondamentale des surfaces du second ordre donnée par M. Chasles :

Étant donnés quatre cercles quelconques d'un même groupe et un cercle variable C d'un autre groupe rencontrant les quatre cercles fixes aux points a, b, c et d; si l'on mène par le cercle variable C les sphères qui touchent la surface aux points a, b, c et d, le rapport anharmonique de ces quatre sphères est constant.

5. Pour plus de clarté, je désignerai par S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4 les cinq sphères au moyen desquelles on peut engendrer la surface et par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les cinq surfaces du second degré homofocales qui leur correspondent; pour indiquer le mode de génération relatif à la sphère S_i et la surface A_i, j'emploierai simplement l'expression de génération (S_i).

Cela posé, j'ai montré au n° 2 qu'à chaque courbe tracée sur une anallagmatique correspondait une courbe tracée sur la surface du second degré qui sert à engendrer la surface.

Il est utile, dans un certain nombre de questions, de connaître les courbes qui, dans un mode de génération donné, par exemple (S_0), correspondent aux diverses sections circulaires de la surface.

Relativement au groupe qui appartient proprement à la génération (S_0), il est clair, d'après ce qui précède, que les sections de ce groupe sont représentées par les génératrices rectilignes de la surface A_0.

Pour obtenir la représentation des autres groupes, imaginons que nous circonscrivions à la sphère S_0 et à la surface A_0 une surface développable; cette surface a pour lignes doubles quatre coniques, qui, dans un théorème connu, seront situées sur les quatre surfaces A_1, A_2, A_3 et A_4. Je désignerai ces quatre coniques par la notation C_1^0, C_2^0, C_3^0, C_4^0; les indices inférieurs indiquant celle des surfaces A sur laquelle chacune des coniques est située.

Si maintenant de chacun des points de la conique C_1^0 on mène des cônes circonscrits à A_0, les diverses courbes de contact sur cette surface seront les courbes correspondant aux sections circulaires du groupe appartenant proprement à la génération (S_1); les coniques C_2^0, C_3^0 et C_4^0 fourniront de même les courbes correspondant aux sections circulaires des groupes appartenant aux générations (S_2), (S_3) et (S_4).

On obtiendrait d'une façon analogue les coniques qui, sur les surfaces A_1, A_2, A_3 et A_4, correspondent aux différents groupes de sections circulaires.

L'on est amené ainsi à considérer seize coniques analogues à celles que j'ai définies plus haut comme lignes doubles de la surface développable circonscrite à S_0 et à A_0.

Avec ces quatre dernières elles forment un système de vingt coniques qui sont distribuées quatre par quatre sur les cinq surfaces A. Le tétraèdre formé par les plans de quatre d'entre elles situées sur une même surface est un tétraèdre conjugué par rapport à cette surface.

SUR LES COURBES GAUCHES

RÉSULTANT

DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES

DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. On sait que les courbes gauches du quatrième ordre sont de deux espèces différentes; par les unes on ne peut faire passer qu'une seule surface du second ordre; par les autres on en peut faire passer une infinité et elles peuvent être définies comme l'intersection de deux de ces surfaces. Je ne m'occuperai ici que de ces dernières et, pour abréger le discours, je les désignerai sous le nom de *biquadratiques gauches*, ou simplement de *biquadratiques* lorsqu'il n'y aura lieu de craindre aucune ambiguïté.

Par toute biquadratique gauche l'on peut faire passer quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre T conjugué par rapport aux diverses surfaces du second ordre que l'on peut faire passer par la courbe. Considérons deux arêtes opposées de ce tétraèdre; il est facile de voir que toute droite, qui rencontre la courbe en un point m et s'appuie en même temps sur les deux arêtes considérées du tétraèdre, rencontre la courbe en un second point m'. Je dirai que les points m et m' sont conjugués, et j'appellerai simplement *corde* la droite qui joint deux points conjugués [1]. Les diverses cordes de la courbe forment une surface réglée du quatrième ordre ayant pour lignes doubles les deux arêtes du tétraèdre; je désignerai cette surface par la lettre R.

[1] *Voir* ma Communication du 14 mars 1868 à la Société philomathique.

Comme, dans le tétraèdre T, il existe trois couples d'arêtes opposées, l'on voit que l'on peut grouper les points de la courbe de trois façons différentes; on obtiendra ainsi trois systèmes de cordes formant trois surfaces réglées du quatrième ordre, la surface R et deux surfaces analogues que j'appellerai R_1 et R_2. Je désignerai simplement les modes de groupement qui correspondent à ces trois surfaces par la notation (R), (R_1) et (R_2).

A chaque point de la courbe ne correspond, dans un mode de groupement donné, qu'un seul point conjugué; mais, en tout, il lui correspond trois points dont chacun lui est conjugué dans un des trois modes de groupement que j'ai définis plus haut.

Ces définitions permettent d'établir facilement les propositions suivantes :

2. Étant donnée une droite quelconque rencontrant en deux points une biquadratique gauche, on peut mener par cette droite quatre plans tangents à la courbe. Chacun des points de contact a pour points conjugués les trois autres points de contact, en sorte que, si l'on joint le premier point aux trois autres, on obtient les trois cordes, correspondant aux trois modes de groupement, qui passent par ce premier point. Chacune de ces droites s'appuie donc sur deux arêtes opposées du tétraèdre T. La droite joignant deux points de contact pris arbitrairement et la droite joignant les deux autres points sont deux cordes du même système, en sorte qu'elles rencontrent les deux mêmes arêtes opposées du tétraèdre.

3. *Si a, a' et b, b' désignent deux couples quelconques de points conjugués, les droites a, b et a', b' sont les génératrices d'une même surface du second ordre passant par la courbe.*

4. *Si, par une droite quelconque rencontrant la courbe en deux points et par trois couples quelconques de points conjugués, l'on mène des plans, les plans ainsi obtenus forment un faisceau en involution.*

En particulier :

Si, par une tangente quelconque à la courbe et par trois couples quelconques de points conjugués, l'on mène des plans, les plans ainsi obtenus forment un faisceau en involution.

M. Chasles a donné un théorème analogue, relatif aux cubiques gauches (*Comptes rendus,* 10 août 1857, n° 22).

5. Soit a, b un couple quelconque de points conjugués d'une biquadratique gauche; si par la droite ab l'on mène les plans tangents à la courbe, les quatre points de contact forment deux couples de points conjugués a', b' et a'', b'' appartenant au même groupe de points conjugués que a et b.

Ces deux couples sont parfaitements déterminés et les droites $a'b'$, $a''b''$ rencontrent les deux arêtes du tétraèdre T sur lesquelles s'appuie la droite ab. De ces deux couples, il y en a un, c'est celui que je désignerai par a', b', qui jouit de la propriété suivante. Les droites qui joignent chacune des extrémités de la corde ab aux deux extrémités de la corde $a'b'$ forment un système de quatre droites situées sur une même surface du second ordre passant par la biquadratique. Le couple de points conjugués a'', b'' ne jouit pas de cette propriété.

Je dirai que $a'b'$ et ab sont deux cordes conjuguées et que $a''b''$ et ab sont deux cordes associées, ou bien encore, que ces couples de droites sont respectivement des génératrices conjuguées et des génératrices associées de la surface réglée R, lieu des cordes correspondant au mode de groupement que je considère.

Ces définitions établies, on aura les propositions suivantes :

6. Si l'on joint les extrémités de chacune des cordes appartenant à un mode de groupement donné, par exemple au groupement (R), aux extrémités de la corde conjuguée, toutes les droites ainsi obtenues sont les génératrices d'une *seule et même* surface du second ordre, que je désignerai par A. Aux deux autres modes de groupement correspondraient deux autres surfaces du second degré que j'appellerai A_1 et A_2.

Deux cordes conjuguées, appartenant au groupement (R), ou, si l'on veut, deux génératrices conjuguées de la surface réglée R, sont polaires réciproques par rapport à la surface A; en sorte que la surface R est à elle-même sa polaire réciproque par rapport à la surface A.

Si par un point quelconque de la surface A on mène les droites qui s'appuient sur les divers couples de génératrices conjuguées de la surface R, toutes les droites ainsi obtenues sont dans un même plan.

7. *Si une droite se meut tangentiellement à la surface* A, *en s'appuyant constamment sur deux génératrices associées quelconques de la surface* R, *elle touche la surface* A *suivant la biquadratique dont cette surface est dérivée.*

Cette propriété résulte immédiatement de la proposition suivante : Toute droite qui touche la surface A en un point de la biquadratique et qui rencontre une génératrice de la surface R rencontre aussi son associée.

Le théorème précédent complète une proposition énoncée par M. Chasles (*Comptes rendus*, 24 février 1862, n° 64), et fournit le moyen d'obtenir effectivement une biquadratique donnée par le mode de génération indiqué ci-dessus.

On voit que par toute biquadratique l'on peut faire passer trois surfaces du second ordre fournissant une solution du problème, chacune de ces surfaces correspondant à un des trois modes de groupement des points de la courbe, et, au moyen d'une quelconque de ces surfaces, on peut encore engendrer la courbe d'une infinité de façons différentes.

Les surfaces réglées du quatrième ordre et à directrices doubles que j'ai désignées par R, R_1 et R_2 jouissent de propriétés particulières qui méritent d'être signalées.

En général, si l'on considère une surface réglée du quatrième ordre, contenant deux droites doubles D et Δ, l'on voit que par chaque point a de la directrice D passent deux génératrices coupant Δ en deux points; de même, par chaque point b de Δ passent deux génératrices coupant D en deux points. Les génératrices divisent donc les deux directrices de telle sorte qu'à un point de D correspondent deux points de Δ et réciproquement.

La correspondance entre les points des deux droites D et Δ peut être exprimée par une relation à trois termes de la façon suivante. Il existe en général, sur la droite D, quatre points tels que le couple de points correspondant à chacun d'eux sur la droite Δ se confond en un seul point; désignons par α, α' et α'' trois quelconques de ces points. De même il existe sur la droite Δ quatre points tels que le couple de points correspondant sur la droite D se confonde en un seul point; désignons par β, β' et β'' trois quelconques de ces points.

Cela posé, la relation qui existe entre deux points correspondants a et b situés respectivement sur les droites D et Δ pourra être écrite sous la forme suivante :

$$p\sqrt{a\alpha . b\beta} + q\sqrt{a\alpha' . b\beta'} + r\sqrt{a\alpha'' . b\beta''} = 0,$$

relation où p, q et r désignent des quantités numériques constantes.

Dans le cas des surfaces que j'ai étudiées dans cette Note, la correspondance entre les points des deux directrices doubles a lieu de telle façon qu'à un couple de points de la droite D correspond un couple de points de la droite Δ; c'est-à-dire que si, au point a de la droite D, correspondent les deux points b et b' de la droite Δ, à ces deux derniers points correspondront deux mêmes points de la droite D, parmi lesquels se trouvera nécessairement le point a.

M. Chasles a depuis longtemps signalé l'importance de ce mode de correspondance dans son Mémoire *Sur la résolution des équations du troisième et du quatrième degré*. Les surfaces à directrices doubles du quatrième ordre, pour lesquelles a lieu ce mode de correspondance, jouent dans l'ensemble des surfaces de la même famille le même rôle que les *cassiniennes* dans l'ensemble des courbes anallagmatiques.

On peut, dans ce cas, exprimer la relation qui existe entre les points correspondants des deux directrices, et cela d'une infinité de façons, par des équations à deux termes; tandis que, dans le cas général, cette relation ne peut pas être exprimée plus simplement que par l'équation à trois termes donnée ci-dessus.

SUR QUELQUES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES

ET SUR LEUR APPLICATION A LA

THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES ANALLAGMATIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. Avant d'aborder ce qui est relatif aux anallagmatiques, je m'occuperai d'abord du lieu décrit par le sommet d'un angle de grandeur donnée dont les côtés s'appuient respectivement sur deux courbes fixes. Je dirai d'abord ce que l'on doit entendre par angle de deux droites, lorsque le sens dans lequel doivent être prises ces droites n'est pas déterminé. Étant données deux droites A et B, faisons tourner la première autour de leur point de rencontre, et dans un sens déterminé, par exemple celui des aiguilles d'une montre, jusqu'à ce que cette droite s'applique sur B; je dirai que l'angle ainsi décrit est l'angle que fait la droite A avec la droite B. Si l'on continuait le mouvement de rotation, après avoir décrit un angle égal à π, A viendrait de nouveau s'appliquer sur B. L'angle que fait A avec B n'est donc déterminé qu'à un multiple près de π; sa tangente est déterminée, mais son sinus et son cosinus ne le sont pas; le double de cet angle est déterminé à un multiple près de 2π, et les valeurs de toutes ces lignes trigonométriques sont parfaitement connues.

Ces définitions étant établies, étant donnés dans un plan deux points fixes A et B, si l'on cherche dans ce plan le lieu du point M, tel que l'angle de MA avec MB ait une valeur donnée (à un multiple près de π, nécessairement), l'on trouvera pour ce lieu un cercle, passant par les points A et B, et *tous* les points de ce cercle feront partie du lieu. Le cercle symétrique du précédent

serait le lieu des points M, pour lesquels l'angle de MA avec MB aurait une valeur supplémentaire de la valeur donnée précédemment.

2. Ceci posé, cherchons le centre du cercle, lieu des points M tels que l'angle que fait MA avec MB ait une valeur donnée ω. Ce centre est le *foyer singulier* de la courbe, c'est donc le point réel situé sur la tangente menée à cette courbe en un quelconque des ombilics.

Appelons I l'ombilic par lequel passent les diverses lignes isotropes du plan qui ont pour coefficient angulaire i.

Soit K un point du lieu infiniment voisin du point I, en sorte que KI est infiniment voisine de la tangente au cercle en I. Le point K appartenant au lieu, l'angle que fait KA avec KB est égal à ω. Maintenant, joignons le point K au deuxième ombilic du plan J; la droite KJ sera infiniment voisine de la droite de l'infini, et le point k', où elle coupera la droite AB, sera infiniment voisin du point à l'infini sur cette droite. Soit k le point où la droite KI coupe la droite AB; d'après une proposition fondamentale que j'ai donnée pour la première fois dans une Note *Sur la théorie des foyers*, insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1853), l'on sait que le rapport anharmonique des quatre points A, B; k, k' est égal à $e^{2\omega i}$, quantité qui est *parfaitement déterminée* (*voir* n° 1).

L'on aura donc

$$\frac{Ak}{Ak'} : \frac{Bk}{Bk'} = e^{2\omega i};$$

d'où en passant à la limite et en remarquant que le point k' est alors à l'infini

$$\frac{Ak}{Bk} = e^{2\omega i}.$$

D'où cette conclusion : Pour trouver le centre du cercle, lieu des points M tels que l'angle de MA avec MB ait une valeur donnée ω, prenons sur la droite AB un point k tel que le rapport $\frac{Ak}{Bk}$ ait pour valeur $e^{2\omega i}$; menons par ce point la droite isotrope qui passe au point I, le point réel situé sur cette droite sera le centre cherché.

3. Soient maintenant deux courbes quelconques A et B, cherchons le lieu des points M tels qu'une des tangentes menées de ce point à la courbe A fasse un angle donné avec une des tangentes menées de ce même point à la courbe B. Ce lieu a déjà occupé divers géomètres, notamment M. Cremona et M. Faure, qui ont déterminé son degré et sa classe. Je me propose ici de déterminer ses foyers principaux; on sait d'ailleurs que cette courbe (en général) ne rencontre la droite de l'infini qu'aux ombilics, qui sont pour elle des points multiples de l'ordre $n-1$, $2n$ étant le degré de la courbe. Considérons en particulier l'ombilic I; chacune des tangentes menées à la courbe et la touchant en ce point contiendra un point réel qui sera le foyer singulier correspondant à la branche de courbe que l'on considère. Soit un point K situé sur cette branche et à une distance infiniment voisine du point I; en sorte que la droite KI est infiniment voisine de la tangente en I à cette branche du lieu. Soient Ka et Kb les droites menées tangentiellement aux courbes A et B et qui font l'angle donné ω. Ces deux tangentes sont nécessairement infiniment voisines de deux droites isotropes; soit F le foyer de A, qui est infiniment voisin du point réel situé sur la droite Ka; soit G le foyer de B, qui est infiniment voisin du point réel situé sur la droite Kb.

Je joins le point K au deuxième ombilic du plan J; la droite KJ coupe la droite FG en un point k' infiniment voisin de la droite de l'infini. La droite Ka coupe FG en un point F' infiniment voisin de F, et la droite Kb coupe FG en un point G' infiniment voisin de G. Soit de plus k le point où KI coupe FG; d'après la proposition fondamentale que j'ai rappelée plus haut, l'on a

$$\frac{F'k}{F'k'} : \frac{G'k}{G'k'} = e^{2\omega i}.$$

D'où, en passant à la limite et en remarquant que les points F' et G' viennent alors se confondre avec les points F et G et que le point k' s'en va à l'infini,

$$\frac{Fk}{Gk} = e^{2\omega i}.$$

L'on obtiendra donc le foyer singulier correspondant à la branche de courbe considérée, en déterminant, sur la droite FG, le point k

par cette équation, en joignant ce point à l'ombilic I et en prenant le point réel situé sur cette courbe.

En comparant ce résultat avec celui que j'ai obtenu dans le paragraphe précédent, l'on en déduit la proposition suivante :

Le foyer singulier, correspondant à la branche de courbe considérée, est le centre du cercle décrit sur FG *comme segment et capable de l'angle donné* ω.

4. L'ensemble des foyers singuliers de la courbe s'obtiendra facilement. Désignons par $F, F_1, \ldots, F_m$ les m foyers de la courbe A, et par $G, G_1, \ldots, G_n$ les n foyers de la courbe B. Prenons un foyer quelconque F_i de A et un foyer quelconque F_j de B : le centre du cercle, décrit sur F_iF_j comme segment et capable de l'angle donné, sera un des foyers singuliers de la courbe; et on les obtiendra tous en combinant, de toutes les façons possibles, chacun des foyers de B.

Remarquons, en passant, que, d'après ce qui précède, l'équation du degré mn, à laquelle conduit la détermination des foyers singuliers du lieu, sera résoluble par la résolution d'une équation du degré m et d'une équation du degré n.

Un des cas les plus utiles dans les applications est celui où la courbe B se réduit à un point P. La courbe étudiée est alors une podaire, c'est-à-dire le lieu des projections du point P sur les tangentes à la courbe A. Les foyers singuliers de cette podaire sont les points milieux des segments qui joignent le point P aux différents foyers de A.

5. Je vais traiter maintenant le problème inverse du problème précédent. Étant données deux courbes fixes A et B, un angle de grandeur constante se déplace de façon que son sommet parcoure la courbe A, tandis qu'un de ses côtés roule sur la courbe B, quels sont les foyers de la courbe C, enveloppée par le deuxième côté de l'angle?

Pour plus de clarté, je considérerai simplement le cas où l'angle constant est droit et où la courbe B se réduit à un point fixe P. Le cas le plus général se ramènerait facilement à ce cas particulier.

Je supposerai que la courbe A ait m branches qui se croisent en chacun des ombilics du plan, en sorte qu'elle aura m foyers singuliers que je désignerai par G, G′, etc.; soit, de plus, n le nombre des points où elle coupe la droite des infinis en dehors des ombilics. On voit que la courbe sera du degré $2m+n$ et qu'elle aura n asymptotes qui ne seront pas *isotropes*.

Joignons le point fixe P à l'un quelconque des points de la droite de l'infini, distincts des ombilics, qui appartiennent à la courbe; la droite de l'infini est perpendiculaire à cette droite; elle est donc tangente à la courbe C et elle la touche en un point α situé à l'infini sur la direction d'une perpendiculaire à l'asymptote qui passe au point α. Ce point α est d'ailleurs un foyer du lieu cherché; d'où cette conclusion : Le lieu a n foyers situés sur la droite de l'infini et sur la direction des droites perpendiculaires aux n asymptotes de la courbe qui ne sont pas isotropes.

Menons maintenant par le point P la droite isotrope qui passe par l'ombilic I; cette droite coupe la courbe A en $m+n$ points distincts de l'ombilic. Soit b l'un quelconque de ces points; la perpendiculaire au point b à la droite Pb se confond avec cette ligne elle-même; cette droite est donc une tangente isotrope du lieu cherché. Le même raisonnement s'appliquerait à la droite isotrope qui joint le point P au deuxième ombilic J; d'où cette conclusion : Le point fixe P est un foyer du lieu cherché, et un foyer multiple qui doit compter pour $(m+n)$ foyers réels.

La droite PI a encore m de ses points de rencontre, avec la courbe A, confondus au point I; la perpendiculaire en ce point à PI est indéterminée. Pour voir ce qui a lieu, considérons sur une des branches de la courbe A, par exemple sur celle qui est caractérisée par le foyer singulier G, un point K infiniment voisin du point I. Joignons PK, puis menons en K la perpendiculaire à cette droite; cette perpendiculaire, étant à la limite d'une droite isotrope, le point réel qu'elle contient sera, à la limite, un foyer du lieu cherché. D'un autre côté, la droite IK s'écarte infiniment peu de la tangente en I à la branche considérée de la courbe A; elle coupe donc la droite réelle PG en un point k infiniment voisin du point G. La droite KJ, s'écartant infiniment peu de la droite de l'infini, coupe PG en un point k' infiniment voisin de cette droite. Soit H le point où la perpendiculaire en K à la droite PK coupe KG; l'on voit facilement que les quatre points P, H, k, k' forment un système de points harmoniques; on a donc la relation

suivante :

$$\frac{Pk}{Pk'} : \frac{Hk}{Hk'} = -1,$$

d'où, en passant à la limite, PG = GH.

On voit que le point H s'obtient en joignant le point P au foyer singulier G et en prolongeant la droite PG d'une longueur égale à elle-même.

En considérant la branche de courbe, passant au point J, qui correspond au même foyer singulier G, on obtiendrait aussi une tangente isotrope au lieu cherché passant par H; donc ce point est un foyer de la courbe C.

6. En réunissant les résultats obtenus précédemment, l'on arrive au résultat suivant :

« La courbe C, définie comme ci-dessus, est de $2(m+n)^{\text{ième}}$ classe; elle a :

» 1° n foyers situés à l'infini et sur des directions perpendiculaires aux n asymptotes de la courbe A qui ne sont pas isotropes;

» 2° Un foyer multiple au point fixe P, qui compte pour $(m+n)$ foyers;

» 3° m autres foyers H, H′, etc., que l'on obtient en joignant le point P aux foyers singuliers de la courbe A, et en prolongeant d'une longueur égale à elle-même chacune des droites ainsi obtenues. »

7. Je vais appliquer ce résultat à la recherche de la relation qui existe entre les différents points d'intersection d'une courbe et d'un cercle. J'ai donné cette relation dans ma Note intitulée *Théorèmes généraux sur les courbes algébriques*, qui a été insérée dans les *Comptes rendus* (janvier 1863). Je la reproduirai ici en la présentant sous une forme plus commode.

Étant donné un système de n droites situées dans un plan, et un axe fixe dans ce plan, si l'on fait la somme des angles que fait chacune de ces droites avec l'axe fixe, la somme de ces angles (somme qui sera déterminée à un multiple près de π) mesurera ce que j'appelle l'*orientation* du système des droites relativement à l'axe fixe. Le système étant représenté, par exemple, par A, je désignerai simplement son orientation par rapport à un axe donné par la notation (A). Si deux systèmes de droites A et B ont une même orientation, ce qu'on exprimera par la relation

$$(A) = (B),$$

il est clair que cette propriété subsistera quel que soit l'axe fixe que l'on ait choisi comme terme de comparaison.

Ceci posé, soit une courbe algébrique B de degré p, ne passant pas d'ailleurs par les ombilics, en sorte qu'elle n'a pas de foyers singuliers. Coupons cette courbe par un cercle quelconque; les $2p$ points d'intersection peuvent toujours se distribuer deux par deux sur p droites réelles (dans cette Note, je ne m'occupe exclusivement que de courbes réelles ou du moins ayant une équation réelle), et cela pourra se faire de plusieurs manières, s'il y a plus de deux points d'intersection réels. Le théorème que j'ai donné dans les *Comptes rendus* peut alors s'énoncer ainsi :

L'orientation du système formé par ces p droites réelles est la même que l'orientation du système formé par les asymptotes de la courbe B.

Cette orientation est évidemment constante, et lorsqu'on la connaît, on peut, étant donnés $(2p-1)$ des points d'intersection, construire le dernier point.

8. Je considère maintenant une courbe A, telle que celle que j'ai examinée ci-dessus, possédant m foyers singuliers G, G', etc. et n asymptotes non isotropes, en sorte que son degré est égal à $2m+n$.

Un cercle quelconque la coupe en $2(m+n)$ points distincts des ombilics; soit d un quelconque de ces points. Prenons sur ce cercle un point arbitraire P et désignons par Q le point diamétralement opposé à P; considérons enfin la courbe C, dont j'ai déterminé les foyers dans le n° 6, et qui est l'enveloppe du côté d'un angle droit dont le deuxième côté s'appuie sur P, tandis que son sommet parcourt la courbe A. Il est clair que la droite Qd et les droites analogues sont les diverses tangentes que l'on peut mener à la courbe C par le point Q.

Je rappellerai un théorème que j'ai donné dans ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes,* insérée

dans le *Bulletin de la Société philomathique* (février 1867), théorème qui peut s'énoncer ainsi :

Si par un point Q *pris dans le plan d'une courbe réelle de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, l'orientation du faisceau formé par ces tangentes est la même que celle du faisceau formé par les droites qui joignent le point* Q *aux foyers de la courbe.*

Appliquons ce théorème : désignons par (Qd) l'orientation du faisceau de droite formé par Qd et les droites analogues, par (QP) l'orientation du faisceau formé par les $(m+n)$ droites coïncidant avec QP, par (Z) l'orientation du faisceau formé par les droites menées par Q parallèlement aux n asymptotes de la courbe A qui ne sont pas isotropes, par (QH) l'orientation du faisceau formé par la droite QH et les droites analogues; nous obtiendrons la relation

$$(Qd) = (QP) + (QH) + (Z) + \frac{n\pi}{2},$$

ou bien

$$(Qd) - (QP) - \frac{n\pi}{2} = (QH) + (Z).$$

Imaginons maintenant un système de $(m+n)$ droites réelles passant par les $2(m+n)$ points d'intersection du cercle et de la courbe A, et soit (T) son orientation, il est facile de voir que l'on a

$$(T) = (Qd) - (QP) - (m+n)\frac{\pi}{2}.$$

Transportons, parallèlement à eux-mêmes, de sorte que leur orientation ne change pas, les faisceaux entrant dans le second membre de la relation ci-dessus, en leur donnant comme sommet commun le centre R du cercle. Par suite de la position relative des points H, H', etc. et G, G', etc., on voit qu'au lieu du faisceau formé par les droites allant du point Q aux points H, H', etc., nous aurons à considérer le faisceau formé par les droites allant du point R aux points G, faisceau dont je désignerai l'orientation par (RG); le deuxième faisceau reste toujours composé des parallèles aux asymptotes et la relation donnée ci-dessus peut s'écrire ainsi

$$(\mathrm{T}) = (\mathrm{RG}) + (\mathrm{Z}) + \frac{m\pi}{2},$$

d'où le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une courbe algébrique, ayant m foyers singuliers et de degré $2m+n$; un cercle quelconque la coupe en $2(m+n)$ points distincts des ombilics. Si l'on imagine un faisceau de $(m+n)$ droites réelles passant par ces points d'intersection, l'orientation de ce faisceau diffère de m angles droits de l'orientation du faisceau formé par les n asymptotes de la courbe qui ne sont pas des droites isotropes, et par les m droites qui joignent le centre du cercle aux foyers singuliers de la courbe.*

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES SPIRIQUES.

Bulletin de la Société Philomathique; 1869.

1. On désigne sous le nom de lignes *spiriques* les courbes anallagmatiques du quatrième ordre qui ont un axe de symétrie. Ces lignes ont été depuis longtemps l'objet des études des géomètres, et, récemment encore, M. de La Gournerie leur a consacré un remarquable Mémoire inséré dans le *Journal de Liouville* (1869).

Comme toutes les anallagmatiques, ces courbes ont quatre foyers singuliers, dont deux réels et deux imaginaires; ces quatre foyers sont d'ailleurs les foyers ordinaires des quatre coniques homofocales au moyen desquelles, d'après la proposition de M. Moutard, on peut décrire ces courbes en les considérant comme enveloppes de cercles.

On peut distinguer deux espèces de spiriques; dans les premières, que je dirai être de première espèce, les deux foyers singuliers réels sont situés sur l'axe de symétrie; dans les autres, que je dirai être de deuxième espèce, ce sont les deux foyers singuliers imaginaires qui sont situés sur cet axe. Leurs propriétés, du reste, sont les mêmes au fond, et ne diffèrent que par les diverses façons de les énoncer. Dans tout ce qui suit, je considérerai spécialement les spiriques de première espèce.

N'ayant à considérer ici que les foyers singuliers de ces courbes, *je les désignerai simplement sous le nom de foyers.* Autour de chaque foyer singulier, comme centre, on peut décrire un cercle qui oscule la courbe en chacun des ombilics; je désignerai les deux cercles ainsi définis sous le nom de *cercles focaux*.

Étant donné un cercle, j'entends par puissance d'un point, relativement à ce cercle, le carré de la longueur de la tangente que l'on peut mener de ce point au cercle.

Les spiriques renferment, comme cas particuliers, un grand nombre de courbes remarquables, notamment les ovales de Descartes, ou, pour me servir d'une expression plus nette déjà employée par M. de La Gournerie, les *cartésiennes;* elles peuvent être considérées comme des spiriques dans lesquelles les deux foyers réels viennent se confondre.

La spirique peut encore s'abaisser au troisième degré; je la désignerai dans ce cas, pour abréger, par le nom de *cataspirique*. La cataspirique n'a qu'un seul foyer; elle peut être considérée comme une spirique dans laquelle un des foyers est rejeté à l'infini.

Les coniques peuvent aussi être regardées comme des spiriques dont les deux foyers ont été rejetés à l'infini.

D'un point de l'axe d'une spirique, on peut mener huit normales à la courbe, dont quatre se confondent avec l'axe et dont les quatre autres sont symétriques par rapport à cet axe. Je désignerai sous le nom de points *associés* les deux points situés d'un même côté de l'axe, et tels que les normales élevées en ces points concourent en un même point de l'axe.

2. Les spiriques jouissent de toutes les propriétés connues des anallagmatiques; elles possèdent en outre des propriétés particulières. Ces propriétés se déduisent facilement de la proposition suivante, qui s'établit immédiatement par la définition même des spiriques :

Proposition. — *Étant donnés deux points fixes* A *et* B *d'une spirique et un point mobile* C *situé sur cette courbe; si l'on joint le point mobile aux deux points fixes et si, par le milieu des cordes ainsi obtenues, on mène des perpendiculaires à ces cordes, ces perpendiculaires déterminent sur l'axe de la courbe deux divisions homographiques, dont les points doubles sont les deux foyers situés sur l'axe.*

Théorème I. — *Étant donnés deux points fixes* A *et* B *d'une spirique, si l'on joint un point* C *mobile sur cette courbe aux deux points fixes et si, sur les milieux des cordes* AC *et* BC, *on mène des perpendiculaires à ces cordes, coupant l'axe de*

symétrie aux points α *et* β; F *et* G *désignant les deux foyers réels de la spirique, le rapport*

$$\frac{F\alpha}{F\beta} : \frac{G\alpha}{G\beta}$$

demeure constant, quelle que soit la position du point C *sur la courbe, et sa valeur est égale au rapport des puissances des points* A *et* B *relativement au cercle focal ayant pour centre le foyer* F.

Théorème II. — *Étant donnés deux points fixes* A *et* B *d'une cataspirique et un point mobile* C *situé sur la courbe; si, par le milieu des cordes* AC *et* BC, *on mène des perpendiculaires coupant respectivement l'axe de la courbe aux points* α *et* β, *le rapport*

$$\frac{F\alpha}{F\beta}$$

est constant, quelle que soit la position du point mobile sur la courbe, et ce rapport est égal au quotient des puissances des points A *et* B *relativement à la courbe.*

Théorème III. — *Étant donnés deux points fixes* A *et* B *d'une cartésienne et un point mobile* C *situé sur la courbe; si, par les milieux des cordes* AC *et* BC, *on mène des perpendiculaires à ces cordes, coupant respectivement l'axe de la courbe aux points* α *et* β, *la différence*

$$\frac{1}{F(\alpha)} - \frac{1}{F(\beta)}$$

est constante, quelle que soit la position du point mobile sur la courbe, et la valeur de cette différence est proportionnelle à la différence des carrés des distances du foyer aux points A *et* B.

Théorème IV. — *Le produit des puissances d'un point quelconque d'une spirique relativement à ses deux cercles focaux est constant.*

Théorème V. — *Si l'on prend les polaires du point d'une spirique relativement à ses deux cercles focaux, la portion de* *la tangente interceptée entre ces deux droites a pour point milieu le point de contact.*

Théorème VI. — *Étant donnée une corde quelconque* AB *d'une spirique, si l'on prend les points de rencontre* α *et* β *de l'axe avec les normales menées à la courbe par les extrémités de cette corde, et le point* K *où la perpendiculaire élevée au milieu de la corde coupe cet axe, le point* K *est l'un des deux points doubles de l'involution déterminée par les points* F, G *et* α, β.

Remarque. — Cette propriété est exprimée par la relation suivante :

$$\frac{\overline{FK}^2}{\overline{GK}^2} = \frac{F\alpha.F\beta}{G\alpha.G\beta}.$$

Lorsque la courbe est une cataspirique, le foyer G est rejeté à l'infini, et l'on a la relation

$$\overline{FK}^2 = F\alpha.F\beta.$$

Lorsque la courbe est une cartésienne, les deux foyers coïncident en un même point F, et par conséquent les quatre points F, K; α, β sont en rapport harmonique.

Si la courbe est une conique, les deux foyers sont à l'infini et le point K est le milieu du segment $\alpha\beta$.

Théorème VII. — *Si deux points d'une spirique sont situés sur une même perpendiculaire à l'axe, ou s'ils sont à égale distance du centre de la courbe, les normales en ces points coupent l'axe en des points équidistants du centre.*

J'appelle ici *centre de la spirique* le point milieu des deux foyers.

Théorème VIII. — *Le point de l'axe où concourent les normales en deux points associés et le point où la perpendiculaire, élevée au milieu de la corde qui les joint, coupe l'axe, partagent harmoniquement le segment intercepté entre les foyers.*

Théorème IX. — *Le milieu de la droite qui joint deux points associés quelconques est situé sur une droite fixe perpendiculaire à l'axe.*

Théorème X. — *La somme des carrés des distances des deux points associés à un foyer est constante et égale au double du carré du rayon de ce cercle.*

Théorème XI. — *Si, par le milieu d'une corde d'une spirique, on mène une perpendiculaire à cette corde, le rapport des distances du point de rencontre de cette droite avec l'axe aux deux foyers est égal et de signe contraire au quotient de la puissance d'une des extrémités quelconques de la corde relativement au cercle focal du premier foyer, par la puissance de l'autre extrémité relativement à l'autre cercle focal.*

Théorème XII. — *La normale en un point d'une spirique partage la droite joignant les foyers en deux segments dont le rapport est égal et de signe contraire à celui des puissances du point relativement aux cercles focaux.*

Théorème XIII. — *Sur une normale quelconque à une spirique, le rapport des segments déterminés par le centre de courbure, sur la portion de la normale interceptée entre l'axe et la courbe, est proportionnel au carré du sinus de l'angle que la normale fait avec l'axe et au cube de la longueur de la tangente menée du point de rencontre de la normale avec l'axe au cercle décrit sur la droite qui joint les deux foyers comme diamètre.*

3. Les spiriques, qui ont deux axes de symétrie, sont à la fois de première et de seconde espèce et jouissent des propriétés précédentes relativement à leurs deux axes. De là des propriétés particulières que j'exposerai dans une autre Communication.

Les surfaces anallagmatiques, ayant un plan de symétrie, jouissent relativement aux normales qu'on peut leur mener de quelques-unes des propriétés énoncées ci-dessus. Je développerai plus tard ce point important de leur théorie.

SUR UNE

FORMULE RELATIVE AUX COURBES TRACÉES

SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

1. J'ai énoncé, comme exercice, dans les *Nouvelles Annales*, la proposition suivante :

Étant donnés deux points quelconques A *et* B *d'une surface du second ordre, si en ces points l'on mène les normales à la surface, et si l'on désigne par* a *et* b *les points où ces normales coupent un plan de symétrie quelconque de la surface, le plan mené par le milieu de la corde* AB *et perpendiculairement à cette corde passe par le milieu du segment* ab.

La même propriété peut s'énoncer ainsi : *Les projections des normales* Aa *et* Bb *sur la corde* AB *sont égales et de signes contraires.*

D'où la proposition suivante :

Soient deux points A *et* A' *situés sur une surface du second ordre ; désignons par* N *et* N' *les longueurs des normales en ces deux points, c'est-à-dire les longueurs des segments compris sur chaque normale entre la surface et un de ses plans de symétrie, par* V *et* V' *les angles que font respectivement les directions de ces normales avec la direction de la corde* AA' ; *on a, quelle que soit la position de ces deux points sur la surface, la relation*

$$\frac{N'}{N} = -\frac{\cos V}{\cos V'}. \tag{1}$$

2. Imaginons maintenant une courbe quelconque C tracée sur une surface du second ordre, et soient M et M' deux points infiniment voisins de cette courbe ; la relation précédente aura lieu pour ces deux points. N désignant la normale au point M, N + dN sera la normale au point M'. Il s'agit maintenant d'évaluer le rapport des deux cosinus $\cos V$ et $\cos V'$.

A cet effet, je me servirai des désignations et des formules employées par M. Serret dans sa Note *Sur les lignes de courbure des surfaces* insérée dans le *Traité de calcul différentiel* de Lacroix (p. 298).

Désignons par α, β, γ les angles que forme, avec trois axes rectangulaires, la tangente à la courbe au point M dont les coordonnées sont x, y, z ; par ξ, η, ζ et λ, μ, ν les angles formés avec les mêmes axes par la normale principale et par l'axe du plan osculateur. Soient aussi $d\varepsilon$ et $d\eta$ les angles de contingence et de torsion.

Désignons par α', β', γ' les angles formés avec les axes par la normale à la surface du second ordre au point (x, y, z). On peut toujours assigner une ligne à double courbure C' qui corresponde point par point à la courbe C, de telle sorte que la tangente en un point de cette courbe soit parallèle à la normale menée à la surface du second ordre par le point correspondant de la courbe C. Soient ξ', η', ζ' et λ', μ', ν' les angles que font avec les axes la normale principale et l'axe du plan osculateur de cette courbe ; soient, de plus, $d\varepsilon'$ et $d\eta'$ les angles de contingence et de torsion.

