SUR LA

PARTITION DES NOMBRES.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. V; 1877.

1. Le problème à résoudre est le suivant : *Étant donnés des nombres entiers a, b, ..., l et un nombre entier variable* N, *trouver le nombre des solutions en nombres* entiers *et* positifs *de l'équation*

$$N = ax + by + \ldots + lu.$$

Comme l'a remarqué Euler, le nombre $T(N)$ des solutions est égal au coefficient de N dans le développement de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)\ldots(1-z^l)}$$

suivant les puissances croissantes de z.

Je me propose ici de trouver, non pas la valeur exacte de $T(N)$, mais une formule qui donne une valeur approchée de cette fonction, l'erreur commise ayant d'ailleurs une limite fixe *indépendante de la valeur de* N [1].

2. Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ *une fraction rationnelle telle, que les racines de l'équation* $f(z) = 0$ *soient toutes inégales et aient toutes pour module l'unité; si l'on développe cette fraction en série en suivant les puissances croissantes de* z, *tous les coefficients du développement demeurent, en valeur absolue, inférieurs à une limite déterminée.*

[1] Les résultats contenus dans cette Note ne sont peut-être pas nouveaux; mais ils me paraissent peu connus, et, en raison de leur simplicité, j'ai pensé qu'ils pourraient intéresser quelques lecteurs.

Démonstration. — Soit

$$\frac{\varphi(z)}{f(x)} = \Phi(z) + \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} + \ldots + \frac{L}{z-\lambda},$$

$\Phi(z)$ désignant la partie entière de la fraction et α, β, ..., γ les racines de l'équation $f(z) = 0$; le coefficient d'une puissance quelconque de z dans le développement de la fraction sera de la forme

$$p + A\alpha^n + B\beta^n + \ldots + L\lambda^n,$$

p désignant, s'il y a lieu, le terme provenant de Φ.

Le terme complémentaire $A\alpha^n + B\beta^n + \ldots + L\lambda^n$ est, en vertu d'un théorème bien connu, inférieur à la somme des modules de ses différents termes et par conséquent inférieur à $A + B + \ldots + L$.

Le lemme est donc démontré.

3. Considérons maintenant l'expression

$$F(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)(1-z^l)};$$

décomposons cette expression en fractions simples et réunissons en un même groupe $\Phi(z)$ toutes les fractions dont le dénominateur est une puissance supérieure à la première d'un des facteurs du dénominateur $F(z)$; réunissons de même dans un groupe $\varphi(z)$ toutes les fractions qui ont l'un de ces facteurs pour dénominateur.

On aura évidemment

$$F(z) = \Phi(z) + \varphi(z),$$

et, en désignant respectivement par $\Theta(N)$ et $\theta(N)$ les coefficients de x^N dans les développements de $\Phi(z)$ et de $\varphi(z)$,

$$T(N) = \Theta(N) + \theta(N).$$

Le dénominateur de $\varphi(z)$ n'ayant que des racines simples dont le module est égal à l'unité, il suit du lemme énoncé plus haut que $\theta(N)$ reste en valeur absolue inférieur à une quantité donnée; on aura donc approximativement

$$T(N) = \Theta(N),$$

l'erreur commise étant inférieure à une limite fixe indépendante du nombre N.

4. *Applications.* — Soit à résoudre, en nombres entiers et positifs, l'équation $ax + by = \mathrm{N}$, a et b étant deux nombres entiers premiers entre eux; on aura dans ce cas

$$\mathrm{F}(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)}$$

et

$$\Phi(z) = \frac{1}{ab}\,\frac{1}{(1-z)^2};$$

d'où

$$\Theta(\mathrm{N}) = \frac{\mathrm{N}+1}{ab},$$

et par suite, en négligeant la quantité constante $\frac{1}{ab}$, ce qui est permis eu égard à l'approximation que l'on veut obtenir,

$$\mathrm{T}(\mathrm{N}) = \frac{\mathrm{N}}{ab}.$$

C'est la formule donnée par Paoli, et l'on sait, dans ce cas, que l'erreur est moindre que l'unité.

Soit encore à résoudre l'équation

$$ax + by + cz = \mathrm{N},$$

a, b et c étant trois nombres premiers entre eux.

On aura dans ce cas

$$\Phi(z) = \frac{1}{abc}\,\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{a+b+c-3}{2abc}\,\frac{1}{(1-z)^2};$$

d'où, en négligeant une quantité constante, ce qui est permis vu l'approximation que l'on veut obtenir,

$$\mathrm{T}(\mathrm{N}) = \frac{\mathrm{N}}{2abc}(\mathrm{N}+a+b+c).$$

SUR

LE CALCUL DES SYSTÈMES LINÉAIRES,

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE.

Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, LXII[e] Cahier.

I.

J'appelle, suivant l'usage habituel, *système linéaire* le tableau des coefficients d'un système de n équations linéaires à n inconnues. Un tel système sera dit *système linéaire d'ordre* n et, sauf une exception dont je parlerai plus loin, je le représenterai toujours par une seule lettre majuscule, réservant les lettres minuscules pour désigner spécialement les éléments du système linéaire.

Ainsi, par exemple, le système linéaire

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix}$$

sera représenté par la seule lettre majuscule A. Dans tout ce qui suit, je considérerai ces lettres majuscules représentant les systèmes linéaires comme de véritables quantités, soumises à toutes les opérations algébriques. Le sens des diverses opérations sera fixé ainsi qu'il suit.

Addition et soustraction. — Soient deux systèmes de même ordre A et B; concevons que l'on forme un troisième système en faisant la somme algébrique des éléments correspondants dans chacun des deux premiers systèmes. Le système résultant sera dit la somme des systèmes A et B, et si on le désigne par C, on exprimera le mode de relation qui le rattache aux systèmes A et B par l'équation $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$. Si, par exemple, on a

$$\mathrm{A} = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix},$$

il viendra

$$C = \begin{matrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{matrix}.$$

La soustraction sera évidemment définie d'une manière semblable.

Multiplication. — Soient deux systèmes de même ordre A et B : si on les compose suivant la règle ordinaire, on obtiendra un troisième système que je définirai comme étant le produit de A par B; si l'on désigne ce système par C, le mode de relation ainsi défini sera exprimé par la relation

$$C = AB.$$

Ainsi, si l'on prend

$$A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix},$$

on obtiendra

$$C = \begin{matrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + \beta\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\beta \end{matrix}.$$

L'ordre dans lequel on effectue une multiplication n'est pas, comme on le sait, indifférent, et il faudra toujours bien distinguer l'ordre dans lequel on doit prendre les facteurs. Je dirai que la quantité A est multipliée à droite par le facteur B quand le produit sera AB, et qu'elle est multipliée à gauche par B quand le produit sera BA. La définition de la multiplication indique le sens qu'il faut attacher aux notations A^n et B^n et à la dénomination de puissances entières d'un système linéaire.

Quand deux systèmes seront tels, que leur produit ne change pas en intervertissant l'ordre des facteurs, je dirai que ces deux systèmes sont *permutables*. Pour éviter toute ambiguïté, je n'emploierai pas en général le signe de la division. Soit en effet un système X défini par la relation

$$AX = B,$$

en posant

$$X = \frac{B}{A},$$

on ne saurait si, dans le second membre, la division doit être effectuée à droite ou à gauche. Cette ambiguïté ne disparaîtra

que dans le cas où les deux systèmes A et B seront permutables; et, dans ce cas seul, j'emploierai le signe de la division. Il résulte de ce qui précède que l'on peut appliquer aux systèmes linéaires les règles de calcul ordinaires de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de l'élévation aux puissances, sauf un seul point, à savoir que l'ordre des facteurs dans un produit ne peut être en général interverti.

Systèmes simples. — Une sorte de systèmes doit être particulièrement remarquée; ce sont ceux où tous les éléments, contenus dans la diagonale décrite de gauche à droite en descendant, sont égaux, tous les autres éléments étant nuls. Tel serait le système du deuxième ordre

$$\begin{matrix} k & 0 \\ 0 & k \end{matrix}.$$

Par exception au principe posé précédemment, je le représenterai simplement par la lettre minuscule désignant la valeur commune des éléments de la diagonale. Les raisons de cette exception sont : 1° qu'un tel système

$$\begin{matrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{matrix}$$

peut toujours se permuter dans la multiplication avec un autre système quelconque, en sorte que l'on a toujours $mA = Am$, ce qui permet de placer les systèmes simples multiplicateurs en tête d'un produit comme de véritables coefficients; 2° que multiplier un système A par un système simple m revient à multiplier tous les éléments de A par le nombre m.

Systèmes inverses. — Étant donné un système

$$A = \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix},$$

j'appellerai inverse du premier le système

$$\begin{matrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{matrix},$$

et je le désignerai par la notation A_1. Un système et son inverse sont symétriques par rapport à la diagonale. L'inverse d'une somme, d'un produit s'obtiendra en appliquant les deux règles exprimées par les équations suivantes

$$(A+B+C+\ldots+L)_1 = (A_1+B_1+\ldots+L_1),$$
$$(ABC\ldots KL)_1 = L_1K_1\ldots C_1B_1A_1.$$

J'appellerai *symétrique* tout système égal à son inverse, en sorte qu'un système symétrique quelconque A satisfera à l'équation

$$A = A_1.$$

J'appellerai *système gauche* tout système égal et de signe contraire à son inverse, en sorte qu'un système gauche quelconque B satisfera à l'équation

$$B + B_1 = 0.$$

Systèmes réciproques. — Étant donné un système quelconque A, le système de même ordre formé avec les déterminants mineurs de première espèce sera dit *système réciproque* de A, et je le désignerai par la notation A_0. Par exemple, si

$$A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix},$$

on aura

$$A_0 = \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix}.$$

Le réciproque d'un produit s'obtiendra en appliquant la règle contenue dans la formule suivante

$$(ABC\ldots KL)_0 = L_0K_0\ldots C_0B_0A_0.$$

Une remarque presque évidente, c'est que les opérations indiquées par les indices 1 et 0 peuvent s'inverser sans que le résultat en soit changé, en sorte que l'on a

$$A_{10} = A_{01},$$

et, par conséquent,

$$A_{101} = A_{011} = A_0;$$

A étant un système quelconque, A_0 son réciproque, et a son déterminant, on aura toujours la relation

$$AA_0 = a;$$

dans cette relation, il est clair que a ne désigne pas le déterminant de A, mais bien le système simple

$$\begin{matrix} a & 0 & 0 \ldots \\ 0 & a & 0 \ldots \\ 0 & 0 & a \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Je noterai ici les formules suivantes, qui sont d'un usage continuel dans le calcul des systèmes linéaires. A désignant un système d'ordre n et a son déterminant, on aura

$$(A_0)_0 = a^{n-2}A$$

et le déterminant de A_0 sera a^{n-1}. En outre, m étant un système simple, son déterminant sera m^n et l'on aura

$$(m)_0 = m^{n-1}.$$

Équations linéaires. — J'appelle équation linéaire toute relation entre des systèmes linéaires, ces systèmes pouvant d'ailleurs y entrer par eux-mêmes ou par leurs inverses ou par leurs réciproques. Soit une équation linéaire

$$A = B;$$

il est clair qu'on pourra ajouter aux deux membres de l'équation un même système linéaire, les élever à une même puissance entière, les multiplier à droite ou à gauche par un même système linéaire, sans que l'égalité des deux membres soit troublée. De l'équation $A = B$, on déduira aussi

$$A_1 = B_1, \qquad A_0 = B_0.$$

On peut même diviser à droite ou à gauche les deux membres d'une équation par un même facteur, si le déterminant de ce facteur n'est pas nul. En effet, soient

$$AH = BH \quad \text{et} \quad HH_0 = h,$$

h étant par hypothèse différent de zéro ; de la relation primitive on déduit

$$AHH_0 = BHH_0,$$

ou bien

$$Ah = Bh$$

et, par conséquent,

$$A = B.$$

Résoudre une équation linéaire ou un système d'équations linéaires, c'est trouver l'expression du système inconnu en fonction des systèmes connus. Quand on pourra le faire, l'inconnue X sera donnée par une relation de la forme

$$AX = B,$$

et elle sera généralement déterminée, à moins que les déterminants de A et de B ne soient nuls simultanément, auquel cas X sera indéterminé ou du moins affectera la forme de l'indétermination.

Équation aux déterminants. — Une équation linéaire tient lieu en général de n^2 équations entre les éléments de ces systèmes. Parmi les diverses équations que l'on peut obtenir en combinant ensemble ces n^2 équations, la plus importante est l'équation aux déterminants. Elle s'obtient en égalant entre eux les déterminants des deux membres de l'équation ; en sorte que si $A = B$ est l'équation considérée, et si en général on désigne par ∇M le déterminant d'un système quelconque M, l'équation aux déterminants sera

$$\nabla A = \nabla B.$$

On a d'ailleurs, par un théorème connu,

$$\nabla(ABC\ldots) = \nabla A . \nabla B . \nabla C \ldots.$$

Dans le calcul des systèmes linéaires, on a très souvent besoin de calculer le réciproque ou le déterminant d'une fonction de systèmes linéaires donnés ; il est très important, quand on le peut, d'effectuer le calcul, sans être obligé de recourir aux éléments des systèmes. Je donnerai dans la suite plusieurs exemples des procédés que l'on peut employer, procédés que du reste l'examen

des questions particulières à résoudre fournit presque toujours facilement. Au sujet des équations linéaires, je ferai observer qu'une équation est nécessairement homogène en ordre, c'est-à-dire que tous les systèmes qui y entrent doivent être du même ordre. Ainsi, dans l'équation

$$A + \lambda B = 0,$$

il est clair que λ représente un système simple d'ordre n, si A et B sont d'ordre n. On voit par là que la notation adoptée pour les systèmes simples ne peut jamais donner lieu à aucune ambiguïté. Ainsi, en supposant que le déterminant de $A + B\lambda$ soit $\varphi(\lambda)$, on aura l'équation

$$\nabla(A + B\lambda) = \varphi(\lambda),$$

et il est évident, sans qu'il y ait ambiguïté, que dans le premier membre, si A et B sont du troisième ordre, λ représente le système simple

$$\begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array},$$

tandis que dans le second il désigne simplement le nombre λ.

Avant de terminer ce qui est relatif aux notations et aux définitions, je ferai encore les remarques suivantes.

Le système

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array},$$

où tous les éléments sont nuls, excepté le premier, sera toujours, dans ce qui suit, représenté par Ω.

Un système du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array},$$

où toutes les lignes, excepté la première, ne renferment que des éléments nuls, sera désigné par la notation

$$(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)$$

et par conséquent la notation

$$(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)$$

désignera le système

$$\begin{matrix} x_1 & 0 & 0 & . \\ x_2 & 0 & 0 & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & 0 & 0 & . \end{matrix}$$

En sorte que si, par exemple, on a

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

cette relation, qui est équivalente à

$$\begin{matrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} x & y \\ 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix} \times \begin{matrix} x & 0 \\ y & 0 \end{matrix},$$

pourra s'écrire

$$\Omega f = (x, y)_1 \, \mathrm{A}(x, y),$$

en posant $\begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix} = \mathrm{A}$,

ou encore

$$\Omega f = \mathrm{X}_1 \mathrm{A} \mathrm{X},$$

en posant $(x, y) = \mathrm{X}$.

II.

Soit A un système linéaire d'ordre n; je ne considérerai dans ce qui suit que des systèmes pouvant s'exprimer au moyen seulement de A et de systèmes simples. (Ceux-ci, en effet, se comportent comme de véritables nombres, en donnant ici le nom de *nombre*, indépendamment de toute idée arithmétique, aux quantités ordinaires, et réservant la dénomination de *quantités* aux systèmes linéaires proprement dits.) Je désignerai en général une telle fonction numérique de A par la notation $f(\mathrm{A})$; une fonction entière de A sera de la forme

$$\alpha + \beta \mathrm{A} + \gamma \mathrm{A}^2 + \ldots + \lambda \mathrm{A}^m,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ désignant des systèmes simples. Cela posé, si A désigne un système d'ordre n, et si l'on a

$$\Delta(\mathrm{A} - \lambda) = \varphi(\lambda),$$

je dis que l'on aura identiquement

$$\varphi(\mathrm{A}) = 0.$$

Ainsi, soit

$$\mathrm{A} = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix},$$

on aura

$$\Delta(\mathrm{A} - \lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (ad - bc) - \lambda(a + d) + \lambda^2;$$

on devra donc avoir

$$\mathrm{A}^2 - (a + d)\mathrm{A} + ad - bc = 0,$$

et, en effet, on a identiquement

$$\begin{matrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{matrix} - (a + d) \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} + \begin{matrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{matrix} = 0.$$

En général, si d désigne le déterminant d'un système A d'ordre n, on aura

$$\Delta(\mathrm{A} - \lambda) = d - m\lambda + p\lambda^2 + \ldots + (-1)^n \lambda^n;$$

A satisfera donc à l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{A}^n - s\mathrm{A}^{n-1} \ldots \mp m\mathrm{A} \mp d = 0.$$

On remarquera, ce qui est utile dans les applications au point de vue arithmétique, que dans cette équation le coefficient de A^n est toujours l'unité. Multiplions l'équation (1) par A_0 (à gauche ou à droite indifféremment), il viendra, en remarquant que $\mathrm{A}\mathrm{A}_0 = d$,

$$d\mathrm{A}^{n-1} - sd\mathrm{A}^{n-2} \ldots \mp md \pm d\mathrm{A}_0 = 0,$$

d'où

$$(2) \qquad \mathrm{A}_0 = m - p\mathrm{A} \ldots \pm s\mathrm{A}^{n-2} \mp \mathrm{A}^{n-1}.$$

Quoique la démonstration de cette formule suppose d différent de zéro, il est clair qu'elle subsiste même quand d est nul.

Des équations (1) et (2), il résulte que toute fonction numérique entière de A (et aussi de A et de A_0) peut se réduire à un polynôme où A ne dépasse pas le degré $(n-1)$. Soit $f(A)$ une telle fonction; proposons-nous de calculer son déterminant.

Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ les racines de l'*équation numérique ordinaire* $f(\lambda) = 0$, en sorte que l'on ait identiquement

$$f(\lambda) = a(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)\ldots(\lambda - \eta).$$

Il est facile de voir que l'on aura identiquement

$$(3) \qquad f(A) = a(A - \alpha)(A - \beta)\ldots(A - \eta);$$

en effet, la différence entre les deux membres de cette équation sera un polynôme en A de degré $(n-1)$ au plus. Or, en général, l'équation (1) est irréductible, c'est-à-dire que A ne peut satisfaire à aucune équation linéaire de degré moindre; donc la différence précitée est nulle; et cette conclusion subsiste évidemment même dans le cas où A satisferait à une équation d'un degré inférieur à n. Prenons maintenant l'équation aux déterminants de l'équation (3), il viendra

$$\nabla f(A) = a^n \nabla(A - \alpha).\nabla(a - \beta \ldots \nabla(A - \eta) = a^n \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\ldots\varphi(\eta).$$

Le déterminant de $f(A)$ ne diffère donc pas de la résultante des équations $\varphi(x) = 0$ et $f(x) = 0$; en appelant ρ cette résultante, nous aurons donc

$$\nabla f(A) = \rho.$$

Cherchons maintenant le réciproque de $f(A)$; on a, d'après ce qui précède,

$$[f(A)]_0.f(A) = \rho, \qquad \text{d'où} \qquad [f(A)]_0 = \frac{\rho}{f(A)};$$

pour obtenir le réciproque de $f(A)$, il suffira donc de diviser ρ par $f(A)$, la division, en tenant compte de la relation identique $\varphi(A) = 0$, devra se faire exactement, et le quotient donnera la valeur du réciproque cherché. En particulier, cherchons $(A - \rho)$, on aura

$$(A - \rho)_0 = \frac{\varphi(\rho)}{A - \rho},$$

ou bien, comme $\varphi(A)$ est nulle,

$$(A - \rho)_0 = \frac{\varphi(\rho) - \varphi(A)}{A - \rho},$$

quantité évidemment entière. Je remarquerai ici que cette dernière formule subsiste encore quand ρ est une racine de l'équation

$$\varphi(\lambda) = 0.$$

Je cite ce cas particulier, parce qu'il est d'une application fréquente dans la théorie des formes binaires.

On a en effet ce principe bien simple, mais d'une grande importance : si le déterminant d'un système B est nul, B_0 est décomposable en deux facteurs, l'un de la forme $(a, b, c, \ldots, m)$, et l'autre de la forme $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu)$. Par exemple, si

$$B = \begin{matrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{matrix},$$

on a

$$B_0 = \begin{matrix} x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Il suit de là que, A étant un système linéaire quelconque et λ une racine de l'équation

$$\nabla(A - \lambda) = 0,$$

$(A - \lambda)_0$ sera décomposable de la façon indiquée. On pourra donc toujours trouver en général n fonctions entières de A,

$$m + pA + qA^2 + \ldots + sA^{n-1},$$

telles, que l'on ait identiquement

$$m + pA + qA^2 + \ldots + sA^{n-1} = \begin{matrix} a & 0 & 0\ldots \\ b & 0 & 0\ldots \\ c & 0 & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m & 0 & 0\ldots \end{matrix} \times \begin{matrix} 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots \\ \alpha & \beta & \gamma\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} a\alpha & a\beta & a\gamma\ldots \\ b\alpha & b\beta & b\gamma\ldots \\ c\alpha & c\beta & c\gamma\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Je dis *en général,* car il peut se faire que le système A satisfasse à une équation $\psi(A) = 0$ d'un degré inférieur à n, et qu'en vertu de cette équation le polynôme $(A - \lambda)_0$ soit identiquement nul, auquel cas la décomposition correspondant à la racine λ n'offre plus de sens.

Au sujet de ce mode de décomposition, je ferai encore la remarque suivante, dont l'application se présente très souvent. Si A désigne un système linéaire quelconque et α, β deux racines de l'équation

$$\nabla(A - \lambda) = 0,$$

on aura identiquement

$$(A - \alpha)_0 . (A - \beta)_0 = 0.$$

Pour plus de simplicité, supposons que A soit du troisième ordre et soient α, β, γ les trois racines de l'équation

$$\nabla(A - \lambda) = 0.$$

On aura, d'après ce qui précède,

$$(A - \alpha)_0 = (A - \beta)(A - \gamma) \quad \text{et} \quad (A - \beta)_0 = (A - \alpha)(A - \gamma),$$

d'où

$$(A - \alpha)_0 (A - \beta)_0 = [(A - \alpha)(A - \beta)(A - \gamma)](A - \gamma).$$

Or la quantité entre crochets est identiquement nulle. Cette démonstration est évidemment générale. Soient maintenant λ_i et λ_j deux racines quelconques de l'équation $\nabla(A - \lambda) = 0$, et supposons que l'on ait

$$(A - \lambda_i)_0 = (a_i, b_i, c_i, \ldots)(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots)_1;$$

de la relation

$$(A - \lambda_i)_0 . (A - \lambda_j)_0 = 0$$

on déduira

$$(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots)_1 (a_j, b_j, c_j, \ldots) = 0,$$

ou bien

$$\alpha_i a_j + \beta_i b_j + \gamma_i c_j + \ldots = 0.$$

Cette relation, ainsi que d'autres que l'on peut trouver facilement entre les éléments $(a, b, c, \ldots)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, trouvera de nombreuses applications dans la théorie des formes.

J'ai montré qu'un système linéaire quelconque A satisfait toujours à une équation d'un degré égal à celui de son ordre; mais il peut se faire qu'il satisfasse à une équation d'un degré moindre; dans tous les cas, il y aura une équation irréductible d'un certain degré, m par exemple, auquel il satisfera. Par conséquent, toute fonction entière de A pourra se mettre sous la forme d'un polynôme en A du degré $(m - 1)$ au plus, et cela d'une seule manière.

Il en sera de même, en général, de toute fonction rationnelle de A, c'est-à-dire de toute fonction satisfaisant à une équation de la forme

$$f(A).X.\theta(A) = \psi(A);$$

car de là on tire

$$X = \frac{1}{\nabla f(A).\nabla\theta(A)} \cdot [f(A)]_0.\psi(A).[\theta(A)]_0,$$

expression qui, si X est déterminée, sera aussi un polynôme entier en A. Cette forme, sous laquelle on peut réduire toute fonction rationnelle d'un système, sera dite la *forme canonique* de cette fonction.

En terminant les considérations les plus générales relatives aux systèmes linéaires, je ferai la remarque importante qui suit : Un produit de facteurs linéaires peut être nul sans qu'aucun des facteurs le soit. Mais si l'on a, par exemple,

$$AB = 0,$$

et qu'aucun des facteurs A et B ne soit nul, on devra avoir

$$\nabla(A) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla(B) = 0,$$

car, pour fixer les idées, si $\nabla(A)$ n'était pas nul, en multipliant à gauche l'équation donnée par A_0, on en déduirait

$$\nabla(A).B = 0,$$

et, par conséquent, $B = 0$. De là suit encore que, si l'on a $AB = 0$, et si $\nabla(A)$ est différent de zéro, on doit avoir $B = 0$.

III.

J'appelle fonction de deux systèmes linéaires tout système qui peut s'exprimer au moyen de deux systèmes donnés de même ordre et de systèmes simples. Ces deux systèmes étant A et B, je désignerai une telle fonction par la notation $f(A, B)$. Pour l'instant et pour ne pas entrer dans de trop longs développements, je me bornerai à considérer des systèmes du deuxième ordre. Soient donc A et B deux tels systèmes, a et b leurs déterminants. A et B satisferont aux deux équations suivantes :

$$A^2 - \alpha A + a = 0, \tag{1}$$
$$B^2 - \beta B + b = 0; \tag{2}$$

d'où l'on déduit

$$\left\{\begin{array}{l} A + A_0 = \alpha, \\ B + B_0 = \beta. \end{array}\right. \tag{1 bis}$$

Dans le cas où les systèmes A et B sont du deuxième ordre, on a toujours

$$(A + B)_0 = A_0 + B_0;$$

posant donc

$$\nabla(A + B) = a + w + b,$$

on aura

$$(A_0 + B_0)(A + B) = a + w + b$$

ou, en développant,

$$A_0 A + A_0 B + B_0 A + B_0 B = a + w + b;$$

d'où

$$A_0 B + B_0 A = w.$$

Remplaçons dans cette équation A_0 et B_0 par leurs valeurs tirées de 1 (*bis*), il viendra

$$AB + BA = \alpha B + \beta A + w,$$

d'où enfin

$$BA = -AB + \alpha B + \beta A + w. \tag{3}$$

Au moyen des équations (1), (2) et (3) toute fonction entière de

A et de B pourra se mettre sous la forme

$$m + pA + qB + rAB,$$

et même (ce qui est utile dans beaucoup d'applications), si les coefficients dans la fonction donnée sont entiers, m, p, q, r seront aussi entiers. Quand une fonction de deux variables A et B sera ainsi réduite à la forme ci-dessus, je dirai qu'elle est réduite à sa forme canonique. En général (sauf quelques cas très particuliers), une fonction donnée ne pourra se mettre que d'une seule manière sous la forme canonique. Une fois mise sous cette forme, il sera très facile de calculer son déterminant. Pour cela, il suffit de poser

$$(A - \lambda + pA + qB + rAB) = \lambda^2 + \varphi\lambda + \psi,$$

où φ et ψ désignent des fonctions inconnues de p, q, r. De là on déduit

$$(pA + qB + rAB)^2 + (pA + qB + rAB)\varphi + \psi = 0.$$

Cette équation devant devenir identique quand on réduit le premier membre à sa forme canonique, on obtiendra facilement la valeur de φ, ψ, et par suite le déterminant cherché.

En comparant avec la théorie des quaternions la théorie des systèmes de la forme

$$x + yA + zB + uAB,$$

où A et B désignent deux systèmes quelconques du deuxième ordre assujettis aux relations (1), (2) et (3), on remarquera l'analogie qui existe entre ces deux théories. Le calcul des systèmes linéaires donne ainsi une interprétation simple et pour ainsi dire arithmétique des imaginaires ordinaires, des quaternions, des clefs algébriques de Cauchy, des imaginaires congruentielles de Galois. Si la substitution des systèmes linéaires à la place des symboles ne me paraît pas devoir être avantageuse pour le calcul, cependant la notion des systèmes linéaires me paraît bien plus précise, et, par cette précision même, elle permet de développer et d'approfondir bien des points que le calcul purement symbolique ne saurait atteindre. L'exemple suivant fera peut-être mieux saisir ma pensée, en montrant quels points de contact et quelles différences il existe entre le calcul des systèmes linéaires et le calcul des symboles.

Soit un nombre premier p; imaginons tous les systèmes d'ordre n, dans lesquels les éléments sont les nombres entiers inférieurs à p ou zéro. Ces systèmes, en mettant zéro de côté, seront évidemment au nombre de p^{n^2-1}; nous les appellerons les résidus de p d'ordre n. Représentons par $f(\mathrm{X})$ une fonction numérique entière d'une variable X d'ordre n, et cherchons les solutions entières de la congruence $f(\mathrm{X}) \equiv 0 \pmod{p}$. Les diverses solutions devront évidemment se trouver parmi les p^{n^2-1} résidus de p. Cela posé, pour résoudre complètement la question, les trois problèmes suivants seront à résoudre :

1° En séparant les racines qui sont des systèmes simples, distribuer les autres racines en groupes tels que, dans chaque groupe deux racines soient permutables (suivant le module p);

2° Dans chaque groupe étudier les relations qui lient entre elles les racines de ce groupe;

3° Étudier les rapports des différents groupes entre eux.

La théorie de Galois répond précisément au second de ces problèmes, mais laisse complètement intact le troisième.

Ce qui précède suffit pour donner une idée de ce que serait une étude complète des fonctions de deux systèmes linéaires d'un ordre quelconque.

On voit de suite qu'une pareille fonction doit pouvoir s'exprimer au moyen d'un nombre limité d'expressions telles que $\mathrm{A}^i\mathrm{B}^j\mathrm{A}^h\mathrm{B}^k\ldots$. Car si nous supposons

$$f(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \sum \alpha \mathrm{A}^i\mathrm{B}^j\mathrm{A}^h\ldots,$$

il est évident que dans ce développement, n étant de l'ordre des systèmes, on pourra faire en sorte que A et B n'y entrent qu'avec des exposants inférieurs à n; en outre, si l'on considère un groupement quelconque

$$\mathrm{A}^i\mathrm{B}^j\mathrm{A}^h\ldots,$$

il ne pourra pas se trouver répété plus de $(n-1)$ fois de suite.

Sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans plus de détails, il est clair qu'une fonction entière $f(\mathrm{A},\mathrm{B})$ pourra toujours se mettre sous une forme ne contenant qu'un nombre limité de termes. Si

elle ne peut être mise sous cette forme que d'une seule manière, nous dirons que $f(\mathrm{A},\mathrm{B})$ est réduite à sa forme canonique; et si une fonction de A et de B, mise sous sa forme canonique, est nulle, tous les coefficients des divers systèmes linéaires qui y entreront seront nuls. Il est clair que cette notion de forme canonique peut s'étendre aux fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de systèmes linéaires. Deux problèmes généraux se présentent alors :

1° Étant donnée la fonction la plus générale d'un nombre quelconque de systèmes, la réduire à sa forme canonique;

2° Étant donnée la fonction la plus générale d'un nombre quelconque de systèmes linéaires, trouver son déterminant et le système réciproque.

La solution de ces problèmes, dont le second dépend nécessairement du premier, est d'un très grand intérêt dans le calcul des systèmes linéaires; j'espère en montrer plus tard d'intéressantes applications dans la théorie des formes binaires.

IV.

Je termine ici ces considérations préliminaires, que l'on trouvera peut-être un peu longues, mais qui étaient nécessaires pour me permettre d'exposer, d'une façon suffisamment claire, les diverses applications que j'ai faites du calcul des systèmes linéaires. J'exposerai d'abord sous quel point de vue je considère la théorie des formes quadratiques. Soit $f(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ une forme quadratique à n variables; posons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{df}{dx_1} &= a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + k_1x_n,\\
\frac{1}{2}\frac{df}{dx_2} &= a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + k_2x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{2}\frac{df}{dx_n} &= a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + k_nx_n;
\end{aligned}$$

le système linéaire d'ordre n

$$\begin{matrix}
a_1 & b_1 & \ldots k_1\\
a_2 & b_2 & \ldots k_2,\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
a_n & b_n & \ldots k_n
\end{matrix}$$

qui est évidemment symétrique, sera dit représenter la forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En sorte que toute forme quadratique à n variables sera représentée par un système symétrique d'ordre n; réciproquement, ce système déterminera complètement la forme. Soit A le système représentatif de la forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et

$$X = \begin{matrix} x_1 & 0 & 0 & 0\ldots \\ x_2 & 0 & 0 & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & 0 & 0 & 0\ldots \end{matrix},$$

on aura évidemment

$$(a) \qquad \Omega f(x_1 x_2 \ldots) = X_1 A X.$$

Je représenterai très souvent la forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par la notation $f(X)$; cette notation, qui ne peut donner lieu à aucune ambiguïté, permet d'écrire avec simplicité des formules qui autrement seraient très compliquées. Soit, par exemple, une forme binaire $f(x, y)$; en posant

$$\begin{matrix} x & 0 \\ y & 0 \end{matrix} = X,$$

je désignerai simplement $f(x, y)$ par $f(X)$; supposons que les variables x et y prennent les valeurs suivantes :

$$x = \alpha x + \beta y + \xi, \qquad y = \gamma x + \delta y + \eta,$$

en posant

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} = H, \qquad \text{et} \qquad \begin{matrix} \xi & 0 \\ \eta & 0 \end{matrix} = \Xi,$$

la forme $f(\alpha x + \beta y + \xi, \gamma x + \delta y + \eta)$ sera simplement représentée par $f(H_1 X + \Xi)$.

De l'équation (a) résulte immédiatement la proposition suivante qui, du reste, a été donnée explicitement par Eisenstein [1] : si une forme $f(x_1, x_2, \ldots)$, représentée par le système A, se change par une substitution H en la forme $g(x_1, x_2, \ldots)$ repré-

[1] *Neue Theoreme von höhern Arithmetik.*

sentée par le système B, on a l'équation

$$(1) \qquad H_1 A H = B.$$

Cette équation et la remarque suivante, à savoir que, si une forme est représentée par un système A, son adjointe est représentée par le système réciproque A_0, sont les bases de toute la théorie des formes quadratiques. Je n'en déduirai pas toutes les conséquences, je n'aurai qu'à refaire une théorie bien connue; je me contenterai d'en montrer l'application à quelques questions particulières. J'examinerai d'abord la question de la composition des formes en revenant sur un problème déjà résolu par Gauss.

Soient deux formes binaires g et h, proposons-nous de trouver une forme binaire f composée des deux premières. Soient A, B, C les systèmes linéaires représentatifs des formes f, g, g' et soient α, β, γ leurs déterminants. Il est clair, d'après la notion même d'une forme composée, que la forme f doit être telle, qu'en désignant par R un système linéaire du premier degré en x et y, on ait identiquement

$$R_1 A R = g(x, y) C;$$

d'où l'on déduit, en désignant par r le déterminant de R,

$$r^2 = \frac{g^2\gamma}{\alpha};$$

de là on déduit encore

$$\frac{g\gamma}{\alpha} A = R_{10} C R_0.$$

Posons

$$R_0 = H \begin{matrix} x & 0 \\ y & 0 \end{matrix} + K \begin{matrix} 0 & x \\ 0 & y \end{matrix},$$

H et K désignant des systèmes linéaires indéterminés; on devra avoir, en écrivant $A = \begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix}$,

$$\begin{matrix} \frac{g\gamma a}{\alpha} & \frac{\varphi\gamma b}{\alpha} \\ \frac{g\gamma b}{\alpha} & \frac{\varphi\gamma c}{\alpha} \end{matrix} = \left(\begin{matrix} x & y \\ 0 & 0 \end{matrix} H_1 + \begin{matrix} 0 & 0 \\ x & y \end{matrix} K_1 \right) C \left(H \begin{matrix} x & 0 \\ y & 0 \end{matrix} + K \begin{matrix} 0 & x \\ 0 & y \end{matrix} \right),$$

ce qui, en effectuant le développement, fournit les quatre équations suivantes :

$$\begin{matrix} \frac{g\gamma a}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} x & y \\ 0 & 0 \end{matrix} \times H_1CH \times \begin{matrix} x & 0 \\ y & 0 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} 0 & \frac{g\gamma b}{\alpha} \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} x & y \\ 0 & 0 \end{matrix} \times H_1CK \times \begin{matrix} 0 & x \\ 0 & y \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{g\gamma b}{\alpha} & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ x & y \end{matrix} \times K_1CH \times \begin{matrix} x & 0 \\ y & 0 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{g\gamma c}{\alpha} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ x & y \end{matrix} \times K_1CK \times \begin{matrix} 0 & x \\ 0 & y \end{matrix}.$$

En se reportant à la formule (a), il est facile de voir que les quatre équations ci-dessus peuvent être remplacées par les trois suivantes :

$$(\beta) \quad \frac{\gamma a}{\alpha} B = H_1CH, \qquad \frac{\gamma c}{\alpha} B = K_1CK, \qquad \frac{2\gamma b}{\alpha} B = K_1CH + H_1CK.$$

Des deux premières on déduit

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} BH_0 = H_1C\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, \\ BK_0 = K_1C\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}. \end{cases}$$

Or, je dis qu'il suffit de trouver des systèmes H et K satisfaisant aux équations (α); en effet, ces systèmes trouvés, si l'on porte dans les équations (β) les valeurs de H_1C et de K_1C tirées des équations (α), on trouvera, en écrivant $\nabla.H = h$, $\nabla.K = k$,

$$(\gamma) \quad a = h\alpha\sqrt{\gamma\beta}, \qquad c = k\alpha\sqrt{\gamma\beta}, \qquad 2b = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma\beta}}(H_0K + K_0H).$$

Comme les systèmes H et K sont du deuxième ordre, la quantité

$$(H_0K + K_0H)$$

se réduit à un simple nombre; les formules (γ) donneront donc les coefficients cherchés de la forme $f(x, y)$.

On voit que toute la question est ramenée à trouver des systèmes H et K satisfaisant aux équations (α). Voici la méthode que l'on peut employer à cet égard. Soit, en général, à résoudre l'équation

$$(\delta) \qquad BH_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\cdot H_1C;$$

posons

$$H = C_0P_1 - \lambda P_0B,$$

où P désigne un système linéaire arbitraire et λ une constante indéterminée. On aura

$$H_0 = P_{10} - \lambda B_0P, \qquad H_1 = PC_0 - \lambda BP_{10};$$

par suite,

$$BH_0 = BP_{10}C\gamma\beta P, \qquad H_1C = \gamma P - \lambda BP_{10}C;$$

éliminons $BP_{10}C$, il viendra

$$\lambda BH_0 + H_1C = (\gamma - \lambda^2\beta)P.$$

Si donc on choisit la constante λ, de telle sorte que $\lambda = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$, on aura

$$BH_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\cdot H_1C;$$

la valeur donnée de H suffira à l'équation (δ), quel que soit le système arbitraire P. La question proposée est complètement résolue; il y aurait quelques remarques à ajouter et quelques restrictions à faire si l'on voulait que les nombres a, b, c fussent entiers. Je laisserai de côté cette recherche, d'ailleurs facile; mon seul but a été de montrer de quelle manière simple et naturelle l'emploi des systèmes linéaires fournissait, et dans ses moindres détails, la belle solution donnée par Gauss dans ses *Disquisitiones* (§ CCXXXVI).

J'en viens maintenant à une question plus importante, celle de la transformation des formes d'un nombre quelconque de variables.

Dans tout ce qui suit, j'appellerai toujours *déterminant d'une forme* le déterminant du système linéaire qui la représente. C'est, au signe près, la définition de Gauss. Ceci posé, soient f et g deux formes transformables l'une dans l'autre par une substitution H, et soient A et B les deux systèmes qui les représentent respectivement. On aura l'équation

$$(1) \qquad H_1AH = B;$$

et, en appelant a, b, η les déterminants des systèmes A, B, H,

η sera connu au signe près par la relation $a\eta_2 = b$. Je supposerai du reste a et b différents de zéro. Posons

$$(2) \qquad H_1 A - AH = V,$$

on en déduira, A étant symétrique,

$$V_1 = AH - H_1 A,$$

d'où

$$V + V_1 = 0;$$

V est donc un système gauche ne contenant que $\frac{n(n-1)}{1.2} = \mu$ éléments, que je désignerai par $x_1, x_2, \dots, x_\mu$.

Le système H satisfera en outre à une équation du degré n,

$$H^n + \dots \pm \eta = 0,$$

contenant $(n-1)$ coefficients $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. La solution proposée consiste à prendre pour inconnues auxiliaires les $\mu + n - 1$ quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu, z_1, \dots, z_{n-1}$ et à exprimer H au moyen de ces quantités. A cet effet, soit $\varphi(H) = 0$ l'équation à laquelle satisfait H; multiplions à droite les deux membres de l'équation (2) par H, il viendra, en remarquant que $H_1 AH = B$,

$$B - AH^2 = VH;$$

et en multipliant à gauche cette dernière relation par A_0,

$$A_0 B - aH^2 = A_0 VH.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{A_0 B}{a} = T, \qquad \frac{A_0 V}{a} = U,$$

nous obtiendrons

$$(3) \qquad H^2 = -UH + T.$$

Cette équation, jointe à la relation $\varphi(H) = 0$, permettra d'éliminer successivement de cette dernière les puissances de H supérieures à la première; en sorte que l'on obtiendra H exprimé au moyen de T, U et des inconnues auxiliaires $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. Les nombres z et les nombres x ne seront pas d'ailleurs indépen-

dants, mais devront satisfaire à certaines équations algébriques que fournira la méthode précédente.

Appliquons la méthode qui précède à la transformation d'une forme en elle-même. L'équation à résoudre sera dans ce cas

$$(4) \qquad H_1 AH = A.$$

Je remarquerai d'abord que l'équation en λ

$$\nabla(H - \lambda) = 0$$

a toutes ses racines réciproques. On a, en effet, évidemment la série d'identités suivante :

$$\nabla(H_1 - \lambda)\nabla(AH) = \nabla(H_1 AH - \lambda AH) = \nabla(A - \lambda AH) = \nabla A . \nabla(1 - \lambda H).$$

Or,

$$\nabla(H_1 - \lambda) = \nabla(H - \lambda);$$

la relation précédente pourra donc s'écrire ainsi :

$$\nabla(H - \lambda)\nabla(AH) = \nabla(A)\nabla(1 - \lambda H),$$

et il en résulte que, si l'équation $\nabla(H - \lambda) = 0$ est satisfaite pour $\lambda = \rho$, elle sera aussi satisfaite pour $\lambda = \frac{1}{\rho}$; c'est ce qu'il fallait démontrer. Par suite, on voit que l'équation $\rho(H) = 0$, à laquelle satisfait H, ne contiendra que $\frac{n-1}{2}$ coefficients indéterminés si n est impair et $\frac{n}{2}$ si n est pair. Dans tous les cas, appelons $z_1, z_2, \dots, z_\nu$ ces coefficients. En posant comme ci-dessus

$$H_1 A - AH = V_1,$$

on en déduira

$$(5) \qquad H^2 = 1 - \frac{T}{a} H,$$

relation où, pour abréger, j'ai posé $T = A_0 V$. Elle fait voir que H est une fonction entière de T, et par conséquent de la forme

$$\alpha + \beta T + \gamma T^2 + \dots.$$

Les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ peuvent se calculer *a priori*. En effet, dans le polynôme

$$\alpha + \beta T + \gamma T^2 + \dots,$$

séparons les termes de degré pair et les termes de degré impair; posons

$$\mathrm{H} = f(\mathrm{T}^2) + \mathrm{T}\psi(\mathrm{T}^2).$$

Des relations évidentes

$$\mathrm{T}_1\mathrm{A} = -\mathrm{V}\mathrm{A}_0\mathrm{A} = -\mathrm{V}a = -\mathrm{A}.\mathrm{A}_0\mathrm{V} = -\mathrm{AT},$$
$$\mathrm{T}_1^2\mathrm{A} = \mathrm{AT}^2\ldots, \qquad \mathrm{T}_1^3 = -\mathrm{AT}^3\ldots,$$

on déduit sans peine que l'on aura

$$f(\mathrm{T}_1^2)\mathrm{A} = \mathrm{A}f\mathrm{T}^2, \qquad \psi(\mathrm{T}_1^2)\mathrm{T}_1\mathrm{A} = -\mathrm{AT}\psi(\mathrm{T}^2).$$

On aura donc

$$\mathrm{H}_1\mathrm{A} = \mathrm{A}[f(\mathrm{T}^2) - \mathrm{T}\psi(\mathrm{T}^2)] \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_1\mathrm{AH} = \mathrm{A}[f^2(\mathrm{T}^2) - \mathrm{T}^2\psi^2(\mathrm{T}^2)].$$

La condition nécessaire et suffisante pour que H transforme en elle-même la forme proposée sera obtenue en exprimant que $f^2(\mathrm{T}^2) - \mathrm{T}^2\psi^2(\mathrm{T}^2)$ se réduit à 1 en tenant compte de l'équation $\chi(\mathrm{T}) = 0$, à laquelle satisfait le système T, et H sera exprimé de cette façon en fonction de V et des coefficients $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$.

La formule ainsi obtenue donnerait toujours des solutions, mais elle serait trop générale en ce sens qu'elle donnerait plusieurs fois la même solution. Il faut encore exprimer que l'on a

$$\mathrm{H}_1\mathrm{A} - \mathrm{AH} = \mathrm{V};$$

or, des formules données ci-dessus, il résulte

$$\mathrm{V} = \mathrm{H}_1\mathrm{A} - \mathrm{AH} = \mathrm{A}[f(\mathrm{T}^2) - \mathrm{T}\psi(\mathrm{T}^2) - f(\mathrm{T}^2) - \mathrm{T}\psi(\mathrm{T}^2)];$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{V} = -2\mathrm{AT}\psi(\mathrm{T}^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{T}\psi(\mathrm{T}^2) = -\frac{\mathrm{A}_0\mathrm{V}}{2a} = -\frac{\mathrm{T}}{2a}.$$

La forme sous laquelle H peut se mettre est donc celle-ci (sauf le cas où l'on a $\mathrm{H}^2 = 1$, et par conséquent $\mathrm{V} = 0$, auquel cas il faut modifier un peu la méthode précédente)

$$\mathrm{H} = -\frac{\mathrm{T}}{2a} + f(\mathrm{T}^2),$$

$f(\mathrm{T}^2)$ désignant une fonction paire de T satisfaisant à l'équation

$$f^2 = 1 + \frac{\mathrm{T}^2}{4a^2}.$$

Je vais déduire de cette formule une propriété commune à toutes les formes d'un nombre impair de variables, et que M. Hermite a signalée pour le cas de trois variables. Dans ce cas, on le sait, le déterminant de V est nul, et par conséquent celui de T l'est également. T_0 pourra se mettre sous la forme

$$\mathrm{T}_0 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)(v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

et l'on aura

$$\mathrm{T}.(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0.$$

Or, la valeur de H est

$$\mathrm{H} = \pm 1 - \frac{\mathrm{T}}{2a} + \alpha\mathrm{T}^2 + \gamma\mathrm{T}^4\ldots,$$

le premier terme étant ± 1, car pour $\mathrm{V} = 0$ la formule doit se réduire à $\mathrm{H} = \pm 1$.

Multiplions à droite les deux membres de cette équation par $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, il viendra, en remarquant que

$$\mathrm{T}.(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$
$$\mathrm{H}.(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \pm(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Il suit de là que la fonction du premier degré

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$$

se reproduit, ou du moins ne fait que changer de signe quand on la transforme par la substitution H.

Je vais maintenant reprendre la solution donnée et l'appliquer avec plus de détails aux formes quadratiques à trois variables.

Soit une forme $f(x, y, z)$, représentée par le système A; on voit facilement que si l'on pose

$$\mathrm{V} = \begin{matrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{matrix},$$

on aura

$$(\omega) \qquad \nabla(\mathrm{A} + \lambda\mathrm{V}) = d + \lambda^2 f,$$

en représentant par d le déterminant de la forme f, et écrivant, pour abréger, f au lieu de $f(x,y,z)$. On aura donc

$$\nabla(A_0V-\lambda)=-\lambda^3-\lambda df,$$

et le système $A_0V=T$ satisfera à l'équation

$$T^3+dfT=0. \tag{6}$$

On peut supposer le déterminant de la substitution H égal à 1, sans nuire à la généralité de la solution; car, de cette façon, on obtiendra toutes les transformations propres, et les transformations impropres s'en déduiront en prenant les premières en signe contraire. Ce système H satisfera ainsi à une équation de la forme

$$H^3-\varpi H^2+\varpi H-1=0. \tag{7}$$

Posons maintenant

$$H_1A-AH=V=\begin{matrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{matrix}.$$

La relation qui doit exister entre les inconnues auxiliaires ϖ, x, y, z s'obtiendra facilement en remarquant que l'on a identiquement

$$(H_1-\lambda)A(H+\lambda)=H_1AH+\lambda(H_1A-AH)-\lambda^2A=(1-\lambda^2)A+\lambda V,$$

d'où l'on tire, en prenant l'équation aux déterminants et en ayant égard à l'équation (ω) et à l'équation (7), qui donne $\nabla(H-\lambda)=1-\lambda\varpi+\lambda^2\varpi-\lambda^3$,

$$\begin{aligned} d\nabla(H_1-\lambda)\nabla(H+\lambda) &= d[(1+\varpi\lambda^2)^2-\lambda^2(\varpi+\lambda^2)] \\ &= d(1-\lambda^2)^3+\lambda^2(1-\lambda^2)f. \end{aligned}$$

En développant les deux membres de cette égalité, on trouvera qu'elle est satisfaite si l'on prend f de telle sorte que l'on ait $f=d(3+2\varpi-\varpi^2)$, ou, en posant $\varpi+1=u$,

$$f(x,y,z)=du(4-u). \tag{8}$$

Maintenant de l'équation $H_1A-AH=V$ on déduit

$$VH=A_1AH-AH^2=A(1-H^2),$$

d'où

$$A_0VH=d(1-H^2) \quad \text{et} \quad A_0V=T=d(H_0-H),$$

ou enfin

$$H_0-H=\frac{T}{d}. \tag{β}$$

Nous déduirons la valeur de H des équations (7) et (β). De l'équation (7) on déduit

$$H^2-\varpi H+\varpi-H_0=0, \qquad H-\varpi+\varpi H_0-H_0^2=0;$$

et de l'équation (β)

$$H_0^2+H^2-2=\frac{T^2}{d^2}.$$

En éliminant H^2, H_0^2 et H_0 entre les équations précédentes, on trouvera

$$H=1-\frac{T}{2d}+\frac{T^2}{2d^2u}, \tag{h}$$

relation où comme ci-dessus on a posé, pour abréger, $u=\varpi+1$. Telle est la forme sous laquelle se présente la solution générale du problème; il faut y joindre la relation

$$f(x,y,z)=du(4-u). \tag{8}$$

On pourra du reste s'assurer *a posteriori* qu'en tenant compte de l'équation $T^3+afT=0$ et de la relation (8), la formule (h) satisfait toujours au problème.

Cette formule donnera donc toutes les solutions et ne les donnera chacune qu'une seule fois, car de la relation (β) il résulte qu'à une valeur donnée de H ne correspond qu'une seule valeur de T. Certaines solutions cependant ne sont pas données par la formule (h); ce sont celles qui satisfont à l'équation $H^2=1$. Dans ce cas, la méthode précédente n'est plus applicable; mais, en la modifiant un peu, on trouve que ces solutions seront données par la formule

$$H=1+\frac{T^2}{2d^2}, \tag{h'}$$

avec la condition

$$f(x,y,z)=4d. \tag{8 bis}$$

La forme sous laquelle les formules (h) et (h') se présentent peut être diversement modifiée, et notamment quand on recherche seulement les solutions entières.

Considérons maintenant deux solutions du problème, que je supposerai, par exemple, de la première espèce, c'est-à-dire fournies par la formule (h). Les autres cas se traiteraient d'une manière analogue.

