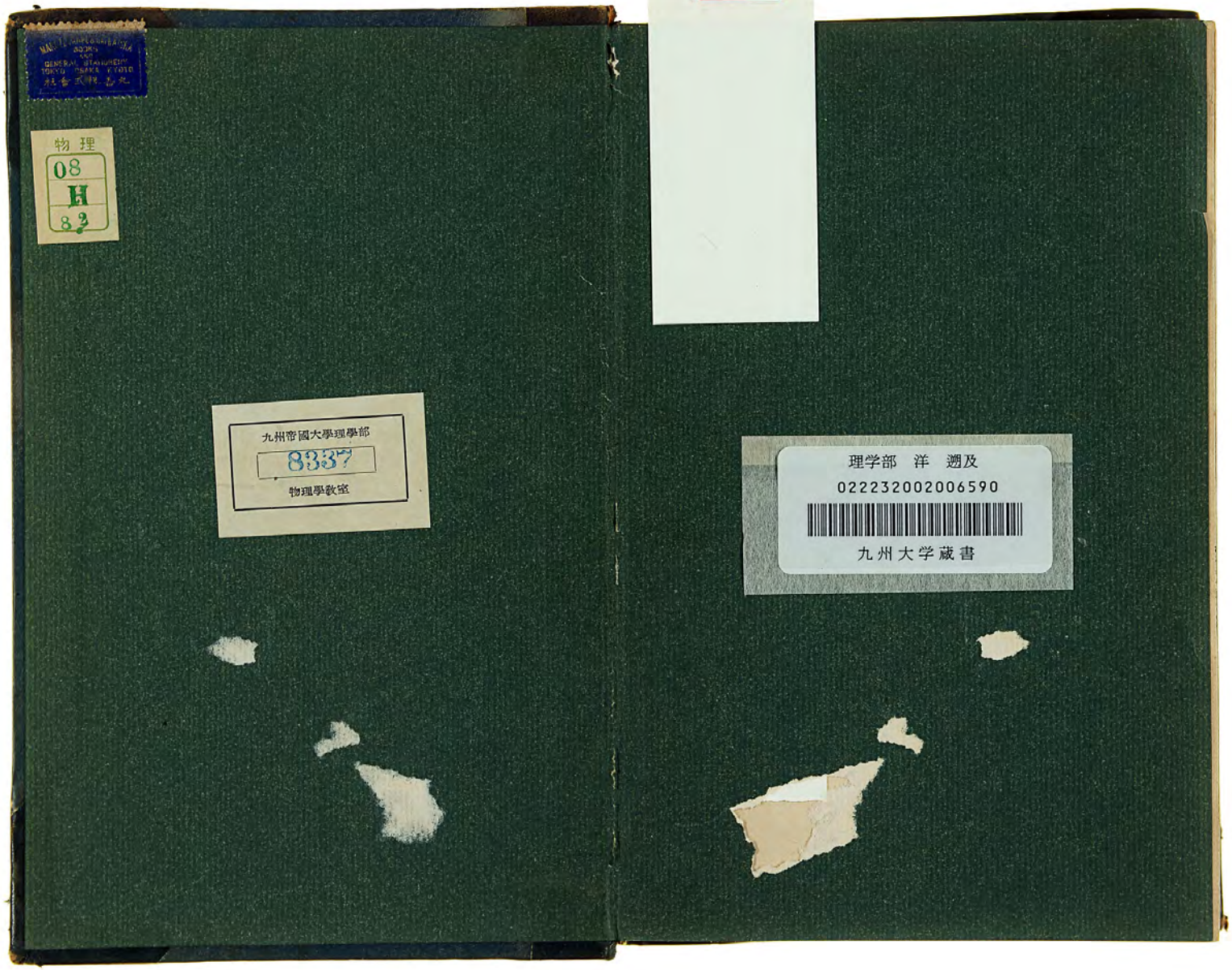



桑木文庫
洋書
0434


桑木文庫
洋書
0434
物理
08
H
8
九州帝國大學理學部
8337
物理學教室
理学部 洋 遡及
022232002006590
九州大学蔵書

圖書
圖書番號 800785
部門
カード

HELMHOLTZ

WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN.

WISSENSCHAFTLICHE

ABHANDLUNGEN

VON

HERMANN HELMHOLTZ

ORD. PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT, MITGLIED D. AKADEMIE D. WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

ZWEITER BAND.

MIT FÜNF LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1883.

Alle Rechte vorbehalten.

圖書館 中央研究院 民國19. 4. 25 130637

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Inhaltsübersicht

des zweiten Bandes.

Physikalische Optik. Seite

XLIX. Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben. 1852. 3
L. Ueber Herrn D. Brewster's neue Analyse des Sonnenlichtes. 1852 24
LI. Ueber die Zusammensetzung von Spectralfarben. 1855 . 45
LII. Ueber die Empfindlichkeit der menschlichen Netzhaut für die brechbarsten Strahlen des Sonnenlichtes. 1855 . . . 71
LIII. Ueber die Messung der Wellenlänge des ultravioletten Lichtes, von E. Esselbach. 1855. 78
LIV. Mathematisch-physikalische Excurse. 1867 83
LV. Ueber die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Mikroskope. 1873 183
LVI. Die theoretische Grenze für die Leistungsfähigkeit der Mikroskope. 1874 185
LVII. Zur Theorie der anomalen Dispersion. 1874 213

Physiologische Optik.

LVIII. Beschreibung eines Augenspiegels zur Untersuchung der Netzhaut im lebenden Auge. 1851 229
LIX. Ueber eine neue einfachste Form des Augenspiegels. 1852. 261
LX. Ueber eine bisher unbekannte Veränderung am menschlichen Auge bei veränderter Accommodation. 1853 280
LXI. Ueber die Accommodation des Auges. 1856 283
LXII. Ueber Farbenblindheit. 1859 346
LXIII. Ueber die Contrasterscheinungen im Auge. 1860 . . . 350
LXIV. Ueber die Bewegungen des menschlichen Auges. 1863 . 352
LXV. Ueber die normalen Bewegungen des menschlichen Auges. 1863 360
LXVI. Ueber die Form des Horopters, mathematisch bestimmt. 1862 420
LXVII. Ueber den Horopter. 1864 427
LXVIII. Bemerkungen über die Form des Horopters. 1864 . . . 478
LXIX. Ueber den Einfluss der Raddrehung der Augen auf die Projection der Retinalbilder nach Aussen. 1864 482
LXX. Das Telestereoskop. 1857 484
LXXI. Ueber stereoskopisches Sehen. 1865 492
LXXII. Ueber die Bedeutung der Convergenzstellung der Augen für die Beurtheilung des Abstandes binocular gesehener Objecte. 1878 497

Physiologische Akustik.

LXXIII. Ueber die Mechanik der Gehörknöchelchen. 1867 . . . 503
LXXIV. Die Mechanik der Gehörknöchelchen und des Trommelfelles. 1869 515
LXXV. Ueber die Schallschwingungen in der Schnecke des Ohres. 1869 582

Erkenntnisstheorie.

Seite

LXXVI. Ueber die Natur der menschlichen Sinnesempfindungen. 1852 591
LXXVII. Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. 1866 610
LXXVIII. Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. 1868 618
LXXIX. Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Professor Land. 1878 640

Physiologie.

LXXX. De Fabrica Systematis nervosi Evertebratorum. 1842. 663
LXXXI. Wärme, physiologisch. 1845 680
LXXXII. Ueber das Wesen der Fäulniss und Gährung. 1843 . 726
LXXXIII. Ueber den Stoffverbrauch bei der Muskelaction. 1845. 735
LXXXIV. Ueber die Wärmeentwickelung bei der Muskelaction. 1847 745
LXXXV. Messungen über den zeitlichen Verlauf der Zuckung animalischer Muskeln und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven. 1850 764
LXXXVI. Messungen über Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven. Zweite Reihe. 1852 . . . 844
LXXXVII. Ueber die Methoden, kleinste Zeittheile zu messen, und ihre Anwendung für physiologische Zwecke. 1850 . 862
LXXXVIII. Ueber die Geschwindigkeit einiger Vorgänge in Muskeln und Nerven. 1855 881
LXXXIX. Die Resultate der neueren Forschungen über thierische Elektricität. 1852 886
XC. Versuche über das Muskelgeräusch. 1864 924
XCI. Ueber den Muskelton. 1866 928
XCII. Mittheilungen, betreffend Versuche über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den motorischen Nerven des Menschen, welche Herr N. Baxt aus Petersburg im Physiologischen Laboratorium zu Heidelberg ausgeführt hat. 1867 932
XCIII. Neue Versuche über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den motorischen Nerven der Menschen, ausgeführt von N. Baxt aus Petersburg. 1870 . . . 939
XCIV. Ueber die Zeit, welche nöthig ist, damit ein Gesichtseindruck zum Bewusstsein kommt, Resultate einer von Herrn N. Baxt im Heidelberger Laboratorium ausgeführten Untersuchung. 1871 947
XCV. Ueber die Bewegungen des Brustkastens. 1856 . . . 953
XCVI. Die Wirkungen der Muskeln des Armes. 1856 . . . 955

Nachtrag neuester Abhandlungen.

XCVII. Die Thermodynamik chemischer Vorgänge. 1882 . . 958
XCVIII. Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. 1882 . . 979
IC. Ueber absolute Maassysteme für electrische und magnetische Grössen. 1882 993

Personen-Register 1006
Sach-Register 1011
Druckfehlerverzeichniss 1020

Nachweis zu den am Ende des Bandes befindlichen Figurentafeln.

Da der Text vor den Tafeln fertig gestellt wurde, sind Irrthümer in den Beziehungen zwischen Text und Tafeln vorgekommen, welche man hiernach zu berichtigen bittet.

Tafel I Fig. 1—5 gehören zu Abhandlung LI, Fig. 14 und 15 zu Abhandlung LXXXIV. (Auf Seite 749 als Tafel IV bezeichnet.)
Tafel II gehört zu Abhandlung LXXXVI. (Im Text ohne Bezeichnung.)
Tafel III gehört zu Abhandlung LXI.
Tafel IV gehört zu Abhandlung LVIII. (Im Text als Tafel I bezeichnet.)
Tafel V gehört zu Abhandlung LXXXV.

Physikalische Optik.

青華書

國立臺灣大學圖書館藏

XLIX.

Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben.

Aus: Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 87. S. 45—66. — J. Müller's Archiv für Anatomie und Physiologie. Jahrgang 1852. S. 461—482. Habilitationsschrift.

Die Lichtstrahlen verschiedener Wellenlänge und Farbe unterscheiden sich in ihrer physiologischen Wirkung dadurch wesentlich von den Tönen verschiedener Schwingungsdauer und musikalischer Höhe, dass je zwei der ersteren, gleichzeitig auf dieselben Nervenfasern einwirkend, eine einfache Empfindung hervorbringen, aus welcher auch das geübteste Sinnesorgan nicht mehr die einzelnen zusammensetzenden Elemente erkennen kann, während zwei Töne durch ihr Zusammenwirken zwar die eigenthümlichen Empfindungen der Harmonie und Disharmonie erzeugen, aber dabei doch stets vom Ohre einzeln empfunden und erkannt werden. Diese Vereinigung der Eindrücke zweier verschiedener Farben zu einem einzigen neuen Farbeneindruck ist offenbar ein rein physiologisches Phänomen und hängt nur von der eigenthümlichen Reactionsweise des Sehnerven ab. Objectiv im rein-physikalischen Gebiete findet eine solche Vereinigung niemals statt, die Strahlen verschiedener Farben gehen vielmehr stets ohne allen gegenseitigen Einfluss neben einander her, und wo sie dem Auge auch vereinigt erscheinen sollten, sind sie durch physikalische Mittel stets von einander zu scheiden.

Die Untersuchung des Zusammenwirkens der Farben hat auf die Lehre von den Grundfarben geführt, aus denen alle anderen combinirt wären, oder wenigstens combinirt werden

könnten. Man hat diese Lehre aber von Anfang an nur auf eine einzige Art von Erfahrungen gegründet, nämlich auf diejenigen, welche durch die Mischung der Farbstoffe gewonnen waren und von denen man stets annahm, dass sie dieselben Resultate geben müssten wie die Zusammensetzung des ge-
46 färbten Lichtes selbst, eine Annahme, deren Unrichtigkeit ich im Folgenden nachzuweisen beabsichtige.

Schon Plinius spricht davon, dass die ältesten griechischen Maler mit vier Farbstoffen alles darzustellen gewusst hätten, während man in seiner Zeit deren viel mehr besässe und damit doch nicht so viel, wie Jene, leistete. Leonardo da Vinci, ebenso berühmt als wissenschaftlicher Bearbeiter der Malerei, wie als Künstler, kennt noch nicht die Lehre von den drei sogenannten Grundfarben, er nennt ausser Schwarz und Weiss, welche jedoch nicht im eigentlichen Sinne Farben wären, vier, nämlich Gelb, Grün, Blau und Roth. Die nachher allgemein angenommenen drei Grundfarben, Roth, Gelb und Blau, finden sich, und zwar, wie es scheint, als eine damals allgemein anerkannte wissenschaftliche Thatsache, einem Versuch zur Classification der Farben und Farbstoffe von Waller zu Grunde gelegt in den *Philosophical Transactions* des Jahres 1686, also noch vor Newton's Untersuchungen über die Zerlegung des weissen Lichts durch das Prisma, zu einer Zeit, wo man eben noch keine andere Methode Farben zusammenzusetzen kannte, als die Mischung der Farbstoffe. Auch in den späteren Versuchen, die natürlichen Farben nach ihrer Zusammensetzung aus den genannten drei Grundfarben zu classificiren, von Castell, dem Astronomen Mayer, Lambert, Hay, Forbes[1]) wird überall die Mischung der Farbstoffe zu Grunde gelegt. Als Repräsentanten der Grundfarben und zur Darstellung der zusammengesetzten Mischfarben gebraucht Mayer Zinnober, Königsgelb, Bergblau, Lambert Carmin, Gummi-Gutti und Berliner-Blau, welche schon reinere

[1]) P. Castell, Farbenclavier. — Mayer, in Göttinger gel. Anzeigen. 1758. St. 147 — J. H. Lambert, Beschreibung einer Farbenpyramide. Berlin, 1772. (Darin ist auch die ältere Literatur zusammengestellt.) — D. R. Hay, *Nomenclature of Colours.* — J. D. Forbes in *Philosophical Magazine Vol. XXXIV. p.* 161.

Mischungen geben, und Hay, dessen Geschicklichkeit in der Wahl und dem Gebrauche der Farben für diesen Zweck 47
Forbes besonders rühmt, Carmin, Chromgelb und französisches Ultramarin.

Einige Physiker versuchten es auch, den drei Grundfarben eine objective Existenz anzuweisen. Es war zuerst Mayer, der die Ansicht aufstellte, den drei Grundfarben könnten wohl dreierlei verschiedene Arten Licht, ein rothes, ein gelbes und ein blaues entsprechen, deren jedes Strahlen von allen Abstufungen der Brechbarkeit lieferte. Es wäre demnach an jeder Stelle des Spectrums rothes, gelbes und blaues Licht gemischt, die sich aber nicht durch ihre Brechbarkeit unterschieden und sich deshalb durch das Prisma nicht trennen liessen.

Am rothen Ende des Spectrums sollte das rothe Licht überwiegen, am blauen das blaue, in der Mitte das gelbe. Dieselbe Ansicht wurde später von D. Brewster aufgestellt, und dieser berühmte Physiker glaubte durch Absorption in gefärbten durchsichtigen Mitteln die Trennung der verschiedenen Arten des Lichtes in allen Theilen des Spectrums wirklich bewerkstelligen zu können.

Newton hatte, nach seiner Entdeckung der Zusammensetzung des weissen Lichtes aus farbigem, sieben Hauptfarben im Spectrum angenommen: Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett. Er wählte diese Zahl wahrscheinlich wegen der Analogie, die er zwischen den Farben und den musikalischen Intervallen der Durtonleiter suchte, und die er auch der bekannten Eintheilung seiner siebenfarbigen Scheibe zu Grunde legte. Wohl nur deshalb hat er Blau und Indigoblau unterschieden. Dass er diese Unterscheidung gerade in den blauen Farbentönen vornahm, liegt wohl daran, dass die meisten Prismen die blaue Hälfte des Spectrums unverhältnissmässig ausdehnen, und Newton die Breite der Farbenstreifen unmittelbar mit den musikalischen Intervallen vergleichen wollte. Uebrigens musste er sich mit sehr unvollkommenen Apparaten behelfen, und konnte deshalb auch nur wenige Beobachtungen über die Resultate künstlicher Vereinigung von zwei oder mehreren prismatischen Farben anstellen, welche im Ganzen mit den aus der Mischung von Farbstoffen entnommenen übereinzu- 48

stimmen schienen. Auch er benutzt daneben die Resultate der Vermischung farbiger Pulver.

Newton hat seine Spectra stets mit Sonnenlicht dargestellt und nicht die Methoden angewendet, welche nöthig sind um ganz vollständige Trennung der verschiedenfarbigen Strahlen zu erhalten, deshalb auch nicht die Fraunhofer'schen Linien im Sonnenlichte gesehen. Wollaston[1]) stellte zuerst ein so reines Spectrum dar, dass einige dieser Linien darin gesehen werden konnten. Er blickte nach einer feinen Spalte, welche Tageslicht einfallen liess, durch ein sehr gutes Flintglasprisma mit unbewaffnetem Auge hin, und sah, wie es unter diesen Umständen in der That der Fall ist, vier gut abgegrenzte Farbenstreifen im Spectrum: Roth, Gelbgrün, Blau und Violett. Es ist nämlich der Uebergang von röthlichem Orange durch Orange und Gelb in Gelbgrün, der von Grün in Blau und von Blau in Violett im Flintglasspectrum so schnell, dass er ohne Anwendung eines vergrössernden Fernrohres dem Auge fast verschwindet. Dabei begrenzen die Fraunhofer'schen Linien *G* und *H* das Violett auf beiden Seiten sehr scharf, der Uebergang von Grün in Blau wird durch die Linien *b* und *F* markirt, und der an sich schon sehr schmale Streifen des reinen Gelb ist im reflectirten Himmelslichte verhältnissmässig lichtschwach, sodass es gegen das stärkere Roth und Grün zurücktritt, und diese beiden Farben unmittelbar aneinander zu grenzen scheinen. Wollaston nimmt deshalb vier Grundfarben an: Roth, Grün, Blau, Violett.

Thomas Young tritt Wollaston's Beschreibung des Spectrums bei und verändert darnach seine Theorie des Farbensehens, welche er zuerst auf die gewöhnlich angenommenen drei Grundfarben: Roth, Gelb und Blau gegründet hatte, indem er dafür jetzt Roth, Grün und Violett setzt, wobei man voraussetzen muss, dass er gewusst habe, aus prismatischem
49 Roth und Grün lasse sich Gelb, aus prismatischem Grün und Violett Blau mischen. Die erwähnte Theorie von Young ist wichtig, weil darin den drei Grundfarben eine bestimmte physiologische Bedeutung untergelegt wird. Er nimmt an, dass die

1) *Philos. Transact.* 1802. *P. II. p.* 378.

an der Oberfläche der Retina gelegenen Theilchen eigenthümlicher Schwingungen fähig wären, und dass an jeder Stelle Theilchen von dreierlei verschiedener Schwingungsdauer sich neben einander vorfänden, entsprechend den Oscillationsgeschwindigkeiten der drei Grundfarben, Violett, Grün und Roth, welche im Verhältniss wie 7, 6 und 5 ständen. Wäre die Schwingungszahl eines Lichtstrahls 5, so würde er bloss auf die rothempfindenden Nervenenden wirken; wäre sie $5^1/_2$, so würde er gleichzeitig die roth- und die grünempfindenden anregen und dadurch die gemischte Empfindung des Gelb hervorbringen u. s. w.

Uebrigens habe ich ebenso wenig wie Forbes, bei Newton's Nachfolgern bis in die neueste Zeit Versuche über die Mischung einzelner prismatischer Farben gefunden. Es scheint, dass man die Sache stets durch die Mischversuche mit farbigen Pulvern als vollständig erledigt angesehen hat. Ja, man hat sich sogar durch abweichende Resultate, welche der Farbenkreisel gab, nicht darauf aufmerksam machen lassen, dass hier Schwierigkeiten verborgen liegen.

Die Zurückführung der Farben auf drei Grundfarben hat bei den verschiedenen Beobachtern dreierlei verschiedenen Sinn:

1) entweder, dass die Grundfarben solche seien, aus denen alle möglichen anderen zusammengesetzt seien, oder sich mindestens zusammensetzen liessen;

2) oder, wie bei Mayer und Brewster, dass die Grundfarben dreierlei objectiven Arten des Lichtes entsprächen;

3) oder, dass sie, wie bei Thomas Young, dreierlei verschiedenen Grundempfindungsarten der Sehnervenfasern entsprächen, aus denen die übrigen Farbenempfindungen sich zusammensetzten.

Auf die zweite Ansicht und die Gründe, wodurch Brewster 50
sie zu stützen versucht hat, werde ich an einem anderen Orte zurückkommen, und glaube im Stande zu sein diese Gründe zu widerlegen. Die beiden anderen Ansichten müssen aber jedenfalls an den prismatischen Farben, als den reinsten und gesättigtesten, welche wir kennen, geprüft werden. Das soll die Aufgabe vorliegenden Aufsatzes sein.

Das Mittel, dessen ich mich bedient habe, um sämmtliche Combinationen aus je zwei einfachen Spectralfarben herzustellen, ist folgendes: Ich schneide in einen schwarzen Schirm zwei hinreichend schmale ($^1/_4$ Linie breite) Spalten ein, welche zusammen ein V bilden. Beide sind unter 45° gegen den Horizont geneigt, stossen mit ihren unteren Enden zusammen, und schliessen somit einen rechten Winkel zwischen sich ein. Nach diesen Spalten sieht man aus genügender Entfernung (12 Fuss) durch ein Fernrohr und Prisma hin. Das Prisma ist dicht vor dem Objectivglase des Fernrohres in der Stellung der kleinsten Ablenkung befestigt, und die Kante seines brechenden Winkels steht vertical. Es ist bekannt, dass man durch ein verticales Prisma, nach einer verticalen Spalte blickend, ein rechteckiges Spectrum sieht, in welchem die Farbenstreifen und die Fraunhofer'schen Linien vertical verlaufen.. Sieht man durch ein verticales Prisma nach einer schiefen Spalte, so bekommt das Spectrum die Form eines schiefwinkligen Parallelogramms mit zwei horizontalen und zwei der schiefen Spalte parallelen Seiten. Die Farbenstreifen und Fraunhofer-schen Linien laufen natürlich hier auch der Spalte parallel. Sehen wir nach unserer zusammengesetzten Winkelspalte, so decken sich die Spectra seiner beiden Schenkel theilweise, und da in dem einen die Farbenstreifen von oben links nach unten rechts, im andern von oben rechts nach unten links verlaufen, so durchschneiden sie sich gegenseitig unter rechten Winkeln. Jeder Farbenstreifen des einen schneidet in dem beiden Spectren gemeinsamen Felde jeden des andern, und wir bekommen so-
51 mit gleichzeitig sämmtliche Combinationen, welche aus je zwei einfachen Farben gebildet werden können.

Da es darauf ankommt die Spalte in ihrer ganzen Ausdehnung gleichmässig zu erleuchten, kann man directes Sonnenlicht nicht wohl anwenden, und muss sich mit reflectirtem Lichte des Himmels, oder mit dem einer gleichmässig von der Sonne beschienenen weissen Fläche begnügen. Diese Erleuchtungen reichen in der Regel auch vollkommen aus.

Das von mir angewendete Flintglasprisma, dem Hrn. Professor Neumann zugehörig, liess bei Anwendung von Sonnenlicht und einer feinen Spalte eine sehr grosse Zahl der feineren

Fraunhofer'schen Linien sehen. In dem Spectrum der eben beschriebenen, etwas breiteren Winkelspalte waren wenigstens die stärkeren noch deutlich sichtbar, namentlich die von Fraunhofer durch die Buchstaben *A, B, D, E, b, F, G* und *H* bezeichneten. Die Anwesenheit dieser Linien giebt zunächst die Bürgschaft dafür, dass in dem Spectrum jedes einzelnen Schenkels die verschiedenfarbigen Strahlen nicht übereinander greifen konnten, dass ich es also mit wirklich reinen Farbenstrahlen zu thun hatte; und zweitens erleichtern sie sehr die Orientirung in dem gemischten Felde, durch welches man sie deutlich verlaufen sehen kann. Mein Fernrohr hat ein Fadenkreuz aus zwei sich rechtwinkelig kreuzenden Fäden, diese stellte ich den dunkelen Linien der beiden sich deckenden Spectra parallel. Die Fäden bezeichnen dann nach dem oberen und unteren Rande des lichten Feldes zu, wo ungemischte Farben liegen, unmittelbar die beiden reinen Farben, welche an ihrem Kreuzungspunkte gemischt sind.

Es ist nöthig, die relative Intensität der gemischten Farben ändern zu können. Das bewirkte ich, indem ich das Prisma aus seiner verticalen Stellung in eine mehr oder weniger schiefe brachte. Seine Fassung, mit der es an das vordere cylindrische Ende des Fernrohres befestigt war, liess sich um dieses als Axe drehen, und es konnte so in jede beliebige Stellung gegen den Horizont gebracht werden. Um zu erläutern, wie dadurch 52
die Lichtintensität des Spectrums geändert werde, beschränken wir unsere Betrachtungen zunächst auf eine einzige Spalte. Die Lichtintensität des Spectrums hängt von der Menge Licht ab, die durch die Spalte auf das Prisma und Fernrohr fällt, und von dem scheinbaren Flächenraum des Spectrums, zu dessen Beleuchtung diese Lichtmenge verwendet wird. Die Lichtmenge, welche überhaupt einfällt, ändert sich nicht, wenn wir das Prisma um die Axe des Fernrohres drehen, wohl aber der erleuchtete Flächenraum des Spectralbildes. Letzterer hat, wie schon oben bemerkt ist, die Gestalt eines Parallelogramms. Zwei seiner Seiten sind der Spalte parallel und stets eben so lang, wie die Spalte selbst im Fernrohr erscheint. Die beiden anderen Seiten stehen senkrecht auf der Kante des brechenden Winkels, und ihre Länge hängt nur von der zerstreuenden Kraft

des Prisma ab. Das Spectrum bildet also ein Parallelogramm, dessen Seiten constant sind, dessen Winkel aber durch Drehung des Prisma um die Axe des Fernrohres geändert werden können. Bekannte Sätze der elementaren Geometrie lehren, dass der Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms am grössten ist, wenn es rechte Winkel hat, und desto kleiner wird, je schiefer die Winkel werden. Da nun eine gleiche Menge Licht eine kleinere Fläche heller erleuchtet als eine grössere, so muss die scheinbare Helligkeit des Spectralbildes am kleinsten sein, wenn es ein Rechteck ist, d. h. wenn die brechende Kante der Spalte parallel ist, und desto heller werden, je grösser der Winkel zwischen beiden wird.

Die beiden Schenkel unserer Winkelspalte geben, durch ein verticales Prisma gesehen, zwei gleich helle Spectren, weil die Richtung der brechenden Kante mit beiden den gleichen Winkel von 45° macht; drehen wir aber das Prisma um die Axe des Fernrohres, so wird der eine Winkel grösser, der andere kleiner, und es variiren dabei die beiden Spectren in jedem beliebigen relativen Verhältniss ihrer Helligkeit.

Je heller man auf diese Weise ein Spectrum macht, desto
53 näher rücken seine Farbenstreifen zusammen; um daher die Reinheit der Farben nicht zu sehr zu beeinträchtigen, ist es rathsam, stärkere Unterschiede der Helligkeit nicht auf die bisher beschriebene Weise hervorzubringen, sondern durch andere Mittel. Sehr leicht geschieht dies, indem man dünnere oder dickere, geölte oder nicht geölte Papierblättchen hinter die eine Spalte setzt. Diese lassen nur einen kleinen Theil des auffallenden Lichts durchscheinen, während durch die andere Spalte das ungeschwächte Himmelslicht einfällt.

Hat man sich in der beschriebenen Weise ein Feld hergestellt, welches mit den Mischfarben je zweier reiner Spectralfarben bedeckt ist, so wird man sich bald überzeugen, dass man die Färbung, namentlich der weisslicheren Stellen, dieses Feldes zu beurtheilen unfähig ist, so lange man gleichzeitig gesättigte Farben daneben hat.

Es ist also durchaus nöthig die Stellen, über deren Farbe man urtheilen will, getrennt von den übrigen zu betrachten. Wenn man mit dem Fernrohr beobachtet, ist das Mittel dazu sehr

einfach. Man stelle das Fadenkreuz auf die fragliche Stelle ein und entferne sich mit dem Auge ein bis zwei Fuss vom Oculare. Aus dieser Entfernung sieht man nur eine sehr kleine Stelle des farbigen Bildes durch das Ocular hindurch, deren Farbe man unbehindert durch die Gegensätze blendenderer Farben beurtheilen kann. Die Fäden des Fadenkreuzes und ihre Kreuzungsstelle findet man, wenn man fernsichtig genug ist, auch bei dieser Entfernung des Auges leicht wieder; wenn nicht, doch mit Hülfe eines schwachen Concavglases, welches der Accommodation des Auges passend nachhilft. Um die beobachtete Farbencombination schnell wiederfinden und einem Anderen zeigen zu können, bringe ich in dieser Entfernung vom Oculare des Fernrohres einen verstellbaren dunkelen Schirm mit einer kleinen runden Oeffnung an, durch welche das Auge nach dem Oculare des Fernrohres hin zu sehen hat. Will man statt der zusammengesetzten Farbe wieder die beiden constituirenden einfachen sehen, so lässt man von einem Anderen erst die eine, dann die andere Spalte bedecken, 54
sodass immer nur die eine der beiden gemischten Farben stehen bleibt, oder man schaltet zwischen das Auge und die Oeffnung im Schirm, wodurch es nach dem Oculare hinsieht, ein zweites kleines Prisma ein, welches statt des einen hellen Flecks im Oculare zwei mit getrennten Farben erscheinen lässt. Zur sicheren Bestimmung sehr weisslicher Mischfarben ist es vortheilhaft, ein weisses, weiss erleuchtetes Papierblatt rings um die Oeffnung des Oculars anzubringen, und mit dessen Farbe die beobachtete Farbe zu vergleichen. Auch habe ich bemerkt, dass das Auge bei längerer Betrachtung sehr weisslicher Mischfarben für feine Farbenunterschiede unempfindlich wird, und es rathsam ist, es zuweilen eine Zeit lang ausruhen oder auf den Gegenständen der Umgebung herumschweifen zu lassen. Bei erneuerter Beobachtung der Mischfarbe sieht man dann oft eine farbige Beimischung des scheinbaren Weiss deutlich, die man vorher nicht mehr erkennen konnte, und die bei längerer Betrachtung auch wieder verschwindet.

Auf diese Weise ist es möglich sämmtliche Combinationen zweier prismatischen einfachen Strahlen in allen Abstufungen ihrer relativen Stärke herzustellen und ungestört von anderen

Farbeneindrücken zu betrachten. Meine Beobachtungen, deren Hauptpunkte ich mir von mehreren anderen, in Beurtheilung der Farben geübten Personen bestätigen liess, um nicht durch etwa vorhandene subjective Fehler meiner Augen getäuscht zu werden, haben folgende von den bisherigen Ansichten zum Theil auffallend abweichende Resultate gegeben.

1. Roth giebt mit Orange ein röthlicheres Orange, mit Gelb Orange; die gemischten Farben unterscheiden sich nicht merklich von den Abstufungen des Orange, die in dem einfachen Spectrum vorkommen. Mit Grün giebt es ein Gelb, welches weniger gesättigt, fahler ist, als das einfache Gelb, und bei vorwaltendem Roth durch Orange in Roth, bei vorwaltendem Grün durch Gelbgrün in Grün übergeht. Mit den
55 grünblauen Tönen des Spectrums entsteht eine fleischfarbene, mit den himmelblauen eine rosarothe Farbe, welche bei überwiegendem Blau in weissliches Violett, mit überwiegendem Roth in Carminroth übergeht. Vereinigt man endlich das Roth mit weiter nach dem Ende des Spectrums hin gelegenen indigoblauen oder violetten Strahlen, so bekommt man ein immer dunkleres und gesättigteres Purpurroth.

2. Orange mit Gelb giebt ein gelblicheres Orange, mit Grün ein fahles Gelb, mit Blau fleischfarbene Töne, die bei Indigo und Violett in Carminroth übergehen.

3. Gelb mit Grün giebt ein grünliches Gelb, ähnlich den dazwischen gelegenen Farbentönen des Spectrums. Mit Himmelblau giebt es ein schwach grünliches Weiss, mit Indigoblau reines Weiss, mit Violett ein schwach fleischfarbenes Weiss, das bei überwiegendem Violett in weissliches Violett, bei überwiegenderem Gelb in weissliches Gelb übergeht.

4. Grün giebt mit Blau Grünblau, mit Indigo ein Hellblau, welches aber viel matter und weisslicher ist als das des Spectrums, ebenso mit Violett Hellblau.

5. Blau mit Indigo giebt die dazwischenliegenden Töne, mit Violett ein Dunkelblau, das aber weniger gesättigt ist als das Indigo des Spectrums.

6. Indigo mit Violett die dazwischenliegenden Töne.

Die auffallendste und von den bisherigen Ansichten abweichendste Thatsache ist die, dass unter den Farben des Spectrums nur zwei vorkommen, welche zusammen reines Weiss geben, also Complementarfarben sind, und dass dies Gelb und Indigoblau sind, zwei Farben, aus deren Verbindung man bisher fast immer Grün entspringen liess. Das Gelb, welches man zu dieser Mischung gebraucht, ist ein sehr schmaler Strich im Spectrum, zwischen den Linien D und E gelegen, und etwa dreimal so weit von E als von D entfernt, ein Gelb, welches weder in das Orange, noch in das Grünliche zieht und unter den Pigmenten am besten durch das chromsaure Bleioxyd (Chromgelb) wiedergegeben wird. Das dazu gehörige Blau hat eine grössere Breite und umfasst die Abstufungen dieser Farbe, 56
welche Newton und Fraunhofer als Indigo bezeichnen, etwa von der Mitte zwischen den Linien F und G bis gegen G hin. Unter den Farbstoffen giebt dunkles Ultramarin diese Farbe aber besser wieder als das mehr violette Indigo. Hat man die Mischungsfarben durch zwei gleich helle Spectra eines Flintglasprisma hervorgebracht und zur Erleuchtung das Licht der Wolken gebraucht, so ist es gerade die Mitte zwischen den Linien F und G, welche für das Weiss die richtige Lichtintensität hat. Nach dem Violett und der Linie G zu wird das Blau immer lichtschwächer, und hier muss es daher relativ zum Gelb verstärkt werden, um Weiss zu geben. Aus diesem Grunde fällt z. B. im Spectrum eines weisslich blauen Himmels das Weiss nahe der Linie G. Auch das hellere Blau des Spectrums mehr nach der Linie F hin giebt mit reinem Gelb, und das Violett mit einem etwas in das Grünliche ziehenden Gelb bei passender Abgleichung ihrer relativen Intensitäten, Farbentöne, welche dem Weiss sehr ähnlich werden, aber doch immer einen Anflug von Färbung behalten. Sie ziehen meist in das Fleischfarbene, Bläuliche und Grünliche hinüber; zuweilen ist es auch schwer der Färbung einen bestimmten Namen zu geben, aber niemals ist es mir gelungen, aus diesen Farben ein klares, reines Weiss zu erhalten. Wenn die Untersuchung mit vollkommeneren Instrumenten ausgeführt würde, als es die meinigen waren, welche dem Felde der zusammengesetzten Farben eine grössere Flächenausdehnung zu geben erlaubten, würden sich die Grenzen der weissgebenden Strahlen wahrscheinlich genauer angeben lassen, weil die Ver-

gleichung der Farbentöne grösserer Flächen viel leichter und schärfer auszuführen ist. [1])

Durch die weissgebenden Strahlen wird die ganze Breite des Spectrum in drei Abtheilungen getheilt. Deren erste, die rothe, entspricht, wenn man die Verhältnisse der Lichtschwingungen mit denen der Schallwellen vergleicht, etwa dem Intervalle einer kleinen Terz, die mittlere grüne einer grossen Terz,
57 und die dritte violette ist etwas kleiner als eine kleine Terz. Farben der ersten und zweiten verbinden sich zu gelben Tönen mit Uebergängen in Roth, Fleischfarbe, Weiss und Grün, solche der zweiten und dritten zu blauen mit Uebergängen in Grün, Weiss und Violett, solche der ersten und dritten zu purpurrothen mit Uebergängen in Fleischfarben, Rosa und Violett.

