ŒUVRES

DE LAGUERRE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES

DE LAGUERRE

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

PAR

MM. CH. HERMITE, H. POINCARÉ et E. ROUCHÉ,
MEMBRES DE L'INSTITUT.

TOME I.

ALGÈBRE. — CALCUL INTÉGRAL.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

PRÉFACE.

Dans cette Notice sur la vie et les travaux de Laguerre, j'aurai plus à parler de ses travaux que de sa vie. Son existence, utile et laborieuse, n'a été ni agitée ni bruyante. Sans ambition, partagé entre ses devoirs professionnels, les joies de l'étude et celles de la famille, les seuls événements de sa vie ont été des découvertes.

Laguerre naquit à Bar-le-Duc, le 9 avril 1834. Dès le début de ses études, son talent naissant fut remarqué de ses maîtres; mais il ne devait pas quitter les bancs du lycée sans avoir montré qu'il était autre chose qu'un bon écolier. En 1853, n'étant encore que candidat à l'École Polytechnique, il se signala par un travail original.

Dans le programme d'admission à cette École, la place d'honneur appartient à la Géométrie analytique. Cette Science se renouvelait alors par une révolution en quelque sorte inverse de la réforme cartésienne. Avant Descartes, le hasard seul, ou le génie, permettait de résoudre une question géométrique; après Descartes, on a pour arriver au résultat des règles infaillibles; pour être géomètre, il suffit d'être patient. Mais une méthode purement mécanique, qui ne demande à l'esprit d'invention aucun effort, ne peut être réellement féconde. Une nouvelle réforme était donc nécessaire : Poncelet et Chasles en furent les initiateurs. Grâce à eux, ce n'est plus ni à un hasard heureux, ni à une longue patience que nous devons demander la solution d'un problème, mais à une connaissance approfondie des faits mathématiques et de leurs rapports intimes. Les longs calculs d'autrefois sont devenus inutiles, car on peut le plus souvent en prévoir le résultat.

Laguerre a joué dans cette réforme un rôle très important, que son premier travail de jeunesse permettait déjà de pressentir. La théorie des propriétés projectives de Poncelet, l'une des plus utiles des méthodes modernes, permet de déduire d'une proposition connue une infinité de propositions nouvelles. Mais, en 1853, cette théorie était loin d'être complète; bien des points, et non des moins importants, restaient encore à éclaircir : comment pouvait se faire la transformation des propriétés métriques des figures et, en particulier, des relations entre les angles? Le jeune lycéen résolut du premier coup ce problème qui préoccupait les fondateurs de la Géométrie moderne; sa solution, simple et élégante, fut publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Il entra le quatrième à l'École Polytechnique. Si son rang de sortie fut un peu moins brillant, nous ne devons pas nous en étonner, car il fut à l'École ce qu'il fut dans la vie. Le monde ne lui apparaissait pas comme un champ clos, ni les hommes comme des rivaux qu'il faut devancer à tout prix. Ce qu'il cherchait dans l'étude, ce n'était pas le succès, mais

le savoir; malheureusement, le chemin le plus court vers ces premiers rangs si ardemment convoités n'est pas toujours le travail original et libre, qui fait perdre de vue le but auquel d'autres pensent sans cesse.

Devenu officier d'artillerie et envoyé à Metz, à Mutzig, puis à Strasbourg, il ne publia rien pendant dix ans. Il remplissait ses devoirs militaires avec une scrupuleuse ponctualité, et ses camarades pouvaient croire que sa profession l'absorbait tout entier. Ils se trompaient. Laguerre poursuivait silencieusement les études qu'il avait si brillamment commencées et accumulait d'importants matériaux.

Quand il revint à Paris, en 1864, pour remplir les fonctions de répétiteur à l'École Polytechnique, il lui eût été facile, en dévoilant les secrets qu'il devait à dix ans de travail, de publier un important volume de Géométrie qui l'eût immédiatement classé hors de pair. Il n'en fit rien. Les idées générales n'avaient de prix, à ses yeux, que par les applications particulières où elles pouvaient conduire. Il ne communiqua donc ses résultats qu'un à un, avec sobriété, presque avec avarice.

Difficile à satisfaire, il ne voulait rien livrer que de parfait. Ce n'est qu'en 1870 qu'il fit, à la salle Gerson, un Cours public, où il exposa ses vues d'ensemble sur l'emploi des imaginaires en Géométrie et dont les premières Leçons furent seules publiées.

Aucune des ressources nouvelles de la Géométrie supérieure ne lui fut étrangère; il en créa quelques-unes; il les mania toutes avec habileté et bonheur. Les résultats sont trop nombreux pour que je puisse songer à les analyser ou même à les énumérer tous. Sur cent quarante Mémoires qu'il nous a laissés, plus de la moitié sont des travaux de Géométrie et marquent la place qu'a tenue Laguerre dans ce mouvement dont j'ai parlé plus haut et d'où est sortie la Géométrie moderne.

Il s'occupa d'abord de représenter d'une façon concrète les points imaginaires du plan et de l'espace; c'est ainsi, en particulier, qu'il fut amené à comprendre le premier le rôle important que joue l'aire du triangle sphérique dans la Géométrie de la sphère, et à étendre la théorie des foyers à toutes les courbes algébriques planes et sphériques.

L'étude des courbes et des surfaces algébriques se rattache directement à la théorie des formes homogènes et de leurs invariants; tout théorème sur ces formes est susceptible, en effet, d'autant d'interprétations géométriques qu'on peut imaginer de systèmes nouveaux de coordonnées. Laguerre a créé deux de ces systèmes : le premier est applicable aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre; le deuxième est ce qu'il a appelé l'*équation mixte* et met en évidence les tangentes qu'on peut mener à la courbe d'un point extérieur. Sa connaissance approfondie de la théorie des formes, alors naissante, lui permit de tirer de ces deux inventions tout le parti possible. Parmi ces résultats, je citerai seulement l'étude qu'il fit d'une surface du troisième ordre, réciproque de celle de Steiner.

Les courbes et les surfaces anallagmatiques attiraient à cette époque l'attention des géomètres les plus éminents; plusieurs de leurs propriétés les plus importantes ont été découvertes par Laguerre. Il étudiait en même temps toutes les courbes du quatrième ordre, et en particulier l'hypocycloïde à trois rebroussements, la cardioïde, la lemniscate, les cassiniennes planes et sphériques, les biquadratiques gauches; ses résultats élégants, qu'il établissait toujours par une démonstration simple et ingénieuse, font nettement ressortir les rapports qui lient entre elles ces questions différentes.

A côté de la Géométrie algébrique se développe la Géométrie infinitésimale, à laquelle se rattache l'étude de la courbure des lignes et des surfaces. Cette branche de la Science doit aussi beaucoup à Laguerre. Il y a appliqué tantôt les ressources du Calcul différentiel, tantôt celles des méthodes algébriques qu'il avait créées. Je citerai seulement ses recherches sur les lignes géodésiques et sur la courbure des surfaces anallagmatiques.

Le célèbre théorème de Poncelet est une interprétation géométrique lumineuse de l'addition des arguments elliptiques. Laguerre l'éclaircit encore, en approfondit les cas particuliers, le rattache aux découvertes de Jacobi, enfin le généralise et l'étend aux fonctions hyperelliptiques. Le théorème d'addition de ces fonctions, si compliqué sous sa forme algébrique, est remarquablement simple et élégant sous son nouveau vêtement géométrique.

Je ne puis que signaler en passant une ingénieuse extension du théorème de Joachimstahl aux surfaces du second ordre, et j'ai hâte d'arriver à un Mémoire trop peu connu et dont la portée philosophique est très grande. Ce Mémoire, qui a pour titre : « Sur les systèmes linéaires », a été publié en 1867 dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

Les substitutions linéaires ont acquis dans l'Analyse une telle importance qu'il nous semble aujourd'hui difficile de traiter une seule question sans qu'elles s'y introduisent.

Laguerre devinait déjà, sans doute, l'avenir réservé à cette théorie et il en développait en quelques pages tous les points essentiels.

Mais il ne se bornait pas là. Depuis le commencement du siècle, de grands efforts ont été faits pour généraliser le concept de grandeur; des quantités réelles, on s'est élevé aux quantités imaginaires, aux nombres complexes, aux idéaux, aux quaternions, aux imaginaires de Gallois. Le domaine de l'Analyse s'agrandissait ainsi sans cesse et de tous côtés; Laguerre s'élève à un point de vue d'où l'on peut embrasser d'un coup d'œil tous ces horizons. Toutes ces notions nouvelles, et en particulier les quaternions, sont ramenées aux substitutions linéaires. Pour faire comprendre la portée de cette vue ingénieuse, qu'il me suffise de rappeler les beaux travaux de M. Sylvester sur ce sujet.

Laguerre applique ces principes à la théorie des formes quadratiques et à celle des fonctions abéliennes, et il retrouve et complète sur divers points les résultats de M. Hermite. Sans doute, il n'y a dans tout cela qu'une notation nouvelle; mais qu'on ne s'y trompe pas : dans les Sciences mathématiques, une bonne notation a la même importance philosophique qu'une bonne classification dans les Sciences naturelles. Le Mémoire que je cite en est d'ailleurs la meilleure preuve. Laguerre touche à toutes les branches de l'Analyse et force, pour ainsi dire, une multitude de faits sans aucun lien apparent à se grouper suivant leurs affinités naturelles.

Depuis 1874, Laguerre faisait partie du Jury d'admission à l'École Polytechnique. Ces délicates fonctions ne pouvaient être confiées à un examinateur plus compétent et plus

scrupuleux. Ces juges si redoutés sont jugés à leur tour, et quelquefois sévèrement, par les candidats malheureux ou par leurs professeurs. Jamais un condamné n'a protesté contre un arrêt de Laguerre. Il savait mieux que personne distinguer le vrai savoir, quelquefois moins brillant, de cette érudition superficielle due à une préparation habile. Aussi quelle souffrance pour lui quand un candidat, dont il avait dès l'abord deviné le mérite, se troublait dans la suite de l'examen et restait au-dessous de lui-même.

C'est à ce moment de sa vie que j'ai commencé à le connaître et que j'ai pu apprécier, non seulement son rare talent de géomètre, mais sa conscience, sa droiture et sa grande élévation morale. Je me rappellerai toujours avec reconnaissance la complaisance avec laquelle il mettait au service des débutants toutes les ressources d'une érudition vaste et sûre.

Ses nouvelles fonctions ne détournèrent pas Laguerre de ses recherches géométriques; c'est à cette époque qu'il créa la Géométrie de direction. Il est peu d'exemples qui fassent mieux voir combien l'idée la plus simple peut devenir féconde quand un esprit ingénieux et profond s'en empare. On peut regarder une droite ou un cercle comme la trajectoire d'un point mobile; mais ce point peut parcourir sa trajectoire dans deux sens opposés : c'est ce qui conduit à considérer une droite comme formée de deux semi-droites et un cercle comme formé de deux cycles. De ce point de vue, les autres courbes se répartissent en deux classes : les courbes de direction qui sont susceptibles de se décomposer analytiquement, comme la droite, en deux trajectoires parcourues en sens contraire, et celles pour lesquelles une semblable décomposition est impossible.

Le parti que Laguerre a su tirer de cette distinction montre qu'elle n'est nullement arbitraire. Elle l'a conduit en particulier à une transformation géométrique nouvelle qui promet de n'être pas moins utile que les transformations déjà connues.

Pour résoudre un problème nouveau, nous cherchons toujours à le simplifier par une série de transformations; mais cette simplification a un terme, car il y a dans tout problème quelque chose d'essentiel, pour ainsi dire, que toute transformation est impuissante à modifier. De là l'importance de la notion générale d'invariant que l'on doit rencontrer dans toute question de Mathématiques; elle devait s'introduire nécessairement dans la théorie des équations différentielles linéaires et fournir le moyen d'amener ces équations, par des opérations convenables, au plus haut degré possible de simplicité.

Cette idée est due aussi à Laguerre, et M. Halphen a montré combien elle était féconde en développant à ce point de vue nouveau sa théorie des invariants différentiels.

J'arrive à la partie la plus remarquable de l'œuvre de Laguerre, je veux parler de ses travaux sur les équations algébriques. Le théorème de Sturm permettait déjà une discussion complète; la méthode de Newton donnait une approximation rapide et indéfinie. La question semblait donc épuisée. Mais ce n'était pas la première fois que Laguerre, abordant un champ où les esprits superficiels ne croyaient plus avoir rien à glaner, en rapportait une moisson nouvelle.

La méthode de Sturm, il faut bien le reconnaître, a été plus admirée qu'appliquée. Pour obtenir le nombre des racines réelles d'une équation, on préfère généralement employer des moyens détournés propres à chaque cas particulier; on ne pouvait donc trouver de nouveau qu'en dehors du cas général.

La démonstration classique de la règle des signes de Descartes est d'une grande simplicité; Laguerre en a trouvé une plus simple encore. Ce n'eût été là qu'un avantage secondaire, mais la démonstration nouvelle s'applique non seulement aux polynômes entiers, mais encore aux séries infinies. Ainsi transformé, le théorème de Descartes devient un instrument d'une flexibilité merveilleuse; manié par Laguerre, il le conduit à des règles élégantes, bien plus simples que celles de Sturm et s'appliquant à des classes très étendues d'équations. Une d'elles, qui, à vrai dire, est aussi compliquée que celle de Sturm, a le même degré de généralité. Laguerre ne s'y arrête pas d'ailleurs, attiré plutôt vers les cas particuliers simples par son instinct scientifique.

La méthode de Newton consiste à remplacer l'équation à résoudre par une équation du premier degré qui en diffère très peu; Laguerre la remplace par une équation du deuxième degré qui en diffère moins encore. L'approximation est plus rapide; de plus, la méthode n'est jamais en défaut, au moins quand toutes les racines sont réelles. Le procédé nouveau est surtout avantageux quand le premier membre de l'équation est un de ces polynômes qui satisfont à une équation différentielle linéaire et dont le rôle analytique est si important. Je ne puis non plus passer sous silence une méthode ingénieuse pour séparer et calculer les racines imaginaires, mais dont Laguerre n'a pas eu le temps de tirer toutes les conséquences.

Quelles sont, parmi ces propriétés, celles qui s'étendent aux équations transcendantes? Laguerre s'en préoccupe et est ainsi amené à approfondir la classification en genres des transcendantes entières; personne ne s'est avancé aussi loin que lui dans cette théorie, l'une des plus difficiles de l'Analyse.

L'étude des fractions continues algébriques nous permettra sans doute un jour de représenter les fonctions par des développements beaucoup plus convergents que les séries de puissances; mais peu de géomètres ont osé s'aventurer dans ce domaine inconnu qui nous réserve bien des surprises; Laguerre y fut conduit par ses recherches sur les polynômes qui satisfont à une équation différentielle linéaire. De tous les résultats qu'il obtint, je n'en veux citer qu'un, parce que c'est le plus surprenant et le plus suggestif. D'une série divergente, on peut déduire une fraction continue convergente : c'est là un nouveau mode d'emploi légitime des séries divergentes qui est sans doute destiné à un grand avenir.

Tel est ce vaste ensemble de travaux algébriques et analytiques où Laguerre a su, chose rare, s'élever aux aperçus généraux sans jamais perdre de vue les applications particulières et même numériques.

Je m'arrête dans cette longue énumération de découvertes; je n'ai pu être court, et je n'ai pas même l'excuse d'avoir été complet, puisque je n'ai signalé ni les applications de la méthode de Monge ni celles du principe du dernier multiplicateur; mais la prodigieuse fécondité de Laguerre rendait ma tâche difficile.

S'il était vrai qu'on ne pût rencontrer la gloire sans la chercher, Laguerre serait resté toujours ignoré; mais, heureusement, ses beaux travaux lui avaient attiré l'estime et bientôt l'admiration des juges les plus compétents, et il ne devait pas attendre en vain qu'on lui rendît justice. L'Institut lui ouvrit ses portes le 11 mai 1883; peu de temps après, M. Bertrand lui confiait la suppléance de la chaire de Physique mathématique au Collège de France.

Il est triste de penser que Laguerre ne put jouir que pendant peu de temps de cette double et légitime récompense. Il eut encore le temps, cependant, dans les quelques Leçons qu'il fit au Collège de France, d'exposer sous un jour tout nouveau cette belle théorie de l'attraction des ellipsoïdes, qu'il avait complétée par ses travaux personnels. Il siégea à peine à l'Académie des Sciences. Les examens d'entrée à l'École Polytechnique l'en éloignèrent d'abord, puis la maladie l'obligea à quitter toutes ses occupations.

Sa santé, qui avait toujours été délicate, usée par un travail incessant et opiniâtre, était irrémédiablement perdue. Malgré les soins pieux dont Laguerre était entouré, le mal fit pendant six mois de continuels progrès. Il mourut, le 14 août 1886, dans sa ville natale, à Bar-le-Duc.

Il sera regretté non seulement de ses amis, mais de tous les hommes qui s'intéressent à la Science et qui savent combien de secrets il a emportés dans la tombe.

H. Poincaré.

ALGÈBRE.

SUR LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3e série, t. IX; 1883.

I. — Règle des signes de Descartes.

1. La règle des signes de Descartes consiste dans les deux propositions suivantes :

$F(x)$ *désignant un polynôme ordonné suivant les puissances de* x, *le nombre des racines positives de l'équation* $F(x) = 0$ *est au plus égal au nombre des variations du polynôme* $F(x)$.

Si le nombre des racines positives est inférieur au nombre des variations du polynôme, la différence est un nombre pair.

Pour établir la première proposition, je démontrerai que, si elle est vraie quand le polynôme qui forme le premier membre de l'équation présente $(m-1)$ variations, elle est également vraie quand ce polynôme présente m variations. La proposition sera, par suite, établie dans toute sa généralité, puisqu'elle a lieu évidemment dans le cas où tous les termes du polynôme sont de même signe.

Soit donc

$$F(x) = Ax^p + \ldots + Mx^r + Nx^s + \ldots + Rx^u$$

un polynôme ordonné suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x et présentant m variations. L'équation

$$F(x)x^{-\alpha} = 0,$$

où α désigne un nombre réel arbitraire, a les mêmes racines positives que l'équation

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

et la fonction qui constitue son premier membre demeure finie et continue, quand x croît indéfiniment à partir d'un nombre positif ε aussi petit qu'on le veut. On peut donc appliquer le théorème de Rolle entre les limites o et $+\infty$, et l'on voit que le nombre des racines de l'équation (1) est au plus supérieur d'une unité au nombre des racines de l'équation $x^{-(\alpha+1)}[x\,F'(x) - \alpha\,F(x)] = 0$, ou encore de l'équation

$$x\,F'(x) - \alpha\,F(x) = 0. \tag{2}$$

Les coefficients de cette équation sont respectivement

$$A(p-\alpha),\quad \ldots,\quad M(r-\alpha),\quad N(s-\alpha),\quad \ldots,\quad R(u-\alpha).$$

Le polynôme $F(x)$ présentant m variations, supposons que M et N soient de signes contraires, et choisissons le nombre arbitraire α de telle sorte qu'il se trouve compris entre les nombres r et s [1]; on voit que, dans la suite précédente, les coefficients numériques des quantités A, …, M et ceux des quantités N, …, R sont de signes contraires.

Le premier membre de l'équation (2) présente donc autant de variations que la suite

$$A,\quad \ldots,\quad M,\quad -N,\quad \ldots,\quad -R,$$

c'est-à-dire $(m-1)$ variations; il en résulte que cette équation a au plus $(m-1)$ racines positives et l'équation (1) au plus m racines positives. La proposition I est donc complètement établie.

Pour démontrer la proposition II, il suffit, comme on sait, de remarquer que le nombre des racines positives de l'équation (1) et le nombre des variations du polynôme $F(x)$ sont toujours de même parité.

2. La démonstration précédente ne suppose en aucune façon que les exposants $p, \ldots, r, s, \ldots, u$ soient des nombres entiers; ils peuvent être fractionnaires ou même incommensurables.

---

[1] On pourrait prendre plus simplement α égal à r ou à s; mais, dans quelques applications des considérations précédentes, il est utile de ponvoir, entre certaines limites, disposer de la valeur de α.

Ainsi l'équation

$$x^3 - x^2 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{7}} - 1 = 0,$$

présentant trois variations, a au plus trois racines positives; il est clair, du reste, qu'elle ne peut avoir de racine négative.

On peut supposer également que $F(x)$ soit une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x. Si elle est convergente pour toutes les valeurs positives de x plus petites qu'un nombre donné a, en cessant d'être convergente pour $x = a$, il résulte de la démonstration précédente que *le nombre des valeurs positives de x, pour lesquelles la série $F(x)$ est convergente et a pour valeur zéro, est au plus égal au nombre des variations de la série.*

De plus, *si le nombre des valeurs de x qui jouissent de cette propriété est inférieur au nombre des variations de la série, la différence est un nombre pair.*

En effet, le nombre des variations des termes de la série étant supposé fini (ce qu'il faut nécessairement supposer pour pouvoir appliquer le théorème précédent), $F(x)$ est égal à un polynôme $\Phi(x)$ suivi d'un nombre indéfini de termes ayant tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$. Pour $x = 0$, la série a le signe du premier terme de $\Phi(x)$. Quand x tend vers la valeur de a, $\Phi(x)$ tend vers une valeur finie; les termes complémentaires, qui sont en nombre infini, ont tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$, et leur valeur absolue va en croissant indéfiniment, puisque la série est divergente pour $x = a$.

Donc, quand x s'approche indéfiniment de a, la série de $\Phi(x)$ croît indéfiniment en valeur absolue en gardant le signe du dernier terme $\Phi(x)$; le nombre des variations de la série et le nombre des racines considérées sont par suite de même parité, d'où résulte immédiatement la proposition susénoncée.

Des considérations toutes semblables s'appliquent au cas où $F(x)$ est une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, et encore à celui où $F(x)$ est une série procédant à la fois suivant les puissances croissantes et suivant les puissances décroissantes de la variable.

3. Soit

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \tag{3}$$

un polynôme entier du degré m; je considérerai la suite des polynômes

$$\begin{aligned}
&f_m(x) = A_0,\\
&f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1,\\
&f_{m-2}(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&f_1(x) = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m+2} + \ldots + A_{m-1}\\
&f(x) \;= A_0 x^m \;\; + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,
\end{aligned}$$

dont le dernier est précisément le polynôme donné.

Les valeurs que prennent ces polynômes, pour une valeur donnée de la variable égale à a, se calculent facilement par voie récurrente; on a, en effet, la relation bien connue

$$f_i(a) = a f_{i+1}(a) + A_{m-i},$$

et les quantités $f_m(a), f_{m-1}(a), \ldots, f_1(a), f(a)$ se rencontrent d'elles-mêmes quand on veut obtenir le résultat de la substitution de a dans $f(x)$.

Cela posé, on peut énoncer la proposition suivante :

Si a est un nombre positif, le nombre des variations des termes de la suite

$$f_m(a),\quad f_{m+1}(a),\quad f_{m-2}(a),\quad \ldots,\quad f_1(a),\quad f(a)$$

est au moins égal au nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont supérieurs à a, et, s'il est plus grand, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.

Pour la démontrer, je considère l'identité

$$\frac{f(x)}{x-a} = f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots + f_1(a) + \frac{f(a)}{x-a};$$

pour des valeurs de x supérieures à a, le second membre est développable en une série convergente procédant suivant les puissances décroissantes de x, et l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x-a} &= f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots\\
&\quad + f_1(a) + \frac{f(a)}{x} + \frac{af(a)}{x^2} + \frac{a^2 f(a)}{x^3} + \ldots.
\end{aligned}$$

Le nombre des valeurs de x, pour lesquelles la série est convergente et a pour valeur zéro, est précisément le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont plus grandes que a; ce nombre, en vertu de la proposition fondamentale que j'ai démontrée plus haut, est au plus égal au nombre des variations du second membre, lequel se réduit évidemment au nombre des variations des termes de la suite

$$f_m(a),\quad f_{m-1}(a),\quad f_{m-2}(a),\quad \ldots,\quad f_1(a),\quad f(a),$$

d'où résulte le théorème énoncé précédemment.

Comme application, je considérerai l'équation

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$$

Elle n'a pas de racines négatives; en calculant successivement le résultat de la substitution dans le premier membre des nombres 1, 2 et 3, on forme le Tableau suivant :

x.	$f_5(x)$.	$f_3(x)$.	$f_2(x)$.	$f_1(x)$.	$f(x)$.
$+1$	$+1$	-2	-1	-9	-19
$+2$	$+1$	$+1$	$+3$	-2	-14
$+3$	$+1$	$+6$	$+19$	$+49$	$+137$

Tous les nombre relatifs à $+3$ étant positifs, on en conclut d'abord qu'il n'y a aucune racine de l'équation qui soit supérieure à $+3$; de plus, les nombres relatifs à $+2$ présentant une seule variation, on est certain qu'il y a une racine comprise entre $+2$ et $+3$ et qu'il n'y en a qu'une. D'ailleurs, les nombres relatifs à $+1$ ne présentant non plus qu'une variation, on en conclut qu'il n'y a qu'une racine supérieure à $+1$: c'est précisément celle que nous avons séparée; si enfin on considère la transformation en $\frac{1}{x}$,

$$10x^5 + 8x^4 - x^3 + 3x^2 - 1 = 0,$$

la substitution de $+1$ donne la suite de nombres $+10$, $+18$, $+17$, $+20$, $+19$, qui ne présente aucune variation. L'équation n'a donc aucune racine inférieure à $+1$ et, par suite, a une seule racine positive comprise entre $+2$ et $+3$.

4. La proposition précédente peut encore s'énoncer d'une autre façon.

Le nombre a étant positif, il est clair que les quantités

$$A_0 a^m, \quad A_0 a^m + A_1 a^{m-1}, \quad A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2}, \quad \ldots$$

ont respectivement les mêmes signes que les quantités $f_m(a)$, $f_{m-1}(a)$, $f_{m-2}(a)$, ...; nous pouvons donc dire que le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite

$$A_0 a^m, \quad A_0 a^m + A_1 a^{m-1}, \quad \ldots, \quad A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_{m-1} a + A_m.$$

En général, $P + Q + R + S + \ldots$ désignant une suite quelconque de termes, j'appellerai nombre des *alternances* de cette suite le nombre des variations de la suite

$$P, \quad P + Q, \quad P + Q + R, \quad P + Q + R + S, \quad \ldots.$$

Cette définition étant posée, le théorème précédent peut s'énoncer de la façon suivante :

Soit le polynôme

$$F(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Lx^\lambda,$$

où le second membre est ordonné suivant les puissances décroissantes de x, le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$, qui sont supérieures au nombre positif a, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$Aa^\alpha + Ba^\beta + Ca^\gamma + \ldots + La^\lambda,$$

et si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

La démonstration que j'ai donnée de ce théorème suppose évidemment que les nombres α, β, γ, ... sont entiers et positifs, mais il est facile de voir que cette restriction est inutile.

En premier lieu, si quelques-uns étaient négatifs, en multipliant $F(x)$ par une puissance de x convenablement choisie (ce qui n'altère pas le nombre des racines positives de l'équation), on pourrait rendre tous ces exposants positifs.

En second lieu, si quelques-uns des nombres α, β, γ, ... étaient fractionnaires, on pourrait les rendre entiers en changeant x en

x^ω, ω étant le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres α, β, γ, ... La proposition a donc lieu, même quand les exposants sont négatifs ou fractionnaires, et, par un raisonnement connu, on en déduit qu'elle subsiste encore lorsque les exposants sont incommensurables.

Rien n'empêche même de supposer que le nombre des termes de la fonction $F(x)$ soit illimité, pourvu que la série composée de ses termes soit convergente pour $x = a$.

6. On peut chercher une limite du nombre des racines positives d'une équation $f(x) = 0$ qui sont inférieures à un nombre positif a, en considérant l'expression $\frac{f(x)}{a - x}$ qui, pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et a, est développable en une série procédant suivant les puissances croissantes de la variable. La marche à suivre est exactement celle que j'ai suivie précédemment et, sans m'arrêter aux détails de la démonstration, j'énoncerai de suite la proposition fondamentale suivante :

Étant donné le polynôme

$$F(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Lx^\lambda,$$

où le second membre est ordonné suivant les puissances croissantes de x et où d'ailleurs les exposants sont des quantités réelles quelconques, positives ou négatives, commensurables ou incommensurables, le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ qui sont inférieures à un nombre positif donné a est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$Aa^\alpha + Ba^\beta + Ca^\gamma + \ldots + La^\lambda,$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair (1).

---

(1) Le cas où $F(x)$ est ordonné suivant les puissances décroissantes de x donne également lieu à la proposition suivante :

Le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ qui sont supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A + B + C + \ldots + L,$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Cette proposition subsiste quand le nombre des termes de $F(x)$ est illimité, pourvu que la série composée de ces termes soit convergente pour $x = a$; le nombre de ces variations sera du reste évidemment fini, si la série tend, pour $x = a$, vers une limite différente de zéro.

Je mentionnerai, comme cas particulier et à cause de son importance dans les applications, le corollaire suivant :

Le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$ *qui sont comprises entre* 0 *et* $+1$ *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$A + B + C + \ldots + L,$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

6. Soit $f(x)$ un polynôme entier et posons

$$F(x) = f(a + x) = f(a) + x f'(a) + \frac{x^2}{1.2} f''(a) + \ldots,$$

h désignant un nombre positif, il résulte de ce qui précède que le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$ qui sont comprises entre 0 et h, ou, en d'autres termes, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre a et $a + h$, est au plus égal au nombre des alternances de l'expression

$$f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots.$$

En posant

$$F(x) = f(a - x) = f(a) - x f'(a) + \frac{x^2}{1.2} f''(a) + \ldots,$$

on verrait de même que, h étant une quantité positive, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre a et $a - h$, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$f(a) - h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots.$$

On peut donc énoncer cette proposition :

$f(x)$ étant un polynôme entier, a et h deux nombres quelconques positifs ou négatifs, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre a et $a + h$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots,$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Remarque. — Considérons les diverses quantités

$$f(a),\quad f(a) + h f'(a),\quad f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a),\quad \ldots,$$

dont la dernière est précisément $f(a + h)$, et soient respectivement P et Q la plus petite et la plus grande d'entre elles; toutes les expressions

$$f(a) - P,\quad f(a) - P + h f'(a),\quad f(a) - P + h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a),\quad \ldots$$

seront positives; il en résulte, si l'on pose $f(x) - P = \varphi(x)$, que la suite

$$\varphi(a) + h \varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2} \varphi''(a) + \ldots$$

ne présente pas d'alternance. L'équation $f(x) - P = 0$ n'a donc aucune racine comprise entre a et $a + h$; on prouverait également qu'il en est de même de l'équation $f(x) - Q = 0$; d'où cette conclusion importante :

Lorsque x varie depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + h$, la valeur du polynôme $f(x)$ demeure constamment comprise entre les nombres P et Q.

7. Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale, qu'il est facile d'établir directement et que l'on peut énoncer de la façon suivante :

$f(x)$ désignant un polynôme entier du degré n, soient ω un nombre arbitraire, a et b deux nombres quelconques ne com-

prenant pas entre eux le nombre ω; *cela posé, si l'on désigne par* V *le nombre des alternances que présente la suite*

$$(1) \quad f(x)+(\omega-x)f'(x)+\frac{(\omega-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{(\omega-x)^n}{1.2\ldots n}f^n(x),$$

quand on y remplace x *par* a, *et par* V′ *le nombre des alternances de cette suite quand on y remplace* x *par* b, *le nombre des racines de l'équation* $f(x)=0$ *comprises entre* a *et* b *est au plus égal à la valeur absolue de la différence* V − V′. *Si les nombres* a *et* b *comprennent* ω, *le nombre des racines comprises entre* a *et* b *est au plus égal à la somme* V + V′; *dans les deux cas, la différence des deux nombres, si elle existe, est un nombre pair.*

Pour établir cette proposition, je remarquerai qu'en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
U &= f(x),\\
U_1 &= f(x)+(\omega-x)f'(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
U_i &= f(x)+(\omega-x)f'(x)+\frac{(\omega-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{(\omega-x)^i}{1.2.i}f^i(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
U_n &= f(\omega),
\end{aligned}$$

le nombre des alternances de la suite (1), pour une valeur donnée de x, est le nombre des variations des termes de la suite $U_0, U_1, \ldots, U_{i-1}, U_i, U_{i+1}, \ldots, U_n$, dont la dernière est la constante $f(\omega)$. En supposant, pour fixer les idées, $a < b < \omega$, examinons comment peut se modifier ce nombre de variations, quand x croît d'une façon continue depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

Soit une fonction intermédiaire U_i, qui s'annule pour une valeur α de x comprise entre a et b; le nombre des variations de la suite ne peut changer si U_{i-1} et U_{i+1} sont de signes contraires.

Or on a évidemment

$$U_{i+1}(\alpha)=\frac{(\omega-\alpha)^{i+1}}{1.2\ldots(i+1)}f^{i+1}(\alpha),$$

quantité qui a le même signe que $f^{i+1}(\alpha)$. Un calcul facile donne d'ailleurs

$$U'_i(x)=\frac{(\omega-x)^i}{1.2\ldots i}f^{i+1}(x),$$

d'où l'on voit que $U'_i(\alpha)$ et $U_{i+1}(\alpha)$ sont de même signe. Si donc $U_{i-1}(\alpha)$ et $U_{i+1}(\alpha)$ sont positifs, $U'_i(\alpha)$ est également positif et $U_i(x)$, étant croissant pour $x=\alpha$, passe du négatif au positif, ce qui fait perdre deux variations à la suite considérée. Si, au contraire, $U_{i-1}(\alpha)$ et $U_{i+1}(\alpha)$ sont négatifs, $U_i(x)$ passe du positif au négatif, ce qui fait perdre également deux variations. Il ne peut donc y avoir que des variations perdues, et en nombre pair, si l'une des fonctions intermédiaires s'annule quand x varie depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$.

Quand la fonction $U_0=f(x)$ s'annule, on voit qu'il y a toujours une variation perdue; la proposition est donc démontrée dans le cas où a et b sont tous deux inférieurs à ω, et une démonstration entièrement semblable à la précédente s'établira facilement dans les autres cas.

Remarque I. — Si le nombre arbitraire ω est supposé infiniment grand et positif, les fonctions $U_0, U_1, U_2, \ldots$ ont respectivement les mêmes signes que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., et l'on retrouve ainsi le théorème de Budan.

Remarque II. — Le nombre ω étant une limite supérieure des racines de l'équation, la proposition précédente donne le nombre exact des racines de l'équation lorsque toutes les racines sont réelles et que les nombres a et b sont inférieurs à ω. La même chose a lieu, toutes les racines de l'équation étant réelles, lorsque ω est une limite inférieure des racines et que a et b sont supérieurs à ω.

8. La méthode que j'ai employée ci-dessus, pour obtenir une limite du nombre des racines de l'équation $f(x)=0$, qui sont supérieures à un nombre positif a, repose sur la remarque suivante, à savoir que l'équation $\frac{f(x)}{x-a}=0$ a ces mêmes racines et que le développement de $\frac{f(x)}{x-a}$ suivant les puissances décroissantes de x est convergent pour toutes les valeurs de x supérieures à a.

Il est clair que j'aurais pu faire également usage du développement de l'expression $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$, où p désigne un nombre entier arbitraire, et il est même facile de prouver que l'on obtiendrait ainsi, en général, une limite plus approchée. En désignant, en effet, par $\Phi(x)$ une série procédant suivant les puissances entières (croissantes ou décroissantes) de x, on démontrera aisément que, α désignant un nombre positif quelconque, l'expression $\Phi(x)(x-\alpha)$ (laquelle est généralement une série, mais qui peut accidentellement se réduire à un polynôme entier) présente au moins autant de variations que la série $\Phi(x)$; la démonstration est entièrement semblable à celle du lemme de Segner, sur lequel repose la démonstration que ce géomètre a donnée de la règle des signes de Descartes.

Il en résulte réciproquement que, $F(x)$ désignant un polynôme entier ou une série procédant suivant les puissances entières (croissantes ou décroissantes de x) et α désignant une quantité quelconque positive, le développement de l'expression $\frac{F(x)}{x-\alpha}$ présente, au plus, autant de variations que le développement de $F(x)$; on peut ajouter que, si les nombres de ces variations sont différents, leur différence est un nombre pair.

La même chose a évidemment lieu si l'on considère l'expression plus générale $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, où $\varphi(x)$ est un polynôme quelconque décomposable en facteurs de la forme $x-\alpha$, α étant réel et positif.

Ayant fait cette remarque importante, je considère l'expression $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$, où $f(x)$ désigne un polynôme entier, a un nombre positif et p un nombre entier arbitraire.

Soient n le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$, qui sont supérieures à a, et V le nombre des variations que présente le développement de l'expression précédente, suivant les puissances décroissantes de x; il résulte, des propositions énoncées ci-dessus, que n est au plus égal à V (leur différence, s'il y en a une, étant d'ailleurs un nombre pair); le nombre V ne peut que diminuer quand le nombre entier p augmente : il ne peut pas d'ailleurs diminuer au-dessous d'une certaine limite, puisqu'il doit être toujours supérieur à n.

Le point essentiel dans cette méthode, pour en déduire le nombre n avec le plus d'approximation possible, serait de déterminer exactement cette limite du nombre V, lorsque p grandit

indéfiniment; mais cette recherche paraît présenter de grandes difficultés.

Je ferai, de préférence, usage de la proposition suivante :

Si l'on met la fraction $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ *sous la forme suivante :*

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+\ldots+Lx^{\lambda}+x^{\lambda}\left[\frac{\mathfrak{A}}{x-a}+\frac{\mathfrak{B}}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^p}\right],$$

où les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *vont en décroissant* (λ *pouvant être négatif*), *ce qui d'ailleurs peut se faire d'une infinité de manières, le nombre des racines de l'équation* $f(x)=0$ *qui sont supérieures au nombre positif* a *est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite*

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L; \quad \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{L},$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Soient, en effet, n le nombre des racines de l'équation proposée qui sont supérieures à a, et V le nombre de variations que présente le développement de $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ suivant les puissances décroissantes de x, on a, comme je l'ai démontré,

$$n \leqq V.$$

Désignons maintenant par V_0 le nombre des variations de la suite

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L, \quad \mathfrak{A}$$

et par V_1 le nombre des variations que présente le développement en série de l'expression

$$\frac{\mathfrak{A}}{x-a}+\frac{\mathfrak{B}}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^p}; \tag{1}$$

on aura évidemment

$$V=V_0+V_1.$$

Il résulte de ce qui précède que V_1 est au plus égal au nombre des variations que présente le développement du produit par

$(x-a)$ de l'expression (1), c'est-à-dire au nombre des variations du développement de

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{x-a} + \frac{\mathfrak{C}}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^{p-1}};$$

en désignant par $V(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ le nombre des variations que présentent les deux quantités $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ (nombre qui est d'ailleurs zéro ou l'unité), par V_2 le nombre des variations que présente le développement de l'expression

$$\frac{\mathfrak{B}}{x-a} + \frac{\mathfrak{C}}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^{p-1}},$$

on aura donc

$$V_1 \gtreqless V(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + V_2$$

et, de même,

$$V_2 \gtreqless V(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) + V_3,$$

V_3 désignant le nombre des variations que présente le développement de l'expression

$$\frac{\mathfrak{C}}{x-a} + \frac{\mathfrak{D}}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^{p-2}};$$

d'où l'on déduira sans peine

$$V_1 \gtreqless V(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + V(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) + \dots + V(\mathfrak{K}, \mathfrak{L}),$$

et de là résulte immédiatement la proposition énoncée.

9. L'application du théorème précédent se fait de la façon la plus simple dans le cas où a est égal à l'unité, cas auquel se ramène aisément le cas général par un changement de variable, et en faisant usage d'un algorithme qui a déjà été employé par Horner et par Budan.

Cet algorithme consiste à former successivement, et par voie récurrente, les différents coefficients des développements de $\frac{f(x)}{x-1}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^2}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^3}$, ... suivant les puissances décroissantes de x.

Soit, pour fixer les idées,

$$f(x) = \alpha_0 x^5 + \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5;$$

on écrira d'abord (Tableau A) les coefficients de cette équation (les coefficients des puissances qui manquent étant remplacés par des zéros), en les faisant suivre d'une suite indéfinie de zéros.

Au-dessous, dans une première ligne horizontale, on écrira une suite de nombres $a_0, a_1, a_2, \dots$, dont le premier est α_0, chacun des suivants étant formé en additionnant le terme précédent avec le terme de la suite précédente qui se trouve dans la même colonne verticale, en sorte que $a_1 = a_0 + \alpha_1$, $a_2 = a_1 + \alpha_2$, ...; on voit ainsi qu'à partir du terme a_4 les termes suivants $a_5, a_6, a_7, \dots$ sont tous égaux entre eux. Les nombres ainsi obtenus sont, comme il est facile de le voir, les coefficients du développement de $\frac{f(x)}{x-1}$ suivant les puissances décroissantes de x.

Au-dessous, dans une deuxième ligne horizontale, on écrira une suite de nombres $b_0, b_1, b_2, \dots$ déduits des nombres $a_0, a_1, a_2, \dots$ comme ceux-ci l'ont été de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, en sorte que

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = b_0 + a_1, \quad b_2 = b_1 + a_2, \quad \dots;$$

ces divers nombres sont les coefficients du développement de $\frac{f(x)}{(x-1)^2}$ suivant les puissances décroissantes de x.

En poursuivant et observant la même loi, on formera une suite de lignes horizontales

$$\begin{array}{cccccc} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots, \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots, \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \dots, \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots, \end{array}$$

dont les divers termes donneront les coefficients des développements $\frac{f(x)}{(x-1)^3}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^4}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^5}$, ..., suivant les puissances décroissantes de x.

Si, en particulier, on considère les nombres $a_5, b_4, c_3, d_2, e_1, f_0$, il est aisé de voir qu'à des facteurs numériques près positifs, ils sont égaux à $f(1), f'(1), f''(1), f'''(1), f^{\text{iv}}(1), f^{\text{v}}(1)$; c'est dans le but de former ces nombres d'une façon commode et rapide que Budan faisait usage du Tableau précédent, et il résulte de son théorème que le nombre des variations, présenté par la suite de ces termes, donne une limite supérieure du nombre des racines de l'équation qui sont supérieures à l'unité. Mais on peut faire usage de ce Tableau d'une manière souvent plus avantageuse.

TABLEAU A.

α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	0	0	0	...
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	...
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	...
c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	...
d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	...
e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	...
f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	...
g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	...

En se reportant, en effet, à la façon dont a été construit ce Tableau, on voit sans peine que l'on a les identités suivantes :

$$\frac{f(x)}{(x-1)^3} = c_0 x^2 + c_1 x + c_2 + \frac{c_3}{x-1} + \frac{b_4}{(x-1)^2} + \frac{a_5}{(x-1)^3},$$

$$\frac{f(x)}{(x-1)^4} = d_0 x + d_1 + \frac{d_2}{x} + \frac{d_3}{x^2} + \frac{d_4}{x^2(x-1)}$$
$$+ \frac{c_5}{x^2(x-1)^2} + \frac{b_6}{x^2(x-1)^3} + \frac{a_7}{x^2(x-1)^4};$$

d'où résulte, en vertu du théorème énoncé ci-dessus, que le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont supérieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations que présente chacune des deux suites

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad b_4, \quad a_5$$

et

$$d_0, \quad d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad d_4, \quad c_5, \quad b_6, \quad a_7$$

D'une façon générale, si l'on convient d'appeler diagonale principale la diagonale qui renferme les nombres a_5, b_4, c_3, d_2, e_1, f_0 et qui donne (à des facteurs numériques près positifs) les valeurs de $f(x)$ et de ses dérivées pour $x = 1$, on peut énoncer la proposition suivante :

Étant formé le Tableau A, si l'on suit une ligne horizontale quelconque jusqu'à ce que l'on atteigne ou que l'on dépasse le terme correspondant de la diagonale principale et qu'ensuite on parcoure le Tableau obliquement et parallèlement à cette diagonale jusqu'à la première ligne horizontale, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont supérieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes du Tableau que l'on a rencontrés successivement pendant ce parcours; et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

En se reportant au Tableau A, on voit ainsi que le nombre des racines positives supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3, \quad e_4, \quad d_5, \quad c_6, \quad b_7, \quad a_8.$$

10. Quelques exemples ne seront pas inutiles pour éclaircir ce qui précède.

Exemple I. — Soit l'équation $x^3 - 4x + 6 = 0$; pour avoir une limite du nombre des racines supérieures à l'unité, on formera le Tableau suivant :

1	0	−4	6	0
1	1	−3	3	3
1	2	−1	2	
1	3	2		
1				

La diagonale principale donne les termes 1, 3, −1, 3, qui présentent deux variations; l'application du théorème de Budan indiquerait donc la possibilité de deux racines.

Mais la suite 1, 3, 2, 2, 3, formée en suivant la troisième ligne horizontale jusqu'au terme + 2 et en remontant parallèlement à la diagonale, n'offre aucune variation; l'équation n'a donc aucune racine supérieure à l'unité.

Pour voir si elle a des racines inférieures à l'unité, considérons la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$6x^3 - 4x^2 + 1 = 0;$$

on formera le Tableau suivant

$$\begin{array}{cccc}
6 & -4 & 0 & 1 \\ \hline
6 & 2 & 2 & 3
\end{array}$$

qui montre immédiatement que l'équation proposée n'a pas de racines positives; l'application de la règle des signes de Descartes à la transformée en $-x$ fait voir d'ailleurs qu'elle a une seule racine négative.

Exemple II. — Soit l'équation

$$x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 15x + 9 = 0,$$

qui n'a évidemment aucune racine négative. Pour avoir une limite du nombre des racines supérieures à l'unité, nous formerons le Tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -5 & 12 & -15 & 9 & 0 \\ \hline
1 & -4 & 8 & -7 & 2 & 2 \\
1 & -3 & 5 & -2 & 0 & \\
1 & -2 & 3 & 1 & & \\
1 & -1 & 2 & & & \\
1 & .. & 0 & & &
\end{array}$$

Les termes de la diagonale principale $1, -1, 3, -2, 2$ offrent ici quatre variations, et par suite l'application du théorème de Budan permet de croire à l'existence de quatre racines; mais, la suite $1, 0, 2, 1, 0, 2$ ne présentant aucune variation, on en conclut que l'équation n'a aucune racine supérieure à l'unité.