Ces deux solutions, que j'appellerai H et K, seront caractérisées respectivement par deux nombres u et w et deux systèmes

$$\mathrm{A}_0 . \begin{matrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_0 . \begin{matrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{matrix},$$

que j'appellerai T et S; et ils en dépendront, ainsi que l'indiquent les formules suivantes :

$$(\delta) \quad \begin{cases} \mathrm{H} = 1 - \dfrac{\mathrm{T}}{2d} + \dfrac{\mathrm{T}^2}{2d^2 u}, & \mathrm{K} = 1 - \dfrac{\mathrm{S}}{2d} + \dfrac{\mathrm{S}^2}{2d^2 w}, \\ \mathrm{H}_0 = 1 + \dfrac{\mathrm{T}}{2d} + \dfrac{\mathrm{T}^2}{2d^2 u}, & \mathrm{K}_0 = 1 + \dfrac{\mathrm{S}}{2d} + \dfrac{\mathrm{S}^2}{2d^2 w}. \end{cases}$$

Le produit HK devant être aussi une solution du problème, R désignant un système de la forme $\mathrm{A}_0\mathrm{V}$, mais relatif à d'autres variables (α, β, γ), on aura

$$\mathrm{HK} = 1 - \frac{\mathrm{R}}{2d} + \frac{\mathrm{R}^2}{2d^2\omega}.$$

Cette solution est caractérisée par le système R et le nombre ω: voici comment on pourra les déterminer. Remarquons qu'en vertu de l'équation (β) on a

$$\frac{\mathrm{R}}{d} = \mathrm{K}_0\mathrm{H}_0 - \mathrm{HK},$$

ou bien, d'après les formules (δ),

$$\frac{\mathrm{R}}{d} = \left(1 + \frac{\mathrm{S}}{2d} + \frac{\mathrm{S}^2}{2d^2 w}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{T}}{2d} + \frac{\mathrm{T}^2}{2d^2 u}\right) - \left(1 - \frac{\mathrm{T}}{2d} + \frac{\mathrm{T}^2}{2d^2 u}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{S}}{2d} + \frac{\mathrm{S}^2}{2d^2 w}\right).$$

Pour réduire cette expression, je ferai observer qu'entre les

systèmes S et T existent les relations suivantes, où j'ai posé, pour abréger,

$$f = f(x, y, z), \qquad \varphi = f(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{2}\xi\frac{df}{dx} + \frac{1}{2}\eta\frac{df}{dy} + \frac{1}{2}\zeta\frac{df}{dz},$$

et où d représente le déterminant de A :

$$(m) \quad \begin{cases} \mathrm{TST} = -dh\mathrm{T}, \\ \mathrm{STS} = -dh\mathrm{S}, \\ \mathrm{T}^3 + df\mathrm{T} = 0, \\ \mathrm{ST}^2 = -\mathrm{T}^2\mathrm{S} - df\mathrm{S} - dh\mathrm{T}, \\ \mathrm{S}^2\mathrm{T} = -\mathrm{TS}^2 - d\varphi\mathrm{T} - dh\mathrm{S}, \\ \mathrm{S}^3 + d\varphi\mathrm{S} = 0, \\ \mathrm{TS}_2\mathrm{T} = d^2(f\varphi - h^2) + df\mathrm{S}^2 - dh(\mathrm{TS} + \mathrm{ST}), \\ \mathrm{ST}^2\mathrm{S} = d^2(f\varphi - h^2) + d\varphi\mathrm{T}^2 - dh(\mathrm{TS} + \mathrm{ST}). \end{cases}$$

Au moyen de ce tableau, on peut réduire toute fonction de T et de S à la forme

$$\alpha + \beta\mathrm{T} + \gamma\mathrm{S} + \alpha'\mathrm{T}^2 + \beta'\mathrm{S}^2 + \gamma'\mathrm{ST} + \delta'\mathrm{TS} + \alpha''\mathrm{TS}^2 + \beta''\mathrm{T}^2\mathrm{S}.$$

En appliquant ce mode de réduction à la valeur de $\frac{\mathrm{R}}{d}$ trouvée ci-dessus, on trouvera

$$(9) \qquad \mathrm{R} = \left(\frac{duw - h}{4}\right)\left[\frac{\mathrm{T}}{du} + \frac{\mathrm{S}}{dw} - \frac{1}{d^2uw}(\mathrm{TS} - \mathrm{ST})\right].$$

Telle est la formule qu'il s'agissait d'établir; on trouverait d'une façon analogue la valeur de ω, et les relations

$$f(x, y, z) = du(4 - u), \quad f(\xi, \eta, \zeta) = dw(4 - w), \quad f(\alpha, \beta, \gamma) = d\omega(4 - \omega)$$

conduiraient, sur la composition de certaines formes, aux théorèmes donnés par M. Hermite dans son Mémoire sur les formes quadratiques [1]. Il est facile de voir qu'en général deux solutions ne seront pas permutables entre elles, c'est-à-dire que l'on n'aura pas HK = KH. En effet, si cette égalité avait lieu, il suit de la formule (9) que l'on aurait

$$\mathrm{TS} - \mathrm{ST} = 0;$$

---

[1] *Journal de Crelle*, t. V, p. 47.

or, il est facile de voir que

$$\mathrm{TS}-\mathrm{ST}=d\times\left\{\begin{matrix}\xi x & \xi y & \xi z\\ \eta x & \eta y & \eta z\\ \zeta x & \zeta y & \zeta z\end{matrix} - \begin{matrix}x\xi & x\eta & x\zeta\\ y\xi & y\eta & y\zeta\\ z\xi & z\eta & z\zeta\end{matrix}\right\}\times \mathrm{A}.$$

Le déterminant de A n'étant pas nul, il faudrait donc que la quantité entre parenthèses fût nulle, ce qui exigerait que l'on eût

$$\frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{z}{\zeta}.$$

Tout ce qui précède est en grande partie déjà connu. La méthode que j'ai exposée ci-dessus me paraît cependant pouvoir conduire encore à des résultats nouveaux et intéressants; mais son application exigerait des études plus approfondies sur les relations qui lient entre eux les systèmes linéaires. Du reste, la théorie des formes quadratiques ne reposant que sur un nombre très restreint de notions algébriques, les applications du calcul des systèmes linéaires y sont nécessairement très bornées. Au contraire, dans la théorie des formes binaires ou des formes d'un plus grand nombre de variables, où les notions algébriques fondamentales sont plus nombreuses, ces applications se présentent bien plus fécondes et bien plus variées.

En terminant ce que je voulais dire des formes quadratiques, je ferai observer qu'en adoptant la terminologie du calcul des systèmes linéaires, le principe d'inertie de M. Sylvester peut s'exprimer ainsi : Si deux formes f et g représentées par les systèmes A et B sont équivalentes, la substitution étant réelle, les équations

$$\nabla(\mathrm{A}-\lambda)=0 \quad \text{et} \quad \nabla(\mathrm{B}-\lambda)=0$$

auront le même nombre de racines positives et le même nombre de racines négatives.

Ce que l'on peut énoncer autrement et indépendamment de la notion de forme de la façon suivante :

B étant un système symétrique, je dirai que B est un système défini positif, si toutes les racines de l'équation

$$\nabla(\mathrm{B}-\lambda)=0$$

sont positives.

Alors, A étant un système symétrique quelconque et B un système symétrique *défini* positif quelconque (A et B, du reste, étant réels), les équations

$$\nabla(\mathrm{A}-\lambda)=0 \quad \text{et} \quad \nabla(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{B})=0$$

auront le même nombre de racines positives et le même nombre de racines négatives.

V.

L'application du calcul des systèmes linéaires aux fonctions abéliennes se présente ici d'elle-même comme conséquence de la théorie des formes quadratiques. Mais d'abord il est nécessaire d'expliquer ce que l'on doit entendre en général par l'expression de *fonction d'une variable linéaire*. Considérons seulement, pour plus de clarté, un système du deuxième ordre, et soit

$$\mathrm{X}=\begin{matrix}x & y\\ z & u\end{matrix}$$

une variable linéaire. Le système linéaire

$$\begin{matrix}\lambda(x,y,z,u) & \varphi(x,y,z,u)\\ \psi(x,y,z,u) & \theta(x,y,z,u)\end{matrix}$$

variant en même temps que X, pourra être regardé comme une fonction de cette variable, et le mode de relation qui existe entre ces deux systèmes pourra être indiqué par la formule

$$\mathrm{F}(x,y,z,u)=f(\mathrm{X}).$$

En particulier, si nous définissons e^{X}, X étant un système d'ordre quelconque, comme étant la somme de la série

$$\Omega+\mathrm{X}+\frac{\mathrm{X}^2}{1.2}+\frac{\mathrm{X}^3}{1.2.3}+\ldots,$$

e^{X} sera une fonction de la variable X; mais il est à remarquer qu'en général on n'aura pas

$$e^{\mathrm{X}}.e^{\mathrm{Y}}=e^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}.$$

Il est cependant un cas particulier où cette propriété subsiste, c'est celui où les exposants X, Y, etc., sont de la forme Ωx, Ωy, etc.; dans ce cas, on a évidemment

$$e^{\Omega x}.\,e^{\Omega y} = e^{\Omega x + \Omega y}.$$

Soit donc une équation

$$u = (e^{\alpha} + e^{\beta} + e^{\gamma}\ldots)(e^{a} + e^{b} + e^{c} + \ldots);$$

on pourra la remplacer par l'équation linéaire

$$\Omega u = (e^{\Omega\alpha} + e^{\Omega\beta} + \ldots)(e^{\Omega a} + e^{\Omega b}\ldots).$$

Cette remarque permet d'appliquer facilement le calcul des systèmes linéaires aux fonctions abéliennes, ou plutôt aux séries dont ces fonctions sont les quotients.

Considérons, par exemple, les séries dont s'est servi M. Hermite dans son Mémoire sur les fonctions abéliennes; elles sont définies par l'équation suivante :

$$\theta_{p,q;\mu,\nu}(x,y) = \sum (-1)^{mq+np}\, e^{i\pi(2mx+2ny+\mu x+\nu y)+\frac{i\pi}{4}\varphi(2m+\mu,\,2n+\nu)}.$$

On en déduit

$$(1)\quad \Omega\theta_{p,q;\mu,\nu}(x,y) = \sum (-1)^{\Omega(mq+np)}\, e^{i\pi\Omega(2mx+2ny+\mu x+\nu y)+\frac{i\pi}{4}\Omega\varphi(2m+\mu,\,2n+\nu)}.$$

Or, si l'on pose

$$X = (x, y), \qquad M = (m, n), \qquad R = (\mu, \nu), \qquad N = (q, p),$$

et si la forme φ est représentée par le système A, l'équation (1) pourra s'écrire de la façon suivante :

$$(2)\quad \Omega\theta_{p,q;\mu,\nu}(x,y) = \sum (-1)^{M_1 N}\, e^{i\pi\left[(2M_1+R_1)X+\frac{i\pi}{4}(2M_1+R_1)A(2M+R)\right]}.$$

On voit que la série se présente ainsi comme une fonction de la variable linéaire $X = \begin{matrix} x & 0 \\ y & 0 \end{matrix}$; c'est pourquoi je désignerai simplement le premier membre de l'équation précédente par $\Omega\theta(X)$, et je remplacerai les quatre indices $p, q; \mu, \nu$ par les deux seuls indices linéaires R, N, en écrivant $\Omega\theta_{R,N}(X)$.

En représentant ainsi toutes les variables par une seule variable

linéaire, nous obtiendrons une notation plus simple, plus commode et analogue à celle qui a été employée pour les formes quadratiques. La sommation dans la formule (2) doit être étendue à toutes les valeurs entières positives ou négatives du système M, c'est-à-dire qu'il faut donner aux éléments m, n de ce système toutes les valeurs entières possibles.

J'en viens maintenant aux séries à un nombre quelconque de variables, dont les quotients donnent en général les fonctions abéliennes.

Soient

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n variables quelconques, la variable linéaire

$$\begin{matrix} x_1 & 0 & 0\ldots \\ x_2 & 0 & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & 0 & 0\ldots \end{matrix}$$

et $\mathfrak{A}$ un système symétrique quelconque.

Soient

$$M = (m_1, m_2, \ldots, m_n),$$

où les $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs;

$$N = (n_1, n_2, \ldots, n_n),$$

où les $n_1, n_2, \ldots$ désignent le zéro ou le nombre 1;

$$R = (r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

où les $r_1, r_2, \ldots$ désignent ou zéro ou le nombre 1; les différentes séries abéliennes de l'ordre n seront données par la formule

$$(\omega)\qquad \Omega\mathfrak{I}_{R,N}(X) = \sum_{M} (-1)^{M_1 N}\, e^{i\pi(2M_1R_1)+X+\frac{i\pi}{4}2(M_1+R_1)\mathfrak{A}(2M_1+R_1)}.$$

Comme R et N peuvent prendre chacun 2^n valeurs, la formule ci-dessus fournira 2^{2n} séries différentes, dont les quotients donneront les fonctions abéliennes d'ordre n.

De la forme du développement, il suit immédiatement que, si l'on prend

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
$$\Pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n),$$

les p et les π désignant des nombres entiers quelconques, on aura

$$(\alpha)\qquad \Omega\,\mathfrak{S}_{R_1 N}(X + \mathfrak{A}P + \Pi) = \mathfrak{S}_{R_1 N}(X)(-1)^{P_1 N + R_1 \Pi}\, e^{-i\pi(2P_1 X + P_1 \mathfrak{A} P)}.$$

Il résulte de cette formule que les quotients de deux fonctions $\mathfrak{S}$ peuvent être considérés comme des fonctions de la variable linéaire X, fonctions doublement périodiques, et les deux périodes étant $\mathfrak{A}$ et 1. Les fonctions définies par l'équation (ω) ne sont pas les plus générales que l'on puisse considérer; mais les autres peuvent s'y ramener par un changement de variables. En général, les fonctions abéliennes seront des fonctions d'une variable linéaire

$$X = \begin{matrix} x_1 & 0 & 0\ldots \\ x_2 & 0 & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & 0 & 0\ldots \end{matrix}$$

à deux périodes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{H}$; par un changement de variables on les ramènera à des fonctions de l'espèce définie par l'équation (ω), le système $\mathfrak{A}$ étant défini par la relation

$$(\beta)\qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{H}\mathfrak{A}.$$

Toutes les différentes séries de périodes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{H}$ pourront d'ailleurs se déduire d'une seule en augmentant les variables de multiples des moitiés des périodes. De la relation (β) il suit, $\mathfrak{A}$ étant symétrique, que $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{H}$ ne sont pas arbitraires, mais sont liées entre elles par la relation

$$(\gamma)\qquad \mathfrak{C}\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}\mathfrak{C}_1.$$

Ainsi, pour les fonctions abéliennes de second ordre, si l'on pose

$$\mathfrak{C} = \begin{matrix} \omega_0 & \omega \\ \omega_2 & \omega_3 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{H} = \begin{matrix} v_0 & v_1 \\ v_2 & v_3 \end{matrix},$$

on aura, d'après la formule (λ), la relation connue

$$\omega_0 v_2 - \omega_2 v_0 + \omega_1 v_3 - v_1 \omega_3 = 0.$$

Pour les fonctions abéliennes du premier ordre (c'est-à-dire pour les fonctions elliptiques) l'équation (γ) devient identique; pour celles du troisième ordre elle fournira trois relations entre les périodes simultanées.

En général, la différence $\mathfrak{C}\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}\mathfrak{C}_1$, qui doit être nulle, est un système gauche ne contenant que $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments indépendants; la relation (γ) pour les fonctions d'ordre n fournira donc $\frac{n(n-1)}{2}$ relations entre les périodes simultanées. Une fonction abélienne ayant les périodes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{H}$, et $\mathfrak{A}$ étant le système symétrique défini par l'équation $\mathfrak{C} = \mathfrak{H}\mathfrak{A}$, je dirai que $\mathfrak{A}$ est le paramètre de cette fonction.

Je reviens maintenant aux formules (ω) et (α); pour simplifier l'écriture, dans tout ce qui suit, je les débarrasserai du facteur constant Ω; mais il faudra avoir soin de se rappeler que les équations ainsi modifiées ne sont que symboliques, et que les équations sont (α) et (ω).

Je définirai donc les 2^{2n} séries abéliennes d'ordre n par la formule

$$(1)\qquad \mathfrak{S}(X) = \sum (-1)^{M_1 N}\, e^{i\pi(2M_1 + R_1)X + \frac{i\pi}{4}(2M_1 + R_1)\mathfrak{A}(2M + R)},$$

où j'omets, pour abréger, les indices R et N. Les fonctions $\mathfrak{S}$ ainsi définies jouissent de la propriété exprimée par l'équation suivante, où P et Π désignent des entiers quelconques de la forme $(q_1, q_2, \ldots, q^n)$,

$$(2)\qquad \mathfrak{S}(X + \mathfrak{A}P + \Pi) = \mathfrak{S}(X)(-1)^{P_1 N + R_1 \Pi}\, e^{-i\pi(2P_1 X + P_1 \mathfrak{A} P)},$$

et cette équation, à un facteur constant près, déterminera complètement la fonction $\mathfrak{S}$. Je considérerai le problème de la transformation comme l'a fait M. Hermite dans son Mémoire sur les fonctions abéliennes.

Soit $\varpi(X)$ une fonction définie par l'équation

$$(3)\qquad \varpi(X) = \mathfrak{S}[(T + AU)X]\, e^{i\pi X_1(U_1 AU + U_1 T)X},$$

T, Q, U, J désignant des systèmes entiers quelconques indéterminés, et soit le système $\mathfrak{B}$ défini par la relation

$$(4) \qquad (T + \mathfrak{A}U)\mathfrak{B} = Q + \mathfrak{A}J.$$

Je vais chercher si l'on peut choisir les systèmes T, Q, U, J de telle sorte : 1° que $\mathfrak{B}$ soit symétrique ; 2° que $\varpi(X)$ satisfasse à une équation de même forme que l'équation (2)

$$(\gamma) \qquad \varpi(X + \mathfrak{B}P + \Pi) = (-1)^{P_1\mathfrak{N} + \mathfrak{R}_1\Pi}\, e^{-i\pi k(2P_1X + P_1\mathfrak{B}P)},$$

k désignant un nombre entier positif.

A cet effet, changeons dans l'équation (3) X en $X + \Pi$, en réduisant le second membre à l'aide de l'équation (2); on trouvera que pour satisfaire à la deuxième condition, on doit avoir

$$U_1T = T_1U,$$

auquel cas on a alors

$$(\delta) \qquad \varpi(X + \Pi) = (-1)^{N_1U\Pi + R_1T\Pi + \Pi_1T_1U\Pi}\,\varpi(X).$$

Changeons dans cette formule (3) X en $X + \mathfrak{B}P$, il viendra, en tenant compte de la relation

$$(T + \mathfrak{A}U)\mathfrak{B} = Q + \mathfrak{A}J,$$

$$(\varepsilon) \quad \varpi(X + \mathfrak{A}P) = \mathfrak{S}[(T + \mathfrak{A}U)X + \mathfrak{A}JP + QP]\, e^{i\pi(X_1 + P_1\mathfrak{B}_1)(U_1\mathfrak{A}U_1 + T_1)(X + \mathfrak{B}P)},$$

ou, en développant,

$$(\varpi) \qquad \varpi(X + \mathfrak{B}P) = (-1)^{P_1J_1N + P_1Q_1R}\, e^{i\pi(2P_1\mathfrak{V}X + P_1\mathfrak{T}P)}\,\varpi(X),$$

expression dans laquelle j'ai posé, pour abréger,

$$\mathfrak{V} = (\mathfrak{B}_1U_1 - J_1)(T + \mathfrak{A}U)$$

et

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{B}_1U_1(T + \mathfrak{A}U)\mathfrak{B} - J_1\mathfrak{A}J.$$

Or, pour satisfaire aux conditions énoncées, il faut d'abord que l'on ait $\mathfrak{V} = -k$. Considérons l'équation

$$(T + \mathfrak{A}U)\mathfrak{B} = Q + \mathfrak{A}J;$$

multiplions-la à gauche par U_1, il viendra, en observant que

$$U_1T = T_1U, \qquad (T_1 + U_1\mathfrak{A})U\mathfrak{B} = U_1(Q + \mathfrak{A}J),$$

et en prenant l'inverse de cette équation,

$$\mathfrak{B}_1U_1(T + \mathfrak{A}U) = J_1\mathfrak{A} + Q_1U$$

et

$$Q_1U - J_1T = (\mathfrak{B}_1U_1 - J_1)(T + \mathfrak{A}) = \mathfrak{V}.$$

On devra donc avoir

$$(5) \qquad Q_1U - J_1T = -k.$$

Maintenant la valeur de $\mathfrak{T}$ donne

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{B}_1U_1(T + \mathfrak{A}U)\mathfrak{B} - J_1\mathfrak{A}J;$$

d'où il suit évidemment, U_1T et $\mathfrak{A}$ étant symétriques, que $\mathfrak{T}$ l'est aussi. D'une relation établie ci-dessus

$$(\mathfrak{B}_1U_1 - J_1)(T + \mathfrak{A}U) = -k,$$

on déduit

$$-k\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}U_1 - J_1)(Q + \mathfrak{A}J),$$

et en retranchant cette valeur de $-k\mathfrak{B}$ de la valeur de $\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{T} + k\mathfrak{B}_1 = J_1Q$$

et en prenant l'équation inverse

$$\mathfrak{T} + k_1\mathfrak{B} = Q_1J.$$

Si donc on veut que $\mathfrak{B}$ soit symétrique, il faudra prendre

$$(6) \qquad J_1Q - Q_1J = 0,$$

et alors on aura

$$\mathfrak{T} = -k\mathfrak{B} + J_1Q.$$

La formule (ε) deviendra

$$\varpi(X + \mathfrak{B}P) = (-1)^{P_1J_1N + P_1Q_1R + P_1J_1QP}\, e^{-i\pi k(2P_1X + P_1\mathfrak{B}P)}.$$

On voit, en combinant ce résultat avec la formule (γ), que toutes les conditions énoncées ci-dessus seront remplies, si l'on choisit les systèmes T, Q, U, J de telle manière qu'ils satisfassent aux équations (4), (5) et (6).

Relativement aux valeurs de $\mathfrak{N}$ et de $\mathfrak{R}$, je remarquerai que leurs valeurs peuvent être prises suivant le module 2. Or, T_1U

étant symétrique, on voit facilement qu'en désignant par s_1, $s_2, \ldots, s_n$ les éléments de la diagonale principale de $T_1 U$, et posant

$$S = (s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

on aura

$$\Pi_1 T_1 U \Pi \equiv S_1 \Pi \quad (\text{mod.} = 2).$$

De même, en désignant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ les éléments de la diagonale principale du système symétrique $J_1 Q$ et par Σ le système

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

on aura

$$P_1 J_1 Q P \equiv P_1 \Sigma \quad (\text{mod.} = 2).$$

On en conclut aisément que les valeurs de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{N}$, qui doivent entrer dans la formule (γ), seront données par les équations

$$(\lambda) \qquad \begin{cases} \mathcal{R} = U_1 N + T_1 R + S, \\ \mathcal{N} = J_1 N + Q_1 R + \Sigma. \end{cases}$$

VI.

Des considérations précédentes, il résulte qu'une série abélienne aux périodes 1 et $\mathfrak{A}$ pourra être transformée en une série abélienne aux périodes 1 et $\mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont liées par la relation

$$(1) \qquad (T + \mathfrak{A} U)\mathfrak{B} = Q + \mathfrak{A} J,$$

T, Q, U, J étant des systèmes entiers satisfaisant aux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} U_1 T - T_1 U = 0, \quad J_1 Q - Q_1 J = 0, \quad J_1 T - Q_1 U = k, \\ \text{et, par conséquent,} \\ T_1 J - U_1 Q = k. \end{cases}$$

Je vais étudier de plus près ces relations. Il est d'abord nécessaire d'expliquer la notation dont je vais me servir dans ce qui suit. Supposons un système linéaire $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$ où les éléments, au lieu

d'être de simples nombres, soient des systèmes d'ordre n; alors $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$ représentera un système d'ordre $2n$. Soit, par exemple, le système

$$\begin{matrix} a & b & \alpha & \beta \\ c & d & \gamma & \delta \\ a' & b' & \alpha' & \beta' \\ c' & d' & \gamma' & \delta' \end{matrix};$$

si l'on pose

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} = A, \qquad \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} = B,$$

$$\begin{matrix} a' & b' \\ c' & d' \end{matrix} = C, \qquad \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{matrix} = D,$$

ce système d'ordre 4 pourra être représenté par la notation $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$.

Comme dans ce qui suit nous aurons à considérer simultanément des systèmes d'ordre n et des systèmes d'ordre $2n$, je continuerai à représenter les premiers par des lettres majuscules ordinaires et les deuxièmes par des lettres majuscules surmontées d'un trait; ainsi j'écrirai, par exemple,

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}.$$

Du reste, une même équation devra toujours être homogène en ordre; ainsi, si l'on a

$$\overline{\mathrm{A}} - \lambda = \begin{matrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{matrix},$$

il est clair que, dans le premier membre de cette relation, λ désignera un système simple d'ordre $2n$, et dans le second membre un système simple d'ordre n. Les systèmes composés d'ordre $2n$ se multiplient et s'additionnent suivant les mêmes règles que les systèmes ordinaires; ainsi l'on aura

$$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \times \begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix} = \begin{matrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{matrix},$$

en ayant soin d'observer l'ordre dans lequel on doit prendre les facteurs. Seulement on n'aura pas

$$\tau(\overline{\mathrm{A}}) = \tau(AD - BC);$$

la formule à employer dans ce cas est, en désignant par a et c respectivement les déterminants de A et de C,

$$(\alpha) \qquad \nabla(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{1}{a^{n-1}c^{n-1}}\nabla(a\mathrm{C}_0\mathrm{D} - c\mathrm{A}_0\mathrm{B}).$$

Cette formule, à laquelle on peut donner diverses formes, est d'un grand usage dans les applications, et dans ce qui suit j'en ferai souvent implicitement usage.

Ceci posé, revenons aux équations de condition (2), et posons

$$\overline{\mathrm{S}} = \begin{matrix} \mathrm{T} & \mathrm{Q} \\ \mathrm{U} & \mathrm{J} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{J}} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix},$$

on verra facilement que les quatre formules (2) sont contenues dans la seule formule

$$(3) \qquad \overline{\mathrm{S}_1}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}} = k\overline{\mathrm{J}}.$$

Pour abréger le discours, j'appellerai *abéliens* les systèmes satisfaisant à l'équation (3). On trouvera facilement qu'ils jouissent des propriétés suivantes : 1° leur déterminant est k^n; 2° si $\overline{\mathrm{S}}$ est un système abélien, $\overline{\mathrm{S}_1}$ en est un également. En effet, multiplions à droite les deux membres de l'équation (3) par $\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}_1}$, il viendra

$$\overline{\mathrm{S}_1}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}_1} = k\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}_1},$$

et comme $\overline{\mathrm{J}}^2 = -1$,

$$\overline{\mathrm{S}_1}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}}\,\overline{\mathrm{S}_1} = -k\overline{\mathrm{S}_1};$$

d'où, divisant à gauche par $\overline{\mathrm{S}_1}$,

$$\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}_1} = -k,$$

et, multipliant à gauche par $\overline{\mathrm{J}}$,

$$\overline{\mathrm{S}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}_1} = k\overline{\mathrm{J}}.$$

(Pour les autres propriétés des systèmes abéliens, je supprime les démonstrations, qui sont entièrement analogues à celles que je viens de donner).

3° Le produit de deux systèmes abéliens est un système abélien;

4° Soit $\overline{\mathrm{M}}$ un système abélien symétrique; il pourra être censé représenter une forme quadratique à $2n$ variables. Les formes qui peuvent ainsi être représentées par des systèmes abéliens seront dites *formes abéliennes*.

Si une forme abélienne est transformée par une substitution abélienne, la forme résultante sera aussi une forme abélienne. Une forme abélienne satisfaisant à l'équation

$$(m) \qquad \overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{M}} = m\overline{\mathrm{J}},$$

on en déduit

$$\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{J}} = -m$$

et

$$\overline{\mathrm{M}_0} = -m^{n-1}\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{J}};$$

donc la forme adjointe à une forme abélienne se déduit de cette même forme par un simple changement de variables.

De l'équation (m) on déduit encore

$$(\overline{\mathrm{M}} - \lambda)\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{M}} = m\overline{\mathrm{J}} - \lambda\overline{\mathrm{J}}\mathrm{M} = \overline{\mathrm{J}}(m - \lambda\mathrm{M}).$$

Donc si λ est une racine de l'équation

$$\nabla(\overline{\mathrm{M}} - \lambda) = 0,$$

$\frac{m}{\lambda}$ est aussi une racine de cette même équation.

Cette notion de formes abéliennes, que M. Hermite a, le premier, introduites dans la Science et dont il a donné les principales propriétés, me paraît être d'une importance capitale dans la théorie des fonctions abéliennes; elles y jouent le même rôle que les formes binaires dans la théorie des fonctions elliptiques.

En considérant les formes abéliennes comme n'étant assujetties qu'à des substitutions abéliennes, on peut isoler, pour ainsi dire, les formes et les systèmes abéliens des formes et des systèmes généraux d'ordre $2n$. L'analogie qu'ont les formes ainsi considérées avec les formes binaires quadratiques a été signalée par M. Hermite, et ressort très facilement des propriétés énoncées ci-dessus.

VII.

Je vais maintenant étudier de plus près l'équation

$$(1)\qquad (\mathrm{T}+\mathfrak{A}\mathrm{U})\mathfrak{B}=\mathrm{Q}+\mathfrak{A}\mathrm{J}.$$

Soit une fonction abélienne aux périodes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{H}$, ayant pour paramètre $\mathfrak{A}$, en sorte que l'on ait

$$(2)\qquad \mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{A};$$

soit en outre une fonction abélienne aux périodes $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{L}$ et ayant pour paramètre $\mathfrak{B}$, en sorte que l'on ait

$$(3)\qquad \mathfrak{F}=\mathfrak{L}\mathfrak{B};$$

on voit facilement que l'équation (1) pourra être remplacée par le système des deux équations

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}\mathrm{T}+\mathfrak{C}\mathrm{U},$$
$$\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\mathrm{Q}+\mathfrak{E}\mathrm{J},$$

ou bien

$$(4)\qquad \begin{matrix}\mathfrak{L} & \mathfrak{F}\\ 0 & 0\end{matrix}=\begin{matrix}\mathfrak{H} & \mathfrak{E}\\ 0 & 0\end{matrix}\times\overline{\mathrm{S}}.$$

Distinguons maintenant, dans les systèmes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{K}$, etc., les parties réelles des parties imaginaires et posons

$$\mathfrak{A}=\mathrm{A}+i\mathcal{A},\qquad \mathfrak{B}=\mathrm{B}+i\mathcal{B},\qquad \mathfrak{H}=\mathrm{H}+i\mathcal{H},\qquad \mathfrak{E}=\mathrm{G}i\mathcal{G},$$
$$\mathfrak{F}=\mathrm{F}+i\mathcal{F},\qquad \mathfrak{L}=\mathrm{L}+i\mathcal{L}.$$

La relation (2) deviendra alors

$$(2\ bis)\qquad \mathrm{G}+i\mathcal{G}=(\mathrm{H}+i\mathcal{H})(\mathrm{A}+i\mathcal{A}).$$

Posons

$$\overline{\mathrm{A}}=\begin{matrix}\mathrm{H} & \mathrm{G}\\ \mathcal{H} & \mathcal{G}\end{matrix},$$

on aura

$$\overline{\mathrm{A}_1}\mathrm{A}=\begin{matrix}\mathrm{H}_1\mathrm{H}+\mathcal{H}_1\mathcal{H} & \mathrm{H}_1\mathrm{G}+\mathcal{H}_1\mathcal{G}\\ \mathrm{G}_1\mathrm{H}+\mathcal{G}_1\mathcal{H} & \mathrm{G}_1\mathrm{G}+\mathcal{G}_1\mathcal{G}\end{matrix}=\begin{matrix}\mathcal{M} & \mathcal{N}\\ \mathcal{N}_1 & \mathcal{P}\end{matrix}.$$

Or, si l'on pose

$$(5)\qquad \begin{cases}\mathrm{H}_1\mathcal{G}-\mathcal{H}_1\mathrm{G}=\mathrm{C}, & \mathrm{H}_1\mathcal{H}-\mathcal{H}_1\mathrm{H}=\mathrm{D},\\ \mathrm{G}_1\mathcal{G}-\mathcal{G}_1\mathrm{G}=\mathrm{E}, & \mathrm{G}_1\mathcal{H}-\mathcal{G}_1\mathrm{H}=\mathrm{E},\end{cases}$$

on déduit de la relation (2 *bis*)

$$\mathcal{N}=\mathcal{M}\mathrm{A}-\mathrm{D}\mathcal{A},\qquad \mathrm{C}=\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathrm{D}\mathrm{A},\qquad \mathcal{P}=\mathcal{N}_1\mathrm{A}-\mathrm{F}\mathcal{A}.$$
$$\mathrm{E}=\mathcal{N}_1\mathcal{A}+\mathrm{F}\mathrm{A}.$$

Ces quatre équations donnent, en posant $\nabla(\mathcal{A})=a$,

$$a\mathrm{D}=\mathcal{M}\mathrm{A}\mathcal{A}_0-\mathcal{N}\mathcal{A}_0,\qquad a\mathrm{C}=\mathcal{M}(\mathrm{A}\mathcal{A}_0\mathrm{A}+a\mathcal{A})-\mathcal{N}\mathcal{A}_0\mathrm{A},$$
$$a\mathrm{F}=\mathcal{N}_1\mathrm{A}\mathcal{A}_0-\mathcal{P}\mathcal{A}_0,\qquad a\mathrm{E}=\mathcal{N}_1(\mathrm{A}\mathcal{A}_0\mathrm{A}+a\mathcal{A})-\mathcal{P}\mathcal{A}_0\mathrm{A},$$

formules que l'on peut mettre sous la forme suivante, en posant comme ci-dessus

$$\mathrm{J}=\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}\quad\text{et}\quad\overline{\mathcal{A}}=\begin{matrix}\mathcal{A} & \mathcal{A}_0\mathrm{A}\\ \mathrm{A}\mathcal{A}_0 & \mathrm{A}\mathcal{A}_0\mathrm{A}+a\mathcal{A}\end{matrix}$$

(comme A et $\mathcal{A}$ sont symétriques, il est évident que $\overline{\mathcal{A}}$ l'est aussi),

$$a.\begin{matrix}\mathrm{D} & \mathrm{C}\\ \mathrm{F} & \mathrm{E}\end{matrix}=\overline{\mathrm{A}_1}\,\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathcal{A}};$$

Or, de ces équations (5) il résulte

$$\begin{matrix}\mathrm{D} & \mathrm{C}\\ \mathrm{F} & \mathrm{E}\end{matrix}=\overline{\mathrm{A}_1}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}};$$

il viendra donc

$$(6)\qquad a\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}}=\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathcal{A}},$$

d'où l'on voit que

$$\nabla(\mathcal{A})=a^{2n}.$$

On déduit de là

$$(7)\qquad \overline{\mathcal{A}}.a^{2n-1}=-\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}_0}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}},$$

et comme $\overline{\mathcal{A}}$ est symétrique,

$$(8)\qquad \overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}_1}=\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}_1'}\,\overline{\mathrm{J}}.$$

Les conséquences des formules (6), (7), (8), qui établissent ainsi des relations entre les parties réelles et imaginaires des modules $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{H}$ et du paramètre $\mathfrak{A}$ d'une fonction abélienne, conduisent à de nombreux résultats.

En distinguant dans la formule (4) les parties réelles et les parties imaginaires, on aura

$$\begin{matrix} L + i\mathfrak{L} & F + i\mathfrak{F} \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} H + i\mathfrak{H} & G + \mathfrak{G} \\ 0 & 0 \end{matrix} \times \overline{S},$$

ou bien

$$\begin{matrix} L & F \\ & \mathfrak{F} \end{matrix} = \begin{matrix} H & G \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{G} \end{matrix} \times \overline{S},$$

ou, en adoptant les notations précédentes,

$$\overline{B} = \overline{A}\,\overline{S}. \tag{9}$$

A cette relation on peut, en désignant par $\overline{\mathcal{B}}$ le système analogue au système $\overline{\mathcal{A}}$, mais relatif au paramètre $\mathfrak{B}$, joindre les équations suivantes :

$$a\overline{J}\,\overline{A} = \overline{A}\,\overline{J}\,\overline{\mathfrak{A}}, \qquad b\overline{J}\,\overline{B} = \overline{B}\,\overline{J}\,\overline{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \overline{S_1}\,\overline{J}\,\overline{S} = k\overline{J}.$$

En éliminant entre ces équations et l'équation (9) les systèmes $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{J}$, on obtiendra

$$\overline{\mathcal{B}} = \frac{a}{ak}\,\overline{S_1}\,\overline{\mathcal{A}}\,\overline{S}, \tag{10}$$

nouvelle forme sous laquelle peut se mettre la relation

$$(T + \mathfrak{A}U)\mathfrak{B} = Q + \mathfrak{A}J, \tag{1}$$

et où n'entrent, comme dans cette dernière, que les paramètres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

L'équivalence de ces deux relations est d'une grande importance dans la théorie des formes abéliennes; car il est clair que l'analyse précédente subsiste indépendamment de la signification que nous avons donnée aux divers systèmes qui y entrent, et il est facile de voir que le système $\overline{\mathcal{A}}$ est précisément le système abélien symétrique le plus général. Ce point important établit une analogie plus intime encore entre les formes abéliennes et les

formes quadratiques binaires. La formule (10) a une interprétation remarquable; d'après la valeur de $\mathcal{A}$,

$$\overline{\mathcal{A}} = \begin{matrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_0 A \\ A\mathcal{A}_0 & A\mathcal{A}_0 A + a\mathcal{A} \end{matrix}, \tag{11}$$

on voit que ce système représente une forme abélienne; soit f cette forme, et φ la forme abélienne représentée par $\overline{\mathcal{B}}$, la formule (10) exprime que la forme φ se déduit de la forme f par une substitution abélienne.

Les formes abéliennes sont susceptibles d'une décomposition remarquable, que M. Hermite a signalée pour les formes du deuxième ordre. Soit

$$\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n}),$$

on aura

$$\overline{\Omega} f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \overline{X_1}\,\overline{\mathcal{A}}\,\overline{X};$$

or, de la formule (11) on déduit sans peine

$$\overline{\mathcal{A}} = \begin{matrix} \mathcal{A}_0 & 0 \\ A\mathcal{A}_0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & a\mathcal{A} \end{matrix};$$

décomposons le groupe de $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ en deux groupes de n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$, et posons

$$\overline{X} = \begin{matrix} Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix};$$

il viendra

$$\overline{\Omega} f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \begin{matrix} Y_1 & Z_1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \times \left\{ \begin{matrix} \mathcal{A}_0 & 0 \\ A\mathcal{A}_0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & a\mathcal{A} \end{matrix} \right\} \times \begin{matrix} Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix},$$

et, en effectuant les multiplications,

$$\overline{\Omega} f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \begin{matrix} (Y_1 + Z_1 A)\mathcal{A}_0(Y + AZ) + aZ_1\mathcal{A}Z & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

équation que l'on peut écrire, en désignant par g la forme représentée par le système $\mathcal{A}$, et par h son adjointe

$$f(\overline{X}) = h(Y + AZ) + ag(Z); \tag{12}$$

et le sens de cette dernière relation sera bien précis, si l'on se reporte à ce que j'ai dit de la notation dont je me sers pour les formes quadratiques.

Un point important à établir, et qui résulte immédiatement de la formule (12), c'est que si le système $\mathcal{A}$ est défini et positif, le système $\mathcal{B}$ l'est aussi; il suffit pour le faire voir de considérer en même temps l'équation (10).

Je terminerai ce que je voulais dire des fonctions abéliennes par quelques remarques.

Posons

$$\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}_1} = \overline{\mathfrak{A}};$$

le système $\mathfrak{A}$, en vertu de l'équation (8), sera symétrique, et l'on aura évidemment

$$\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{S}}.\overline{\mathrm{S}_0}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}_{01}}.\overline{\mathrm{S}_1}\,\overline{\mathrm{A}_1} = k^{2n}\overline{\mathfrak{A}};$$

mais

$$\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{S}} = \overline{\mathrm{B}}, \qquad \overline{\mathrm{S}_1}\,\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{B}_1} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{S}_0}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{S}_{01}} = k^{2n-1}\overline{\mathrm{J}},$$

donc on aura

$$\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{J}}\,\overline{\mathrm{B}_1} = k\overline{\mathfrak{A}},$$

d'où

$$\overline{\mathfrak{B}} = k\overline{\mathfrak{A}}. \tag{13}$$

Cette équation fait voir que si d'une fonction abélienne aux périodes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{H}$, on en déduit une autre aux périodes $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{L}$ au moyen des formules (4), le système $\overline{\mathfrak{A}}$ joue le rôle d'un véritable invariant.

Si, par une même substitution $\overline{\mathrm{S}}$, on déduit d'un paramètre $\mathfrak{A}$ un paramètre $\mathfrak{B}$, et d'un paramètre $\mathfrak{A}'$ un paramètre $\mathfrak{B}'$, on aura

$$\nabla(\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}' - \mathfrak{A})\frac{k^n}{\nabla(\mathrm{T} + \mathfrak{A}\mathrm{U}).\nabla(\mathrm{T} + \mathfrak{A}'\mathrm{U})}. \tag{14}$$

En particulier, faisons

$$\mathfrak{A}' = \mathrm{A} - i\mathcal{A} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{B}' = \mathrm{B} - i\mathcal{B},$$

il viendra

$$\nabla(\mathcal{B}) = \nabla(\mathcal{A})\frac{k^n}{\nabla^2(\mathrm{T} + \mathfrak{A}\mathrm{U})};$$

l'expression $\nabla(\mathrm{T} + \mathfrak{A}\mathrm{U})$ a un sens bien précis, car c'est le dé-

nominateur commun des éléments de $\mathfrak{B}$; en appelant m ce dénominateur commun, b et a les déterminants des systèmes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$, on aura donc

$$b = \frac{ak^n}{m}. \tag{15}$$

En faisant dans les formules précédentes $n = 2$, on retrouverait, avec une légère différence dans la notation, les formules que M. Hermite a données dans son Mémoire sur les fonctions abéliennes. Seulement, les systèmes à seize éléments qu'il a considérés ne sont pas tout à fait les mêmes que ceux dont j'ai fait usage;

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}$$

étant un des systèmes qu'il emploie, les systèmes abéliens du second ordre seront donnés par l'expression générale

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_3 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_3 & b_2 \\ d_0 & d_1 & d_3 & d_2 \\ c_0 & c_1 & c_3 & c_2 \end{matrix}.$$

SUR LES

COVARIANTS DOUBLES DES FORMES BINAIRES.

Bulletin de la Société Philomathique de Paris, 6e série, t. VIII; 1872.

1. Considérons un système composé d'un nombre quelconque de formes binaires (ce système pouvant se réduire à une forme unique).

Soit U un covariant de ce système de formes. On désigne sous le nom d'*émanants* de ce covariant les polynomes contenus dans les expressions suivantes :

$$\left(x\frac{d}{d\xi}+y\frac{d}{d\eta}\right)\mathrm{U},$$
$$\frac{1}{2}\left(x\frac{d}{d\xi}+y\frac{d}{d\eta}\right)^2\mathrm{U},$$
$$\frac{1}{6}\left(x\frac{d}{d\xi}+y\frac{d}{d\eta}\right)^3\mathrm{U},\quad \ldots$$

Je représenterai simplement un émanant de U par la notation $(\mathrm{U})_i$, l'indice i indiquant le degré de ce polynome par rapport aux variables ξ et η.

Lorsque l'on identifie les variables ξ et η aux variables x et y, chaque émanant se réduit à la forme U.

2. On sait que les émanants de U sont des covariants doubles du système de formes donné, c'est-à-dire qu'ils se transforment en des polynomes composés d'une façon semblable, lorsqu'on assujettit les deux systèmes de variables x, y et ξ, η à des substitutions cogrédientes.

Tout covariant double d'un système de formes se compose d'émanants et du covariant $(x\eta - y\xi)$, que je représenterai pour abréger par ω.

On a, en effet, la proposition suivante : si H désigne un covariant double quelconque du système de formes donné, on peut

mettre H sous la forme suivante, i désignant le degré de ce polynome par rapport aux variables ξ et η,

$$\mathrm{H} = (\mathrm{A})_i + \omega(\mathrm{B})_{i-1} + \omega^2(\mathrm{C})_{i-2} + \ldots,$$

A, B, C désignant des covariants du système de formes donné.

3. Cette proposition est très utile dans une foule de calculs algébriques. Je ne citerai ici que quelques exemples très simples, mais dont l'application est fréquente dans la théorie des surfaces du troisième et du quatrième ordre, ainsi que dans la théorie des courbes du quatrième ordre.

Soit F un polynome du quatrième degré; proposons-nous de calculer l'expression

$$\Omega = \mathrm{F}(x,y)\left[x\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}+y\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\eta}\right]^2 - \mathrm{F}(\xi,\eta)\left[\xi\frac{d\mathrm{F}(x,y)}{dx}+\eta\frac{d\mathrm{F}(x,y)}{dy}\right]^2.$$

Cette expression est un covariant double de F, du degré 3 par rapport aux coefficients et du degré 6 par rapport aux variables x et y, ainsi que par rapport aux variables ξ et η.

De plus, Ω change de signe quand on échange entre elles ces deux systèmes de variables; son développement ne doit donc contenir que des puissances impaires de ω et l'on a

$$\Omega = \omega(\mathrm{A})_5 + \omega^3(\mathrm{B})_3 + \omega^5(\mathrm{C})_1;$$

A désigne un covariant de F, du degré 10 par rapport aux variables et du degré 3 par rapport aux coefficients; comme un tel covariant ne peut exister, on a nécessairement

$$\mathrm{A} = 0;$$

l'on a de même $\mathrm{C} = 0$, car C ne pourrait être qu'un covariant de F du degré 2.

B est un covariant du degré 6 par rapport aux variables et du degré 3, par rapport aux coefficients; ce ne peut être que le covariant sextique de F; en désignant par J ce covariant, on a donc, à un facteur numérique près, la formule

$$\Omega = \xi^3\frac{d^3\mathrm{J}}{dx^3} + 3\xi^2\eta\frac{d^3\mathrm{J}}{dx^2\,dy} + 3\xi\eta^2\frac{d^3\mathrm{J}}{dx^2\,dy} + \eta^3\frac{d^3\mathrm{J}}{dy^3}. \tag{1}$$

4. Considérons encore la forme biquadratique F et son hessien H; posons

$$\Omega = F(x, y)\,H(\xi, \eta) - F(\xi, \eta)\,H(x, y).$$

Cette expression est un covariant double de F, du degré 4 par rapport aux variables ξ et η, du degré 3 par rapport aux coefficients; de plus, Ω change de signe quand on échange entre elles les variables; on peut donc poser

$$\Omega = \omega(A)_3 + \omega^2(B)_1;$$

B, ne pouvant être qu'un covariant de F du degré 2, est nul; A, étant un covariant de cette forme, du degré 6 par rapport aux variables et du degré 3 par rapport aux coefficients, est le covariant sextique de J.

On a donc, à un facteur numérique près, pour Ω la même expression que dans le paragraphe précédent.

5. J'appliquerai ce qui précède à une question relative aux courbes de quatrième classe. On sait que l'on peut trouver divers systèmes de coniques quadruplement tangentes à une telle courbe. Étant donné l'un de ces systèmes, il lui correspond, dans le plan de la courbe, une cubique K et une conique G; toute droite du plan, tangente à G, a pour polaire, relativement à K, une des coniques quadruplement tangentes du système.

J'ai démontré, dans mon *Mémoire de Géométrie analytique*, inséré dans le *Journal de Liouville* (janvier et février 1872), la proposition suivante :

« Étant données une courbe de la quatrième classe et une conique, on peut construire une courbe du neuvième ordre, qui passe par les vingt-huit points doubles de la courbe de quatrième classe et les vingt-huit points de rencontre des huit tangentes communes aux deux courbes, et qui, de plus, touche la courbe de quatrième classe aux points où elle est touchée par la conique. »

J'ai fait voir, de plus, que si la conique était la polaire d'une droite D quelconque du plan par rapport à K, la courbe du neuvième ordre se décomposait :

1° En une cubique (de Steiner) passant par les douze points doubles du groupe; cette cubique ne dépend pas de la droite D;

2° En une courbe du sixième ordre, Q, passant par les seize points doubles qui n'appartiennent pas au groupe.

J'ai donné (§ 52 de mon Mémoire) l'équation de cette courbe, mais sans la développer et sans mettre en évidence la variable qu'elle renferme; je veux revenir ici sur cette question.

6. En conservant les notations du Mémoire déjà citées, posons

$$\begin{aligned}
&a_0 c_0 - b_0^2 = M, && C_0 a_0 + A_0 c_0 - 2B_0 b_0 = N,\\
&\alpha^0 \gamma_0 - \beta_0^2 = M', && C_0 \alpha_0 + A_0 \gamma_0 - 2B_0 \beta_0 = N',\\
&a_0 \gamma_0 + c_0 \alpha_0 - 2, && b_0 \beta_0 + 4(A_0 C_0 - B_0^2) = P.
\end{aligned}$$

M, N, M′, N′ et P sont, on le voit, des invariants du système de formes

$$\begin{gathered}
A_0 \lambda^2 + 2B_0 \lambda\mu + C_0 \mu^2,\\
a_0 \lambda^2 + 2\,b_0 \lambda\mu + c_0 \mu^2,\\
\alpha_0 \lambda^2 + 2\,\beta_0 \lambda\mu + \gamma_0 \mu^2.
\end{gathered}$$

Cela posé, l'équation générale des coniques du groupe, quadruplement tangentes à la courbe de quatrième classe, est

$$F = M\lambda^4 + 2N\lambda^3\mu + P\lambda^2\mu^2 + 2N'\lambda\mu^3 + M'\mu^4 = 0.$$

L'équation de la courbe Q relative à deux de ces coniques caractérisées par les paramètres $\lambda : \mu$ et $\lambda' : \mu'$ est, en désignant comme précédemment par J le covariant sextique de la forme biquadratique F,

$$\lambda'^3 \frac{d^3F}{d\lambda^3} + 3\lambda'^2\mu' \frac{d^3F}{d\lambda^2\,d\mu} + 3\lambda'\mu'^2 \frac{d^3F}{d\lambda\,d\mu^2} + \mu'^3 \frac{d^3F}{d\mu^3} = 0.$$

En désignant par H le hessien de F, on voit, en se reportant au §3, que l'équation de cette courbe peut se mettre aussi sous la forme

$$F(\lambda, \mu)\,H(\lambda', \mu') - F(\lambda'\mu')\,H(\lambda, \mu) = 0,$$

ou simplement

$$FH' - F'H = 0.$$

7. L'équation précédente peut être regardée comme le résultat de l'élimination d'un paramètre arbitraire θ entre les deux équations

$$\theta F + 2H = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta F' + 2H' = 0.$$

On voit ici s'introduire les courbes remarquables du quatrième degré, dont l'équation est

$$\theta F + 2H = 0, \tag{1}$$

courbes que je désignerai sous le nom de courbes (H).

Si, laissant θ invariable, on fait varier λ et μ, on peut déterminer facilement l'enveloppe de ces courbes.

Désignons respectivement par S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de F; on sait que les équations

$$S = 0 \quad \text{et} \quad T = 0$$

représentent les courbes du quatrième et du sixième ordre, qui se croisent aux vingt-quatre points du rebroussement de la courbe de quatrième classe.

Cela posé, l'enveloppe des courbes (H) s'obtient en égalant à zéro, le discriminant de l'équation (1); d'après une formule de M. Cayley, l'équation de l'enveloppe sera donc

$$(S^3 - 27T^2)(\theta^3 - \theta S - 2T)^2 = 0;$$

elle se compose donc :

1° De la courbe de quatrième classe elle-même;

2° D'une courbe de sixième ordre, dont l'équation est

$$\theta^3 - \theta S - 2T = 0.$$

Les courbes de sixième ordre contenues dans l'équation précédente se rattachent, on le voit, étroitement aux points de rebroussement de la courbe fondamentale; et il est remarquable qu'on y soit conduit par la considération de courbes, dont la définition est tirée de l'étude des points doubles.

Je m'arrêterai ici dans cette étude, ayant voulu seulement, dans cette courte Note, indiquer la voie nouvelle où l'on était conduit, pour l'étude des courbes de quatrième classe, par la considération de la forme biquadratique F et de ses divers covariants simples ou doubles.

SUR LA

REPRÉSENTATION DES FORMES BINAIRES

DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE.

Bulletin de la Société Philomathique; 1872.

On peut représenter une forme binaire sur une ligne droite par n points de cette droite correspondant aux racines de l'équation que l'on obtient en égalant la forme à zéro. On peut, dans ce but, employer aussi une courbe quelconque, plane ou gauche, de genre zéro, et un grand nombre de propriétés du système de points situés sur cette courbe, que j'appellerai *courbe fondamentale,* se déduiront immédiatement de celles des formes qu'ils représentent.

La courbe fondamentale étant choisie, on pourra aussi, d'une façon plus simple, représenter des groupes de points (ou des formes) par un certain nombre d'éléments (points ou droites) qui pourront les déterminer; ce mode de représentation variera d'ailleurs suivant la nature de la courbe choisie.

Étant données deux formes de même degré f et φ, j'appellerai, pour abréger, *faisceau de ces formes* l'ensemble des formes comprises dans l'expression $f + \lambda\varphi$; un faisceau est évidemment déterminé quand on connaît deux des formes qu'il contient.

Pour éclaircir ceci par un exemple, prenons une conique H pour courbe fondamentale; une forme quadratique sera déterminée par deux points de cette conique, ou bien, si l'on veut, par la droite qui joint ces deux points. C'est ce dernier mode de représentation que nous emploierons [*voir,* à ce sujet, un remarquable article de M. Weyr, *sur l'involution du degré supérieur,* (*Crelle,* t. LXXII)]. Cela posé, on voit que toutes les formes quadratiques d'un faisceau sont représentées par des droites concourant en un même point qui représentera ce faisceau. D'où l'on déduit immédiatement que la propriété connue de l'hexagone de Pascal peut s'énoncer algébriquement de la façon suivante :

« Étant donnée une équation du sixième degré $f(x) = 0$ dont les racines soient a_i, si l'on pose, pour abréger,

$$A_{hk} = (x - a_h)(x - a_k),$$

on pourra déterminer six facteurs numériques λ, μ, λ', μ', λ'' et μ'' de telle sorte que l'on ait identiquement

$$\lambda A_{12} + \mu A_{45} = \lambda' A_{23} + \mu' A_{56} = \lambda'' A_{34} + \mu'' A_{16}. \text{ »}$$

Cette propriété de six points d'une droite appliquée à une conique donne le théorème de Pascal; appliquée à une cubique, elle fournit à la fois des propriétés de six points quelconques de cette courbe (et, par conséquent, de six points quelconques de l'espace) et des propriétés de sept points quelconques situés sur cette cubique.

Dans ce qui suit, je considérerai spécialement une cubique gauche fondamentale K. Une forme quadratique sera déterminée par deux points de cette courbe et représentée par la sécante qui joint ces deux points. Les droites représentatives d'un faisceau de formes quadratiques sont les génératrices (sécantes de la cubique) d'une quadratique passant par K; une telle surface représentera donc un faisceau de formes quadratiques.

Cela posé, la propriété que je viens d'énoncer relativement aux racines de l'équation du sixième degré donnera immédiatement la proposition suivante :

« Étant pris par sept points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sur K, il y existe une droite D (sécante de la cubique) qui rencontre les neuf droites contenues dans les deux Tableaux suivants :

E.....	3(12)(54)	1(23)(56)	2(34)(16)
	6(12)(54)	4(23)(56)	5(34)(16)
F.....	7(12)(54)	7(23)(56)	7(34)(16)

» La droite D rencontre donc les six droites contenues dans le Tableau E, ce qui fournit une propriété de six points quelconques de l'espace; (cette propriété se rattache d'ailleurs à de belles propositions données par M. P. Serret sur les cubiques gauches).

» Le Tableau F montre en outre que, la droite D ayant été déterminée au moyen des points 1, 2, 3, 4, 5 et 6, tout plan sécant mené par D rencontre les côtés de l'hexagone, dont ils sont les sommets, en six points situés deux à deux sur trois droites concourantes.

» Le point de concours décrit, lorsqu'on fait varier le plan, la cubique gauche déterminée par les six points.

» Dans ce qui précède, 3(12)(54) désigne la droite qui, passant par le point 3, rencontre les droites 12 et 54; les autres notations ont une signification analogue. »

On peut aussi énoncer ces résultats de la façon suivante : « Un hexagone étant inscrit dans une cubique, par la courbe et chaque couple de côtés opposés de l'hexagone, on peut faire passer une quadrique; les trois quadriques ainsi obtenues ont une génératrice commune qui est une sécante de la cubique. » Une forme cubique est déterminée par trois points de K; les plans osculateurs de la courbe en ces points passent par un point p situé, comme on le sait par un beau théorème de M. Chasles, dans le plan P qui contient les trois points. Je dirai que le point p et le plan P sont associés; si le point p parcourt une droite, le plan P tourne autour d'une autre droite qui est associée à la première. Je représenterai une forme cubique par le point associé au plan qui contient les trois points de K qui la déterminent.