Cela posé, on peut écrire les trois groupes suivants de formules, par lesquelles les angles ω et ϖ se trouvent complètement définis :

$$\text{(A)}\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,\\
&\cos\alpha\cos\xi' + \cos\beta\cos\eta' + \cos\gamma\cos\zeta' = \sin\omega,\\
&\cos\alpha\cos\lambda' + \cos\beta\cos\mu' + \cos\gamma\cos\nu' = \cos\omega,\\
&\cos\xi\cos\alpha' + \cos\eta\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma' = -\sin\varpi,\\
&\cos\xi\cos\xi' + \cos\eta\cos\eta' + \cos\zeta\cos\zeta' = -\cos\varpi\cos\omega,\\
&\cos\xi\cos\lambda' + \cos\eta\cos\mu' + \cos\zeta\cos\nu' = \cos\varpi\sin\omega,\\
&\cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma' = \cos\varpi,\\
&\cos\lambda\cos\xi' + \cos\mu\cos\eta' + \cos\nu\cos\zeta' = -\sin\varpi\cos\omega,\\
&\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = \sin\varpi\sin\omega,
\end{aligned}\right.$$

La différentiation de ces équations conduit aux trois suivantes :

$$\sin\omega\, d\varepsilon' = \sin\varpi\, d\varepsilon, \tag{2}$$

$$d\eta' + d\omega = -\cos\varpi\, d\varepsilon, \tag{3}$$

$$d\varpi = d\eta + \cos\omega\, d\varepsilon'. \tag{4}$$

3. Pour évaluer $\cos V$ et $\cos V'$, je remarque que, les cosinus des angles que fait la normale au point M avec les axes étant respectivement $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, le cosinus de l'angle que fait la normale au point M′ avec l'axe des x est

$$\cos\alpha' + d\cos\alpha' + \frac{1}{2}d^2\cos\alpha',$$

expression qui, en prenant l'arc de la courbe pour variable indépendante et en employant les formules données par M. Serret (Lacroix, p. 284 et suivantes), devient

$$\cos\alpha' + \cos\xi'\, d\varepsilon' + \frac{1}{2}(\cos\xi'\, d^2\varepsilon' - \cos\alpha'\, d\varepsilon'^2 - \cos\lambda'\, d\varepsilon'\, d\eta').$$

Les cosinus des angles que fait cette normale avec les deux autres axes auraient une forme semblable; il est inutile de les écrire.

Cherchons maintenant les cosinus des angles que fait avec les axes la corde MM′; il suffit évidemment de trouver des quantités proportionnelles à ces cosinus. On pourra donc, au lieu de ces cosinus, employer les projections de la corde MM′ sur les trois axes, ou bien δx, δy et δz : $x + \delta x$, $y + \delta y$ et $z + \delta z$ désignant les coordonnées du point M′.

La formule de Taylor donne, en se bornant aux premiers termes,

$$\delta x = \left(\frac{dx}{ds}\right)ds + \frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{ds}\right)ds + \frac{1}{6}d^2\left(\frac{dx}{ds}\right)ds;$$

or $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$; on pourra donc prendre, pour le cosinus de l'angle que fait avec l'axe des x la corde MM′, l'expression

$$\cos\alpha + \frac{1}{2}d\cos\alpha + \frac{1}{6}d^2(\cos\alpha),$$

expression qui, au moyen des formules de M. Serret, devient

$$\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\xi\, d\varepsilon + \frac{1}{6}(\cos\xi\, d^2\varepsilon - \cos\alpha\, d\varepsilon^2 - \cos\lambda\, d\varepsilon\, d\eta).$$

Les deux autres cosinus auraient une forme semblable; il est inutile d'en donner la valeur.

Ceci posé, la formule connue qui donne le cosinus de l'angle de deux droites fournit immédiatement, en employant les relations (A), les deux expressions suivantes :

$$\cos V = -\frac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned}\cos V' = &-\frac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + \sin\omega\, d\varepsilon' \\ &- \frac{1}{2}\cos\varpi\cos\omega\, d\varepsilon\, d\varepsilon' + \frac{1}{2}\sin\omega\, d^2\varepsilon' - \frac{1}{2}\cos\omega\, d\varepsilon'\, d\eta'.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Cette dernière expression peut se simplifier; on a, en effet, d'après l'équation (2),

$$\sin\omega\, d\varepsilon' = \sin\varpi\, d\varepsilon;$$

en outre, en différentiant cette dernière relation, on obtient

$$\sin\omega\, d^2\varepsilon' = d(\sin\varpi\, d\varepsilon) - \cos\omega\, d\varepsilon'\, d\omega,$$

ou bien, comme d'après l'équation (3),

$$d\omega = -d\eta' - \cos\varpi\, d\varepsilon,$$

$$\sin\omega\, d^2\varepsilon' = d(\sin\varpi\, d\varepsilon) + \cos\omega\, d\varepsilon'\, d\eta' + \cos\omega\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\varepsilon';$$

en portant ces valeurs de $\sin\omega\, d\varepsilon'$ et de $\sin\omega\, d^2\varepsilon'$ dans l'équation (6), il viendra, toutes réductions faites,

$$\cos V' = \frac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + \frac{1}{2}d(\sin\varpi\, d\varepsilon). \tag{7}$$

L'équation (1) devient donc, en multipliant les deux termes du second membre par 2,

$$1 + \frac{dN}{N} = -\frac{-\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{3}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{3}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta}{\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{3}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{3}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + d(\sin\varpi\, d\varepsilon)};$$

d'où, en réduisant,

$$\frac{dN}{N} = \frac{\frac{2}{3}\sin\varpi\, d^2\varepsilon + \frac{2}{3}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta - d(\sin\varpi\, d\varepsilon)}{\sin\varpi\, d\varepsilon};$$

ou bien encore

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3}\frac{d^2\varepsilon}{d\varepsilon} - \frac{d(\sin\varpi\, d\varepsilon)}{\sin\varpi\, d\varepsilon} + \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi}.$$

Remarquons maintenant que $d\varepsilon = \frac{ds}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la courbe C, et que l'arc est la variable indépendante; par conséquent, on a $d^2\varepsilon = ds\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)$. La relation précédente devient donc

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3}\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)} - \frac{d\left(\frac{\sin\varpi}{\rho}\right)}{\frac{\sin\varpi}{\rho}} + \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi};$$

d'où, en intégrant,

$$\log N = \frac{2}{3}\log\frac{1}{\rho} - \log\frac{\sin\varpi}{\rho} + \frac{2}{3}\int\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi};$$

et, en passant des logarithmes aux nombres, après avoir chassé le dénominateur 3,

$$\frac{N^3}{\rho}\sin\varpi^3 = e^{2\int\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi}} \times \text{const.}$$

D'où l'on déduit la proposition suivante, en remarquant que ϖ désigne le complément de l'angle que fait avec la normale à la surface la normale principale de la courbe C :

Théorème. — *Étant donnée une courbe quelconque tracée sur une surface du second ordre, désignons, en un point quelconque de cette courbe, l'angle de torsion par* $d\eta$ *et par* ϖ *le complément de l'angle que fait en ce point, avec la normale à la surface, la normale principale; cela posé, si l'on considère un arc de la courbe compris entre les points* A_0 *et* A_1, *et si l'on désigne respectivement par* N_0 *et* N_1, ρ_0 *et* ρ_1, ϖ_0 *et* ϖ_1 *les valeurs de la normale, du rayon de courbure de la courbe et de l'angle* ϖ *aux points extrêmes de l'arc, on a la relation suivante :*

$$\frac{N_1^3}{\rho_1^3}\sin\varpi_1^3 : \frac{N_0^3\sin\varpi_0^3}{\rho_0} = e^{2\int\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi}}, \tag{8}$$

l'intégrale contenue dans le second membre s'étendant le long de la courbe du point A_0 *au point* A_1.

4. La formule précédente fournit aisément les relations connues pour les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second ordre.

Considérons d'abord une ligne géodésique; d'après la définition de cette ligne, on a pour tous ses points $\sin\varpi = 1$ et $\operatorname{tang}\varpi = \infty$; l'intégrale contenue dans le second membre de l'équation (8) est donc nulle, et il vient simplement

$$\frac{N_1^3}{\rho_1} : \frac{N_0^3}{\rho_0} = 1;$$

d'où cette proposition :

Le long d'une même ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre, le rayon de courbure de la courbe est proportionnel au cube de la normale.

C'est le théorème de Joachimsthal.

5. Supposons maintenant que C soit une des lignes de courbure de la surface; alors, d'après le théorème de Lancret, on a

$$d\eta = d\varpi;$$

l'intégrale contenue dans le second membre de l'équation (8) devient alors

$$\int\frac{d\varpi}{\operatorname{tang}\varpi} = \log\sin\varpi_1 - \log\sin\varpi_0,$$

le second membre de cette équation devient

$$e^{2(\log\sin\varpi_1 - \log\sin\varpi_0)} = \frac{\sin\varpi_1^2}{\sin\varpi_0^2},$$

et la formule (8) donne alors

$$\frac{N_1^3\sin\varpi_1}{\rho_1} : \frac{N_0^3\sin\varpi_3}{\rho_0} = 1;$$

d'où l'on conclut que le long de la courbe $\frac{N^2\sin\varpi}{\rho}$ conserve une valeur constante. Remarquons maintenant que, d'après le théorème de Meusnier, $\frac{\sin\varpi}{\rho}$ est égal à $\frac{1}{r}$, r désignant le rayon de courbure de la section normale tangente à C; le long d'une même ligne de courbure $\frac{N^2}{r}$ conserve donc la même valeur.

D'où cette proposition, due à M. Dupin :

Le long d'une même ligne de courbure, le rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe varie proportionnellement au cube de la normale.

6. Si j'avais voulu me restreindre au cas des lignes géodésiques et des lignes de courbure, il eût été très facile de remplacer les considérations analytiques qui précèdent par des considérations géométriques très simples et très élémentaires qui eussent conduit immédiatement aux théorèmes de Joachimsthal et de M. Dupin. Je laisse ce soin au lecteur; mon seul but, dans cette Note, était d'établir la formule générale (8), sur laquelle j'aurai plus tard l'occasion de revenir, tant pour en montrer l'application à la géométrie des surfaces du second ordre que pour montrer comment elle s'étend aux surfaces de degré supérieur.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A M. BOURGET.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

Une erreur s'est glissée dans la rédaction de la question 960. Il existe bien, pour chaque surface du second ordre, un groupe de surfaces du même ordre qui jouissent de la propriété indiquée, mais ces surfaces ne sont pas homofocales à la première.

Permettez-moi, en faisant ici cette rectification, d'entrer à ce sujet dans quelques détails qui, malgré leur simplicité, pourront peut-être intéresser vos lecteurs.

Proposons-nous cette question :

Trouver deux surfaces S *et* Σ *qui se correspondent point par point, de telle sorte que le plan mené perpendiculairement à la corde qui joint deux points quelconques* A *et* B *de la surface* S *et par le milieu de cette corde passe par le milieu de la corde* $\alpha\beta$ *qui joint les points correspondants sur la surface* Σ.

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point quelconque de S et (ξ, η, ζ) les coordonnées du point correspondant de Σ, en sorte que ξ, η, ζ sont des fonctions actuellement indéterminées de x, y et z; soient encore (x', y', z') les coordonnées d'un autre point arbitraire de S et (ξ', η', ζ') les coordonnées du point qui lui correspond sur Σ. Si les deux surfaces S et Σ jouissent de la propriété énoncée ci-dessus, on devra avoir

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&(\xi+\xi'-x-x')(x-x')\\&\quad+(\eta+\eta'-y-y')(y-y')+(\zeta+\zeta'-z-z')(z-z')=0.\end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que les relations qui existent entre les points correspondants des deux surfaces soient de la forme

$$\xi = mx, \qquad \eta = ny, \qquad \zeta = pz, \tag{2}$$

m, n et p désignant des quantités constantes, l'équation (1) deviendra alors

$$(m-1)(x'^2 - x^2) + (n-1)(y'^2 - y^2) + (p-1)(z'^2 - z) = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned}&(m-1)x'^2 + (n-1)y'^2 + (p-1)z'^2 \\ &\quad = (m-1)x^2 + (n-1)y^2 + (p-1)z^2.\end{aligned}$$

On satisfera donc d'une façon générale à l'équation (1), quels que soient les deux points donnés, si on les assujettit à rester sur la surface du second ordre

$$(m-1)x^2 + (n-1)y^2 + (p-1)z^2 = \text{const.}$$

Faisons la constante égale à λ^2 et $m - 1 = \frac{\lambda^2}{a^2}$, $n - 1 = \frac{\lambda^2}{b^2}$, $p - 1 = \frac{\lambda^2}{c^2}$; a^2, b^2 et c^2 étant de nouvelles constantes, l'équation de la surface S deviendra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et l'équation d'une quelconque des surfaces Σ sera, en vertu des formules de transformation (2),

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2+\lambda^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2+\lambda^2)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2+\lambda^2)^2} = 1,$$

équation où λ désigne un paramètre arbitraire.

Il résulte immédiatement, soit des formules (2), soit encore de la propriété même qui a servi à définir les surfaces, que la droite qui joint un point quelconque A de S au point correspondant de Σ est normale en S au point A.

On voit immédiatement que les surfaces Σ peuvent être regardées comme le lieu des points qui partagent dans un rapport constant les portions des normales interceptées entre la surface S et un quelconque des plans de symétrie de cette surface.

Si l'on fait successivement $\lambda^2 = -a^2$, $-b^2$ et $-c^2$, la surface Σ se confond tour à tour avec les trois plans de symétrie de S;

on peut donc faire correspondre chacun de ces plans avec S, et point par point de telle sorte que le mode de correspondance jouisse de la propriété indiquée. Le point correspondant sur un des plans de symétrie à un point donné A de S est évidemment le point de ce plan où passe la normale en A à la surface; d'où la solution de la question que j'ai proposée dans les *Nouvelles Annales*.

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE [1].

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

Définition des droites isotropes et des ombilics. — Coordonnées isotropes. — Représentation d'un point imaginaire. — Distance de deux points imaginaires.

1. Dans tout ce qui suit, je considérerai toujours un plan *réel* et les figures tracées dans ce plan. Plus tard, en traitant de la Géométrie de l'espace, j'examinerai quelles modifications et quelles restrictions on doit apporter aux résultats obtenus, quand on veut les appliquer à des plans imaginaires et aux figures tracées dans ces plans.

Considérons donc un plan réel, et dans ce plan deux axes rectangulaires réels Ox et Oy, auxquels nous rapporterons les points du plan suivant la méthode de Descartes.

Soient A un point quelconque de ce plan, α et β ses coordonnées réelles ou imaginaires.

L'équation d'un cercle ayant ce point pour centre et la longueur ρ pour rayon sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2.$$

Si nous supposons que le rayon ρ décroisse indéfiniment jusqu'à devenir nul, la courbe représentée par l'équation précédente variera de forme, en demeurant toujours un cercle. A la limite, pour $\rho=0$, elle représentera un cercle de rayon nul; remarquons que, dans ce cas, le premier membre de son équation se décom-

(1) Nous reproduisons ici la première leçon du Cours de Géométrie supérieure, professé cette année par M. Laguerre à la salle Gerson.

pose en deux facteurs

$$(y-\beta)+(x-\alpha)i$$

et

$$(y-\beta)-(x-\alpha)i;$$

en sorte que, en réalité, le cercle de rayon nul ayant pour centre le point réel ou imaginaire dont les coordonnées sont α et β se décompose en deux droites dont les équations sont

$$(y-\beta)=i(x-\alpha)$$

et

$$(y-\beta)=-i(x-\alpha).$$

Ces droites remarquables, en lesquelles se décompose un cercle lorsque son rayon devient nul, sont caractérisées évidemment par cette propriété très simple d'avoir respectivement $+i$ et $-i$ pour coefficient angulaire.

Si donc l'on imagine tracées dans le plan toutes les droites analogues que l'on obtiendrait en considérant tous les cercles de rayon nul ayant pour centres les différents points du plan, l'on voit que toutes ces droites formeront dans le plan deux systèmes de droites parallèles.

Pour l'un de ces systèmes, le coefficient angulaire est $+i$, en sorte que la droite de ce système qui passe par le point (α, β) a pour équation

$$(y-\beta)=(x-\alpha)i;$$

je dirai que cette droite est la droite *isotrope du premier système* passant par le point (α, β). Toutes les droites isotropes du premier système étant parallèles entre elles concourent en un même point de l'infini, qui est défini par le coefficient angulaire commun à ces droites; dans tout ce qui suit, je désignerai constamment ce point de la droite de l'infini par la lettre I.

Pour l'autre système, le coefficient angulaire est $-i$, en sorte que la droite de ce système qui passe par le point (α, β) a pour équation

$$(y-\beta)=-i(x-\alpha);$$

je dirai que cette droite est la droite *isotrope du second système* passant par le point (α, β). Toutes les droites de ce second système concourent en un même point de la droite de l'infini, que je désignerai constamment par la lettre J.

2. Il était nécessaire, vu l'importance des droites remarquables que je viens de mentionner, de leur donner un nom spécial, bref et expressif. L'expression de droite *isotrope*, n'ayant pas encore de signification en Géométrie, m'a paru convenable pour atteindre ce but; elle se justifie en remarquant que l'équation d'une quelconque de ces droites, comme il est facile de le vérifier, ne change pas de forme lorsque, conservant la même origine pour les axes, on passe du système d'axes primitif à un autre système d'axes rectangulaires quelconques.

Une propriété essentielle de droites isotropes, et qui pourrait servir à les définir, est la suivante : la distance entre deux points quelconques d'une droite isotrope *situés à distance finie dans le plan* est nulle. En d'autres termes, ces droites satisfont à l'équation différentielle

$$ds = 0.$$

Sur une surface quelconque, on peut étudier les courbes qui satisfont à cette équation différentielle; ces courbes sont des lignes géodésiques de la surface, et nous leur donnerons aussi le nom de *lignes isotropes*.

Les deux points remarquables de la droite de l'infini vers lesquels convergent les deux systèmes de droites isotropes d'un plan, et que nous avons désignés par les lettres I et J, méritent aussi, vu leur fréquent usage, une dénomination simple et concise; je les désignerai sous le nom d'*ombilics du plan;* ces points jouent, en effet, dans le plan, le même rôle que jouent, dans la théorie des surfaces du second ordre, les ombilics de ces surfaces situés à l'infini.

3. De ce qui précède, il résulte que par chaque point du plan réel ou imaginaire passent deux droites isotropes, l'une du premier système et l'autre du second système, et que ces droites peuvent être obtenues en joignant le point donné aux deux ombilics du plan.

Les deux droites isotropes passant ainsi par un point A forment, dans leur ensemble, un cercle de rayon nul qui jouit de toutes les

propriétés du cercle. Voici celles de ces propriétés sur lesquelles je m'appuierai principalement :

« Si une droite menée par un point B du plan coupe, aux points m et m', les deux droites isotropes issues d'un point A, le produit des segments Bm et Bm' est égal au carré de la longueur BA.

» Les choses étant posées comme précédemment, la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite Bmm' a pour pied le point milieu du segment mm'. »

Le cercle ainsi formé par les deux droites isotropes passant par un point A ne contient évidemment d'autre point réel que le point A, si ce point est réel. Examinons ce qui se passe lorsque le point A est imaginaire.

On peut d'abord remarquer que toute droite imaginaire du plan contient un point réel. En effet, son équation, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire, peut se mettre sous la forme

$$P + Qi = 0.$$

D'où l'on voit que le point réel, qui est l'intersection des deux droites réelles $P = 0$ et $Q = 0$, se trouve sur la droite proposée. Toute droite imaginaire contient donc toujours un point réel, qui peut être à l'infini, lorsque les droites $P = 0$ et $Q = 0$ sont parallèles; dans ce cas, la droite imaginaire passe par un point réel de la droite de l'infini, ou, autrement dit, a une direction réelle. Il est d'ailleurs évident qu'une droite imaginaire ne peut contenir qu'un seul point réel.

Je dirai que deux points sont *imaginairement conjugués* lorsque leurs coordonnées sont respectivement des quantités imaginairement conjuguées; que deux droites sont imaginairement conjuguées lorsque l'on peut passer de l'équation de l'une à l'équation de l'autre en changeant $+i$ et $-i$, et réciproquement.

De cette définition, il résulte immédiatement que :

1° Si un point se trouve sur une droite imaginaire D, le point qui lui est imaginairement conjugué se trouve sur la droite imaginairement conjuguée à D;

2° Deux droites imaginairement conjuguées se coupent en un point réel;

3° Deux points imaginairement conjugués sont toujours situés sur une même droite réelle, et cette droite est évidemment la seule droite réelle qu'on puisse faire passer par chacun des deux points.

Cela posé, si, par un point A, on mène une droite isotrope du premier système, cette droite contient un point réel a, qui sera d'ailleurs à distance finie, puisque la droite isotrope a une direction imaginaire et coupe la droite de l'infini à l'ombilic I; de même la droite isotrope du second système, passant par le point A, contient un point réel a', situé également à distance finie.

On voit que le point A détermine complètement les deux points a et a'; réciproquement, ces deux derniers points déterminent sans ambiguïté le point A, car ce dernier point est l'intersection de la droite isotrope du premier système passant par a avec la droite isotrope du second système passant par a'.

Nous pourrons donc fixer sans ambiguïté la position d'un point imaginaire dans le plan, par la position des deux points réels a et a', ou, si l'on veut, par la position du segment aa'; nous dirons que aa' est le *segment représentatif* du point imaginaire A, que a est l'origine de ce segment, et que a' en est l'extrémité.

Il est très important d'établir que ce segment représentatif d'un point est toujours le même, quels que soient les axes du plan auxquels on l'ait rapporté.

Soient, à cet effet, α et β les coordonnées imaginaires d'un point A, et, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire,

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' i,$$
$$\beta = \beta' + \beta'' i.$$

La droite isotrope du premier système passant par ce point a pour équation

$$(y - \beta' - \beta'' i) = (x - \alpha' - \alpha'' i) i;$$

les coordonnées a_0 et b_0 du point réel a situé sur cette droite sont évidemment

$$a_0 = \alpha' - \beta''$$

et

$$b_0 = \beta' + \alpha''.$$

Changeons maintenant de système d'axes rectangulaires, en transportant leur origine au point (ξ, η) et, en les faisant tourner de

l'angle ω, les formules de transformation à employer seront les suivantes :

$$X = \xi + x \cos\omega - y \sin\omega,$$
$$Y = \eta + x \sin\omega + y \cos\omega.$$

Les nouvelles coordonnées du point A seront, dans ce nouveau système,

$$\xi + (\alpha' + \alpha'' i)\cos\omega - (\beta' + \beta'' i)\sin\omega$$

et

$$\eta + (\alpha' + \alpha'' i)\sin\omega + (\beta' + \beta'' i)\cos\omega.$$

Les coordonnées du point réel situé sur la droite isotrope du premier système passant par ce point seront, d'après les formules précédentes,

$$a'_0 = \xi + \alpha' \cos\omega - \beta' \sin\omega - \alpha'' \sin\omega - \beta'' \cos\omega$$

et

$$b'_0 = \eta + \alpha' \sin\omega + \beta' \cos\omega + \alpha'' \cos\omega - \beta'' \sin\omega,$$

ou bien

$$a'_0 = \xi + a_0 \cos\omega - b_0 \sin\omega,$$
$$b'_0 = \eta + a_0 \sin\omega + b_0 \cos\omega.$$

L'on voit que a'_0 et b'_0 se déduisent de a_0 et de b_0 par les formules de transformation données ci-dessus; la proposition est donc démontrée.

4. Cette proposition justifie l'emploi du segment aa' pour représenter le point imaginaire A. La position de ce segment ne dépend que de la position du point imaginaire lui-même, et nullement du choix des axes coordonnés, que nous n'aurons plus dès lors à considérer que pour éclaircir et établir avec plus de sûreté quelques formules fondamentales.

Je désignerai, dans tout ce qui suit, un point imaginaire par une simple lettre, ou, lorsque l'on voudra mettre en évidence les éléments réels qui le déterminent, par son segment représentatif; en sorte qu'un point imaginaire A, ayant pour segment représentatif aa', sera représenté par la notation (a, a').

Aux considérations qui précèdent, j'ajouterai les réflexions suivantes. Quand un point est réel, les deux extrémités du segment qui le représentent se confondent avec ce point lui-même. Le cas d'un point réel est donc contenu dans le cas général d'un point imaginaire.

Soient A un point imaginaire, aa' son segment représentatif; si l'on imagine menée par a une droite isotrope du second système, cette droite sera imaginairement conjuguée à la droite Aa; de même, si par a' on mène une droite isotrope du premier système, cette droite sera imaginairement conjuguée à la droite Aa'.

Les deux droites ainsi obtenues se coupent en un point A' qui est évidemment le point imaginairement conjugué du point A, et qui sera représenté par le segment $a'a$.

D'où cette proposition : Si (a, a') désigne un point imaginaire, (a', a) désigne le point qui lui est imaginairement conjugué.

D'où encore les conséquences suivantes, que je me borne à mentionner à cause de leur simplicité :

1° La droite réelle qui joint deux points imaginairement conjugués est perpendiculaire au segment qui représente à la fois ces deux points et elle passe par le milieu de ce segment;

2° Si un point imaginaire est situé sur une droite réelle D, et si l'on connaît l'origine a de son segment représentatif, il suffira pour obtenir l'extrémité de ce segment, d'abaisser de l'origine une perpendiculaire sur D et de prolonger cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même.

5. Dans le cours de ces leçons, lorsque, pour plus de clarté ou pour développer certains points particuliers, j'aurai recours à la Géométrie analytique, j'emploierai de préférence un système de coordonnées particulier, déjà employé du reste avec succès par divers géomètres, et que je désignerai sous le nom de *coordonnées isotropes*.

Pour le définir, considérons un point quelconque O du plan, et menons par ce point dans un sens déterminé une droite indéfinie Oω, que j'appellerai l'*axe des coordonnées*, le sens positif de cet axe étant fixé par ce qui précède.

Par un point quelconque du plan A, menons une droite isotrope du premier système, et soit α le point de rencontre de cette droite avec l'axe; désignons de même par β le point de rencontre de l'axe avec la droite isotrope du second système passant par le point A. Je prendrai pour coordonnées les deux longueurs Oα et Oβ, qui définissent évidemment la position du point A, et je poserai $O\alpha = u$ et $O\beta = w$.

Les formules relatives aux coordonnées isotropes sont faciles à établir; je me bornerai aux suivantes, dont je vais me servir tout à l'heure.

Si nous rapportons la figure à des axes rectangulaires, en prenant Oω pour axe des x, et la perpendiculaire en O pour axe des y, et si, de plus, nous désignons par x et y les coordonnées du point A dans ce nouveau système, l'on voit immédiatement que l'on a

$$u = x + yi,$$
$$w = x - yi.$$

Soient deux points du plan a et a', et ici je les suppose *essentiellement réels;* soient respectivement x, y et x', y', u, w et u', w' leurs coordonnées dans les deux systèmes.

On a les formules connues

$$x' - x = aa' \cos\lambda,$$
$$y' - y = aa' \sin\lambda,$$

formules dans lesquelles aa' est *essentiellement positif,* et où λ désigne l'angle qu'il faut faire décrire au segment aa', en le faisant tourner autour du point a, dans le sens des aiguilles d'une montre [1], jusqu'à ce que la *direction positive* de cette droite devienne parallèle à la *direction positive* de l'axe Oα. J'entends ici par direction positive de la droite aa', la direction dans laquelle se mouvrait un point mobile allant du point a au point a', sans passer par l'infini.

Il est clair que, par la définition qui précède, l'angle λ est défini à un multiple près d'une circonférence entière.

Multiplions maintenant la deuxième des relations précédentes par i, ajoutons-la à la première; retranchons-les ensuite l'une de l'autre; on obtiendra les deux équations fondamentales suivantes :

$$(1) \qquad u' - u = aa'.e^{\lambda i},$$
$$(2) \qquad w' - w = aa'.e^{-\lambda i},$$

équations où aa' et λ ont le sens que j'ai fixé précédemment.

[1] C'est ce que, durant tout ce Cours, j'appellerai le *sens direct de rotation*.

Des deux équations précédentes découlent les deux qui suivent :

$$(3)\qquad \frac{u'-u}{w'-w} = e^{2\lambda i},$$

$$(4)\qquad (u'-u)(w'-w) = \overline{aa'}^2.$$

Je ferai remarquer, en terminant, que les formules précédentes subsistent même quand les points a et a' sont imaginaires, mais alors il est très délicat de fixer la valeur précise de l'angle λ.

La formule (4) seule peut être employée sans ambiguïté, car elle détermine le carré de la distance des deux points, carré qui a par lui-même une valeur parfaitement déterminée.

6. *Évaluation de la distance de deux points imaginaires.* — Soient deux points imaginaires A et B, et soient respectivement u, w et u', w' leurs coordonnées isotropes. Désignons de plus par aa' le segment représentatif du point A, et par bb' le segment représentatif du point B; autrement dit, posons $A = (a, a')$ et $B = (b, b')$.

La formule (4) du paragraphe précédent pouvant être employée même pour des points imaginaires, l'on a

$$\overline{AB}^2 = (u-u')(w-w').$$

Je remarque maintenant que, pour les deux points A et a, la coordonnée u a la même valeur; il en est de même relativement aux deux points B et b; cela résulte évidemment de la définition même des points a et b. Les points a et b étant réels, on peut leur appliquer la formule (1) du n° 5, et l'on a

$$u'-u = ab.e^{\lambda i},$$

ab étant pris en valeur absolue, et λ désignant l'angle dont il faut faire tourner la direction ab pour l'amener à être parallèle à la direction positive de l'axe.

De même les deux points A et a', ainsi que les deux points B et b' ayant respectivement pour la coordonnée w la même valeur, l'on a sans ambiguïté

$$w'-w = a'b'.e^{-\theta i},$$

$a'b'$ étant pris en valeur absolue, et θ désignant l'angle dont il

faut faire tourner la direction $a'b'$ pour l'amener à être parallèle à la direction positive de l'axe.

Des relations précédentes, on déduit immédiatement

$$(u'-u)(w'-w) = \overline{AB}^2 = ab.a'b'.e^{(\lambda-\theta)i},$$

ou en posant $\lambda - \theta = \mu$,

$$\overline{AB}^2 = ab.a'b'.e^{\mu i}.$$

Il est clair que l'angle μ est l'angle dont il faut faire tourner la direction ab, autour du point a et dans le sens direct, pour l'amener à être parallèle à $a'b'$.

On a donc la proposition fondamentale suivante :

PROPOSITION. — *Étant donnés deux points imaginaires* $A = (a, a')$ *et* $B = (b, b')$, *le carré de la distance de ces deux points est une quantité imaginaire dont le module est la racine carrée du produit des longueurs* ab *et* $a'b'$, *ces longueurs étant prises positivement, et dont l'argument est l'angle dont il faut faire tourner la direction* ab, *autour du point* a *et dans le sens direct, pour l'amener à être parallèle à* $a'b'$.

Remarque. — La proposition précédente s'applique évidemment au cas où l'un des deux points donnés est réel, les deux extrémités du segment qui le représente se confondant alors avec ce point lui-même.

7. Deux points A et B, réels ou imaginaires, étant donnés dans un plan, on peut, comme on vient de le voir, déterminer facilement et sans ambiguïté le carré de la distance AB.

Quant à la distance AB elle-même, elle n'est déterminée qu'au signe près; ou, si l'on veut, l'argument de la quantité imaginaire qui exprime sa valeur n'est déterminé qu'à un multiple près de π.

Un segment de droite isolé ne peut, en effet, comporter par lui-même aucun signe; mais, quand il se trouve sur une droite déterminée, réelle ou imaginaire, et quand on a préalablement fixé le sens que l'on est convenu de regarder comme positif sur cette droite, le segment a lui-même une valeur bien déterminée.

C'est à la détermination de cette valeur que je consacrerai la leçon suivante.

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE (¹).

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

I. — *Considérations générales sur la représentation des points imaginaires situés sur une courbe donnée.*

1. L'emploi des imaginaires en Géométrie ne donne lieu à aucune difficulté sérieuse. Les notions essentielles sur lesquelles il repose sont immédiatement fournies par la Géométrie analytique, et trouvent en elle leur entière légitimation. Ces notions puisées dans l'analyse, le rôle de la Géométrie est de les développer et d'en poursuivre les conséquences par les moyens et avec les ressources qui lui sont propres.

Il y a deux points sur lesquels il semble nécessaire de compléter la théorie. D'une part, on ne sait pas toujours *réaliser* et effectuer les constructions où entrent des données imaginaires, en sorte que certains problèmes, dont la considération des quantités imaginaires fournit une solution très simple et presque immédiate, ne sont en quelque sorte résolus que théoriquement, les constructions auxquelles conduirait le mode de démonstration employé n'étant pas immédiatement réalisables.

D'autre part, lorsque, dans une proposition, certaines parties de la figure deviennent imaginaires, la proposition donne lieu à plusieurs théorèmes relatifs aux éléments réels de la figure. Tout

(¹) Je me propose de développer, dans cette série d'articles, quelques points de la théorie des sections coniques que j'ai laissés de côté dans le Cours que j'ai professé à la salle Gerson. Le lecteur pourra consulter sur ces questions diverses Notes que j'ai publiées dans le *Bulletin de la Société philomathique* (1867-1869), et ma Note *Sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* insérée dans le journal *L'Institut* (18 mai 1870).

théorème exprime, en effet, une relation entre les données, relation que l'on peut représenter par l'équation

$$R = 0;$$

si quelques-unes des données deviennent imaginaires, l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$P + Qi = 0,$$

ce qui entraîne les deux équations

$$P = 0 \quad \text{et} \quad Q = 0,$$

équations qui, évidemment, sont l'expression de deux théorèmes relatifs aux éléments réels de la figure.

Pour résoudre complètement les questions que soulève l'emploi des imaginaires en Géométrie, il faut donc pouvoir, d'une proposition où certains éléments sont imaginaires, dégager, par une voie purement géométrique et la considération seule de la figure, les propositions *réelles* qu'elle comprend dans son énoncé.

On pourrait presque, à certains égards, dire que la Géométrie en est actuellement au même point où serait l'Analyse, si l'on se contentait de montrer que toute quantité imaginaire peut être mise sous la forme

$$a + bi,$$

sans indiquer les moyens que l'on doit employer pour la réduire à cette forme.

2. Considérons, dans un plan réel, une droite $O\omega$ que nous prendrons pour l'axe d'un système de coordonnées isotropes; considérons en même temps un système de coordonnées rectangulaires ayant pour axe des x la droite $O\omega$, l'axe des y étant la perpendiculaire élevée en O à la droite $O\omega$.

Soit A un point du plan, réel ou imaginaire, et soient

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i$$

ses coordonnées isotropes.

Ce point sera représenté dans le plan par un segment représentatif aa', l'origine a de ce segment étant le point réel situé sur la droite isotrope du premier système qui passe par A.

En coordonnées rectangulaires, l'équation de cette droite est

$$y = i(x - \alpha - \beta i);$$

d'où l'on voit immédiatement que les coordonnées rectangulaires du point a sont

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta.$$

L'extrémité a' du segment est le point réel situé sur la droite isotrope du second système passant par A ; cette droite a pour équation

$$y = -i(x - \gamma - \delta i);$$

donc le point a' a pour coordonnées

$$x = \gamma \quad \text{et} \quad y = -\delta;$$

d'où cette conclusion :

Étant donné un point A *dont les coordonnées isotropes sont*

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i,$$

l'origine de son segment représentatif a pour coordonnées rectangulaires

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

et les coordonnées de l'extrémité de ces segments sont

$$x = \gamma, \quad y = -\delta.$$

On peut dire, si l'on veut, que, dans le mode de représentation employé par Cauchy, l'origine du segment représente la quantité $u = \alpha + \beta i$, et que l'extrémité représente la quantité $\gamma - \delta i$ *conjuguée* de la coordonnée w.

3. Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que de points distribués d'une façon quelconque dans le plan. Supposons maintenant que nous considérions des points situés sur une courbe donnée (C),

dont l'équation en coordonnées isotropes soit

$$(1) \qquad f(u, w) = 0.$$

Un point réel a, pris arbitrairement dans le plan, pourra toujours être considéré comme l'origine d'un segment représentatif d'un point situé sur la courbe.

Soient, en effet, α et β les coordonnées rectangulaires de ce point ; faisons, dans l'équation (1), $u = \alpha + \beta i$; cette équation, résolue par rapport à w, nous donnera pour cette variable un certain nombre de valeurs ; ce nombre étant, en général, égal au degré de la courbe, mais s'abaissant lorsque la courbe passe par les ombilics.

Soient $\gamma + \delta i$, $\gamma' + \delta' i$, ... les différentes valeurs de w qui correspondent ainsi à la valeur donnée de u ; il est clair, d'après ce qui précède, que si l'on construit les points dont les coordonnées rectangulaires sont respectivement γ et $-\delta$, γ' et $-\delta'$, ..., ces points, que je désignerai par a', a'', ..., pourront être considérés comme les extrémités d'autant de segments représentatifs de points situés sur la courbe, l'origine commune de ces segments étant le point a.

Pour abréger, je dirai que ces points a', a'', ... sont associés au point a ; si, d'ailleurs, la courbe est réelle (et ici, comme dans la suite, j'entends simplement par là une courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est réelle), cette courbe ne peut contenir un point sans contenir aussi le point qui lui est imaginaire-ment conjugué : donc, dans ce cas, si a' désigne l'un quelconque des points associés à un point donné a, a est aussi l'un des points associés de a'.

4. Pour étudier complètement une courbe, il importe de rechercher comment sont distribués dans le plan les segments représentatifs des divers points situés sur une courbe, ou, en d'autres termes, comment se déplace l'extrémité du segment représentatif d'un point de la courbe lorsque son origine se déplace elle-même dans le plan.

Divers géomètres allemands se sont occupés de la façon dont on pouvait représenter les points imaginaires d'une courbe, et ont émis à ce sujet des idées qui ont été reproduites par M. Transon

(*Application de l'Algèbre directive à la Géométrie; Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868).

L'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires étant

$$F(x, y) = 0;$$

et ξ, η étant un des systèmes de solutions communes de cette équation, on représente, d'après la méthode de Cauchy, les quantités ξ et η par deux points a et b. Ces deux points déterminent, en effet, parfaitement le point de la courbe, et le mode de relation qui existe entre eux caractérise très bien cette courbe.

Mais on peut faire à cette solution les reproches suivants :

1° Un point réel de la courbe est toujours (si l'on excepte les points qui se trouvent sur l'axe des x) représenté par un couple de points séparés;

2° Le mode de représentation varie suivant le système d'axes que l'on a choisi.