Was die Zusammensetzungen von drei einfachen Farben betrifft, so dürfen wir wohl voraussetzen, dass Weiss nur dann entstehen könne, wenn Strahlen aus den drei verschiedenen Abtheilungen des Spectrum passend vereinigt werden. Es lässt sich wenigstens nicht annehmen, obgleich man natürlich durch das Experiment nicht alle möglichen Combinationen erschöpfen kann, dass z. B. die gelben oder gelblichen Farben, welche aus solchen der rothen und grünen Abtheilung entstehen, durch weiteren Zusatz von einer oder mehreren Farben, welche diese Abtheilungen enthalten, Roth, Gelb oder Grün, in Weiss übergehen sollten. Ebenso ist es mit den Mischungen der grünen und violetten, sowie mit denen der rothen und violetten Abtheilung. Dagegen gelingt es, Weiss aus ziemlich mannigfaltigen Combinationen solcher drei Farben zu bilden, welche aus allen drei Abtheilungen gleichzeitig entnommen sind. Ich habe dazu einen schwarzen Schirm mit drei Spalten gebraucht. Zwei waren parallel unter 45° gegen den Horizont geneigt und standen in solcher Entfernung von einander, dass, durch das Prisma aus der gewöhnlichen Entfernung gesehen, das Violett der einen auf das Roth der andern fiel. Die Spalte, welche das Violett giebt, muss man etwa doppelt so breit machen als die andere, weil sonst das Violett zu lichtschwach gegen das Roth wird. Eine dritte Spalte, die das Grün zur Mischung

1) S. den unten folgenden Aufsatz No. LII.

geben sollte, wurde rechtwinkelig gegen die beiden ersteren zwischen ihnen eingeschnitten, sodass die drei Spalten zusammen einem liegenden *Z* ähnlich wurden. Das Spectrum der dritten schneidet rechtwinkelig durch den Purpurstreif, den die beiden anderen geben, und erzeugt eine Reihe von Mischfarben, aus denen man leicht die weisseste Stelle aussuchen kann. Durch Drehung des Prisma um die Axe des Fernrohres lässt 58
sich das Verhältniss der gemischten Farben dann so abgleichen, dass man reines Weiss bekommt. So erhält man Weiss aus Roth, Grün und Violett, welche man zu drei Paaren von Complementarfarben verbinden kann, nämlich

einfaches Roth und zusammengesetztes mattes Blaugrün
„ Grün „ Purpurroth,
„ Violett „ mattes Gelb.

Auffallend ist hierbei, dass die Complementarfarben des einfachen Roth und Violett sich von gewissen Farbentönen des Spectrum nur durch ihr minder gesättigtes Ansehen unterscheiden und dennoch die ersteren mit einfachem Roth und Violett Weiss geben, letztere nicht.

Newton's wenige Beobachtungen über die Zusammensetzung je zweier prismatischer Farben stimmen mit meinen Angaben überein. Er giebt an, die primitiven Farben könnten durch Vereinigung der beiderseitigen Nachbarfarben wiedergegeben werden[1]), so z. B. Orange durch Roth und Gelb, Gelb durch Orange und Grüngelb, Grün durch Grüngelb und Meergrün, oder auch, aber weniger gut, durch Gelb und Blau (cyaneum), Blau durch Meergrün und Indigoblau. Ausserdem hat er Purpurroth aus Roth und Violett dargestellt. Weiss hat er nur durch je drei Farben, Roth, Violett und Grün, erhalten, und damit es gut gelinge, räth er sogar Spectra mit unvollkommen getrennten Farben anzuwenden. Dabei mischen sich dann noch mehr als drei Einzelfarben.

Dagegen wird man bemerkt haben, dass meine Angaben über das Zusammenwirken der prismatischen Farben erheblich von denen abweichen, welche man aus der Mischung von Farbstoffen gewonnen hatte. Namentlich, dass Gelb und Blau nicht

1) *Lectiones opticae. P. II. S. I. Prop. IV.* und *Optice Lib. I. P. II. Prop. IV.*

Grün, sondern höchstens ein schwach grünliches Weiss geben sollten, widerspricht der tausendjährigen Erfahrung aller Maler auf das entschiedenste. Der Grund des Widerspruchs wird
59 aber durch eine kurze Ueberlegung, wie Farbstoffe auf das Licht wirken, klar werden. Farbstoffe, wie alle gefärbten Körper, welche wir in grösseren Stücken von regelmässigem Gefüge besitzen, z. B. der krystallinische Zinnober, das krystallisirte chromsaure Bleioxyd, das Kobaltglas, aus welchem die Smaltefarben gemacht werden, sind durchsichtig oder wenigstens durchscheinend. Fällt Licht auf sie, so wird von ihrer äusseren Oberfläche zunächst ein Theil desselben als weisses Licht reflectirt, ein anderer geht in das Innere, wird hier durch ungleichmässige Absorption der ihn zusammensetzenden einfachen Strahlen farbig, wird an der hinteren Begrenzungsfläche des Körpers reflectirt, und kehrt nach vorn zum Auge des Beobachters zurück, der eben wegen der Farbe dieses eingedrungenen und im Körper selbst reflectirten Lichts diesen gefärbt sieht. Zerpulvern wir dagegen einen Farbstoff, so sieht der Beobachter von dem auffallenden Lichte nicht bloss das in sein Auge zurückkehren, was an der vorderen und hinteren Oberfläche der obersten Lage von Pulvertheilchen, sondern auch was von der zweiten und dritten u. s. w. reflectirt ist. Eine einzelne ebene Glastafel reflectirt von senkrecht einfallendem Licht nur $\frac{1}{25}$, zwei solche $\frac{1}{13}$, sehr viele fast alles. Wir können daraus schliessen, dass von dem Licht, welches auf feines weisses Glaspulver fällt, nur der kleinste Theil von den zu oberst liegenden Theilchen, ein bei weitem grösserer von den tieferen reflectirt wird. Ebenso wird es sich bei gefärbten Pulvern verhalten müssen, wenigstens mit denjenigen Arten der einfachen Strahlen, deren Farbe sie tragen, und welche sie ohne Absorption hindurchzulassen pflegen; das meiste Licht dieser Art wird aus den tieferen Schichten kommen und durch eine grössere Anzahl von Pulvertheilchen hindurchgegangen sein.

Wie wird es sich nun verhalten, wenn wir Pulver von verschiedener Farbe mischen, z. B. gelbes und blaues? Die oberflächlich gelegenen blauen Theilchen werden blaues, die oberflächlichen gelben gelbes Licht geben; beides zusammen wird sich zu Weiss oder grünlichem Weiss vereinigen. Ganz
60 anders ist es aber mit dem Lichte, welches aus der Tiefe

zurückkehrt. Dies muss abwechselnd durch gelbe und durch blaue Theilchen hindurchdringen; es wird also aus der Tiefe nur solches Licht zurückkehren, welches sowohl von den blauen, als auch von den gelben durchgelassen wird. Blaue Körper pflegen grünes, blaues und violettes Licht in merklicher Menge durchzulassen, gelbe dagegen rothes, gelbes und grünes. Durch beide zugleich geht also nur grünes, und es kann aus der Tiefe des gemischten Pulvers nur grünes Licht zurückkehren. Da nun die von den oberflächlichen Theilen des Pulvers reflectirte Lichtmenge nach dem vorher Gesagten viel kleiner zu sein pflegt, als die aus der Tiefe zurückkehrende, so wird das Grün der letzteren bei weitem überwiegen und die Farbe der Mischung bestimmen.

Wenn wir also zu einem blauen Pulver gelbes hinzumischen, wird die Farbe der Mischung weniger dadurch verändert, dass zu den Farbestrahlen des blauen Pulvers sich noch solche des gelben hinzu addiren, als vielmehr dadurch, dass von jenen Farbenstrahlen noch der violette und blaue Theil verloren geht, und nur das grüne übrig bleibt. Daher pflegen Mischungen zweier Farbestoffe von etwa gleicher Helligkeit auch dunkler zu sein als ihre Constituenten, namentlich dann, wenn letztere solche Farben darbieten, welche in der prismatischen Reihe weit aus einander liegen, und deshalb wenig gemeinsame Farbenstrahlen enthalten. So giebt Zinnober und Ultramarin statt des Rosa, welches der Zusammensetzung ihres Lichtes entspricht, ein etwas in das Violette ziehendes Schwarzgrau.

Die vorstehende Theorie der Farben gemischter Farbstoffe ist einfach abgeleitet aus allgemein anerkannten physikalischen Vorstellungen, erklärt die Erscheinungen, soweit ich sehen kann, vollständig und weiset nach, dass Mischung der Farbstoffe und Zusammensetzung der Farben zwei durchaus verschiedene Vorgänge sind, und dass die durch die erstere gewonnenen Erfahrungen durchaus keinen Schluss auf die letztere gestatten. Nur wenn wir es mit zwei im Spectrum wenig von einander abstehenden Farben zu thun haben, giebt die Zu- 61
sammensetzung des farbigen Lichtes fast dieselben Resultate wie die Mischung der Pigmente, weil dann die zusammen-

gesetzte Farbe den zwischenliegenden Farbentönen des Spectrum ähnlich ist.

Es giebt aber zwei andere Methoden das von Pigmentfarben kommende Licht zusammenzusetzen, bei denen man Resultate erhält, welche ganz den bei der Zusammensetzung ähnlicher prismatischer Farben erhaltenen entsprechen. Die erste dieser Methoden ist die Vereinigung der Farben auf dem Farbenkreisel. Man hat längst bemerkt, dass sie andere Resultate giebt als die Mischung der Pigmente. Ich wiederholte die Versuche mit Gelb und Blau. Für ersteres wendete ich entweder Gummi-Gutti oder Chromgelb an, für letzteres Bergblau oder Ultramarin. Bei schneller Umdrehung erhält man ein reines Grau. Sehr frappant stellt sich der Unterschied beider Methoden heraus, wenn man die Mitte der Scheibe mit der Mischung beider Pigmente anstreicht, am Rande dagegen Sectoren mit den reinen Pigmenten. Dann sieht man beim schnellen Umdrehen der Scheibe in der Mitte Grün, am Rande Grau. Jenes ist viel dunkler als letzteres, wie es nach der oben gegebenen Theorie erwartet werden musste.

Die andere Methode habe ich noch nicht beschrieben gefunden, kann sie aber als sehr bequem empfehlen. Sie ist zugleich von dem Uebelstande frei, dass die Mischfarben das graue Ansehen wie auf den Farbenscheiben bekommen; man kann durch sie vielmehr wirklich Weiss aus complementar gefärbten Pigmenten erzeugen. Man stelle eine Glasplatte mit planen und parallelen Flächen senkrecht auf einer Tischplatte auf und lege vor ihr eine gefärbte Oblate hin. Dieselbe sieht man in der Glasplatte gespiegelt, und der scheinbare Ort ihres Spiegelbildes ist jenseits der Platte und ebenfalls auf der Oberfläche des Tisches. Man kann nun genau an dieselbe Stelle, wo sich scheinbar die gespiegelte Oblate befindet, eine andere ebenso grosse, aber anders gefärbte hinlegen, welche der Beobachter durch das spiegelnde Glas hindurch sieht. Sein Auge
62 wird dann von zweierlei Strahlen getroffen, welche beide von ganz demselben Körper auszugehen scheinen, die einen dem durchgegangenen, die anderen dem gespiegelten Lichte angehörig. Es erscheint ihm deshalb eine Oblate, deren Farbe aus denen der beiden wirklich vorhandenen Oblaten zusammengesetzt ist. Um den Versuch bequemer anzustellen, braucht man nur ein ganz kleines, möglichst dünnes, planparalleles Glasplättchen anzuwenden, welches man etwa in der Entfernung des deutlichen Sehens über der Tischplatte und senkrecht gegen diese befestigt. Man sieht von oben schief durch das Plättchen nach der Tischplatte hin, und legt sich die Oblaten an passende Stellen, um die Vereinigung ihrer Farben hervorzubringen. Je näher man beide der imaginären Durchschnittslinie der Ebene des Tisches und der Glastafel schiebt, desto schiefer fallen die Strahlen auf die Platte, desto weniger gehen durch, desto mehr werden reflectirt, sodass dann die Farbe des reflectirten Lichtes die überwiegende wird. Umgekehrt überwiegt die Farbe des durchgehenden Lichtes, wenn man die Oblaten von jener Durchschnittslinie entfernt, und man kann auf diese Weise sämmtliche Abstufungen der relativen Stärke in der Zusammensetzung hervorbringen. Man giebt bei diesem Versuche entweder beiden Oblaten einen schwarzen Grund, oder wenn man weissliche Farbenverbindungen hervorbringen und mit reinem Weiss vergleichen will, der einen, am besten der helleren von beiden, einen weissen, der anderen einen schwarzen Grund. Bei der Beobachtung durch das Glasplättchen erscheint die Oblate in der zusammengesetzten Farbe auf weissem Grunde. Es versteht sich, dass man so die Farben von allen beliebigen gefärbten Flächen, auch von gefärbten Gläsern zusammensetzen kann.

So zusammengesetzte Farben zeichnen sich durch Helligkeit und Klarheit sehr vor denen durch Mischung der Farbstoffe erhaltenen aus, und stimmen auch nicht immer der Art nach mit diesen überein, sondern geben vielmehr dieselben Resultate, welche wir aus der Vereinigung prismatischer Farben gewonnen hatten. Namentlich geben Blau und Gelb nicht 63
Grün, sondern Weiss. Als Repräsentanten des Gelb brauchte ich Papierscheibchen, welche ich mit hellem Chromgelb oder Gummi-Gutti getuscht hatte. Unter den blauen Farbestoffen gab, ebenfalls auf solche Scheibchen aufgetragen, ein schön himmelblaues Kobaltblau mit den beiden Arten des Gelb reines Weiss, künstliches Ultramarin röthliches Weiss, und helles Berlinerblau ein schwach grünliches Weiss. Zinnoberroth mit

Blau combinirt giebt Rosa, dasselbe Roth mit Grün giebt Gelb u. s. w. Kurz, es weisen diese Versuche nach, dass nicht bloss die einfachen Farbenstrahlen des Spectrum andere Gesetze des Zusammenwirkens haben, als man bisher allgemein angenommen hatte, sondern dass ganz ähnliche Gesetze auch für die zusammengesetzten Farben der Pigmente gelten, und es scheint mir nicht zweifelhaft zu sein, dass diese neuen Gesetze an die Stelle der älteren, auf die Mischung der Farbestoffe gegründeten zu setzen seien.

Man wird dabei am besten von der Vereinigung einfacher Farben des Sonnenspectrum ausgehen, weil diese den reinsten und vollkommensten, schon bei geringer Lichtintensität fast blendenden Eindruck von Farbe machen, gegen den alle Pigmentfarben matt und grau aussehen. Schon Newton hat als Regel aufgestellt, dass eine jede einfache Farbe durch eine Vereinigung ihrer beiden nächsten Nachbarfarben wiedergegeben werden könne. Meine eigenen Untersuchungen bestätigen dies; ich muss aber zugleich hinzufügen, dass der Abstand der combinirten Farben nicht sehr gross sein darf, wenn die zusammengesetzte den zwischenliegenden Abstufungen des Spectrum ähnlich sehen soll. Namentlich ist dies im mittleren Theile des Spectrum der Fall. Roth und Gelb giebt ein Orange, dessen Ansehen dem des einfachen Orange vollständig gleich erscheint, und ebenso können die aus Blau und Violett zusammengesetzten Arten des Indigoblau wohl kaum vom einfachen Indigoblau unterschieden werden. Dagegen giebt schon Gelbgrün und Blaugrün ein Grün, dessen Farbenton dem des prismatischen
64 mittleren Grün zwar entspricht, welches aber entschieden weisslicher und matter ist, sodass das einfache Grün nur aus solchen Farben gemischt werden kann, die sich fast gar nicht im Ansehen von ihm unterscheiden. Gelb und Blau erscheinen in dieser Beziehung weniger empfindlich als Grün. Ersteres setzt sich noch ziemlich gut aus Orange und Gelbgrün zusammen, wird aber sehr fahl aus Roth und Grün, letzteres wiederum lässt sich gut aus Blaugrün und Indigo zusammensetzen, wird aber sehr matt aus Grün und Violett. Was die Endfarben des Spectrum, Roth und Violett betrifft, so lässt sie Newton in seinem Farbenkreise sich aneinander schliessen,

und unterwirft sie dann auch der besprochenen Regel der Vereinigung von benachbarten Farben. In der That kann man aus Indigoblau und sehr wenig Roth eine Art Violett erzeugen, welches aber immer mehr in Weiss oder Rosa zieht als das einfache Violett. Viel unvollkommener noch erscheint meinem Auge die Nachahmung des Roth durch Orange und Violett; ihre Combination geht immer in die carminrothen Töne oder in Weiss hinüber, und es ist mir nicht gelungen, eine erträgliche Nachahmung des reinen Roth zu erhalten.

Stellten wir uns also die Aufgabe, sämmtliche Farbentöne des Spectrum durch Zusammensetzung möglichst weniger einfacher Farben nachzuahmen, so brauchen wir dazu mindestens fünf der letzteren, nämlich: Roth, Gelb, Grün, Blau, Violett. Indessen muss ich es noch dahingestellt sein lassen, ob diese ganz vollständig genügen und ob nicht bei vortheilhafteren Apparaten, wo es möglich wäre, grössere Felder neben einander mit den entsprechenden zusammengesetzten und einfachen Farben zu erleuchten, ein geübtes Auge Unterschiede erkennen würde, welche in meinem Apparate nicht mehr erkennbar waren. Wollte man sich aber auf drei Farben beschränken, so würde man dazu am besten die drei einfachen Farben wählen, welche sich am wenigsten gut nachahmen lassen, nämlich Roth, Grün und Violett, dann aber ein Gelb und Blau erhalten, welches den Farben unserer Pigmente gegenüber allerdings noch ge- 65
sättigt erschiene, mit dem Gelb und Blau des Spectrum aber nicht verglichen werden könnte. Es sind dies die drei Grundfarben, welche Thomas Young als solche vorgeschlagen hat. Weniger gut würde Roth, Grün und Blau passen; das gemischte Violett würde bei dieser Auswahl schlechter werden als das gemischte Blau bei der ersteren. Die gewöhnlich gewählten drei Grundfarben Roth, Gelb und Blau sind aber durchaus unzureichend, weil man aus ihnen nimmermehr Grün erzeugen kann.

Wir werden demnach auch die Lehre von den drei Grundfarben, als den drei Grundqualitäten der Empfindung, wie sie Thomas Young aufgestellt hat, fallen lassen müssen. Entstände die Empfindung des Gelb durch die gelben Strahlen des Spectrum nur deshalb, weil dadurch gleichzeitig die Em-

pfindung des Roth und Grün angeregt würde, und beide zusammenwirkend Gelb gäben, so müsste genau dieselbe Empfindung auch durch eine gleichzeitige Einwirkung der rothen und grünen Strahlen erregt werden können; indessen wird durch die letzteren niemals ein so glänzendes und lebhaftes Gelb erzeugt, wie es die gelben Strahlen geben. Ebenso ist es mit dem Blau, welches aus Grün und Violett, oder dem Violett, welches aus Blau und Roth zu mischen wäre. Um in diesem Sinne die Lehre von den Grundfarben festzuhalten, müsste man mindestens fünf solche hinstellen.[1]) Dagegen würden die drei Grundfarben wohl genügen, um in dem Sinne von Lambert und Forbes die matten und verhältnissmässig unreinen Farben der Naturkörper wiederzugeben und zu classificiren. Nur würde es für eine sichere, wissenschaftliche Classification doch nöthig werden, eine andere Methode für die Zusammensetzung der Farben zu gebrauchen als die Mischung der Pigmente.

Bei der Vereinigung von je zwei einfachen Farben treten uns zwei neue Farbeneindrücke entgegen, nämlich Weiss und Purpurroth, mit ihren Uebergangsstufen in die vorher genannten einfachen Farben. Das Purpurroth gehört zu den gesättigten
66 Farben; es kann nicht anders als aus dem äussersten Roth und Violett dargestellt werden, ohne an seinem Glanze zu verlieren. Das Weiss dagegen kann auf unendlich verschiedene Weise dargestellt werden, ohne dass das Auge ein Weiss von dem andern zu unterscheiden vermöchte. Wir erhalten es z. B. aus einfachem Gelb und Blau, aus einfachem Roth, Grün und Violett, oder aus diesen fünf einfachen Farben zusammengenommen; und ausserdem aus den mannigfaltigsten complicirteren Combinationen. Es wird deshalb als indifferentes Licht den Gegensätzen der Farben gegenübergestellt. Die übrigen Combinationen je zweier einfacher Farben erscheinen dem Auge als Uebergänge der einfachen Farben und des Purpur in Weiss, aber sie verhalten sich doch in weiteren Zusammensetzungen, wie oben angeführt ist, wesentlich anders, als es die Spectralfarben durch hinzugefügtes weisses Licht abgeschwächt thun würden.

1) Auch diese Schlüsse sind durch die unten in LI beschriebenen Versuche über Mischung von Spectralfarben verändert worden.

Zum Schluss gebe ich folgende kleine Tabelle zur Uebersicht über die Combinationen je zweier Farben, bei welcher ich die fünf Farben zu Grunde lege, durch deren Vereinigung die Farben des Spectrum genügend gut wiedergegeben werden können. In der ersten Horizontal- und ersten Verticalreihe stehen die einfachen Farben, welche vereinigt worden sind; die daraus zusammengesetzten Farben finden sich, wo sich die betreffende Horizontal- und Verticalreihe schneiden.

	Violett	Blau	Grün	Gelb	Roth
Roth	Purpur	Rosa	Mattgelb	Orange	Roth
Gelb	Rosa	Weiss	Gelbgrün	Gelb	
Grün	Blassblau	Blaugrün	Grün		
Blau	Indigoblau	Blau			
Violett	Violett				

L.

Ueber Herrn D. Brewster's neue Analyse des Sonnenlichtes.

Aus Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 86. S. 501 bis 523. Monatsberichte der Akademie zu Berlin. 1852. S. 458 bis 461.

501 Hr. D. Brewster hat in einer Reihe von Aufsätzen[1]) eine eigenthümliche Ansicht über die Zusammensetzung des Sonnenlichtes und die Entstehung der Farben aufgestellt und zu beweisen gesucht, welche mit Recht die Aufmerksamkeit der Physiker in hohem Grade auf sich ziehen musste, theils in Betracht des wohlverdienten Ruhms, den sich ihr Urheber in den optischen Wissenschaften erworben hat, theils wegen den neuen Thatsachen, welche er zur Unterstützung seiner Behauptungen anführt. Das Sonnenlicht soll nach ihm aus dreierlei Arten von Licht, rothem, gelbem und blauem, zusammengesetzt sein, und jeder dieser Lichtarten sollen Strahlen von allen den Abstufungen der Brechbarkeit zukommen, welche sich im prismatischen Spectrum vorfinden, jedoch so, dass das rothe Licht

1) *Description of a Monochromatic Lamp with Remarks on the Absorption of the Prismatic Rays, in Transactions of the R. Soc. of Edinb. Vol. IX. P. II. p.* 433. — *On a New Analysis of Solar Light. Ibd. Vol. XII. P. I. p.* 123. — *Reply to the Astronomer R. on the New Anal. of Solar Light. Philos. Magaz. Vol. XXX. p.* 153. — *Observation on the Analysis of de Spectrum by Absorption. Ibd. Vol. XXX. p.* 461. — *Remarks on the Elementary Colours of the Spectrum. Ibd. Vol. XXXII. p.* 489.

mehr Strahlen von geringerer Brechbarkeit, das gelbe mehr von mittlerer, das blaue mehr von grösserer liefert, daher das erste am weniger brechbaren Ende des Spectrum überwiegt, das zweite in der Mitte, das dritte am brechbaren Ende. Die übrigen Farbentöne des Spectrum Orange, Grün, Violett sollen durch Mischung der drei Grundfarben entstehen. Das Prisma kann immer nur solche Strahlen von einander trennen, 502 welche ungleiche Brechbarkeit besitzen. Wenn es also verschiedenfarbige Strahlen von gleicher Brechbarkeit giebt, so muss sich natürlich für die prismatische Analyse das aus ihnen zusammengesetzte Licht wie einfaches verhalten. Dagegen, behauptet Brewster, liessen sich solche Strahlen durch ihre verschiedene Absorption in gefärbten Mitteln von einander trennen, und er hat versucht mit Hülfe dieser Methode den Nachweis zu führen, dass in allen Theilen des Sonnenspectrum Licht von allen drei Farben, also auch aus diesen drei Farben zusammengesetztes weisses Licht vorkäme. Die Thatsachen, auf welche er sich dabei stützt, sollen beweisen, dass Licht, welches in Newton's Sinne homogen ist, d. h. nur Strahlen von einer Brechbarkeit (und Wellenlänge) enthält, beim Durchgang durch gefärbte Mittel zuweilen Veränderungen seiner Farbe erleidet, während die von Newton aufgestellte und allgemein verbreitete Theorie behauptet, dass die Farbe des homogenen Lichtes nur von seiner Brechbarkeit (oder Wellenlänge) abhängig sei, und solches Licht wenn es durch gefärbte Media gehe, zwar geschwächt oder ausgelöscht, aber nie in seiner Farbe verändert werden könne. Wir müssen Hrn. D. Brewster zugeben, dass wenn ein einziger Fall constatirt würde, wo die Farbe von homogenem Licht durch Absorption in einem gefärbten Medium sich veränderte, wir Newton's Theorie verlassen und dafür seine oder wenigstens eine ihr ähnliche annehmen müssten.

Ich bemerke hier zunächst, dass die Anzahl und Art der von Brewster angenommenen Grundfarben nur auf indirecten Schlüssen beruht. Er hat in dieser Beziehung die ziemlich allgemein angenommene Theorie der Farbenmischung beibehalten, wonach aus den drei Farben Roth, Gelb und Blau alle anderen zusammenzusetzen seien, Gelb und Blau namentlich zusammen

Grün gäben. Ich habe an einem anderen Orte[1]) gezeigt, dass diese Theorie nur nach den Resultaten der Mischung der Farb-
503 stoffe gebildet ist, dass Mischung der Farbstoffe aber durchaus nicht eine einfache Zusammensetzung ihres farbigen Lichtes hervorbringt, und dass namentlich gelbes Licht mit blauem vereinigt nicht Grün, sondern Weiss giebt. Die drei Farben Roth, Gelb und Blau können also kein Grün zusammensetzen, und müssten, wenn man bei drei Grundfarben stehen bleiben will, durch andere, etwa Roth, Grün und Violett, ersetzt werden, denselben, welche schon Th. Young aufgestellt hat. Dadurch würde übrigens Brewster's Theorie keine sehr wesentliche Veränderung erleiden, sondern es würden nur einzelne Schlüsse etwas abgeändert werden müssen. Ich will deshalb hier nicht näher darauf eingehen, sondern mich darauf beschränken, die Frage zu untersuchen: „Wird die Farbe homogenen Lichtes durch gefärbte Mittel verändert, oder nicht?"

Es haben bisher Airy[2]), Draper[3]) und Melloni[4]) die Ansichten Brewster's zu widerlegen versucht. Der erstere hob namentlich hervor, dass dieser Physiker bei der von ihm angewandten Methode der Beobachtung nicht gleichzeitig die durch Absorption veränderten und unveränderten Farben vor Augen gehabt habe und sich deshalb in der Vergleichung ihrer Unterschiede habe täuschen können. Brewster antwortete darauf, und ich kann aus eigener Erfahrung ihm beistimmen, dass bei seiner Beobachtungsmethode die Veränderungen der Farben meistens auffallend genug sind, um ohne Schwierigkeit von Jedermann erkannt zu werden. Draper und Melloni sprachen ihre Zweifel aus, ob das von Brewster angewendete Spectrum hinreichend rein gewesen sei, und ob nicht die einzelnen Farbenstreifen beträchtlich über einander gegriffen haben. Aus den Angaben, welche Brewster in seinen Erwiderungen auf diese Angriffe über seine Methode macht, geht aber in

1) Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben. Müller's Archiv für Anatomie u. Physiologie 1852. (Vorstehender Aufsatz.)

2) *Philos. Magaz. Vol. XXX. p.* 73. Pogg. Ann. Bd. 71, S. 393.

3) *Silliman J.* 1847. *Vol.* IV. *p.* 388. *Phil. Mag. XXX. p.* 345.

4) *Bibl. univ. d. Genève. Août* 1847. *Phil. Mag. XXXII. p.* 262, Pogg. Ann. Bd. 75. S. 62.

der That hervor, dass ein solches Uebereinandergreifen der 504
Farben nicht stattfand; auch haben seine späteren Versuche über die Anzahl der Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspectrum gezeigt, dass ihm viel vollkommenere Mittel zur Trennung der Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zu Gebote stehen als selbst Fraunhofer oder vielleicht irgend einem anderen Physiker. Und in der That lehrte mich eine sorgfältige Wiederholung wenigstens der wichtigsten von seinen Versuchen, welche ich genau nach seiner Methode und mit Berücksichtigung aller bisher für nöthig gehaltenen Vorsichtsmaassregeln angestellt habe, dass die Thatsachen, welche er gesehen zu haben behauptet, vollkommen richtig beschrieben sind, wie man es übrigens von einem so bewährten Beobachter nicht anders erwarten konnte. Aber ich glaube seine Deutung dieser Versuche durch Gründe widerlegen zu können, welche bisher noch nicht zur Sprache gekommen sind, und wodurch die scheinbaren Widersprüche gegen Newton's Ansicht aufgehoben werden.

Es ist sehr zu bedauern, dass Brewster nirgends eine detaillirte Beschreibung seiner Beobachtungsmethode gegeben hat. Daher ist es gekommen, dass Draper und Melloni ihm in ihren Voraussetzungen darüber Unrecht thun konnten, und deshalb muss ich auch von vornherein um Verzeihung bitten, falls ich den Einfluss von Fehlerquellen besprechen sollte, welche er in der That bei der Anstellung seiner Versuche schon vermieden hatte. Ich entnahm theils aus den Antworten, welche er seinen Gegnern gegeben hat, theils aus der Darstellung in seinem *Treatise on Optics*, London 1831, über seine Methode Folgendes. Er brachte in dem Laden eines dunklen Zimmers einen schmalen Spalt an, und betrachtete diesen durch ein stark brechendes Prisma mit blossem Auge ohne Fernrohr, wobei er in dem an Stelle des Spaltes erscheinenden Spectrum die (stärkeren) Fraunhofer'schen Linien sehen konnte. Dann schaltete er zwischen Auge und Prisma das absorbirende farbige Mittel ein, und erblickte nun das veränderte Spectrum. Ausserdem wiederholte
er die Versuche auch mit Spectren, in denen durch Interferenz 505
eine Anzahl dunkler Streifen entstanden waren, wodurch die

verschiedenen Farben noch augenfälliger gesondert wurden. Brewster sagt nichts darüber, ob er directes Sonnenlicht oder nur reflectirtes Licht des Himmels durch den Spalt im Fensterladen auf das Prisma fallen liess. Wir müssen jedoch annehmen, dass er in den meisten Fällen das erstere anwendete; denn wenn der Spalt hinlänglich eng ist, um die Fraunhofer'schen Linien zu zeigen, werden die durch farbige Mittel veränderten Farbenstrahlen, auf die es bei seinen Versuchen ankommt, meist so lichtschwach, dass sie nur bei Anwendung von directem Sonnenlicht deutlich gesehen werden können.

Die Zweifel, welche sich mir bei Wiederholung dieser Versuche aufdrängten, beziehen sich erstens darauf, ob sich nicht geringe Mengen von weissem zerstreuten Licht in das Spectrum einmischen, und zweitens, ob das Auge unter den obwaltenden Umständen nicht durch physiologisch optische Einflüsse gehindert werde, die Farben richtig zu beurtheilen. Was den ersteren Zweifel betrifft, so kann man allerdings bei Brewster's Methode alles Licht mit Ausnahme dessen, was durch den Spalt einfällt, vollkommen abhalten; man kann durch ein gutes, stark brechendes Prisma, oder eine Verbindung von zwei solchen und Anwendung eines engen Spaltes, das Sonnenlicht, in so weit es regelmässig gebrochen wird, sehr vollständig in seine verschiedenfarbigen Strahlen sondern, sodass diese im Spectrum durchaus nicht in einander greifen, aber man muss in diesem Falle daran denken, dass ein, wenn auch kleiner Theil des Lichtes andere Wege, als die durch die regelmässige Brechung bedingten einschlagen könne. Zunächst verdient hier die Zerstreuung des Lichtes an den Grenzflächen und in der Masse des Glases Beachtung.

Betrachtet man ein Glasstück, sei es ein Prisma oder eine Linse, von noch so klarer und regelmässiger Masse und noch so vollkommener Politur, gegen einen dunkeln Grund
508 und direct von der Sonne beschienen, so sieht man immer eine grosse Zahl glänzender Pünktchen im Innern und kleine Stäubchen und Risse an der Oberfläche, welche eine merkliche Menge Licht unregelmässig zerstreuen und dem Ganzen ein rauchiges Ansehen geben. Um eine solche Prüfung recht genau anzustellen, lasse man Sonnenlicht durch die Oeffnung

eines dunkeln Schirmes auf das zu untersuchende Glasstück fallen, und bringe dann das Auge nahezu in die Richtung der hindurchgegangenen Strahlen, sodass diese nicht hineinfallen, aber doch dicht daran vorübergehen. Es erscheinen dann die kleinen Unregelmässigkeiten der Oberfläche und Masse glänzend erleuchtet auf dem dunkeln Hintergrunde des Schirmes. Die von mir angewendeten Flintglasprismen, von Plössl verfertigt, dem Hrn. Prof. Neumann zugehörig, welche die Fraunhofer'schen Linien mit Hülfe eines Fernrohres in sehr grosser Vollkommenheit und Zahl zeigten[1]), waren nicht frei von solchen kleinen Unregelmässigkeiten. Auch Brewster hat diesen Punkt nicht ganz unberücksichtigt gelassen, denn er führt in seiner Antwort gegen Draper an, dass er ausser den schönsten Glasprismen auch Steinsalzprismen von solcher Homogenität und Reinheit gebraucht habe, dass beim Hindurchsehen die Substanz der Prismen unwahrnehmbar war, aber er giebt leider nicht an, ob er die Prüfung ihrer Reinheit auch gegen die Sonne gewendet, so wie ich es eben beschrieb, angestellt habe; auf diese Weise werden viele Fehler sichtbar, die man im Tageslichte gar nicht entdeckt. Zu bedenken ist, dass bei den Versuchen die Prismen wirklich in eine ähnliche Stellung zwischen Auge und Sonne kommen, wie bei der angegebenen Methode, sie zu prüfen. Mir standen dergleichen Steinsalzprismen nicht zu Gebote, ich kann deshalb auch nicht über den zu erreichenden Grad ihrer Vollkommenheit urtheilen.