Une forme cubique représentée par un point p est déterminée par les trois points de contact a, b, c des plans osculateurs que l'on peut mener de ce point à la courbe. Si l'on prend les conjugués harmoniques de chacun des points a, b, c par rapport aux deux autres, on obtient un autre système de trois points qui détermine le covariant cubique de la forme; les plans osculateurs en ces points se coupent en un point p' représentatif du covariant.

Cela posé, les deux points p et p' sont situés sur une même sécante de la cubique et partagent harmoniquement le segment intercepté par la courbe sur cette sécante. Je dirai que les deux points se correspondent par rapport à la cubique.

Le faisceau de la forme représentée par le point p est représenté par la sécante qui passe par ce point.

J'ajouterai la remarque suivante :

« Le plan polaire d'un point donné relativement à la surface développable S, dont K est l'arête de rebroussement, est le plan associé au point correspondant. »

Étant données deux formes cubiques représentées par les points p et q, les différentes formes contenues dans le faisceau qu'elles déterminent sont représentées par les différents points de la droite pq. Une droite, dans l'espace, représentera donc un faisceau de formes cubiques.

Si une droite rencontre une génératrice de S, leur point de rencontre représente une forme cubique ayant un facteur carré. D'où cette conséquence :

« Une droite (représentant un faisceau) rencontre quatre génératrices de S; les quatre points où ces droites touchent K représentent le Jacobien du réseau. »

Étant donnée une forme biquadratique F représentée par quatre points de K, menons les tangentes en ces points. Ces quatre droites n'étant jamais sur une même quadrique, il n'y a que deux droites D et D' qui les rencontrent toutes.

Donc F est le Jacobien des deux faisceaux de formes cubiques, lesquels sont représentés par les droites D et D'.

Ces deux droites sont associées par rapport à la cubique. Je représenterai la forme F par ces deux droites ou simplement par l'une d'entre elles, puisque par là même l'autre sera déterminée.

SUR L'APPROXIMATION

DES

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

AU MOYEN DE FRACTIONS RATIONNELLES;

Bulletin de la Société mathématique; 1877.

La méthode que je développe dans cette Note, pour les cas les plus simples, s'applique sans difficulté aux fonctions de la forme e^{W}, où W désigne une fonction rationnelle quelconque de x, et aux fonctions de la forme

$$(ax+b)^{\alpha}(a'x+b')^{\alpha'}\ldots,$$

où α, α', ... désignent des quantités arbitraires quelconques.

Le principe que j'ai mis en usage est le suivant : $F(x)$ étant une fonction donnée et $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ la fraction rationnelle dont le dénominateur est d'un degré donné et qui se rapproche le plus de la valeur de la fonction, je cherche à établir entre $\varphi(x)$, $f(x)$ et leurs dérivées du premier ordre une relation algébrique qui soit linéaire par rapport à l'une de ces fonctions, $\varphi(x)$ par exemple, et par rapport à sa dérivée.

Cela posé, en considérant pour un instant $f(x)$ comme connue, et $\varphi(x)$ comme une fonction inconnue, on aura une équation linéaire du premier ordre que l'on saura intégrer au moyen d'une quadrature. Comme le résultat de l'intégration est connu d'avance, il suffira de déterminer à quelles conditions doit satisfaire $f(x)$ pour que ce résultat soit de la forme voulue.

On déterminera généralement ainsi une équation linéaire et du second ordre à laquelle satisfera le polynome $f(x)$; cette équation admet une seconde solution qui s'exprime facilement au moyen du polynome $\varphi(x)$, ou encore, si l'on pose

$$f(x)F(x) = \varphi(x) + R,$$

au moyen de R, comme l'a fait voir M. Christoffel [1] relativement aux polynomes de Legendre.

I.

Développement de $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

1. Soit

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad [2],$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ désignent respectivement des polynomes du degré n et du degré $(n-1)$.

On en déduit

$$\log\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \log\varphi(x) - \log f(x) + \left(\frac{1}{x^{2n}}\right),$$

parce que $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est du degré (-1) en x; puis, en prenant les dérivées des deux nombres,

$$-\frac{x}{x^2-1} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

et

$$(1) \qquad x\varphi(x)f(x) + (x^2-1)[f(x)\varphi'(x) - \varphi(x)f'(x)] = \mathrm{A},$$

A désignant une constante.

Si, dans cette équation, on regarde $f(x)$ comme connue, on a, pour déterminer $\varphi(x)$, une équation linéaire et du premier ordre; en l'intégrant et négligeant d'abord le second membre, on sera conduit à poser

$$(2) \qquad \varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}z,$$

(1) *Ueber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben* (*Journal de Crelle*, t. LV).

(2) Pour abréger, je désignerai dans tout ce qui suit par $\left(\frac{1}{x^m}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme en $\frac{1}{x^m}$, et par (x^m) une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^m.

z étant déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dx}f^2(x)\sqrt{x^2-1} = \mathrm{A},$$

d'où

$$(3) \qquad z = \int\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{x^2-1}\,f^2(x)}dx,$$

ou encore, si l'on désigne par α, β, ... les racines de l'équation $f(x)=0$, et si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{A}}{f^2(x)} = \sum\frac{p}{(x-\alpha)^2} + \sum\frac{q}{x-\alpha},$$

$$z = \sum\int\left[\frac{p}{\sqrt{x^2-1}(x-\alpha)^2} + \frac{q}{\sqrt{x^2-1}(x-\alpha)}\right]dx,$$

ou encore, en effectuant une intégration par parties,

$$\begin{aligned} z = \sum\Bigg\{ & -\frac{p}{(x-\alpha)\sqrt{x^2-1}} \\ & + \int\left[\frac{q}{(x-\alpha)\sqrt{x^2-1}} - \frac{px}{(x-\alpha)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right]dx\Bigg\} \\ = \sum & \left[-\frac{p}{(x-\alpha)\sqrt{x^2-1}} + \int\frac{q(x^2-1)-px}{(x-\alpha)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx\right]. \end{aligned}$$

On déduit de là facilement que z se compose d'une partie algébrique, d'une expression de la forme

$$\int\frac{\mathrm{P}x+\mathrm{Q}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$$

et de termes de la forme

$$\int\frac{q(\alpha^2-1)-p\alpha}{(x-\alpha)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

Chacun de ces termes doit évidemment être nul; or un calcul facile donne

$$\frac{p}{-f'(\alpha)} = \frac{q}{f''(\alpha)};$$

on a donc la relation

$$(\alpha^2-1)f''(\alpha) + \alpha f'(\alpha) = 0,$$

qui doit avoir lieu pour toute racine de l'équation $f(x)=0$; d'où il suit que $f(x)$ satisfait à une équation différentielle du second ordre de la forme

$$(x^2-1)y''+xy'+\mathrm{P}y=0.$$

La valeur de P s'obtient immédiatement en écrivant que le coefficient de x^n, dans le premier membre, est égal à zéro. On obtient ainsi l'équation bien connue

$$(x^2-1)y''+xy-n^2y=0. \tag{4}$$

2. Puisque le polynome $f(x)$ est une solution de l'équation (4), on obtiendra une seconde solution de cette équation en posant

$$y=f(x)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\,f^2(x)},$$

ou bien, en vertu de l'équation (3),

$$y=f(x)z,$$

et, en vertu de l'équation (2),

$$y=\varphi(x)\sqrt{x^2-1}.$$

L'intégrale générale de l'équation (4) est donc

$$\mathrm{A}f(x)+\mathrm{B}\varphi(x)\sqrt{x^2-1}.$$

3. Supposons maintenant que, dans l'équation (1), $\varphi(x)$ soit regardée comme connue; pour intégrer cette équation, nous posons

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}\,\varphi(x)t,$$

t étant déterminée par l'équation différentielle

$$-\frac{dt}{dx}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\varphi^2(x)=\mathrm{A},$$

d'où

$$-t=\int\frac{\mathrm{A}\,dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\varphi^2(x)}.$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{A}}{\varphi^2(x)}=\sum\frac{p}{(x-\alpha)^2}+\frac{q}{(x-\alpha)},$$

α, β, γ, ... désignant les racines de l'équation $\varphi(x)=0$, un calcul entièrement analogue à celui que j'ai développé plus haut montre que l'on doit avoir pour chacune des racines

$$q(\alpha^2-1)-3p\alpha=0$$

et, par suite,

$$(\alpha^2-1)\varphi''(\alpha)+3\alpha\varphi'(\alpha);$$

d'où l'on conclut que $\varphi(x)$ est une solution de l'équation différentielle du second ordre

$$(x^2-1)u''+3xu'+(1-n^2)u=0. \tag{5}$$

Si l'on remarque maintenant que cette équation n'est autre que la dérivée de l'équation (4), dans laquelle on aurait remplacé y' par u, on en conclut qu'à un facteur numérique près $\varphi(x)$ est égal à $f'(x)$.

Il est clair du reste, ce qui est facile à vérifier, que l'équation (5) se déduit aussi de l'équation (4) par la substitution

$$y=u\sqrt{x^2-1}.$$

II.

Développement de $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m$.

4. Soit m une quantité quelconque; posons

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m+\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ désignant des polynomes entiers du degré n.

On en déduit

$$m\log\frac{x+a}{x+b}=\log\varphi(x)-\log f(x)+\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right);$$

puis, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\frac{m(b-a)}{(x+a)(x+b)}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\frac{f'(x)}{f(x)}+\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right),$$

d'où

$$(6)\quad m(b-a)\varphi(x)f(x)+(x+a)(x+b)[\varphi(x)f'(x)-f(x)\varphi'(x)]=\mathrm{A},$$

A désignant une constante.

Si dans cette équation on regarde $f(x)$ comme connue, on a, pour déterminer $\varphi(x)$, une équation linéaire et du premier ordre; en l'intégrant et négligeant d'abord le second membre on posera

$$(7)\qquad \varphi(x)=f(x)\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m z,$$

z étant déterminée par la relation

$$(8)\qquad -z=\int\frac{\mathrm{A}(x+b)^{m-1}}{(x+a)^{m+1}f^2(x)}\,dx.$$

On doit chercher quelle forme doit avoir $f(x)$ pour que z ait une expression de la forme donnée par la relation (7); m étant quelconque, on y parviendrait aisément en suivant une marche analogue à celle que j'ai suivie dans le paragraphe précédent; mais on parviendra plus vite à l'équation du second ordre à laquelle satisfait $f(x)$ en supposant que m est un nombre entier.

Dans ce cas, je ferai remarquer d'abord qu'en vertu de l'équation (6), $f(x)$ ne peut être divisible par $(x+a)$, car autrement ce binome diviserait la constante A qui n'est pas nulle; il est clair également que $f(x)=0$ a toutes ses racines distinctes. En appelant donc α, β, ... les racines de cette équation, on aura un développement de la forme

$$\frac{\mathrm{A}(x+b)^{m-1}}{(x+a)^{m+2}f^2(x)}=\sum\frac{p}{(x-\alpha)^2}+\sum\frac{q}{x-\alpha}$$
$$+\frac{\mathrm{A}_m}{(x+a)^{m+1}}+\frac{\mathrm{A}_{m-1}}{(x+a)^m}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_0}{x+a};$$

et, pour que z ait la forme donnée par la relation (7), il faut que $\mathrm{A}_0=0$, et ensuite que $q=0$ pour toutes les racines de l'équation $f(x)=0$. En tenant compte seulement de cette dernière condition, le calcul de q montre facilement que, pour toutes les racines de l'équation $f(x)=0$, on doit avoir

$$(\alpha+a)(\alpha+b)f''(\alpha)+[2\alpha-m(a-b)+a+b]f'(\alpha)=0;$$

d'où l'on voit que $f(x)$ satisfait à l'équation du second ordre

$$(9)\quad (x+a)(x+b)y''+[2x-m(a-b)+a+b]y'-n(n+1)y=0.$$

5. Cette équation pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x+a)^{m+1}}{\mathrm{A}(x+b)^{m-1}}y'\right]+\mathrm{P}y=0,$$

on voit que le polynome $f(x)$ étant une de ses solutions, une autre sera donnée par la formule

$$y=f(x)\int\frac{\mathrm{A}(x+b)^{m-1}}{(x+a)^{m+1}f^2(x)}\,dx,$$

ou, en vertu des équations (8) et (7),

$$y=-\varphi(x)\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^m.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(x)\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m=\varphi(x)+\mathrm{R},$$

une seconde solution sera également donnée par l'équation

$$y=\mathrm{R}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^m.$$

6. L'équation à laquelle satisfait le polynome $\varphi(x)$ s'obtiendrait par la même méthode; mais on voit immédiatement qu'elle se déduit de la première en changeant m en $-m$; cette équation est donc

$$(x+a)(x+b)u''+[2x+m(a-b)+a+b]u'-n(n+1)u=0.$$

Elle se déduit évidemment de l'équation (9), et il devient facile de le constater, par la substitution

$$y=u\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^m.$$

7. Pour obtenir sous forme explicite les polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$, je remarque qu'en posant

$$x=(a-b)\xi-a$$

l'équation (9) devient

$$(\xi-\xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2}+(m+1-2\xi)\frac{dy}{d\xi}+n(n+1)y=0;$$

cette équation est un cas particulier de celle qui définit la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$,

$$(\xi-\xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\xi]\frac{dy}{d\xi}-\alpha\beta y=0;$$

on a

$$\gamma=m+1,\quad \alpha=-n \quad \text{et} \quad \beta=n+1.$$

Le polynome $f(x)$ sera donc donné par la formule

$$f(x)=1-\frac{n(n+1)}{m+1}\left(\frac{x+a}{a-b}\right)+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.(m+1)(m+2)}\left(\frac{x+a}{a-b}\right)^2$$
$$\pm\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(m+1)(m+2)-(m+n)}\left(\frac{x+a}{a-b}\right)^n.$$

Le polynome $\varphi(x)$ s'obtiendrait, à un facteur numérique près, en changeant le signe de m dans la formule précédente.

8. Comme application, supposons $a=1$ et $b=-1$, on aura alors

$$f(x)=1-\frac{n(n+1)}{m+1}\left(\frac{1+x}{2}\right)$$
$$+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.(m+1)(m+2)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^2-\ldots$$

et

$$\varphi(x)=\left[1-\frac{n(n+1)}{1-m}\left(\frac{1+x}{2}\right)\right.$$
$$+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.(1-m)(2-m)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^2+\ldots$$
$$\left.\times\frac{(1-m)(2-m)\ldots(n-m)}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}(-1)^n\right].$$

Comme $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m$ se change en son inverse quand on change x en $-x$, on en conclut que les polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$, donnés par les formules précédentes, sont liés par la relation

$$\varphi(x)=f(-x).$$

Faisons, par exemple, $m=\frac{1}{2}$ et $n=3$, il viendra

$$f(x)=1+4(1-x)+4(1+x)^2-\frac{8}{7}(1+x)^3$$

et

$$\varphi(x)=-\frac{1}{7}[1-12(1+x)+20(1+x)^2-8(1+x)^3],$$

ou, en réduisant,

$$f(x)=\frac{1}{7}(-1+4x+4x^2-8x^3)$$

et

$$\varphi(x)=\frac{1}{7}(-1-4x+4x_2+8x^3).$$

Si l'on désigne par S_n la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $f(x)=8x^5-4x^2-4x+1=0$, on doit avoir

$$S_1=S_3=S_5=\frac{1}{2} \quad (^1).$$

C'est ce qu'il est facile de vérifier au moyen des formules de Newton.

9. Si l'on considère l'expression $\frac{1}{m}\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m-1\right]$, son développement en fraction continue donnera des réduites dont le dénominateur $f(x)$ sera le même que celui des réduites auxquelles conduit le développement de $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m$.

En faisant, dans l'équation (9), $b=-1$ et $a=+1$, on voit donc que ce dénominateur satisfait à l'équation différentielle

$$(9)' \qquad (x^2-1)y''+2(x-m)y'-n(n+1)y=0;$$

et, de ce que j'ai dit plus haut, il résulte qu'en posant

$$f(x)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m=\varphi(x)+R$$

l'équation (9)' a encore pour solution $R\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^m$.

---

(1) *Voir* ma Note *Sur un problème d'Algèbre* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. V).

Je saisis cette occasion pour déclarer que M. Borchardt était déjà parvenu antérieurement aux résultats renfermés dans cette Note.

Si nous supposons maintenant que m tende vers zéro,

$$\frac{1}{m}\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m - 1\right]$$

a pour limite $\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; l'équation (9)' devient l'équation bien connue qui définit les polynomes de Legendre et l'on voit, comme l'a fait voir M. Christoffel, que R en est une solution.

10. Considérons maintenant l'expression

$$\left[1+\frac{\alpha+\beta x}{m(\gamma+\delta x)}\right]^m = \left[\frac{(m\delta+\beta)x+m\gamma+\alpha}{m\gamma+m\delta x}\right]^n$$
$$= \left(\frac{m\delta+\beta}{m\delta}\right)^m \left(\frac{x+\frac{m\gamma+\alpha}{m\delta+\beta}}{x+\frac{\gamma}{\delta}}\right)^m;$$

pour avoir son développement en fraction continue, nous poserons

$$\frac{m\gamma+\alpha}{m\delta+\beta} = a \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{\delta} = b;$$

le dénominateur de degré n de la fraction satisfera à l'équation suivante, que l'on déduit immédiatement de l'équation (9) :

$$\left(x+\frac{m\gamma+\alpha}{m\delta+\beta}\right)\left(x+\frac{\gamma}{\delta}\right)$$
$$+\left[2x-\frac{m(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\delta(m\delta+\beta)}+\frac{m\gamma+\alpha}{m\delta+\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right] - n(n+1)y = 0.$$

Faisons maintenant croître indéfiniment le nombre m, la fonction $\left[1+\frac{\alpha+\beta x}{m(\gamma+\delta x)}\right]^m$ aura pour limite $e^{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}$, et l'équation précédente deviendra

$$(11)\quad (\gamma+\delta x)^2 y'' + [2\delta(\gamma+\delta x)-(\alpha\delta-\beta\gamma)]y' - n(n+1)\delta^2 y = 0.$$

Telle est l'équation différentielle à laquelle satisfait le dénominateur $f(x)$ d'une réduite de la fonction $e^{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}$; en posant

$$f(x)e^{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}} = \varphi(x) + \mathrm{R},$$

$\varphi(x)$ désignant le numérateur de la réduite, une deuxième solution de cette équation sera donnée par la formule

$$y = \varphi(x)e^{-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}},$$

ou encore par celle-ci

$$y = \mathrm{R}e^{-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}.$$

De ce que j'ai dit plus haut, il résulte aussi que $\varphi(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(\gamma+\delta x)^2 u'' + [2\delta(\gamma+\delta x)+(\alpha\delta-\beta\gamma)]u' - n(n+1)\delta^2 u = 0,$$

et cette équation se déduit de l'équation (11) par la substitution

$$y = ue^{-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}.$$

III.

Développement de $e^{\mathrm{F}(x)}$.

11. Pour traiter un cas un peu plus général, considérons la fonction $e^{\mathrm{F}(x)}$, où $\mathrm{F}(x)$ désigne un polynome quelconque de degré m et posons

$$e^{\mathrm{F}(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + (x^{2n+1}),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ désignant des polynomes du degré n.

On en déduit

$$\mathrm{F}(x) = \log\varphi(x) - \log f(x) + (x^{2n+1})$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} + (x^{2n}),$$

puis

$$(12)\qquad \mathrm{F}'(x)\varphi(x)f(x) - \varphi'(x)f(x) + \varphi(x)f'(x) = x^{2n}\Theta(x),$$

$\Theta(x)$ désignant un polynome du degré $m-1$.

Si dans cette équation on considère $f(x)$ comme connu, on a une équation linéaire et du premier ordre par rapport à $\varphi(x)$. On l'intégrera en considérant d'abord le second membre comme égal à zéro, et posant

$$\varphi(x) = e^{F(x)} f(x) z, \tag{13}$$

z étant déterminé par la relation

$$-z = \int \frac{e^{-F(x)} x^{2n} \Theta(x)\, dx}{f^2(x)}. \tag{14}$$

En désignant par α, β, ... les diverses racines de l'équation $f(x) = 0$, on pourra poser

$$\frac{x^{2n}\Theta(x)}{f^2(x)} = P + \sum \frac{p}{(x-\alpha)^2} + \sum \frac{q}{x-\alpha},$$

P désignant un polynome du degré $(m-1)$ en x; d'où

$$-z = \int e^{-F(x)} P\, dx + \sum \int \frac{e^{-F(x)} p\, dx}{(x-\alpha)^2} + \sum \int \frac{e^{-F(x)} q\, dx}{x-\alpha},$$

ou encore, en intégrant par parties le second terme de la relation précédente,

$$-z = \int e^{-F(x)} P\, dx - \sum \int \frac{pe^{-F(x)}}{x-\alpha} + \sum \int e^{-F(x)} \frac{q - pF'(x)}{x-\alpha}\, dx,$$

ou encore

$$\begin{aligned} -z = \int e^{-F(x)} P\, dx &- \sum \int \frac{pe^{-F(x)}}{x-\alpha} \\ &- \sum \int e^{-F(x)} \frac{p[F'(x) - F'(\alpha)]}{x-\alpha}\, dx \\ &+ \sum \int e^{-F(x)} \frac{q - pF'(\alpha)}{x-\alpha}\, dx. \end{aligned}$$

Si l'on examine cette expression de z, on voit que, pour qu'elle ait la valeur assignée par la relation (13), on doit avoir, pour toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$,

$$q - pF'(\alpha) = 0.$$

Or un calcul facile donne

$$\frac{p}{f'(\alpha)} = \frac{q}{\left[\frac{2n}{\alpha} + \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)}\right] f'(\alpha) - f''(\alpha)};$$

on aura donc, pour toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$,

$$f''(x) - \left[\frac{2n}{\alpha} + \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} - F'(\alpha)\right] f'(\alpha) = 0;$$

d'où il suit que $f(x)$ satisfait à une équation linéaire et du second ordre de la forme

$$y'' + \left[F'(x) - \frac{2n}{x} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] y' + H(x) y = 0. \tag{15}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{F(x)}}{x^{2n}\Theta x)} y'\right] + H_1(x) y = 0;$$

on en conclut qu'une seconde solution est donnée par la formule

$$y = f(x) \int \frac{e^{-F(x)} x^{2n} \Theta(x)}{f^2(x)}\, dx,$$

ou, en vertu des équations (13) et (14),

$$y = \varphi(x) e^{-F(x)}.$$

12. On déterminerait de même l'équation du second ordre à laquelle satisfait $\varphi(x)$; sans refaire tous les calculs précédents, on voit immédiatement que cette équation est de la forme

$$u'' - \left[F'(x) + \frac{2n}{x} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] u' + K(x) u = 0; \tag{16}$$

c'est du reste la transformée de l'équation (15) quand on pose

$$y = ue^{-F(x)}.$$

Effectuant cette transformation sur l'équation (15), il vient

$$\begin{aligned} u'' &- \left[F'(x + \frac{2n}{x} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] u' \\ &+ \left[H(x) + \frac{2n}{x} F'(x) + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} F'(x) - F''(x)\right] u = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

13. Nous avons encore, pour former l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait $f(x)$, à déterminer le polynome

$\Theta(x)$ et la fraction rationnelle $H(x)$, qui est de la forme

$$\frac{K(x)}{x\Theta(x)},$$

$K(x)$ désignant un polynome du degré $(2m-2)$. A cet effet, si nous posons

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots$$

et

$$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots,$$

et si nous désignons par α, β, γ, ... les coefficients inconnus des polynomes Θ et K, les équations (16) et (17) permettront d'exprimer, au moyen de α, β, γ, ... les coefficients a_0, a_1, a_2, ..., b_0, b_1, b_2, ...

D'ailleurs, l'équation (12) donne également des relations entre ces coefficients et les coefficients inconnus de Θ; de ces relations on déduira facilement les quantités α, β, γ, ...

Dans une prochaine Note, je communiquerai à la Société le résultat de mes recherches sur le développement de la fonction e^{ax+bx^2} et de la fonction $e^{ax^2+bx^3}$.

SUR LE

DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE

DE $e^{\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Bulletin de la Société mathématique; 1877.

1. Posons

$$e^{\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ désignant des polynomes du degré n et $\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$ une série développée suivant les puissances décroissantes de $\frac{1}{x}$ et commençant par un terme de la forme $\frac{\varepsilon}{x^{2n+1}}$.

Comme $e^{\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)}$ se change en son inverse quand on change x en $-x$, il en résulte qu'à un facteur numérique près $\varphi(x)$ est égal à $f(-x)$; d'ailleurs pour $x = \pm\infty$, le rapport $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ se réduit à l'unité; on a donc

$$\varphi(x) = (-1)^n f(-x).$$

En employant la méthode que j'ai exposée dans une Note précédente [1], on obtient facilement l'équation différentielle suivante, à laquelle satisfait le polynome $f(x)$,

$$(1+x^2)y'' + (2x-1)y' - n(n+1)y = 0. \tag{1}$$

Le polynome $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$(1+x^2)u'' + (2x+1)u' - n(n+1)u = 0,$$

équation qui se déduit de la précédente par la substitution

$$y = ue^{-\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)},$$

[1] *Sur l'approximation d'une fonction d'une variable au moyen de fractions rationnelles* (page 277).

ou encore

$$y = u e^{\operatorname{arc\,tang} x}.$$

On en conclut que l'intégrale générale de l'équation (1) est donnée par la formule

$$y = \mathrm{A} f(x) + \mathrm{B} f(-x) e^{\operatorname{arc\,tang} x},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

2. Posons

$$x = i(1 - 2z),$$

d'où

$$z = \frac{1 + ix}{2},$$

l'équation (1) deviendra

$$(z - z^2) y'' + \left(1 + \frac{i}{2} - 2z\right) y' + n(n+1) y = 0,$$

équation qui définit une série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, pour laquelle on a

$$\gamma = 1 + \frac{i}{2}, \quad \alpha = -n \quad \text{et} \quad \beta = n + 1.$$

Cette série est évidemment un polynome du degré n en z; on a par suite, en désignant par K un facteur indépendant de x,

$$f(x) = \mathrm{K} F\left(-n, n+1, \gamma, \frac{1 + ix}{2}\right).$$

Convenons de déterminer le polynome $f(x)$ par la condition que $\frac{f(x)}{x^n}$ soit, pour $x = +\infty$, égal à

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{2^n . 1 . 2 . 3 \ldots n};$$

en divisant les deux membres de la relation précédente par x^n et en faisant croître indéfiniment x, il viendra

$$1 = \mathrm{K} \frac{i^n}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

d'où

$$F(-n, n+1, \gamma, z) = \frac{i^n f(x)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

Si, pour plus de clarté, nous représentons $f(x)$ par V_n, et si nous posons, pour abréger,

$$F(-n, n+1, \gamma, z) = F(-n),$$

on déduit de là

$$(2) \qquad \frac{F(-n)}{V_n \dfrac{i}{\gamma + n - 1}} = \frac{F(-n+1)}{V_{n-1}} = -\frac{F(-n-1)}{V_{n+1}(\gamma+n)(\gamma+n-1)}.$$

3. Cela posé, en désignant respectivement par Φ, Φ_1 et Φ_2 les trois fonctions

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z), \quad F(\alpha-1, \beta+1, \gamma, z) \quad \text{et} \quad F(\alpha+1, \beta-1, \gamma, z),$$

on déduit facilement, des relations données par Gauss [1], la relation suivante :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left[\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha) z + \frac{\alpha(\gamma - \alpha - 1)}{\beta - \alpha - 1} + \frac{(\gamma - \alpha)(\alpha - 1)}{\beta - \alpha + 1}\right] \Phi \\ &\qquad - \frac{\beta(\gamma - \alpha)}{\beta - \alpha + 1} \Phi_1 - \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\beta - \alpha - 1} \Phi_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si dans cette relation on fait

$$z = \frac{1 + ix}{2}, \quad \alpha = -n, \quad \beta = n + 1, \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + \frac{i}{2},$$

Φ, Φ_1 et Φ_2 deviennent respectivement $F(-n)$, $F(-n-1)$, $F(-n+1)$, et l'on obtient l'équation

$$-i(2n+1) x F(-n) - (\gamma + n) F(-n-1) + (\gamma - n - 1) F(-n+1) = 0.$$

Remplaçons, dans cette équation, $F(-n)$, $F(-n+1)$ et $F(-n-1)$ par les valeurs proportionnelles déduites des relations (2) et γ par sa valeur $1 + \frac{i}{2}$, il viendra

$$(4) \qquad V_{n+1} = -(2n+1) x V_n + \left(n^2 + \frac{1}{4}\right) V_{n-1}.$$

4. Déduisons de (4) les valeurs de V_{n+1}, V'_{n+1} et V''_{n+1} et portons-les dans l'identité

$$V''_{n+1} + (2x+1) V'_{n+1} - (n+1)(n+2) V_{n+1} = 0;$$

[1] *Disquisitiones generales circa seriem* (*Gauss Werke*, t. III, p. 130).

il viendra, toutes réductions faites,

$$(5) \qquad 2(1+x^2)V'_n - (2nx-1)V_n + 2\left(n^2+\frac{1}{4}\right)V_{n-1} = 0.$$

5. Des formules précédentes on déduit les valeurs suivantes des polynomes V_n :

$$V_0 = 1, \quad V_1 = \frac{1}{2} - x, \quad V_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}x + 3x^2, \quad \ldots.$$

Si l'on désigne, en général, par S_m la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $V_n = 0$, il est clair que l'on aura

$$S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = \frac{1}{2}$$

et

$$S_2 = S_4 = S_6 = \ldots = -\frac{1}{2},$$

m étant au plus égal à $2n-1$.

6. De la relation (4) résulte le développement suivant de $e^{\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)}$ en fraction continue :

$$e^{\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 - \cfrac{1}{\frac{1}{2} - x + \cfrac{\left(1+\frac{1}{4}\right)}{-3x + \cfrac{4+\frac{1}{4}}{-5x + \cfrac{9+\frac{1}{4}}{-7x + \ldots}}}},$$

dont la loi est évidente.

7. Les considérations qui précèdent s'appliquent, sans aucun changement, au développement de la fonction $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m$, quelles que soient les quantités a, b et m.

Du reste, cette expression donne en particulier la fonction $e^{\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)}$ quand on y fait $a = i$, $b = -i$ et $m = -\frac{i}{2}$.

SUR LE

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION

SUIVANT LES PUISSANCES D'UN POLYNOME.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXVI; 1878.

1. Étant donné un polynome $F(z)$ de degré m, on peut développer une fonction quelconque de z suivant les puissances croissantes de ce polynome, les coefficients étant des polynomes en z du degré $(m-1)$, et Jacobi a donné [1] le moyen d'obtenir ces coefficients.

Cette sorte de développement a une importance particulière lorsqu'il s'agit d'évaluer des intégrales définies de la forme $\int f(xz)F(z)\,dz$ et de la forme $\int f(z-x)F(z)\,dz$, les limites de l'intégrale étant deux racines de l'équation $F(z) = 0$.

En m'occupant, à ce point de vue, du développement de e^{xz}, de $(z-x)^m$ et de $\log(z-x)$, j'ai été assez heureux pour rencontrer quelques-uns des résultats importants donnés récemment par M. Hermite, relativement à l'approximation des fonctions transcendantes par des fonctions rationnelles, notamment dans sa Lettre à M. Fuchs *Sur quelques équations différentielles*, et dans son mémorable Mémoire *Sur la fonction exponentielle*.

2. En m'en tenant ici à ce qui concerne la fonction exponentielle, soit

$$(1) \qquad e^{zx} = \Sigma(U_n + zV_n + \ldots + z^{n-1}W_n)\frac{F^n(z)}{1.2\ldots n};$$

en désignant par $a, b, \ldots, l$ les diverses racines de l'équation

[1] *Entwickelungen nach der Potenzen eines Polynoms* (*Journal de Borchardt*, t. LIII, p. 105).

$F(z) = 0$, on voit facilement que W_n est de la forme

$$M_1 e^{ax} + M_2 e^{bx} + \ldots + M_m e^{lx},$$

$M_1, M_2, \ldots, M_m$ étant des polynomes en x du degré n.

D'ailleurs la méthode de Jacobi montre que W_n est de l'ordre de x^{mn+n-1}; il en résulte que les polynomes $M_1, M_2, \ldots, M_m$ ont précisément les valeurs pour lesquelles l'expression précédente est de l'ordre le plus élevé possible; chacun de ces polynômes, renfermant en effet $(m+1)$ constantes arbitraires, les $(m+1)n$ constantes dont on dispose ne permettent d'annuler dans cette expression que les coefficients de $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{mn+n-2}$.

Ce point établi, en égalant les dérivées prises par rapport à z des deux membres de l'équation (1), on obtiendra facilement les relations qui permettent d'obtenir par voie récurrente les diverses fonctions W_n.

En égalant de même les dérivées prises par rapport à x, on obtiendra l'équation différentielle suivante, à laquelle satisfait la fonction W_n et où j'ai posé

$$F(x) = x^m + A x^{m-1} + \ldots + Kx + L,$$

$$x\left(\frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + K\frac{dy}{dx} + Ly\right)$$
$$- n\left(m\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (m-1)A\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + Ky\right) = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est évidemment $C_1, C_2, \ldots, C_m$ désignant des constantes arbitraires,

$$C_1 M_1 e^{ax} + C_2 M_2 e^{bx} + \ldots + C_m M_m e^{lx}.$$

Cette équation, du reste, peut s'intégrer directement. Il suffit, en effet, d'intégrer l'équation adjointe de Lagrange

$$\frac{d^m}{dx^m} x u - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(Ax - nm)u + \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}[Bx - n(m-1)A]u + \ldots = 0,$$

ou, en développant,

$$x\left(\frac{d^m u}{dx^m} - A\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} - \ldots \pm Lu\right)$$
$$+ (n+1)\left[m\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} - (m-1)A\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} - \ldots \mp Ku\right] = 0,$$

et la méthode de Laplace donne immédiatement les m intégrales de cette équation

$$\int_a^{\pm\infty} e^{-zx}F(z)\,dz, \quad \int_b^{\pm\infty} e^{-zx}F(z)\,dz, \quad \ldots, \quad \int_l^{\pm\infty} e^{-zx}F(z)\,dz.$$

On se trouve ainsi ramené à la considération des intégrales définies qui ont servi de point de départ à M. Hermite dans son Mémoire *Sur la fonction exponentielle.*

3. Pour considérer le cas le plus simple, soient

$$F(z) = z(z-1) \qquad \text{et} \qquad e^{zx} = \Sigma(U_n + zV_n)\frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n}.$$

On trouvera sans difficulté les relations suivantes :

$$U_n = \frac{xV_{n-1} - V_n}{2},$$

$$V_{n+1} + 2(2n+1)V_n - x^2 V_{n-1} = 0,$$

$$x\frac{d^2V_n}{dx^2} - (2n+x)\frac{dV_n}{dx} + nV_n = 0;$$

d'où l'on conclut sans peine

$$V_n = e^x x^{2n+1}(-1)^n \int_0^1 e^{-zx} z^n (z-1)^n,$$

et, si l'on pose

$$V_n = F_n(x)e^x - \Phi_n(x),$$

on voit que les fractions $\frac{\Phi_n(x)}{F_n(x)}$ sont les réduites résultant du développement de e^x en fraction continue.

4. Je mentionnerai encore, à cause de leur utilité dans diverses applications, et notamment dans la théorie des transcendantes de Bessel, les développements de e^{zx}, $\cos zx$ et $\sin zx$, suivant les puissances de (z^2+1) et suivant les puissances de (z^2+1). On les obtiendra facilement en suivant la méthode que j'ai indiquée plus haut.

SUR LE DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION

SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES D'UN POLYNOME.

Extrait du *Journal de Mathématiques de Crelle*, t. LXXXVIII; 1880.

I.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Étant donnée une fonction $f(z)$, développable suivant les puissances croissantes de z, et $F(z)$ désignant un polynome en z du degré m, on peut développer $f(z)$ suivant les puissances croissantes de $F(z)$ et poser

$$f(z) = A_0 + A_1 F(z) + \ldots + A_n F^n(z) + \ldots, \tag{1}$$

les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ étant des polynomes en z du degré $m-1$. Jacobi a donné la méthode qui suit pour obtenir ces coefficients (¹). On déduit de l'équation (1)

$$\frac{f(z)}{F^{n+1}(z)} = \frac{A_0}{F^{n+1}(z)} + \frac{A_1}{F^n(z)} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{F^2(z)} + \frac{A_n}{F(z)} + A_{n+1} + A_{n+2} F(z) + \ldots;$$

imaginons que toutes les fractions contenues dans cette équation soient développées suivant les puissances décroissantes de z, on voit que, dans le second membre, les termes de l'ordre de $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}, \ldots, \frac{1}{z^m}$ ne proviennent que du développement $\frac{A_n}{F(z)}$. Si donc on désigne

$$\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \ldots + \frac{B_m}{z^m},$$

(¹) *Entwickelung nach den Potenzen eines ganzen Polynoms* (*Journal de Crelle*, t. LIII, p. 103).

la partie du développement de $\frac{f(z)}{F^{(n+1)} z}$ qui renferme les puissances négatives de z inférieures en valeur absolue à $m = 1$, il en résulte que A_n est égal à la partie entière du produit

$$f(z)\left(\frac{B_1}{z} = \frac{B_2}{z_2} + \ldots + \frac{B_n}{z_n}\right).$$

2. Soit, en général, à développer la fonction $f(z, x)$ suivant les puissances croissantes du polynome $F(z)$.

Posons

$$f(z,x) = a_0 + a_1 z x + a_2 z^2 x^2 + \ldots + a_i z^i x^i + \ldots,$$

$$\frac{1}{F^{n+1}(z)} = \frac{b_0}{z^{mn+m}} + \frac{b_1}{z^{mn+m+1}} + \ldots + \frac{b_i}{z^{mn+m+1}}$$

et

$$f(zx) = \Sigma(U_n z^{m-1} + U_{n,1} z^{m-2} + \ldots + U_{n,m-1}) F^n(z).$$

On voit aisément que les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_m$ sont respectivement de l'ordre $mn + m - 1$, $mn + m - 2, \ldots, mn$ par rapport à la lettre x, et, de la méthode donnée par Jacobi, il résulte immédiatement que ces nombres désignent aussi l'ordre des fonctions

$$U_n, U_{n,1}, \ldots, U_{n,m-1}.$$

II.

DÉVELOPPEMENT DE e^{zx} SUIVANT LES PUISSANCES D'UN POLYNOME $F(z)$.

3. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les m racines de l'équation $F(z) = 0$; je supposerai qu'elles soient toutes inégales et poserai

$$e^{zx} = \Sigma(U_m z^{m-1} + U_{n,1} z^{m-2} + \ldots + U_{n,m-2} z + U_{n,m-1}) \frac{F^n(z)}{1.2.3\ldots n}. \tag{2}$$

En égalant entre elles les dérivées par rapport à z des deux membres de cette équation, il vient

$$x \sum (U_n z^{m-1} + U_{n,1} z^{m-2} + \ldots + U_{n,m-2} z + U_{n,m-1}) \frac{F^n(z)}{1.2.3\ldots n}$$
$$= \sum [(m-1) U_n z^{m-2} + (m-2) U_{n,1} z^{m-3} + \ldots + U_{n,m-2}] \frac{F^n(z)}{1.2.3\ldots n}$$
$$+ \sum (U_n z^{m-1} + U_{n,1} z^{m-2} + \ldots U_{n,m-2} z + U_{n,m-1}) F'(z) \frac{F^{n-1}(z)}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

ou encore, en posant

$$(2\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &(U_n z^{m-1} + U_{n,1} z^{m-2} + \ldots + U_{n,m-2} z + U_{n,m-1}) F'(z) \\ &= (A_n z^{m-2} + B_n z^{m-3} + \ldots + H_n z + K_n) F(z) \\ &\quad + \alpha_n z^{m-1} + \beta_n z^{m-2} + \ldots + \varkappa_n z + \lambda_n, \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} &x \sum (U_n z^{m-1} + U_{n,1} z^{m-2} + \ldots + U_{n,m-2} z + U_{n,m-1}) \frac{F_n(z)}{1.2.3\ldots n} \\ &= \sum [(m-1) U_n z^{m-2} + (m-2) U_{n,1} z^{m-3} + \ldots + U_{n,m-2}) \frac{F_n(z)}{1.2.3\ldots n} \\ &\quad + n \sum (A_n z^{m-2} + B_n z^{m-3} + \ldots + H_n z + K_n) \frac{F_n(z)}{1.2.3\ldots n} \\ &\quad + \sum (\alpha_n z^{m-1} + \beta_n z^{m-2} + \ldots + \varkappa_n z + \lambda_n) \frac{F^{n-1}(z)}{1.2.3\ldots(n-1)}; \end{aligned}$$

d'où les relations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x U_{n,m-1} &= U_{n,m-2} + n K_n + \lambda_{n+1}, \\ x U_{n,m-2} &= 2 U_{n,m-1} + n H_n + \varkappa_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x U_{n,1} &= (m-1) U_n + n A_n + \beta^{n-1}, \\ x U_n &= \alpha_{n+1}. \end{aligned}\right.$$

Comme les quantités $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+1}$ s'expriment linéairement en fonction de $U_{n+1}, U_{n+1,1}, \ldots, U_{n+1,m-1}$, on voit que ces coefficients sont de la forme

$$M + N x,$$

M et N étant des fonctions linéaires de $U_n, U_{n,1}, \ldots, U_{n,m-1}$.

Si d'ailleurs, dans l'équation (2), on fait successivement $z = z_1$, $z = z_2, \ldots$ et $z = z_m$, on a les relations

$$\begin{aligned} e^{z_1 x} &= U_0 z_1^{m-1} + U_{0,1} z_1^{m-2} + \ldots + U_{0,m-2} z_1 + U_{0,m-1}, \\ e^{z_2 x} &= U_0 z_2^{m-1} + U_{0,1} z_2^{m-2} + \ldots + U_{0,m-2} z_2 + U_{0,m-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^{z_m x} &= U_0 z_m^{m-1} + U_{0,1} z_m^{m-2} + \ldots + U_{0,m-2} z_m + U_{0,m-1}; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que $U_0, U_{0,1}, \ldots, U_{0,m-1}$ sont des fonctions linéaires de $e^{z_1 x}, e^{z_2 x}, \ldots, e^{z_m x}$ et à coefficients constants.

Par suite, $U_{n+1}, U_{n+1,1}, \ldots, U_{n+1,m-1}$ sont des fonctions linéaires de ces mêmes quantités, les coefficients étant des polynomes entiers en x du degré $n+1$.

4. Il résulte de ces considérations que U_n est de la forme

$$M_1 e^{z_1 x} + M_2 e^{z_2 x} + \ldots + M_m e^{z_m x},$$

les coefficients $M_1, M_2, \ldots, M_m$ étant des polynomes entiers en x du degré n.

D'après ce que j'ai dit plus haut (n° 2), on sait que le développement de U_n suivant les puissances croissantes de x commence par un terme de l'ordre de x^{mn+m-1}; d'où cette proposition importante :

Les polynomes $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *ont précisément les valeurs pour lesquelles l'expression précédente est de l'ordre le plus élevé possible.*

En effet, ces divers polynomes étant du degré n renferment seulement $m(n+1)$ coefficients arbitraires et, en disposant de ces coefficients, on ne peut annuler dans le développement de la fonction que le terme constant et les termes en $x, x^2, \ldots$ et x^{mn+m-2}.

La proposition est donc démontrée.

5. Les formules (3) permettent de calculer par voie récurrente les diverses fonctions U_n; il est facile d'obtenir l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre à laquelle satisfait U_n.

A cet effet, et pour simplifier les calculs, je supposerai d'abord que le polynome $F(z)$ est divisible par z. En égalant entre elles les dérivées par rapport à x de l'équation (2), il vient

$$\begin{aligned} &\sum \left(\frac{dU_n}{dx} z^{m-1} + \frac{dU_{n-1}}{dx} z^{m-2} + \ldots + \frac{dU_{n,m-2}}{dx} z + \frac{dU_{n,m-1}}{dx}\right) \frac{F^n(z)}{1.2.3\ldots n} \\ &= \sum (U_n z^m + U_{n,1} z^{m-1} + \ldots + U_{n,m-2} z^2 + U_{n,m-1} z) \frac{F^n(z)}{1.2.3\ldots n}; \end{aligned}$$

or, si l'on pose

$$F(z) = z^m + a z^{m-1} + b z^{m-2} + \ldots + l z,$$

on trouve aisément

$$\begin{aligned} &U_n z^m + U_{n,1} z^{m-1} + \ldots + U_{n,m-2} z^2 + U_{n,m-1} z \\ &= U_n F(z) + (U_{n,1} - a U_n) z^{m-1} + (U_{n,2} - b U_n) z^{m-2} + \ldots \\ &\quad + (U_{n,m-1} + l U_n) z. \end{aligned}$$

Portant cette valeur dans la relation précédente, on a

$$\begin{aligned}
&\sum\left(\frac{d\mathrm{U}_n}{dx}z^{m-1}+\frac{d\mathrm{U}_{n-1}}{dx}z^{m-2}+\ldots+\frac{d\mathrm{U}_{n,m-2}}{dx}z+\frac{d\mathrm{U}_{n,m-1}}{dx}\right)\frac{\mathrm{F}^n(z)}{1.2.3\ldots n}\\
=&\sum(n+1)\,\mathrm{U}_n\,\frac{\mathrm{F}^{n+1}(z)}{1.2.3\ldots(n+1)}\\
+&\sum\left[(\mathrm{U}_{n,1}-a\mathrm{U}_n)z^{m-1}+(\mathrm{U}_{n-2}-b\mathrm{U}_n)z^{m-2}+\ldots+(\mathrm{U}_{n,m-1}-l\mathrm{U}_n)z\right]\frac{\mathrm{F}^n(z)}{1.2.3\ldots n};
\end{aligned}$$

d'où les relations

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{U}_n}{dx}&=\mathrm{U}_{n,1}-a\mathrm{U}_n,\\
\frac{d\mathrm{U}_{n,1}}{dx}&=\mathrm{U}_{n,2}-b\,\mathrm{U}_n,\\
\frac{d\mathrm{U}_{n,m-2}}{dx}&=\mathrm{U}_{n,m-1}-l\,z,\\
\frac{d\mathrm{U}_{n,m-1}}{dx}&=n\,\mathrm{U}_{n-1},
\end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{U}_{n,1}&=\frac{d\mathrm{U}_n}{dx}+a\,\mathrm{U}_n,\\
\mathrm{U}_{n,2}&=\frac{d^2\mathrm{U}_n}{dx^2}+a\frac{d\mathrm{U}_n}{dx}+b\,\mathrm{U}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{U}_{n,m-1}&=\frac{d^{m-1}\mathrm{U}_n}{dx^{m-1}}+a\frac{d^{m-2}\mathrm{U}_n}{dx^{m-2}}+\ldots+l\,\mathrm{U}_n,\\
\frac{d\mathrm{U}_{n,m-1}}{dx}&=n\,\mathrm{U}_{n-1}.
\end{aligned}\right.$$

6. D'après la première des relations (3), on a

$$(5)\qquad x\,\mathrm{U}_{n,m-1}=\mathrm{U}_{n,m-2}+n\,\mathrm{K}_n+\lambda_{n+1};$$

calculons les valeurs de K_n et de $\lambda_{n+1,m-1}$.

L'équation (2 *bis*) donne d'abord, parce que $\mathrm{F}(z)$ est divisible par z,

$$\lambda_{n+1}=l\,\mathrm{U}_{n+1,m-1}.$$

On déduit de la même équation

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_n z^{m-2}+\mathrm{B}_n z^{m-3}+\ldots+\mathrm{K}_n\\
&\quad=-\frac{\alpha_n z^{m-1}+\beta_n z^{m-2}+\ldots+\lambda_n}{\mathrm{F}(z)}\\
&\qquad+(\mathrm{U}_n z^{m-1}+\mathrm{U}_{n,1}z^{m-2}+\ldots+\mathrm{U}_{n,m-z}+\mathrm{U}_{n,m-1})\frac{\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)};
\end{aligned}$$

d'où l'on voit que K_n est le terme constant dans le développement de

$$(\mathrm{U}_n z^{m-1}+\mathrm{U}_{n,1}z^{m-2}+\ldots+\mathrm{U}_{n,m-2}z+\mathrm{U}_{n,m-1})\frac{\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)},$$

ou encore, si l'on désigne généralement par S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $\mathrm{F}(z)=0$, dans le développement de

$$\mathrm{U}_n z^{m-1}+\mathrm{U}_{n,1}z^{m-2}+\ldots+\mathrm{U}_{n,m-1}\left(\frac{m}{z}+\frac{\mathrm{S}_1}{z^2}+\frac{\mathrm{S}_2}{z^3}+\ldots\right).$$

On en déduit

$$\mathrm{K}_n=\mathrm{S}_{m-2}\mathrm{U}_n+\mathrm{S}_{m-3}\mathrm{U}_{n,1}+\ldots+m\,\mathrm{U}_{n,m-2}$$

et, en vertu de l'équation (5)

$$\begin{aligned}
x\,\mathrm{U}_{n,m-1}&=(mn+1)\mathrm{U}_{n,m-2}\\
&\quad+n\mathrm{S}_1\mathrm{U}_{n,m-3}+\ldots+n\mathrm{S}_{m-3}\mathrm{U}_{n,1}+n\mathrm{S}_{m-2}\mathrm{U}_n+l\,\mathrm{U}_{n+1,m-1}.
\end{aligned}$$

Prenons les dérivées des deux membres de cette égalité; en ayant égard aux relations (4), il viendra

$$\begin{aligned}
&x\left(\frac{d^m\mathrm{U}_n}{dx^m}+a\frac{d^{m-1}\mathrm{U}_n}{dx^{m-1}}+\ldots+l\frac{d\mathrm{U}_n}{dx}\right)\\
&\quad-n\left[m\frac{d^{m-1}\mathrm{U}_n}{dx^{m-1}}+(ma+\mathrm{S}_1)\frac{d^{m-2}\mathrm{U}_n}{dx^{m-2}}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+(mk+\mathrm{S}_1h+\ldots+a\mathrm{S}_{m-3}+s_{m-2})\frac{d\mathrm{U}_n}{dx}+l\,\mathrm{U}_n\right]=0,
\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, en vertu de relations bien connues et dues à Newton,

$$\mathrm{S}_1+a=0,\qquad\ldots,\qquad\mathrm{S}_{n-2}+a\mathrm{S}_{n-3}+\ldots+(m-2)\,\mathrm{K}=0;$$

au moyen de ces relations, l'équation précédente devient

$$x\left(\frac{d^m \mathrm{U}_n}{dx^m} + a\,\frac{d^{m-1}\mathrm{U}_n}{dx^{m-1}} + \ldots + l\,\frac{d\mathrm{U}_n}{dx}\right)$$
$$- n\left[m\,\frac{d^{m-1}\mathrm{U}_n}{dx^{m-1}} + (m-1)\,a\,\frac{d^{m-2}\mathrm{U}_n}{dx^{m-2}} + \ldots + 2k\,\frac{d\mathrm{U}_n}{dx} + l\,\mathrm{U}_n\right] = 0.$$

7. Il est facile de passer, en faisant un changement de variable, du cas où $\mathrm{F}(z)$ est divisible par z, au cas général.

On obtiendra sans peine la proposition suivante :

Si l'on pose

$$\mathrm{F}(z) = z^m + a\,z^{m-1} + b\,z^{m-2} + \ldots + kz + l,$$

la fonction U_n satisfait à l'équation linéaire du $m^{\text{ième}}$ ordre

$$(6)\qquad \begin{cases} x\left(\dfrac{d^m y}{dx^m} + a\,\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} - \ldots + k\,\dfrac{dy}{dx} + ly\right) \\ -n\left[m\,\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (m-1)\,a\,\dfrac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + ky\right] = 0. \end{cases}$$

U_n étant une solution de cette équation, il est clair que la solution la plus générale sera donnée par l'expression

$$y = \mathrm{C}_1\mathrm{M}_1 e^{z_1 x} + \mathrm{C}_2\mathrm{M}_2 e^{z_2 x} + \ldots + \mathrm{C}_m\mathrm{M}_m e^{z_m x},$$

où C_1, C_2, ... et C_m désignent des constantes arbitraires.

III.

8. Pour intégrer l'équation précédente et en déduire l'expression de la fonction U_n, je rappellerai d'abord quelques résultats importants dus à Lagrange ([1]).

A toute équation différentielle linéaire du $m^{\text{ième}}$ ordre

$$(7)\qquad \mathrm{A}\,\frac{d^m y}{dx^m} + \mathrm{B}\,\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + \mathrm{K}\,\frac{dy}{dx} + \mathrm{L}y = 0$$

([1]) *Solution de différents problèmes de Calcul intégral* (*Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 472).

se rattache une autre équation du même ordre

$$(8)\qquad \frac{d^m}{dx^m}(\mathrm{A}u) - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(\mathrm{B}u) + \ldots \pm \frac{d}{dx}(\mathrm{K}u) \mp \mathrm{L}u = 0;$$

c'est l'équation adjointe de la première, et, quand on en a l'intégrale complète, on peut intégrer l'équation proposée.

En désignant en effet par $u_1, u_2, \ldots, u_m$ m intégrales distinctes de l'équation (8), on sait que l'intégrale générale de l'équation (7) est donnée par la formule

$$y = \mathrm{A}^{m-1} e^{-\int \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} dx} \begin{vmatrix} \alpha & \dfrac{d^{m-2}u_1}{dx^{m-2}} & \cdots & \dfrac{du_1}{dx} & u_1 \\ \beta & \dfrac{d^{m-2}u_2}{dx^{m-2}} & \cdots & \dfrac{du_2}{dx} & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & \dfrac{d^{m-2}u_m}{dx^{m-2}} & \cdots & \dfrac{du_m}{dx} & u_m \end{vmatrix},$$

où α, β, ..., λ désignent des constantes arbitraires.