Ce dernier inconvénient suffirait seul à faire rejeter en Géométrie ce mode de représentation; comme l'a très bien dit M. Transon, l'équation proposée ne représente plus, à vrai dire, une courbe comme dans le système de Descartes, mais un mode *de transformation* dont les propriétés se rattachent à celles de la courbe.

L'emploi du segment représentatif, défini comme je l'ai dit plus haut, remédie à tous ces inconvénients. En employant l'équation en coordonnées isotropes de la courbe et en représentant chaque couple de solutions (u, w) de cette équatiom par les points réels du plan, qui, dans la méthode de Cauchy, représentent la quantité u et la quantité imaginaire conjuguée à w, on voit :

1° Qu'un point réel de la courbe est représenté par ce point lui-même;

2° Qu'un point imaginaire est toujours représenté par le même segment, quels que soient les axes auxquels on ait rapporté la figure.

En réalité, ces axes ne jouent aucun rôle dans la question; l'étude de la distribution dans le plan des segments représentatifs des points d'une courbe est une étude de *pure géométrie;* et si, dans un grand nombre de questions, on peut avoir intérêt à se servir de l'analyse et à faire intervenir des axes coordonnés, les

résultats sont toujours indépendants du choix de ces axes, et leur emploi est par là même facilité.

Pour éclaircir ce qui précède, je mentionnerai ici immédiatement quelques propositions très simples et que l'on peut facilement démontrer par les considérations de la Géométrie les plus élémentaires. J'aurai lieu plus tard d'en développer les conséquences.

1° Étant donné un cercle réel, pour qu'un segment aa' représente un point situé sur ce cercle, il faut et il suffit que les points a et a' soient réciproques par rapport à ce cercle;

2° Étant donnée une ellipse réelle, pour qu'un segment aa' représente un point situé sur cette ellipse, il faut et il suffit que les deux points a et a' soient situés sur une hyperbole homofocale à l'ellipse, et que la droite aa' soit parallèle à l'une des normales que l'on peut mener à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole.

Ces notions peuvent être encore présentées d'une façon plus nette et plus précise; mais comme leur développement m'éloignerait un peu du sujet que je traite ici, je renverrai le lecteur à ma Note *Sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace*.

5. Lorsqu'un point est assujetti à demeurer sur une courbe donnée (C), on peut fixer sa position simplement par celle de l'origine de son segment représentatif.

Cette origine correspond, il est vrai, à plusieurs points de la courbe; en la désignant par a et en désignant par a', a'', ... les divers points associés à a, on voit en effet que (a, a'), (a, a''), ... désignent tous des points de la courbe, représentés par des segments ayant pour origine le point a.

Lors donc que l'on se donne le point a, on ne détermine pas complètement le point de la courbe qu'il représente. Cette indétermination peut être, comme on le sait, levée de plusieurs façons.

Considérons, avec Cauchy, un des points associés au point a, et soit a' ce point, en sorte que (a, a') désigne un des points de la courbe; si l'on admet que le point a se déplace en décrivant une courbe continue sans jamais passer par aucun des points auxquels correspondent deux points associés confondus en un même point, l'extrémité du segment, dont l'origine sera le point mobile, sera elle-même bien déterminée sans ambiguïté, si l'on admet que le point de la courbe s'est déplacé lui-même d'une façon continue.

Ces points critiques qui, dans la théorie de Cauchy, jouent un rôle fondamental, sont, il est facile de le voir, les *points singuliers* et les *foyers* de la courbe.

Si l'on suppose que le point a, représentatif du point variable de la courbe, se meut dans un contour ne comprenant aucun des foyers ni des points singuliers de la courbe, le point de la courbe qu'il représente est parfaitement déterminé. Dans le cas contraire, pour savoir quel point il représente, il faut connaître le chemin qu'il a suivi dans son déplacement depuis sa position initiale.

On peut encore lever l'indétermination en supposant, avec Riemann, que le plan se compose d'une série de feuillets superposés. Ainsi, un point quelconque d'une ellipse peut être représenté par un point qui se meut sur deux feuillets appliqués sur le plan de l'ellipse et soudés entre eux le long de la ligne qui joint les deux foyers de la courbe.

Au *point de vue géométrique*, la conception de Riemann semble préférable à celle de Cauchy; mais, pour le moment, je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet, qui ne présente d'intérêt que dans les applications du calcul intégral à la Géométrie.

6. D'après ce qui précède, on voit qu'un point (réel ou imaginaire) situé sur une courbe donnée peut être représenté par un *seul point réel* de son plan; ce point est le point réel situé sur la droite isotrope du premier système qui passe par le point donné. Quand le point donné est réel, le point qui le représente se confond avec lui.

Nous pourrons nous représenter le déplacement d'un point sur une courbe, que les positions successives de ce point soient réelles ou imaginaires, par la courbe que trace dans le plan son *point représentatif,* déterminé comme je viens de le dire.

En général, on peut se représenter la façon dont varie une quantité z en fixant la valeur de cette quantité d'après la position qu'occupe un point mobile sur une courbe arbitrairement choisie du reste.

Lorsque la variable z prend des valeurs imaginaires, la position du point mobile, qui détermine sa valeur, peut être, comme je l'ai dit, représentée par un point réel du plan, et la courbe décrite par ce point donne une idée très nette de la façon dont varie z.

Ces considérations se prêtent aisément à l'application du calcul intégral à la Géométrie.

Concevons en effet une courbe algébrique (C) et une intégrale dans laquelle la variable soit représentée par la position d'un point mobile sur cette courbe; supposons, par exemple, que l'élément de l'intégrale soit de la forme

$$P\,ds,$$

ds désignant un élément de la courbe et P une fonction dont la valeur ne dépend que de la position du point sur la courbe et nullement des axes auxquels on peut la rapporter.

On comprendra facilement que, pour étudier cette intégrale, il soit avantageux de considérer la variable comme représentée par la position d'un point mobile sur la courbe, au lieu de la représenter par la position d'un point mobile sur un axe auxiliaire que l'on introduit arbitrairement et sans qu'il joue un rôle quelconque dans la question.

Les intégrales *géométriques* dont je viens de parler ont un sens parfaitement net, indépendamment des axes auxiliaires que l'on peut employer pour la facilité des calculs; il est donc essentiel de pouvoir les traiter d'une façon purement géométrique, ou du moins, si l'on est obligé, dans l'emploi de l'analyse, à se servir d'axes coordonnés, d'employer un système de coordonnées qui laisse en évidence ce caractère géométrique des intégrales. C'est à quoi l'on parviendra par l'emploi des coordonnées isotropes.

Il résulte, du reste, des beaux travaux de Riemann et de M. Clebsch, que ces intégrales géométriques comprennent toutes les intégrales d'origine algébrique.

Les considérations qui précèdent sont, au fond, le développement des idées de Cauchy. L'illustre géomètre fixe la valeur de la variable par la position d'un point sur une ligne droite; lorsque ce point est imaginaire, il le représente comme nous par le point réel situé sur la droite isotrope du premier système que l'on peut mener par le point donné.

A chaque courbe, comme l'a montré M. Clebsch, se rattachent un certain nombre d'intégrales qui jouent un rôle des plus importants dans la théorie de cette courbe ; il semble donc naturel, pour étudier ces intégrales, de fixer la valeur de la variable par la position d'un point mobile sur cette courbe elle-même.

II. — *Représentation des points situés sur une droite donnée.*

7. Considérons une droite réelle ou imaginaire tracée dans un plan. Supposons-la rapportée à un système de coordonnées isotropes, et soit Oω l'axe des coordonnées. Soit A un point mobile de la droite dont les coordonnées soient

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i;$$

comme je l'ai montré ci-dessus, les coordonnées de l'origine a et de l'extrémité a' du segment représentatif de A seront respectivement

$$x = \alpha, \qquad y = \beta,$$

et

$$y = \gamma, \qquad y = -\delta.$$

Soit a'' le point symétrique du point a' par rapport à l'axe Oω, ses coordonnées seront

$$x = \gamma \quad \text{et} \quad y = \delta,$$

en sorte que, si nous adoptons pour un instant le langage de l'Algèbre directive, les longueurs Oa et Oa'' représenteront les deux coordonnées u et w.

Ces coordonnées sont liées entre elles par une relation linéaire que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$w = re^{\theta i}.u + m,$$

r et θ étant des quantités réelles et m une quantité imaginaire. Le vecteur Oa'' peut donc se déduire de Oa au moyen des trois opérations suivantes :

1° En multipliant le vecteur Oa par la quantité réelle r; cette opération a pour but de dilater tous les vecteurs dans un rapport constant, en sorte qu'après l'opération la figure formée par les points a'' est homothétique à celle formée par les points a;

2° En multipliant le résultat obtenu par $e^{\theta i}$; l'opération a pour résultat de faire tourner la figure précédemment obtenue autour du point O de l'angle θ;

3° En ajoutant au deuxième résultat obtenu la quantité m; le résultat de l'opération est de transporter la figure parallèlement à elle-même.

D'où cette conclusion :

La figure formée par les points a et la figure formée par les points a'' sont deux figures directement semblables.

Remarquons maintenant que la figure formée par les points a' est symétrique par rapport à l'axe Oω de la figure formée par les points a', a''.

D'où cette conclusion :

Si un nombre quelconque de segments représente des points situés sur une même ligne droite, le polygone formé par les origines de ces segments et le polygone formé par leurs extrémités sont deux polygones semblables et inversement placés.

Deux points suffisant pour déterminer une droite, la réciproque de cette proposition est évidemment vraie.

8. Les considérations qui précèdent mènent facilement à la solution de divers problèmes très simples que l'on peut se proposer sur les droites, mais que je développerai avec quelques détails, parce qu'ils me seront utiles par la suite.

Problème I. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'); étant donné un point réel quelconque du plan, si on le considère comme l'origine du segment représentatif d'un point de la droite, trouver son extrémité.*

Soit c le point donné; on construira le point c' tel que le triangle $a'b'c'$ soit semblable au triangle abc et inversement placé; le point c' sera le point demandé.

Problème II. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'), trouver le point réel situé sur cette droite.*

Soit x le point cherché; ce point étant réel, le segment qui le représente est xx : les deux triangles xab et $xa'b'$ doivent donc être semblables et inversement placés.

Construisons le cercle lieu des points dont les distances à a et a' soient dans le rapport de ab à $a'b'$; construisons le cercle lieu des points dont les distances à b et b' soient dans le même rapport. Ces deux cercles se coupent en deux points réels x' et x''; on choisira celui de ces deux points qui, joint aux points (a, b) et (a', b'), donne deux triangles semblables *inversement* placés.

Problème III. — *Une droite étant définie par deux points* (a, a') *et* (b, b'), *et une autre droite étant définie par deux autres points* (α, α') *et* (β, β'), *trouver leur point de rencontre.*

Déterminons les extrémités des segments qui représentent des points de la deuxième droite et ont pour origine les points a et b (problème I); soient a'' et b'' ces extrémités; soit (x, x') le point d'intersection cherché.

Les points (a, a'), (b, b'), (x, x') étant en ligne droite, les triangles abx et $a'b'x'$ sont semblables et inversement placés.

Les points (a, a''), (b, b''), (x, x') étant aussi en ligne droite, les triangles abx et $a''b''x'$ sont aussi semblables et inversement placés.

Donc les triangles $a'b'x'$ et $a''b''x'$ sont semblables et semblablement placés. On construira les deux cercles lieux des points dont les distances à a' et a'', et à b' et b'' sont dans le rapport de $a'b'$ à $a''b''$. Ces deux cercles se couperont en deux points réels: on choisira de ces deux points celui qui, joint aux points (a', b') et (a'', b''), donne deux triangles semblables et *semblablement* placés. Ce point sera le point x'; au moyen du problème I, on en déduira le point x.

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES

DANS LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Bulletin de la Société philomathique; 1870.

1. On sait, depuis les travaux de Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite de l'infini. Je désignerai par I et J ces deux points remarquables que, dans une Note publiée dans les *Comptes rendus* (janvier 1865), j'ai proposé de nommer *ombilics du plan*. J'appelle *droite isotrope* toute droite du plan considéré qui passe par l'un des points I et J; l'ensemble de ces droites forme deux systèmes bien distincts, l'un composé de droites parallèles entre elles et passant par le point I, l'autre de droites également parallèles et passant par le point J.

Par tout point d'un plan passent deux droites isotropes de systèmes différents, dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Dans un plan réel, toute droite isotrope renferme un point réel et n'en renferme évidemment qu'un; c'est le point où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée ([1]).

Si, par un point fixe, réel ou imaginaire, on mène divers plans, chacun de ces plans contient deux droites isotropes passant par le point fixe. Les droites ainsi obtenues sont situées sur un même

---

([1]) Je dis que deux points sont imaginairement conjugués, lorsque leurs coordonnées, prises par rapport à un système d'axes réels quelconque, sont des quantités imaginaires conjuguées. Un point réel est à lui-même son conjugué.

Deux courbes sont imaginairement conjuguées, lorsque les équations de chacune d'elles se déduisent des équations de l'autre en changeant le signe du symbole imaginaire i.

Une courbe réelle est à elle-même sa propre conjuguée.

cône du second degré, que l'on peut aussi considérer comme une sphère de rayon nul ayant pour centre le point fixe et qui jouit de toutes les propriétés de la sphère. Ainsi, par exemple, toute section plane de ce cône est un cercle, et le centre du cercle est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le plan.

Je désignerai sous le nom de *cône isotrope* le cône ainsi formé par toutes les droites isotropes qui passent par un même point. Tous les cônes isotropes coupent le plan de l'infini suivant une même conique, commune à toutes les sphères tracées dans l'espace et que l'on peut appeler l'*ombilicale*.

Par une droite, on peut généralement mener deux plans tangents à l'ombilicale; j'appellerai ces plans *plans isotropes*. Le couple de plans isotropes, passant par une droite donnée, est coupé par un plan perpendiculaire à cette droite suivant deux droites isotropes. Par une droite isotrope, on ne peut faire passer qu'un seul plan isotrope, puisque cette droite coupe le plan de l'infini en un point de l'ombilicale.

2. Ces définitions établies, concevons un point imaginaire de l'espace, a et le point a' qui lui est imaginairement conjugué. Par chacun de ces points passe un cône isotrope; les deux cônes ainsi obtenus se coupent suivant un cercle réel A, dont le plan est perpendiculaire à la droite réelle qui joint les deux points imaginairement conjugués a et a'; le centre de ce cercle est le point réel O, qui est le milieu du segment aa' et la distance Oa étant représentée par Ri, son rayon a pour valeur la grandeur réelle R.

Il est clair que les deux points imaginaires a et a' déterminent complètement le cercle A; réciproquement, étant donné le cercle réel A, par ce cercle on ne peut faire passer que deux cônes isotropes dont les sommets sont les points a et a'. La position de ce cercle dans l'espace détermine donc complètement ces deux points.

Je dirai que le cercle réel A, ainsi déterminé, est le *cercle représentatif* du couple de points imaginaires a et a', couple que je désignerai par la notation (A); réciproquement, le cercle A, déterminé comme précédemment par les deux points a et a', sera désigné par la notation (a, a').

Le cercle A ou (a, a') représente ainsi l'ensemble des deux points imaginaires conjugués a et a'; dans certaines questions, il est nécessaire de pouvoir distinguer ces deux points l'un de l'autre. A cet effet, l'on peut imaginer que le cercle A soit décrit dans un certain sens par un point mobile; le sens dans lequel il sera supposé décrit déterminera celui des deux points a et a' dont il sera la représentation. Afin de fixer les idées, supposons que dans un système de coordonnées quelconque, mais d'ailleurs réel, les coordonnées d'un point m soient respectivement

$$x = a + \alpha i, \qquad y = b + \beta i, \qquad z = c + \gamma i;$$

le sens dans lequel on supposera décrit le cercle représentatif du point m sera tel qu'un spectateur, ayant l'œil placé à l'origine des coordonnées, voie le point mobile, décrivant le cercle, se mouvoir dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ou en sens inverse, suivant que la quantité $(a\alpha + b\beta + c\gamma)$ est positive ou négative.

Il est évident d'ailleurs que si cette quantité a un signe donné pour le point a, elle aura le signe contraire pour le point imaginairement conjugué m' dont les coordonnées sont

$$x = a - \alpha i, \qquad y = b - \beta i, \qquad z = c - \gamma i.$$

3. Dans la plupart des recherches de géométrie, l'on a à considérer, par couples, des points réels ou qui ne sont pas imaginairement conjugués. J'étendrai à ces cas les notions établies précédemment. Ainsi a et b désignant deux points quelconques de l'espace, je désignerai par (a, b) le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes ayant pour sommets ces deux points; ce cercle sera généralement imaginaire et ne deviendra réel que dans le cas, examiné précédemment, où les points considérés sont imaginairement conjugués. De même, C désignant un cercle quelconque de l'espace, je dénoterai par le symbole (C) les deux points qui sont les sommets des cônes isotropes passant par ce cercle.

4. Considérons dans l'espace une courbe géométrique quelconque, réelle ou du moins (pour le moment, je me restreindrai à ce cas de beaucoup le plus intéressant) définie par des équations réelles; c'est-à-dire telle que, lorsqu'elle passe par un point

imaginaire, elle passe également par le point imaginairement conjugué.

Étant donné un cercle réel de l'espace, ce cercle représente un couple de points imaginairement conjugués; et, pour que ces points appartiennent à la courbe donnée, il est nécessaire que le cercle satisfasse à certaines conditions déterminées par la nature de la courbe et dont l'étude forme, pour ainsi dire, un prolongement géométrique de la théorie de cette courbe elle-même. Pour éclaircir ces considérations générales et montrer les diverses questions auxquelles elles se rattachent, j'en ferai tout d'abord, et avec quelques détails, l'application aux courbes gauches qui résultent de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, en m'appuyant sur les propriétés connues des surfaces *anallagmatiques*.

5. M. Moutard a appelé *surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* des surfaces qui peuvent être regardées comme l'enveloppe de sphères mobiles qui coupent orthogonalement une sphère fixe, tandis que leurs centres décrivent une surface du second degré; dans tout ce qui suit, je les désignerai simplement sous le nom de *surfaces anallagmatiques;* leur degré, qui est, en général, le quatrième, peut d'ailleurs s'abaisser au troisième, lorsque la surface lieu des centres des sphères mobiles est un paraboloïde, et même au second, puisque les surfaces du second degré sont comprises dans la famille des surfaces anallagmatiques.

La définition donnée ci-dessus peut être légèrement modifiée de la façon suivante. Étant donnés une sphère fixe S et un plan quelconque P coupant cette sphère suivant un cercle C, on peut, par ce cercle, faire passer deux cônes isotropes. Soient p et p' les sommets de ces cônes; ces deux points, qui, d'après ce que j'ai dit ci-dessus, pourraient être représentés par la notation (C), sont réciproques par rapport à la sphère S; pour abréger le discours, je dirai que ces deux points sont associés au plan P et réciproquement que le plan P est le plan associé aux points p et p' [1].

Cela posé, on peut définir une surface anallagmatique donnée R,

[1] Voir *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868), ma Note sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques.

comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S, des différents plans que l'on peut mener tangentiellement à une surface du second degré A. L'intersection des surfaces S et A est une biquadratique F qui est l'une des cinq focales de la surface; les quatre autres focales correspondant aux quatre autres modes de génération dont la surface est susceptible [1]. En chaque point m de la surface anallagmatique, la normale passe par le point où le plan associé au point m touche la surface A.

Soit G une génératrice rectiligne de cette dernière surface, et soient a, a' les points où cette génératrice s'appuie sur la focale F. L'on voit facilement que, tandis que le plan mobile qui sert à décrire la surface se déplace le long de la droite G en tournant autour de cette droite, les points associés au plan tangent dans ses diverses positions décrivent un cercle; et ce cercle est précisément l'intersection des deux cônes isotropes ayant pour sommets les points a et a', cercle que nous pouvons désigner par la notation (a, a'). A chaque génératrice rectiligne de A correspond donc une génératrice circulaire de R; et, comme chacun des plans tangents à la surface A passe par une génératrice rectiligne de même système que G, l'on voit que la surface anallagmatique peut être considérée comme engendrée par les différents cercles correspondant aux génératrices du même système que G. Aux génératrices rectilignes de A, du système différent de celui de G, correspond un autre système de sections circulaires de R; les deux systèmes ainsi obtenus forment un groupe de cercles que, pour plus de clarté, je dirai appartenir au mode de génération défini par la focale F, ou simplement à la focale F. A chacun des quatre autres modes de génération de la surface correspond un autre groupe de cercles situés sur la surface et appartenant à la focale définissant le mode de génération considéré. L'on peut donc définir, de la façon suivante, les surfaces anallagmatiques au moyen de leurs sections circulaires.

Étant donnée une biquadratique sphérique F, si l'on fait passer par cette courbe une surface du second degré quelconque et si, pour chaque génératrice rectiligne d'un système donné de cette

[1] *Voir* dans le *Bulletin de la Société philomathique* (janvier 1868) ma Note sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques.

surface, on construit le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes ayant pour sommets les points où cette génératrice s'appuie sur la courbe, le lieu des cercles ainsi obtenus est une surface anallagmatique ayant F pour focale; et le système formé par ces cercles appartient à cette focale.

6. Dans ce qui précède, je n'ai fait aucune hypothèse sur la nature de la surface A, non plus que sur sa position relative par rapport à la sphère S. Les génératrices rectilignes de A peuvent être imaginaires, ou bien, étant réelles, elles peuvent traverser la sphère et la couper en deux points réels. Dans ces deux cas les sections circulaires correspondantes de l'anallagmatique sont imaginaires. Pour qu'un cercle C, correspondant à une génératrice rectiligne, soit réel, il faut et il suffit évidemment que cette génératrice soit réelle et extérieure à la sphère; elle coupe alors cette sphère en deux points imaginairement conjugués de la focale F, et le cercle C est ce que j'ai appelé le *cercle représentatif* de ces deux points.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un système de sections circulaires d'une surface anallagmatique, appartenant à une focale F *de cette surface, est réel, les points imaginaires représentés par ces cercles sont situés sur la courbe* F.

Si l'on imagine toutes les surfaces anallagmatiques qui ont pour focale une biquadratique sphérique donnée F et toutes les sections circulaires réelles de ces surfaces qui appartiennent à F, on obtiendra ainsi les cercles représentatifs de tous les points imaginaires de la courbe F. En effet, si un cercle C représente un point imaginaire de F, la droite réelle qui joint les points imaginaires (C), détermine avec la courbe F un hyperboloïde à une nappe, et cet hyperboloïde détermine une surface anallagmatique ayant F pour focale et passant par le cercle C. D'où la conclusion suivante :

« Pour qu'un cercle réel représente un couple de points imaginaires situés sur une biquadratique sphérique donnée F, il faut et il suffit que ce cercle soit situé sur une surface anallagmatique ayant F pour focale et qu'il appartienne au mode de description caractérisé par cette focale. »

7. La façon dont j'ai défini, § 5, les surfaces anallagmatiques, au moyen de leurs sections circulaires, s'étend d'elle-même au cas où ces surfaces ont un plan de symétrie; dans ce cas, l'une des sphères principales se réduit à un plan, ainsi que la surface du second degré correspondante, et les définitions que j'ai données précédemment, la définition comme enveloppes de sphères et la définition par points, deviennent illusoires. Mais, avant d'aborder ce sujet, il est nécessaire d'exposer quelques considérations très simples sur la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

Étant donnés un point quelconque a, réel ou imaginaire, et le cône isotrope ayant ce point pour sommet, il est clair que, par une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques, ce cône isotrope se transforme en un autre cône isotrope ayant pour sommet le point qui correspond au point a. Si donc l'on a deux points quelconques a et b, au cercle (a, b) correspondra, après la transformation, le cercle (α, β), α et β désignant les points qui correspondent aux points a et b.

Imaginons une surface anallagmatique comme le lieu des différents cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... déterminés par les points où les génératrices d'une surface du second ordre aa', bb', cc', ... s'appuient sur un biquadratique sphérique F et effectuons sur cette figure une transformation par rayons vecteurs réciproques. La courbe F se transformera en une autre biquadratique sphérique Φ; sur cette courbe Φ, aux points a, a', b, b', ... correspondront des points (α, α'), (β, β'), ..., et la surface transformée de la surface donnée sera le lieu des cercles (a, a'), (b, b'), ... D'où l'on peut, en passant, tirer cette conséquence, que les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, ... sont, comme les droites aa', bb', cc', ..., les génératrices d'une même surface du second ordre.

Considérons maintenant une biquadratique sphérique F et une surface du second degré quelconque A, passant par cette courbe. Toutes les génératrices d'un même système de A, telles que aa', peuvent être obtenues en choisissant arbitrairement une génératrice ss' de l'autre système et en menant des plans par cette dernière génératrice. Ces divers plans couperont la sphère suivant des cercles passant par les deux points fixes s et s' et chacun de ces cercles coupera la courbe F en deux points variables a et a'

situés sur une même génératrice de A; le lieu des cercles (a, a') est l'anallagmatique définie par la surface A et la focale F; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, par deux points fixes s et s', d'une biquadratique sphérique F, *on mène un cercle variable rencontrant la courbe* F *aux deux points a et a', le lieu des cercles (a, a') est une surface anallagmatique ayant* F *pour focale.*

Transformons maintenant la figure précédente en prenant le pôle de transformation sur la sphère qui contient la courbe F; la surface anallagmatique donnée se transforme en une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan qui correspond à la sphère. La focale F se transforme en une anallagmatique plane Φ sur laquelle se trouvent les deux points σ et σ' correspondant aux points s et s'; et l'on obtient la proposition suivante :

Si, par deux points fixes σ et σ' d'une anallagmatique plane Φ, on mène un cercle variable coupant la courbe Φ aux points α et α', le lieu des cercles (α, α') est une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan de la focale Φ.

Le second système de sections circulaires appartenant à la focale Φ s'obtiendrait facilement; en effet, étant mené par σ et par σ' un cercle quelconque coupant la focale en deux points α et α'; si, par ces deux derniers points, on mène un cercle variable rencontrant Φ aux points ρ et ρ', les différents cercles tels que (ρ, ρ') constitueront ce second système de sections circulaires.

Les plans des différents cercles tels que (α, α') ont pour trace, sur le plan de la focale Φ, les perpendiculaires élevées sur les segments $\alpha\alpha'$ en leur point milieu. Toutes ces perpendiculaires, il est facile de le voir, enveloppent une conique ayant pour foyers les foyers singuliers de l'anallagmatique Φ (1). D'où l'on peut conclure que quand une série de surfaces anallagmatiques a pour focale commune une anallagmatique plane, les traces des cylindres enveloppés par les plans des cercles de ces surfaces apparte-

(1) *Voir* dans les *Comptes rendus* (janvier 1863) ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes, etc.*

nant à cette focale, sur le plan de symétrie, sont des coniques homofocales ayant pour foyers communs les foyers singuliers de la focale.

8. La proposition précédente n'est, du reste, qu'un cas particulier d'un théorème relatif aux anallagmatiques en général et que l'on peut établir très simplement.

Considérons une surface anallagmatique quelconque R, ayant pour focale une biquadratique sphérique F. Les plans des divers cercles de la surface, appartenant à cette focale, enveloppent un cône ayant pour sommet le centre de la sphère S, sur laquelle est située la focale; et ces plans sont perpendiculaires aux diverses génératrices de la surface du second degré A passant par la focale qui détermine la surface R. Pour trouver les droites focales de ce cône, je rappellerai que ces droites sont les intersections des divers plans isotropes qu'on peut lui mener tangentiellement. Or, les perpendiculaires à un plan isotrope, touchant l'*ombilicale* en un point donné ω, sont les diverses droites isotropes passant par ce point; aux plans isotropes tangents au cône correspondent donc des génératrices isotropes de A, et réciproquement. Une génératrice isotrope de A doit percer le plan de l'infini en un point de l'ombilicale, et aussi en un point de la trace de la surface A sur le même plan. Soit Ω l'ombilicale et a, b, c, d les quatre points où cette courbe rencontre la focale F; la surface A, passant par cette focale, sa courbe d'intersection avec le plan de l'infini est une conique passant par les points a, b, c, d, et il est clair que les génératrices isotropes de A sont les huit génératrices passant par ces quatre points. Les traces, sur le plan de l'infini, des quatre plans qui leur sont perpendiculaires et qui passent par le centre de la sphère sont les quatre droites menées tangentiellement à l'ombilicale par les quatre points a, b, c, d; les focales du cône sont donc les six droites conjuguées deux à deux qui joignent le centre de la sphère aux divers points d'intersection p, q, r, s, t, u des quatre tangentes. On voit que ces focales sont complètement déterminées par la focale F et ne dépendent en aucune façon de la surface particulière A. On peut donc énoncer cette proposition :

Si l'on considère une série de surfaces anallagmatiques homofocales, et si, pour chacune de ces surfaces, l'on con-

struit le cône enveloppé des cercles appartenant à l'une de ses focales, tous les cônes ainsi obtenus sont homofocaux.

J'ajouterai que les focales de ces cônes sont les focales singulières des cônes ayant pour base la focale de la surface anallagmatique considérée, et, pour sommet, le centre de la sphère sur laquelle cette courbe est située. Mais, pour abréger, je laisse de côté la démonstration de ce point de détail (¹).

9. Je reviens maintenant au mode de description des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie, donné, § 7, pour montrer comment il s'applique aux surfaces du second ordre. Ces dernières s'obtiennent lorsque la focale, qui, en général, est une courbe anallagmatique plane, se réduit à une conique. Soit donc une conique quelconque C réelle (ou du moins ayant une équation réelle) et a, a' deux points fixes pris sur cette conique. Par ces deux points, menons un cercle quelconque coupant la conique en α et en α'; d'après ce qui a été dit ci-dessus, le lieu des cercles tels que (α, α') est une surface du second ordre ayant pour focale C. D'après un théorème élémentaire bien connu, toutes les droites telles que $\alpha\alpha'$ ont une direction fixe. On peut donc énoncer la proposition suivante qu'il serait très simple, d'ailleurs, d'établir directement :

Si l'on mène, dans le plan d'une conique, une série de droites parallèles à une direction fixe D, *en désignant par a et a' les deux points d'intersection de la conique avec une quelconque de ces droites, le lieu des cercles, tels que (a, a'), est une surface du second ordre ayant pour focale la conique donnée.*

Supposons que C soit une ellipse; imaginons toutes les droites réelles parallèles à une droite fixe D et extérieures à l'ellipse; chacune de ces droites rencontre l'ellipse en deux points imaginairement conjugués, représentés par un cercle réel; tous les

(¹) *Voir*, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, ma Communication du 23 mars 1867 : *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré*, § 4.

cercles réels ainsi obtenus, quand la droite se déplace, constituent l'un des systèmes de sections circulaires d'un hyperboloïde à deux nappes ayant pour focale l'ellipse donnée. Si le système des droites considéré était parallèle à une droite D' faisant avec le grand axe de l'ellipse un angle supplémentaire de l'angle que fait D avec ce même axe, les cercles représentatifs des points d'intersection de l'ellipse avec ces diverses droites constitueraient le second système de sections circulaires de l'hyperboloïde mentionné ci-dessus.

Si nous imaginons l'infinité d'hyperboloïdes à deux nappes, qui ont pour focale l'ellipse C, leurs diverses sections circulaires représenteront tous les points imaginaires situés sur cette ellipse. D'où l'on peut conclure le théorème suivant :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une ellipse donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un hyperboloïde à deux nappes ayant cette ellipse pour focale.

De même :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une hyperbole donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un ellipsoïde ayant cette hyperbole pour focale.

10. Il existe, relativement au système de deux cercles situés sur une même sphère, une propriété très simple, qui a de fréquentes applications dans la géométrie de la sphère et dans la théorie des surfaces anallagmatiques. Je vais l'exposer brièvement, en supprimant la démonstration, d'ailleurs très facile à suppléer.

Soient deux cercles C et D situés sur une même sphère, et par conséquent se coupant en deux points. Le cercle C représente deux points de l'espace c et c', qui sont réciproques par rapport à la sphère et que l'on pourrait désigner par la notation (C); le cercle D représente de même deux points réciproques d et d'. Les quatre points c, c', d et d' sont d'ailleurs dans un même plan passant par le centre de la sphère. Cela posé, par les deux cercles donnés, on peut faire passer deux cônes, et les sommets de ces cônes sont les deux points de rencontre respectifs des droites cd et $c'd'$ et des droites cd' et $c'd$.

Supposons les cercles C et D réels; supposons-les, en outre, décrits dans un sens déterminé, en sorte que chacun d'eux représente un point imaginaire et un seul; le point c, par exemple, étant représenté par le cercle C et le point d par le cercle D. La droite imaginaire cd est imaginairement conjuguée à la droite $c'd'$; ces deux droites étant dans le même plan se coupent en un point réel, que l'on peut définir comme étant le point réel situé sur cd; et, d'après ce que j'ai dit plus haut, ce point est le sommet d'un cône passant par C et D. Mais ici, l'on peut ajouter qu'un spectateur, dont l'œil serait placé au sommet du cône, verrait les cercles C et D décrits en sens inverse; en sorte que si le mobile, qui est censé décrire l'un d'eux, lui paraît se mouvoir dans le sens des aiguilles d'une montre, le mobile qui est supposé décrire l'autre lui paraîtra se mouvoir dans l'autre sens.

Cette dernière remarque est souvent utile pour fixer le sens que l'on doit effectuer à un cercle représentant un point imaginaire.

Considérons maintenant une surface anallagmatique R, définie par la surface du second degré A et la focale F située sur cette surface, et les deux systèmes de génératrices circulaires de l'anallagmatique appartenant à cette focale. Soit C un cercle fixe de l'un de ces systèmes, représentant deux points c et c' de la focale; soit D un cercle quelconque de l'autre système, représentant deux points d et d' de la focale. Les cercles C et D sont situés sur une même sphère, et l'on sait d'ailleurs que les droites cc' et dd' sont deux génératrices, de systèmes différents, de la surface A. D'après ce qui a été dit plus haut, les sommets des cônes qui passent par les cercles C et D sont les deux points r et s, où se coupent respectivement les droites cd' et $c'd$ d'une part, les droites cd et $c'd'$ d'autre part. Le lieu décrit par les sommets de ces cônes, lorsque, le cercle C étant fixe, le cercle D se déplace sur la surface R, est donc l'intersection des deux cônes ayant pour base la focale F et pour sommets les points c et c'. Ces cônes sont du troisième degré; leur intersection, qui est du neuvième degré, se compose d'abord de la génératrice cc', de la focale et du lieu cherché; ce dernier est donc du quatrième ordre.

D'où l'on peut conclure la proposition suivante :

Étant pris, sur une surface anallagmatique, un cercle quelconque appartenant à une focale F *de cette surface; par ce cercle et par un cercle quelconque* D, *du second système circulaire appartenant à cette focale, on peut faire passer deux cônes; le lieu décrit par le sommet de ces cônes, lorsque, le cercle* C *étant fixe, le cercle* D *se déplace sur la surface, est une courbe du quatrième ordre faisant partie de l'intersection des deux cônes, ayant pour base commune la focale* F *et pour sommets les deux points de cette focale que représente le cercle* C.

11. Dans ce qui précède, j'ai montré comment l'on peut déterminer les conditions géométriques auxquelles un cercle doit satisfaire, pour représenter un couple de points situés sur une biquadratique sphérique donnée, en groupant deux à deux les divers points de cette courbe, de façon qu'à l'ensemble de tous les couples de points, corresponde l'ensemble des génératrices circulaires d'une surface anallagmatique. Chaque mode de groupement est défini par une surface du second ordre, de telle sorte que deux points quelconques de la courbe, qui se correspondent, se trouvent sur une même génératrice de la surface.

Soit, en général, une courbe gauche géométrique quelconque G; imaginons une surface réglée V, telle que chacune de ses génératrices s'appuie en deux points sur cette courbe. Soient aa', bb', cc', ... les génératrices consécutives de cette surface; les cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... engendreront une autre surface, que je dirai *dérivée* de la courbe G. D'une même courbe donnée, l'on peut ainsi déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, et chacune de ces surfaces dérivées correspond à un certain mode de groupement des points de la courbe, défini par la surface réglée V.

Lorsque la courbe G est plane, les droites, telles que aa', bb', ..., qui joignent les points conjugués de cette courbe, ne forment plus une surface gauche, mais enveloppent une courbe plane, qui peut ainsi servir à définir le groupement des points. Dans ce cas, et lorsque la courbe G est d'un degré supérieur à deux, chacune des tangentes à l'enveloppe plane, rencontrant G en plus de deux points, il est nécessaire de fixer ceux des points de rencontre que l'on doit grouper ensemble. Pour éviter cette difficulté, il est alors généralement préférable de définir chaque couple de points par d'autres considérations ne donnant lieu à aucune ambiguïté, comme je l'ai fait, § 7, en traitant des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie.

On peut toujours, d'ailleurs, sauf dans le cas très particulier où la courbe plane G est un cercle, effectuer une transformation par rayons vecteurs réciproques, de façon que cette courbe devienne une courbe gauche sphérique.

12. D'une courbe gauche donnée, on peut, comme je l'ai montré, déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, dérivées de cette courbe.

Réciproquement, étant donnée une surface quelconque à génératrices circulaires, on peut toujours la considérer comme une surface dérivée d'une certaine courbe gauche G. En désignant par C, C′, C″, ... les diverses génératrices circulaires de la surface, cette courbe est le lieu des points (C), (C′), (C″), ...; et la surface réglée V, qui détermine le mode de groupement des points de la courbe, est le lieu des axes des différents cercles.

13. Parmi l'infinité de surfaces dérivées d'une courbe gauche G, se trouve en particulier la *développable isotrope*, circonscrite à cette courbe; j'entends par là, la surface développable circonscrite à la fois à l'ombilicale et à la courbe donnée. Tous les points qui lui sont tangents sont, par conséquent, des plans isotropes, et ses génératrices, comme nous allons le voir, sont des droites isotropes.

Soit m un point quelconque de G; pour construire les génératrices de la surface développable isotrope qui passent en ce point, menons la tangente à la courbe en m, et soit t le point où cette tangente perce le plan de l'infini. Menons par t les deux tangentes à l'ombilicale Ω et soient a et b leurs points de contact. Les plans tma et tmb sont deux plans isotropes tangents à la courbe G et les génératrices correspondantes de la développable sont les droites isotropes ma et mb. Remarquons maintenant que, la droite ab étant la polaire du point t par rapport à l'ombilicale, le

plan mba est perpendiculaire à la tangente mt; les génératrices de la développable, qui passent au point m, sont donc les deux droites isotropes passant par ce point dans le plan normal à la courbe.