Der zweite zu berücksichtigende Umstand ist die mehrfache Reflexion des Lichtes im Prisma. Bei den meisten zu 507
Dispersionsversuchen gebrauchten Prismen sind nur die beiden brechenden Flächen polirt, die anderen drei mattgeschliffen. Legt man ein solches Prisma auf eine dunkle Unterlage so, dass die mattgeschliffene Fläche erleuchtet ist, so sieht man im Innern des Prisma eine Reihe von Spiegelbildern dieser Fläche. Die beiden polirten Flächen wirken nämlich wie ein Winkelspiegel, welcher eine Reihe kreisförmig gestellter Bilder eines zwischen seinen Schenkeln liegenden Gegenstandes, hier der

1) So lösten sie z. B. die Linie *D* in die zwei sehr nahe aneinander stehenden Linien auf, aus denen sie besteht.

dritten Fläche, liefert, und man sieht in unserem Falle durch eine der spiegelnden Flächen selbst hindurch in das Innere hinein. Die Spiegelbilder der dritten Fläche erscheinen ganz in derselben Richtung wie die Spectra, welche man durch das Prisma hindurch sieht, und da ein Theil des einfallenden Lichtes gewöhnlich auch auf die dritte Fläche fällt und sie wie ihre Spiegelbilder erleuchtet, so wird dadurch ein schwacher weisser Schein erzeugt, der sich über das Spectrum ausgiesst. Die Menge des gespiegelten Lichtes ist allerdings sehr gering und wird gewöhnlich neben dem regelmässig gebrochenen gar nicht bemerkt. Um es zu beseitigen, ist es nöthig, alle Flächen des Prisma mit Ausnahme der beiden brechenden gut zu schwärzen.

Wenn man die färbenden Medien zwischen Prisma und Auge einschaltet, ist zu bedenken, dass auch in diesen noch Licht diffus zerstreut wird, falls die Politur ihrer Oberfläche und die Reinheit ihrer Masse nicht ganz vollkommen sind. Brewster hat als gefärbte Mittel meist farbige Glasplatten oder Flüssigkeiten, natürlich zwischen zwei Glasplatten eingeschlossen, gebraucht. Von der Reinheit der Gläser habe ich eben gesprochen; aber auch von den Flüssigkeiten, z. B. dem destillirten Wasser, wissen wir, dass es durch Schichten von einer gewissen Tiefe Licht nur nebelig durchscheinen lässt, d. h. einen Theil davon zerstreut. Ausserdem kommen dann noch die Reflexionen zwischen den beiden Oberflächen der farbigen Mittel, zwischen ihnen und der Hornhaut des beobachtenden Auges in Betracht. Wenn die eingeschaltete farbige
508 Platte parallele Flächen hat, werden durch die in ihrem Innern mehrfach reflectirten Strahlen secundäre Bilder des Spectrum entstehen, welche fast vollständig mit dem ursprünglichen Bilde zusammenfallen und nicht viel schaden können. Sind die Flächen nicht parallel, so wäre es bedenklicher, es könnten dann schon die Farben der secundären Bilder auf andere Farben des primären fallen. Dazu kommt, dass das einfallende Licht theilweise an der Hornhaut reflectirt wird, der Hornhautreflex sich wiederum in der vor das Auge gesetzten Glasplatte spiegelt, und dieses Spiegelbild, weil es dem beobachtenden Auge zu nahe ist, als ein heller Schein im Gesichtsfelde erscheinen muss. Dieser Umstände wegen halte ich es für gerathener,

die gefärbten Media nicht zwischen Prisma und Auge, sondern zwischen Lichtquelle und Spalt zu setzen. Es wird dadurch eine bedeutende Menge zerstreuten Lichtes im Gesichtsfelde beseitigt.

Die Anführung aller dieser Umstände erscheint vielleicht pedantisch, und ich gebe zu, dass die unregelmässig gebrochenen Strahlen allerdings nur einen äusserst winzigen Theil des einfallenden Lichtes bilden, der viel zu unbedeutend ist, um unter gewöhnlichen Verhältnissen das Aussehen des Spectrum merklich zu verändern. Indessen wird sich zeigen, dass er nicht zu winzig ist, um nicht zu solchen Farben des Spectrum, welche durch Absorption ebenfalls in sehr hohem Grade geschwächt sind, hinzugemischt, deren Farbenton merklich zu verändern.

Die bisher besprochenen Umstände sind von der Art, dass sie möglicher Weise bei der Ausführung von Brewster's Methode beseitigt werden können. Vielleicht giebt es Prismen, deren Reinheit jede Prüfung aushält; sie können passend geschwärzt, die farbigen Mittel vor den Spalt gesetzt werden; dann würde wirklich nur regelmässig gebrochenes Licht zum Auge kommen. Nicht zu beseitigen sind aber dabei ganz ähnliche Fehlerquellen, welche im Auge selbst ihren Sitz haben. Ich mache darauf aufmerksam, dass, wenn sehr helles Licht irgend einer Art auf eine Stelle der Netzhaut fällt, Licht glei- 509
cher Art als ein schwächerer Lichtnebel über einen grossen Theil des Gesichtsfeldes verbreitet erscheint. Die Erscheinung ist leicht zu beobachten. Man stelle des Abends ein Licht in der Nähe irgend eines grösseren schwarzen Feldes auf, z. B. neben einer Thür, die in ein dunkles Nebenzimmer geöffnet ist, und beobachte aufmerksam den Grad der Dunkelheit dieses Feldes, während man sich das Licht mit dem Finger abwechselnd verdeckt und freilässt. Man wird leicht bemerken, dass, so oft die Lichtstrahlen frei in das Auge fallen, ein weisslicher Schein auf dem schwarzen Felde erscheint, welcher in der Nähe des Lichtes heller ist, sich aber schwächer auch über ziemlich entfernte Theile des Gesichtsfeldes erstreckt. Dasselbe beobachtet man auch, wenn Tageslicht, und in der auffallendsten Weise, wenn directes Sonnenlicht durch eine Oeffnung eines schwarzen Schirmes in das Auge gelangt. Bedeckt man die

Oeffnung mit einem farbigen Glase, so hat der Lichtschein ebenfalls die Farbe des Glases. Ich habe diese Erscheinung sowohl mit meinen eigenen, in gutem Zustande befindlichen Augen gesehen, als auch vielen anderen Personen gezeigt. Dass die Brechung und Beugung des Lichtes an den Wimperhärchen nicht daran Schuld ist, lässt sich durch das Fortbestehen der Erscheinung bei weit auseinander gezogenen Lidern beweisen.

Was die Ursache dieses Phänomens betrifft, so ist es von früheren Beobachtern, welche Aehnliches bemerkten, meist für rein subjectiv gehalten worden; man glaubte es aus einer Uebertragung der Reizung auf die benachbarten Fasern der Netzhaut erklären zu müssen. Es lassen sich aber auch Ursachen nachweisen, welche bewirken müssen, dass ein kleiner Theil objectiven Lichtes sich im Auge zerstreut, und solche Stellen der Retina trifft, welche von dem regelmässig gebrochenen Lichte nicht getroffen werden. Dazu gehört erstens unzweifelhaft die Diffraction des Lichtes in der Pupille. Wenn Licht durch eine enge Oeffnung, oder auch nur am Rande eines
510 dunkeln Körpers vorbeigeht, wird immer ein kleiner Theil desselben abgelenkt. Nun ist die Pupille im Verhältniss zur Brennweite des Auges allerdings zu gross, als dass Diffractionsringe gebildet und ein verhältnissmässig beträchtlicher Theil des Lichtes zerstreut werden sollte, wie es durch sehr kleine runde Oeffnungen geschieht, die man dicht vor das Auge hält, aber es kann die Diffraction dadurch doch nicht ganz aufgehoben sein. Zweitens kann es fraglich erscheinen, ob die Augenmedien für absolut klar gehalten werden dürfen, da sie theils aus mikroskopischen Zellen und Fasern zusammengesetzt sind, wie die Hornhaut und Linse, theils von einer grossen Zahl feiner Häutchen durchzogen zu sein scheinen, wie der Glaskörper. Ausserdem verräth sich die Anwesenheit kleiner Unregelmässigkeiten der Structur in den hinteren Theilen des Glaskörpers bekanntlich durch die sogenannten Mücken des Gesichtsfeldes, und es möchten ähnliche in den übrigen Theilen des Auges nicht fehlen. Auch dadurch muss Licht zerstreut werden. Endlich kommt noch in Betracht, dass, wie der von mir construirte Augenspiegel [1]) lehrt,

1) S. meine „Beschreibung eines Augenspiegels zur Untersuchung der Netzhaut im lebenden Auge". Berlin 1851.

ziemlich viel Licht von den erleuchteten Stellen der Retina nach der Pupille zurückkehrt und an der Vorderfläche der Hornhaut zum Theil ebenso und zwar nach hinten zurückgespiegelt werden muss, wie es mit dem in das Auge einfallenden Lichte der Fall ist. Dass also von dem in das Auge einfallenden Lichte ein Theil noch auf andere Theile der Netzhaut abgelenkt werden muss, scheint mir nicht zweifelhaft zu sein; ob daneben auch noch eine Ausbreitung der Nervenreizung in der Netzhaut stattfindet, lässt sich ohne weitere Untersuchungen nicht entscheiden; für unseren Zweck ist es indessen gleichgültig, ob sich objectives Licht oder nur die subjective Empfindung davon über die Netzhaut ausbreite.

Ich werde jetzt nachzuweisen suchen, dass eines der auffallendsten von Brewster's Resultaten in der That von einer Vermischung des regelmässig gebrochenen Lichtes mit solchem 511
herrührt, welches theils ausserhalb, theils innerhalb des Auges unregelmässig zerstreut ist. Ich meine die angebliche Isolation weissen Lichtes im Gelb des Spectrum durch Glas, welches mit Smalte blau gefärbt ist. Es ist bekannt, dass durch solches Glas einige dunkele Streifen in der weniger brechbaren Hälfte des Spectrum erzeugt werden. Es bleiben zwischen ihnen mehrere farbige Bänder stehen, nämlich 1) das äusserste Roth, die Linien *A* und *B* umfassend, ganz ungeschwächt; 2) ein Band von röthlichem Orange zwischen den Linien *c* und *D*, äussserst schwach; 3) ein gelbes Band, an dem einen Rande in das Orange, am andern in Grün ziehend, weniger geschwächt als das vorige. Zwischen diesem Gelb und dem Grün befindet sich ein nicht ganz dunkeler Zwischenraum, während Blau und Violett wieder fast ungeschwächt erscheinen. Brewster macht nun darauf aufmerksam, dass, während die ursprüngliche Farbe des gelben Bandes ein reiches Gummigutt-gelb sei, dasselbe durch eine gewisse Dicke des blauen Glases mattgelb, durch eine noch grössere Dicke weissgrünlich aussehe, und dass die letztere Farbe sich durch fernere Einschaltung von anderen Farbestoffen, namentlich Kupferlösungen und rother Tinte, endlich in Weiss verwandeln lasse. Dieses Weiss, behauptet er ferner, sei durch das Prisma nicht zu zerlegen, aber wenn ich den Sinn seiner Ausdrücke richtig begriffen

habe, hat er das niemals durch ein zweites Prisma erprobt, was überdies ohne erhebliche Abänderungen der Methode gar nicht auszuführen war, sondern schliesst es nur daraus, dass dieses weisse Licht unzerlegt durch das erste Prisma gegangen sei.

Das blaue Glas, welches mir zu Gebote stand, zeigte die von Brewster angegebenen Erscheinungen in folgender Weise. Durch eine Platte gesehen, war der gelbe Streifen im Spectrum des Tageslichtes sehr lichtschwach weisslich und etwas grünlich gelb, im Spectrum der der Sonne zunächst liegenden Stellen des Himmels dagegen von sehr reinem glänzenden Gelb. Durch zwei Platten gesehen, verschwand er im Tageslicht gänzlich,
512 im directen Sonnenlicht sah er fast weiss aus, und zog sich bei grösserer Lichtstärke in das Grüngelbe, bei schwächerer in das Blaue. Neben diesem mässig hellen Streifen hat natürlich das Blau und Violett des Spectrum eine blendende Helligkeit, und auch der Streifen des äussersten Roth ist sehr lichtstark. Durch drei Platten im directen Sonnenlicht wurde das gelbe Band blauweiss. Die Aenderung der Farbe war etwas geringer, wenn die Platten nicht zwischen Prisma und Auge, sondern vor den Spalt, d. h. zwischen Lichtquelle und Spalt gesetzt wurden. Bedenken wir nun, dass die Sonne über 50000 mal heller ist als die hellste von ihr erleuchtete weisse Fläche, und dass das Gelb im ursprünglichen Spectrum für das Auge die ganz unerträgliche Helligkeit der Sonne hat, durch zwei blaue Glasplatten aber wie eine mässig stark beleuchtete Papierfläche erscheint, so wird es in Ermangelung genauerer Messungen nicht sehr entfernt von der Wahrheit sein, wenn wir annehmen, dass der hundertste Theil des Gelb durch eine, der zehntausendste durch zwei Glasplatten gehe. Wenn auch nur der zehntausendste Theil des ungeschwächt durch die Glasplatten gehenden farbigen Lichtes wegen der besprochenen Unregelmässigkeiten der Brechung auf die Stelle der Netzhaut fällt, welche gleichzeitig das Gelb aufnimmt, so müssen wir Mischungen bekommen, deren Farbe sich bedeutend vom reinen Gelb entfernt. Durch Zumischung von indigoblauem Lichte zum Gelben geht letzteres aber wirklich, wie ich in meiner Untersuchung über die zusammengesetzten Farben gezeigt habe, erst

in weissliches Gelb, dann in Weiss, endlich in bläuliches Weiss über. Die dem Gelb im Spectrum des Smalteglases zunächst stehenden Farben, Roth und Grün, können durch verschieden starke Einmischung das Weiss noch etwas in Roth oder Grün verändern, und so alle die Farbenstufen erzeugen, welche man durch verschiedene Dicken des blauen Glases sieht.

Da man nun bei Brewster's Methode stets alle Theile des Spectrum, geschwächte und ungeschwächte, vor sich hat und deshalb die unregelmässige Zerstreuung der helleren Farben 513
im Auge nicht verhindern kann, so kommt es darauf an, seine Versuche nach einer anderen Methode zu wiederholen, wobei man die störenden Farben aus dem Gesichtsfelde ganz oder fast ganz entfernen kann. Betrachtet man das Spectrum durch ein Fernrohr, so kann man zwar leicht jede gewünschte Farbe isolirt erscheinen lassen, aber die unregelmässigen Brechungen und Reflexionen des Lichtes ausserhalb des Auges werden durch die Gläser des Fernrohres vermehrt. Die Farbenveränderungen des gelben Streifens fand ich bei isolirter Betrachtung desselben im Fernrohre zwar schwächer, aber sie waren doch noch vorhanden. Eine andere Methode gab mir aber vollkommen gute Resultate. Sie ergiebt sich unmittelbar aus der von Brewster, wenn man durch den Spalt nicht unverändertes Sonnenlicht, sondern schon durch ein anderes Prisma gebrochenes, und zwar davon allein diejenigen Strahlen einfallen lässt, deren Farbenveränderung untersucht werden soll. Mein Verfahren ist folgendes: Von einem Spiegel reflectirte Sonnenstrahlen fallen durch einen ersten verticalen Spalt in ein dunkles Zimmer und auf ein verticales Prisma. Unmittelbar hinter diesem steht eine Linse, welche das zu einem Spectrum ausgebreitete Bild des ersten Spaltes auf einem Schirme entwirft. In diesem befindet sich ein sehr feiner verticaler zweiter Spalt. Das Licht von demjenigen Farbenstreifen des Spectrum, welcher gerade auf diesen Spalt fällt, geht durch den Schirm hindurch, das übrige wird abgeschnitten. Der Beobachter steht hinter diesem zweiten Schirme, dessen Rückseite gut geschwärzt, am besten mit schwarzem Sammet überzogen ist, und betrachtet den Spalt durch ein zweites, möglichst vollkommenes Prisma. Wenn im ersten Prisma und der Linse gar kein Licht zerstreut

würde, so würde nur homogenes Licht einer bestimmten Farbe auf und durch den zweiten Spalt fallen, und dies eben wegen seiner Homogeneität durch das zweite Prisma angesehen kein Spectrum bilden, sondern als ein ebenso schmaler Streifen wie mit blossem
514 Auge erscheinen. Da aber gleichzeitig ein wenig weisses unregelmässig gebrochenes Licht einfällt, so bildet dieses ein sehr lichtschwaches Spectrum, in welchen sich nur ein einzelner Farbenstreifen, der des regelmässig gebrochenen Lichtes, sehr glänzend darstellt. Wenn nun auch im zweiten Prisma und im Auge wiederum etwas Licht zerstreut wird, so besteht dies hauptsächlich aus dem des hellen Streifens, und kann diesem zugemischt seine Farbe nicht verändern, weil es ihm homogen ist. Von den übrigen Farben kommen nur die im ersten Prisma unregelmässig gebrochenen Theile durch den Spalt, und deren Lichtmenge ist so gering, dass, was davon im zweiten Prisma und im Auge des Beobachters noch zerstreut wird, nicht mehr wahrgenommen werden kann.

Man kann bei dieser Methode auch einen beliebig breiten Streifen des Spectrum hell machen, wenn man statt des ersten Spaltes einen mehr oder minder breiten rechteckigen Ausschnitt anbringt. Dann wird das Spectrum des ersten Prisma ein unreines, d. h. an jeder Stelle desselben decken sich verschiedenartige benachbarte Farbenstreifen in einer gewissen Breite, es fällt also auch verschiedenartiges regelmässig gebrochenes Licht durch den Spalt, und wird durch das zweite Prisma in die einzelnen Farbentöne zerlegt, die es enthält. Man erhält dadurch ein mehr oder minder breites, scharf begrenztes, mit den entsprechenden Fraunhofer'schen Linien versehenes, helles Band, aus denjenigen Farben bestehend, welche im Spectrum des ersten Prisma sich über dem Spalt deckten, während die übrigen Theile des zweiten Spectrum nur von zerstreutem Lichte erleuchtet sehr lichtschwach bleiben. Auf diese Weise gelingt es zum Beispiel ausserordentlich gut, das jenseit der Linie *H* liegende, wegen seiner Schwäche neben den übrigen Farben für gewöhnlich unsichtbare Violett frei von allem weissen Lichte in einer mindestens ebenso grossen Breite sichtbar zu machen, als das gewöhnlich sichtbare Violett zwischen den Linien *G* und *H* einnimmt. Nach der gewöhnlichen Methode es in Fernröhren zu zeigen, in denen das übrige Spectrum abgeblendet ist, pflegt es mit einer fast über- 515
wiegenden Menge weissen Lichtes gemischt zu sein.

Isoliren wir uns nun nach dieser Methode das Licht des gelben Bandes im Spectrum des Smalteglases, und unterwerfen es der Absorption von einer gewissen Anzahl von Platten dieses Glases, die wir vor dem ersten oder zweiten Spalt, oder vor dem Auge einschieben, so erhalten wir ganz andere Resultate als nach Brewster's Methode. Das Gelb bewahrt nämlich nun, auch nachdem es durch zwei, drei, ja selbst vier blaue Platten gedrungen ist, seine ursprüngliche reine und gesättigte Farbe. Ich bemerke übrigens, dass zu dem Gelingen dieses Versuches nicht einmal ein absolut dunkles Zimmer gehört, wenn nur der zweite Schirm hinreichend dunkel schwarz ist und die Glasplatten vor dem ersten Spalt eingeschaltet werden.

Brewster's Erklärung kann neben dieser Beobachtung nicht bestehen. Seiner Ansicht nach soll das Licht des gelben Bandes, wenn es durch Kobaltglas weisslich geworden ist, aus Licht gleicher Brechbarkeit bestehen, also durch Brechung in Prismen nicht weiter in verschiedenes Licht zerlegt werden können. Bei dem beschriebenen Versuche erscheint das Licht des gelben Bandes, sowie es in der ersten Spalte ankommt, in der That weisslich, wenn wir es aber durch ein zweites Prisma betrachten, so wird es in reines gelbes und anderfarbiges Licht zerlegt, ist also nicht von gleicher Brechbarkeit, sondern in der That, wie es die von mir gegebene Erklärung fordert, gemischt aus Strahlen verschiedener Brechbarkeit. Bei Brewster's Verfahren konnte eine Zumischung fremdartigen Lichtes, sei es nun in den Prismen und Glasplatten oder erst im Auge, nicht vermieden werden. Eben deshalb ist auch erklärlich, dass er durch Einschaltung noch anderer färbender Medien die weisse Farbe des besprochenen Bandes reiner machen oder in das Rothe und Grüne ziehen konnte.

Eine zweite Möglichkeit der Täuschung liegt in den physiologischen Erscheinungen des Contrastes, welche sehr leicht die Beurtheilung der Farben beeinträchtigen, besonders 516
wenn wir ein schwach erleuchtetes farbiges Feld neben einem

sehr viel helleren betrachten. Brücke[1]) hat neuerdings darauf aufmerksam gemacht, dass selbst ganz dunkle Stellen des Gesichtsfeldes neben helleren farbigen von einem farbigen Scheine übergossen erscheinen, welcher bald der erregenden Farbe gleich, bald complementär, bald noch anders gefärbt ist. Er nennt die Farbe dieses Scheines die inducirte Farbe. Er fand, dass bei dem von ihm angewendeten Grade von Helligkeit Roth das complementäre Grün, Grün aber auch Grün, Violett Blau, Blau und Gelb dagegen keine recht entschiedenen Farben induciren. Nachdem ich diese Versuche bei verschiedenen Graden von Helligkeit wiederholt habe, glaube ich Brücke's Ausspruch dahin modificiren zu können, dass bei sehr starkem Lichte sich immer dieselbe Farbe über das dunkle Feld ausgiesst, welche das erleuchtete hat, ein Phänomen, dessen muthmaassliche Gründe wir oben besprochen haben. Bei schwachem Lichte dagegen inducirt sich wohl immer die Complementärfarbe, und zwar, wie auch Brücke fand, viel lebhafter, wenn das Auge bewegt wird, als wenn es einen Punkt fixirt, bei mittlerem Lichte dagegen verhalten sich verschiedene Farben verschieden; sie geben bald dieselbe, bald die entgegengesetzte, bald unbestimmte Färbungen, es scheinen sich hier die beiden entgegengesetzten Erscheinungen zu bekämpfen. Aber auch mir scheint, mit Brücke übereinstimmend, dass Roth leichter die Complementärfarbe giebt als Grün und Violett.

Hierauf scheint mir namentlich ein überraschender Versuch von Brewster zurückzuführen zu sein, wodurch er die Anwesenheit von grünem Licht im Gelb, Orange und selbst im Roth in der Nähe der Linie *C* nachzuweisen sucht. Als absorbirende Mittel gebraucht er dazu Portwein, Perubalsam, Pech,
517 Schwefelbalsam oder rothen Glimmer. Ich habe die Versuche mit Perubalsam, Schwefelbalsam und Pech wiederholt. Dünnere Lagen davon lassen Roth, Gelb und Grün des Spectrum stehen, während sie Blau und Violett auslöschen. Dabei scheint aber das Grün mindestens bis zur Linie *D*, welche eigentlich im Goldgelb steht, und häufig auch noch darüber hinaus in die

1) Untersuchungen über subjective Farben. Denkschr. d. Akad. d. Wissenschaft zu Wien Bd. III.

Gegend des röthlichen Orange zu reichen. Unmittelbar an das Grün scheint das Roth zu stossen. Also die gelbgrünen, gelben, goldgelben und selbst wohl die orangenen Farbentöne scheinen grün geworden zu sein, und das Grün ist so entschieden und lebhaft, dass man sich in der That schwer entschliesst, an eine subjective Farbentäuschung zu glauben. Das Vorhandensein einer solchen wird aber schon durch den Umstand angedeutet, dass die Grenze des Grün viel mehr in das Roth hineinrückt, wenn man das Auge auf den verschiedenen Farbenstreifen wandern lässt, als wenn es anhaltend auf dem grünen Theile des Spectrum verweilt. Im ersteren Falle treffen die gelblichen Farben auf Netzhauttheile, welche kurz vorher glänzendes Roth gesehen haben und deshalb zur Erzeugung des complementären Blaugrün neigen. Im zweiten Falle ist die Erregung der inducirten Farbe auf den nebenliegenden Theilen der Netzhaut viel schwächer. Dass aber die Erscheinung auf einer subjectiven Täuschung beruhe, zeigt sich sogleich, wenn man nach der von mir oben beschriebenen Methode die gelbgrünen, gelben oder goldgelben Farbenstreifen isolirt, und so isolirt durch verschieden dicke Schichten der genannten braunen Körper betrachtet. Sie erscheinen dann ganz unverändert, ohne die geringste Hinneigung zum Grün.

Durch dickere Schichten der braunen Flüssigkeiten gesehen verschwinden im Spectrum auch das Grün, Gelb und ein Theil des Orange. Man sieht dann an dem Saume des stehen gebliebenen Roth nach der Seite des Orange zu noch ein ganz schwaches grünes Rändchen, selbst bis ganz nahe an die Linie *C*, wo das Roth kaum noch einen orangenen Schein hat. Der grüne Saum ist zu lichtschwach und schmal, als 518
dass es möglich wäre sein Licht zu isoliren und einzeln zu untersuchen. Davon aber, dass schwaches roth orangenes Licht neben starkem rothen grün erscheinen kann, überzeugt man sich leicht, wenn man auf eine rothe Glastafel eine kleine mennigrothe Papierscheibe klebt und sie gegen einen sehr hellen Grund, z. B. den hellen Himmel, hält, während das Papier ganz schwach beleuchtet ist. Bei passender Stärke der Beleuchtung erscheint es grün.

Ferner scheint mir die violette Färbung des Blau bis in

die Nähe der Linie *F* bei der Absorption durch gelbe Flüssigkeiten, Olivenöl, Saft der Coreopsis tinctoria u. s. w., zu den subjectiven Complementärfarben zu gehören. Ich habe die Versuche mit Olivenöl wiederholt und das Violett deutlich zwischen den Linien *F* und *G* gesehen, wo es sonst nicht vorkommt, bis nahe an *F* heran, aber nur dann, wenn diese Gegend des Spectrum sehr lichtschwach war.

Das Oel verändert die Helligkeit des Roth, Gelb und Grün nicht merklich, schwächt aber das Blaue sehr und löscht das Violett fast ganz aus. Liess ich durch den Spalt das Licht hell erleuchteter Wolken einfallen, so sah ich die ersteren Farben hell, das Blau lichtschwach und violett, das Violett gar nicht. Liess ich aber Sonnenlicht einfallen, so wurde die Gegend zwischen den Linien *F* und *G* heller und verlor ihren violetten Schein. Isolirt man sie von den anderen Farben des Spectrum in der oben beschriebenen Weise, so sieht man das Blaue ebenfalls ganz in seiner ursprünglichen Farbe. Ich glaube daher, dass es in dem durch Olivenöl gesehenen Spectrum durch das dem benachbarten hellen Grün complementäre Carminroth überdeckt und violett geworden war.

Auch noch eine andere Methode kann ich in diesen und ähnlichen Fällen zur Prüfung empfehlen. Man setze vor den grössten Theil des Spaltes die absorbirende Substanz, vor dem übrig bleibenden Rest desselben weisses, dickeres oder dünneres, geöltes oder nicht geöltes Papier, welches man so auswählt,
519 dass die zu untersuchende Stelle in dem Absorptionsspectrum ebenso hell wird, wie die entsprechende des durch das Papier gegangenen Lichtes. So wird man bei der Absorption durch Oel sehen, dass auch in dem Papierspectrum das Blau zwischen den Linien *F* und *G* violett erscheint. Zum Gelingen des Versuches muss die Breite des Absorptionsspectrum die des Papierspectrum bei weitem überwiegen.

Aus den angeführten Thatsachen geht genugsam hervor, dass auch im Spectrum subjective Farbenveränderungen durch Contrast nicht nur ebenso gut wie in Zusammenstellungen anderer Farben, sondern vielleicht noch lebhafter und täuschender wegen der grösseren Lebhaftigkeit der einfachen Farben eintreten können. In anderen Fällen lassen sich diese

Veränderungen nicht gerade auf Induction von Complementärfarben zurückführen. Ein solches Beispiel, auf welches sich Brewster beruft, ist in dem Spectrum des Smalteglases der Streifen im röthlichen Orange, der etwa von der Linie *C* bis *D* reicht. Er ist viel dunkler als der danebenliegende rothe und gelbe Streifen, und scheint zwischen diesen beiden, bei gewöhnlicher Helligkeit des Spectrum gesehen, ganz dieselbe rothe Färbung darzubieten wie der Streifen des äussersten Roth. In einem stärker beleuchteten Spectrum erkennt man aber deutlich, dass er in das Orange zieht. Brewster hatte den Streifen zuerst[1]) orange-roth (orange-red) genannt, später[2]) beruft er sich darauf, dass J. Herschel[3]) ihn rein roth gefunden habe, und glaubt darin eine Veränderung der Farbe durch Absorption zu sehen. Auch hier genügt es den betreffenden Streifen sich abgesondert darzustellen, um sich zu überzeugen, dass seine Farbe durchaus nicht verändert sei. Ebenso verhält es sich mit den grünlichblauen Farbentönen auf der grünen Seite der Linie *F*, welche, wie Brewster bemerkt, durch ein tiefblaues Glas (wahrscheinlich Smalteglas) gesehen, grün werden. Sobald man sie isolirt untersucht, findet man keine Farben- 520
änderung an ihnen.

Endlich kommt bei einigen Versuchen von Brewster noch eine andere physiologische Thatsache in Betracht, dass nämlich dasselbe homogene Licht bei verschiedener Lichtstärke nicht ganz gleiche Farbeneindrücke hervorruft. Bei blendender Helligkeit scheinen vielmehr alle Farben weiss zu werden. Am leichtesten geschieht dies mit dem Violett, welches im Spectrum des directen Sonnenlichtes schon bei einem sehr mässigen Grade von Helligkeit weissgrau erscheint und nur einen schwachen violetten Schein behält. Auch zeigte mir Hr. Prof. Moser, dass durch ein sehr dunkles violettes Glas die Sonne vollständig ebenso weiss erschien, wie die stark beleuchteten Wolken, welche man neben dem Glase vorbei erblickte. Ebenso wird das Blau bei einer Helligkeit, welche ohne Belästigung

1) *Edinburgh Transactions. Vol. IX. P. II. p.* 439.
2) In der Antwort gegen Airy.
3) *Treatise on Light. Art.* 496 u. 506.

des Auges zu ertragen ist, weissblau, bei stärkerer weiss. Das Grün wird erst gelbgrün, ehe es wie das Gelb bei gesteigerter Helligkeit die Farbe ganz verliert. Roth zeigt die Erscheinung am schwersten und nur bei den höchsten Graden der Helligkeit habe ich es sowohl im Spectrum, als durch ein rothes Glas nach der Sonne blickend hellgelb werden sehen. Um bei den Versuchen darüber die Einmischung jedes andersfarbigen Lichtes zu vermeiden, habe ich sie mit Farbenstreifen des Sonnenspectrum angestellt, welche nach der vorher beschriebenen Methode durch zwei Prismen isolirt und gereinigt waren. Die verschiedenen Abstufungen der Helligkeit habe ich theils dadurch hervorgebracht, dass ich das direct von der Sonne kommende Licht mit solchem vertauschte, welches von verschieden stark beleuchteten Theilen des Himmels ausgegangen war, theils aber auch, weil nach Brewster's Theorie die Farben im Spectrum des Sonnenlichtes denen im Himmelslichte nicht gleich sein sollen, dadurch, dass ich die Farben des Sonnenspectrum bald direct, bald durch zwei, nahe rechtwinkelig gekreuzte Nicol'sche Prismen betrachtete. Auch durch Reflexion
521 von unbelegten Glasplatten, oder indem man sie auf einem weissen Schirm auffängt, kann man ihre Helligkeit ohne Verdacht einer Farbenänderung schwächen.

Wenn also eine gewisse Dicke der Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd-Ammoniak das Blau des Spectrum hell und weisslich, eine stärkere Dicke es tief dunkelblau erscheinen lässt, so ist daraus nur zu schliessen, dass diese Flüssigkeit auch blaue Strahlen absorbirt, aber keineswegs, dass sie weisses Licht aus dem homogenen blauen fortgenommen habe. Ferner erklärt sich daraus, dass das Gelb im Spectrum des Tageslichtes oder des blauen Himmels kaum zu bemerken ist, während es in dem viel helleren Spectrum des directen Sonnenlichtes einen breiten Raum einnimmt. Das reine Gelb bildet nämlich im Spectrum des Flintglases einen äusserst schmalen Streifen, und ist im blauen Lichte des Himmels schwächer als seine Nebenfarben, sodass man es bei schwacher Vergrösserung des Spectrum zwischen dem breiten und glänzenden Roth und Grün schwer bemerkt. Dagegen sieht man es bei starker Vergrösserung oder isolirter Betrachtung der

einzelnen Farben sehr deutlich auch im Himmelslichte. Im Spectrum des directen Sonnenlichtes ist dagegen Gelb die hellste Farbe und von blendendem Glanze. Grün und Roth sind durch gesteigerte Intensität auch gelblich geworden, und deshalb tritt das Gelb so deutlich hervor. Schwächt man aber die Helligkeit des Sonnenspectrum durch Reflexion von unbelegten Glasplatten, oder durch fast rechtwinkelig gekreuzte Nicol'sche Prismen, so tritt das Gelb ebenso zurück wie im Spectrum des Tageslichtes. Bestimmt man ausserdem in einem Spectrum von mässig starkem Sonnenlicht, andererseits in dem des Tageslichtes die Farbenstufen der einzelnen Fraunhofer'schen Liniengruppen in der Nähe des Gelb, isolirt von den Nebenfarben, so findet man sie ganz gleich.

Es bleibt nun von den Thatsachen, welche Brewster zur Stütze seiner Theorie angeführt hat, ein Versuch übrig, von dem ich nicht weiss, ob ich seine Wiederholung als gelungen 522
betrachten darf, und einige, welche ich nicht anstellen konnte, weil ich die dazu gehörigen absorbirenden Mittel nicht hatte. Der erstere ist angestellt mit Perubalsam, Schwefelbalsam, Pech und rothem Glimmer. Das Roth des Spectrum soll, durch diese Mittel angesehen, orange erscheinen. Bei mässiger Lichtstärke konnte ich durch die Balsame und Pech, in welchen Abstufungen der Dicke ich sie auch anwandte, nichts davon erkennen; das Roth behielt seine Farbe ganz unverändert. Nur bei grosser Lichtstärke, wo ein das Spectrum umgebender brauner Lichtschein ankündigte, dass viel Licht zerstreut wurde, sah ich das Roth etwas orange. Das erklärte sich aber in diesem Falle aus der Zumischung des zerstreuten braunen, aus Roth, Gelb und etwas Grün zusammengesetzten Lichtes, und aus der Neigung des Roth bei grösserer Helligkeit gelblich zu werden. Vielleicht hat auch Brewster ein so helles Spectrum angewendet. Isolirt man übrigens das Roth nach meiner obigen Methode, so bleibt es stets ganz unverändert.