9. Relativement à l'équation (6), l'équation adjointe de Lagrange est

$$\frac{d^m}{dx^m}(xu) - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(ax - nm)\,u + \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}[bx - n(m-1)a]\,u + \ldots = 0,$$

équation qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$x\left(\frac{d^m u}{dx^m} - a\,\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + b\,\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} - \ldots \mp lu\right)$$
$$+ (n+1)\left[m\,\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} - (m-1)\,a\,\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \ldots \mp ku\right] = 0,$$

et la méthode de Laplace en donne immédiatement m intégrales distinctes, à savoir :

$$u_1 = \int_{z_1}^{\pm\infty} e^{-tx}\mathrm{F}^n(t)\,dt, \qquad u_2 = \int_{z_2}^{\pm\infty} e^{-tx}\mathrm{F}^n(t)\,dt, \qquad \ldots,$$
$$u_m = \int_{z_m}^{\pm\infty} e^{-tx}\mathrm{F}^n(t)\,dt.$$

Dans ces intégrales, le signe de la limite supérieure doit être choisi de telle sorte que pour cette limite e^{-tx} s'évanouisse.

Si maintenant l'on remarque que, pour l'équation (6), on a

$$A = x \quad \text{et} \quad B = ax - nm,$$

et, par suite,

$$e^{-\int \frac{B}{A} dx} = x^{mn} e^{-ax},$$

on voit que l'intégrale générale de l'équation (6) est donnée par la formule

$$y = x^{mn+m-1} e^{-ax} \begin{vmatrix} \alpha & \int_{z_1}^{\pm\infty} e^{-tx} F^n(t)\, t^{m-2}\, dt & \cdots & \int_{z_1}^{\pm\infty} e^{-tx} F^n(t)\, dt \\ \beta & \int_{z_2}^{\pm\infty} e^{-tx} F^n(t)\, t^{m-2}\, dt & \cdots & \int_{z_2}^{\pm\infty} e^{-tx} F^n(t)\, dt \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \int_{z_m}^{\pm\infty} e^{-tx} F^n(t)\, t^{m-2}\, dt & \cdots & \int_{z_m}^{\pm\infty} e^{-tx} F^n(t)\, dt \end{vmatrix}.$$

10. Il faut encore déterminer les constantes arbitraires α, β, ..., λ de telle façon que l'expression précédente donne la valeur de la fonction U_n. Or, une propriété caractéristique de cette fonction consiste en ce que son développement suivant les puissances croissantes de x commence par un terme de l'ordre de x^{mn+m-1}; il suffit donc de déterminer les constantes de telle sorte que le développement du déterminant, contenu dans la formule précédente, ne renferme pas de puissances négatives de x.

C'est ce qui aura lieu si l'on fait

$$\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 1;$$

par une transformation facile, on peut mettre alors le déterminant sous la forme suivante :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \int_{z_1}^{z_m} e^{-tx} F^n(t)\, t^{m-2}\, dt & \int_{z_1}^{z_m} e^{-tx} F^n(t)\, t^{m-3}\, dt & \cdots & \int_{z_1}^{z_m} e^{-tx} F^n(t)\, dt \\ \int_{z_2}^{z_m} e^{-tx} F^n(t)\, t^{m-2}\, dt & \int_{z_2}^{z_m} e^{-tx} F^n(t)\, t^{m-3}\, dt & \cdots & \int_{z_2}^{z_m} e^{-tx} F^n(t)\, dt \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{z_{m-1}}^{z_m} e^{-tx} F^n(t)\, t^{m-2}\, dt & \int_{z_{m-1}}^{z_m} e^{-tx} F^n(t)\, t^{m-3}\, dt & \cdots & \int_{z_{m-1}}^{z_m} e^{-tx} F^n(t)\, dt \end{vmatrix};$$

et, comme chacune des intégrales qui constituent les éléments de ce déterminant a un développement de la forme $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, il est clair que le développement du déterminant lui-même ne renferme aucune puissance négative de x.

On a donc

$$U_n = x^{mn+m-1} e^{-ax} \Delta;$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\int_{z_i}^{\pm\infty} e^{-tx} F^n(t)\, t^h\, dt = e^{-z_i x} \Theta_{i,h},$$

où $\Theta_{i,h}$ est une fonction rationnelle de x, dont le dénominateur est une puissance entière de x, il vient

$$U_n = x^{mn+m-1} e^{-ax} \begin{vmatrix} 1 & e^{-z_1 x}\Theta_{1,m-2} & \cdots & e^{-z_1 x}\Theta_{1,0} \\ 1 & e^{-z_2 x}\Theta_{2,m-2} & \cdots & e^{-z_2 x}\Theta_{2,0} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{-z_m x}\Theta_{m,m-2} & \cdots & e^{-z_m x}\Theta_{m,0} \end{vmatrix}$$

ou encore, en faisant passer e^{-ax} dans le déterminant et en remarquant que

$$e^{-ax} = e^{(z_1+z_2+\ldots+z_m)x},$$

$$U_n = x^{mn+m-1} \begin{vmatrix} e^{z_1 x} & \Theta_{1,m-2} & \cdots & \Theta_{1,0} \\ e^{z_2 x} & \Theta_{2,m-2} & \cdots & \Theta_{2,0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{z_m x} & \Theta_{m,m-2} & \cdots & \Theta_{m,0} \end{vmatrix}.$$

On en déduit

$$M_1 = x^{mn+m-1} \begin{vmatrix} \Theta_{2,m-2} & \Theta_{2,m-3} & \cdots & \Theta_{2,0} \\ \Theta_{3,m-2} & \Theta_{3,m-3} & \cdots & \Theta_{3,0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta_{m,m-2} & \Theta_{m,m-3} & \cdots & \Theta_{m,0} \end{vmatrix},$$

et des formules analogues donneraient les valeurs des coefficients $M_2, M_3, \ldots, M_m$. Il serait facile d'exprimer Δ au moyen d'une intégrale multiple, mais je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet [1].

[1] *Voir*, sur cette question, une *Lettre de M. Hermite à M. Borchardt*, insérée dans le tome LXXVI de ce Journal.

IV.

DÉVELOPPEMENT DE e^{zx} SUIVANT LES PUISSANCES DE $z(z-1)$.

11. Soit

$$e^{xx} = \Sigma(V_n + zU_n)\,\frac{z^m(z-1)^n}{1.2\ldots n}; \tag{9}$$

en prenant la dérivée de cette équation par rapport à x, on a la relation

$$\Sigma(V'_n + zU'_n)\,\frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n} = \Sigma(zV_n + z^2U_n)\,\frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n}$$

ou bien, comme l'on a identiquement

$$zV_n + z^2U_n = z(z-1)U_n + z(U_n + V_n),$$

$$\Sigma(V'_n + zU'_n)\,\frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n} = \Sigma(n+1)U_n\,\frac{z^{n+1}(z-1)^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} + \Sigma(U_n + V_n)z\,\frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n};$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} V'_n &= nU_{n-1},\\ U'_n &= U_n + V_n.\end{aligned}\right. \tag{10}$$

En prenant la dérivée de l'équation (7) par rapport à z, il vient

$$\begin{aligned} &x\sum(V_n + zU_n)\,\frac{z_n(z-1)^n}{1.2\ldots n}\\ &\quad = \sum U_n\,\frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n} + \sum(V_n + zU_n)(2z-1)\,\frac{z^{n-1}(z-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},\end{aligned}$$

ou bien, comme l'on a identiquement

$$(V_n + zU_n)(2z-1) = 2U_n z(z-1) + (U_n + 2V_n)z - V_n,$$

$$\begin{aligned} &x\sum(V_n + zU_n)\,\frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n}\\ &\quad = \sum(2n+1)U_n\,\frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n} + \sum[(U_n + 2V_n)z - V_n]\,\frac{z^{n-1}(z-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\left\{\begin{aligned} xV_n &= (2n+1)U_n - V_{n+1},\\ xU_n &= U_{n+1} + 2V_{n+1},\end{aligned}\right. \tag{11}$$

d'où, en éliminant V_n et V_{n+1},

$$U_{n+1} + 2(2n+1)U_{n-1} = 0. \tag{12}$$

Il suit, du reste, des considérations générales développées précédemment que U_n satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2n+x)\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

12. De l'équation (9) résulte immédiatement que l'on a

$$V_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad U_0 = e^x - 1;$$

des formules (11) on tire $U_1 = e^x(x-2) + x + 2$ et la formule (12) permet de calculer de proche en proche les valeurs des diverses fonctions U_n,

$$\begin{aligned} U_2 &= e^x(x^2 - 6x + 12) - (x^2 + 6x + 12),\\ U_3 &= e^x(x^3 - 12x^2 + 60x - 120) + x^3 + 12x^2 + 60x + 120,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

En général, si l'on pose

$$\begin{aligned} F(x) = x^n - n(n+1)x^{n-1} &+ \frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)x^{n-2} - \ldots\\ &\pm (n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n\end{aligned}$$

et

$$\Phi(x) = F(-x),$$

on a

$$U_n = e^x F(x) - \Phi(x) + \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots n}\int_0^1 e^{x(1-z)} z^n (1-z)^n\,dz \text{ [1]},$$

puis, en vertu des formules (10),

$$V_0 = 1, \qquad V_1 = e^x - (x+1), \qquad V_2 = e^x(2x-6) + x^2 + 4x + 6,$$

et, en général,

$$V_n = e^x F'(x) + \Phi(x) - \Phi'(x).$$

---

[1] Sur les fonctions U_n *voir* le Mémoire de M. HERMITE, *Sur la fonction exponentielle*, p. 4.

V.

DÉVELOPPEMENT DE $f(t+xz)$ SUIVANT LES PUISSANCES DE $z(z-1)$.

13. L'équation (9) peut s'écrire de la façon suivante

$$x^0 + x^1 z + x^2 \frac{z^2}{1.2} + \ldots + x^n \frac{z^n}{1.2\ldots n} = \sum (\mathrm{V}_n + z\mathrm{U}_n) \frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n};$$

si l'on ordonne, suivant les puissances croissantes de x, les coefficients V_n et U_n qui entrent dans le second membre, cette équation sera satisfaite identiquement et, par conséquent, subsistera si l'on remplace x^i par x_i, quelle que soit d'ailleurs la valeur attribuée à cette quantité.

Posons, en dénotant les dérivées à la manière de Lagrange, $x_i = x^i f^{(i)}(t)$, x et t désignant deux variables arbitraires; l'expression symbolique e^{zx} aura pour valeur $f(t+xz)$; nous aurons donc le développement suivant

$$f(t+xz) = \sum (v_n + z u_n) \frac{z^n(z-1)^n}{1.2\ldots n},$$

où v_n et u_n désignent ce que deviennent respectivement V_n et U_n quand, après avoir développé ces expressions suivant les puissances croissantes de x, on y remplace x^i par $x^i f^{(i)}(t)$.

Par cette substitution, e^x se transforme en $f(t+x)$, xe^x en $xf'(t+x)$ et, généralement, $x^i e^x$ en $x^i f^{(i)}(t+x)$; on obtiendra donc facilement les valeurs de u_n et de v_n, et, en particulier, on aura

$$\begin{aligned} u_n = (-1)^n 2n(2n-1)\ldots(n+2)(n+1) \\ \times \Big\{ \Big[f(t+x) - nx\frac{f'(t+x)}{2n} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 \frac{f''(t+x)}{2n(2n-1)} - \ldots \Big] \\ - \Big[f(t) - nx\frac{f'(t)}{2n} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{f''(t)}{2n(2n-1)} - \ldots \Big] \Big\}. \end{aligned}$$

14. On déduit de là

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & f(t+x) - f(t) \\ & \quad = x\frac{f'(t+x)+f'(t)}{2} - \frac{n(n-1)x^2}{1.2}\frac{f'(t+x)-f'(t)}{2n(2n-1)} \\ & \quad + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1.2.3}\frac{f'''(t+x)+f'''(t)}{2n(2n-1)(2n-2)} - \ldots + \mathrm{R}, \end{aligned} \right.$$

où, si l'on adopte la notation de Gauss, et si l'on pose $\Pi(n) = 1.2\ldots n$,

$$\mathrm{R} = \frac{(-1)^n \Pi(n)}{\Pi(2n)} u_n.$$

Comme je l'ai fait remarquer plus haut (n° 2), le développement de u_n, suivant les puissances croissantes de x, commence par un terme de l'ordre x^{2n+1}; R est donc également de l'ordre $2n+1$.

15. On aura donc, en négligeant les termes de l'ordre $2n+1$,

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} & f(t+x) - f(t) \\ & \quad = x\frac{f(t+x)+f'(t)}{2} - \frac{n(n-1)x^2}{1.2}\frac{f''(t+x)-f''(t)}{2n(2n-1)} \\ & \quad + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1.2.3}\frac{f'''(t+x)+f'''(t)}{2n(2n-1)(2n-2)} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Si dans la relation précédente on pose

$$f(t+x) - f(t) = \int_t^{t+x} \mathrm{F}(t)\,dt,$$

il viendra

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int^{t+x} \mathrm{F}(t)\,dt \\ & \quad = x\frac{\mathrm{F}(t+x)+\mathrm{F}(t)}{2} - \frac{n(n-1)x^2}{1.2}\frac{\mathrm{F}'(t+x)-\mathrm{F}'(t)}{2n(2n-1)} \\ & \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{\mathrm{F}''(t+x)+\mathrm{F}''(t)}{2n(2n-1)(2n-2)} - \ldots. \end{aligned} \right.$$

16. Comme application de la formule (14), posons

$$f(x) = \operatorname{arc\,tang} x, \qquad t = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 1;$$

on a, d'après une formule bien connue,

$$f^{(i)}(x) = \frac{(-1)^{i-1}\Pi(i-1)}{\sqrt{(1+x^2)^i}} \sin\left(i \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x}\right),$$

par suite,

$${}^{(i)}(0) = (-1)^{i-1}\Pi(i-1) \sin \frac{i\pi}{2}$$

et

$$f^{(i)}(1) = \frac{(-1)^{i-1}\Pi(i-1)}{2^{\frac{i}{2}}} \sin \frac{i\pi}{4}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (14), on obtiendra la formule approximative suivante,

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \Pi = \mathrm{L}_1 - \frac{n-1}{2n-1}\,\frac{\mathrm{L}_2}{2} + \frac{(n-1)n-2)}{(2n-1)(2n-2)}\,\frac{\mathrm{L}_3}{3} \\ - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\,\frac{\mathrm{L}_4}{4} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\mathrm{L}_i = 2 \sin \frac{i\pi}{2} + (-1)^{i-1} \frac{\sin \frac{i\pi}{4}}{2^{\frac{i}{2}-1}};$$

on trouve aisément

$$\mathrm{L}_1 = 3, \qquad \mathrm{L}_2 = -1, \qquad \mathrm{L}_3 = -\frac{3}{2}, \qquad \mathrm{L}_4 = 0,$$

$$\mathrm{L}_5 = \frac{7}{4}, \qquad \mathrm{L}_6 = \quad \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{L}_7 = -\frac{17}{8}, \qquad \mathrm{L}_8 = 0, \qquad \ldots,$$

et

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \pi = 3 + \frac{1}{2}\,\frac{n-1}{2n-1} - \frac{1}{4}\,\frac{n-2}{2n-1} \\ + \frac{7}{80}\,\frac{(n-3)(n-4)}{(2n-1)(2n-3)} - \frac{1}{96}\,\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

En faisant successivement, dans cette formule, n égal à 1, 2, 3, 4, 5 et 6, on obtiendra pour le nombre π les valeurs approximatives suivantes (¹),

$$\pi = 3, \qquad \pi = 3 + \frac{1}{6} = 3,166\ldots,$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{5} - \frac{1}{4.5} = 3,155\ldots,$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} = 3,142\ldots,$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{4\cdot 9} + \frac{1}{4\cdot 9\cdot 10} = 3,1416\ldots,$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{11} + \frac{1}{20} + \frac{1}{11.20.6} - \frac{1}{6.11.12.14} = 3,14158\ldots.$$

(¹) Il est à remarquer que pour une valeur entière de n on doit arrêter la formule (14) au terme en L_n; on doit avoir égard à cette remarque dans l'application de la formule (17).

VI.

DÉVELOPPEMENT DE $\log(1+zx)$ SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES DE $z(z-1)$.

17. On a identiquement

$$1 + x - x^2 z(z-1) = (1+zx)(1+x-zx);$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{z}{1+zx} &= \frac{z - xz(z-1)}{1+x-x^2z(z-1)} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{z - \frac{1+x}{x}}{1+x-x^2z(z-1)} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{\frac{z}{1+x} - \frac{1}{x}}{1 - \frac{x^2z(z-1)}{1+x}} \\ &= \frac{1}{x} + \sum \left(\frac{z}{1+x} - \frac{1}{x}\right) \frac{x^{2n}}{(1+x)^n} z^n(z-1)^n. \end{aligned}$$

On en déduit, en intégrant par rapport à x entre les limites zéro et x,

$$\log(1+zx) = \int_0^x \left[\frac{1}{x} + \sum \left(\frac{z}{1+x} - \frac{1}{x}\right) \frac{x^{2n}}{(1+x)^n} z^n(z-1)^n\right] dx;$$

si donc on pose

$$\log(1+zx) = \sum (v_n + z u_n) \frac{z^n(z-1)^n}{\Pi(n)},$$

on a

$$u_n = \Pi(n) \int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{(1+x)^{n+1}}.$$

La formule (13) donne alors en posant, pour abréger,

$$\frac{x}{1+x} = x',$$

$$\begin{aligned} \log(1+x) = \frac{1}{2}(x'+x) + \frac{1}{4}\,\frac{n-1}{2n-1}(x'^2 - x^2) \\ + \frac{1}{6}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-2)}(x'^3 + x^3) + \ldots + \mathrm{R}, \end{aligned}$$

où

$$R = (-1)^n \frac{\Pi^2(n)}{\Pi(2n)} \int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{(1+x)^{n+1}}.$$

18. En posant dans cette formule $x = 1$, il vient pour déterminer $\log n\, 2$, la formule approximative suivante,

$$\log 2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{16}\,\frac{n-1}{2n-1} + \frac{3}{32}\,\frac{n-2}{2n-1} - \frac{15}{16^2}\,\frac{(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)} + \ldots;$$

dans l'application de cette formule on doit, pour une valeur entière donnée de n, s'arrêter au premier terme qui s'annule.

En y faisant successivement n égal à 1, 2 et 3, on trouve

$$\log 2 = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

$$\log 2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 0{,}6875,$$

$$\log 2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{160} = 0{,}69375.$$

La valeur exacte de ce logarithme est

$$0{,}69314.$$

Paris, le 30 mars 1879.

SUR

LE DÉVELOPPEMENT DE $(x-z)^m$,

SUIVANT LES PUISSANCES DE (z^2-1).

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
t. LXXXVI; 1878.

Dans une Note que j'ai eu récemment l'honneur de présenter à l'Académie, j'ai montré, par l'exemple de la fonction e^{xz}, la liaison remarquable qui existe entre l'approximation des fonctions au moyen de fonctions rationnelles et leur développement suivant les puissances d'un polynôme.

Le même fait a lieu à l'égard des fonctions $(x-z)^m$ et $\log(x-z)$, quoique d'une manière moins directe.

Pour prendre l'exemple le plus simple, soit à développer $(x-z)^m$ suivant les puissantes croissantes de (z^2-1). Posons

$$(x-z)^m = \Sigma(U_n + zV_n)(z^2-1)^n;$$

on obtiendra facilement les relations suivantes :

$$mU_n = xU'_n - V'_n - V'_{n-1}, \qquad mV_n = xV'_n - U'_n,$$
$$U'_n = -(2n+1)V_n - (n+1)V_{n+1}, \qquad V'_n = -2(n+1)U_{n+1};$$

d'où l'on conclut que V_n satisfait à l'équation linéaire du second ordre

$$(1) \qquad (x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(m-n-1)\frac{dy}{dx} + m(m-2n-1)y = 0.$$

Désignons maintenant par $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m$; je veux dire par là que $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont des polynômes du degré n, tels que le développement de

$$f(x)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m - \varphi(x),$$

suivant les puissances descendantes de la variable, commence par un terme de l'ordre de $\frac{1}{x^{2n+1}}$.

On sait [1] que l'expression $f(x) - \varphi(x)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^m$ satisfait à l'équation

$$(x^2-1)\frac{d^2u}{dx^2} + 2(x-m)\frac{du}{dx} - n(n+1)u = 0;$$

d'où l'on voit que $v = (x+1)^m f(x) - (x-1)^m \varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$(x^2-1)\frac{d^2v}{dx^2} - 2x(m-1)\frac{dv}{dx} + [m(m-1) - n(n-1)]v = 0,$$

et $\frac{d^n v}{dx^n}$ à l'équation (1).

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on désigne par $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m$, le coefficient de $z(z^2-1)^n$, dans le développement de $(x-z)^m$ suivant les puissances croissantes de (z^2-1), est égal à la $n^{\text{ième}}$ dérivée de l'expression

$$(x+1)^m f(x) - (x-1)^m \varphi(x).$$

Des circonstances toutes semblables se présentent dans le développement de $(x-z)^m$ suivant les puissances d'un polynôme de degré quelconque. Je ne m'étendrai pas davantage à ce sujet, me bornant à considérer, à cause de sa simplicité, le développement de $\log(x-z)$ que l'on peut considérer comme correspondant au cas où m devient égal à zéro.

$F(z)$ étant un polynôme du degré $m+1$, soit

$$\log(x-z) = \Sigma(U_n + \ldots + z^m V_n) F^n(z),$$

on en déduit

$$\frac{1}{x-z} = \frac{\frac{F(x)-F(z)}{x-z}}{F(x)-F(z)} = \Sigma(U'_n + \ldots + z^m V'_n) F^n(z);$$

[1] *Voir*, par exemple, ma Note *Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen de fractions rationnelles* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 85).

d'où

$$V'_n = \frac{1}{F^{n+1}(x)}.$$

En désignant par $z_0, z_1, \ldots, z_n$ les racines de l'équation $F(z) = 0$, considérons l'expression

$$\Omega = \Pi_1 \log\left(\frac{z-z_1}{x-z_0}\right) + \Pi_2 \log\left(\frac{x-z_2}{x-z_0}\right) + \ldots + \Pi_m \log\left(\frac{x-z_n}{x-z_0}\right) - \Pi,$$

où $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ sont des polynômes entiers du degré n qui rendent l'expression Ω de l'ordre le plus élevé possible en $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{x^{nm+m}}$.

M. Hermite a montré [1] que la $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée de Ω est précisément $\frac{1}{F^{(n+1)}(x)}$; on en conclut que V_n et la $n^{\text{ième}}$ dérivée de Ω ne peuvent différer que par un terme constant. De la règle donnée par Jacobi, on déduit d'ailleurs que V_n est de l'ordre de $\frac{1}{x^{mn+m+n}}$; par suite les développements de V_n et de $\frac{d^n\Omega}{dx^n}$ suivant les puissances décroissantes de x, commençant tous les deux par un terme de l'ordre de $\frac{1}{x^{mn+m+n}}$ et ces deux fonctions ne pouvant différer que par une constante, on a $V_n = \frac{d^n\Omega}{dx^n}$.

Ainsi :

Le coefficient de $z^m F^n(z)$, dans le développement de $\log(x-z)$ suivant les puissances de $F(z)$ est égal à la dérivée $n^{\text{ième}}$ de l'expression

$$P_1 \log\frac{x-z_1}{x-z_0} + P_2 \log\frac{x-z_2}{x-z_0} + \ldots + P_m \log\frac{x-z_m}{x-z_1} - P_1,$$

où les polynômes, du degré n, $P, P_1, P_2, \ldots, P_m$ ont précisément les valeurs pour lesquelles l'expression précédente est de l'ordre le plus élevé en $\frac{1}{x}$.

[1] *Sur quelques équations différentielles linéaires* (*Journal de Borchardt*, t. LXXIX).

SUR LA

RÉDUCTION DES FRACTIONS CONTINUES

DE $e^{F(x)}$, $F(x)$ DÉSIGNANT UN POLYNOME ENTIER.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXVII; 1878.

1. L'étude du développement en fractions continues d'une fonction d'une variable conduit, dans un très grand nombre de cas, à la considération d'équations différentielles linéaires et du second ordre qui jouent un rôle important dans cette étude. Elles ont pour solutions les polynômes qui forment les dénominateurs des réduites.

Dans deux Notes précédemment publiées ([1]), j'ai déterminé la forme de ces équations; pour résoudre complètement le problème, il restait à déterminer les coefficients des polynômes qui entrent dans leur expression : c'est à quoi je suis parvenu par une méthode très générale et qui s'applique à tous les cas nombreux et importants que j'ai examinés dans les Notes que je viens de rappeler.

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui à l'Académie, je traite seulement le développement de la fonction $e^{F(x)}$, où $F(x)$ désigne un polynôme entier d'un degré quelconque m.

2. Soit $\frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)}$ une réduite de $e^{F(x)}$, $f_n(x)$ et $\varphi_n(x)$ étant deux polynômes du degré n; j'ai montré que $f_n(x)$ est une solution

([1]) *Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen des fractions rationnelles* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. V, p. 78).

Sur l'approximation d'une classe de diverses transcendantes qui comprennent comme cas particulier les intégrales hyperelliptiques (*Comptes rendus*, t. LXXXIV, p. 643).

d'une équation différentielle linéaire de la forme

$$y'' - \left[\frac{2n}{x} + \frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} - F'(x)\right] y' - \frac{H_n(x)}{x\Theta_n(x)},$$

où $\Theta_n(x)$ et $H_n(x)$ désignent des polynômes entiers ayant respectivement pour degré $(m-1)$ et $2(m-1)$.

Le problème à résoudre consiste à déterminer les coefficients des polynômes $\Theta_n(x)$ et $H_n(x)$, ou plutôt à trouver les relations qui lient entre eux les coefficients des divers polynômes $\Theta_n(x)$, $\Theta_{n-1}(x)$, ..., $H_n(x)$, $H_{n-1}(x)$, ..., de façon à pouvoir en déterminer la valeur par voie récurrente.

A cet effet, en posant, pour abréger,

$$R = \left[\frac{n}{x} + \frac{\Theta'_n(x)}{2\Theta_n(x)} - \frac{F'(x)}{2}\right]^2 + \frac{n}{x^2} - \frac{F''(x)}{2} - \frac{d}{dx}\frac{\Theta'_n(x)}{2\Theta_n(x)} + \frac{H_n(x)}{x\Theta_n(x)},$$

$$S = \left[\frac{n-1}{x} + \frac{\Theta'_{n-1}(x)}{2\Theta_{n-1}(x)} - \frac{F'(x)}{2}\right]^2 + \frac{n-1}{x^2} + \frac{F''(x)}{2} - \frac{d}{dx}\frac{\Theta'_{n-1}(x)}{2\Theta_{n-1}(x)} + \frac{H_{n-1}(x)}{x\Theta_{n-1}(x)},$$

puis

$$R + S = G, \qquad R - S = K \qquad \text{et} \qquad \Delta = \Theta_n(x)\Theta_{n-1}(x),$$

je remarque que, en désignant par β une constante convenablement choisie, l'expression rationnelle

$$4\beta\Delta + 2G + \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{5}{4}\frac{\Delta'^2}{\Delta^2}$$

est un carré parfait; de plus, Ω étant la valeur de sa racine carrée, on a identiquement

$$\Omega = \sqrt{\Delta}\int\frac{K\,dx}{\sqrt{\Delta}}, \tag{1}$$

identité qui exige tout d'abord que l'intégrale $\int\frac{K\,dx}{\sqrt{\Delta}}$ ne renferme pas de partie transcendante.

De là découlent les relations cherchées entre les coefficients des polynômes Θ_n, Θ_{n-1}, ..., H_n, H_{n-1}, ...

3. Comme application de la théorie générale, faisons

$$F(x) = x^2 + 2ax.$$

Dans ce cas, $f_n(x)$ satisfait à une équation de la forme

$$y'' - \left(\frac{2n}{x} + \frac{1}{x - \alpha_n} - 2x - 2\alpha\right) y' - \left(2n + \frac{P_n}{x} + \frac{Q_n}{x - \alpha_n}\right) y = 0,$$

et le problème à résoudre consiste à déterminer, en fonction de a et de n, les coefficients α_n, P_n et Q_n.

En posant, pour abréger,

$$(2) \qquad Q_n + \frac{n}{\alpha_n} - \alpha_n - a = B \quad \text{et} \quad Q_{n-1} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} - \alpha_{n-1} - a = C,$$

l'identité (1) donne les relations suivantes :

$$(3) \qquad \frac{P_n}{2n} = a - n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) - \frac{B\alpha_{n-1} + C\alpha_n}{\alpha_n - \alpha_{n-1}},$$

$$(4) \qquad B^2 + \frac{2nB\alpha_{n-1}}{\alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1})} + \frac{2nC}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - (\alpha_n + a)^2 + n^2\left(\frac{1}{\alpha_n^2} + \frac{2}{\alpha_n\alpha_{n-1}}\right) = 0,$$

$$(5) \qquad C^2 + \frac{2nC\alpha_n}{\alpha_{n-1}(\alpha_n + \alpha_{n-1})} + \frac{2nB}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - (\alpha_{n-1} + a)^2 + n^2\left(\frac{1}{\alpha_{n-1}^2} + \frac{2}{\alpha_n\alpha_{n-1}}\right) = 0.$$

4. La solution du problème est ainsi ramenée à une question d'Algèbre élémentaire. Si, en effet, entre les équations (4) et (5), on élimine successivement B et C, on obtiendra deux équations du quatrième degré auxquelles satisfont respectivement ces quantités et qui sont de la forme

$$(6) \qquad \Phi(B, \alpha_n, \alpha_{n-1}, n) = 0$$

et

$$(7) \qquad \Phi_1(C, \alpha_n, \alpha_{n-1}, n) = 0.$$

Si maintenant on observe que B se déduit de C par le changement de n en $(n+1)$, de l'équation (7) on déduira une nouvelle équation

$$(8) \qquad \Phi_1(B, \alpha_{n+1}, \alpha_n, n+1) = 0.$$

En écrivant que les équations (6) et (8) ont une solution com-

mune, on obtiendra une relation entre les trois quantités consécutives α_{n+1}, α_n et α_{n-1} qui permettra de calculer par voie récurrente les coefficients α_p. La valeur de la racine commune donnera B, puis C par le changement de n en $(n-1)$; ces calculs effectués, les formules (2) et (3) détermineront P_n et Q_n.

SUR LA

RÉDUCTION EN FRACTIONS CONTINUES

D'UNE CLASSE ASSEZ ÉTENDUE DE FONCTIONS.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
t. LXXXVII; 1878.

1. La méthode que j'ai employée, dans un Mémoire présenté récemment à l'Académie, pour le développement en fractions continues de $e^{F(x)}$, s'applique entièrement à un cas beaucoup plus général, à savoir quand la fonction à développer satisfait à une équation différentielle linéaire et du premier ordre, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x.

Soit V une fonction satisfaisant à l'équation différentielle

$$V' = FV + \Phi, \tag{1}$$

où F et Φ désignent des fonctions rationnelles quelconques de x.

Supposons, pour fixer les idées, que V soit développable suivant les puissances croissantes de x, et soit $\frac{\varphi_n}{f_n}$ une réduite de V, φ_n et f_n étant des polynômes entiers du degré n, choisis de telle sorte que le développement de $V - \frac{\varphi_n}{f_n}$ commence par un terme en x^{2n-1}.

De l'équation (1) on déduit immédiatement la relation

$$\varphi_n f_n' = \varphi_n' f_n + \varphi_n f_n F + f_n^2 \Phi = x^{2n} \Theta_n, \tag{2}$$

où Θ_n désigne une fonction rationnelle de x, dont le dénominateur est connu et dont le numérateur est d'un degré déterminé.

Cela posé, formons l'équation différentielle

$$My'' - Ny' + P = 0,$$

qui a pour solutions

$$y_1 = f_n' \quad \text{et} \quad y_2 = \varphi_n e^{-\int F dx} - f_n \int \Phi e^{-\int F dx};$$

d'après une proposition connue, on a

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \log(y_1' y_2 - y_1 y_2'),$$

ou, en vertu de (2),

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \log(x^{2n} \Theta_n e^{-\int F dx}).$$

D'où il suit que f_n satisfait à une équation différentielle du second ordre, de la forme

$$y'' - \left(\frac{2n}{x} + \frac{\Theta_n'}{\Theta_n} - F\right) y' - H_n y = 0, \tag{3}$$

H_n désignant une fonction rationnelle de x dont le dénominateur est connu, le numérateur étant d'un degré déterminé.

2. Dans un assez grand nombre de cas (ce sont les plus simples et par cela même les plus intéressants), les fonctions rationnelles Θ_n et H_n se déterminent immédiatement et le problème est complètement résolu.

Dans le cas général où cette détermination est plus difficile, on peut employer la méthode suivante pour trouver entre les coefficients des fonctions Θ_n, H_n, Θ_{n-1}, H_{n-1}, ..., des relations qui permettent de les obtenir par voie récurrente.

Considérons l'équation

$$My'' - Ny' + P = 0,$$

à laquelle satisfait f_n et dont la solution la plus générale est donnée par la formule

$$Af_n' + B(\varphi_n e^{-\int F dx} - f_n \int \Phi e^{-\int F dx}),$$

où A et B désignent deux constantes arbitraires; puis l'équation

$$M_0 u'' - N_0 u' - P_0 = 0,$$

à laquelle satisfait f_{n-1} et dont la solution la plus générale est donnée par la formule

$$A_0 f_{n-1} + B_0(\varphi_{n-1} e^{-\int F dx} - f_n \int \Phi e^{-\int F dx});$$

cela posé, formons l'équation différentielle linéaire et du quatrième ordre à laquelle satisfait la fonction

$$z = uy.$$

Il est facile de former cette équation, dont les coefficients ne renfermeront d'autres quantités inconnues que les coefficients de Θ_n, H_n, Θ_{n-1} et H_{n-1}; or cette équation admet évidemment comme solution

$$z = (f_n \varphi_{n-1} - f_{n-1} \varphi_n) e^{-\int F dx}$$

et, d'après une propriété élémentaire des fractions continues, on sait que, à un facteur constant près,

$$f_n f_{n-1} - f_{n-1} \varphi_n = x^{2n-1}.$$

L'équation différentielle du quatrième ordre en z est donc identiquement satisfaite quand on y fait

$$z = x^{2n-1} e^{-\int F dx},$$

et de là découlent les relations cherchées.

3. La méthode que je viens d'exposer présenterait, dans la pratique, des difficultés de calcul presque insurmontables, même dans les cas les plus simples. Pour pouvoir l'employer sans trop de longueurs, il est nécessaire de lui faire subir des modifications que j'ai développées dans le Mémoire cité plus haut et relatif à la réduction de $e^{F(x)}$ en fractions continues.

SUR LA

RÉDUCTION EN FRACTION CONTINUE DE $e^{F(x)}$,

$F(x)$ DÉSIGNANT UN POLYNOME ENTIER.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. VI; 1880.

L'étude du développement en fraction continue d'une fonction d'une variable conduit, dans un très grand nombre de cas, à la considération d'équations différentielles linéaires et du second ordre. Elles ont pour solutions les polynômes qui forment les dénominateurs des diverses réduites.

Dans deux Notes précédemment publiées [1], j'ai déterminé la forme de ces équations; pour résoudre complètement le problème, il reste à déterminer les coefficients des polynômes qui entrent dans leur expression.

Ce problème présente d'assez grandes difficultés et j'ai essayé de le résoudre dans la Note qui suit; j'y traite seulement le développement de la fonction $e^{F(x)}$, où $F(x)$ désigne un polynôme entier d'un degré quelconque, et je fais l'application de la théorie générale au cas où $F(x)$ est du second degré.

I.

1. Soit $F(x)$ un polynôme entier de degré m; posons

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} + (x^{2n+1}) \text{ [2]},$$

$\varphi_n(x)$ et $f_n(x)$ désignant des polynômes du degré n.

(1) *Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen des fractions rationnelles* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. V, p. 78.)

Sur l'approximation de diverses transcendantes qui renferment comme cas particulier les intégrales hyperelliptiques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*).

(2) Dans tout ce qui suit, je désigne généralement par (x^p) une série ordonnée

On en déduit

$$\mathrm{F}(x) = \log \varphi_n(x) - \log f_n(x) + (x^{2n+1}),$$

puis, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} - \frac{f'(x)}{f_n(x)} + (x^{2n})$$

et

$$\mathrm{F}'(x)\,\varphi_n(x) f_n(x) - \varphi_n'(x) f_n(x) + \varphi_n(x) f_n'(x) = x^{2n}\Theta_n(x).$$

$\Theta_n(x)$ désignant un polynôme du degré $(m-1)$, qui généralement ne sera pas divisible par x.

Si, dans cette relation, on considère $f_n(x)$ et $\Theta_n(x)$ comme connus, on a, pour déterminer $\varphi_n(x)$, une équation linéaire et du premier ordre. En l'intégrant d'abord, en négligeant le second membre, on aura

$$(1) \qquad \varphi_n(x) = e^{\mathrm{F}(x)} f_n(x)\, z,$$

et z sera, comme on le sait, déterminé par la relation

$$(2) \qquad -z = \int \frac{e^{-\mathrm{F}(x)} x^{2n} \Theta_n(x)\, dx}{f_n^2(x)}.$$

En désignant par $\alpha, \beta, \ldots$ les diverses racines de l'équation $f_n(x) = 0$, posons l'identité

$$\frac{x^{2n}\Theta_n(x)}{f_n^2(x)} = \mathrm{P} + \sum \frac{p}{(x-\alpha)^2} + \sum \frac{q}{x-\alpha},$$

où P est un polynôme du degré $(m-1)$ en x.

On en déduit

$$-z = \int e^{-\mathrm{F}(x)}\, \mathrm{P}\, dx + \sum \int \frac{e^{-\mathrm{F}(x)}\, p\, dx}{(x-\alpha)^2} + \sum \int \frac{e^{-\mathrm{F}(x)}\, q\, dx}{x-\alpha},$$

ou encore, en intégrant par parties le deuxième terme du second membre de la relation précédente,

$$-z = \int e^{-\mathrm{F}(x)}\, \mathrm{P}\, dx - \sum \frac{e^{-\mathrm{F}(x)}\, p}{x-\alpha} + \sum \int e^{-\mathrm{F}(x)} \frac{q - p\mathrm{F}'(x)}{x-\alpha}\, dx,$$

---

suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^p, sans avoir égard aux valeurs des coefficients de cette série.

ou encore

$$-z = \int e^{-\mathrm{F}(x)}\mathrm{P}\, dx - \sum \frac{p\, e^{-\mathrm{F}(x)}}{x-\alpha} - \sum \int e^{-\mathrm{F}(x)} \frac{p[\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}'(\alpha)]}{x-\alpha}\, dx$$
$$+ \sum \int e^{-\mathrm{F}(x)} \frac{q - p\mathrm{F}'(\alpha)}{x-\alpha}\, dx.$$

Or la valeur de z ne peut, comme cela résulte de l'équation (1), renfermer d'autre transcendante que la fonction $e^{\mathrm{F}(x)}$; on a donc, pour toutes les racines de l'équation $f_n(x) = 0$,

$$q - p\mathrm{F}'(\alpha) = 0.$$

Un calcul facile donne

$$\frac{p}{f_n'(\alpha)} = \frac{q}{\left[\frac{2n}{\alpha} + \frac{\Theta_n'(\alpha)}{\Theta_n(\alpha)}\right] f_n'(\alpha) - f_n''(\alpha)},$$

d'où il suit que le polynôme $f_n(x)$ satisfait à une équation linéaire et du second ordre de la forme

$$(3) \qquad y'' - \left[\frac{2n}{x} + \frac{\Theta_n'(x)}{\Theta_n(x)} - \mathrm{F}'(x)\right] y' - \frac{\mathrm{H}_n(x)}{x\Theta_n(x)}\, y = 0,$$

où $\mathrm{H}_n(x)$ désigne un polynôme entier en x du degré $2(m-1)$.

2. L'équation (3) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{\mathrm{F}(x)} y'}{x^{2n}\Theta_n(x)}\right] - \mathrm{K}(x)\, y = 0.$$

On en conclut qu'une seconde solution de cette équation est donnée par la formule

$$y = f_n(x) \int \frac{e^{-\mathrm{F}(x)} x^{2n}\Theta_n(x)\, dx}{f_n^2(x)}$$

ou, en vertu des relations (1) et (2),

$$y = \varphi_n(x)\, e^{-\mathrm{F}(x)}.$$

3. C'est sur cette importante propriété que je m'appuierai pour déterminer les coefficients des polynômes $\Theta_n(x)$ et $\mathrm{H}_n(x)$.

A cet effet, je remarque que $f_{n-1}(x)$ satisfait à l'équation

$$(4) \qquad u'' - \left[\frac{2(n-1)}{x} + \frac{\Theta_{n-1}'(x)}{\Theta_n(x)} - \mathrm{F}'(x)\right] - u' - \frac{\mathrm{H}_{n-1}(x)}{x\Theta_{n-1}(x)}\, u = 0,$$

dont une seconde solution est

$$u = \varphi_{n-1}(x)\, e^{-F(x)}.$$

Formons l'équation linéaire et du quatrième ordre $\Omega = 0$, à laquelle satisfait l'expression

$$z = uy;$$

la solution la plus générale de cette équation est, en désignant par A, B, C et D quatre constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} &A f_n(x) f_{n-1}(x) + B f_n(x)\, \varphi_{n-1}(x)\, e^{-F(x)} \\ &\qquad + C f_{n-1}(x)\, \varphi_n(x)\, e^{-F(x)} + D\, \varphi_n(x)\, \varphi_{n-1}(x)\, e^{-2F(x)}. \end{aligned}$$

En particulier, elle est satisfaite par l'expression

$$e^{-F(x)}\,[f_n(x)\,\varphi_{n-1}(x) - f_{n-1}(x)\,\varphi_n(x)],$$

dont il est facile d'obtenir la valeur en se servant d'une des propriétés les plus élémentaires des fractions continues.

Ayant en effet

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} + (x^{2n+1})$$

et

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} + (x^{2n-1}),$$

on en déduit

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} - \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} = (x^{2n+1}),$$

d'où

$$f_n(x)\,\varphi_{n-1}(x) - f_{n-1}(x)\,\varphi_n(x) = M x^{2n-1},$$

M désignant une quantité constante.

4. De là résulte que l'équation $\Omega = 0$ est identiquement satisfaite quand on fait

$$z = e^{-F(x)} x^{2n-1},$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'en établissant certaines relations entre les coefficients des polynômes inconnus $\Theta_n(x)$, $H_n(x)$, $\Theta_{n-1}(x)$ et $H_{n-1}(x)$.

Mais, pour obtenir ces relations, il est plus commode de transformer d'abord les équations (3) et (4). A cet effet, je poserai

$$y = x^n \sqrt{\Theta_n(x)}\, e^{-\frac{F(x)}{2}}\, Y$$

et

$$u = x^n \sqrt{\Theta_{n-1}(x)}\, e^{-\frac{F(x)}{2}}\, U.$$

En faisant, pour abréger,

$$R = \left[\frac{n}{x} + \frac{1}{2}\frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} - \frac{F'(x)}{2}\right]^2 + \frac{n}{x^2} + \frac{F''(x)}{2} - \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} + \frac{H_n(x)}{x\Theta_n(x)}$$

et

$$\begin{aligned} S = {} & \left[\frac{n-1}{x} + \frac{1}{2}\frac{\Theta'_{n-1}(x)}{\Theta_{n-1}(x)} - \frac{F'(x)}{2}\right]^2 \\ & + \frac{n-1}{x^2} + \frac{F''(x)}{2} - \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\frac{\Theta'_{n-1}(x)}{\Theta_{n-1}(x)} + \frac{H_{n-1}(x)}{x\Theta_{n-1}(x)}, \end{aligned}$$

les équations (3) et (4) deviennent respectivement

$$Y'' = RY, \tag{5}$$

et

$$U'' = SY. \tag{6}$$

Formons maintenant l'équation linéaire et du quatrième ordre à laquelle satisfait l'expression

$$Z = YU; \tag{7}$$

ayant identiquement

$$yu = x^{2n-1} e^{-F(x)} \sqrt{\Theta_n(x)\,\Theta_{n-1}(x)}\, Z,$$

et $x^{2n-1} e^{-F(x)}$ étant une valeur de yu, on voit que l'équation différentielle en Z a pour solution

$$\frac{1}{\sqrt{\Theta_n(x)\,\Theta_{n-1}(x)}}.$$

5. Faisant, dans ce qui suit,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\Theta_n(x)\,\Theta_{n-1}(x)}},$$

on obtiendra facilement une relation linéaire entre Z et ses trois premières dérivées.

De l'équation (7) on déduit en effet

$$(8) \qquad Z' = YU' + UY',$$

puis, en vertu des équations (5) et (6),

$$(9) \qquad Z'' - (R+S)Z = 2Y'U',$$

puis, en dérivant une troisième fois,

$$(10) \qquad Z''' - (R+S)Z' - (R'+S')Z = 2RYU' + 2SUY',$$

et enfin

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} & Z^{\text{IV}} - 2(R+S)Z'' - 2(R'+S')Z' \\ & \qquad + [(R-S)^2 - R'' - S'']Z = 2R'YU' + 2SUY'. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant, entre les équations (8), (10) et (11), nous éliminons les quantités YU' et UY', nous obtiendrons la relation cherchée

$$\begin{vmatrix} Z' & 1 & 1 \\ Z''' - (R+S)Z' - (R'+S')Z & 2R & 2S \\ Z^{\text{IV}} - 2(R+S)Z'' - 2(R'+S')Z' + [(R-S)^2 - R'' - S'']Z & 2R' & 2S' \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$R + S = G \quad \text{et} \quad R - S = K,$$

$$(12) \quad Z^{\text{IV}} - \frac{K'}{K}Z''' - 2GZ'' + \left(2G\frac{K'}{K} - 3G'\right)Z' + \left(K^2 + \frac{G'K'}{K} - G''\right)Z = 0.$$

6. La relation précédente peut, comme il est facile de le vérifier, se mettre sous la forme suivante :

$$(13) \qquad \frac{d}{dx}\left(GZ^2 - ZZ'' + \frac{1}{2}Z'^2\right) = KZ\int KZ\,dx.$$

Je remarquerai d'abord que, le premier membre de cette identité étant une fonction rationnelle de x, l'intégrale $\int KZ\,dx$ ne doit renfermer aucune partie transcendante, et de là découlent immédiatement un certain nombre de relations entre les coefficients des polynômes $\Theta_n(x)$, $H_n(x)$, $\Theta_{n-1}(x)$ et $H_{n-1}(x)$. En

second lieu, cette intégrale ne doit renfermer aucune quantité constante; en effet, le produit de cette constante par KZ donnerait une quantité irrationnelle qui ne peut exister dans l'expression $\frac{d}{dx}(GZ^2 - ZZ'' + \frac{1}{2}Z'^2)$.

En intégrant la relation (13), il vient, en désignant par β une constante convenablement choisie,

$$2\beta + GZ^2 - ZZ'' + \tfrac{1}{2}Z'^2 = \tfrac{1}{2}\left(\int KZ\,dx\right)^2,$$

et encore

$$(14) \qquad \frac{1}{Z}\int KZ\,dx = \sqrt{\frac{4\beta}{Z^2} + 2G - \frac{2Z''}{Z} + \frac{Z'^2}{Z^2}}.$$

Le premier membre de cette identité étant une fonction rationnelle de x, il en résulte que l'expression rationnelle

$$\frac{4\beta}{Z^2} + 2G - \frac{2Z''}{Z} + \frac{Z'^2}{Z^2}$$

est un carré parfait.

II.

7. Comme application des résultats obtenus, je ferai

$$F(x) = x^2 + 2ax,$$

a désignant une constante arbitraire.

On voit que, dans ce cas, $f_n(x)$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$y'' = \left(\frac{2n}{x} + \frac{1}{x-\alpha_n} - 2x - 2a\right)y' - \left(2n + \frac{P_n}{x} + \frac{Q_n}{x-\alpha_n}\right)y = 0;$$

on a

$$\Theta_n(x) = x - \alpha_n,$$

et le problème à résoudre consiste à déterminer les coefficients α_n, P_n et Q_n.

8. On a

$$\begin{aligned} R = {} & \left(\frac{n}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-\alpha_n} - x - a\right)^2 \\ & + 2n + 1 + \frac{n}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} + \frac{P_n}{x} + \frac{Q_n}{x-\alpha_n} \\ = {} & x^2 + 2ax + a^2 + \left(P_n - 2na - \frac{n}{\alpha_n}\right)\frac{1}{x} + \frac{n(n+1)}{x^2} \\ & + \left(Q_n + \frac{n}{\alpha_n} - \alpha_n - a\right)\frac{1}{x-\alpha_n} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} \end{aligned}$$

et

$$S = x^2 + 2ax + a^2 + \left[P_{n-1} - 2(n-1)a - \frac{n-1}{\alpha_{n-1}}\right]\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{x^2}$$
$$+ \left(Q_{n-1} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} - \alpha_{n-1} - a\right)\frac{1}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{(x-a_{n-1})^2}.$$

On en déduit, en posant, pour abréger l'écriture,

$$P_n + P_{n-1} - 2(2n-1)a - \frac{n}{\alpha_n} - \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} = A,$$
$$Q_n + \frac{n}{\alpha_n} - \alpha_n - a = B,$$
$$Q_{n-1} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} - \alpha_{n-1} - a = C$$

et

$$P_n - P_{n-1} - 2a - \frac{n}{\alpha_n} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} = D,$$

les formules suivantes :

$$G = 2x^2 + 4ax + 2a^2 + \frac{A}{x} + \frac{2n^2}{x^2}$$
$$+ \frac{B}{x-\alpha_n} + \frac{C}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2}$$

et

$$K = \frac{D}{x} + \frac{2n}{x^2} + \frac{B}{x-\alpha_n} - \frac{C}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} - \frac{3}{4}\,\frac{1}{(x-\alpha_{n-1}}.$$

9. On a

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})}}.$$

Posons

$$(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1}) = \Delta, \qquad \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{2} = p,$$
$$\alpha_n\alpha_{n-1} = q \qquad \text{et} \qquad \alpha_n - \alpha_{n-1} = \omega;$$

il viendra

$$\int KZ\,dx = D\int\frac{dx}{x\sqrt{\Delta}} + 2n\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\Delta}} + B\int\frac{dx}{(x-\alpha_n)\sqrt{\Delta}}$$
$$- C\int\frac{dx}{(x-\alpha_{n-1})\sqrt{\Delta}} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-\alpha_n)^2\sqrt{\Delta}} - \frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-\alpha_{n-1})^2\sqrt{\Delta}},$$

ou, en effectuant les intégrations,

$$\int KZ\,dx = \left(D + \frac{n}{\alpha_n} + \frac{n}{\alpha_{n-1}}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\Delta}} - \frac{2n\sqrt{\Delta}}{qx}$$
$$- \frac{2B}{\omega\sqrt{\Delta}}(x-\alpha_{n-1}) - \frac{2C}{\omega\sqrt{\Delta}}(x-\alpha_n)$$
$$- \frac{1}{2\omega}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{(x-\alpha_n)^2} - \frac{1}{2\omega}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{(x-\alpha_{n-1})^2} + \frac{1}{\omega^2}\,\frac{x-\alpha_{n-1}}{\sqrt{\Delta}} - \frac{1}{\omega^2}\,\frac{x-\alpha_n}{\sqrt{\Delta}}.$$

Comme cette intégrale ne doit pas contenir de partie transcendante, on a

$$D = -n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right), \tag{15}$$

d'où

$$P_n = P_{n-1} + 2a - \frac{2n-1}{\alpha_{n-1}} \tag{16}$$

et

$$A = 2P_n - 4na - n\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right). \tag{17}$$

10. On a

$$\frac{-1}{Z}\int KZ\,dx = 2Mx - 2N + \frac{2n}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-\alpha_n} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-\alpha_{n-1}},$$

relation où j'ai posé, pour abréger,

$$M = \frac{n}{\alpha_n\alpha_{n-1}} + \frac{B+C}{\omega}, \qquad N = n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) + \frac{B\alpha_{n-1} + C\alpha_n}{\omega},$$

puis

$$\frac{4\beta}{Z^2} + 2G - \frac{2Z''}{Z} + \frac{Z'^2}{Z^2}$$
$$= 4\beta\Delta + 2G + \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{5}{4}\,\frac{\Delta'^2}{\Delta^2}$$
$$= 4\beta(x^2 - 2px + q) + 4x^2 + 8ax + 4a^2$$
$$+ \frac{2A}{x} + \frac{4n^2}{x^2} + \frac{2B}{x-\alpha_n} + \frac{2C}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right)^2$$
$$+ \frac{3}{2}\,\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2} - \frac{5}{4}\,\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} - \frac{5}{4}\,\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2} - \frac{1}{2\omega(x-a_n)} + \frac{1}{2\omega(x-\alpha_{n-1})}$$
$$= 4(1+\beta)x^2 + 8(a - p\beta)x + 4(a^2 + q\beta)$$
$$+ \frac{2A}{x} + \frac{4n^2}{x^2} + \left(2B - \frac{1}{2\omega}\right)\frac{1}{x-\alpha_n}$$
$$+ \left(2C + \frac{1}{2\omega}\right)\frac{1}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{1}{4(x-\alpha_n)^2} + \frac{1}{4(x-\alpha_{n-1})^2}.$$

L'identité (14) donne alors les relations suivantes :

$$M^2 = 1 + \beta, \tag{18}$$

$$MN = p\beta - a, \tag{19}$$

$$N^2 + 2nM = a^2 + q\beta, \tag{20}$$

$$A + 4nN + n\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) = 0; \tag{21}$$

puis

$$B = M\alpha_n - N + \frac{n}{\alpha_n}$$

et

$$C = -M\alpha_{n-1} + N - \frac{n}{\alpha_{n-1}}.$$

Ces deux dernières sont, comme il est facile de le voir, identiquement satisfaites.