Pour rechercher les racines inférieures à l'unité, je considère la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$9x^4 - 15x^3 + 12x^2 - 5x + 1 = 0,$$

qui donne le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
9 & -15 & 12 & -5 & 1 \\ \hline
9 & -6 & 6 & 1 & 2 \\
9 & ..\ 3 & ..\ 9 & ..\ 10 &
\end{array}$$

Comme la suite $9, 3, 9, 10, 2$ n'a pas de variations, on voit que l'équation donnée n'a pas de racine positive inférieure à l'unité; toutes ses racines sont donc imaginaires.

Exemple III. — Soit l'équation $x^4 - 3x^3 + 9x - 9 = 0$, la transformée en $-x$,

$$x^4 + 3x^3 - 9x - 9 = 0,$$

montre immédiatement qu'elle a une seule racine négative. Pour avoir une limite du nombre des racines positives supérieures à l'unité, je forme le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & -3 & 0 & 9 & -9 & & & & \\ \hline
1 & -2 & -2 & 7 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\
1 & -1 & -3 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & \\
1 & 0 & -3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 5 & & & \\
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & & & & \\
1 & ..\ 3 & ..\ 3 & ..\ 2 & & & & &
\end{array}$$

Les termes de la diagonale principale présentent trois variations, mais, la suite

$$1,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 5,\ 1,\ -4,\ -2$$

n'en présentant qu'une, on voit que l'équation proposée a une seule racine supérieure à l'unité.

A l'égard des racines positives inférieures à l'unité, je considérerai la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$9x^4 - 9x^3 + 4x - 1 = 0,$$

qui donne le Tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} 9 & -9 & 4 & -1 \\ \hline 9 & 0 & 4 & 3 \end{array},$$

d'où l'on conclut que l'équation n'a pas de racines inférieures à l'unité.

11. Soit $f(x)$ un polynôme entier; en désignant par ω une quantité positive et par m un nombre entier arbitraire, considérons le développement, suivant les puissances croissantes de x, de la fraction

$$\frac{f(x)}{\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^m}.$$

Soit V le nombre des variations de ce développement; il résulte de ce qui précède que le nombre V ne peut que diminuer quand le nombre m augmente; il est d'ailleurs, au moins, égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, qui sont inférieures à ω. Cela posé, faisons croître indéfiniment les nombres ω et m, de telle sorte que le rapport $\frac{m}{\omega}$ ait pour limite un nombre donné positif z; $\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^m}$ ayant pour limite e^{zx}, on peut énoncer la proposition suivante :

z désignant un nombre positif, le nombre V des variations que présente le développement de $e^{zx} f(x)$ suivant les puissances croissantes de x ne peut que diminuer, quand z augmente, et il est au moins égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

et

$$e^{zx} f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 \frac{x^2}{1.2} + A_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

on trouve aisément

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_0 z + a_1, \quad A_2 = a_0 z^2 + 2a_1 z + 2a_2, \quad \ldots,$$

et, en général,

$$A_i = a_0 z^i + i a_1 z^{i-1} + i(i-1) a_2 z^{i-2} + i(i-1)(i-2) a_3 z^{i-3} + \ldots.$$

D'où l'on voit, z étant positif, que A_i est de même signe que l'expression

$$a_0 z^n + i a_1 z^{n-1} + i(i-1) a_2 z^{n-2} + i(i-1)(i-2) a_3 z^{n-3} + \ldots;$$

si donc on forme le polynôme

$$\begin{aligned} F(x) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} x + a_2 z^{n-2} x(x-1) + \ldots \\ + a_n x(x-1)\ldots(x-n+1), \end{aligned}$$

le nombre V est égal au nombre des variations de la suite

$$F(0), \quad F(1), \quad F(2), \quad \ldots.$$

Posons $z = \frac{1}{\omega}$ et, en changeant x en $\frac{x}{\omega}$,

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-\omega) + a_3 x(x-\omega)(x-2\omega) + \ldots \\ + a_n x(x-\omega)\ldots(x - \overline{n-1}\,\omega), \end{aligned} \right.$$

V est aussi égal au nombre des variations de la suite

$$\Phi(0), \quad \Phi(\omega), \quad \Phi(2\omega), \quad \ldots.$$

En désignant par p' le nombre des racines positives de l'équation $\Phi(x) = 0$, on a d'ailleurs $V \overline{<} p'$; d'où, en vertu de la relation $V \overline{>} p$,

$$p' \overline{>} p.$$

Ainsi l'équation $\Phi(x) = 0$ a au moins autant de racines positives que l'équation $f(x) = 0$; en particulier, si l'équation $f(x) = 0$

a toutes ses racines réelles et positives, il en est de même de l'équation

$$\Phi(x) = 0.$$

Je remarquerai, de plus, que, V étant dans ce cas égal à p, la substitution dans $\Phi(x)$ des nombres $0, \omega, 2\omega, \ldots$ doit précisément donner p variations; d'où il résulte que, i désignant un nombre entier quelconque, l'équation $\Phi(x) = 0$ a, au plus, une racine comprise entre $i\omega$ et $(i+1)\omega$.

Posons, par exemple,

$$f(x) = (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots + x^n;$$

on aura

$$\Phi(x) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x(x-\omega) + \ldots$$
$$+ x(x-\omega)\ldots(x-\overline{n-1}\omega).$$

On voit que l'équation $\Phi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et, de plus, qu'on peut les séparer toutes en substituant dans le polynôme $\Phi(x)$ la suite des nombres

$$0, \quad \omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad \ldots.$$

12. Comme je l'ai démontré, le nombre V des variations des termes du développement de $e^{zx}f(x)$ est au moins égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x) = 0$; ce nombre ne peut d'ailleurs que diminuer lorsque z prend des valeurs de plus en plus grandes. On peut se demander si, pour des valeurs suffisamment grandes de z (et, par conséquent, pour toutes les valeurs plus grandes), V sera précisément égal à p.

Supposons, ce qu'il est toujours permis de faire, que l'équation $f(x) = 0$ n'ait pas de racine nulle. De ce que j'ai établi plus haut, il résulte, en supposant z positif, que V est au plus égal au nombre des racines positives de l'équation $\Phi(x) = 0$, où $\Phi(x)$ représente le polynôme qui figure dans l'égalité (A) (nº 11).

Soit $\omega^k\Theta(\omega)$ le discriminant de ce polynôme; le nombre entier k sera généralement égal à zéro, sauf le cas où l'équation $f(\omega) = 0$ a des racines égales. Désignons par ω_1 un nombre positif inférieur à la plus petite racine positive de l'équation $\Theta(x) = 0$, et faisons varier par degrés insensibles ω, depuis 0 jusqu'à ω_1. L'équation $\Phi(x) = 0$ n'ayant jamais de racine nulle, puisque a_0 est différent de zéro, aucune racine négative ne pourra devenir positive; les racines qui étaient imaginaires pour $\omega = 0$ ne sauraient devenir positives, car elles ne le pourraient qu'en devenant égales deux à deux, ce qui est impossible, puisque ω est plus petit que ω_1. Il pourrait se faire, si l'équation $f(x) = 0$ a des racines égales, que certaines racines positives multiples devinssent imaginaires; dans tous les cas, p' désignant le nombre des racines positives de l'équation $\Phi_1(x) = 0$, où $\Phi_1(x)$ désigne ce que devient le polynôme $\Phi(x)$ quand on y remplace ω par ω_1, on a $p' \leqq p$.

Or, on a $V \leqq p'$ et, par suite, $\leqq p$; d'autre part, $V \geqq p$; de là résulte $V = p$; ainsi le nombre ω_1 ayant été choisi comme je l'ai dit plus haut, si l'on pose $z = \frac{1}{\omega_1}$, on est assuré que pour cette valeur de z (et pour les valeurs plus grandes) le nombre des variations que présente le développement de $e^{zx}f(x)$ est exactement égal au nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

Ce théorème subsiste évidemment si cette équation, contrairement à ce que j'ai supposé, avait des racines nulles.

De là résulte une *méthode* entièrement différente de celle de Lagrange et de celle de Sturm *pour déterminer exactement le nombre des racines positives d'une équation*.

Cette méthode exige seulement le calcul du discriminant $\omega^k\Theta(\omega)$ du polynôme $\Phi(x)$; mais, ce polynôme étant une fonction de la variable ω, le calcul de ce discriminant ne laisse pas que d'être très pénible.

On a ensuite à déterminer une limite inférieure ω_1 des racines positives de l'équation $\Theta(\omega) = 0$ et, cela posé, le nombre des variations de la suite indéfinie

$$\Phi_1(0), \quad \Phi_1(\omega_1), \quad \Phi_1(2\omega_1), \quad \ldots$$

donne exactement le nombre des racines positives de l'équation proposée.

Bien que ce procédé ne soit guère pratique, j'ai cru cependant devoir le mentionner, eu égard au petit nombre des méthodes qui permettent de déterminer le nombre exact des racines d'une équation qui sont comprises entre deux limites données.

II. — Sur les équations de la forme

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0.$$

13. Soit

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

une série indéfinie ordonnée suivant les puissances croissantes de x, dans laquelle je suppose tous les coefficients positifs ou nuls, le premier étant différent de zéro.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad f(x) = A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0,$$

où les α_i désignent des quantités positives que je supposerai rangées par ordre décroissant de grandeur, en sorte que l'on ait

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_{n-1} > \alpha_n.$$

Cela posé, si nous développons en série le second membre de l'équation (1), nous aurons

$$\begin{aligned} f(x) = a_0(&A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \\ &+ a_1(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n)x \\ &+ a_2(A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2 + \ldots + A_n\alpha_n^2)x^2 \\ &+ a_3(A_1\alpha_1^3 + A_2\alpha_2^3 + \ldots + A_n\alpha_n^3)x^3 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

et il résulte de la règle des signes de Descartes que le nombre p des racines positives de l'équation (1) [*c'est-à-dire le nombre des quantités positives qui annulent $f(x)$ et pour lequel le développement en série de cette fonction est convergent*] est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la série indéfinie

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + \ldots + A_n, \\ A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n, \\ A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2 + \ldots + A_n\alpha_n^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Pour avoir une limite supérieure du nombre de ces variations, arrêtons cette série au terme de rang i,

$$A_1\alpha_1^i + A_2\alpha_2^i + \ldots + A_n\alpha^i,$$

et désignons par V′ le nombre des variations que présentent ces $i+1$ premiers termes.

En désignant par V″ le nombre des variations de la série indéfinie

$$A_1\alpha_1^i + A_2\alpha_2^i + \ldots + A_n\alpha_n^i, \quad A_1\alpha_1^{i+1} + A_2\alpha_2^{i+1} + \ldots + A_n\alpha_n^{i+1}, \quad \ldots,$$

on a évidemment $V = V' + V''$.

Or la seconde série se composant des valeurs que prend la fonction

$$\Phi(x) = A_1\alpha_1^i\alpha_1^x + A_2\alpha_2^i\alpha_2^x + \ldots + A_n\alpha_n^i\alpha_n^x,$$

lorsqu'on y fait successivement $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, ..., le nombre des variations des termes de cette série est au plus égal au nombre des racines positives de l'équation $\Phi(x) = 0$, ou encore au nombre des racines supérieures à l'unité de l'équation

$$(2) \qquad A_1\alpha_1^i z^{\log\alpha_1} + A_2\alpha_2^i z^{\log\alpha_2} + \ldots + A_n\alpha_n^i z^{\log\alpha_n} = 0,$$

que l'on déduit de la précédente en posant $e^x = z$.

Les nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ allant en décroissant, il en est de même des exposants $\log\alpha_1, \log\alpha_2, \ldots, \log\alpha_n$; il en résulte, en vertu d'une proposition démontrée plus haut (n° 5), que le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A_1\alpha_1^i + A_2\alpha_2^i + \ldots + A_n\alpha_n^i.$$

En désignant par R le nombre de ces alternances, on aura donc

$$V'' \leq R \quad \text{et} \quad V \leq V' + R;$$

d'où encore

$$p \leq V' + R.$$

14. Considérons, en particulier, le cas où l'on arrête la série (A) à son premier terme; il résulte de ce qui précède que p est au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$A_1 z^{\log\alpha_1} + A_2 z^{\log\alpha_2} + \ldots + A_n z^{\log\alpha_n} = 0$$

qui sont supérieures à l'unité, et l'on peut énoncer cette proposition importante :

Le nombre des racines positives de l'équation

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0,$$

où les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *sont des quantités positives rangées par ordre décroissant de grandeur, est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n.$$

15. On aurait pu, d'une façon plus générale, considérer l'équation

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = \Phi(x),$$

où $\Phi(x)$ désigne un polynôme entier. Mais je crois inutile de m'étendre sur ce sujet; ce que j'ai dit plus haut suffit pour faire voir de quelle manière on pourrait traiter cette question.

III. — Sur l'équation $\int_a^b e^{-zx} \Phi(z)\, dz = 0$.

16. Appliquons les résultats précédents au cas où $F(x) = e^x$; le développement de cette fonction est, comme on le sait, convergent pour toutes les valeurs de la variable et ne présente que des coefficients positifs.

Soit l'équation

$$A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + A_n e^{\alpha_n x} = 0, \tag{1}$$

où les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vont en décroissant et sont, du reste, positifs ou négatifs.

Cette équation a évidemment les mêmes racines que l'équation suivante

$$A_1 e^{(k+\alpha_1)x} + A_2 e^{(k+\alpha_2)x} + \ldots + A_n^{(k+\alpha_n)x} = 0,$$

où k désigne un nombre positif arbitraire que l'on pourra toujours choisir de telle sorte que les nombres $(k + \alpha_1)$, $(k + \alpha_2)$, $\ldots$, $(k + \alpha_n)$ soient tous positifs.

En appliquant le théorème du n° 14, on voit que l'équation (1) a au plus autant de racines positives que la suite

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n \tag{A}$$

présente d'alternances.

Supposons maintenant que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient les différents termes d'une progression arithmétique dont la raison soit très petite et dont le premier terme et le dernier terme soient respectivement $-a$ et $-b$; je suppose $a < b$. Les coefficients $A_0, A_1, \ldots$ étant complètement arbitraires, on voit que l'équation peut, quand la raison de la progression tend vers zéro, se mettre sous la forme

$$\int_a^b e^{-zx} \Phi(z)\, dz = 0, \tag{2}$$

où $\Phi(z)$ désigne une fonction entièrement arbitraire, continue ou discontinue d'une façon quelconque, pouvant par exemple être nulle dans autant d'intervalles qu'on le veut.

D'autre part, le nombre des alternances de la suite (A) est au plus égal au nombre des racines de l'équation $\int_a^x \Phi(x) dx = 0$, qui sont comprises entre a et b (il pourrait lui être inférieur au cas où cette équation aurait dans cet intervalle des racines d'ordre pair de multiplicité); d'où la proposition suivante :

Le nombre des racines de l'équation (2) *est au plus égal au nombre des racines de l'équation* $\int_a^x \Phi(x)\, dx = 0$, *qui sont comprises entre* a *et* b.

On peut évaluer autrement le nombre des alternances de la suite (A); partageons à cet effet l'intervalle compris entre a et b en intervalles tels que, dans chacun d'eux, la fonction $\Phi(x)$ ne soit pas constamment nulle, soit continue et *de même signe*.

On pourra, en posant ainsi

$$\int_a^b e^{-zx} \Phi(z) dz$$
$$= \int_a^{a_1} e^{-zx} \Phi_1(z) dz + \int_a^{a_2} e^{-zx} \Phi_2(z) dz + \ldots + \int_{a_n}^b e^{-zx} \Phi_n(z)\, dz,$$

énoncer la proposition suivante :

Le nombre des racines positives de l'équation (2) *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$\int_a^{a_1} \Phi_1(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} \Phi_2(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} \Phi_n(x)\,dx.$$

17. Comme application des théorèmes précédents, posons $a = 0$, $b = \infty$ et

$$\Phi(z) = \frac{a_0}{\Gamma(\alpha_0)} z^{\alpha_0 - 1} + \frac{a_1}{\Gamma(\alpha_1)} z^{\alpha_1 - 1} + \ldots + \frac{a_n}{\Gamma(\alpha_n)} z^{\alpha_n - 1},$$

où les α_i désignent des nombres positifs quelconques et Γ la fonction eulérienne de seconde espèce.

L'équation $\int_0^\infty e^{-zx}\Phi(z) = 0$ devient

$$\frac{a_0}{x^{\alpha_0}} + \frac{a_1}{x^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{a_n}{x^{\alpha_n}} = 0,$$

et j'observe que le nombre de ses racines positives est précisément égal au nombre des racines positives de l'équation

$$(1) \qquad a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_n x^{\alpha_n} = 0.$$

D'autre part, l'équation $\int_0^x \Phi(x)\,dx = 0$ devient

$$(2) \qquad \frac{a_0 x^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0 + 1)} + \frac{a_1 x^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \ldots + \frac{a_n x^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n + 1)} = 0,$$

et il résulte de la proposition précédente que le nombre des racines positives de l'équation (1) est au plus égal au nombre des racines positives de l'équation (2).

18. Considérons l'équation du degré n

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0,$$

que je mettrai sous la forme

$$a_0 x^{\omega} + a_1 x^{1+\omega} + a_2 x^{2+\omega} + \ldots + a_n x^{n+\omega} = 0,$$

où ω désigne un nombre positif ou nul.

Il résulte de ce qui précède que l'équation (1) a au plus autant de racines positives que l'équation

$$\frac{a_0}{\Gamma(\omega + 1)} + \frac{a_1 x}{\Gamma(\omega + 2)} + \frac{a_2 x^2}{\Gamma(\omega + 3)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{\Gamma(\omega + n + 1)} = 0,$$

ou encore que l'équation

$$(2) \qquad a_0 + \frac{a_1 x}{\omega + 1} + \frac{a_2 x^2}{(\omega + 1)(\omega + 2)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{(\omega + 1)(\omega + 2)\ldots(\omega + n)} = 0;$$

ω désigne, comme je l'ai dit, une quantité positive quelconque ou zéro.

La même chose a lieu à l'égard des racines négatives, comme il est facile de le voir en considérant les transformées en $-x$. En particulier, on peut énoncer cette propriété importante :

Si l'équation (1) *a toutes ses racines réelles, l'équation* (2) *a également toutes ses racines réelles.*

19. Soit le polynôme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$; formons le produit

$$e^{zx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = U_0 + U_1 z + U_2 z^2 + \ldots,$$

où les U_i sont des fonctions de z. Comme il est aisé de le prouver, on a généralement $\frac{dU_i}{dz} = U_{i-1}$, en sorte que toutes les fonctions d'indice inférieur à U_i sont les dérivées successives de celle-ci.

On a évidemment

$$U_i = \frac{a_0 x^i}{1.2\ldots i} + \frac{a_1 x^{i-1}}{1.2\ldots(i-1)} + \frac{a^2 x^{i-2}}{1.2\ldots(i-2)} + \frac{a_3 x^{i-3}}{1.2\ldots(i-3)};$$

d'où l'on voit que l'équation $U_i = 0$ a autant de racines réelles distinctes de zéro que l'équation

$$a_3 + \frac{a_2 x}{i-2} + \frac{a_1 x^2}{(i-2)(i-1)} + \frac{a_0 x^3}{(i-2)(i-1)i} = 0.$$

Or cette équation a, en vertu du théorème précédent, toutes ses racines réelles si $i - 2$ est plus grand que zéro, et si l'équation $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$ a elle-même toutes ses racines réelles. L'équation $U_i = 0$ a donc également toutes ses racines réelles, si i est > 2, et la même proposition a lieu à l'égard des équations $U_2 = 0$, $U_1 = 0$, puisque U_2 et U_1 sont les deux premières dérivées de U_3.

Cette démonstration s'étend d'elle-même à un polynôme de degré quelconque; d'où le théorème suivant, qu'il est aisé, du reste, d'établir directement :

Soient $f(x)$ un polynôme quelconque décomposable en facteurs réels du premier degré et

$$F(x) = e^{zx} f(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \ldots;$$

U_i *désignant un des coefficients quelconques de ce développement, l'équation en z*

$$U_i = 0$$

a toutes ses racines réelles.

20. $F(x)$ désignant, comme plus haut, la fonction $e^{zx} f(x)$, posons

$$F(x+h) = e^{zh} e^{zx} f(x+h) = V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + \ldots;$$

V_k désignant un quelconque des coefficients de ce développement, posons $V_k = \varphi(z)$, en sorte que $V_{k-1} = \varphi'(z)$, $V_{k-2} = \varphi''(z)$, ...; l'équation $\varphi(z+t) = 0$ a, quel que soit z, toutes ses racines réelles et elle peut s'écrire

$$\varphi(z) + t\varphi'(z) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(z) + \ldots + \frac{t^k}{1.2\ldots k}\varphi^{(k)}(z) = 0$$

ou

$$V_k + tV_{k-1} + \frac{t^2}{1.2}V_{k-2} + \ldots + \frac{t^k}{1.2\ldots k}V_0 = 0,$$

ou encore

$$\frac{F^{(k)}(h)}{1.2\ldots k} + \frac{F^{(k-1)}(h)}{1.2\ldots(k-1)} + \frac{t^2}{1.2}\,\frac{F^{(k-2)}(h)}{1.2\ldots(k-2)} + \ldots + \frac{t^k}{1.2\ldots k}F(h) = 0,$$

ou enfin, en changeant h en x, t en $\frac{1}{t}$ et en chassant les dénominateurs,

$$F(x) + kF'(x)t + \frac{k(k-1)}{1.2}F''(x)t^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}F'''(x)t^3 + \ldots + F^{(k)}(x)t^k = 0;$$

et l'on voit que cette équation en t a, quel que soit x, toutes ses racines réelles.

Si donc on écrit le système suivant

$$\begin{aligned}
&F(x) + tF'(x) = 0,\\
&F(x) + 2tF'(x) + t^2F''(x) = 0,\\
&F(x) + 3tF'(x) + 3t^2F''(x) + t^3F'''(x) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

on voit que, pour toute valeur de x, ces équations ont leurs racines réelles. Il en serait de même des équations

$$\begin{aligned}
&F'(x) + tF''(x) = 0, \qquad F'(x) + 2tF''(x) + t^2F'''(x) = 0, \qquad \ldots,\\
&F''(x) + tF'''(x) = 0, \qquad F''(x) + 2tF'''(x) + t^2F^{\text{IV}}(x) = 0, \qquad \ldots;
\end{aligned}$$

la dérivée $F(x)$ ayant pour valeur $e^{zx}[f(x) + zf'(x)]$ et l'équation $f(x) + zf'(x) = 0$ ayant toutes ses racines réelles, il est clair, en effet, que $F'(x)$ est une fonction de la même espèce que $F(x)$, et il en est de même de toutes ses dérivées.

21. Les propositions précédentes s'établissent du reste très facilement, quand on les suppose démontrées, dans le cas où $F(x)$ est un polynôme entier; il suffit de remarquer que $e^{zx}f(x)$ peut être considéré comme la limite du polynôme $\left(1 + \frac{zx}{n}\right)^n f(x)$, qui est décomposable en facteurs réels du premier degré.

La même chose a lieu à l'égard de la fonction $e^{-ux^2+zx}f(x)$, où je suppose u positif; cette fonction peut être, en effet, considérée comme la limite de $\left(1 - \frac{ux^2}{n}\right)^n \left(1 + \frac{zx}{n}\right)^n f(x)$; mais les propositions précédentes ne s'appliqueraient pas à une fonction de la forme $e^{\varphi(x)}f(x)$, si le polynôme $\varphi(x)$ était d'un degré supérieur au second, ou si, étant du second degré, le coefficient de x^2 était positif.

Ces remarques très simples trouveront d'utiles applications dans la théorie des fonctions transcendantes.

22. En effectuant un changement de variable, le théorème établi au n° 18 peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

L'équation

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{\alpha + \omega} + \frac{a_2 x^2}{(\alpha + \omega)(2\alpha + \omega)} + \frac{a_3 x^3}{(\alpha + \omega)(2\alpha + \omega)(3\alpha + \omega)} + \ldots = 0,$$

où α et ω désignent des quantités positives quelconques, la dernière pouvant être nulle. De là résulte que, étant donnée une équation ayant toutes ses racines réelles, on peut en déduire une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété; en appliquant une seconde fois le théorème précédent, on voit, par exemple, que l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{(\alpha + \omega)(\alpha' + \omega')} + \frac{a_2 x^2}{(\alpha + \omega)(2\alpha + \omega)(\alpha' + \omega')(2\alpha' + \omega')} + \frac{a_3 x^3}{(\alpha + \omega)(2\alpha + \omega)(3\alpha + \omega)(\alpha' + \omega')(2\alpha' + \omega')(3\alpha' + \omega')} + \ldots = 0$$

a toutes ses racines réelles, α' et ω' étant assujetties aux mêmes conditions que α et ω.

Soit, en général, $\Theta(x)$ un polynôme d'un degré quelconque décomposable en facteurs réels du premier degré et ne devenant négatif pour aucune valeur positive de la variable, en sorte que $\Theta(x)$ soit de la forme

$$\Theta(x) = x^p (ax + b)^q (a'x + b')^{q'} (a''x + b'')^{q''}, \quad \ldots,$$

les nombres $p, q, q', q'', \ldots$ étant des nombres entiers ou étant égaux à zéro, $a, a', a'', \ldots$ et $b, b', b'', \ldots$ étant des nombres positifs, on verra aisément par ce qui précède que l'équation

$$a_0 + \frac{a_1}{\Theta(1)} + \frac{a_2 x^2}{\Theta(1)\Theta(2)} + \frac{a_3 x^3}{\Theta(1)\Theta(2)\Theta(3)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{\Theta(1)\Theta(2)\ldots\Theta(n)} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Mais on peut donner une plus grande généralité à cette proposition; l'équation (1) ayant, en effet, toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{1 + \omega} + \frac{a_2 x^2}{(1 + \omega)(1 + 2\omega)} + \frac{a_3 x^3}{(1 + \omega)(1 + 2\omega)(1 + 3\omega)} + \ldots = 0,$$

par suite de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{(1 + \omega)^2} + \frac{a_2 x^2}{(1 + \omega)^2 (1 + 2\omega)^2} + \frac{a_3 x^3}{(1 + \omega)^2 (1 + 2\omega)^2 (1 + 3\omega)^2} + \ldots = 0,$$

et en général de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{(1 + \omega)^k} + \frac{a_2 x^2}{(1 + \omega)^k (1 + 2\omega)^k} + \frac{a_3 x^3}{(1 + \omega)^k (1 + 2\omega)^k (1 + 3\omega)^k} + \ldots = 0,$$

où k désigne un nombre entier quelconque.

Faisons maintenant croître indéfiniment le nombre arbitraire positif $\frac{1}{\omega}$ et le nombre entier k, de telle sorte que $k\omega$ ait pour limite $\log \frac{1}{q}$, q désignant un nombre positif quelconque égal ou inférieur à l'unité.

L'équation précédente deviendra

$$a_0 + a_1 q x + a_2 q^3 x^2 + a_3 q^6 x^3 + \ldots + a_n q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^n = 0,$$

et elle aura toutes ses racines réelles; il en est de même de l'équation obtenue en changeant q en ω^2 et x en $\frac{x}{\omega}$,

$$a_0 + a_1 \omega x + a_2 \omega^4 x^2 + a_3 \omega^9 x^3 + \ldots + a_n \omega^{n^2} x^n = 0.$$

ω désigne une quantité réelle quelconque, dont la valeur absolue est au plus égale à l'unité.

Des considérations que je viens d'exposer résulte immédiatement la proposition suivante :

L'équation (1) *ayant toutes ses racines réelles, l'équation*

$$a_0 + \frac{a_1 \omega x}{\Theta(1)} + \frac{a_2 \omega^4 x^2}{\Theta(1)\Theta(2)} + \frac{a_3 \omega^9 x^3}{\Theta(1)\Theta(2)\Theta(3)} + \ldots + \frac{a_n \omega^{n^2} x^n}{\Theta(1)\Theta(2)\ldots\Theta(n)} = 0$$

a également toutes ses racines réelles; $\Theta(x)$ désigne un polynôme entier quelconque satisfaisant aux conditions ci-dessus énoncées et ω une quantité réelle quelconque, dont la valeur absolue est égale ou inférieure à l'unité.

23. Soit, comme application de ce théorème, l'équation

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \ldots + n x^{n-1} + x^n = 0;$$

ω et $\Theta(x)$ conservant la même signification que ci-dessus, je poserai

$$F(x) = 1 + \frac{n\omega x}{\Theta(1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\omega^4 x^2}{\Theta(1)\Theta(2)} + \ldots + \frac{\omega^{n^2} x^n}{\Theta(1)\Theta(2)\ldots\Theta(n)}$$

Les polynômes de cette forme jouissent des propriétés remarquables suivantes :

1° L'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines réelles.

2° Les diverses dérivées de $F(x)$ s'expriment au moyen de polynômes de la même espèce.

On a, en effet,

$$F'(x) = \frac{n\omega}{\Theta(1)}\left[1 + (n-1)\frac{\omega^3 x}{\Theta(2)} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,\frac{\omega^8 x^2}{\Theta(2)\Theta(3)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\,\frac{\omega^{15} x^3}{\Theta(2)\Theta(3)\Theta(4)} + \ldots\right].$$

Si donc on pose $\Theta(x+1) = H(x)$ et

$$\Phi(x) = 1 + \frac{(n-1)\omega x}{H(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,\frac{\omega^4 x^2}{H(1)H(2)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\,\frac{\omega^9 x^3}{H(1)H(2)H(3)} + \ldots,$$

il vient

$$F'(x) = \frac{n\omega}{\Theta(1)}\,\Phi(\omega^2 x);$$

or $\Phi(x)$ est un polynôme de la même espèce que $F(x)$, puisque $H(x)$ est décomposable en facteurs linéaires réels du premier degré et n'est jamais négatif pour aucune valeur positive de x.

Ce que je viens d'établir pour la première dérivée subsiste encore évidemment pour les dérivées suivantes.

3° Si l'on pose, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire,

$$F(ix) = V(x) + i\,W(x),$$

les équations $V(x) = 0$ et $W(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles et, plus généralement, a désignant une constante réelle quelconque, l'équation

$$V(x) + a\,W(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que cette équation

peut s'écrire

$$1 + \frac{n\omega x}{\Theta(1)}a - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\omega^4 x^2}{\Theta(1)\Theta(2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{\omega^9 x^3}{\Theta(1)\Theta(2)\Theta(3)}a + \ldots = 0,$$

et que l'équation

$$\left[1 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^4 + \ldots\right] + a\left[nx - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\right] = 0$$

a toutes ses racines réelles, quelle que soit la constante réelle a; c'est, en effet, l'équation qui détermine $\tang \frac{\alpha}{n}$ quand on se donne $\tang\alpha$.

En particulier, si l'on fait $\Theta(x) = x$ et $\omega = 1$, on a

$$F(x) = 1 + \frac{nx}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{x^2}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

polynôme qui se présente dans plusieurs questions importantes d'Analyse (¹).

En faisant, en second lieu, $\Theta(x) = 1$, on a

$$F_n(x) = 1 + n\omega x + \frac{n(n-1)}{1.2}\omega^4 x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\omega^9 x^3 + \ldots + \omega^{n^2} x^n;$$

les polynômes ainsi définis satisfont à l'équation suivante

$$F_n(x) = n\omega F_{n-1}(\omega^2 x).$$

24. Un cas particulièrement intéressant est celui où, dans l'équation $\int_a^b e^{-z}\,\Theta(z)\,dz = 0$, on suppose que $\Theta(z)$ soit un poly-

(¹) Voir à ce sujet un Mémoire de M. Tchebychef (*Mélanges mathématiques et astronomiques*, t. II, p. 182. Saint-Pétersbourg, 1859), ma Note *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$ (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 72) et une Note de M. Halphen, *Sur une série pour développer les fonctions d'une variable* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 9 octobre 1882).

nôme entier dont la forme change successivement lorsque la variable z croît depuis a jusqu'à b.

Cette équation peut se mettre alors sous la forme suivante

$$e^{\alpha_0 x} f_0(x) + e^{\alpha_1 x} f_1(x) + \ldots + e^{\alpha_n x} f_n(x) = 0,$$

les α_i désignant des constantes et les f_i des polynômes entiers.

Pour examiner le cas le plus simple, soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des quantités réelles quelconques rangées par ordre croissant de grandeur et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des quantités réelles quelconques; posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, \\ p_1 &= a_0 + a_1, \\ p_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \end{aligned}$$

et considérons l'équation

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} e^{-zx} p_0\, dz + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-zx} p_1\, dz + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} e^{-zx} p_2\, dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\infty} e^{-zx} p_n\, dz = 0.$$

En effectuant les intégrations, il est aisé de voir qu'elle devient simplement

$$a_0 e^{-\alpha_0 x} + a_1 e^{-\alpha_1 x} + a_2 e^{-\alpha_2 x} + \ldots + a_n e^{-\alpha_n x} = 0;$$

et le nombre p de ses racines positives est le même que celui des racines de l'équation

$$a_0 z^{\alpha_0} + a_1 z^{\alpha_1} + a_2 z^{\alpha_2} + \ldots + a_n z^{\alpha_n} = 0,$$

qui sont comprises entre 0 et $+1$. Cette équation résulte en effet de la première quand on y pose $e^{-x} = z$.

On sait d'ailleurs (n° 16) que le nombre p est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p_0\, dz + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_1\, dz + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} p_2\, dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\infty} p_n\, dz,$$

d'où les propositions suivantes :

Les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant rangés par ordre croissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation

$$(1) \qquad a_0 z^{\alpha_0} + a_1 z^{\alpha_1} + a_2 z^{\alpha_2} + \ldots + a_n z^{\alpha_n} = 0$$

qui sont comprises entre 0 et $+1$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$(2) \qquad p_0(\alpha_1 - \alpha_0) + p_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + p_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + p_n . \infty \quad (^1),$$

où $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ ont la signification donnée ci-dessus.

Et encore (ce qui est le même théorème sous une autre forme) :

Si les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont rangés par ordre décroissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation (1) qui sont plus grandes que l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite (2).

25. J'ai fait voir plus haut (n° **14**) que le nombre des racines positives de l'équation

$$(1) \qquad A_0 F(\alpha_0 x) + A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0$$

était au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$A_0 z^{\log \alpha_0} + A_1 z^{\log \alpha_1} + \ldots + A_n z^{\log \alpha_n} = 0,$$

qui sont supérieures à l'unité; d'ailleurs les nombres $\log \alpha_0$, $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ vont en décroissant.

Posons maintenant

$$\begin{aligned} p_0 &= A_0, \\ p_1 &= A_0 + A_1, \\ p_2 &= A_0 + A_1 + A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n; \end{aligned}$$

il résulte, de ce qui précède, que *le nombre des racines posi-*

(1) D'après la définition des alternances d'une suite, il est clair que le nombre des alternances de la suite $a + b + c + d . \infty$ est le nombre des variations des termes de la suite

$$a, \quad a + b, \quad a + b + c, \quad d,$$

tives de l'équation (1) *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$p_0 \log \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + p_1 \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \ldots + p_{n-1} \log \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + p_n . \infty.$$

IV. — Sur les équations de la forme

$$\frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \frac{a_2}{(x-\alpha_2)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0.$$

26. Soit l'équation

$$(1) \qquad \frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \frac{a_2}{(x-\alpha_2)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0,$$

où les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont rangés par ordre décroissant de grandeur et ω un nombre positif arbitraire.

Choisissons un nombre positif k assez grand pour que toutes les quantités $k+\alpha_0, k+\alpha_1, \ldots, k+\alpha_n$ soient positives et formons la transformée en $y = x+k$,

$$\frac{a_0}{[y-(k+\alpha_0)]^\omega} + \frac{a_1}{[y-(k+\alpha_1)]^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{[y-(k+\alpha_n)]^\omega} = 0$$

ou, pour abréger l'écriture,

$$\frac{a_0}{(y-\alpha'_0)^\omega} + \frac{a_1}{(y-\alpha'_1)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(y-\alpha'_n)^\omega} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(2) \qquad \frac{a_0}{\left(1-\frac{\alpha'_0}{y}\right)^\omega} + \frac{a_1}{\left(1-\frac{\alpha'_1}{y}\right)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{\left(1-\frac{\alpha'_n}{y}\right)^\omega} = 0.$$

Soit

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-\omega} = 1 + \frac{M_1}{y} + \frac{M_2}{y^2} + \frac{M_3}{y^3} + \ldots = F\left(\frac{1}{y}\right);$$

l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$F\left(\frac{\alpha'_0}{y}\right) + F\left(\frac{\alpha'_1}{y}\right) + \ldots + F\left(\frac{\alpha'_n}{y}\right) = 0,$$

où le premier membre est convergent pour toutes les valeurs de y plus grandes que α'_0.

Si l'on observe maintenant que tous les coefficients M_i sont positifs, on établira, comme ci-dessus (no 13), que le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supérieures à α'_0 est au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$a_0 x^{\log \alpha'_0} + a_1 x^{\log \alpha'_1} + \ldots + a_n x^{\log \alpha'_n} = 0,$$

qui sont supérieures à l'unité; ce nombre est donc au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

D'ailleurs le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supérieures à α'_0, c'est-à-dire à $\alpha_0 + k$, est précisément égal au nombre des racines de l'équation (1) qui sont supérieures à α_0. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant rangées par ordre décroissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation

$$\frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0$$

qui sont supérieures à α_0 est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

Le nombre des alternances est pair ou impair, suivant que les deux quantités a_0 et $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ sont de même signe ou de signes contraires; il en est de même du nombre des racines de l'équation supérieures à α_0, comme on le voit en substituant successivement dans le premier membre de l'équation $+\infty$ et la quantité $\alpha_0 + \varepsilon$, où ε désigne une quantité infiniment petite. Ceci ne s'applique pas au cas où l'on aurait $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$; ce cas écarté, on peut dire que :

Si le nombre des racines de l'équation supérieures à α_0 et le nombre des alternances de la suite formée par les coefficients diffèrent, leur différence est un nombre pair.

28. Laissant de côté, pour l'instant, le cas général, je m'occuperai en particulier de l'équation

$$\frac{a_0}{x-\alpha_0}+\frac{a_1}{x-\alpha_1}+\frac{a_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{a_n}{x-\alpha_n}=0. \tag{1}$$

Dans l'intervalle compris entre α_i et α_{i+1}, intercalons deux nombres ξ et ξ', de telle sorte que les nombres

$$\alpha_0,\quad \ldots,\quad \alpha_i,\quad \xi,\quad \xi',\quad \alpha_{i+1},\quad \ldots,\quad \alpha_n \tag{A}$$

soient rangés par ordre croissant ou décroissant de grandeur, et faisons la substitution

$$x=\frac{X\xi-\xi'}{X-1},$$

d'où l'on déduit

$$X=\frac{x-\xi'}{x-\xi}.$$

Aux quantités de la suite (A) correspondent les quantités suivantes :

$$\alpha'_0,\quad \ldots,\quad \alpha'_i,\quad \infty,\quad 0,\quad \alpha'_{i+1},\quad \alpha'_n,$$

qui seront rangées par succession de grandeur [1].

---

[1] Il est bon de préciser ce que j'entends par là. Des quantités sont dites rangées par succession croissante ou décroissante de grandeur si une quantité variable, qui varie toujours dans le même sens, prend successivement les valeurs des termes de la suite de ces quantités, en passant par l'infini si cela est nécessaire

Ainsi les quantités

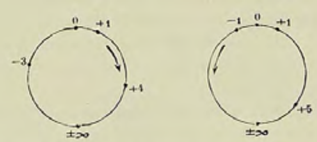
$$+4,\quad -3,\quad 0,\quad +1$$

sont rangées par succession croissante de grandeur, et les quantités

$$1,\quad 0,\quad -1,\quad +5$$

par succession décroissante de grandeur.

Au lieu de ranger les quantités sur une ligne droite, on peut les ranger ainsi :



sur un *cycle* (cercle parcouru dans un sens déterminé).

On voit aisément que toutes les quantités α'_k sont positives : α'_i est donc la plus grande d'entre elles ; l'équation (1) devient, en effectuant la substitution indiquée ci-dessus,

$$\sum \frac{a_k}{\dfrac{X\xi-\xi'}{X-1}-\alpha_k}=0$$

ou encore

$$\sum \frac{a_k}{X(\xi-\alpha_k)-(\xi'-\alpha_k)}=\sum \frac{a_k}{\xi-\alpha_k}\,\frac{1}{X-\alpha'_k}.$$

Or, α'_i étant le plus grand des nombres α'_k qui sont tous positifs, en appliquant la proposition démontrée précédemment, on voit que le nombre des racines de l'équation

$$\sum \frac{a_k}{\xi-\alpha_k}\,\frac{1}{X-\alpha'_k}=0 \tag{2}$$

qui sont supérieures à α'_k, c'est-à-dire le nombre des racines de l'équation (1) qui sont comprises dans l'intervalle (ξ, α_i) [1], est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{a_i}{\xi-\alpha_i}+\frac{a_{i-1}}{\xi-\alpha_{i-1}}+\frac{a_{i-2}}{\xi-\alpha_{i-2}}+\ldots+\frac{a_{i+2}}{\xi-\alpha_{i+2}}+\frac{a_{i+1}}{\xi-\alpha_{i+1}}.$$

29. Comme application, considérons l'équation

$$\frac{14}{x+2}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{14}{x-2}=0. \tag{1}$$

Les quantités

$$-2,\quad -1,\quad 0,\quad +1,\quad +2$$

étant rangées par succession de grandeur, nous aurons à considérer les cinq intervalles

$$(-2, -1),\quad (-1, 0),\quad (0, +1),\quad (+1, +2),\quad (+2, -2),$$

dont le dernier renferme l'infini.

---

[1] Des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \tau, \omega$ étant rangées par succession de grandeur, j'appelle intervalle (λ, μ) celui des intervalles déterminés par ces deux nombres qui ne renferme aucun des autres nombres. Cet intervalle peut renfermer l'infini si λ et μ sont de signe contraire ; ainsi, étant donnée la suite

$$+4,\quad -3,\quad 0,\quad +1,$$

l'intervalle $(+4, -3)$ renferme l'infini.

En désignant par ξ une quantité réelle quelconque, nous déduisons, de ce qui précède, les conséquences suivantes :

1° ξ étant dans l'intervalle $(-2, -1)$, le nombre des racines de l'équation (1) qui sont comprises entre ξ et -2 est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi+2}+\frac{14}{\xi-2}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi+1},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et -1, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi+1}+\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{14}{\xi-2}+\frac{14}{\xi+2}.$$

En particulier, faisons, dans la première suite, $\xi=-1-\varepsilon$, ε désignant une quantité infiniment petite positive; la suite devient

$$14-\frac{14}{3}+\frac{1}{2}-2+\infty;$$

comme elle ne présente pas d'alternance, on en conclut que l'équation (1) n'a pas de racine dans l'intervalle $(-2, -1)$.

2° ξ étant dans l'intervalle $(-1, 0)$, le nombre des racines de l'équation qui sont comprises entre ξ et -1 est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi+1}+\frac{14}{\xi+2}+\frac{14}{\xi-2}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{2}{\xi},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et 0 au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{14}{\xi-2}+\frac{14}{\xi+2}-\frac{1}{\xi+1}. \tag{2}$$

Faisons, en particulier, dans la première suite, $x=-\varepsilon$; la suite devient

$$-1+7-7+1-\infty;$$

comme elle présente deux alternances, on voit que l'intervalle $(-1, 0)$ comprend deux racines ou n'en comprend pas.

3° ξ étant dans l'intervalle $(0, +1)$, le nombre des racines de

l'équation qui sont comprises entre 0 et ξ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi+1}+\frac{14}{\xi+2}+\frac{14}{\xi-2}-\frac{1}{\xi-1}, \tag{3}$$

et celui des racines qui sont comprises entre ξ et $+1$, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi-1}+\frac{14}{\xi-2}+\frac{14}{\xi+2}-\frac{1}{\xi+1}+\frac{2}{\xi}.$$

Faisons, par exemple, $\xi=1-\varepsilon$, la première suite devient

$$2-\frac{1}{2}+\frac{14}{3}-14+\infty;$$

elle présente deux alternances : donc l'équation a dans l'intervalle $(0, +1)$ un nombre de racines égal à 0 ou à 2.

On arrive à la même conclusion en substituant dans la seconde suite $+\varepsilon$; elle devient, en effet,

$$+1-7+7-1+\infty,$$

et cette suite présente également deux alternances.

4° ξ étant dans l'intervalle $(+1, +2)$, le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et $+1$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi-1}+\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi+1}+\frac{14}{\xi+2}+\frac{14}{\xi-2},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et $+2$, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi-2}+\frac{14}{\xi+2}-\frac{1}{\xi+1}+\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi-1}.$$

Faisons, par exemple, dans la deuxième suite $\xi=1+\varepsilon$, elle devient

$$-14+\frac{14}{3}-\frac{1}{2}+2-\infty;$$

comme elle ne représente aucune alternance, l'équation n'a aucune racine dans l'intervalle considéré.

5° Considérons enfin l'intervalle $(+2, -2)$ qui contient l'infini; ξ étant dans cet intervalle, le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et $+2$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi-2} - \frac{1}{\xi-1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{14}{\xi+2},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et -2, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi+2} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi-1} + \frac{14}{\xi-2}.$$

Faisons, par exemple, dans la deuxième suite, $\xi = 2 + \varepsilon$, elle devient

$$\frac{7}{2} - \frac{1}{3} + 1 - 1 + \infty;$$

et, comme elle ne présente aucune alternance, l'équation proposée n'a aucune racine dans l'intervalle $(+2, -2)$.

30. L'équation précédente ne peut donc avoir de racines que dans les intervalles $(-1, 0)$ et $(0, +1)$.

Faisons $\xi = -\frac{3}{4}$ dans la suite (2), elle devient

$$-\frac{8}{3} + \frac{4}{7} - \frac{14.4}{11} + \frac{14.4}{5} - 4,$$

et présente une alternance; l'équation a donc une racine et une seule comprise entre 0 et $-\frac{3}{4}$ et, par suite, une et une seule comprise entre $-\frac{3}{4}$ et -1.