Verschiedene Versuche sind von Hrn. Brewster mit gefärbten durchsichtigen Oblaten (wafers) aus Gelatine angestellt worden. Ich fand dergleichen hier nicht im Handel, und da nur die Farben, nicht die Farbstoffe angegeben waren, konnte ich sie mir nicht darstellen. Uebrigens scheint mir der Gebrauch solcher Oblaten

deshalb bedenklich, wenigstens wenn sie zwischen Auge und Prisma eingeschaltet werden, weil auch die besten Leimplatten, wie man sie zwischen Glasplatten aus dem reinsten Hausenblasenleim bildet, nicht zu den klar durchsichtigen Körpern gehören. Wenn man auch durch ein solches Blatt ziemlich gut hindurchsehen kann, so machen mehrere übereinander das Bild nebelhaft, zum Beweise, dass sie viel Licht zerstreuen. Dies würde in der That auch die Wirkung erklären, welche orangene, gelbe und grüne solche Oblaten haben sollen, das Roth des Spectrum orange zu färben. Es genügt dazu die Zerstreuung des vorwaltenden farbigen Lichtes über das Roth. Wodurch
523 eine grüne solche Oblate ein weissliches Band im Blau hervorbringt, weiss ich nicht zu ermitteln, da ich den Versuch nicht wiederholen kann.

Ein blassrothes Glas, welches das Grün zwischen *b* und *F* absorbirt (wahrscheinlich mit Goldpurpur gefärbt), und ein blassgelbes, welches das Blau schwächt, sollen combinirt das Blau violett machen. Die Erklärung wird dieselbe sein wie beim Olivenöl.

Roth von einer Messingplatte reflectirt, soll nach J. Herschel orange werden. Die Mittel zur Erklärung davon hat Airy in seiner Abhandlung gegen Brewster gegeben.

Ich habe jetzt die von Brewster vorgebrachten Thatsachen alle erwähnt. Wenn ich auch nicht alle Versuche nachahmen und widerlegen konnte, so glaube ich, geht aus den Erörterungen über die, deren Wiederholung mir gelungen ist, zur Genüge hervor, dass bei seiner Methode mehrere bisher unbeachtete Umstände von Einfluss sind, welche eine sichere Beurtheilung der Farben unmöglich machen und den bis jetzt von ihm hingestellten Thatsachen alle Beweiskraft für seinen Zweck nehmen. Um gültige Gründe zur Widerlegung der bisher angenommenen Verbindung der Brechbarkeit oder Wellenlänge mit der Farbe zu gewinnen, muss man jedenfalls eine andere gesichertere Beobachtungsmethode anwenden, ähnlich derjenigen, welche ich in dieser Abhandlung beschrieben habe, wobei eine Hauptbedingung ist, dass die zu untersuchenden Farben von den übrigen abgesondert und von den letzten Spuren unregelmässig gebrochenen Lichtes frei sind.

LI.

Ueber die Zusammensetzung von Spectralfarben.

Aus Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 94. S. 1 bis 28. — 1855 (Theilweis vorgetragen vor der *British Association* zu Hull im September 1854.)

In meiner Abhandlung „Ueber die Theorie der zu- 1
sammengesetzten Farben“[1]) habe ich den Beweis geführt, dass Mischung farbiger Pigmente nicht nothwendig dieselbe Mischfarbe giebt, welche durch Zusammensetzung des entsprechenden farbigen Lichtes gewonnen wird. Bei dieser Gelegenheit hatte ich vermittelst einer eigenthümlichen Methode Untersuchungen über die Resultate der Zusammensetzung einfacher prismatischer Farben angestellt und dabei unter anderen, den früheren Annahmen widersprechenden Resultaten auch gefunden, dass nur ein einziges Paar einfacher Complementärfarben, Indigblau und Gelb, im Spectrum vorhanden sei. Dies war, wie auch später Hr. Grassmann[2]) streng und ausführlich nachgewiesen hat, mit der von Newton aufgestellten Form, in der man das Gesetz der Farbenmischungen auszudrücken pflegte in geradem Widerspruche, auch wenn man die Vertheilung der Farben in Newton's Farbenkreise nach Belieben geändert hätte. Ich selbst habe das genannte Ergebniss meiner damaligen Untersuchungen als höchst auffallend bezeichnet, vermied es aber die Schlüsse, welche sich daran zu knüpfen

1) Pogg. Ann. Bd. 87, S. 45. — J. Müller's Archiv für Anat. und Physiol. 1852, S. 461.
2) Pogg. Ann. Bd. 89, S. 69.

schienen, weiter auszuführen, weil die sichere Bestimmung gerade der weissen oder weisslichen Farbentöne bei der Me-
2 thode, welche ich gebraucht hatte, grosse Schwierigkeiten darbot. Ich hob im Gegentheil hervor, dass zu einer sichereren Bestimmung der weissgebenden Strahlen namentlich dem Felde der zusammengesetzten Farben eine grössere Flächenausdehnung gegeben werden müsse. Uebrigens hielt ich es nach meinen damaligen Versuchen für wahrscheinlich, dass eine bessere Methode die Breite der weissgebenden Strahlen noch mehr beschränken würde, weil ich desto engere Grenzen für sie zu finden glaubte, je strenger ich in meinen Anforderungen an die Reinheit des Weiss war, und je mehr Uebung ich bekam schwach gefärbte weissliche Töne, als solche, zu erkennen.

Eine weitere Untersuchung über diesen Punkt, die ich nach einer anderen Methode angestellt habe, hat mich nun gelehrt, dass jene letzte Voraussetzung falsch war, und dass ich hauptsächlich durch eigenthümliche physiologische Verhältnisse des menschlichen Auges bei jener früheren Methode verhindert worden bin, die ausser Indigo und Gelb im Spectrum vorkommenden Complementärfarben als solche zu erkennen.

Die Methode, welche ich zu diesen neueren Untersuchungen in Anwendung gezogen habe, ist derjenigen ähnlich, welche Foucault[1]) beschrieben hat. Sonnenlicht horizontal von dem Spiegel eines Heliostaten M Fig. 2, in ein verdunkeltes Zimmer reflectirt, fällt zunächst auf einen schwarzen Schirm S_1 mit einem Spalte, welchen ich im Folgenden den ersten Schirm und den ersten Spalt nennen werde. Die durch den Spalt gegangenen Strahlen fallen in der Entfernung von etwa 10 Fuss auf ein Prisma P, welches am vorderen Ende eines Fernrohres angebracht ist. Zwischen Prisma und Objectivglas befindet sich ein rechteckig ausgeschnittenes Diaphragama D, um die neben dem Prisma vorbeigehenden Strahlen zurückzuhalten. Die Oculargläser des Fernrohres sind entfernt, und das von der Objectivlinse L_1 nahe ihrem Brennpunkte entworfene und durch das Prisma in ein Spectrum verwandelte

1) Pogg. Annal. Bd. 88, S. 385. — *Moigno, Cosmos* 1853, *T. II, p.* 232.

Bild des ersten Spaltes wird hier auf einem zweiten Schirm S_2 3
aufgefangen, der selbst wieder zwei Spalten hat. Die stärkeren Fraunhofer'schen Linien waren in diesem Spectrum sichtbar.

Die Construction des zweiten Schirmes muss ich genauer beschreiben. Er ist in Fig. 1 abgebildet. Seine zwei Spalten sollten dazu dienen, dem Lichte von zwei beliebig gewählten Farbenstreifen des Spectrum den Durchgang zu gestatten. Sie mussten zu dem Zwecke in jede beliebige Entfernung von einander gebracht und jeder für sich beliebig erweitert und verengert werden können, um die Menge des durchgehenden Lichtes zu reguliren. Der Schirm besteht in einer viereckigen Messingplatte $AABB$, die bei C durch einen cylindrischen Stab getragen wird. Dieser Stab verschiebt sich in einer gespaltenen cylindrischen Hülse D, die in der Mitte eines mit drei Stellschrauben versehenen Brettes befestigt ist. Der Schirm kann also mit seinem Träger C auf und nieder geschoben, und in jeder Höhe mittels des gespaltenen und mit einer Schraube versehenen Ringes E festgestellt werden.

Auf der Messingplatte $AABB$ sind zunächst in schräger Richtung zwei Schlitten beweglich, deren Grundlagen die Messingplatten aa und $\alpha\alpha$ sind. Mit bb, $\beta\beta$, c und c sind die Schienen bezeichnet, zwischen denen sich die Platten verschieben. Die beweglichen Platten werden durch die Schrauben d und δ verstellt. Die Mütter dieser Schrauben sind in die an der grossen Platte befestigten Messingklötze e und ε eingeschnitten, ihre Enden sind drehbar in den Klötzen g und γ befestigt, welche mit den beweglichen Platten aa und $\alpha\alpha$ fest verbunden sind. Durch Drehung der Schrauben d und δ verschiebt man also die beweglichen Platten parallel den Schienen, zwischen denen sie als Schlitten gehen.

Auf der beweglichen Platte aa ist nun wieder als Schlitten beweglich die Platte f zwischen horizontalen Schienen angebracht, und durch die Schraube m zu verstellen; ebenso auf der Platte $\alpha\alpha$ die Platte φ durch die Schraube μ zu ver- 4
stellen. Zwischen den einander zugekehrten Rändern der Platten f und φ liegen noch die beiden dreieckigen ebenso dicken Platten l und λ, jene mit der Platte aa, letztere mit $\alpha\alpha$

fest verbunden. Die einander zugekehrten Ränder von f und l, sowie die von φ und λ sind zugeschärft, und möglichst genau geradlinig und parallel gearbeitet. Zwischen ihnen bleiben die beiden Spalten, welche das Licht durchlassen sollen. Die vorderen Flächen von f, l, λ und φ sind matt versilbert, um das Spectrum deutlich darauf projiciren zu können. Die grosse Messingplatte AA hat natürlich in ihrer Mitte einen Ausschnitt um das Licht, welches die beiden Spalten passirt hat, hindurch zu lassen.

Der Ort, wo das Spectrum entworfen wird, ist durch das helle kleine Rechteck in der Mitte der Figur angedeutet. Verschiebt man nun mittels der Schrauben d und δ die Schlitten aa und $\alpha\alpha$, so treten andere Farbentöne des Spectrum durch die Spalten. Durch die Schrauben m und μ kann man dagegen die Breite der Spalten, also auch die Menge des durchgelassenen Lichtes beliebig regeln.

Das durch die Spalten getretene Licht trifft nun auf der Rückseite des Schirms zunächst eine zweite achromatische Linse L_2 von kürzerer Brennweite als das Objectivglas des Fernrohres. Diese entwirft vermittelst der beiden durch den Schirm gegangenen Antheile einfachen farbigen Lichtes auf einem weissen Papierblatte B ein Bild von der Oeffnung des Diaphragma D, welches sich zwischen dem Prisma und der ersten Linse befindet. Dies Bild erscheint als ein gleichmässig gefärbtes Rechteck, welches, wenn nur durch einen Spalt Licht geht, in der Farbe dieses einfachen Lichtes, wenn durch beide, in der aus den beiden einfachen zusammengesetzten Farbe erscheint. Um das Bild scharf und, worauf hier alles ankommt, gleichmässig gefärbt zu erhalten, muss man verschiedene Vorsichtsmaassregeln beobachten. Die Entfernung des ersten Spaltes von der ersten Linse muss möglichst gross sein, damit das Bild der Lichtquelle, der Sonne, auch nahehin in die Ebene des Doppelspaltes falle und dadurch die Diffraction des Lichtes durch die engen Spalten vermieden werde. Das Prisma und die erste Objectivlinse müssen frei von allen Unreinigkeiten sein. Bei einzelnen Zusammensetzungen von Farben sind auch die Newton'schen Ringe sehr störend, welche in der dünnen Luftschicht zwischen dem Crown- und Flintglase der ersten

achromatischen Linse entstehen und in dem Farbenfelde mit abgebildet werden. Weil wir es hier mit zwei Bündeln homogener Lichtstrahlen zu thun haben, treten diese Ringe selbst an verhältnissmässig dicken Luftschichten noch auf. Selbst ein Ring von Stanniol, den ich zwischen die beiden Linsen gelegt hatte, um sie von einander zu entfernen, beseitigte die Ringe nicht ganz. Am besten ist es, Balsam zwischen die Linsen zu bringen. Endlich müssen die beiden Spalte noch den Fraunhofer'schen Linien des Spectrum parallel gestellt werden, was durch die Stellschrauben am Fusse des Schirmes zu erreichen ist, und die Ebene des Doppelspaltes muss genau am Orte des von der Linse entworfenen Bildes des ersten Spaltes sich befinden. Ist letztere Bedingung nicht erfüllt, so bekommt das farbige Rechteck an verschiedenen Seiten verschiedene Farbentöne.

Hat man eine Farbenmischung gefunden, welche man für Weiss hält, so ist es rathsam noch von einer andern Stelle des Zimmers her weisses Himmelslicht eindringen und auf weisses Papier fallen zu lassen, um dessen Farbe mit der Mischfarbe zu vergleichen. Man darf auch nicht zu anhaltend auf die Mischfarbe hinsehen, nicht andere glänzende Farben daneben haben, wie ich schon in meinem früheren Aufsatze erwähnt habe.

Den weiteren Auseinandersetzungen schicke ich noch einige Bestimmungen über den Gebrauch der verschiedenen Namen von Farben voraus, um Zweideutigkeiten in dieser Beziehung zu vermeiden.

Violett, nach der Wortbedeutung Farbe der Veilchen (*viola*), gebrauche ich für die Uebergangsstufe des Blau in Roth, in welcher ersteres überwiegt. Im Spectrum entspricht diesem Farbenton das brechbarere Ende zwischen der Linie G und H oder l (nach Stokes). Ich unterscheide es von Purpur, mit dem es im gewöhnlichen Sprachgebrauche zuweilen verwechselt wird, und welche Benennung auch von einigen Autoren geradezu für das brechbarere Ende des Spectrum gebraucht wird, indem ich den Namen des Purpurs nur für die röthlicheren Töne, also die Uebergangsfarben zwischen dem Violett und dem Roth der Enden des Spectrum gebrauchen

werde. Mit Weiss gemischt giebt Purpur das Rosenroth. Im Blau hat schon Newton zwei Abstufungen unterschieden, *coeruleum* und *indicum*, und ausserdem gebraucht er die Benennung *cyaneum* für blaue Töne, welche dem Grün nahe stehen. Den Namen Indigblau für das brechbarere Blau, der einmal in die Wissenschaft eingebürgert ist, werde ich beibehalten. Das weniger brechbare Blau, Newton's *coeruleum*, hat man ohne besondere Bezeichnung als Blau oder, wie Grassmann, als Himmelblau dem Indigblau des Spectrum entgegengesetzt. Das Blau des wolkenlosen Himmels muss aber in der That als weissliches Indigblau bezeichnet werden. Ich habe es mittels einer spiegelnden unbelegten Glasplatte[1]) mit reinem Gelb (dem des chromsauren Bleioxyds) gemischt, und gefunden, dass es wie sein Repräsentant unter den Malerfarben, das Ultramarin, schwach röthliches Weiss als Mischfarbe giebt, während das weniger brechbare Blau schwach grünliches Weiss geben würde. Wir können deshalb die weniger brechbaren blauen Töne des Blau im Spectrum nicht Himmelblau nennen, obgleich sie allerdings bei einer dem Auge bequemen Lichtstärke des Spectrum dem Himmelblau ähnlicher aussehen mögen als das Indigoblau. Das liegt aber nur daran, dass sie lichtstärker sind, deshalb weisslicher aussehen als das Indigblau, und so dem viel Weiss enthaltenden Himmelblau näher kommen. Ich werde deshalb für das weniger brech-
7 bare Blau, für welches ich keine geeignete Bezeichnung in der deutschen Sprache finde, Newton's Namen *cyaneum* anwenden und es Cyanblau nennen. Der Name *Cyan* ist in die neueren Naturwissenschaften eingeführt worden mit Beziehung auf die blaue Farbe des Eisencyanürcyanids. Diese Farbe entspricht in der That den weniger brechbaren Tönen des Blau, und erscheint grünlich neben Himmelblau. Im Spectrum nimmt das Blau den Raum zwischen den Linien *F* und *G* ein, sodass etwa das an *F* stossende Drittel dieses Raumes als Cyanblau, die anderen zwei Drittel als Indigblau bezeichnet werden können.

Als Repräsentanten des Grün betrachte ich den Farben-

1) S. meinen früheren Aufsatz, Pogg. Ann. Bd. 87, S. 61.

ton des arsenigsauren Kupferoxyds, im Spectrum die Gegend der Linien *b* und *E*, als den des reinen Gelb, das fein niedergeschlagene chromsaure Bleioxyd, im Spectrum einen Streifen, welcher dreimal so weit von der Linie *E* als von *D* absteht. Die Gegend der Linie *D* nenne ich Goldgelb, indem ich darunter einen Uebergangston zwischen Gelb und Roth verstehe, in welchem ersteres überwiegt. Bei überwiegendem Roth giebt es Orange, wie es zwischen den Linien *C* und *D* sich findet. Den Namen Roth wende ich nur auf den Farbenton des weniger brechbaren Endes des Spectrum an, nicht auf das Purpur, die Mischungen von Violett oder Blau mit Roth. Dem einfachen äussersten Roth entspricht der Farbenton des Zinnobers. Der des Carminpulvers nähert sich schon dem Purpur, und mit Carminroth oder Kirschroth kann man die röthlicheren Töne des Purpur bezeichnen.

Nach der vorher beschriebenen Methode ist es nun ziemlich leicht, Weiss aus indigblauem und gelbem Lichte zusammenzusetzen. Es gelingt aber auch, obgleich nicht ganz so leicht mit einer Reihe anderer Farbenpaare, nämlich mit folgenden:

Violett	Grünliches Gelb
Indigblau	Gelb
Cyanblau	Goldgelb
Grünliches Blau	Roth.

Das Grün ist also die einzige einfache Farbe, welche keine 8
einfache Complementarfarbe hat. Um Weiss zu bilden, muss es mit Purpur d. h. mit mindestens noch zwei anderen Farben Roth und Violett gemischt werden.

Ich sagte vorher, Weiss sei sehr leicht aus Gelb und Indigblau, weniger leicht aus den anderen neu hinzugekommenen Farbenpaaren zusammenzusetzen. Es kommen hier verschiedene Umstände zusammen. Zunächst findet nämlich das Auge bei diesen Farben Schwierigkeiten, sich dauernd für das farbige Feld scharf zu accommodiren. Es treten hier ähnliche Erscheinungen auf, wie sie Dove bei gewissen violetten Gläsern beschrieben hat, welche gleichzeitig rothes und violettes Licht durchlassen. Wegen der Farbenzerstreuung im Auge kann sich dieses nämlich nicht gleichzeitig für beiderlei Arten von

Strahlen accommodiren. Entsendet ein leuchtender Punkt gleichzeitig rothes und blaues Licht, und ist das Auge für die Entfernung des Punktes bei rother Beleuchtung accommodirt, so giebt das blaue Licht einen Zerstreuungskreis. Es erscheint dann also ein rother Punkt mit blauem Hofe. Accommodirt sich das Auge für die blaue Beleuchtung, so erscheint ein blauer Punkt im rothen Hofe. Nun ist allerdings auch eine Accommodation des Auges möglich, wobei das rothe und blaue Licht gleich grosse Zerstreuungskreise bilden, also ein kleiner Lichtfleck von der Mischfarbe erscheint, aber wenn man diese Stellung des Auges auch für einzelne Augenblicke findet, so ist es kaum möglich sie dauernd festzuhalten, wenn der Unterschied zwischen der Brechbarkeit der beiden verschiedenen Lichtarten beträchtlich ist. In dieser Beziehung zeichnen sich die complementaren Paare: Indigblau-Gelb und Cyanblau-Goldgelb vor den anderen Paaren dadurch aus, dass der Unterschied der Brechbarkeit für sie am kleinsten, also auch die Accommodation am leichtesten festzuhalten ist. Bei meiner früheren Methode war das mit der Mischfarbe bedeckte Feld sehr klein, und die Wirkungen der Farbenzerstreuung daher sehr auffallend. Bei der jetzt beschriebenen Methode treten
9 sie weniger hervor, obgleich man auch hierbei bald die eine, bald die andere Farbe am Rande aufblitzen, und das übrige Feld sich dann sogleich complementar färben sieht. Tritt man in einige Entfernung zurück, so trennen sich die vereinigten Farben ebenfalls, weil wohl die meisten menschlichen Augen für das blaue und violette einfache Licht kurzsichtig sind.

Zweitens war bei einigen Farbenpaaren das Auge höchst empfindlich für Beimischungen von sehr kleinen Mengen der einfachen Farben zu der weissen Mischung. Namentlich zeigt sich dies bei Roth und Grünblau. Wenn man das aus diesen beiden gemischte Weiss nicht ziemlich lichtschwach macht, behält es immer ein fleckiges und veränderliches Ansehen. Nicht nur machen sich die kleinsten Ungleichheiten in der objectiven Beleuchtung des Feldes durch Hervortreten einer der beiden Farben sehr bemerklich, sondern auch nach einander erscheint, wohl in Folge von Nachbildern, dieselbe Stelle bald röthlich, bald bläulich. Das Aussehen der Mischfarbe erinnert an den

Versuch, wo man mit einem Auge durch ein rothes, mit dem andern durch ein blaues Glas sieht, und das Gesichtsfeld mit veränderlichen Flecken beider Farben bedeckt erblickt.

Dann veränderte sich auch die Mischfarbe etwas mit dem Orte der Netzhaut, der ihr Bild empfing. Schon Purkinje hat darauf aufmerksam gemacht, dass die Seitentheile der Netzhaut eine andere Empfindlichkeit für Farben haben als die Stelle des direkten Sehens, der gelbe Fleck. Hatte ich Roth und Grünblau so verbunden, dass das von ihnen gemeinschaftlich beleuchtete Feld so gut als möglich weiss erschien, und eher des Roth überwog, so wurde es sogleich entschieden grün, wenn ich einen neben dem hellen Felde liegenden Punkt des Papiers fixirte. Dasselbe war der Fall, wenn ich das Auge so nahe heranbrachte, dass das Feld der Mischfarbe einen sehr grossen Theil des Gesichtsfeldes bedeckte, also ausser dem gelben Flecke auch viele andere Theile der Netzhaut das Bild aufnahmen. Bei diesem Versuche kann die Farbenzerstreuung bei der Brechung im Auge in der Mitte eines so grossen Feldes keinen 10
Einfluss haben. Aus der Ferne gesehen, erschien der erleuchtete Fleck dagegen auffallender Weise als ein rosenrother Punkt mit grünblauem Strahlenkreise.

Bei Indigblau-Gelb und Cyanblau-Goldgelb gelingt es meist ein Weiss herzustellen, bei dessen Anblick man in keiner Weise die Art der zusammensetzenden Farben erkennen kann, wenn man sie nicht schon kennt; Violett-Grüngelb lässt schon oft das eine oder andere am Rande hervorscheinen, aber Roth und Grünblau giebt bei einiger Helligkeit immer den Eindruck als sähe man an jeder Stelle des Feldes beide Farben unvereinigt neben einander. Um zu erkennen, dass eine Mischfarbe da sei, und dass diese Weiss sei, muss man entweder die einfachen Farben unvermischt daneben stellen oder das Licht schwächen. Beides sind aber allerdings Mittel, welche das Auge unfähiger machen, einen schwachen Grad von Färbung im Weiss wahrzunehmen. Um die beiden Farben unvermischt neben das Weiss zu stellen, braucht man nur das Papierblatt (*B* Fig. 2, Taf. I), auf welchem das gemischte Licht sich darstellt, etwas aus dem Brennpunkte der letzten Linse zu rücken, dann erscheinen an beiden Seiten des weissen Feldes farbige

Ränder. Oder man hält ein dünnes Stäbchen vor das weisse Feld, welches unter diesen Umständen zwei Schatten wirft, einen rothen und einen blauen.

Was die Complementarfarbe des Grün betrifft, so nimmt Hr. Grassmann an, dass sie an den äussersten Enden des Spectrum vorkomme, für gewöhnlich aber sehr lichtschwach sei, und nur unter besonders günstigen Umständen (an heiteren Sommermittagen) zu sehen sei. Er beruft sich dabei auf eine Beobachtung von Hassenfratz[1]), wonach Purpur, wie dieser es nennt, nur zu den genannten Zeiten im Spectrum zu finden
11 sei, des Abends aber der Purpur verschwinde, und das Spectrum dadurch kürzer werde. Mit Rücksicht auf die vielen späteren Beobachter, welche das Spectrum zu verschiedenen Tageszeiten untersucht haben, ohne am violetten Ende zeitweilig einen andern Farbenton zu finden, war wohl vorauszusetzen, dass Hassenfratz hier unter Purpur die Farbe versteht, welche gewöhnlich Violett genannt wird. Dasselbe findet man zuweilen auch bei Newton (wenigstens in der lateinischen Uebersetzung der Optik) und anderen Autoren. Um indessen die Sache ausser Zweifel zu stellen, habe ich die Farbentöne der beiden äussersten Enden des Spectrum noch einmal untersucht. Zu dem Ende isolirte ich sorgfältig das schwache Licht dieser Gegenden nach einer schon früher[2]) von mir beschriebenen Methode von dem überwiegend helleren der mittleren Theile des Spectrum. Ich entwarf nämlich zunächst mittels eines Prisma und einer Linse ein Spectrum auf einem Schirme. Das Sonnenlicht war vorher nicht durch einen engen Spalt gegangen, sondern ich liess es durch den Spiegel des Heliostaten geradezu auf das Prisma reflectiren. Der Schirm stand im Brennpunkte der Linse; auf ihm wurde daher gleichsam eine Reihe verschiedenfarbiger Sonnenbilder entworfen, die sich nur theilweise deckten, und so das Spectrum bildeten. Der Schirm hatte einen feinen Spalt, der entweder an das rothe oder

1) Ich setze hier voraus, dass das Citat auf S. 70 seines Aufsatzes, Pogg. Annalen Bd. 89, einen Druckfehler enthalte, und es statt: „Bd. 13“ vielmehr „Bd. 23“ heissen müsse. In Bd. 13, S. 441 ist nichts darauf Bezügliches zu finden.

2) Pogg. Ann. Bd. 86, S. 513. (Siehe oben S. 35).

violette Ende dieses unreinen Spectrum gestellt wurde, so dass ausser zerstreutem weissen Lichte die farbigen Endstrahlen des Spectrum in möglichst grosser Lichtstärke hindurchfielen. Etwa 10 Fuss von diesem Schirme entfernt stand ein zweites Prisma mit einem Fernrohre, durch welches das Spectrum des Spaltes betrachtet wurde. Die gewöhnlich sichtbaren Theile dieses Spectrum hatten dann nur geringe Lichtintensität; an seinem einen Ende erschien dagegen ein elliptischer hellerer Fleck (ein verzogenes Bild der Sonnenscheibe), der die gewöhnlich wegen ihrer Lichtschwäche nicht gesehenen äussersten Strahlen in verhältnissmässig grosser Lichtstärke und Reinheit zeigte. Am rothen Ende sieht man nicht viel 12
jenseits der Linie *A*. Bei geringer Lichtstärke erscheint im ganzen rothen Raume von *A* bis etwa *C* eine Farbe, welche der des Zinnobers ähnlich ist, und mit welcher verglichen die des gepulverten Carmins schon entschieden purpurn erscheint. Bei grösserer Lichtintensität, wie sie bei *B* erreicht werden kann, nähert sich die Farbe mehr dem Orange, während das Roth in der Nähe von *C*, welches bei schwachem Lichte ganz denselben Farbenton hat wie das der Gegend von *A*, sich bis zu blendender Stärke steigern lässt und dann gelb erscheint.

Das violette Ende des Spectrum verlängert sich bei Anwendung derselben Methode sehr bedeutend, und eine genaue Vergleichung der Liniengruppen mit denen eines auf Chininlösung entworfenen Spectrum, und denen der von Stokes gegebenen Zeichnung[1]) hat mich gelehrt, dass das menschliche Auge alle die brechbareren Strahlen dieser Gegend noch sehen konnte, welche fähig waren durch die angewendeten Glasmassen hindurch zu gehen. Die äussersten Streifen, welche ich direct sehen konnte, und welche auch auf Chininlösung projicirt die letzten sichtbaren waren, sind die ersten beiden blässeren Streifen, welche Stokes in seiner Zeichnung unter der Gruppe *p* angemerkt hat. Um die Gruppe *p* überhaupt zu sehen, fordert Stokes eine sorgfältige Anordnung des Apparates und klaren Sonnenschein, und nennt das Licht dieser Gegend sehr

1) *Phil. Transact.* 1852. II. Taf. XXV. Fig. 1. (Pogg. Ann. Ergsbd. IV, Taf. I. Fig. 1.)

schwach. Da die Lichtstrahlen meines Apparates durch zwei Prismen, zwei Objectiv- und zwei Ocularlinsen gehen mussten, darf es nicht auffallen, dass die äussersten Strahlen von Stokes Zeichnung fehlten, sowohl für die Chininlösung als für das Auge. Für diese Lösung war der Weg durch das Glas sogar noch um die Dicke der beiden Ocularlinsen, die weggelassen waren, kürzer. Die von Stokes mit *l*, *m* und *n* bezeichneten Gruppen kann man aber nach dieser Methode sehr leicht in viel reicherem Detail darstellen, als es auf Chininlösungen ge-
13 schieht und in der Zeichnung von Stokes abgebildet ist. Ich werde im Folgenden diese brechbarsten Strahlen die überviolletten Strahlen nennen, da der Name der unsichtbaren Strahlen nicht mehr recht passt, obgleich allerdings zugegeben werden muss, dass das Auge von ihnen verhältnissmässig sehr wenig afficirt wird. Ihre objective Intensität ist offenbar nicht so gering, wie sich bei ihrer Wirkung auf fluorescirende Substanzen erweist. Wenn wir ein Spectrum auf gewöhnlichem weissen Papier entwerfen, sehen wir von diesen überviolletten Strahlen nichts, weil sie von dem diffusen gewöhnlichen Lichte überstrahlt werden. Entwerfen wir das Spectrum dagegen auf Papier, welches mit Chininlösung durchtränkt ist, so kehrt an ihrer Stelle von den betreffenden Stellen des Spectrum das weniger brechbare Licht des fluorescirenden Chinin zurück, und obgleich die lebendige Kraft der Lichtschwingungen durch den Process der Fluorescenz gewiss nicht vermehrt wird, afficirt das durch sie erzeugte Licht von längerer Schwingungsdauer die Netzhaut lebhaft genug, um gesehen zu werden.

Was nun die Farbe des brechbarsten Endes des Spectrum betrifft, so ist zunächst zu bemerken, dass dieses unter allen seinen Theilen am schnellsten den Farbenton mit der Lichtintensität wechselt, und man muss hier Farben verschiedener Stellen, die man vergleichen will, nur bei nahe gleicher Lichtintensität beider vergleichen. Dazu giebt die beschriebene Methode eine gute Gelegenheit, da die violetten Strahlen nur dem in den Spalt dringenden diffusen Lichte, die überviolletten directem Sonnenlichte angehören, und sich daher in beiden Partien immer Stellen von gleicher Lichtstärke auffinden lassen.

Bei geringer Lichtstärke hat der Raum zwischen den Linien *G* und *H* eine ziemlich gleichmässige violette Färbung, die sich auch noch auf die Gegend von Stokes' Gruppe *l* ausdehnt. Je lichtschwächer das Violett wird, desto mehr bekommt es einen Anflug von Rosa. Steigert sich die Lichtintensität, so wird der Farbenton dem Blau ähnlicher und entfernt sich 14
immer mehr vom Purpur; er geht dann in ein weissliches Graublau über. Die überviolletten Strahlen jenseits der Gruppe *l* setzen die Farbenreihe keineswegs nach dem Purpur hin fort, sondern sind wieder indigblau bei geringer Lichtstärke, weissblau, wo es gelingt sie in grösserer Lichtstärke zu sehen. Ich habe das überviolette Licht mehreren anderen Personen gezeigt, um nicht durch eine Eigenthümlichkeit meines Auges getäuscht zu werden, und alle bezeichneten die Farbe in der Weise, wie ich angegeben habe. Unter allen diesen brechbaren Farbentönen kommt also lichtschwaches Violett, etwa aus der Gegend der Linien *H* dem Purpur am nächsten; aber auch dieses ist durch einen weiten Zwischenraum in der Farbenreihe von dem äussersten Roth getrennt. Man kann in meinem Apparate durch Mischung von Violett und Roth eine sehr grosse Anzahl unterscheidbarer purpurner Farbentöne bilden, welche sich alle zwischen die Farben der beiden äussersten Enden des Spectrum einreihen lassen.

Da sich hier das erste Beispiel einer Umkehr in der Reihe der Farbentöne im Spectrum darzubieten scheint, möchte die Untersuchung des Spectrum von Quarzprismen, welche die brechbareren Strahlen nicht wie Glas absorbiren, für die Physiologie der Farbenempfindungen sehr wichtig sein. Leider habe ich bis jetzt solche Prismen noch nicht erhalten können.

Ich gehe jetzt über zur Beschreibung einer anderen Reihe von Versuchen, welche zum Zwecke haben das Verhältniss der Wellenlängen der complementaren Farben zu ermitteln. Zu dem Ende nahm ich von dem zur Mischung des Lichtes dienenden Apparate den weissen Schirm (*B* Fig. 2, Taf. I) fort, auf welchem das Farbenbild entworfen wird, nachdem ich ein möglichst gutes Weiss hergestellt hatte, und stellte in der Entfernung von etwa 6 Fuss hinter dem Schirme S_2 mit dem Doppelspalte ein Fernrohr *F* auf, vor dessen Objectivglase eine

Glasplatte mit feinen parallelen senkrechten Linien befestigt war. Durch diese sieht man neben den Spalten, durch welche das Licht dringt, noch eine Reihe von Nebenspectra sich darstellen, deren scheinbare Entfernung von dem Spalte der Wellenlänge des betreffenden Lichtes proportional ist. Auf der hinteren Seite des Schirmes S_2 war eine Millimetertheilung in horizontaler Richtung angebracht. Es liess sich nun leicht bestimmen, mit welchen Punkten der Theilung die Mitte der Nebenspectra der verschiedenen farbigen Strahlen zusammenfiel. Die so gemessene Entfernung des ersten rechten vom ersten linken Nebenspectrum einer jeden Farbe war bei übrigens unveränderter Einrichtung des Apparates der Wellenlänge proportional zu setzen. Um nun die absoluten Werthe der Wellenlängen zu bekommen, maass ich auf dieselbe Weise die Entfernungen der Spectra für verschiedene Fraunhofer'sche Linien, und nahm für deren Wellenlängen die von Fraunhofer gefundenen Werthe, woraus ich dann die der von mir zu Weiss vereinigten Strahlen bestimmen konnte. Die relativen Verhältnisse der Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien stimmten gut mit den von Fraunhofer angegebenen überein; indessen wird die Genauigkeit der hier folgenden Angaben über die Wellenlängen complementärer Farben durch die Schwierigkeit sehr vermindert, die Reinheit des zusammengesetzten Weiss zu beurtheilen. Die Zahlen geben die Wellenlängen ausgedrückt durch Millionentheile eines Pariser Zolles.