Des équations (21) et (17) on déduit

$$N = n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) + \frac{B\alpha_{n-1} + C\alpha_n}{\omega} = a - \frac{P_n}{2n}. \tag{22}$$

On a ensuite

$$B^2 = \left(M\alpha_n - N + \frac{n}{\alpha_n}\right)^2;$$

d'où, en développant le carré et en remplaçant M^2, MN, N^2 et N par leurs valeurs tirées des relations (18), (19), (20) et (22),

$$\left\{\begin{aligned} &B^2 + 2\frac{2nB\alpha_{n-1}}{\alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1})} + \frac{2nC}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - (\alpha_n + a)^2 \\ &\qquad + n^2\left(\frac{1}{\alpha_n^2} + \frac{2}{\alpha_n\alpha_{n-1}}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

On a de même

$$C^2 = \left(-M\alpha_{n-1} + N - \frac{n}{\alpha_{n-1}}\right)^2,$$

d'où, en développant et en remplaçant M^2, MN, N^2 et N par leurs valeurs tirées des relations (18), (19), (20) et (22),

$$\left\{\begin{aligned} &C^2 + \frac{2nC\alpha_n}{\alpha_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1})} + \frac{2nB}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - (\alpha_{n-1} + a)^2 \\ &\qquad + n^2\left(\frac{1}{\alpha_{n-1}^2} + \frac{2}{\alpha_n\alpha_{n-1}}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

11. La solution complète du problème est maintenant ramenée à une question d'Algèbre élémentaire.

Si en effet, entre les équations (23) et (24), on élimine successivement C et B, on obtiendra deux équations du quatrième degré auxquelles satisfont respectivement ces deux quantités, et qui sont de la forme

$$\Phi(B, \alpha_n, \alpha_{n-1}, n) = 0 \tag{25}$$

et

$$\Phi_1(C, \alpha_n, \alpha_{n-1}, n) = 0. \tag{26}$$

Si maintenant on observe que B se déduit de C par le changement de n en $(n+1)$, de l'équation (26) on déduira une nouvelle équation

$$\Phi_1(B, \alpha_{n+1}, \alpha_n, n+1) = 0 \tag{27}$$

Ces deux équations (25) et (27), auxquelles satisfait B, sont d'ailleurs distinctes, puisqu'elles ne renferment pas les mêmes lettres; en écrivant la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient une racine commune, on obtiendra la relation qui lie ensemble trois quantités consécutives

$$\alpha_{n+1}, \quad \alpha_n \quad \text{et} \quad \alpha_{n-1},$$

et cette relation permettra d'obtenir ces diverses quantités par voie récurrente.

La valeur de la racine commune donnera B, et par conséquent Q_n; enfin, la valeur de C se déduisant de celle de B par le changement de n en $n-1$, la formule (22) donnera la valeur de P_n.

SUR

LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. VIII; 1880.

1. Soient $a, b, c, \ldots, l$, m quantités arbitraires et $F, F_1, F_2, \ldots, F_{m-1}$, m polynômes entiers en x. Si l'on désigne respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ les degrés de ces polynômes et si l'on pose, pour abréger,

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

on voit que, dans l'expression

$$V = Fe^{ax} + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} + \ldots + F_{m-1} e^{lx},$$

figurent les $\mu + m$ coefficients des polynômes $F, F_1, \ldots, F_{m-1}$. En donnant à l'un d'eux une valeur arbitraire, on peut encore disposer des $(\mu + m - 1)$ autres coefficients de façon à annuler, dans le développement de V suivant les puissances croissantes de x, les coefficients de

$$x^0, \quad x^1, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^{\mu+m-2}.$$

Les polynômes $F, F_1, \ldots, F_{m-1}$ étant ainsi déterminés, le développement de V commencera par un terme de l'ordre de $x^{\mu+m-1}$.

Dans une Note publiée dans le *Journal de M. Borchardt* (1), M. Hermite a donné une méthode très simple et très élégante pour déterminer les valeurs de ces polynômes. Depuis, dans le cas particulier où tous les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont égaux à un même nombre n (2), j'ai rattaché la recherche de l'expression V au développement de e^{zx} suivant les puissances croissantes du polynôme

$$f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-l),$$

(1) *Lettre de M. Hermite à M. Borchardt* (*Journal de M. Borchardt*, t. 76).

(2) *Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme* (*Journal de M. Borchart*, t. 88).

et, en posant

$$f(z) = z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} + \ldots + sz + t,$$

j'ai montré que V était une solution de l'équation différentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre

$$x\left(\frac{d^m y}{dx^m} + p\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + q\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + s\frac{dy}{ds} + ty\right)$$
$$- n\left[m\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (m-1)p\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + (m-2)q\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} + \ldots + sy\right] = 0.$$

Si l'on représente, pour un instant, par

$$Dy, \quad D^2y, \quad D^3y \quad \ldots$$

les dérivées successives de y, l'équation précédente peut se mettre sous la forme symbolique qui suit :

$$xf(D)y - f'(D)y = 0.$$

2. Dans le cas plus général où les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont différents, il est aussi facile de former l'équation différentielle à laquelle satisfait V.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f_a = \frac{f}{x-a}, \qquad f_b = \frac{f}{x-b}, \qquad \ldots, \qquad f_l = \frac{f}{x-l},$$

cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme symbolique

$$(1) \qquad xf(D)y - [\alpha f_a(D) + \beta f_b(D) + \ldots + \lambda f_l(D)]y = 0,$$

et on le démontrerait aisément en suivant la voie indiquée par M. Hermite dans la Note que j'ai citée ci-dessus.

3. En particulier, si $m = 3$, l'équation (1) peut s'écrire

$$x[y''' - (a+b+c)y'' + (ab+bc+ca)y' - abcy]$$
$$- \{(\alpha+\beta+\gamma)y'' - [\alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b)]y'$$
$$+ (\alpha bc + \beta ca + \gamma ab)y\} = 0.$$

En supposant, ce qu'il est toujours permis de faire sans nuire à la généralité du problème, que

$$a = 0,$$

l'équation précédente devient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & x[y''' - (b+c)y'' + bcy'] \\ & \quad - \{\alpha + \beta + \gamma)y'' - [\alpha(b+c) + c\beta + a\gamma]y' + \alpha bcy\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Je me propose, dans ce qui suit, de démontrer directement cette équation.

4. Soient F, F_1 et F_2 trois polynômes en x dont le degré soit respectivement marqué par les nombres α, β et γ; on peut disposer des coefficients de ces polynômes de telle sorte que le développement de l'expression

$$V = F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx}$$

commence par un terme de l'ordre de $x^{\alpha+\beta+\gamma+2}$.

On a donc

$$F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\alpha+\beta+\gamma+2}),$$

ou, en faisant, pour abréger, $\alpha + \beta + \gamma = \mu$,

$$(3)\qquad F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\mu+2}) \text{ (1)}.$$

En formant successivement la première et la seconde dérivée de la relation (3), il vient

$$(4)\qquad F' + e^{bx}(F_1' + bF_1) + e^{cx}(F_2' + cF_2) = (x^{\mu+1})$$

et

$$(5)\qquad F'' + e^{bx}(F_1'' + 2bF_1' + b^2F_1) + e^{cx}(F_2'' + 2cF_2' + c^2F_2) = (x^{\mu}),$$

En résolvant les équations (3), (4) et (5), on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} F & F_1 & F_2 \\ F' & F_1' + bF_1 & F_2' + cF_2 \\ F'' & F_1'' + 2bF_1' + b^2F_1 & F_2'' + 2cF_2' + c^2F_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (x^{\mu+2}) & F_1 & F_2 \\ (x^{\mu+1}) & F_1' + bF_1 & F_2' + cF_2 \\ (x^{\mu}) & F_1'' + 2bF_1' + b^2F_1 & F_2'' + 2cF_2' + c^2F_2 \end{vmatrix},$$

(1) Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne généralement, indépendamment de la nature des coefficients, par (x^p) une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^p.

d'où il résulte que Δ est divisible par x^{μ}, et, comme d'ailleurs cette expression est précisément du degré μ, on a

$$\Delta = Mx^{\mu},$$

M désignant une quantité constante.

5. Je pose, pour abréger,

$$\Delta = Mx^{\mu} = PF'' - QF' + RF,$$

puis

$$F_1 e^{bx} = u, \qquad F_2 e^{cx} = v,$$

et enfin

$$uv' - vu' = w, \qquad u'v'' - v'u'' = \omega.$$

Comme on a évidemment

$$\Delta = \begin{vmatrix} F & e^{-bx}u & e^{-cx}v \\ F' & e^{-bx}u' & e^{-cx}v' \\ F'' & e^{-bx}u'' & e^{-cx}v'' \end{vmatrix}.$$

on en déduit

$$P = e^{-(b+c)}w, \qquad Q = e^{-(b+c)}w' \qquad \text{et} \qquad R = e^{-(b+c)}\omega.$$

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y & e^{-bx}u & e^{-cx}v \\ y' & e^{-bx}u' & e^{-cx}v' \\ y'' & e^{-bx}u'' & e^{-cx}v'' \end{vmatrix} = Mx^{\mu},$$

que l'on peut écrire

$$(6)\qquad Py'' - Qy' + Ry = Mx^{\mu}.$$

Cette équation est satisfaite quand on y fait $y = F$; la même équation est également satisfaite quand on y fait $y = u$ ou $y = v$, pourvu que l'on y remplace la constante M par zéro.

Si donc on élimine, par différentiation, la constante M de l'équation (6), l'équation que l'on obtient

$$\begin{aligned} & Pxy''' + (Px' - Qx - 3nP)y'' \\ & \quad + (Rx - Q'x + 3nQ)y' + (R'x - 3nR)y = 0 \end{aligned}$$

a pour solutions

$$y = F, \qquad y = u \qquad \text{et} \qquad y = v;$$

c'est, par suite, l'équation à laquelle satisfait l'expression V. En y remplaçant P, Q et R par leurs valeurs données plus haut, elle prend la forme suivante :

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} & w x y'' - [(b+c)x+\mu] w y'' \\ & \quad + [x\omega + x(b+c)w' - x w'' + \mu w']y' \\ & \quad\quad + [x\omega' - (b+c)x\omega - \mu\omega]y = 0. \end{aligned}\right.$$

6. Pour simplifier cette équation, je remarque que l'équation (6) a une solution entière, à savoir le polynôme F. Il est facile d'ailleurs d'intégrer cette équation, puisque l'équation obtenue en retranchant le second membre,

$$\mathrm{P}y'' - \mathrm{Q}y' + \mathrm{R}y = 0$$

a pour solutions

$$y = u \qquad \text{et} \qquad y = v.$$

En employant donc la méthode connue de la variation des constantes arbitraires, je poserai

$$y = \mathrm{A}u + \mathrm{B}v,$$

puis

$$\mathrm{A}'u + \mathrm{B}'v = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}'u' + \mathrm{B}'v' = \frac{\mathrm{M}x^{\mu}}{\mathrm{P}}.$$

On en déduit

$$\mathrm{A}' = \frac{\mathrm{M}x^{\mu}}{\mathrm{P}^2} e^{-bx}\mathrm{F}_2\,dx, \qquad \mathrm{B}' = -\frac{\mathrm{M}x^{\mu}}{\mathrm{P}^2} e^{-cx}\mathrm{F}_1\,dx$$

et

$$y = \mathrm{MF}_1 e^{bx}\int\frac{x^{\mu}}{\mathrm{P}^2}e^{-bx}\mathrm{F}_2\,dx - \mathrm{MF}_2 e^{cx}\int\frac{x^{\mu}}{\mathrm{P}^2}e^{-cx}\mathrm{F}_1\,dx.$$

Comme l'une des valeurs de y est le polynôme F, on voit que l'intégrale

$$\int\frac{x^{\mu}}{\mathrm{P}^2}e^{-bx}\mathrm{F}_2\,dx$$

ne doit renfermer d'autre transcendante que la fonction e^{-bx}.

En désignant par λ une racine quelconque de l'équation $\mathrm{P} = 0$, posons

$$\frac{x^{\mu}\mathrm{F}_2}{\mathrm{P}^2} = \mathrm{E} + \sum\frac{p}{x-\lambda} + \sum\frac{q}{(x-\lambda)^2};$$

l'intégrale précédente devient

$$\int e^{-bx}\mathrm{E}\,dx + \int e^{-bx}\sum\frac{p}{x-\lambda}\,dx + \int e^{-bx}\sum\frac{q}{(x-\lambda)^2}\,dx$$

ou, en intégrant par parties,

$$\int e^{-bx}\mathrm{E}\,dx - \sum\frac{e^{-bx}q}{x-\lambda} + \int e^{-bx}\sum\frac{p-bq}{x-\lambda}\,dx.$$

Cette expression ne devant renfermer d'autre transcendante que e^{-bx}, on doit avoir, pour toutes les racines de l'équation $\mathrm{P}(\lambda) = 0$, la relation

$$b = \frac{p}{q};$$

or un calcul facile donne

$$\frac{p}{q} = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mathrm{F}_2'(\lambda)}{\mathrm{F}_2(\lambda)} - \frac{\mathrm{P}''(\lambda)}{\mathrm{P}'(\lambda)}.$$

On a donc, quelle que soit la racine considérée de l'équation $\mathrm{P}(\lambda) = 0$,

$$\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mathrm{F}_2'(\lambda)}{\mathrm{F}_2(\lambda)} - \frac{\mathrm{P}''(\lambda)}{\mathrm{P}'(\lambda)} = b,$$

d'où l'identité suivante, où G désigne un polynôme de degré γ :

$$(7)\qquad x\mathrm{F}_2'\mathrm{P}' + \mu\mathrm{F}_2\mathrm{P}' - x\mathrm{F}_2\mathrm{P}'' - bx\mathrm{F}_2\mathrm{P}' + \mathrm{GP} = 0.$$

7. Pour déterminer le polynôme G, je remarque qu'en négligeant les multiples de F_2 on a, par la définition même du polynôme P,

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{F}_1\mathrm{F}_2'$$

et

$$\mathrm{P}' \equiv \mathrm{F}_1\mathrm{F}_2'' + (c-b)\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2'.$$

La relation donne d'ailleurs

$$x\mathrm{F}_2'\mathrm{P}' + \mathrm{GP} \equiv 0,$$

d'où, en remplaçant P et P′ par leurs valeurs congrues suivant le module F_2,

$$x\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2'\mathrm{F}_2'' + (c-b)x\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2'^2 + \mathrm{GF}_1\mathrm{F}_2' \equiv 0,$$

puis, en divisant $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2'$,

$$\mathrm{G} \equiv (b-c)x\mathrm{F}_2' - x\mathrm{F}_2''$$

et enfin

$$G = mF_2 + (b-c)xF'_2 - xF''_2,$$

m désignant une quantité constante.

En portant cette valeur de G dans l'équation (7), elle devient

$$(8)\quad xF_2P'' + (bxF_2 - xF'_2 - \mu F_2)P' - [mF_2 + (b-c)xF'_2 - xF''_2]P = 0;$$

P étant du degré $(\beta+\gamma)$, on trouve facilement, en égalant à zéro le coefficient du terme le plus élevé dans la relation précédente,

$$b(\beta+\gamma) - m - \gamma(b-c) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad m = b\beta + c\gamma.$$

8. En employant maintenant les relations

$$P = e^{-(b+c)}w \qquad \text{et} \qquad F_2 = e^{-cx}v,$$

j'introduis les fonctions w et v dans l'équation (8).

En effectuant les calculs, on obtient la relation

$$vxw'' - [(b+c)vx + \mu v + xv']w' + [bcxv + \mu(b+c)v - mv + xv'']w = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$xw'' - [(b+c)x + \mu]w' + [bcx + \mu(b+c) - m]w + \frac{x}{v}(v''w - v'w').$$

Je remarque maintenant que, w étant égal à $uv' - vu'$, l'expression $\frac{v'w - v'w'}{v}$ a pour valeur

$$v'u'' - u'v'' = -\omega.$$

On a donc identiquement

$$x(w'' - \omega) - [(b + c\ x + \mu]w' + [bcx + \mu(b+c) - m]w = 0.$$

Tirons ω de cette relation et portons sa valeur dans l'équation (A); w, w' et w'' disparaîtront, et l'on obtiendra une équation de la forme

$$xy''' - [(b+c)x + \mu]y'' + [bcx + \mu(b+c) - m]y' + Hy = 0.$$

On déterminera H en remarquant que, l'équation précédente ayant pour solution le polynôme entier F qui est du degré α, H est une

constante, et que le coefficient de x^α dans le premier membre est

$$H + \alpha bc;$$

on a donc

$$H = -\alpha bc.$$

9. Si maintenant on remplace respectivement μ et m par $\alpha+\beta+\gamma$ et $b\beta + c\gamma$, l'équation devient

$$\begin{aligned} &xy''' - [(b+c)x + \alpha + \beta + \gamma]y'' \\ &\quad + [bcx + \alpha(b+c) + c\beta + b\gamma]y' - \alpha bcy = 0. \end{aligned}$$

et on peut la mettre sous la forme que j'ai mentionnée plus haut :

$$\begin{aligned} &x[y''' - (b+c)y'' + bcy'] \\ &\quad - \{(\alpha+\beta+\gamma)y'' - [\alpha(b+c) + c\beta + b\gamma]y' + \alpha bcy\} = 0. \end{aligned}$$

SUR LA FONCTION

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}.$$

Bulletin de la Société mathématique de France, t. VIII; 1879.

I.

1. Soit, en désignant par ω une constante arbitraire,

$$z = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega};$$

je me propose d'abord de développer z en fractions continues, et, à cet effet, je poserai

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad (^1),$$

φ_n et f_n désignant deux polynômes entiers en x du degré n, que j'écrirai aussi $\varphi_n(x)$, $f_n(x)$ et $\varphi_n(x, \omega)$, $f_n(x, \omega)$ lorsque je voudrai mettre en évidence la variable x et la constante ω.

Comme z tend vers l'unité quand x croît indéfiniment, on voit que les coefficients de x^n sont égaux dans les deux polynômes; z se changeant d'ailleurs en $\frac{1}{z}$ quand on change le signe de x, on en conclut la relation

$$\varphi_n(x) = (-1)^n f_n(-x);$$

on a aussi évidemment

$$\varphi_n(x, \omega) = f_n(x, -\omega).$$

[1] Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne généralement par $\left(\frac{1}{x^p}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de $\frac{1}{x^p}$.

2. Je rappellerai d'abord les résultats obtenus dans la Note que j'ai présentée récemment à la Société *Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels.*

Soit proposé de réduire en fractions continues une fonction z satisfaisant à l'équation différentielle

$$W z' = V z + U,$$

où U, V et W désignent des polynômes entiers en x, et soit $\frac{\varphi_n}{f_n}$ la réduite de rang n.

Représentons par Θ_n un polynôme entier du degré de

$$V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et par A_n une constante dont la valeur ne dépend que du nombre entier n et est actuellement indéterminée; on a

$$f_n^2 U + f_n \varphi_n V - (\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n) W = A_n \Theta_n,$$

et l'on voit que f_n satisfait à une équation linéaire du second ordre de la forme

$$W y'' + W_0 y' + W_1 y = 0,$$

où

$$W_0 = V + W - W \frac{\Theta_n'}{\Theta_n} \qquad \text{et} \qquad W_1 = \frac{K_n}{\Theta_n},$$

K_n désignant un polynôme entier en x.

Une seconde solution de cette équation est donnée par la formule

$$y_1 = e^{-\int \frac{V}{W} dx} (\varphi_n - f_n z).$$

En posant de plus, pour abréger,

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = P_n,$$

on a les relations suivantes :

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} W f_n' = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1}, \\ f_{n+1} - \dfrac{\Omega_n + \Omega_{n+1} + V}{\Theta_{n+1}} f_n + P_{n-1} f_{n-1} = 0. \end{cases}$$

La première de ces relations détermine le degré et la forme de Ω_n; on déterminera complètement ce polynôme en exprimant que, pour une valeur convenable de P_n, l'expression

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dx}$$

satisfait à l'équation différentielle

$$W u'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{P_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{W} \right) u = 0.$$

3. La fonction $z = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^\omega$ satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1) z' + 2 \omega z = 0;$$

dans le cas actuel, nous avons donc

$$W = x^2 - 1, \qquad V = -2\omega, \qquad \text{et} \qquad U = 0,$$

d'où il résulte d'abord que Θ_n est une constante que nous ferons égale à -1.

L'équation différentielle qui a pour solutions f_n et $\varphi_n \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\omega$ est

$$(x^2 - 1) y'' + 2(x - \omega) y' - n(n+1) y = 0. \tag{1}$$

Nous déterminerons P_n et Ω_n par la condition que $u = e^{\int \frac{\Omega_n}{x^2-1} dx}$ satisfasse à l'équation

$$(x^2 - 1) u'' + 2(x - \omega) u' - \left[n(n+1) + \frac{P_n}{x^2 - 1} \right] u = 0.$$

Ω_n étant du premier degré en x, u est de la forme $(x-1)^\alpha (x+1)^\beta$; en substituant cette expression dans l'équation précédente, on trouve les équations de condition qui suivent :

$$(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1) = n(n+1), \qquad \alpha - \beta = \omega$$

et

$$P_n = n(n+1) - (\alpha + \beta) - \omega^2.$$

On peut y satisfaire de deux façons différentes.

En premier lieu, on peut poser

$$\alpha + \beta = n, \qquad \text{d'où} \qquad P_n = n^2 - \omega^2$$

et

$$\alpha = \frac{n + \omega}{2}, \qquad \beta = -\frac{n - \omega}{2}.$$

On en déduit

$$\Omega_n = \frac{x^2 - 1}{2} \left(\frac{n + \omega}{x - 1} + \frac{n - \omega}{x + 1} \right) = n x + \omega;$$

mais il est facile de voir que cette solution ne convient pas à la question. En effet, en posant $f_0 = 1$ et faisant $n = 0$, on aurait, en vertu de la première des formules (A),

$$f_1 = -\omega,$$

ce qui est impossible, puisque f_1 est nécessairement du premier degré en x.

Posons donc

$$\alpha + \beta = -(n+1), \qquad \text{d'où} \qquad P_n = (n+1)^2 - \omega^2$$

et

$$\alpha = \frac{\omega - n - 1}{2}, \qquad \beta = \frac{\omega + n + 1}{2}.$$

On en déduit

$$\Omega_n = \omega - (n+1) x,$$

et les formules (A) deviennent

$$(x^2 - 1) f'_n = [\omega - (n+1) x] f_n + f_{n+1}, \tag{2}$$

$$f_{n+1} - (2n+1) x f_n + (n^2 - \omega^2) f_{n-1} = 0. \tag{3}$$

En changeant ω en $-\omega$, on obtient encore les formules suivantes :

$$(x^2 - 1) \varphi'_n = -[\omega + (n+1) x] \varphi_n + \varphi_{n+1}, \tag{2'}$$

$$\varphi_{n+1} - (2n+1) x \varphi_n + (n^2 - \omega^2) \varphi_{n-1} = 0, \tag{3'}$$

On a d'ailleurs

$$(x^2 - 1)(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) + 2 \omega \varphi_n f_n = A_n. \tag{4}$$

Au moyen de ces formules, on trouve ces valeurs des premiers polynômes :

$$f_0 = 1, \quad f_1 = x - \omega, \quad f_2 = 3x^2 - 3\omega x + \omega^2 - 1,$$
$$f_3 = 15x^3 - 15\omega x^2 + (6\omega^2 - 9)x - \omega(\omega^2 - 4).$$

Du reste, l'équation (1) s'intégrant au moyen des séries hypergéométriques, on obtient ainsi aisément l'expression suivante :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} f_n = &(-1)^n(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+n) \\ &\times\left[1 - \frac{n}{1}\,\frac{n+1}{\omega+1}\left(\frac{1+x}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 + \ldots \right. \\ &\left. + (-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+n)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right]. \end{aligned} \right.$$

Des formules (4) et (5) on déduit, en y faisant $x = 1$ et en remarquant que $\varphi_n(\omega) = f_n(-\omega)$,

$$(6)\qquad A'_n = 2\omega(1-\omega^2)(1-4\omega^2)\ldots(1-n^2\omega^2),$$

ce qui concorde bien avec la valeur trouvée pour P_n.

4. Si l'on désigne, en général, par S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $f_n = 0$, on a

$$S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = S_{2n-1} = \omega \text{ (1)};$$

cette propriété est caractéristique du polynôme f_n.

Je ferai encore les remarques suivantes. Posons, en ordonnant f_n par rapport aux puissances croissantes de ω,

$$f_n = P_0 + \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \ldots + \omega^n P_n.$$

De l'équation

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega = \frac{P_0 - \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \ldots}{P_0 + \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \ldots} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

on déduit, en développant les deux membres suivant les puissances croissantes de ω et égalant les coefficients de la première puissance,

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2P_1}{P_0} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

(1) *Voir*, à ce sujet, ma Note *Sur un problème d'Algèbre* (*Bulletin*, t. V, p. 30).

d'où il résulte que $\frac{P_1}{P_0}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fonction

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

En désignant, en effet, suivant l'usage ordinaire, par X_n le polynôme de Legendre et par $\Pi(n)$ le produit $1.2\ldots n$, on a

$$P_0 = \Pi(n) X_n.$$

Désignons, dans f_n, par $H(x, \omega)$ l'ensemble des termes homogènes et du degré n par rapport aux deux quantités x et ω; on verra aussi facilement que $H(1, \omega)$ est le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de $e^{\frac{\omega}{2}}$.

II.

5. La réduction en fractions continues de la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$ est liée intimement avec le développement de la fonction $(x+z)^\omega$ suivant les puissances croissantes de (z^2-1).

Soit, en effet,

$$(7)\qquad (x+z)^\omega = \sum (V_n + z U_n)\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)}.$$

Pour obtenir ce développement d'après la méthode donnée par Jacobi (1), nous poserons

$$(z+x)^\omega = b_0 x^\omega + b_1 x^{\omega-1} z + \ldots + b_i x^{\omega-i} z^i + \ldots$$

et

$$\frac{1}{(z^2-1)^{n+1}} = \frac{A_1}{z^{2n+2}} + \frac{A_2}{z^{2n+4}} + \ldots.$$

Si, dans le produit des deux séries, nous prenons l'ensemble des termes $\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z_2}$ qui sont du premier et du second degré en $\frac{1}{z}$, nous voyons aisément que B_1 est de l'ordre $x^{\omega-2n-1}$ et B_2 de l'ordre de $z^{\omega-2n}$. Or $V_n + zU_n$ est la partie entière de

$$(z^2-1)\left(\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}\right);$$

(1) *Entwickelung nach den Potenzen eines ganzen Polynoms* (*Journal de Borchardt*, t. 53, p. 105).

on a donc

$$U_n = B_1,$$

et, par suite, U_n est de l'ordre de $x^{\omega-2n-1}$.

6. Ce point essentiel étant établi, en dérivant successivement par rapport à x et par rapport à z l'identité (6), j'obtiens les relations

$$\begin{aligned}\omega(x+z)^{\omega-1} &= \sum (V'_n + zU'_n)\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)}\\ &= \sum U_n \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)} + \sum (V_n z + U_n z^2)\frac{(z^2-1)^{n-1}}{2^n\Pi(n-1)}\\ &= \sum (2n+1)U_n \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)} + \sum (U_n + V_n z)\frac{(z^2-1)^{n-1}}{2^n\Pi(n-1)},\end{aligned}$$

d'où les identités

$$V'_n = (2n+1)U_n + U_{n+1} \qquad \text{et} \qquad U'_n = V_{n+1}.$$

On a de même

$$\begin{aligned}\omega(x+z)^{\omega} = \omega\sum(V_n + zU_n)\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)} &= \sum(V'_n + zU'_n)(z+x)\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)}\\ &= \sum 2(n+1)U'_n\frac{(z^2-1)^{n+1}}{2^{n+2}\Pi(n+1)}\\ &\quad + \sum[U'_n + xV'_n + (V'_n + xU'_n)]\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)},\end{aligned}$$

d'où

$$\omega V_n = 2nU'_{n-1} + U'_n + xV'_n$$

et

$$\omega U_n = V'_n + xU'_n.$$

On en déduit aisément les solutions suivantes :

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} &V_n = U'_{n-1},\\ &(x^2-1)U''_n + 2x(n+1-\omega)U'_n - \omega(2n+1-\omega)U_n = 0,\\ &U_{n+1} + (2n+1-\omega)U_n + xU'_n = 0,\\ &(x^2-1)U_{n+1} + [(2n+1)x^2 + 2\omega - 4n - 1]U_n\\ &\qquad\qquad - (2n-\omega)(2n-\omega-1)U_{n-1} = 0,\\ &U_{n+1} + (2n+1)U_n - U''_{n-1} = 0,\end{aligned}\right.$$

7. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}U_0 &= (x+1)^{\omega} - (x-1)^{\omega},\\ U_1 &= (x+1)^{\omega-1}(\omega-1-x) - (x-1)^{\omega-1}(1-\omega-x),\end{aligned}$$

et la dernière des formules précédentes permet de calculer facilement de proche en proche les diverses valeurs de U_n.

On voit que U_n est de la forme

$$F_n(x+1)^{\omega-n} - \Phi_n(x-1)^{\omega-n},$$

où F^n et Φ_n désignent des polynômes entiers en x du degré n, et, d'après la remarque que j'ai faite ci-dessus, on a

$$F_n(x+1)^{\omega-n} - \Phi_n(x-1)^{\omega-n} = \left(\frac{x^{\omega}}{x^{2n+1}}\right),$$

d'où

$$F_n\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega-n} - \Phi_n = \left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),$$

ce qui montre que $\frac{\Phi_n}{F_n}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega-n}$. Par suite, F_n et Φ_n ne diffèrent que par un nombre constant de $f_n(\omega-n)$ et de $\varphi_n(\omega-n)$; si d'ailleurs on désigne, pour un instant, par M_n le coefficient de x^n dans F_n, on déduit des formules précédentes

$$M_{n+1} = -(2n+1)M_n$$

et

$$M_n = (-1)n.1.3.5 - (2n-1),$$

d'où l'on voit que

$$F_n = (-1)^n f_n(\omega-n), \qquad \Phi_n = (-1)^n\varphi_n(\omega-n)$$

et

$$U_n = (-1)^n[(x+1)^{\omega-n}f_n(\omega-n) - (x-1)^{\omega-n}\varphi_n(\omega-n)].$$

Transformons les relations (B) en posant

$$U_n = (-1)^n(x+1)^{\omega-n}f_n(\omega-n),$$

puis changeons ensuite ω en $\omega+n$.

On trouvera tout d'abord, comme nous y sommes arrivé par une voie différente, que f_n satisfait à l'équation du second ordre (1), puis les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &f_{n+1}(\omega-1) = [(n+1)x+n+1-\omega]f_n(\omega)+x(x+1)f'_n(\omega),\\ &(x-1)f_{n+1}(\omega-1)+[(2n+1)x^2+2\omega-2n-1]f_n(\omega)\\ &\qquad +(2n-\omega)(2n-\omega-1)(x+1)f_{n-1}(\omega+1), \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $f'_n(\omega)$ au moyen de la formule (2),

$$(x-1)f_{n+1}(\omega-1) = (\omega-n-1)f_n(\omega)+xf_{n+1}(\omega). \tag{8}$$

8. De la formule (7) on déduit

$$(x+z)^\omega-(x-z)^\omega = \sum \frac{2z\,\mathrm{U}_n(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)},$$

d'où, en intégrant entre les limites 1 et z,

$$\begin{aligned} (x+z)^{\omega+1}+(x-z)^{\omega+1} &= (x+1)^{\omega+1}\\ &\quad +(x-1)^{\omega+1}+(\omega+1)\sum \frac{\mathrm{U}_n(z^2-1)^{n+1}}{2^{n+1}\Pi(n+1)}. \end{aligned}$$

Posons $z = 1+\sqrt{t}$; il viendra

$$\begin{aligned} &(x+\sqrt{1+t})^{\omega+1}+(x-\sqrt{1+t})^{\omega+1}\\ &\quad = (x+1)^{\omega+1}+(x-1)^{\omega+1}\\ &\quad +(\omega+1)\sum \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n+1)}[(x+1)^{\omega-n}f_n(\omega-n)-(x-1)^{\omega-n}\varphi_n(\omega-n)t^{n+1}. \end{aligned}$$

Cette équation se décompose évidemment en deux autres, dont l'une est

$$\left\{ \begin{aligned} (x+\sqrt{1+t})^{\omega+1} &= (x-1)^{\omega+1}\\ &\quad +(\omega+1)\sum \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n+1)}(x+1)^{\omega-n}f_n(\omega-n)t^{n+1}. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Changeons, dans cette formule, t en $\frac{t}{x}$ et x en $\frac{1}{\sqrt{x}}$; il viendra

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{x+t})^{\omega+1} &= (1+\sqrt{x})^{\omega+1}\\ &\quad +(\omega+1)\sum \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n+1)} \frac{(1+\sqrt{x})^{\omega-n}}{x^{\frac{n+1}{2}}} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\ \omega-n\right)t^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où, en vertu de la formule de Taylor,

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{\omega+1} = \frac{(-1)^n(\omega+1)}{2^{n+1}\Pi(n+1)} \frac{(1+\sqrt{x})^{\omega-n}}{x^{\frac{n+1}{2}}} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\ \omega-n\right),$$

et, en changeant ω en $\omega+n$,

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(-1)^n 2^{n+1} x^{\frac{n+1}{2}}}{(\omega+n+1)(1+\sqrt{x})^\omega} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{\omega+n+1}; \tag{10}$$

en particulier, pour les polynômes de Legendre, on a la formule

$$\mathrm{X}_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(-1)^n 2^{n+1} x^{\frac{n+1}{2}}}{\Pi(n+1)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{n+1}.$$

III.

9. En désignant, pour un instant, par Y_n la série hypergéométrique

$$1-\frac{n}{1}\frac{n+1}{\omega+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}-\ldots,$$

on a

$$f_n = (-1)^n \frac{\Pi(n+\omega)}{\Pi(\omega)}\mathrm{Y}_n;$$

en se servant de l'expression remarquable donnée par Jacobi pour les polynômes qui proviennent de la série hypergéométrique [1], on en déduit

$$f_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega \frac{d^n}{dx^n}(x+1)^{\omega+n}(x-1)^{n-\omega}. \tag{11}$$

10. La fonction

$$f_n-\varphi_n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\omega$$

satisfaisant à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y''+2(x-\omega)y'-n(n+1)y = 0,$$

---

(1) JACOBI, *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (*Journal de Borchardt*, t. 56, p. 149).

on en déduit aisément que la fonction

$$(x+1)^{\omega} f_n - (x-1)^{\omega} \varphi_n$$

satisfait à l'équation

$$(x^2-1)u'' - 2(\omega-1)x u' + [\omega(\omega-1) - n(n+1)]\, u = 0.$$

En la différentiant p fois de suite, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}(x^2-1)u^{(p+2)} &- 2(\omega-p-1)x u^{(p+1)} \\ &+ [(\omega-p-1)(\omega-p) - n(n+1)]\, u = 0.\end{aligned}$$

Comme elle ne diffère de l'équation précédente que par le changement de ω en $(\omega-p)$, on en conclut que la $p^{\text{ième}}$ dérivée de $(x+1)^{\omega} f_n$ ne diffère que par un facteur constant de la fonction $(x+1)^{\omega-p} f_n(\omega-p)$. Ce facteur se détermine facilement, et l'on obtient l'identité suivante :

$$(12)\qquad \frac{d^p}{dx^p}(x+1)^{\omega} f_n(x,\omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega+n-p)}(x+1)^{\omega-p} f_n(x,\omega-p).$$

En particulier, si l'on fait $\omega = p$, il vient :

$$(13)\qquad \frac{d^p}{dx^p}(x+1)^p f_n(x,p) = \pi(n+p) X_n.$$

Si, dans cette formule, on fait $p = n$, comme

$$f_n(x,n) = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n)}(x-1)^n,$$

on retrouve la formule connue, due à O. Rodrigues,

$$X_n = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \frac{d_n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

11. La formule (13) montre que, p étant un nombre entier positif, $(x+1)^p f_n(x,p)$ peut s'obtenir en intégrant plusieurs fois de suite le polynôme X_n.

Considérons, d'une façon plus générale, l'expression

$$I = \int_{-1}^{x} (x-z)^{\omega-1} X_n(z)\, dz,$$

où ω désigne un nombre quelconque positif.

En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}I = \frac{(x+1)^{\omega}}{\omega}\Big[X_n(-1) &+ \frac{X_n(-1)}{\omega+1}(x+1) \\ &+ \frac{X''_n(-1)}{(\omega+1)(\omega+2)}(x+1)^2 + \ldots\Big],\end{aligned}$$

et, en partant de l'expression

$$\begin{aligned}X_n = (-1)^n\Big[1 &- \frac{n}{1}\frac{(n+1)}{1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \ldots\Big],\end{aligned}$$

on trouve aisément

$$X_n(-1) = (-1)^n, \qquad X'_n(-1) = -\frac{n}{1}(n+1)\frac{(-1)^n}{2},$$

$$X''(-1) = \frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)\frac{(-1)^n}{2^2}, \quad \ldots;$$

on en déduit

$$\begin{aligned}I = \frac{(-1)^n(x+1)^{\omega}}{\omega}\Big[1 &- \frac{n}{1}\frac{n+1}{\omega+1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \ldots\Big],\end{aligned}$$

où la quantité entre crochets est, à un facteur numérique près, le polynôme f_n, d'où l'identité suivante :

$$(14)\qquad f_n(x,\omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega-1)}(x+1)^{-\omega}\int_{-1}^{x}(x-z)^{\omega-1} X_n(z)\, dz.$$

Cette formule suppose essentiellement que ω est positif; comme l'on a

$$f_n(x,-\omega) = (-1)^n f_n(-x,\omega),$$

on a également, ω étant toujours supposé positif,

$$(14)'\qquad f_n(x,-\omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega-1)}(x-1)^{-\omega}\int_{1}^{x}(x-z)^{\omega-1} X_n(z)\, dz.$$

On en déduit, en remarquant que $f_n(x,-\omega) = \varphi_n(x,\omega)$,

$$\frac{\Pi(\omega-1)}{\Pi(\omega+n)}[f_n(x+1)^{\omega} - \varphi_n(x-1)^{\omega}] = \int_{-1}^{+1}(x-z)^{\omega-1} X_n(z)\, dz$$

Si donc on pose

$$(x-z)^{\omega-1} = \Sigma A_n X_n(z)$$

on a, en vertu d'une formule connue,

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} (x-z)^{\omega-1} X_n(z)\, dz.$$

d'où

$$A_n = \frac{2n+1}{2\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n)} [f_n(x+1)^{\omega} - \varphi_n(x-1)^{\omega}] \text{ (1)}.$$

12. Si, dans la formule (12), on fait $\omega = 0$, et si l'on remarque que

$$f_n(x, 0) = \Pi(n) X_n,$$

il vient

$$f_n(x, -p) = \Pi(n-p)(x+1)^p \frac{d^p}{dx^p} X_n;$$

dans cette identité, p désigne zéro ou un nombre entier positif inférieur à $(n+1)$. Nous pouvons en déduire aisément une expression nouvelle de la fonction $\frac{f_n}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n)}$; posons, en effet,

$$\frac{f_n(x,\omega)}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n)} = \frac{A_0}{\omega} + \frac{A_1}{\omega+1} + \ldots + \frac{A_i}{\omega+i} + \ldots + \frac{A_n}{\omega+n}.$$

D'une formule élémentaire bien connue il résulte que l'on a

$$A_i = (-1)^i \frac{1}{\Pi(i)\Pi(n-i)} f_n(x, -i),$$

ou, en vertu de l'identité précédente,

$$A_i = \frac{(-1)^i}{\Pi(i)} (x+1)^i \frac{d^i}{dx^i} X_n,$$

et de là

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f_n(x,\omega)}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n)} \\ &\quad = \frac{X_n}{\omega} - \frac{(x+1)}{1} \frac{X'_n}{\omega+1} + \frac{(x+1)^2}{1.2} \frac{X''_n}{\omega+2} - \frac{(x+1)^3}{1.2.3} \frac{X'''_n}{\omega+3} + \ldots \end{aligned} \right.$$

(1) Sur ce développement, *voir* le Mémoire de M. Bauer, *Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunctionen einer Variabeln* (*Journal de Borchardt*, t. 56, p. 101).

Si, dans cette formule, on change x en $-x$ et ω en $-\omega$, et si l'on remarque que $f(-x, -\omega) = (-1)^n f(x, \omega)$, on obtiendra encore la formule suivante :

$$(15)' \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f_n(x,\omega)}{\omega(\omega-1)\ldots(\omega-n)} \\ &\quad = (-1)^n \left[\frac{X_n}{\omega} - \frac{x-1}{1} \frac{X'_n}{\omega-1} + \frac{(x-1)^2}{1.2} \frac{X''_n}{\omega-2} - \frac{(x-1)^3}{1.2.3} \frac{X'''_n}{\omega-3} + \ldots \right]. \end{aligned} \right.$$

13. On sait que les racines de l'équation $X_n = 0$ sont toutes réelles et comprises entre -1 et $+1$; désignons respectivement, pour un instant, par α et β la plus petite et la plus grande de ces racines. Si x désigne une quantité quelconque comprise entre -1 et α, on voit que $(x+1)$ est positif, et il suit du théorème de Fourier que la suite des quantités

$$X_n, \quad X'_n, \quad X''_n, \quad \ldots$$

ne présente aucune permanence de signe ; l'équation (15) montre que, dans ce cas, l'équation $f(x, \omega) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega+1} + \frac{C}{\omega+2} + \ldots + \frac{L}{\omega+n} = 0,$$

A, B, C, ..., L désignant des coefficients ayant tous le même signe.

Par un raisonnement bien connu, on en conclut que toutes les racines de l'équation $f(x, \omega) = 0$ (où ω est regardé comme inconnue) sont réelles et séparées par les nombres

$$0, \quad +1, \quad +2, \quad \ldots, \quad +(n-1) \quad \text{et} \quad +n.$$

On déduirait de même de la formule (15)' que, si la valeur de x est comprise entre β et $+1$, l'équation $f_n(x, \omega) = 0$ a n racines réelles séparées par les nombres

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad \ldots, \quad -(n-1) \quad \text{et} \quad -n.$$

IV.

14. La fonction f_n satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad (x^2-1)y'' + 2(x-\omega)y' - n(n+1)y = 0,$$

on voit que $\frac{df_n}{d\omega}$ satisfait à l'équation

$$(x^2-1)u''+2(x-\omega)u'-n(n+1)u=2\frac{df_n}{dx}.$$

En désignant par y une solution quelconque de l'équation (1), on déduit de là

$$(x^2-1)(yu''-uy'')+2(x-\omega)(yu'-uy')=2\frac{df_n}{dx}y,$$

et, en multipliant les deux membres par $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega(x^2-1)(yu'-uy')=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega\frac{df_n}{dx}y;$$

puis, en intégrant et en remplaçant u par $\frac{df_n}{d\omega}$,

$$2\int\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega\frac{df_n}{dx}y\,dx=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega(x^2-1)\left(y\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}-\frac{df_n}{d\omega}\frac{dy}{dx}\right).$$

Dans cette relation, faisons d'abord

$$y=f_n;$$

il viendra

$$2\int\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega f_n\frac{df_n}{dx}dx=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega(x^2-1)\left(f_n\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}-\frac{df_n}{d\omega}\frac{df_n}{dx}\right).$$

Faisons, en second lieu,

$$y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\omega\varphi_n;$$

nous aurons

$$2\int\varphi_n\frac{df_n}{dx}dx=(x^2-1)\left(\varphi_n\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}-\frac{df_n}{d\omega}\frac{d\varphi_n}{dx}\right)-2\omega\varphi_n\frac{df_n}{d\omega}.$$

Remplaçons, dans le second membre de cette égalité, $\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}$ par sa valeur tirée de l'équation (2) et $\frac{d\varphi_n}{dx}$ par sa valeur tirée de l'équation (2)'; il viendra, toutes réductions faites,

$$(16)\qquad 2\int\varphi_n\frac{df_n}{dx}dx=\varphi_nf_n+\varphi_n\frac{df_{n+1}}{d\omega}-\varphi_{n+1}\frac{df_n}{d\omega},$$

d'où encore, en changeant ω en $-\omega$,

$$(16)'\qquad 2\int f_n\frac{d\varphi_n}{dx}dx=\varphi_nf_n-f_n\frac{d\varphi_{n+1}}{d\omega}+f_{n+1}\frac{d\varphi_n}{d\omega}.$$

On déduit de là l'identité suivante, où K désigne une quantité indépendante de x :

$$\varphi_n\frac{df_{n+1}}{d\omega}-\varphi_{n+1}\frac{df_n}{d\omega}+f_{n+1}\frac{d\varphi_n}{d\omega}-f_n\frac{d\varphi_{n+1}}{d\omega}=\mathrm{K}.$$

SUR QUELQUES

THÉORÈMES DE M. HERMITE,

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. BORCHARDT.

Extrait du *Journal de Mathématiques de Crelle*, t. LXXXIX; 1880.

... Dans une Note *Sur l'indice des fractions rationnelles*, insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. VII, p. 131), M. Hermite a fait la remarque importante qui suit :

En désignant par $\alpha + ai$, $\beta + bi$, ..., $\mu + mi$ des quantités imaginaires dans lesquelles les coefficients de i ont tous le même signe, si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned}\Pi(x-\alpha-ai) &= (x-\alpha-ai)(x-\beta-bi)\ldots(x-\mu-mi)\\ &= \mathrm{F}(x)+i\Phi(x),\end{aligned}$$

l'équation

$$(1) \qquad p\mathrm{F}(x)+q\Phi(x)=0,$$

où p et q désignent des nombres réels arbitraires, a toutes ses racines réelles.

M. Biechler a obtenu en même temps ce théorème (*Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles* (*Journal de Crelle*, t. 87, p. 350) et sa démonstration, comme celle de M. Hermite, repose sur la considération de l'indice de la fraction $\frac{\Phi(x)}{\mathrm{F}(x)}$.

La méthode qui suit vous paraîtra peut-être plus simple et plus directe.

L'équation (1) peut évidemment s'écrire

$$(p-iq)\,\Pi(x-\alpha-ai)+(p+iq)\,\Pi(x-\alpha+ai)=0,$$

et l'on en déduit l'égalité

$$\mathrm{mod}\,\Pi(-\alpha-ai)=\mathrm{mod}\,\Pi(x-\alpha+ai);$$

d'où il est facile de conclure que x est nécessairement réelle.

Ayant, en effet, tracé dans un plan deux axes rectangulaires OX et OY, je représenterai, suivant l'usage ordinaire, la quantité imaginaire $\mathrm{X}+\mathrm{Y}i$ par le point dont les coordonnées sont X et Y. Soient A, B, ..., M les points qui représentent respectivement les quantités $\alpha+ai$, $\beta+bi$, ..., $\mu+mi$; les coefficients a, b, ..., m ayant, par hypothèse, tous le même signe, les points A, B, ..., M sont situés d'un même côté de l'axe OX, au-dessus de cet axe, par exemple; quant aux points A′, B′, ..., M′ qui représentent les quantités conjuguées $\alpha-ai$, $\beta-bi$, ..., $\mu-mi$, ces points étant les symétriques des points A, B, ..., M relativement à l'axe OX, ils sont situés au-dessous de cet axe.

Désignons maintenant par P le point représentatif de la quantité x, l'égalité précédente peut s'écrire ainsi qu'il suit

$$(2) \qquad \mathrm{PA}.\mathrm{PB}\ldots\mathrm{PM}=\mathrm{PA}'.\mathrm{PB}'\ldots\mathrm{PM};$$

or de là résulte immédiatement que x ne peut être imaginaire. Car, en supposant, par exemple, que le point P soit situé au-dessus de l'axe OX, on a

$$\mathrm{PA}<\mathrm{PA}',\qquad \mathrm{PB}<\mathrm{PB}',\quad \ldots,\quad \mathrm{PM}<\mathrm{PM}',$$

inégalités qui sont incompatibles avec la relation (2).

....
....

Dans le Mémoire que vous avez bien voulu insérer l'année dernière dans votre Journal, j'ai donné une formule de quadrature (*Sur le développement d'une fonction suivant les puissances d'un polynôme*, t. 88, p. 46) qui appartient en réalité à M. Hermite. L'illustre géomètre l'a démontrée dans sa Note sur la formule d'interpolation de Lagrange, insérée au tome 84 de votre Journal (p. 75). Il est clair, du reste, que nous devions arriver au même résultat; le but que nous nous proposions était effectivement le même, à savoir de déterminer avec la plus grande approximation possible l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, quand on se donne les valeurs de $f(x)$ et d'un certain nombre de ses dérivées pour $x=a$ et $x=b$.

Seulement, tandis que M. Hermite prend pour point de départ les propriétés des réduites de la fonction $\log\left(\frac{x-1}{x}\right)$, je m'appuie sur les propriétés des réduites de e^x; on aperçoit, dans cette circonstance, le premier indice d'une liaison singulière entre les réduites de fonctions si différentes, liaison que les considérations suivantes mettent, je crois, entièrement en évidence.

Soit, pour plus de généralité, $F(x)$ le dénominateur commun des fractions rationnelles de même dénominateur qui approchent le plus des fonctions $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x}$; en sorte qu'en désignant par $N = n\mu$ le degré de $F(x)$ et par $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots$ des polynômes de même degré convenablement choisis, le développement des fonctions

$$\begin{array}{l} F(x)\,e^{a_1 x} - \Phi_1(x), \\ F(x)\,e^{a_2 x} - \Phi_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F(x)\,e^{a_n x} - \Phi_n(x) \end{array}$$

commence par un terme de l'ordre $(N + \mu + 1)$.

En désignant par z une nouvelle indéterminée, je considère le développement de $F(x)e^{zx}$ suivant les puissances croissantes de x et pose

$$F(x)\,e^{zx} = \Sigma A_p x^p.$$

Vous remarquerez tout d'abord que la fonction de z que je désigne par $A_{N+\mu}$ estdivisible par z^μ; en second lieu, en dérivant par rapport à z l'équation précédente, on a

$$F(x)\,e^{zx} = \frac{dA_p}{dz}\,x^{p-1};$$

d'où l'on voit que chacun des coefficients de la série précédente est la dérivée du coefficient qui suit immédiatement.

J'observe maintenant que, quand on fait $z = a_1$, les coefficients $A_{N+1}, A_{N+2}, \ldots, A_{N+\mu}$ s'annulent; la fonction $A_{N+\mu}$ s'annule donc ainsi que ses $(\mu - 1)$ premières dérivées pour $z = a_1$, et, par suite, elle est divisible par $(z - a_1)^\mu$. On prouverait de même qu'elle est divisible par $(z - a_2)^\mu, (z - a_3)^\mu, \ldots$; j'ai d'ailleurs montré qu'elle est divisible par z^μ, et comme elle est du degré $N + \mu$, en posant, pour abréger,

$$f(z) = z^\mu (z - a_1)^\mu (z - a_2)^\mu \ldots (z - a_n)^\mu,$$

on en conclura facilement que

$$A_{N+\mu} = f(z).$$

Ainsi une propriété caractéristique du polynôme $F(x)$ est que, dans le développement de $F(x)e^{zx}$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient de $x^{N+\mu}$ est le polynôme $f(z)$ et de là se déduit bien aisément l'expression de $F(x)$.

Je vous ferai encore remarquer que le coefficient de x^N dans ce développement est égal à $\frac{d^\mu}{dz^\mu} f(z)$; c'est donc le dénominateur commun des fractions rationnelles de même degré qui approchent le plus des fonctions

$$\log \frac{x - a_1}{x}, \quad \log \frac{x - a_2}{x}, \quad \ldots, \quad \log \frac{x - a_n}{x} \quad (^1).$$

Il serait facile de déduire des considérations qui précèdent les diverses formules obtenues par M. Hermite; mais je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet. Il m'a semblé néanmoins qu'il y avait quelque intérêt à réunir ainsi dans une même analyse quelques-uns des importants résultats obtenus par l'illustre géomètre sur les fonctions exponentielles et sur les fonctions logarithmiques.

---

(1) *Lettre de M. Hermite à M. Fuchs* (*Journal de Crelle*, t. 79, p. 325).

Paris, avril 1880.

CALCUL INTÉGRAL.

SUR L'INTÉGRATION

D'UNE

CERTAINE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXVI; 1868.

La Note que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie est l'extension au cas de l'espace des considérations géométriques très simples au moyen desquelles Jacobi a appliqué les propriétés des sections coniques à l'intégration de l'équation d'Euler qui sert de base à la théorie des fonctions elliptiques, considérations que j'ai moi-même développées dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (avril 1867).

Je m'appuierai sur la proposition suivante, que l'on peut déduire facilement d'un théorème bien connu de Newton. Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface du second degré, que je supposerai, pour plus de simplicité, rapportée à des axes rectangulaires; soient de plus deux points quelconques M et N dont les coordonnées sont respectivement a, b, c et α, β, γ. Désignons par α et α' les deux points où la droite MN coupe la surface considérée. Cela posé, on a la relation

$$\frac{M\alpha . M\alpha'}{N\alpha . N\alpha'} = \frac{F(a, b, c)}{F(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Supposons que la droite MN soit tangente à la surface, les deux points α et α' se confondront alors en un seul, et l'on aura

$$\frac{M\alpha}{N\alpha} = \frac{\sqrt{F(a, b, c)}}{\sqrt{F(\alpha, \beta, \gamma)}}.$$

Considérons maintenant, outre la surface dont je viens de parler et que je désignerai par S, deux plans parallèles au plan des xy, l'un A dont l'équation sera $z = a$, et l'autre $\mathcal{A}$ dont l'équation sera $z = \alpha$. Soient C et Γ les coniques suivant lesquelles ces plans coupent la surface. Imaginons tracée sur S une courbe gauche quelconque B et construisons la surface développable engendrée par les différentes tangentes à cette courbe. Cette surface développable sera coupée respectivement par les deux plans A et $\mathcal{A}$, suivant deux courbes B et $\mathcal{B}$. Je désignerai par x et y les deux premières coordonnées d'un point quelconque de la courbe B, et par ξ et η les mêmes coordonnées du point correspondant de la courbe $\mathcal{B}$: je veux dire du point où la génératrice de la surface développable qui passe par le point considéré de la courbe B passe par le plan $\mathcal{A}$.

Maintenant, soient T le point où une génératrice quelconque de la surface développable touche la courbe gauche R; M le point où elle rencontre le plan A, et dont je désignerai les coordonnées par x, y, a; N le point où cette même droite coupe le plan $\mathcal{A}$, et dont je désignerai les coordonnées par ξ, η, α.

Si l'on déplace infiniment peu cette génératrice en la faisant rouler sur B, dans sa nouvelle position elle coupera le plan A en un point M′ infiniment voisin du point M, et dont les coordonnées seront $x + dx$, $y + dy$, a; elle coupera de même le plan $\mathcal{A}$ en un point N′ infiniment voisin du point N, et dont les coordonnées seront $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, α.

Cela posé, les deux droites MM′ et NN′ étant parallèles, on a évidemment

$$\frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{NN'}} = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{NT}} = \frac{\sqrt{\mathrm{F}(x, y, a)}}{\sqrt{\mathrm{F}(\xi, \eta, \alpha)}}.$$

Donc, lorsqu'on a une surface développable quelconque ayant son arête de rebroussement sur la surface S, si l'on désigne respectivement par x et y les deux premières coordonnées du point où une génératrice coupe le plan A, et par ξ et η les mêmes coordonnées du point où cette génératrice coupe le plan $\mathcal{A}$, ces quatre variables satisfont au système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta}\frac{\sqrt{\mathrm{F}(x, y, a)}}{\sqrt{\mathrm{F}(\xi, \eta, \alpha)}}. \tag{1}$$

Supposons que la courbe C, décrite dans le plan $\mathcal{A}$ par le point N, nous soit donnée, en sorte que nous ayons une relation de la forme

$$\eta = \theta(\xi). \tag{2}$$

Donnons-nous, en outre, le point qui, sur le plan A, correspond à un point déterminé de la courbe C, alors le système d'équations (1) nous permettra d'en déduire la courbe correspondante décrite par le point M; il y aura d'ailleurs deux solutions à cause de l'ambiguïté du signe du radical.