En second lieu, faisons, dans la suite (3), $\xi = \frac{3}{4}$, elle devient

$$\frac{8}{3} - \frac{4}{7} + \frac{14.4}{11} - \frac{14.4}{3} + 4;$$

comme elle ne présente qu'une alternance, il en résulte que l'intervalle $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ comprend une seule racine et il en est de même, par suite, de l'intervalle $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

On voit ainsi que l'équation proposée a toutes ses racines réelles; la première est comprise entre -1 et $-\frac{3}{4}$, la deuxième entre $-\frac{3}{4}$ et 0, la troisième entre zéro et $+\frac{3}{4}$, et la quatrième entre $+\frac{3}{4}$ et $+1$.

C'est ce qu'il est, du reste, aisé de vérifier, l'équation mise sous forme entière étant

$$(2x^2-1)(7x^2-4) = 0\ (^1).$$

(1) Ce Mémoire formait les premiers Chapitres d'un Traité que Laguerre se proposait de publier sur la *théorie de la résolution des équations numériques*. La plupart des propositions qu'il renferme avaient été déjà exposées autre part par l'Auteur, mais d'une façon moins complète. C'est pourquoi, afin d'éviter des répétitions et de présenter les résultats sous la forme à laquelle Laguerre avait donné définitivement la préférence, nous avons cru devoir placer ce Mémoire en tête des contributions relatives à la théorie des équations, en dérogeant à la règle que nous nous sommes imposée de classer suivant l'ordre chronologique les travaux relatifs à un même sujet.

E. R.

SUR LE RÔLE DES ÉMANANTS

DANS LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
t. LXXVIII; 1874.

On peut toujours considérer un polynôme algébrique, fonction de la variable x, comme provenant d'une forme homogène $f(x, y)$, dans laquelle on a fait $y = 1$; dans tout ce qui suit, je supposerai que la variable y et les variables analogues y', η, η', ... que je pourrai introduire soient toutes égales à l'unité.

1. Le premier émanant de la forme $f(x, y)$ est le polynôme $\xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy}$; les autres émanants s'obtiennent en opérant sur la forme donnée avec le symbole $\Delta = \left(\xi \frac{d}{dx} + \eta \frac{d}{dy}\right)$, et, pour abréger, je les désignerai par la notation $\Delta^i f(x, y)$. Ils jouent un rôle important dans la théorie de l'équation $f(x, y) = 0$, et, à cet égard, j'énoncerai d'abord le théorème de Rolle sous la forme suivante :

Étant donnée une équation de degré m et à coefficients réels $f(x, y) = 0$, si l'on pose, pour abréger,

$$\Omega = (x\eta - y\xi)\left(\xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy}\right),$$

où ξ désigne une quantité réelle quelconque,

1° *Deux racines consécutives de la proposée contiennent toujours un nombre impair de racines de l'équation $\Omega = 0$;*

2° *Si toutes les racines de la proposée sont réelles, toutes celles de l'équation $\Omega = 0$ sont également réelles et séparent celles de la proposée.*

Je ferai remarquer que l'on peut remplacer l'équation $\Omega = 0$ par l'équation

$$\left(x \frac{dF}{d\xi} + y \frac{dF}{d\eta}\right)\left(\frac{dF}{dx}\frac{dF}{d\eta} - \frac{dF}{d\xi}\frac{dF}{dy}\right) = 0,$$

dont deux racines sont en évidence, les autres pouvant être déterminées par la résolution d'une équation du degré $(m - 2)$.

2. Soit une équation, de degré m, $f(x, y) = 0$, à coefficients réels ou imaginaires; représentons, avec Cauchy, ses m racines par m points du plan que nous appellerons les *points racines;* nous aurons les propositions suivantes :

Théorème I. — *Étant donné un cercle quelconque contenant tous les points racines de l'équation, et étant pris un point quelconque ξ en dehors de ce cercle, toutes les racines d'une quelconque des équations*

$$\Delta^i f(x, y) = 0,$$

que l'on obtient en égalant à zéro un émanant de l'équation proposée, sont également contenues dans l'intérieur de ce cercle.

Remarque. — Si toutes les racines de la proposée étaient en dehors du cercle, le point ξ étant situé en dedans, toutes les racines des équations, obtenues en égalant les émanants à zéro, seraient également en dehors du cercle.

Théorème II. — *Si deux points du plan ξ, ξ' satisfont à la relation*

$$\xi' \frac{df}{d\xi} + \eta' \frac{df}{d\eta} = 0,$$

tout cercle mené par ces deux points (passât-il même par un certain nombre de points racines, pourvu qu'il ne les contienne pas tous) *contient au moins un point racine; il y a en outre au moins un point racine à l'extérieur de ce cercle.*

Remarque I. — La même proposition a lieu si les deux points ξ et ξ' satisfont à l'une quelconque des équations

$$\left(\xi' \frac{d}{d\xi} + \eta' \frac{d}{d\eta}\right)^i f(\xi, \eta) = 0,$$

Remarque II. — En particulier, le cercle décrit sur $\xi\xi'$ comme diamètre contient au moins un point racine; si ξ est une valeur suffisamment approchée d'une racine x_1 de la proposée, ξ' sera lui-même très voisin de ξ, et le cercle ξ ayant $\xi\xi'$ pour diamètre contiendra nécessairement la racine x_1; il résulte même de ce qui précède que cette racine s'écartera très peu du diamètre. On peut rapprocher ce résultat de la méthode d'approximation donnée par Newton.

3. Cauchy a donné, dans son théorème sur les contours, relativement aux racines imaginaires, l'équivalent du théorème de Sturm. Les théorèmes beaucoup plus élémentaires, mais non moins importants, de Rolle et de Descartes, n'ont pas, jusqu'à présent, été étendus au cas des racines imaginaires. Les propositions précédentes, quoique très simples, pourront peut-être jeter quelque jour sur cette question; dans tous les cas, elles mettent indubitablement en évidence le rôle fondamental que jouent dans cette théorie les contours circulaires.

SUR UNE FORMULE NOUVELLE PERMETTANT D'OBTENIR,

PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES,

LES RACINES D'UNE ÉQUATION

DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXIX; 1874.

1. Dans ce qui suit, A et B désignant deux quantités quelconques, j'appellerai AB l'intervalle rempli par l'ensemble des valeurs que prend une variable qui, partant de la valeur initiale A, atteint en croissant constamment la valeur finale B. On voit que, si A est plus grand que B, l'intervalle AB contient la valeur $\pm\infty$.

Cela posé, on a la proposition suivante :

Théorème. — *Étant donnée une équation, de degré n,* $f(x) = 0$, dont toutes les racines sont réelles, *supposons que l'on ait déterminé deux nombres* A *et* B, *tels que l'intervalle* AB *comprenne une seule racine* ξ *de l'équation proposée; si l'on prend, dans cet intervalle, un nombre* α *arbitraire, tel que*

$$\alpha - \frac{nf(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

soit comprise dans le même intervalle, la racine ξ *est nécessairement comprise dans l'intervalle ba, les quantités a et b étant déterminées par les formules*

$$a = \alpha + f(\alpha)\frac{(\alpha - A)f'(\alpha) - nf(\alpha)}{f(\alpha)f'(\alpha) + (\alpha - A)[f(\alpha)f''(\alpha) - f'^2(\alpha)]}$$

et

$$b = \alpha + f(\alpha)\frac{(\alpha - B)f'(\alpha) - nf(\alpha)}{f(\alpha)f'(\alpha) + (\alpha - B)[f(\alpha)f''(\alpha) - f'^2(\alpha)]}.$$

2. Cette méthode diffère, comme on le voit, profondément de celle de Newton, en ce qu'elle utilise non seulement les propriétés de l'équation dans le voisinage de la racine cherchée, mais encore la façon dont elle se comporte pour des valeurs assez éloignées de cette racine.

SUR LA

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXIX; 1874.

1. Étant données deux quantités réelles quelconques A et B, j'appellerai *intervalle* AB l'ensemble des valeurs que prend une quantité variable partant de la valeur initiale A et acquérant, après avoir crû constamment, la valeur finale B. En représentant A et B par deux points d'un axe fixe, ayant respectivement ces quantités pour abscisses, on voit que, si A est plus grand que B, l'intervalle AB renferme le point situé à l'infini.

Je désignerai aussi par *cercle* AB la portion du plan limitée à la circonférence décrite sur AB comme diamètre et renfermant l'intervalle AB; en sorte que, si A est plus grand que B, le cercle AB s'étendra à l'infini.

Enfin je dirai que deux quantités A et B limitent les racines d'une équation, lorsque, des deux intervalles AB et BA, l'un renferme toutes les racines réelles de l'équation, tandis que l'autre n'en renferme aucune; qu'elles les séparent, lorsque chacun de ces intervalles enferme au moins une racine réelle de l'équation.

2. Cela posé, considérons une équation du degré n

$$f(x, y) = 0 \text{ [1]}, \tag{1}$$

ayant toutes ses racines réelles; en désignant par H son hessien et en représentant, pour abréger, $n^2(n-1)\mathrm{H}$ par $-\Delta$, on sait que Δ restera toujours positif, quelle que soit la valeur de la variable, et l'on pourra énoncer les propositions suivantes :

[1] La variable y, que j'introduis ici, pour l'homogénéité des formules, est égale à l'unité ainsi que les variables analogues y' et η.

Théorème I. — *Quelle que soit la valeur réelle attribuée à la variable ξ, si deux quantités réelles x et x' satisfont à la relation*

$$(x\eta - y\xi)(x'\eta - y'\xi)\Delta_\xi + \left(x\frac{df}{d\xi} + y\frac{df}{d\eta}\right)\left(x'\frac{df}{d\xi} + y'\frac{df}{d\eta}\right) = 0, \tag{2}$$

ces deux quantités séparent les racines de l'équation (1).

Théorème II. — *Étant données deux quantités quelconques x et x', ces deux quantités limitent ou séparent les racines de l'équation* (1), *suivant que l'équation* (2), *en y considérant ξ comme l'inconnue, a toutes ses racines imaginaires ou bien a des racines réelles.*

3. Le théorème I peut être mis sous une autre forme plus commode dans les applications. Si, donnant à ξ une valeur réelle fixe, nous faisons varier simultanément x et x' de façon à satisfaire à l'équation (2), nous voyons que les deux points x et x' forment sur l'axe deux *divisions en involution*, dont les points doubles (nécessairement imaginaires) sont donnés par l'équation

$$(x\eta - y\xi)^2\Delta_\xi + \left(x\frac{df}{d\xi} + y\frac{df}{d\eta}\right)^2 = 0.$$

En appelant m le point de l'axe dont l'abscisse est ξ, représentons par M le point du plan dont les coordonnées rectangulaires sont

$$u = \xi - \frac{nf\dfrac{df}{d\xi}}{\left(\dfrac{df}{d\xi}\right)^2 + \Delta_\xi}, \qquad v = -\frac{nf}{\left(\dfrac{df}{d\xi}\right)^2 + \Delta_\xi}\sqrt{\Delta_\xi}.$$

Lorsque m se déplacera sur l'axe, le point M (que j'appellerai le *point adjoint à m*) décrira une courbe (M), dont tous les points jouissent de la propriété suivante :

Théorème III. — *Si, par un point quelconque de la courbe* (M), *on mène deux droites rectangulaires entre elles, les deux points où elles rencontrent l'axe séparent les racines de la proposée.*

4. Concevons maintenant que l'on ait déterminé un intervalle

AB contenant une seule racine α de la proposée et un point M de la courbe (M) situé dans le cercle AB : on pourra toujours le faire, si l'on a une valeur suffisamment approchée de la racine; car, à mesure qu'un point de l'axe se rapproche de cette racine, le point adjoint s'en rapproche lui-même indéfiniment. Menons, par le point M, deux droites respectivement perpendiculaires à MA et MB, et rencontrant l'axe aux points a et b; d'après le théorème III, la racine α est comprise dans les intervalles Aa et bB, et, par suite, dans l'intervalle ba qui leur est commun.

On obtient ainsi deux limites de la racine d'autant plus rapprochées que le point M est plus voisin de la racine. La condition nécessaire et suffisante pour l'application de cette méthode est que le point M soit situé dans le cercle AB; dans la pratique il sera plus commode d'employer un autre critérium.

5. Soit, à cet effet, m un point de l'axe ayant pour abscisse ξ, et m' un autre point de l'axe ayant pour abscisse la valeur ξ' déduite de la relation $\xi' \dfrac{df}{d\xi} + \eta' \dfrac{df}{d\xi} = 0$.

Je dis que, si le point m' est compris dans l'intervalle AB, la méthode précédente peut toujours être employée. On vérifie, en effet, facilement que la circonférence décrite sur mm' comme diamètre passe par le point adjoint M; par hypothèse, cette circonférence est située dans le cercle AB : il en est donc de même du point M.

Le critérium précédent est d'une application plus facile que le premier; il conduit, en outre, à un procédé parfaitement régulier pour approcher indéfiniment de la racine cherchée.

On établira, en effet, facilement la proposition suivante :

Théorème IV. — *Ayant déterminé un intervalle* AB *comprenant une seule racine α de l'équation proposée, soit β une quantité prise dans l'intervalle* AB, *et telle que la quantité $\beta - \dfrac{nf(\beta)}{f'(\beta)}$ soit elle-même comprise dans cet intervalle; supposons, pour fixer les idées, que, quand une variable décrit dans le sens direct l'intervalle* AB, *elle passe par la valeur β avant de passer par la valeur $\beta - \dfrac{nf(\beta)}{f'(\beta)}$.*

Cela posé, en appelant m le point dont l'abscisse est β et M *le point qui lui est adjoint, nous mènerons par* M *une perpendiculaire à la ligne* MB *et coupant l'axe au point m_1. De même, par le point M_1 adjoint au point m_1, nous mènerons une droite perpendiculaire à M_1B et coupant l'axe au point m_2.*

En continuant ainsi, nous déterminerons sur l'axe une série de points $m, m_1, m_2, \ldots, m_i$ et la série des points adjoints M, *$M_1, M_2, \ldots, M_i$.*

Les valeurs des abscisses des points $m, m_1, m_2, \ldots, m_i$ formeront une suite de quantités s'approchant infiniment de la valeur α de la racine et toujours dans le même sens.

Pour avoir, quand on s'arrête à un terme quelconque de la série, m_i par exemple, une limite de l'erreur commise, il suffira de mener par le point M_{i-1} une perpendiculaire à la droite MA, *et de prendre son point d'intersection n_i avec l'axe; la racine α sera nécessairement comprise entre les points m_i et n_i.*

6. Les considérations et les constructions géométriques dont, pour plus de clarté, je me suis servi dans tout ce qui précède devront, dans les applications, être remplacées par des formules analytiques.

On obtiendra ainsi, en particulier, celles que j'ai données brièvement dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter récemment à l'Académie (24 août 1874) [1].

[1] C'est la note de la page 51 du présent volume; d'ailleurs cette note, l'article actuel et le Mémoire suivant sont, en quelque sorte, inséparables.

E. R.

SUR LA

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XVII; 1878.

I.

1. Soit une équation algébrique de degré n et à coefficients réels ou imaginaires; en prenant $\frac{x}{y}$ pour inconnue, elle peut s'écrire sous la forme suivante

$$f(x, y) = 0,$$

f désignant un polynôme homogène et du degré n par rapport aux quantités x et y; ou encore, en posant $z = \frac{x}{y}$,

$$F(z) = f(z, 1) = 0.$$

En prenant d'une façon arbitraire, dans un plan, deux droites rectangulaires pour axe des abscisses et pour axe des ordonnées, je conviendrai, suivant l'usage habituel, de représenter une quantité imaginaire $\alpha + \beta i$ par un point ayant α pour abscisse et β pour ordonnée.

Cela posé, $z = \frac{x}{y}$ étant une quantité imaginaire quelconque représentée par le point m du plan, j'appellerai *point dérivé du point* m le point μ représentant la quantité $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$ déterminée par l'équation

$$\xi f'_y + \eta f'_y = 0.$$

On déduit de cette équation

$$\zeta = -\frac{f'_y}{f'_x},$$

ou, en vertu du théorème sur les fonctions homogènes,

$$\zeta = z - n\frac{F(z)}{F'(z)}.$$

Lorsque l'on considère z comme la valeur approchée d'une racine de l'équation $F(Z) = 0$, en désignant par z' la valeur que l'on en déduit pour cette racine, par la méthode de Newton, on a

$$z' = z - \frac{F(z)}{F'(z)};$$

d'où cette conclusion : Si m est un point du plan représentant une valeur approchée d'une racine de l'équation $F(Z) = 0$, et si la valeur approchée de cette racine, que l'on en déduit par la méthode de Newton, est représentée par le point m', le point μ dérivé du point m s'obtient en portant dans la direction mm', et à partir du point m, une longueur égale à $n \times mm'$.

2. J'établirai d'abord la proposition suivante :

Théorème I. — *Étant donnée une équation algébrique du degré n, si l'on prend un point m arbitrairement dans le plan et si l'on désigne par μ le point dérivé du point m, tout cercle passant par les deux points m et μ, s'il ne passe pas par toutes les racines de l'équation, contient au moins une de ces racines; et, dans ce cas, une au moins des racines est située à l'extérieur du cercle.*

Pour démontrer cette proposition, je remarquerai que, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des quantités imaginaires quelconques, les différents points représentés par l'expression

$$Z = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t},$$

quand on donne à t toutes les valeurs *réelles* possibles, sont situés sur un même cercle, et que, pour deux valeurs imaginaires quelconques de t, les points représentant les valeurs correspondantes de z sont situés du même côté par rapport au contour du cercle, ou de côtés différents, suivant que, dans les valeurs de la variable t, les coefficients de i sont de même signe ou de signes contraires.

Cela posé, $z = \frac{x}{y}$ ayant une valeur quelconque et ζ étant déterminé par l'équation

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta} = -\frac{f'_y}{f'_x},$$

l'expression

$$Z = \frac{tx - \lambda f'_y}{ty - \lambda f'_x},$$

quand on y donne à t toutes les valeurs réelles, représente un cercle passant par le point m représentant z, puisque, pour $t = \infty$, on a $Z = \frac{x}{y}$; ce cercle passe également par le point dérivé μ représentant ζ, puisque, pour $t = 0$, on a

$$Z = -\frac{f'_y}{f'_x}.$$

On voit ainsi, à cause de l'indétermination de λ, que l'expression précédente représente, pour des valeurs réelles de t, les différents points d'un cercle quelconque passant par les deux points m et μ et, d'après ce que j'ai dit plus haut, pour démontrer la proposition énoncée, il suffira de prouver que l'équation

$$F\left(\frac{tx - \lambda f'_y}{tx + \lambda f'_x}\right) = 0,$$

si elle admet des racines imaginaires, admet au moins une racine où le coefficient de i est positif et une racine où ce coefficient est négatif.

L'équation précédente peut s'écrire ainsi :

$$f(tx - \lambda f'_y, ty + \lambda f'_x) = 0,$$

ou, en développant suivant les puissances de t,

$$\text{(1)} \qquad A t^n + B t^{n-2} + C t^{n-3} + \ldots = 0.$$

Le coefficient de t^{n-1} dans cette équation est égal à zéro; un calcul facile montre, en effet, qu'il est égal à

$$\lambda(f'_x f'_y - f'_x f'_y).$$

De là résulte que la somme des racines de l'équation (1) est nulle;

en désignant donc par $a + bi$, $a' + b'i$, ... ces racines, on a

$$\Sigma(a + bi) = 0,$$

d'où

$$\Sigma b = 0;$$

et, par suite, si toutes les valeurs de b ne sont pas nulles, il y a au moins deux de ces valeurs qui sont de signes contraires, ce qui démontre la proposition énoncée.

3. Théorème II. — *Étant donnés un cercle quelconque qui renferme toutes les racines de l'équation $f(X, Y) = 0$ et un point $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$, situé en dehors de ce cercle, tous les points $z = \frac{x}{y}$, définis par l'équation*

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0,$$

sont situés dans l'intérieur du cercle.

En effet, z désignant l'un quelconque des points ainsi définis, ζ est son point dérivé; si z n'était pas situé dans l'intérieur du cercle, par les deux points z et ζ qui lui sont tous deux extérieurs, on pourrait mener un cercle renfermant dans son intérieur le cercle donné et, par suite, toutes les racines, ce qui est contraire à la proposition précédente. Le théorème est donc démontré.

On démontrerait de même la proposition suivante :

Étant donnés un cercle quelconque à l'extérieur duquel sont situées toutes les racines de l'équation

$$f(X, Y) = 0,$$

et un point $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$, situé dans l'intérieur de ce cercle, tous les points $z = \frac{x}{y}$, définis par l'équation

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0,$$

sont situés à l'extérieur de ce cercle.

4. Étant donnée une équation de degré n, $F(z) = 0$, et m étant le point représentatif d'une valeur z, approchée d'une racine de cette équation, désignons par m' le point représentatif de la valeur approchée de cette racine que donne la méthode de Newton. Le

point μ dérivé de m s'obtient en portant, à partir de m dans la direction mm', une longueur égale à $n \times mm'$, et tout cercle passant par les points m et μ contient au moins une racine de l'équation.

En particulier, le cercle décrit sur $m\mu$ comme diamètre contiendra une racine, et, si m est suffisamment voisin de la racine, m sera très voisin de m' et par conséquent de μ; le cercle dont je viens de parler aura donc un rayon très petit et contiendra la racine cherchée.

Dans tous les cas, on peut énoncer la proposition suivante :

Quelle que soit la quantité z, il y a au moins une racine de l'équation $F(z) = 0$ *dont la différence avec l'expression*

$$z - \frac{F(z)}{F'(z)}$$

a un module moindre que $(n-1)$ *fois le module de* $\frac{F(z)}{F'(z)}$.

II.

Examen du cas où toutes les racines de l'équation sont réelles.

5. Considérons une équation du degré n, $F(z) = 0$, ayant toutes ses racines réelles.

Soit la courbe dont l'équation est $u = F(z)$, prenons un point quelconque M sur cette courbe et par ce point menons une parallèle à l'axe des u et la tangente à la courbe. Soient respectivement P et T les points où ces droites coupent l'axe des z; portons sur cet axe, à partir du point P et dans la direction PT, une longueur PT' égale à $n \times$ PT.

Du théorème I et de l'interprétation géométrique de la méthode de Newton, on déduit immédiatement la proposition suivante :

La courbe dont l'équation est $u = F(z)$ *rencontre au moins une fois l'axe des z entre les points* T *et* T'.

6. Cette propriété n'est qu'un cas particulier d'une propriété beaucoup plus générale.

Convenons, comme précédemment, de représenter une quantité imaginaire quelconque $\alpha + \beta i$ par un point d'un plan ayant respectivement α et β pour abscisse et pour ordonnée relativement à deux axes rectangulaires arbitrairement choisis.

L'équation $F(z) = 0$ ayant toutes ses racines réelles, ces diverses racines seront représentées par divers points de l'axe des abscisses.

Cela posé, j'énoncerai d'abord la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation $F(z) = 0$ *ait toutes ses racines réelles est que chaque point du plan et son point dérivé soient situés de part et d'autre de l'axe des abscisses.*

En effet, si un point m et son point dérivé μ se trouvaient d'un même côté relativement à l'axe des abscisses, on pourrait, par les deux points m et μ, faire passer un cercle situé entièrement d'un même côté par rapport à cet axe. L'équation, en vertu du théorème I, aurait donc au moins une racine imaginaire, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Réciproquement, si l'équation a des racines imaginaires, on peut trouver une infinité de points dont les points dérivés sont situés du même côté relativement à l'axe des abscisses.

Il suffit pour le démontrer de remarquer que, quand un point m du plan tend vers une racine ζ de l'équation, le point dérivé μ tend vers la même racine; en prenant m suffisamment rapproché de ζ, on pourra évidemment faire en sorte que le point dérivé soit situé du même côté relativement à l'axe des abscisses.

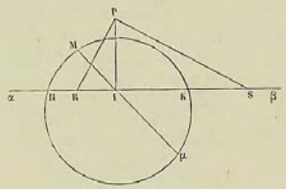
La proposition précédente est donc entièrement établie.

7. La droite $\alpha\beta$ désignant l'axe des abscisses (*fig.* 1), soit M un point quelconque du plan et μ son point dérivé. Comme je viens de le faire remarquer, les deux points M et μ sont situés de part et d'autre de l'axe des abscisses; menons par ces points un cercle quelconque, et soient H et K les points où ce cercle coupe l'axe $\alpha\beta$.

En vertu du théorème I, le cercle renferme au moins une racine, et, comme, par hypothèse, toutes les racines de l'équation sont réelles, cette racine est comprise entre les points H et K.

Les points M et μ restant fixes, on peut faire varier le cercle, et l'on obtiendra ainsi une infinité de segments analogues à HK et tels que chacun d'eux renfermera au moins une racine. Soit I le

Fig. 1.



point de rencontre de $M\mu$ avec l'axe ; au point I, élevons une perpendiculaire IP, telle que $\overline{IP}^2 = \overline{MI} \times \mu I$.

Les divers segments dont je viens de parler sont vus du point P sous un angle droit.

A chaque point M du plan correspond donc un point P, défini comme je viens de le dire et jouissant de la propriété énoncée dans la proposition suivante :

Si, par le point P, *on mène deux droites rectangulaires quelconques interceptant sur l'axe un segment* RS, *ce segment renferme au moins une racine de l'équation et en renferme au plus* $(n-1)$.

En considérant diverses positions du point M, on obtiendra autant de positions du point correspondant P. Il est facile de se rendre compte comment ces points P sont distribués dans le plan.

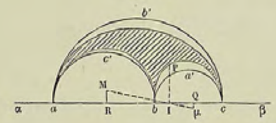
Supposons, pour fixer les idées, que l'équation soit du troisième degré et désignons par a, b, c (*fig.* 2) les points qui, sur l'axe $\alpha\alpha'$, représentent les racines de l'équation.

Sur chacun des trois segments ab, bc et ca comme diamètres décrivons une demi-circonférence : nous obtiendrons ainsi trois arcs de cercle formant une sorte de triangle curviligne $ac'ba'cb'a$.

En examinant la figure, on verra facilement que deux droites rectangulaires quelconques passant par un point situé dans l'inté-

rieur de ce triangle interceptent sur l'axe un segment renfermant au moins une racine de l'équation et en renfermant au plus deux. Au contraire, si l'on prend arbitrairement un point en dehors de ce triangle, on peut toujours par ce point mener deux droites

Fig. 2.



rectangulaires interceptant sur l'axe un segment ne comprenant aucune racine de l'équation ou les comprenant toutes.

Tous les divers points P couvrent donc une portion du plan comprise tout entière dans le triangle curviligne $ac'ba'cb'a$, et il est facile de voir que la courbe qui la limite est tangente aux cercles aux points a, b, c et a un rebroussement en chacun de ces points.

Dans la *fig.* 2, cette portion du plan a été couverte de hachures.

REMARQUES SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XVII; 1878.

1. Étant donné un polynôme $f(x)$, du degré n, on sait le rôle important que joue sa dérivée $f'(x)$ dans la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Dans la plupart des cas, on peut remplacer cette dérivée par le polynôme

$$\varphi(x) = (\lambda - x) f'(x) + n f(x),$$

qui renferme une constante arbitraire λ et qui, quel que soit λ, est généralement, ainsi que la dérivée, du degré $(n - 1)$.

2. Supposons, par exemple, qu'en effectuant sur $f(x)$ et $\varphi(x)$ l'opération du plus grand commun diviseur, en changeant de signe tous les restes, nous formions une suite de polynômes f, φ, φ_1, φ_2, ..., analogues à ceux que l'on forme, dans la méthode de Sturm, en prenant pour point de départ les polynômes f et f'.

Sans entrer dans les détails de la démonstration, on voit clairement que, si l'on fait varier x, la suite des termes f, φ, φ_1, ... ne peut perdre de variations que quand $f(x)$ s'annule. Dans ce cas, l'expression

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = n + (\lambda - x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

passe évidemment du positif au négatif si $x > \lambda$, et du négatif au positif si $x < \lambda$.

D'où la proposition suivante, due à M. Hermite [1] :

Si, dans la suite des polynômes f, φ, φ_1, φ_2, ..., on substitue deux nombres α et β $(\alpha < \beta)$, l'excès du nombre des variations de cette suite pour $x = \alpha$, sur le nombre des variations de cette suite pour $x = \beta$, est égal à l'excès du nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, comprises entre α et β et plus petites que λ, sur le nombre de ces racines qui sont plus grandes que λ.

Il est clair que la proposition précédente peut servir aux mêmes usages que le théorème de Sturm, en ayant soin, lorsque l'on veut déterminer le nombre des racines réelles comprises entre α et β, de substituer le nombre λ dans la suite, si λ est compris entre α et β.

Je remarquerai maintenant que l'on peut toujours déterminer λ de telle sorte que le polynôme $\varphi(x)$ s'abaisse au degré $(n - 2)$. On aura, par suite, une division de moins à faire que dans l'application de la méthode de Sturm; ce qui, dans certains cas, pourra être plus avantageux.

3. Je prendrai, comme second exemple, la séparation des racines d'une équation du cinquième degré.

M. Maleyx, qui a, dans ce Journal, publié plusieurs Notes intéressantes sur la séparation des racines [2], a remarqué que les racines de l'équation du cinquième degré pouvaient être séparées en résolvant deux équations du deuxième degré.

Le procédé suivant sera peut-être plus commode dans la pratique.

En désignant par $f(x)$ un polynôme du cinquième degré, déterminons λ de telle sorte que le polynôme

$$\varphi(x) = (\lambda - x) f'(x) + 5 f(x)$$

s'abaisse au troisième degré; puis effectuons la division de f par φ. Nous obtiendrons l'équation

$$f = \varphi Q + R,$$

où Q et R sont des polynômes du second degré.

[1] *Mémoire sur l'équation du cinquième degré*, p. 31.

[2] *Nouv. Ann*, 2e série, t. XI, p. 404, et t. XIII, p. 385.

En remplaçant φ par sa valeur, la relation précédente peut s'écrire

$$f(1-5Q) = (\lambda - x)\,Q\,f'(x) + R;$$

on en conclut que les racines de $f(x) = 0$ sont séparées par les racines des équations

$$x - \lambda = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0,$$

dont une est du premier degré et les deux autres du second seulement.

SUR LA

RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES (1).

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XVIII; 1879.

4. Pour appliquer cette proposition (2) à la recherche du nombre des racines positives de l'équation

$$(4) \qquad f(x) = 0,$$

où $f(x)$ désigne un polynôme entier, je choisirai un polynôme $\varphi(x)$, assujetti à la seule condition que le développement de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ suivant les puissances croissantes de x ne renferme qu'un nombre limité de variations.

Cela posé, A désignant le plus petit des modules des racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, ce développement est convergent pour toutes les valeurs positives de x plus petites que A et est divergent pour $x = A$; il s'annule d'ailleurs pour toutes les racines positives de l'équation (4) qui sont inférieures à A.

On peut donc énoncer cette proposition :

Le polynôme $\varphi(x)$ satisfaisant à la condition ci-dessus énoncée, le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, dont la valeur est inférieure à A, est au plus égal au nombre des variations du développement de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ suivant les puissances croissantes de x, et, s'il lui est inférieur, la différence est un nombre pair.

5. En considérant seulement les cas les plus simples, soit d'a-

(1) Nous avons supprimé les trois premiers numéros de ce Mémoire qui ne sont que la reproduction des pages 3, 4 et 5 du présent Volume. E. R.

(2) C'est la proposition dont l'énoncé est imprimé en italiques à la page 5. E. R.

bord $\varphi(x) = p - x$, p désignant un nombre quelconque positif.

Soit n le degré de $f(x)$; en désignant par P un polynôme du degré $(n-1)$, on a identiquement

$$\frac{f(x)}{p-x} = \mathrm{P} + \frac{f(p)}{p-x} = \mathrm{P} + f(p)\left(\frac{1}{p} + \frac{x}{p^2} + \frac{x^2}{p^3} + \ldots\right).$$

On voit que tous les termes de ce développement ont, à partir du coefficient de x^n, le même signe. D'ailleurs, ce développement est convergent pour toutes les valeurs positives de x inférieures à p; donc le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, dont la valeur est inférieure à p, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes du développement de $\frac{f(p)}{p-x}$ dont le degré ne dépasse pas n.

Comme il s'agit seulement d'obtenir les signes des termes de ce développement et que p est positif, on peut remplacer l'expression $\frac{f(x)}{p-x}$ par $\frac{f(px)}{p(1-x)}$, ou encore par la suivante :

$$\frac{f(px)}{1-x} = f(px)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots);$$

d'où cette proposition :

Étant donnée l'équation

$$\mathrm{A}_0 x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \mathrm{A}_2 x^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} x + \mathrm{A}_n = 0,$$

le nombre des racines positives de cette équation, dont la valeur est inférieure au nombre positif p, est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$\begin{array}{r}
\mathrm{A}_0 p^n + \mathrm{A}_1 p^{n-1} + \mathrm{A}_2 p^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-2} p^2 + \mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\mathrm{A}_1 p^{n-1} + \mathrm{A}_2 p^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-2} p^2 + \mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\mathrm{A}_2 p^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-2} p^2 + \mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathrm{A}_{n-2} p^2 + \mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\mathrm{A}_n;
\end{array}$$

et, s'il lui est inférieur, la différence est un nombre pair.

6. En désignant toujours par p un nombre quelconque positif, faisons en second lieu

$$\varphi(x) = (p-x)^2.$$

On a identiquement, P étant un polynôme entier du degré $(n-2)$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(p-x)^2} &= \mathrm{P} + \frac{f(p)}{(p-x)^2} - \frac{f'(p)}{p-x} \\
&= \mathrm{P} + \frac{f(p)}{p^2}\left[1 - p\,\frac{f'(p)}{f(p)}\right] \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^3}\left[2 - p\,\frac{f'(p)}{f(p)}\right] x + \ldots \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^{n+1}}\left[n - p\,\frac{f'(p)}{f(p)}\right] x^{n-1} \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^{n+1}}\left[n + 1 - p\,\frac{f'(p)}{f(p)}\right] x^n \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^{n+3}}\left[n + 2 - p\,\frac{f'(p)}{f(p)}\right] x^{n+1} + \ldots
\end{aligned}$$

Le nombre des variations du second membre se compose d'abord des variations du polynôme entier Q, formé des termes du développement de $\frac{f(x)}{(p-x)^2}$ dont l'exposant est inférieur à n, et ensuite des variations des termes de la suite

$$n - p\,\frac{f'(p)}{f(p)}, \quad n + 1 - p\,\frac{f'(p)}{f(p)}, \quad n + 2 - p\,\frac{f'(p)}{f(p)}, \quad \ldots.$$

Comme ces termes vont toujours en croissant, la suite ne peut présenter qu'une variation, et elle la présentera effectivement si le nombre $n - p\,\frac{f'(p)}{f(p)}$ est négatif.

Au lieu du développement de $\frac{f(x)}{(p-x)^2}$, on peut évidemment considérer le suivant :

$$\frac{f(px)}{(1-x)^2} = f(px)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)$$

et énoncer cette proposition :

Étant donnée l'équation

$$f(x) = \mathrm{A}_0 x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \mathrm{A}_2 x^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-2} x^2 + \mathrm{A}_{n-1} x + \mathrm{A}_n,$$

si λ désigne le nombre des racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

positives et inférieures au nombre positif p; et μ le nombre des variations des termes de la suite

$$\begin{array}{r}
A_1 p^{n-1} + 2A_2 p^{n-2} + \ldots + (n-2)A_{n-2}p^2 + (n-1)A_{n-1}p + nA_n, \\
A_2 p^{n-2} + \ldots + (n-3)A_{n-2}p^2 + (n-2)A_{n-1}p + (n-1)A_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_{n-2}p^2 + 2A_{n-1}p + 3A_n, \\
A_{n-1}p + 2A_n, \\
A_n,
\end{array}$$

le nombre λ est au plus égal au nombre $(\mu + 1)$, et leur différence est un nombre impair si la quantité $n - p\dfrac{f'(p)}{f(p)}$ est positive ou nulle; la différence est zéro ou un nombre pair si cette quantité est négative.

7. Soient p et q deux nombres positifs quelconques assujettis à la seule condition que q soit plus grand que p; faisons

$$\varphi(x) = (p - x)(q - x).$$

Le développement en série de $\dfrac{f(x)}{(p-x)(q-x)}$ est convergent pour toutes les valeurs positives de x inférieures à p, et l'on a identiquement, P désignant un polynôme entier du degré $(n - 2)$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(p-x)(q-x)} &= \mathrm{P} + \frac{f(p)}{q-p}\,\frac{1}{p-x} - \frac{f(q)}{q-p}\,\frac{1}{q-x} \\
&= \mathrm{P} + \frac{1}{q-p}\Bigg\{ \frac{f(p)}{q}\left[\frac{q}{p} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] \\
&\quad + \frac{f(p)}{q^2}\left[\frac{q^2}{p^2} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] x + \ldots \\
&\quad + \frac{f(p)}{q^n}\left[\frac{q^n}{p^n} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] x^{n-1} \\
&\quad + \frac{f(p)}{q^{n+1}}\left[\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] x^n \\
&\quad + \frac{f(p)}{q^{n+2}}\left[\frac{q^{n+2}}{p^{n+2}} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] x^{n+1} + \ldots \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Le nombre des variations du second membre se compose d'abord des variations du polynôme entier Q, formé des termes du développement de $\dfrac{f(x)}{(p-x)(q-x)}$ dont l'exposant est inférieur à n, et ensuite des variations des termes de la suite

$$\frac{q^n}{p^n} - \frac{f(q)}{f(p)}, \quad \frac{q^{n+1}}{p^{n+1}} - \frac{f(q)}{f(p)}, \quad \frac{q^{n+2}}{p^{n+2}} - \frac{f(q)}{f(p)}, \quad \ldots.$$

Or, $\dfrac{q}{p}$ étant plus grand que 1, les termes de cette suite vont toujours en croissant et ne peuvent présenter qu'une variation; elle se présentera si $\dfrac{q^n}{p^n} - \dfrac{f(q)}{f(p)}$ est négatif.

Si l'on se reporte à ce que j'ai dit plus haut, on peut donc énoncer la proposition suivante :

En désignant par $f(x)$ un polynôme entier du degré n, et par p et q deux nombres positifs arbitraires, mais dont le second soit supérieur au premier, soient λ le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$ qui sont inférieures à p, et μ le nombre des variations du polynôme formé des termes du développement de

$$\frac{f(x)}{(p-x)(q-x)},$$

dont l'exposant est inférieur à n; le nombre μ est au plus égal au nombre $(\lambda + 1)$, et leur différence est un nombre impair si la quantité

$$\frac{q^n}{p^n} - \frac{f(q)}{f(p)}$$

est positive ou nulle; elle est zéro ou un nombre pair si cette quantité est négative.

SUR LA

DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE

DES RACINES D'UNE ÉQUATION

ET SUR LA

SÉPARATION DES RACINES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXIX; 1879 [1].
Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XIX; 1880.

I.

1. Étant donnée une équation du degré m

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle le coefficient de x^m est supposé positif, Newton a fait connaître une méthode très élégante pour obtenir une limite supérieure des racines positives de cette équation; elle consiste, comme on le sait, à déterminer une quantité a qui rende positives toutes les fonctions

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{m-1}(x),\ f^m(x).$$

L'application de la méthode de Newton ne laisse pas que d'être assez longue dans la pratique, le calcul numérique des termes de la suite

$$f(a),\ f'(a),\ \ldots,\ f^{m-1}(a),\ f^m(a) \tag{2}$$

étant d'autant plus pénible que la connaissance de quelques-uns des termes de cette suite ne facilite en aucune façon le calcul des autres termes.

2. En posant

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

[1] L'article des *Comptes rendus* se compose des nos 5, 7, 9 et 10 du présent Mémoire.
E. R.

je considérerai la suite des polynômes

$$\left\{\begin{aligned} f_m(x) &= A_0, \\ f_{m-1}(x) &= A_0 x + A_1, \\ f_{m-2}(x) &= A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_1(x) &= A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}, \\ f(x) &= A_0 x^m + A_1 x^m + \ldots + A_{m-1} x + A_m, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

dont le dernier est précisément le premier membre de l'équation proposée.

Les valeurs que prennent ces polynômes pour une valeur donnée de la variable égale à a se calculent aisément par voie récurrente; on a, en effet, la relation bien connue

$$f_i(a) = a f_{i+1}(a) + A_{m-i},$$

et les quantités

$$f_m(a),\ f_{m-1}(a),\ \ldots,\ f_1(a),\ f(a)$$

se rencontrent d'elles-mêmes quand on veut obtenir le résultat de la substitution de a dans $f(x)$.

Cela posé, *si un nombre positif a rend positifs tous les polynômes de la suite* (3), *ce nombre est une limite supérieure des racines de l'équation $f(x) = 0$.*

On a, en effet, identiquement,

$$f(x) = (x - a)[f_m(a) x^{m-1} + f_{m-1}(a) x^{m-2} + \ldots + f_1(a)] + f(a),$$

et il est bien clair que, sous les conditions énoncées ci-dessus, le polynôme $f(x)$ a une valeur positive pour toutes les valeurs de x supérieures à a; on peut même ajouter que, pour ces valeurs, $f(x)$ va toujours en croissant avec x, d'où il résulte que a est une limite supérieure des racines de l'équation $f(x) = 0$ et de l'équation $f'(x) = 0$.

3. Pour trouver une limite supérieure des racines de l'équation (1), on essayera donc d'abord la racine α de l'équation

$$f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1 = 0,$$

et l'on calculera de proche en proche les diverses expressions

$$f_{m-2}(\alpha),\quad f_{m-3}(\alpha),\quad \ldots;$$

ce sont, du reste, les nombres que l'on a à calculer quand on veut trouver la valeur de $f(\alpha)$.

Si tous ces nombres sont positifs, α est une limite des racines de l'équation proposée; sinon, on essayera le nombre entier consécutif et l'on poursuivra les opérations jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre β tel que tous les nombres intermédiaires qui se présentent dans le calcul de $f(\beta)$ soient tous positifs.

4. Comme application, considérons l'équation

$$f(x) = x^5 - 10x^4 - 32x^3 + 7x^2 - 500x - 120 = 0,$$

à laquelle est appliquée la méthode de Newton dans l'*Algèbre* de M. Briot (¹).

En cherchant le résultat de la substitution de 10 dans $f(x)$, on rencontre le nombre suivant

$$-32;$$

10 est donc trop faible.

En substituant 11, on obtient les nombres

$$+1,\quad +1,\quad -21;$$

ce dernier nombre étant négatif, 11 est trop faible.

En substituant 12, on obtient les nombres

$$+1,\quad +2,\quad -8;$$

12 est donc trop faible.

En substituant 13, on obtient les nombres

$$+1,\quad +3,\quad +7,\quad 1183-500,\quad 13(1183-500)-120;$$

tous ces nombres étant positifs, on en conclut que 13 est une limite supérieure des racines de l'équation proposée. C'est précisément la limite entière à laquelle conduit l'application de la méthode de Newton.

(¹) *Leçons d'Algèbre*, 8ᵉ édition, p. 298.

II.

5. Les signes des termes de la suite (3), dont les valeurs se présentent d'elles-mêmes quand on calcule la valeur numérique de $f(a)$, peuvent servir à déterminer une limite supérieure du nombre des racines de l'équation, supérieures au nombre a, ce nombre étant d'ailleurs supposé positif.

On a, en effet, la proposition suivante :

Si a est un nombre positif, le nombre des variations de la suite (3) *est au plus égal au nombre des racines de l'équation* (1) *qui sont supérieures à a, et, s'il est plus grand, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.*

Pour la démontrer, je considère l'identité

$$\frac{f(x)}{x-a} = f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots + f_1(a) + \frac{f(a)}{x-a};$$

pour des valeurs de x supérieures à a, le second membre est développable en une série convergente procédant suivant les puissances décroissantes de x, et l'on a

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{x-a} &= f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots \\ &\quad + f_1(a) + \frac{f(a)}{x} + \frac{a f(a)}{x^2} + \frac{a^2 f(a)}{x^3} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Comme je l'ai démontré dans une Note antérieure, *Sur la règle des signes de Descartes* (¹), le nombre des racines de l'équation (1) qui sont supérieures à a est au plus égal au nombre des variations de la série qui compose le second membre de la relation (4). Ce nombre est d'ailleurs le même que le nombre des variations de la suite (3); la proposition est donc démontrée.

6. Comme application, je considérerai l'équation

$$(5)\qquad x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0,$$

étudiée par Briot dans ses *Leçons d'Algèbre* (p. 326).

(¹) Page 3.

En calculant successivement le résultat de la substitution dans le premier membre de l'équation (1) des nombres 0, 1, 2 et 3, on forme le Tableau suivant :

x.	$f_4(x)$.	$f_3(x)$.	$f_2(x)$.	$f_1(x)$.	$f(x)$.
0	$+1$	-3	$+1$	-8	-10
$+1$	$+1$	-2	-1	-9	-19
$+2$	$+1$	$+1$	$+3$	-2	-14
$+3$	$+1$	$+6$	$+19$	$+49$	$+137$

Tous les nombres relatifs à $+3$ étant positifs, on en conclut d'abord que $+3$ est une limite supérieure des racines de l'équation (5); c'est le résultat auquel arrive Briot en groupant les termes du premier membre de l'équation de la façon suivante :

$$(x^5 - 3x^3 - 8x - 10) + x^2.$$

De plus, les nombres relatifs à $+2$ présentant une seule variation, on est certain qu'il y a une racine entre $+2$ et $+3$, et qu'il n'y en a qu'une; Briot arrive aussi à cette conclusion en étudiant la dérivée de l'équation proposée.

D'ailleurs, les nombres relatifs à $+1$ ne présentant non plus qu'une seule variation, on en conclut qu'il n'y a aucune racine entre $+1$ et $+2$; et, comme il est évident que, quand x varie entre 0 et $+1$, le premier membre de l'équation (5) demeure négatif, on voit que cette équation a une seule racine positive comprise entre 2 et $+3$.

III.

7. Des considérations semblables permettent de déterminer une limite supérieure du nombre des racines comprises entre deux nombres *positifs* a et b.