Farbe.	Wellenlänge.	Complementarfarbe.	Wellenlänge.	Verhältniss der Wellenlängen.
Roth	2425	Grünblau	1818	1,334
Orange	2244	Blau	1809	1,240
Goldgelb	2162	Blau	1793	1,206
Goldgelb	2120	Blau	1781	1,190
Gelb	2095	Indigblau	1716	1,221
Gelb	2085	Indigblau	1706	1,222
Grüngelb	2082	Violett	von 1600 ab	1,301

Im Violett mussten, seiner Lichtschwäche wegen, die äussersten Strahlen von der Wellenlänge 1600 ab alle zusammengefasst werden. Zur Vergleichung setze ich die von Fraunhofer für die festen Linien des Spectrum angegebenen Werthe her:

B. 2541
C. 2425
D. 2175
E. 1943
F. 1789
G. 1585
H. 1451.

Nach den gefundenen Zahlen habe ich die Curve Taf. I Fig. 3 construirt, welche die Wellenlänge einer Farbe als Function der Wellenlänge ihrer Complementarfarbe ausdrückt. Es sind auf der horizontalen und verticalen Abscissenaxe die Wellenlängen der Farben aufgetragen, sodass der Punkt A der Wellenlänge 1500 entspricht. Die Curve hat zwei congruente Arme $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, deren jeder mit beiden Enden asymptotisch in eine den Abscissenaxen parallele gerade Linie auszulaufen scheint. Die Kreuzchen auf und neben den Curven entsprechen genau den einzelnen Beobachtungen. Die Curve habe ich zwischen ihnen so gezeichnet, dass sie ihnen möglichst nahe blieb und eine continuirliche Krümmung bekam.

Auffallend ist die Vertheilung der complementaren Farben im Spectrum. Während das äusserste Roth und Goldgelb einen beträchtlichen Raum zwischen sich haben, liegen ihre Complemente grünliches Blau und Cyanblau ganz dicht nebeneinander. Ebenso nehmen das äusserste Violett und Indigo einen sehr breiten Raum im Spectrum ein, während ihre Complemente grünliches Gelb und Gelb äusserst schmale Streifen sind. Auch die Betrachtung der Curven für die Wellenlängen der complementaren Farben lehrt dies. Wenn man auf der horizontalen Abscissenlinie vom Violett zum Roth fortschreitet, ändert sich die Wellenlänge der Complementarfarbe anfangs äusserst langsam; wenn man zu den helleren und grünlich blauen Tönen gekommen ist, dagegen äusserst schnell. Das letztere ist ebenso im Gelb der Fall, während am rothen Ende die Aenderung wieder äusserst langsam wird. Damit hängt zusammen, dass sich in dem breiten Raume vom Ende

des Roth bis zur Linie *C* der Ton des Rothen kaum merklich ändert, ebensowenig der Ton des Violetten von der Linie *G* bis nach *l* hin. Auch im Orange und Blau ändert sich der Ton langsam, aber doch schon viel merkbarer. An der Grenze von Gelb und Grün einerseits und Blau und Grün andererseits sind dagegen die Uebergänge so schnell, dass sie ganz zu fehlen scheinen, wenn man ein reines Spectrum ohne starke Vergrösserung betrachtet, und hier vielmehr Grün unmittelbar an röthliches Orange und Himmelblau anzustossen scheint. Man erstaunt über den ausserordentlichen Reichthum prachtvoller Farbentöne, welchen diese Gegenden des Spectrum entfalten, wenn man durch eine der beiden Spalten des von mir construirten Schirmes einfaches Licht dieser Theile gehen lässt und den Spalt dann langsam verschiebt.

Daraus ergiebt sich ein neuer Grund, warum die Complementarfarben des Roth und Violett in den gekreuzten Farbenstreifen des Spectrum eines *V*förmigen Spaltes bei meinen früheren Versuchen nicht zu entdecken waren. Diese Complementarfarben bilden nämlich ausserordentlich schmale Streifen, zu deren Entdeckung die frühere Methode nicht ausreichte.

Indigblau und Gelb haben daher mancherlei Vorzüge vor den übrigen Paaren von Complementarfarben: geringere Empfindlichkeit des Auges für schwache Einmischungen beider in das Weiss, geringen Unterschied ihrer Brechbarkeit im Auge, hinreichende Breite der Farbenbänder im Spectrum. Alles dies erklärt, dass, nachdem es Newton überhaupt nicht gelungen war, Weiss aus nur zwei einfachen Farben zusammenzusetzen, zunächst eine einfachere Methode genügte, es mittels Indigblau und Gelb zu erreichen, während eine mühsamere und complicirtere Vorrichtung für die übrigen Farben sich nothwendig zeigte.

Die Tafel, welche oben für die Wellenlängen der Complementarfarben gegeben ist, enthält in ihrer letzten Columne
18 auch das Verhältniss der beiden Wellenlängen zu einander. Sie zeigt, dass es nicht constant ist; es schwankt zwischen dem der Quarte 1,333 und dem der kleinen Terz 1,20. Es ist am kleinsten für Goldgelb und Cyanblau.

Endlich habe ich auch einige Versuche angestellt, um die

Intensitätsverhältnisse zu ermitteln, welche complementare einfache Farben haben müssen, wenn sie gemischt Weiss geben sollen. Vielleicht würde die Voraussetzung sehr annehmbar erscheinen, dass zwei solche Farben gleich lichtstark sein müssten, um Weiss zu geben, weil man gewöhnt ist, die einfachen Farben als die gesättigtesten gleichmässig dem Weiss gegenüberzustellen. Diese Voraussetzung ist aber keineswegs richtig. Es fiel mir dies zuerst bei der Mischung von Violett und Indigo mit ihren Complementarfarben auf. Die genannten beiden Farben sind nämlich bei gewöhnlicher mittlerer Helligkeit des gemischten Weiss auffallend lichtschwach, verglichen mit der Menge gelbgrünen oder gelben Lichtes, welche nöthig ist, um mit ihnen Weiss zu geben. Ziemlich gleich hell erscheinen dagegen Orange und Cyanblau. Bei der richtigen Mischung von Roth mit Grünblau ist wiederum das erstere schwächer als das letztere. Um sich von diesen Verhältnissen zu überzeugen, ist es am bequemsten, ein dünnes Stäbchen vor das Feld zu halten, welches von dem gemischten Lichte erleuchtet wird. Das Stäbchen wirft dann zwei farbige Schatten, in denen die beiden einfachen Farben sich einzeln, und in der ihnen zukommenden Lichtstärke darstellen. Vor einem Felde, dessen Weiss aus Violett und Gelbgrün gemischt ist, erscheint z. B. der violette Schatten sehr dunkel und scharf gezeichnet, der gelbgrüne dagegen sehr schwach, fast nur durch die Färbung, kaum durch die Helligkeit von dem weissen Grunde unterschieden.

Ich habe auch versucht, das Verhältniss der Helligkeit complementarer Mengen von verschiedenen einfachen Farben wenigstens annähernd in Zahlen auszudrücken. Zu dem Ende setzte ich erst Weiss aus zwei Farben zusammen, und maass mikroskopisch die Breite des Spaltes, durch welche die hellere 19
der beiden Farben drang. Dann verengte ich diesen Spalt, bis ein vor das Feld der Mischfarbe gehaltenes Stäbchen zwei gleich dunkle farbige Schatten entwarf, und mass wieder die Breite des Spaltes. Die Lichtmenge der betreffenden Farbe war dann in demselben Verhältnisse verringert wie die Breite des Spaltes. Das Verhältniss der beiden gemessenen Breiten ergab also wenigstens annähernd das Verhältniss der Helligkeit beider Farben im Weiss.

Ich erhielt übrigens ziemlich verschiedene Ziffern, wenn die absolute Lichtstärke der Farben verschieden war, wie sich dies nach Dove's Versuchen über die Unterschiede in der Helligkeit von Pigmentfarben bei verschieden starker Erleuchtung erwarten liess. Zwei farbige Lichtmengen, welche bei einer gewissen absoluten Lichtintensität gleich hell erscheinen, thun es im allgemeinen nicht mehr, wenn die Lichtmengen beider verdoppelt oder halbirt werden. Und zwar wird im ersteren Falle die minder brechbare der beiden Farben, im letzteren die brechbarere die hellere werden.

Ich fand deshalb folgende verschiedene Verhältnisse der Helligkeit complementarer Mengen:

	Bei starkem Licht.	Bei schwachem Licht.
Violett zu Grüngelb	1:10	1:5
Indigo zu Gelb	1: 4	1:3
Cyanblau zu Orange	1: 1	1:1
Grünblau zu Roth	1:0,44	

Die erwähnte von Dove aufgefundene Erscheinung liess sich bei meinen Versuchen an den homogenen Farben sehr gut beobachten. Ich liess zwei farbige Lichtmengen durch die Spalten des Schirmes in solcher Menge dringen, dass sie gleich dunkle Schatten warfen, und brachte zwischen den Heliostaten und den ersten Spalt eine einfache oder mehrfache Lage eines dünnen weissen Gewebes, welches einen Theil des Sonnenlichtes zurückhält, ohne das Verhältniss seiner verschiedenartigen Bestandtheile zu verändern. Es erschien dann der Schatten der minder brechbaren Farben dunkler als der der brechbareren. Uebrigens waren die Unterschiede sehr gering, so lange ich beide Farben aus der minder brechbaren Hälfte des Spectrum, Roth bis Grünblau, nahm, viel auffallender zwischen denen der brechbareren Hälfte, und am stärksten, wenn man Violett mit einer der minder brechbaren Farben verband.

Unter diesen Verhältnissen mag es auffallend erscheinen, dass der Farbenton der Mischfarben, wie ich gefunden habe, sich so gut wie gar nicht zu ändern scheint, wenn die Lichtmenge vermehrt oder vermindert, das Verhältniss der gemischten Lichter zu einander aber nicht geändert wird. Setzte ich mittels meines Apparates zwei Complementarfarben zu Weiss zusammen und schwächte das einfallende Sonnenlicht durch Einschaltung eines weissen dünnen Gewebes, so konnte ich nie mit Entschiedenheit beobachten, dass das Weiss sich gefärbt hätte. Natürlich ist hierbei zu bedenken, dass überhaupt die Unterscheidung der Färbung bei sehr geringer Helligkeit, ebenso wie andererseits bei zu grosser, unvollkommen ist. Indessen ist dieser Umstand doch nicht ganz hinreichend zur Erklärung, namentlich für die Farbenpaare Violett-Grüngelb und Indigblau-Gelb, wo das Verhältniss der Helligkeit schon bei geringen Aenderungen der absoluten Lichtmenge sich beträchtlich ändert. Innerhalb solcher Grade von Helligkeit, in denen Unterscheidung der Farbentöne noch sehr wohl möglich ist, kann sich das Verhältniss der Helligkeit des Grüngelb zum Violett, wie die obige Messungsreihe zeigt, etwa um das zweifache ändern, und doch erscheint die Mischung bei grösserer Lichtstärke nicht grüngelb, bei geringerer nicht violett, sondern immer weiss. Ich vermuthe, dass der hauptsächlichste Grund davon darin liegt, dass wir bei allen Graden der Helligkeit die Farbe des Sonnenlichtes als das normale Weiss betrachten, und wenn in den künstlichen Farbenmischungen die blauen Farben bei geringer, die gelben bei grösserer Lichtstärke überwiegen, dasselbe auch im Sonnenlichte der Fall sein muss. Darin liegt auch wohl die wissenschaftliche Rechtfertigung für die Sitte der Landschaftsmaler, welche hellen Sonnenschein durch gelbe, Mondschein durch blaue Farbentöne wiederzugeben pflegen. Uebrigens muss bei dem Versuche die besprochene Erscheinung zu erklären, wahrscheinlich auch noch berücksichtigt werden, dass die einfachen Farben selbst bei verschiedener Lichtstärke verschiedenen Farbenton zeigen.

Wir müssen nach den obigen Messungen der Helligkeit der zu Weiss gemischten Farben den verschiedenen einfachen Farben eine verschiedene Sättigung der Färbung zuschreiben. Violett ist am meisten gesättigt; die anderen Farben folgen ungefähr in folgender Reihe:

Violett
Indigblau
Roth Cyanblau
Orange Grün
Gelb.

Es zeigt sich dies übrigens auch in anderen Zusammensetzungen, wo nicht gerade Weiss gebildet wird. So giebt Roth mit gleich hellem Grün gemischt ein röthliches Orange, Violett mit gleich hellem Grün ein dem Violett nahe stehendes Indigblau. Dagegen geben Farben von ungefähr gleicher Sättigung und von gleicher Helligkeit mit einander gemischt auch Mischfarben, die von ihren beiden Constituenten ungefähr um gleichviel verschieden sind.

Schliesslich noch einige Bemerkungen über Newton's Theorie der Farbenmischung, die er in der Construction des Farbenkreises niedergelegt hat. Das Wesentliche von Newton's Verfahren ist offenbar, dass die einfachen und zusammengesetzten Farben in einer gewissen Weise in einer Ebene vertheilt gedacht werden, dass man ihre Helligkeit durch entsprechende Gewichte darstellt und dann die Mischfarbe der gegebenen Farben in dem Schwerpunkte dieser Gewichte findet. Diese Methode, das System der Farben darzustellen, ist vielleicht
22 einer der sinnreichsten Einfälle des grossen Denkers und drückt die vorliegenden Erfahrungen — die aber freilich noch nicht geeignet sind, einen strengen Beweis für die Richtigkeit jener Regel zu liefern — genügend aus. Newton selbst sagt darüber: *Hanc quidem regulam satis accuratam esse existimo ad experimenta agenda, quamvis non sit mathematice accurata.* Meine früheren Versuche hatten einige Ergebnisse geliefert, die auch den angegebenen allgemeinen Grundlagen der Newton'schen Regel widersprochen haben würden. Diese Widersprüche sind durch die mit besseren Hülfsmitteln erneute Untersuchung entfernt worden. Jedenfalls ist aber die Anordnung der einfachen Farben in der Ebene wesentlichen Aenderungen zu unterwerfen. Newton begnügt sich damit einen Kreis aus ihnen zu bilden, indem er die Enden des Spectrum aneinander legt und den einzelnen Farbenstreifen dieselbe Breite giebt, die sie im Spectrum seiner Glasprismen haben, und auf deren Analogie mit den musikalischen Intervallen er ein grosses Gewicht legte.

Indessen ist es klar, dass erstens die Reihe der einfachen Farben in dem Farbenfelde keine geschlossene Curve bilden kann, indem die Farbentöne des äussersten Violett und Roth nicht continuirlich ineinander übergehen, zwischen diesen Endfarben vielmehr Raum bleiben muss für die mannigfachen Farbentöne des Purpur, und diese sind dem Principe von Newton's Construction entsprechend auf einer geraden Linie zwischen dem äussersten Violett und Roth anzubringen. Macht man das Weiss zum Mittelpunkte von Polarcoordinaten, so müssen die purpurnen Töne einen ebenso grossen Winkel ausfüllen, wie auf der anderen Seite die verschiedenen Töne des Grün, vom grünlichen Gelb bis zum grünlichen Blau. Newton selbst sagt *(Optice. Liber I, Pars II, Propos. IV): Denique si ruber et violaceus (color) inter se permisceantur, orientur inde varii colores purpurei, pro eo, qua proportione illi invicem commixti fuerint, diversi inter se, neque ullius coloris homogenei speciem aut similitudinem habentes.* Um die purpurnen Mischfarben auf dem Farbenkreise anzubringen, muss er aber etwas von der Regel abweichen, die er für die übrigen Farben giebt. 23
Während er nämlich sonst vorschreibt, die Mischfarbe werde den Ton haben wie der am Ende desselben Radius liegende Theil des Spectrum, lässt er die auf die Trennungslinie des äussersten Violett und Roth oder nahe zu beiden Seiten derselben fallenden Mischfarben purpurn sein, also weder dem äussersten Roth noch dem äussersten Violett entsprechen, worauf er noch ausdrücklich aufmerksam macht. Hier zeigt es sich also, dass er einen gewissen Raum an dieser Stelle den purpurnen Tönen einräumen muss. Hr. Grassmann lässt ebenfalls Roth und Violett sich aneinander schliessen, indem er auf die schon vorher besprochene Stelle von Hassenfratz sich beruft, wonach unter günstigen Witterungsverhältnissen das Spectrum auch Purpur enthalten soll.

Zweitens zeigen meine Versuche, dass das Verhältniss der Winkel, welche die einzelnen Farben auf der Farbenscheibe einzunehmen haben, ganz anders sein muss als das ihrer Breite im prismatischen oder Interferenzspectrum. Denn in beiden Spectren nehmen die Endfarben breite Räume ein, worin sich der Farbenton kaum merklich ändert, während ihre Comple-

mentarfarben sehr dicht zusammengedrängt sind. Dass in Newton's Farbenkreise die Endfarben zu breit sind, corrigirt übrigens den andern Fehler, dass kein Platz für den Purpur ist, in Beziehung auf die Resultate der Farbenmischungen, einigermassen.

Endlich scheint es mir sehr zweifelhaft, ob die Curve, in welche die einfachen Farben zu bringen sind, da sie überhaupt nicht einmal eine geschlossene ist, ein Kreisbogen sein sollte. Newton hat den Kreis offenbar gewählt, weil ihm keine Verschiedenheit in der Beziehung der einfachen Farben zum Weiss bekannt war. In meinen Versuchen über die Mengenverhältnisse der zu mischenden Farben zeigen sich aber sehr beträchtliche Abweichungen, und wenn wir die Einheiten der Helligkeit verschiedener Farben nach den unmittelbaren Angaben unseres Auges festsetzen, ist es klar, dass Roth etwa
24 zweimal so weit vom Weiss entfernt sein müsse als Grünblau, Violett fünf bis zehn Mal so weit als Grüngelb, dass also die Curve kein Kreis sein könne.

Diese Behauptung scheint im Widerspruche zu sein mit der Entwickelung, welche Grassmann[1]) von den Principien des Newton'schen Farbenkreises gegeben hat. Hr. Grassmann leitet nämlich dort aus denselben vier Grundsätzen, welche nothwendig und zureichend erscheinen, um die Auffindung der Mischfarbe auf die Construction eines Schwerpunktes zurückzuführen, auch gleichzeitig die Nothwendigkeit ab, dass die homogenen Farben in einem Kreisbogen liegen. Der scheinbare Widerspruch erklärt sich hier aus dem verschiedenen Sinne, den man diesen Grundsätzen beilegen kann. Die vier Grundsätze, welche nach Grassmann nothwendig und genügend sind, um Newton's Methode in ihren wesentlichen Zügen zu rechtfertigen, sind:

1) Jede zusammengesetzte Farbe kann nachgeahmt werden durch Mischung einer homogenen (oder aus Violett und Roth gemischten purpurnen) Farbe mit Weiss.

2) Wenn von zwei zu vermischenden Lichtern das eine sich stetig ändert, ändert sich auch der Eindruck der Mischung stetig.

1) Pogg. Annalen Bd. 89, S. 78 — 84.

3) Gleich aussehende Farben gemischt geben gleich aussehende Mischungen.

4) Die Lichtintensität der Mischung ist die Summe aus den Intensitäten der gemischten Lichter.

Dieser vierte Satz kann in dreierlei wesentlich verschiedenem Sinne gebraucht werden, je nachdem man die Methode, die Intensität zu messen, festsetzt. Erstens könnte man nämlich die Lichtintensitäten verschiedener Farben gleich nennen, wenn sie dem Auge gleich hell erscheinen; dann würden die homogenen Farben in dem Farbenfelde jedenfalls keinen Kreis bilden, wie eben erörtert ist. Zweitens könnte man die Festsetzung der Mengeneinheiten des verschiedenfarbigen Lichtes für willkürlich erklären, und den Grundsatz in dem Sinne 25
nehmen, dass es eine Art die Einheiten festzusetzen gebe, bei welcher stets die Lichtintensität der Mischung gleich sei der Summe der gemischten Lichter. Legt man dem Satze diesen Sinn unter, so ergiebt eine weitere Untersuchung, dass dreien Farben, aber nicht mehreren, ein willkürlicher Ort im Farbenfelde und eine willkürliche Einheit der Lichtintensität beigelegt werden könne, dass dann der Ort und die Einheit der Intensität für alle anderen, namentlich auch für alle homogenen Farben bestimmt sei, wobei nicht vorauszusehen ist, welche Curve diese bilden mögen.

Der Beweis ist leicht zu führen. Die drei willkürlich gewählten Farben (einfache oder zusammengesetzte), von denen aber keine aus den beiden anderen durch Mischung zu erzeugen sein darf, setze man in drei beliebig gewählte Punkte A, B, C, Fig. 4 Taf. I, welche aber nicht in einer geraden Linie liegen dürfen, und bestimme die Einheiten der Lichtintensität willkürlich. Mischen wir jetzt die Quantität α der Farbe A, die Quantität β der Farbe B und die Quantität γ der Farbe C, und giebt dies die Quantität δ einer Mischfarbe, so muss nach unserem Grundsatze gesetzt werden:

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma;$$

also wird die Einheit der Lichtintensität der Mischfarbe zu setzen sein gleich:

$$\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma} = 1.$$

Ihr Ort ist nach Newton's Constructionsregel der Schwerpunkt der mit den Massen α, β, γ beziehlich versehenen Punkte A, B, C. Es sei dies der Punkt M. Es sind also Ort und Mengeneinheit für jede aus den drei Farben mischbare neue Farbe gegeben.

Um den Ort einer aus den drei Farben A, B, C nicht mischbaren Farbe zu bestimmen, welche also ausserhalb des Dreieckes $A\,B\,C$ liegen wird, mische man eine Quantität ε dieser Farbe mit der Farbe, die im Punkte M des Farbenfeldes liegt.
26 Es wird stets möglich sein, die Quantität ε klein genug zu machen, dass durch Mischung eine andere Farbe erzeugt wird, die noch innerhalb des Dreieckes $A\,B\,C$ liegt. Die Quantität dieser aus δ und ε zusammengesetzten Farbe sei δ_1, ihr Ort der Punkt M_1. Nach dem vierten Grundsatze müssen wir setzen

$$\varepsilon = \delta_1 - \delta,$$

also die Einheit der neuen Farbe gleich $\varepsilon / (\delta_1 - \delta)$. Ihr Ort sei der Punkt E, dessen Lage dadurch bestimmt ist, dass M_1 der Schwerpunkt der Masse δ des Punktes M, und der Masse ε des Punktes E sein muss. Es muss also E in der Verlängerung der Linie MM_1 liegen, und ferner muss sein

$$\delta \cdot MM_1 = (\delta_1 - \delta)\, EM_1.$$

So ergiebt sich also, dass nach Feststellung der Orte und der Intensitätseinheiten der Farben A, B, C die Orte und Intensitätseinheiten aller übrigen Farben des Farbenfeldes festgesetzt sind.

Es lässt sich ferner leicht nachweisen, dass, die Richtigkeit der genannten vier Grundsätze vorausgesetzt, die so gewonnene Anordnung der Farben die Construction der Mischfarben nach Newton's Methode erlaubt. Da dieser Beweis aber für den Zweck der vorliegenden Erörterung unnöthig ist, übergehe ich ihn hier.

Was die Curve der homogenen Farben betrifft, welche das so construirte Farbenfeld an einer Seite begrenzen würde, so lässt sich über deren Natur nichts schliessen. Sie ist fest bestimmt, sobald die Orte und Mengeneinheiten für die ersten drei Farben festgesetzt sind. Von diesen sechs Bestimmungs-

stücken bleiben zwei, nämlich eine Lineardimension und eine Einheit der Lichtintensität, unter allen Verhältnissen willkürlich; es sind also im allgemeinen vier Parameter der bezeichneten Curve veränderlich, aber dies genügt natürlich nicht in allen Fällen, um eine andere Curve in einen Kreis verwandeln zu können. Die nähere Untersuchung zeigt, dass nur elliptische Bögen durch entsprechende Veränderung der Parameter in Kreisbögen verwandelt werden können, und dass dann 27
jede beliebige gemischte Farbe, also auch Weiss, in das Centrum des Kreises gebracht werden kann.

So viel über die zweite Auslegungsweise des vierten Grundsatzes. Die dritte endlich ist die, dass man schon eine Weise, die Intensitäten verschiedenfarbigen Lichtes vergleichend zu messen, festgestellt habe, und man voraussetze, der genannte Grundsatz sei auch für diese bestimmte Art, die Intensitäten zu berechnen, richtig. So ist Grassmann verfahren. Dadurch wird natürlich viel mehr hypothetisch angenommen als bei der zweiten Interpretation des vierten Grundsatzes, sodass in diesem Falle es auch möglich wird, Schlüsse auf die Form der Curve der homogenen Farben zu thun. Bei den Annahmen, die Hr. Grassmann gewählt hat, wird diese ein Kreis mit Weiss im Mittelpunkte. Die Festsetzung seiner Maasseinheiten hat er übrigens nicht durch ein allgemeines Princip zu rechtfertigen gesucht, sondern sie ist offenbar nur aus der Voraussetzung hervorgegangen, dass die Curve der homogenen Farben ein Kreis werden müsse.

Vorläufig scheint mir die letztere Voraussetzung nicht hinreichend gerechtfertigt zu sein, selbst wenn die wesentlichen Grundlagen von Newton's Methode, die Mischfarben durch Construction zu finden, beibehalten werden können. Wenn wir durch das Auge direct die Helligkeit verschiedener Farben vergleichen lassen, würde das Farbenfeld ungefähr die Form annehmen, welche in Fig. 5 Taf. I schematisch dargestellt ist. Die Entfernungen der Farben vom Weiss entsprechen hier ihren Sättigungsverhältnissen bei schwächerem Lichte. Nach den beiden Enden des Spectrum hin geben benachbarte Farben Mischungen vom Tone der zwischenliegenden Farbe und ziemlich gesättigter Färbung. Dort habe ich die Curve

deshalb wenig gekrümmt. In der Gegend des Grün geben Töne, die wenig von einander verschieden sind, z. B. Grüngelb und Grünblau, schon ziemlich weissliche Mischungen, dem entspricht die stärkere Krümmung der Curve. Dass aus Roth
28 und Indigo nur weissliches Violett, aus Violett und Orange nur weissliches Roth gewonnen wird, wie ich in meinem früheren Aufsatze erwähnte, ergiebt die Zeichnung ebenfalls. Dass gleiche Theile Grün und Roth Orange, gleiche Theile Grün und Violett Indigblau geben, geht ebenfalls daraus hervor. Natürlich sind die meisten Verhältnisse dieser Zeichnung nur nach Gutdünken gewählt, und kann dieselbe keinerlei Anspruch auf Genauigkeit machen.

Zusatz (1862). In meinem Handbuche der Physiologischen Optik §. 20 ist dieses Thema weiter entwickelt, die Hypothese der drei subjectiven Grundfarben von Th. Young eingeführt, und das geometrische Farbenfeld zu einem Dreieck ergänzt, dessen Ecken Roth, Violett und ein gesättigteres Grün enthalten, als im Spectrum vorkommt. Durch Nachbilder von Purpur, die man auf das Grün des Spectrum wirft, kann man in der That nachweisen, dass die Empfindung eines solchen gesättigteren Grün möglich ist.

LII.

Ueber die Empfindlichkeit der menschlichen Netzhaut für die brechbarsten Strahlen des Sonnenlichtes.

Aus Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie Bd. 94, S. 205—211.

Ich habe jetzt von Hrn. Oertling in Berlin zwei Prismen 205
von Bergkrystall, jedes $1^1/_4$ Zoll hoch, mit einem brechenden Winkel von 50°, dessen Seitenflächen 0,85 Zoll breit sind, empfangen. Die krystallographische Axe ist senkrecht gegen die brechende Kante und bildet gleiche Winkel mit den Schenkeln des Flächenwinkels von 50 Grad, sodass, wenn man diesen Winkel als brechenden benutzt und das Minimum der Ablenkung der Strahlen hervorbringt, die Strahlen parallel der Krystallaxe durch das Prisma gehen und einfach gebrochen werden. Die dem Winkel von 50° gegenüberliegende Fläche 206
ist auch polirt und bildet mit den beiden anderen Seitenflächen des Prisma gleiche Winkel von 65°. Diese beiden letzteren können auch als brechende Winkel des Prisma benutzt werden, brechen aber doppelt. Sie erzeugen zwei Spectren, die sich zum Theil decken. Ausserdem gehört zu dem Apparate eine Convexlinse aus Quarz von $1^1/_4$ Zoll Durchmesser und 17 Zoll Brennweite, in welcher die Krystallaxe der optischen Axe parallel ist.

Mit diesen Instrumenten konnte ich das Spectrum des Sonnenlichtes auf fluorescirenden Substanzen, wie Chininpapier, Uranglas und Bernstein, in der von Stokes beschriebenen grösseren Ausdehnung herstellen, sodass das überviolette Spec-

trum jetzt mehr als doppelt so lang war, als ich es sonst durch Glasprismen bekommen hatte. Das elektrische Licht, welches überviolette Strahlen von noch viel höherer Brechbarkeit als das Sonnenlicht enthält, habe ich noch nicht Gelegenheit gehabt anzuwenden. Kalk und Magnesia im Sauerstoffgebläse gaben mit dem Quarzapparate ein überviolettes Spectrum, welches etwa nur so lang war, wie das des Sonnenlichtes mit Glasprismen entworfen.

Ich gehe jetzt zur Wirkung der übervioletten Strahlen auf das Auge über. Mit Bedauern bemerke ich, dass ich in meinem Aufsatze „Ueber die Zusammensetzung von Spectralfarben“ eine Anmerkung[1]) von Stokes übersehen habe, worin er erwähnt, die übervioletten Strahlen bis zur Linie *p*, also weiter, als es mir bisher durch die Glasapparate gelungen war, gesehen zu haben, und worin er über ihre Farbe angiebt, dass ihnen die Leuchtkraft *(luminousness)* der blauen, und das Röthliche *(ruddiness)* der violetten abgehe, übereinstimmend mit dem was ich gefunden.

Ganz ebenso verhält es sich nun mit den Strahlen, welche nicht durch Glas, wohl aber durch Quarz gehen. Auch diese sind dem Auge sichtbar, und erscheinen in derselben Farbe,
207 wenn sie lichtschwach sind, tief indigblau, wenn lichtstärker, weisslich blau. Mein Verfahren war zuerst dem schon früher beschriebenen ganz ähnlich. Der Spiegel des Heliostaten warf das Licht durch eine grössere Oeffnung des Fensterladens in das Zimmer. Es fiel zunächst auf eins der Quarzprismen, sodass es von diesem einfach gebrochen wurde, dann auf die Quarzlinse. In deren Brennpunkte stand ein Schirm, auf dem das in ein unreines Spectrum verwandelte Bild der Sonnenscheibe entworfen wurde. Der Schirm hatte einen Spalt, den man an eine beliebige Stelle des Spectrum bringen konnte. Das durch diesen Spalt dringende Licht betrachtete ich durch das zweite Quarzprisma. Stand der Spalt in dem übervioletten Theile jenes Spectrum, so sah ich ein schwaches gewöhnliches Spectrum von dem im Prisma und der Linse zerstreuten weissen Lichte herrührend, und jenseits des violetten

1) *Phil. Transactions* 1852, *p.* 558, *Note B.* (Ann. Ergänzbd. IV. 339).

Endes einen ovalen blauen Fleck, den das regelmässig gebrochene überviolette Licht bildete. Auch konnte ich in diesem, wenn er der Gegend der Linien *l* oder *m* angehörte, einiges von den Liniengruppen erkennen. War aber das Licht mehr von dem Ende des Spectrum entnommen, so war das nicht mehr möglich, weil sich mein Auge für Licht von so hoher Brechbarkeit nicht mehr adaptiren konnte. Für rothes Licht ist die längste Sehweite meines Auges etwa 8 Fuss, für violettes $1^1/_2$ Fuss, was mit Fraunhofer's Versuchen über die Dispersion des Auges nahe übereinstimmt; für das äusserste überviolette Licht schien sie mir weniger als 5 Zoll zu sein. In so grosser Nähe vom Spalt liess sich kein gutes Spectrum mehr bilden.

Um also die Empfindlichkeit des Auges für die einzelnen Theile des übervioletten Spectrum genauer zu untersuchen, musste ich etwas anders verfahren. Ich verengerte die Oeffnung im Fensterladen und ersetzte sie durch einen Spalt, der schmal genug war, um auf dem Schirme, wo das Spectrum projicirt war, die Liniensysteme des übervioletten Spectrum mit Hülfe von Chininpapier gut erkennen zu lassen; den Spalt in diesem Schirme machte ich dagegen etwas breiter, sodass 208
nun das erste objective Spectrum rein, das subjective unrein wurde. So behielt das durch den Spalt gehende überviolette Licht immer noch Helligkeit genug, um vom Auge empfunden zu werden. Es bildete nun keine begrenzte Figur mehr, sondern die bekannte Strahlenfigur, welche die Zerstreuungskreise von weit entfernten Lichtpunkten annehmen. Indem ich auf die vordere Fläche des Schirmes Chininpapier brachte, konnte ich die Gegend des Spectrum, welcher das durch den Schirm fallende Licht angehört, sehr gut ermitteln. Das Auge schien dabei für die äussersten übervioletten Strahlen des Sonnenlichtes keinen geringeren Grad von Empfindlichkeit zu haben als für die der Gegend von *m*. So weit Chininpapier das Vorhandensein von Strahlen anzeigte, konnte sie auch das Auge empfinden. Eine Aenderung der Farbe konnte ich in der ganzen Ausdehnung von *l* an bis zum Ende nicht bemerken, ausser dass die lichtschwächeren Stellen ein dem Violett ähnlicheres Indigblau zeigten. Alle indigblauen Strahlen werden

aber bei geringerer Helligkeit dem Violett ähnlicher. Bei gleicher Lichtstärke schien aber die Farbe der übervioletten Strahlen doch weisslicher zu sein als die der gewöhnlichen indigblauen.

Ich warf mir die Frage auf: Sieht die Netzhaut die übervioletten Strahlen unmittelbar, wie sie die anderen Farben des Spectrum sieht? oder fluorescirt sie unter ihrem Einflusse, und ist die blaue Farbe der übervioletten Strahlen Licht von geringerer Brechbarkeit, welches sich in der Netzhaut erst unter dem Einflusse der violetten Strahlen entwickelt?