Des deux variables ξ et η, une seule des deux étant indépendante, en vertu de la relation (2), le système (1) se réduit alors à un système de deux équations différentielles du premier ordre à trois variables. On peut des équations (1) et (2) éliminer la variable ξ, et l'on est conduit alors à une équation différentielle du second ordre entre les variables x et y, équation que je désignerai par

$$\mathrm{V} = 0. \tag{3}$$

Nous avons immédiatement une intégrale particulière du premier ordre de cette équation; il suffit, en effet, de trouver des surfaces développables qui aient leur arête de rebroussement sur S et qui s'appuient sur C, et ce problème conduit à résoudre une équation différentielle du premier ordre.

Mais il est facile de voir que l'on peut obtenir immédiatement l'intégrale générale du premier ordre. Imaginons une surface quelconque du second degré S′ passant par les coniques G et Γ, en sorte que son équation soit de la forme

$$\Phi(x, y, z) = \mathrm{F}(x, y, z) + \lambda(z - a)(z - \alpha) = 0.$$

En appliquant à cette surface les mêmes raisonnements que nous avons faits au sujet de la surface S, nous voyons que si une surface développable, ayant son arête de rebroussement sur S′, coupe le plan $\mathcal{A}$ suivant la courbe C, la courbe suivant laquelle elle coupe le plan A satisfait au système d'équations

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{\sqrt{\Phi(x, y, a)}}{\sqrt{\Phi(\xi, \eta, \alpha)}}, \tag{1'}$$

$$\eta = \theta(\xi). \tag{2'}$$

Mais on a évidemment

$$\Phi(x, y, a) = \mathrm{F}(x, y, a)$$

et

$$\Phi(\xi, \eta, \alpha) = \mathrm{F}(\xi, \eta, \alpha).$$

Donc le système d'équations (1′) et (2′) est identique avec le système (1) et (2), et tous deux conduisent à l'intégration de l'équation

$$\mathrm{V} = 0. \tag{3}$$

De même que la surface particulière R nous fournissait une intégrale particulière du premier ordre de cette équation, nous voyons que l'ensemble des surfaces du second ordre, passant par les coniques C et Γ, nous donnera l'intégrale générale du premier ordre.

Géométriquement, le résultat obtenu peut être énoncé ainsi : étant donnés la courbe C dans le plan $\mathcal{A}$ et le point arbitrairement choisi qui, dans le plan A, correspond à un point donné de cette courbe ; par ces deux points faisons passer une droite et construisons une surface du second degré, passant par les coniques G et Γ, et tangente à cette droite. Imaginons une surface développable qui ait son arête de rebroussement sur la surface du second ordre et qui coupe le plan $\mathcal{A}$ suivant C, son intersection avec le plan A sera une courbe dont l'équation en x et en y sera une solution de l'équation (3).

Il existe un cas particulier encore assez étendu où l'on peut obtenir en termes finis l'intégrale générale de cette équation. C'est celui où la courbe C est une conique.

Dans ce cas, en effet, on peut toujours, en désignant par u, v, w de nouvelles variables, liées aux variables x, y, z par les relations de la forme

$$u = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{U}}, \qquad v = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{U}}, \qquad w = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{U}}, \tag{4}$$

où X, Y, Z, U désignent des fonctions linéaires de x, y, z, déterminer ces polynômes de sorte que, après la substitution des nouvelles variables dans l'équation $\Phi(x, y, z) = 0$, la surface représentée par l'équation transformée soit, en considérant u, v, w comme des coordonnées rectangulaires, rapportée à ses axes et

ait la forme suivante :

$$\frac{u^2}{\mathrm{H}} + \frac{v^2}{\mathrm{R}} + \frac{a^2}{\mathrm{C}} = 1, \tag{5}$$

et qu'en même temps la conique C ait pour transformée la conique, située à l'infini, commune à toutes les sphères de l'espace.

Cela posé, si nous considérons les courbes gauches qui sur la surface primitive S′ étaient les arêtes de rebroussement des surfaces développables coupant le plan $\mathcal{A}$ suivant C, nous voyons que ces courbes auront pour transformées, sur la surface représentée par l'équation (5), les lignes dont l'équation différentielle est $ds = 0$.

Déterminons les points de cette surface au moyen des coordonnées elliptiques, nous aurons

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left[\frac{(\mathrm{A} - \mu^2)\, d\mu^2}{(\mu^2 - \mathrm{A} + \mathrm{B})(\mu^2 - \mathrm{A} + \mathrm{C})} + \frac{(\mathrm{A} - \nu^2)\, d\nu^2}{(\nu^2 - \mathrm{A} + \mathrm{B})(\nu^2 - \mathrm{A} + \mathrm{C})}\right].$$

L'équation différentielle des lignes correspondant aux arêtes de rebroussement est donc

$$d\mu\sqrt{\frac{\mathrm{A} - \mu^2}{(\mu^2 - \mathrm{A} + \mathrm{B})(\mu^2 - \mathrm{A} + \mathrm{C})}} \pm i\, d\nu\sqrt{\frac{\mathrm{A} - \nu^2}{(\nu^2 - \mathrm{A} + \mathrm{B})(\nu^2 - \mathrm{A} + \mathrm{B})}} = 0,$$

dont l'intégrale est de

$$\int \frac{d\mu(\mathrm{A} - \mu^2)}{\sqrt{(\mathrm{A} - \mu^2)(\mathrm{A} - \mathrm{B} - \mu^2)(\mathrm{A} - \mathrm{C} - \mu^2)}} \pm i \int \frac{d\nu(\mathrm{A} - \nu^2)}{\sqrt{(\mathrm{A} - \nu^2)(\mathrm{A} - \mathrm{B} - \nu^2)(\mathrm{A} - \mathrm{C} - \nu^2)}} = k; \tag{6}$$

k désignant une constante arbitraire.

Soit maintenant P qui, dans la figure transformée, correspond au plan $\mathcal{A}$. Étant donné un point (μ, ν) sur la surface représentée par l'équation (5) on saura toujours trouver le point où le plan P est rencontré par la tangente menée au point (μ, ν) à l'une des courbes qui passent en ce point et dont l'équation différentielle est $ds = 0$; on pourra exprimer algébriquement les coordonnées u, v, w de ce point en fonction de μ, ν, et réciproquement μ, ν en fonction de u, v, w. On portera ces valeurs de μ et de ν dans l'équation (6), et l'on y remplacera u, v, w par leurs valeurs tirées des équations (4). La variable z disparaîtra d'elle-même, et l'on obtiendra en x, y l'intégrale générale de l'équation (3) avec deux constantes arbitraires λ et k.

SUR L'INTÉGRATION

D'UNE

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

DU SECOND ORDRE.

Société philomathique; 1870.

L'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x,y)}},$$

où $f(x,y)$ désigne un polynôme du second degré en x et y, et où $\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$ désigne une fonction quelconque de $\frac{dy}{dx}$, peut toujours s'intégrer quand on en connaît une solution particulière.

On parvient facilement à ce résultat en s'appuyant sur la théorie du dernier multiplicateur donnée par Jacobi.

Comme application de la proposition précédente, je donnerai le résultat suivant :

Étant donnée une surface du second ordre, si l'on cherche les surfaces développables qui, ayant leur arête de rebroussement sur la surface du second ordre, passent par une courbe plane, on est amené à résoudre une équation différentielle du premier ordre.

Cette équation peut toujours s'intégrer par de simples quadratures.

APPLICATION

DU

PRINCIPE DU DERNIER MULTIPLICATEUR

A L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, t. II; 1871.

1. Soient $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ deux polynômes du second degré en x et en y, ne différant que par les termes du premier degré et la valeur de la constante.

Considérons le système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{\sqrt{f(x,y)}}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}},$$

dont le nombre est inférieur de deux unités au nombre des variables.

En désignant par $F(x, y, z, u)$ une fonction du second degré, homogène et convenablement choisie, on peut poser

$$f(x,y) = F(x, y, a, b)$$

et

$$\varphi(\xi,\eta) = F(\xi, \eta, \alpha, \beta),$$

a, b, α et β étant des quantités constantes.

Cela posé, λ désignant une constante arbitraire, il est facile de voir que l'équation

$$(2) \qquad \lambda = 2\sqrt{f(x,y)\varphi(\xi,\eta)} - \xi\frac{df}{dx} - \eta\frac{df}{dy} - \alpha\frac{df}{da} - \beta\frac{df}{db}$$

est une intégrale du système d'équations (1).

Il suffit, pour cela, de vérifier que la différentielle de l'expression précédente s'annule en vertu des seules relations (1).

Or on a

$$d\lambda = \frac{\sqrt{f(x,y)}}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\,d\xi + \frac{d\varphi}{d\eta}\,d\eta\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}{\sqrt{f(x,y)}}\left(\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy\right) - \frac{df}{dx}\,d\xi - \frac{df}{dy}\,d\eta$$
$$- dx\left(\xi\,\frac{d^2f}{dx^2} + \eta\,\frac{d^2f}{dx\,dy} + \alpha\,\frac{d^2f}{da\,dx} + \beta\,\frac{d^2f}{db\,dx}\right)$$
$$- dy\left(\xi\,\frac{d^2f}{dx\,dy} + \eta\,\frac{d^2f}{dy^2} + \alpha\,\frac{d^2f}{da\,dy} + \beta\,\frac{d^2f}{db\,dy}\right).$$

Remarquons maintenant que, les polynômes $f(x, y)$ et $\varphi(\xi, \eta)$ étant respectivement égaux à $F(x, y, a, b)$ et à $F(\xi, \eta, \alpha, \beta)$ qui sont du second degré par rapport aux variables, on a les relations suivantes :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}, \qquad \frac{d^2f}{dx\,da} = \frac{d^2\varphi}{d\xi\,d\alpha}, \qquad \ldots;$$

d'où, en vertu d'un théorème connu sur les fonctions homogènes,

$$\xi\,\frac{d^2f}{dx^2} + \eta\,\frac{d^2f}{dx\,dy} + \alpha\,\frac{d^2f}{dx\,da} + \beta\,\frac{d^2f}{dx\,db} = \frac{d\varphi}{d\xi}$$

et

$$\xi\,\frac{d^2f}{dx\,dy} + \eta\,\frac{d^2f}{dy^2} + \alpha\,\frac{d^2f}{dy\,da} + \beta\,\frac{d^2f}{dy\,db} = \frac{d\varphi}{d\eta}.$$

La valeur de $d\lambda$ devient, par suite,

$$d\lambda = (\sqrt{\varphi}\,dx - \sqrt{f}\,d\xi)\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{df}{dx} - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)$$
$$+ (\sqrt{\varphi}\,dy - \sqrt{f}\,d\eta)\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{df}{dy} - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{d\varphi}{d\eta}\right).$$

et elle s'annule évidemment en vertu des relations (1).

2. Soit l'équation de second ordre,

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x,y)}},$$

où F désigne une fonction quelconque de $\frac{dy}{dx}$.

Supposons que nous connaissions une intégrale particulière de l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}},$$

et soit

$$(5) \qquad \eta = \theta(\xi)$$

cette intégrale; si l'on imagine les variables ξ et η liées par cette relation dans les équations (1), elles deviennent

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{\theta'(\xi)\,d\xi} = \frac{\sqrt{f(x,y)}}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}},$$

ou bien encore

$$(6) \qquad \frac{dx}{\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}} = \frac{dy}{\frac{\theta'(\xi)}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}} = \frac{d\xi}{\frac{1}{\sqrt{f(x,y)}}}.$$

On peut aussi éliminer ξ entre les équations précédentes; on a

$$\frac{dy}{dx} = \theta'(\xi),$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\theta''(\xi)\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}{\sqrt{f(x,y)}};$$

comme $\eta = \theta(\xi)$ est une solution particulière de l'équation (4), on a

$$\theta''(\xi)\sqrt{\varphi(\xi,\eta)} = F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = F\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

l'équation du second ordre entre x et y est donc

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x,y)}}.$$

3. D'après ce que j'ai dit plus haut, l'équation (2), si l'on y fait $\eta = \theta(\xi)$, est une intégrale du système d'équations du premier ordre (6).

On peut immédiatement appliquer à ces équations le principe du dernier multiplicateur de Jacobi (¹), car on a évidemment

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{\theta'(\xi)}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}\right)+\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{f(x,y)}}\right)=0;$$

on a donc pour deuxième intégrale

$$\int\left(\frac{d\xi}{d\lambda}\right)\frac{\theta'(\xi)\,dx-dy}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}=\text{const.};$$

et cette dernière équation sera l'intégrale, avec deux constantes arbitraires, de l'équation (3), ξ étant exprimé, en vertu des équations (2) et (5), en fonction de λ, x et y.

(¹) Jacobi, *Theoria nova multiplicatoris, etc.* (*Journal de Crelle*, t. 27, p. 256).

SUR LES

DIFFÉRENTES FORMES

QUE L'ON PEUT DONNER A L'INTÉGRALE

DE L'ÉQUATION D'EULER.

Bulletin de la Société mathématique; 1875.

1. Soit un polynôme du quatrième degré en x que je représenterai par la forme homogène $U(x,y)$, où y désigne une constante égale à l'unité et introduite pour l'homogénéité des formules, l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{U(x,y)}}=\frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi,\eta)}}$$

a, comme je l'ai montré précédemment (¹), pour intégrale générale l'équation suivante

$$6\alpha U_2+36H_2+(3S-\alpha^2)\omega^2=0, \tag{1}$$

où α représente une constante arbitraire, ω le déterminant $x\eta-y\xi$, U_2, H_2 les émanants principaux de U et du hessien H de la forme donnée, et S son invariant quadratique.

Cela posé, on a l'identité suivante, que l'on vérifiera facilement,

$$U(x,y)\,U(\xi,\eta)-U_2^2=4H_2\omega^2+\frac{S}{3}\omega^4; \tag{2}$$

je l'écrirai plus simplement sous la forme suivante

$$UU'-U_2^2=4H_2\omega^2+\frac{S}{3}\omega^4,$$

d'où

$$S\omega^4+12H_2\omega^2=3UU'-3U_2^2.$$

(¹) *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre.* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. I, p. 35.)

Multiplions maintenant par ω^2 le premier membre de l'équation (1), et remplaçons $S\omega^4 + 12 H_2 \omega^2$ par sa valeur tirée de la relation précédente, il viendra

$$6\alpha U_2 \omega^2 - \alpha^2 \omega^4 + 9 UU' - 9 U_2^2 = 0,$$

ou

$$9 UU' = (3 U_2 - \alpha \omega^2)^2;$$

ou encore

$$U_2 - \sqrt{UU'} = \frac{\alpha}{3} \omega^2. \tag{3}$$

2. Cette nouvelle forme de l'équation d'Euler peut elle-même se transformer d'une façon remarquable.

Décomposons U d'une façon quelconque en un produit de deux facteurs du second degré, en posant

$$U = f(x, y)\varphi(x, y),$$

où

$$f(x, y) = A x^2 + 2 B xy + C y^2$$

et

$$\varphi(x, y) = A' x^2 + 2 B' xy + C' y^2.$$

On aura évidemment

$$UU' = f(x, y)\varphi(x, y) f(\xi, \eta)\varphi(\xi, \eta),$$

d'autre part, en désignant par Δ l'invariant quadratique simultané des deux formes f et φ, $AC' + CA' - 2BB'$, on vérifiera facilement l'identité suivante

$$f(x, y)\varphi(\xi, \eta) + f(\xi, \eta)\varphi(x, y) = 2 U_2 + \omega^2 \frac{\Delta}{3}.$$

Portons ces valeurs de U_2 et de UU' dans l'équation (3), elle deviendra, en faisant, pour abréger, $f(\xi, \eta) = f'$ et $\varphi(\xi, \eta) = \varphi'$,

$$f\varphi' + f'\varphi - 2\sqrt{f\varphi f'\varphi'} = \omega^2 \left(\frac{2\alpha + \Delta}{3}\right);$$

d'où

$$\sqrt{f\varphi'} - \sqrt{f'\varphi} = \beta\omega, \tag{4}$$

β désignant une constante arbitraire.

D'où la proposition suivante, où j'ai fait disparaître les quantités auxiliaires y et η :

Si l'on décompose d'une façon quelconque le polynôme du quatrième degré, $F(x)$, *en deux facteurs du second degré* $f(x)$ et $\varphi(x)$, *l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{F(\xi)}}$$

est

$$\frac{\sqrt{f(x)\varphi(\xi)} - \sqrt{f(\xi)\varphi(x)}}{x - \xi} = \text{const.}$$

J'avais déjà déduit cette proposition de considérations purement géométriques, dans une Note *Sur les propriétés des coniques qui se rattachent à l'équation d'Euler*, insérée dans les *Nouv. Ann. de Math.*, 1872.

SUR LA MÉTHODE DE MONGE

POUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU SECOND ORDRE.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XV; 1876.

La méthode donnée par Monge pour intégrer les équations linéaires aux différences partielles du second ordre a été complètement élucidée, d'abord par les travaux d'Ampère et ensuite par ceux de Boole et de Bour; il me semble néanmoins qu'on peut la présenter avec plus de netteté et de brièveté qu'on ne le fait d'ordinaire.

I.

Sur la représentation de la forme

$$W = Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2)$$

par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

1. Soit $W = Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2)$, où r, s, t représentent des variables quelconques; je vais d'abord montrer que l'on peut toujours représenter la forme W par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

et étudier les propriétés de ces diverses représentations.

En développant ce déterminant, on voit qu'il est de la forme indiquée, et, en identifiant les coefficients des quantités $r, s, t, \ldots$, on aura, pour déterminer les inconnues a, b, c, d, α, β, γ, δ, les cinq équations

$$M = d\gamma - c\delta, \tag{1}$$

$$N = a\beta - b\alpha, \tag{2}$$

$$L = b\gamma - c\beta, \tag{3}$$

$$H = d\alpha - a\delta, \tag{4}$$

$$2K = d\beta - b\delta + a\gamma - c\alpha. \tag{5}$$

On a maintenant, d'après un théorème connu [1],

$$(b\gamma - c\beta)(a\delta - d\alpha) + (c\alpha - a\gamma)(b\delta - d\beta) + (a\beta - b\alpha)(c\delta - d\gamma) = 0,$$

ou encore, en vertu des relations précédentes,

$$(c\alpha - a\gamma)(b\delta - d\beta) = HL + MN,$$

par suite, si l'on fait, pour abréger, $G = K^2 - HL - MN$,

$$K + \sqrt{G} = d\beta - b\delta \tag{5'}$$

et

$$K - \sqrt{G} = a\gamma - c\alpha. \tag{5}$$

2. Des équations (1), (2), (3), (4), (5), (5′) et (5″) il est facile de déduire un système de valeurs des indéterminées a, b, c, d, ...

Remarquons d'abord que, parmi les déterminants mineurs $a\beta - b\alpha$, $a\gamma - c\alpha$, ... qui entrent dans ces équations, il s'en trouve au moins un qui n'est pas nul, autrement la forme W s'annulerait identiquement. Supposons, par exemple, que $a\beta - b\alpha$ soit différent de zéro; je mettrai les équations précédentes sous la forme

$$M = d\gamma - c\delta, \qquad N = a\beta - b\alpha$$

[1] C'est le théorème de Fontaine; voir *Théorie des déterminants*, par Baltzer, p. 26.

et

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} \times \begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{H} & \mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}} \\ \mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}} & \mathrm{L} \end{matrix} \; (^1).$$

La première de ces équations, étant une conséquence des autres, peut être négligée; donnons maintenant à a, b, α et β quatre valeurs arbitraires satisfaisant à la relation $a\beta - \alpha b = \mathrm{N}$, la dernière relation donnera

$$\begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = -\frac{1}{\mathrm{N}} \times \begin{matrix} \mathrm{H} & \mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}} \\ \mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}} & \mathrm{L} \end{matrix} \times \begin{matrix} b & -a \\ -\beta & \alpha \end{matrix},$$

qui déterminera les autres indéterminées d, c, δ et γ.

3. On voit, par ce qui précède, que l'on peut toujours représenter W par un déterminant de la forme indiquée, et si G n'est pas nul, comme on peut prendre pour $\sqrt{\mathrm{G}}$ deux valeurs, il en résulte que toutes ces représentations se distribueront en deux groupes, le premier groupe comprenant les représentations appartenant à la valeur $+\sqrt{\mathrm{G}}$ du radical et que je désignerai sous le nom de *représentations de première espèce*, le second groupe comprenant les représentations appartenant à la valeur de $-\sqrt{\mathrm{G}}$; je les appellerai *représentations de seconde espèce*.

Si G était égal à zéro, il est clair qu'il n'y aurait qu'une seule espèce de représentation de W.

Pour abréger, si l'on a

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

je dirai que $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ est une représentation de la forme W.

---

(1) J'indique ici, d'une façon abrégée, que le système linéaire du second membre s'obtient en composant les deux systèmes linéaires du premier membre dans l'ordre dans lequel ils sont placés. Cette seule relation tient donc lieu des relations (3), (4), (5)' et (5)''; on en conclut en particulier que le déterminant du système linéaire du second membre est égal au produit des déterminants des systèmes du premier membre; en d'autres termes, que $d\gamma - c\delta = \mathrm{M}$. Cette relation, qui est une conséquence des autres, peut donc être mise de côté.

Voir, à ce sujet, mon Mémoire *Sur le calcul des systèmes linéaires* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII[e] Cahier).

4. Théorème I. — *Soient deux représentations de la forme* W, $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$, *qui soient de systèmes différents; on a les quatre relations*

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} ac' + bd' - ca' - db' = 0, & a\gamma' + b\delta' - c\alpha' - d\beta' = 0, \\ \alpha c' + \beta d' - \gamma a' - \delta b' = 0, & \alpha\gamma' + \beta\delta' - \gamma\alpha' - \delta\beta' = 0. \end{array} \right.$$

Si $\mathrm{G} = 0$, *les mêmes relations ont lieu relativement à deux représentations quelconques de* W.

Démonstration. — Supposons G différent de zéro et soient deux représentations de W, $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$, qui soient respectivement de première et de seconde espèce; d'après ce que j'ai démontré ci-dessus (2), on aura

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} \times \begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{H} & \mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}} \\ \mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}} & \mathrm{L} \end{matrix},$$

et

$$\begin{matrix} \alpha' & a' \\ \beta' & b' \end{matrix} \times \begin{matrix} d' & -c' \\ -\delta' & \gamma' \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{H} & \mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}} \\ \mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}} & \mathrm{L} \end{matrix},$$

ou encore

$$\begin{matrix} d' & -\delta' \\ -c' & \gamma' \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ a' & b' \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{H} & \mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}} \\ \mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}} & \mathrm{L} \end{matrix}$$

et par suite

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} \times \begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} d' & -\delta' \\ -c' & \gamma' \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ a' & b' \end{matrix}.$$

Supposons, pour un instant, que

$$\mathrm{M} = d\gamma - c\delta = d'\gamma' - c'\delta'$$

soit différent de zéro; multiplions les deux membres de l'égalité, à gauche par le système $\begin{matrix} \gamma' & \delta' \\ c' & d' \end{matrix}$ et à droite par le système $\begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix}$, il viendra, après avoir divisé par M,

$$\begin{matrix} \gamma' & \delta' \\ c' & d' \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ a' & b' \end{matrix} \times \begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix},$$

relation qui, développée, donne précisément les quatre relations qu'il s'agissait de démontrer.

La démonstration précédente suppose M différent de zéro; mais, par un raisonnement connu, on montrera facilement que la proposition subsiste même quand M est nul.

Il est clair que, si $G = 0$, la proposition est vraie relativement à deux représentations quelconques de W.

II.

Intégration de l'équation aux différences partielles de second ordre (7) $W = 0$.

5. Supposons maintenant que r, s, t soient les dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue z par rapport aux variables x et y, les coefficients de W étant d'ailleurs des fonctions quelconques de x, y, z, et des dérivées du premier ordre p et q, et soit à intégrer l'équation (7) $W = 0$.

Pour rester d'abord dans le cas le plus général, en supposant G différent de zéro, imaginons que nous ayons trouvé deux représentations de W par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

et de systèmes différents; soient

$$W = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \delta & \gamma \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \delta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

ces deux représentations.

Cela posé, on aura les propositions suivantes :

Théorème II. — *Si $u = f(v)$ est une intégrale première de l'équation* (7) *renfermant une fonction arbitraire f, chacune des fonctions u et v est une solution du système d'équations simultanées du premier ordre*

$$(8) \qquad \begin{cases} a\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + b\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + c\,\dfrac{d\omega}{dp} + d\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0, \\[2ex] \alpha\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + \beta\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + \gamma\,\dfrac{d\omega}{dp} + \delta\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0. \end{cases}$$

ou de ce second système d'équations

$$(9) \qquad \begin{cases} a'\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + b'\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + c'\,\dfrac{d\omega}{dp} + d'\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0, \\[2ex] \alpha'\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + \beta'\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + \gamma'\,\dfrac{d\omega}{dp} + \delta'\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0. \end{cases}$$

On a posé, pour abréger,

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = \frac{d\omega}{dx} + p\,\frac{d\omega}{dz}$$

et

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) = \frac{d\omega}{dy} + q\,\frac{d\omega}{dz}.$$

Démonstration. — Prenons successivement les dérivées, par rapport à x et par rapport à y, de l'équation $u = f(v)$, il viendra

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + r\,\frac{du}{dp} + s\,\frac{du}{dq} = f'(v)\left[\left(\frac{dv}{dx}\right) + r\,\frac{dv}{dp} + s\,\frac{dv}{dq}\right]$$

et

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + s\,\frac{du}{dp} + t\,\frac{du}{dq} = f'(v)\left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + s\,\frac{dv}{dp} + t\,\frac{dv}{dq}\right],$$

et, puisque $u = f(v)$ est une intégrale première de l'équation $W = 0$, cette dernière doit provenir de l'élimination de $f'(v)$ entre les deux équations précédentes. On aura donc, du moins à un facteur constant près,

$$W = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{du}{dx}\right) + r\,\dfrac{du}{dp} + s\,\dfrac{du}{dq} & \left(\dfrac{dv}{dx}\right) + r\,\dfrac{dv}{dp} + s\,\dfrac{dv}{dq} \\[2ex] \left(\dfrac{du}{dy}\right) + s\,\dfrac{du}{dp} + t\,\dfrac{du}{dq} & \left(\dfrac{dv}{dy}\right) + s\,\dfrac{dv}{dp} + t\,\dfrac{dv}{dq} \end{vmatrix};$$

d'où, par une transformation facile,

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 0 & s & t \\ -\dfrac{du}{dp} & -\dfrac{du}{dq} & \left(\dfrac{du}{dx}\right) & \left(\dfrac{du}{dy}\right) \\[2ex] -\dfrac{dv}{dp} & -\dfrac{dv}{dq} & \left(\dfrac{dv}{dx}\right) & \left(\dfrac{dv}{dy}\right) \end{vmatrix},$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} -\frac{du}{dp} & -\frac{du}{dq} & \left(\frac{du}{dx}\right) & \left(\frac{du}{dy}\right) \\ -\frac{dv}{dp} & -\frac{dv}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

est une représentation de W. En vertu du théorème I, on voit donc que chacune des fonctions u et v satisfera au système d'équations (8) ou au système (7), suivant que cette représentation sera de deuxième ou de première espèce.

Théorème III. — *Réciproquement, si u et v sont des solutions du système d'équations* (8) *ou du système* (9), $u = f(v)$, *où f désigne une fonction arbitraire, est une intégrale première de l'équation* (7).

Démonstration. — Soit, par exemple, ω une solution quelconque des équations (8)

$$a\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + b\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + c\frac{d\omega}{dp} + d\frac{d\omega}{dq} = 0$$

et

$$\alpha\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \gamma\frac{d\omega}{dp} + \delta\frac{d\omega}{dq} = 0;$$

on a en outre les deux relations suivantes, qui ont évidemment lieu pour une fonction quelconque de x et de y,

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \frac{d\omega}{dp}r + \frac{d\omega}{dq}s = 0,$$
$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \frac{d\omega}{dp}s + \frac{d\omega}{dq}t = 0.$$

Entre les équations précédentes, éliminons $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$, $\frac{d\omega}{dp}$ et $\frac{d\omega}{dq}$, il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore $W = 0$, d'où il résulte que $\omega = 0$ est une intégrale de l'équation (7). Si u et v sont deux valeurs particulières de ω, les

équations (8) étant linéaires, $u - f(v)$ satisfait également à ces équations, quelle que soit la fonction f; la proposition est donc démontrée.

Théorème IV. — *En désignant par u et v deux solutions communes au système d'équations* (8), *et par u' et v' deux solutions communes au système* (9), *si des équations $u - f(v) = 0$ et $u' - \varphi(v') = 0$ on tire les valeurs de p et q en fonction de x, y et z, ces valeurs substituées dans $p\,dx + q\,dy$ rendent cette expression une différentielle exacte, en sorte que, pour achever l'intégration, il suffit d'intégrer l'intégration*

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Démonstration. — D'après ce que j'ai dit plus haut,

$$\begin{vmatrix} -\frac{du}{dp} & -\frac{du}{dq} & \left(\frac{du}{dx}\right) & \left(\frac{du}{dy}\right) \\ -\frac{dv}{dp} & -\frac{dv}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} -\frac{du'}{dp} & -\frac{du'}{dq} & \left(\frac{du'}{dx}\right) & \left(\frac{du'}{dy}\right) \\ -\frac{dv'}{dp} & -\frac{dv'}{dq} & \left(\frac{dv'}{dx}\right) & \left(\frac{dv'}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

sont deux représentations de W appartenant à des systèmes différents.

En vertu du théorème I, on a donc la relation

$$\frac{du}{dp}\left(\frac{du'}{dx}\right) + \frac{du}{dq}\left(\frac{du'}{dy}\right) - \frac{du'}{dp}\left(\frac{du}{dx}\right) - \frac{du'}{dq}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

qui est la condition d'intégrabilité. Comme d'ailleurs on peut remplacer dans cette relation u par une solution quelconque du système (8), et u' par une solution quelconque du système (9), la proposition est démontrée.

6. Le cas où $G = 0$ donne lieu aux mêmes propositions, sauf qu'il suffit de considérer une seule représentation de W.

SUR LA

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
t. LXXXII; 1876.

1. Jacobi a donné (*Crelle,* t. 4) un système d'équations différentielles du second ordre auquel satisfont le numérateur et le dénominateur de la fraction qui se présente dans la transformation des fonctions elliptiques; Eisenstein a depuis étudié cette question dans un beau Mémoire (*Crelle,* t. 30 et 32, et *Œuvres mathématiques,* p. 159).

On peut présenter de la façon suivante la proposition de Jacobi :

En désignant par y une quantité égale à l'unité et introduite pour l'homogénéité des formules, soient $u(x, y)$ et $f(x, y)$ deux polynômes du quatrième degré homogènes en x et y, et $z = \frac{X}{Y}$ une intégrale rationnelle de l'équation

$$\frac{dz}{\sqrt{u(z, 1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

X et Y étant deux polynomes homogènes en x et y et du degré m. Posons, pour abréger,

$$U = u(X, Y) \quad \text{et} \quad X_1 = \alpha\frac{dX}{dx} + \beta\frac{dY}{dy},$$

$$X_2 = \alpha^2\frac{d^2X}{dX^2} + 2\alpha\beta\frac{d^2X}{dx\,dy} + \beta^2\frac{d^2X}{dy^2};$$

Y_1, Y_2 et f_1 étant définis d'une façon analogue.

Cela posé, on a l'identité suivante, qui a lieu quelles que soient les quantités α, β, ξ et η :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{12}(\alpha y - \beta x)^2\left(\xi^2\frac{d^2U}{dX^2} + 2\xi\eta\frac{d^2U}{dX\,dY} + \eta^2\frac{d^2U}{dY^2}\right) \\ &\quad = \Phi(\xi Y - \eta X)^2 + f(\xi Y_1 - \eta X_1)^2 - f(\xi Y - \eta X)(\xi Y_2 - \eta X_2) \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}f_1(\xi Y\,\eta X)(\xi Y_1 - \eta X_1), \end{aligned}\right.$$

identité où, k désignant une constante, Φ a pour valeur l'expression

$$\frac{m}{12}\left(\alpha^2\frac{d^2f}{dx^2} + 2\alpha\beta\frac{d^2f}{dx\,dy} + \beta^2\frac{d^2f}{dy^2}\right) + k(\alpha y - \beta x)^2.$$

2. On peut poser de la façon suivante le problème de la transformation :

Trouver une intégrale rationnelle $z = \frac{X}{Y}$ de l'équation

$$\frac{dz}{\sqrt{u(z, 1)}} = \frac{dx}{\sqrt{\lambda u + \mu h}},$$

λ et μ désignant des constantes convenablement déterminées et h le hessien de u; c'est sous cette forme que M. Hermite a depuis longtemps résolu ce problème dans le cas de $m = 3$.

On voit facilement que, si le degré m de la transformation est de la forme $4n + 1$, X et Y sont déterminés par les formules suivantes :

$$X = -\frac{dJ}{dy}\Theta + x\Pi, \qquad Y = \frac{dJ}{dx}\Theta + y\Pi,$$

où, J désignant le covariant du sixième degré de u, Θ et Π sont des fonctions homogènes de u et de h et respectivement du degré $(n - 1)$ et du degré n.

Semblablement, si m est de la forme $4n - 1$, X et Y sont déterminés par les formules

$$X = -\frac{d\Theta}{dx} + xJ\Pi, \qquad Y = \frac{d\Theta}{dy} + yJ\Pi,$$

où Θ et Π sont des fonctions homogènes de u et de h et respectivement du degré n et du degré $n - 2$.

Le problème de la transformation est donc ramené à la détermination des polynomes Θ et Π.

3. A cet effet, portons les valeurs précédentes de X et de Y dans l'identité (1), en posant $f = \lambda u + \mu h$, puis

$$\xi = \rho\frac{du}{dy} + \theta\frac{dh}{dy},$$

$$\eta = -\rho\frac{du}{dx} - \theta\frac{dh}{dx},$$

$$\alpha = \rho'\frac{du}{dy} + \theta'\frac{dh}{dy}$$

et

$$\beta = \rho' \frac{du}{dx} - \theta' \frac{dh}{dx};$$

les deux membres se transforment en deux polynomes en ρ, θ, ρ' et θ' qui doivent être identiques et dont les coefficients ne renferment que u, h, ainsi que les fonctions inconnues Θ et Π avec leurs dérivées partielles par rapport à u et h. En égalant les coefficients des mêmes puissances des indéterminées, on obtiendra trois équations différentielles analogues à celles de Jacobi et permettant de déterminer Θ, Π, ainsi que les constantes λ, μ et k.

En posant

$$u = z, \qquad h = 1, \qquad \Theta(u, 1) = \Theta(z) \qquad \text{et} \qquad \Pi(u, 1) = \Pi(z),$$

on en déduira facilement des équations différentielles ne renfermant que z, $\Theta(z)$, $\Pi(z)$, leurs dérivées par rapport à z et les invariants de la forme u.

Dans une prochaine Communication, si l'Académie veut bien me le permettre, je lui soumettrai les formules auxquelles on arrive par la méthode que je viens d'indiquer.

SUR LA

MULTIPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. VI; 1877.

1. Je rappellerai d'abord une formule importante due à M. Hermite [1].

Étant donnée une forme homogène, à deux variables et du degré m, $U(x, y)$, si l'on pose, suivant l'usage habituel,

$$U_1 = \frac{1}{m} \frac{dU}{dx}, \qquad U_2 = \frac{1}{m} \frac{dU}{dy},$$

on a identiquement

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & U(\lambda x - U_2, \lambda y + U_1) \\ & \quad = U\left[\lambda^n + \frac{n(n-1)}{1.2} A \lambda^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} B \lambda^{n-3} + \ldots\right], \end{aligned} \right.$$

A, B, ... désignant des covariants de la forme U.

Je transformerai cette formule en posant

$$\lambda x - U_2 = t\xi, \qquad \lambda y + U_1 = t\eta;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\xi U_1 + \eta U_2}{x\eta - y\xi}, \qquad t = \frac{U}{x\eta - y\xi},$$

ou, en posant, pour abréger, $\xi U_1 + \eta U_2 = \Delta$, $x\eta - y\xi = \omega$,

$$\lambda = \frac{\Delta}{\omega}, \qquad t = \frac{U}{\omega}.$$

En remplaçant respectivement, dans l'équation (1), $\lambda x - U_1$, $\lambda x - U_2$, λ et t par leurs valeurs, il viendra

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} U^{n-1}(x, y)\, U(\xi, \eta) = {} & \Delta^n + \frac{n(n-1)}{1.2} A\, \Delta^{n-2} \omega^2 \\ & + \frac{n(n-1)(n-1)}{1.2.3} B\, \Delta^{n-3} \omega^3 + \ldots . \end{aligned} \right.$$

[1] *Deuxième Mémoire sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 25.

Si l'on suppose que U soit une forme du quatrième degré, en désignant par H son hessien, par J son covariant cubique du sixième degré, et par S son invariant quadratique, il viendra

$$(3)\qquad U^3(x,y)\,U(\xi,\eta) = \Delta^4 + 6H\Delta^2\omega^2 + 4J\Delta\omega^3 + (SU^2 - 3H^2)\omega^4.$$

2. En extrayant la racine carrée du premier membre, on obtient la relation suivante :

$$U^2\,U(\xi,\eta) = (\Delta^2 + 3H\omega^2)^2 + \omega^3[4J\Delta + (SU^2 - 12H^2)\omega],$$

et l'on voit, en vertu du théorème fondamental d'Abel, que l'intégrale algébrique entière de l'équation différentielle

$$\frac{3\,dx}{\sqrt{U(x,y)}} + \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi,\eta)}},$$

où les quantités η et y doivent, ainsi que dans ce qui suit, être remplacées par l'unité, est fournie par l'équation

$$4J(\xi U_1 + \eta U_2) + (SU^2 - 12H^2)(x\eta - y\xi) = 0.$$

3. On obtient avec une égale facilité la formule qui donne la multiplication des fonctions elliptiques par 5, en d'autres termes, l'intégrale algébrique entière de l'équation

$$(4)\qquad \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi,\eta)}} + \frac{5\,dx}{\sqrt{U(x,y)}} = 0.$$

Désignant, en effet, par a un covariant inconnu de U, il suffira de déterminer ce covariant, de telle sorte que le reste de l'opération, dans l'extraction de la racine carrée de

$$(\Delta + a\omega)^2[\Delta^4 + 6H\Delta^2\omega^2 + 4J\omega^3 + (SU^2 - 3H^2)\omega^4],$$

soit divisible par ω^5. On aura, en effet, identiquement

$$U^3(\Delta + a\omega)^2\,U(\xi,\eta) = P^2 + (x\eta - y\xi)^5[Q(\xi U_1 + \eta U_2) + R(x\eta - y\xi)];$$

d'où il suit, en vertu du théorème d'Abel, que l'intégrale cherchée est fournie par la résolution de l'équation

$$Q(\xi U_1 + \eta U_2) + R(x\eta - y\xi) = 0.$$

Pour effectuer le calcul, remplaçons pour un instant Δ par z et ω par 1 ; on trouvera aisément

$$\begin{aligned}(z + a)^2(z^4 + 6Hz^2 + 4Jz + SU^2 - 3H^2)\\ = (z^3 + az^2 + 3Hz + 2J + 3aH)^2 + (SU^2 - 12H^2 + 4aJ)z^2\\ + [2a(SU^2 - 12H^2) + 4(a^2 - 3H)J]z\\ + a^2(SU^2 - 12H^2) - 4J^2 - 12aJH;\end{aligned}$$

en égalant à zéro le coefficient de z^3, on a

$$a = \frac{12H^2 - SU^2}{4J},$$

et le reste de l'opération de l'extraction de la racine carrée devient

$$\begin{aligned}&-\frac{[(SU^2 - 12H^2)^2 + 48HJ^2]}{4J}z\\ &+\frac{[(SU^2 - 12H^2)^3 - 48HJ^2(SU^2 - 12H^2) - 64J^4]}{16J^2}.\end{aligned}$$

L'intégrale algébrique de l'équation (5) est donc donnée par l'équation

$$\begin{aligned}4J[(SU^2 - 12H^2)^2 + 48HJ^2](\xi U_1 + \eta U_2)\\ -[(SU^2 - 12H^2)^3 - 48HJ^2(SU^2 - 12H^2) - 64J^4](x\eta - y\xi) = 0.\end{aligned}$$

4. On trouverait de même la formule qui donne la multiplication des fonctions elliptiques par un nombre impair quelconque n, ou, en d'autres termes, l'intégrale algébrique entière de l'équation

$$(5)\qquad \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi,\eta)}} + \frac{n\,dx}{\sqrt{U(x,y)}} = 0.$$

Le problème revient, comme on le voit par ce qui précède, à déterminer deux polynômes entiers $F(z)$ et $f(z)$ qui soient respectivement du degré $\frac{n-3}{2}$ et du degré $\frac{n+1}{2}$, et tels que l'on ait

$$(6)\qquad F^2(z)\,W(z) = f^2(z) + \alpha z + \beta,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$W(z) = z^4 + 6Hz^2 + 4Jz + SU^2 - 3H^2,$$

et où α et β désignent des covariants de U indépendants de z.

La première méthode qui se présente pour résoudre ce problème est celle que j'ai employée dans les exemples précédents ; en mettant en évidence les $\frac{n-3}{2}$ coefficients actuellement indéterminés de $F(z)$, et extrayant la racine de $F^2(z)\,W(z)$, on profitera de l'indétermination de ces coefficients pour annuler les coefficients des $\frac{n-3}{2}$ premiers termes du reste, qui sera nécessairement de la forme

$$\alpha z + \beta,$$

α et β étant des fonctions connues des covariants de U.

L'intégrale cherchée de l'équation (5) sera alors donnée par la relation

$$\alpha(\xi U_1 + \eta U_2) + \beta(x\eta - y\xi) = 0.$$

Mais on peut rattacher la détermination des polynômes $F(z)$ et $f(z)$, et par conséquent du reste $\alpha z + \beta$, à la réduction de l'expression $\sqrt{W(z)}$ en fonction continue.

De l'équation (6) on déduit, en effet,

$$F(z)\sqrt{W(z)} = f(z) + \frac{\alpha z + \beta}{F(z)\sqrt{W(z)} + f(z)};$$

le dénominateur de la fraction $\frac{\alpha z + \beta}{F(z)\sqrt{W(z)} + f(z)}$ est du degré $\frac{n+1}{2}$, d'où il suit que le développement de $F(z)\sqrt{W(z)} - f(z)$ commence par un terme de l'ordre de $\frac{1}{x^{\frac{n-3}{2}+1}}$.

La fraction $\frac{f(z)}{F(z)}$ est donc une des réduites obtenues en développant $\sqrt{W(z)}$ en fraction continue, celle dont le dénominateur est du degré $\left(\frac{n-3}{2}\right)$.

SUR LA

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. VI; 1877.

I. — Considérations préliminaires.

1. En désignant par y_1 une quantité égale à l'unité et introduite pour rendre les formules homogènes, soit

$$F(x_1, y_1) = Ax_1^4 + 4Bx_1^3y_1 + 6Cx_1^2y_1^2 + 4Dx_1y_1^3 + Ey_1^4$$

un polynôme du quatrième degré en x_1.

Soit, de plus,

$$x_1 = \frac{X}{Y}$$

une intégrale quelconque de l'équation

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = d\nu,$$

X et Y désignant des fonctions de ν dont l'une peut être choisie arbitrairement.

En dénotant par des accents les dérivées prises par rapport à la variable ν, et en faisant, pour abréger,

$$T = YX' - XY',$$

l'équation précédente devient

$$(2)\qquad F(X, Y) = T^2.$$

On a évidemment

$$T' = YX'' - XY'';$$

je poserai, en outre,

$$\Theta = Y'X'' - X'Y'';$$

en sorte que, des relations précédentes, on déduit

$$(3)\qquad \begin{cases} X'T' = X\theta + X''T, \\ Y'T' = Y\theta + Y''T. \end{cases}$$

En employant une notation bien connue, je poserai

$$F_{11} = \frac{1}{12}\,\frac{d^2F(X,Y)}{dX^2},\qquad F_{12} = \frac{1}{12}\,\frac{d^2F(X,Y)}{dX\,dY},\qquad F_{22} = \frac{1}{12}\,\frac{d^2F(X,Y)}{dY^2};$$

en vertu de la propriété fondamentale des polynômes homogènes, l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$X^2F_{11} + 2XYF_{12} + Y^2F_{22} = T^2.$$

A cette relation nous pouvons joindre les deux suivantes, que l'on obtient en prenant ses deux premières dérivées par rapport à ν :

$$X'X.F_{11} + (XY' + YX')F_{12} + Y'Y.F_{22} = \frac{TT'}{2},$$
$$(XX'' + 3X'^2)F_{11} + (XY'' + YX'' + 6X'Y')F_{12}$$
$$+ (YY'' + 3Y'^2)F_{22} = \frac{TT'' + T'^2}{2}.$$

En les résolvant par rapport à F_{11}, F_{12} et F_{22}, il vient

$$3T^3F_{11} = Y^2\frac{T^2T''}{2} - 3YY'T^2T' + (3Y'^2T + Y^2\theta)T^2,$$
$$3T^3F_{12} = -XY\frac{T^2T''}{2} + \frac{3}{2}(YX' + XY')T^2T' - (3X'Y'T + XY\theta)T^2,$$
$$3T^3F_{22} = X^2\frac{T^2T''}{2} - 3XX'T^2T' + (3X'^2T + X^2\theta)T^2.$$

Multiplions la première de ces équations par ξ^2, la deuxième par $2\xi\eta$, la troisième par η^2, ξ et η désignant des quantités arbitraires, et faisons la somme des résultats obtenus : il viendra

$$3T^3(\xi^2F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2F_{22})$$
$$= T^2\left(\frac{T'' + 2\theta}{2}\right)(Y\xi - X\eta)^2$$
$$- 3T^2T'(Y\xi - X\eta)(Y'\xi - X'\eta) + 3T^3(Y'\xi - X'\eta)^2,$$

ou encore, en remplaçant $T'(Y'\xi - X'\eta)$ par sa valeur

$$\theta(Y\xi - X\eta) + T(Y''\xi - X''\eta),$$

que l'on déduit des équations (3),

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi^2F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2F_{22} \\ \quad = (Y\xi - X\eta)^2\left(\dfrac{T'' - 4\theta}{6T}\right) \\ \quad\quad + (Y'\xi - X'\eta)^2 - (Y\xi - X\eta)(Y''\xi - X''\eta). \end{cases}$$

2. Posons, pour abréger,

$$(5)\qquad \frac{T'' - 4\theta}{6T} = \frac{YX''' - XY''' - 3(Y'X'' - X'Y'')}{6(YX' - XY')} = \varphi.$$

L'équation (4) deviendra

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi^2F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2F_{12} = \varphi(Y\xi - X\eta)^2 + (Y'\xi - X'\eta)^2 \\ \qquad\qquad - (Y\xi - X\eta)(Y''\xi - X''\eta). \end{cases}$$

Comme dans cette formule ξ et η sont arbitraires, elle tient lieu des trois relations suivantes :

$$(6)'\qquad \begin{cases} F_{11} = AX^2 + 2BXY + CY^2 = \varphi Y^2 + Y'^2 - YY'', \\ 2F_{12} = 2BX^2 + 4CXY + 2DY^2 \\ \quad = -2\varphi XY + YX'' + XY'' - 2X'Y', \\ F_{22} = CX^2 + 2DXY + EY^2 = \varphi X^2 + X'^2 - XX'' \text{ (}^1\text{)}. \end{cases}$$

Ces formules sont une conséquence immédiate de la relation (2); réciproquement, si, φ désignant une fonction arbitraire de ν, on détermine des fonctions X et Y satisfaisant aux trois relations (6)', on voit que $y_1 = \frac{X}{Y}$ est une intégrale de l'équation (1).

En faisant, en effet, dans la relation (6),

$$\xi = X \quad \text{et} \quad \eta = Y,$$

il vient

$$F = (Y'X - XY')^2.$$

L'intégration de l'équation (1) est donc ramenée à l'intégration du système d'équations simultané (6)', dans lequel φ est une fonction arbitraire de ν, et à cette équation on peut adjoindre l'équation (5), où, comme on le voit, n'entrent pas les coefficients du polynôme F.

En particulier, si φ est une constante, les fonctions X et Y, sa-

---

[1] Sur ces formules, *voir* EISENSTEIN, *Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln* (*Mathematische Abhandlungen*, p. 167).

tisfaisant aux relations (6)′, donnent les fonctions Θ de Jacobi et les fonctions Al de M. Weierstrass.

II. — Formules de Jacobi.

3. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\frac{dx_1}{\sqrt{\mathrm{F}(x_1, y_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}}, \tag{7}$$

où $f(x, y)$ désigne un polynôme quelconque du quatrième degré en x, la variable y étant introduite pour rendre l'expression homogène et étant égale à l'unité.

Soit

$$x_1 = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$$

une intégrale de cette équation, X et Y étant des fonctions entières de x; soit, de plus, $d\nu$ la valeur commune des deux membres de l'égalité (7).

Si, en vertu de l'égalité

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}} = d\nu, \tag{7'}$$

on suppose X et Y exprimés en fonction de ν, on voit que ces fonctions satisfont au système d'équations (5) et (6).

Je transformerai ces équations, en supposant que X et Y sont exprimés en fonction de x. A cet effet, en introduisant les dérivées prises par rapport à x, nous aurons, en vertu de la relation (7)′,

$$\mathrm{X}' = \frac{d\mathrm{X}}{dx}\sqrt{f}, \qquad \mathrm{X}'' = \frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} f + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{X}}{dx}\frac{df}{dx},$$

$$\mathrm{X}''' = \frac{d^3\mathrm{X}}{dx^3} f\sqrt{f} + \frac{3}{2}\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\frac{df}{dx}\sqrt{f} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{X}}{dx}\frac{d^2 f}{dx^2}\sqrt{f},$$

$$\mathrm{Y}' = \frac{d\mathrm{Y}}{dx}\sqrt{f}, \qquad \mathrm{Y}'' = \frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} f + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\frac{df}{dx},$$

$$\mathrm{Y}''' = \frac{d^3\mathrm{Y}}{dx^3} f\sqrt{f} + \frac{3}{2}\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}\frac{df}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\frac{d^2 f}{dx^2}\sqrt{f}.$$

En remplaçant X′, X″, X‴, Y′, Y″ et Y‴ par ces valeurs dans les

équations (5) et (6), il viendra

$$\varphi = \frac{\left[\begin{array}{l}\left(\mathrm{Y}\dfrac{d^3\mathrm{X}}{dx^3} - 3\dfrac{d\mathrm{Y}}{dx}\dfrac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} + 3\dfrac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}\dfrac{d\mathrm{X}}{dx} - \mathrm{X}\dfrac{d^3\mathrm{Y}}{dx^3}\right) f \\ \quad + \dfrac{3}{2}\left(\mathrm{Y}\dfrac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} - \mathrm{X}\dfrac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}\right)\dfrac{df}{dx}\end{array}\right]}{6\left(\mathrm{Y}\dfrac{d\mathrm{X}}{dx} - \mathrm{X}\dfrac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)} + \frac{1}{12}\frac{d^2 f}{dx^2} \tag{8}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \xi^2\mathrm{F}_{11} + 2\xi\eta\mathrm{F}_{12} + \eta^2\mathrm{F}_{22} = \varphi(\xi\mathrm{Y} - \eta\mathrm{X})^2 &+ f\left(\xi\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \eta\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)^2 \\ &- f(\xi\mathrm{Y} - \eta\mathrm{X})\left(\xi\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} - \eta\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\right) \\ &- \frac{1}{2}\frac{df}{dx}(\xi\mathrm{Y} - \eta\mathrm{X})\left(\xi\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \eta\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Le point important dans la proposition due à Jacobi consiste en ce que φ est un polynôme du second degré en x. Pour l'établir, je remarquerai que la relation précédente a lieu, quelles que soient les quantités ξ et η; d'ailleurs, X et Y étant premiers entre eux, on pourra prendre pour ξ et η des polynômes entiers, tels que

$$\xi\mathrm{Y} - \eta\mathrm{X} = 1.$$

L'équation (9) montre immédiatement que φ est aussi un polynôme entier, et la formule (8), que ce polynôme est du second degré.

III. — Transformation des formules de Jacobi.

4. Pour transformer les relations précédemment obtenues, je remarquerai que, si α, β, γ et δ sont des constantes arbitraires reliées par la relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{10}$$

l'équation (9) doit encore être identiquement satisfaite, pour une détermination convenable du polynôme φ, par les polynômes que l'on obtient en remplaçant, dans X, Y, F et f, x par $\alpha x_0 + \gamma y_0$ et y par $\beta x_0 + \delta y_0$, pourvu qu'on rétablisse l'homogénéité de la formule, en multipliant le premier membre par y_0^2.

Désignons, en général, par (W) ce que devient une fonction quelconque W de x et de y, quand on y effectue la substitution indiquée; il est clair que l'on aura

$$\frac{d(\mathrm{X})}{dx_0} = \alpha \left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right) + \beta \left(\frac{d\mathrm{X}}{dy}\right),$$
$$\frac{d^2(\mathrm{X})}{dz_0^2} = \alpha^2 \left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\right) + 2\alpha\beta \left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dx\,dy}\right) + \beta^2 \left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dy^2}\right),$$

et des relations analogues relativement à $\frac{d(\mathrm{Y})}{dx_0}$, $\frac{d^2(\mathrm{Y})}{dx_0}$ et $\frac{d(f)}{dx_0}$.

Imaginons maintenant que, cette substitution effectuée dans la relation (9), on remplace de nouveau $\alpha x_0 + \gamma y_0$ par x et $\beta x_0 + \delta y_0$ par y; on a alors, en vertu de l'équation (10),

$$y_0 = \alpha y - \beta x;$$

φ se change en un polynôme Φ homogène et du second degré par rapport à x et y, homogène et du second degré par rapport à α et β.