Soit, en effet, l'équation

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Supposons $a < b$ et effectuons la division de $f(x)$ par le trinôme $(x-a)(x-b)$; en désignant par $Mx + N$ le reste de la division, nous obtiendrons un résultat de la forme suivante :

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} = \varphi(x) + \frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}.$$

Mettons la fraction $\dfrac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}$ sous la forme

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},$$

où, comme il est facile de le voir,

$$A = -\frac{f(a)}{b-a} \quad \text{et} \quad B = \frac{f(b)}{b-a};$$

la relation précédente devient

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} &= \varphi(x) + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\\ &= \varphi(x) + \frac{A}{x}\frac{1}{1-\frac{a}{x}} - \frac{B}{b}\frac{1}{1-\frac{x}{b}}.\end{aligned}$$

Pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, la fraction $\dfrac{1}{1-\frac{a}{x}}$ est développable suivant les puissances décroissantes de x, et la fraction $\dfrac{1}{1-\frac{x}{b}}$ suivant les puissances croissantes de x. Si l'on effectue ces deux développements, le nombre des racines de l'équation (1) comprises entre a et b est, comme je l'ai montré dans ma Note déjà citée, au plus égal au nombre des variations présentées par la série ainsi obtenue; on peut d'ailleurs remarquer que tous les termes dans lesquels x a un exposant négatif ont le même signe que $\dfrac{A}{x}$, et que tous les termes dans lesquels x a un exposant supérieur à $(m-1)$ ont le même signe que $-B$.

D'où la proposition suivante :

En désignant par a et b deux nombres positifs dont le plus grand soit b, effectuons la division de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$; soient $\varphi(x)$ le polynôme du degré $(m-2)$ qui constitue la partie entière du quotient, et $Mx+N$ le reste de la division. Décomposons la fraction

$$\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}$$

en éléments simples, en sorte que l'on ait

$$\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Soit $\psi(x)$ l'ensemble des termes dont le degré est inférieur à m dans le développement de $\frac{B}{x-b}$ suivant les puissances croissantes de x.

Cela posé, si l'on ordonne suivant les puissances décroissantes de x le polynôme

$$\varphi(x)+\psi(x)$$

et si l'on ajoute à la suite de ce polynôme le terme $\frac{A}{x}$, le nombre des variations que présente la suite ainsi obtenue est au plus égal au nombre des racines de l'équation (1) qui sont comprises entre a et b, et, si ces deux nombres sont différents, ils diffèrent d'un nombre pair.

7. L'application de la proposition précédente, qui n'exige guère que la division de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, me paraît devoir être plus facile que celle de la méthode due à Budan et à Fourier, laquelle exige le calcul pénible des nombres

$$f(a),\quad f'(a),\quad f''(a),\quad \ldots$$

et

$$f(b),\quad f'(b),\quad f''(b),\quad \ldots.$$

Comme application, je considérerai l'équation

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0,$$

que j'ai déjà traitée plus haut.

Pour avoir une limite du nombre des racines comprises entre $+1$ et $+2$, je divise $f(x)$ par x^2-3x+2.

On a

$$\frac{f(x)}{x^2-3x+2} = x^3+3x^2+4x+7+\frac{5x-24}{x^2-3x+2}$$
$$= x^3+3x^2+4x+7+\frac{19}{x-1}-\frac{14}{x-2}.$$

En développant $-\frac{14}{x-2}$ suivant les puissances croissantes de x,

l'ensemble des termes du quatrième degré dans le développement est

$$7+\frac{7x}{2}+\frac{7x^2}{4}+\frac{7x^3}{16}+\frac{7x^4}{32}.$$

Si nous considérons maintenant la suite des termes de l'expression

$$\frac{7}{32}x^4+\left(\frac{7}{16}+1\right)x^3+\left(\frac{7}{4}+3\right)x^2+\left(\frac{7}{2}+4\right)x+14+\frac{19}{2},$$

comme elle ne présente aucune variation, nous en concluons que l'équation proposée ne renferme aucune racine entre $+1$ et $+2$.

8. J'ajouterai encore, pour éclaircir ce qui précède, une seconde application.

Soit l'équation

$$f(x) = x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0,$$

qui a été considérée par M. J. Petersen dans sa *Théorie des équations algébriques* [1].

En substituant successivement 0 et $+1$ dans le polynôme $f(x)$ et dans ses dérivées, on déduit du théorème de Budan que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre les limites considérées ou qu'elle en a deux, et l'on peut trancher la difficulté en substituant, comme le fait M. Petersen, un nombre intermédiaire et en mettant en usage une règle due à Fourier.

Appliquons la méthode exposée ci-dessus et effectuons la division du polynôme

$$x^5-5x^4-16x^3+12x^2-9x-5$$

par x^2-x; on trouve aisément

$$x^5-5x^4-16x^3+12x^2-9x-5$$
$$=(x^3-4x^2-20x-8)(x^2-x)-17x-5,$$

d'où

$$\frac{x^5-5x^4-16x^3+12x^2-9x-5}{x^2-x}$$
$$= x^3-4x^2-20x-8-\frac{17x+5}{x^2-x}$$
$$= x^3-4x^2-20x-8-\frac{22}{x-1}+\frac{5}{x};$$

[1] *Theorie der algebraischen Gleichungen*, p. 202.

ce qui donne, en développant $\frac{22}{x-1}$ suivant les puissances croissantes de x et en ne retenant du développement que les termes d'un degré inférieur à celui de x^5,

$$x^3 - 4x^2 - 20x - 8 + 22 + 22x + 22x^2 + 22x^3 + 22x^4 + \frac{5}{x},$$

ou, en ordonnant,

$$22x^4 + 23x^3 + 18x^2 + 2x + 14 + \frac{5}{x}.$$

Cette suite ne présentant aucune variation, nous en conclurons que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre o et $+1$; c'est le résultat auquel conduit l'application de la règle de Fourier.

IV.

9. Il y aura souvent lieu de faire simultanément usage du théorème de Budan et du procédé de la division. Il est facile, du reste, d'imaginer des cas très étendus où ce procédé est plus avantageux que l'emploi du théorème de Budan.

Pour en donner un exemple, j'énoncerai d'abord, sous la forme suivante, la proposition que j'ai démontrée plus haut :

En désignant par a et b deux nombres positifs, soit

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient du polynôme $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, et considérons la suite

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(a), \quad f(b) - b(b-a)C_0, \\ f(b) - b^2(b-a)C_1, \quad \ldots, \\ f(b) - b^{m-1}(b-a)C_{m-2}, \quad f(b); \end{array} \right.$$

le nombre des racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

qui sont comprises entre a et b est au plus égal au nombre des variations des termes de cette suite, et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

10. Cela posé, proposons-nous le problème suivant :

Étant donné un polynôme entier $f(x)$, déterminer deux limites entre lesquelles demeure comprise la valeur de ce polynôme, lorsque x prend toutes les valeurs comprises entre les deux nombres positifs a et b.

Il est clair que ce problème peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Trouver deux nombres α et β tels que, pour toutes les valeurs de λ inférieures à α et pour toutes les valeurs de cette variable supérieures à β, l'équation

$$f(x) - \lambda = 0$$

n'ait pas de racine réelle comprise entre a et b.

L'emploi du théorème de Budan ne peut, en général, être d'aucun secours pour la détermination de ces nombres; car, si l'on considère les deux suites

$$f(a) - \lambda, \quad f'(a), \quad f''(a), \quad \ldots$$

et

$$f(b) - \lambda, \quad f'(b), \quad f''(b), \quad \ldots,$$

on voit que, quand l'ensemble des termes $f'(a), f''(a), \ldots$ et l'ensemble des termes $f'(b), f''(b), \ldots$ ne présentent pas le même nombre de variations, il est impossible de déterminer λ de telle sorte que les deux suites précédentes offrent le même nombre de variations : ce qui serait nécessaire pour pouvoir conclure du théorème de Budan que l'équation $f(x) - \lambda = 0$ n'a aucune racine réelle comprise dans l'intervalle considéré.

J'emploierai ici la méthode de la division, et, en désignant comme ci-dessus par

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, je remarque d'abord que ce polynôme est aussi la partie entière du quotient de $f(x) - \lambda$ par $(x-a)(x-b)$.

La suite que nous avons à considérer devient ainsi

$$(6)\qquad \begin{cases} f(a)-\lambda, \quad f(b)-\lambda-b(b-a)C_0, \\ f(b)-\lambda-b^2(b-a)C_1, \quad \ldots, \\ f(b)-\lambda-b^{m-1}(b-a)C_{m-2}, \quad f(b)-\lambda. \end{cases}$$

Désignons respectivement par α et par β le plus petit et le plus grand des termes de la suite (5); si l'on donne à λ une valeur quelconque inférieure à α, tous les termes de la suite (6) sont positifs, d'où il résulte que l'équation $f(x)-\lambda=0$ n'a aucune racine réelle comprise entre a et b lorsque λ est plus petit que α. On prouverait de même que cette équation n'a aucune racine réelle comprise entre ces limites lorsque λ est plus grand que β.

D'où la proposition suivante :

La valeur que prend le polynôme $f(x)$, quand x varie depuis a jusqu'à b, demeure toujours comprise entre les nombres α et β.

V.

11. J'ai démontré précédemment qu'étant donnée une expression entière

$$f(x)=Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots,$$

où les termes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, si l'on forme les polynômes

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= A_0x^m, \\ \Phi_1(x) &= A_0x^m+Bx^n, \\ \Phi_2(x) &= A_0x^m+Bx^n+Cx^p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$ qui sont supérieures au nombre positif a est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\Phi_0(a), \quad \Phi_1(a), \quad \Phi_2(a), \quad \ldots.$$

La démonstration supposait évidemment que les exposants $m, n, p, \ldots$ étaient des nombres entiers et positifs; mais il est facile de voir que cette restriction est inutile.

En premier lieu, si quelques-uns étaient négatifs, en multipliant $f(x)$ par une puissance de x convenablement choisie (ce qui n'altérerait pas le nombre des racines positives de l'équation), on pourrait rendre tous ces exposants positifs.

En second lieu, si quelques-uns des nombres $m, n, p, \ldots$ étaient fractionnaires, on pourrait les rendre entiers en changeant x en x^ω, ω étant le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres $m, n, p, \ldots$. Par un raisonnement connu, on en déduit que la proposition subsiste encore lorsque les exposants sont incommensurables.

Rien n'empêche même de supposer que le nombre des termes de la fonction $f(x)$ soit illimité, pourvu que la série composée de ces termes soit convergente pour $x=a$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée l'expression

$$f(x)=Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots,$$

où le second membre est une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et convergente pour $x=a$, le nombre des racines positives de l'équation

$$f(x)=0$$

qui sont supérieures au nombre positif a est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\Phi_0(a), \quad \Phi_1(a), \quad \Phi_2(a), \quad \ldots,$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Le nombre de ces variations sera du reste évidemment fini, si la série tend, pour $x=a$, vers une limite différente de zéro, puisque, pour une valeur suffisamment grande de n, les termes

$$\Phi_n(a), \quad \Phi_{n+1}(a), \quad \Phi_{n+2}(a), \quad \ldots$$

doivent avoir le même signe que $f(a)$.

12. Semblablement, étant donnée une expression

$$f(x) = A + Bx^m + Cx^n + Dx^p + \ldots,$$

où le second membre est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x (les exposants $m, n, p, \ldots$ pouvant être d'ailleurs entiers, fractionnaires ou irrationnels) et convergente pour une valeur positive de x égale à a, formons la suite des polynômes

$$\Phi_0(x) = A, \quad \Phi_1(x) = A + Bx^m, \quad \Phi_2(x) = A + Bx^m + Cx^n, \quad \ldots.$$

Cela posé, *le nombre des racines positives de l'équation* $f(x) = 0$ *qui sont inférieures à* a *est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite*

$$\Phi_0(a), \quad \Phi_1(a), \quad \Phi_2(a), \quad \ldots,$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

VI.

13. Je donnerai encore, en terminant, une application de la règle des signes de Descartes aux équations que l'on obtient en égalant à zéro les dénominateurs des réduites de la fonction e^x.

On appelle, comme on le sait, réduite de rang n de la fonction e^x une fraction

$$\frac{\Phi(x)}{F(x)}$$

dont les deux termes sont des polynômes de degré n, tels que le développement de cette fraction suivant les puissances croissantes de x coïncide, jusqu'au terme du degré $2n$ inclusivement, avec le développement de e^x (¹); on peut poser, par conséquent,

$$F(x)e^x = \Phi(x) + R,$$

R désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de x^{2n+1}.

(¹) Sur ces réduites, *voir* notamment le Mémoire de M. Hermite *Sur la fonction exponentielle*, p. 4.

On a d'ailleurs

$$F(x) = x^n - n(n+1)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)x^{n-2} - \ldots,$$

en sorte que le polynôme $F(x)$ ne présente que des variations; par suite, l'équation

$$F(x) = 0$$

ne peut avoir que des racines positives.

Le polynôme $\Phi(x)$, étant égal à $F(-x)$, ne présente que des permanences. J'observe maintenant que la série R satisfait à l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x + 2n)\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

Cette série est de la forme

$$\Sigma A_m x^m,$$

où m doit prendre toutes valeurs entières depuis $2n+1$ jusqu'à l'infini. En substituant cette expression dans l'équation différentielle, on voit aisément que l'on a identiquement

$$\Sigma m(m-1)A_m x^{m-1} - \Sigma m A_m(x^m + 2nx^{m-1}) + n\Sigma A_m x^m = 0,$$

d'où la relation suivante :

$$A_{m+1} = \frac{m-n}{(m-2n)(m+1)}A_m.$$

La fraction

$$\frac{m-n}{(m-2n)(m+1)}$$

étant positive pour toutes les valeurs de m supérieures à $2n$, on en conclut que tous les termes de la série R ont le même signe.

Par suite, le polynôme $\Phi(x)$ et la série R n'ayant que des permanences, on voit que le développement de $e^x F(x)$ présente au plus une seule variation; l'équation

$$e^x F(x) = 0,$$

qui a les mêmes racines que l'équation $F(x) = 0$ et dont le développement est d'ailleurs convergent pour toutes les valeurs de la variable, a donc, en vertu de la règle des signes de Descartes, une racine positive au plus; l'équation $F(x) = 0$ ne peut avoir du reste que des racines positives.

D'où la conclusion suivante :

Si le nombre n est pair, l'équation $F(x) = 0$ *a toutes ses racines imaginaires.*

Si ce nombre est impair, elle a une seule racine réelle [1].

---

[1] Quelques parties, d'ailleurs peu étendues (p. 75, 76 et 83), du présent travail se trouvent, au fond, dans le Mémoire placé en tête de ce Volume; nous avons cru cependant devoir les conserver, pour ne pas rompre la suite des idées. Nous estimons, en effet, qu'il faut avant tout conserver le caractère de l'œuvre, même au prix de quelques redites. E. R.

SUR UNE

MÉTHODE POUR OBTENIR PAR APPROXIMATION

LES

RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE

QUI A TOUTES SES RACINES RÉELLES.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XIX; 1880.

I.

1. Quand on a une valeur suffisamment approchée d'une racine d'une équation, la méthode d'approximation de Newton et la méthode des parties proportionnelles fournissent toutes les deux des moyens commodes et rapides d'approcher indéfiniment de cette racine. La principale difficulté consiste à obtenir cette première valeur approchée que l'on doit prendre comme point de départ.

Je ne crois pas que, si l'on considère la question dans toute sa généralité, il y ait beaucoup à ajouter à ce que l'on sait déjà; il me semble que le problème doit être posé différemment et de la façon suivante :

Une équation étant donnée (ou, si l'on veut, un type d'équations étant donné), trouver une méthode qui conduise de la façon la plus sûre et la plus rapide aux valeurs approchées de ses racines.

La Note qui suit a pour objet de donner une solution de ce problème dans le cas où l'équation proposée est algébrique et a toutes ses racines réelles. Les équations de ce genre se présentent du reste, comme on le sait, très fréquemment dans un grand nombre de questions importantes de l'Analyse.

II.

2. Soit

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

une équation algébrique du degré n, et α, β, γ, ... ses différentes racines; on a l'identité

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \ldots. \tag{2}$$

Si x est une valeur suffisamment approchée de la racine α, la quantité $\frac{1}{x-\alpha}$ qui figure dans le second membre de cette relation est très grande, tandis que les autres quantités $\frac{1}{x-\beta}$, $\frac{1}{x-\gamma}$, ... ont des valeurs beaucoup plus petites; on aura donc sensiblement

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha},$$

et de cette formule on déduit une valeur approchée de α qui ne diffère pas, comme il est aisé de le voir, de la valeur donnée par la méthode d'approximation de Newton.

Je ne chercherai pas ici à corriger cette méthode en essayant d'obtenir une valeur approchée des termes négligés

$$\frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \ldots;$$

je prendrai plutôt comme point de départ l'équation suivante, que l'on obtient en dérivant l'identité (2) :

$$\frac{f'^2 - ff''}{f^2} = \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2} + \frac{1}{(x-\gamma)^2} + \ldots.$$

On en déduit que, α désignant une racine quelconque de l'équation (1), on a

$$\frac{1}{(x-\alpha)^2} < \frac{f'^2 - ff''}{f^2}.$$

En convenant donc, pour plus de clarté, de représenter les différentes valeurs que peut prendre la variable x par des longueurs portées sur une droite à partir d'une origine fixe, on voit que, si

l'on représente par un point M une valeur arbitraire attribuée à x et si l'on porte de part et d'autre du point M une longueur égale en valeur absolue à

$$\frac{f}{\sqrt{f'^2 - ff''}},$$

aucune racine de l'équation (1) ne peut se trouver entre les extrémités N et N' des segments ainsi déterminés, en sorte que les racines de cette équation seront ou supérieures au nombre déterminé par le point N' ou inférieures au nombre déterminé par le point N.

3. Cette propriété n'est évidemment qu'un cas particulier d'une propriété plus générale et renfermant une constante arbitraire.

Toutes les fois, en effet, qu'une proposition relative à des polynômes entiers ne comprend pas uniquement dans son énoncé des covariants (simples ou multiples de ces polynômes), elle est un cas particulier d'une proposition plus générale, dans l'énoncé de laquelle n'entrent que des covariants, et cette proposition plus générale peut se déduire immédiatement de la proposition particulière dont je viens de parler (1).

C'est ce que je pourrais faire ici; mais, pour être mieux compris dans un premier exemple, je suivrai une autre marche et partirai de l'identité suivante, où ξ désigne une quantité arbitraire et où le signe Σ s'étend à toutes les racines de l'équation (1) :

$$\begin{aligned}
\sum\left(\frac{\xi-\alpha}{x-\alpha}\right)^2 &= \sum\frac{(\xi - x + x - \alpha)^2}{(x-\alpha)^2} \\
&= (\xi - x)^2 \sum\frac{1}{(x-\alpha)^2} + 2(\xi - x)\sum\frac{1}{x-\alpha} + n \\
&= (\xi - x)^2 \frac{f'^2 - ff''}{f^2} + 2(\xi - x)\frac{f'}{f} + n \\
&= \frac{nf^2 + 2(\xi - x)ff' + (\xi - x)^2(f'^2 - ff'')}{f^2} \\
&= \frac{[nf + (\xi - x)f']^2 + (\xi - x)^2[(n-1)f'^2 - nff'']}{nf^2}.
\end{aligned}$$

(1) C'est de la même façon qu'en Géométrie tout théorème dans lequel la droite de l'infini ou les ombilics du plan jouent un rôle particulier est un cas particulier d'un théorème plus général dans lequel les ombilics sont remplacés par deux points quelconques du plan. Il est du reste, comme on le sait, très fa-

Pour transformer cette relation, j'introduirai la fonction $f(x, y)$ homogène des deux variables x et y, qui se réduit à $f(x)$ quand on y fait $y = 1$; en supposant donc que cette variable soit toujours, dans la suite des calculs, remplacée par l'unité, j'aurai

$$f(x) = f(x, y)$$

et, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$nf + (\xi - x)f' = \xi f'_x + f'_y.$$

Le polynôme $(n-1)f'^2 - nff''$ ne diffère que par un facteur purement numérique du covariant de $f(x, y)$ que l'on désigne sous le nom de *hessien*; je le représenterai par la lettre H, en sorte que la relation précédente pourra s'écrire

$$\sum\left(\frac{\xi - \alpha}{x - \alpha}\right)^2 = \frac{(\xi f'_x + f'_y)^2 + (\xi - x)^2 \mathrm{H}}{nf^2}. \tag{3}$$

4. En représentant par P le second membre de cette égalité (P est évidemment toujours positif, et il en est de même, comme on le sait, du covariant H), je considère les deux racines X' et X'' de l'équation

$$\left(\frac{\xi - \mathrm{X}}{x - \mathrm{X}}\right)^2 = \mathrm{P}, \tag{4}$$

que l'on peut écrire

$$\mathrm{P}(x - \mathrm{X})^2 - (\xi - \mathrm{X})^2 = 0.$$

Si, dans le premier membre de cette équation, on remplace X par la valeur d'une racine quelconque α de l'équation (1), on obtient un résultat positif; car, en vertu de l'identité (3), on a évidemment

$$\left(\frac{\xi - \alpha}{x - \alpha}\right)^2 < \mathrm{P}.$$

On conclut de là que *toutes les racines* de l'équation (1) sont

cile de passer du théorème particulier au théorème général; j'ai le premier résolu cette question, relativement aux relations angulaires, dans ma *Note sur la théorie des foyers* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 57; 1853).

comprises dans l'un des intervalles compris entre les nombres X' et X'' [1].

Si, au contraire, on remplace X par x, on obtient un résultat négatif, d'où l'on voit que celui des deux segments déterminés par les points X' et X'' qui renferme toutes les racines est celui en dehors duquel est situé le point x.

5. Supposons, pour fixer les idées, que α et β désignent deux racines consécutives de l'équation (1) (α étant $< \beta$) et que nous donnions à x une valeur arbitraire comprise entre ces deux racines; désignons par X' et X'' les deux racines de l'équation (4), X' étant la plus petite des racines.

Il suit de ce qui précède que X' et X'' sont situés, *quelle que soit la quantité* ξ, de part et d'autre du point x, et que toutes les racines sont ou supérieures à X'' ou inférieures à X'; X' et X'' sont donc respectivement des valeurs approximatives des racines α et β plus approchées que la quantité x dont on est parti.

Plus généralement, on peut dire que :

Si l'on désigne par x une quantité prise arbitrairement dans l'intervalle compris entre deux racines consécutives α et β de l'équation (1), *et par* X' *et* X'' *les deux racines de l'équation* (4), *les quantités*

$$\alpha, \quad \mathrm{X}', \quad x, \quad \mathrm{X}'', \quad \beta$$

sont placées par ordre croissant ou décroissant de grandeur [2] *quelle que soit la quantité* ξ.

En particulier, si l'on suppose $\xi = \infty$, l'équation (4) devient

$$\frac{1}{(x - \mathrm{X})^2} = \frac{f'^2 - ff''}{f^2},$$

et l'on retrouve la proposition que j'ai démontrée tout d'abord (n° 2).

[1] On peut passer de la valeur X' à la valeur X'' sans passer par l'infini, ce qui donne un premier intervalle; le second intervalle comprend la valeur infinie de la variable ou, si l'on veut, le point situé à l'infini sur la droite dont les différents points représentent les valeurs de la variable.

[2] Si, en particulier, on considère la plus petite racine α et la plus grande racine β de l'équation, on doit les regarder comme consécutives, l'intervalle qui les sépare comprenant la valeur infinie de la variable.

Pour établir la proposition générale, il suffit même de la supposer démontrée dans ce cas particulier; en introduisant en effet, pour l'homogénéité, des variables Y et η égales à l'unité, l'équation (4) peut se mettre sous la forme suivante

$$\left(\frac{\xi Y - X\eta}{xY - Xy}\right)^2 = \frac{(\xi f'_x + \eta f'_y)^2 + (\xi y - \eta x)^2 H}{nf^2},$$

où l'on voit clairement qu'elle ne renferme que des covariants de la forme $f(x, y)$. Si donc la proposition énoncée est vraie pour une valeur particulière de ξ, elle est vraie (puisque, pour emprunter le langage de la Géométrie, elle est projective) pour toute autre valeur de la même variable.

III.

6. Il résulte des considérations précédentes que, x désignant une quantité prise arbitrairement entre deux racines consécutives α et β de l'équation proposée, on peut trouver une infinité de systèmes de nombres X' et X'' jouissant de la propriété que X' soit compris dans l'intervalle αx et X'' dans l'intervalle $x\beta$.

Comme on peut donner à ξ des valeurs arbitraires, on peut rechercher quelles sont les valeurs de X' et de X'' qui se rapprocheront le plus de α et de β, et il suffit évidemment de résoudre la question dans le cas particulier où $x = \infty$; de là on passera sans difficulté au cas général.

En posant

$$f(x) = ax^n + nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} + \ldots,$$

on trouve aisément que

$$H = n^2(n-1)(b^2 - ac)x^{2(n-2)} + \ldots$$

et qu'en faisant $x = \infty$ la formule (4) devient

$$(\xi - X)^2 = \frac{n(a\xi + b)^2 + n(n-1)(b^2 - ac)}{a^2};$$

d'où l'équation suivante, qui détermine les valeurs de X,

$$(n-1)a^2\xi^2 + 2a(nb + aX)\xi$$
$$+ n^2b^2 - n(n-1)ac - a^2X^2 = 0.$$

Les valeurs extrêmes de X s'obtiendront en exprimant que cette équation a ses racines égales; elles seront ainsi déterminées par la relation

$$(nb + aX)^2 - (n-1)[n^2b^2 - n(n-1)ac - a^2X^2] = 0,$$

qui peut s'écrire, toutes réductions faites,

$$a^2X^2 + 2abX + (n-1)^2ac - n(n-2)b^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$X = \frac{-b \pm (n-1)\sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et, d'après ce que j'ai démontré plus haut, l'une de ces valeurs est une limite supérieure des racines de l'équation proposée, l'autre en est une limite inférieure ([1]).

7. Cette proposition n'est évidemment qu'un cas particulier d'une proposition plus générale relative à une valeur arbitraire de x, le cas que je viens de considérer correspondant à $x = \infty$.

([1]) Cette proposition peut s'établir directement de la façon suivante. En désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les racines de l'équation $f(x) = 0$, par s_1 la somme de ces racines et par s_2 la somme de leurs carrés, on a évidemment

$$\Sigma(x - \alpha)^2 = nx^2 - 2s_1x + s_2.$$

En désignant par α l'une quelconque des racines, on a donc

$$(x - \alpha)^2 < nx^2 - 2s_1x + s_2;$$

d'où l'on voit que le polynôme

$$(n-1)x^2 + 2(\alpha - s_1)x + s_2 - \alpha^2$$

a toujours une valeur positive. Ses facteurs sont donc imaginaires, et l'on a, pour toute racine de l'équation,

$$(n-1)(s_2 - \alpha^2) - (\alpha - s_1)^2 > 0;$$

par suite, l'équation

$$(n-1)(s_2 - x^2) - (x - s_1)^2 = 0$$

détermine deux limites des racines de l'équation (1).

Elle peut s'écrire

$$nx^2 - 2s_1x + s_1^2 - (n-1)s_2 = 0,$$

ou

$$a^2x^2 + 2abx + (n-1)^2ac - n(n-2)b^2 = 0$$

en remplaçant respectivement s_1 et s_2 par leurs valeurs $\frac{nb}{a}$ et $\frac{n^2b^2 - n(n-1)ac}{a^2}$; c'est, sauf la notation, l'équation obtenue plus haut par une voie différente.

Pour la trouver, je mettrai la relation précédente sous la forme

$$(5)\qquad (naX + nb)^2 - n^2(n-1)^2(b^2 - ac) = 0,$$

et je considérerai l'équation suivante

$$(6)\qquad (Xf'_x + Yf'_y)^2 - (n-1)(Xy - Yx)^2 H = 0,$$

qui ne renferme que des covariants de $f(x, y)$.

Je remarque que, quand on y fait $x = \infty$, elle se réduit à l'équation (5); sans autre démonstration, on peut donc en conclure que :

Si l'on donne, dans l'équation (6), *à la variable x une valeur comprise entre deux racines consécutives α et β de l'équation* (1), *de ses deux racines X' et X'', l'une est comprise entre α et x et l'autre entre x et β.*

Ces quantités sont d'ailleurs, de toutes celles que l'on peut, en donnant à ξ toutes les valeurs possibles, déduire de l'équation (4), *celles qui approchent le plus des racines α et β.*

Pour résoudre l'équation (6), j'y fais, pour simplifier l'écriture, $Y = y = 1$, et, après l'avoir écrite de la façon suivante

$$[nf + (X - x)f']^2 = (n-1)(X-x)^2 H,$$

j'extrais la racine carrée des deux membres.

On en déduit

$$(7)\qquad \frac{1}{X - x} = \frac{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-1)ff''}}{nf}.$$

8. La formule qui précède résout complètement la question suivante :

Étant donné un nombre arbitraire x, déterminer, sans tâtonnement et par une suite d'opérations régulières, des valeurs de plus en plus approchées de la racine immédiatement supérieure à x ou de la racine qui lui est immédiatement inférieure.

Si, par exemple, on veut déterminer la racine immédiatement supérieure à x, on tirera de la formule (7) une valeur convenable

de la correction $X - x$, en prenant le radical (qui détermine le signe du second membre) avec un signe contraire à celui de f; en partant de cette nouvelle valeur ou, pour faciliter les substitutions, de toute autre valeur comprise entre x et X, on continuera les opérations, qui permettront ainsi d'approcher indéfiniment de la racine cherchée.

Quelle que soit la valeur x dont on parle, cette méthode n'est jamais en défaut comme peut l'être la méthode de Newton, et, dans le cas où la méthode de Newton peut être employée avec sûreté, elle donne toujours une approximation plus grande.

Supposons, pour fixer les idées, que nous appliquions la méthode de Newton au nombre x en vue d'obtenir la racine immédiatement supérieure; la correction est égale à

$$-\frac{f'}{f},$$

quantité positive, et l'on a $ff'' > 0$.

La correction proposée est égale à

$$\frac{nf}{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-1)^2 ff''}},$$

où le radical doit avoir le même signe que f.

Or, ff'' étant positif, il est clair qu'en valeur absolue le dénominateur est plus petit que nf'; la correction proposée est donc supérieure à celle qui résulte de la formule de Newton, et, comme elle demeure également inférieure à l'excès de la racine cherchée sur le nombre x, elle est plus avantageuse.

IV.

9. Pour éclaircir, par quelques exemples, les considérations qui précèdent, je considère d'abord l'équation

$$f = x^3 + 3x^2 - 17x + 5,$$

et je me propose de calculer la racine immédiatement supérieure à 2.

L'équation étant du troisième degré, la formule de correction est

$$\frac{1}{X-x} = \frac{-f' + \sqrt{4f'^2 - 6ff''}}{3f}.$$

On trouve aisément les valeurs suivantes

$$f = -9, \qquad f' = 7, \qquad f'' = 18,$$

d'où l'on déduit

$$X - 2 = \frac{27}{7+\sqrt{1168}} = 0,655,$$

et la valeur approchée $X = 2,655$; la véritable valeur étant, avec trois décimales exactes, $2,669$, l'erreur est plus petite que $\frac{1}{50}$.

La méthode de Newton est ici inapplicable et conduit à la valeur

$$2 + \frac{9}{7} = 3,28\ldots.$$

10. Je considérerai l'équation

$$x^3 - 7x - 7 = 0,$$

en me proposant de calculer sa plus grande racine.

On peut, comme je l'ai montré plus haut (n° 6), prendre pour limites des racines les quantités

$$\frac{-b \pm (n-1)\sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Dans le cas actuel, on a $n = 3$, $a = 1$, $b = 0$ et $c = -\frac{7}{3}$; on en déduit les deux limites

$$\pm 2\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

La plus grande racine est donc inférieure à

$$\sqrt{\frac{7}{3}} = 3,055\ldots.$$

Pour abréger les calculs, je substituerai immédiatement le nombre $3,05$; si, en effet, il était trop faible, la suite des calculs l'indiquerait en amenant une correction positive.

On a

$$f = 0,022625, \qquad f' = 20,9075, \qquad f'' = 18,3,$$

d'où

$$X = 3,05 - \frac{0,067875}{20,9075 + \sqrt{1745,655}} = 3,0489154\ldots,$$

valeur dont les cinq premières décimales sont exactes et qui est approchée par excès.

11. Soit encore l'équation $X_n = 0$ qui définit le polynôme de Legendre du degré n; on sait que les racines de cette équation sont toutes réelles et comprises entre -1 et $+1$.

Proposons de trouver une valeur approchée de la plus grande racine de cette équation; en la désignant par α et en prenant $+1$ comme point de départ, on trouve aisément

$$X_n(1) = 1, \qquad X'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$X''_n(1) = \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{8};$$

la formule (7) donne

$$\frac{1}{\alpha - 1} = -\frac{\frac{n(n+1)}{2} - \sqrt{\frac{(n-1)^2 n^2 (n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2(n+1)(n+2)}{8}}}{n}$$

$$= -\frac{n+1-(n-1)\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}}{2},$$

d'où

$$\alpha = 1 - \frac{2}{n+1-(n-1)\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}}.$$

La quantité α est approchée par excès. Si, comme exemple, nous faisons $n = 7$, il vient

$$\alpha = 1 - \frac{1}{4+6\sqrt{7}} = 0,9496\ldots;$$

la valeur de la racine, calculée avec quatre décimales, est, d'après Gauss (¹),

$$0,9491.$$

(¹) *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (*Œuvres de Gauss*, t. III, p. 195).

Si l'on employait la correction de Newton, on trouverait pour valeur approchée

$$\alpha = 1 - \frac{1}{28} = 0,9643\ldots;$$

on voit qu'elle s'éloigne notablement de la véritable valeur.

V.

12. Un autre exemple plus intéressant est fourni par l'équation du degré n qui détermine $\cos\frac{\pi}{2n}$.

Cette quantité est la plus grande racine de l'équation

$$f(x) = 1 - \frac{n}{1}\frac{n}{1}(1-x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)}{1.3}(1-x)^2$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{n(n+1)(n+2)}{1.3.5}(1-x)^3 + \ldots = 0.$$

Cherchons-en une valeur approchée α, en prenant l'unité pour point de départ.

On a

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = n^2, \quad f''(1) = \frac{n^2(n^2-1)}{3}.$$

La formule (7) donne donc

$$\frac{1}{\alpha - 1} = -\frac{n^2 + \sqrt{n^4(n-1)^2 - \frac{n^3(n-1)^2(n+1)}{3}}}{n}$$
$$= -\left[n + (n-1)\sqrt{\frac{2n^2-n}{3}}\right]$$

et enfin

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n + (n-1)\sqrt{\frac{2n^2-n}{3}}}.$$

On a donc approximativement

$$\cos\frac{\pi}{2n} = 1 - \frac{1}{n + (n-1)\sqrt{\frac{2n^2-n}{3}}},$$

ou, en posant $x = \frac{1}{n}$,

$$(8) \qquad \cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{x^2}{x + (x-1)\sqrt{\frac{2-x}{3}}}.$$

13. Cette formule approximative n'est justifiée que si $\frac{1}{x}$ est un nombre entier égal ou supérieur à 2. On peut cependant l'employer pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et +1.

Pour donner une idée de l'approximation qu'elle comporte, je transcris ici, pour un certain nombre d'arcs, les valeurs des cosinus correspondants calculés au moyen de la formule (8), et en regard leurs véritables valeurs. Dans celles qui sont exprimées en décimales, les quatre premiers chiffres décimaux sont exacts.

Angles.	Valeur du cosinus calculée par la formule (8).	Valeur exacte du cosinus.
0°	1	1
18	0,9512	0,9511
30	0,8662	0,8660
45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
54	0,5878	0,5878
60	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
75	0,2591	0,2588
90	0	0

Je ferai remarquer que, quand l'angle est compris entre 0° et 45° ou entre 60° et 90°, la valeur calculée est supérieure à la valeur exacte; elle lui est inférieure quand l'angle est compris entre 45° et 60°.

Si l'on pose

$$\cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{Vx^2}{x + (x-1)\sqrt{\frac{2-x}{3}}},$$

la fonction V diffère très peu de l'unité quand x varie de 0 à +1.

Elle s'en écarte le plus pour $x = 0$; on a alors, comme il est facile de le voir,

$$V = \frac{\pi^2}{4\sqrt{6}} = 1,00731\ldots.$$

Le maximum de l'erreur commise en employant la formule (8) est environ 0,0003.

VI.

14. La méthode que j'ai exposée ci-dessus présente des avantages incontestables sur celle de Newton; toutefois, elle exige l'extraction d'une racine carrée et la substitution dans le polynôme $f''(x)$ de la valeur approchée de la racine.

L'extraction de la racine carrée n'augmente guère les calculs lorsque l'on peut employer les logarithmes. Quant à la substitution dans la dérivée seconde, il est facile, dans un très grand nombre de cas, d'en obtenir le résultat.

Il existe en effet une classe nombreuse d'équations, ayant toutes leurs racines réelles, qui jouent un rôle important en Analyse [à cette classe appartiennent notamment les polynômes de Legendre, les polynômes définis par l'expression $\cos n(\operatorname{arc}\cos x)$, etc.] et qui jouissent des propriétés suivantes :

En premier lieu, en désignant par V_n le polynôme qui forme le premier membre d'une de ces équations et par n son degré, V_n s'exprime linéairement en fonction de V_{n-1} et de V_{n-2}.

En second lieu, V'_n et V''_n s'expriment d'une façon très simple quand on connaît V_n et V_{n-1}.

Pour trouver le résultat de la substitution d'un nombre donné α dans V_n, on calculera successivement et par voie récurrente le résultat qu'on obtient en effectuant la substitution dans $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}, V_n$; cela posé, les valeurs de $V'_n(\alpha)$ et $V''_n(\alpha)$ s'en déduisent presque sans calcul.

VII.

15. J'ai montré précédemment qu'on pouvait obtenir une infinité d'intervalles ne renfermant aucune racine d'une équation donnée qui a toutes ses racines réelles.

On peut déterminer également une infinité d'intervalles renfermant au moins une racine d'une telle équation.

Pour abréger, je dirai que deux nombres A et A' séparent les racines d'une équation lorsque *chacun des intervalles* compris entre ces nombres renferme au moins une racine, et qu'ils ne les séparent pas lorsque l'un des intervalles renferme toutes les racines, tandis que l'autre n'en renferme aucune.

Cela posé, j'ai donné sans démonstration ([1]) la proposition suivante :

Si l'on désigne par x une quantité réelle arbitraire, les nombres ξ et ξ' qui satisfont à la relation

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\xi - x)(\xi' - x)(f'^2 - ff'') \\ &\quad + (\xi + \xi' - 2x)ff' + nf^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

et dont l'un est arbitraire, séparent les racines de l'équation

$$f(X) = 0.$$

Le nombre n désigne ici, comme ci-dessus, le degré du polynôme $f(X)$.

16. Pour démontrer ce théorème, je remarque d'abord que, en désignant par y, η et η' des quantités introduites pour rendre les expressions homogènes et dont la valeur soit égale à l'unité, la relation précédente devient

$$(\xi f'_x + \eta f'_y)(\xi' f'_x + \eta' f'_y) + (\xi y - x\eta)(\xi' y - x\eta')H = 0,$$

H représentant, comme plus haut, le covariant

$$(n-1)f'^2 - nff''.$$

La relation, sous cette nouvelle forme, ne renfermant que des covariants de $f(X, Y)$, la propriété énoncée est *projective*; il suffit donc, pour l'établir, de la démontrer pour deux valeurs particulières des variables indépendantes x et ξ'.

Je supposerai $x = \infty$ et $\xi' = 0$.

([1]) *Sur la résolution des équations qui ont toutes leurs racines réelles* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIX, p. 996).

Alors, si l'on fait

$$f(X) = aX^n + nbX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}cX^{n-2} + \ldots,$$

l'équation (9) devient

$$ab\xi = (n-1)ac - nb^2,$$

d'où

$$\xi = (n-1)\frac{c}{b} - n\frac{b}{a},$$

et, en désignant par α, β, ..., ω les racines de $f = 0$,

$$\xi = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \omega^2}{\alpha + \beta + \ldots + \omega}.$$

Il faut maintenant prouver qu'une racine au moins de l'équation est comprise entre 0 et ξ et que toutes les racines ne sont pas comprises dans cet intervalle.

Pour fixer les idées, je supposerai ξ positif et je distinguerai deux cas :

1° Si toutes les racines sont positives, ξ est une valeur moyenne entre les quantités

$$\frac{\alpha^2}{\alpha}, \quad \frac{\beta^2}{\beta}, \quad \ldots, \quad \frac{\omega^2}{\omega},$$

c'est-à-dire

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \omega;$$

il en résulte qu'une au moins de ces racines est comprise entre 0 et ξ et une au moins en dehors de ces limites.

La proposition est donc démontrée.

2° Si quelques racines sont négatives, soient

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda$$

les racines positives de l'équation; on a évidemment

$$\xi > \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \lambda^2}{\alpha + \beta + \ldots + \lambda},$$

La quantité ξ étant supérieure à la valeur moyenne des racines positives, l'une au moins de ces racines est comprise dans l'intervalle 0, ξ; toutes ces racines peuvent même y être comprises, mais il y a au moins une racine négative en dehors de cet intervalle.

La proposition subsiste donc encore dans ce cas.

17. Il résulte de ce qui précède que, si les quantités ξ et ξ' ne séparent pas les racines de l'équation $f = 0$, l'équation (9) a toutes ses racines imaginaires, et que, si elles les séparent, cette même équation a nécessairement des racines réelles. Mais je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet; quant aux applications que l'on peut faire de ce qui précède à la résolution par approximation d'une équation ayant toutes ses racines réelles, je renverrai à la Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et que j'ai rappelée plus haut.

SUR L'APPROXIMATION

DES

FONCTIONS CIRCULAIRES

AU MOYEN DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XC; 1880.

1. Les équations dont toutes les racines sont réelles constituent à bien des égards, dans l'ensemble des équations algébriques, une classe particulièrement importante, et les problèmes qui s'y rattachent sont souvent susceptibles de solutions simples auxquelles échappent les cas les plus généraux.

Je rappellerai, par exemple, comment le théorème de Fourier suffit, dans ce cas, pour déterminer le nombre des racines comprises entre deux nombres donnés. Des faits analogues se présentent dans la recherche de la valeur approchée des racines, et je mentionnerai notamment la proposition suivante :

En désignant par $f(x) = 0$ *une équation dont toutes les racines sont réelles et par* α *une quantité arbitraire, les deux valeurs de* x *déterminées par l'équation*

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-f'(\alpha) \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2(\alpha) - n(n-1) f(\alpha) f''(\alpha)}}{n f(\alpha)}$$

sont respectivement comprises entre α *et les deux racines de l'équation proposée qui avoisinent* α.

La quantité qui figure ici sous le radical est, à un facteur numérique près, le hessien du polynôme $f(x)$ et a, comme on le sait, une valeur toujours positive.

De là résulte, pour les racines des équations qui jouissent de la propriété indiquée, une méthode d'approximation spéciale qui permet, avec toute sûreté et sans discussion préalable, d'approcher indéfiniment de la racine immédiatement supérieure ou immédiatement inférieure à un nombre donné. L'approximation est notamment plus grande que celle fournie par la méthode de New-

ton, surtout quand les racines sont resserrées dans un intervalle assez étroit.

2. Parmi les équations qui ont toutes leurs racines réelles, il convient même de distinguer celles dont le premier membre est un polynôme satisfaisant à une équation linéaire du second ordre, et, pour le montrer par un exemple, je considérerai ceux qui ont été étudiés par M. Hermite dans sa Note *Sur un nouveau développement en série des fonctions* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 8 février 1864).

Soient α et β deux racines consécutives de l'équation $U_n = 0$; elles comprennent une racine λ de l'équation $U_{n+1} = 0$, et le polynôme U_{n+1} satisfait à l'équation

$$U''_{n+1} - x U'_{n+1} + (n+1) U_{n+1} = 0. \tag{1}$$

De la proposition que j'ai énoncée plus haut on déduit aisément, si l'on remarque que U_n est égal, à un facteur près, à U'_{n+1},

$$\alpha + \sqrt{-\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{U''_{n+1}(\alpha)}{U_{n+1}(\alpha)}} < \lambda$$

et

$$\beta - \sqrt{-\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{U''_{n+1}(\beta)}{U_{n+1}(\beta)}} > \lambda.$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{U''_{n+1}(\alpha)}{U_{n+1}(\alpha)} = \frac{U''_{n+1}(\beta)}{U_{n+1}(\beta)} = -\frac{1}{n+1};$$

il en résulte

$$\alpha + \frac{1}{\sqrt{n}} < \lambda \quad \text{et} \quad \beta - \frac{1}{\sqrt{n}} > \lambda,$$

et par suite

$$\beta - \alpha > \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

On peut ainsi, sans former l'équation aux carrés des différences et en s'appuyant seulement sur l'équation différentielle à laquelle satisfait U_{n+1}, trouver une limite inférieure de la différence entre deux racines consécutives de l'équation $U_n = 0$.

3. Comme deuxième application, je considérerai l'équation

$$f(x) = 1 - \cos\alpha - n^2(1-x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n(n+1)}{1.3}(1-x)^2 - \ldots,$$

dont la plus grande racine est $\cos\frac{\alpha}{n}$. Cette quantité étant voisine de l'unité, je partirai de la valeur initiale $+1$; on trouve aisément

$$f(1) = 1 - \cos\alpha, \qquad f'(1) = n^2, \qquad f''(1) = \frac{n^2(n^2-1)}{3};$$

d'où la valeur approchée suivante :

$$(2) \qquad \cos\frac{\alpha}{n} = 1 - \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{n + (n-1)\sqrt{n^2 - \frac{2n(n+1)}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Cette formule donne une solution d'un problème intéressant de Géométrie élémentaire : *Partager approximativement, avec la règle et le compas, un arc donné en n parties égales.*

On voit, en effet, que le second membre ne renferme qu'un radical carré et d'autre quantité transcendante que $\cos\alpha$.

Je ferai, en particulier, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ dans la relation précédente; on en déduit

$$\cos\frac{\pi}{3n} = 1 - \frac{1}{2n + (n-1)\sqrt{\frac{2n(5n-1)}{3}}},$$

et j'observe que cette formule approximative, établie pour des valeurs entières de n, peut être évidemment encore employée (sauf vérification) pour des valeurs quelconques de n supérieures à l'unité; en y faisant, par exemple, $n = \frac{6}{5}$, on obtient pour $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$ la valeur rationnelle $\frac{9}{14}$, ou, en décimales, $0,642857\ldots$. La véritable valeur étant $0,642788\ldots$, l'erreur commise est plus petite que $0,00007$.