Zur Entscheidung dieser Frage untersuchte ich, ob die Netzhaut aus dem Auge eines vor 18 Stunden gestorbenen Mannes Fluorescenz zeigte. Die ersten nach den von Stokes angegebenen Methoden vorgenommenen Versuche zeigten, dass, wenn auch Fluorescenz da sein sollte, diese äusserst schwach sei. Das zerstreute weisse Licht, welches von dem Prisma und der Linse ausging, machte die wahrgenommenen Spuren
209 von Fluorescenz der Netzhaut zweifelhaft. Ich griff also wieder zu der oft gebrauchten Methode, das Licht durch Abblenden der helleren Theile des Spectrum zu reinigen, ordnete die Theile des Apparates aber so, dass ich das überviolette Licht möglichst reichlich und auf einen kleinen Raum concentrirt erhielt. Ich kann diese Methode für die Untersuchung sehr schwacher Grade von Fluorescenz empfehlen. Sonnenlicht fiel vom Spiegel des Heliostaten durch eine weite Oeffnung auf die Quarzlinse, hinter der im Abstande der halben Brennweite ein Quarzprisma stand. Das Sonnenbild, welches jetzt in der Mitte noch weiss, an einem Rande blau, am andern gelb und roth war, wurde wieder auf einem Schirme mit breitem Spalt entworfen, sodass der sichtbare violette Rand des Sonnenbildes den Spalt gerade berührte und nur überviolettes Licht durch diesen fiel. Das durchgegangene Licht fiel in der Entfernung von etwa 4 Fuss auf das zweite Quarzprisma, hinter dem eine Glaslinse von 6 Zoll Brennweite stand. Diese entwarf auf Chininpapier ein sehr schwaches gewöhnliches Spectrum und jenseits des violetten Endes ein blendend helles blaues Oval, von dem übervioletten Lichte herrührend. Diffuses Licht fehlte in der Nachbarschaft des

Spectrum ganz und gar. Gewöhnliches weisses Papier, weisse Leinwand, Elfenbein in den Focus der übervioletten Strahlen gehalten, zeigten einen hellen bläulich weissen Fleck, der, durch ein Prisma angesehen, in Farben zerlegt wurde. Die bläuliche Farbe schien davon herzurühren, dass ein verhältnissmässig grosser Theil des übervioletten Lichtes ohne Aenderung seiner Brechbarkeit zerstreut wurde und in seiner natürlichen Farbe dem Auge sichtbar blieb. Durch ein Prisma gesehen, schied sich dieses überviolette Licht auch wieder als solches aus. Ueberhaupt konnte ich unter den weissen und hellgefärbten Körpern, die ich zur Hand hatte, keinen finden, der nicht Spuren von Fluorescenz gezeigt hätte. Stokes empfiehlt als nicht fluorescirend weisses irdenes Geschirr. Indessen zeigten mir sowohl die zu galvanischen Elementen gehörigen Thonbecher, als auch der matte Boden eines noch 210
nicht gebrauchten Porcellanschälchens noch schwache Spuren von Fluorescenz. Ob sie mit organischen Körpern verunreinigt waren, darüber kann ich nicht entscheiden. Dass Papier, Leinwand, Elfenbein, Haut und Nägel des Menschen, Holz u. s. w. schwach fluoresciren, hat bekanntlich Stokes schon ermittelt.

Hier zeigte nun auch die Netzhaut, zwischen zwei Glastafeln gelegt, ihre Fluorescenz deutlich, schwächer zwar als Papier, Leinewand und Elfenbein, aber stärker als Porcellan. Die Farbe des dispergirten Lichtes war weiss mit einem, wie mir schien, blaugrünen Scheine. Doch war der erleuchtete Fleck zu klein, das Licht zu schwach, als dass ich mit Sicherheit den Farbenton bezeichnen könnte. Durch das Prisma angesehen, fehlte dem fluorescirenden Flecke das Roth; es bildete sich nur ein schmaler orangener Rand, während im Spectrum sehr schwachen weissen Lichtes das Roth sonst leichter als die anderen Farben bemerkt zu werden pflegt. Wenn dem weissen Lichte das Roth genommen wird, wird es grünblau, was mit der directen Angabe des Auges über den Farbenton des dispergirten Lichtes der Netzhautsubstanz stimmt.

Die ziemlich gesättigt blaue Farbe der übervioletten Strahlen für das lebende Auge und die fast ganz weisse Farbe des dispergirten Lichtes der todten Netzhaut waren nur zu

verschieden, als dass die Ansicht haltbar wäre, dass die Netzhaut der übervioletten Strahlen nur nach ihrer Verwandlung in minder brechbares Licht empfände. Eine andere Frage ist die: Ist die Fluorescenz der Netzhaut stark genug, dass das dispergirte Licht die Farbe der übervioletten Strahlen merklich ändern kann, wenn es sich ihm im lebenden Auge beimischt?

Um dies beurtheilen zu können, verglich ich die Helligkeit des von der Netzhaut mit Aenderung der Brechbarkeit dispergirten Lichtes mit dem von einer weissen matten Porcellanfläche ohne Aenderung der Brechbarkeit dispergirten. Ich sah nach der Platte durch ein schwach brechendes Prisma,
211 um das unverändert dispergirte überviolette Licht von dem niederer Brechbarkeit zu trennen, welches auch die Porcellanplatte, wenn auch in geringerer Menge, gab.

Es erschien das von der Porcellanplatte unverändert dispergirte Licht ungefähr in derselben Stärke, wie das von der Netzhaut mit veränderter Brechbarkeit dispergirte, sodass man wohl annehmen kann, das Licht niederer Brechbarkeit, welches die lebende Netzhaut, von übervioletten Strahlen getroffen, von sich giebt, und welches sie doch höchst wahrscheinlich ebenso gut wahrnehmen wird, wie das von aussen kommende gewöhnliche Licht, sei stark genug, um die Farbe des direct empfundenen Antheils des übervioletten Lichtes merklich zu verändern.

Demnach würde die Umkehr in der Farbenreihe, welche beim übervioletten Lichte stattfindet, sich so erklären lassen, dass einer schwachen Empfindung violetter Farbe, welche diese Lichtstrahlen direct erregten, sich die Wahrnehmung des in der Retina durch Fluorescenz erzeugten grünlich weissen Lichtes zugesellte, und beide Farbenempfindungen vereinigt die weisslich indigblaue Färbung geben, welche die übervioletten Strahlen darbieten, wenn sie direct gesehen werden.

Die Resultate der beschriebenen Versuche sind also:

1) Die menschliche Netzhaut ist im Stande alle Strahlen des Sonnenlichtes direct wahrzunehmen, deren Brechbarkeit die der äussersten rothen Strahlen übertrifft.

2) Die Substanz der Netzhaut dispergirt unter dem Einflusse der übervioletten Strahlen gemischtes Licht niederer Brechbarkeit, dessen Gesammtfarbe nicht ganz reines (grünlich blaues) Weiss ist.
3) Die Fluorescenz der Netzhaut ist kein hinreichender Erklärungsgrund dafür, dass die übervioletten Strahlen überhaupt wahrgenommen werden.

Zusatz (1882). Die Hornhaut und Linse des lebenden Auges fluoresciren sehr stark, wenn man sie in einen Focus übervioletten Lichtes bringt. Dadurch entsteht ein verwaschener weissblauer Lichtschein im ganzen Gesichtsfelde, aber natürlich kein scharfes Bild des übervioletten Spectrum. Diese Art der Beleuchtung ist eines der besten Mittel, um die Lage der Krystallinse dicht hinter der Iris im lebenden Auge sichtbar zu machen. S. mein Handbuch der Physiologischen Optik. S. 266—267.

LIII.

Ueber die Messung der Wellenlänge des ultravioletten Lichtes, von E. Esselbach,

nebst einem Zusatz von **H. Helmholtz.**

Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Für December 1855. S. 757—764.

757 Da die bisher angewendeten Methoden zur Messung von Wellenlängen, auch die von Fraunhofer, welcher Gitterspectra dazu gebrauchte, wegen Lichtschwäche beim ultravioletten Lichte sich nicht als brauchbar erwiesen, musste eine andere Methode gewählt werden, welche auf ein von Talbot beobachtetes Phänomen gegründet ist.

Betrachtet man ein reines Spectrum im Fernrohr, während man von der Seite des Violett her mit einem dünnen Blättchen durchsichtiger Substanz die halbe Pupille bedeckt, so erscheint das Spectrum in helle und dunkle Streifen gleichmässig getheilt, welche abgesehen von ihrer regelmässigen Anordnung den Fraunhofer'schen Linien parallel und ähnlich sind. Mit der Dicke des Blättchens wächst ihre Zahl und ihre Feinheit. Sie entstehen durch Interferenz desjenigen Theiles des Strahlenbündels, welcher durch die dünne Platte gegangen ist, mit dem anderen Theile desselben Bündels, welcher daran vorbeigegangen ist.

Zu den Versuchen wurde ein aus Bergkrystalllinsen zusammengesetztes Fernrohr benutzt und zwei Prismen von demselben Material. Das Ultraviolett war dem Auge unmittelbar sichtbar, wenn man nach der von Helmholtz vorgeschlagenen Methode durch das Fernrohr und ein davor gesetztes Prisma einen Spalt betrachtete, durch den schon ultraviolettes Licht, isolirt durch das andere Prisma, hindurchdrang. Die Helligkeit war sogar für das blosse Auge grösser, als wenn in die Blendung des Oculars eine zwischen Quarzplatten eingeschlossene Schicht von Chininlösung als fluorescirender Schirm eingefügt wurde.

Ist a die Dicke der Platte, sind ferner λ_1 und λ_2 die Wellenlängen zweier Farben in Luft, n_1 und n_2 die Brechungsverhältnisse in der dünnen Platte, und m der Gangunterschied 758 der durch die Platte und neben ihr vorbeigegangenen Strahlen von der Wellenlänge λ_1, so ist

$$\frac{a}{\lambda_1} - \frac{an_1}{\lambda_1} = m.$$

Für jeden hellen Streifen im Spectrum muss m eine ganze Zahl sein, für den nächst benachbarten hellen Streifen um eine Einheit grösser oder kleiner. Ist also zwischen den Farben von der Wellenlänge λ_1 und λ_2 die Zahl der dunklen Streifen gleich p, so ist

$$\frac{a}{\lambda_2} - \frac{an_2}{\lambda_2} = m + p.$$

Wählt man zuerst zwei Farben, deren Wellenlängen und Brechungsverhältnisse bekannt sind (es wurden genommen Fraunhofer's Wellenlänge für C und H), so kann man aus diesen beiden Gleichungen die Constanten a und m berechnen. Stellt man dann dieselbe Gleichung auf für eine Farbe von unbekannter Wellenlänge und zählt die Streifen zwischen ihr und λ_1, so giebt die Gleichung den Werth ihrer Wellenlänge, vorausgesetzt, dass man ihr Brechungsverhältniss an der Platte kennt.

Weil dem Autor keine Methode bekannt war, den Brechungsindex eines Strahles in einem dünnen Blättchen zu bestimmen, ohne dass die Wellenlängen gegeben waren, so wurde ein Bergkrystallplättchen genommen, welches senkrecht gegen die Krystallaxe geschnitten war, da ja doch die Brechungsverhältnisse der betreffenden Strahlen im Bergkrystall gleichzeitig gemessen werden sollten. Mit dem vorhandenen Apparate war nur die vierte Decimale zu erreichen, was aber für die Bestimmung der Wellenlängen hier genügt. Die Werthe der Brechungscoëfficienten des ordentlichen Strahles im Bergkrystall, welche in der folgenden Tabelle unter n angegeben sind, sind Mittelwerthe aus Bestimmungen an den drei Winkeln desselben Prisma angestellt. Sie sind constant 0,0004 höher als

Rudberg's, welche ich zur Vergleichung daneben gesetzt habe. Die festen Linien bis P sind nach Stokes benannt, mit Q und R habe ich zwei der stärksten Linien des nur durch Quarzapparate sichtbaren Theiles des Ultraviolett bezeichnet.
759 Mit p ist die Zahl der Talbot'schen Streifen zwischen je zwei aufeinander folgenden Fraunhofer'schen Linien bezeichnet, wobei die Resultate mehrerer Zählungen angegeben sind. Neben die von mir berechneten Wellenlängen habe ich zum Vergleiche die von Fraunhofer für das sichtbare Spectrum gestellt, von denen die für C und H zur Bestimmung der Constanten in der Rechnung benutzt sind. Man sieht, dass die Uebereinstimmung beider Reihen sehr gross ist. In der letzten Columne sind die Wellenlängen nach der Annäherungsformel von Cauchy

$$n_{,,} - n_{,} = c\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right)$$

berechnet, wobei die Constanten c und λ_1 aus den Werthen von Fraunhofer für C und H berechnet wurden. Man sieht, dass diese Formel im ultravioletten Spectrum ziemlich ebenso gut mit den Messungen stimmt wie im sichtbaren.

Name der Linie	Brechungsverhältniss n nach meinen Messungen	Brechungsverhältniss n nach Rudberg	p	Wellenlänge nach meinen Messungen in Millimetern	Fraunhofer's Werthe der Wellenlängen	Wellenlängen nach Cauchy's Formel
B	1,5414	1,5409	7,5—7	0,0006874	0,0006878	0,0006990
C	1,5424	1,5418	20—19—19,5		6564	
D	1,5446	1,5442	22,5—22—23	5886	5888	5819
E	1,5476	1,5471	18,5—18,5	5260	5260	5233
F	1,5500	1,5496	31—31—31	4845	4843	4839
G	1,5546	1,5542	24,5—25—25	4287	4291	4278
H	1,5586	1,5582	11—11		3929	
L	1,5605		11,5—11,5—(7)	3791		3824
M	1,5621		14,5—15,5—15	3657		3741
N	1,5646		14,5—14,5	3498		3532
O	1,5674		8—7,5—8	3360		3383
P	1,5690		7—7	3290		3307
Q	1,5702		18	3232		3243
R	1,5737			3091		3108

Man sieht, dass in Bezug auf die Wellenlängen das Intervall, welches durch das Ultraviolett zum Spectrum hinzukommt, allerdings kleiner ist, als die Ausbreitung im Quarzspectrum 760 es erwarten liess. Das 6 bis 8mal so lange Ultraviolett des elektrischen Kohlenlichtes wird dem bisher gewonnenen aber, wenn Cauchy's Formel auch dafür gilt, etwa noch eine Octave hinzufügen.

Die Methode der Linienzählung wird sich in gewissen Fällen mit Vortheil zur Bestimmung von Brechungsindices und Dispersionsconstanten verwenden lassen, wenn man die Wellenlängen als bekannt voraussetzt, namentlich wo man nicht mehr Material hat, als um eine dünne Platte zu bilden, welche die halbe Pupille bedeckt, und zweitens bei stark absorbirenden Mitteln. Stokes hat ausserdem darauf aufmerksam gemacht, dass man den ersten Brechungsindex erhält, wenn man die Plattendicke durch Neigung verändert.

Zusatz von H. Helmholtz.

Die Messungen des Hrn. Esselbach machen es möglich, eine ausgedehntere Vergleichung der Verhältnisse der Lichtwellenlängen mit denen der Tonintervalle anzustellen, als es bisher möglich war. Ich bemerke, dass ich selbst vor einiger Zeit die Wellenlänge der Linie A im äussersten Roth nach Fraunhofer's Methode an einem Spectrum bestimmt habe, von dem alles Licht mit Ausnahme des äussersten Roth durch Anwendung von zwei Prismen und zwei Schirmen abgeblendet war. Ich fand diese Wellenlänge gleich 0,0007617 mm. Es war aber jenseits A noch ein Streifen rothen Lichtes mit einigen Linien darin sichtbar, der dem Zwischenraume von A und B etwa gleich kam.

In der folgenden Tabelle habe ich das Licht der Linie A dem Tone G entsprechend gesetzt, und die den einzelnen halben Tönen entsprechenden Farben daneben gestellt. In der letzten Rubrik sind die Fraunhofer'schen Linien bei den ihnen zunächst liegenden Tönen aufgeführt.

In dieser Tabelle stellt sich sehr deutlich heraus, wie wenig Analogie zwischen der Tonempfindung und der Farbenempfindung besteht. In der Gegend des Gelb und Grün sind

die Farbenübergänge ausserordentlich schnell, an den Enden des Spectrum ausserordentlich langsam. Dort sind sämmtliche Uebergangsstufen zwischen Gelb und Grün in die Breite eines
761 kleinen halben Tones zusammengedrängt, hier befinden sich Intervalle von der Grösse einer kleinen oder grossen Terz, in denen das Auge keine Veränderung des Farbentones wahrnimmt.

Der ganze sichtbare Theil des Sonnenspectrum umfasst etwa eine Octave und eine Quarte.

Ton	Wellenlänge		Entsprechende Farbe	Frauenhofer'sche Linien mit ihrer Wellenlänge
	$c = 1$	$G = 7617$		
Fis	$^{64}/_{45}$	8124	Ende des Roth	
g	$^{4}/_{3}$	7617	Roth	*A* 7617
Gis	$^{32}/_{25}$	7312	Roth	*B* 6878
A	$^{6}/_{5}$	6771	Roth	
B	$^{10}/_{9}$	6347	Rothorange	*C* 6564
H	$^{16}/_{25}$	6094	Orange	
c	1	5713	Gelb	*D* 5888
cis	$^{24}/_{25}$	5217	Grün	*E* 5260
d	$^{8}/_{9}$	5078	Grünblau	
es	$^{5}/_{6}$	4761	Cyanblau	*F* 4843
e	$^{4}/_{5}$	4570	Indigoblau	
f	$^{3}/_{4}$	4285	Violett	*G* 4291
fis	$^{32}/_{45}$	4062	Violett	
g	$^{2}/_{3}$	3808	Uebervioletl	*H* 3929
gis	$^{16}/_{25}$	3656	Uebervioletl	*M* 3657
a	$^{3}/_{5}$	3385	Uebervioletl	
b	$^{5}/_{9}$	3173	Uebervioletl	
h	$^{8}/_{15}$	3047	Ende des Sonnenspectrum	*R* 3091

Eine ausführlichere Beschreibung der hier erwähnten Versuche hat Esselbach in Poggendorff's Annalen Bd. 98 S. 513 und 527 gegeben.

LIV.

Mathematisch-physikalische Excurse.

Aus dem „Handbuch der Physiologischen Optik", Bd. IX von G. Karsten's allgemeiner Encyklopädie der Physik. Leipzig 1867, bei Leopold Voss.

Zu § 9. 42

Darstellung der Gesetze der Lichtbrechung in centrirten Systemen brechender und spiegelnder Kugelflächen.

Brechung an einer Kugelfläche. Genaues Gesetz.

Es sei a der Mittelpunkt der Kugelfläche cb, und p ein ausserhalb der Kugel liegender leuchtender Punkt. Ein von p ausgehender Lichtstrahl, welcher in der geraden Linie pa auf den Mittelpunkt der Kugel zugeht, trifft die Kugelfläche normal und geht deshalb ungebrochen weiter in der Verlängerung von ap nach q hin. Ein anderer Lichtstrahl pc treffe die Kugelfläche in c und werde hier gebrochen. Unsere nächste Aufgabe ist, seinen Weg nach der Brechung zu bestimmen. Nach dem oben angeführten Bre-

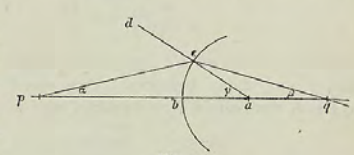


Fig. 1.

chungsgesetze muss derselbe zunächst in der Einfallsebene bleiben, d. h. in der durch den einfallenden Strahl und das Einfallsloth gelegten Ebene. Da der Radius stets auf demjenigen Theile der Kugeloberfläche, zu welchem er hingeht, senkrecht steht, so ist in diesem Falle das Einfallsloth cd die Verlängerung des Radius ac, und die Einfallsebene die durch pc und ad gelegte. In derselben liegt auch die ganze Linie pq, da zwei ihrer Punkte p und a darin liegen. Der gebrochene Strahl muss also die Linie pa, wenn sie nach beiden Seiten in das Unendliche verlängert gedacht wird, in irgend einem Punkte q schneiden, dessen Entfernung von b zunächst bestimmt werden soll. Sollte der Strahl der Linie pa parallel sein, so können wir den Durchschnittspunkt q als unendlich entfernt betrachten.

Die Lage des Punktes q wird nun durch die Bedingung gegeben, dass

$$n_{,} \sin(p\,c\,d) = n_{,,} \sin(q\,c\,a) \quad \Big\} \qquad (1),$$

wo $n_{,}$ das Brechungsverhältniss des Mediums ist, aus welchem das Licht kommt, $n_{,,}$ desjenigen, in welches es eintritt.

Da sich in geradlinigen Dreiecken die Sinus der Winkel wie die gegenüberliegenden Seiten verhalten, ist in dem Drei-
43 ecke $a\,d\,c$

$$\frac{\sin(p\,c\,a)}{\sin(c\,p\,a)} = \frac{a\,p}{a\,c},$$

und in dem Dreiecke $a\,q\,c$

$$\frac{\sin(q\,c\,a)}{\sin(c\,q\,a)} = \frac{a\,q}{a\,c}.$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen durch die zweite dividiren und dabei bemerken, dass der Sinus des Winkels $p\,c\,a$ gleich dem seines Nebenwinkels $p\,c\,d$ ist, so erhalten wir:

$$\frac{\sin(p\,c\,d)}{\sin(q\,c\,a)} \cdot \frac{\sin(c\,q\,a)}{\sin(c\,p\,a)} = \frac{a\,p}{a\,q}.$$

Nach Gleichung 1) ist

$$\frac{\sin(p\,c\,d)}{\sin(q\,c\,a)} = \frac{n_{,,}}{n_{,}},$$

und in dem Dreieck $p\,c\,q$ ist

$$\frac{\sin(c\,q\,a)}{\sin(c\,p\,a)} = \frac{c\,p}{c\,q}.$$

Die drei letzten Gleichungen geben daher

$$\frac{n_{,,} \cdot c\,p}{n_{,} \cdot c\,q} = \frac{a\,p}{a\,q} \quad \Big\} \qquad (2).$$

Für $a\,p = \infty$ wird daraus:

$$n_{,} \cdot c\,q = n_{,,} \cdot a\,q \quad \Big\} \qquad (2a),$$

da alsdann bis auf unendlich kleine Grössen

$$\frac{c\,p}{a\,p} = 1.$$

Brechung an einer Kugelfläche, angenähertes Gesetz für kleine Einfallswinkel und schwach divergente Strahlen.

Wenn wir uns auf diejenigen Strahlen beschränken, welche nahe senkrecht auf die brechende Fläche, also sehr nahe der Axe auf sie fallen, so sehen wir aus der Fig. 1, dass, wenn 44
der Punkt c sehr nahe an b rückt, das Verhältniss $c\,p/c\,q$ übergeht in $b\,p/b\,q$. Die Gleichung 2) wird dann also

$$\frac{n_{,,} \cdot b\,p}{n_{,} \cdot b\,q} = \frac{a\,p}{a\,q} \quad \Big\} \qquad (2b).$$

Bezeichnen wir den Radius $a\,b$ der brechenden Fläche mit r, die Entfernung

$b\,p$ mit $f_{,}$,
$b\,q$ mit $f_{,,}$,
$a\,p$ mit $g_{,}$,
$a\,q$ mit $g_{,,}$,

sodass also:

$$\begin{aligned} f_{,} + r &= g_{,} \\ f_{,,} &= g_{,,} + r \end{aligned} \quad \Big\} \qquad (2\,c),$$

so wird die Gleichung 2b)

$$\frac{n_{,,} f_{,}}{n_{,} f_{,,}} = \frac{f_{,} + r}{f_{,,} - r},$$

oder

$$\frac{n_{,,} (g_{,} - r)}{n_{,} (g_{,,} + r)} = \frac{g_{,}}{g_{,,}}.$$

Daraus erhält man durch eine leichte Umformung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{n_,}{f_,}+\frac{n_{,,}}{f_{,,}}&=\frac{n_{,,}-n_,}{r}\\ \frac{n_{,,}}{g_,}+\frac{n_,}{g_{,,}}&=\frac{n_{,,}-n_,}{r}\end{aligned}\right\}\quad\text{oder}\quad(3),$$

aus denen die gesuchte Grösse $f_{,,}$ oder $g_{,,}$ zu bestimmen ist.

Nennen wir die Werthe von $f_{,,}$ und $g_{,,}$, welche einer unendlichen Entfernung des leuchtenden Punktes entsprechen, beziehlich $F_{,,}$ und $G_{,,}$, so erhalten wir, da $f_, = \infty$ und $g_, = \infty$:

$$\left.\begin{aligned}F_{,,}&=\frac{n_{,,}r}{n_{,,}-n_,}\\ G_{,,}&=\frac{n_,r}{n_{,,}-n_,}\end{aligned}\right\}\quad(3\,a).$$

Setzen wir $f_{,,}$ und $g_{,,}$ unendlich gross und bezeichnen für diesen Fall $f_,$ und $g_,$ mit $F_,$ und $G_,$, so ist:

$$\left.\begin{aligned}F_,&=\frac{n_,r}{n_{,,}-n_,}=G_{,,}\\ G_,&=\frac{n_{,,}r}{n_{,,}-n_,}=F_{,,}\end{aligned}\right\}\quad(3\,b)$$

und nun können wir den Gleichungen 3) die einfache Form geben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{F_,}{f_,}+\frac{F_{,,}}{f_{,,}}&=1\\ \frac{G_,}{g_,}+\frac{G_{,,}}{g_{,,}}&=1\end{aligned}\right\}\quad(3\,c).$$

45

Die erste dieser Gleichungen giebt, nach $f_,$ und nach $f_{,,}$ aufgelöst, folgende Formeln zur Berechnung dieser Grössen:

$$\left.\begin{aligned}f_,&=\frac{F_,f_{,,}}{f_{,,}-F_{,,}}\\ f_{,,}&=\frac{F_{,,}f_,}{f_,-F_,}\end{aligned}\right\}\quad(3\,d).$$

Findet man negative Werthe dieser Grössen, so bedeutet es, dass sie auf der entgegengesetzten Seite der brechenden Fläche liegen, als in Fig. 26 angenommen ist.

Bemerkungen. 1) Wenn das Licht nicht von p im ersten Medium, sondern von q im zweiten ausgeht, wird für den Strahl

cq Fig. 26, der vorher der gebrochene Strahl, jetzt der einfallende ist, cp der zugehörige gebrochene sein, welcher vorher der einfallende war. Sind also die nahe senkrecht von p auf die brechende Fläche fallenden Strahlen in q vereinigt, so werden die von q nahe senkrecht auffallenden in p vereinigt werden. Daraus ergeben sich nun sogleich die Formeln für den Fall, dass die Lichtstrahlen auf die concave Seite der Kugelfläche fallen. Man braucht nur das erste Medium jetzt das zweite zu nennen und umgekehrt, und dem entsprechend alle Indices der Buchstaben zu vertauschen. Die Grundgleichungen 3) werden alsdann

$$\frac{n_{,,}}{f_{,,}}+\frac{n_,}{f_,}=\frac{n_,-n_{,,}}{r}$$
$$\frac{n_,}{g_{,,}}+\frac{n_{,,}}{g_,}=\frac{n_,-n_{,,}}{r}.$$

Man braucht also für eine concave brechende Fläche nur den Krümmungsradius r negativ zu setzen, so gilt auch für sie die Formel 3), und natürlich gelten ebenso auch die daraus abgeleiteten 3 a), 3 b), 3 c) und 3 d).

2) Wenn q das Bild von p ist, ist auch p das Bild von q. Um diese gemeinsame Beziehung auszudrücken, nennt man sie conjugirte Vereinigungspunkte, wobei man es zweifelhaft lässt, von welchem beider Punkte das Licht ausgeht. Ebenso 46
ist es für die Brechungsgesetze einerlei, ob der Licht aussendende Punkt ein materieller, Licht erzeugender oder auffallendes Licht zerstreuender Punkt sei, oder nur der Vereinigunspunkt von gebrochenen Strahlen. Daher kann der leuchtende Punkt auch ein virtueller Vereinigungspunkt solcher Strahlen sein, und in der Verlängerung der Strahlen hinter der brechenden Fläche liegen.

3) Wenn r unendlich gross, d. h. die brechende Fläche eben wird, so werden nach 3 a) auch die Brennweiten unendlich gross, und die erste der Gleichungen 3) verwandelt sich in

$$\left.\begin{aligned}\frac{n_,}{f_,}+\frac{n_{,,}}{f_{,,}}&=0\\ f_{,,}&=-\frac{n_{,,}}{n_,}f_,\end{aligned}\right\}\quad\text{oder}\quad(3\,e).$$

Das Bild liegt also auf derselben Seite von der brechenden Fläche, aber in einer anderen Entfernung.

4) Ich bemerke noch, dass auch die Gesetze der Reflexion der Strahlen an gekrümmten Spiegeln aus den gegebenen Formeln 3) hervorgehen, wenn man $n_{,,} = -n_{,}$ setzt. Gewöhnlich zieht man es jedoch vor, für solche Spiegel die Bezeichnung anders zu wählen. Setzen wir in der ersten Gleichung 3) statt $n_{,,}$ überall $-n_{,}$, so erhalten wir

$$\frac{1}{f_{,}} - \frac{1}{f_{,,}} = -\frac{2}{r}.$$

Ist r nach unserer bisherigen Bezeichnung positiv, d. h. der Spiegel convex, so würde für $f_{,} = \infty$ der Werth von $f_{,,}$ werden gleich $r/2$, also positiv, d. h. der Vereinigungspunkt der Strahlen liegt hinter der spiegelnden Fläche, ist nur virtuell. Wäre der Spiegel concav, r also negativ, so wird auch $f_{,,}$ negativ, das Bild des leuchtenden Punktes liegt vor dem Spiegel und ist reell. Gewöhnlich zieht man vor, die Entfernungen der reellen Bilder vom Spiegel positiv zu nennen. Man giebt also dem $f_{,,}$ und dem Radius der spiegelnden Fläche r entgegengesetzte Vorzeichen als bei brechenden Flächen, und schreibt demnach die Grundgleichung

$$\frac{1}{f_{,}} + \frac{1}{f_{,,}} = \frac{2}{r}.$$

Zusatz (1882) die Aenderung der Divergenz der Strahlen betreffend.

In Fig. 26 misst der Winkel cpa, den wir mit α bezeichnen, die Divergenz des von dem leuchtenden Punkte p ausgehenden Strahles cp von dem ungebrochenen Strahle pa, und der Winkel $cqb = \beta$ die Convergenz des zugehörigen gebrochenen Strahles gegen denselben Strahl pa. Wenn der längs der brechenden Fläche zu messende Bogen bc verschwindend klein ist gegen r, f_1 und f_2, und wenn bc, dessen Länge wir mit σ bezeichnen wollen, also von einer zu pq senkrecht gerichteten kleinen geraden Linie nicht merklich unterschieden

ist, so ergiebt die erste der Gleichungen 3,, nachdem wir sie mit σ multiplicirt und die Tangenten der sehr kleinen Winkel α, β und $cab = \gamma$ durch ihre Bögen ersetzt haben:

$$\left.\begin{aligned} n_{,}\alpha + n_{,,}\beta &= (n_{,,} - n_{,})\gamma \\ &= (n_{,,} - n_{,})\frac{\sigma}{r}. \end{aligned}\right\} \quad (3\,\mathrm{f})$$

Bezeichnen wir nun das hier vorkommende Product aus dem Divergenzwinkel α mit dem Brechungsverhältniss n, des Medium, in dem die divergirenden Strahlen verlaufen, als die optische Divergenz der Strahlen, ähnlich $n_{,,}\beta$ als die optische Convergenz, beziehlich — $n_{,,}\beta$ als die optische Divergenz der Strahlen im zweiten Medium, so zeigt sich, dass die Aenderung der optischen Divergenz eine von dem Werthe dieser Divergenz unabhängige und nur von der Bogendistanz σ abhängige Grösse ist.

Die Divergenz vermindert sich, wenn $(n_{,,} - n_{,})$ und r gleiches Zeichen haben, d. h. wenn das stärker brechende Medium an der concaven Seite der brechenden Fläche liegt.

Solche brechende Flächen können als sammelnde bezeichnet werden.

Die optische Divergenz der Strahlen wächst, wenn das stärker brechende Medium auf der convexen Seite liegt; solche Flächen sind zerstreuende.

Ebene Flächen ändern die optische Divergenz nahehin senkrecht einfallender Strahlenbündel nicht.

Für Kugelspiegel ist das Gesetz noch einfacher, indem die Verminderung der Divergenz einfach dem doppelten Centriwinkel gleich ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{2\sigma}{r} \end{aligned}\right\} \quad (3\,\mathrm{g})$$

Da sich an einer ebenen Fläche die optische Divergenz nicht ändert, erhält man für eine planconvexe oder planconcave Linse keine Aenderung der optischen Divergenz beim Durchgang durch die ebene Fläche, also bei einer dünnen Linse aus Gleichung 3f, wenn man mit $n_{,}$ dividirt:

$$\alpha + \beta = \frac{n_{,,} - n_{,}}{n_{,} r}\sigma = \frac{\sigma}{F}.$$

ganz analog dem Verhalten der Kugelspiegel.

Für Anfänger, denen man nur die Gesetze der Brechung für sehr dünne Linsen entwickeln will, kann man dieses Gesetz der Aenderung der Divergenz leicht direct entwickeln, indem man die brechende Stelle der Linse als ein schwach prismatisches Glasstück betrachtet, und die Ablenkung der Strahlen, die unter kleinen Einfallswinkeln durch ein solches gehen, zuerst entwickelt. Diese Ablenkung ist bekanntlich für kleine Einfallswinkel unabhängig von der Grösse des Einfallswinkels und gleich $(n-1)\,\omega$, wenn ω der brechende Winkel des Prisma und n sein Brechungsverhältniss ist. Ich finde, dass durch dieses Verfahren die Analogie der Wirkungen verschiedener Arten von Linsen und Spiegeln, sowie das Gesetz für die Lage der Bilder am einfachsten und übersichtlichsten hervortritt.

1867.

Abbildung flächenhafter Objecte durch eine brechende Kugelfläche.

Ist neben dem bisher betrachteten einzelnen leuchtenden Punkte p noch ein zweiter s vor der brechenden Kugelfläche in gleicher Entfernung wie p von deren Mittelpunkt a, so wird s sein Bild t in der durch den Mittelpunkt a gezogenen geraden Linie haben und at wird gleich av werden. Es liegen also die Objectpunkte auf einer, die Bildpunkte auf einer anderen, mit der brechenden Fläche concentrischen Kugelfläche.



Fig. 2.

Da man das Bild jedes Objectpunktes, der auf der ersteren Fläche liegt, dadurch findet, dass man von ihm eine gerade Linie nach dem Krümmungsmittelpunkt zieht und diese verlängert, bis sie die kugelige Bildfläche trifft, so ist das Bild ein geometrisch ähnliches Abbild des Objectes, dessen entsprechende lineare Dimensionen $\beta_{'}$ und $\beta_{''}$ sich wie die Abstände vom Kugelmittelpunkte $g_{'}$ und $g_{''}$ verhalten. Da das

Bild verkehrt ist, wenn $g_{'}$ und $g_{''}$ gleiches Zeichen haben, schreiben wir

$$-\frac{\beta_{'}}{\beta_{''}} = \frac{g_{'}}{g_{''}} \qquad (6.)$$

Nun ist aber zu bemerken, dass jeder leuchtende Punkt des Objectes nur dann ein annähernd punktförmiges Bild nach der Brechung hat, wenn die Einfallswinkel für sämmtliche Punkte des kleinen zur Brechung der Strahlen benutzten Stückes der Kugelfläche hinreichend klein sind. Daraus folgt, dass der Winkel $sap = rat$ sehr klein bleiben muss. Dann aber sind die dem Object und Bild angehörigen sehr kleinen Theile der beiden Kugelflächen nicht merklich von einer zur Axenlinie ap normal gerichteten kleinen ebenen Fläche verschieden, und 47
man erlaubt sich also die Krümmung derselben zu vernachlässigen und sie als eben anzusehen. Die Axe ab wird dann auch bei einer einzelnen brechenden Fläche dadurch annähernd festgelegt sein, dass der Punkt b, wo sie die brechende Fläche schneidet, nahe der Mitte ihrer Apertur gelegen sein muss. Genau dieselbe Betrachtung lässt sich auf die Bilder von Kugelspiegeln anwenden.