Si, de plus, on pose, pour abréger,

$$\mathrm{X}^{(1)} = \alpha \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \beta \frac{d\mathrm{X}}{dy},$$
$$\mathrm{Y}^{(1)} = \alpha \frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \beta \frac{d\mathrm{Y}}{dy},$$
$$f^{(1)} = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy};$$
$$\mathrm{X}^{(2)} = \alpha^2 \frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} + 2\alpha\beta \frac{d^2\mathrm{X}}{dx\,dy} + \beta^2 \frac{d^2\mathrm{X}}{dy^2},$$
$$\mathrm{Y}^{(2)} = \alpha^2 \frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} + 2\alpha\beta \frac{d^2\mathrm{Y}}{dx\,dy} + \beta^2 \frac{d^2\mathrm{Y}}{dy^2}, \quad \ldots,$$

l'équation (9) deviendra

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha y - \beta x)^2(\xi^2 \mathrm{F}_{11} + 2\xi\eta \mathrm{F}_{12} + \eta^2 \mathrm{F}_{22}) \\ &\quad = \Phi(\xi \mathrm{Y} - \eta \mathrm{X})^2 + f(\xi \mathrm{Y}^{(1)} - \eta \mathrm{X}^{(1)})^2 \\ &\qquad - f(\xi \mathrm{Y} - \eta \mathrm{X})(\xi \mathrm{Y}^{(2)} - \eta \mathrm{X}^{(2)}) \\ &\qquad - \frac{1}{2} f^{(1)}(\xi \mathrm{Y} - \eta \mathrm{Y})(\xi \mathrm{Y}^{(1)} - \eta \mathrm{X}^{(1)}), \end{aligned} \right.$$

équation qui doit être identiquement satisfaite, quels que soient α, β, ξ et η, si $x_1 = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$ est une intégrale rationnelle de l'équation dif-

férentielle

$$(7) \qquad \frac{dx_1}{\sqrt{\mathrm{F}(x_1, y_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}}.$$

5. Pour déterminer la forme du polynôme Φ, je remarque que, ce polynôme étant homogène et du second degré par rapport à x et y et par rapport à α et β, on peut l'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi = {}& \alpha^2 \mathrm{W}_{11} + 2\alpha\beta \mathrm{W}_{12} + \beta^2 \mathrm{W}_{22} \\ &+ (\alpha y + \beta x)(\alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2) + k(\alpha y + \beta x)^2, \end{aligned}$$

W désignant un polynôme inconnu, homogène et du quatrième degré en x et y, Ω un polynôme inconnu homogène et du second degré par rapport aux mêmes variables, et k une quantité constante.

Faisons maintenant, dans l'identité (11),

$$\alpha = x + \rho\alpha' \quad \text{et} \quad \beta = y + \rho\beta';$$

le premier membre de cette identité devient divisible par ρ^2; le terme constant et le terme en ρ doivent donc manquer dans le développement du second membre. En faisant ce développement, on trouve facilement

$$\mathrm{W} = mf,$$

m désignant le degré de la transformation, c'est-à-dire le degré des deux polynômes X et Y, puis $\Omega = 0$.

Le polynôme Φ est donc complètement déterminé, sauf le facteur constant k, et l'on a

$$(12) \qquad \Phi = m(\alpha^2 f_{11} + 2\alpha\beta f_{12} + \beta^2 f_{22}) + k(\alpha y - \beta x)^2.$$

SUR

L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6f(x),$$

f ÉTANT UN POLYNOME DU SECOND DEGRÉ.

Bulletin de la Société mathématique, t. VI; 1877.

1. Étant donnée l'équation du second ordre

$$(1) \qquad y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6f(x),$$

où f désigne un polynôme du second degré en x, on sait que cette équation admet comme solutions une infinité de polynômes entiers du troisième degré, à savoir tous les polynômes du troisième degré dont le hessien est égal à $f(x)$. Je me propose dans la Note suivante de trouver son intégrale générale.

A cet effet, je remarque qu'en posant $\frac{dy}{dx} = y'$, l'équation (1) peut être remplacée par le système d'équations simultanées du premier ordre

$$(2) \qquad \frac{dx}{y^{-\frac{4}{3}}} = \frac{dy}{y^{-\frac{4}{3}}y'} = \frac{dy'}{6fy^{-\frac{7}{3}} + \frac{2}{3}y'^2y^{-\frac{7}{3}}},$$

dont le *dernier multiplicateur* est égal à l'unité, puisque l'on a

$$\frac{d}{dx}\left(y^{-\frac{4}{3}}\right) + \frac{d}{dy}\left(y^{-\frac{4}{3}}y'\right) + \frac{d}{dy'}\left(6fy^{-\frac{7}{3}} + \frac{2}{3}y'^2y^{-\frac{7}{3}}\right) = 0.$$

Des principes établis par Jacobi, il résulte qu'il suffit, pour intégrer complètement l'équation (1), d'en trouver une intégrale du premier ordre renfermant une constante arbitraire.

Pour l'obtenir, je prends successivement les trois premières dérivées de l'équation

$$(3) \qquad yy'' - \frac{2}{3}y'^2 = 6f,$$

à savoir

$$(4) \qquad yy''' - \frac{1}{3}y'y'' = 6f',$$

$$(5) \qquad yy^{\text{IV}} + \frac{2}{3}y'y''' - \frac{1}{3}y''^2 = 6f'',$$

$$yy^{\text{V}} + \frac{5}{3}y'y^{\text{IV}} = 0.$$

La dernière équation s'intègre immédiatement et donne, en désignant par α une constante arbitraire,

$$(6) \qquad y^{\text{IV}} = 36\alpha y^{-\frac{5}{3}}.$$

Éliminant y^{IV}, y''' et y'' entre les équations (3), (4), (5) et (6), on obtient l'intégrale du premier ordre

$$(7) \qquad fy'^2 - 3f'yy' + \frac{9}{2}f''y^2 + 9f^2 = 9\alpha y^3;$$

d'où l'on déduit, en posant

$$f = Ax^2 + Bx + C \quad \text{et} \quad \Delta = B^2 - 4AC = f'^2 - 2ff'',$$

$$(8) \qquad y' = \frac{3\left(fy + \sqrt{\Delta y^2 - 4f^3 + 4\alpha y^{\frac{4}{3}}}\right)}{2f};$$

d'où

$$2fy' - 3f'y = 3\sqrt{\Delta y^2 - 4f^3 - 4\alpha fy^{\frac{4}{3}}}.$$

2. Je remarque maintenant que, d'après la théorie due à Jacobi, le facteur qui rend une différentielle exacte le premier membre de l'équation

$$(9) \qquad y^{-\frac{4}{3}}y'\,dx - y^{-\frac{4}{3}}\,dy = 0$$

est $\frac{1}{\frac{dz}{dy'}}$, ou, à un facteur numérique près,

$$\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{2fy'-3f'y}=\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\Delta y^2-4f^3-4\alpha f y^{\frac{4}{3}}}}.$$

En multipliant l'équation (9) par ce facteur intégrant et en remplaçant y' par sa valeur tirée de l'équation (8), il viendra

$$\frac{3}{2}\frac{dx}{f}+\frac{3f'y\,dx-2f\,dy}{2f\sqrt{\Delta y^2-4f^3-4\alpha f y^{\frac{4}{3}}}}=0.$$

Posons $y=z^{-\frac{3}{2}}$, d'où $dy=-\frac{3}{2}z^{-\frac{5}{2}}dz$; en substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il viendra, après avoir supprimé le facteur $\frac{3}{2}$,

$$\frac{dx}{f}+\frac{f'z\,dx+f\,dz}{fz\sqrt{\Delta+4\alpha f z-f^3z^3}}=0,$$

ou encore, en posant $fz=u$ et, par suite, $y=\left(\frac{f}{u}\right)$,

$$\frac{dx}{f}+\frac{du}{u\sqrt{\Delta+4\alpha u-u^3}}=0. \tag{10}$$

L'équation (1) s'intègre donc complètement au moyen des fonctions elliptiques et cette intégrale est, en désignant par α et β deux constantes arbitraires,

$$\int\frac{dx}{f}+\int\frac{du}{u\sqrt{\Delta+4\alpha u-u^3}}=\beta,$$

où u doit être remplacé par sa valeur $fy^{-\frac{2}{3}}$.

3. Comme je l'ai fait observer au début de cette Note, l'équation (1) admet comme solutions une infinité de polynômes entiers; en considérant l'intégrale intermédiaire (9), on voit immédiatement que, pour ces solutions, α doit être nul, et il est facile de voir, en effet, que, dans ce cas, l'équation (10) s'intègre algébriquement.

Pour l'une quelconque de ces solutions, on a ainsi

$$fy'^2-3f'yy'+\frac{9}{2}f''y^2+9f^2=0,$$

ou encore, en multipliant le premier membre par $4f$ et en décomposant ses premiers termes en la somme de deux carrés,

$$(2fy'-3f'y)^2+9(2ff''-4f'^2)y^2+36f^3=0.$$

Pour employer les notations habituelles, si nous posons $f=\mathrm{H}$, $y=\mathrm{U}$ et $2fy'-3f'y=3\mathrm{J}$, il viendra

$$\mathrm{J}^2-\Delta\mathrm{U}^2+4\mathrm{H}^3=0.$$

C'est la relation bien connue qui existe entre les covariants d'une forme cubique.

SUR L'ATTRACTION QU'EXERCE

UN ELLIPSOIDE HOMOGÈNE

SUR UN POINT EXTÉRIEUR.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
t. LXXXVI; 1878.

Considérons l'ellipsoïde $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ et un point M extérieur à cet ellipsoïde et ayant pour masse l'unité. En désignant par x, y, z ses coordonnées, par ρ la densité uniforme de la matière qui forme l'ellipsoïde et par k une quantité constante, la valeur du potentiel du point M, relativement à l'ellipsoïde, est donnée par la formule

$$V=-k\rho\iiint\frac{1}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}},$$

l'intégrale triple s'étendant à tous les points situés dans l'intérieur de l'ellipsoïde. D'après une formule due à Jacobi, le facteur

$$\frac{1}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}}$$

est égal à $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{X-x+i(Y-y)\cos\varphi+i(Z-z)\sin\varphi}$.

On a donc

$$V=-\frac{k\rho}{2\pi}\iiint\int_0^{2\pi}\frac{dX\,dY\,dZ\,d\varphi}{X-x+i(Y-y)\cos\varphi+i(Z-z)\sin\varphi};$$

le point M étant à l'extérieur de l'ellipsoïde, la quantité sous le signe $\int$ ne devient jamais infinie. On peut donc intervertir l'ordre des intégrations et écrire

$$V=-\frac{k\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\iiint\frac{dX\,dY\,dZ}{X-x+i(Y-y)\cos\varphi+i(Z-z)\sin\varphi}.$$

Faisons un changement de variable en posant

$$X=a\xi,\quad Y=b\eta,\quad Z=c\zeta;$$

on aura

$$\frac{V}{abc}=-\frac{k\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\iiint\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{L\xi+M\eta+N\zeta-P},$$

équation où j'ai posé, pour abréger,

$$L=a,\quad M=ib\cos\varphi,\quad N=ic\sin\varphi,\quad\text{et}\quad P=x+iy\cos\varphi+iz\sin\varphi.$$

L'intégrale triple s'étend à tous les points situés dans l'intérieur de la sphère $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$. Elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}\iiint\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\Delta},$$

Δ désignant la distance du point (ξ, η, ζ) au plan H, dont l'équation est

$$LX+MY+NZ-P=0.$$

Il est facile de l'évaluer. Menons, en effet, deux plans infiniment voisins parallèles au plan H; soient respectivement t et $t+dt$ les distances de ces plans au centre O de l'ellipsoïde; soit enfin D la distance du point O au plan H. Les deux plans infiniment voisins découpent dans la sphère une couche dont le volume est $\pi(1-t^2)dt$; tous les points de cette couche sont d'ailleurs à une distance du plan H égale à $D-t$; la partie de l'intégrale triple relative à cette couche est donc égale à

$$\frac{\pi}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}\frac{(1-t^2)dt}{D-t}$$

et la valeur de l'intégrale triple elle-même est

$$\frac{\pi}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)dt}{D-t}.$$

Si l'on remarque maintenant que $P=D\sqrt{L^2+M+N^2}$, en remplaçant L, M, N et P par leurs valeurs, il viendra définitivement

$$\frac{V}{\rho abc}=-\frac{k}{2}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\frac{(1-t^2)\,dt\,d\varphi}{x+iy\cos\varphi+iz\sin\varphi-t\sqrt{(a^2-b^2)+(b^2-c^2)\sin^2\varphi}}.$$

L'intégration relative à t s'effectue immédiatement; je conserverai néanmoins la formule précédente sous cette forme.

On peut remarquer que le premier membre est, à un facteur constant près, le rapport du potentiel à la masse de l'ellipsoïde; il est clair d'ailleurs que le second membre ne change pas quand on remplace l'ellipsoïde considéré par un ellipsoïde homofocal. De là résulte immédiatement l'importante proposition de Maclaurin : *Les potentiels d'un même point relativement à deux ellipsoïdes homofocaux sont proportionnels aux masses de ces ellipsoïdes.*

Si la surface est de révolution et si l'on a $b = c$, l'intégration relative à φ s'effectue immédiatement, en vertu de la formule de Jacobi rappelée plus haut, et l'on a

$$\mathrm{V} = -k\rho\pi ab^2 \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)\,dt}{\sqrt{y^2+z^2+(x-t\sqrt{a^2-b^2})^2}};$$

en effectuant ensuite l'intégration relative à t, on obtiendrait la formule bien connue qui donne explicitement la valeur de V.

En terminant, je ferai observer que la méthode employée ci-dessus pour déterminer l'intégrale triple

$$\iiint \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\mathrm{L}\xi+\mathrm{M}\eta+\mathrm{N}\zeta-\mathrm{P}}$$

suppose essentiellement L, M, N et P réels. On pourrait donc avoir des doutes sur la légitimité de son emploi quand ces quantités sont imaginaires; mais une autre méthode très simple, quoique un peu moins brève que la précédente, conduit également à la valeur que j'ai donnée ci-dessus.

SUR LA

RECHERCHE D'UN FACTEUR D'INTÉGRABILITÉ

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. VI; 1878.

1. Soit à intégrer l'équation du premier ordre $dy - y'\,dx = 0$, où y' est déterminé par l'équation

$$\mathrm{V}(x, y, y') = \alpha \tag{1}$$

α désignant une constante arbitraire.

M étant le multiplicateur propre à rendre $dy - y'\,dx$ une différentielle exacte, on peut supposer que, dans son expression, on ait remplacé α par sa valeur tirée de l'équation (1); M sera donc une fonction de x, y, y', telle que

$$\mathrm{M}(dy - y'\,dx)$$

soit une différentielle exacte.

D'où l'on déduit l'équation de condition

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx} + \frac{d\mathrm{M}}{dy'}\frac{dy'}{dx} + \frac{d\mathrm{M}}{dy}y' + \left(\mathrm{M} + y'\frac{d\mathrm{M}}{dy'}\right)\frac{dy'}{dy} = 0.$$

L'équation (1) donne d'ailleurs les relations

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy'}\frac{dy'}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{V}}{dy'}\frac{dy'}{dy} = 0.$$

Tirons de ces relations les valeurs de $\frac{dy'}{dx}$ et $\frac{dy'}{dy}$, et portons-les dans l'équation précédente, il viendra

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx}\frac{d\mathrm{M}}{dy'} - \frac{d\mathrm{V}}{dy'}\frac{d\mathrm{M}}{dx} + y'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\frac{d\mathrm{M}}{dy'} - \frac{d\mathrm{V}}{dy'}\frac{d\mathrm{M}}{dy}\right) + \mathrm{M}\frac{d\mathrm{V}}{dy} = 0. \tag{2}$$

Cette équation doit être identiquement satisfaite quand on y remplace y' par sa valeur tirée de (1), et, comme α est arbitraire, elle doit être satisfaite quel que soit y'.

Le facteur d'intégrabilité M est donc déterminé par l'équation aux différences partielles (2), où x, y et y' doivent être considérées comme trois variables indépendantes.

Il suffit de trouver une solution particulière quelconque de cette équation et de remplacer, dans cette solution, y' par sa valeur tirée de l'équation (1).

Quant à la solution générale de l'équation (2), il est évident qu'elle se ramène à la solution de l'équation (1) elle-même.

2. Proposons-nous maintenant le problème suivant :

Trouver toutes les fonctions $V(x, y, y')$ telles que, y' étant déterminée par la relation (1), $V(x, y, y') = \alpha$, l'équation

$$dy - y'\,dx = 0$$

admette comme facteur d'intégrabilité une fonction donnée M de x, y et y'.

Si, dans l'équation (2), on regarde V comme la fonction inconnue, on voit immédiatement que l'intégration de cette équation dépend de l'intégration du système suivant d'équations aux différentielles ordinaires du premier ordre :

$$(3) \qquad \frac{dx}{\dfrac{dM}{dy'}} = \frac{dy}{M + y'\dfrac{dM}{dy'}} = \frac{dy'}{-\left(\dfrac{dM}{dx} + y'\dfrac{dM}{dy}\right)};$$

on a identiquement

$$\frac{d}{dx}\frac{dM}{dy'} + \frac{d}{dy}\left(M + y'\frac{dM}{dy'}\right) - \frac{d}{dy'}\left(\frac{dM}{dx} + y'\frac{dM}{dy}\right) = 0.$$

Le dernier multiplicateur du système d'équations (3) est donc l'unité.

Supposons que nous ayons trouvé une solution $V(x, y, y') = \alpha$ du problème proposé, d'après les principes donnés par Jacobi, on obtiendra une seconde solution du système (3), en posant

$$(3)' \qquad \int \frac{1}{\dfrac{d\alpha}{dy'}}\left[\left(M + y'\frac{dM}{dy'}\right)dx - \frac{dM}{dy'}\,dy\right] = \beta,$$

y' étant remplacé sous le signe somme par sa valeur déduite de (1) et β désignant une constante : non seulement la quantité sous le signe somme sera une différentielle exacte, comme on le sait par les propositions dues à Jacobi, mais encore l'intégration pourra toujours s'effectuer effectivement.

La solution la plus générale du problème est ainsi donnée par la relation suivante, où F désigne une fonction arbitraire,

$$(4) \qquad F(\alpha, \beta) = \text{const.},$$

où α doit être remplacé par sa valeur déduite de (1); et l'équation $dy - y'\,dx = 0$, où la valeur de y' est fournie par l'équation (4), admet comme facteur d'intégrabilité l'expression $M(x, y, y')$, où y' doit être remplacé par sa valeur déduite de (4).

3. Soit $f(x, y, \alpha)$ une fonction quelconque de x, y et d'une constante arbitraire α; en posant

$$(5) \qquad \frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0,$$

l'équation $dy - y'\,dx = 0$ admet évidemment comme facteur d'intégrabilité l'expression

$$M = \Phi(\alpha)\,F'(f)\frac{df}{dy},$$

quelles que soient les fonctions Φ et F.

Je suppose que, dans cette expression, on ait remplacé α par sa valeur tirée de l'équation (5), et je me propose de trouver toutes les équations qui admettent M comme facteur d'intégrabilité.

Pour cela, on a à intégrer le système d'équation (3) dont une première intégrale est donnée par l'équation (5), où α désigne une constante arbitraire ; d'après ce que j'ai dit plus haut, une seconde intégrale sera donnée par l'équation (3)', qui devient alors

$$\int \frac{dy'}{d\alpha}\left[\left(M + y'\frac{dM}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy'}\right)dx - \frac{dM}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy'}\,dy\right] = \beta,$$

ou encore

$$\int\left[\frac{dy'}{d\alpha}\left(M + y'\frac{dM}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy'}\right)dx - \frac{dM}{d\alpha}\,dy\right] = \beta.$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (4),

$$\frac{dy'}{d\alpha} = \frac{\dfrac{df}{dx}\dfrac{d^2 f}{d\alpha\,dy} - \dfrac{df}{dy}\dfrac{d^2 f}{d\alpha\,dx}}{\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2}.$$

En substituant cette valeur de $\dfrac{dy'}{d\alpha}$ dans l'expression précédente et en intégrant, il vient

$$\Phi(\alpha)\,F'(f)\frac{df}{d\alpha} + \Phi'(\alpha)F(f) = \beta;$$

d'où cette conclusion :

Quelles que soient les fonctions Φ, Θ *et* F, *le facteur d'intégrabilité de l'équation*

$$dy - y'\,dx = 0,$$

où y' est déterminé par la relation

$$(6)\qquad \Phi(\alpha)\,F'(f)\frac{df}{d\alpha} + \Phi'(\alpha)\,F(f) + \Theta(\alpha) = 0,$$

relation dans laquelle α doit être remplacé par sa valeur déduite de l'équation (5), *est*

$$\Phi(\alpha)\,F'(f)\frac{df}{dy};$$

α étant, dans cette expression, remplacé par sa valeur tirée de l'équation (6).

4. La proposition précédente peut encore s'énoncer ainsi :

En désignant par Φ, Ψ *et* Θ *des fonctions arbitraires, on peut toujours ramener aux quadratures l'intégration de l'équation*

$$(7)\qquad \Phi(\alpha)\,F'(f)\frac{df}{d\alpha} + \Psi(\alpha)\,F(f) + \Theta(\alpha) = 0,$$

α étant déterminé par l'équation

$$\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0.$$

En effet, si Φ n'est pas identiquement nul, on pourra facilement ramener l'équation précédente à la forme de l'équation (6).

Si $\Phi = 0$, l'équation peut se ramener à la forme $f = \varphi(\alpha)$, α étant remplacé par sa valeur tirée de (6) et son intégrale est, comme l'a remarqué Lagrange,

$$f(x, y, \alpha) = \varphi(\alpha),$$

α désignant une constante arbitraire.

5. Je ferai remarquer encore que, l'équation (6) ne déterminant f qu'à une constante arbitraire près, on peut, dans cette équation remplacer f par $f + \mu(\alpha)$, μ désignant une fonction arbitraire de α.

On sait donc, quelles que soient les fonctions Φ, Ψ, Θ, μ *et* f, *intégrer l'équation*

$$\Phi(\alpha)\,F'[f + \mu(\alpha)]\left[\frac{df}{d\alpha} + \mu'(\alpha)\right] + \Psi(\alpha)\,F[f + \mu(\alpha)] + \Theta(\alpha) = 0,$$

où α doit être remplacé par sa valeur tirée de l'équation

$$\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0.$$

6. Soit, pour prendre l'exemple le plus simple, $f = y - \alpha x$; on en déduit $y' = \alpha$.

D'où il suit que l'équation

$$dy - y'\,dx = 0,$$

où y' est déterminée par l'équation

$$(8)\qquad \begin{cases} \Phi'(y')\,F[y - xy' + \varphi(y')] \\ \quad - x\Phi(y')\,F'[y - xy' + \varphi(y')] + \Theta(y') = 0, \end{cases}$$

a pour facteur d'intégrabilité, quelles que soient les fonctions Φ, F, Θ et φ, l'expression

$$M = \Phi(y')\,F'[y - xy' + \varphi(y')],$$

où y' doit être remplacé par sa valeur tirée de la relation (8). Faisons, par exemple,

$$\varphi(t)=0, \quad \Phi(t)=1, \quad F(t)=-t^2 \quad \text{et} \quad \Theta(t)=t^2,$$

on aura

$$y'^2-2x^2y'+2xy=0;$$

d'où l'équation différentielle

$$dy-(x^2+\sqrt{x^4-2xy})\,dx=0,$$

dont un facteur d'intégrabilité sera

$$y-x^3-x\sqrt{x^4-2xy}.$$

Effectivement, on a

$$\begin{aligned}&(y-x^3-x\sqrt{x^4-2xy})[dy-(x^2+\sqrt{x^4-2xy})\,dx]\\ &\quad=(y-x^4-x\sqrt{x^4-2xy})\,dy\\ &\qquad-[3yx^2-x^5+(y-2x^3)\sqrt{x^4-2xy}]\,dx,\end{aligned}$$

expression qui, comme il est facile de le vérifier, est une différentielle exacte.

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz$.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. VII; 1878.

1. Je suppose, dans tout ce qui suit, que n soit un nombre entier positif. On a évidemment

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz=-e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,\Theta_n+U_n\int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz+V_n, \tag{1}$$

Θ_n désignant un polynôme entier en x et en z, U_n et V_n deux polynômes entiers en x. Si, pour mettre les variables en évidence, on écrit pour un instant $\Theta_n(z, x)$ au lieu de Θ_n, on a d'ailleurs

$$V_n=\Theta_n(0, x).$$

En dérivant l'équation précédente, on a

$$z^n=-\frac{d\Theta_n}{dz}+\Theta_n(z-x)+U_n,$$

et de cette relation, pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$, on déduit facilement les systèmes de valeurs suivants

$$U_0=1, \quad \Theta_0=0; \qquad U_1=x, \quad \Theta_1=1; \qquad U_2=x^2+1, \quad \Theta_2=z+x.$$

En général, de l'identité

$$z^{n-1}=-nz^{n-1}+z^n(z-x)+z^nx+nz^{n-1},$$

on déduit

$$U_{n+1}=xU_n+xU_{n-1} \tag{2}$$

et

$$\Theta_{n+1}=z^n+x\Theta_n+n\Theta_{n-1}. \tag{3}$$

2. La relation (2), jointe aux valeurs données de U_0 et de U_1, montre immédiatement que les polynômes U_n sont précisément ceux qui ont été considérés par M. Hermite, au sujet du développement de $e^{\frac{ax^2}{2}-\frac{a}{2}(x-h)^2}$ en série [1], dans le cas particulier où l'on a $a=-1$ et $h=-z$.

Ces polynômes peuvent donc être définis par l'équation

$$e^{\frac{z^2}{2}+zx} = U_0 + U_1 z + \frac{U_2}{1.2} z^2 + \ldots + \frac{U_n}{1.2.3\ldots n} z^n + \ldots. \tag{4}$$

3. De l'égalité

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz = -e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,\Theta_n + U_n \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz + V_n,$$

on déduit, en égalant les dérivées des deux membres par rapport à x,

$$\begin{aligned}
&-e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,\Theta_{n+1} + U_{n+1}\int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz + V_{n+1} \\
&\quad = -z e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,\Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2}+2x}\,\frac{d\Theta_n}{dx} + \frac{dU_n}{dx}\int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz \\
&\qquad + \frac{dV_n}{dx} + U_n \int_0^z z e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz \\
&\quad = -z e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,\Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,\frac{d\Theta_n}{dx} + \left(x U_n + \frac{dU_n}{dx}\right)\int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz \\
&\qquad + \frac{dV_n}{dx} - U_n e^{-\frac{z^2}{2}+zx} + U_n;
\end{aligned}$$

d'où les relations suivantes

$$\Theta_{n+1} = z\Theta_n + \frac{d\Theta_n}{dx} + U_n, \tag{4}$$

$$U_{n+1} = x U_n + \frac{dU_n}{dx}, \tag{5}$$

$$V_{n+1} = \frac{dV_n}{dx} + U_n. \tag{6}$$

---

[1] *Sur un nouveau développement en série des fonctions* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1864, t. LVIII).

4. On en déduit facilement ces équations

$$n U_{n-1} = \frac{dU_n}{dx}$$

et

$$\frac{d^2U_n}{dx^2} + x\frac{dU_n}{dx} - nU_n = 0, \tag{7}$$

qui ont été données par M. Hermite.

Posons, pour abréger,

$$\Theta_n = e^{\frac{x^2}{2}-zx}\,H_n;$$

on aura les relations suivantes

$$H_{n+1} = e^{-\frac{x^2}{2}+zx} z^n + x H_n + n H_{n-1}$$

et

$$H_{n+1} = x H_n + \frac{dH_n}{dx} + U_n e^{-\frac{x^2}{2}+zx},$$

d'où

$$n H_{n-1} = \frac{dH_n}{dx} + e^{-\frac{x^2}{2}+zx}(U_n - z^n)$$

et

$$\frac{d^2H_n}{dx^2} + x\frac{dH_n}{dx} - nH_n = e^{-\frac{x^2}{2}+zx}\left(z^{n+1} - zU_n - 2\frac{dU_n}{dx}\right). \tag{8}$$

Il est remarquable que, le polynôme U_n étant une solution de l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + xy' - ny = 0,$$

la fonction

$$H_n = e^{-\frac{x^2}{2}+zx}\,\Theta_n$$

satisfasse à l'équation

$$y'' + xy' - ny = e^{-\frac{x^2}{2}+zx}\left(z^{n+1} - zU_n - 2\frac{dU_n}{dx}\right),$$

qui ne diffère de la précédente que par la présence du second membre.

5. Les fonctions Θ peuvent s'exprimer facilement au moyen des fonctions U.

On a, en effet,

$$\Theta_{n+1} = \Sigma \mathrm{A}_{m,n} \mathrm{U}_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

où, en posant, pour abréger, $n - m = \mu$,

$$\mathrm{A}_{m,n} = z^\mu + \frac{m+1}{1}(\mu - 1) z^{\mu-2} + \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}(\mu-2)(\mu-3) z^{\mu-4}$$
$$+ \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5) z^{\mu-6} \ldots.$$

Le terme constant de cette expression est nul si μ est impair, et, si μ est pair, égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots\left(m+\frac{\mu}{2}\right)}{1.2.3\ldots\frac{\mu}{2}}.$$

Par suite, en faisant, dans la relation (9),

$$z = 0,$$

il vient

$$\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{U}_n + (n-1)\mathrm{U}_{n-2} + (n-2)(n-3)\mathrm{U}_{n-4} + \ldots. \tag{10}$$

6. En faisant $z = \infty$ dans l'équation (1), il vient

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx}\, dz = \mathrm{U}_n \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2} + zx}\, dz + \mathrm{V}_n,$$

ou encore

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2}\, dz = \mathrm{U}_n \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} + \mathrm{V}_n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Posons $z - x = t$, il viendra

$$\int_{-\infty}^{x} (x-t)^n e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \mathrm{U}_n \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} + \mathrm{V}_n e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{11}$$

formule où figure dans le premier membre l'intégrale multiple d'ordre n de la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ces intégrales multiples donnent donc naissance aux mêmes polynômes U_n qui, dans la théorie développée par M. Hermite, proviennent des dérivées successives de la fonction $e^{\frac{x^2}{2}}$.

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

DU TROISIÈME ORDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXVIII; 1879.

1. Étant donnée une équation différentielle linéaire

$$A\frac{d^n y}{dx^n} + B\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + K\frac{dy}{dz} + L = 0,$$

on peut lui faire subir deux transformations différentes, de telle sorte qu'après les transformations elle conserve encore la même forme.

On peut d'abord changer de variable en posant $x = f(z)$, puis, cette substitution effectuée, changer d'inconnue en posant $y = V(z)u$. Les diverses transformées que l'on obtient ainsi, en donnant aux fonctions $f(z)$ et $V(z)$ toutes les formes possibles, peuvent être considérées comme appartenant à une même classe.

Ainsi, toutes les équations différentielles de second ordre ne forment qu'une seule classe et sont toutes réductibles à un type unique, par exemple à l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$; mais on ne sait pas, au moyen de simples quadratures, opérer effectivement cette réduction, ni, deux équations du second ordre étant données, trouver les transformations qui permettent de passer de l'une à l'autre.

2. Des circonstances entièrement différentes se présentent dans la théorie des équations différentielles linéaires du troisième ordre.

Considérons l'équation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3P\frac{d^2 y}{dx^2} + 3Q\frac{dy}{dx} + Ry = 0, \tag{1}$$

et supposons que, après avoir fait successivement les transformations $x = f(z)$ et $y = V(z)u$, elle devienne

$$\frac{d^3 u}{dz^3} + 3P_0\frac{d^2 u}{dz^2} + 3Q_0\frac{du}{dz} + R_0 u = 0. \tag{2}$$

Je considérerai d'abord les expressions $e^{-\int P\,dx}$ et $e^{-\int P_0\,dz}$, introduites par M. Liouville dans l'étude des équations linéaires; on voit facilement que l'on a identiquement

$$e^{-\int P dz} = e^{-\int P_0 dx}\frac{\frac{dx}{dz}}{V};$$

la fonction $e^{-\int P\,dx}$ constitue donc, relativement à l'équation (1), un véritable invariant qui, après les transformations, se reproduit à un facteur près dépendant uniquement des transformations opérées.

3. On obtient un second invariant de l'équation (1) en considérant la fonction

$$I = 4P^3 + 6P\frac{dP}{dx} + \frac{dP^3}{d^3x} + 6PQ - 3\frac{dQ}{dx} + 2R;$$

si, en effet, on forme, relativement à l'équation (2), la fonction semblable

$$I_0 = 4P_0^3 + 6P_0\frac{dP_0}{dz} + \frac{d^2P_0}{d^2z} - 6P_0Q_0 - 3\frac{dQ_0}{dz} + 2R_0,$$

on a l'identité

$$I_0 = I\left(\frac{dx}{dz}\right)^2; \tag{3}$$

I est donc encore un invariant de l'équation (1) qui ne change pas de valeur lorsqu'on change l'inconnue.

En combinant entre eux les deux invariants précédents, je considérerai encore l'invariant $J = e^{3\int P dx} I$ qui donne lieu à la relation

$$J_0 = JV^3(z) \tag{4}$$

et qui, on le voit, ne change pas de valeur quand on change de variable.

4. Proposons-nous maintenant de reconnaître si deux équations données (1) et (2) appartiennent à la même classe. Si cela a lieu, en intégrant l'équation (3), on aura

$$x = f(x, \alpha),$$

α désignant une constante arbitraire ; cette valeur, portée dans la relation (4), déterminera $V(z)$, et, si les équations appartiennent effectivement à la même classe, on devra pouvoir disposer de l'arbitraire α de telle sorte que, par les transformations indiquées, l'équation (2) résulte de l'équation (1).

5. Toutes les équations du troisième ordre peuvent, en effectuant de simples quadratures, se ramener à une forme réduite ne renfermant qu'une fonction arbitraire. Si, en effet, on intègre l'équation (3) en y faisant $I_0 = 1$, on en déduit une transformation telle que l'invariant I de la transformée est égal à l'unité ; de même, en faisant $J_0 = 1$, on déduit de l'équation (4) une nouvelle transformation telle que la transformée manque du coefficient du second terme, son invariant I demeurant d'ailleurs égal à l'unité.

Cette transformée sera donc de la forme

$$\frac{d^3 u}{dz^3} + F(z)^0 \frac{du}{dz} + \left[F'(z) + \tfrac{1}{2}\right] u = 0.$$

Si l'on considère une autre équation sous sa forme réduite

$$\frac{d^3 u}{dz^3} + \Phi^0(z) \frac{du}{dz} + \left[\Phi'(z) + \tfrac{1}{2}\right] u = 0,$$

il est clair que ces deux équations appartiendront à la même classe si, en déterminant convenablement une constante α, on a identiquement

$$F(x + \alpha) = \Phi(x).$$

6. Les considérations qui précèdent supposent essentiellement I différent de zéro. Si $I = 0$, il y a une relation homogène du second ordre et à coefficients constants entre trois solutions quelconques de l'équation donnée. Son intégration se ramène alors à l'intégration d'une équation du second ordre.

7. On peut, en même temps que l'équation (1), considérer l'équation adjointe de Lagrange

$$\frac{d^3 u}{dz^3} - 3 \frac{d^2}{dx}(P u) + 3 \frac{d}{dx}(Q u) - R u = 0;$$

si l'on désigne par I et J les deux invariants de l'équation (1), et par I_0 et J_0 les mêmes invariants relatifs à l'équation adjointe, on a

$$I_1 = -I \quad \text{et} \quad J_0 = -\frac{I^2}{J}.$$

SUR QUELQUES INVARIANTS

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
t. LXXXVIII; 1879.

1. Soit une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\mathrm{A}\frac{d^n y}{dx^n} + n\mathrm{B}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{C}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + n\mathrm{K}\frac{dy}{dx} + \mathrm{L}y = 0;$$

la lettre A représente ici l'unité et n'est introduite que pour mettre mieux en évidence les rapports qui existent entre les invariants de l'équation différentielle et les covariants de la forme algébrique correspondante

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}\lambda^n + n\mathrm{B}\lambda^{n-1}\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{C}\lambda^{n-2}\mu^2 + \ldots + n\mathrm{K}\lambda\mu^{n-1} + \mathrm{L}\mu^n.$$

Comme j'emploierai parfois la notation de Lagrange pour désigner les dérivées d'une fonction, les diverses quantités A', A'', A''', ..., quand je croirai devoir les introduire, devront être regardées comme identiquement nulles.

2. Les équations différentielles linéaires peuvent être transformées de deux façons différentes, en posant d'abord $x = f(z)$, ce qui change la variable, puis en posant $y = \mathrm{V}(z)u$, ce qui change la fonction inconnue.

Certaines fonctions des coefficients d'une équation différentielle ne constituent des invariants de cette équation que relativement à l'un de ces modes de transformation. On peut, pour éviter toute confusion, les désigner sous le nom de *semi-invariants;* dans cette Note, je m'occuperai spécialement des semi-invariants qui sont relatifs aux changements de fonction.

3. On sait que l'on peut toujours, en posant $y = zu$, faire disparaître le second terme d'une équation différentielle linéaire,

z désignant l'invariant de M. Liouville $e^{-\int \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}dx}$; cette transformation ne peut évidemment se faire que d'une seule façon.

Il en résulte que, si l'on désigne par

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{H}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Theta\frac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\mathrm{Z}\frac{d^{n-4}u}{dx^{n-4}} + \ldots = 0$$

l'équation transformée, les fonctions H, Θ, Z, ... sont des semi-invariants de l'équation différentielle donnée. Ces semi-invariants présentent d'ailleurs la plus grande analogie avec les *covariants associés à la forme* Y [1].

4. En effectuant les calculs, on trouve aisément

$$\mathrm{H} = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 - (\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}'),$$
$$\Theta = \mathrm{A}^2\mathrm{D} - 3\mathrm{ABC} + 2\mathrm{B}^3 - (\mathrm{AB}'' - \mathrm{BA}''), \quad \ldots.$$

Le semi-invariant H est corrélatif du hessien de la forme Y; il jouit des propriétés suivantes :

1° Il reste invariable quand on change la fonction inconnue.

2° Il conserve également la même valeur quand on considère l'équation adjointe de Lagrange.

3° Si l'on effectue la transformation la plus générale, en posant d'abord $x = f(z)$, puis $y = \mathrm{V}(z)u$, en désignant par H_0 le semi-invariant relatif à la transformée, on a

$$\mathrm{H}_0 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^4 \left\{ \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \mathrm{H} - \frac{n+1}{6}\left[\frac{dz}{dx}\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right] \right\}.$$

5. Si l'on veut obtenir une transformée pour laquelle H_0 soit nul, on doit intégrer l'équation

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \mathrm{H} - \frac{n+1}{6}\left[\frac{dz}{dx}\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right] = 0,$$

qui, en posant

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\omega^2},$$

---

(1) Hermite, *Second Mémoire sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 25).

se réduit à une équation linéaire du second ordre. Cette équation étant intégrée et la substitution $x = f(z)$ ayant été déterminée de telle sorte que H soit nul, faisons un changement de fonction de telle sorte que le second terme de l'équation disparaisse; l'invariant H demeurera nul, et sa valeur montre que, B étant nul, C l'est également. On obtient donc une transformée dans laquelle le deuxième terme disparaît ainsi que le troisième, et il suffit, pour opérer cette réduction, d'intégrer d'abord une équation linéaire du second ordre, puis d'effectuer une quadrature.

6. Comme application de ce qui précède, considérons l'équation linéaire du troisième ordre. En appelant I l'invariant de cette équation, dont j'ai donné la valeur dans ma précédente Communication, on a

$$I = \Theta - \tfrac{3}{2}H'.$$

Quand $I = 0$, on voit que, si H est nul, il en est de même de Θ; donc les équations linéaires du troisième ordre, pour lesquelles l'invariant I est nul, sont réductibles à l'équation type

$$\frac{d^3u}{dz^3} = 0; \tag{1}$$

d'où les conséquences suivantes, que j'avais, du reste, énoncées :

1° L'intégration de ces équations se ramène à l'intégration d'une équation du second ordre.

2° Les intégrales de l'équation (1) étant respectivement $1, z, z^2$, quantités entre lesquelles a lieu l'identité

$$(z)^2 = z^2 \times 1,$$

il y a entre les intégrales d'une équation dont l'invariant I est nul une relation homogène du second degré et à coefficients constants.

3° Réciproquement, si une pareille relation existe entre les intégrales d'une équation du second ordre, on peut la mettre sous la forme

$$uv - w^2 = 0,$$

u, v et w désignant trois de ces intégrales convenablement choi-

sies. Par une transformation générale, on peut donc obtenir une équation dont les intégrales soient 1, z et z^2; en d'autres termes, l'équation est réductible au type

$$\frac{d^3u}{dz^3} = 0,$$

et son invariant I est identiquement nul.

SUR L'INTÉGRALE $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. VII; 1879.

I.

1. L'intégration par parties donne, en posant

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \ldots \pm \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n},$$

la relation suivante

$$(1) \qquad \int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} = e^{-x}F(x) \mp 1.2\ldots n \int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x^{n+1}}.$$

La série que l'on obtient en faisant croître indéfiniment n dans le polynôme $F(x)$ est nécessairement divergente pour toute valeur de x, quelque grande qu'on la suppose. Néanmoins, pour de grandes valeurs de la variable, elle peut, en ne tenant compte que des premiers termes, fournir une valeur très approchée de l'intégrale considérée [1].

Je me propose, dans la Note qui suit, d'obtenir le développement en fractions continues du polynôme $F(x)$.

2. En posant, pour abréger, $N = \pm 1.2.3\ldots n$, on a

$$F(x) = e^x\left(\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} + N\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x^{n+1}}\right),$$

d'où

$$(2) \qquad F'(x) = F(x) - \frac{1}{x} - \frac{F}{x^{n+1}}.$$

[1] Relativement à ces séries demi-convergentes, *voir* la Note de M. Hermite *Sur l'intégrale* $\int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^a}{1-z}\,dz$, insérée dans les *Actes de l'Académie royale de Turin* (17 novembre 1878).

Soit $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ une réduite du polynôme $F(x)$ *dont le dénominateur soit d'un degré* $m \overline{\overline{<}} \frac{n}{2}$. On a

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}}\right) \ [1],$$

d'où

$$F'(x) = \frac{\varphi'(x)f(x) - f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} + \left(\frac{1}{x^{2m+2}}\right),$$

ou encore, en vertu de la relation (2), et en remarquant que $2m$ *est au plus égal à* n,

$$\frac{\varphi'(x)f(x) - f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}}\right),$$

ou encore

$$(3) \qquad x[\varphi'(x)f(x) - f'(x)\varphi(x) - \varphi(x)] + f^2(x) = A,$$

A désignant une quantité constante.

3. Formons maintenant l'équation linéaire du second ordre $My'' - Ny' + Py = 0$, qui a pour solutions

$$y_1 = f(x) \qquad \text{et} \qquad y_2 = \varphi(x)e^{-x} - f(x)\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x};$$

on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx}\log\Omega, \qquad \text{où} \qquad \Omega = y'_1y_2 - y'_2y_1.$$

Or, un calcul facile donne, en tenant compte de la relation (3),

$$\Omega = \frac{Ae^{-x}}{x};$$

on a donc

$$\frac{N}{M} = -\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

[1] Je désigne généralement, et en faisant abstraction des valeurs des coefficients, par $\left(\frac{1}{x^p}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme en $\frac{1}{x^p}$.

d'où il suit que le polynôme $f(x)$ satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$(4)\qquad xy'' + (x+1)y' - my = 0,$$

dont une seconde solution est

$$u = \varphi(x)e^{-x} - f(x)\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}.$$

Le développement en série donne aisément

$$f(x) = x^m + m^2 x^{m-1} + \frac{m^2(m-1)^2}{1.2}x^{m-2}$$
$$+ \frac{m^2(m-1)^2(m-2)^2}{1.2.3}x^{m-3} + \ldots + 1.2.3\ldots m.$$

4. En dérivant m fois de suite l'équation (4) il vient

$$xy^{(m+2)} + (x+m+1)y^{(m+1)} = 0,$$

d'où, en désignant par B une quantité constante,

$$y^{(m+1)} = \mathrm{B}\frac{e^{-x}}{x^{m+1}},$$

et, par suite,

$$y = \frac{\mathrm{B}}{1.2.3\ldots m}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}\,dz;$$

c'est une solution particulière de l'équation (4), et, comme elle ne renferme pas de termes entiers en x, sa valeur est précisément la fonction que j'ai désignée précédemment par u.

On a donc, en modifiant un peu les notations déjà employées et en mettant en évidence le degré du polynôme $f(x)$,

$$u_m - \varphi_m(x)e^{-x} - f_m(x)\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} = \frac{\mathrm{B}}{1.2.3\ldots m}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}\,dz:$$

en y faisant $x=0$, on en déduit

$$\frac{\mathrm{B}}{1.2.3\ldots m} = -f_m(0) = -1.2.3\ldots m = -m!.$$

et la formule précédente devient

$$(5)\quad u_m = \varphi_m(x)e^{-x} - f_m(x)\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} = -m!\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}\,dz.$$

5. En dérivant l'équation précédente, on a

$$u'_m = m!\,m\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^{m-1}}{z^{m+1}} = -\frac{m!\,m}{x}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^{m-1}[(z-x)-z]}{z^{m+1}}\,dz$$
$$= -\frac{m!\,m}{x}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}\,dz$$
$$+ \frac{m!\,m}{x}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^{m-1}}{z^m}\,dz = \frac{mu_m - m^2u_{m-1}}{x};$$

en combinant cette valeur de u'_m avec l'équation (4) à laquelle satisfait u_m, on obtient la relation

$$(6)\qquad u_{m+1} = (x+2m+1)u_m - m^2u_{m-1},$$

d'où l'on déduit les deux suivantes

$$(7)\qquad f_{m+1}(x) = (x+2m+1)f_m(x) - m^2 f_{m-1}(x)$$

et

$$(8)\qquad \varphi_{m+1}(x) = (x+2m+1)\varphi_m(x) - m^2\varphi_{m-1}(x).$$

6. Ayant, comme il est facile de le voir,

$$u_0 = -\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} \quad \text{et} \quad u_1 = e^{-x} - (x+1)\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x},$$

on déduit de la formule (6) le développement suivant

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} = e^{-x}\cfrac{1}{x+1-\cfrac{1}{x+3-\cfrac{1}{\cfrac{x+5}{4}-\cfrac{\frac{1}{4}}{\cfrac{x+7}{9}-\cfrac{\frac{1}{9}}{\cfrac{x+9}{9}-\cfrac{\frac{1}{16}}{x+\ldots}}}}}},$$

dont la loi est évidente.

Les diverses réduites de cette expression sont

$$e^{-x}\frac{1}{x+1},\quad e^{-x}\frac{x+3}{x^2+4x+2},\quad e^{-x}\frac{x^2+8x+11}{x^3+9x^2+18x+6},\quad \ldots,$$

l'expression générale de la $m^{\text{ième}}$ réduite étant $e^{-x}\frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)}$; les formules (7) et (8) permettent d'ailleurs de calculer successivement les valeurs des polynômes $\varphi_m(x)$ et $f_m(x)$.

7. Comme la fraction continue précédente provient d'une série divergente, il est nécessaire de prouver qu'elle est convergente et a pour limite $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$. A cet effet, je remarque que de l'équation (5) on déduit

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} = e^{-x}\frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)} + \frac{m!}{f_m(x)}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}\,dx.$$

De là résulte immédiatement que les diverses réduites dont l'expression générale est $e^{-x}\frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)}$ vont toujours en croissant en restant inférieures à la valeur de l'intégrale cherchée. Pour démontrer qu'elles ont cette intégrale pour limite, il suffit de faire voir que la limite de $\frac{m!}{f_m(x)}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m\,dz}{z^{m+1}}$ est nulle quand m croît indéfiniment.

Je ferai observer d'abord que le facteur $\frac{m!}{f_m(x)}$ tend vers zéro; puis, en désignant par A une quantité très grande et arbitrairement choisie, je mettrai l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m\,dz}{z^{m+1}}$ sous la forme suivante

$$\int_x^A \frac{e^{-z}(z-x)^m\,dz}{z^{m+1}} + \int_A^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m\,dz}{z^{m+1}}.$$

Relativement à la première intégrale, comme dans l'intervalle considéré $\frac{z-x}{z}$ est toujours plus petit que $1-\frac{x}{A}$, cette intégrale est plus petite que $\left(1-\frac{x}{A}\right)^m\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$; donc, quelque grand que soit A, elle tend vers zéro quand m augmente indéfiniment. La

seconde intégrale est évidemment plus petite que $\int_A^\infty e^{-z}\,dz$, c'est-à-dire que e^{-A}; donc, pour une valeur suffisamment grande de A, elle est aussi petite que l'on veut. Ainsi, la fraction continue, quoique provenant d'une série essentiellement divergente, est elle-même convergente et a pour limite $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$.

8. Comme application, faisons $x = 1$; les réduites suivantes :

$$\frac{4}{7e},\quad \frac{20}{34e},\quad \frac{124}{209e},\quad \frac{920}{2546e},\quad \frac{7940}{13327e}$$

seront des valeurs approchées de l'intégrale $\int_1^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$; en les réduisant en décimales, on obtient les expressions suivantes

$$0{,}21;\quad 0{,}216;\quad 0{,}218;\quad 0{,}2189;\quad 0{,}2192.$$

La véritable valeur est 0,2193839.

En faisant $x = 4$, la deuxième réduite donne pour valeur approchée de l'intégrale $\int_4^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$ la valeur $\frac{7}{34e^4}$, ou, en décimales, 0,00377, dont les trois premiers chiffres significatifs sont exacts.

9. Dans sa *Mécanique céleste* (t. IV, Liv. X), Laplace a donné le développement en fraction continue de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx$. Sa démonstration, reposant sur l'emploi d'une série divergente, est, comme l'a fait remarquer Jacobi, entièrement inadmissible; ses résultats sont néanmoins exacts et ont été démontrés directement par l'illustre géomètre (1) allemand.

La méthode que j'ai développée ci-dessus, relativement à l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$, s'applique entièrement à l'intégrale considérée par Laplace, et elle montre d'une façon très nette comment, tout

(1) *De fractione continua, in quam integrale* $\int_x^\infty e^{-x^2}dx$ *evolvere licet* (*Journal de Crelle*, t. 12, p. 346).

en partant d'une série divergente, on peut néanmoins arriver à une fraction continue donnant la valeur de la fonction qu'il s'agissait de développer.

II.

1. J'ai montré que les diverses réduites $\frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)}$ de la série semi-convergente

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \frac{1.2.3}{x^4} + \frac{1.2.3.4}{x^5} + \ldots$$

avaient pour limite la transcendante $e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$.

On a d'ailleurs, en représentant par $\Pi(n)$ le produit $1.2\ldots(n-1)n$,

$$(1)\quad f_n(x) = \Pi(n)\left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2}x^3 + \ldots\right],$$

$$(2)\qquad x f'_n(x) = n f_n(x) - n^2 f_{n-1}(x)$$

et

$$(3)\qquad f_{n+1}(x) = (x + 2n + 1) f_n(x) - n^2 f_{n-1}(x).$$

La série $\mathrm{F}(x)$ peut se mettre sous la forme suivante

$$\int_{-\infty}^0 e^z\,dz\,\frac{1}{x} + \int_{-\infty}^0 e^z z\,dz + \frac{1}{x^3}\int_{-\infty}^0 e^z z^2\,dz + \ldots + \frac{1}{x^{m+1}}\int_{-\infty}^0 e^z z^m\,dz + \ldots.$$

Des principes posés par M. Heine, il résulte immédiatement que, $\psi(x)$ désignant un polynôme quelconque d'un degré inférieur à n, on a

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^0 e^x f_n(x)\,\psi(x)\,dx = 0,$$

d'où l'on conclut, puisque e^x est toujours positif, que l'équation

$$f_n(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et inégales, elles sont d'ailleurs évidemment négatives.

2. En particulier, on déduit de l'équation (4) la relation suivante, où n et n' désignent deux nombres entiers différents,

$$(5)\qquad \int_{-\infty}^0 e^x f_n(x) f_{n'}(x)\,dx = 0.$$

Pour évaluer $\int_{-\infty}^0 e^x f_n^2(x)\,dx$, je remarque que, en intégrant par parties, on a

$$\int_{-\infty}^0 e^x f_n^2(x)\,dx = [e^x f_n^2(x)]_{-\infty}^0 - 2\int_{-\infty}^0 e^x f_n(x) f'_n(x)\,dx;$$

l'intégrale qui figure dans le second membre de cette identité est nulle en vertu de la relation (4); on déduit donc de la relation (1)

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^0 e^x f_n^2(x)\,dx = \Pi^2(n).$$

Des formules précédentes résulte, comme on sait, le développement d'une fonction quelconque $\Phi(x)$ au moyen des polynômes $f_n(x)$.

Si l'on pose, en effet,

$$\Phi(x) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 f_1(x) + \mathrm{A}_2 f_2(x) + \ldots + \mathrm{A}_n f_n(x) + \ldots,$$

on a

$$\mathrm{A}_n = \frac{\int_{-\infty}^0 e^x\,\Phi(x) f_n(x)\,dx}{\Pi^2(n)}.$$

3. Soit, comme application,

$$\Phi(x) = e^{tx}.$$

On aura

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} f_n(x)\,dx \\
&\quad = \Pi(n)\int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)}\left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2}x^3 + \ldots\right] \\
&\quad = \Pi(n)\left[\frac{1}{1+t} - \frac{n}{(1+t)^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{(1+t)^3} + \ldots\right] = \Pi(n)\,\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},
\end{aligned}$$

d'où le développement suivant

$$e^{tx} = \frac{1}{1+t} + \frac{t}{(1+t)^2} f_1(x) + \frac{t^2}{(1+t)^3} \frac{f^2(x)}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \frac{f_n(x)}{\Pi(n)} + \ldots,$$

ou encore, en posant $t = \frac{z}{1-z}$,

$$(7) \qquad \frac{e^{\frac{zx}{1-z}}}{1-z} = 1 + z f_1(x) + \frac{z^2}{1.2} f_2(x) + \ldots + \frac{z^n}{\Pi(n)} f_n(x) + \ldots,$$

développement qui subsiste évidemment pour toute valeur de z dont le module est plus petit que l'unité.

Les diverses propriétés des polynômes $f_n(x)$ se déduiraient du reste très facilement de l'équation précédente en employant les méthodes données par Legendre relativement aux fonctions X_n.