Le calcul précédent détermine approximativement le côté de l'ennéagone régulier étoilé; on voit qu'il est sensiblement égal aux $\frac{9}{7}$ du rayon. En prenant cette valeur dans un cercle ayant un rayon de 1^m, l'erreur commise sur la longueur du côté est plus petite que $\frac{1}{7}$ de millimètre.

4. Je ferai encore, dans la formule (2), $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\cos\frac{\pi}{2n} = 1 - \frac{1}{n + (1-n)\sqrt{\frac{n(2n-1)}{3}}},$$

et, en posant $x = \frac{1}{n}$,

$$(3) \qquad \cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{x^2}{x + (x-1)\sqrt{\frac{2-x}{3}}}.$$

Cette formule n'est justifiée que pour $x = \frac{1}{n}$, n étant un entier au moins égal à 2; mais, si l'on remarque qu'elle donne des résultats exacts pour $x = 1$ et $x = \frac{2}{3}$, on en conclut qu'elle doit donner une assez grande approximation pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $+1$.

Pour donner une idée de l'approximation qu'elle comporte, je transcris ci-après une Table donnant, pour un certain nombre de valeurs de l'angle $\frac{\pi x}{2}$, la valeur des cosinus calculés au moyen de la formule (3) et leur véritable valeur; quand ces quantités sont exprimées en décimales, les quatre premières décimales sont exactes.

Angles.	Valeur du cosinus calculée par la formule (3).	Valeur exacte du cosinus.
0°	1	1
9	0,9877	0,9877
18	0,9512	0,9511
24	0,9137	0,9135
30	0,8662	0.8660
40	0,7661	0,7660
45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
50	0,6428	0,6428
54	0,5878	0,5878
60	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
70	0,3422	0,3420
75	0,2591	0,2588
80	0,1739	0,1736
85	0,0874	0,0872
90	0	0

SUR QUELQUES

PROPRIÉTÉS DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

QUI ONT TOUTES LEURS RACINES RÉELLES.

Nouvelles Annales de Mathématiques, t. XIX; 1880.

I.

1. Je considérerai d'abord l'équation qui détermine $\tang\frac{\alpha}{n}$ quand on connaît $\tang\alpha$.

On a, d'après la formule de Moivre,

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n=\cos\alpha+i\sin\alpha$$

et

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n}-i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n=\cos\alpha-i\sin\alpha;$$

on en déduit

$$\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos\frac{\alpha}{n}-i\sin\frac{\alpha}{n}}\right)^n=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha},$$

ou, en posant $\tang\frac{\alpha}{n}=x$,

$$(1)\qquad \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\frac{1+i\tang\alpha}{1-i\tang\alpha}.$$

On voit immédiatement que cette équation ne peut avoir des racines égales; pour démontrer que toutes ses racines sont réelles, je remarquerai que, pour chacune d'elles, on a

$$\bmod(1+ix)=\bmod(1-ix);$$

de cette identité on déduit aisément la réalité de x.

Supposons, en effet, que x puisse avoir la valeur imaginaire $\alpha+\beta i$; on aurait

$$\bmod(1-\beta+\alpha i)=\bmod(1+\beta-\alpha i)$$

ou bien

$$(1-\beta)^2+\alpha^2=(1+\beta)^2+\alpha^2,$$

ce qui est évidemment impossible si β est différent de zéro.

L'équation (1) a donc toutes ses racines réelles et inégales ([1]).

2. Les mêmes considérations permettent de démontrer une importante proposition, due à M. Hermite ([2]) et que l'on peut énoncer de la façon suivante :

Soient $\alpha+\beta i$, $\gamma+\delta i$, ..., $\lambda+\mu i$ des quantités imaginaires, dans lesquelles les coefficients de i ont tous le même signe; si l'on pose, pour abréger,

$$\Pi(x-\alpha-\beta i)=(x-\alpha-\beta i)(x-\gamma-\delta i)\ldots(x-\lambda-\mu i)$$
$$=F(x)+i\Phi(x),$$

l'équation

$$pF(x)+q\Phi(x)=0,$$

où p et q désignent des nombres réels arbitraires, a toutes ses racines réelles.

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante

$$(p-iq)\Pi(x-\alpha-\beta i)+(p+iq)\Pi(x-\alpha-\beta i)=0,$$

d'où l'on déduit

$$(2)\qquad \bmod\Pi(x-\alpha-\beta i)=\bmod\Pi(x-\alpha+\beta i),$$

et il est aisé d'en conclure que x est nécessairement réel.

([1]) *Voir* à ce sujet deux Notes de M. Biehler : *Sur une application de la méthode de Sturm* et *Sur quelques équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 76 et 149).

([2]) *Sur l'indice des fractions rationnelles* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 131).

M. Biehler est arrivé en même temps au même théorème, qu'il a démontré dans une Note *Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles*, insérée au *Journal de M. Borchardt*, t. 87, p. 350.

Ayant, en effet, tracé dans un plan deux axes rectangulaires OX et OY, je représente, suivant l'usage ordinaire, la quantité imaginaire $X + Yi$ par le point dont les coordonnées sont X et Y. Soient A, C, ..., L les points qui représentent les quantités $\alpha + \beta i$, $\gamma + \delta i$, ..., $\lambda + \mu i$; les nombres $\beta, \delta, \ldots, \mu$ ayant tous le même signe, ces points sont tous situés d'un même côté de l'axe OX, au-dessus de cet axe par exemple; quant aux points A′, C′, ..., L′, qui représentent les quantités conjuguées $\alpha - \beta i$, $\gamma - \delta i$, ..., $\lambda - \mu i$, comme ils sont symétriques des premiers relativement à l'axe OX, ils sont situés au-dessous de cette droite.

Cela posé, en désignant par P le point représentatif de x, l'égalité (2) peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\mathrm{PA.PC\ldots PL = PA'.PC'\ldots PL'}.$$

Or, si x était imaginaire, le point P serait situé en dehors de l'axe OX, au-dessus de cette droite par exemple, et l'on aurait

$$\mathrm{PA < PA'}, \quad \mathrm{PB < PB'}, \quad \ldots, \quad \mathrm{PL < PL'},$$

inégalités incompatibles avec la relation précédente.

La quantité x est donc nécessairement réelle et la proposition est entièrement démontrée.

3. Parmi les conséquences que l'on peut en déduire, je mentionnerai la suivante, à cause de sa simplicité.

Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles; en désignant par ω, p et q des quantités réelles quelconques, si l'on pose, pour abréger,

$$f(x + \omega i) = \mathrm{F}(x) + i\Phi(x),$$

l'équation

$$p\mathrm{F}(x) + q\Phi(x) = 0$$

a également toutes ses racines réelles.

II.

4. Quand, une équation algébrique étant ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, la suite des termes présente

des lacunes, on peut, comme on le sait, en déduire aisément une limite supérieure du nombre des racines réelles de l'équation.

Cette conséquence immédiate de la règle des signes de Descartes a de nombreuses applications; en voici quelques-unes très simples qui présentent quelque intérêt.

Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique du degré n et ayant toutes ses racines réelles; développons $\frac{1}{f(x)}$ suivant les puissances croissantes de x. Soient $\mathrm{F}(x)$ la série que l'on obtient ainsi et $\Phi(x)$ l'ensemble des termes de cette série dont le degré ne dépasse pas m.

Par définition, le polynôme $\Phi(x)$ du degré m est tel que le développement de la différence $\frac{1}{f(x)} - \Phi(x)$, suivant les puissances croissantes de x, commence par un terme d'un ordre supérieur à m; on en déduit facilement l'égalité suivante

$$1 = f(x)\Phi(x) + x^p\mathrm{P},$$

où P désigne un polynôme et p un nombre entier supérieur à m, d'où encore

$$f(x)\Phi(x) = 1 - x^p\mathrm{P}.$$

Considérons maintenant l'équation

$$f(x)\Phi(x) = 0,$$

que l'on peut écrire

$$1 - x^p\mathrm{P} = 0.$$

Cette équation présentant une lacune de $(p-1)$ termes entre le premier et le second terme, le nombre de ses racines imaginaires est au moins égal à $(p-2)$, et par conséquent au moins égal à $(m-1)$, puisque p est plus grand que m. Ces racines appartiennent toutes aux deux équations $f(x) = 0$ et $\Phi(x) = 0$; la première a d'ailleurs toutes ses racines réelles et la seconde est du degré m, d'où il suit que, ayant au moins $(m-1)$ racines imaginaires, elle ne peut avoir qu'une seule racine réelle, ce qui aura lieu si elle est de degré impair.

Les considérations qui précèdent s'appliquent au développement de l'expression $\frac{1}{\sqrt[q]{f(x)}}$, où q désigne un nombre entier positif quelconque et $f(x)$ un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré.

Désignons par $\Phi(x)$ l'ensemble des termes de ce développement dont le degré ne dépasse pas m; le premier terme de la série

$$\frac{1}{\sqrt[q]{f(x)}} - \Phi(x)$$

étant d'un ordre supérieur à m, on en conclut aisément l'égalité

$$1 = f(x)\Phi^q(x) + x^p P,$$

où P désigne un polynôme et p un nombre entier supérieur à m.

Cette égalité peut s'écrire

$$1 - x^p P = f(x)\Phi^q(x),$$

et l'on en conclut, comme précédemment, que l'équation

$$f(x)\Phi^q(x) = 0$$

a au moins $(m-1)$ racines imaginaires; ces racines ne pouvant appartenir qu'à l'équation $\Phi(x) = 0$, celle-ci, qui est du degré m, a au plus une racine réelle.

J'aurais pu considérer l'expression $\frac{1}{[f(x)]^{\frac{r}{q}}}$, où r et q désignent deux nombres entiers positifs quelconques, puisque, si $f(x)$ est décomposable en facteurs réels du premier degré, il en est de même de $f^r(x)$, et de là, en passant au cas où la fraction $\frac{r}{q}$ tend vers un nombre incommensurable quelconque, j'énoncerai la proposition suivante :

En désignant par ω *une quantité* positive *quelconque* (commensurable ou incommensurable), *si l'on développe* $\frac{1}{f^{\omega}(x)}$ *suivant les puissances croissantes de* x *et si l'on désigne par* $\Phi(x)$ *l'ensemble des termes de ce développement dont le degré ne dépasse pas* m, *quel que soit le nombre* m, *l'équation* $\Phi(x) = 0$ *a au plus une racine réelle.*

5. Comme application, je poserai

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{p}\right)^p;$$

on voit, par ce qui précède, qu'en désignant par $\Phi(x)$ l'ensemble des termes du degré m dans le développement de $\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p}$, l'équation $\Phi(x) = 0$ a au plus une racine réelle, quel que soit le nombre positif p. Si, maintenant, on fait croître indéfiniment p, l'expression $\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p}$ a pour limite e^x.

D'où la proposition suivante :

Si l'on égale à zéro l'ensemble des m premiers termes de la série suivant laquelle se développe e^x, *l'équation ainsi obtenue a au plus une racine réelle.*

Cette proposition peut, du reste, se démontrer très aisément en s'appuyant sur le théorème de Rolle (*voir* notamment le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Hermite, année 1867-1868); mais il résulte, en outre, du théorème démontré plus haut, que, si $f(x)$ est un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré, le développement de l'expression

$$\frac{e^x}{f^{\omega}(x)}$$

jouit de la même propriété, quel que soit le nombre positif ω.

6. Les considérations qui précèdent s'appliquent entièrement à un cas plus général et plus important; mais, avant de l'aborder, je crois devoir rappeler quelques définitions.

En désignant par $V(x)$ un polynôme entier en x ou une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et par $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur est du degré n et le numérateur du degré m, on dit que cette fraction est une réduite de $V(x)$ si le développement en série de la différence

$$V(x) - \frac{\Phi(x)}{F(x)}$$

commence par un terme de l'ordre de x^{m+n+1}.

Il est facile d'obtenir ces réduites; multiplions, en effet, $V(x)$ par un polynôme $F(x)$ du degré n et renfermant, par suite, $(n+1)$ indéterminées. En développant le produit ainsi obtenu, nous obtiendrons d'abord un polynôme du degré m, $\Phi(x)$, puis une série de termes contenant x^m en facteurs, et nous pourrons disposer des $(n+1)$ coefficients indéterminés de façon à annuler, dans le développement, les coefficients de $x^{m+1}, x^{m+2}, \ldots, x^{m+n}$; il suffira, en effet, pour cela, de trouver des valeurs de $(n+1)$ inconnues satisfaisant à n équations linéaires sans second membre, et l'on sait qu'un pareil système d'équations admet toujours au moins une solution dans laquelle les inconnues ne sont pas toutes nulles en même temps. Les polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$ étant déterminés comme je viens de le dire, il est clair que la fraction $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ est une réduite de $F(x)$.

Cela posé, $f(x)$ désignant un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré, soit $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ une réduite de $f(x)$, en sorte que, $\Phi(x)$ étant du degré m et $F(x)$ du degré n, le développement de

$$f(x)-\frac{\Phi(x)}{F(x)}$$

commence par un terme de l'ordre $(m+n+1)$.

On aura évidemment, en désignant par P un polynôme entier,

$$F(x)f(x)-\Phi(x)=x^{m+n+1}P,$$

d'où

$$\Phi(x)+x^{m+n+1}P=F(x)f(x).$$

Or, le terme du degré le plus élevé dans $\Phi(x)$ étant du degré m, on voit que l'équation

$$\Phi(x)+x^{m+n+1}P=0$$

a au moins $(n-1)$ racines imaginaires, et, comme ces racines appartiennent à l'équation $F(x)f(x)=0$ et que $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles, on en conclut que l'équation $F(x)=0$, qui est du degré n, a au plus une racine réelle.

On obtiendrait un résultat analogue en considérant les réduites

$\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ du développement de la fraction $\frac{1}{f(x)}$, et l'on établirait facilement que l'équation $\Phi(x)=0$ a au plus une racine réelle.

En particulier, posons d'abord, en désignant par p un nombre entier arbitraire,

$$f(x)=\left(1+\frac{x}{p}\right)^p.$$

Si nous faisons croître indéfiniment le nombre entier p, nous en conclurons que les dénominateurs des réduites de e^x ont au plus un facteur réel du premier degré; nous voyons, en outre, que la même proposition a lieu à l'égard des réduites de l'expression $e^x\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ désigne un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré.

Semblablement, en posant

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{p}\right)^p$$

et en faisant croître indéfiniment le nombre entier p, nous voyons que les numérateurs des réduites de e^x ont au plus un facteur réel du premier degré, et la même proposition a lieu à l'égard des numérateurs des réduites de l'expression $\frac{e^x}{\varphi(x)}$, où $\varphi(x)$ désigne, comme ci-dessus, un polynôme quelconque décomposable en facteurs réels du premier degré.

7. Comme je viens de le montrer, si l'on considère une réduite quelconque $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ de la transcendante e^x, les équations $\Phi(x)=0$ et $F(x)=0$ ont au plus une racine réelle.

Il ne sera peut-être pas inutile de montrer comment on peut facilement former les polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$.

A cet effet, je considérerai l'expression $F(x)e^{zx}$ et poserai

$$F(x)e^{zx}=\Sigma A_p x^p.$$

Le polynôme $F(x)$ étant du degré n, je remarque tout d'abord que A_{m+n}, qui est du degré $(m+n)$, est divisible par z^n. En dérivant par rapport à z l'équation précédente, on a d'ailleurs

$$F(x)e^{zx}=\Sigma A'_p x^{p-1},$$

d'où

$$\Sigma A_p x^p=\Sigma A'_p x^{p-1};$$

et l'on en conclut que chacun des coefficients A_p est la dérivée par rapport à z du coefficient qui le suit dans la série.

Je remarque maintenant que, $F(x)$ étant le dénominateur d'une réduite de e^x, le développement de $F(x)e^x$ manque des termes en $x^{m+1}, x^{m+2}, \ldots, x^{m+n}$; tous les coefficients

$$A_{m+1}, \quad A_{m+2}, \quad \ldots, \quad A_{m+n}$$

s'annulent donc quand on y fait $z=1$. Par suite, A_{m+n}, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, s'annule dans la même hypothèse; A_{m+n} est donc divisible par $(z-1)^n$. J'ai montré plus haut que ce coefficient était du degré $(m+n)$ par rapport à la lettre z et qu'il était divisible par z^m; il est donc égal, à un facteur numérique près (que l'on peut prendre arbitrairement), à $z^m(z-1)^n$.

Ainsi, une propriété caractéristique du polynôme $F(x)$ est que, dans le développement de $F(x)e^{zx}$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient de x^{m+n} est (sauf un facteur numérique) $z^m(z-1)^n$.

En supposant donc ce facteur égal à $\frac{1}{1.2.3\ldots(m+n)}$ et en posant

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

on obtiendra facilement l'égalité

$$\begin{aligned} a_0 z^{m+n} + a_1(m+n)z^{m+n-1} + a_2(m+n)(m+n-1)z^{m+n-2} + \ldots \\ = z^{m+n} - n z^{m+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} z^{m+n-2} - \ldots, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = -\frac{n}{m+n}, \qquad a_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}, \quad \ldots$$

et

$$\begin{aligned} F(x) = 1 - \frac{n}{m+n}x + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}x^2 \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}x^3 + \ldots. \end{aligned}$$

Quant au polynôme $\Phi(x)$, je remarquerai, pour le déterminer, que la fraction $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ est une réduite de e^{-x} et que cette fraction

tend vers l'unité quand x tend vers zéro; on a donc, en appliquant la formule précédente,

$$\begin{aligned} \Phi(x) = 1 + \frac{m}{m+n}x + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}x^2 \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}x^3 + \ldots. \end{aligned}$$

8. Considérons en particulier les *réduites principales*, c'est-à-dire celles où $m=n$; on a alors (¹)

$$\begin{aligned} F(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2n(2n-1)}x^2 \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)}x^3 + \ldots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2n(2n-1)}x^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)}x^3 + \ldots, \end{aligned}$$

en sorte que $\Phi(x) = F(-x)$.

Ayant

$$e^x = \frac{\Phi(x)}{F(x)} + (x^{2n+1}) \text{ (²)}$$

on en déduit

$$x = \log\frac{\Phi(x)}{F(x)} + (x^{2n+1})$$

et, en égalant les dérivées des deux membres,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} - \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = -1 + (x^{2n}).$$

En désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les diverses racines de l'équation $F(x)=0$, on voit aisément que les racines de l'équation $\Phi(x)=0$

(¹) Sur ces polynômes, *voir* le Mémoire de M. Hermite *Sur la fonction exponentielle*.

(²) Je désigne ici et dans tout ce qui suit par (x^p) une série ordonnée suivant les puissances de x et commençant par un terme de l'ordre x^p.

sont $-\alpha, -\beta, -\gamma, \ldots$; l'égalité précédente peut donc s'écrire

$$\sum \frac{1}{x-\alpha} - \sum \frac{1}{x+\alpha} = -1 + (x^{2n})$$

ou encore

$$\sum \frac{2\alpha}{x^2-\alpha^2} = -1 + (x^{2n}).$$

En désignant par S_{-p} la somme des inverses des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation $F(x) = 0$, on en déduit, en développant le premier membre en série,

$$2S_{-1} + 2S_{-3}x^2 + 2S_{-5}x^4 + \ldots = 1 + (x^{2n}),$$

d'où les relations suivantes, qui caractérisent entièrement le polynôme $F(x)$:

$$S_{-1} = \frac{1}{2}, \qquad S_{-3} = 0, \qquad S_{-5} = 0, \qquad \ldots, \qquad S_{-(2n-1)} = 0 \quad (^1).$$

(1) Sur cette question, *voir* ma Note *Sur un problème d'Algèbre* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. V; 1877.

C'est la Note suivante, pages 119-122. E. R.

SUR UN

PROBLÈME D'ALGÈBRE.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. V; 1877.

1. En désignant par S_μ la somme des puissances d'ordre μ des racines de l'équation de degré n, $f(x) = 0$, on peut se proposer de déterminer le polynôme $f(x)$ connaissant $S_1, S_3, \ldots, S_{2n-1}$.

Comme on a ainsi n équations de condition pour déterminer les coefficients du polynôme, il est clair que le problème est généralement déterminé. Il peut se faire néanmoins qu'il y ait une infinité de solutions; car, si l'on satisfait à la question, ce qui, dans certains cas, sera évidemment possible, en prenant pour $f(x)$ un polynôme de *degré inférieur à* n, en désignant par $\varphi(x^2)$ un polynôme quelconque ne renfermant que des puissances paires de x, on y satisfera aussi en remplaçant $f(x)$ par $f(x) + \varphi(x^2)x^m$, les coefficients de $\varphi(x^2)$ et l'exposant m étant du reste arbitraires, pourvu que le degré de l'expression précédente soit égal à n.

2. Pour poser d'une façon plus précise le problème à résoudre, je l'énoncerai ainsi :

Déterminer un polynôme $f(x)$, de degré égal ou inférieur à n, jouissant de la propriété énoncée et tel, que $f(x)$ et $f(-x)$ n'aient aucun facteur commun.

Il est facile alors de démontrer que si le problème a une solution, le polynôme $f(x)$ est parfaitement déterminé.

A cet effet, posons $f(-x) = \varphi(x)$; d'après ce que je viens de dire, la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ sera irréductible. Soient de plus $a, b, c, \ldots$ les racines de l'équation $f(x) = 0$, on aura évidemment

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{1}{x+a} - \sum \frac{1}{x-a} = \sum \frac{-2a}{x^2-a^2}$$
$$= -\frac{2S_1}{x^2} - \frac{2S_3}{x^4} - \ldots - \frac{2S_{2n-1}}{x^{2n}} + \left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right),$$

l'expression $\left(\frac{1}{x^m}\right)$ désignant, en général, sans que je me préoccupe des valeurs des coefficients, une série développée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ et commençant par un terme d'un degré au plus égal à $-m$.

En intégrant l'équation précédente entre les limites x et ∞, il viendra

$$\log\frac{\varphi(x)}{f(x)} = 2\left[\frac{S_1}{x} + \frac{S_3}{3x^3} + \ldots + \frac{S_{2n-1}}{(2n-1)x^{2n-1}}\right] + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

ou, en posant, pour abréger,

$$W = \frac{S_1}{x} + \frac{S_3}{3x^3} + \ldots + \frac{S_{2n-1}}{(2n-1)x^{2n-1}}$$

et en passant des logarithmes aux nombres,

$$e^{2W} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right). \tag{1}$$

3. La détermination du polynôme $f(x)$ est donc ramenée à la question suivante :

Déterminer une fraction rationnelle irréductible dont le dénominateur et le numérateur soient d'un degré au plus égal à n, et qui soit égale au développement de e^{2W}, en négligeant les termes d'un ordre supérieur à celui de $\frac{1}{x^{2n}}$. Il faut, en outre, qu'en désignant par $f(x)$ ce dénominateur, le numérateur de la fraction soit égal à $f(-x)$; mais, comme je le ferai voir, il n'y a pas à se préoccuper de cette condition, qui sera satisfaite d'elle-même si la première condition est remplie.

Je démontrerai d'abord qu'il ne peut exister qu'un seul polynôme $f(x)$ qui y satisfasse; en effet, si $f_1(x)$ était une autre solution, on aurait évidemment

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

d'où

$$\varphi(x)f_1(x) - f(x)\varphi_1(x) = f(x)f_1(x)\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

relation évidemment impossible, à moins que le premier membre

ne soit nul; car c'est un polynôme entier en x, tandis que le second membre (s'il n'est pas nul) se développe suivant une série commençant par un terme en $\frac{1}{x}$, puisque chacun des polynômes $f(x)$ et $f_1(x)$ est d'un degré au plus égal à n.

La relation précédente ne peut donc avoir lieu que si l'on a

$$\varphi(x)f_1(x) - f(x)\varphi_1(x) = 0$$

ou encore

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

et, si l'on suppose ces fractions irréductibles, $f_1(x)$ ne doit différer que par un facteur constant de $f(x)$.

Ce polynôme n'étant pas d'ailleurs, par hypothèse, divisible par x, on peut supposer que le terme constant qui y entre est égal à l'unité; il est alors complètement déterminé.

4. Cela posé, il est facile de prouver que, la fraction irréductible $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ayant été déterminée par la condition ci-dessus énoncée, $\varphi(x)$ est égal à $f(-x)$.

En effet, W ne renfermant que des puissances impaires de x, en changeant x en $-x$ dans l'équation (1), il viendra

$$e^{-2W} = \frac{1}{e^{2W}} = \frac{\varphi(-x)}{f(-x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right);$$

d'où, par une transformation facile,

$$e^{2W} = \frac{f(-x)}{\varphi(-x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right);$$

le polynôme $\varphi(-x)$, d'après ce que je viens d'établir, ne peut différer que par un facteur constant de $f(x)$; d'ailleurs, e^{2W}, pour $x=0$, se réduit à l'unité; donc le premier terme de $\varphi(-x)$ est aussi l'unité et, par suite,

$$\varphi(-x) = f(x).$$

5. Le problème est donc entièrement ramené à trouver un polynôme $f(x)$, de degré au plus égal à n, et satisfaisant à l'équation (1); mais on peut supposer que $f(x)$ soit effectivement de degré n, en faisant abstraction de la condition imposée jusqu'ici, à savoir que $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont premiers entre eux.

Effectivement, si $f(x)$ était d'un degré $m < n$, il suffirait de multiplier les deux termes de la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ par un polynôme arbitraire de degré $(n - m)$ pour obtenir une fraction satisfaisant à la relation (1) et dont le dénominateur soit du degré n.

Nous poserons donc $f(x) = 1 + ax + bx^2 + \ldots + lx^n$; $a, b, \ldots, l$ désignant n coefficients indéterminés, et nous exprimerons que le produit $e^{2W} f(x)$ manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots, \frac{1}{x^n}$; nous aurons ainsi, pour déterminer les n coefficients inconnus, n équations linéaires avec second membre.

Généralement, le déterminant de ces équations étant différent de zéro, elles fourniront pour les coefficients des valeurs bien déterminées; le polynôme $f(x)$ sera donc effectivement du degré n.

Si le déterminant est nul, il se peut que le problème n'ait pas de solution; s'il y en a une infinité, on déterminera l'un quelconque des polynômes $f(x)$ satisfaisant aux équations, et l'on en déduira le numérateur correspondant $\varphi(x)$; on réduira ensuite la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ à sa plus simple expression : le dénominateur de la fraction irréductible ainsi obtenue sera la solution cherchée, et son degré sera inférieur à n.

6. Il est clair que l'on peut remplacer l'expression e^{2W} par toute autre expression dont le développement coïnciderait avec elle jusqu'aux termes de l'ordre de $\frac{1}{x^{2n}}$ inclusivement.

Ainsi, si l'on développe en fraction continue l'expression $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m$, où m désigne un nombre quelconque, et si l'on forme la réduite dont le dénominateur $f(x)$ est de degré n, les racines de l'équation $f(x) = 0$ jouiront de la propriété que les sommes $S_1, S_3, \ldots, S_{2n-1}$ soient toutes égales à m.

7. Les résultats obtenus dans cette Note peuvent s'énoncer ainsi : Les coefficients d'un polynôme de degré n s'expriment rationnellement en fonction des fonctions symétriques $S_1, S_3, \ldots, S_{2n-1}$ des racines de l'équation $f(x) = 0$. C'est ce qu'il est facile du reste de vérifier au moyen des formules de Newton, au moins pour de petites valeurs du nombre n.

SUR LA

DÉTERMINATION D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

AYANT UN NOMBRE DONNÉ DE RACINES IMAGINAIRES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XC; 1880.

Il est très facile de former des types d'équations ayant toutes leurs racines réelles, et de celles-là on déduit, comme on le sait, par les moyens les plus élémentaires, un nombre indéfini d'équations qui ont toutes leurs racines imaginaires ou du moins ne peuvent avoir qu'une racine réelle.

Il est moins aisé de former des équations ayant un nombre déterminé de racines réelles et un nombre déterminé de racines imaginaires; l'étude des polynômes entiers qui satisfont à une équation différentielle du second ordre fournit néanmoins un grand nombre de solutions de ce problème.

Pour en donner un exemple, je considérerai l'équation

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (x+1) \frac{dy}{dx} - my = 0,$$

à laquelle satisfait le dénominateur f_m de la $m^{\text{ième}}$ réduite de la transcendante

$$e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}.$$

On a, comme on le sait (1),

$$f_m = x^m + m^2 x^{m-1} + \frac{m^2(m-1)^2}{1.2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ m.1.2.3\ldots m x + 1.2.3\ldots m.$$

(1) Voir ma Note *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$ (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 72).

et l'équation $f_m = 0$ a toutes ses racines réelles, inégales et négatives. Deux polynômes f_m et f_n, où m et n désignent deux nombres entiers différents (je supposerai $m > n$), ne peuvent, d'ailleurs, avoir de racine commune.

Cela posé, des deux identités

$$x f''_m + (x+1) f'_m = m f$$

et

$$x f''_n + (x+1) f'_n = n f_n$$

on déduit aisément l'égalité suivante,

$$x V' + (x+1) V = (m-n) f_m f_n,$$

où j'ai posé, pour abréger l'écriture,

$$V = f_n f'_m - f_m f'_n.$$

L'équation $V = 0$ a, du reste, toutes ses racines inégales; car, si un nombre α annulait à la fois V et sa dérivée, il annulerait évidemment un des polynômes f_m et f_n sans annuler l'autre; en supposant qu'il annule f_m, il devrait annuler également f'_m, ce qui est impossible, puisque l'équation $f'_m = 0$ a toutes ses racines inégales.

De la relation précédente on déduit

$$x \frac{V'}{V} = (m-n) \frac{f_m f_n}{f_n f'_m - f_m f'_n} - x - 1.$$

En désignant, avec Cauchy, par la lettre I l'indice d'une fonction et par ε une quantité positive très petite, j'en tire l'identité

$$\mathop{\mathrm{I}}_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{x V'}{V} = \mathop{\mathrm{I}}_{-\infty}^{-\varepsilon} \left[(m-n) \frac{f_m f_n}{f_n f'_m - f_m f'_n} - (x+1) \right],$$

où le premier membre est, au signe près, le nombre ρ des racines négatives de l'équation $V = 0$, puisque le facteur x demeure négatif dans l'intervalle considéré. Dans le second membre, on peut négliger le terme $-(x+1)$, qui ne devient jamais infini pour aucune valeur finie de la variable, ainsi que le facteur positif $(m-n)$.

On a d'ailleurs, d'après une proposition fondamentale due à Cauchy,

$$\mathop{\mathrm{I}}_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f_m f_n}{f_n f'_m - f_m f'_n} = 1 - \mathop{\mathrm{I}}_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f_n f'_m - f_m f'_n}{f_m f_n};$$

il suffit, pour le voir, de remarquer que le rapport

$$\frac{f_n f'_m - f_m f'_n}{f_m f_n} = \frac{(m-n) x^{m+n-1} + \ldots + (m-n).1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}{x^{m+n} + \ldots + 1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}$$

est négatif pour $x = -\infty$ et positif pour $x = -\varepsilon$.

Les polynômes f_m et f_n étant premiers entre eux, on a

$$\mathop{\mathrm{I}}_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f_n f'_m - f_m f'_n}{f_m f_n} = \mathop{\mathrm{I}}_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f'_m}{f_m} - \mathop{\mathrm{I}}_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f'_n}{f_n} = m - n,$$

d'où

$$\rho = m - n - 1.$$

En désignant de même par θ le nombre des racines positives de l'équation $V = 0$, on a

$$\theta = \mathop{\mathrm{I}}_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{x V'}{V} = \mathop{\mathrm{I}}_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f_m f_n}{f_n f'_m - f_m f'_n};$$

ce nombre se réduit à

$$\mathop{\mathrm{I}}_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f_n f'_m - f_m f'_n}{f_m f_n},$$

puisque le rapport $\frac{f_n f'_m - f_m f'_n}{f_m f_n}$ conserve le même signe pour $x = \varepsilon$ et pour $x = \infty$. Il est, du reste, égal à zéro, puisque l'équation $f_m f_n = 0$ n'a pas de racine positive.

On en conclut que l'équation $V = 0$ n'a pas de racines réelles positives, et, comme elle a seulement $m - n - 1$ racines réelles négatives, elle a $2n$ racines imaginaires.

SUR LES

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

DONT LE PREMIER MEMBRE SATISFAIT A UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XC; 1880.

1. Les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre jouissent de propriétés particulières qui, pour la solution d'un grand nombre de problèmes, fournissent des méthodes tout à fait spéciales.

En me bornant ici au cas où elles ont *toutes leurs racines réelles*, je prendrai pour point de départ la remarque suivante.

En désignant par $F(x) = 0$ une équation algébrique de degré n, dont toutes les racines sont réelles, et par α une quelconque de ces racines, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{F(x)}{x-\alpha} = f(x),$$

il est clair que l'équation $f(x) = 0$ a également toutes ses racines réelles; par suite, son hessien

$$(n-2)f'^2(x) - (n-1)f(x)f''(x)$$

ne peut avoir une valeur négative, et en particulier l'expression $(n-2)f'^2(\alpha) - (n-1)f(\alpha)f''(\alpha)$ est positive ou nulle.

On a d'ailleurs, comme il est facile de le voir,

$$f(\alpha) = F'(\alpha), \qquad f'(\alpha)\frac{F''(\alpha)}{2} \qquad \text{et} \qquad f''(\alpha) = \frac{F'''(\alpha)}{3},$$

d'où l'inégalité

$$3(n-2)F''^2(\alpha) - 4(n-1)F'(\alpha)F'''(\alpha) \geqq 0.$$

Supposons maintenant que le polynôme F satisfasse à l'équa-

tion différentielle linéaire du second ordre

$$Py'' + Qy' + Ry = 0;$$

il satisfait également à l'équation

$$Py''' + (Q + P')y'' + (R + Q')y' + R'y = 0,$$

que l'on déduit de la première par dérivation, et de là résultent, en faisant $x = \alpha$, les deux relations suivantes,

$$P_0 F''(\alpha) + Q_0 F'(\alpha) = 0,$$
$$P_0 F'''(\alpha) + (Q_0 + P'_0) F''(\alpha) + (R_0 + Q'_0) F'(\alpha) = 0,$$

où l'indice 0 indique ce que deviennent les coefficients quand on y a remplacé x par α.

Elles donnent des valeurs respectivement proportionnelles à $F'(\alpha)$, $F''(\alpha)$, $F'''(\alpha)$, et l'on en conclut sans peine que le polynôme

$$\Omega = PR + PQ' - QP' - \frac{n+2}{4(n-1)} Q^2$$

a une valeur positive ou nulle quand on y remplace x par une racine quelconque de l'équation $F(x) = 0$.

Si donc on suppose que Ω ne soit pas positif pour toutes les valeurs de x, on déduira de là des limites entre lesquelles sont comprises les racines de cette équation.

Je ferai remarquer en passant que, si Ω avait constamment une valeur négative, on en conclurait avec certitude que l'équation proposée a des racines imaginaires.

2. Comme première application, je considérerai les polynômes U_n étudiés par M. Hermite dans sa Note *Sur un nouveau développement en série des fonctions* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII), et qui satisfont à l'équation différentielle

$$y'' - xy' + ny = 0.$$

On trouve sans peine $\Omega = n - 1 - \frac{n+2}{4(n-1)}x^2$; on a donc, pour toutes les racines de l'équation $U_n = 0$,

$$n - 1 - \frac{n+2}{4(n-1)} x^2 \geqq 0,$$

et l'on voit que la valeur absolue de la plus grande racine est au plus égale à $\frac{2(n-1)}{\sqrt{n+2}}$.

Il est facile d'obtenir, du reste, une limite plus rapprochée et en même temps une limite de la valeur absolue de la plus petite racine. En supposant d'abord n pair et égal à $2m$, je poserai $x^2 = \xi$, en sorte que $U_n(x)$ se transforme en un polynôme V_n du degré m en ξ, satisfaisant à l'équation différentielle

$$2\xi \frac{d^2y}{d\xi^2} + (1-\xi)\frac{dy}{d\xi} + my = 0;$$

on a alors

$$\Omega = 2m\xi - 2 - \frac{m+2}{4(m-1)}(1-\xi)^2$$

et l'on en conclut, en remplaçant ξ par sa valeur x^2, que les valeurs absolues des racines de l'équation $U_n = 0$ (lesquelles sont deux à deux égales et de signes contraires), sont comprises entre les deux racines positives de l'équation

$$(m+2)x^4 - 2(4m^2 - 3m + 2)x^2 + 9m - 6 = 0.$$

En y faisant successivement $m=1$ et $m=2$, on obtient les équations

$$3(x^2-1)^2 = 0 \quad \text{et} \quad 4(x^4 - 6x^2 + 3) = 0,$$

qui déterminent exactement les racines des équations $U_2 = 0$ et $U_4 = 0$.

Supposant en second lieu n impair et égal à $2m+1$, et posant encore $x^2 = \xi$, je remarque que $\frac{U_n(x)}{x}$ est un polynôme V_n du degré m en ξ et satisfaisant à l'équation différentielle

$$2\xi \frac{d^2y}{d\xi^2} + (3-\xi)\frac{dy}{d\xi} + my = 0,$$

et l'on en conclut immédiatement que la valeur absolue des racines de l'équation $U_{2m+1} = 0$ (abstraction faite de la racine zéro) est comprise entre les deux racines positives de l'équation

$$(m+2)x^4 - 2(4m^2 - m + 6)x^2 + 33m - 6 = 0.$$

Pour $m=1$ elle devient

$$3(x^2-3)^2 = 0,$$

et pour $m=2$

$$4(x^4 - 10x^2 + 15) = 0;$$

dans ces deux cas, elle donne les valeurs exactes des racines des équations $U_3 = 0$ et $U_5 = 0$.

3. Comme second exemple, je considérerai les polynômes de Legendre X_n qui satisfont à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

On a

$$\Omega = (n-1)(n+2) - \frac{n^2(n+2)}{n-1}x^2,$$

d'où l'on conclut que toutes les racines de l'équation $X_n = 0$ sont inférieures en valeur absolue à

$$(n-1)\sqrt{\frac{n+2}{n(n^2+2)}}.$$

En effectuant, comme plus haut, la substitution $x^2 = \xi$, on peut déterminer une limite plus approchée et en même temps une limite de la valeur absolue de la plus petite racine.

En supposant d'abord n pair et égal à $2m$, on trouvera sans peine que les valeurs absolues des racines de l'équation $X_{2m} = 0$ sont comprises entre les deux racines positives de l'équation

$$\frac{m+2}{4(m-1)}(3x^2-1)^2 + 2m(2m+1)(x^4-x^2) + 6x^4 - 4x^2 + 2 = 0.$$

Pour $m=1$ elle devient

$$(3x^2-1)^2 = 0,$$

et pour $m=2$

$$35x^4 - 30x^2 + 3 = 0;$$

dans les deux cas, elle donne exactement les racines des équations $X_2 = 0$ et $X_4 = 0$. Pour $m=3$ elle devient

$$429x^4 - 398x^2 + 21 = 0,$$

dont les racines positives sont 0,2373... et 0,9335...; les valeurs absolues de la plus grande et de la plus petite racine de l'équation $X_6 = 0$ sont, d'après Gauss, 0,2386... et 0,9325....

En second lieu, si n est impair et égal à $2m+1$, on trouve que les valeurs absolues des racines de l'équation $X_{2m+1} = 0$ sont comprises entre les deux racines positives de l'équation

$$\frac{m+2}{4(m-1)}(5x^2-3)^2 + 2m(2m+3)(x^4-x^2) + 10x^4 - 12x^2 + 6 = 0.$$

Pour $m = 1$ elle devient

$$(5x^2-3)^2 = 0,$$

et pour $m = 2$

$$63x^4 - 70x^2 + 15 = 0;$$

dans les deux cas, elle détermine exactement (abstraction faite de la racine $x = 0$) les racines des équations $X_3 = 0$ et $X_5 = 0$. Pour $m = 3$, elle devient

$$637x^4 - 678x^2 + 93 = 0,$$

dont les racines sont 0,40231... et 0,950...; les valeurs absolues de la plus petite et de la plus grande racine sont 0,4058... et 0,9492....

4. L'expression Ω, que j'ai considérée précédemment, jouit d'une propriété remarquable qui mérite d'être signalée.

Soit un polynôme, de degré n, $F(x)$, satisfaisant à l'équation différentielle du second ordre

$$Py'' + Qy' + Ry = 0;$$

en désignant par α, β, γ et δ des constantes arbitraires, il est clair que $(\gamma+\delta\xi)^n F\left(\frac{\alpha+\beta\xi}{\gamma+\delta\xi}\right)^n$ est également un polynôme entier du degré n par rapport à ξ. Ce polynôme, que j'appellerai $f(\xi)$, satisfait à une équation différentielle du second ordre qu'il est facile de former.

De l'équation

$$x = \frac{\alpha+\beta\xi}{\gamma+\delta\xi}$$

on tire en effet, en posant, pour abréger,

$$k = \beta\gamma - \alpha\delta \quad \text{et} \quad \varepsilon = \gamma + \delta\xi,$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{k}{\varepsilon^2},$$

d'où les relations suivantes :

$$y' = \frac{dy}{d\xi}\frac{\varepsilon^2}{k}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{d\xi^2}\frac{\varepsilon^4}{k^2} + 2\frac{\delta\varepsilon^3}{k^2}\frac{dy}{d\xi}.$$

On en conclut que l'expression $F\left(\frac{\alpha+\beta\xi}{\gamma+\delta\xi}\right)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{P\varepsilon^4}{k^2}\frac{d^2y}{d\xi^2} + \left(\frac{2P\delta\varepsilon^3}{k^2} + \frac{Q\varepsilon^2}{k}\right)\frac{dy}{d\xi} + Ry = 0,$$

et, en posant

$$y = \varepsilon^{-n}u,$$

que le polynôme $f(\xi)$ satisfait à l'équation

$$\frac{P\varepsilon^4}{k^2}\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left[\frac{Q\varepsilon^2}{k} - 2(n-1)\frac{P\delta\varepsilon^3}{k^2}\right]\frac{du}{d\xi}$$
$$+ \left[n(n-1)\frac{P\delta^2\varepsilon^2}{k^2} - n\frac{Q\delta\varepsilon}{k} + R\right]u = 0,$$

que j'écrirai, pour abréger l'écriture, de la façon suivante :

$$p\frac{d^2u}{d\xi^2} + q\frac{du}{d\xi} + r = 0$$

En désignant par $\omega(\xi)$ l'expression

$$pr + pq' - qp' - \frac{n+2}{4(n-1)}q^2,$$

on trouvera sans peine la relation suivante :

$$\omega(\xi) = \varepsilon^4\Omega(x).$$

En particulier, si Ω et ω sont des polynômes de même (ce qui a lieu dans le cas le plus général), et si, à cause de l'homogénéité, on introduit les variables y et η, on voit que le polynôme $\omega(\xi, \eta)$ se déduit du polynôme $\Omega(x, y)$ par la substitution

$$x = \alpha\eta + \beta\xi,$$
$$y = \gamma\eta + \delta\xi;$$

Ω joue donc ici le rôle d'un covariant

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

SUR

LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XIX; 1880.

I.

1. Soient a et A les affixes de deux quantités imaginaires x et X, liées entre elles par la relation linéaire

$$X = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

où α, β, γ et δ désignent des quantités imaginaires quelconques; il est aisé de voir que, quand le point a décrit un cercle (ou une droite), il en est de même du point A. Je m'appuierai fréquemment sur cette propriété très simple, qui se rattache immédiatement à la théorie bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

2. Dans tout ce qui suit, la variable Y et les quantités analogues y, η, ... sont égales à l'unité et uniquement introduites pour l'homogénéité des formules; je les remplacerai même souvent par l'unité lorsqu'il n'y aura lieu de craindre aucune confusion.

Cela posé, soit l'équation

$$f(X, Y) = 0, \tag{1}$$

où $f(X, Y)$ est un polynôme homogène et du degré n par rapport à X et Y. Désignons par a l'affixe d'une quantité imaginaire quelconque x et par α l'affixe de la quantité ξ qui est déterminée par l'équation

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0 \tag{2}$$

On peut énoncer la proposition suivante :

Tout cercle passant par les points a et α renferme au moins une racine de l'équation (1); il y a aussi au moins une racine à l'extérieur de ce cercle.

Exceptionnellement, toutes les racines peuvent se trouver sur la circonférence du cercle; si cette circonférence, du reste, passe par $(n-1)$ des racines, elle passe nécessairement par la $n^{ième}$ racine.

Pour démontrer cette proposition, je remarquerai que, la relation (2) qui lie entre elles les quantités ξ et x étant projective, il suffit de l'établir pour une position particulière du cercle et des points a et α.

Je supposerai donc que le cercle se réduit à l'axe des abscisses et que l'on a $x=\infty$ et $\xi=0$; la relation (2) se réduit alors à

$$b=0,$$

et, comme b est la somme algébrique des racines, on voit que, si toutes les racines ne sont pas réelles (c'est-à-dire si elles ne sont pas toutes situées sur l'axe des abscisses), l'une au moins doit être située au-dessus de cet axe, tandis qu'une autre est située au-dessous.

La proposition est donc complètement démontrée.

3. Plus généralement, considérons les divers émanants

$$\xi f'_x+\eta f'_y,\quad \xi^2 f''_{x^2}+2\xi\eta f''_{xy}+\eta^2 f''_{y^2},$$
$$\xi^3 f'''_{x^3}+3\xi^2\eta f'''_{x^2y}+3\eta\xi^2 f'''_{xy^2}+\eta^3 f'''_{y^3}$$

du polynôme f.

Soient Θ l'un quelconque de ces émanants, ξ et x deux quantités quelconques liées par la relation

$$\Theta=0; \tag{3}$$

on a le théorème suivant :

Tout cercle passant par les points x et ξ renferme au moins une racine de l'équation (1); il y a aussi au moins une racine à l'extérieur de ce cercle

Pour le démontrer, je remarquerai que, Θ étant un covariant de f, il suffit de l'établir pour une position particulière du cercle et des valeurs particulières de x et de ξ. Je supposerai, comme précédemment, que le cercle se réduit à l'axe des abscisses et que l'on a $x=\infty$ et $\xi=0$.

En considérant par exemple, pour plus de simplicité, l'émanant du troisième ordre, et en posant

$$f=ax^n+nbx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}dx^{n-3}+\ldots,$$

la relation (3) devient

$$a\xi^3+3b\xi^2+3c\xi+d=0,$$

d'où l'on déduit $d=0$; et de là résulte immédiatement que, si l'équation proposée n'a pas toutes ses racines réelles, il y a au moins une racine imaginaire dans laquelle le coefficient de i est positif et au moins une dans laquelle il est négatif, ce qui constitue précisément le théorème que je veux démontrer.