Die Gleichung 6) verbunden mit 2c), 3a), 3b) und 3c), ergiebt:

$$\frac{\beta_{''}}{\beta_{'}} = \frac{G_{''}}{G_{'}-g_{'}} = \frac{G_{''}-g_{''}}{G_{'}} \qquad (6a)$$

oder

$$\frac{\beta_{''}}{\beta_{'}} = \frac{F_{'}}{F_{'}-f_{'}} = \frac{F_{''}-f_{''}}{F_{''}} \qquad (6b).$$

Wenn die brechende Fläche eben ist, werden die Brennweiten unendlich gross, und die Gleichung 6b) verwandelt sich in:

$$\frac{\beta_{''}}{\beta_{'}} = 1 \qquad (6c).$$

Das Bild, welches eine ebene brechende Fläche entwirft, 48
ist also so gross wie sein Object.

Verallgemeinerung der bisher gewonnenen Formeln. Wir wollen zunächst die (vorher definirten) Begriffe der Brennpunkte, Hauptpunkte und Knotenpunkte auf unseren Fall anwenden.

Die Brennpunkte sind diejenigen, in denen sich Strahlen vereinigen, die im ersten oder zweiten Mittel parallel der Axe verlaufen. Die Entfernungen der beiden Brennpunkte $F_{'}$ und $F_{''}$ von dem Scheitel der brechenden Fläche, und $G_{'}$ und $G_{''}$ von deren Mittelpunkte sind schon oben in den Gleichungen 3a) und 3b) gefunden, und dadurch ist die Lage der Brennpunkte bestimmt.

Die Brennebenen sind senkrecht zur Axe durch die Brennpunkte gelegte Ebenen. Da das Bild jedes Brennpunktes in unendlicher Entfernung liegt, so muss dasselbe auch für solche Punkte der Brennebenen der Fall sein, welche der Axe nahe genug sind, um regelmässige Bilder geben zu können. Strahlen, die von einem Punkte einer Brennebene ausgehen, werden also nach der Brechung parallel sein.

Die Hauptpunkte und die durch sie senkrecht zur Axe gelegten Hauptebenen sind dadurch charakterisirt, dass Bilder, die in den Hauptebenen liegen, gleich gerichtet und gleich gross sind. Für die Hauptebenen muss also $\beta_{'} = \beta_{''}$ sein. Das kann nach den Gleichungen 6b) nur der Fall sein, wenn $f_{'} = 0$ und $f_{''} = 0$, was laut derGleichungen 3d) stets gleichzeitig der Fall sein muss. Beide Hauptpunkte fallen also in unserem Falle zusammen in den Punkt, wo die Axe die brechende Fläche schneidet, und dieser Hauptpunkt ist sein eigenes Bild.

Die Knotenpunkte sind dadurch definirt, dass jeder Strahl, der vor der Brechung durch den ersten geht, nach der Brechung durch den zweiten geht, und dabei seiner ersten Richtung parallel bleibt. Auch diese beiden fallen in einen Punkt, nämlich den Mittelpunkt der Kugel zusammen. Denn ein Strahl, der im ersten Mittel auf den Mittelpunkt der Kugel zugeht, geht ungebrochen durch die Fläche, geht also auch im zweiten Mittel durch den Mittelpunkt, und ist seiner früheren Richtung parallel.

Die Lage der conjugirten Bilder bezogen auf andere conjugirte Bilder.

Wir haben unter 3c) zwei Gleichungen ganz ähnlicher Form aufgestellt, bei denen aber die Entfernungen der Bilder von verschiedenen Punkten aus gemessen waren. Gleichungen von derselben einfachen Form erhalten wir immer, wenn wir die Entfernungen der Vereinigungspunkte, welche dem ersten Mittel

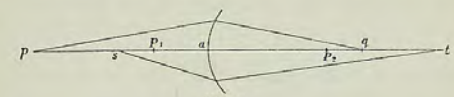


Fig. 3.

angehören, von einem beliebigen Punkte s Fig. 3 der Centrallinie ap an messen, und von dem Bilde t dieses Punktes aus die Entfernungen der Vereinigungspunkte, die dem zweiten Mittel angehören.

Ist also t das Bild von s, q das Bild von p, P_1 der erste, P_2 der zweite Hauptbrennpunkt, und bezeichnen wir:

$$\begin{array}{llll} sa & \text{mit } f_1, & P_1 a & \text{mit } F_1, \\ ta & \text{mit } f_2, & P_2 a & \text{mit } F_2, \\ pa & \text{mit } \varphi_1, & & \\ qa & \text{mit } \varphi_2, & & \\ ps & \text{mit } h_1, & qt & \text{mit } -h_2, \\ P_1 s & \text{mit } -H_1, & qP_2 & \text{mit } -H_2, \end{array}$$

so ist:

$$\alpha) \quad \frac{F_1}{f_1} + \frac{F_2}{f_2} = 1, \qquad 49$$

$$\beta) \quad \frac{F_1}{\varphi_1} + \frac{F_2}{\varphi_2} = 1,$$

$$\gamma) \quad \varphi_1 - f_1 = h_1,$$

$$\delta) \quad \varphi_2 - f_2 = h_2,$$

$$\varepsilon) \quad F_1 - f_1 = H_1,$$

$$\zeta) \quad F_2 - f_2 = H_2.$$

Setzt man aus γ und δ die Werthe von φ_1 und φ_2 in β, so erhält man:

$$\frac{F_1}{h_1 + f_1} + \frac{F_2}{h_2 + f_2} = 1$$

oder

$$F_1 (h_2 + f_2) + F_2 (h_1 + f_1) = (h_1 + f_1)(h_2 + f_2).$$

Subtrahirt man hiervon die aus α abzuleitende Gleichung:

$$F_1 f_2 + F_2 f_1 = f_1 f_2,$$

so erhält man als Rest:

$$F_1 h_2 + F_2 h_1 = h_1 h_2 + h_1 f_2 + h_2 f_1$$

oder

$$(F_1 - f_1) h_2 + (F_2 - f_2) h_1 = h_1 h_2,$$

was vermöge der Gleichungen ε und ζ sich verwandelt in:

oder
$$\left.\begin{aligned} H_1 h_2 + H_2 h_1 &= h_1 h_2 \\ \frac{H_1}{h_1} + \frac{H_2}{h_2} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (7).$$

Wenn man also als Ausgangspunkte für die Messung der Abstände irgend ein Paar zusammengehöriger Vereinigungspunkte von Lichtstrahlen benutzt, kommt man immer wieder zu derselben einfachen Formel zurück. Da in der brechenden Fläche selbst und in ihrem Mittelpunkte der leuchtende Punkt mit seinem Gegenstande zusammenfällt, sind diese beiden Punkte ihre eigenen Bilder, und die Formeln 3c) bilden deshalb nur specielle Fälle von 7).

Einfachste Formeln für die Lage der Bilder bezogen auf die Brennpunkte.

Wenn man den Punkt s in den ersten Brennpunkt verlegt, wird die Gleichung 7) unbrauchbar, weil H_2 und h_2 unendlich gross werden. Man findet aber die entsprechende Gleichung leicht aus der ersten der Gleichungen 3d)

$$f_{,} = \frac{F_{,} f_{,,}}{f_{,,} - F_{,,}}.$$

Zieht man von beiden Seiten $F_{,}$ ab, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} f_{,} - F_{,} &= \frac{F_{,} F_{,,}}{f_{,,} - F_{,,}} \end{aligned}\right\} \qquad (7a).$$

Setzen wir hier $f_{,} - F_{,} = l_{,}$, und $f_{,,} - F_{,,} = l_{,,}$, wobei $l_{,}$ die Entfernung des leuchtenden Punktes vom ersten Brennpunkte aus nach vorn gerechnet, $l_{,,}$ die Entfernung seines Bildes vom zweiten Brennpunkte aus nach hinten sein würde, so erhalten

wir die einfachste Form, in der sich das Gesetz für die Lage der Bilder darstellen lässt:

$$\left.\begin{aligned} l_{,} l_{,,} &= F_{,} F_{,,} \end{aligned}\right\} \qquad (7b).$$

In derselben Bezeichnungsweise wird das Gesetz für die 50
Grösse der Bilder, die Gleichung 6b):

oder
$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta_{,}}{\beta_{,,}} &= -\frac{l_{,}}{F_{,}} \\ \frac{\beta_{,,}}{\beta_{,}} &= -\frac{l_{,,}}{F_{,,}} \end{aligned}\right\} \qquad (7c).$$

Beziehung zwischen der Grösse der Bilder und Convergenz der Strahlen.

Es sei in Fig. 4 pq die Axe, sp ein Object und qr sein Bild. Wir wollen die Winkel α_1 und α_2 bestimmen, welche einer der von p ausgehenden Strahlen pc vor und nach der

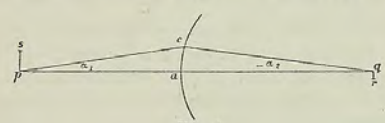


Fig. 4.

Brechung mit der Axe macht, und diese Winkel positiv rechnen, wenn der Strahl sich in Richtung der als positiv gerechneten Bilder von der Axe entfernt. Es ist also $\angle\, cpa = \alpha_1$, $\angle\, cqa = -\alpha_2$. Es sei ferner, wie bisher, $sp = \beta_1$, $qr = -\beta_2$, $ap = f_1$, $aq = f_2$. Da die Einfallswinkel der Strahlen an der brechenden Fläche immer sehr klein bleiben sollen, muss $c\,a$ ein sehr kleiner Bogen sein, den wir annähernd als eine gegen die Axe senkrechte gerade Linie betrachten können. Wir können also setzen:

$$ac = f_1 \operatorname{tg} \alpha_1,$$
$$ac = -f_2 \operatorname{tg} \alpha_2,$$

also

$$\left.\begin{aligned} f_1 \operatorname{tg} \alpha_1 &= -f_2 \operatorname{tg} \alpha_2 \end{aligned}\right\} \qquad (A.)$$

Wir haben ferner nach 3d) und 6b):

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{F_2}{f_1 - F_1} = \frac{f_2 - F_2}{F_1},$$

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{F_1}{F_1 - f_1} = \frac{F_2 - f_2}{F_2}$$

und $F_2/F_1 = n_2/n_1$ nach 3a) und 3b). Daraus folgt:

$$\frac{f_2}{f_1} = -\frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Dies in die Gleichung A gesetzt, giebt:

$$n_1 \beta_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = n_2 \beta_2 \operatorname{tg} \alpha_2 \quad \} \qquad (7\,\mathrm{d}).$$

Diese Gleichung spricht ein wichtiges, von Lagrange aufgestelltes Gesetz aus, welches die Grösse der Bilder mit der Divergenz der Strahlen verknüpft, unabhängig von der Entfernung und der Brennweite der brechenden Fläche.

Brechung in Systemen von Kugelflächen.

Wir wollen jetzt die Gesetze der Brechung in centrirten optischen Systemen untersuchen, d. h. solchen, welche eine Reihe von brechenden Kugelflächen enthalten, deren Mittelpunkte alle in einer geraden Linie, der optischen Axe des Systems, liegen.

61 Vorn nennen wir in Bezug auf das System die Seite, von der das Licht herkommt, hinten die, wo es hingeht. Die brechende Fläche, welche das Licht zuerst trifft, ist die erste, das Medium, welches vor der ersten brechenden Fläche gelegen ist, das erste, das zwischen der ersten und zweiten gelegene das zweite, das hinter der letzten, das letzte. Wenn wir m brechende Flächen haben, so haben wir $m+1$ brechende Medien. Es sei n_1 das Brechungsverhältniss des ersten, n_2 des zweiten, n_{m+1} des letzten brechenden Mittels. Wie bisher nehmen wir die Radien der brechenden Flächen positiv, wenn deren Convexität nach vorn, negativ, wenn sie nach hinten sieht. Auch bemerke ich hier gleich ein für alle Mal, dass, wenn von einem Strahlencentrum oder Bilde gesprochen wird, welches in einem gewissen brechenden Mittel liege, oder diesem angehöre, darunter

auch stets der Fall mitverstanden ist, wo das Bild potentiell ist, und erst durch Verlängerung der Strahlen über die Grenzen des Mittels hinaus entstehen würde.

Zunächst wissen wir aus der bisherigen Untersuchung, dass homocentrische Strahlen, welche unter kleinen Einfallswinkeln auf kugelige brechende Flächen fallen, homocentrisch bleiben. Daraus folgt, dass homocentrische Strahlen, welche unter kleinen Winkeln gegen die Axe in das optische System eintreten, nach jeder Brechung homocentrisch bleiben, und eben so aus der letzten brechenden Fläche wieder heraustreten. Wenn das einfallende Licht einer Anzahl von Vereinigungspunkten angehört, welche alle in einer auf der optischen Axe senkrechten Ebene liegen, so wissen wir ferner, dass nach der ersten Brechung die Vereinigungspunkte wieder alle in einer auf der optischen Axe senkrechten Ebene liegen und ihre Vertheilung der früheren geometrisch ähnlich ist. So wird es daher auch nach jeder folgenden Brechung sein, und auch das letzte Bild wird dem ursprünglichen geometrisch ähnlich sein, und wie dieses in einer auf die optische Axe senkrechten Linie liegen.

Indem man nun das Bild, welches von der ersten brechenden Fläche entworfen ist, als den Gegenstand für die zweite betrachtet, das Bild der zweiten als den Gegenstand der dritten u. s. w., kann man ohne besondere Schwierigkeit schliesslich Grösse und Lage des letzten Bildes berechnen. Allerdings werden aber die Formeln schon bei einer mässigen Zahl brechender Flächen bald sehr weitläufig.

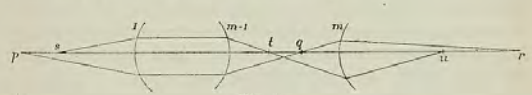


Fig. 5.

Hier kommt es uns nur darauf an, einige allgemeine Gesetze zu beweisen, welche für jede beliebige Zahl brechender Flächen gültig sind, was uns für das Auge desto wichtiger ist, da dieses in den verschiedenen Schichten der Krystalllinse unendlich viele brechende Flächen enthält, die Rechnung auf dem angedeuteten Wege also doch nicht zu Ende zu führen sein würde.

1. Zuerst will ich zeigen, dass das in Gleichung 7) für eine Fläche ausgesprochene Gesetz auch für beliebig viele gilt.

Es sei in Fig. 5 die mit 1 bezeichnete brechende Fläche die erste, die mit $(m-1)$ bezeichnete die vorletzte, die mit m bezeichnete die letzte Fläche des Systems. Wenn s der Vereinigungspunkt der eintretenden Strahlen ist, sei u der der austretenden, wenn p der der eintretenden ist, sei r der der austretenden. Wir bezeichnen ps mit h_1, ur mit h_{m+1}, so will ich beweisen, dass

$$\frac{H_1}{h_1} + \frac{H_2}{h_{m+1}} = 1,$$

52 wo H_1 der Abstand des ersten Hauptbrennpunktes von s, H_2 der des zweiten von u ist.

Um das Gesetz allgemein zu beweisen, werde ich zeigen, dass, wenn es für ein System von $(m-1)$ Flächen richtig ist, es auch für m Flächen gilt. Da es nun für eine Fläche bewiesen ist, folgt dann, dass es auch für zwei, und wenn für zwei, auch für drei u. s. w. *in infinitum* richtig sei.

Das System der $(m-1)$ ersten Flächen entwerfe von dem Punkte s das Bild t, und von dem Punkte p das Bild q, und tq werde bezeichnet mit h_m. Die Entfernungen der Hauptbrennpunkte des Systems der $(m-1)$ Flächen von den Punkten s und t seien beziehlich L_1 und L_2, die Entfernungen der Hauptbrennpunkte der letzten $m$ten Fläche von den Punkten t und u seien beziehlich M_1 und M_2, wobei alle diese Entfernungen immer von den Punkten s, t und u aus in der Richtung positiv gerechnet werden, in welcher das brechende Medium, dem die betreffenden Strahlenbündel angehören, von den betreffenden brechenden Flächen oder Systemen liegt. Nun haben wir nach der Voraussetzung:

$$\frac{L_1}{h_1} + \frac{L_2}{h_m} = 1,$$

und für die Brechung in der letzten Fläche:

$$-\frac{M_1}{h_m} + \frac{M_2}{h_{m+1}} = 1.$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen mit L_2, die zweite mit M_1 dividiren, und beide addiren erhalten wir:

$$\frac{L_1}{L_2}\cdot\frac{1}{h_1} + \frac{M_2}{M_1}\frac{1}{h_{m+1}} = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{M_1}$$

oder

$$\frac{M_1 L_1}{M_1 + L_2}\cdot\frac{1}{h_1} + \frac{M_2 L_2}{M_1 + L_2}\frac{1}{h_{m+1}} = 1.$$

Setzen wir $h_1 = \infty$, wobei $h_{m+1} = H_2$ werden muss, so ergiebt diese Gleichung:

$$H_2 = \frac{M_2 L_2}{M_1 + L_2},$$

und setzen wir $h_{m+1} = \infty$, wobei $h_1 = H_1$ werden muss, so ergiebt sich:

$$H_1 = \frac{H_1 L_1}{M_1 + L_2},$$

also schliesslich

$$\left.\frac{H_1}{h_1} + \frac{H_2}{h_{m+1}} = 1\right\} \qquad (8)$$

wie zu beweisen war.

Diese Gleichung liefert für jeden reellen Werth zwischen $+\infty$ und $-\infty$ von h_1 einen und nur einen von h_{m+1}, und eben so für jeden der letzteren Grösse einen und nur einen von h_1. Der erste wie der letzte Vereinigungspunkt können also an jeder Stelle der Axe liegen, und sobald der eine gegeben ist, ist auch die Lage des anderen eindeutig bestimmt.

2. Jedes optische System hat zwei und nur zwei zusammengehörige Vereinigungspunkte der Lichtstrahlen, in denen die Grösse eines auf die Axe senkrechten ebenen Bildes der des zugehörigen Gegenstandes gleich wird. Wir nennen die Ebene eines solchen 53 Gegenstandes die erste und die des zugehörigen Bildes die zweite Hauptebene des Systems, und die beiden Punkte, wo sie die optische Axe schneiden, beziehlich den ersten und zweiten Hauptpunkt. Die zu den Hauptpunkten gehörigen Hauptbrennweiten sind den zugehörigen Brechungsverhältnissen des ersten und letzten Mittels proportional.

Es sei sp Fig. 6 der abgebildete Gegenstand, p ein Punkt desselben in der Axe, s ein anderer seitlich davon. Wenn wir den Gegenstand längs der Axe verschieben, sodass er immer sich selbst parallel bleibt, so wird sich der Punkt s in der mit der Axe parallelen Linie st bewegen. Der Lichtstrahl st wird

also stets dem Punkte s angehören, welches auch die Entfernung pq sein möge. Die der Axe parallelen Lichtstrahlen werden nun durch das brechende System so gebrochen, dass sie schliesslich durch den zweiten Hauptbrennpunkt P_2 gehen.

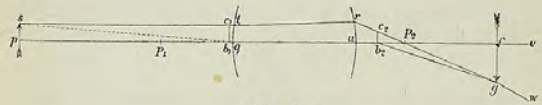


Fig. 6.

Es sei rw der Gang des Lichtstrahls st nach der letzten Brechung. Da st stets dem leuchtenden Punkte s angehört, muss rw stets dem Bilde dieses Punktes angehören, d. h. das Bild von s muss in rw liegen. Es sei fg das Bild von sp, welches nach dem Vorausgeschickten senkrecht gegen die Axe uv sein muss. Wenn p sich längs der Axe verschiebt, wird sich auch f längs uv, und g längs rw verschieben, und es ist ersichtlich, dass die Grösse des Bildes fg sich hierbei proportional dem Abstande P_2f ändern muss, wie dasselbe für eine einfache brechende Fläche oben in den Gleichungen 6a) und 6b) ausgesprochen ist. Da ferner aus Gleichung 8) zu ersehen ist, dass die Entfernung P_2f jeden beliebigen Werth zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen kann, so wird auch die Grösse des Bildes, wenn wir die eines umgekehrten Bildes negativ bezeichnen, jeden zwischen diesen Grenzen liegenden Werth annehmen können, und einen jeden nur einmal annehmen können. Es wird also auch seinem Gegenstande sp an einer und nur an einer Stelle gleich werden müssen; es sei $c_1\ b_1$ in diesem Falle der Gegenstand und $c_2\ b_2$ das ihm gleiche Bild, so bezeichnen diese beiden Linien die Lage der sogenannten Hauptebenen des Systems.

Bezeichnen wir nun:

$$sp = c_2b_2 = \beta_1,$$
$$fg = -\beta_2,$$
$$b_1P_1 = F_1, \qquad b_1p = f_1,$$
$$b_2P_2 = F_2, \qquad b_2f = f_2,$$

so ist:

$$\frac{c_2b_2}{fg} = \frac{b_2P_2}{P_2f}$$

oder

$$-\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{F_2}{f_2 - F_2},$$

und da nach Gleichung (8):

$$\frac{F_1}{f_1} + \frac{F_2}{f_2} = 1 \quad \Big\} \qquad (8a)$$

so erhält man entsprechend der für eine brechende Fläche gel- 54
tenden Gleichung (6b):

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{F_2}{F_2 - f_2} = \frac{F_1 - f_1}{F_1} \quad \Big\} \qquad (8b)$$

Nennen wir die Entfernung der zusammengehörigen Bilder von den Brennpunkten l_1 und l_2, sodass also:

$$l_1 = f_1 - F_1,$$
$$l_2 = f_2 - F_2,$$

so erhalten wir aus der Gleichung (8a) in derselben Weise die einfachste Form für das Gesetz der Lage der Bilder eines zusammengesetzten Systems, wie wir für die einer einzelnen Fläche aus Gleichung (3d) die (7b) erhalten haben, nämlich:

$$l_1 l_2 = F_1 F_2 \quad \Big\} \qquad (8c)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta_1}{\beta_2} &= -\frac{l_1}{F_1} \\ \frac{\beta_2}{\beta_1} &= -\frac{l_2}{F_2} \end{aligned}\right\} \qquad (8d)$$

Um endlich das Verhältniss der Grössen F_1 und F_2 zu finden, wenden wir das in der Gleichung 7d) ausgesprochene Gesetz auf den Strahl an, welcher vor der Brechung durch s und b_1, nach der Brechung also durch b_2 und g geht.

Nennen wir die Grösse eines in der ersten Hauptebene enthaltenen Bildes $\gamma_,$, die Reihe der Bilder, welche bei den einzelnen Brechungen in dem Systeme gebildet werden, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,,,}$ etc. und γ_{m+1} das in der zweiten Hauptebene nach der letzten Brechung entworfene. Nach der Definition der Hauptebenen ist $\gamma_, = \gamma_{m+1}$. Nennen wir ferner $\alpha_,$ den Winkel zwischen dem

Strahl $sb_,$ und der Axe im ersten Mittel, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,}'$ u. s. w. in den folgenden Mitteln, α_{m+1} im letzten Mittel, sodass:

$$\angle\, sb_1 p = -\alpha_,,$$
$$\angle\, gb_2 f = -\alpha_{m+1}.$$

Nach der Gleichung (7d) ist:

$$n_, \gamma_, tg\,\alpha_, = n_{,,}\gamma_{,,} tg\,\alpha_{,,},$$
$$n_{,,}\gamma_{,,} tg_{,,}\alpha_{,,} = n_{,,,}\gamma_{,,,} tg\,\alpha_{,,,},$$

u. s. w., woraus folgt:

$$n_, \gamma_, tg\,\alpha_, = n_{m+1}\gamma_{m+1} tg\,\alpha_{m+1} \Big\} \qquad (9)$$

oder da $\gamma_, = \gamma_{m+1}$, so ist:

$$n_, tg\,\alpha_, = n_{m+1} tg\,\alpha_{m+1} \Big\} \qquad (9a)$$

Ferner ist mit Berücksichtigung der oben aufgestellten Bezeichnungen:

$$sp = \beta_1 \quad = -f_1 tg\,\alpha_,,$$
$$fg = -\beta_2 = -f_2 tg\,\alpha_{m+1},$$

folglich:

$$\frac{n_,\beta_1}{f_1} = -\frac{n_{m+1}\beta_2}{f_2}.$$

Setzt man in diese Gleichung aus (8a) den Werth von f_2, so erhält man:

$$\frac{n_,\beta_1}{f_1 - F_1} = -\frac{n_{m+1}\beta_2}{F_2},$$

55 und nach (8b) ist:

$$\frac{\beta_1}{f_1 - F_1} = -\frac{\beta_2}{F_1}.$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt geben:

$$\frac{n_,}{n_{m+1}} = \frac{F_1}{F_2} \Big\} \qquad (9c)$$

was zu beweisen war.

3. In jedem optischen Systeme giebt es ein und nur ein Paar von Knotenpunkten, welche die Eigenschaft haben, dass alle Lichtstrahlen, deren Richtung im ersten Mittel durch den ersten Knotenpunkt geht, nach der letzten Brechung eine

ihrer früheren parallele Richtung haben und durch den zweiten Knotenpunkt gehen. Die durch die Knotenpunkte senkrecht gegen die optische Axe gelegten Ebenen heissen die Knotenebenen. Da die im ersten Knotenpunkte sich schneidenden Lichtstrahlen sich also nach der letzten Brechung im zweiten schneiden, so ist der zweite offenbar das Bild des ersten. Die zu ihnen gehörigen Brennweiten verhalten sich umgekehrt wie die Brechungsverhältnisse des ersten und letzten Mediums.

Wir gehen von der in der vorigen Nummer gefundenen Gleichung 9) aus:

$$n_, \gamma_, tg\,\alpha_, = n_{m+1}\gamma_{m+1} tg\,\alpha_{m+1} \Big\} \qquad (9)$$

Wenn wir diese auf die Knotenpunkte beziehen, soll $\alpha_, = \alpha_{m+1}$ werden. Dies wird der Fall sein, wenn:

$$n_, \gamma_, = n_m \gamma_m.$$

Die Lineardimensionen zweier zusammengehöriger in den Knotenebenen liegender Bilder verhalten sich also umgekehrt wie die zugehörigen Brechungsverhältnisse des ersten und letzten Mittels.

Da die Bilder desselben Gegenstandes $\gamma_,$ sich verhalten wie ihre Abstände vom zweiten Hauptbrennpunkte, so lässt sich dieser Abstand aus der Grösse des Bildes bestimmen. Fällt das Bild des Gegenstandes $\gamma_,$ in die zweite Hauptebene, so ist seine Grösse auch gleich $\gamma_,$, sein Abstand vom Brennpunkte F_2; fällt es in die zweite Knotenebene, so ist seine Grösse, wie eben bewiesen:

$$\gamma_{m+1} = \frac{n_{m-1}}{n_,}\gamma_,.$$

Sein Abstand vom Brennpunkte sei G_2, so ist:

$$\frac{\gamma_,}{\gamma_{m+1}} = \frac{F_2}{G_2},$$

also (9c):

$$G_2 = \frac{n_,}{n_{m+1}} F_2 = F_1 \Big\} \qquad (10a)$$

Der Abstand zwischen der zweiten Haupt- und Knotenebene ist danach:

$$a_2 = F_2 - G_2$$
$$= F_2 - F_1$$

Die erste Knotenebene soll das Bild der zweiten sein. Nennen wir ihren Abstand von der ersten Hauptebene a_1, sodass:

$$a_1 = G_1 - F_1,$$

so ergiebt die Gleichung (8a):

$$-\frac{F_1}{a_1} + \frac{F_2}{a_2} = 1,$$

daher:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a_2 = F_2 - F_1 \\ G_1 &= F_2 \end{aligned}\right\} \qquad (10\,\text{b})$$

und

$$\left.\frac{G_1}{G_2} = \frac{n_m + 1}{n_1}\right\} \qquad (10\,\text{c})$$

Methoden, die Brenn-, Haupt- und Knotenpunkte eines aus zwei anderen zusammengesetzten centrirten Systems brechender Kugelflächen zu finden.

Es seien gegeben zwei centrirte optische Systeme A und B, welche dieselbe Axe haben. Es seien $p_,$ und $p_{,,}$, Fig. 7, die beiden Brennpunkte, $a_,$ und $a_{,,}$ die beiden Hauptpunkte des Systems A, $\pi_,$ und $\pi_{,,}$ die Brennpunkte, $\alpha_,$ und $\alpha_{,,}$ die Hauptpunkte von B. Der Abstand des ersten Hauptpunktes $a_,$ des

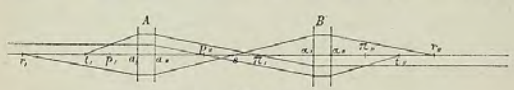


Fig. 7.

zweiten vom zweiten $a_{,,}$ des ersten Systems sei d, und dies werde positiv gerechnet, wenn, wie in Fig. 7, $a_,$ hinter $a_{,,}$ liegt. Die Hauptbrennweiten des ersten Systems $a_,p_,$ und $a_{,,}p_{,,}$ bezeichnen wir mit $f_,$ und $f_{,,}$, die des zweiten $\alpha_,\pi_,$ und $\alpha_{,,}\pi_{,,}$ mit $\varphi_,$ und $\varphi_{,,}$.

Der erste Brennpunkt des combinirten Systems ist offenbar das Bild, welches das System A vom ersten Brennpunkte $\pi_,$ des Systems B entwirft. Ist $t_,$ dieser Punkt, so ist klar, wie auch durch den in der Figur von $t_,$ ausgehenden

Strahl angedeutet ist, dass Strahlen, welche von $t_,$ ausgehen, nach der Brechung im ersten Systeme A in $\pi_,$ sich vereinigen und nach der Brechung im zweiten parallel der Axe werden müssen, sodass also $t_,$ der Definition des vorderen Brennpunktes entspricht. Die Entfernung $a_{,,}\pi_,$ ist gleich $d - \varphi_,$; daraus ergiebt sich für $a_,t_,$ der Werth:

$$\left.a_,t_, = \frac{(d-\varphi_,)f_,}{d-\varphi_,-f_{,,}}\right\} \qquad (11\,\text{a})$$

Ebenso ist der zweite Brennpunkt des combinirten Systems das Bild, welches das zweite System B von dem zweiten Brennpunkte $p_{,,}$ des ersten Systems entwirft. Es sei $t_{,,}$ der Ort dieses Bildes: so ist:

$$\left.a_{,,}t_{,,} = \frac{(d-f_,)\varphi_{,,}}{d-\varphi_,-f_{,,}}\right\} \qquad (11\,\text{b})$$

Die beiden Hauptpunkte des combinirten Systems sollen jeder des anderen Bild sein, und zwar bezieht sich der erste auf den Gang der Lichtstrahlen im ersten Medium, der zweite auf den im letzten. Die beiden Hauptpunkte müssen daher ein beiden gemeinsames Bild in dem mittleren Medium haben, was zwischen den beiden optischen Systemen vorhanden ist. Es sei dieses Bild s in Fig. 7, $r_,$ und $r_{,,}$ dagegen die Hauptpunkte des combinirten Systems. Wenn s das Bild von $r_,$ und $r_{,,}$ das Bild von s ist, ist auch $r_{,,}$ das Bild von $r_,$, und der ersten Bedingung für die beiden Hauptpunkte geschieht dadurch Genüge. Die zweite Bedingung für diese Punkte ist die, dass zusammengehörige Bilder in den Hauptebenen gleich gross und gleich gerichtet seien. Es sei nun σ die Grösse eines Objectes in s, $\beta_,$ sein Bild entworfen vom System A in $r_,$, $\beta_{,,}$ sein Bild entworfen vom System B in $r_{,,}$, und x gleich der Länge $a_{,,}s$, dagegen y gleich $s\,a_,$, so ist nach (8b):

$$\frac{\beta_,}{\sigma} = \frac{f_2}{f_2 - x},$$

$$\frac{\beta_{,,}}{\sigma} = \frac{\varphi_,}{\varphi_, - y}.$$

Soll $\beta_, = \beta_{,,}$ sein, so muss:

$$\frac{f_2}{f_2 - x} = \frac{\varphi_,}{\varphi_, - y}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{f_2} &= \frac{y}{\varphi_1}\end{aligned}\right\} \qquad (11c)$$

oder

$$\frac{a_1 s}{a_2 p_2} = \frac{\alpha_1 s}{\alpha_1 \pi_1}.$$

Um also den Punkt im mittleren Medium zu finden, dessen Bilder die beiden Hauptpunkte sind, theile man die Entfernung zwischen dem zweiten Hauptpunkte des ersten und ersten Hauptpunkte des zweiten Systems in zwei Theile, welche sich verhalten wie die zu diesen Hauptpunkten gehörigen Hauptbrennweiten der beiden Systeme.

Da $x + y = d$ ist nach (11c):

$$\frac{x}{f_2} = \frac{d-x}{\varphi_1},$$

$$\frac{d-y}{f_2} = \frac{y}{\varphi_1}.$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{d f_2}{\varphi_1 + f_2},$$

$$y = \frac{d \varphi_1}{\varphi_1 + f_2}.$$

Aus dem Werthe von x findet man die Entfernung $a_1 r_1 = h_1$ des ersten Hauptpunktes des combinirten Systems vor dem ersten Hauptpunkte des Systems A,

$$\left.\begin{aligned}h_1 &= \frac{x f_2}{x - f_2} \\ h_1 &= \frac{d f_2}{d - \varphi_1 - f_2}\end{aligned}\right\} \qquad (11d)$$

Ebenso die Entfernung $a_2 r_2 = h_2$ des zweiten Hauptpunktes des combinirten Systems hinter dem zweiten Hauptpunkte des Systems B:

$$\left.\begin{aligned}h_2 &= \frac{\varphi_2 y}{y - \varphi_2} \\ h_2 &= \frac{d \varphi_2}{d - \varphi_1 - f_2}\end{aligned}\right\} \qquad (11e)$$

Daraus ergeben sich die Werthe F_1 und F_2 der Hauptbrennweiten des combinirten Systems:

$$\left.\begin{aligned}F_1 &= a_1 t_1 - a_1 r_1 \\ &= \frac{\varphi_1 f_2}{\varphi_1 + f_2 - d} \\ F_2 &= a_2 t_2 - a_2 r_2 \\ &= \frac{\varphi_2 f_2}{\varphi_1 + f_2 - d}\end{aligned}\right\} \qquad (11f)$$

Hat man die Haupt- und Brennpunkte gefunden, so findet man die Knotenpunkte sehr leicht, da der Abstand des ersten Knotenpunktes vom ersten Brennpunkte gleich ist der zweiten Hauptbrennweite, der Abstand des zweiten Knotenpunktes vom zweiten Brennpunkte der ersten Hauptbrennweite.

Will man nur die Knotenpunkte, nicht die Hauptpunkte suchen, so kann man ein ähnliches Verfahren einschlagen wie für die Hauptpunkte, wobei man die Bedingung benutzt, dass die linearen Dimensionen zusammengehöriger Bilder in den Knotenebenen sich umgekehrt wie die Brechungsverhältnisse der betreffenden Media verhalten.