On a, par exemple, l'identité

$$e^x \sum \frac{z^n f_n(x)}{\Pi(n)} \sum \frac{t^m f_m(x)}{\Pi(m)} = \frac{e^{x\left(\frac{z}{1-z} + \frac{t}{1-t} + 1\right)}}{(1-z)(1-t)} = \frac{e^{\frac{1-tz}{(1-t)(1-z)}}}{(1-t)(1-z)},$$

d'où, en intégrant,

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \sum \frac{z^n f_n(x)}{\Pi(n)} \sum \frac{t^m f_m(x)}{\Pi(m)}\, dx = \frac{1}{1-tz} = 1 + tz + t^2z^2 + \ldots,$$

et de là résultent immédiatement les formules (5) et (6).

4. De la formule

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+t)} f_n(x)\, dx\, \Pi(n)\, \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},$$

on déduit, en dérivant m fois par rapport à t,

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+t)} x^m f_n(x)\, dx = \Pi(n)\, D^m \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{0} e^x x^m f_n(x)\, dx = \Pi_n \left[D^m \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \right]_{t=0},$$

et, en supposant $m \gtreqless n$,

$$\int_{-\infty}^{0} e^x x^m f_n(x)\, dx = (-1)^{m-n} \frac{\Pi^2(m)}{\Pi(m-n)},$$

d'où le développement suivant

$$x^m = (-1)^m \Pi(m) \left[f_0(x) - m f_1(x) + \frac{m(m-1)}{1^2.2^2} f_2(x) \right.$$
$$\left. - \frac{m(m-1)(m-2)}{1^2.2^2.3^2} f_3(x) - \ldots \right].$$

Cette formule, on le voit, se déduit de la formule (1) (où d'ailleurs se trouve le nombre entier n au lieu du nombre m) en changeant $f_n(x)$ en $(-x)^n$ et x^n en $(-1)^n f_n(x)$.

De là résulte que, si une fonction quelconque $\Phi(x)$, ordonnée suivant les puissances croissantes de x, s'exprime au moyen des polynômes $f_n(x)$ par la formule symbolique suivante

$$\Phi(x) = \Theta(f),$$

où, dans le second membre, la puissance $n^{\text{ième}}$ de f doit être remplacée par f_n, on a aussi symboliquement

$$\Phi(-x) = \Theta(-f).$$

SUR LA

RÉDUCTION EN FRACTIONS CONTINUES

D'UNE FONCTION
QUI SATISFAIT A UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE
A COEFFICIENTS RATIONNELS.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. VIII; 1879.

1. Soit z une fonction satisfaisant à l'équation linéaire

$$\text{(1)} \qquad Wz' = Vz + U,$$

où U, V et W sont des polynômes entiers en x.

Supposons, pour fixer les idées, que z soit développable suivant les puissances croissantes de x, et proposons-nous de former les réduites successives de la fonction z.

En désignant par f_n le polynôme du degré n qui est le dénominateur de la réduite de rang n, posons

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \text{ (1)};$$

on en déduit

$$z' = \frac{\varphi_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + \left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right),$$

d'où, en portant ces valeurs dans l'équation (1),

$$U + V\frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{V}{x^{2n+1}} + \frac{W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n)}{f_n^2} - \frac{W}{x^{2n+2}} = 0$$

et

$$f_n^2 U f_n \varphi_n V - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = f^2\left[V\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) + W\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right)\right].$$

(1) Je désigne ici, comme dans tout ce qui suit, par $\left(\frac{1}{x^p}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de x^p.

Le premier membre de cette relation est un polynôme entier; le second membre est de l'ordre de la fonction $V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et cet ordre, qui est indépendant du nombre n, indique le degré de ce polynôme.

En désignant par A_n un coefficient indépendant de x et dont je fixerai plus tard la valeur, je puis donc poser

$$\text{(2)} \qquad f_n^2 U + f_n \varphi_n V - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = A_n \Theta_n,$$

où Θ_n est un polynôme entier dont le degré est marqué par l'ordre de la fonction

$$V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. Formons maintenant l'équation différentielle du second ordre

$$My'' - Ny' + Py = 0,$$

qui a pour solutions

$$y_1 = f_n \quad \text{et} \quad y_2 = e^{-\int \frac{V}{W}dx}(\varphi_n - f_n z).$$

En posant, pour abréger,

$$\omega = y'_1 y_2 - y'_2 y_1,$$

on a, d'après une formule connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx}\log\Omega;$$

or, un calcul facile donne

$$\omega = e^{-\int \frac{V}{W}dx}\frac{f_n^2 U + f_n \varphi_n V - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n)}{W},$$

et, en tenant compte de la relation (2),

$$\omega = e^{-\int \frac{V}{W}dx}\frac{A_n \Theta_n}{W},$$

d'où

$$\frac{N}{M} = \frac{\Theta'_n}{\Theta_n} - \frac{W'}{W} - \frac{V}{W};$$

et il résulte de là immédiatement que l'équation cherchée est de la forme

$$W\Theta_n y'' + [(V + W')\Theta_n - W\Theta'_n]y' + K_n y = 0,$$

où K_n désigne un polynôme entier dont le degré est indépendant de n.

Je mettrai cette équation sous la forme

$$Wy'' + \left(V + W' - W\frac{\Theta'_n}{\Theta_n}\right)y' + \frac{K_n}{\Theta_n}y = 0$$

ou, pour abréger,

$$(3) \qquad Wy'' + W_0 y' + W_1 y = 0.$$

Je ferai remarquer que, quand cette équation est connue, Θ_n est connu à un facteur numérique près; on peut donc alors poser

$$\Theta_n = y H_n \quad (^1),$$

où H_n est un polynôme déterminé et λ une quantité indépendante de x.

3. Je ne m'occuperai pas ici du problème qui consiste à trouver les valeurs des coefficients des polynômes Θ_n et K_n, problème qui présente d'assez grandes difficultés et que j'ai déjà essayé de traiter, particulièrement dans deux Notes *Sur la réduction en fractions continues d'une classe assez étendue de fonctions* et *Sur le développement en fractions continues de* $e^{F(x)}$, publiées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (janvier 1878).

Je suppose cette équation formée.

Cela posé, on sait que l'on a entre les termes de deux réduites consécutives la relation

$$(4) \qquad \varphi_{n+1} f_n - f_{n+1}\varphi_n = A_n,$$

A_n étant une quantité ne dépendant que du nombre n, et que, du reste, on peut choisir arbitrairement.

(1) H_n est déterminé par l'équation $\dfrac{H'_n}{H_n} = \dfrac{V + W' - W_0}{W}$.

On a de même

$$\varphi_{n-1} f_n - f_{n-1}\varphi_n = -A_{n-1},$$

et l'on déduit de là

$$(A_{n-1}\varphi_{n+1} + A_n\varphi_{n-1})f_n = (A_{n-1}f_{n+1} + A_n f_{n-1})\varphi_n,$$

d'où, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = P_{n-1},$$

les deux relations

$$(5) \qquad f_{n+1} - Q_{n-1} f_n + P_{n-1} f_{n-1} = 0$$

et

$$(6) \qquad \varphi_{n+1} - Q_{n-1} f_n + P_{n-1} f_{n-1} = 0,$$

où Q_n désigne un polynôme du premier degré en x.

Il est à remarquer que, quand on se donne arbitrairement la quantité P_n en fonction du nombre entier n, les termes des réduites ne sont déterminés qu'à un facteur près purement numérique. Le signe des termes des réduites de rang impair demeure même indéterminé, car, en changeant ce signe, on voit que, toutes les quantités A_n changeant également de signe, P_n conserve la même valeur.

J'écris maintenant la relation (2) sous la forme suivante :

$$(Uf_n + V\varphi_n - W\varphi'_n)f_n + Wf'_n\varphi_n = A_n\Theta_n.$$

En éliminant Θ_n entre cette relation et l'identité (4), il vient

$$(Wf'_n + \Theta_n f_{n+1})\varphi_n = (W\varphi'_n - Uf_n - V\varphi_n + \Theta_n\varphi_{n+1})f_n.$$

On en déduit, en désignant par Ω_n un polynôme entier dont le degré est indépendant de n, les deux équations suivantes :

$$(7) \qquad Wf'_n = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1},$$

$$(4) \qquad W\varphi'_n = Uf_n + (V + \Omega_n)\varphi_n - \Theta_n\varphi_{n+1}.$$

4. Il s'agit maintenant de déterminer les polynômes Ω_n et Q_n.

A cet effet, je déduis de l'équation (7) la valeur de f''_n, et je porte la valeur ainsi obtenue, ainsi que celle de f'_n, dans l'équation (3); après quelques réductions faciles, on obtient la relation

$$\begin{aligned}\Theta_n^2\Theta_{n+1}f_{n+2} - \Theta_n^2(\Omega_n + \Omega_{n+1} + \mathrm{V})f_{n+1}\\ + [\Omega_n\Theta_n(\Omega_n + \mathrm{V}) + \mathrm{W}(\Omega'_n\Theta_n - \Theta'_n\Omega_n) + \mathrm{WK}_n]f_n = 0;\end{aligned}$$

en la comparant à l'identité

$$f_{n+2} - \mathrm{Q}_n f_{n+1} + \mathrm{P}_n f_n = 0,$$

on en déduit

$$\mathrm{Q}_n = \frac{\Omega_{n+1} + \Omega_n + \mathrm{V}}{\Theta_{n+1}} \tag{9}$$

et

$$\Omega_n\Theta_n(\Omega_n + \mathrm{V}) + \mathrm{W}(\Omega'_n\Theta_n - \Theta'_n\Omega_n) + \mathrm{WK}_n - \mathrm{P}_n\Theta_n^2\Theta_{n+1} = 0. \tag{10}$$

Posons

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{\mathrm{W}}dx},$$

d'où

$$\Omega_n = \mathrm{W}\frac{u'}{u}; \tag{11}$$

en remplaçant, dans l'équation précédente, Ω_n par cette valeur, on obtiendra, toutes réductions faites, l'équation

$$\mathrm{W}u'' + \mathrm{W}_0 u' + \left(\mathrm{W}_1 - \frac{\mathrm{P}_n\Theta_n\Theta_{n+1}}{\mathrm{W}}\right)u = 0, \tag{12}$$

qui ne diffère, on le voit, de l'équation (3) que par l'addition du terme

$$-\frac{\mathrm{P}_n\Theta_n\Theta_{n+1}}{\mathrm{W}}u.$$

5. Quand on se donne l'équation (3), comme Θ_n n'est pas entièrement déterminé, je poserai, comme plus haut,

$$\Theta_n = \lambda \mathrm{H}_n,$$

λ étant une quantité indépendante de x et inconnue.

L'équation (12) deviendra alors

$$\mathrm{W}u'' + \mathrm{W}_0 u' + \left(\mathrm{W}_1 - \frac{\lambda^2\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n-1}}{\mathrm{W}}\right)u = 0. \tag{13}$$

La forme du polynôme Ω_n étant connue, on déterminera facilement les coefficients inconnus de la fonction u, ainsi que la constante λ^2; on choisira arbitrairement la valeur de λ que l'on en déduit (si l'on prenait la valeur qui est de signe contraire, cela n'aurait d'autre effet que de changer les signes des termes des réduites de rang impair), et la formule (11) donnera la valeur de Ω_n.

6. Comme application des formules qui précèdent, je prendrai pour exemple le développement de la fonction

$$z = e^x\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x},$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$xz' = xz - 1,$$

et que j'ai étudiée dans une Note [1] présentée récemment à la Société.

Nous avons, dans ce cas,

$$\mathrm{V} = \mathrm{W} = x,$$

et l'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est

$$xy'' + (x+1)y' - ny = 0.$$

On en conclut que H_n est une constante que l'on peut prendre égale à l'unité; je poserai

$$\mathrm{P}_n = (n+1)^2.$$

Les équations (7) et (9) deviennent respectivement

$$xf'_n = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1} \tag{14}$$

et

$$\mathrm{Q}_n = \frac{\Omega_{n+1} + \Omega_n + x}{\Theta_{n+1}}. \tag{15}$$

---

[1] *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$ (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 72).

La formule (14) montre, d'ailleurs, que Ω_n est un polynôme du premier degré en x qui ne peut se réduire à une constante ; on en conclut que u est de la forme $e^{\alpha x} x^\beta$, où α est différent de zéro.

L'équation (13) devient, dans ce cas,

$$x u'' + (x+1) u' - \left[n + \frac{\lambda^2 (n+1)^2}{x}\right] u = 0;$$

en y substituant la valeur de u, on obtient, toutes réductions faites,

$$\alpha(\alpha+1)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha + \beta - n)x + [\beta^2 - (n+1)^2\lambda^2] = 0.$$

Comme α est essentiellement différent de zéro, on en déduit

$$\alpha = -1, \qquad \beta = -(n+1), \qquad \lambda^2 = 1,$$

et, en prenant la valeur négative de λ,

$$\lambda = \Theta = -1,$$

puis

$$\Omega_n = x\frac{u'}{u} = -x\left(1 + \frac{n+1}{x}\right) = -(x+n+1).$$

Les formules (14) et (15) donnent, par suite,

$$x f'_n = f_{n+1} - (x+n+1) f_n$$

et

$$Q_n = \frac{x - (x+n+1) - (x+n+2)}{-1} = x + 2n + 3,$$

d'où l'identité

$$f_{n+2} = (x+2n+3) f_{n+1} - (n+1)^2 f_n.$$

Ce sont précisément les relations que, par une voie différente, j'avais trouvées dans la Note citée plus haut.

SUR LA

RÉDUCTION EN FRACTION CONTINUE

D'UNE FRACTION QUI SATISFAIT A UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE A COEFFICIENTS RATIONNELS.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCVIII; 1879.

Je me suis déjà à plusieurs reprises occupé de cette question, notamment dans une Note insérée dans le *Bulletin de la Soc. math.* (t. VIII, p. 21); mais, bien que l'objet principal de mes recherches soit résolu par l'analyse que j'y ai employée, je n'ai pas énoncé explicitement le résultat et je demanderai la permission de revenir sur ce sujet.

Soit z une fonction, développable suivant les puissances décroissantes de x, qui satisfait à l'équation

$$W z' = 2Vz + U,$$

où U, V et W désignent des polynômes entiers; sa réduction en fraction continue se ramène à la recherche de deux polynômes dont les coefficients dépendent du degré n du dénominateur f_n de la réduite de rang n et dont l'un Θ_n est du degré de la fonction $\frac{V}{x} + \frac{W}{x^2}$, l'autre Ω_n étant d'un degré supérieur d'une unité. Ces polynômes sont déterminés par les conditions suivantes, à savoir que $\Omega_n + \Omega_{n+1}$ soit divisible par Θ_{n+1} et $\Omega_n^2 - V^2 - P_{n+1}\Theta_n\Theta_{n+1}$ par W; P_{n+1} désigne un coefficient variable avec n et dont la valeur est prise arbitrairement; on a donc

$$\Omega_n^2 - V^2 - P_{n+1}\Theta_n\Theta_{n+1} = WR_n \tag{1}$$

et

$$\Omega_{n+1} + \Omega_n = \Theta_{n+1} Q_{n+1}, \tag{2}$$

R_n et Q_{n+1} désignant deux polynômes entiers dont le dernier est du premier degré. Cela posé, on a les formules suivantes :

$$f_{n+1} - Q_n f_n + P_n f_{n-1} = 0$$

et

$$(3)\qquad W\Theta_n f_n'' + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta_n']f_n' + [\Theta_n(\Omega_n - V) - \Theta_n(R_n + \Omega_n' - V')]f_n = 0.$$

Des relations (1) et (2) on déduit d'ailleurs l'identité

$$\Theta_{n+1}[(\Omega_{n+1} - \Omega_n)Q_{n+1} - (P_{n+1}\Theta_{n+2} - P_{n+1}\Theta_n)] = W(R_{n+1} - R_n),$$

qui se décompose en les deux suivantes

$$(4)\qquad (\Omega_{n+1} - \Omega_n)Q_{n+1} - (P_{n+1}\Theta_{n+2} - P_{n+1}\Theta_n) = WT_n$$

et

$$(5)\qquad R_{n+1} - R_n = \Theta_{n+1}T_n,$$

où T_n désigne un polynôme entier.

Comme application, soit d'abord $z = \log\frac{1+x}{1-x}$, d'où $(1-x^2)z' = 2$; dans ce cas, $W = 1 - x^3$ et $V = 0$. Θ_n est donc une constante α_n : je ferai $P_n = n^2$ et poserai $\Omega_n = a_n x + b_n$. L'équation (3) devient

$$(1 + x^2)f_n'' - 2xf_n' - (R_n + a_n)f_n = 0,$$

d'où l'on voit que $R_n = -n(n+1) - a_n$; l'identité (1) devient alors

$$(a_n x + b_n)^2 - (n+1)^2\alpha_n\alpha_{n+1} = (x^2 - 1)(n^2 + n + a_n);$$

on déduit de là $b_n = 0$, $a_n^2 - a_n - n(n+1) = 0$; ce qui donne les deux valeurs suivantes de a_n : $a_n = -n$ (une discussion facile montre qu'elle doit être rejetée) et $a_n = n+1$; puis ensuite $\alpha_n\alpha_{n+1} = 1$, d'où, si l'on prend $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n \doteq 1$ et enfin, en vertu de la formule (2), $Q_{n+1} = (2n+3)x$, ce qui donne la formule de récurrence $f_{n+1} - (2n+1)xf_n + n^2 f_{n-1} = 0$.

Soit, en second lieu, la fonction $z = e^{-\frac{2}{x} - \frac{g}{x^2}}$, qui satisfait à l'équation

$$x^3 z' = 2(x+g)z;$$

on a, dans ce cas,

$$W = x^3 \quad\text{et}\quad V = x + g.$$

Θ_n est donc un polynôme du premier degré $\alpha_n x + \beta_n$ et Ω_n un polynôme du second degré; je ferai $P_n = 1$. Soit ρ le coefficient de x^2 dans Ω_n; l'équation (1) montre que ρ^2 est le coefficient de x dans R_n et, en égalant à zéro le coefficient de x^{n+2} dans le premier membre de l'identité (3), on obtient l'équation

$$\rho^2 + \rho - n(n+1) = 0;$$

la racine $\rho = n$, comme on le prouve aisément, est à rejeter : on a donc

$$\rho = -(n+1),$$

et Ω_n est de la forme $-(2n+1)x^2 + a_n x + b_n$.

On tire de la relation (5) $T_n = \frac{2n+3}{\alpha_{n+1}}$; et, la relation (4) montrant que Q_{n+1} est la partie entière du quotient de $T_n x^3$ par $\Omega_{n+1} - \Omega_n$, on en déduit

$$Q_{n+1} = -\frac{2n+3}{\alpha_{n+1}}(x + a_{n+1} - a_n).$$

L'identité (2) donne alors les relations

$$(6)\qquad (2n+3)\beta_{n+1} = \alpha_{n+1}[(2n+2)a_n - (2n+4)a_{n+1}]$$

et

$$(7)\qquad b_{n+1} + b_n = (a_{n+1} - a_n)[(2n+4)a_{n+1} - (2n+2)a_n].$$

Enfin, de l'identité (2) on déduit les relations suivantes

$$(8)\qquad \alpha_n\alpha_{n+1} = a_n^2 - 2(n+1)b_n - 1,$$

$$(9)\qquad \alpha_n\beta_{n+1} + \beta_n\alpha_{n+1} = 2a_n b_n - 2g,$$

$$(10)\qquad \beta_n\beta_{n+1} = b_n^2 - g^2$$

et

$$R_n = (n+1)^2 x - 2(n+1)a_n.$$

Cela posé, on voit que, si l'on connaît les valeurs de α_n, β_n, a_n et b_n, les valeurs de α_{n+1} et de β_{n+1} pourront se tirer des formules (8) et (10); la formule (6) permettra ensuite de calculer a_{n+1}, et la formule (7), b_{n+1}. On saura donc calculer, de proche en proche et par voie récurrente, les polynômes Q_n, dont la valeur est donnée par la formule

$$Q_n = -\frac{2n+1}{\alpha_n}(x + a_n - a_{n-1}),$$

puis les dénominateurs et les numérateurs des réduites par les formules

$$f_{n+1} - Q_n f_n + f_{n-1} = 0,$$
$$\varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + \varphi_{n-1} = 0.$$

REMARQUES

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. VIII; 1879.

1. En désignant par P, Q, R des fonctions données de x et par z et u des fonctions arbitraires de cette variable, posons

$$Pz'' + Qz' + Rz = Z$$

et

$$Pu'' + Qu' + Ru = U.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$S = e^{\int \frac{Q}{P} dx},$$

on déduit des équations précédentes

$$\begin{aligned}\frac{S(Zu - Uz)}{P} &= S(uz'' - zu'') + \frac{SQ}{P}(uz' - zu') \\ &= S(uz'' - zu'') + S'(uz' - zu'),\end{aligned}$$

d'où, en intégrant,

$$\text{(A)} \qquad \int \frac{S(Zu - Uz)dx}{P} = S(uz' - zu').$$

2. En particulier, si u désigne une solution de l'équation

$$\text{(1)} \qquad Py'' + Qy' + Ry = 0,$$

on a l'identité suivante :

$$\text{(B)} \qquad \int \frac{SZu\,dx}{P} = S(uz' - zu').$$

Soit v une solution quelconque de l'équation (1); α désignant un paramètre arbitraire contenu dans les fonctions P, Q, R (ce paramètre peut, du reste, être la variable indépendante x elle-même), si l'on pose

$$\frac{dv}{d\alpha} = z,$$

on voit que z satisfait à la relation

$$Pz'' + Qz' + Rz = -\left(\frac{dP}{d\alpha}v'' + \frac{dQ}{d\alpha}v' + \frac{dR}{d\alpha}v\right).$$

Si, dans l'équation (B), on remplace z par $\frac{dv}{d\alpha}$ et Z par sa valeur, il vient

$$\text{(C)} \qquad \int \frac{S}{P}\left(\frac{dP}{d\alpha}v'' + \frac{dQ}{d\alpha}v' + \frac{dR}{d\alpha}v\right) u\,dx = S\left(\frac{dv}{d\alpha}\frac{du}{dx} - u\frac{d^2v}{d\alpha\,dx}\right).$$

3. En désignant toujours par u et v deux solutions quelconques de l'équation (1), posons

$$z = uv;$$

il est aisé de voir que z satisfait à l'équation

$$Pz'' + Qz' + Rz = 2Pu'v' - Ruv;$$

l'équation (B) donne, dans ce cas, la relation suivante :

$$\text{(D)} \qquad \int \frac{S(2Pu'v' - Ruv)u\,dx}{P} = Su^2v'.$$

4. Il serait facile de multiplier le nombre de ces formules ; je me contente ici de transcrire celles dont l'application est la plus fréquente, me réservant d'y renvoyer lorsque j'aurai à en faire usage dans les Communications que j'aurai l'occasion de présenter à la Société.

SUR LES

COUPURES DES FONCTIONS.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCIX; 1884.

Considérons l'intégrale double

$$F(z) = \iint \frac{f(x, y, z)}{g(x, y) - z}\,dx\,dy$$

dont le champ est une aire A que, pour fixer les idées, je supposerai simple et où $f(x, y, z)$ et $g(x, y)$ désignent des fonctions réelles qui, quel que soit z, sont finies et bien déterminées dans le champ d'intégration.

Si, pour certaines valeurs de z, la courbe $g(x, y) = z$ traverse le champ d'intégration, l'intégrale devient infinie, et la fonction $F(z)$, en général finie et déterminée, a pour coupure une portion K de l'axe des x.

Soit ΔF la différence des valeurs de la fonction aux deux bords de la coupure, en sorte que, z désignant une des valeurs réelles pour lesquelles $F(z)$ est discontinu et λ une quantité infiniment petite positive, on ait

$$\Delta F = F(z + \lambda i) - F(z - \lambda i);$$

en employant la méthode donnée par M. Hermite dans le cas des intégrales simples, un calcul facile donne l'expression suivante de cette différence

$$\Delta F = 2\pi i \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(x, y, z)}{g'_y(x, y)}\,dx,$$

où y doit être remplacé par sa valeur tirée de l'équation

$$g(x, y) = z;$$

si l'on considère la courbe représentée par cette équation, l'intégrale s'étend tout le long de la portion de cette courbe qui est comprise dans le champ d'intégration, et le facteur $\frac{dx}{g'_y(x,y)}$ doit être pris positivement.

Soit, comme application, la fonction

$$G(\alpha, \beta; a, b; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{ab} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{a(a+1)b(b+1)} z^2 + \ldots,$$

qui, pour $b = 1$, se réduit à la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, a, x)$.

Sous les conditions $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > \alpha$, $b > \beta$, on a

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{x^{\alpha-2}(1-x)^{a-\alpha-1} y^{\beta-2}(1-y)^{b-\beta-1}\,dx\,dy}{\frac{1}{xy} - z}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(b-\beta)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} G(\alpha, \beta; a, b; z).$$

La fonction G est ainsi définie pour tous les points du plan, sauf sur une coupure K allant du point $+1$ au point $+\infty$.

Le long de cette coupure, on a

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(b-\beta)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \Delta G$$
$$= 2i\pi \int_{\frac{1}{z}}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{a-\alpha-1} y^{\beta}(1-y)^{b-\beta-1}\,dx,$$

où y doit être remplacé par $\frac{1}{zx}$; en posant $x = \frac{1+(1-z)t}{t}$, l'égalité précédente devient

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(b-\beta)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \Delta G$$
$$= 2i\pi\, z^{1-a}(z-1)^{a+b-\alpha-\beta-1} \int_0^1 t^{b-\beta-1}(1-t)^{a-\alpha-1}[1-(1-z)t]^{\alpha-\beta}\,dt,$$

d'où

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta G = \dfrac{2i\pi\,\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ \qquad \times z^{1-a}(z-1)^{a+b-\alpha-\beta-1} F(b-\alpha, b-\beta, a+b-\alpha-\beta, 1-z). \end{cases}$$

L'étude de la fonction G, lorsqu'on la prolonge d'une façon con-

tinue, se ramène donc à l'étude du prolongement des fonctions élémentaires z^{μ}, $(1-z)^{\mu}$ et de la fonction hypergéométrique.

Celle-ci est, d'ailleurs, un cas particulier de la fonction G; en faisant $b = 1$, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta F(\alpha, \beta, a, z) = \dfrac{2i\pi\,\Gamma(a)}{\Gamma(1+a-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ \qquad \times z^{1-a}(z-1)^{a-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, 1+a-\alpha-\beta, -1\,z), \end{cases}$$

formule qui, bien qu'établie sous certaines restrictions, subsiste pour toutes les valeurs de α, β et a.

En particulier, on a

$$(1-z)^{-\mu} = F(\mu, 1, 1, z);$$

la formule précédente donne

$$\Delta F = \frac{2i\pi}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)};$$

d'ailleurs, un calcul direct donne

$$\Delta(1-z)^{-\mu} = 2i\pi \sin \mu\pi,$$

d'où la formule connue

$$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}.$$

La formule (1) donne, en permutant les lettres a et b, la relation élémentaire fondamentale

$$(3)\qquad \begin{cases} F(b-\alpha, b-\beta, a+b-\alpha-\beta, 1-z) \\ \quad = z^{a-b} F(a-\alpha, a-\beta, a+b-\alpha-\beta, 1-z), \end{cases}$$

et, en combinant cette relation avec la formule (2), on obtient aisément toutes les propriétés de la fonction F.

On peut trouver une autre expression de ΔF; en désignant, en effet, par m un nombre positif assez grand pour que $m+\alpha$ et $m+\beta$ soient positifs et par F_m l'ensemble des m premiers termes du développement de F (F_m peut se réduire à zéro), on a l'identité

$$F(\alpha, \beta, a, z) = F_m + \frac{\Gamma(\alpha) z^{m-1}}{\Gamma(1+a-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$
$$\times \int_0^1 \frac{x^{a-\alpha-\beta}(1-x)^{m+\alpha-1} F(a-\beta, \beta, 1+a-\alpha-\beta, x)\,dx}{x - \frac{z-1}{z}},$$

qui définit la fonction F pour tous les points du plan, sauf sur la coupure K.

Elle suppose seulement $1 + a - \alpha - \beta > 0$, et la formule connue (3) permet toujours, en introduisant un facteur de la forme $(1 - z)^\mu$, de supposer que cette condition est remplie.

La méthode de M. Hermite donne alors immédiatement

$$\Delta F = \frac{2i\pi\Gamma(a)}{\Gamma(1 + a - \alpha - \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$
$$\times (z - 1)^{a-\alpha-\beta} z^{\beta-a} F\left(a - \beta, 1 - \beta, 1 + a - \alpha - \beta, 1 - \frac{1}{z}\right).$$

SUR LE

POTENTIEL DE DEUX ELLIPSOIDES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
t. CII; 1886.

1. Je supposerai tous les points de l'espace rapportés à trois axes rectangulaires passant par le centre du premier ellipsoïde. Soient

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy = 1$$

l'équation de la surface extérieure de ce corps, et V son volume.

L'ellipsoïde étant supposé formé de couches homogènes concentriques et homothétiques à sa surface extérieure, je désignerai par $f(\lambda^2)$ la densité de la couche dont la surface extérieure est déterminée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy = \lambda^2.$$

La fonction $f(\lambda^2)$ est une fonction quelconque, continue ou discontinue; je poserai

$$\int_{t^2}^{1} f(\lambda)\,d\lambda = F(t),$$

en sorte que $F(t)$ est une fonction *paire* de la variable.

Pour abréger, en appelant Ω le discriminant

$$ABC + 2A'B'C' - AA'^2 - BB'^2 - CC'^2,$$

je ferai

$$\mathcal{A} = \frac{BC - A'^2}{\Omega}, \qquad \mathcal{B} = \frac{CA - B'^2}{\Omega}, \qquad \mathcal{C} = \frac{AB - C'_2}{\Omega},$$
$$\mathcal{A}' = \frac{B'C' - AA'}{\Omega}, \qquad \mathcal{B}' = \frac{C'A' - BB'}{\Omega}, \qquad \mathcal{C}' = \frac{A'B' - CC'}{\Omega},$$

puis

$$\Delta = -\mathcal{A}\cos^2\varphi - \mathcal{B}\sin^2\varphi$$
$$+\,\mathcal{C} + 2i\mathcal{A}'\sin\varphi + 2i\mathcal{B}'\cos\varphi - 2\mathcal{C}'\sin\varphi\cos\varphi.$$

2. Soit

$$A_0(x-\xi)^2 + B_0(y-\eta)^2 + C_0(z-\zeta)^2$$
$$+\,2A'_0(y-\eta)(z-\zeta) + 2B'_0(z-\zeta)(x-\xi) + 2C'_0(x-\xi)(x-\eta) = 1$$

l'équation de la surface extérieure du second ellipsoïde, en sorte que

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta$$

désignent les projections sur les trois axes de la distance des centres des deux corps.

J'appellerai V_0 son volume, et, en supposant que sa masse est composée de couches homogènes concentriques et homothétiques à la surface extérieure, en sorte que, sur la couche limitée par la surface,

$$A_0(x-\xi)^2 + B_0(y-\eta)^2 + C_0(z-\zeta)^2$$
$$+\,2A'_0(y-\eta)(z-\zeta) + 2B'_0(z-\zeta)(x-\xi) + 2C'_0(x-\xi)(y-\eta) = \lambda^2,$$

la densité soit $f_0(\lambda^2)$, je poserai

$$\int_{t_0^2}^{1} f_0(\lambda)\,d\lambda = F_0(t_0).$$

Je désigne par Ω_0, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{A}'_0$, $\mathcal{B}'_0$, $\mathcal{C}'_0$ les quantités analogues à Ω, $\mathcal{A}$, ..., mais relatives au second ellipsoïde; ainsi

$$\Omega_0 = A_0B_0C_0 + 2A'_0B'_0C'_0 - A_0A'^2_0 - B_0B'^2_0 - C_0C'^2_0,$$
$$\mathcal{A}_0 = \frac{B_0C_0 - A'^2_0}{\Omega_0},\qquad \ldots;$$

j'appelle enfin Δ_0 la quantité

$$-\mathcal{A}_0\cos^2\varphi - \mathcal{B}_0\sin^2\varphi + \mathcal{C}_0$$
$$+\,2i\mathcal{A}'_0\sin\varphi + 2i\mathcal{B}'_0\cos\varphi - 2\mathcal{C}'_0\sin\varphi\cos\varphi.$$

3. Cela posé, le potentiel P des deux corps est déterminé par la relation suivante :

$$P = \frac{9VV_0}{32\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{F(t)F_0(t_0)\,dt\,dt_0\,d\varphi}{i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta - t\sqrt{\Delta}\,t\sqrt{\Delta_0}}.$$

Cette formule suppose $\zeta > 0$; si $\zeta = 0$, l'intégrale qui est dans le second membre n'a plus de sens; pour une valeur négative de ζ, la formule donne une valeur égale et de signe contraire à celle du potentiel.

4. Si les deux corps sont de révolution, Δ et Δ_0 sont des carrés parfaits; l'expression précédente se réduit alors à la forme beaucoup plus simple

$$P = \frac{9VV_0}{32\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{F(t)F_0(t_0)\,dt\,dt_0\,d\varphi}{i(\xi+\alpha t+\alpha_0 t_0)\cos\varphi + i(\eta+\beta t+\beta_0 t_0)\sin\varphi + \gamma t + \gamma_0 t_0},$$

où α, β, γ, α_0, β_0, γ_0 désignent des quantités constantes; ce que l'on peut encore écrire

$$P = \frac{9VV_0}{16}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{F(t)F(t_0)\,dt\,dt_0}{\sqrt{(\xi+\alpha t+\alpha_0 t_0)^2 + (\eta+\beta t+\beta_0 t_0)^2 + (\zeta+\gamma t+\gamma_0 t_0)^2}}.$$

5. Dans le cas où les ellipsoïdes sont homogènes, en appelant respectivement ω et ω_0 leurs densités, on a

$$F(t) = \omega(1-t^2)\qquad\text{et}\qquad F_0(t_0) = \omega_0(1-t_0^2).$$

Dans le cas où les ellipsoïdes se réduisent à deux couches infiniment minces, supposons que, lorsque t varie de 0 à $1-\varepsilon$, la densité soit nulle et qu'elle soit égale à ω quand t varie de $(1-\varepsilon)$ à 1, en supposant ε infiniment petit, on a

$$F(t) = 2\omega\varepsilon$$

et, de même,

$$F_0(t_0) = 2\omega_0\varepsilon_0;$$

le potentiel a donc pour expression

$$P = \frac{9VV_0\omega\omega_0\varepsilon\varepsilon_0}{8\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{dt\,dt_0\,d\varphi}{i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta - t\sqrt{\Delta} - t_0\sqrt{\Delta_0}}.$$

Il est facile de voir que toutes les dérivées secondes de P, prises par rapport aux variables ξ, η, ζ sont des fonctions algébriques de ces variables et des coefficients des équations des surfaces des ellipsoïdes.

On a, par exemple,

$$\frac{d^2 P}{d\xi\, d\zeta} = \frac{9 V V_0 \omega\omega_0 \varepsilon\varepsilon_0}{8\pi} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{2 i \cos\varphi\, dt\, dt_0\, d\varphi}{(i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta - t\sqrt{\Delta} - t_0\sqrt{\Delta_0})^3}$$

ou, en effectuant les intégrations relatives à t et à t_0,

$$\frac{d^2 P}{d\xi\, d\zeta} = \frac{9 V V_0 \omega\omega_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\pi}$$
$$\times \int_0^{2\pi} \frac{i\cos\varphi(i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta)\, d\varphi}{(i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta)^4 - 2(\Delta - \Delta_0)(i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta)^2 + (\Delta - \Delta_0)^2},$$

expression qui, comme on le sait, est une fonction algébrique des coefficients de la quantité placée sous le signe $\int$.

Il en résulte que chacune des trois dérivées premières de P

$$\frac{dP}{d\xi}, \quad \frac{dP}{d\eta}, \quad \frac{dP}{d\zeta}$$

s'obtiendra en intégrant une fonction algébrique.

6. L'expression du potentiel, donnée ci-dessus, conduit aisément à son développement suivant les puissances de

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

En développant la quantité sous le signe $\int$ suivant les puissances décroissantes de

$$\frac{1}{i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta}$$

on a

$$P = \frac{9 V V_0}{32\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{F(t) F_0(t_0) \left[t\sqrt{\Delta} + t_0\sqrt{\Delta_0}\right]^n dt\, dt_0\, d\varphi}{(i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta)^{n+1}}.$$

Il est à remarquer que, $F(t)$ étant une fonction paire de t et $F(t_0)$ une fonction paire de t_0, les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} F(t)\, t^\mu\, dt, \qquad \int_{-1}^{+1} F_0(t_0)\, t_0^\mu\, dt_0$$

sont nulles lorsque μ est un nombre impair.

Le terme général du développement de P sera donc, à un facteur numérique près,

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{F(t) F(t_0) \left[t\sqrt{\Delta} + t_0\sqrt{\Delta_0}\right]^{2n} dt\, dt_0\, d\varphi}{(i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta)^{2n+1}};$$

en effectuant les intégrations par rapport à t et à t_0, on devra laisser de côté, dans le développement du numérateur, tous les termes qui renferment des puissances impaires de t et de t_0, en sorte que ce terme peut se mettre sous la forme suivante

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi}{(i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta)^{2n+1}},$$

où Φ désigne une fonction entière de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$.

Une telle intégrale peut s'exprimer au moyen des dérivées partielles par rapport à ξ, η et ζ de

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}};$$

on peut encore l'obtenir en développant le numérateur et la fonction

$$\frac{1}{(i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\varphi + \zeta)^{2n+1}},$$

suivant les sinus et cosinus des multiples de l'angle φ.

Le développement de cette fonction a été donné par Jacobi.

7. Les résultats résumés dans cette Note s'obtiennent de la façon la plus simple, en décomposant les ellipsoïdes considérés en tranches infiniment minces comprises entre deux plans infiniment voisins parallèles au plan

$$(1) \qquad ix\cos\varphi + iy\sin\varphi + z = 0.$$

Ces plans sont évidemment imaginaires, et il semblerait d'abord que cette décomposition ne présente aucun sens; mais il résulte des principes posés par M. Hermite dans sa théorie des coupures des intégrales définies que, si l'on effectue les calculs en donnant à i une valeur réelle, les résultats obtenus sont encore valables en faisant

$$i = \sqrt{-1}.$$

J'ajouterai une dernière remarque pour montrer comment le théorème de Maclaurin résulte aisément, non seulement du résultat final du calcul, mais encore de la marche même suivie pour effectuer les intégrations.

Tous les plans parallèles au plan (1) sont des plans isotropes et, pour déterminer les limites des intégrations relatives à t et à t_0, il suffit de déterminer ceux de ces plans qui sont tangents à chacun des ellipsoïdes.

Comme φ prend toutes les valeurs possibles de 0 à 2π, on a donc à considérer tous les plans isotropes qui touchent chacune des surfaces; deux surfaces homofocales du second ordre touchant les mêmes plans isotropes, il en résulte immédiatement que le potentiel n'est modifié que par l'introduction d'un facteur constant, lorsqu'on remplace un des ellipsoïdes par un ellipsoïde homofocal.

Ainsi qu'il est facile de le vérifier, l'expression Δ a la même valeur lorsque l'on considère plusieurs ellipsoïdes homofocaux.

SUR UN MÉMOIRE DE LAGUERRE

CONCERNANT

LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR CHARLES HERMITE.

En étudiant le beau Mémoire qui a paru dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, 1880, sous le titre : *Sur une méthode pour obtenir, par approximation, les racines d'une équation algébrique qui a toutes les racines réelles* (1), j'ai été amené à établir les résultats auxquels Laguerre (2) est parvenu sur ce sujet important par une méthode différente de la sienne et plus directe. C'est l'objet des considérations qui vont suivre :

I. Soit $f(x) = 0$ une équation de degré n dont les racines, $a, b, \ldots, l$, soient toutes réelles. J'envisage la somme symétrique

$$S = \frac{(\xi - a)(\xi' - a)}{(x-a)^2} + \frac{(\xi - b)(\xi' - b)}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{(\xi - l)(\xi' - l)}{(x-l)^2},$$

où ξ et ξ' sont également des quantités réelles, et je remarque qu'on en obtient facilement l'expression, si l'on décompose chacun de ses termes en fractions simples, par rapport à la quantité a, en écrivant, par exemple,

$$\frac{(\xi - a)(\xi' - a)}{(x-a)^2} = \frac{(\xi - x)(\xi' - x)}{(x-a)^2} + \frac{\xi + \xi' - 2x}{x-a} + 1.$$

Il suffit, en effet, de recourir aux relations

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-l},$$
$$\frac{f'^2 - ff''}{f^2} = \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-l)^2}$$

(1) *Voir* p. 87.

(2) *Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux*, par M. Eugène Rouché, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers (*Journal de l'École Polytechnique*, LVIe Cahier; 1886).

pour trouver la valeur suivante :

$$\mathrm{S} = \frac{(\xi - x)(\xi' - x)(f'^2 - ff'') + (\xi + \xi' - 2x)ff' + nf^2}{f^2}.$$

Cela étant, j'observe qu'on ne peut avoir $\mathrm{S} = 0$, qu'autant que les numérateurs, $(\xi - a)(\xi' - a)$, $(\xi - b)(\xi' - b)$, ... ne seront pas tous de même signe. Il est donc nécessaire, d'après les propriétés du trinome du second degré, qu'une partie des raisons, $a, b, \ldots$, se trouve dans l'intervalle compris entre ξ et ξ', et les autres en dehors de cet intervalle. Par là est établie la proposition ainsi énoncée par Laguerre :

Si l'on désigne par x une quantité réelle quelconque, les nombres ξ et ξ' qui satisfont à la relation

$$(\xi - x)(\xi' - x)(f'^2 - ff'') + (\xi - \xi')ff + nf^2 = 0,$$

et dont l'un est arbitraire, séparent les racines de l'équation $f(\mathrm{X}) = 0$.

Je suppose maintenant qu'on fasse $\xi = \xi'$ dans la somme S, qui devient ainsi

$$\mathrm{S} = \left(\frac{\xi - a}{x - a}\right)^2 + \left(\frac{\xi - b}{x - b}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\xi - l}{x - l}\right)^2,$$

et je considère l'équation suivante du second degré en X :

$$\mathrm{S} - \left(\frac{\xi - \mathrm{X}}{x - \mathrm{X}}\right)^2 = 0.$$

Il est clair que le premier membre est positif pour $\mathrm{X} = a, b, \ldots, l$ et prend une valeur négative très grande pour X voisin de x. Admettant donc que x tombe dans l'intervalle de deux racines consécutives, que je désigne par a et b, en supposant $a < b$, le premier membre de l'équation considérée ayant des valeurs de signes contraires quand on fait successivement $\mathrm{X} = a$, $\mathrm{X} = x$, puis $\mathrm{X} = x$, $\mathrm{X} = b$, on voit que les racines, X', X'', sont comprises, l'une entre a et x, l'autre entre x et b.

Ce point établi, Laguerre recherche, en disposant de la quantité ξ, qui est arbitraire, les valeurs de X' et X'' qui se rapprocheront le plus de a et b; voici comment il procède.

II. Reprenons l'équation

$$\mathrm{S} - \left(\frac{\xi - \mathrm{X}}{x - \mathrm{X}}\right)^2 = 0;$$

en employant l'expression de S lorsqu'on y suppose $\xi = \xi'$, à savoir

$$\mathrm{S} = \frac{(\xi - x)^2(f'^2 - ff'') + 2(\xi - x)ff' + nf^2}{f^2},$$

elle peut s'écrire ainsi :

$$(\xi - x)^2(f'^2 - ff'') + 2(\xi - x)ff' + nf^2 - \left(\frac{\xi - \mathrm{X}}{x - \mathrm{X}}f\right)^2 = 0.$$

Cela étant, Laguerre se borne à dire succinctement que *les valeurs extrêmes* de X s'obtiendront en exprimant que le trinome du second degré en ξ, qui forme le premier nombre, a ses racines égales. On regrettera, sans doute, que l'éminent géomètre ne se soit pas étendu davantage sur ce point essentiel, et qu'on n'ait pas suffisamment la trace des idées qui l'ont conduit à la découverte d'un résultat important, dont il a fait des applications nombreuses et extrêmement remarquables. Mais l'équation en X, à laquelle il parvient, peut être étudiée en elle-même, indépendamment du procédé qui y a conduit : c'est ce que je vais faire en me proposant ainsi d'établir directement sa propriété caractéristique.

Soit, pour un moment, $\xi - x = \zeta$; le premier membre de l'équation précédente devient

$$(f'^2 - ff'')\zeta^2 + 2ff'\zeta + nf^2 - \left(\frac{\zeta f}{x - \mathrm{X}} + f\right)^2;$$

c'est une expression du second degré, en ζ, de la forme

$$\mathrm{A}\zeta^2 + 2\mathrm{B}\zeta + \mathrm{C} - (m\zeta + n)^2;$$

et la condition d'égalité des racines est

$$\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} + \mathrm{A}n^2 - 2\mathrm{B}mn + \mathrm{C}m^2 = 0;$$

de là résulte l'équation que nous avons à considérer

$$[(n - 2)f'^2 - (n - 1)ff''](\mathrm{X} - x)^2 - 2ff'(\mathrm{X} - x) - nf^2 = 0.$$

Cela étant, je dis que son premier membre prend une valeur positive lorsqu'on y remplace X par une quelconque des racines de l'équation $f(x)=0$. Soit a cette racine; je divise par le facteur positif $\frac{1}{(x-a)^2 f^2}$, ce qui donne l'expression

$$\frac{(n-2)f'^2}{f^2}-\frac{(n-1)f''}{f}+\frac{2f'}{(x-a)f}-\frac{n}{(x-a)^2};$$

cela étant, je mets en évidence les quantités

$$A=\frac{1}{x-a},\qquad B=\frac{1}{x-b},\qquad \ldots,\qquad L=\frac{1}{x-l}$$

en employant les relations

$$\frac{f'}{f}=A+B+\ldots+L,$$
$$\frac{f''}{f}=2(AB+AC+\ldots).$$

Désignons, dans ce but, par U, V, W la somme des $n-1$ quantités B, C, ..., L, la somme de leurs carrés et celle de leurs produits deux à deux. On aura ainsi

$$\frac{f'}{f}=A+U,$$
$$\frac{f''}{f}=2AU+2W,$$
$$\frac{f'^2}{f^2}=A^2+V+2AU+2W,$$

et, en substituant, nous trouverons

$$(n-2)(A^2+V+2AU+2W)-2(n-1)(AU+W)$$
$$+2(A^2+AU)-nA^2=(n-2)V-2W.$$

C'est bien une quantité positive, représentée, comme on le voit facilement, par la somme des carrés des différences deux à deux des $n-1$ quantités B, C, ..., L. Je remarque ensuite qu'en supposant $X=x$ on a un résultat négatif; nous avons donc cette conclusion que, si l'on désigne par a et b deux racines consécutives qui comprennent x dans leur intervalle, une racine X' de l'équation de Laguerre est entre a et x, et l'autre X'' entre x et b.

Or, on trouve, en résolvant, la formule

$$\frac{1}{X-x}=\frac{-f'\pm\sqrt{(n-1)[(n-1)f'^2-nff'']}}{nf}$$

et puisque, dans l'hypothèse admise, les deux solutions sont de signes contraires, la racine positive qui donne $X''-x$ s'obtiendra en prenant le radical avec le signe de f.

Le résultat que nous venons de démontrer a conduit Laguerre à de nombreuses conséquences, parmi lesquelles je signalerai cette formule

$$\cos\frac{\pi x}{2}=1-\frac{x^3}{x+(x-1)\sqrt{\frac{2-x}{3}}},$$

qui représente avec une grande approximation, au moyen d'une expression algébrique, la transcendante $\cos\frac{\pi x}{2}$, quand la variable est positive et inférieure à l'unité. Voici maintenant une considération nouvelle que suggère l'analyse précédente.

III. Je reprends l'équation du second degré

$$[(n-2)f'^2-(n-1)ff''](X-x)^2-2ff'(X-x)-nf^2=0,$$

et je la généralise de la manière suivante :

$$(\alpha f'^2-\beta ff'')(X-x)^2-2\gamma ff'(X-x)-\delta f^2=0,$$

en désignant par α, β, γ, δ des constantes dont la dernière devra être positive, afin que le premier membre soit négatif pour $X=x$. Cela étant, je cherche sous quelles conditions il sera positif lorsqu'on remplace X par l'une quelconque des racines de l'équation $f(x)=0$, ou bien en faisant comme plus haut $X=a$. On est ainsi conduit, si l'on conserve les notations précédemment employées, à la forme quadratique

$$\alpha(A^2+V+2AU+2W)-2\beta(AU+W)+2\gamma(A^2+AU)-\delta A^2$$
$$=(\alpha+2\gamma-\delta)A^2+2(\alpha-\beta+\gamma)AU+\alpha V+2(\alpha-\beta)W,$$

représentant le résultat de la substitution, qui devra être définie et positive. Un cas facile s'offre si l'on a $\alpha-\beta+\gamma=0$; il suffira alors de poser $\alpha+2\gamma-\delta>0$ et d'exprimer que la forme à $n-1$ indéterminée $\alpha V+2(\alpha-\beta)W$ est elle-même définie et positive. Les conditions à remplir sont alors que α et la suite des déterminants

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta, & \alpha \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha, & \alpha-\beta, & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta, & \alpha, & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta, & \alpha-\beta, & \alpha \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

soient tous positifs. Au moyen des transformations élémentaires on trouve facilement les expressions explicites de ces déterminants, et l'on obtient les inégalités

$$\alpha > 0, \quad \beta(2\alpha-\beta) > 0, \quad \beta^2(3\alpha-2\beta) > 0, \quad \ldots,$$
$$\beta^{n-1}[(n-1)\alpha-(n-2)\beta] > 0.$$

On en conclut que α et β doivent être positifs et assujettis à cette seule et unique condition

$$(n-1)\alpha-(n-2)\beta > 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta < \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\alpha.$$

Nous voyons ainsi que, dans la méthode d'approximation de Laguerre, l'équation dont il fait usage,

$$[(n-1)f'^2-(n-2)ff''](X-x)^2-2ff'(X-x)-nf^2=0,$$

peut être remplacée par cette autre,

$$(\alpha f'^2-\beta ff'')(X-2)^2-2(\alpha-\beta)ff'(X-x)-\delta f^2=0,$$

α, β et δ étant des quantités positives, telles qu'on ait

$$\beta < \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\alpha, \qquad \delta < \alpha+2\gamma,$$

ou encore $\delta < 2\beta-\alpha$, puisqu'on a supposé $\alpha-\beta+\gamma=0$.

Voici maintenant quelques remarques au sujet de cette équation.

Je ferai d'abord, afin de la réduire à sa forme la plus simple, la supposition de $\gamma=0$, qui donne $\alpha=\beta$; on aura aussi la condition $\delta<\alpha$; cela étant, nous trouvons la formule suivante :

$$x-X=\sqrt{\frac{\delta}{\alpha}}\,\frac{f}{\sqrt{f'^2-ff''}}.$$

C'est précisément, pour le cas limite de $\delta=\alpha$, le résultat

remarqué par Laguerre au début de son Mémoire, et qui a été le point de départ de tout son travail.

Proposons-nous ensuite cette question, qui se présente d'elle-même, de disposer de α et β, en supposant, comme on le peut, $\delta=1$, de manière que les quantités X' et X'' approchent, autant que possible, des deux racines consécutives a et b de l'équation proposée $f(x)=0$. On y parviendra évidemment en rendant *maximum* la différence

$$X'-X''=2\,\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2f'^2+\alpha f'^2-\beta ff''}}{\alpha f'^2-\beta ff''},$$

lorsque α et β prennent toutes les valeurs positives sous les conditions

$$\beta < \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\alpha, \qquad 1 < 2\beta-\alpha.$$

Il convient, pour traiter la question, de représenter géométriquement ces conditions en considérant α et β comme l'abscisse et l'ordonnée x et y d'un point rapporté à des coordonnées rectangulaires. Cela étant, je construis les droites

$$y=\left(\frac{n-1}{n-2}\right)x, \qquad 1=2y-z,$$

qui se coupent en un point ayant pour coordonnées

$$x=\frac{n-2}{n}, \qquad y=\frac{n-1}{n}.$$

Soit A ce point, AM et AN les portions indéfinies des deux lignes, dirigées dans le sens des abscisses positives; on voit facilement que l'on doit considérer tous les points renfermés dans l'angle MAN, dont les coordonnées sont positives et vérifient les égalités proposées.

Soit, maintenant,

$$\frac{\sqrt{(x-y)f'^2+xf'^2-yff''}}{xf'^2-yff''}=m,$$

m étant une constante que nous ferons varier afin d'en obtenir le *maximum*. Pour chaque valeur de m, on obtient une hyperbole dont l'équation peut s'écrire de la manière suivante, si l'on pose $a=\frac{ff''}{f'^2}$:

$$m^2(x-ay)^2-(x-y)^2-x+ay=0.$$

Je remarquerai maintenant que nos deux droites sont des sécantes réelles : la première, comme passant par l'origine, qui est un point de la courbe; la seconde, parce que l'équation qui détermine les ordonnées des points de rencontre, où je fais, pour abréger, $b = a - 2$,

$$(m^2 b^2 - 1) y^2 + (2 m b + a) y + m^2 = 0,$$

a pour discriminant la quantité positive

$$4 (a - 1)^2 m^2 + a^2.$$

Ceci posé, considérons la suite des hyperboles qu'on obtient en faisant varier m. Le *maximum* de cette constante correspondra à une valeur telle qu'un changement infiniment petit donne une courbe extérieure à l'angle MAN, et cette circonstance ne peut se produire qu'à l'égard d'une hyperbole tangente à l'un des côtés de l'angle ou passant par son sommet. Or la droite $y = \left(\frac{n-1}{n-2}\right) x$ ne peut avoir pour point de contact que l'origine des coordonnées, et ce point ne se trouve pas sur AM. Quant à l'autre côté, l'équation en y, que nous venons de former, montre qu'il ne peut devenir tangent à l'hyperbole, puisqu'il est impossible que le discriminant de l'équation s'annule. La valeur de m s'obtiendra donc en admettant que la courbe passe par le point A, et les valeurs cherchées de α et β seront les coordonnées de ce point, à savoir

$$\alpha = \frac{n-2}{n}, \qquad \beta = \frac{n-1}{n}.$$

Nous sommes ainsi conduit à l'équation

$$[(n-2) f'^2 - (n-1) f f''] (x - X)^2 + 2 f f' (x - X) - n f^2 = 0$$

par des considérations entièrement différentes de celles de Laguerre, ce qui donne une confirmation complète du beau résultat découvert par l'éminent géomètre.

FIN DU TOME I.

TABLE DES MATIÈRES.

CALCUL INTÉGRAL.

FIN DE LA TABLE DU TOME I.

12866 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.