En supposant en effet que, dans toutes les racines imaginaires de l'équation (1), les coefficients de i eussent le même signe, et en posant, pour abréger,

$$f=F+i\Phi,$$

il résulterait d'une remarque importante faite par M. Hermite et M. Biehler que l'équation $pF+q\Phi=0$ aurait toutes ses racines réelles, quels que fussent les nombres réels p et q.

Faisons, ce que l'on a toujours le droit de faire, $a=1$, et, mettant en évidence la partie réelle des autres coefficients, posons

$$b=\beta+\beta' i,\qquad c=\gamma+\gamma' i,\qquad e=\varepsilon+\varepsilon' i,\qquad \ldots;$$

il vient, en remarquant que d est nul,

$$\left\{\begin{aligned} pF+q\Phi &= px^n+n(p\beta+q\beta')x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(p\gamma+q\gamma')x^{n-2}\\ &\quad+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(p\varepsilon+q\varepsilon')x^{n-4}+\ldots.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Or on peut toujours trouver deux nombres p et q qui ne soient pas nuls en même temps et tels que l'on ait

$$p\gamma+q\gamma'=0;$$

mais alors l'équation manquerait des deux termes consécutifs en x^{n-2} et x^{n-3}; ce qui est impossible, puisqu'elle a toutes ses racines réelles.

Ce raisonnement serait en défaut si les coefficients de x^n et x^{n-1} dans (4) s'annulaient en même temps; mais on aurait dans ce cas $\beta' = 0$, et cela ne peut avoir lieu, puisque β' est la somme de quantités ayant toutes le même signe.

La proposition est donc entièrement établie; je ferai encore observer, comme précédemment, que, dans certains cas particuliers, toutes les racines peuvent se trouver sur la circonférence du cercle.

4. On déduit du théorème précédent une conséquence importante.

Soit K un cercle (ou une droite) quelconque tracé dans le plan; il le divise en deux régions distinctes. Supposons qu'une de ces régions renferme toutes les racines de l'équation (1) et que le point x soit situé dans l'autre région; je dis que toutes les racines de l'équation $\Theta = 0$ sont situées dans la région limitée par le cercle et qui renferme toutes les racines de l'équation (1).

En effet, si l'une des valeurs de ξ satisfaisant à l'équation $\Theta = 0$ était située dans la même région que le point x, par les deux points x et ξ on pourrait faire passer un cercle tangent à K; la portion du plan limitée par ce cercle et ne renfermant pas K devrait renfermer au moins une racine de l'équation (1), ce qui est impossible, puisque toutes les racines de cette équation sont comprises dans la région qui ne renferme pas le point x (1).

II.

5. Il résulte de la proposition précédente que, si l'équation (1) a toutes ses racines réelles, l'équation $\Theta = 0$ (où l'on considère l'une des variables x et ξ comme inconnue, tandis qu'on attribue à l'autre une valeur réelle arbitraire) a toutes ses racines réelles.

(1) J'ai énoncé pour la première fois les théorèmes précédents dans une Note *Sur la théorie des équations numériques*, insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIX, p. 996.

En particulier, l'équation

$$\xi^2 f''_{x^2} + 2\xi f''_{xy} + f''_{y^2} = 0$$

a toutes ses racines réelles, quelle que soit la valeur réelle attribuée à x, et de là résulte immédiatement cette proposition importante que j'ai eu plusieurs fois occasion d'employer :

Si l'équation $f = 0$ a toutes ses racines réelles, le hessien du polynôme f

$$f''^2_{xy} - f''_{x^2} f''_{y^2}$$

a toujours une valeur positive ou nulle.

6. On voit aussi que, si l'équation (1) a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $\xi f'_x + f'_y = 0$.

Réciproquement, si, quelle que soit la valeur réelle attribuée à ξ, cette dernière équation a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation (1).

Pour établir cette proposition, je remarquerai d'abord qu'en posant $F = \xi f'_x + f'_y$, l'équation $F = 0$ ayant par hypothèse toutes ses racines réelles, l'expression $F''^2_{xy} - F''_{x^2} F''_{y^2}$ a toujours une valeur positive, quelle que soit la valeur de ξ.

Or on a

$$\begin{aligned} F''_{x^2} &= \xi f'''_{x^3} + f'''_{x^2 y}, \\ F''_{xy} &= \xi f'''_{x^2 y} + f'''_{x y^2}, \\ F''_{y^2} &= \xi f'''_{x y^2} + f'''_{y^3}; \end{aligned}$$

et, quand on fait $\xi = x$, ces expressions ont des valeurs respectivement proportionnelles à f''_{x^2}, f''_{xy} et f''_{y^2} (1), d'où il résulte que $f''^2_{xy} - f''_{x^2} f''_{y^2}$ a toujours également une valeur positive.

Cela posé, étudions comment varient les racines de l'équation $F = 0$ quand ξ varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

En désignant par ξ' la dérivée de ξ par rapport à x, on a

$$\xi' f'_x + \xi f''_{x^2} + f''_{xy} = 0,$$

(1) Ceci suppose évidemment $n > 2$.

puis, en vertu de la relation $\xi f''_x + f''_y = 0$,

$$\xi' f'^2_x = f'_y f''_{x^2} - f'_x f''_{xy} = (n-1)(f''_{x^2} f''_{y^2} - f''^2_{xy});$$

or de là résulte que ξ' est toujours négatif.

Ainsi, quand ξ croît de $-\infty$ à $+\infty$, les diverses racines de l'équation $F = 0$ vont toujours en décroissant.

Elles ont toujours d'ailleurs des valeurs distinctes (si l'on suppose, ce que l'on peut toujours faire, que l'équation $f = 0$ n'a pas de racines égales); car, si, pour deux valeurs différentes de ξ, l'équation $F = 0$ était satisfaite par la même valeur de x, on aurait à la fois

$$\xi f'_x + f'_y = 0$$

et

$$\xi' f'_x + f'_y = 0,$$

ce qui exigerait que l'on eût en même temps $f'_x = 0$ et $f'_y = 0$; or cela est impossible, puisque l'équation $f = 0$ n'a pas de racines égales.

Pour fixer les idées, supposons $n = 4$, et soient, pour $\xi = -\infty$, α, β et γ les racines de l'équation $F = 0$; quand ξ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la racine de l'équation $F = 0$ dont la valeur initiale est α va constamment en décroissant, passe de $-\infty$ à $+\infty$ et acquiert finalement la valeur γ; la racine dont la valeur initiale est β va constamment en décroissant et acquiert finalement la valeur α. De même, la troisième racine décroît constamment depuis γ jusqu'à β.

La variable ξ croissant constamment depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, il y a nécessairement un instant où elle a la même valeur que la troisième racine; à ce moment, ξ étant égal à x, on a

$$\xi f'_x + f'_y = x f'_x + f'_y = n f = 0;$$

d'où il suit que cette valeur de ξ est une racine de l'équation (1).

L'équation (1) a ainsi une racine comprise entre γ et β; on prouverait de même qu'elle en a une comprise entre β et α, une autre entre α et $-\infty$ et une dernière entre $+\infty$ et γ; elle a donc toutes ses racines réelles.

7. Comme application, je considérerai l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

Pour que cette équation ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que l'équation

$$\xi(3x^2 + p) + 2px + 3q = 0$$

ait toutes ses racines réelles, quelle que soit la valeur de ξ.

De là résulte que

$$p^2 - 3p\xi^2 - 9q\xi$$

doit toujours être positif; ce qui exige que $4p^3 + 27q^2$ et p soient négatifs. On retrouve ainsi l'équation de condition bien connue

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

III.

8. La propriété du hessien d'un polynôme f décomposable en facteurs réels du premier degré, que j'ai mentionnée plus haut, à savoir qu'il a une valeur constamment positive, est un cas particulier de la proposition suivante, qui a d'utiles applications.

Si le polynôme f est décomposable en facteurs réels du premier degré et si l'on attribue à la variable x une valeur imaginaire quelconque $\alpha + \beta i$, le coefficient de i dans toutes les racines de l'équation $\Theta = 0$ est de signe contraire *à celui de β.*

Cette proposition est un corollaire immédiat d'un théorème général que j'ai démontré plus haut (nº 4).

En particulier, si l'on fait $x = \alpha + \beta i$ dans l'expression

$$x - \frac{nf}{f'},$$

le coefficient de i dans le résultat de la substitution est de signe contraire à celui de β.

Il en est de même des diverses expressions

$$x - \frac{(n-1)f'}{f''}, \qquad x - \frac{(n-2)f''}{f'''}, \quad \ldots,$$

puisque, quand l'équation $f = 0$ a toutes ses racines réelles, les équations $f'=0$, $f''=0$, ... (¹) jouissent de la même propriété.

9. Comme application, en désignant par f un polynôme décomposable en facteurs réels inégaux du premier degré et par a et b deux constantes réelles arbitraires, je considérerai l'équation

$$\frac{f'}{f}+\frac{x-a}{b}=0. \tag{4}$$

En substituant successivement dans le premier membre de cette équation $-\infty$, puis les racines de l'équation $f=0$ et enfin $+\infty$, on constate aisément qu'elle a toutes ses racines réelles si b est <0 et qu'elle a au plus deux racines imaginaires si b est >0.

Dans ce dernier cas, désignons par $\alpha+\beta i$ une de ces racines; il résulte de ce qui précède que, si l'on remplace x par cette valeur dans l'expression

$$x-\frac{nf}{f'},$$

le coefficient de i dans le résultat de la substitution doit être de signe contraire à β.

Or, en vertu de l'équation (4), elle se réduit à

$$x-\frac{nb}{x-a}$$

et, en faisant $x=\alpha+\beta i$, à

$$\alpha+\beta i-\frac{nb}{a-\alpha-\beta i},$$

où le coefficient de i est

$$\beta\left[1-\frac{nb}{(a-\alpha)^2+\beta^2}\right].$$

Ayant donc $1-\dfrac{nb}{(a-\alpha)^2+\beta^2}<0$, on en déduit tout d'abord, comme je l'avais trouvé directement, que l'équation (4) ne peut avoir de racine imaginaire que si b est >0.

(¹) Ici, ainsi que dans tout ce qui suit, je désigne par f', f'', f''', ... les dérivées de f prises par rapport à la variable x.

On voit en second lieu que, *si b est >0, et si l'équation a deux racines imaginaires, elles sont renfermées dans l'intérieur du cercle dont l'équation est*

$$(X-a)^2+Y^2=nb.$$

Il est remarquable que la position de ce cercle ne dépende pas de la valeur des racines de l'équation $f=0$.

10. Considérons une équation $f=0$ à coefficients réels ou imaginaires; soient p, p', p'', ... les coefficients de i dans ses racines et β un nombre quelconque égal ou supérieur au plus grand de ces coefficients. Traçons dans le plan la droite parallèle à l'axe des abscisses et dont l'ordonnée a pour valeur β; on voit que toutes les racines de l'équation $f=0$ sont situées au-dessous de cette droite ou sur cette droite, et, en vertu d'une proposition énoncée ci-dessus, il en est de même des racines des équations

$$f=0,\qquad f''=0,\qquad f'''=0,\qquad \dots.$$

On en conclut que, si dans les expressions

$$x-\frac{nf}{f'},\qquad x-\frac{(n-1)f'}{f''},\qquad x-\frac{(n-2)f''}{f'''},\qquad \dots,$$

on remplace x par la quantité $\alpha+\beta i$, où α désigne un nombre réel arbitraire et β le nombre défini ci-dessus, le coefficient de i dans les résultats obtenus est inférieur à β.

Soient $F=0$ une équation quelconque de degré n et $\alpha+\beta i$ celle de ses racines pour laquelle le coefficient de i a la plus grande valeur; en posant, pour abréger,

$$\frac{F}{x-\alpha-\beta i}=f,$$

on voit que, dans les expressions

$$\alpha+\beta i-\frac{(n-1)f(\alpha+\beta i)}{f'(\alpha+\beta i)},$$
$$\alpha+\beta i-\frac{(n-2)f'(\alpha+\beta i)}{f''(\alpha+\beta i)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

le coefficient de i est plus petit que β.

On trouve aisément d'ailleurs

$$f\,(\alpha+\beta i)=\mathrm{F}'\,(\alpha+\beta i),$$
$$f'\,(\alpha+\beta i)=\frac{\mathrm{F}''}{2}\,(\alpha+\beta i),$$
$$f''(\alpha+\beta i)=\frac{\mathrm{F}'''}{3}(\alpha+\beta i),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où la conclusion suivante :

Étant donnée l'équation du degré n

$$\mathrm{F}=0,$$

désignons par $\alpha+\beta i$ celle de ses racines (¹) *pour laquelle le coefficient de i a la plus grande valeur; cela posé, les coefficients de i dans les expressions*

$$\frac{\mathrm{F}'(\alpha+\beta i)}{\mathrm{F}''(\alpha+\beta i)},\quad \frac{\mathrm{F}''(\alpha+\beta i)}{\mathrm{F}'''(\alpha+\beta i)},\quad \ldots$$

sont tous positifs.

11. Comme application, je me propose de montrer que le polynôme du degré n, étudié par M. Hermite et qui satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f''-xf'+nf=0, \tag{5}$$

a toutes ses racines réelles.

Cette proposition bien connue peut s'établir par les considérations les plus élémentaires; je crois néanmoins, dans cette question importante de la détermination de la nature des racines d'une équation, qu'il est utile d'étudier toutes les méthodes qui peuvent conduire au résultat.

Supposons donc que l'équation $f=0$ ait des racines imaginaires, et soit $\alpha+\beta i$ celle d'entre elles pour laquelle le coefficient de i est le plus grand. Je remarquerai tout d'abord que, l'équation

(¹) Plus exactement : *l'une quelconque des racines pour lesquelles le coefficient de i a la plus grande valeur.* Il pourrait se faire en effet que plusieurs racines ne différassent que par leur partie réelle.

ayant ses coefficients réels, les racines sont conjuguées deux à deux; par suite, β a une valeur positive.

J'observe ensuite que l'expression

$$\frac{f'(\alpha+\beta i)}{f''(\alpha+\beta i)}$$

se réduit à

$$\frac{1}{\alpha+\beta i},$$

en vertu de l'équation différentielle (5).

Or, le coefficient de i dans cette expression est le nombre essentiellement négatif $\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, ce qui, d'après la proposition énoncée plus haut, est impossible. L'équation a donc toutes ses racines réelles.

La même démonstration s'applique au polynôme de Legendre X_n qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2-1)f''+2xf'-n(n+1)f=0.$$

En conservant les mêmes notations que ci-dessus, on voit encore que, en vertu de cette équation différentielle, l'expression

$$\frac{f'(\alpha+\beta i)}{f''(\alpha+\beta i)}$$

se réduit à

$$\frac{1-(\alpha+\beta i)^2}{2(\alpha+\beta i)},$$

où le coefficient de i a le signe de l'expression

$$-\beta(1+\alpha^2+\beta^2)$$

et, cette quantité étant essentiellement négative, il en résulte que les polynômes X_n ont toutes leurs racines réelles.

SUR UNE

PROPRIÉTÉ DES POLYNOMES X_m DE LEGENDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCI; 1880.

1. Étant donné un polynôme entier $F(x)$, on sait que l'on peut toujours, en désignant par A, B, ..., H, K, L, ... des coefficients constants, poser identiquement

$$F(x) = AX_m + BX_p + \ldots + HX_r + KX_s + LX_t + \ldots.$$

Je supposerai que les nombres entiers m, p, ... soient rangés par ordre croissant de grandeur; cela posé, on peut énoncer le théorème suivant :

Le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$, *qui sont égales ou supérieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite*

$$(1) \qquad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K,\ L,\ \ldots.$$

Pour établir cette proposition, je ferai voir que, si elle est vraie quand la suite précédente présente $(n-1)$ variations, elle subsiste encore quand le nombre des variations est égal à n; la proposition sera ainsi démontrée, puisqu'elle est évidente quand tous les coefficients sont de même signe.

A cet effet, en supposant que la suite (1) présente n variations et que H et K soient deux coefficients consécutifs et de signes contraires, je considère l'expression $\frac{F(x)}{X_s}$, qui s'annule en même temps que $F(x)$ et demeure finie et continue pour toutes les valeurs de x égales ou supérieures à l'unité; en posant $\frac{d}{dx}\frac{F(x)}{X_s} = \frac{f(x)}{X_s^2}$, on déduit du théorème de Rolle

$$(F) \leqq (f) + 1\ (^1).$$

(1) Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne par (u) le nombre des racines de l'équation $u = 0$ qui sont égales ou supérieures à l'unité.

On a d'ailleurs

$$f(x) = \Sigma A(X'_m X_s - X'_s X_m);$$

des deux équations

$$(x^2-1)X''_p + 2xX'_p = p(p+1)X_p$$

et

$$(x^2-1)X''_s + 2xX'_s = s(s+1)X_s,$$

où p désigne un nombre entier quelconque, on déduit

$$\frac{d}{dx}[(x^2-1)(X'_p X_s - X'_s X_p)] = [p(p+1) - s(s+1)]X_p X_s;$$

d'où

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)f(x) = X_s \Phi(x),$$

où

$$\begin{aligned}\Phi(x) = A[m(m+1) - s(s+1)]X_m + \ldots \\ + H[r(r+1) - s(s+1)]X_r + L[t(t+1) - s(s+1)]X_t + \ldots.\end{aligned}$$

Or, si l'on considère les signes des coefficients de cette expression, on voit qu'ils diffèrent de ceux de la suite (1) en ce que le coefficient de X_s est annulé et que tous les coefficients précédents conservent leur signe, tandis que le signe des coefficients suivants est changé; la suite de ces coefficients présente donc exactement $(n-1)$ variations, et l'on a, par hypothèse,

$$(\Phi) \leqq n - 1.$$

De l'équation (2) on déduit d'ailleurs, en s'appuyant sur le théorème de Rolle et en remarquant que l'équation $X_s = 0$ a toutes ses racines inférieures à l'unité,

$$(f) \leqq (\Phi);$$

et des inégalités précédentes on conclut facilement

$$(F) \leqq n;$$

la proposition est donc entièrement établie.

2. Si l'on transforme l'expression du polynôme $F(x)$ en chan-

geant les signes de tous les polynômes de Legendre qui sont d'un degré impair, on voit que :

Le nombre des racines négatives de l'équation $F(x) = 0$, *dont la valeur absolue est égale ou supérieure à l'unité, est au plus égal au nombre des variations de la transformée.*

On en déduit que :

Si l'équation a toutes ses racines réelles et si leur valeur absolue est égale ou supérieure à l'unité, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations du premier membre de cette équation et le nombre des racines négatives au nombre des variations de la transformée.

Si la suite des polynômes de Legendre présente une lacune de $(\alpha + 1)$ *termes, l'équation a au moins* α *racines qui sont imaginaires ou dont la valeur absolue est plus petite que l'unité.*

Si un terme manque dans la suite des polynômes de Legendre et si les termes avoisinants sont de même signe, l'équation a deux racines imaginaires ou deux racines dont la valeur absolue est plus petite que l'unité.

SUR LA SÉPARATION

DES

RACINES DES ÉQUATIONS

DONT LE PREMIER MEMBRE EST DÉCOMPOSABLE EN FACTEURS RÉELS ET SATISFAIT À UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCII; 1881.

1. Les méthodes connues pour effectuer la séparation des racines d'une équation sont, même dans le cas où elle a toutes ses racines réelles, à peu près impraticables lorsque son degré est un peu élevé.

Le problème peut être posé de la façon suivante : *Étant donnée une quantité arbitraire* ξ, *trouver un nombre* α *tel que l'intervalle compris entre* ξ *et* α *renferme* au plus *une racine de l'équation*. On en obtient une solution facile dans le cas où, l'équation ayant toutes ses racines réelles, le premier membre satisfait à une équation linéaire du second ordre.

Considérons, en effet, une telle équation

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

dont le premier membre est un polynôme du degré n satisfaisant à l'équation différentielle

$$P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Ry = 0,$$

et posons

$$\begin{aligned} F(x, \xi) = {} & 12(n-1)P^2 + 12(x-\xi)PQ \\ & + (x-\xi)^2[(n+1)Q^2 - 4(n-2)(PR + PQ' - QP')]. \end{aligned}$$

Pour une valeur donnée de ξ, le polynôme F acquiert une valeur négative quand on remplace x par la valeur d'une quelconque des racines de l'équation (1), sauf les deux racines qui avoisinent ξ. Pour ces deux racines, le polynôme peut avoir une valeur positive; il est d'ailleurs toujours positif pour $x = \xi$, si l'on suppose que ξ n'annule pas P. Je ferai remarquer aussi que F est toujours négatif si l'on remplace ξ et x par les valeurs de deux racines quelconques de l'équation (1).

D'où la proposition suivante :

Si l'on donne à ξ une valeur arbitraire n'annulant pas P, l'équation $F(x, \xi) = 0$ a toujours au moins deux racines réelles; en désignant par x' et x'' celles de ses racines qui avoisinent ξ, on peut affirmer que chacun des intervalles compris entre les nombres x' et ξ, ξ et x'' renferme au plus une racine de l'équation. La simple substitution des nombres x', ξ et x'' fera donc connaître exactement le nombre des racines comprises dans ces intervalles.

La méthode précédente exige la résolution au moins approchée d'une équation qui, généralement, est d'un degré supérieur au second; mais il est toujours possible d'éviter cette résolution en se donnant la quantité x (que l'on peut, sauf certaines restrictions indiquées dans chaque cas particulier par la discussion du polynôme F, choisir arbitrairement) et en résolvant l'équation $F = 0$ par rapport à la quantité ξ, qui n'y entre qu'au second degré.

2. Comme exemple, je considérerai le polynôme U_n, étudié par M. Hermite, et qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

On trouve aisément

$$\begin{aligned} F(x, \xi) = {} & 12(n-1) + 12x(\xi - x) \\ & + (\xi - x)^2[(n+1)x^2 - 4(n-1)(n-2)]. \end{aligned}$$

Désignons par A la plus grande racine de l'équation $U_n = 0$, laquelle, comme je l'ai montré [1], est inférieure à $\frac{2(n-1)}{\sqrt{n+2}}$, et par B la racine qui la précède immédiatement; cela posé, si ξ est compris entre $-B$ et $+B$, l'équation $F = 0$ a ses quatre racines réelles. La plus grande est comprise entre A et $\frac{2(n-1)}{\sqrt{n+2}}$, et, comme il est facile d'obtenir une limite inférieure de la quantité B, on

[1] *Notes sur la résolution des équations numériques*, p. 66.

voit que l'on peut déduire de là une limite supérieure de A. La plus petite racine est de même comprise entre $-\frac{2(n-1)}{\sqrt{n+2}}$ et $-A$; quant aux deux autres racines α et β, l'une a une valeur supérieure, l'autre une valeur inférieure à celle de ξ, et l'on est assuré que les intervalles compris entre les nombres α et ξ, ξ et β renferment au plus une racine de l'équation $U_n = 0$.

Donnons à x une valeur arbitraire comprise entre $-A$ et $+A$, et soient, pour cette valeur de x, ξ' et ξ'' les racines de l'équation du second degré en ξ

$$F(x, \xi) = 0;$$

on peut également affirmer que chacun des intervalles compris entre ξ' et x, x et ξ'' renferme au plus une racine de l'équation proposée.

3. Les considérations qui précèdent s'appliquent entièrement aux équations dont le premier membre est une série indéfinie, satisfaisant à une équation différentielle du second ordre et qui peut être regardée comme la limite d'un polynôme entier ayant tous ses facteurs réels. Il suffit, dans tout ce qui précède, de supposer n infiniment grand.

De pareilles équations s'offrent, par exemple, quand on égale à zéro les transcendantes de Bessel et certaines fonctions circulaires.

Considérons, comme application, l'équation

$$\cos\sqrt{2x} = 0,$$

dont les racines sont

$$\frac{\pi^2}{8}, \quad \frac{9\pi^2}{8}, \quad \frac{25\pi^2}{8}, \quad \ldots$$

et dont le premier membre satisfait à l'équation différentielle

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Un calcul facile donne

$$F(x, \xi) = 48x^2 + (\xi - x)^2(9 - 8x),$$

et, comme vérification d'une des propositions précédentes, on peut remarquer que cette expression doit avoir une valeur négative si l'on y remplace respectivement x et ξ par les nombres $\frac{\pi^2}{8}$ et $\frac{9\pi^2}{8}$, qui satisfont à l'équation $\cos\sqrt{2x} = 0$.

On a donc l'inégalité

$$\frac{48\pi^4}{64} + \pi^4(9 - \pi^2) < 0,$$

d'où

$$\pi^2 > 9 + \frac{3}{4} > \frac{39}{4}$$

et

$$\pi > \frac{\sqrt{39}}{2} > 3,12\ldots.$$

SUR UNE EXTENSION

DE LA

RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES (1).

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCII; 1881.

3. Soit

$$f(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{B}x^{n-1} + \mathrm{C}x^{-2} + \ldots = 0$$

une équation du degré n.

En posant

$$\begin{aligned}
f_n &= \mathrm{A},\\
f_{n-1} &= \mathrm{A}a + \mathrm{B},\\
f_{n-2} &= \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}a + \mathrm{C},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f &= \mathrm{A}a^n + \mathrm{B}a^{n-1} + \mathrm{C}a^{n-2} + \ldots,
\end{aligned}$$

on voit que le nombre des variations de la suite

$$(4) \qquad f_n,\ f_{n-1},\ f_{n-2},\ \ldots,\ f_2,\ f_1,\ f$$

est une limite supérieure du nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont plus grandes que le nombre positif a (2).

On peut obtenir une limite plus précise, en prenant pour point de départ une règle due à Newton et qui a été l'objet de beaux travaux de M. Sylvester.

Formons, en effet, la suite

$$(5) \quad \begin{cases} f_n^2,\ f_{n-1}^2 - 2f_n f_{n-2},\ 2f_{n-2}^2 - 3f_{n-1}f_{n-3},\ \ldots, \\ (n-2)f_2^2 - (n-1)f_3 f_1,\ (n-1)f_1^2 - nf_2 f,\ nf^2 - (n+1)aff_1, \end{cases}$$

qui se compose d'un nombre de termes précisément égal au nombre des termes de la suite précédente.

(1) Nous avons supprimé les deux premiers numéros de cette Note, qui ne sont que la reproduction de propositions déjà données (p. 27 et 28). E. R.

(2) Ce théorème a été déjà démontré à la page 6. E. R.

On démontrera aisément la proposition suivante :

Le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$, qui sont supérieures à a, est au plus égal au nombre des variations de la suite (4) *qui correspondent à des permanences de la suite* (5).

Cette règle sera souvent d'une application plus commode que celle de M. Sylvester, puisqu'elle exige seulement le calcul des nombres $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_1, f$, dont la valeur s'offre d'elle-même quand on calcule le nombre $f(a)$.

Comme application, je considérerai l'équation

$$x^3-2x^2+3x-3=0.$$

Cette équation ne peut avoir de racine négative. En substituant $+1$ dans la transformée en $\frac{1}{x}$, on voit immédiatement qu'elle n'a pas de racine inférieure à $+1$. En substituant $+1$ dans le premier membre de l'équation, on obtient la suite

$$+1, \quad -1, \quad +2, \quad -1,$$

qui présente trois variations; l'équation peut donc avoir une ou trois racines positives.

Mais, si l'on forme la suite auxiliaire

$$+1, \quad -3, \quad +5, \quad +11,$$

on voit qu'il n'y a qu'une seule variation de la première suite à laquelle corresponde une permanence dans la seconde.

L'équation proposée a donc une seule racine réelle qui est supérieure à l'unité.

SUR LA SÉPARATION

DES

RACINES DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCII; 1881.

1. On peut trouver aisément un grand nombre de théorèmes qui fournissent une limite du nombre des racines d'une équation qui sont comprises entre deux nombres donnés. Il semble même que cette multiplicité de propositions obscurcisse la question plutôt qu'elle ne l'éclaircit; c'est, en effet, un problème difficile à résoudre que de déterminer, une équation étant donnée, quelle est celle des règles dont l'emploi est le plus avantageux. Je crois néanmoins que leur étude est de la plus grande importance; dans la pratique, les équations se présentent en effet sous des formes bien différentes, et chaque forme d'équation donne lieu à des théorèmes spéciaux dont chacun présente des avantages particuliers.

J'en ai déjà donné un exemple en montrant comment la règle des signes de Descartes s'étend au cas où le premier membre de l'équation est exprimé au moyen des polynômes de Legendre ou, plus généralement, au moyen de polynômes satisfaisant à une équation linéaire du second ordre. Voici, dans le même ordre d'idées, quelques propositions très simples et qui peuvent être de quelque utilité.

2. Soit, en désignant par ω une quantité positive quelconque et par

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-2}, \quad \alpha_{n-1}$$

des quantités réelles quelconques rangées par ordre croissant ou décroissant de grandeur,

$$F(x)=\frac{A_0}{(x-\alpha_0)^\omega}+\frac{A_1}{(x-\alpha_1)^\omega}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{(x-\alpha_{n-1})^\omega}.$$

Cela posé, ξ désignant une quantité quelconque comprise entre α_i et α_{i+1}, *le nombre des racines de l'équation* $F(x) = 0$, *qui sont comprises entre* ξ *et* α_{i+1}, *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$\frac{A_{i+1}}{(\xi - \alpha_{i+1})^\omega} + \frac{A_{i+2}}{(\xi - \alpha_{i+2})^\omega} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{(x - \alpha_{i-1})^\omega} + \frac{A_i}{(x - \alpha_i)^\omega}.$$

Comme application, considérons l'équation

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} = 0.$$

En désignant par ε une quantité infiniment petite et en substituant successivement $-\infty$, $2+\varepsilon$, $5-\varepsilon$, $+\infty$, on trouve les suites suivantes :

$$1 - 1 + 1, \quad 1 - \tfrac{1}{3} + \infty, \quad -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \infty, \quad 1 - 1 + 1.$$

Comme elles ne présentent aucune alternance, on en conclut que la proposée a toutes ses racines imaginaires.

3. *Si ω est une quantité positive quelconque, l'équation*

$$a + bx + cx(x-\omega) + dx(x-\omega)(x-2\omega) + \ldots = 0$$

a au moins autant de racines positives que l'équation

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = 0 \text{ (1)}.$$

Soit, par exemple, le polynôme hypergéométrique du degré n

$$F(x) = 1 - \frac{n}{1}\frac{x}{\alpha} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x(x-\omega)}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{x(x-\omega)(x-2\omega)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots,$$

où α et ω désignent des *quantités positives quelconques;* il résulte de la proposition précédente que l'équation $F(x) = 0$ a au moins autant de racines positives que l'équation

$$1 - \frac{n}{1}\frac{x}{\alpha} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots = 0.$$

(1) *Voir* page 23. E. R.

Or cette dernière a ses n racines réelles et positives, comme on le voit aisément par l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha - x)\frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

à laquelle satisfait son premier membre. L'équation $F(x) = 0$, qui est également du degré n, a donc toutes ses racines réelles et positives (1).

(1) Nous supprimons la fin de cette Note, qui n'est que la reproduction des pages 11 et 12. E. R.

SUR

LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

DE LA FORME $\frac{A_0}{x-a_0}+\frac{A_1}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}=0$ [1].

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCIII; 1881.

3. Soient ξ et ξ' deux nombres arbitraires ne comprenant aucune des quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots$, et tels que les nombres

$$\ldots,\quad a_{i-2},\quad a_{i-1},\quad \xi,\quad \xi',\quad a_i,\quad a_{i+1},\quad \ldots$$

forment une suite croissante ou décroissante.

Le nombre des racines de l'équation proposée, qui sont comprises entre ξ et ξ', est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite

$$\begin{array}{l}
\frac{A_i}{\xi'-a_i}+\frac{A_{i+1}}{\xi'-a_{i+1}}+\frac{A_{i+2}}{\xi'-a_{i+2}}+\ldots+\frac{A_{i-1}}{\xi'-a_{i-1}},\\
\frac{A_i}{\xi-a_i}+\frac{A_{i+1}}{\xi'-a_{i+1}}+\frac{A_{i+2}}{\xi'-a_{i+2}}+\ldots+\frac{A_{i-1}}{\xi'-a_{i-1}},\\
\frac{A_i}{\xi-a_i}+\frac{A_{i+1}}{\xi-a_{i+1}}+\frac{A_{i+2}}{\xi'-a_{i+2}}+\ldots+\frac{A_{i-1}}{\xi'-a_{i-1}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{A_i}{\xi-a_i}+\frac{A_{i+1}}{\xi-a_{i+1}}+\frac{A_{i+2}}{\xi-a_{i+2}}+\ldots+\frac{A_{i-1}}{\xi-a_{i-1}}.
\end{array}$$

J'ajouterai la remarque importante qui suit :

Si l'on désigne repectivement par P et par Q le plus petit et le plus grand des nombres compris dans le Tableau précédent, la valeur de la fonction

$$\frac{A_0}{x-a_0}+\frac{A_1}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

demeure toujours comprise entre P et Q, lorsque x varie entre ξ et ξ'.

(¹) Nous avons supprimé les nos 1 et 2 de cette Note, qui ne sont que la reproduction du théorème démontré à la page 41. E. R.

4. Les considérations précédentes trouvent une application immédiate, lorsque le polynôme du degré n, qui forme le premier membre d'une équation, est déterminé par les valeurs qu'il prend pour $(n+1)$ valeurs de la variable.

Pour en donner un exemple simple, soit le polynôme u déterminé par les conditions que, pour les valeurs de x égales à a, $a+h$, $a+2h$, ..., $a+nh$, il prenne respectivement les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$; on aura, en supposant h positif, la proposition suivante :

Le nombre des racines de l'équation $u=0$, qui sont inférieures à a, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$u_0-nu_1+\frac{n(n-1)}{1.2}u_2-\ldots\pm u_n,$$

et le nombre des racines, qui sont supérieures à $a+nh$, est égal au plus au nombre des alternances de la suite

$$u_n-nu_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2}-\ldots\pm u_0.$$

5. Lorsque l'on suppose que les quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont en nombre infiniment grand et infiniment peu différentes les unes des autres, on obtient diverses propositions intéressantes relativement aux équations de la forme

$$\int_a^b \frac{f(z)}{z-x}\,dz=A,$$

où $f(z)$ désigne une fonction quelconque de z, continue ou discontinue, et A une quantité constante.

On peut aussi considérer d'une façon plus générale l'équation

$$\int_a^b \frac{f(z)}{(z-x)^\omega}\,dz=A,\qquad \ldots,$$

où ω désigne un nombre positif quelconque. Les intégrales qui en constituent le premier membre se présentent, comme on le sait, dans plusieurs questions importantes de l'Analyse. Mais je ne saurais ici m'étendre sur ce sujet, sur lequel j'aurai l'occasion de revenir, si l'Académie veut bien me le permettre.

SUR

LES ÉQUATIONS DE LA FORME

$$\sum \int_a^b e^{-zx} F(z)\, dz = 0\ (^1).$$

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCIII; 1881.

(¹) Nous supprimons entièrement cette Note, qui n'est que la reproduction de propositions déjà données (p. 24, 25, 28, 29, 30, 31, 38 et 39). E. R.

SUR

L'INTRODUCTION DES LOGARITHMES

DANS LES CRITERIUMS QUI DÉTERMINENT UNE LIMITE SUPÉRIEURE DU NOMBRE DES RACINES D'UNE ÉQUATION QUI SONT COMPRISES ENTRE DEUX NOMBRES DONNÉS (¹).

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCIII; 1881.

2. On peut, dans un grand nombre d'applications du théorème du nº 25 (p. 39), éviter l'emploi des logarithmes.

Considérons, par exemple, l'équation

$$A_0 x^{a_0} + A_1 x^{a_1} + A_2 x^{a_2} + \ldots + A_n x^{a_n} = 0, \tag{1}$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent des nombres croissants arbitraires, rationnels ou irrationnels.

Si l'on pose $x = e^{-y}$, le nombre m des racines positives de l'équation (1), qui sont comprises entre zéro et un, est égal au nombre des racines positives de l'équation

$$A_0 e^{-a_0 y} + A_1 e^{-a_1 y} + A_2 e^{-a_2 y} + \ldots + A_n e^{-a_n y} = 0,$$

ou encore, ω désignant une quantité arbitraire, de l'équation

$$A_0 e^{(\omega - a_0) y} + A_1 e^{(\omega - a_1) y} + A_2 e^{(\omega - a_2) y} + \ldots + A_n e^{(\omega - a_n) y} = 0.$$

Supposons le nombre ω tellement choisi que toutes les quantités

$$\omega - a_0, \quad \omega - a_1, \quad \omega - a_2, \quad \ldots, \quad \omega - a_n$$

soient positives.

En faisant application de la proposition précédente et en conservant les mêmes notations, relativement aux quantités $p_0, p_1, \ldots, p_n$,

(¹) Nous avons supprimé le nº 1 de cette Note, qui n'est que la reproduction du théorème du nº 25 (p. 39). E. R.

on voit que m est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$p_0 \log \frac{\omega - a_0}{\omega - a_1}, \quad p_0 \log \frac{\omega - a_0}{\omega - a_1} + p_1 \log \frac{\omega - a_1}{\omega - a_2} \quad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$p_0 \log \frac{\omega - a_0}{\omega - a_1} + p_1 \log \frac{\omega - a_1}{\omega - a_2} + \ldots + p_{n-1} \log \frac{\omega - a_{n-1}}{\omega - a_n}, \quad p_n.$$

Si nous donnons à ω une très grande valeur, on a sensiblement

$$\log \frac{\omega - a_i}{\omega - a_{i+1}} = \frac{a_{i+1} - a_i}{\omega}.$$

D'où la proposition suivante :

Le nombre des racines positives de l'équation (1), *qui sont inférieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations de la suite*

$$p_0(a_1 - a_0), \quad p_0(a_1 - a_0) + p_1(a_2 - a_1),$$
$$p_0(a_1 - a_0) + p_1(a_2 - a_1) + p_2(a_3 - a_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$p_0(a_1 - a_0) + p_1(a_2 - a_1) + \ldots + p_{n-1}(a_n - a_{n-1}), \quad p_n,$$

proposition que, dans ma précédente Communication (¹), j'avais déduite de la considération de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-zx} \mathrm{F}(z)\, dz.$$

3. Une autre application importante du théorème fondamental se rencontre dans l'étude des équations de la forme

$$\frac{\mathrm{A}_0}{x - a_0} + \frac{\mathrm{A}_1}{x - a_1} + \frac{\mathrm{A}_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_n}{x - a_n} = 0;$$

j'ai déjà donné des règles permettant de déterminer une limite du nombre des racines qui sont comprises entre deux nombres donnés; mais celles que l'on obtient, en suivant la voie que je viens d'indiquer, sont presque aussi simples et beaucoup plus précises dans un grand nombre de cas.

E. R.

(¹) *Voir* page 38.

SUR LA DISTRIBUTION, DANS LE PLAN,

DES

RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE

DONT LE PREMIER MEMBRE SATISFAIT A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCIV; 1882.

1. Il est important, dans un grand nombre de questions, de déterminer, au moins approximativement, dans quelle région du plan sont situées les racines d'une équation algébrique. La méthode suivante peut être employée utilement dans un grand nombre de cas, et notamment quand le premier membre de l'équation satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre.

Elle repose sur la proposition suivante, qui résulte immédiatement des théorèmes que j'ai donnés dans mes *Notes sur la résolution des équations numériques*.

Soit $f(x)$ un polynôme du degré n, et

$$\mathrm{X} = x - \frac{2(n-1)f'(x)}{f''(x)};$$

supposons que l'une des racines de l'équation

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

soit $\xi + \eta i$, et désignons par M l'affixe de cette quantité; désignons de même par M′ l'affixe de la quantité X quand on y fait $x = \xi + \eta i$. Cela posé, si par M on fait passer un cercle (ou une droite) tel que l'une des régions du plan déterminées par ce cercle ne contienne aucune racine de l'équation (1), le point M′ est nécessairement dans l'autre région.

Pour montrer, par un exemple simple, l'usage que l'on peut faire de cette proposition, je considérerai le polynôme, de degré n, $f(x)$ qui satisfait à l'équation du second ordre

$$x f''(x) - (x + 2n) f'(x) + n f(x) = 0,$$

et qui est le dénominateur de la réduite de degré n de e^x.

En vertu de cette équation différentielle, pour toute racine de l'équation (1),

$$f(x) = 0,$$

on a

$$X = \frac{x(x+2)}{2n + x}.$$

Si $x = \xi + \eta i$ est la racine de l'équation (1), dont le module est le plus petit, on aura, par suite de la proposition énoncée ci-dessus,

$$\operatorname{mod} \frac{x(x+2)}{2n+x} > \operatorname{mod} x,$$

d'où $\xi < -(n+1)$ et, *a fortiori*, $\operatorname{mod}(x) > n + 1$.

On en conclut que le module d'une racine quelconque est plus grand que $n + 1$.

2. En désignant par m une quantité réelle quelconque, considérons toutes les droites parallèles à la droite qui a pour équation $m\eta + \xi = 0$. Supposons que cette droite se meuve parallèlement à elle-même, le point où elle rencontre l'axe des ξ se déplaçant toujours dans le même sens vers l'extrémité positive de cet axe.

Soit $x = \xi + \eta i$ la première des racines de l'équation (1) qu'elle rencontre pendant ce déplacement. Il est clair que toutes les autres racines sont situées d'un même côté de cette droite et dans la région qui ne contient pas le point $\xi = -\infty$. Il en résulte que si, pour cette valeur de x, on pose

$$X = \xi_0 + \eta_0 i,$$

on a

$$m(\eta_0 - \eta) + (\xi_0 - \xi) > 0.$$

Un calcul facile donne

$$\xi_0 - \xi = -2(n-1) \frac{\xi^2 + \eta^2 + 2n\xi}{(\xi + 2n)^2 + \eta^2},$$

$$\eta_0 - \eta = -2(n-1) \frac{2n\eta}{(\xi + 2n)^2 + \eta^2},$$

d'où

$$\xi^2 + \eta^2 + 2n\xi + 2mn\eta < 0.$$

Construisons le point A dont les coordonnées sont $\xi = -2n$ et $\eta = 0$; on voit que l'équation $\xi^2 + \eta^2 + 2n(\xi + m\eta) = 0$ est celle d'un cercle passant par le point A et l'origine des coordonnées; la tangente à l'origine est d'ailleurs la droite $\xi + m\eta = 0$.

D'où la conclusion suivante : Tout cercle passant par les points O et A renferme au moins une racine de l'équation; si, par les divers points racines de l'équation contenus dans ce cercle, on mène des perpendiculaires au diamètre passant par l'origine O, et si l'on considère celle de ces droites qui est la plus éloignée du point O, toutes les racines sont situées d'un même côté de cette droite et dans la région du plan qui contient le point O.

Soit ω le point diamétralement opposé à O sur ce cercle; ce point est situé sur la droite AA' élevée perpendiculairement en A à l'axe des ξ; si l'on mène par ω une droite perpendiculaire à Oω, toutes les racines seront *a fortiori* situées d'un même côté de cette droite; elles sont donc situées dans l'intérieur de la courbe enveloppée par cette droite lorsqu'on fait varier le rayon du cercle, courbe qui n'est autre que la parabole P ayant O pour foyer et AA' pour tangente au sommet.

On peut encore limiter davantage la portion du plan qui contient les racines. Ce sera, si l'Académie veut bien me le permettre, l'objet d'une nouvelle Note, dans laquelle je communiquerai également les résultats auxquels on parvient en appliquant la méthode précédente aux polynômes hypergéométriques $F(-n, \beta, \gamma, x)$, qui satisfont à l'équation différentielle du second ordre

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma + (n - \beta - 1)x]\frac{dy}{dx} + n\beta . y = 0.$$

3. En conservant les désignations dont j'ai fait usage dans ma Note précédente, considérons un cercle passant par les points O et A et coupant en N la parabole P. La droite menée par N perpendiculairement au diamètre du cercle jouit évidemment de la propriété que toutes les racines de l'équation (1) sont situées d'un même côté de cette droite. Lorsqu'on fait varier le rayon du cercle, cette droite enveloppe une courbe P' passant par le point A et

contenant toutes les racines; de cette courbe P′, on déduira de la même manière une infinité d'autres courbes P″, P‴, ... jouissant de la même propriété et qui auront pour limite une courbe π caractérisée par les conditions suivantes :

1° Elle passe par le point A;

2° Si N désigne un de ses points et si l'on construit le cercle déterminé par les points O, A et N, la tangente à la courbe au point N est perpendiculaire au diamètre de ce cercle qui passe par le point O.

D'où l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2n\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 2n\eta},$$

dont l'intégrale est, en coordonnées polaires, $\rho = \dfrac{k - 2n\omega}{\sin\omega}$.

La constante arbitraire k se détermine par la condition que la courbe passe par le point A, et l'on voit que l'on doit faire $k = 0$.

D'où la conclusion suivante :

Les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont toutes situées en dehors du cercle tracé autour de l'origine avec un rayon égal à $(n+1)$, et toutes situées dans l'intérieur de la branche de courbe transcendante que l'on obtient en faisant varier ω depuis $-\pi$ jusqu'à $+\pi$ dans l'équation

$$\rho = \frac{-2n\omega}{\sin\omega}.$$

4. La méthode précédente s'applique à l'équation dont le premier membre est le polynôme hypergéométrique

$$F(-n, \alpha, \beta - n + 1, x),$$

qui satisfait à l'équation linéaire du second ordre

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [(n - 1 - \alpha)x + \beta - n + 1]\frac{dy}{dx} + n\alpha y = 0.$$

Je considérerai seulement les racines pour lesquelles le coefficient de i est nul ou positif, en sorte que, $\omega = \xi + \eta i$ désignant une quelconque de ces racines, on ait $\eta \geqq 0$. Cela posé, en faisant, pour abréger, $\mu = n - 1$, on obtient sans peine le Tableau sui-

vant, où, en regard des conditions auxquelles satisfont les nombres α et β, j'ai placé les limitations correspondantes relatives à ξ et η.