J'imagine maintenant une droite passant par le point m et par le point m', pris sur la courbe G, à une distance infiniment petite de m. Les cônes isotropes ayant ces deux points pour sommets se coupent suivant un cercle, dont le plan, perpendiculaire à mm', passe par le milieu de ce segment, et dont le rayon, égal à mm', est par conséquent infiniment petit. Le point m' venant à se confondre avec le point m, le plan du cercle d'intersection devient normal à la courbe au point m, le rayon de ce cercle devient nul et ce cercle se réduit à deux droites isotropes. Donc, quand une droite est tangente à une courbe gauche, le cercle, correspondant aux deux points de la courbe, qui sont réunis au point de contact, se compose des deux droites isotropes qui passent par ce point dans le plan normal à la courbe.

D'où cette conclusion : la développable isotrope, circonscrite à une courbe gauche, est la surface dérivée de cette courbe, lorsque la surface réglée, qui fixe le groupement de ses points, est la développable formée par les tangentes à la courbe.

Appliquons ces résultats à la recherche de la focale d'une courbe sphérique quelconque H; l'on sait, d'ailleurs, que cette focale est la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H.

En désignant par S la sphère qui contient cette courbe, pour qu'un point donné m soit situé sur une surface Σ dérivée de H, il est nécessaire et suffisant que le plan, associé au point m par rapport à la sphère S [1], coupe la courbe H en deux points situés sur une génératrice de la surface réglée γ, qui détermine le groupement de points correspondant à la surface Σ. Si l'on considère en particulier la développable isotrope, qui correspond à la développable ayant H pour arête de rebroussement, pour qu'un point m soit situé sur cette développable isotrope, il faut et il suffit que le plan associé au point m soit tangent à la courbe H.

---

(1) Sur l'expression *plan associé à un point*, voir § 5.

SUR

LA RÈGLE DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

1. Lorsque, dans une figure, l'on a à considérer des segments comptés sur une même droite, ou des angles ayant même sommet, tous les géomètres ont reconnu l'utilité et la nécessité d'affecter un signe à ces segments et à ces angles; le *Cours de Géométrie supérieure* de M. Chasles offre un exemple des nombreux avantages que l'emploi de la règle des signes a ainsi introduits dans la Science.

Mais, lorsque l'on considère des segments comptés sur des droites différentes ou des angles n'ayant pas le même sommet, il semble généralement admis que la règle des signes n'est plus applicable. M. Chasles, dans la Préface de son Cours, exprime formellement cette idée :

« Si l'on ne démontre ordinairement, dit-il (Préface de la *Géométrie supérieure*, p. IX), une formule ou une relation que par une certaine figure, et non dans l'état d'abstraction et de généralité qui permettrait, au moyen des signes + et — affectés aux segments et aux angles, pour marquer leur direction, de l'adapter à tous les états de la figure, il est facile d'en reconnaître la raison. C'est que les propositions qui forment le plus ordinairement les éléments de démonstration, dans la Géométrie ancienne, ne comportent pas l'application du principe des signes. Telles sont la proportionnalité des côtés homologues dans les triangles semblables, *celle encore de la proportionnalité, dans tout triangle, des côtés aux sinus des angles opposés. La règle des signes ne s'applique point à ces propositions, puisque les segments que*

l'on y considère sont formés sur des lignes différentes, et les angles autour de sommets différents. »

Je me propose de faire voir, dans cette Note, que, contrairement à l'idée émise par l'illustre géomètre, la règle des signes s'applique à tous les théorèmes de Géométrie sans exception.

Je me bornerai à examiner, sous ce point de vue, la dernière des propositions mentionnées dans la citation que j'ai reproduite ci-dessus. Les considérations très simples qui, dans ce cas, résolvent la question, s'étendent d'elles-mêmes à toutes les autres propositions; ce théorème, d'ailleurs, est l'un de ceux dont l'usage est le plus fréquent pour établir les relations qui existent entre des segments comptés sur des droites différentes, en sorte qu'il suffit presque d'établir, relativement à ce théorème, la règle des signes pour légitimer d'une façon générale l'emploi de cette règle.

2. Étant donnés un certain nombre de points situés sur une même droite, on peut assigner à cette droite un certain sens positif, en admettant qu'un point mobile, qui se mouvrait dans ce sens sur la droite, parcourt des longueurs positives. Cette assignation pourra, dans la plupart des cas, être faite arbitrairement; dans d'autres cas, au contraire, elle devra être faite d'une manière déterminée, en sorte que cette détermination elle-même sera une partie essentielle de la proposition de Géométrie que l'on aura à considérer.

Quoi qu'il en soit, cette assignation une fois faite, pour éviter toute confusion, je désignerai une droite sur laquelle on aura fixé le sens positif sous le nom de *direction*. Deux points A et B, se trouvant sur une direction donnée d, le segment AB a un signe parfaitement déterminé, et il est clair que ce signe change quand on change la direction de d.

Étant données deux directions a et b, l'angle (a, b) que fait la direction a avec la direction b est l'angle dont il faut faire tourner a autour de l'intersection des deux droites jusqu'à ce que les deux directions s'appliquent l'une sur l'autre et soient dirigées dans le même sens. Cet angle, on le voit, est déterminé, à un multiple près d'une circonférence entière; son sinus et son cosinus sont donc aussi parfaitement déterminés.

Étant donné l'angle (a, b) de deux directions, si l'une de ces directions change de sens, l'angle est augmenté d'une demi-circonférence; par conséquent, le sinus et le cosinus de cet angle changent de signe.

3. Cela posé, nous pourrons énoncer de la façon suivante la proposition relative à la proportionnalité des côtés d'un triangle aux sinus des angles opposés.

Proposition. — *Étant donné un triangle* ABC, *si l'on assigne arbitrairement un sens positif aux trois droites qui forment les côtés de ce triangle, et si l'on désigne par a, b, c les trois directions ainsi obtenues, a étant la direction qui renferme les côtés* B *et* C, *etc., on a les relations suivantes, qui comportent la règle des signes.*

$$\frac{AB}{\sin(a, b)} = \frac{BC}{\sin(b, c)} = \frac{CA}{\sin(c, a)}.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'assigner aux côtés du triangle une direction déterminée : on vérifie facilement l'exactitude des formules ci-dessus. On peut remarquer maintenant que l'on peut, sans qu'elles cessent d'être exactes, prendre un côté quelconque dans un sens inverse à celui que l'on considérait tout d'abord.

Supposons, par exemple, que l'on change le sens de la direction a; BC changera alors de signe, ainsi que $\sin(a, b)$ et $\sin(c, a)$; les autres quantités ne subissant aucun changement, l'on voit que, dans la série d'égalités précédentes, chaque terme aura changé de signe : l'égalité ne sera donc pas troublée.

4. La proposition précédente étant établie en toute rigueur, je m'en servirai pour démontrer la relation qui existe entre le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites et le rapport anharmonique des quatre points où ce faisceau est coupé par une transversale quelconque.

M. Chasles (*Géométrie supérieure*, § XIII), pour établir cette relation, emploie aussi la proposition précédente; mais comme, pour lui, elle ne comporte pas l'emploi de la règle des signes, il démontre d'abord par son moyen que les deux rapports anharmoniques ont la même valeur absolue; il prouve ensuite, par une considération directe, qu'ils ont le même signe.

Il est facile de voir que le théorème de la proportionnalité des côtés aux sinus suffit pour la démonstration de l'égalité des deux rapports.

Soit un faisceau de quatre droites passant par un même point O; assignons à chacune de ces droites un sens positif arbitraire, et soient a, b, c, d les quatre directions ainsi obtenues. Soient, de plus, A, B, C, D les points où une transversale quelconque coupe les droites de ce faisceau; donnons à cette transversale un sens positif pris arbitrairement, et appelons ω la direction de cette transversale. Cela posé, en appliquant au triangle OAB la proposition énoncée ci-dessus, il viendra

$$\frac{AB}{OA} = \frac{\sin(b, a)}{\sin(\omega, b)};$$

de même le triangle OAB donnera

$$\frac{AD}{OA} = \frac{\sin(d, a)}{\sin(\omega, d)},$$

d'où

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin(b, a)}{\sin(\omega, b)} \cdot \frac{\sin(\omega, d)}{\sin(d, a)};$$

on aurait de même

$$\frac{CB}{CD} = \frac{\sin(b, c)}{\sin(\omega, b)} \frac{\sin(\omega, d)}{\sin(d, c)},$$

d'où enfin

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{\sin(a, b)}{\sin(a, d)} : \frac{\sin(c, b)}{\sin(c, d)},$$

égalité qui, ainsi que la proposition dont j'étais parti, comporte la règle des signes.

Il est à remarquer que la valeur du rapport anharmonique du faisceau de quatre droites donnée dans le second membre est indépendante du sens positif que l'on a assigné à ces droites; car, si l'on prend en sens contraire l'une de ces directions, la direction a par exemple, $\sin(a, b)$ et $\sin(a, d)$ changeant à la fois de signe, leur rapport reste invariable.

5. Sans multiplier davantage les exemples, j'énoncerai la conclusion suivante :

« Lorsqu'un théorème relatif à des segments et à des angles situés d'une façon quelconque dans un plan est *convenablement et complètement énoncé*, il doit toujours comporter la règle des signes. »

Les divers théorèmes se distribuent en deux classes bien distinctes. Pour les uns, on peut choisir d'une façon arbitraire le sens dans lequel est prise la direction positive d'un certain nombre de droites, et alors le sens dans lequel on doit prendre les autres droites de la figure est déterminé par les théorèmes eux-mêmes, et cette détermination en est un élément essentiel : la façon dont elle est faite doit faire partie de l'énoncé lui-même de ces théorèmes.

Pour les autres, et ce sont les plus nombreux, le sens positif que l'on doit attribuer aux diverses droites de la figure est complètement arbitraire; et, si les théorèmes sont convenablement énoncés, ils doivent être vérifiés quelle que soit la façon dont on fasse cette attribution.

Les considérations qui précèdent ne sont pas sans doute de nature à trouver place dans l'enseignement élémentaire; leur introduction compliquerait souvent et inutilement les questions; néanmoins, comme elles tiennent à un point de doctrine souvent controversé, j'ai cru qu'il n'était pas inutile de les présenter.

SUR UNE PROPRIÉTÉ

RELATIVE AUX

COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE.

Bulletin de la Société philomathique; 1870.

Considérons une courbe tracée sur une surface quelconque et la normale dont elle est la directrice; en chacun des points de cette courbe concevons que l'on porte sur la normale, à partir de ce point, une longueur N, fonction de la position du point sur la directrice. Cela posé, si l'on considère un point quelconque M de cette courbe et un point infiniment voisin M′, en désignant par V et V′ les angles que font avec MM′ les segments N et N′ portés sur les normales en M et M′, on trouve facilement que l'expression

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{MM}'(\mathrm{N}\cos\mathrm{V} + \mathrm{N}'\cos\mathrm{V}')$$

développée suivant la puissance croissante de ds, a pour valeur

$$\left[\mathrm{K}\,ds^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{d\mathrm{K}}{ds}\right)ds^4 + \text{des termes du degré supérieur au quatrième}\right].$$

D'où cette conclusion, que l'expression donnée ci-dessus est généralement du troisième ordre, mais que quand elle est d'un ordre supérieur au troisième, elle est au moins du cinquième.

Pour que K soit égal à zéro, il faut et il suffit que N satisfasse à l'équation différentielle

$$\text{(2)} \qquad \frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}} = \frac{2}{3}\,\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\omega} - \frac{d\sin\omega}{\sin\omega} + \frac{1}{3}\,\frac{d\rho}{\rho}.$$

Formule où $d\eta$ désigne l'angle de torsion au point donné, ρ le rayon de courbure et ω l'angle que fait avec la surface la normale principale en ce point.

On déduit de là

$$N = C \frac{\sqrt[3]{\rho}}{\sin\omega} e^{\frac{2}{3}\int \frac{r_1}{\tang\omega}}.$$

La valeur du segment N étant déterminée par la relation précédente, on aura alors cette proposition, que l'expression (1), en chacun des points de la courbe, sera une quantité infiniment petite du cinquième ordre.

L'équation (2) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3} \frac{dr_1 - d\omega}{\tang\omega} + \frac{1}{3} \frac{d\rho}{\rho};$$

ρ désignant le rayon de courbure de la section normale tangente à la directrice.

Si la courbe considérée est une ligne de courbure ou une ligne géodésique, on a dans les deux cas

$$\frac{dr_1 - d\omega}{\tang\omega} = 0.$$

La valeur de N est donc, dans les deux cas, proportionnelle à la racine cubique de ρ.

De là une propriété géométrique commune, on le voit, aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure pouvant servir à les définir et qui correspond à l'équation différentielle commune à toutes deux découverte par Joachimsthal.

Les quantités N définies par l'équation (2) jouissent de la propriété suivante :

Si, sur une surface, on considère les diverses courbes qui se touchent en un point M, pour toutes ces courbes l'expression

$$3\frac{dN}{N\,ds} = 2\frac{dr_1}{ds}\cdot\frac{1}{\tang\omega} - \frac{3\,dr_1}{ds}\cdot\frac{1}{\tang\omega} + \frac{d\rho}{\rho\,ds}$$

a une valeur constante au point considéré.

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONES ALGÉBRIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1870.

1. Les propriétés des cônes algébriques, que je veux développer ici, résultent de l'extension à l'espace de quelques propriétés des courbes planes que j'ai publiées dans ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques*, et insérée dans les *Comptes rendus* (janvier 1865).

La propriété sur laquelle je m'appuierai peut s'énoncer ainsi :

« Si d'un point M situé dans le plan d'une courbe de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on joint le point M aux n foyers réels de cette courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation. »

D'où la conséquence suivante :

« Les choses étant posées comme dans la proposition précédente, le centre harmonique des points de contact des tangentes, relativement au point M, est le même que le centre harmonique des foyers réels relativement à ce même point. »

Je ferai observer que ces propositions subsistent encore évidemment quand, au système des n foyers réels, on substitue un système quelconque de foyers indépendants.

Les théorèmes précédents peuvent, dans le plan même, être généralisés de diverses manières. Je ne citerai ici qu'une des généralisations dont ils sont susceptibles.

Soient deux courbes A et B qui soient respectivement de classe m et de classe n, imaginons les mn tangentes communes que l'on peut mener à ces courbes et les mn droites qui joignent chacun des foyers réels de A aux foyers réels de B; cela posé, l'on peut énoncer le théorème suivant :

Le faisceau formé par les mn droites dont je viens de parler et le faisceau formé par les mn tangentes communes ont même orientation.

D'où la conséquence suivante :

« Désignons par ab, $a'b'$, ... les tangentes communes, a et b désignant respectivement les points où la tangente ab touche A et B; désignons en outre par α, α', α'' ... les foyers de A et par β, β', β'', ... les foyers de B; cela posé, la moyenne harmonique entre les longueurs

$$ab, \quad a'b', \quad a''b''$$

est la même que la moyenne harmonique entre les longueurs

$$\alpha\beta, \quad \alpha'\beta', \quad \alpha\beta', \quad \ldots \text{ »}.$$

Pour l'expression de moyenne harmonique, je renverrai à ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure* (*Bulletin de la Société philomathique*, janvier 1867).

2. Soit un cône algébrique K de classe n ayant pour sommet le point S. Considérons les plans isotropes tangents à ce cône, je veux dire par là les plans tangents à ce cône qui sont en même temps tangents au cône isotrope ayant pour sommet le point S.

Le cône K étant supposé réel, ces plans passent deux par deux par n droites réelles qui suffisent complètement pour déterminer les plans isotropes tangents au cône.

Ces n droites sont les focales réelles du cône; il y a lieu, dans certains cas, de distinguer les focales ordinaires et les focales singulières; mais ici, cette distinction est inutile.

Cela posé, on a la proposition suivante :

Si par une droite passant par le sommet d'un cône de classe n, on mène les n plans tangents à ce cône, et si l'on mène des plans par cette droite et les n focales réelles, le faisceau des plans tangents a même orientation que le faisceau des plans qui passent par les focales.

Deux cônes, ayant même sommet et circonscrits à deux surfaces homofocales, sont eux-mêmes homofocaux.

D'où cette conséquence :

« Étant données deux surfaces homofocales, les faisceaux de plans, qui passent par une même droite et sont respectivement tangents à chacune des surfaces, ont même orientation. »

3. Soit un cône réel K de degré m; le cône isotrope ayant même sommet le coupe suivant $2m$ génératrices; ces génératrices sont situées deux à deux dans m plans réels.

Je désignerai ces plans sous le nom de *plans cycliques* du cône.

Leur propriété principale est contenue dans la proposition suivante :

Si l'on coupe un cône par un plan quelconque passant par son sommet, le faisceau de droites communes au plan et au cône et le faisceau de droites suivant lequel le plan coupe les plans cycliques de ce cône ont même orientation.

4. La même proposition peut s'énoncer d'une façon un peu différente.

Soit une courbe plane C de degré m et un point S situé d'une façon quelconque dans l'espace. Le cône isotrope ayant pour sommet S coupe le plan de la courbe suivant un cercle qui a $2m$ points communs avec la courbe.

Si l'on suppose la courbe réelle, ces $2m$ points sont situés sur m droites réelles que je désignerai sous le nom de *droites conjointes de la courbe relativement au point* S, en employant une expression dont s'est déjà servi M. Chasles à peu près dans le même sens.

Cela posé, on a le théorème suivant :

Menons dans le plan de la courbe C *une droite quelconque; soient a, a', a'', ... les points où elle coupe la courbe, soient b, b', b'', ... les points où elle coupe les droites conjointes relatives au point* S; *le faisceau de droites ayant pour sommet le point* S *et passant par a, a', a'', ... et le faisceau de droites ayant même sommet et passant par b, b', b'', ... ont même orientation.*

Ces diverses propositions peuvent être considérées comme une extension de ce théorème bien connu de géométrie plane :

Si l'on mène une droite dans le plan d'une courbe algébrique, le centre des moyennes distances des points où elle coupe la courbe est le même que le centre des moyennes distances des points où elle coupe les asymptotes de la courbe.

5. Étant donnés un cône de degré m et les m plans cycliques, supposons que ces plans se coupent suivant une même droite D.

Cette droite jouit évidemment de la propriété suivante :

« Si l'on coupe le cône par un point quelconque passant par D, la somme des angles que font avec cette droite les génératrices d'intersection est nulle, quel que soit le plan sécant. »

Je dirai, dans ce cas, que la droite D est un axe de moyenne orientation du cône.

Un cône, en général, n'a pas d'axe qui jouisse de cette propriété; les cônes du second degré, comme on le sait, en ont trois; mais déjà ceux du troisième degré n'en ont que dans certains cas particuliers.

6. Étant donnée une courbe plane C du troisième degré, on peut faire passer par cette courbe une infinité de cônes du troisième degré qui aient un axe de moyenne orientation.

Il suffit, en effet, de construire des cercles coupant C en six points distribués deux à deux sur trois droites concourant en un même point, ou, en d'autres termes, de telle façon que les six points d'intersection soient en involution.

Étant donné l'un quelconque de ces cercles, construisons les sommets du cône isotrope qui passe par ce cercle; chacun de ces points est évidemment le sommet d'un cône passant par C et ayant un axe de moyenne orientation.

Assujettir un cercle à couper une courbe de troisième ordre en six points en involution, c'est l'assujettir à une seule condition.

Donc :

Étant donnée une courbe du troisième ordre, on peut, par cette courbe, faire passer une infinité de cônes ayant un axe de moyenne orientation; les sommets de ces cônes sont situés sur une surface.

Je me propose, dans une Communication prochaine, d'étudier cette surface; je ferai seulement remarquer ici qu'elle contient nécessairement la focale de C, je veux dire la ligne double de la développable isotrope circonscrite à C.

7. Considérons une courbe de quatrième degré. Assujettir un cercle à la couper en huit points situés deux à deux sur quatre droites concourantes, c'est l'assujettir à deux conditions.

Donc :

Étant donnée une courbe du quatrième ordre, on peut, par cette courbe, faire passer une infinité de cônes ayant un axe de moyenne orientation; les sommets de ces cônes sont situés sur une courbe.

8. On verrait de même que, par une courbe du cinquième degré, on ne peut faire passer qu'un nombre limité de cônes ayant un axe de moyenne orientation.

Dans ce qui précède je n'ai, pour plus de clarté, parlé que des plans cycliques réels; mais il est clair que tout ce que j'ai dit s'applique à un système quelconque de plans cycliques indépendants.

SUR UN ARTICLE DE M. CAYLEY.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

M. Cayley attribue à M. Casey l'élégant théorème qui permet de construire la courbe de pénombre comme l'enveloppe d'une série de cercles; j'ignore dans quel Mémoire et à quelle époque M. Casey a énoncé cette propriété; je crois devoir toutefois rappeler que M. Moutard l'avait fait connaître dès 1862.

A cette époque, il avait énoncé la proposition suivante :

Toute anallagmatique du quatrième ordre (quartique bicirculaire de M. Cayley) *peut être considérée de quatre façons différentes comme l'enveloppe de cercles coupant orthogonalement un cercle fixe, tandis que leurs centres décrivent des coniques; les quatre coniques au moyen desquelles on peut engendrer ainsi la courbe sont homofocales* (1).

J'ai démontré très simplement, dans une Note insérée au *Bulletin de la Société philomathique* sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré (mars 1867), que la projection stéréographique d'une courbe de cette espèce pouvait être, comme l'indique la proposition de M. Moutard, regardée comme l'enveloppe de cercles.

Je reproduis ici cette démonstration.

Considérons une courbe K résultant de l'intersection d'une sphère S, par une surface du second degré. On peut, par cette

(1) *Voir* la Note : *Sur les arcs des courbes planes et sphériques considérées comme enveloppes de cercles*; par M. Mannheim (*Journal de Liouville*, 1862) et ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes planes* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1865).

courbe, faire passer quatre cônes. Soient (C) l'un de ces cônes, c son sommet.

Le cône (C) étant l'enveloppe des divers plans qui lui sont tangents, la courbe K est l'enveloppe des cercles suivant lesquels ces plans tangents coupent la sphère. Les plans de ces cercles passant par le point c, ces cercles eux-mêmes coupent à angles droits le cercle Γ suivant lequel la sphère est coupée par le plan polaire de c. Les pôles des plans de ces cercles décrivent une conique G, qui est la polaire du cône (C).

La courbe K peut donc être considérée comme l'enveloppe de cercles qui coupent orthogonalement le cercle Γ, les pôles des plans de ces cercles décrivant une conique G.

Faisons maintenant une projection stéréographique de la figure.

La courbe K se projette suivant une courbe k, qui est l'enveloppe des cercles h suivant lesquels se projettent les cercles de la sphère dont l'enveloppe est K.

Ces cercles h coupent orthogonalement le cercle γ, projection de Γ; de plus, leurs centres décrivent la conique projection de G, en vertu du théorème bien connu de M. Chasles :

Si l'on projette un cercle stéréographiquement, le centre du cercle suivant lequel il se projette est la projection du pôle, par rapport à la sphère, du plan du cercle projeté.

La courbe K étant située sur quatre cônes du second degré, la proposition de M. Moutard se déduit immédiatement de ce qui précède.

Pour les développements auxquels peut donner lieu cette question, je renverrai le lecteur à la Note que j'ai citée plus haut.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A M. BOURGET.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

Permettez-moi d'ajouter aux beaux théorèmes de Steiner et de M. Cremona, démontrés par M. Painvin, quelques propositions nouvelles, et fondamentales dans la théorie de l'hypocycloïde; elles se déduisent très facilement des théorèmes généraux que j'ai donnés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (*Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques*, janvier 1865), et dans le *Bulletin de la Société philomathique* (*Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes*, février 1867); j'en ai déduit, du reste, les principales conséquences relatives à l'hypocycloïde, dans le cours que j'ai professé cet hiver à la salle Gerson.

Les deux propositions fondamentales auxquelles donne lieu cette courbe sont les suivantes :

Théorème I. — *Les trois tangentes que, par un même point, on peut mener à l'hypocycloïde font, avec une quelconque des tangentes de rebroussement, des angles dont la somme est un multiple de* π.

Théorème II. — *Si, par un point* P, *on mène trois tangentes à l'hypocycloïde, et si l'on désigne par* A, B, C *les trois points de contact; si, sur le prolongement d'une quelconque de ces trois tangentes* PA, *on prend un point* A′ *tel que* PA′ *soit le double de* PA, *les quatre points* P, A′, B, C *sont sur une même circonférence et partagent harmoniquement cette circonférence.*

Voici quelques conséquences de ces propositions :

Soit une droite touchant la courbe au point M, et la coupant

en P et R. Si l'on désigne par δ l'inclinaison de cette droite sur une quelconque des tangentes de rebroussement, et par ϖ l'inclinaison, sur cette tangente, de la tangente en P, on aura, en vertu du théorème I,

$$\delta + 2\varpi = \text{multiple de } \pi;$$

en désignant de même par ρ l'inclinaison sur cette tangente de la tangente au point R, on aura

$$\delta + 2\rho = \text{multiple de } \pi;$$

on déduit de là

$$2(\varpi - \rho) = \text{multiple de } \pi.$$

D'où l'on voit que

$$\varpi - \rho = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad = \frac{\pi}{2}.$$

Deux tangentes à l'hypocycloïde ne pouvant être parallèles, on a

$$\varpi - \rho = \frac{\pi}{2}.$$

Donc les tangentes aux points P et R sont perpendiculaires entre elles.

Considérons maintenant les trois tangentes PA, PB et PC issues d'un même point P, et supposons que deux d'entre elles, PB et PC, soient rectangulaires; si nous prolongeons AP d'une longueur double d'elle-même au delà du point P, l'extrémité A′ du segment ainsi obtenu sera sur la circonférence passant par les points P, B, C, et sur cette circonférence sera le conjugué harmonique du point P; mais, d'après les propriétés bien connues de la division harmonique sur un cercle, l'angle $\widehat{BPC}$ étant droit, la ligne BC est perpendiculaire sur PA′, c'est-à-dire sur PA.

Donc, si deux des tangentes issues d'un point P sont rectangulaires, la corde des contacts de ces deux tangentes est perpendiculaire à la troisième tangente issue du même point.

Vos lecteurs trouveront peut-être quelque intérêt à rapprocher ces démonstrations géométriques des démonstrations analytiques données par M. Painvin.

On peut ajouter ici la proposition suivante, remarquable par sa simplicité et son élégance :

Si d'un point A *de l'hypocycloïde, on mène à la courbe la tangente dont le point de contact ne coïncide pas avec* A; *en désignant par* T *le point de contact de cette tangente, si l'on prolonge* TA *d'une longueur égale à elle-même, le point* T', *extrémité de ce prolongement, est le foyer de la parabole qui surosculе en* A *l'hypocycloïde.*

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

RELATIF AUX

COURBES GAUCHES DU QUATRIÈME ORDRE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1870.

Étant données dans l'espace une surface du second ordre et deux droites fixes, M. Chasles a démontré que, si une droite mobile était assujettie à rencontrer les deux droites fixes en s'appuyant sur la surface, la courbe de contact des droites mobiles était une courbe gauche du quatrième ordre, de l'espèce de celles par lesquelles on peut mener une infinité de surfaces du second ordre.

Inversement, étant donnée une courbe résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre, on peut se demander si elle peut toujours être engendrée par le procédé qui résulte de la proposition de M. Chasles, et, si elle peut l'être, comment l'on pourra déterminer une surface du second ordre et deux droites de façon à obtenir la génération de la courbe.

La Note qui suit a pour objet de résoudre cette question. Je montre que par la courbe donnée on peut toujours faire passer six surfaces qui permettent la génération indiquée par M. Chasles, et que, l'une des surfaces étant choisie, on peut encore choisir d'une infinité de façons les deux droites fixes.

La proposition suivante montrera comment on peut résoudre le problème que je m'étais proposé.

Par la courbe donnée passent quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre. Prenons arbitrairement deux arêtes opposées de ce tétraèdre et menons une droite quelconque qui, s'appuyant sur ces arêtes, rencontre la courbe en un point A : on sait alors qu'elle la rencontre en un autre point B.

Par la droite AB on peut mener quatre plans qui touchent la courbe; les quatre points de contact sont les sommets d'un tétraèdre; deux arêtes opposées de ce tétraèdre rencontrent les deux arêtes opposées du tétraèdre dont j'ai parlé plus haut et dont les sommets sont les sommets des quatre cônes. Soient CC′ et DD′ ces deux arêtes; C, C′, D et D′ étant les quatre points de contact avec la courbe.

Choisissons arbitrairement l'une de ces arêtes, CC′ par exemple; les quatre droites AC, AC′, BC et BC′ sont situées sur une même surface du second ordre S passant par la courbe donnée. Cela posé:

Si une droite mobile rencontre à chaque instant les droites AB et DD′ en s'appuyant sur la surface S, elle la touchera précisément le long de la courbe donnée.

Les propositions sur lesquelles je me suis appuyé pour la solution de ce problème se rattachent étroitement, comme je m'en suis aperçu en rédigeant cette Note, aux théorèmes donnés par M. Hesse dans son beau Mémoire *Sur les courbes du troisième ordre* (*Crelle*, t. 48); théorèmes qui, du reste, si l'on veut remonter plus haut, se trouvent, quant au fond, dans une Note très courte *Sur les focales* publiée par M. Van Reiss dans le Tome V du *Journal de Quetelet*.

Les surfaces réglées du quatrième ordre qui se présentent dans cette Note sont en elles-mêmes très intéressantes, et je les avais déjà rencontrées en étudiant certains théorèmes de M. W. Roberts relatifs aux surfaces du second ordre que j'ai pu, par leur moyen, étendre aux surfaces du quatrième ordre ayant une conique double.

Du reste, M. de la Gournerie s'était déjà auparavant occupé, d'une façon toute spéciale, de ces surfaces réglées; je n'en parlerai donc ici qu'accidentellement, en me contentant de mentionner la définition très simple que l'on en peut donner en s'appuyant sur la théorie des fonctions elliptiques, et je renverrai le lecteur curieux de poursuivre cette recherche, à l'Ouvrage très complet que M. de la Gournerie a publié à ce sujet.

1. Dans tout ce qui suit, je désignerai sous le nom de *biquadratique gauche*, ou simplement sous le nom de *biquadratique*, l'intersection de deux surfaces du second ordre.

Bien que toutes les propositions sur lesquelles je m'appuierai puissent s'établir facilement par des considérations de pure Géométrie (elles se déduisent immédiatement des relations très simples que M. Chasles a données dans sa *Géométrie supérieure*, p. 157, entre trois couples de points en involution et leurs points milieux), j'ai cru, pour abréger, pouvoir me servir de la belle théorie fondée par M. Clebsch.

En ce qui concerne les biquadratiques gauches, la théorie de M. Clebsch peut s'établir d'une façon très simple et très facile; mais, quoique la démonstration de ses formules, dans ce cas spécial, puisse donner lieu à quelques remarques dignes d'intérêt, je me contenterai de renvoyer le lecteur aux divers Mémoires qu'il a publiés sur ce sujet [1], en exposant brièvement ceux des résultats qu'il a obtenus, sur lesquels je m'appuierai.

2. Soit tracée, sur une surface du second ordre S, une biquadratique quelconque K. A cette courbe se rattache une intégrale elliptique [2]; on peut concevoir que la valeur de la variable qui entre dans cette intégrale soit à chaque instant fixée par la position d'un point mobile sur la biquadratique, ou que le déplacement du point mobile de la courbe détermine la variation de la variable.

Étant pris, sur la courbe, un point arbitraire ω, qui corresponde à la valeur de la variable prise pour limite inférieure de l'intégrale; si le point mobile, qui fixe à chaque instant la valeur de cette variable, se meut sur la courbe jusqu'à un point donné A, on obtiendra pour l'intégrale considérée une valeur parfaitement déterminée. Cette valeur, cependant, ne sera pas entièrement déterminée par la seule connaissance du point A; elle dépend, comme on le sait, du chemin que l'on a suivi pour se mouvoir,

(1) *Voir* notamment le Mémoire *Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie* (*Crelle*, t. 63).

(2) Quand la courbe est tracée sur une sphère, cette intégrale prend une forme géométrique très simple; en désignant par M un point quelconque de cette courbe, par F, G, H, K ses quatre foyers réels, elle s'exprime de la façon suivante

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\text{MF}.\text{MG}.\text{MH}.\text{MK}}}.$$

sur la courbe, du point ω au point A; et, d'après le chemin qu'on a suivi, la valeur de l'intégrale peut demeurer la même, ou être augmentée d'un multiple quelconque de l'une des deux périodes qui appartiennent à l'intégrale elliptique considérée. Dans tout ce qui suit, je désignerai constamment ces deux périodes par $2p$ et $2q$, en posant, pour abréger, $p+q=r$, $2r$ étant une autre période de l'intégrale dépendant des deux premières.

Lorsqu'on se donne la valeur de l'intégrale, prise à partir du point origine ω, le point A qui correspond à la valeur extrême de la variable est complètement déterminé; mais, lorsqu'on se donne au contraire ce point A, la valeur de l'intégrale n'est déterminée qu'à un multiple près de $2p$ et de $2q$.

Cela posé, la proposition fondamentale donné par M. Clebsch, sur laquelle je m'appuierai dans tout ce qui suit, peut s'énoncer ainsi :

Si l'on coupe la biquadratique K *par un plan qui la rencontre aux points* A, B, C *et* D, *la somme des quatre intégrales dont les limites supérieures sont caractérisées par les points* A, B, C *et* D *est une quantité constante, quelle que soit la position du plan, ou, du moins, cette quantité ne peut varier que de multiples des deux périodes* $2p$ *et* $2q$.

Pour exprimer ce genre de relation, on peut employer avec avantage le signe de la congruence de Gauss, et écrire simplement

$$A+B+C+D\equiv\alpha \pmod{2p,\ 2q},$$

α désignant une quantité constante.

Comme jusqu'ici l'origine ω a été prise arbitrairement, rien n'empêche de la choisir de telle sorte que la constante α soit nulle; en sorte que l'on aura simplement

$$A+B+C+D\equiv 0. \tag{1}$$

Dans cette congruence, A ne représente pas le point A, mais l'intégrale qui s'étend depuis l'origine fixe jusqu'à ce point. Il n'y a d'ailleurs lieu de redouter aucune confusion dans ce double emploi d'une même lettre pour représenter un point et une intégrale, la présence du signe de la congruence suffisant pour fixer le sens que l'on doit y attacher.

3. La congruence (1) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D de la biquadratique soient dans un même plan.

Soient A et B deux points donnés de cette courbe, il existe une surface du second ordre S, bien déterminée, qui passe par la courbe et qui a la droite AB pour génératrice. Si, par AB, on mène un plan quelconque rencontrant la courbe aux points X et Y, la droite XY est, comme on le sait, l'une quelconque des génératrices du second système de cette surface.

Or, d'après la relation (1), on a

$$X+Y+A+B\equiv 0 \quad \text{d'où} \quad X+Y\equiv-(A+B).$$

Si l'on pose, pour abréger, $A+B\equiv k$, l'on voit que, pour toutes les génératrices du système contraire à AB, l'on a

$$X+Y\equiv -k. \tag{2}$$

De même, si X et Y désignent les deux points où une génératrice de la surface S de même système que AB s'appuie sur k, on voit que l'on a la relation

$$X+Y\equiv k. \tag{3}$$

D'où cette conclusion : Si l'on prend, sur la biquadratique, une série de points X, Y satisfaisant à la relation (3), toutes les droites telles que XY sont les génératrices d'un système d'une même surface du second ordre passant par la biquadratique; et les droites XY, qui joignent les couples de points satisfaisant à la relation (2) sont les génératrices du second système de cette même surface.

On voit que chacune des surfaces du second ordre que l'on peut mener par K est caractérisée par une constante $\pm k$; je désignerai souvent l'une de ces surfaces par la valeur de la constante qui lui est propre, et l'on comprendra aisément ce que je veux dire par surface $(\pm k)$.

4. Parmi les surfaces du second ordre qui passent par K se trouvent en particulier quatre cônes. Soient X et Y les points où l'une des génératrices d'un de ces cônes s'appuie sur la courbe, cette génératrice et la génératrice infiniment voisine étant dans un

même plan, on doit avoir

$$2(X+Y)\equiv o;$$

si l'on résout cette congruence, en observant qu'elle exprime que le second membre est non pas nul, mais un multiple quelconque de $2p$ et de $2q$, on en déduit les quatre solutions suivantes :

$$X+Y\equiv o,$$
$$X+Y\equiv p,$$
$$X+Y\equiv q,$$
$$X+Y\equiv r;$$

dans la dernière congruence, j'ai posé, pour abréger, $p+q=r$.

Telles sont les relations qui caractérisent les quatre cônes du second ordre qui passent par K; j'appellerai O, P, Q, R les sommets de ces quatre cônes, en sorte que toute droite passant par le sommet O et s'appuyant en deux points de la courbe donnera lieu à la relation

$$X+Y\equiv o.$$

De même, toute génératrice du cône ayant pour sommet Q donnera lieu à la relation

$$X+Y\equiv q.$$

5. Les points O, P, Q, R sont les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui passent par K. On peut grouper de trois façons différentes les arêtes de ce tétraèdre de façon que chaque groupe contienne deux arêtes opposées. Soient OP et QR les arêtes opposées correspondant à un mode de groupement, et X un point quelconque de la courbe K.

Menons la droite OX, elle rencontre la courbe en un deuxième point X', et l'on a

$$X+X'\equiv o;$$

joignons X' au point P et appelons Y le point où la droite PX' rencontre de nouveau la courbe. On a

$$X'+Y\equiv p.$$

Les deux points ainsi obtenus X et Y satisfont à la relation

$$X-Y\equiv p \quad \text{ou bien} \quad Y-X\equiv p.$$

Je dirai que ces deux points sont deux points conjugués de la biquadratique, relativement au mode de groupement défini par les arêtes OP et QR, ou bien par la demi-période p.

La droite XY qui joint deux points conjugués rencontre évidemment l'arête OP; on peut voir aussi facilement qu'elle rencontre l'arête opposée RQ. Joignons en effet X au sommet R, et soit X'' le point où cette droite coupe K; menons la droite X''Q, et soit Y'' le point de rencontre de cette droite avec K. L'on a évidemment

$$X+X''\equiv r, \qquad X''+Y''\equiv q \qquad \text{d'où} \qquad Y''-X\equiv q-r\equiv p.$$

Le point Y'', ainsi déterminé, se confond avec le point Y; ce qui démontre la proposition énoncée.

Ainsi, la droite joignant deux points conjugués quelconques s'appuie sur les deux arêtes opposées du tétraèdre qui définissent le mode de groupement; réciproquement, toute droite s'appuyant sur ces deux arêtes, et rencontrant la courbe, la rencontre en deux points conjugués.

Si nous considérons une surface quelconque du second ordre S passant par K, les deux arêtes OP et QR sont des droites polaires réciproques, relativement à cette surface; l'une de ces droites la coupe donc en deux points réels ϖ et ϖ'. Deux points conjugués quelconques et les points ϖ et ϖ' sont dans un même plan qui coupe la surface suivant une conique divisée harmoniquement par les quatre points considérés.

