九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

# On Polycosecant Numbers and Level Two Generalization of Arakawa-Kaneko Zeta Functions

パレワッタ, ガマラララゲ, マネカ, オシャディー, パレワッタ

https://hdl.handle.net/2324/4110433

出版情報：Kyushu University, 2020, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式６－２）

| | |
|---|---|
| 氏　　名 | Maneka　Pallewatta　（マネカ パレワッタ） |
| 論 文 名 | On Polycosecant Numbers and Level Two Generalization of Arakawa-Kaneko Zeta Functions<br>（多重余割数とレベル 2 荒川ー金子ゼータ関数について） |
| 論文調査委員 | 主　査　九州大学　教授　金 子 昌 信<br>副　査　東京都立大学　教授　津 村 博 文<br>副　査　東北大学　教授　大 野 泰 生<br>副　査　九州大学　准教授　斎 藤 新 悟 |

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本学位論文は，マネカ パレワッタ氏が博士課程在籍中に行った，多重ゼータ値および多重ベルヌーイ数の一般化に関わる研究をまとめたものである．論文の第 3 章が，多重余割（コセカント）数という，多重ベルヌーイ数のレベル 2 類似と見なせる対象についての結果，第 4 章が，Arakawa-Kaneko ゼータ関数と呼ばれる関数のレベル 2 類似に関する結果や，その特殊値に現れる多重 T 値という対象についての結果が述べられている．第 3 章の内容は既に（津村，金子との）共著論文として公表済みであり，第 4 章の内容はいずれ近く単著論文として投稿予定である．

多重ゼータ値はリーマンゼータ関数の 2 以上の整数点での値を多重級数に一般化したもので，その研究はオイラーにさかのぼるが，近年数学や物理学の様々な分野との関係が注目され活発に研究されている．一方ベルヌーイ数を多重対数級数を用いて一般化した多重ベルヌーイ数というものがあり，上付き指数が負の場合のそれは様々な組み合わせ的解釈を持つことが知られ，近年多くの研究がある．荒川と金子は 1990 年代後半に，多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数の関係をつけることを目指して，新しいゼータ関数を導入した．その後津村と金子はその研究を引き継ぎ発展させてきたが，最近その「レベル 2」類似（すなわち変数の偶奇に条件をつけた和をとる）にあたる対象を定義し，その性質を調べ始めた．この研究はまだ緒に就いたばかりであり，今回のパレワッタ氏の研究はその基礎的な部分を整備し，将来の展望を与えるものと位置づけられる．

本論文第 3 章の主結果は，負の上付き指数を持つ多重余割数の双対定理，および多重上付き指数の場合にまで一般化した多重余割数の二通りの明示公式である．それらの応用として，（上付き指数が負の場合に限られるが）クンマー型の合同式や，「有限多重 T 値」を多重余割数で与える公式も導いている．後者はもとの「レベル 1」の場合の今冨―武田―金子の結果に対応するものであるが，レベル 2 特有の現象として，インデックスの深さが異なると表示が異ならざるを得ないことを発見した．双対性の証明は，上述の公表論文では二通りの証明が与えられているが，ここではパレワッタ氏の貢献による，母関数の計算を用いた証明が述べられている．もう一方の難解な証明（それはそれ自身価値があると思われ，公表したものであるが）に比べると，スターリング数の公式を上手に使いながらの格段にすっきりとした計算であり，見事なものと言える．また二通りの明示公式については，いずれもパレワッタ氏が証明したものであるが，より簡明に見える方の公式があとの合同式の計算などで使われ有用性が示されている一方，もう一つの公式は，和も三重で複雑である．しかしこちらの公式の中にはベルヌーイ数が現れており，数論的にはより興味深いものである可能性がある．これについては今後の解明が待たれるところである．

第 4 章で展開される，Arakawa-Kaneko ゼータ関数のレベル 2 類似の研究は，多くの部分は，もとの「レベル 1」に対応物があり，証明も驚くほど並行的に進む．しかし，例えば，多重対数関数の（レベル 2 類似の）オイラー型の接続公式とも言える公式の証明などは，シャッフル積を使って簡易化されている．その接続公式は一般的な形で与えられており，インデックスを与えると具体形を計算するアルゴリズムが与えられてはいるものの，明示的な閉じた形で計算されている場合は，もとの（レベル 1 の）場合でもそれほど多くはない．今回パレワッタ氏は，反復積分表示をもちいた複雑な計算を遂行することにより，これまで知られていた明示公式を一般化するような，より一般的なインデックスに関する明示的な接続公式を証明することに成功した．これにより，それでもまだ特殊な場合に限られてはいるものの，そのインデックスに対するレベル 2　Arakawa-Kaneko ゼータ関数を，一変数多重 T 関数（と呼ぶべきもの）で明示的に書き表すような公式が得られる．その公式で変数を正整数に特殊化することで，レベル 2　Arakawa-Kaneko ゼータ関数の特殊値が T 値で具体的に書き表されることになる．また，あるインデックスの系列に関する接続公式は，既に得られているものであったが，以前はゼータ関数の方の等式を先に導いて，そこから接続公式の形を結論するという，いわば話が反対の気味があったものを，直接接続公式を証明した．これらの証明を詳細に分析すれば，もう少し一般の形に証明を拡張できる可能性もあり，今後の発展が期待されるところである．

今回は参考論文として，主論文には含めなかったが，修士課程での研究を博士初年次に発展させた，モーデル・トーンハイムゼータ値の和公式に関する研究も，博士課程在学中の結果であり，これは既に単著論文として学術雑誌に公表済みである．　最初に述べたように，本学位論文主論文の，先行研究の復習を除く部分のうち前半部分は学術雑誌に公表済み，後半部分もいずれしかるべき学術誌に投稿予定で，追って公表されるものと考えられる．

これらの研究結果は整数論，とくに多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数の分野において価値あるすぐれた業績と認められる．よって本研究者は博士（数理学）の学位を授与される資格があるものと認める．