$\beta - \alpha < 0,\ \mu - \beta < 0$	$\eta = 0$, toutes les racines sont réelles
$\alpha + \mu < 0,\ \mu - \beta < 0$	*idem*
$\alpha + \mu < 0,\ \beta - \alpha < 0$	*idem*
$\beta < 0,\ \beta^2 < \alpha^2$	$\mathrm{mod}^2\,\omega > \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$
$\beta < 0,\ \beta^2 < \alpha^2$	$\mathrm{mod}\,\omega > 1$
$\beta < 0,\ \beta^2 < (\beta - \alpha - \mu)^2$	$\mathrm{mod}^2\,\dfrac{\omega}{\omega - 1} > \dfrac{\beta^2}{(\beta - \alpha - \mu)^2}$
$\beta < 0,\ \beta^2 > (\beta - \alpha - \mu)^2$	$\mathrm{mod}\,\dfrac{\omega}{\omega - 1} > 1$
$\alpha > 0,\ \beta^2 > \alpha^2$	$\mathrm{mod}\,\omega < 1$
$\alpha > 0,\ \beta^2 < \alpha^2$	$\mathrm{mod}^2\,\omega < \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$
$\alpha > 0,\ \alpha^2 < (\beta - \alpha - \mu)^2$	$\mathrm{mod}^2(\omega - 1) < \dfrac{(\beta - \alpha - \mu)^2}{\alpha^2}$
$\alpha > 0,\ \alpha^2 > (\beta - \alpha - \mu)^2$	$\mathrm{mod}(\omega - 1) < 1$
$\beta - \alpha - \mu > 0,\ \beta^2 < (\beta - \alpha - \mu)^2$....	$\mathrm{mod}\left(\dfrac{\omega}{\omega - 1}\right) < 1$
$\beta - \alpha - \mu > 0,\ \beta^2 > (\beta - \alpha - \mu)^2$....	$\mathrm{mod}^2\left(\dfrac{\omega}{\omega - 1}\right) < \dfrac{\beta^2}{(\beta - \alpha - \mu)^2}$
$\beta - \alpha - \mu > 0,\ \alpha^2 < (\beta - \alpha - \mu)^2$....	$\mathrm{mod}(\omega - 1) > 1$
$\beta - \alpha - \mu > 0,\ \alpha^2 > (\beta - \alpha - \mu)^2$....	$\mathrm{mod}^2(\omega - 1) > \dfrac{(\beta - \alpha - \mu)^2}{\alpha^2}$
$\alpha - \mu > 0,\ (\mu - \beta)(\alpha - \beta) > 0$	$\eta < \dfrac{\sqrt{(\mu - \beta)(\alpha - \beta)}}{\alpha - \mu}$
$\beta - \alpha - 2\mu > 0,\ (\beta - \mu)(\alpha + \mu) > 0$.	$\dfrac{\eta}{(\xi - 1)^2 + \eta^2} < \dfrac{\sqrt{(\alpha + \mu)(\beta - \mu)}}{\beta - \alpha - 2\mu}$
$\mu + \beta < 0,\ (\alpha + \mu)(\alpha - \beta) > 0$	$\dfrac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} < -\dfrac{\sqrt{(\alpha + \mu)(\alpha - \beta)}}{\beta + \mu}$

5. Tels sont les premiers résultats auxquels conduit la méthode exposée ci-dessus relativement aux polynômes hypergéométriques.

Pour obtenir des limitations plus précises, il serait nécessaire de construire et de discuter des courbes du troisième et du quatrième ordre.

Je ferai observer à ce sujet que la méthode proposée est, à proprement parler, une méthode d'*exhaustion*, qui permet de limiter de plus en plus la portion du plan occupée par les racines. Dans le cas général, la difficulté des constructions et la complication des calculs bornent bientôt les résultats que l'on peut obtenir; mais, par une équation particulière, on peut, sans trop de difficultés, pousser assez loin la limitation cherchée et, au besoin, faire usage de constructions graphiques et d'une épure.

SUR QUELQUES

ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCIV; 1882.

1. Les théorèmes de Rolle et de Descartes s'appliquent aux équations transcendantes; mais il n'en est pas ainsi des conséquences si simples, si nombreuses et si importantes que l'on déduit de ces deux propositions, relativement aux équations dont le premier membre est un polynôme entier; elles ne subsistent qu'exceptionnellement.

L'étude des équations $\cos x = 0$ et $\sin x = 0$ n'a pas appelé l'attention sur ce point: les fonctions transcendantes $\cos x$ et $\sin x$ jouissent en effet de toutes les propriétés des polynômes entiers; mais il n'en est plus de même quand on considère la fonction holomorphe $G(x)$, inverse de la fonction $\Gamma(x)$ de Legendre et introduite dans l'Analyse par M. Weierstrass.

Dans sa remarquable thèse *Sur le développement en séries des intégrales eulériennes,* M. Bourguet a donné en particulier le développement de $G(x)$ suivant les puissances croissantes de x et l'étude de ce développement a révélé des irrégularités singulières tant dans les signes des coefficients que dans leur valeur numérique.

Il semble donc de quelque intérêt d'étudier quelles sont les propriétés élémentaires des équations algébriques qui s'appliquent aux équations transcendantes; et à cet égard je distinguerai les fonctions transcendantes holomorphes, dont les *facteurs primaires* sont de la forme $e^{\frac{x}{\alpha}}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)$ et dont le type général est

$$e^{ax}\,\Pi.e^{\frac{x}{\alpha}}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right).$$

Pour abréger, je les appellerai *transcendantes du genre un*, les transcendantes du genre zéro étant celles dont les facteurs primaires ne renferment pas d'exponentielle.

2. Cela posé, en désignant par $F(x)$ une transcendante du premier genre et en me bornant au cas où l'équation $F(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles,* j'énoncerai les propositions suivantes :

Toutes les dérivées de $F(x)$ *sont également des transcendantes du premier genre et les équations*

$$F'(x) = 0, \qquad F''(x) = 0, \qquad \ldots$$

ont toutes leurs racines réelles [1].

En désignant par ω une quantité réelle quelconque, si l'on pose

$$F(x + \omega i) = U + iV,$$

l'équation $\lambda U + \mu V = 0$ a, quelles que soient les quantités réelles λ et μ, toutes ses racines réelles.

En désignant par $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ le développement de $F(x)$, on a les inégalités

$$a_1^2 - 2a_0 a_2 \geqq 0, \quad a_2^2 - \frac{3}{2} a_1 a_3 \geqq 0, \quad \ldots, \quad a_n^2 - \frac{n+1}{n} a_{n+1} a_{n-1} \geqq 0, \quad \ldots,$$

théorème déjà énoncé par Newton dans le cas où $F(x)$ est un polynôme entier.

En appliquant cette dernière proposition à la transcendante $G(x)$ et en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs des coefficients de son développement, on voit que, si

$$a_n^2 - \frac{n+1}{n} | a_{n+1} a_{n-1} |$$

est négatif, a_{n+1} et a_{n-1} sont affectés de signes contraires. Cette circonstance se présente fréquemment, à cause même des irrégularités que présente la suite des valeurs numériques des coefficients et de là de nombreuses vérifications des Tables calculées par M. Bourguet, tant pour le développement de $G(x)$ que pour celui de $\frac{e^{C x} G(x}{x(x+1)}$ et de $\frac{G(x)}{x(x+1)}$.

[1] M. Hermite avait déjà démontré [*Sur l'intégrale eulérienne de deuxième espèce* (*Journal de Borchardt*, t. 90)] que $G'(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, et sa démonstration, qui s'appuie sur la méthode de Plana, s'étend d'elle-même au cas d'une transcendante quelconque du premier genre. A cette occasion, M. Hermite m'a dit tenir de M. Genocchi que la méthode généralement attribuée à Plana appartient en réalité à F Chio.

3. En désignant, comme ci-dessus, par $F(x)$ une transcendante du genre un et ayant toutes ses racines réelles, soit

$$a_0 + a_1 x + a_2 x_3 + a_3 x^3 + \ldots$$

le développement de $\frac{1}{F(x)}$.

Posons, n étant un nombre entier quelconque,

$$\varphi(x) = \frac{a_0 x^n}{1.2\ldots n} + \frac{a_1 x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots + \frac{a_{n-2} x^2}{1.2} + \frac{a_{n-1} x}{1} + a_n;$$

on démontrera aisément que chacune des équations

$$\varphi(x) = 0, \qquad \varphi'(x) = 0, \qquad \varphi''(x) = 0, \qquad \varphi'''(x) = 0, \qquad \ldots$$

a au plus une racine réelle.

En particulier, si n est pair, l'équation $\varphi(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires [1], et par suite a_0 et a_n sont de même signe.

Si l'on pose $\frac{1}{F(x)} = f(x)$, on en déduit que toutes les fonctions

$$f(x), \quad f''(x), \quad f^{\text{IV}}(x), \quad \ldots$$

sont de même signe, quelle que soit la valeur réelle attribuée à la variable.

On voit aussi que, dans le développement des diverses fonctions

$$x\Gamma(x), \quad x(x+1)\Gamma(x),$$
$$x(x+1)(x+2)\Gamma(x), \quad x(x+1)(x+2)(x+3)\Gamma(x), \quad \ldots,$$

les coefficients de toutes les puissances paires de x sont positifs.

En posant, avec M. Bourguet,

$$x(x+1)\Gamma(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots,$$

on en conclut aisément que, pour toutes les valeurs *paires* de i, les quantités

$$2B_i + B_{i-1}, \quad 6B_i + 5B_{i-1} + B_{i-2}, \quad 24B_i + 26B_{i-1} + 9B_{i-2} + B_{i-3}, \quad \ldots$$

[1] Il en résulte nécessairement que l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

a également toutes ses racines imaginaires.

sont positives. La même chose n'a pas lieu pour les valeurs impaires de i; les signes des quantités précédentes varient alors d'une façon irrégulière.

Toutes ces quantités tendent du reste très rapidement vers zéro, et l'on déduit de là un moyen de calculer de proche en proche les valeurs approchées des coefficients.

La relation $6B_{18} + 5B_{17} + B_{16} > 0$ donne, par exemple, quand on y remplace B_{17} et B_{16} par leurs valeurs,

$$B_{18} > 0,00000190646;$$

la valeur donnée par M. Bourguet est

$$B_{18} = 0,00000190649.$$

Les considérations qui précèdent suffisent pour mettre en évidence le rôle important que joue, dans la théorie des équations transcendantes, la notion des facteurs primaires, dont on est redevable à M. Weierstrass.

SUR LA DÉTERMINATION DU GENRE

D'UNE

FONCTION TRANSCENDANTE ENTIÈRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCIV; 1882.

1. Un grand nombre de propositions relatives aux équations dont le premier membre est un polynôme entier s'étend au cas où le premier membre est une fonction transcendante entière, lorsque cette transcendante est du genre 0 ou du genre 1 [1].

$F(x)$ désignant une fonction de cette espèce, on peut, par exemple, affirmer que deux racines consécutives de l'équation $F(x) = 0$ comprennent une racine de la dérivée et n'en comprennent qu'une; ou, si l'on veut encore, que deux racines de la dérivée comprennent une racine de l'équation proposée et n'en comprennent qu'une; d'où en particulier cette conséquence : si, en substituant dans $F(x)$ deux racines consécutives de la dérivée, les résultats obtenus sont de même signe, l'équation $F(x) = 0$ a des racines imaginaires.

Pour démontrer cette proposition, je ferai remarquer, en supposant, pour simplifier, que $F(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles sans avoir de racines égales, que la fonction [2]

$$F'^2(x) - F(x)F''(x)$$

[1] *Voir* ma Note *Sur quelques équations transcendantes,* insérée dans les *Comptes rendus*, séance du 23 janvier 1882.

[2] Plus généralement, $F(x)$ désignant une transcendante du genre zéro ou du genre 1, les équations

$$\begin{aligned}
&F(a) + 2xF'(a) + F''(a)x^2 = 0,\\
&F(a) + 3xF'(a) + 3x^2F''(a) + F'''(a)x^3 = 0,\\
&F(a) + 4xF'(a) + 6x^2F''(a) + 4F'''(a)x^3 + F^{\text{IV}}(a)x^4 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ont toutes leurs racines réelles, quelle que soit la quantité réelle a, si $F(x) = 0$ a toutes ses racines réelles.

a toujours une valeur positive pour une valeur réelle quelconque de x. En désignant par α et β deux racines consécutives de $F'(x) = 0$, on a

$$F(\alpha)F''(\alpha) < 0 \quad \text{et} \quad F(\beta)F''(\beta) < 0,$$

d'où

$$F(\alpha)F(\beta)F''(\alpha)F''(\beta) > 0;$$

on a du reste, en vertu d'une propriété connue,

$$F''(\alpha)F''(\beta) < 0;$$

on a donc également

$$F(\alpha)F(\beta) < 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

2. Considérons l'équation $1 + x\sin x = 0$, qui a évidemment une infinité de racines réelles; les deux premiers termes du développement du premier membre étant $1 + x^2$ et ces termes présentant une lacune entre deux coefficients positifs, on voit que cette équation a nécessairement aussi des racines imaginaires, si l'on est assuré que le genre de son premier membre ne dépasse pas 1.

On voit par ces exemples qu'il peut être de quelque utilité de savoir déterminer le genre d'une fonction transcendante; et, à cet égard, on peut énoncer la proposition suivante :

Si le rapport $\frac{f'(z)}{f(z)z^n}$, *où* n *désigne un nombre entier, tend vers zéro quand* z *croît indéfiniment, la fonction* $f(z)$ *est du genre* n.

Pour le démontrer, imaginons un contour S entourant l'origine O des coordonnées et tel que, le point M décrivant ce contour, l'angle que fait avec l'axe des x le rayon vecteur OM aille toujours en croissant; soit ρ la plus petite valeur de ce rayon vecteur et considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f'(z)}{f(z)z^n}\frac{dz}{z-x} \quad (^1),$$

qui est prise le long de ce contour.

(1) Je tiens de M. Hermite, à qui j'avais communiqué ces résultats, qu'il les avait obtenus de son côté et par la même voie; je signalerai aussi à ce sujet une Note récente de M. Mittag-Leffler *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable*, insérée dans les *Comptes rendus*, séance du 20 février 1882.

Elle tend vers zéro lorsque le rayon vecteur minimum ρ croît indéfiniment; sa valeur est égale à la somme des résidus de $\frac{f'(z)}{f(z)z^n}\frac{1}{z-x}$, relatifs aux infinis de la fonction située dans l'intérieur du contour; ces résidus sont d'ailleurs : pour $z = x$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)x^n};$$

pour $z = 0$,

$$\frac{-\varphi(x)}{x^n},$$

$\varphi(x)$ désignant un polynôme de degré $(n-1)$; pour une racine α de $f(z) = 0$,

$$\frac{1}{\alpha^n(\alpha - x)}.$$

On déduit de là

$$\frac{f'(x)}{f(x)x^n} = \lim\left[\frac{\varphi(x)}{x^n} + \sum\frac{1}{\alpha^n(x-\alpha)}\right],$$

ou encore

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \lim\left[\varphi(x) + \sum\frac{x^n}{\alpha^n(x-\alpha)}\right]\\ &= \lim\left[\varphi(x) + \sum\left(\frac{x^{n-1}}{\alpha^n} + \frac{x^{n-2}}{\alpha^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{x-\alpha}\right)\right];\end{aligned}$$

d'où, en intégrant entre les limites 0 et x, et en désignant par $\Phi(x)$ un polynôme du degré n,

$$f(x) = \lim e^{\Phi(x) + \sum\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{2\alpha^2} + \ldots + \frac{x^n}{n\alpha^n}\right)}\Pi\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right).$$

Cette expression montre que $f(x)$ est effectivement une transcendante du genre n et met en évidence ses facteurs primaires.

3. Si l'on suppose, en particulier, que $F(x)$ soit de la forme

$$e^{a_1(x)}f_1(x) + e^{a_2(x)}f_2(x) + e^{a_3(x)}f_3(x) + \ldots,$$

où $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ désignent des polynômes entiers et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des constantes quelconques réelles ou imaginaires, on voit aisément que $\lim\frac{F'(x)}{xF(x)} = 0$, pour $x = \infty$.

La transcendante $F(x)$ est donc du genre 1; il en est ainsi en particulier de la fonction $1 + x\sin x$, et l'on voit effectivement que l'équation $1 + x\sin x = 0$ a des racines imaginaires.

SUR LES

FONCTIONS DU GENRE ZÉRO

ET

DU GENRE UN [1],

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCV; 1882.

Soit $\Phi(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$ un polynôme entier du degré n, dans lequel les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont des fonctions du nombre n. Supposons que, n croissant indéfiniment, $\Phi(x)$ ait pour limite une série $F(x)$ convergente pour toutes les valeurs de la variable; supposons en outre que $\Phi(x) = 0$ ait, pour toute valeur de n, ses racines réelles et de même signe (il suffit même que l'on puisse assigner un nombre p, tel que cette propriété ait lieu pour toute valeur de n supérieure à p); je dis que $F(x)$ est égale au produit d'une fonction entière du genre zéro par une exponentielle de la forme e^{ax+b}, où a et b désignent des quantités constantes.

Soient, en effet, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation $\Phi(x) = 0$ que je supposerai, par exemple, toutes positives et rangées par ordre de grandeur, en sorte que l'on ait $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3, \ldots$; on a $\sum \frac{1}{\alpha_i} = -\frac{A_1}{A_0}$, quantité qui tend vers une limite finie ρ, et l'on conclut que, $\beta_1, \beta_2, \ldots$ désignant les racines de $F(x) = 0$, $\sum \frac{1}{\beta_i}$ a une limite finie au plus égale à ρ [2].

[1] Sur ces dénominations *voir*, dans les *Comptes rendus*, ma Note du 23 janvier 1882, *Sur quelques équations transcendantes*, et le Cours professé à la Sorbonne par M. Hermite en 1881-1882, p. 72.

[2] Elle peut être moindre; en posant en effet $\Phi(x) = (1-x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, on a $\rho = 2$ et, relativement aux racines de $F(x) = e^{-x}(1-x)$, $\sum \frac{1}{\beta_i} = 1$.

Posons $-\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x - \alpha_i}$ et, dans le développement, considérons les termes qui correspondent aux valeurs de α_i inférieures à un nombre fixe arbitraire k; en désignant par M_k l'ensemble de ces termes et par R_k les autres termes, on peut écrire

$$-\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = M_k + R_k. \tag{1}$$

On a

$$R_k = \sum_{i=k}^{i=n} \frac{1}{\alpha_i - x} = \sum_{i=k}^{i=n} \frac{1}{\alpha_i} + x \sum_{i=k}^{i=n} \frac{1}{\alpha_i^2} + x^2 \sum_{i=k}^{i=n} \frac{1}{\alpha_i^3} + \ldots,$$

égalité où le dernier membre est une série convergente pour toute valeur de x comprise entre zéro et α_k. En désignant par σ_k le nombre $\sum_{i=k}^{i=n} \frac{1}{\alpha_i}$, on a d'ailleurs

$$\sum_{i=k}^{i=n} \frac{1}{\alpha_i^2} < \sigma_k \frac{1}{\alpha_i}, \qquad \sum_{i=k}^{i=n} \frac{1}{\alpha_i^3} < \sigma_k \frac{1}{\alpha_i^2}, \qquad \ldots.$$

Pour toute valeur de x positive et plus petite que α_k, on en conclut que R_k, qui est plus grand que σ_k, est plus petit que $\frac{\sigma_k}{1 - \frac{x}{\alpha_k}}$; il est donc de la forme $\frac{\sigma_k}{1 - \frac{\theta_k}{\alpha_k}}$, θ désignant un nombre compris entre zéro et un.

$\sum \frac{1}{\beta_i}$ ayant une limite finie, il existe une fonction entière du genre zéro, $G_0(x)$, qui a pour racines les quantités $\beta_0, \beta_1, \ldots$, que je supposerai rangées par ordre croissant de grandeur; posons

$$-\frac{G_0'(x)}{G_0(x)} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{\beta_i - x},$$

et distinguons dans ce développement l'ensemble des fractions par lesquelles β_i est $< k$; j'appellerai P_k l'ensemble de ces fractions. Cela posé, il est clair que si, dans l'égalité (1), on fait croître n

indéfiniment, le premier membre a pour limite $-\frac{F'(x)}{F(x)}$ et que M_k a pour limite P_k, R_k ayant pour limite une fonction R'_k qui est, comme R_k, de la forme $\frac{\sigma'_k}{1-\frac{\theta x}{\alpha_k}}$, où θ désigne un nombre compris entre zéro et un et σ'_k la limite de σ_k quand n croît indéfiniment.

On a donc l'égalité

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = P_k + R'_k;$$

faisons maintenant croître indéfiniment le nombre positif k; par définition, P_k a pour limite

$$-\frac{G'_0(x)}{G_0(x)}$$

et R'_k a pour limite la limite de σ'_k, laquelle est un nombre positif fini σ; on a donc

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{G'_0(x)}{G_0(x)} + \sigma;$$

d'où, en intégrant,

$$F(x) = e^{-\sigma x+\tau} G_0(x).$$

Cette égalité, étant vérifiée pour toutes les valeurs positives inférieures au nombre α_k, qui peut être rendu aussi grand que l'on veut, subsiste pour toutes les valeurs de x; ce qui démontre la proposition énoncée.

En particulier, on fait voir aisément que, si l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles et de même signe, il en est de même de l'équation

$$a_0 + q a_1 x + q^4 a_2 x^2 + \ldots + q^{n^2} a_n x^n = 0,$$

lorsque q est un nombre plus petit, en valeur absolue, que l'unité. Il en résulte qu'en posant

$$\Phi(x) = 1 + nq\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2} q^4 \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \ldots + q^{n^2}\left(\frac{x}{n}\right)^n,$$

l'équation $\Phi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et de même signe.

En faisant croître indéfiniment le nombre n, on a

$$F(x) = 1 + qx + \frac{q^4 x^2}{1.2} + \frac{q^9 x^3}{1.2.3} + \frac{q^{16} x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

et l'on en conclut que la transcendante $F(x)$ est de la forme $e^{Qx} G_0(x)$, où Q désigne une fonction de q et $G_0(x)$ une fonction entière du genre zéro.

On démontrerait de même la proposition suivante :

Si $\Phi(x) = 0$ a, quel que soit n, toutes ses racines réelles, $F(x)$ est égal au produit d'une fonction entière du genre un par une exponentielle de la forme e^{ax^2+bx+c}, où a, b et c désignent des quantités constantes.

SUR LE

GENRE DE QUELQUES FONCTIONS ENTIÈRES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCVIII; 1884.

1. Je considère une fonction entière $F(x)$ du genre n, et je suppose que l'équation $F(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles, ou, du moins, ait un nombre limité de racines imaginaires.

Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ les racines imaginaires de cette équation; je suppose, pour fixer les idées, que le nombre des racines réelles négatives soit limité et, en rangeant toutes les racines réelles par ordre croissant de grandeur, je les désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

En posant

$$F_m(x) = e^{a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}\left(1 - \frac{x}{\beta_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\beta_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\beta_k}\right)\prod_1^m\left(1 - \frac{x}{\alpha_i}\right),$$

où les a_i désignent des quantités variables dépendant de la valeur du nombre entier m, on a évidemment

$$F(x) = \lim F_m(x)$$

et

$$F'(x) = \lim F'_m(x).$$

$F'_m(x)$ est une fonction de la forme

$$e^{a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}\Phi_m(x),$$

où $\Phi_m(x)$ est un polynôme entier.

Les racines de l'équation $\Phi_m(x) = 0$ sont les mêmes que celles de l'équation

$$\frac{F'_m(x)}{F_m(x)} = 0$$

ou encore de l'équation

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \frac{1}{x-\beta_1} + \frac{1}{x-\beta_2} + \ldots + \frac{1}{x-\beta_k} + \sum_1^m \frac{1}{x-\alpha_i} = 0;$$

cette équation, mise sous forme entière, est du degré

$$(k + m + n - 1).$$

Elle a $(m-1)$ racines réelles respectivement comprises entre les nombres α_1 et α_2, α_2 et α_3, α_3 et α_4, ..., et qui, quelle que soit la valeur attribuée au nombre entier m, demeurent comprises entre des limites parfaitement déterminées; ces racines, je les désignerai par les lettres

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{m-1}.$$

Les $k+n$ autres racines peuvent être réelles ou imaginaires, et la valeur de leur module peut croître indéfiniment avec le nombre m; elles sont essentiellement en nombre limité, et je les désignerai par les lettres

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k+n}.$$

On a donc, en désignant par A_m un nombre dépendant du nombre entier m,

$$\Phi_m(x) = A_m \prod_1^{m-1}\left(1 - \frac{x}{\gamma_i}\right)\prod_1^{k+n}\left(1 - \frac{x}{\delta_i}\right).$$

Le facteur $\prod_1^{k+n}\left(1 - \frac{x}{\delta_i}\right)$ a pour limite un polynôme entier $\Psi(x)$, dont le degré est au plus $(k+n)$; il peut être d'un degré moindre, si plusieurs valeurs de δ_i croissent indéfiniment avec le nombre m.

On aura donc

$$F'(x) = \lim F'_m(x) = \Psi(x) \lim e^{a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n} A_m \prod_1^{m-1}\left(1 - \frac{x}{\gamma_i}\right),$$

et, *comme chacune des quantités γ_i demeure comprise, quel que soit le nombre entier m, entre deux limites déterminées*, il est clair que la limite du produit

$$A_m e^{a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}\prod_1^{m-1}\left(1 - \frac{x}{\gamma_i}\right)$$

est une fonction entière du genre n.

D'où cette conclusion importante :

La dérivée $F'(x)$ est une fonction entière du genre n.

2. L'équation $\Phi_m(x) = 0$ ayant *au plus* $k+n$ racines imaginaires, on voit, à la limite, que l'équation

$$F'(x) = 0$$

a également, au plus, $k+n$ racines imaginaires; ce nombre étant essentiellement limité, il en résulte que $F''(x)$, $F'''(x)$, ..., et en général toutes les dérivées de $F(x)$ sont du genre n.

La démonstration précédente suppose expressément que le nombre des racines imaginaires de l'équation $F(x) = 0$ est limité; il est probable, toutefois, que le théorème subsiste encore, même dans le cas où elle a une infinité de racines imaginaires; mais, jusqu'à présent, je n'ai pas réussi à en obtenir une démonstration rigoureuse.

3. On établirait, comme ci-dessus, la proposition plus générale qui suit :

$F(x)$ *désignant une fonction entière du genre* n, *n'admettant qu'un nombre limité de facteurs imaginaires, la fonction suivante :*

$$\Theta_0 F(x) + \Theta_1 F'(x) + \Theta_2 F''(x) + \ldots + \Theta_h F^{(h)} x,$$

où h *désigne un nombre entier quelconque, et* $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_h$ *des polynômes entiers à coefficients réels ou imaginaires, est une fonction entière du genre* n.

SUR LES

VALEURS QUE PREND UN POLYNOME ENTIER

LORSQUE LA VARIABLE VARIE ENTRE DES LIMITES DÉTERMINÉES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
t. XCVIII; 1884.

1. Il est souvent utile dans certaines questions d'Analyse, notamment dans la recherche de la valeur approximative des intégrales définies et des racines des équations algébriques, de déterminer des limites entre lesquelles demeure constamment comprise la valeur d'un polynôme $F(x)$, lorsque la variable varie entre deux limites données.

En supposant les nombres ξ et η positifs, Cauchy a donné la règle suivante : Si l'on pose, en mettant en évidence les termes positifs et les termes négatifs de $F(x)$,

$$F(x) = F_0(x) - F_1(x),$$

la valeur de $F(x)$, lorsque x varie depuis ξ jusqu'à η, demeure constamment comprise entre les nombres

$$F_0(\xi) - F_1(\eta)$$

et

$$F_0(\eta) - F_1(\xi).$$

Cette règle, dont l'exactitude est évidente, donne généralement des limites beaucoup trop écartées; on obtiendra des résultats plus précis par la méthode suivante, que, pour plus de clarté, j'exposerai d'abord en considérant un polynôme du quatrième degré.

2. Étant donné le polynôme entier

$$F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

et deux nombres positifs ξ et η, où je suppose $\eta > \xi$, formons la suite des nombres

$$\begin{aligned}
F_0 &= a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + e\xi^4,\\
F_1 &= a + b\eta + c\xi\eta + d\xi^2\eta + e\xi^3\eta,\\
F_2 &= a + b\eta + c\eta^2 + d\xi\eta^2 + e\xi^2\eta^2,\\
F_3 &= a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\xi\eta^3,\\
F_4 &= a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4,
\end{aligned}$$

dont la loi de formation est évidente.

Cela posé, la valeur du polynôme $F(x)$ demeure, lorsque x varie depuis ξ jusqu'à η, constamment comprise entre la plus petite et la plus grande des quantités F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4; j'ajoute que le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$, qui sont comprises entre ξ et η, est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$F_0,\quad F_1,\quad F_2,\quad F_3,\quad F_4.$$

En général, soit le polynôme entier

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n;$$

formons, par voie récurrente, les quantités suivantes :

$$Q_0 = a_0,\quad Q_1 = Q_0\xi + a_1,\quad Q_2 + Q_1\xi = a_2,\quad \ldots,\quad Q_n = Q_{n-1}\xi + a_n$$

et

$$P_n = Q_n,\quad P_{n-1} = P_n + (\eta - \xi)Q_{n-1},\quad P_{n-2} = P_{n-1} + (\eta - \xi)\eta Q_{n-2},\quad \ldots,$$
$$P_0 = P_1 + (\eta - \xi)\eta^{n-1}Q_0;$$

en supposant ξ et η positifs et $\eta > \xi$, on peut énoncer les deux propositions suivantes :

Le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$ *qui sont comprises entre* ξ *et* η *est au plus égal au nombre des variations de la suite*

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad \ldots,\quad P_{n-1},\quad P_n$$

et la valeur du polynôme $F(x)$, *quand* x *varie depuis* ξ *jusqu'à* η, *demeure constamment comprise entre la plus petite et la plus grande des quantités* P_i.

Soit, par exemple,

$$F(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2;$$

si l'on pose $\xi = 1$ et $\eta = 2$, on aura le Tableau suivant :

Coefficients de l'équation...	1	− 2	+1	3	+4	−2
Valeurs des Q_i.............	1	− 1	0	−3	+1	−1
Valeurs des P_i.............	2	−14	−6	−6	0	−1

d'où il résulte que l'équation $F(x) = 0$ a une seule racine comprise entre 1 et 2 et que la valeur de ce polynôme, quand x varie depuis 1 jusqu'à 2, demeure comprise entre les nombres -14 et $+2$; la règle de Cauchy donne les limites -40 et $+41$.

En considérant encore le même polynôme, faisons $\xi = 2$ et $\eta = 3$, nous aurons le Tableau suivant :

1	− 2	+ 1	−3	+4	−2
1	0	+ 1	−1	+2	+2
+91	+10	+10	+1	+4	+2

d'où l'on voit que l'équation $F(x) = 0$ n'a aucune racine comprise entre 2 et 3, et que la valeur de ce polynôme, quand x varie depuis 2 jusqu'à 3, demeure toujours comprise entre $+1$ et $+91$, les deux valeurs extrêmes étant d'ailleurs $+2$ et $+91$.

La règle de Cauchy donne dans ce cas les limites -143 et $+236$.

3. Les résultats précédents subsistent encore, en en modifiant légèrement l'énoncé, dans le cas où $F(x)$ est un polynôme de la forme

$$a_0 + a_1x^{\alpha_1} + a_2x^{\alpha_2} + \ldots + a_nx^{\alpha_n},$$

les quantités α_i étant des nombres positifs quelconques, entiers, fractionnaires ou incommensurables; ils s'étendent donc au cas où $F(x)$ est une fonction transcendante de la forme

$$A_0e^{\alpha_0x} + A_1e^{\alpha_1x} + \ldots + A_ne^{\alpha_nx}.$$

SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Acta mathematica, t. IV; 1884.

1. Dans tout ce qui suit, à moins que je n'en avertisse expressément, je désigne par ξ un nombre positif ou nul et par η un nombre quelconque supérieur à ξ.

Cela posé, en considérant le polynôme entier du degré n

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

j'y rattacherai le polynôme du même degré $\psi(x)$ défini par l'égalité suivante

$$\psi(x) = \frac{x^{n+1} f(\eta) - f(x\eta)}{x-1} + \xi \frac{f(x\eta) - f(\xi)}{x\eta - \xi}. \tag{1}$$

En posant, pour abréger,

$$\psi(x) = P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \ldots + P_{n-1} x + P_n,$$

il est aisé de déterminer les coefficients P_i.

Si, par exemple, on fait

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

un calcul facile donne

$$\begin{aligned}
P_0 &= a_0 \eta^3 + a_1 \eta^2 + a_2 \eta + a_3, \\
P_1 &= a_0 \xi \eta^2 + a_1 \eta^2 + a_2 \eta + a_3, \\
P_2 &= a_0 \xi^2 \eta + a_1 \xi \eta + a_2 \eta + a_3, \\
P_3 &= a_0 \xi^3 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi + a_3.
\end{aligned}$$

La loi de formation de ces coefficients est évidente et s'étend aisé-

ment au cas d'un polynôme d'un degré quelconque ; les coefficients extrêmes sont $f(\eta)$ et $f(\xi)$.

2. Le calcul des nombres P_i s'effectue de la façon la plus simple par la méthode suivante : que l'on forme d'abord, et par voie récurrente, une suite de nombres Q_i déterminés par les relations

$$Q_0 = a_0, \quad Q_1 = \xi Q_0 + a_1, \quad Q_2 = \xi Q_1 + a_2, \quad \ldots, \quad Q_n = \xi Q_{n-1} + a_n,$$

les nombres P_i seront donnés par les égalités

$$P_n = Q_n, \quad P_{n-1} = P_n + (\eta - \xi) Q_{n-1}, \quad P_{n-2} = P_{n-1} + \eta(\eta - \xi) Q_{n-2}, \quad \ldots,$$
$$P_0 = P_1 + \eta^{n-1}(\eta - \xi) Q_0.$$

3. La propriété fondamentale du polynome $\psi(x)$ peut s'énoncer ainsi :

Le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre les quantités ξ et η, est au plus égal au nombre des variations du polynôme $\psi(x)$, et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est au nombre pair.

Pour la démontrer, je remarque que, de l'égalité (1), on déduit

$$\frac{(\xi - \eta) x f(x\eta)}{(x-1)(x\eta - \xi)} = \frac{x^{n+1} f(\eta)}{1-x} + \psi(x) + \frac{\xi f(\xi)}{x\eta - \xi}.$$

Pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et l'unité, $\frac{1}{1-x}$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et $\frac{1}{x\eta - \xi}$ développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances décroissantes de x.

Effectuant ces développements, on a l'égalité

$$\frac{(\xi - \eta) x f(x\eta)}{(x-1)(x\eta - \xi)} = \ldots + f(\eta).x^{n+2} + f(\eta).x^{n+1} + \psi(x)$$
$$+ \frac{\xi f(\xi)}{\eta}\frac{1}{x} + \frac{\xi^2 f(\xi)}{\eta^2}\frac{1}{x^2} + \ldots;$$

la série double qui compose le second membre est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et l'unité, et le nombre de ces valeurs, pour lesquelles elle s'annule, est évidemment égal au nombre m des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre ξ et η. D'où il suit que ce nombre m est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la série; ce nombre des variations se réduit d'ailleurs au nombre des variations du polynôme $\psi(x)$. Il suffit pour le faire voir de remarquer que, le premier terme de $\psi(x)$ étant $f(\eta).x^n$, son coefficient est le même que celui de tous les termes précédents et que le dernier terme étant $f(\xi)$, il est de même signe que tous les termes qui suivent. De là résulte immédiatement la proposition que je voulais démontrer.

4. Soit, comme application, l'équation

$$x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0. \tag{2}$$

En posant $\xi = 0$ et $\eta = 1$, on formera le tableau suivant :

Valeurs des coefficients...	$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
Valeurs des Q_i...........	$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
Valeurs des P_i...........	-1	-2	0	-1	$+2$	-2,

d'où l'on conclut, puisque la suite des P_i présente deux variations, que l'équation (2) a au plus deux racines comprises entre zéro et $+1$.

Faisant maintenant $\xi = 1$ et $\eta = 2$, on a ce tableau :

$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
$+1$	-1	0	-3	$+1$	-1
$+2$	-14	-6	-6	0	-1;

la suite des P_i présentant une seule variation, on voit que l'équation a une seule racine comprise entre $+1$ et $+2$.

En faisant $\xi = 2$ et $\eta = 3$, on a les suites

$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
$+1$	0	$+1$	-1	$+2$	$+2$
$+91$	$+10$	$+10$	$+1$	$+4$	$+2$;

la dernière ne renfermant aucune variation, on en conclut que l'équation n'a pas de racine comprise entre $+2$ et $+3$.

Pour $\xi = 3$ et $\eta = 4$, on a le tableau suivant :

Coefficients.....	$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
Q_i.............	$+1$	$+1$	$+4$	$+9$	$+31$	$+91$;

il est inutile ici de calculer les valeurs des P_i : j'ai en effet démontré [1] que le nombre des racines supérieures à ξ est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des nombres Q_i; et cette suite, pour $\xi = 3$, ne présentant aucune variation, il est clair que l'équation proposée n'a aucune racine supérieure à 3.

5. L'équation (2) a donc une racine comprise entre $+1$ et $+2$; elle n'a aucune racine supérieure à $+2$ ni aucune racine négative, puisque son premier membre ne présente que des variations.

L'intervalle compris entre zéro et $+1$ peut contenir deux racines, ou n'en contenir aucune. Pour résoudre la question, je remarque que le nombre des racines de l'équation proposée, qui sont comprises entre zéro et $+1$, est égal au nombre des racines de l'équation

$$2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui sont supérieures à celles de l'unité.

Formons, en suivant la méthode que j'ai indiquée dans le Mémoire cité précédemment (*Théorie des équations numériques*, p. 116), le tableau suivant :

$+2$	-4	$+3$	-1	$+2$	-1
$+2$	-2	$+1$	0	$+2$	$+1$
$+2$	0	$+1$	0	$+2$;	

les nombres

$$+2, \quad 0, \quad +1, \quad 0, \quad +2, \quad +1,$$

qui forment le contour extérieur du tableau n'offrant aucune variation, il en résulte que l'équation proposée n'a aucune racine

[1] *Mémoire sur la théorie des équations numériques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. IX, p. 105).

comprise entre zéro et l'unité; elle a ainsi une seule racine comprise entre $+1$ et $+2$.

II.

6. Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n$ les coefficients du polynôme $\psi(x)$; en désignant respectivement par R et par S le plus grand et le plus petit de ces nombres, considérons l'équation

$$(1) \qquad R - f(x) = 0.$$

Les quantités, analogues à $P_0, P_1, \ldots, P_n$, sont dans ce cas

$$R - P_0, \quad R - P_1, \quad \ldots, \quad R - P_n,$$

et il est clair qu'elles sont toutes positives ou nulles. L'équation (1) n'a donc aucune racine comprise entre ξ et η et son premier membre conserve toujours le même signe quand x varie depuis ξ jusqu'à η, à savoir le signe $+$; pour toute valeur de x, comprise entre ξ et η, on a donc

$$f(x) \leqq R.$$

On prouverait d'une façon analogue que, pour les mêmes valeurs, on a

$$f(x) \geqq S;$$

d'où cette conclusion importante :

Lorsque x prend toutes les valeurs possibles comprises entre les nombres ξ et η, la valeur du polynôme $f(x)$ demeure constamment comprise entre les nombres R et S.

7. Soit, comme application, le polynôme

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

que j'ai déjà considéré plus haut.

On voit que, quand x varie de zéro à $+1$, le polynôme prend des valeurs comprises entre les nombres -2 et $+2$; la règle de Cauchy donne des limites -7 et $+6$. Quand x varie de $+1$ à

$+2$, la règle énoncée ci-dessus donne les limites -14 et $+2$, la règle de Cauchy les limites -40 et $+41$; enfin, dans l'intervalle compris entre $+2$ et $+3$, la règle de Cauchy donne des limites -143 et $+236$, l'autre règle les limites bien plus resserrées $+1$ et $+91$.

8. Il est moins aisé de déterminer des limites un peu précises, entre lesquelles demeurent comprises les valeurs que prend une fonction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, lorsque x varie dans l'intervalle $(\xi \ldots \eta)$.

Voici cependant une solution assez simple, mais limitée au cas où relativement à l'un des termes de la fraction, au polynôme $f(x)$ par exemple, les nombres P_i ont tous le même signe.

Soient

$$P_0, \quad P_1, \quad \ldots, \quad P_n$$

ces divers nombres, et

$$\Pi_0, \quad \Pi_1, \quad \ldots, \quad \Pi_n$$

les nombres correspondants relativement au polynôme $\varphi(x)$; je suppose les deux polynômes du même degré, ce que l'on peut toujours admettre en introduisant au besoin un certain nombre de coefficients nuls.

Cela posé, en s'appuyant sur les considérations développées plus haut, on démontrera aisément que, lorsque x varie dans l'intervalle $(\xi \ldots \eta)$, la valeur que prend la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ demeure constamment comprise entre le plus grand et le plus petit des nombres

$$\frac{\Pi_0}{P_0}, \quad \frac{\Pi_1}{P_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\Pi_n}{P_n}.$$

Considérons, par exemple, et en supposant $\xi = 2$ et $\eta = 3$, la fraction

$$\frac{2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x - 5}{x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2};$$

on a

$$P_0 = 91, \qquad P_1 = P_2 = 10, \qquad P_3 = 1, \qquad P_4 = 4 \qquad \text{et} \qquad P_5 = 2.$$

Le tableau suivant donnera la valeur des Π_i

Coefficients.....	o	+ 2	− 5	+ 2	− 3	− 5
Q_i.............	o	+ 2	− 1	o	− 3	− 11
Π_i.............	+ 31	+ 31	− 23	− 14	− 14	− 11

Si maintenant nous formons les fractions

$$\frac{31}{91},\quad \frac{31}{10},\quad -\frac{23}{10},\quad -14,\quad -\frac{14}{4},\quad -\frac{11}{2},$$

nous voyons que la plus petite d'entre elles est -14 et la plus grande $\frac{31}{10}$; on en conclut que, quand x varie depuis $+2$ jusqu'à $+3$, la valeur de la fraction demeure comprise entre les limites -14 et $+3,1$.

III.

9. Soit p un nombre entier positif quelconque, mais supérieur à $(n+1)$; dans le développement en série de l'expression

$$\frac{x^{n+1}f(\eta)}{1-x}+\psi(x)+\frac{\xi f(\xi)}{x\eta-\xi},$$

considérons seulement les termes dont les exposants sont compris entre les limites p et $-p$, nous obtiendrons ainsi un polynôme $\Theta_p(x)$ dont la valeur est donnée par l'égalité

$$\begin{aligned}\Theta_p = {} & P_0x^p+\ldots+P_0x^{n+1}\\ & +P_0x^n+P_1x^{n-1}+P_2x^{n-2}+\ldots+P_{n-2}x^2+P_{n-1}x+P_n\\ & +\frac{\xi}{\eta}P_n\frac{1}{x}+\ldots+\frac{\xi^p}{\eta^p}P_n\frac{1}{x^p}.\end{aligned}$$

Lorsque le nombre p croît indéfiniment, Θ_p a pour limite une série indéfinie Θ qui, pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et 1, a la même valeur que la fraction

$$\frac{(\xi-\eta)xf(x\eta)}{(x-1)(x\eta-\xi)};$$

d'où résulte, en désignant par m le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$ qui sont comprises entre ξ et η, que la série Θ est convergente et s'annule pour m valeurs de la variable.

Cherchons d'abord une limite supérieure du nombre des racines positives de l'équation $\Theta_p=0$; une pareille limite est donnée immédiatement par le nombre des variations de Θ_p, qui se réduit à celui des variations de $\psi(x)$. Mais on peut obtenir une limite plus précise en faisant usage d'une proposition importante due à Newton.

Au-dessous de la suite des termes de $\Theta_p(x)$, où se peuvent trouver des variations, à savoir les termes

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad \ldots,\quad P_{n-2},\quad P_{n-1},\quad P_n;$$

écrivons les termes de la suite

$$\begin{gathered}P_0^2-P_0P_1,\quad P_1^2-P_0P_2,\quad P_2^2-P_0P_1,\quad \ldots,\\ P_{n-2}^2-P_{n-3}P_{n-1},\quad P_{n-1}^2-P_nP_{n-2},\quad P_n^2-P_nP_{n-1}\frac{\xi}{\eta};\end{gathered}$$

nous obtiendrons le tableau suivant :

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{lllllll}P_0, & P_1, & P_2, & \ldots, & P_{n-2} & P_{n-1}, & P_n,\\ +1, & P_1^2-P_0P_2, & P_2^2-P_0P_1, & \ldots, & P_{n-2}^2-P_{n-3}P_{n-1}, & P_{n-1}^2-P_{n-2}P_n, & +1,\end{array}\right.$$

où j'ai remplacé les termes extrêmes de la seconde ligne $+1$, attendu que, quand P_0 et P_1 sont de signe contraire, $P_0-P_0P_1$ est positif et que, de même, $P_n^2-\frac{\xi}{\eta}P_nP_{n-1}$ est positif quand les termes P_n et P_{n-1} présentent une variation.

Cela posé, il suit du théorème de Newton que le nombre q des racines positives de l'équation $\Theta_p=0$ est au plus égal au nombre V_0 des variations de la suite supérieure du tableau (A), qui correspondent à des permanences dans la suite inférieure.

Ce nombre q est, on le voit, indépendant de la valeur attribuée au nombre entier p et sa valeur demeure la même quand p croît indéfiniment; on en conclut que le nombre m, qui représente le nombre des valeurs positives de x, pour lesquelles la série Θ converge vers zéro, est au plus égal à q.

D'où la proposition suivante :

Si l'on forme le tableau (A), *le nombre des racines de l'équation* $f(x)=0$, *qui sont comprises entre* ξ *et* η, *est au plus égal au nombre des variations présentées par la ligne* *supérieure du tableau et auxquelles correspondent des permanences dans la ligne inférieure.*

Soit, comme application, l'équation

$$x^5 - 3x^3 + 9x^2 - 11x + 5 = 0; \tag{1}$$

cherchons le nombre des racines comprises entre $\xi = 1$ et $\eta = 2$.

Les valeurs des nombres P_i s'obtiennent en formant le tableau suivant :

$+1$	0	-3	$+9$	-11	$+5$
$+1$	$+1$	-2	$+7$	-4	$+1$
$+27$	$+11$	$+3$	$+11$	-3	$+1$,

et le tableau (A) devient

$+27$	$+11$	$+3$	$+11$	-3	$+1$
...	...	...	$+20$	-2	$+1$.