6. Si l'on détermine tous les couples de points conjugués qui correspondent au mode de groupement caractérisé par les deux arêtes OP et QR, ou par la demi-période p, les droites joignant ces différents points forment une surface réglée ayant pour droites doubles les arêtes OP et QR; cette surface est évidemment du quatrième ordre; je la désignerai par la notation T_p.

Si l'on appelle Y et X les points où une génératrice quelconque de cette surface s'appuie sur la courbe, l'on a

$$Y-X\equiv p,$$

Il y a lieu de considérer deux autres surfaces de même espèce caractérisées par les demi-périodes q et r; je les désignerai par T_q et T_r.

7. *A et B étant deux points quelconques de K, par la corde AB on peut mener quatre plans tangents à la courbe; les quatre points de contact sont les sommets d'un tétraèdre. Deux arêtes opposées quelconques de ce tétraèdre rencontrent deux arêtes opposées du tétraèdre* OPQR.

Appelons X l'un quelconque des points de contact des plans tangents cherchés, on a la relation

$$A+B+2X\equiv 0;$$

d'où l'on déduit pour X les quatre valeurs suivantes :

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} X^{\prime}\equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right), & X^{\prime\prime\prime}\equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right)+q, \\ X^{\prime\prime}\equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right)+p, & X^{\mathrm{IV}}\equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right)+r. \end{cases}$$

Considérons deux quelconques des arêtes opposées du tétraèdre $XX^{\prime}X^{\prime\prime}X^{\prime\prime\prime}$, par exemple les arêtes $X^{\prime}X^{\prime\prime}$ et $X^{\prime\prime\prime}X^{\mathrm{IV}}$; l'on a

$$X^{\prime\prime}-X^{\prime}\equiv p \qquad \text{et} \qquad X^{\mathrm{IV}}-X^{\prime\prime\prime}\equiv p,$$

puisque $r\equiv p+q$.

La proposition est donc démontrée; les deux arêtes $X^{\prime}X^{\prime\prime}$ et $X^{\prime\prime\prime}X^{\mathrm{IV}}$ sont deux génératrices de la surface T_p.

8. Supposons maintenant que la corde AB soit elle-même une génératrice de T_p, en sorte que l'on ait

$$(\beta)\qquad A-B\equiv p;$$

désignons toujours par $X^{\prime}$, $X^{\prime\prime}$, $X^{\prime\prime\prime}$ et X^{IV} les quatre points de contact des plans que l'on peut mener par cette corde tangentiellement à la courbe. Des quatre arêtes du tétraèdre $X^{\prime}X^{\prime\prime}X^{\prime\prime\prime}X^{\mathrm{IV}}$, deux sont aussi des génératrices de T_p; ce sont les droites $X^{\prime}X^{\prime\prime}$ et $X^{\prime\prime\prime}X^{\mathrm{IV}}$.

Choisissons arbitrairement une de ces droites, $X^{\prime}X^{\prime\prime}$ par exemple; il est facile de voir que les quatre droites $AX^{\prime}$, $AX^{\prime\prime}$, $BX^{\prime}$, $BX^{\prime\prime}$ sont des génératrices d'une même surface du second

ordre passant par K. Les congruences (α), qui déterminent $X^{\prime}$, $X^{\prime\prime}$, $X^{\prime\prime\prime}$ et X^{IV}, donnent, en effet, si l'on tient compte de la relation (β),

$$A+X^{\prime}\equiv B+X^{\prime\prime}\equiv \frac{p}{2} \qquad \text{et} \qquad A+X^{\prime\prime}\equiv B+X^{\prime}\equiv -\frac{p}{2}.$$

Cette surface du second ordre est caractérisée par la constante $\pm\frac{p}{2}$; on voit qu'elle est la même, quelle que soit la génératrice AB de la surface T_p que l'on ait choisie. Je la désignerai dans ce qui suit par la lettre S_p.

Relativement à cette surface S_p, je dirai que les droites AB et $X^{\prime}X^{\prime\prime}$ sont deux génératrices associées de la surface T_p.

Puisque les droites $AX^{\prime}$, $AX^{\prime\prime}$, $BX^{\prime}$ et $BX^{\prime\prime}$ sont des génératrices de S_p, l'on voit que deux génératrices associées sont des droites polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à S_p.

Si nous avions fait correspondre la droite $X^{\prime\prime\prime}X^{\mathrm{IV}}$ à la corde AB, nous aurions démontré de même que les droites $AX^{\prime\prime\prime}$, AX^{IV}, $BX^{\prime\prime\prime}$ et BX^{IV} étaient les génératrices d'une même surface du second ordre passant par la courbe K et caractérisées par la constante

$$\pm\left(\frac{p}{2}+q\right).$$

Je désignerai cette deuxième surface par la notation $S_{p^{\prime}}$.

Les droites telles que AB et $X^{\prime\prime\prime}X^{\mathrm{IV}}$ seront dites des génératrices associées de T_p relativement à la surface $S_{p^{\prime}}$.

La considération des surfaces T_q et T_r conduirait de même à la considération de quatre autres surfaces du second ordre S_q, $S_{q^{\prime}}$; S_r et $S_{r^{\prime}}$.

La propriété que j'ai signalée des six surfaces S_p, $S_{p^{\prime}}$; S_q, $S_{q^{\prime}}$; S_r, $S_{r^{\prime}}$, à savoir : qu'à chacune d'elles correspond une surface réglée du quatrième ordre dont chaque génératrice s'appuie en deux points de K et qui est à elle-même sa transformée par polaires réciproques, lorsque l'on prend pour base la surface considérée, est caractéristique de ces surfaces.

Étant donnée une droite s'appuyant en deux points sur K et telle que sa polaire, par rapport à une surface de second degré passant par cette courbe, s'appuie aussi en deux points sur cette courbe, on démontrera facilement que cette droite est une génératrice de l'une des trois surfaces T_p, T_q et T_r, et que la surface du second degré est une des six surfaces que j'ai mentionnées et qui correspondent deux à deux à T_p, T_q et T_r.

9. Lemme. — *Étant données deux génératrices quelconques* G *et* G′ *de la surface* T_p, *associées par rapport à la surface* S_p, *et deux génératrices quelconques* H *et* H′ *de* T_p, *associées par rapport à* $S_{p'}$, *ces quatre droites et les arêtes* OP, OQ *sont toujours situées sur un même hyperboloïde.*

En effet, les droites H, H′ et G, qui s'appuient toutes les trois sur OP et sur OQ, déterminent un hyperboloïde, dont l'intersection avec la surface T_p est une courbe du huitième ordre.

Les droites H, H′, G, OP et OQ faisant partie de l'intersection et ces deux dernières devant, chacune, compter pour deux, puisqu'elles sont des droites doubles de T_p, la courbe d'intersection ne peut être complétée que par une sixième droite. Il s'agit de prouver que cette droite est précisément G′.

A cet effet, désignons respectivement par h, h_1; h', h'_1; g, g_1; x, x_1 les points où s'appuient sur la courbe K les droites H, H′, G et la droite cherchée.

Les droites H et H′ étant associées par rapport à la surface $S_{p'}$, l'on a

$$h - h_1 \equiv p, \qquad h' - h'_1 \equiv p, \qquad h' + h \equiv \frac{p}{2} + q;$$

a droite G et la droite cherchée étant des génératrices de T_p, l'on a aussi

$$g - g_1 \equiv p \qquad \text{et} \qquad x - x_1 \equiv p.$$

Maintenant, remarquons que les huit points h, h_1; h', h'_1; g, g_1; x, x_1 étant les points d'intersection de K avec une surface de second degré, on a, d'après les principes posés par M. Clebsch,

$$h + h_1 + h' + h'_1 + g + g_1 + x + x_1 \equiv 0.$$

On déduit facilement des relations précédentes

$$2x + g + g_1 \equiv 0.$$

D'où l'on voit que la droite cherchée xx_1 ne peut être que l'as-

sociée de G relativement à la surface S_p ou son associée relativement à la surface $S_{p'}$.

La dernière hypothèse ne peut être admise.

Considérons en effet les quatre droites H, H′; G et xx_1, qui sont quatre génératrices d'un même système de l'hyperboloïde.

Les droites de ce groupe ne font que s'échanger entre elles, lorsqu'on prend leurs polaires relativement à $S_{p'}$; l'hyperboloïde qui les contient devrait donc se transformer en lui-même en employant une transformation par polaires réciproques ayant pour base $S_{p'}$.

Ce qui est impossible, puisque l'hyperboloïde ne se confond pas avec $S_{p'}$.

L'hypothèse précédente étant donc écartée, il s'ensuit que la droite cherchée est la génératrice associée à G relativement à la surface S_p.

Ce qui démontre le lemme énoncé ci-dessus.

Corollaire. — *Prenons la trace de* T_p *sur un plan quelconque; soient* Π *et* Π′ *les points où ce plan rencontre les arêtes* OP *et* QR, *ces points sont les deux points doubles de la courbe du quatrième ordre qui forme cette trace.*

Soient α et β les points où deux génératrices quelconques, associées par rapport à $S_{p'}$, coupent le plan sécant.

Désignons en général par x et y les deux points de la courbe où le plan sécant coupe deux génératrices mobiles de T_p associées par rapport à S_p; il résulte du lemme précédent que, quel que soit le couple de points x et y que l'on considère, ces deux points variables et les quatre points fixes α, β, Π et Π′ sont sur une même conique.

10. Lemme. — *Étant donnés une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles* Π *et* Π′, *et deux points fixes* α *et* β *pris sur cette courbe, si l'on mène par ces quatre points une conique quelconque, la droite qui joint les deux autres points* x, y, *où la conique variable rencontre de nouveau la courbe, enveloppe une conique.*

Joignons les points Π et Π′ à un point E pris arbitrairement dans l'espace et, par les droites EΠ et EΠ′, faisons passer une surface du second degré quelconque A. Le cône, ayant pour sommet E et pour base la courbe du quatrième degré, coupera cette surface suivant une biquadratique B. Soient a et b les projections coniques des points α et β sur la courbe B, X et Y les projections coniques des points variables x et y; les points α, β, x, y et Π, Π′ étant sur une même conique, il en résulte que les points a, b, X et Y sont dans un même plan. Comme, d'ailleurs, ils sont situés sur la biquadratique, l'on voit que la droite XY engendre dans l'espace une surface du second degré; les droites telles que xy, qui, dans le plan sécant, sont les projections des génératrices de cette surface, enveloppent donc une conique.

Corollaire. — De ce lemme et du corollaire précédent, il résulte immédiatement la proposition suivante :

Si l'on coupe la surface T_p *par un plan quelconque et si l'on désigne, pour un instant, sous le nom de* points associés de la courbe d'intersection, *les points de cette courbe qui appartiennent à deux génératrices de* T_p *associées relativement à* S_p, *les droites qui joignent deux points associés quelconques enveloppent une conique.*

11. *Si d'un point de l'espace* A, *on mène les différentes droites qui rencontrent deux génératrices de* T_p *associées entre elles par rapport à la surface* S_p, *ces droites forment un cône du second degré.*

En effet, pour trouver le degré du cône formé par ces droites, menons par A un plan quelconque M et cherchons combien ce cône contient de droites satisfaisant à la condition donnée.

Ces droites doivent évidemment passer par un couple de points associés de la courbe d'intersection de T_p avec le plan M; or les droites qui joignent ces points associés enveloppent une conique à laquelle on ne peut mener que deux tangentes par le point A. Le plan M ne contient donc que deux droites satisfaisant à la condition donnée; le lieu cherché est donc un cône du second degré.

12. Les surfaces réglées T_p et $S_{p'}$ ont quatre génératrices communes. En effet, les génératrices rectilignes de $S_{p'}$ se partagent,

comme on sait, en deux systèmes. En désignant par X et Y les points où l'une quelconque de ces droites s'appuie sur K, l'on a, pour les génératrices de l'un des systèmes, la relation

$$X + Y = \frac{p}{2} + q;$$

je dirai que les génératrices qui donnent lieu à cette relation sont du premier système. Les génératrices du second système donnent lieu à la relation

$$X + Y = -\frac{p}{2} - q.$$

Cherchons combien de génératrices de $S_{p'}$ du premier système peuvent appartenir à la surface T_p. Soit XY l'une quelconque d'entre elles; on devra avoir à la fois les deux relations

$$X + Y = \frac{p}{2} + q \qquad \text{et} \qquad X - Y = p;$$

d'où l'on déduit

$$2X = \frac{3p}{2} + q,$$

relation qui fournit, pour X, les quatre valeurs suivantes :

$$X' = \frac{3p}{4} + \frac{q}{2}, \qquad X'' = \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2},$$
$$X''' = \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2}, \qquad X^{\text{IV}} = \frac{3p}{4} + r + \frac{q}{2};$$

les valeurs correspondantes de Y sont les quatre suivantes :

$$Y' = \frac{3p}{4} - p + \frac{q}{2}, \qquad Y'' = \frac{3p}{4} + \frac{p}{2},$$
$$Y''' = \frac{3p}{4} + r + \frac{q}{2}, \qquad Y^{\text{IV}} = \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2},$$

valeurs qui sont, deux à deux, égales à celles de X, comme on devait le prévoir.

Il résulte de là que T_p et $S_{p'}$ ont en commun deux génératrices du premier système, savoir :

$$X'Y' \quad \text{et} \quad X'''Y'''.$$

On a

$$X' + X''' = \frac{p}{2};$$

donc les deux génératrices $X'Y'$ et $X'''Y'''$ sont associées relativement à la surface S_p.

Ce que j'ai dit des génératrices du premier système s'applique également aux génératrices du second système.

D'où la conclusion suivante :

Les surfaces T_p et $S_{p'}$ ont quatre génératrices communes; deux d'entre elles sont d'un même système et sont associées relativement à la surface S_p; les deux autres appartiennent à l'autre système de génératrices et sont également associées relativement à la même surface.

Il est clair que tout ce qui précède s'applique également à la surface S_p. Les quatre génératrices qu'elle a en commun avec la surface T_p sont deux à deux associées par rapport à $S_{p'}$.

13. Considérons maintenant un point quelconque M de la surface $S_{p'}$; les droites qui, passant par ce point, rencontrent à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p, forment, comme je l'ai montré, un cône du second degré.

Ce cône passe par les génératrices (M') et (M'') de la surface $S_{p'}$ qui se croisent au point M. En effet, il y a sur cette surface deux génératrices de même système que (M'), qui sont en même temps deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p; ces deux droites sont rencontrées par (M'), qui se trouve ainsi sur le cône dont je viens de parler. On démontrerait de même que (M'') est située sur ce cône.

Remarquons, maintenant, que ce cône, ayant en commun avec $S_{p'}$ deux génératrices, le coupe, indépendamment de ces deux droites, suivant une section plane. D'où la conclusion suivante :

Si, par un point quelconque de la surface $S_{p'}$, on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p, ces droites forment un cône qui coupe $S_{p'}$ suivant une conique.

14. Cette proposition peut encore être énoncée de la façon suivante :

Étant donnée la surface $S_{p'}$, passant par la biquadratique K, appelons, pour un instant, points conjugués *de cette courbe les deux points où une génératrice quelconque de T_p rencontre la surface; cela posé, si l'on prend un point M quelconque de $S_{p'}$ et si, par ce point et chacun des couples de points conjugués de K, on fait passer une conique située sur $S_{p'}$, le lieu du point de la conique conjuguée harmoniquement de M, par rapport au couple de points conjugués qu'elle contient, est une conique* [1].

15. Supposons que le point M soit situé sur la courbe K, la conique dont je viens de parler passera également par ce point.

En effet, désignons par M' un point infiniment voisin de M et situé sur la courbe K, par M'' le point conjugué de M'. Si, par les trois points M, M', M'', on fait passer une conique située sur la surface $S_{p'}$, le point de cette conique harmoniquement conjugué de M, relativement au couple de points M', M'', est infiniment voisin du point M.

La conique passe donc par ce point, et l'on pourrait même déduire de la démonstration précédente que son plan touche la courbe K; mais il est facile de déterminer d'une façon plus précise la position de ce plan.

Examinons de plus près quel est le lieu des droites passant par M et rencontrant à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p.

Par le point M passe une génératrice de T_p; soient g cette génératrice et g' son associée. Toute droite passant par M et s'appuyant sur g' rencontre les deux génératrices associées g et g'; le plan qui contient le point M et g' fait donc partie du lieu cherché. On peut remarquer d'ailleurs que, les génératrices g et g' étant polaires réciproques relativement à la surface S_p, ce plan est précisément le plan tangent à cette dernière surface.

Ce plan faisant partie du lieu qui est en général un cône du

---

[1] Cette propriété est caractéristique de la surface $S_{p'}$. Lorsque cette surface est une sphère, la courbe K jouit alors de propriétés particulières qui présentent quelque intérêt.

Voir dans le *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868) ma Note sur les Cassiniennes planes et sphériques.

second degré, le lieu doit se composer en outre, dans ce cas, d'un second plan.

Il est facile de voir que ce second plan est le plan tangent mené par M tangentiellement à la surface $S_{p'}$. Considérons en effet une des génératrices de cette surface qui passe par M, par exemple celle du premier système (M_1); comme je l'ai montré plus haut, la surface $S_{p'}$ contient deux génératrices du second système qui sont en même temps des génératrices de T_p associées par rapport à S_p; ces deux droites sont rencontrées par (M_1); le même raisonnement s'applique évidemment à la deuxième génératrice de $S_{p'}$ qui passe par le point M. Cela posé, le plan cherché ne peut être que le plan de ces deux génératrices, ou, en d'autres termes, le plan tangent en M à la surface $S_{p'}$.

D'où la conclusion suivante :

Si, par un point quelconque M *de la courbe* K, *on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de* T_p *associées par rapport à la surface* S_p, *ces droites sont situées dans le plan mené par le point* M *tangentiellement à la surface* $S_{p'}$.

De même :

Si, par un point quelconque M *de la courbe* K, *on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de* T_p *associées par rapport à la surface* $S_{p'}$, *ces droites sont situées dans le plan mené par le point* M *tangentiellement à la surface* S_p.

Propriété que l'on peut encore énoncer comme il suit :

Étant mené, par un point quelconque M *de la courbe* K, *le plan tangent à la surface* S_p, *toute droite de ce plan qui, passant par ce point, rencontre une génératrice de* T_p, *rencontre aussi la génératrice de cette surface qui lui est associée relativement à* $S_{p'}$.

16. Considérons maintenant la surface S_p et deux génératrices quelconques, h et h', de T_p associées par rapport à la surface $S_{p'}$, en sorte que h et h' soient des droites polaires réciproques relativement à cette dernière surface.

Je dis que si une droite mobile D est assujettie à rencontrer constamment les deux droites h et h' et à toucher la surface S_p, le lieu de son point de contact est la courbe K.

En effet, étant pris un point quelconque η sur la droite h, il résulte, de la définition même du mouvement de D, que par ce point passent deux droites satisfaisant aux conditions données; à ces deux droites correspondent d'ailleurs deux points de contact η' et η''.

Imaginons le cône circonscrit à S_p et ayant pour sommet le point η; la courbe de contact de ce cône, dont le sommet est sur la droite h, passe d'abord par deux points fixes qui sont les points où S_p est coupée par la polaire de h relativement à cette surface. Ces deux points fixes sont sur la courbe K; car cette polaire est la génératrice de T_p associée de h par rapport à S_p, et l'on sait que cette génératrice s'appuie sur deux points de K.

Abstraction faite de ces deux points fixes, la conique de contact rencontre K en deux points variables; en l'un de ces points α menons le plan tangent; ce plan coupe la droite h au point η; d'ailleurs la droite $\alpha\eta$, étant située dans le plan mené par α tangentiellement à la surface S_p et rencontrant h, doit rencontrer h'; le point α se confond donc avec l'un des deux points η' et η''.

Le lieu de ces derniers points est donc la courbe K.

D'où la proposition suivante :

Étant données la surface S_p *et deux génératrices quelconques de* T_p *associées relativement à la surface* $S_{p'}$, *si une droite mobile est assujettie à rencontrer constamment les deux génératrices et à toucher* S_p, *le lieu des points de contact est la courbe* K.

17. Il résulte de ce qui précède, qu'étant donnée une biquadratique quelconque K, on peut l'engendrer de la façon indiquée par le théorème de M. Chasles, au moyen d'une quelconque des six surfaces

$$S_p,\ S_{p'};\quad S_q,\ S_{q'};\quad S_r,\ S_{r'}$$

que j'ai précédemment définies.

Ayant pris une de ces surfaces, l'on peut encore choisir d'une infinité de façons le couple de droites fixes qui, avec la surface, déterminent le mode de génération de la courbe.

18. Les surfaces réglées du quatrième ordre, que j'ai rencontrées dans cette recherche, T_p, T_q et T_r, ne sont autre chose, comme il est facile de le voir, que les surfaces étudiées précédemment par M. de la Gournerie, sous le nom de *quadricuspidales limites* (¹).

Une telle surface contient deux droites doubles; T_p, par exemple, a pour droites doubles les deux arêtes OP et QR du tétraèdre conjugué formé par les sommets des quatre cônes qui passent par la courbe K.

Par chacun des points de l'une de ces arêtes passent deux génératrices de la surface; si l'on désigne respectivement par x et y les points où une quelconque de ces deux génératrices s'appuie sur OP et sur QR, on voit qu'à chaque position du point x correspondent deux positions du point y, et réciproquement. Les points x et y tracent donc, sur les droites doubles OP et OQ, ce qu'on peut appeler des *divisions homographiques du second ordre;* mais ici ces divisions sont d'une espèce particulière et jouissent d'une propriété remarquable entièrement caractéristique.

L'on a en effet cette proposition :

Étant donné un point x' situé sur la droite OP, *si y' et y'' désignent les deux points qui lui correspondent sur la droite* OQ, *les points y' et y'' ont pour correspondants le point x' et un autre et même point x''; de telle sorte que le point x'' a aussi pour correspondants les points y' et y''.*

M. Chasles, qui, le premier, a signalé ce mode de correspondance remarquable, a montré que, si elle avait lieu pour une position particulière du point x', elle avait lieu nécessairement pour toute autre position de ce point.

Appelons α et β les points où la droite OP coupe une quelconque des surfaces du second ordre V que l'on peut mener par K, et γ et δ les points où QR rencontre cette même surface. Les droites OP et QR étant polaires réciproques par rapport à cette

(¹) Voir *Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques;* 1867, p. 85.

surface, γ et δ sont précisément les points de contact des plans menés par OP tangentiellement à V.

Les droites $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ et $\beta\delta$ sont des génératrices de cette surface, et chacune d'elles, rencontrant par suite en deux points la courbe K, en même temps qu'elle s'appuie sur les deux droites OP et QR, est une génératrice de la surface réglée T_p; il est clair maintenant qu'à chacun des points α et β de la droite OP correspondent les deux points γ et δ de la droite OQ.

La correspondance qui existe entre les points de division sur ces deux droites est donc de l'espèce particulière dont j'ai parlé plus haut.

La réciproque est évidente, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Si, sur deux droites fixes, on a deux divisions qui se correspondent de telle façon qu'à un point quelconque d'une des droites correspondent deux points de la seconde; si, en outre, le mode de correspondance est tel qu'un même couple de points de l'une des droites corresponde à deux mêmes points de l'autre, les droites joignant les couples de points correspondants forment une surface réglée du quatrième ordre de l'espèce de celles que M. de la Gournerie a désignées sous le nom de quadricuspidales limites.

19. Ces dernières surfaces sont une variété de surfaces réglées du huitième ordre, que le même géomètre a étudiées sous le nom de *quadricuspidales*.

Elles peuvent se définir très simplement de la manière suivante :

Considérons une biquadratique K et une surface réglée quelconque dont chacune des génératrices s'appuie en deux points sur la courbe. Soient X et Y les points où l'une de ces génératrices rencontre K, et X′, Y′ les points analogues pour la génératrice infiniment voisine : on peut se demander comment la surface doit être particularisée, afin que les droites XY′ et X′Y soient des génératrices infiniment voisines d'une même surface du second ordre passant par K.

Faisons pour un instant

$$X' = X + dX,$$
$$Y' = Y + dY;$$

pour que XY' et $X'Y$ soient les génératrices d'une même surface du second ordre, on doit avoir

$$X + Y' \equiv Y + X',$$

ou bien

$$X + Y + dY \equiv Y + X + dX,$$

ou enfin

$$dY \equiv dX$$

et, en intégrant,

$$Y - X \equiv a,$$

a désignant une quantité constante.

La surface engendrée par une droite XY, s'appuyant sur la courbe K en deux points X et Y satisfaisant à la relation précédente, est la quadricuspidale; je dirai, pour abréger, que K est la base de la quadricuspidale.

Une propriété très simple et entièrement caractéristique de cette surface résulte immédiatement de la relation précédente.

Soient XY et $X'Y'$ deux génératrices quelconques d'une quadricuspidale, on a

$$Y - X \equiv a \quad \text{et} \quad Y' - X' \equiv a,$$

relations d'où l'on déduit

$$Y + X' \equiv Y' + X;$$

d'où la proposition suivante :

Étant données deux génératrices quelconques XY *et* $X'Y'$ *d'une quadricuspidale ayant pour base une biquadratique* K, *les deux droites* XY' *et* YX' *sont deux génératrices d'un même système d'une surface du second ordre.*

20. Soient deux génératrices infiniment voisines XY et $X'Y'$ d'une quadricuspidale G ayant pour base K; d'après ce qui précède, XY' et $Y'X$ sont les génératrices d'une même surface de second ordre passant par K.

Par XY menons un plan quelconque L et cherchons le point où ce plan est tangent à la surface G. A cet effet, projetons les deux génératrices sur un plan perpendiculaire au plan L; soient respectivement ξ, η, ξ' et η' les projections sur ce plan des points X, Y, X' et Y'; τ le point d'intersection des deux droites $\xi\eta$ et $\xi'\eta'$, ω celui où se coupent les droites $\xi\eta'$ et $\eta\xi'$. Les points τ et ω ont évidemment pour limites les points de contact du point L avec la surface quadricuspidale et avec la surface du second ordre passant par K et par la droite XY; d'ailleurs on voit immédiatement, en considérant la figure formée sur la projection, que ces points limites divisent harmoniquement le segment $\xi\eta$.

On en conclut la proposition suivante d'un fréquent usage dans les applications :

Étant données une quadricuspidale ayant pour base une courbe K *et une génératrice* XY *de cette surface, si l'on considère en même temps la surface du second ordre qui passe par* K *et par* XY, *tout plan mené par cette dernière droite touche la quadricuspidale et la surface du second ordre en deux points qui partagent harmoniquement le segment* XY.

Soient L le plan mené par XY et Y, Z les deux points où ce plan coupe la courbe K; YZ est la deuxième génératrice de la surface du second ordre située dans le plan; le plan de rencontre T des droites YZ et XY est le point où se touchent ce plan et cette surface; son conjugué harmonique, relativement au segment XY, est donc, d'après ce qui précède, le point où le plan L touche la quadricuspidale.

21. Une quadricuspidale a quatre lignes doubles. En effet, soit XY une génératrice de cette surface; prenons un quelconque des sommets des cônes qui passent par la base K, le point O par exemple. Joignons X et Y au point O, et soient X', Y' les points où les droites ainsi obtenues rencontrent K; on a les trois congruences suivantes :

$$Y - X \equiv a, \qquad X + X' \equiv 0, \qquad Y + Y' \equiv 0,$$

d'où l'on déduit

$$Y' - X' \equiv a.$$

La droite $Y'X'$ est donc une deuxième génératrice de la surface; appelons Ω le point d'intersection des droites YX et $Y'X'$. On voit que Ω est un point double de la surface; ce point, d'après la façon même dont on l'a construit, est d'ailleurs évidemment dans le plan des trois sommets PQR. Lors donc que la génératrice XY se déplacera, il engendrera une ligne double de la surface située dans ce plan.

En considérant de même les autres sommets du tétraèdre OPQR, on verrait que la surface possède en tout quatre lignes doubles situées dans chacune des faces de ce tétraèdre.

La surface ne peut d'ailleurs avoir d'autre ligne double (sauf la base K); car, comme il est facile de le voir par un calcul très simple, X'Y' et les trois droites analogues correspondant aux sommets P, Q et R sont les seules génératrices de la surface qui rencontrent une génératrice donnée XY, en outre de celles qui passent par les points X et Y eux-mêmes.

Revenons maintenant à la nature de ces lignes doubles.

Soit (Ω) la courbe décrite par le point Ω dans le plan PQR. Appelons ω le point de rencontre des droites XY' et YX'; joignons Oω, et désignons par γ et γ' les points où cette droite rencontre XY et X'Y'.

D'après ce que j'ai dit dans le paragraphe précédent, le plan OXY touche la quadricuspidale aux points γ et γ'; ce point est donc doublement tangent à la surface, l'arête de contact étant la droite Oω. Le cône, enveloppé par ces plans tangents doubles, qui passent tous par O, est un cône du second degré; on le démontre facilement en faisant voir que, par toute droite telle que OX, on ne peut mener que deux plans tangents à ce cône.

Le point ω est la trace sur le plan PQR de l'arête Oω de ce cône; ce point se déplace donc sur une conique (ω).

Remarquons maintenant que la droite $\omega\Omega$ est la tangente à cette conique; en considérant la figure ([1]), on voit immédiatement que le segment $\omega\Omega$ est partagé harmoniquement par le cône qui a pour sommet O et pour base K.

D'où l'on conclut la proposition suivante :

Soient (ω) *la trace sur le plan* PQR *du cône doublement circonscrit à la surface ayant pour sommet le point* O, *et* (O) *la trace sur le même plan du cône qui, ayant le même sommet,*

([1]) Le lecteur est prié de suppléer à la figure.

passe par la courbe K : *la ligne double de la quadricuspidale, située dans le plan* PQR, *peut s'obtenir en prenant, sur chacune des tangentes menées à la courbe* (ω), *le point conjugué harmonique du point de contact par rapport au segment intercepté sur la tangente par la courbe* (O).

22. Les surfaces quadricuspidales se présentent dans un grand nombre de questions relatives aux biquadratiques gauches ou aux courbes du troisième ordre.

Elles fournissent, par exemple, une solution très simple de ce problème que l'on rencontre dans l'application des fonctions elliptiques aux courbes du troisième ordre :

Étant donnée une courbe du troisième ordre C, *trouver des courbes telles que la tangente menée en un quelconque de leurs points soit partagée harmoniquement par le point de contact et par les trois points où elle coupe* C.

Ces courbes sont algébriques; on peut facilement les décrire dans le plan lui-même, mais la construction suivante se prête peut-être mieux à l'étude de leurs propriétés.

Prenons deux points quelconques de C et joignons-les à un point O de l'espace; par les deux droites ainsi obtenues, faisons passer une surface du second ordre A.

Le cône, ayant pour sommet O et passant par C, coupe A suivant une biquadratique K.

Imaginons une quelconque des surfaces quadricuspidales qui ont pour base K, le cône circonscrit à cette surface et ayant pour sommet O coupera le plan de C suivant une courbe jouissant de la propriété indiquée.

En considérant les diverses quadricuspidales qui ont pour base K, on obtiendrait la solution complète du problème.

23. Toutes les autres propriétés de la quadricuspidale se déduiraient également avec facilité de la définition très simple que j'en ai donnée plus haut.

Je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet, me contentant de renvoyer le lecteur à l'Ouvrage déjà mentionné de M. de la Gournerie.

SUR UNE

PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques; 1871.

1. M. Bertrand a démontré depuis longtemps que les normales principales d'une ligne à double courbure donnée ne peuvent être les normales principales d'une autre ligne à double courbure, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la courbe donnée.

Les courbes gauches, qui jouissent de cette remarquable propriété, se présentent d'elles-mêmes quand on étudie la déformation des surfaces gauches.

Considérons une surface gauche; il est commode dans un grand nombre de questions de déterminer chaque point de la surface par sa position sur la génératrice rectiligne qui le contient, cette génératrice étant elle-même déterminée par le point où elle rencontre la ligne de striction et les angles qu'elle fait avec cette ligne.

Les formules propres à ce système de coordonnées s'établissent immédiatement. Je transcrirai seulement les suivantes.

Appelons :

σ la longueur de l'arc de la ligne de striction compris entre une origine arbitraire fixe et le point m, où la génératrice coupe cette ligne;

ρ le rayon de courbure de la ligne de striction au point m;

τ son rayon de torsion en ce point;

ω l'angle que fait la génératrice considérée avec la tangente à la ligne de striction;

θ l'angle que fait la normale principale au point m à la ligne de striction avec la droite menée perpendiculairement à la génératrice dans le plan tangent à la surface en ce point;

$d\mathrm{E}$ l'angle infiniment petit de deux génératrices consécutives.

Posons, en outre, pour abréger,

$$\frac{d\mathrm{E}}{d\sigma} = \frac{\sin\omega}{k}.$$

On a, entre ces diverses quantités, les deux relations suivantes :

$$\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\sin\theta}{\rho} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{tang}\omega}\,\frac{1}{\rho}. \tag{2}$$

2. Supposons maintenant que l'on déforme la surface de façon que les génératrices rectilignes demeurent des droites; la surface donnée se transforme en une autre surface gauche dont la ligne de striction est la transformée de la ligne de striction de la surface primitive.

Les quantités σ, ω et k conservent la même valeur pendant la déformation; les quantités variables θ, τ et ρ sont liées entre elles par les équations (1) et (2).

On peut se donner, par exemple, arbitrairement la valeur de θ en fonction de σ; on déduira alors des relations précédentes les valeurs de ρ et τ; la recherche de la nouvelle ligne de striction se ramènera à l'intégration d'équations aux différences ordinaires.

Si l'on élimine θ entre les équations (1) et (2), on obtient une équation différentielle entre ρ, τ et σ à laquelle doit satisfaire la ligne de striction, quelle que soit la déformation de la surface.

3. Supposons, en particulier, que la surface donnée soit un hyperboloïde de révolution; dans ce cas ω et k sont des quantités constantes dont la valeur détermine complètement la surface.

L'équation (1) donne alors

$$\frac{\sin\theta}{\rho} = 0.$$

Écartons le cas où l'on aurait $\rho = \infty$, et où, par conséquent, la ligne de striction serait une ligne droite; on déduit de là

$$\sin\theta = 0;$$

l'équation (1) devient alors

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tang\omega}\,\frac{1}{\rho}. \tag{3}$$

Les deux courbures de la ligne de striction sont ainsi liées par une relation linéaire, et l'on en déduit la proposition suivante :

De quelque façon que l'on déforme un hyperboloïde de révolution en conservant la rectitude des génératrices, la courbe en laquelle se transforme le cercle de gorge de l'hyperboloïde jouit de la propriété qu'en chacun de ses points il y existe une relation linéaire entre ses deux courbures.

4. Réciproquement, étant donnée une courbe jouissant de cette propriété, on peut mettre la relation qui existe entre les deux courbures sous la forme (3); les constantes ω et k déterminent un hyperboloïde; et l'on peut toujours déformer cet hyperboloïde de façon que son cercle de gorge se transforme en la courbe donnée.

La recherche des surfaces réglées développables sur un hyperboloïde de révolution est donc ramenée à la solution du problème suivant :

Trouver toutes les courbes gauches qui jouissent de la propriété signalée par M. Bertrand.

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES SUR LA CYCLIDE.

Bulletin de la Société philomathique, 1871.

I.

1. La cyclide a été étudiée d'abord par M. Dupin, qui en a découvert les principales propriétés; depuis elle a été le sujet des travaux d'un grand nombre de géomètres [1]. La cyclide est un cas particulier des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre, et elle jouit de toutes leurs propriétés. Elle peut être définie ainsi qu'il suit : Étant donnée une conique K et un cercle C doublement tangent à cette conique, la cyclide est l'enveloppe des sphères dont les centres sont situés sur la conique K et qui coupent orthogonalement une sphère quelconque passant par C.

J'appellerai axe de la cyclide la droite Γ menée par le centre de C, perpendiculairement au plan de C et de K.

On sait que la cyclide peut encore être engendrée d'une façon analogue, au moyen d'une autre conique K′, ayant les mêmes foyers que la première et située dans un plan perpendiculaire à son plan, et d'un cercle C′ doublement tangent à K′; la corde des contacts est d'ailleurs l'axe Γ dont j'ai parlé ci-dessus. La droite Γ' menée par le centre du cercle C′, perpendiculairement à son plan, se confond avec la corde de contact de C et de K; c'est le second axe de la surface.

2. Soit une sphère S arbitrairement tracée dans l'espace et M son centre; il est facile d'avoir son intersection avec la cyclide.

(1) Voir notamment dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1860), un Mémoire de M. Mannheim sur l'application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la cyclide.

En effet, par C faisons passer une sphère coupant orthogonalement S; son centre O sera par conséquent sur l'axe Γ. Considérons le cône ayant pour sommet le point M et pour base K, et menons par le point O le cône supplémentaire de celui-ci (c'est-à-dire le cône dont les génératrices sont perpendiculaires aux plans tangents menés au premier cône). Ce cône coupera la sphère S suivant l'intersection cherchée; remarquons maintenant que, si le centre de la sphère reste fixe, pendant que son rayon varie d'une façon arbitraire, ce cône supplémentaire reste identique avec lui-même et ne fait que se déplacer dans l'espace; qu'en outre, les considérations que j'ai développées au sujet de la conique K s'appliquent à la conique K'; on déduira de là facilement les conséquences suivantes :

« Étant données une cyclide et une sphère, ces deux surfaces se coupent suivant une courbe du quatrième ordre, suivant laquelle on peut mener quatre cônes, deux des sommets de ces cônes sont respectivement situés sur l'axe Γ et sur l'axe Γ'.

» Si, laissant le centre de la sphère fixe, on fait varier son rayon, les deux cônes, dont les sommets sont situés sur les axes, se déplacent parallèlement à eux-mêmes, en conservant la même forme, leurs sommets décrivant les deux axes de la surface.

» Si l'on coupe la surface par une sphère ayant pour centre un point d'une des coniques K et K', on peut par la courbe d'intersection faire passer un cône de révolution dont le sommet est sur l'autre conique.

» En particulier, si l'on considère une des sections circulaires de la surface, toute sphère qui la contient coupe la surface suivant un autre cercle; les cônes, qui passent par ces deux cercles ont leurs sommets sur les deux axes de la surface, à moins que les plans des cercles ne passent par l'une de ces droites (ce qui a lieu pour les cercles de courbure).

» Si l'on coupe la cyclide par un plan, la section est une anallagmatique qui a quatre pôles principaux de transformation; ces pôles sont les centres des cercles qui contiennent les seize foyers de la courbe; de ces pôles, l'un est situé sur l'axe Γ et l'autre sur l'axe Γ'. Les foyers singuliers de cette courbe sont les foyers de la projection sur le plan sécant de la conique K ou de la conique K'. »

3. La cyclide peut être considérée comme une anallagmatique, pour laquelle une des focales se réduit à un système de quatre droites isotropes (nécessairement situées sur une même sphère).

Soient, sur une sphère réelle (ou du moins dont l'équation est réelle), deux points M et M' imaginairement conjugués; par le point M passent deux génératrices G et H de la surface (ce sont des droites isotropes), par le point M' passent deux génératrices G' et H', imaginairement conjuguées des premières.

Toutes les surfaces anallagmatiques, ayant pour focale l'ensemble des quatre droites G, H, G' et H', sont des cyclides homofocales.

A cette focale se rattache un groupe de sections circulaires [1] qui se subdivise lui-même en un groupe (G) représentant les divers points des droites G et G' et en un groupe (H) représentant les points des droites H et H'.

D'un théorème général donné dans ma Note *sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace*, on peut déduire la proposition suivante qui s'accorde avec ce que j'ai dit dans le paragraphe précédent :

Étant pris un cercle quelconque du groupe (G) *et un cercle quelconque du groupe* (H), *les deux cônes, qui passent par ces deux cercles, ont respectivement leurs sommets sur les axes* Γ *et* Γ'.

Les cercles des groupes (G) et (H) sont ceux suivant lesquels la surface est coupée par ses plans bitangents.

On peut remarquer que les axes de la surface sont la droite MM' et la polaire de cette droite relativement à la sphère qui contient les droites isotropes qui constituent la focale.

II

4. Ce qui précède conduit à un nouveau mode d'étudier la cyclide. Mais avant d'aborder ce sujet, je crois devoir rappeler quelques-uns des résultats obtenus dans la Note déjà citée sur

---

(1) Voir dans *l'Institut*, et dans le *Bulletin de la Société philomathique*, avril 1870, ma Note : *Sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace.*

l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace, et développer quelques points de détail qui s'y rapportent.

Un cercle réel, dans l'espace, détermine deux points imaginaires; ce sont les sommets des deux cônes isotropes qui passent par ce cercle; en fixant le sens dans lequel on suppose ce cercle décrit, il représentera d'une façon précise un de ces deux points.

Un point imaginaire, dans le plan, est déterminé par un couple de points réels; l'ordre dans lequel ces points doivent être pris est également déterminé.

Soit C un cercle quelconque de l'espace, que nous supposons décrit dans un certain sens, et qui représente un point imaginaire, a; projetons ce point sur un plan réel et soit α sa projection. Le point α sera représenté par un couple de points que l'on peut obtenir de la façon suivante :

« Supposons un spectateur placé au-dessus du plan de projection et à une distance très grande de ce plan, conservons seulement du cercle C la moitié dont le spectateur voit la partie convexe. Ce demi-cercle se projette sur le plan suivant une demi-ellipse; le sens dans lequel est décrite cette demi-ellipse est d'ailleurs déterminé par le sens dans lequel est décrit le demi-cercle dont elle est la projection.

» Cela posé, si l'on désigne par A et A′ les foyers de cette ellipse, A étant le foyer le plus rapproché de l'origine de la demi-ellipse que l'on a conservée et A′ le foyer le plus rapproché de son extrémité, le point α est représenté par le segment (A, A′). »

5. On peut se proposer d'étudier la façon dont sont distribués dans l'espace les points d'une droite imaginaire donnée, ou plutôt comment sont distribués les cercles représentatifs de ces points. Trois cercles pris arbitrairement dans l'espace (le sens dans lequel ils sont décrits est évidemment supposé donné) ne peuvent évidemment pas être pris arbitrairement.

Leurs projections sur un plan arbitraire devant être en ligne droite, de ce que j'ai dit dans le paragraphe précédent résultent immédiatement les conséquences suivantes :

« Soient trois cercles (de sens bien déterminé) représentant trois points en ligne droite; si l'on projette ces cercles sur un plan quelconque, et si l'on désigne respectivement par a et a', b

et b', c et c' les foyers des coniques suivant lesquelles se projettent les cercles (ces foyers étant pris dans un ordre convenable), les deux triangles abc et $a'b'c'$ sont semblables et inversement placés.

» Réciproquement, si trois cercles jouissent de la propriété précédente par rapport à deux plans de projection, ils représentent trois points en ligne droite, et ils en jouissent par rapport à tout autre plan de projection. »

6. Pour étudier la distribution dans l'espace des points d'une droite imaginaire, appelons g cette droite, et g' la droite imaginairement conjuguée. Ces deux droites ne se rencontreront pas en général.

La droite sur laquelle se mesure leur plus courte distance est réelle.

Pour classer les points de la droite g, menons dans l'espace une droite arbitraire D; cette droite et les droites g et g' sont les génératrices du premier système d'un hyperboloïde réel R.

Considérons l'ensemble des génératrices du second système de cet hyperboloïde; chacune d'elles rencontre g en un point imaginaire représenté par un cercle réel et l'ensemble de ces cercles forme une surface S.

En donnant à la droite D toutes les positions possibles, on obtiendra une infinité de surfaces S, l'ensemble des génératrices circulaires de ces surfaces représentera les points de la droite g.

7. Je n'étudierai ici que le cas particulier où la droite g est une droite isotrope (il en est de même par conséquent de g').

Dans ce cas, la surface S est une cyclide : on peut, en effet, par g et g' faire passer une sphère qui a, en outre, en commun avec R, un autre couple de droites isotropes conjuguées h et h'.

Les cercles représentatifs des points de g donnent un système (G) de sections circulaires de la cyclide; les cercles représentatifs des points de h donnent un autre système (H) de sections circulaires de cette surface.

J'appellerai *droites focales* de la cyclide les droites réelles sur lesquelles se mesurent les plus courtes distances des droites g et g', h et h'.

8. Toutes les cyclides qui correspondent à la droite g ont

une droite focale commune; leurs focales ont aussi en commun les deux droites g et g'; je dirai que de telles surfaces sont des cyclides semi-homofocales.

Deux cyclides semi-homofocales se coupent (indépendamment de l'ombilicale et des droites g et g') suivant deux cercles; car, soient D et Δ les deux droites qui les déterminent, les hyperboloïdes correspondants ont en commun deux génératrices du second système, qui déterminent deux cercles communs aux surfaces.

III

9. Considérons, en général, une courbe sphérique K réelle (ou plutôt résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface algébrique dont les équations sont réelles), et une surface réglée réelle R, telle que chacune de ses génératrices rencontre K en deux points différents.

A chaque génératrice rectiligne de R correspondent deux points α et α' de R, que l'on peut représenter par le cercle (α, α') qui résulte de l'intersection des deux cônes isotropes ayant respectivement pour sommets α et α' (1). Le lieu des cercles correspondant ainsi aux différentes génératrices de R est une surface S que l'on peut dire dérivée de la courbe K.

Soient S et S' deux surfaces dérivées de K, au moyen des surfaces réglées R et R'; l'intersection de S et de S' se composera d'abord d'un certain nombre de cercles; car la surface R et R' ayant généralement un certain nombre de génératrices communes, chacune des génératrices communes fournit un cercle commun à S et S'. Outre ces cercles, la courbe d'intersection complète comprendra encore généralement une autre courbe V.

Il est facile de voir que, suivant chacun des cercles dont je viens de parler, les deux surfaces se coupent suivant un angle constant.

En effet, soit T une génératrice commune à R et R' et M un point quelconque du cercle correspondant, qui est commun à S et à S'. Le cône isotrope ayant pour sommet le point M coupe la

(1) Voir dans *l'Institut* et dans le *Bulletin de la Société philomathique*, avril 1870, ma Note *Sur l'emploi des imaginaires en géométrie*.

sphère, sur laquelle est située K, suivant un plan passant par T; soient β et β' les points où ce plan touche respectivement les surfaces R et R'; d'après une propriété très simple que j'ai communiquée déjà depuis longtemps à la Société, Mβ et Mβ' sont les normales menées par le point M à S et à S'.

Quand deux surfaces réglées ont une génératrice commune, tout plan passant par cette droite touche les deux surfaces en deux points qui, lorsque le plan se déplace, déterminent sur la droite une division homographique. Dans le cas actuel, on voit immédiatement que les deux points doubles de cette division sont les points α et α' où T s'appuie sur K; d'après une proposition élémentaire bien connue, on en conclut que le rapport anharmonique des quatre points α, α'; β et β' est constant.

Menons maintenant les droites Mα et Mα', Mβ et Mβ'; le rapport anharmonique du faisceau est aussi constant, et, comme les droites Mα et Mα' sont isotropes, il en résulte que l'angle β Mβ' est constant.

10. De la proposition précédente, relative aux surfaces dérivées d'une même courbe sphérique, découlent quelques conséquences dignes d'intérêt.

Supposons que K soit une biquadratique sphérique, que R soit une surface de second degré et R' une quadricuspidale ayant pour base K.

La surface dérivée S est alors une anallagmatique ayant K pour focale; S' la coupe suivant quatre cercles correspondant aux quatre génératrices communes à R et R'. On voit immédiatement que le long de chacun de ces cercles les deux surfaces se coupent orthogonalement.

En effet, dans ma Note *Sur un problème de géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre* insérée dans le *Journal de Liouville* (1870), j'ai démontré le théorème suivant:

Étant donnée une quadricuspidale ayant pour base la courbe K *et une génératrice* $\alpha\alpha'$ *de cette surface* (α *et* α' *désignant les points où la génératrice s'appuie sur* K), *si l'on considère en même temps la surface du second ordre qui passe par* K *et par* $\alpha\alpha'$, *tout plan mené par cette dernière droite* *touche la quadricuspidale et la surface du second ordre en deux points qui partagent harmoniquement le segment $\alpha\alpha'$.*

On en déduit immédiatement que l'angle $\alpha\alpha'$ est droit. L'intersection de S et de S' est complétée par une des lignes de courbure de S.

On a donc la proposition suivante :

Étant donnée une anallagmatique ayant pour focale la biquadratique sphérique K, toute surface dérivée de K, au moyen d'une quadricuspidale ayant pour base K, coupe l'anallagmatique suivant une des lignes de courbure de cette surface et suivant quatre cercles; le long de ces quatre cercles, les deux surfaces se coupent orthogonalement.

M. William Roberts avait déjà donné ce théorème pour les surfaces du second ordre; la surface dérivée de la quadricuspidale est, dans ce cas particulier, le lieu des génératrices circulaires d'un système de surfaces homofocales dont les plans passent par leur centre commun.

11. Considérons dans l'espace une droite isotrope g et la droite isotrope g', qui lui est imaginairement conjuguée. Ces deux droites sont situées sur une même sphère Σ qu'elles déterminent complètement.

Soient S et S' deux surfaces quelconques dérivées de g', elles jouiront des propriétés établies précédemment; il est facile de voir en outre que leur intersection complète se compose des cercles dont j'ai parlé. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Soient deux surfaces quelconques dérivées d'une droite isotrope, ces surfaces se coupent suivant un certain nombre de cercles et le long de chacun de ces cercles elles se coupent suivant un angle constant.

12. Soit D la droite réelle sur laquelle se mesure la plus courte distance des droites g et g'; si l'on donne à la figure un mouvement de rotation quelconque autour de D, g et g' restent immobiles.

On en conclut que, si S désigne une surface dérivée de g, et

si on la fait tourner autour de D de façon à lui faire occuper la position S_0, S_0 est une surface dérivée de g.

D'où la proposition suivante :

Étant donnée une surface quelconque S dérivée des droites isotropes conjuguées g et g', si on la fait tourner, d'un angle quelconque, autour de la droite réelle D sur laquelle se mesure la plus courte distance de g et g', dans la nouvelle position la surface coupera la surface primitive suivant un certain nombre de cercles et le long de chacun de ces cercles les surfaces se couperont suivant un angle constant.

Il est à remarquer que la droite D passe par le centre de la sphère Σ dont l'équation est réelle, mais qui n'est jamais réelle.

13. Ce qui précède donne une solution (renfermant une fonction arbitraire) du problème suivant :

Trouver une surface telle que, si on la fait tourner autour d'une droite fixe, la surface dans sa nouvelle position coupe la surface primitive sous un angle constant, quelle que soit la grandeur de la rotation effectuée.

Il est bien clair que la grandeur de l'angle varie avec la grandeur de la rotation et que la courbe d'intersection peut se composer de plusieurs courbes séparées, l'angle d'intersection variant d'une courbe à l'autre, mais demeurant le même le long de chacune d'elles.

Pour éviter les circonlocutions, lorsqu'une droite jouira par rapport à une surface de la propriété que je viens d'énoncer, je dirai, dans les paragraphes qui suivent, que la droite est un axe de rotation de la surface.

Nous avons obtenu une classe de surfaces ayant un axe de rotation; il est facile d'en trouver une seconde.

En effet, soient tracés dans un plan un cercle C et une courbe arbitraire A. Chaque tangente à A rencontre C en deux points α et α' dont l'ensemble est représenté par le cercle (α, α'); les divers cercles qui correspondent à toutes les tangentes que l'on peut mener à A, forment une surface B. Les cercles dont je viens de parler constituent un des systèmes de lignes de courbure de B.

Il est facile d'obtenir l'autre; menons, en effet, par C une sphère arbitraire, la développable circonscrite à cette sphère et à A touchera la sphère suivant une ligne de courbure de B; et en faisant varier le rayon de la sphère, on obtiendra toutes les lignes de courbure du second système.

Une surface telle que B pourrait être désignée sous le nom de *sphéro-cyclide*, vu que l'un de ses systèmes de lignes de courbure se compose de cercles et l'autre de courbes sphériques.

J'appellerai cercle directeur de la surface le cercle C, et axe de cette surface la droite menée par le centre de ce cercle perpendiculairement à son plan.

La sphéro-cyclide jouit d'une des propriétés de la cyclide que j'ai mentionnées plus haut : si on la coupe par une sphère, on peut toujours faire passer un cône par la courbe d'intersection; le sommet de ce cône est sur l'axe; si, le centre de la sphère restant fixe, son rayon varie, le cône qui passe par la courbe d'intersection ne varie pas de forme et se déplace parallèlement à lui-même, son sommet glissant sur l'axe.

14. On voit immédiatement que deux sphéro-cyclides ayant même cercle directeur se coupent suivant un certain nombre de cercles; le long de chacun de ces cercles, elles se coupent suivant le même angle; ce que l'on peut voir par une démonstration directe, ou en remarquant que chacun des cercles est une ligne de courbure pour les deux surfaces.

En particulier, si l'on fait tourner une sphéro-cyclide autour de son axe, la surface obtenue après la rotation sera une sphéro-cyclide ayant même cercle directeur que la première; on peut donc dire que :

L'axe d'une sphéro-cyclide est un axe de rotation de cette surface.

On a ainsi une nouvelle famille de surfaces, dont l'équation renferme une fonction arbitraire, et qui possède un axe de rotation.

15. La cyclide, en particulier, appartient à la fois aux deux familles de surfaces dont je viens de parler.

De ce que j'ai dit plus haut, on déduit immédiatement les conséquences suivantes :

« 1° Deux cyclides semi-homofocales se coupent suivant deux cercles et, le long de chacun de ces cercles, elles se coupent sous un angle constant.

» 2° Une cyclide a quatre axes de rotation; ce sont ses deux axes et ses deux droites focales. »

SUR QUELQUES

PROPRIÉTÉS DES COURBES ALGÉBRIQUES

ET SUR LA DÉTERMINATION

DES RAYONS DE COURBURE DES SECTIONS PLANES

DES

SURFACES ANALLAGMATIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1871.

1. Considérons une courbe plane K; soient m le nombre des branches de cette courbe qui se croisent en chacun des ombilics du plan, et n le nombre des points distincts des ombilics où la courbe est rencontrée par la droite de l'infini.

Cette courbe a m foyers singuliers F_1, F_2, etc. Si un angle droit se meut de telle façon qu'un de ses côtés passe par un point fixe P du plan, tandis que son sommet décrit la courbe K, le second côté de l'angle enveloppe une courbe H, dont la classe est égale à $2(m+n)$.

Cette courbe [1] a :

1° n foyers situés à l'infini et sur des directions perpendiculaires aux asymptotes de la courbe K qui ne sont pas isotropes;

2° Un foyer multiple au point fixe P, qui compte pour $(m+n)$ foyers;

3° m autres foyers G_1, G_1, etc. que l'on obtient en joignant le point P aux foyers singuliers de K, et en prolongeant d'une longueur égale à elle-même chacune des droites ainsi obtenues.

---

[1] Voir dans le *Journal de l'Institut* et dans le *Bulletin de la Société philomathique* (nov. 1868), ma Note *sur quelques propriétés des courbes algébriques*, etc.

2. Soit M un point quelconque du plan; sur MP comme diamètre décrivons une circonférence. Cette circonférence rencontre K en $2(m+n)$ points d, et les $2(m+n)$ droites Md sont les tangentes que l'on peut mener du point M à la courbe H.

En un de ces points d, menons le cercle qui, passant par P, touche K; le point T où ce cercle rencontre Md est le point de contact de cette droite avec H.

Je rappellerai ici le théorème que j'ai donné (*Journal de l'Institut* et *Bulletin de la Société philomathique*, février 1867 : *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes*):

Si, par un point M *pris dans le plan d'une courbe plane de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, le centre harmonique du point* M *relativement aux n foyers réels est le même que relativement aux n points de contact.*

Si l'on applique le théorème précédent à la courbe H, en remarquant que l'on ne doit tenir aucun compte des foyers situés à l'infini, on trouve l'équation suivante :

$$\sum \frac{1}{\mathrm{MT}} = m+n\,\frac{1}{\mathrm{MP}} + \sum \frac{1}{\mathrm{MG}},$$

équation symbolique, où

$$\frac{1}{\mathrm{MT}}$$

désigne une grandeur géométrique égale en valeur absolue à l'inverse de MT et ayant pour direction la direction de cette droite.

3. Je me bornerai aux applications les plus simples de la formule précédente. Il serait facile de voir comment les résultats suivants peuvent s'appliquer à une courbe quelconque.

Supposons, en particulier, que la courbe K ne rencontre la droite de l'infini qu'aux ombilics, en sorte que l'on ait

$$n = 0.$$

Je désignerai, pour abréger, une telle courbe sous le nom de courbe cyclique.

Par une transformation facile on déduira de la formule précédente le théorème suivant :

Si l'on coupe une courbe cyclique par un cercle C *et si, en chacun des points d'intersection, on mène un cercle touchant la courbe et passant par un point fixe* P *pris sur* C, *le centre harmonique du centre de* C *relativement aux centres de ces cercles est le même que le centre harmonique du même point relativement aux foyers singuliers de la courbe et au point* P, *ce dernier étant compté m fois,* $2m$ *désignant le degré de la courbe.*

4. En particulier, le cercle sécant peut se réduire à une droite, et l'on a la proposition suivante :

Étant donnée une courbe cyclique de degré $2m$, *une droite quelconque la coupe en* $2m$ *points; si, en chacun de ces points, on mène un cercle qui touche la courbe et qui passe par un point fixe* P *situé sur la droite, le centre des moyennes distances des centres de ces* $2m$ *cercles est le point milieu de la droite qui joint le point* P *au centre de la courbe.*

Remarque. — J'appelle ici *centre* de la courbe les centres des moyennes distances de ces m foyers singuliers.

5. Pour abréger, dans ce qui suit, je représenterai par la notation

$$(a, b, c, \ldots)$$

le centre des moyennes distances des points a, b, c, ...

Cela posé, appliquons ce qui précède à une anallagmatique (courbe cyclique du quatrième ordre).

Étant données une anallagmatique et une droite qui la coupe aux points a, b, c et d, prenons sur cette droite un point quelconque m. Soient α, β, γ et δ les centres des cercles qui, passant par le point m, touchent l'anallagmatique aux points donnés.

D'après ce que j'ai dit ci-dessus, l'on a

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (m, \mathrm{C}) = (2m, 2\mathrm{C}),$$

C désignant le centre de l'anallagmatique, c'est-à-dire le point milieu de la droite qui joint ses deux foyers singuliers.

Supposons que le point m se confonde avec le point a, α se confond aussi avec ce dernier point, et l'on a

$$(m, \beta, \gamma, \delta) = (2m, 2\mathrm{C}),$$

d'où

$$(\beta, \gamma, \delta) = (m, 2\mathrm{C}).$$

Si maintenant la droite donnée touche l'anallagmatique au point m, il est clair que le point β devient le centre μ du cercle osculateur de la courbe au point m; on a donc, γ et δ désignant les centres des cercles qui passent par m, et touchent l'anallagmatique aux deux points où elle est coupée par la tangente en m,

$$(\mu, \gamma, \delta) = (m, 2\mathrm{C});$$

soit i le point milieu du segment $\gamma\delta$, on aura

$$(\mu, 2i) = (m, 2\mathrm{C}).$$

D'où cette conclusion :

« Soit C le centre d'une anallagmatique, la tangente en un point m de cette courbe la rencontre de nouveau en deux points c et d; soient γ et δ les centres des cercles qui, passant par le point m, touchent la courbe en c et d et i le point milieu du segment $\gamma\delta$; cela posé, si, par le point m, on mène une droite parallèle à iC, dirigée dans le même sens et de longueur double, l'extrémité de cette droite est le centre de courbure de l'anallagmatique au point m ».

6. Appliquons ce qui précède aux surfaces anallagmatiques (du quatrième ordre); je m'appuierai principalement sur la propriété suivante :

En appelant *centre d'une surface anallagmatique* le centre commun aux trois coniques qui constituent ses focales singulières, toute section plane de la surface est une anallagmatique plane ayant pour centre la projection sur le plan sécant du centre de la surface.

Cela posé, soient M un point de cette surface et une tangente MT passant par ce point; soient P et Q les points où cette droite rencontre de nouveau la surface, p et q les centres des sphères qui, passant par le point M, touchent la surface en P et Q.

Si par la droite MT nous menons un plan sécant quelconque, il coupe la surface suivant une courbe à laquelle on peut appliquer les théorèmes précédents; remarquons maintenant que le centre de cette courbe est la projection sur le plan sécant du centre de la surface, que les centres des cercles qui, passant par le point M, touchent la courbe en P et Q, sont les projections des centres des sphères, qui passent par le point M et touchent la surface en P et Q.

D'où les propositions suivantes :

Théorème I. — *Étant donnée une surface anallagmatique et une droite qui la rencontre aux points a, b, c, d; soit pris sur cette droite un point quelconque* M; *soient, de plus,* α, β, γ *et* δ *les centres des sphères qui, passant par* M, *touchent la surface en* a, b, c *et* d.

Le centre des moyennes distances des points α, β, γ *et* δ *est le point milieu de la droite qui joint les deux points* M *et* C, C *désignant le centre de la surface.*

Théorème II. — *Soient* M *un point quelconque d'une surface anallagmatique et une droite quelconque* MT *qui touche la surface en ce point; la droite* MT *rencontre la surface en deux points distincts du point* M; *soient* α *et* β *les centres des sphères qui, passant par le point* M, *touchent en ces deux points la surface, et* I *le milieu du segment* $\alpha\beta$.

Cela posé, si, par le point M, *on mène une droite parallèle à* IC, *dirigée en sens inverse et de longueur double, l'extrémité de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans la surface par le plan normal passant par* MT.

SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1872.

I. — *Considérations préliminaires.*

1. Je me propose, dans cette Note, d'étendre au cas de l'espace et de développer les considérations que j'ai exposées d'une façon succincte dans mon *Mémoire de géométrie analytique* inséré dans le *Journal de Liouville* (janvier 1872).

Considérons, dans l'espace, une figure rapportée à un système quelconque de coordonnées rectangulaires, x, y et z étant les coordonnées par rapport à ce système d'axes d'un point M de la figure. S désignant une surface algébrique quelconque de classe n, si l'on imagine le cône circonscrit à cette surface et qui a pour sommet le point M, on voit que ce cône est un cône algébrique de $n^{\text{ième}}$ classe. Un plan tangent à ce cône sera tangent à la surface, et si l'on appelle ξ, η, ζ les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à ce plan, ces quantités satisferont à une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, homogène par rapport aux trois variables,

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0. \tag{1}$$

Les coefficients de cette équation sont des fonctions données des variables x, y et z; et il est facile de voir que ces fonctions ne peuvent être choisies arbitrairement.

De ce qui précède il résulte, en effet, que X, Y, Z désignant les coordonnées courantes,

$$(X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta = 0$$

est l'équation d'un plan tangent à S; le point où ce plan coupe l'axe des z est déterminé par l'équation

$$Z = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{\zeta};$$

ce point étant donné, les rapports $\frac{\xi}{\zeta}$ et $\frac{\eta}{\zeta}$ sont reliés entre eux par une équation du degré n.

La forme générale de l'équation (1) est donc

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, x\xi + y\eta + z\zeta) = 0,$$

la caractéristique φ désignant un polynome entier quelconque du degré n. En mettant seulement en évidence les ξ, η, ζ, je l'écrirai ordinairement sous la forme (1), et je l'appellerai l'*équation mixte de la surface* S.

On peut interpréter cette équation d'une façon un peu différente; si l'on suppose un système d'axes rectangulaires parallèles aux premiers axes et dont l'origine mobile soit transportée au point M; en appelant ξ, η, ζ les coordonnées relatives à ce nouveau système d'axes, l'équation (1) représente le cône *supplémentaire* du cône ayant pour sommet le point M et circonscrit à S.

2. Il est facile de passer de l'équation tangentielle d'une surface à son équation mixte. De cette dernière équation on déduit immédiatement son équation en coordonnées cartésiennes; en effet, pour un point de la surface le cône supplémentaire au cône circonscrit à la surface et dont l'équation est

$$F = 0 \tag{1}$$

a une arête double; ou, si l'on veut, la courbe K que représente l'équation en coordonnées triangulaires a un point double. On obtiendra donc l'équation de la surface en coordonnées cartésiennes en égalant à zéro le discriminant de la forme ternaire F.

Ceci se rapporte au cas général; mais, si la surface S avait une ligne de contact multiple avec une développable, la courbe K aurait constamment un certain nombre de points doubles; et l'équation cartésienne de la surface s'obtiendrait en écrivant la condition nécessaire et suffisante pour que K ait un point double de plus, c'est-à-dire en égalant à zéro la fonction des coefficients que M. Cayley appelle le *discriminant spécial de la courbe*.

3. Je représenterai les surfaces que j'aurai à considérer par leurs équations mixtes. Ces équations mixtes s'obtiennent en égalant à zéro des formes ternaires en ξ, η et ζ; les coefficients de ces formes sont des fonctions de x, y, z, assujetties à satisfaire à certaines conditions, dont il faudra dans beaucoup de cas tenir compte.

On peut toutefois les laisser souvent de côté en s'appuyant sur la proposition suivante :

Étant donné un nombre quelconque de surfaces dont les équations mixtes soient

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0,$$

si l'on désigne par I *un invariant quelconque de ce système de formes, l'équation*

$$I = 0$$

représente une surface dont le degré est indiqué par le poids de l'invariant.

Les contrevariants (simples ou multiples) des formes représentatives des surfaces s'introduiront d'eux-mêmes quand on considérera un certain nombre de points en même temps que ces surfaces.

Soit en effet un point M dont les coordonnées soient α, β et γ; si nous posons, pour abréger,

$$X = x - \alpha, \quad Y = y - \beta, \quad Z = z - \gamma,$$

l'équation mixte du point M est

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = 0;$$

et les invariants simultanés de cette forme et du système de formes donnés sont des contrevariants de ce système.

4. Au point de vue où je me place dans cette Note, l'étude d'un système de surfaces consiste dans l'étude des formes ternaires qui, égalées à zéro, fournissent leurs équations mixtes et dans l'étude des surfaces que représentent leurs divers invariants.

Les contrevariants (simples ou multiples) de ces formes interviennent quand on adjoint à ces surfaces un certain nombre de points.

Quant aux covariants, ils jouent un rôle distinct et moins important.

5. Si l'on considère deux surfaces, leurs équations mixtes (en considérant les ξ, η, ζ comme variables) représenteront deux courbes planes.

En exprimant que ces deux courbes sont tangentes, on obtiendra l'équation de la développable circonscrite à ces deux surfaces; en exprimant que ces deux courbes ont un double contact, on aura les équations de la ligne nodale de cette développable. Son arête de rebroussement s'obtiendra en exprimant que les deux courbes sont osculatoires.

Étant données trois surfaces, le résultant de leurs équations mixtes égalé à zéro donnera les équations de leurs plans tangents communs; de même le résultant des réciprocants de ces équations donnera l'équation de la surface réglée qui leur est circonscrite.

6. Pour prendre l'exemple le plus simple, l'équation d'une surface du second ordre S étant

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

où F désigne un polynome homogène et du second degré par rapport aux ξ, η, ζ; si l'on appelle G la forme adjointe à F, on voit que le cône, circonscrit à la surface et qui a pour sommet un point donné M, a pour équation

$$G(X, Y, Z) = 0,$$

si, α, β, γ étant les coordonnées du point M, on pose pour abréger

$$X = x - \alpha, \qquad Y = y - \beta, \qquad Z = z - \gamma.$$

Soit un second point M' dont les coordonnées soient α', β' et γ'; en posant

$$X' = x - \alpha', \qquad Y' = y - \beta', \qquad Z' = z - \gamma',$$

l'équation

$$X' \frac{dG}{dX} + Y' \frac{dG}{dY} + Z' \frac{dG}{dZ} = 0,$$

où l'on voit figurer l'émanant (contrevariant double) de G, représentera la surface du second ordre passant par les points M et M', et par les courbes de contact des cônes ayant ces points pour sommets et circonscrits à S.

7. Je me propose, dans une autre Note, d'appliquer les considérations qui précèdent à l'étude des systèmes composés de surfaces de deuxième et de troisième classe.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1872.

SECTION I.

ÉQUATION MIXTE D'UNE COURBE.

1. Je supposerai, dans tout ce qui va suivre, les différentes figures que j'aurai à considérer rapportées à un système de coordonnées rectilignes quelconque.

Soient une courbe arbitraire C tracée dans un plan, et M un point quelconque de ce plan; j'appelle x et y ses coordonnées.

Menons du point M une tangente à la courbe, et soit k le coefficient angulaire de cette tangente; la quantité k (qui généralement est susceptible de plusieurs valeurs) est une fonction des coordonnées variables x et y.

Cette fonction, il est facile de le voir, ne peut être prise arbitrairement et doit satisfaire à une équation aux différences partielles linéaire et du premier ordre, qu'on peut établir de la façon suivante.

Appelons, pour un instant, X et Y les coordonnées courantes de la tangente menée du point M à la courbe; son équation sera

$$\text{(1)} \qquad Y - y = k(X - x).$$

Pour que les différentes droites représentées par cette équation, lorsqu'on y fait varier x et y, enveloppent une courbe, il faut et il suffit que la droite obtenue, en remplaçant le point M par un point infiniment voisin, coupe la première en un point fixe, quelle que soit la direction du déplacement; il est clair, d'ailleurs, que ce point fixe est le point de contact de la tangente avec la courbe.

Différentions successivement l'équation (1), par rapport à x

et y, en supposant X et Y constantes; il vient

$$-\,0 = \frac{dk}{dx}(X - x) - k \qquad \text{et} \qquad -1 = \frac{dk}{dy}(X - x).$$

D'où, en éliminant $X - x$ entre ces deux relations,

$$\frac{dk}{dx} + k\frac{dk}{dy} = 0.$$

Telle est l'équation aux différences partielles à laquelle doit satisfaire la fonction k, pour qu'elle représente le coefficient angulaire d'une tangente menée du point (x, y) à une courbe quelconque tracée dans le plan.

Cette équation a pour intégrale générale

$$y - kx = f(k),$$

la caractéristique f désignant une fonction arbitraire de la variable; et telle est, en termes finis, la relation à laquelle doit satisfaire k.

Il est facile de trouver directement cette relation. En effet,

$$Y - y = k(X - x)$$

étant l'équation de la tangente menée du point M à la courbe, $y - kx$ est l'ordonnée du point où cette tangente coupe l'axe des y; la valeur de cette ordonnée ne dépend évidemment que de la valeur de k. On a donc

$$y - kx = f(k).$$

2. Lorsque la courbe donnée est algébrique, $f(k)$ est généralement une irrationnelle susceptible de m valeurs et racine d'une équation algébrique de degré m. Cette équation est d'ailleurs irréductible si la courbe ne se décompose pas en courbes de degré inférieur.

k satisfait donc à une équation de la forme

$$\text{(2)} \quad A_0(y - kx)^m + A_1(y - kx)^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(y - kx) + A_m = 0,$$

$A_0, A_1, \ldots, A_m$ désignant des polynomes entiers en k d'un degré quelconque.

Le nombre m indique combien on peut mener de droites tangentes à la courbe et parallèles à une direction donnée. Quant à la classe de la courbe, elle est indiquée par le degré en k de l'équation précédente, degré qui est généralement égal à m, mais qui peut lui être supérieur lorsque la courbe est tangente à la droite de l'infini.

Ce cas particulier mis de côté, on voit que, dans l'équation (2), A_0 est un nombre que l'on peut supposer égal à l'unité, et A_1, A_2, $\ldots$, A_m des polynomes entiers en k et respectivement des degrés $1, 2, \ldots, m$.

Si, pour rendre l'équation homogène, nous posons

$$k = \frac{\mu}{\lambda},$$

on voit que la relation précédente peut être mise, pour une courbe de classe n, sous la forme

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = (\lambda y - \mu x)^n + n(A\lambda + B\mu)(\lambda y - \mu x)^{n-1} \\ \qquad + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2)(\lambda y - \mu x)^{n-2} + \ldots, \end{cases}$$

ou encore, en réunissant dans un même terme les coefficients de la même puissance de λ,

$$a\lambda^n + nb\lambda^{n-1}\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}c\lambda^{n-2}\mu^2 + \ldots + nh\lambda\mu^{n-1} + k\mu^n = 0.$$

3. La relation précédente, qui, pour chaque point du plan, donne les coefficients angulaires des tangentes que l'on peut mener de ce point à une courbe donnée, définit complètement cette courbe.

Je la désignerai, dans tout ce qui suit, sous le nom d'*équation mixte* de la courbe.

Une telle équation s'écrira de la façon suivante :

$$F(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$

F désignant une fonction homogène et entière, mais du reste entièrement arbitraire, des trois variables que comporte son expression; ou encore, en mettant seulement en évidence les variables λ et μ,

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

f désignant une fonction homogène de ces variables.

Le plus souvent, pour mettre en évidence les coefficients du polynome $f(\lambda, \mu)$, j'emploierai la notation commode de M. Cayley, en désignant par

$$(a, b, c, \ldots)(\lambda, \mu)^n$$

le polynome

$$a\lambda^n + nb\lambda^{n-1}\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}c\lambda^{n-2}\mu^2 + \ldots;$$

en sorte que l'équation mixte générale des courbes de la classe n sera

$$(a, b, c, \ldots)(\lambda, \mu)^n = 0.$$

4. Il est facile de passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation mixte.

En effet,

$$y\xi - x\eta = \zeta$$

étant l'équation d'une droite quelconque tracée dans le plan, l'équation tangentielle d'une courbe est la relation, homogène par rapport aux trois variables,

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire ξ, η et ζ pour que la droite soit tangente à la courbe. Si l'on déduit de l'équation de la tangente la valeur de son coefficient angulaire et la valeur de l'ordonnée au point où elle coupe l'axe des y, on obtient les deux relations suivantes

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad y - \frac{\mu}{\lambda}x = \frac{\zeta}{\xi},$$

d'où

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{\eta}{\mu} = \frac{\lambda y - \mu x}{\zeta};$$

en substituant ces valeurs de ξ, η et ζ de l'équation précédente, il vient

$$\Phi(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$

équation de la courbe donnée.

Dans le plus grand nombre de cas, il sera plus commode de calculer directement l'équation mixte d'une courbe, que de la tirer de son équation tangentielle. Mais je veux déduire, de ce qui précède, une conséquence très simple qui nous sera utile par la suite.

5. Considérons plusieurs courbes dont les équations tangentielles soient

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \ldots,$$

et une autre courbe dont l'équation s'obtienne en égalant à zéro une fonction entière des polynomes qui forment les premiers membres des équations précédentes, et soit par exemple

$$f(A, B, C, \ldots) = 0.$$

Cela posé, il résulte immédiatement de la proposition précédente que

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0$$

étant les équations mixtes des premières courbes, l'équation mixte de la dernière est

$$f(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots) = 0.$$

Ainsi, l'équation mixte générale des courbes de $n^{\text{ième}}$ classe inscrites dans un polygone de n^2 côtés est

$$P + \rho Q = 0,$$

ρ désignant un coefficient arbitraire et

$$P = 0, \quad Q = 0$$

représentant deux quelconques de ces courbes.

6. De l'équation mixte d'une courbe il est facile de déduire son équation en coordonnées cartésiennes.

En effet, soit $f(\lambda, \mu) = 0$ cette équation; la courbe est évidemment le lieu des points d'où l'on peut lui mener deux tangentes coïncidentes. Donc, si l'on désigne par Δ le discriminant de la forme $f(\lambda, \mu)$,

$$\Delta = 0$$

est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes.

On retrouve ainsi la méthode donnée par M. Cayley pour passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation en coordonnées cartésiennes.

Ce qui précède suppose que la courbe n'a pas de singularités. En effet, si elle a une tangente double ou une tangente d'inflexion, on voit que chaque point de l'une quelconque de ces droites jouit

de la propriété que deux des tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe se confondent; chacun de ces points satisfait donc à l'équation précédente.

Pour s'en tenir aux singularités ordinaires, on voit que si l'on désigne par $U = 0$ l'équation (cartésienne) de la courbe, par $T = 0$ l'équation de l'ensemble des tangentes doubles et par $I = 0$ l'équation de l'ensemble des tangentes d'inflexion, on a

$$\Delta = UT^2 I^3.$$

7. Soit

$$f(\lambda, \mu) = (a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n$$

l'équation mixte d'une courbe de classe n.

Il est clair, d'après ce qui précède, que a, b, c, ... sont des fonctions de x et de y qui ne peuvent être choisies arbitrairement; et, en effet, $f(\lambda, \mu)$ étant une fonction de $(\lambda y - \mu x)$, l'on doit avoir identiquement

$$\lambda \frac{df}{dx} - \mu \frac{df}{dy} = 0.$$

On doit, dans la plupart des questions qui se présentent, avoir égard aux relations entre les coefficients qui résultent de l'équation précédente, et l'étude de ces relations conduit elle-même à des résultats dignes d'intérêt; mais, dans un grand nombre de cas, — et ce sont ces cas particuliers que j'étudie spécialement dans ce Mémoire, — on peut, pour ainsi dire, les laisser de côté, ou du moins ne les faire intervenir que d'une façon indirecte.