Dans la ligne inférieure, je n'ai indiqué les signes des termes que quand ils correspondent à des variations; on voit qu'il n'y a dans la ligne supérieure aucune variation à laquelle corresponde une permanence dans la ligne inférieure, d'où il suit que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre $+1$ et $+2$.

On arriverait à la même conclusion en employant la méthode suivante, qui trouve fréquemment d'utiles applications.

L'équation peut se mettre sous la forme

$$(x^4 + x^3 - 2x^2 + 7x - 4)(x - 1) + 1 = 0$$

et, par suite, peut s'écrire

$$x = 1 - \frac{1}{x^4 + x^3 - 2x^2 + 7x - 4}.$$

Cherchons des limites entre lesquelles varie le polynôme dénominateur lorsque x varie de $+1$ à $+2$; en appliquant la méthode indiquée plus haut, on formera le tableau

$+1$	$+1$	-2	$+7$	-4
$+1$	$+2$	0	$+7$	$+3$.

Il suffit ici de calculer les valeurs des nombres Q_i; ceux-ci étant en effet positifs, il est clair que les P_i seront également tous positifs et, par suite, le dénominateur demeure positif quand x varie dans les limites indiquées.

Il en résulte que le second membre de l'égalité (2) est toujours inférieur à l'unité; il ne peut donc jamais être compris entre $+1$ et $+2$ et l'on voit, comme nous l'avions reconnu précédemment, que l'équation (1) n'a aucune racine dans cet intervalle.

IV.

10. La proposition, énoncée dans le premier paragraphe, peut encore être démontrée par une autre méthode qui donne lieu à quelques conséquences intéressantes.

En désignant par ξ et η deux nombres quelconques *positifs ou négatifs*, soient $f(x)$ un polynôme entier du degré n et $\psi(x)$ le polynôme déterminé par la relation

$$\psi(x) = \frac{x^{n+1} f(\eta) - f(x\eta)}{x - 1} + \xi \frac{f(x\eta) - f(\xi)}{x\eta - \xi}.$$

Appelons $\psi_1(x)$ ce que devient $\psi(x)$ quand on remplace $f(x)$ par $(x - \lambda)$; on a évidemment

$$\psi_1(x) = \frac{x^{n+2} f(\eta)(\eta - \lambda) - f(x\eta)(x\eta - \lambda)}{x - 1} + \xi \frac{f(x\eta)(x\eta - \lambda) - f(\xi)(\xi - \lambda)}{x\eta - \xi},$$

d'où, par un calcul facile,

$$\psi_1(x) = \psi(x)(x\eta - \lambda) - \lambda f(\eta) x^{n+1} + \xi f(\xi).$$

On voit que $\psi_1(x)$ et le produit $\psi(x)(x\eta - \lambda)$ ne diffèrent que par leurs termes extrêmes; les coefficients de x^{n+1} étant respectivement [puisque $f(\eta) = P_0$ et $f(\xi) = P_n$] $P_0(\eta - \lambda)$ et $P_0\eta$, les termes constants étant respectivement $(\xi - \lambda)P_n$ et $-\lambda P_n$.

Si donc le nombre λ satisfait aux conditions suivantes

$$\eta(\eta - \lambda) > 0, \quad \lambda(\lambda - \xi) > 0,$$

le polynôme $\psi_1(x)$ présente précisément autant de variations que le produit $\psi(x)(x\eta - \lambda)$. D'où il suit, en vertu du lemme de Segner, que, si $\eta\lambda$ est positif, $\psi_1(x)$ a au moins une variation de plus que $\psi(x)$, et que, si $\eta\lambda$ est négatif, $\psi_1(-x)$ a au moins une variation de plus que $\psi(-x)$.

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

L'équation $\psi(x)=0$ *a au moins autant de variations que l'équation* $f(x)=0$ *a de racines réelles* λ *satisfaisant aux inégalités*

$$\lambda\eta > 0, \quad \eta(\eta-\lambda) > 0, \quad \lambda(\lambda-\xi) > 0. \tag{1}$$

La transformée $\psi(-x)$ *a au moins autant de variations que l'équation* $f(x)=0$ *a de racines réelles* λ *satisfaisant aux inégalités*

$$\lambda\eta < 0, \quad \eta(\eta-\lambda) > 0, \quad \lambda(\lambda-\xi) > 0. \tag{2}$$

11. Supposons par exemple ξ et η positifs et $\eta > \xi$, les inégalités (1) sont satisfaites pour toutes les racines comprises entre ξ et η. D'où la proposition que j'ai démontrée au commencement de ce Mémoire.

Supposons maintenant que ξ et η soient des nombres positifs quelconques, les inégalités (2) sont vérifiées pour toutes les racines négatives; d'où cette conclusion :

Quels que soient les nombres positifs ξ *et* η, *le nombre des racines négatives de l'équation* $f(x)=0$ *est au plus égal au nombre des variations du polynôme* $\psi(-x)$.

Dans le cas particulier où, ξ et η étant positifs, η est plus grand que ξ, on voit que, si toutes les racines de l'équation sont réelles et si toutes les racines positives sont comprises entre ξ et η, le nombre des variations de $\psi(x)$ est précisément égal au nombre des racines positives et le nombre des variations de $\psi(-x)$ égal au nombre des racines négatives.

12. Dans ce dernier cas, j'ajouterai encore une observation.

Ayant, pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et $+1$, l'égalité

$$\frac{(\xi-\eta)xf(x\eta)}{(x-1)(x\eta-\xi)} = \ldots + f(\eta)x^{n+2} + f(\eta)x^{n+1} + \psi(x)$$
$$+ \frac{\xi}{\eta}f(\xi)\frac{1}{x} + \frac{\xi^2}{\eta^2}f(\xi)\frac{1}{x^2} + \ldots,$$

je remarque que, si $f(\xi)$ et $f(\eta)$ sont de même signe et si l'équation $\psi(x)=0$ n'a aucune racine comprise entre 0 et $+1$, $\psi(x)$

conserve dans cet intervalle un signe constant, à savoir celui de $f(\xi)$, puisque $\psi(x)$ se réduit à cette quantité pour $\xi=0$.

Le second membre de l'égalité précédente conserve donc toujours le même signe [à savoir celui de $f(\xi)$ et de $f(\eta)$], quand x varie de $\frac{\xi}{\eta}$ à $+1$; il en est de même du premier membre qui, par suite, ne peut que s'annuler quand x varie depuis ξ jusqu'à η.

D'où la proposition suivante, que l'on peut souvent appliquer avec utilité pour reconnaître si un intervalle donné renferme des racines :

Les nombres $f(\xi)$ *et* $f(\eta)$ *étant de même signe, l'équation* $f(x)=0$ *n'a aucune racine comprise entre* ξ *et* η, *si l'équation* $\psi(x)=0$ *n'a aucune racine comprise entre* 0 *et* $+1$.

J'ai d'ailleurs donné [1] un algorithme très simple qui permet, dans beaucoup de cas, de reconnaître facilement si une équation a des racines supérieures à l'unité, à quoi se ramène immédiatement le problème de déterminer si l'équation $\psi(x)=0$ a des racines comprises entre 0 et $+1$.

Soit, comme application, l'équation

$$x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$$

qui n'a, évidemment, qu'une seule racine négative.

Le nombre des alternances de la suite

$$10 - 8 + 3 - 2 + 1$$

étant nul, le nombre des racines positives de l'équation, qui sont inférieures à $+1$, est égal à zéro; de même le nombre des alternances de la suite

$$2^5 - 2.2^3 + 3.2^2 - 8.2 + 10$$

étant également nul, on voit qu'il n'y a pas de racine supérieure à $+2$.

Pour reconnaître s'il y a des racines comprises entre $+1$ et $+2$, j'emploierai la méthode exposée plus haut; on formera le tableau

$+1$	0	-2	$+3$	-8	$+10$
$+1$	$+1$	-1	$+2$	-6	$+4$
$+22$	$+6$	-2	$+2$	-2	$+4$;

[1] *Mémoire sur la théorie des équations numériques*, p. 116.

d'où l'on déduit

$$\psi(x) = 22x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4.$$

Or le nombre des alternances de la suite

$$+4 - 2 + 2 - 2 + 6 + 22$$

étant nul, l'équation $\psi(x) = 0$ n'a aucune racine positive inférieure à l'unité et, par suite, l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre $+1$ et $+2$. Elle a donc une racine négative et quatre racines imaginaires.

V.

13. La propriété fondamentale des coefficients du polynôme $\psi(x)$ peut s'énoncer ainsi :

Le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre les nombres ξ et η, est au plus égal au nombre des variations que présente la suite

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n.$$

Il est nécessaire d'examiner les simplifications qui se présentent, lorsque le polynôme $f(x)$ présente des lacunes.

Soit, pour fixer les idées, l'équation

$$A + Bx^3 + Cx^7 + Dx^{10} = 0;$$

formons la suite

$$\begin{aligned}
P_0 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\eta^{10},\\
P_1 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi\eta^9,\\
P_2 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi^2\eta^8,\\
P_3 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi^3\eta^7,\\
P_4 &= A + B\eta^3 + C\xi\eta^6 + D\xi^4\eta^6,\\
P_5 &= A + B\eta^3 + C\xi^2\eta^5 + D\xi^5\eta^5,\\
P_6 &= A + B\eta^3 + C\xi^3\eta^4 + D\xi^6\eta^4,\\
P_7 &= A + B\eta^3 + C\xi^4\eta^3 + D\xi^7\eta^3,\\
P_8 &= A + B\xi\eta^2 + C\xi^5\eta^2 + D\xi^8\eta^2,\\
P_9 &= A + B\xi^2\eta + C\xi^6\eta + D\xi^9\eta,\\
P_{10} &= A + B\xi^3 + C\xi^7 + D\xi^{10}.
\end{aligned}$$

A l'égard du nombre des variations que présente la suite de ces nombres, on peut remarquer que les termes P_0, P_1, P_2 et P_3 peuvent s'écrire de la façon suivante

$$\Omega + D\eta^{10}, \quad \Omega + D\xi\eta^9, \quad \Omega + D\xi^2\eta^8, \quad \Omega + D\xi^3\eta^7,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\Omega = A + B\eta^3 + C\eta^7.$$

Il est clair que ces quantités vont toutes en croissant ou toutes en décroissant, le nombre des variations qu'elles présentent se réduit donc au nombre des variations des deux termes P_0 et P_3 et l'on peut supprimer les termes P_1 et P_2 ; on démontrerait de même qu'on peut ne tenir aucun compte des termes P_4, P_5, P_6, P_8 et P_9.

Il suffit ainsi de considérer la suite

$$\begin{aligned}
&A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\eta^{10},\\
&A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi^3\eta^7,\\
&A + B\eta^3 + C\xi^4\eta^3 + D\xi^7\eta^3,\\
&A + B\xi^3 + C\xi^7 + D\xi^{10}.
\end{aligned}$$

D'une façon un peu plus générale, soit l'équation

$$(1) \qquad f(x) = A + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^\varepsilon = 0,$$

où β, γ, δ, ε désignent des nombres entiers positifs croissants ; on établira comme ci-dessus la proposition suivante :

En désignant par ξ et η deux nombres positifs, dont le plus grand soit η, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre ξ et η, est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des nombres

$$(\mathrm{T}) \quad \left\{\begin{aligned}
&A + B\eta^\beta + C\eta^\gamma + D\eta^\delta + E\eta^\varepsilon,\\
&A + B\eta^\beta + C\eta^\gamma + D\eta^\delta + E\xi^{\varepsilon-\delta}\eta^\delta,\\
&A + B\eta^\beta + C\eta^\gamma + D\xi^{\delta-\gamma}\eta^\gamma + E\xi^{\varepsilon-\gamma}\eta^\gamma,\\
&A + B\eta^\beta + C\xi^{\gamma-\beta}\eta^\beta + D\xi^{\delta-\beta}\eta^\beta + E\xi^{\varepsilon-\beta}\eta^\beta,\\
&A + B\xi^\beta + C\xi^\gamma + D\xi^\delta + E\xi^\varepsilon.
\end{aligned}\right.$$

La loi de formation de ces quantités est évidente et il est clair que le théorème s'étend au cas où le polynôme contient un nombre quelconque de termes.

J'ajoute qu'il subsiste encore *lorsque les exposants* $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ *sont des nombres positifs quelconques, commensurables ou incommensurables, rangés par ordre croissant de grandeur.*

Pour le démontrer, supposons que $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ soient des nombres fractionnaires quelconques et que, $\beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \beta'', \gamma'', \delta''$ et ε'' désignant les nombres entiers, on ait

$$\beta = \frac{\beta''}{\beta'}, \qquad \gamma = \frac{\gamma''}{\gamma'}, \qquad \delta = \frac{\delta''}{\delta'}, \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}.$$

En posant, pour abréger, $\beta'\gamma'\delta'\varepsilon' = \omega$, et en faisant $x = X^{\omega}$, l'équation (1) a pour transformée l'équation

$$(2) \qquad A + X^{\frac{\omega\beta''}{\beta'}} + X^{\frac{\omega\gamma''}{\gamma'}} + X^{\frac{\omega\delta''}{\delta'}} + X^{\frac{\omega\varepsilon''}{\varepsilon'}} = 0,$$

dans laquelle tous les exposants sont des nombres entiers.

Le nombre des racines de l'équation (1), qui sont comprises entre ξ et η, est égal au nombre des racines de l'équation (2) qui sont comprises entre $\xi^{\frac{1}{\omega}}$ et $\eta^{\frac{1}{\omega}}$. Or, en appliquant à l'équation (2) la proposition énoncée dans le numéro précédent, on trouve précisément la suite (A); d'où il résulte que cette proposition subsiste lorsque $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des nombres fractionnaires positifs quelconques et, par conséquent, même quand ils sont incommensurables.

14. Les équations importantes de la forme

$$Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \ldots + Le^{\lambda x} = 0$$

se ramènent à une équation de la forme considérée précédemment en posant $e^x = z$; d'où la proposition suivante, qui s'étend évidemment au cas où le premier membre contient un nombre quelconque de termes, mais que, pour plus de clarté, j'énoncerai seulement dans un cas particulier.

En désignant par ξ *et* η *deux nombres positifs ou négatifs dont le plus grand soit* η, par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *et* ε *des nombres quelconques, positifs ou négatifs, que je supposerai rangés par ordre croissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation*

$$F(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} + De^{\delta x} + Ee^{\varepsilon x} = 0,$$

qui sont comprises entre ξ *et* η, *est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite*

$$\begin{array}{lllll}
Ae^{\alpha\eta} + Be^{\beta\eta} + Ce^{\gamma\eta} & & + De^{\delta\eta} & & + Ee^{\varepsilon\eta}, \\
Ae^{\alpha\eta} + Be^{\beta\eta} + Ce^{\gamma\eta} & & + De^{\delta\eta} & & + Ee^{(\varepsilon-\delta)\xi+\delta\eta}, \\
Ae^{\alpha\eta} + Be^{\beta\eta} + Ce^{\gamma\eta} & & + De^{(\delta-\gamma)\xi+\gamma\eta} & & + Ee^{(\varepsilon-\gamma)\xi+\gamma\eta}, \\
Ae^{\alpha\eta} + Be^{\beta\eta} + Ce^{(\gamma-\beta)\xi+\beta\eta} & & + De^{(\delta-\beta)\xi+\beta\eta} & & + Ee^{(\varepsilon-\beta)\xi+\beta\eta}, \\
Ae^{\alpha\xi} + Be^{\beta\xi} + Ce^{\gamma\xi} & & + De^{\delta\xi} & & + Ee^{\varepsilon\xi};
\end{array}$$

il est clair que, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Le théorème de Fourier peut aussi s'appliquer, mais d'une façon moins facile, aux équations de la forme précédente; il exige en effet [*voir* le Mémoire de M. Stern *Sur la résolution des équations transcendantes* (*Journal de Crelle*, tome 22)] que l'on calcule les dérivées de $F(x)$ jusqu'à ce qu'on arrive à une dérivée qui ne change pas de signe dans l'intervalle considéré; ce qui peut exiger de longs calculs et amener souvent à tenir compte d'un très grand nombre de termes.

VI.

15. Les propositions qui suivent se rattachent à des considérations entièrement différentes de celles qui font l'objet des paragraphes précédents.

Étant donnée l'équation générale du degré n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

il existe toujours une infinité de systèmes de nombres

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

tels que, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 x + \alpha_2 a_2 x^2 + \ldots + \alpha_n a_n x^n = 0.$$

Il paraît difficile de déterminer, d'une façon précise, les conditions auxquelles doivent satisfaire les nombres α_i, lesquelles d'ailleurs ne dépendent que de la valeur attribuée au nombre entier n.

Je laisserai entièrement de côté ce problème et m'en tiendrai aux considérations suivantes, qui peuvent, dans certains cas, trouver d'utiles applications.

16. Soient $f(x)$ un polynôme entier, du degré n, ayant toutes ses racines réelles, et α un nombre positif; il est clair que l'équation

$$\alpha f(x) + x f'(x) = 0$$

a également toutes ses racines réelles.

Pour le voir, il suffit, dans le cas où toutes les racines de $f(x)$ sont inégales, de mettre l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)} = 0,$$

et la proposition subsiste évidemment quand $f(x)$ a des racines égales.

En mettant en évidence les coefficients $f(x)$ et en posant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

l'équation (1) peut s'écrire

$$a_0\alpha + a_1(\alpha+1)x + a_2(\alpha+2)x^2 + \ldots + a_n(\alpha+n)x^n = 0.$$

Comme elle a encore toutes ses racines réelles, on peut encore en déduire une infinité d'équations jouissant de la même propriété; telle sera, en général, l'équation

$$a_0 F(0) + a_1 F(1).x + a_2 F(2).x^2 + \ldots + a_n F(n).x^n = 0,$$

$F(x)$ désignant un polynôme entier de la forme

$$A(x+\alpha)(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_p),$$

où les α_i sont des quantités positives arbitraires et en nombre quelconque.

La même chose aura lieu évidemment quel que soit le nombre k, à l'égard de l'équation

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) e^k x + a_2 F(2) e^{2k} x^2 + \ldots + a_n F(n) e^{nk} x^n = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(2) \qquad a_0\Theta(0) + a_1\Theta(1)x + a_2\Theta(2)x^2 + \ldots + a_n\Theta(n)x^n = 0,$$

si l'on pose

$$\Theta(x) = A e^{kx}(x+\alpha)(x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_n).$$

Comme le nombre des quantités α_i peut croître au delà de toute limite et que le nombre k est arbitraire, on peut supposer que $\Theta(x)$ soit une fonction entière du genre zéro ou du genre un.

D'où la proposition suivante :

En désignant par $\Theta(x)$ une fonction entière quelconque, ne s'annulant que pour des valeurs réelles et négatives de x et dont les éléments simples sont des polynômes entiers, des exponentielles de la forme e^{kx}, des fonctions entières du genre zéro ou du genre un, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation (2).

17. Comme application, considérons la fonction $G(x)$, de M. Weierstrass, qui est l'inverse de l'intégrale eulérienne $\Gamma(x)$.

La fonction $G(x+\omega)$ ne s'annule que pour $x = -\omega$, $x = -(\omega+1)$, etc.; si donc ω est positive, $G(x+\omega)$ satisfait aux conditions énoncées ci-dessus et l'on voit que, l'équation (1) ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\frac{a_0}{\Gamma(\omega)} + \frac{a_1}{\Gamma(\omega+1)} x + \frac{a_2}{\Gamma(\omega+2)} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{\Gamma(\omega+n)} x^n = 0,$$

que l'on peut écrire

$$a_0 + \frac{a_1}{\omega} x + \frac{a_2}{\omega(\omega+1)} x^2 + \frac{a_3}{\omega(\omega+1)(\omega+2)} x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{a_n}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n-1)} x_n = 0.$$

J'ajouterai que le théorème subsiste encore pour les valeurs de ω comprises entre -1 et 0 (par conséquent pour toutes les valeurs de ω supérieures à -1), si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines de même signe.

18. En faisant usage de la proposition précédente ([1]), on démontrera aisément le théorème général qui suit :

En désignant par q un nombre positif quelconque égal ou inférieur à l'unité, et par H et $\Theta(x)$ deux fonctions entières quelconques, ne s'annulant que pour des valeurs réelles et négatives de x et dont les éléments simples sont des polynômes entiers, des exponentielles de la forme e^{kx}, des fonctions entières du genre zéro ou du genre un, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\Omega(x) = a_0\Theta(0) + a_1 \frac{\Theta(1)}{\mathrm{H}(0)} qx + a_2 \frac{\Theta(2)}{\mathrm{H}(0)\mathrm{H}(1)} q^4x^2 + a_3 \frac{\Theta(3)}{\mathrm{H}(0)\mathrm{H}(1)\mathrm{H}(2)} q^9x^3 + \ldots$$
$$+ a_n \frac{\Theta(n)}{\mathrm{H}(0)\mathrm{H}(1)\ldots\mathrm{H}(n-1)} q^{n^2}x^n = 0.$$

On voit ainsi qu'on satisfait au problème, posé au commencement de ce paragraphe, en faisant, quels que soient les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (pourvu que l'équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles)

$$\alpha_0 = \Theta(0), \qquad \alpha_1 = \frac{\Theta(1)}{\mathrm{H}(0)} q, \qquad \alpha_2 = \frac{\Theta(2)}{\mathrm{H}(0)\mathrm{H}(1)} q^4, \qquad \ldots;$$

on obtiendrait encore une solution plus générale en considérant l'équation $x^n \Omega\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, qui a le même nombre de racines réelles que l'équation $\Omega(x) = 0$.

19. Pour appliquer ce qui précède à un exemple simple, je considérerai l'équation

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \ldots + nx^{n-1} + x^n = 0,$$

dont toutes les racines sont réelles.

---

[1] *Voir*, à ce sujet, mon *Mémoire sur la théorie des équations numériques*, p. 132.

Faisant $\Theta(x) = 1$, $q = 1$ et $\mathrm{H}(x) = x + 1$, on voit que l'équation

$$\varphi(x) = 1 + n\frac{x}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{x^2}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ n \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{x^n}{1.2\ldots n} = 0$$

a toutes ses racines réelles et négatives; proposition bien connue.

Il en est de même de l'équation

$$1 + n\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{x^2}{1.2.n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{x^3}{1.2.3.n^3} + \ldots = 0;$$

or le premier membre, quand n croît indéfiniment, a pour limite la fonction de Bessel

$$\psi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \ldots.$$

De là résulte, en vertu d'une proposition que j'ai fait connaître dans une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, que $\psi(x)$ est une fonction du genre zéro, ou du moins le produit d'une pareille fonction par une exponentielle de la forme e^{ax}, a étant un nombre essentiellement positif.

On a donc

$$\psi(x) = e^{ax}\mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ étant une fonction du genre zéro et n'ayant que des racines négatives.

Je veux maintenant prouver que le nombre a est nul; à cet effet, je remarque que $\psi(x)$ satisfait à l'équation linéaire du second ordre

$$x\psi''(x) + \psi'(x) - \psi(x) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad a^2 + \frac{a-1}{x} = -\left(2a + \frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} - \frac{\mathrm{F}''(x)}{\mathrm{F}(x)}.$$

Quand x prend des valeurs positives de plus en plus grandes, le premier membre a pour limite a^2; cherchons la limite du second membre.

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ les valeurs absolues des racines de l'équation $F(x) = 0$ (je suppose ces nombres rangés par ordre croissant de grandeur), on a

$$(4) \qquad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x + a_1} + \frac{1}{x + a_2} + \frac{1}{x + a_3} + \ldots;$$

où le second membre est convergent pour toute valeur positive de x, puisque, $F(x)$ étant du genre zéro, la série

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$$

est elle-même convergente.

Soit S_p la somme des p premiers termes de la série contenue dans le second membre de l'égalité (4), on a

$$S_p < \frac{p}{x + a_1};$$

cette quantité tend vers zéro, quel que soit p, quand x croît indéfiniment : donc S_p a pour limite zéro, et il en est de même de $\frac{F'(x)}{F(x)}$.

On a d'ailleurs

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{1}{(x + a_1)^2} - \frac{1}{(x + a_2)^2} - \frac{1}{(x + a_3)^2} - \ldots$$
$$+ \left[\frac{1}{x + a_1} + \frac{1}{x + a_2} + \frac{1}{x + a_3} + \ldots\right]^2;$$

on voit, *a fortiori*, que $\frac{F''(x)}{F(x)}$ a pour limite zéro.

D'où il suit, le second membre de l'identité (3) ayant pour limite zéro, que a est nul.

La transcendante de Bessel est donc une fonction du genre zéro.

20. Aux considérations précédentes se rattache encore le théorème qui suit :

Si l'équation

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles et de même signe, l'équation

$$a_0 \cos\lambda + a_1 \cos(\lambda + \theta) x + a_2 \cos(\lambda + 2\theta) x^2 + a_3 \cos(\lambda + 3\theta) x^3 + \ldots$$
$$+ a_n \cos(\lambda + n\theta) x^n = 0,$$

où λ et θ désignent deux arcs arbitraires, a toutes ses racines réelles.

Pour le démontrer, je m'appuierai sur cette remarque importante due à M. Hermite (1) :

Si, pour toutes les racines de l'équation $F(x) = 0$, les coefficients de i sont de même signe et si, mettant en évidence dans le polynôme $F(x)$ la partie réelle et la partie imaginaire, on pose

$$F(x) = F_1(x) + i F_2(x),$$

les racines de l'équation

$$\alpha F_1(x) + \beta F_2(x) = 0,$$

où α et β désignent des nombres arbitraires, sont toutes réelles.

Considérons maintenant l'équation

$$(5) \qquad f[x(\cos\omega + i \sin\omega)] = 0;$$

dont les racines, en désignant par $k_1, k_2, k_3, \ldots$ les racines de l'équation $f(x) = 0$, sont

$$k_1(\cos\omega - i\sin\omega), \quad k_2(\cos\omega - i\sin\omega), \quad k_3(\cos\omega - i\sin\omega), \quad \ldots.$$

Il est clair, puisque les k_i sont tous de même signe, que le coefficient de i a le même signe dans toutes les racines de l'équation (5).

Or on a

$$f[x(\cos\omega + i\sin\omega)] = a_0 + a_1 \cos\omega . x + a_2 \cos 2\omega . x^2 + \ldots + a_n \cos n\omega . x^n$$
$$+ i[a_1 \sin\omega . x + a_2 \sin 2\omega . x + \ldots + a_n \sin n\omega . x^n].$$

(1) *Sur l'indice des fractions rationnelles* (*Bulletin de la Société math.*, t. VII, p. 131); *voir* également, sur ce sujet, mes *Notes sur la résolution des équations numériques*, p. 48.

En vertu du théorème de M. Hermite, on voit donc que l'équation

$$\cos\lambda[a_0 + a_1\cos\omega . x + a_2\cos2\omega . x^2 + \ldots]$$
$$- \sin\lambda[a_1\sin\omega . x + a_2\sin2\omega . x^2 + \ldots] = 0$$

a toutes ses racines réelles, quels que soient les arcs réels λ et ω.

Or cette équation peut s'écrire

$$a_0\cos\lambda + a_1\cos(\lambda+\omega)x + a_2\cos(\lambda+2\omega)x^2 + \ldots$$
$$+ a_n\cos(\lambda + n\omega)x^n = 0;$$

ce qui démontre la proposition que j'avais énoncée.

SUR

L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. IX; 1870.

I.

Soient $F(x)$ et $f(x)$ deux polynômes du troisième degré par rapport à la variable x; y désignant une quantité arbitraire, considérons l'équation

$$(1) \qquad F(x) + yf(x) = 0.$$

Soit V le discriminant de cette équation; V est, comme on le voit facilement, une fonction entière et du quatrième degré de y. En regardant y comme inconnue, l'équation

$$(2) \qquad V = 0$$

a quatre racines; désignons par a, b, c trois quelconques de ces racines.

Si, dans l'équation (1), on donne à y la valeur a, l'équation résultante a deux racines égales; soient λ la valeur commune à ces deux racines et α la valeur de la troisième racine.

Pour abréger, représentons aussi par

$$-g(y)$$

le coefficient de x^3 dans le premier membre de l'équation (1).

On a identiquement

$$-F(x) - af(x) = g(a)(x-\lambda)^2(x-\alpha),$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-F(x) - af(x)}{x-\alpha}} = x - \lambda;$$

en désignant respectivement par μ, ν et β, γ les quantités analogues à λ et à α et relatives aux deux racines b et c de l'équation (2), on a de même

$$\frac{1}{\sqrt{g(b)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-b\,f(x)}{x-\beta}}=x-\mu$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{g(c)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-c\,f(x)}{x-\gamma}}=x-\nu.$$

Multiplions la première des trois relations précédentes par $(\mu-\nu)$, la deuxième par $(\nu-\lambda)$, la troisième par $(\lambda-\mu)$ et additionnons, membre à membre, les équations ainsi obtenues ; il vient

$$\frac{\mu-\nu}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-a\,f(x)}{x-\alpha}}+\frac{\nu-\lambda}{\sqrt{g(b)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-b\,f(x)}{x-\beta}}$$
$$+\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{g(c)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-c\,f(x)}{x-\gamma}}=0.$$

Cette relation est une identité qui doit être vérifiée, quel que soit x.

On peut la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\mu-\nu}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-\frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}-a}{x-\alpha}}+\frac{\nu-\lambda}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-\frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}-b}{x-\beta}}$$
$$+\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{g(c)}}\sqrt{\frac{-\frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}-c}{x-\gamma}}=0.$$

Si maintenant on suppose que x ne désigne plus une quantité arbitraire, mais une racine de l'équation (1), on a

$$y=-\frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)};$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\mu-\nu}{\sqrt{g(a)}}=\mathrm{A},\qquad \frac{\nu-\lambda}{\sqrt{g(b)}}=\mathrm{B},\qquad \frac{\lambda-\mu}{\sqrt{g(c)}}=\mathrm{C},$$

on a la relation suivante

$$(3)\qquad \mathrm{A}\sqrt{\frac{y-a}{x-\alpha}}+\mathrm{B}\sqrt{\frac{y-b}{x-\beta}}+\mathrm{C}\sqrt{\frac{y-c}{x-\gamma}}=0.$$

Voilà ainsi une forme irrationnelle que l'on peut donner à l'équation (1) ; d'après ce qui précède, cette transformation peut être faite de quatre façons différentes, puisque l'on peut employer, pour l'effectuer, trois quelconques des racines de l'équation

$$\mathrm{V}=0.$$

II.

Si l'on considère y et x comme les coordonnées rectangulaires d'un point mobile du plan, on peut dire que l'équation (3) est une forme particulière de l'équation de la courbe du quatrième ordre représentée par l'équation (1).

Pour parler plus exactement, les points de cette courbe satisfont à l'équation (3) ; mais cette dernière est plus générale.

En effet, si l'on fait disparaître de cette équation les irrationnalités, en effectuant le produit des différentes valeurs que prend son premier membre, quand on donne aux radicaux les divers signes dont ils sont susceptibles, on obtient une équation

$$\mathrm{U}=0,$$

dans laquelle U est un polynôme entier du quatrième degré en x et du deuxième degré en y.

Il résulte de ce qui précède que U doit être exactement divisible par

$$\mathrm{F}(x)+y\,f(x).$$

U est donc égal au produit de ce polynôme par un facteur qui est nécessairement du second degré en x et en y, et du premier degré par rapport à chacune de ces variables.

Géométriquement, ce second facteur, égalé à zéro, représente une hyperbole équilatère.

On voit ainsi que l'équation (3) représente à la fois la courbe représentée par l'équation (1) et une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes.

Ces deux courbes jouissent toutes les deux de la propriété géométrique exprimée par l'équation (3), propriété très simple que je me dispenserai de transcrire ici.

III.

On peut se demander, *a priori*, étant donnée l'équation (3), de déterminer quelle relation il doit exister entre les coefficients de cette équation, pour que la courbe qu'elle représente se décompose en une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes et une autre courbe, qui est alors nécessairement représentée par une équation de même forme que l'équation (1).

Si cette décomposition a lieu effectivement, on doit pouvoir satisfaire à l'équation (3) par une valeur de x de la forme

$$x = \frac{py + q}{ry + s}.$$

Remarquons maintenant que l'on peut toujours trouver quatre nombres : p, q, r et s tels, que l'on ait simultanément

$$a = \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s}, \qquad b = \frac{p\beta + q}{r\beta + s}, \qquad c = \frac{p\gamma + q}{r\gamma + s}.$$

Ces nombres étant ainsi choisis, posons

$$x = \frac{sy - p}{-ry + p}; \tag{4}$$

en substituant ces valeurs de a, b, c et x dans l'équation (3), il vient, toutes réductions faites,

$$\sqrt{p - ry}\left(\frac{A}{\sqrt{r\alpha + s}} + \frac{B}{\sqrt{r\beta + s}} + \frac{C}{\sqrt{r\gamma + s}}\right) = 0.$$

Si donc on a entre les coefficients la relation

$$\frac{A}{\sqrt{r\alpha + s}} + \frac{B}{\sqrt{r\beta + s}} + \frac{C}{\sqrt{r\gamma + s}} = 0,$$

la valeur de x tirée de l'équation (4) satisfait, quel que soit y, à l'équation (3), et, par conséquent, U est divisible par le polynôme

$$rxy - px + sy - q;$$

le second facteur de U, étant du premier degré en y et du troisième degré par rapport à x, est nécessairement de la forme

$$F(x) + yf(x).$$

IV.

Les résultats qui précèdent peuvent être encore exprimés d'une façon un peu différente.

Soient $F(x, y)$ et $f(x, y)$ deux polynômes homogènes en x et y, et du troisième degré par rapport à ces variables; étant donnée l'expression

$$T = \xi F(x, y) + \eta f(x, y),$$

on peut toujours trouver quatre facteurs de la forme

$$\xi(mx + ny) + \eta(px + qy),$$

qui jouissent de la propriété suivante.

Soit Q l'un de ces facteurs, on peut toujours poser

$$\begin{aligned} TQ = &(\sqrt{L} + \sqrt{M} + \sqrt{N})(\sqrt{L} + \sqrt{M} - \sqrt{N}) \\ &\times(\sqrt{L} - \sqrt{M} + \sqrt{N})(\sqrt{L} - \sqrt{M} - \sqrt{N}), \end{aligned}$$

L, M et N désignant des polynômes de la forme suivante :

$$\begin{aligned} L &= (x - \beta y)(x - \gamma y)(A\xi + A'\eta), \\ M &= (x - \alpha y)(x - \gamma y)(B\xi + B'\eta), \\ N &= (x - \beta y)(x - \alpha y)(C\xi + C'\eta). \end{aligned}$$

Il est bien clair que dans cet énoncé les lettres x et y, A, B, ... ont un sens différent de celui que je leur ai attribué dans les paragraphes précédents.

V.

Les considérations très simples que j'ai employées pour obtenir les résultats précédents s'étendent sans difficulté à des équations d'un degré supérieur au troisième. Mais ce cas particulier est de beaucoup le plus intéressant, et je me propose de revenir sur quelques relations dignes de remarque qui existent entre les racines du discriminant

$$V = 0$$

et celles de l'équation

$$F(x) + yf(x) = 0,$$

relations qui peuvent servir utilement d'exercice aux élèves.

SUR

QUELQUES THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. I; 1873

1. On connaît la proposition suivante : « $\varphi(m)$ *désignant combien il y a de nombres premiers à m et non supérieurs à m, on a*

$$m = \varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots,$$

d, d', d'' *désignant la suite des diviseurs de m, parmi lesquels figurent* 1 *et m lui-même* (¹). »

Cette proposition peut se généraliser ainsi qu'il suit :

Désignons en général par $\left(m, \frac{m}{k}\right)$, où m désigne un nombre entier et k une quantité réelle quelconque commensurable ou incommensurable, le nombre des entiers premiers avec m et non supérieurs à $\frac{m}{k}$; on voit que, si $k = 1$, on a $(m, m) = \varphi(m)$.

Cela posé, je dis que l'on a, m désignant un nombre entier et $\left(\frac{m}{k}\right)$ la partie entière du quotient $\frac{m}{k}$,

$$(1) \qquad \left(\frac{m}{k}\right) = \left(1, \frac{1}{k}\right) + \left(d, \frac{d}{k}\right) + \left(d', \frac{d'}{k}\right) + \ldots + \left(m, \frac{m}{k}\right),$$

la somme contenue dans le second membre s'étendant à tous les diviseurs $1, d, d', \ldots, m$ du nombre m.

Pour le démontrer, je vais faire voir que, si la proposition est vraie pour une valeur quelconque de k, elle est vraie pour toute autre valeur.

Soit k_0 la valeur de k pour laquelle la formule est supposée vérifiée; concevons, par exemple, que k_0 diminue d'une façon continue, le premier membre de la relation (1) ne pourra changer que

(¹) *Voy.* SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 13.

si k passe par une valeur qui donne à $\frac{m}{k}$ une valeur entière; dans ce passage, $\left(\frac{m}{k}\right)$ augmentera d'une unité; le second membre ne peut changer que si l'une ou plusieurs des quantités $\frac{d}{k}$ acquièrent une valeur entière, et, comme alors $\frac{m}{k}$ a aussi une valeur entière, puisque m est un multiple de d, on voit que la solution de la question consiste à examiner ce qui se passe quand $\frac{m}{k}$ est un entier.

Or, quand $\frac{m}{k}$ est un entier, il peut se faire qu'un certain nombre d'expressions de la forme $\frac{d}{k}$ soient aussi des entiers; supposons-les rangées par ordre décroissant de grandeur, en sorte qu'elles forment la série

$$\frac{m}{k}, \quad \frac{m_1}{k}, \quad \frac{m_2}{k}, \quad \ldots, \quad \frac{\mu}{k},$$

$\frac{\mu}{k}$ désignant la plus petite de ces fractions (il est clair d'ailleurs que μ peut être égal à m).

Cela posé, $\frac{\mu}{k}$ est nécessairement premier avec μ; car, si α désignait un diviseur commun, $\frac{\mu}{\alpha}$ et $\frac{\frac{\mu}{\alpha}}{k}$ seraient des nombres entiers et $\frac{\mu}{k}$ ne serait pas le dernier terme de la série. Il n'en est pas de même relativement aux termes précédents; en effet, si l'on pose $\frac{\mu}{k} = e$, μ et e étant premiers entre eux, on en déduit $\left(\frac{m'}{k}\right.$ désignant un quelconque des termes qui précèdent $\left.\frac{\mu}{k}\right)$ $e' = \frac{m'}{k} = \frac{m'e}{\mu}$, d'où $\frac{e'}{m'} = \frac{e}{\mu}$; et, comme la fraction $\frac{e}{\mu}$ est irréductible, on en conclut que e' et m' sont respectivement des multiples de e et de m et ont par conséquent un facteur commun.

2. Voyons maintenant quels changements subit le second membre quand $\frac{m}{k}$ prend une valeur entière.

Les différentes expressions telles que $\left(m', \frac{m'}{k}\right)$ ne changent pas de valeur; la série des nombres non supérieurs à $\frac{m'}{k}$ renferme en plus, il est vrai, le nombre e'; mais, comme il n'est pas premier avec m', la somme n'est pas changée; l'expression $\left(\mu, \frac{\mu}{k}\right)$ seule change, et augmente précisément d'une unité, puisque μ et $\frac{\mu}{k}$ sont premiers entre eux.

La proposition est donc vraie, si elle est vraie pour une valeur quelconque de k; et comme elle l'est évidemment pour une valeur de k supérieure à m, puisque les deux termes de la relation (1) se réduisent à zéro, elle est démontrée.

3. Je veux maintenant tirer de la relation $m = \Sigma\varphi(d)$, que j'ai rappelée au commencement de cette Note, et dont je viens de donner une nouvelle démonstration indépendante de la formule qui exprime $\varphi(m)$ au moyen de ses facteurs premiers [1], une démonstration de cette formule elle-même.

M. Dedekind (*Théorie des nombres* de Dirichlet, p. 394) a, il est vrai, donné un théorème remarquable qui permet de résoudre cette question.

Ce théorème s'énonce ainsi qu'il suit :

$\lambda(n)$ désignant un nombre égal à 0, si n est divisible par un carré, dans le cas contraire, égal à ± 1 suivant que le nombre des facteurs de n est pair ou impair, si deux fonctions $f(m)$ et $\varphi(m)$ sont liées par la relation suivante

$$f(m) = \Sigma\psi(d), \tag{2}$$

où, dans le second membre, la sommation s'étend à tous les diviseurs du nombre entier m, on a réciproquement

$$\psi(m = \Sigma\lambda\left(\frac{m}{d}\right) f(d), \tag{3}$$

la sommation s'étendant également à tous les diviseurs de m.

De la formule (3), on déduit facilement l'expression connue de $\varphi(m)$, mais il est à remarquer que la démonstration de cette formule, indiquée par M. Dedekind, s'appuie précisément sur cette

(1) On connaît d'autres démonstrations indépendantes également de cette formule; *voir* notamment DIRICHLET, *Théorie des nombres*, p. 25.

expression; pour éviter un cercle vicieux, il faudrait donc établir directement la relation (3), ce qui serait du reste facile en développant les considérations qui suivent.

4. Pour obtenir l'expression de $\varphi(m)$, je considérerai une série de la forme

$$f(1)\frac{x}{1-x} + f(2)\frac{x^2}{1-x^2} + f(3)\frac{x^3}{1-x^3} + \ldots.$$

Soit

$$\theta(1)x + \theta(2)x^2 + \theta(3)x^3 + \ldots$$

son développement effectué suivant les puissances croissantes de x; il est clair que les coefficients d'une des séries déterminent ceux de l'autre; en particulier, on a évidemment

$$\theta(m) = \Sigma f(d),$$

la sommation s'étendant à tous les diviseurs du nombre entier m.

Supposons, en particulier, la fonction f tellement choisie que, m étant décomposé en facteurs premiers, en sorte que $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, on ait $f(m) = f(a^\alpha) f(b^\beta) \ldots$. La fonction f reste du reste arbitraire; ainsi $f(a^\alpha)$ et $f(a^{\alpha'})$ peuvent n'avoir aucune relation entre elles, si α et α' sont différents; il en est de même de $f(a^\alpha)$ et $f(b^\alpha)$, si les facteurs a et b ne sont pas les mêmes.

Cela posé, dans ces hypothèses, les différents diviseurs du nombre $m = a^\alpha b^\beta \ldots$ étant les différents termes du produit

$$(1 + a + \ldots + a^{\alpha-1})(1 + b + \ldots + b^{\beta-1}) \ldots,$$

il est clair que l'on aura

$$\theta(m) = [1 + f(a) + \ldots + f(a^{\alpha-1})][1 + f(b) + \ldots + f(b^{\beta-1})] \ldots. \tag{4}$$

5. Cette formule offre un grand nombre d'applications.

Supposons, par exemple, que l'on ait $f(a) = f(b) = \ldots = -1$, et $f(a^\mu) = f(b^\mu) = \ldots = 0$, pour toutes les valeurs de μ supérieures à l'unité. On déduira évidemment de la formule (4), pour toute valeur de m supérieure à l'unité, $\theta(m) = 0$; on a d'ailleurs $\theta(1) = 1$, et il est facile de voir que $f(m) = \lambda(m)$, λ désignant la même fonction numérique dont j'ai parlé ci-dessus (n° 3) (¹); on a donc l'expression suivante, due à Mœbius (*loc. cit.*) :

$$(5)\qquad x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6} + \ldots.$$

6. Supposons maintenant que l'on fasse, n désignant un entier quelconque,

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) = \ldots = -1, \\ f(a^1) &= f(b^2) = \ldots = -0, \\ f(a^n) &= f(b^n) = \ldots = 1, \\ f(a^{n+1}) &= f(b^{n+1}) = \ldots = -1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en sorte que $f(a^\mu)$ soit, quel que soit le facteur a, égal à $+1$ si μ est divisible par n, égal à -1 si μ est congru à $+1$ suivant le module n, et dans tous les autres cas égal à zéro.

De la formule (4) il résulte que $\theta(m)$ est nul, à moins que m ne soit une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte, auquel cas $\theta(m) = 1$; d'ailleurs $f(m)$ est toujours égal à $-1, 0$ ou $+1$; on déduit de là que, quel que soit l'entier n, la série

$$x + x^{2^n} + x^{3^n} + x^{4^n} + \ldots$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{x}{1-x} + \varepsilon_2 \frac{x^2}{1-x^2} + \varepsilon_3 \frac{x^3}{1-x^3} + \varepsilon_4 \frac{x^4}{1-x^4} + \ldots,$$

les coefficients ε étant toujours égaux à $-1, 0$ ou $+1$, et se déterminant d'ailleurs facilement d'après ce qui précède.

Pour $n = 2$, on a en particulier la formule suivante, donnée par M. Liouville (*Journal de Math.*, 2ᵉ série, t. II),

$$(6)\qquad x + x^4 + x^9 + x^{16} + \ldots = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^4}{1-x^4}.$$

7. Pour revenir à l'objet principal de cette Note, je ferai re-

(¹) Cette remarquable fonction numérique, qui se présente dans la formule de M. Dedekind, a aussi été étudiée par Mœbius [*Sur un nouveau mode de réversion des séries* (*Crelle*, t. IX)], et par M. Tchebichef [*Note sur différentes séries* (*Liouville*, 1ʳᵉ série, t. XVI)].

marquer que, de la propriété fondamentale de la fonction φ

$$(7)\qquad m = \Sigma\varphi(d),$$

résulte le développement suivant :

$$(8)\qquad \varphi(1)\frac{x}{1-x} + \varphi(2)\frac{x^2}{1-x^2} + \varphi(3)\frac{x^3}{1-x^3} + \ldots = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots.$$

Posons maintenant, quel que soit le nombre premier a, $f(a^n) = a^{n-1}(a-1)$; il est clair que, d'après la formule (4), on aura

$$\theta(m) = a^\alpha b^\beta \ldots = m \qquad \text{et} \qquad f(m) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots (a-1)(b-1).$$

D'où, en se reportant à la formule (7),

$$\varphi(m) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots (\alpha-1)(\beta-1).$$

Telle est l'expression que je voulais déduire de la relation (7) (¹).

(¹) Depuis que cette Note a été écrite, j'ai reconnu que la proposition attribuée à M. Dedekind appartenait en réalité à M. Liouville (voir *Journal de Math.*, 2ᵉ série, t. II, p. 110).