8. La proposition fondamentale, sur laquelle je m'appuierai constamment dans ce qui suit, peut s'énoncer ainsi :

Proposition. — *Soit un nombre quelconque de courbes représentées par les équations mixtes*

$$f_0(\lambda, \mu) = 0, \quad f_1(\lambda, \mu) = 0, \quad f_2(\lambda, \mu) = 0, \quad \ldots$$

Si l'on considère un invariant quelconque I *des formes* f_0, f_1, f_2, ..., *l'équation*

$$I = 0$$

représente une courbe dont le degré est précisément égal au poids de l'invariant.

Démonstration. — Je rappellerai brièvement ce qu'on nomme *poids d'un invariant*. Si, dans les formes données, on remplace l'une des variables, λ par exemple, par λt, l'invariant relatif aux nouvelles formes que l'on obtient ainsi est égal à l'invariant primitif I, multiplié par une certaine puissance de λ; l'exposant de cette puissance est le poids de l'invariant.

Ceci posé, mettant en évidence toutes les variables dans les équations mixtes des courbes, écrivons-les sous la forme suivante :

$$F_0(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$
$$F_1(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$
$$F_2(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si, dans les polynomes qui forment les premiers membres de ces équations, nous remplaçons respectivement x et y par tx et ty, nous obtenons les polynomes suivants :

$$F_0(\lambda, \mu, \lambda t y - \mu t x),$$
$$F_1(\lambda, \mu, \lambda t y - \mu t x),$$
$$F_2(\lambda, \mu, \lambda t y - \mu t x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le nouvel invariant I' déduit de ces formes, comme I l'était des premières, contient t à une puissance dont le degré est celui de la courbe représentée par l'équation

$$I = 0.$$

Posons maintenant

$$\lambda y - \mu x = \lambda', \qquad \lambda y + \mu x = \mu',$$

en effectuant une substitution linéaire dont le déterminant

$$\omega = 2xy$$

est indépendant de t.

On déduit de là

$$\lambda = \frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \qquad \mu = \frac{\mu' - \lambda'}{2x},$$

et les formes précédentes deviennent

$$F_0\left(\frac{\lambda'+\mu'}{2y}, \frac{\mu'-\lambda'}{2x}, \lambda' t\right), \quad F_1\left(\frac{\lambda'+\mu'}{2y}, \frac{\mu'-\lambda'}{2x}, \lambda' t\right), \quad \ldots.$$

L'invariant I'', relatif à ce système de formes et analogue à I', lui est égal, à un facteur près, qui, étant une puissance de déterminant ω de la substitution, est indépendant de t.

Dans I'', t entre évidemment à un degré égal au poids de l'invariant; la proposition est donc démontrée.

Remarque I. — La démonstration précédente suppose que les coefficients des polynomes $f_0(\lambda, \mu)$, $f_1(\lambda, \mu)$, ... ont la forme la plus générale (compatible avec les relations nécessaires qui existent entre eux). Dans des cas particuliers, le degré de la courbe représentée par l'équation

$$I = 0$$

peut *s'abaisser;* mais alors la droite de l'infini fait partie de la courbe.

Remarque II. — Ce que je viens de dire s'applique aux covariants que l'on peut déduire des formes

$$f_0(\lambda, \mu), \quad f_1(\lambda, \mu), \quad \ldots.$$

Les équations que l'on obtient en égalant à zéro les différents coefficients d'un covariant représentent des courbes d'un degré égal au poids de ce covariant.

9. J'ai cru devoir, pour plus de clarté, employer dans ce Mémoire les coordonnées rectilignes.

Si l'on voulait employer les coordonnées triangulaires symétriques, il suffirait, dans les formules précédentes, de rétablir l'homogénéité en introduisant une troisième variable z.

Rien n'est à changer, si ce n'est la signification géométrique qu'on doit attribuer à l'équation mixte de la courbe. Mais il est, je crois, inutile d'insister sur ce sujet.

SECTION II.

PROPRIÉTÉS DES COURBES DE TROISIÈME CLASSE.

10. Considérons une courbe de troisième classe K^3, et soit

$$U = (a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

son équation mixte.

La forme U n'a qu'un invariant; c'est le discriminant

$$D = a^2 d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

L'équation

$$D = 0$$

est, comme nous l'avons vu, l'équation en coordonnées cartésiennes de la courbe K^3; elle est du degré 6, ce nombre étant le poids du discriminant.

Pour obtenir les points de rebroussement de K^2, il faut chercher les points du plan pour lesquels l'équation

$$U = 0 \tag{1}$$

a trois racines égales.

Considérons le covariant

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ad - bc)\lambda\mu + (bd - c^2)\mu^2;$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour l'égalité des trois racines de l'équation (1) sont les suivantes :

$$ac - b^2 = 0, \qquad ad - bc = 0, \qquad bd - c^2 = 0,$$

équations de trois courbes du quatrième ordre (n° 8, *Rem. II*).

Les 9 points de rebroussement de K^3 sont donc les points communs à ces trois courbes.

Il est clair qu'on peut trouver une infinité de courbes du quatrième ordre passant par ces 9 points. Pour avoir leur expression générale, considérons, en même temps que la courbe K^3, une courbe de seconde classe arbitraire K^2 et dont l'équation mixte soit

$$V = (A, B, C)(\lambda, \mu)^2 = 0.$$

Posons

$$I = A(bd - c^2) - B(ad - bc) + C(ac - b^2) \text{ (1)}.$$

I est un invariant des formes U et V, de poids égal à 4. L'équation

$$I = 0$$

représente donc une courbe du quatrième ordre $\mathfrak{S}^4$; elle est évi-

(1) SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 170.

demment satisfaite quand on pose

$$bd - c^2 = 0, \qquad ad - bc = 0, \qquad ac - b^2 = 0;$$

elle passe donc par les 9 points de rebroussement de K^3.

11. Cherchons directement les points où elle coupe cette courbe. Pour tout point de K^3, l'équation (1) a deux racines égales, et, en vertu de la propriété fondamentale des invariants, on peut supposer que la valeur commune de ces racines soit zéro, ou bien poser

$$a = 0, \qquad b = 0.$$

I devient alors égale à

$$-Ac^2;$$

pour que cette quantité s'annule, il faut que l'on ait

$$c^2 = 0,$$

c'est-à-dire que le point pris sur K^3 soit un point de rebroussement, ou bien que

$$A = 0,$$

c'est-à-dire que la tangente menée en ce point à K^3 touche aussi K^2.

La courbe $\mathfrak{S}^4$ rencontre donc K^3 aux 9 points de rebroussement (chacun de ces points comptant pour deux, comme on le savait *a priori*) et aux 6 points de contact des tangentes communes à K^3 et à K^2.

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Étant données une courbe de troisième classe* K^3 *et une courbe de seconde classe* K^2, *les* 6 *points où les tangentes communes à ces courbes touchent* K^3 *et les* 9 *points de rebroussement de* K^3 *sont sur une même courbe de quatrième ordre* $\mathfrak{S}^4$.

12. Si l'on prend au hasard, sur K^3, 5 points α, ces 5 points et les 9 points de rebroussement de la courbe déterminent une courbe du quatrième ordre qui rencontre K^3 en un sixième point β. D'un autre côté, les 5 tangentes menées à K^3 par les points α déterminent une courbe de seconde classe K^2; K^2 et K^3 ont une sixième tangente commune. Son point de contact avec K^3, étant

sur une courbe du quatrième ordre passant par les 5 points α et les 9 points de rebroussement, se confond avec β.

D'où le théorème suivant, réciproque de la proposition précédente :

Théorème. — *Si par les 9 points de rebroussement d'une courbe de troisième classe* K^3, *on mène une courbe quelconque du quatrième ordre, cette courbe rencontre* K^3 *en 6 points* (¹) *distincts des points de rebroussement; les tangentes menées à* K^3 *par ces 6 points touchent une même conique.*

13. La conique K^2 peut se composer d'un couple de points P et Q. La courbe $\mathfrak{I}^4$ passe alors par les 6 points de rebroussement de K^3 et les 6 points de contact des tangentes qu'on peut lui mener des points P et Q. Je dis, de plus, qu'elle passe par ces points eux-mêmes.

En effet, pour l'un quelconque de ces points, la tangente menée de ce point à K^2 est indéterminée; l'équation

$$V = 0$$

est satisfaite identiquement, et l'on a

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Mais, dans ces hypothèses, I s'annule évidemment; la proposition est donc démontrée.

En se reportant au paragraphe précédent, on déduit de là le théorème suivant :

Théorème. — *Étant pris sur une courbe de troisième classe* K^3 *3 points a, a' et a'', tels que les tangentes en ces points concourent en un même point* A, *toute courbe du quatrième ordre qui passe par les 9 points de rebroussement de* K^3 *et les 3 points a, a' et a'' passe par le point* A; *elle rencontre* K^3 *en 3 autres points, et les tangentes en ces points se coupent en un même*

(¹) Ces points sont, en général, distincts des points de rebroussement; mais, dans des cas particuliers, un certain nombre d'entre eux peuvent venir se confondre avec quelques-uns de ces derniers.

point B, *qui est également situé sur la courbe du quatrième ordre.*

14. Menons, dans le plan de K^3, une droite quelconque A, les tangentes menées à la courbe aux 6 points α, où elle est coupée par A, touchent une même conique K^2 qui est la polaire de A.

Dans ce cas, la courbe du quatrième ordre $\mathfrak{I}^4$ passant par les 6 points de contact α qui sont en ligne droite, il est clair que cette courbe se décompose en la droite A et une courbe du troisième ordre $\mathfrak{R}^3$ passant par les 9 points de rebroussement. Cette courbe, d'ailleurs, est complètement déterminée, puisque par les points de rebroussement d'une courbe de troisième classe on ne peut faire passer qu'une courbe de troisième ordre, et elle demeure toujours la même, de quelque façon que l'on choisisse la droite A.

Son équation est facile à obtenir; considérons, par exemple, la conique polaire de la droite de l'infini, et soit

$$(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

son équation mixte; d'après ce que je viens de dire, on voit que l'équation

$$\mathfrak{F}(bd - c^2) - \mathfrak{G}(ad - bc) + \mathfrak{H}(ac - b^2) = 0$$

s'abaisse au troisième degré; c'est précisément l'équation de la courbe $\mathfrak{R}^3$.

15. Si la droite A est tangente à la hessienne de K^3, sa conique polaire se compose de 2 points; ces 2 points, d'après ce que j'ai dit ci-dessus (nº **13**), se trouvent sur $\mathfrak{I}^4$, qui, dans ce cas, se compose de la tangente à la hessienne et de la courbe $\mathfrak{R}^3$. Comme ils sont en dehors de la droite, ils se trouvent nécessairement sur $\mathfrak{R}^3$; on retrouve ainsi cette proposition bien connue de M. Cayley :

Le lieu des couples de points qui constituent les coniques polaires des tangentes à la hessienne d'une courbe de troisième classe est la courbe du troisième ordre qui passe par ses 9 points de rebroussement.

16. On peut encore supposer que la conique K^2 se réduise à un point double.

Soient ξ et η les coordonnées de ce point; son équation mixte sera

$$-(y-\eta)\mu + \lambda(x-\xi) = 0,$$

ou, en posant, pour abréger, $y-\eta = \mathrm{Y}$ et $x-\xi = \mathrm{X}$,

$$(-\mathrm{Y}, \mathrm{X} \between \lambda, \mu)^1 = 0.$$

D'où, pour l'équation de la conique K^2 (considérée comme point double),

$$(\mathrm{Y}^2, -\mathrm{XY}, \mathrm{X}^2 \between \lambda, \mu)^2 = 0.$$

On a alors

$$\mathrm{I} = (ac-b^2)\mathrm{X}^2 + (ad-bc)\mathrm{XY} + (bd-c^2)\mathrm{Y}^2,$$

expression dans laquelle, si l'on considère X et Y comme les variables, on reconnaît immédiatement le covariant quadratique de U.

L'équation

$$\mathrm{I} = 0$$

représente une courbe du quatrième ordre $\mathfrak{Z}^4$ qui passe par les 9 points de rebroussement de K^3 et qui touche cette courbe aux points de contact des tangentes issues du point donné; on voit, de plus, à l'inspection de l'équation précédente, qu'elle a ce point pour point double, et que les coefficients angulaires des tangentes au point double sont les racines de l'équation

$$(ac-b^2)\lambda^2 + (ad-bc)\lambda\mu + (ad-c^2)\mu^2 = 0,$$

obtenue en égalant à zéro le covariant quadratique de U.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si, par un point donné* M, *on mène les tangentes à une courbe de troisième classe* K^3, *on peut tracer une courbe du quatrième degré* $\mathfrak{Z}^4$ *qui passe par les 9 points de rebroussement de* K^3, *touche cette courbe aux 3 points de contact des tangentes et a le point* M *pour point double.*

17. On sait que l'on peut, de différentes façons, partager les 9 points de rebroussement de K^3 en 3 groupes de 3 points, a_1, a_2, et a_3, b_1, b_2 et b_3, c_1, c_2 et c_3, de telle sorte que, dans chacun de ces groupes, les tangentes à la courbe concourent en un même point. Soient A, B, C les points de rencontre correspondant aux groupes précédents.

Supposons que la conique K^2 se compose du point A pris 2 fois; 2 des points de rencontre de $\mathfrak{Z}^4$ avec K^3 viennent se confondre alors au point a_1, et, comme 2 de ces points s'y trouvaient déjà confondus, on trouve en tout 4 points d'intersection réunis au point a_1. D'où l'on conclut que $\mathfrak{Z}^4$ a ce point pour point double; comme le même raisonnement peut être fait relativement aux points a_2 et a_3, et comme d'ailleurs (*voir* n° 16) $\mathfrak{Z}^4$ présente un point double en A, l'on voit que cette courbe du quatrième ordre a 4 points doubles; elle se résout donc en un couple de coniques.

On déduit de là les propositions suivantes [1] :

Soient a_1, a_2 *et* a_3 *3 points de rebroussement d'une courbe de troisième classe* K^3, *tels que les tangentes en ces points concourent en un même point* A; *si, par les points* a_1, a_2, a_3, A *et par un cinquième point de rebroussement* b_1 *on mène une conique, cette conique* $\mathfrak{B}$ *rencontre* K^3 *en 2 autres points de rebroussement de la courbe* b_2 *et* b_3, *et les tangentes aux points* b_1, b_2 *et* b_3 *concourent en un même point* B *qui se trouve également sur la conique* $\mathfrak{B}$.

Les 3 autres points de rebroussement c_1, c_2, c_3 *de la courbe sont également sur une conique* $\mathfrak{C}$, *qui passe par les points* a_1, a_2, a_3, A *et par le point* C, *où se coupent les tangentes de rebroussement aux points* c, c_1 *et* c_2.

En désignant par m, n, p, q 4 points situés sur une conique, appelons pour un instant *rapport anharmonique* de ces points le rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces points sont vus d'un point quelconque de la conique, et désignons-le par la notation

$$\mathrm{R}(m, n; p, q).$$

Cela posé, en désignant par ρ et ρ^2 les deux racines imaginaires de l'unité, on a, en considérant les points a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3,

[1] Comme le développement de ces questions se rattache plutôt à la Géométrie pure qu'à la Géométrie analytique, j'ai, pour abréger, supprimé quelques démonstrations que le lecteur rétablira facilement.

A, B, situés sur la conique $\mathfrak{B}$, les relations suivantes :

$$R(A, a_3; a_1, a_2) = -\rho,$$
$$R(A, B; a_1, a_2) = \rho^2,$$

et les relations analogues que l'on obtient en permutant entre eux les points a_1, a_2 et a_3.

Pour les points situés sur la conique $\mathfrak{C}$, on a de même les relations

$$R(A, a_3; a_1, a_2) = -\rho^2,$$
$$R(A, C; a_1, a_2) = \rho.$$

J'ajouterai encore la remarque suivante :

Si, par les points A, B, C et deux points de rebroussement d'un même groupe, tels que a_1 et a_2, on fait passer une conique, le pôle de la droite $a_1 a_2$ relativement à cette conique est le troisième point de rebroussement du groupe, c'est-à-dire a_3.

Le développement des relations qui ont lieu entre les points de rebroussement d'une courbe de troisième classe donnerait lieu à quelques remarques intéressantes; mais ce n'est pas ici le lieu de les exposer. M. Hesse a déjà donné d'élégantes propositions sur ce sujet dans le *Journal de Crelle* (t. 36).

18. Parmi le grand nombre de propositions particulières que l'on peut déduire de la proposition du n° **11**, je me contenterai de donner la suivante :

Considérons un point de rebroussement r de la courbe K^3 et une courbe du quatrième ordre composée de la tangente de rebroussement en ce point et d'une courbe du troisième ordre passant par les 8 autres points de rebroussement r'. La tangente en r rencontre la courbe en 3 points α distincts du point r, et les tangentes en ces points concourent en un même point ρ situé sur la courbe du troisième ordre $\mathfrak{K}^3$ qui passe par les 9 points de rebroussement.

En appliquant la proposition déjà citée, on aura le théorème suivant :

Si, par les 8 points r', on mène une courbe quelconque du troisième ordre, cette courbe coupe K^3 en 2 points distincts

des points r'; les tangentes menées en ces points à K^3 se coupent sur la tangente de rebroussement au point r. La courbe du troisième ordre passe en outre par ce point de rencontre et par le point ρ, qui est ainsi le neuvième point fixe, commun à toutes les courbes du troisième ordre qui passent par les 8 points r'.

19. Considérons maintenant deux courbes de troisième classe K^3 et K'^3, et soient

$$U = (a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

et

$$U' = (a', b', c', d' \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

leurs équations mixtes.

Ces deux courbes ont 9 tangentes communes, et l'équation mixte générale des courbes de troisième classe, qui touchent ces 9 droites, est

$$U + \rho U' = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

20. Pour éviter d'inutiles répétitions, je transcrirai d'abord le Tableau suivant des divers invariants des formes U et U' :

$$\begin{aligned}
D &= a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd,\\
D' &= a'^2d'^2 + 4a'c'^3 + 4d'b'^3 - 3b'^2c'^2 - 6a'b'c'd',\\
H &= d'(a^2d + 2b^3 - 3abc) - 3c'(b^2c + abd - 2ac^2)\\
&\quad + 3b'(2b^2d - bc^2 - acd) - a'(3bcd - ad^2 - 2c^3),\\
H' &= d(a'^2d' + 2b'^3 - 3a'b'c') - 3c(b'^2c' + a'b'd' - 2a'c'^2)\\
&\quad + 3b(2b'^2d' - b'c'^2 - a'c'd') - a(3b'c'd' - a'd'^2 - 2c'^3),\\
I &= 2(ac - b^2)(b'd' - c'^2) + 2(bd - c^2)(a'c' - b'^2)\\
&\quad - (ad - bc)(a'd' - b'c'),\\
J &= ad' - 3bc' + 3cb' - da',\\
R &= (ad')^3 - 9(ad')^2(bc') + 27(ca')^2(cd') + 27(db')^2(ab')\\
&\quad - 81(ab')(bc')(cd') - 27(ad')(ab')(cd') \text{ (}^1\text{)}.
\end{aligned}$$

21. Les plus importants de ces invariants sont d'abord les deux

(1) Je désigne ici, suivant l'usage, par les symboles (ad'), (ab'), ..., les binomes alternés

$$ad' - da', \quad ab' - ba', \quad \ldots.$$

discriminants D et D'; en les égalant à zéro, on a les équations cartésiennes des deux courbes K^3 et K'^3; l'équation d'une courbe quelconque du troisième ordre K^3_ρ, tangente aux 9 tangentes communes aux 2 premières, s'obtiendra en égalant à zéro le discriminant de

$$U + \rho U';$$

elle peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0.$$

22. Le Tableau précédent renferme deux *combinants* R et J. R est le résultant des deux formes U et U'; l'équation

$$R = 0$$

représente évidemment l'ensemble des 9 tangentes communes aux deux courbes, droites qui touchent aussi toutes les autres courbes du faisceau.

Pour un point de rebroussement de K^3, l'équation

$$U = 0$$

ayant trois racines égales, on peut supposer

$$a = b = c = 0;$$

dans ces hypothèses, R devient

$$-d^3 a'^3,$$

et J devient

$$-da';$$

pour tout point de rebroussement de K^3, on a donc

$$(3) \qquad R - J^3 = 0;$$

si maintenant on remarque que, R et J, étant des combinants, ne changent pas de valeur quand on y remplace U par $U + \rho U'$, on en conclut que l'équation précédente représente le lieu des points de rebroussement de toutes les courbes du faisceau.

Ceci suppose que l'on n'ait pas *identiquement*

$$R - J^3 = 0.$$

Je reviendrai plus loin sur ce sujet.

23. Considérons une courbe de troisième classe K^3 et ses 9 tangentes de rebroussement; on peut inscrire, dans le polygone formé par ces 9 droites, une infinité de courbes de troisième classe qui, toutes, auront les 9 premières tangentes pour tangentes de rebroussement. Le lieu des points de rebroussement se confond alors avec les tangentes elles-mêmes, et l'on a

$$J = 0.$$

D'où cette conséquence remarquable :

Si deux courbes de troisième classe ont les mêmes tangentes de rebroussement, l'invariant J *relatif à ces deux courbes est identiquement nul.*

Réciproquement, si cet invariant est identiquement nul, les deux courbes ont mêmes tangentes de rebroussement.

24. Cette proposition peut s'énoncer de la façon suivante pour les courbes du troisième ordre :

Si, par les 9 points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, on fait passer un faisceau de courbes, ce faisceau détermine sur une sécante fixe quelconque une division en involution.

Chaque groupe de 3 points de cette involution peut être considéré comme déterminé par les racines d'une équation de la forme

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d + \rho(a'x^2 + 3b'x^2 + 3c'x + d') = 0;$$

cela posé, l'invariant

$$ad' - 3bc' + 3cb' - da'$$

est toujours nul, *quelle que soit la position de la sécante.*

25. Si l'on égale à zéro l'invariant H, l'équation

$$H = 0$$

représente une courbe du sixième ordre, $\mathcal{H}^6$.

Pour trouver les points de rencontre de cette courbe avec K^3, faisons

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Il se réduit alors à

$$2a'c^3.$$

Cette quantité s'annule pour

$$c^3 = 0;$$

donc la courbe $\mathcal{H}^6$ passe par les points de rebroussement de K^3 et elle la touche en ces points, puisque chaque point d'intersection doit compter pour 3.

Cette quantité s'annule encore pour

$$a' = 0;$$

donc $\mathcal{H}^6$ passe par les 9 points de contact des tangentes communes à K^3 et à K'^3.

Les courbes $\mathcal{H}^6$ et K^3 n'ont d'ailleurs, évidemment, aucun autre point commun.

Laissons la courbe K'^3 fixe, et remplaçons la courbe K^3 par la courbe variable K^3_ρ, dont l'équation cartésienne est

$$D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0; \tag{2}$$

la courbe que je viens de considérer est remplacée par une courbe $\mathcal{H}^6_\rho$, dont l'équation est

$$H + \rho(J^2 - 6I) + 3\rho^2 H' + 2\rho^3 D' = 0; \tag{3}$$

les courbes K^3_ρ et $\mathcal{H}^6_\rho$ se rencontrent :

1° Aux points de contact des tangentes communes à K'^3 et à K^3_ρ;

2° Aux points de rebroussement de K^3_ρ, chacun de ces derniers comptant trois fois.

Si l'on élimine la variable ρ entre les équations précédentes, l'équation obtenue en égalant le résultant à zéro représente donc :

1° Les 9 tangentes communes aux courbes K^3_ρ;

2° Le lieu de leurs points de rebroussement de ces courbes, ce dernier lieu étant pris 3 fois.

Remarquons maintenant que, le premier membre de l'équation (3) étant la dérivée par rapport à ρ du premier membre de l'équation (2), le résultant de ces deux équations est le discriminant de (2).

Ce discriminant ne peut donc différer que par un facteur constant du produit

$$R(R - G^2)^3,$$

puisque, comme nous l'avons vu,

$$R - G^2 = 0$$

est l'équation du lieu des points de rebroussement des courbes K_ρ.

Ces résultats sont d'ailleurs d'accord avec la théorie bien connue des formes cubiques simultanées.

26. Les considérations précédentes s'étendent sans difficulté à des courbes d'une classe quelconque.

Soient un faisceau de courbes de $n^{\text{ième}}$ classe tangentes à n^2 droites fixes, et

$$U = (a, b, c, \ldots, h, k, l \between \lambda, \mu)^n = 0,$$
$$U' = (a', b', c', \ldots, h', k', l' \between \lambda, \mu)^n = 0$$

les équations mixtes de deux courbes de ce faisceau, K^n et K'^n.

Soit, en outre, D le discriminant de la forme U.

Posons

$$H = a'\frac{dD}{da} + b'\frac{dD}{db} + \ldots + k'\frac{dD}{dk} + l'\frac{dD}{dl}.$$

H est un invariant des formes U et U', dont le poids est égal à $n(n-1)$, et par conséquent l'équation

$$H = 0$$

représente une courbe $\mathcal{H}^{n(n-1)}$ de degré $n(n-1)$.

Pour trouver ses points de rencontre avec K^n, il faut faire, dans l'invariant H,

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

D'après un beau théorème de Joachimsthal ([1]), D est de la forme

$$b^2\Delta + a\varphi + a^2\psi + \ldots,$$

Δ désignant le discriminant de la forme

$$(b, c, \ldots, h, k, l \between \lambda, \mu)^{n-1}.$$

En tenant compte de cette expression, on voit que, dans les hypo-

---

([1]) SALMON, *Alg. sup.*, p. 80.

thèses données, la valeur de H se réduit à

$$a'\varphi_0,$$

φ_0 désignant la valeur de φ quand on y fait

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Or l'on a en général

$$\varphi = -4c\Delta + b\left(d\frac{d}{dc} + \ldots\right)\Delta;$$

on a donc

$$\varphi_0 = -4c\Delta_0,$$

Δ_0 désignant la valeur de Δ dans les mêmes hypothèses que ci-dessus.

D'après le théorème déjà mentionné de Joachimsthal, on a

$$\Delta = c^2\nabla + b\Phi + b^2\Psi + \ldots,$$

∇ désignant le discriminant de la forme

$$(c, d, \ldots, k, l\between\lambda, \mu)^{n-2}.$$

On en déduit

$$\Delta_0 = c^2\nabla;$$

d'où l'on voit que la valeur de H se réduit à

$$-4a'c^3\nabla.$$

27. Cette valeur s'annule :

1° Quand l'on a

$$a' = 0.$$

Donc la courbe $\mathcal{H}^{n(n-1)}$ passe par les n^2 points, où les tangentes communes aux courbes du réseau touchent K^n.

2° Quand on a

$$\nabla = 0.$$

C'est ce qui a lieu pour les points doubles de K^n; car, en ces points, l'équation

$$U = 0,$$

outre la racine double égale à zéro, a une autre racine double que l'on peut supposer infinie; mais on a alors

$$l = 0 \quad \text{et} \quad k = 0,$$

et par conséquent

$$\nabla = 0,$$

puisque, dans ce cas, l'équation

$$(c, d, \ldots, k, l\between\lambda, \mu)^{n-2} = 0$$

a aussi une racine double.

3° Quand on a

$$c^3 = 0.$$

Donc la courbe considérée passe par les points de rebroussement de K^n, et, comme ces points comptent trois fois, la courbe lui est tangente en chacun d'eux.

Nous avons ainsi tous les points d'intersection des courbes K^n et $\mathcal{H}^{n(n-1)}$. Chacun des points doubles de K^n doit, en effet, être compté au moins deux fois. Or le nombre total des points d'intersection est $[n(n-1)]^2$, ou m^2, si l'on pose

$$n(n-1) = m.$$

D'après une formule de Plücker, on a

$$m(m-1) = n + 2d + 3r,$$

en désignant respectivement par d et par r le nombre des points doubles et des points de rebroussement de K^n.

On en déduit

$$m^2 = m + n + 2d + 3r = n^2 + 2d + 3r.$$

Les m^2 points d'intersection se composent donc :

1° Des n^2 points de contact des tangentes communes à K^n et K'^n;

2° Des d points doubles (chacun d'eux étant compté deux fois);

3° Des r points de rebroussement (chacun d'eux étant compté trois fois).

28. Quelques remarques sur les résultats précédents ne seront pas inutiles.

On sait que les points d'intersection des deux courbes de degré $n(n-1)$, K^n et $\mathcal{H}^{n(n-1)}$ ne sont pas indépendants entre eux; en conservant les mêmes notations que ci-dessus (¹),

$$\frac{(m-1)(m-2)}{1.2} - d - r$$

de ces points sont déterminés par les autres.

De même les tangentes communes aux deux courbes de classe n, K^n et K'^n, ne sont pas non plus indépendantes entre elles;

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$$

d'entre elles sont déterminées par les autres.

Les deux nombres précédents sont égaux, car ils indiquent tous deux le *genre* de la courbe K^n. On déduit de là la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de n classe K^n, *si l'on mène une courbe quelconque de degré* $n(n-1)$, *qui passe par les points doubles de* K^n *et la touche en chacun de ses points de rebroussement, cette courbe rencontre* K^n *en* n^2 *points distincts de ses points singuliers; les tangentes menées à* K^n, *en ces* n^2 *points, sont tangentes à une autre courbe de même classe.*

29. Considérons maintenant le faisceau de courbes considéré plus haut (n° 26). Soit K^n_ρ l'une quelconque des courbes de ce faisceau, et

$$U + \rho U' = 0$$

son équation mixte. En désignant par $F(\rho)$ le discriminant de cette équation (discriminant pris par rapport à λ et μ),

$$F(\rho) = 0$$

est l'équation cartésienne de K^n_ρ.

La courbe $\mathcal{H}^{n(n-1)}$ relative à K^n_ρ a pour équation

$$\frac{dF}{d\rho} = 0.$$

(¹) Clebsch et Gordan, *Th. von der Abelschen Functionen*, p. 35.

Soit W le discriminant de $F(\rho)$ (discriminant pris par rapport à ρ);

$$W = 0$$

est le résultat de l'élimination de ρ entre les deux équations précédentes. Nous obtenons ainsi l'enveloppe des courbes du faisceau; d'autre part, en se reportant à ce que j'ai dit dans le n° 27 sur l'intersection des courbes $\mathcal{H}^{n(n-1)}$ et K^n, on voit que cette enveloppe se compose :

1° Des n^2 tangentes communes;

2° Du lieu des points doubles des courbes du faisceau, ce lieu étant compté deux fois;

3° Du lieu des points de rebroussement de ces courbes, ce lieu étant compté trois fois.

Si donc on désigne respectivement par

$$\mathfrak{T} = 0, \qquad \mathfrak{D} = 0, \qquad \mathfrak{R} = 0$$

les équations du système des tangentes communes, du lieu des points doubles et du lieu des points de rebroussement, on a

$$W = \mathfrak{T}\mathfrak{D}^2\mathfrak{R}^3 \text{ (¹)}.$$

Du poids connu des invariants $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{R}$, on conclut que le lieu des points doubles des courbes du faisceau est du degré

$$2n(n-2)(n-3)$$

et le lieu des points de rebroussement du degré $3n(n-2)$.

30. Je reviens maintenant au cas spécial d'un faisceau de courbes de troisième classe. L'équation générale d'une courbe de ce faisceau est

$$D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0; \tag{2}$$

et l'on voit que par chaque point du plan passent quatre courbes du faisceau.

Il est facile de trouver les coefficients angulaires des tangentes

(¹) On déduit de là une proposition importante sur les formes binaires donnée par M. Salmon, d'après M. Cayley, mais sans démonstration (*High Algebra*, p. 149 de l'édition anglaise).

à ces courbes au point donné. En effet, en désignant pour un instant par

$$f(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

les équations mixtes des courbes K^3 et K'^3, l'équation

$$f(\lambda, \mu) + \rho\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

où x et y ont été remplacées par les valeurs des coordonnées du point, détermine les tangentes menées de ce point à une courbe quelconque du faisceau. L'ensemble de ces tangentes forme un faisceau d'involution, et les droites doubles de cette involution sont précisément les droites cherchées; on les obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro le Jacobien des deux formes f et φ, et l'équation qui donne des coefficients angulaires des tangentes est

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\mu} \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} & \frac{d\varphi}{d\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on met en évidence les coefficients de U et de U', cette équation devient

$$\begin{aligned}\Upsilon = (6ab' - ba'),\ & 3(ac' - ca'),\\ & ad' - da' + 3bc' - 3cb',\ 3(bd' - db'),\ 6(cd' - dc')\rangle(\lambda, \mu)^4 = 0;\end{aligned}$$

et si l'on désigne par S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme Υ, on a

$$S = 3J^2, \qquad T = J^3 - 2R,$$

J et R ayant la même signification que dans les numéros précédents.

31. Par un point quelconque M du plan passent, comme nous l'avons vu, quatre courbes du faisceau. Voyons comment on peut déterminer le rapport anharmonique des tangentes à ces courbes en ce point. Soit k ce rapport anharmonique, si nous posons

$$k + \frac{1}{k} = z,$$

z sera racine de l'équation

$$S^3[(z+2)(2z-5)^2] - 4.27\,T^2(z-1)^3 = 0;$$

S et T désignant, comme précédemment, l'invariant quadratique et l'invariant cubique de Υ.

Si l'on remplace S et T par les expressions données ci-dessus, on obtient l'équation

$$J^6[(z+2)(2z-5)^2] - 4(J^3 - 2R)^2(z-1)^3 = 0. \tag{3}$$

32. Si nous supposons que la valeur du rapport anharmonique k soit donnée, l'équation précédente est l'équation du lieu des points tels que les quatre courbes du faisceau, qui se croisent en ce point, aient un rapport anharmonique donné.

On voit que ce lieu se compose de deux courbes du neuvième degré

$$J^3(2z-5)\sqrt{z+2} + 2\sqrt[2]{(z-1)^3}(J^3 - 2R) = 0$$

et

$$J^3(2z-5)\sqrt{z+2} - 2\sqrt[2]{(z-1)^3}(J^3 - 2R) = 0.$$

Réciproquement, toute courbe dont l'équation est de la forme

$$\alpha R + \beta J^3 = 0,$$

α et β désignant des constantes, représente une courbe telle que les quatre courbes du faisceau, qui se croisent en chacun de ses points, ont un rapport anharmonique constant.

Les cas particuliers les plus remarquables sont les suivants :

1° Si le rapport est harmonique; on a alors

$$z + 2 = 0,$$

et le lieu se réduit à la courbe du neuvième degré, dont l'équation est

$$J^3 - 2R = 0;$$

2° Si le rapport anharmonique est égal à une racine imaginaire de l'unité négative; on a alors

$$z - 1 = 0,$$

et le lieu se réduit à la courbe du troisième degré, dont l'équation est

$$J = 0.$$

33. Les résultats précédents supposent que J n'est pas iden-

tiquement nul. Nous avons vu que ce cas se présentait lorsque les courbes du faisceau avaient mêmes tangentes de rebroussement.

L'équation (3) donne alors

$$z = 1.$$

D'où cette conséquence :

Si l'on considère les courbes de troisième classe qui ont les mêmes tangentes de rebroussement, par tout point du plan passent quatre de ces courbes, le rapport anharmonique de ces quatre courbes est constant, quelle que soit la position du point, et égal à une racine imaginaire de l'unité négative.

34. J'ai montré (**22**) que l'équation du lieu des points de rebroussement des courbes de troisième classe, qui forment un faisceau, était

$$\mathrm{R} - \mathrm{J}^3 = 0.$$

Ceci suppose toutefois que cette équation n'a pas lieu identiquement. Ce cas peut effectivement se présenter.

Soit

$$\mathrm{U} = (a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

l'équation mixte d'une courbe de troisième classe K^3 ; soient ξ, η les coordonnées d'un point M du plan, dont l'équation mixte sera

$$(-\mathrm{Y}, \mathrm{X} \between \lambda, \mu)^1 = 0,$$

si l'on pose pour abréger

$$\mathrm{Y} = y - \eta \quad \text{et} \quad \mathrm{X} = x - \xi.$$

Considérons le faisceau de courbes de troisième classe, dont l'équation est

$$(a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 + \rho(-\mathrm{Y}^3, \mathrm{XY}^2, -\mathrm{X}^2\mathrm{Y}, \mathrm{X}^3 \between \lambda, \mu)^3 = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Pour abréger, je poserai

$$(a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = f(\lambda, \mu),$$

et

$$h(\lambda, \mu) = (ac - b^2)\lambda^2 + \ldots,$$
$$g(\lambda, \mu) = (a^2 d + 2b^3 - 3abc)\lambda^3 + \ldots.$$

$h(\lambda, \mu)$ et $g(\lambda, \mu)$ sont, comme on le voit, le covariant quadratique et le covariant cubique de $f(\lambda, \mu)$; (je n'ai écrit que le premier terme de leur développement).

Cela posé, on voit immédiatement que l'équation

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$$

représente l'ensemble des tangentes que l'on peut mener du point (ξ, η) à la courbe; que R et J sont respectivement égaux à $f^3(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$; la relation

$$\mathrm{R} - \mathrm{J}^3 = 0$$

est donc satisfaite identiquement.

Résultat facile à prévoir, car l'équation (2) devient dans ce cas

$$\mathrm{D} + 2\rho g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \rho^2 [f(\mathrm{X}, \mathrm{Y})]^2 = 0. \tag{4}$$

Le discriminant de cette équation (considérée comme étant du quatrième degré) est évidemment nul, puisqu'elle a deux racines égales à l'infini; d'autre part, on sait que ce discriminant est égal, à un facteur numérique près, à

$$\mathrm{R}(\mathrm{R} - \mathrm{J}^3)^3;$$

on devait donc trouver $\mathrm{R} - \mathrm{J}^3 = 0$.

Si l'on égale à zéro le discriminant de l'équation (4) (considérée comme une équation du second degré), on obtiendra l'équation de l'enveloppe des courbes du faisceau. Cette enveloppe ne comprendra pas les tangentes communes servant de base au faisceau, parce que les courbes les touchent en des points fixes; elle se réduira donc au lieu des points de rebroussement qui devra être compté trois fois.

Donc le discriminant de l'équation (4) est un cube parfait; et, en effet, il a pour valeur

$$g^2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) - \mathrm{D} f^2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

quantité qui, d'après un théorème bien connu de M. Cayley, est égale à

$$-4h^3(\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Le lieu des points de rebroussement est donc la courbe du sixième degré, dont l'équation est

$$h(X, Y) = 0.$$

SECTION III.

PROPRIÉTÉS DES COURBES DE QUATRIÈME CLASSE.

35. Soit une courbe de quatrième classe K^4 et

$$U = (a, b, c, d, e \between \lambda, \mu)^4 = 0$$

son équation mixte. La forme U a deux invariants fondamentaux S et T, dont je transcris ci-dessous les valeurs,

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Ces invariants étant respectivement d'un poids égal à 4 et d'un poids égal à 6, les équations

$$S = 0 \quad \text{et} \quad T = 0$$

représentent respectivement des courbes du quatrième et du sixième ordre. Ces courbes, que j'appellerai $\mathfrak{S}^4$ et $\mathfrak{T}^6$, jouissent des propriétés remarquables déjà signalées par M. Clebsch (¹).

Pour trouver les points de rencontre de $\mathfrak{S}^4$ et de K^4, faisons, dans S, a et b égaux à zéro, S devient alors égal à

$$3c^2;$$

cette quantité s'annule pour $c = 0$, et ne s'annule que dans ce cas. Donc la courbe $\mathfrak{S}^4$ passe par les 24 points de rebroussement de la courbe K^4 et ne coupe la courbe qu'en ces points.

Dans les mêmes hypothèses, T se réduit à

$$-c^3;$$

d'où cette conséquence :

La courbe $\mathfrak{T}^6$ touche K^4 en chacun de ses 24 points de rebroussement et n'a d'ailleurs aucun point commun avec elle.

Ainsi les points de rebroussement de K^4 sont les points d'intersection des deux courbes $\mathfrak{S}^4$ et $\mathfrak{T}^6$.

(¹) *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen* (*Crelle*, t. 59).

36. Par chaque point M du plan, on peut mener quatre tangentes à K^4. Cherchons le rapport anharmonique de ces tangentes. Soit k ce rapport anharmonique. Si nous posons

$$k + \frac{1}{k} = z,$$

nous voyons, comme au n° 31, que z est racine de l'équation

$$S^3[(z+2)(2z-3)^2] - 4.27\,T^2(z-1)^3 = 0,$$

S et T ayant la même signification qu'au paragraphe précédent.

L'équation

$$\alpha S^3 + \beta T^2 = 0,$$

où α et β désignent des constantes arbitraires, représente donc le lieu d'un point tel que les tangentes menées de ce point à K^4 forment un faisceau ayant un rapport anharmonique donné.

Les cas particuliers les plus remarquables sont les suivants :

1° Quand $k = 0$, d'où $z = \infty$; on obtient alors

$$S^3 - 27T^2 = 0;$$

c'est, en coordonnées cartésiennes, l'équation de la courbe K^4 ;

2° Quand $k = -1$, d'où $z = 2$; le rapport est alors anharmonique, et l'équation se réduit à

$$T = 0;$$

la courbe $\mathfrak{T}^6$ est donc le lieu des points tels que les tangentes menées à la courbe forment un faisceau harmonique ;

3° Quand $k = \rho$, ρ étant une racine cubique de l'unité négative ; on a alors $z - 1 = 0$, et l'équation se réduit à

$$S = 0;$$

la courbe $\mathfrak{S}^4$ est donc le lieu des points tels que le rapport anharmonique des tangentes menées à la courbe est égal à une racine cubique de l'unité négative.

37. Pour étudier les points doubles de la courbe K^4, considérons en même temps une autre courbe de quatrième classe K'^4, dont l'équation mixte soit

$$U' = (a', b', c', d', e' \between \lambda, \mu)^4;$$

et posons

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= ae' - 4bd' + 6cc' - 4db' + ea', \\ \mathrm{J} &= e'(ac - b^2) - 2d'(ad - bc) + c'(ae + 2bd - 3c^2) \\ &\quad - 2b'(be - cd) + a'(ce - d^2). \end{aligned}$$

I et J sont deux invariants des formes U et U'.

Si nous égalons à zéro le nouvel invariant $\Omega = 2\mathrm{SJ} - 3\mathrm{TI}$, comme cet invariant est d'un poids égal à 10, l'équation

$$(1) \qquad 2\mathrm{SJ} - 3\mathrm{TI} = 0$$

représentera une courbe du dixième degré $\mathcal{A}^{10}$.

Pour avoir les points de rencontre de cette courbe avec K^4, faisons

$$a = 0 \qquad \text{et} \qquad b = 0.$$

Ω devient alors

$$6c^2(-3c^2c' + 2b'cd + a'ce - a'd^2) + 3c^3(6cc' - 4db' + ea'),$$

ou, en réduisant,

$$3c^2a'(3ce - 2d^2).$$

Cette quantité s'annule :

1° quand

$$a' = 0;$$

donc $\mathcal{A}^{10}$ passe par les 16 points de contact des tangentes communes aux courbes K^4 et K'^4;

2° quand l'on a

$$c^3 = 0;$$

donc $\mathcal{A}^{10}$ passe par les 28 points de rebroussement de K^4, chacun de ces points comptant pour deux, comme on le savait *a priori;*

3° quand l'on a

$$3ce - 2d^2 = 0,$$

ce qui a lieu aux points doubles de K^4; en effet, pour ces points, l'équation

$$\mathrm{U} = 0,$$

outre la racine double égale à zéro, a une autre racine double que

l'on peut supposer infinie, ce qui revient à poser

$$c = 0, \qquad d = 0,$$

auquel cas l'expression précédente s'annule.

Chacun de ces 28 points doubles doit d'ailleurs évidemment être compté deux fois.

On a aussi tous les points d'intersection de K^4 et de $\mathcal{A}^{10}$, car ces points sont au nombre de 120, et l'on a bien

$$120 = 16 + 2.24 + 2.28.$$

D'où la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données une courbe de quatrième classe* K^4 *et une autre courbe arbitraire de même classe* K'^4, *les* 16 *points où les tangentes communes à ces courbes touchent* K^4 *et les* 52 *points singuliers de* K^4 *sont situés sur une même courbe du dixième degré* $\mathcal{A}^{10}$.

38. Les 120 points d'intersection des courbes $\mathcal{A}^{10}$ et K^4 ne sont pas indépendants entre eux ; comme on le sait,

$$\frac{11.10}{2} - 52 \text{ (1)}$$

sont déterminés par les autres.

Des 16 points d'intersection distincts des points singuliers de K^4, 13 suffisent donc pour déterminer les autres; remarquons maintenant que les 13 tangentes en ces points suffisent pour déterminer aussi 16 tangentes communes à K^4 et à un faisceau de courbes de quatrième classe.

De là résulte le théorème suivant :

Si, par les 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on fait passer une courbe quelconque du dixième ordre, cette courbe rencontre* K^4 *en* 16 *points distincts des points singuliers; les tangentes menées en ces* 16 *points à* K^4 *touchent une autre courbe de quatrième classe.*

---

(1) Cf. Clebsch et Gordan, *loc. cit.*

39. La courbe de quatrième classe K'^4 peut se décomposer en une courbe de classe inférieure et en un point ou en un système de points. On démontrerait, comme au n° 13, que la courbe $\mathcal{A}^{10}$ passe par ces points.

En particulier, si K'^4 se résout en un système de 4 points, on a la proposition suivante :

Si, par 4 points (α), *on mène des tangentes à une courbe de quatrième classe* K^4, *les* 16 *points de contact des tangentes et les* 52 *points singuliers de la courbe sont situés sur une même courbe du dixième ordre* $\mathcal{A}^{10}$, *qui passe par les* 4 *points* (α).

40. Lorsqu'on coupe une courbe de quatrième classe K^4 par une droite A, les tangentes, aux 12 points de rencontre de A avec K^4, touchent une même courbe de troisième classe K^3, qui est la polaire de A.

Adjoignons à cette dernière courbe un point arbitraire M ; l'ensemble de K^3 et M constitue une courbe de quatrième classe.

La courbe $\mathcal{A}^{10}$ correspondante passe par les points de contact des tangentes communes à K^3 et à K^4, c'est-à-dire par les 12 points de rencontre de A avec K^4 ; elle contient donc cette droite tout entière, et se résout en la droite A et une courbe du neuvième ordre $\mathcal{B}^9$. Cette courbe passe d'ailleurs par les 52 points singuliers de K^4, les 4 points de contact des tangentes menées de M à K^4 et en outre par le point M (*Cf.* n° 39).

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *Si d'un point* M *pris dans le plan d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on mène des tangentes à la courbe, les* 4 *points de contact et les* 52 *points singuliers de* K^4 *sont situés sur une même courbe du neuvième ordre, qui passe en outre par le point* M.

THÉORÈME II. — *Si, par les* 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on mène une courbe quelconque du neuvième ordre, cette courbe rencontre* K^4 *en* 4 *points distincts des points singuliers, les tangentes en ces points à la courbe* K^4 *se coupent en un même point* M, *qui se trouve sur la courbe du neuvième ordre.*

41. On peut choisir la droite A de telle façon que sa polaire se décompose en une conique et un point ϖ ; nous prenons, du reste, le point M arbitrairement dans le plan. La courbe $\mathcal{A}^{10}$ se compose alors de la droite A et de la courbe $\mathcal{B}^9$ correspondante au point M ; d'après ce que nous avons vu, le point ϖ doit se trouver sur $\mathcal{A}^{10}$, et, comme il est en dehors de la droite A, il est nécessairement situé sur $\mathcal{B}^9$.

On trouve dans le plan 21 points ϖ, qui sont évidemment caractérisés par la propriété que les tangentes que l'on peut mener de chacun d'eux à K^4 ont leurs 4 points de contact en ligne droite ; ces 21 points se trouvent donc sur la courbe $\mathcal{B}^9$, quelle que soit la position du point M.

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Toutes les courbes du neuvième ordre qui passent par les* 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe passent en outre par* 21 *points fixes ; ces points fixes sont les points qui jouissent de la propriété que les tangentes menées de chacun d'eux à* K^4 *ont leurs points de contact en ligne droite.*

42. Je m'arrête ici dans l'étude de l'invariant (¹)

$$2SJ - 3TI ;$$

les théorèmes auxquels cette étude nous a conduits comprennent, dans leur énoncé, tous les points singuliers de la courbe.

Pour étudier en particulier les points doubles de K^4, je considérerai le covariant du sixième ordre de U,

$$\begin{aligned} V = (&a^2d + 2b^3 - 3abc,\ a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c,\\ &5abe - 15acd + 10b^2d,\ 10b^2e - 10d^2a,\\ &-5ade + 15bce - 10bd^2,\ -ae^2 - 2bde + 9ce^2 - bcd^2,\\ &3cde - 2d^3 - be^2 \between \lambda, \mu)^6. \end{aligned}$$

Pour que l'équation

$$U = 0$$

(¹) Je signalerai cependant encore, en passant, le cas important où l'invariant quadratique I est identiquement nul ; alors la courbe $\mathcal{A}^{10}$ se décompose en S^4 et en une courbe du sixième ordre $\mathcal{J}^6$ sur laquelle sont, dans ce cas, situés les 28 points doubles de la courbe K^4 et les 28 points doubles de K'^4.

ait deux couples de racines égales, il faut et il suffit que tous les coefficients du covariant V se réduisent à zéro.

Le poids de ce covariant étant égal à 9, en égalant à zéro ses coefficients, on obtient l'équation d'autant de courbes du neuvième ordre, qui toutes passent par les 28 points doubles de la courbe.

43. Considérons en particulier le coefficient de $\lambda^3\mu^3$, l'équation

$$ad^2 - eb^2 = 0$$

représente, comme nous venons de le voir, une courbe du neuvième degré passant par les 28 points doubles de K^4.

La forme remarquable de cette équation donne lieu à d'importantes conséquences; on voit, en effet, facilement que

$$a = 0$$

est l'équation du faisceau des tangentes menées à la courbe par le point x_∞ situé à l'infini sur l'axe des x.

De même

$$b = 0$$

est l'équation du faisceau des tangentes menées à la courbe par le point y_∞ situé à l'infini sur l'axe des y.

Supposons que ces points soient deux points doubles de la courbe; alors a et b seront deux carrés parfaits, et si l'on pose

$$a = \alpha^2 \quad \text{et} \quad b = \beta^2,$$

l'équation de la courbe du neuvième ordre deviendra

$$\alpha^2 d^2 - \beta b^2 = 0,$$

équation qui se décomposera en deux autres

$$\alpha d - \beta b = 0$$

et

$$\alpha d + \beta b = 0.$$

Dans ce fait analytique se trouve l'origine des beaux théorèmes donnés par Steiner sur les points doubles des courbes de quatrième classe (1); mais, pour en développer toutes les consé-

(1) Il est presque inutile d'ajouter que Steiner les a énoncés pour les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre.

quences, il est nécessaire d'étudier plus complètement le covariant V.

44. Considérons, en même temps que la courbe K^4, une conique quelconque K^2 dont l'équation mixte soit

$$(A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0.$$

De cette forme et du covariant V on déduit l'invariant suivant :

$$\begin{aligned} I = {} & (a^2d - 3abc + 2b^3)C^3 - (a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c)BC^2 \\ & + (abe - 3acd + 2b^2d)AC^2 + (4abe - 12acd + 8b^2d)B^2C \\ & + 6(ad^2 - b^2e)ABC + 4(ad^2 - b^2e)B^3 - (ade - 3bce + 2bd^2)A^2C \\ & - (4ade - 12bce + 8bd^2)AB^2 + (ae^2 + 2bde - 9c^2e + 6cd^2)BA^2 \\ & - (be^2 - 3cde + 2d^3)A^3. \end{aligned}$$

Cet invariant étant d'un poids égal à 9, l'équation

$$I = 0$$

représente une courbe du neuvième ordre $\mathfrak{S}^9$.

1° Lorsqu'on fait

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

I se réduit à

$$(2d^2 - 3ce)(3Bc - Ad)A^2;$$

cette quantité s'annule pour

$$e = 0 \quad \text{et} \quad d = 0;$$

donc la courbe $\mathfrak{S}^9$ passe par les 28 points doubles de K^4. Elle s'annule aussi pour

$$A^2 = 0;$$

donc $\mathfrak{S}^9$ touche K^4 aux 8 points de contact des tangentes communes à K^4 et à K^2.

2° Considérons les 8 tangentes communes à K^4 et à K^2; ces droites se coupent en 28 points. Pour chacun de ces points, les équations

$$(a, b, c, d, e \between \lambda, \mu)^4 = 0$$

et

$$(A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

ont deux racines communes, qu'on peut supposer égales respectivement à zéro et à l'infini, ce qui revient à poser

$$a = 0, \qquad e = 0, \qquad A = 0, \qquad C = 0;$$

I s'annule dans cette hypothèse; donc la courbe $\mathcal{S}^9$ passe par les points de rencontre des 8 tangentes communes.

De là résulte la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données une courbe de quatrième classe* K^4 *et une courbe de seconde classe* K^2, *on peut construire une courbe du neuvième ordre* $\mathcal{S}^9$, *qui passe par les 28 points doubles de* K^4, *par les 28 points de rencontre des 8 tangentes communes à* K^4 *et à* K^2, *et qui touche* K^4 *aux points de contact de ces tangentes.*

45. Pour calculer l'équation de la courbe $\mathcal{S}^9$, nous pourrons toujours supposer que, par une substitution linéaire des variables, on ait mis le polynome qui, égalé à zéro, donne l'équation de la conique K^2 sous la forme

$$\mathcal{F}\lambda\mu;$$

par la même substitution, le polynome qui, égalé à zéro, donne l'équation de la courbe de quatrième classe K^4, deviendra

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E} \,\rangle\, \lambda, \mu)^4.$$

La valeur de l'invariant I, relative aux deux formes précédentes, est, à un facteur numérique près,

$$\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2);$$

si l'on désigne par ω le déterminant de la substitution employée, on aura, en vertu de la propriété fondamentale des invariants, à un facteur numérique près,

$$I = \omega^{-9}.\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2);$$

l'équation de la courbe $\mathcal{S}^9$ sera donc

$$\omega^{-9}\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2) = 0.$$

46. Supposons la conique K^2 composée du système des deux points M et M′, dont les coordonnées sont respectivement

$$\xi, \ \eta \quad \text{et} \quad \xi', \ \eta'.$$

Posons, pour un instant,

$$x - \xi = X, \qquad y - \eta = Y, \qquad x - \xi' = X', \qquad y - \eta' = Y'.$$

L'équation de la conique K^2 (ou de l'ensemble des deux points) est

$$(-Y\lambda + X\mu)(-Y'\lambda + X'\mu) = 0.$$

Faisons la substitution suivante,

$$\lambda = X'\lambda' - X\mu',$$
$$\mu = Y'\lambda' - Y\mu',$$

dont le déterminant est

$$\omega = XY' - YX'.$$

Par cette substitution, l'équation des points M, M′ devient

$$\omega^2\lambda\mu = 0;$$

si l'équation mixte de K^4 est

$$F(\lambda, \mu) = 0,$$

cette équation devient, après la transformation,

$$F(X'\lambda' - X\mu', \ Y'\lambda' - Y\mu') = 0,$$

ou, en développant,

$$[F(X', Y'), \ \Phi', \ \ldots, \ \Phi, \ F(X, Y) \,\rangle\, \lambda, \mu)]^4,$$

Φ et Φ' désignant deux polynomes entiers en X, Y, X′, Y′, dont on peut se dispenser d'écrire la valeur.

Les quantités $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ étant ainsi déterminées, on en déduit

$$I = \frac{1}{\omega^3}[F(X', Y')\Phi^2 - F(X, Y)\Phi'^2],$$

expression qui, malgré la présence de ω en dénominateur, est un polynome entier en X, Y, X′ et Y′.

Si les points donnés M et M′ sont deux points doubles de la courbe, comme les équations

$$F(X, Y) = 0,$$
$$F(X', Y') = 0$$

représentent respectivement les faisceaux de tangentes menées de ces points à la courbe, les polynomes $F(X, Y)$ et $F(X', Y')$ sont des carrés parfaits; et, si l'on pose

$$F(X, Y) = W^2,$$
$$F(X', Y') = W'^2,$$

l'équation de la courbe $\mathfrak{Z}^9$ devient

$$\frac{W'^2\Phi^2 - W^2\Phi'^2}{\omega^3} = 0,$$

ou bien

$$\frac{(\Phi W' - W\Phi')(\Phi W' + W\Phi')}{\omega^3} = 0.$$

$\mathfrak{Z}^9$ se décompose ainsi, comme nous le verrons tout à l'heure, en une courbe du troisième ordre et une courbe du sixième ordre.

Remarque. — Il est clair que, si la courbe K^4 a une tangente double pour chacun des points où cette tangente coupe la courbe, le polynome

$$F(X, Y)$$

est un carré parfait; on peut donc appliquer la proposition précédente, soit à un couple de ces points, soit à un de ces points et un point double.

47. On sait, depuis les beaux travaux de Steiner et de M. Hesse, qu'une courbe de quatrième classe peut être considérée (et cela de soixante-trois façons différentes) comme l'enveloppe de coniques qui lui sont quadruplement tangentes.

Si

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0$$

sont les équations tangentielles de deux coniques d'un de ces groupes, l'équation de la courbe K^4 peut se mettre sous la forme

$$AB = C^2,$$

en désignant par

$$C = 0$$

l'équation d'une troisième conique.

En se reportant à ce que j'ai dit au n° 5, on voit immédiatement que c'est aussi la forme de l'équation mixte de la courbe, si l'on

suppose que

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

soient les équations mixtes de trois coniques.

Soient respectivement

$$a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2 = 0, \tag{1}$$
$$\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2 = 0, \tag{2}$$
$$A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2 = 0 \tag{3}$$

ces équations mixtes.

L'équation mixte de la courbe de quatrième classe K^4 sera

$$\left\{\begin{aligned} &(a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2)(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2) \\ &\quad = (A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2)^2; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ou bien encore, si l'on pose

$$\begin{aligned} a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 &= (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ &\quad + 2\rho(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ &\quad + \rho^2(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \\ \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 &= (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ &\quad + 2\theta(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2), \\ &\quad + \theta^2(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \\ A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 &= (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ &\quad + (\rho + \theta)(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ &\quad + \rho\theta(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \end{aligned}$$

θ et ρ désignant deux paramètres variables arbitraires,

$$(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)(\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2) = (A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2)^2.$$

Les équations

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0 \tag{5}$$

et

$$\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 = 0 \tag{6}$$

représentent deux quelconques des coniques du groupe quadruplement tangentes à K^4; les 8 tangentes aux 8 points de contact des deux coniques touchent une troisième conique, dont l'équation est

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0. \tag{7}$$

On peut donner à ρ six valeurs telles que la conique représentée par l'équation (1) se décompose en un système de 2 points; ces points sont évidemment des points doubles de la courbe, et l'on obtient ainsi les 12 points doubles qui appartiennent au groupe considéré.

48. Ce qui précède peut être présenté d'une façon plus nette en employant les considérations exposées par M. Aronhold dans son Mémoire *Sur les courbes du quatrième ordre* (1).

On sait qu'en général trois courbes de seconde classe quelconques peuvent être considérées comme les polaires de trois droites du plan par rapport à une certaine courbe de troisième classe.

Les courbes déterminées par les équations (1), (2) et (3) sont ainsi les polaires de trois droites relativement à une courbe de troisième classe bien déterminée K^3 (2).

Soient

$$p = 0 \qquad \varpi = 0, \qquad P = 0$$

les équations de ces droites.

La conique déterminée par l'équation (5) est la polaire de la droite

$$p + 2\rho P + \rho^2 \varpi = 0;$$

toutes les droites déterminées par cette équation, lorsqu'on y fait varier ρ, enveloppent une conique C^2 dont l'équation est

$$p\varpi - P^2 = 0.$$

De là les conséquences suivantes :

1° Toute droite tangente à la conique C^2 a pour polaire, par rapport à K^3, une conique quadruplement tangente à K^4 et appartenant au groupe considéré.

2° Si l'on considère deux droites tangentes à C^2, leurs coniques polaires sont quadruplement tangentes à K^4; les 8 tangentes menées aux points de contact touchent une même conique, qui

(1) *Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin*, juin 1864.

(2) *Voir* HERMITE : *Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires* (*Journal de Crelle*, t. 57).

est la polaire de la corde joignant les points où les droites touchent C^2.

3° Les six couples de points doubles appartenant au groupe sont les coniques polaires des tangentes communes à C^2 et à la hessienne de K^3.

49. Je vais maintenant démontrer que, si la conique K^2 est une des coniques données par l'équation (7), en d'autres termes, si cette conique est la polaire d'une droite du plan par rapport à K^3, la courbe $\mathfrak{S}^9$ se décompose en une courbe du troisième ordre et une courbe du sixième ordre.

A cette effet, posons

$$B^2 - AC = \Delta,$$

et effectuons la substitution

$$\lambda = (\sqrt{\Delta} - B)\lambda' + (\sqrt{\Delta} + B)\mu',$$
$$\mu = A\lambda' - A\mu',$$

propre à réduire à un rectangle la forme $A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2$, et qui a pour déterminant

$$\omega = -2A\sqrt{\Delta}.$$

Soient

$$2B'\lambda\mu,$$
$$a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2,$$
$$\alpha'\lambda^2 + 2\beta'\lambda\mu + \gamma'\mu^2$$

ce que deviennent respectivement, après la transformation, les formes

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2, \qquad a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2, \qquad \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2.$$

Les équations mixtes des courbes K^2 et K^4 deviendront

$$2B'\lambda\mu = 0,$$
$$(a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2)(\alpha'\lambda^2 + 2\beta'\lambda\mu + \gamma'\mu^2) - B'^2\lambda^2\mu^2 = 0,$$

et l'équation, en coordonnées cartésiennes, de $\mathfrak{S}^9$ sera, d'après ce que j'ai dit plus haut,

$$\omega^{-9}B'^3[a'\alpha'(b'\gamma' + c'\beta')^2 - c'\gamma'(b'\alpha' + a'\beta')^2] = 0,$$

ou encore

$$\omega^{-9}B'^3(a'\gamma' - c'\alpha')(b'^2\alpha'\gamma' - \beta'^2 a'c') = 0.$$

50. En effectuant les calculs, on trouve

$$\begin{aligned} B' &= 2A\Delta, \\ b' &= A(2Bb - Ca - Ac), \\ \beta' &= A(2B\beta - C\alpha - A\gamma). \end{aligned}$$

Mettons maintenant l'équation précédente sous la forme suivante

$$\omega^{-9}B'^2B'(a'\gamma' - c'\alpha')[b'^2(\alpha'\gamma' - \beta'^2) - \beta'^2(a'c' - b'^2)] = 0. \tag{8}$$

Je remarque que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

est un invariant des trois formes (5), (6) et (7); on a donc

$$B'(a'\gamma' - c\alpha') = -\begin{vmatrix} 0 & B' & 0 \\ a' & b' & c' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = -\omega^3 \begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

On a de même

$$\alpha'\gamma' - \beta'^2 = \omega^2(\alpha\gamma - \beta^2) \qquad \text{et} \qquad a'c' - b'^2 = \omega^2(ac - b^2);$$

d'où

$$\begin{aligned} &b'^2(\alpha'\gamma' - \beta'^2) - \beta'^2(a'c' - b'^2) \\ &\quad = A^2\omega^2[(2Bb - Ca - Ac)(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)(ac - b^2)]. \end{aligned}$$

Remplaçons, dans l'équation (8), ω, B', ... par leurs valeurs; elle deviendra, toutes réductions faites,

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \times [(2Bb - Ca - Ac)^2(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2(ac - b^2)] = 0.$$

51. Avant d'examiner la relation précédente, il est bon de revenir sur quelques points de la théorie des sections coniques.

Considérons trois coniques

$$p, \quad \varpi, \quad P,$$

et soient, comme ci-dessus,

$$(a, b, c \between \lambda, \mu)^2 = 0, \qquad (\alpha, \beta, \gamma \between \lambda, \mu)^2 = 0, \qquad (A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

leurs équations mixtes.

Les invariants fondamentaux de ce système de formes sont :

1° Les discriminants

$$ac - b^2, \qquad \alpha\gamma - \beta^2, \qquad AC - B^2,$$

qui, égalés à zéro, donnent les équations cartésiennes des coniques;

2° Les invariants simultanés quadratiques

$$A\gamma + C\alpha - 2B\beta, \qquad Ac + Ca - 2Bb, \qquad a\gamma + c\alpha - 2b\beta.$$

L'équation

$$A\gamma + C\alpha - 2B\beta = 0$$

représente une conique; de chacun des points de cette courbe les tangentes menées aux deux coniques P et ϖ forment un faisceau harmonique.

L'équation des tangentes communes à P et à ϖ s'obtient en égalant à zéro le résultant des formes

$$(\alpha, \beta, \gamma \between \lambda; \mu)^2 \qquad \text{et} \qquad (A, B, C \between \lambda, \mu)^2.$$

D'après un beau théorème de M. Boole, cette équation peut se mettre sous la forme

$$(A\gamma + C\alpha - 2B\beta)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(AC - B^2) = 0.$$

Les invariants $Ac + Ca - 2Bb$ et $a\gamma + c\alpha - 2b\beta$ ont une signification analogue relativement aux systèmes de coniques P, p et p, ϖ.

3° L'invariant gauche G, dont la valeur est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

L'équation

$$G = 0$$

représente une courbe de troisième ordre; c'est évidemment le lieu des points tels que les tangentes menées de ces points aux trois coniques données forment un faisceau en involution.

Il est clair qu'on peut remplacer une de ces coniques par une quelconque des courbes dont l'équation est

$$\rho(A, B, C \between \lambda, \mu)^2 + \theta(a, b, c \between \lambda, \mu)^2 + \varphi(\alpha, \beta, \gamma \between \lambda, \mu)^2 = 0,$$

ρ, θ et φ désignant des constantes arbitraires.

Cette courbe jouit d'un grand nombre de propriétés remarquables qui sont dues, pour la plupart, à M. Cayley.

52. D'après le résultat auquel je suis parvenu dans les nos 49 et 50, on voit que, dans le cas considéré, la courbe $\mathfrak{S}^9$ se décompose en une courbe de troisième ordre Q^3, dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

et une courbe de sixième ordre Q^6, dont l'équation est

$$(2Bb - Ca - Ac)^2(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2(ac - b^2) = 0.$$

53. Étudions d'abord la courbe Q^3; pour abréger le discours, j'emploierai les expressions suivantes :

J'appellerai *coniques* F^2 les différentes coniques qui sont les polaires des droites du plan relativement à la courbe de troisième classe K^3; les coniques F^2 forment un réseau.

J'appellerai *coniques* G^2 les coniques qui sont les polaires, par rapport à K^3, des droites tangentes à C^2; ces coniques G^2 sont des positions particulières des coniques F^2, chacune d'elles est quadruplement tangente à K^4.

D'après ce que j'ai dit plus haut, on voit que la courbe Q^3 peut être définie par les propriétés suivantes :

Si l'on prend d'une façon quelconque trois coniques F^2, *le lieu des points d'où l'on voit ces coniques suivant un faisceau en involution est la courbe* Q^3.

Étant données deux coniques quelconques F^2, *les points de rencontre des tangentes communes à ces deux courbes sont situés sur* Q^3.

Étant donnée une conique quelconque G^2, *les quatre tangentes aux points où cette courbe touche* K^4 *se coupent en* 6 *points situés sur* Q^3.

La courbe Q^3 *est le lieu des couples de points qui font partie des coniques* F^2.

Elle passe par les 12 *points doubles de* K^4 *qui appartiennent au groupe considéré.*

La courbe Q^3 est la corrélative de la courbe désignée par G dans le Mémoire de Steiner.

54. La courbe Q^3, qui passe par les 12 points doubles du groupe, est complètement déterminée et ne dépend pas de la conique K^2.

Il n'en est pas de même de la courbe Q^6.

La courbe $\mathfrak{S}^9$, qui se compose des courbes Q^3 et Q^6, devant passer par les 28 points doubles de la courbe et Q^3 ne contenant que 12 de ces points, les 16 autres sont situés sur Q^6.

L'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{gathered}[(2Bb - Ca - Ac)^2 - 4(AC - B^2)(ac - b^2)](\alpha\gamma - \beta^2) \\ = [(2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2 - 4(AC - B^2)(\alpha\gamma - \beta^2)](ac - b^2).\end{gathered}$$

D'où, si l'on se reporte à ce que j'ai dit plus haut (n° 51), les conclusions suivantes, qui concordent d'ailleurs avec ce qui a été établi généralement pour la courbe $\mathfrak{S}^9$:

THÉORÈME. — *Étant données deux coniques quelconques* p *et* ϖ, *quadruplement tangentes à* K^4 *et appartenant au groupe considéré, les quatre tangentes aux points de contact de* p *rencontrent les quatre tangentes aux points de contact de* ϖ *en* 16 *points; ces* 16 *points et les* 16 *points doubles, qui n'appartiennent pas au groupe, sont situés sur une même courbe du sixième ordre, qui passe en outre par les* 4 *points d'intersection des coniques* p *et* ϖ *et touche* K^4 *aux* 8 *points où cette courbe est touchée par les coniques.*

55. Reprenons l'équation de Q^6

$$(2Bb - Ac - Ca)^2(\alpha\gamma - \beta^2) = (2B\beta - A\gamma - C\alpha)^2(ac - b^2),$$

et supposons que chacune des coniques p et ϖ se réduise à un couple de points (qui seront des points doubles du groupe).

On aura alors

$$\alpha\gamma - \beta^2 = V^2,$$

V étant l'équation de la droite qui joint les deux points en lesquels se résout la conique ϖ; on aura de même

$$ac - b^2 = \mathrm{W}^2,$$

et l'équation précédente deviendra

$$(2\mathrm{B}b - \mathrm{A}c - \mathrm{C}a^2)\mathrm{V}^2 = (2\mathrm{B}\beta - \mathrm{A}\gamma - \mathrm{C}\alpha)^2\mathrm{W}^2;$$

la courbe Q^6 se décompose, dans ce cas, en deux courbes du troisième ordre analogues à Q^3 et dont les équations sont

$$(2\mathrm{B}b - \mathrm{C}a - \mathrm{A}c)\mathrm{V} + (2\mathrm{B}\beta - \mathrm{C}\alpha - \mathrm{A}\gamma)\mathrm{W} = 0,$$
$$(2\mathrm{B}b - \mathrm{C}a - \mathrm{A}c)\mathrm{V} - (2\mathrm{B}\beta - \mathrm{C}\alpha - \mathrm{A}\gamma)\mathrm{W} = 0.$$

56. Soient d et d' un couple quelconque de points doubles d'une courbe de quatrième classe K^4; ces points définissent un groupe de 12 points doubles (G), dont ils font eux-mêmes partie, et les 12 points du groupe sont situés sur une des courbes du troisième ordre de Steiner.

Soit Δ un troisième point double de la courbe; je supposerai, pour simplifier la démonstration, que d et d' soient respectivement les points situés à l'infini sur l'axe des x et sur l'axe des y, et que Δ soit l'origine des coordonnées.

Cela posé, l'origine étant un point double, en faisant dans l'équation mixte de K^4

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

le résultat doit être un carré parfait; cette équation est donc de la forme

$$\begin{aligned}(\mu x - \lambda y)^4 + 4(\alpha\lambda + \beta\mu)(\mu x - \lambda y)^3 + 6(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)(\mu x - \lambda y)^2 \\ + 4(\mathrm{A}\lambda^3 + 3\mathrm{B}\lambda^2\mu + 3\mathrm{C}\lambda\mu^2 + \mathrm{D}\mu^2)(\mu x - \lambda y)^2 \\ + (\mathrm{P}\lambda^2 + 2\mathrm{Q}\lambda\mu + \mathrm{R}\mu^2)^2 = 0,\end{aligned}$$

$\mathrm{P}x^2 + 2\mathrm{Q}xy + \mathrm{R}y^2 = 0$ étant l'équation des tangentes menées à la courbe par le point Δ.

Les points situés à l'infini sur l'axe des x et sur l'axe des y étant des points doubles de la courbe, les coefficients de λ^4 et de μ^4 dans l'équation précédente sont des carrés parfaits, et l'on peut poser, par exemple,

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{A}y + 6ay^2 - 4\alpha y^3 + y^4 = (y^2 - 2\alpha y + h)^2,\\ &\mathrm{R}^2 + 4\mathrm{D}x + 6cx^2 + 4\beta x^3 + x^4 = (x^2 + 2\beta x + k)^2,\end{aligned}\right.$$

d'où, en particulier, on déduit la relation suivante,

$$(10) \qquad \mathrm{P}^2k^2 - \mathrm{R}^2h^2 = 0.$$

Les coefficients de $4\lambda^3\mu$ et de $4\lambda\mu^3$, dans l'équation mixte de K^4, sont respectivement

$$\mathrm{PQ} - 3\mathrm{B}y + \mathrm{A}x - 3axy + 3by^2 - \beta y^3 + 3\alpha xy^2 - y^3x$$

et

$$\mathrm{RQ} + 3\mathrm{C}x - \mathrm{D}y - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2y - x^3y.$$

Il résulte de là, et de ce que j'ai dit plus haut, que l'équation de la courbe Q^6 est

$$\begin{aligned}&(y^2 - 2\alpha y + h)\\ &\quad \times(\mathrm{RQ} + 3\mathrm{C}x - \mathrm{D}y - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2y - x^3y)\\ &+ (x^2 + 2\beta x + k)\\ &\quad \times(\mathrm{PQ} - 3\mathrm{B}y + \mathrm{A}x - 3axy + 3by^2 - \beta y^3 + 3\alpha xy^2 - y^3x) = 0,\end{aligned}$$

et l'équation de Q^3

$$\begin{aligned}&(y^2 - 2\alpha y + h)\\ &\quad \times(\mathrm{RQ} + 3\mathrm{C}x - \mathrm{D}y - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2y - x^3y)\\ &- (x^2 + 2\beta x + k)\\ &\quad \times(\mathrm{PQ} - 3\mathrm{B}y + \mathrm{A}x - 3axy + 3by^2 - \beta x^3 + 3\alpha xy^2 - y^3x) = 0.\end{aligned}$$

Cette dernière équation est en apparence du sixième degré; mais, en vertu des relations (9), ce degré s'abaisse au troisième.

57. Les premiers membres des équations précédentes, quand l'on y fait

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

se réduisent respectivement à

$$\mathrm{Q}(h\mathrm{R} + k\mathrm{P}) \quad \text{et à} \quad \mathrm{Q}(h\mathrm{R} - k\mathrm{P}).$$

De l'équation (10) il résulte que l'une des quantités précédentes est nulle [1]; le point Δ se trouve donc sur la courbe Q^3 ou sur la courbe Q^6.

Il est clair, d'après ce que j'ai dit précédemment, qu'il se trouve

---

[1] Je suppose, pour abréger la discussion, qu'aucune des quantités P, Q, R ne soit nulle; c'est évidemment le cas général.

sur Q^3 s'il fait partie du groupe (G), et sur Q^6 dans le cas contraire.

Dans le premier cas, l'on a

$$hR - kP = 0;$$

or c'est là la condition nécessaire pour que les six droites représentées par les équations

$$y^2 - 2\alpha y + h = 0,$$
$$x^2 + 2\beta x + k = 0,$$
$$Px^2 + 2Qxy + Ry^2$$

soient tangentes à une même conique; et, d'ailleurs, ces droites sont les tangentes que l'on peut mener à la courbe par les trois points doubles A, B, C.

D'où cette propriété due à Steiner :

Si le point Δ appartient au groupe (G), les 6 tangentes que l'on peut mener à la courbe des points d, d' et Δ touchent une même conique.

58. Supposons maintenant que le point Δ n'appartienne pas au groupe (G); on a alors

$$hR + kP = 0;$$

soit Γ l'une quelconque des tangentes menées du point C à la courbe, et

$$Px - y(Q + \sqrt{Q^2 - PR}) = 0$$

son équation; l'équation de la seconde de ces tangentes Γ' sera

$$Px - y(Q - \sqrt{Q^2 - PR}) = 0.$$

Appelons Γ_0 la conjuguée harmonique de Γ' par rapport aux deux axes $d\Delta$ et $d'\Delta$, l'équation de cette droite sera

$$Px + y(Q - \sqrt{Q^2 - PR}) = 0,$$

l'ensemble des droites Γ et Γ_0 ayant pour équation

$$Px^2 - 2\sqrt{Q^2 - PQ}\,xy - Ry^2 = 0.$$

L'égalité

$$hR + kP = 0$$

exprime précisément la relation nécessaire pour que les droites Γ et Γ_0 et les 4 tangentes que l'on peut mener à la courbe par les points d et d' touchent une même conique.

On peut donc, en groupant ensemble les résultats précédents, énoncer la proposition suivante :

Étant pris, sur une courbe de quatrième classe, 2 points doubles d et d', ces 2 points déterminent 10 autres points doubles de la courbe qui forment, avec les premiers, un groupe (G) *de 12 points situés sur une même courbe du troisième ordre.*

Soient Δ un point double de la courbe différent de d et de d', et Γ et Γ' les tangentes menées à ce point. La droite Γ et les tangentes menées par d et d' déterminent une conique. Cela posé :

1° Si Δ fait partie du groupe G, la droite Γ' se confond avec la deuxième tangente que l'on peut mener du point Δ à la conique;

2° Si Δ ne fait pas partie de ce groupe, la droite Γ' et cette deuxième tangente sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites Δd et $\Delta d'$.