Es seien in Fig. 7 jetzt a_1 und a_2, α_1 und α_2 nicht mehr die Hauptpunkte, sondern die Knotenpunkte der beiden Systeme A und B, r_1 und r_2 die Knotenpunkte des combinirten Systems, ihr gemeinsames Bild im mittleren Medium der Punkt s, sodass nun:

$$\begin{aligned} a_1 p_1 &= f_2 & \qquad \alpha_1 \pi_1 &= \varphi_2 \\ a_2 p_2 &= f_1 & \qquad \alpha_2 \pi_2 &= \varphi_1 \\ a_2 s &= x & \qquad \alpha_1 s &= y. \end{aligned}$$

Es ist:

$$a_1 r_1 = \frac{x f_2}{x - f_1},$$

$$a_2 r_2 = \frac{y \varphi_1}{y - \varphi_2}.$$

Ist nun σ die lineare Grösse eines Objectes im Punkte s des mittleren Mediums, β_1 die seines vom System A in r_1 entworfenen Bildes, β_2 die seines vom System B in r_2 entworfenen Bildes, so ist nach den bekannten Eigenschaften der Knotenpunkte:

$$\frac{\beta_{,}}{\sigma} = \frac{a_{,} r_{,}}{x} = \frac{f_{,,}}{x - f_{,}}$$

$$\frac{\beta_{,,}}{\sigma} = \frac{a_{,,} r_{,,}}{y} = \frac{q}{y - \varphi_{,,}}.$$

Da nun in den Knotenebenen, wenn $n_{,}$ das Brechungsverhältniss des ersten, $n_{,,}$ des letzten, ν des mittleren Mittels ist, sein muss:

$$n_{,}\beta_{,} = n_{,,}\beta_{,,},$$

so folgt, dass:

$$\frac{n_{,} f_{,,}}{x - f_{,}} = \frac{n_{,,}\varphi_{,}}{y - \varphi_{,,}}.$$

59 Nun ist aber

$$n_{,} f_{,,} = \nu f_{,}$$

$$n_{,,}\varphi_{,} = \nu \varphi_{,,},$$

also

$$\frac{f_{,}}{x - f_{,}} = \frac{\varphi_{,,}}{y - \varphi_{,,}}$$

und

$$\frac{x}{f_{,}} = \frac{y}{\varphi_{,,}}$$

oder

$$\frac{a_{,,} s}{a_{,,} p_{,,}} = \frac{a_{,} s}{a_{,} \pi_{,}}.$$

Diese selbe Gleichung hatten wir aber auch gefunden in (11 c), als wir angenommen hatten, dass die Punkte $a_{,}$, $a_{,,}$, $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $r_{,}$ und $r_{,,}$ Hauptpunkte seien. Zur Auffindung der Knotenpunkte des combinirten Systems verfährt man also ganz wie zur Auffindung seiner Hauptpunkte, nur dass man dabei von den Knotenpunkten der einzelnen Systeme, nicht von den Hauptpunkten ausgeht.

Wir wollen hier noch die Formeln für den einfachsten Fall hinschreiben, wo jedes der beiden verbundenen Systeme nur aus einer einzelnen Kugelfläche besteht. Es sei r_1 der Radius der ersten, r_2 der der zweiten Fläche, d ihr Abstand von einander, n_1 das Brechungsverhältniss des ersten, n_2 des zweiten, n_3 des dritten Mittels. Dann ist nach (3 a) und (3 b):

$$f_1 = \frac{n_1 r_1}{n_2 - n_1} \qquad \varphi_1 = \frac{n_3 r_2}{n_3 - n_2}$$

$$f_2 = \frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1} \qquad \varphi_2 = \frac{n_3 r_2}{n_3 - n_2}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$n_2 (n_3 - n_2) r_1 + n_2 (n_2 - n_1) r_2 - (n_3 - n_2)(n_2 - n_1) d = N,$$

so sind die Hauptbrennweiten:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{n_1 n_2 r_1 r_2}{N} \\ F_2 &= \frac{n_2 n_3 r_1 r_2}{N} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Die Entfernungen der Hauptpunkte h_1 und h_2 von den Flächen:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{n_1 (n_2 - n_3) d r_1}{N} \\ h_2 &= \frac{n_3 (n_1 - n_2) d r_2}{N} \end{aligned}\right\} \qquad (12\,a)$$

Die Entfernung der Hauptpunkte von einander H:

$$H = d \cdot \frac{(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)(r_1 - r_2 - d)}{N} \qquad (12\,b)$$

Für $d = o$ wird $h_1 = h_2 = H = o$:

$$F_1 = \frac{n_1 r_1 r_2}{(n_3 - n_2) r_1 + (n_2 - n_1) r_2}$$

$$F_2 = \frac{n_3 r_1 r_2}{(n_3 - n_2) r_1 + (n_2 - n_1) r_2}.$$

In dem besonderen Falle, wo $r_1 = r_2$, erhalten wir: 60

$$F_1 = \frac{n_1 r_1}{n_3 - n_1}$$

$$F_2 = \frac{n_3 r_1}{n_3 - n_1}.$$

Die Brennpunkte und Hauptpunkte sind dann also genau dieselben, als wäre nur eine brechende Fläche vorhanden; das Resultat ist unabhängig von n_2. Daraus folgt:

In einem Systeme von brechenden Kugelflächen können wir uns an jeder brechenden Fläche eine unendlich dünne, durch concentrische Kugelflächen begrenzte Schicht von beliebigem Brechungsverhältnisse eingeschoben denken, ohne die Brechung der Strahlen dadurch zu ändern.

Es wird uns dieser Satz später zur Vereinfachung mancher Betrachtungen dienen.

Endlich will ich noch die Formeln für Linsen mit zwei

kugeligen Begrenzungsflächen hersetzen, bei denen das erste und letzte Mittel einander gleich sind, also $n_1 = n_3$.

$$F_1 = F_2 = \frac{n_1 n_2 r_1 r_2}{(n_2 - n_1)[n_2 (r_2 - r_1) + (n_2 - n_1) d]} \quad (13)$$

Die Entfernungen der Hauptpunkte, welche in diesem Falle mit den Knotenpunkten zusammenfallen, von den Linsenflächen sind:

$$h_1 = \frac{n_1 d r_1}{n_2 (r_2 - r_1) + (n_2 - n_1) d}$$
$$h_2 = -\frac{n_1 d r_2}{n_2 (r_2 - r_1) + (n_2 - n_1) d} \quad (13a)$$

Die Entfernung der Hauptpunkte von einander:

$$H = d \cdot \frac{(n_2 - n_1)(d + r_2 - r_1)}{n_2 (r_2 - r_1) + (n_2 - n_1) d} \quad (13b)$$

Die beiden ersten sind positiv gerechnet, wenn sie ausserhalb der Linse liegen.

Den Punkt in der Linse, dessen Bilder die beiden Knotenpunkte sind, nennt man in diesem Falle das optische Centrum der Linse. Es liegt in der optischen Axe, und seine Entfernungen von den beiden Flächen verhalten sich zu einander wie die Radien dieser Flächen.

Da die Resultate der Brechung in einem optischen Systeme, was Grösse und Lage der Bilder betrifft, nur von der Lage der Brennpunkte und Hauptpunkte (oder Knotenpunkte) abhängen, so kann man ohne Aenderung der Lage und Grösse der Bilder zwei optische Systeme für einander substituiren, deren Brennpunkte und Hauptpunkte dieselbe Lage haben. Da das Verhältniss des Brechungsvermögens des ersten und letzten Mittels nicht geändert werden kann, ohne das Verhältniss der Hauptbrennweiten zu einander zu ändern, wollen wir voraussetzen, dass das erste und letzte Mittel bei einer solchen Substitution ungeändert bleibe. Dann braucht nur die eine Hauptbrennweite und der Abstand der Hauptpunkte von einander in dem einen System gleich den entsprechenden Grössen des anderen gemacht zu werden, um die beiden Systeme für einander substituiren zu können. In einem Systeme von nur zwei brechenden Flächen würde man zur Erfüllung dieser Bedingungen über 4 Grössen, r_1, r_2, n_2 und d, bestimmen können. Es kann daher für jedes centrirte System brechender

Kugelflächen ein System von nur zwei solchen Flächen gesetzt werden, welches ebenso grosse und 61
ebenso gelegene Bilder entwirft wie jenes, und im allgemeinen kann man dabei sogar noch immer zwei andere Bedingungen für das System von zwei Flächen aufstellen, z. B. dass es aus einem bestimmten Stoffe zu bilden sei u. s. w., und diese gleichzeitig erfüllen.

Für den Fall, wo das erste und letzte Mittel identisch sind, beide ein kleineres Brechungsvermögen haben als das mittlere Mittel, und der Abstand der brechenden Flächen kleiner ist als die Krümmungsradien, also für die sogenannten Linsen, will ich hier noch die einzelnen Fälle durchgehen, weil wir auf dergleichen Linsen oft zurückkommen werden.

Man unterscheidet nach der Gestalt 1) biconvexe Linsen, bei denen beide Flächen convex, also r_1 positiv, r_2 negativ ist; die Brennweite ist immer positiv nach Gleichung (13). Die Abstände der Hauptpunkte von den Flächen sind negativ, d. h. diese Punkte liegen innerhalb der Linse, und der Abstand der Hauptpunkte von einander ist positiv, d. h. der erste liegt vor dem zweiten. In Fig. 8 ist die Lage der Brennpunkte $p_1 p_2$ und der Hauptpunkte h_1 und h_2 einer biconvexen Linse dargestellt. Die erste und zweite Fläche der Linse sind mit 1 und 2 bezeichnet. Ein Grenzfall der biconvexen Linsen sind die planconvexen, bei denen einer der Radien unendlich gross wird und ein Hauptpunkt in die gekrümmte Fläche der Linse fällt.

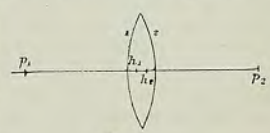


Fig. 8.

2) Biconcave Linsen mit zwei concaven Flächen; r_1 ist negativ, r_2 positiv. Die Brennweiten sind negativ, die Abstände der Hauptpunkte von den Flächen beide negativ, d. h. die Hauptpunkte liegen innerhalb der Linse. Ihr Abstand ist positiv, d. h. der erste liegt vor dem zweiten. Fig. 9 stellt die Lage der Hauptpunkte h_1 und h_2, sowie der Brennpunkte p_1 und p_2 einer biconcaven Linse dar. Einen Grenzfall bilden die planconcaven Linsen, bei denen einer der Radien unend-

lich wird und einer der Hauptpunkte in die gekrümmte Fläche fällt.

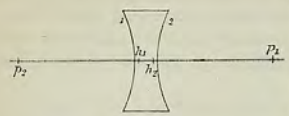


Fig. 9.

3) Concavconvexe Linsen, beide Radien entweder positiv oder negativ. Wir wollen das erstere annehmen; der zweite Fall ergiebt sich aus diesem sogleich, wenn wir nachher die erste Seite der Linse zur zweiten machen. Die Brennweite wird positiv, wenn:

$$n_2 (r_2 + d - r_1) > n_1 d;$$

sie wird unendlich, wenn beide Seiten der Gleichung gleich sind; sie wird negativ, wenn der Ausdruck links kleiner als der rechts ist. Der Ausdruck $r_2 + d - r_1$ ist der Abstand des Krümmungsmittelpunktes der zweiten Fläche von dem der ersten nach hinten gerechnet. Liegt der zweite Mittelpunkt hinter dem ersten, so wird die Linse von ihrer Mitte nach dem Rande zu dünner; liegt jener vor dem ersten, so wird sie dicker. Man kann also sagen: Wird eine concavconvexe Linse nach dem Rande zu dicker, so ist ihre Brennweite negativ, und soll ihre Brennweite positiv sein, so muss sie nach dem Rande hin dünner werden. Aber man darf beide Sätze nicht umkehren, wie es oft geschieht.

Der erste Hauptpunkt liegt vor der convexen Fläche (d. h. an ihrer convexen Seite), wenn die Brennweite positiv ist, entfernt sich sehr weit bis in das Unendliche, wenn die Brennweite selbst sehr gross und unendlich wird. Wird die Brennweite negativ, so liegt der erste Hauptpunkt hinter der con-
62 vexen Fläche der Linse, d. h. auf ihrer concaven Seite, ebenfalls unendlich weit entfernt, wenn die Brennweite unendlich sein sollte.

Der zweite Hauptpunkt liegt vor der concaven Fläche der Linse, d. h. auf ihrer convexen Seite, wenn die Brennweite der Linse positiv, er liegt hinter dieser Fläche, wenn die Brennweite negativ ist, und rückt ebenfalls in das Unendliche hinaus, wenn die Brennweite unendlich gross wird. Bei einer positiven

Brennweite liegt der zweite Hauptpunkt immer hinter dem ersten, d. h. der Linse näher. Bei einer negativen liegt er hinter dem ersten, d. h. der Linse ferner, wenn die Linse nach ihrem Rande zu dicker wird; er liegt dagegen vor dem ersten, wenn die Linse bei negativer Brennweite von der Mitte nach dem Rande dünner wird; er fällt mit ihm zusammen, wenn die beiden Linsenflächen concentrischen Kugeln angehören, und zwar liegen beide Hauptpunkte dann in dem gemeinschaftlichen Centrum der Kugeln. Fig. 10 stellt eine concavconvexe Linse von positiver Brennweite dar, Fig. 11 eine solche von negativer

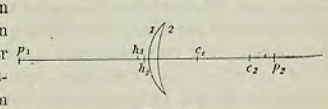


Fig. 10.

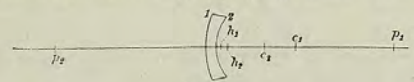


Fig. 11.

Brennweite, die nach dem Rande zu dicker wird, Fig. 12 eine solche von negativer Brennweite, welche nach dem Rande zu

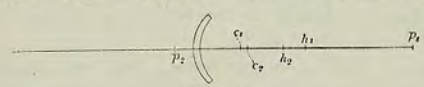


Fig. 12.

dünner wird. Der Krümmungsmittelpunkt der ersten Fläche ist mit c_1, der der zweiten mit c_2 bezeichnet. Ich bemerke noch, dass die Brennpunkte nie in die Linse und stets auf entgegengesetzte Seiten derselben fallen. Was die Lage der Bilder betrifft, so verwandelt sich die Gleichung (8a) und (8b), wenn die beiden Brennweiten gleich werden, in folgende:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} \quad (14)$$

oder

$$f_2 = \frac{F f_1}{f_1 - F} \quad (14a)$$

und

$$\left.\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{F}{F-f_1} = \frac{F-f_2}{F}\right\} \qquad (14b).$$

Bei Linsen mit positiver Brennweite (Sammellinsen, Collectivlinsen) liegen nach diesen Formeln die Bilder unendlich weit entfernter reeller Objecte, für welche also $f_1 = \infty$, im zweiten Brennpunkte hinter der Linse und sind im Verhältniss zum Objecte unendlich klein und umgekehrt. Wenn das Object sich der Linse nähert, entfernen sich die Bilder von ihr, bleiben reell, umgekehrt und nehmen an Grösse zu, bis $f_1 = F$ geworden, das Object also in den vorderen Brennpunkt gerückt ist, wo die Entfernung und Grösse des Bildes unendlich werden. Man ersieht dies leicht aus Gleichung (14), die man so schreiben kann:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f_1}.$$

63 Wenn f_1 abnimmt von ∞ bis F, nimmt $1/f_1$ zu von 0 bis $1/F$, und $1/f_2$ nimmt ab von $1/F$ bis 0, d. h. f_2 nimmt zu von F bis ∞. Die Grösse des Bildes:

$$\beta_2 = -\beta_1 \frac{F}{f_1 - F}$$

ist immer negativ, so lange $f_1 > F$. Wenn f_1 von ∞ abnimmt bis F, nimmt der Nenner des Bruches ab von ∞ bis 0, und β_2 geht über von 0 bis $-\infty$.

Ebenso findet man nun weiter, dass, wenn das Object vom ersten Brennpunkte zum ersten Hauptpunkte fortrückt, f_2 von $-\infty$ bis 0 geht, d. h. das Bild, welches nun meist virtuell ist und auf derselben Seite der Linse mit dem Objecte liegt, aus unendlicher Entfernung bis zum zweiten Hauptpunkte heranrückt und dabei eine positive Grösse hat, d. h. aufrecht steht, und von $+\infty$ bis zu einer dem Objecte gleichen Grösse abnimmt.

Endlich kann f_1 auch negativ werden, wobei meist das Object virtuell wird; dann ist f_2 stets positiv und kleiner als f_1, das Bild aufrecht und kleiner als das Object. Während f_1 von 0 bis $-\infty$, geht f_2 von 0 bis F, β_2 von β_1 bis 0.

Man kann also sagen: Sammellinsen machen parallel eintretende Strahlen convergent und vereinigen sie in der

Brennebene; sie machen convergente Strahlen noch convergenter und divergente Strahlen weniger divergent oder auch convergent, ersteres, wenn sie von einem Punkte jenseits des Brennpunktes divergiren, letzteres, wenn von einem solchen diesseits des Brennpunktes.

Linsen von negativer Brennweite nennen wir dispansive oder Zerstreuungslinsen, weil parallel eintretende Strahlen durch sie divergent gemacht, zerstreut werden, divergente noch mehr divergent, convergente weniger convergent oder divergent werden.

Setzen wir den absoluten Werth der negativen Brennweite der Linse gleich P, so dass $P = -F$, so wird:

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{P} - \frac{1}{f_1}$$

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{P}{f_1 + P}.$$

Daraus folgt, dass für jeden positiven Werth von f_1 jetzt f_2 negativ ist, und dass, während f_1 von ∞ bis 0 abnimmt, f_2 von $-P$ bis 0 sich verändert, β_2 von 0 bis β_1. Dispansive Linsen entwerfen also von reellen Objecten, die vor dem ersten Hauptpunkte liegen, virtuelle Bilder, welche vor dem zweiten Hauptpunkte liegen, kleiner, näher und aufrecht sind.

Für negative Werthe von f_1, welche absolut kleiner als P sind, wird f_2 positiv, und während f_1 von 0 bis $-P$ geht, steigt f_2 von 0 bis $+\infty$, β_2 von β_1 bis ∞. Convergent einfallende Strahlen werden also weniger convergent, wenn sie nach einem vor dem hinteren Brennpunkte gelegenen Punkte convergiren.

Für negative Werthe von f_1, welche absolut grösser sind als P, werden f_2 und β_2 negativ, es entstehen also umgekehrte virtuelle Bilder vor dem Glase. Während f_1 sich ändert von $-P$ bis $-\infty$, ändert sich f_2 von $-\infty$ bis $-P$, und β_2 von $-\infty$ bis 0. Convergente Strahlen werden von dispansiven Linsen also divergent gemacht, wenn sie nach einem jenseits des hinteren Brennpunktes gelegenen Punkte convergiren.

Die Entfernung e zweier zusammengehöriger Bilder von einander ist $f_1 + a + f_2$, wenn a der Abstand der Hauptpunkte von einander ist und diese Entfernung positiv gerechnet wird, 64

falls das zweite Bild hinter dem ersten liegt. Setzen wir statt f_2 seinen Werth, so erhalten wir als Ausdruck für die Entfernung:

$$e = \frac{f_1^2}{f_1 - F} + a.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach f_1, so erhalten wir:

$$\frac{de}{df_1} = \frac{f_1^2 - {}_2 f_1 F}{(f_1 - F)^2}.$$

Hiernach wird $de = 0$, d. h. e ein Maximum oder Minimum, wenn entweder $f_1 = 0$ oder $f_1 = 2F$, und zwar wird es sowohl für positive wie negative Brennweiten ein Minimum für $f_1 = 2F$, und ein Maximum für $f_1 = 0$, wie man leicht aus dem Ausdruck für e erkennt.

Werke, in welchen die Brechung der Lichtstrahlen in centrirten Systemen kugeliger Flächen behandelt wird, sind folgende:

1738. Cotes in Smith *a complete system of optics.* Cambridge. Vol. II. 76.
1757 u. 61. Euler in *Histoire de l'Acad. roy. de Berlin pour* 1757. p. 283. — Ibid. *pour* 1761. p. 201.
1765. Euler, *Précis d'une théorie générale de la dioptrique* in *Hist. de l'acad. roy. des sc. de Paris.* 1765. p. 555.
1778 u. 1803. Lagrange in *Nouv. Mém. de l'acad. roy. de Berlin pour* 1778. p 162. — Ibid. 1803. p. 1.
1822. Piola in *Effemeridi astron. di Milano per* 1822.
1830. Möbius in Crelle's Journal für Mathematik. Bd. V. S. 113.
1841. *Bessel in Astronom. Nachrichten. Bd. XVIII. S. 97.
*Gauss, Dioptrische Untersuchungen. Göttingen. — Abdruck aus Abhandlungen d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Th. 1. von den Jahren 1838—43.
1844. Encke, De formulis dioptricis. Ein Programm. Berlin. Moser, Ueber das Auge, in Dove's Repert. d. Physik. Bd. V. S. 289.
1851. Listing, Art. Dioptrik des Auges, in R. Wagner's Handwörterbuch d. Physiologie. Bd. IV. S. 451.

Aus §. 10.

Die Brechung der Lichtstrahlen in den Augenmedien.

70 Um die Brechung der Lichtstrahlen in den einzelnen Mitteln des Auges zu berechnen, theilen wir uns das optische System des Auges in zwei Theile, deren ersten die Hornhaut, deren zweiten die Krystallinse ausmacht, sodass das erste Mittel des ersten Systems Luft, das Mittel zwischen beiden Systemen, oder das letzte des ersten, das erste des zweiten Systems wässrige Feuchtigkeit, das letzte Mittel des zweiten Systems Glaskörper ist.

Wir beginnen mit der Hornhaut. Die Untersuchung der Brechung in dieser wird wesentlich vereinfacht durch den Umstand, dass die Hornhaut sehr dünn ist, fast gleichgekrümmte Flächen hat, und ihr Brechungsvermögen nur wenig das der wässrigen Feuchtigkeit übertrifft. Ich habe S. 109 bei den Gleichungen (12), (12a), (12b) nachgewiesen, dass man an jeder brechenden Fläche eine unendlich dünne Schicht von beliegem Brechungsvermögen und gleichgekrümmten Flächen einschieben könne, ohne die Brechung zu verändern. Man denke sich somit vor der Hornhaut eine unendlich dünne Schicht wässriger Feuchtigkeit ausgebreitet, wie sich denn sogar in Wahrheit dort eine ähnliche Schicht befindet, nämlich die Schicht der die Hornhaut netzenden Thränen. Dann können wir nachher die Hornhaut selbst als eine uhrglasförmige Linse betrachten, welche auf beiden Seiten von dem gleichen Medium, wässriger Feuchtigkeit, umgeben ist. Eine solche Linse hat eine sehr grosse oder unendliche Brennweite, d. h. sie verändert den Gang der Lichtstrahlen nicht merklich. Daraus folgt, dass die Brechung der Lichtstrahlen in der Hornhaut fast dieselbe sein wird, als wenn die wässrige Flüssigkeit bis an die vordere Fläche der Hornhaut reichte. Diese Annahme ist daher bis jetzt auch fast immer bei der Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen in der Hornhaut gemacht worden, und sie ist um so nothwendiger zu machen, da wir bisher zwar gute Messungen der äusseren Hornhautkrümmung, aber keine genügend zuverlässigen für die innere besitzen.

Sollte die bezeichnete Annahme streng gerechtfertigt sein, so müsste nach S. 110 Gleichung (13) sein:

$$n_2 (r_2 — r_1) + (n_2 — n_1) d = 0,$$

wo n_1 das Brechungsvermögen der wässrigen Feuchtigkeit, n_2 das der Hornhaut, d die Dicke, r_1 den Krümmungshalbmesser der vorderen, r_2 der hinteren Fläche der Hornhaut bezeichnet. 71

Diese Gleichung kann nun in der That auf die Hornhaut nicht wohl passen. Wenn wir sie schreiben:

$$(r_2 + d) - r_1 = \frac{n_1}{n_2} d,$$

so ist $(r_2 + d)$ der Abstand des Krümmungsmittelpunktes der hinteren Fläche vom Scheitel der vorderen, und die Gleichung würde aussagen, dass der Krümmungsmittelpunkt der hinteren Fläche hinter dem der vorderen liege. Dann müsste die Hornhaut von der Mitte nach dem Rande zu an Dicke abnehmen, während in der Regel das Umgekehrte der Fall ist. Die Hornhaut wird also den Folgerungen gemäss, welche am Ende des § 9 für concavconvexe Linsen aus der Gleichung (13) gezogen sind, in der Regel als Linse in wässriger Feuchtigkeit aufgehängt, eine negative, aber sehr grosse Brennweite haben.

Nehmen wir $r_1 = 8\,\text{mm}$, $r_2 = 7\,\text{mm}$, $d = 1\,\text{mm}$ und nach W. Krause $n_2 = 1{,}3507$, $n_1 = 1{,}3420$, so wird nach S. 110 Gleichung (13) die Brennweite der in wässriger Feuchtigkeit befindlichen Hornhaut gleich $-8{,}7\,\text{m}$, eine Grösse, welche wir im Verhältnisse zu den Dimensionen des Auges als unendlich gross betrachten können.

Dasselbe wurde bestätigt durch Versuche mit dem Ophthalmometer, mittels welches Instrumentes ich die Grösse eines Objectes maass, welches sich hinter einem Glasgefässe mit parallelen Wänden befand. Brachte ich in das Wasser eine frische Hornhaut einer menschlichen Leiche, sodass ich das Object nur durch die Hornhaut erblickte, so war durch das Ophthalmometer keine Verkleinerung des Bildes zu entdecken. Diese war also so gering, dass die leichte Trübung des Bildes durch die eingeführte Hornhaut hinreichte, sie unwahrnehmbar zu machen.

Um berechnen oder schätzen zu können, um wie viel sich die wirkliche Brechung am Auge von derjenigen unterscheidet, welche eintreten würde, wenn das Brechungsvermögen der Hornhaut wirklich dem der wässrigen Feuchtigkeit gleich wäre, wollen wir die optischen Constanten der Hornhaut nach der Formel S. 109 Nr. 12 bestimmen, und dabei setzen: $n_1 = 1$, $n_3 = n$, $n_2 = n + \triangle n$, $r_1 = r$, $r_2 = r - \triangle r$, wobei wir die Grössen $\triangle n$, $\triangle r$ und die Dicke der Hornhaut d als sehr klein gegen n und r ansehen können. Wenn wir diese Bezeichnungen in § 9 Gleichungen (12) einsetzen, und die höheren Dimensionen der kleinen Grössen vernachlässigen, erhalten wir die Brennweiten:

$$F_1 = \frac{1}{n} F_2 = \frac{r}{n-1} \left\{ 1 - \triangle n \cdot \frac{(n-1)\,d - n\,\triangle r}{n\,(n-1)\,r} \right\} \qquad (1)$$

Der Unterschied der Brennweiten von dem Werthe $r/(n-1)$, den wir durch die Annahme $\triangle n = 0$ erhalten, ist eine kleine Grösse zweiter Dimension; ebenso die Entfernung x des ersten Hauptpunktes, von der vorderen Hornhautfläche nach vorn gerechnet:

$$x = \frac{(d\,\triangle n)^2}{n\,(n-1)} \qquad (1\,\text{a})$$

Die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander a wird sogar eine kleine Grösse dritter Dimension:

$$a = \frac{(d \triangle n)^2}{n\,r} \qquad (1\,\text{b})$$

Für die Berechnung der Bilder wird es daher genügen, nur eine Brechung an der vorderen Fläche der Hornhaut in Betracht zu ziehen und dabei das Brechungsvermögen der Hornhaut gleich dem der wässrigen Feuchtigkeit zu setzen.

Der zweite Theil des optischen Systems des Auges besteht aus der Krystallinse. Vor dieser befindet sich die wässrige, hinter ihr die Glasfeuchtigkeit. Da das Brechungsvermögen dieser beiden Stoffe nur äusserst geringe Unterschiede zeigt, so wollen wir diesen Unterschied vernachlässigen. In optischen Systemen, deren erstes und letztes Mittel identisch ist, fallen die Hauptpunkte mit den Knotenpunkten zusammen. Wir können also für die Krystallinse im Auge, wie bei den gewöhnlichen Glaslinsen unserer optischen Instrumente, beide Arten von Punkten identificiren. Die Krystallinse unterscheidet sich aber dadurch wesentlich von unseren Glaslinsen, dass die Dichtigkeit ihrer Substanz nicht constant ist, sondern von aussen nach innen zunimmt. Da wir das Gesetz dieser Zunahme nicht genau kennen, sind wir auch ausser Stande, den Gang der Lichtstrahlen durch die Linse vollständig zu berechnen und den Ort ihrer Brennpunkte und Hauptpunkte

genau zu bestimmen. Wir müssen uns begnügen, Grenzen für die Lage dieser Punkte zu finden. In dieser Beziehung lassen sich folgende Sätze aufstellen.

1) Die Brennweiten der Krystallinse sind kleiner, als sie sein würden, wenn ihre ganze Masse das Brechungsvermögen ihres Kerns hätte.

Um diesen wichtigen Satz zu beweisen, denken wir uns die Krystallinse nach ihrer natürlichen Schichtung zerlegt in den Kern, der eine fast kugelige biconvexe Linse von positiver Brennweite darstellt, und in die einzelnen ihn umschliessenden Schichten, deren zunächst der Augenaxe gelegene Theile concavconvexen Linsen entsprechen. Und zwar sind dies Linsen, die nach dem Rande zu dicker oder wenigstens nicht dünner werden, bei denen also $r_1 \geqq r_2 + d$ (s. Seite 112), wenn wir mit r_1 den Radius der convexen, mit r_2 den der concaven Fläche, und mit d die Dicke der Linsen bezeichnen. Nach S. 110 Gleichung (13) ist unter diesen Umständen die Brennweite negativ. Die Lage der Hauptpunkte h_1 und h_2 und der Brennpunkte p_1 und p_2 solcher Linsen ist dargestellt auf S. 113 Fig. 11.

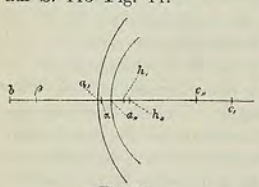


Fig. 13.

Es seien in Fig. 13 $a_,$ und $a_{,,}$ die Scheitelpunkte, $c_,$ und $c_{,,}$ die Mittelpunkte der beiden Grenzflächen, $h_,$ und $h_{,,}$ die Hauptpunkte einer solchen Linse. Von einem Objecte b, vor der ersten convexen Fläche befindlich, entwirft die Linse ein verkleinertes aufrechtes virtuelles Bild, wie in § 9 gezeigt ist, und können wir hier hinzusetzen, dies Bild β liegt nicht nur vor dem zweiten Hauptpunkte, sondern auch stets vor der zweiten Linsenfläche. Denn wenn das Object b von $h_,$ weiter entfernt ist als der Scheitel der ersten brechenden Fläche $a_,$, so muss sein Bild weiter von $h_{,,}$ entfernt sein als α, das Bild von $a_,$. Das Bild von $a_,$ wird aber nur durch eine Brechung an der Hinterfläche der Linse entworfen, und da die Brennweite dieser Fläche negativ ist, wird das Bild α von $a_,$ ihr näher und vor derselben liegen.

Daher muss β, welches noch vor α liegt, jedenfalls vor der Hinterfläche der Linse liegen.

Es lässt sich ferner zeigen, dass das Bild β eines vor $a_,$ liegenden Objectes b der hinteren Fläche der Linse desto näher rückt, je grösser das Brechungsvermögen der Linse. Zunächst ergiebt sich leicht, dass das Bild α von $a_,$ der hinteren Fläche der Linse desto näher rückt, je stärker das Brechungsvermögen. Wenn α das Bild von $a_,$ ist, und wir die Entfernung $\alpha a_{,,}$ mit q bezeichnen, so haben wir nach den Gleichungen S. 86 Nr. 3:

$$\frac{n_2}{d} - \frac{n_1}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r_2}$$

oder

$$q = \frac{n_1 r_2 d}{n_2 r_2 + (n_2 - n_1) d}.$$

Da der Nenner des Werthes von q grösser wird, wenn n_2 grösser wird, so wird q kleiner.

Wenn nun gezeigt werden kann, dass, wenn n_2 grösser wird, auch das Bild von b näher an α rückt, so folgt dann, dass unter dieser Bedingung das Bild von b sich auch der zweiten Fläche der Linse nähert.

Um dies zu zeigen, bezeichnen wir die Entfernung des Objectes b vom ersten Hauptpunkte, also die Linie $bh_,$, mit $f_,$, die des Punktes $a_,$ von demselben Hauptpunkte, also die Linie $a_,h_,$, welche in den Gleichungen (13a) auf S. 110 der Länge $-h_,$ entspricht, mit p, die Brennweite der Linse mit F, so ist die Entfernung des Bildes β vom zweiten Hauptpunkte oder die Länge:

$$\beta h_2 = \frac{f_, F}{F - f_,}$$

und die Entfernung des Bildes α des Punktes $a_,$ von demselben Hauptpunkte:

$$\alpha h_2 = \frac{p F}{F - p}.$$

Die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt, giebt die gesuchte Entfernung der beiden Bilder von einander:

$$\beta\alpha = \frac{(f_, - p) F^2}{(F - f_,)(F - p)}$$

$$\beta\alpha = \frac{f_1 - p}{\left[\frac{F-p}{F} - \frac{f_1 - p}{F}\right]\frac{F-p}{F}}.$$

Wenn wir n_2 verändern, bleibt in diesem Ausdrucke $f_1 - p$ unverändert. Setzen wir:

$$C = \frac{F-p}{F}$$

und hierin für F und $p = -h$, aus den Gleichungen (13) und (13a) S. 110 ihre Werthe, so erhalten wir:

$$C = 1 + \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{d}{r_2}.$$

Setzen wir ferner den absoluten Werth des in unserem Falle negativen F gleich P, also nach Gleichung (13):

$$P = -F = \frac{n_1 r_1 r_2}{\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)[n_2(r_1 - r_2 - d) + n_1 d]},$$

so wird:

$$\beta\alpha = \frac{(f_1 - p)}{\left[C + \frac{f_1 - p}{P}\right]C}.$$

Wenn wir nun n_2 grösser machen, wird C grösser, P kleiner, wie sich aus der Form, in der wir ihre Werthe geschrieben haben, leicht ergiebt, und $f_1 - p$ bleibt ungeändert. Wenn C grösser wird, wird $\beta\alpha$ kleiner, und wenn P kleiner wird, wird $\beta\alpha$ ebenfalls kleiner. Folglich wird $\beta\alpha$ kleiner, und endlich auch $\beta\alpha_2$ kleiner, wenn n_2 grösser wird.

Wir haben bisher die Eigenschaft einer einzelnen solchen Linse untersucht, wie sie durch Zerlegung des Krystallkörpers
74 nach seinen Schichten entstehen würde. Denken wir uns nun alle die concavconvexen Linsen, welche auf einer Seite des Kernes im Krystallkörper liegen, in wässrige Feuchtigkeit getaucht, und wieder in ihre natürliche Lage gebracht, oder denken wir uns, mit anderen Worten, zwischen jede zwei Lagen ungleicher Dichtigkeit im Krystallkörper eine unendlich dünne Schicht wässriger Feuchtigkeit eingeschaltet und den Theil derselben isolirt, welcher auf einer Seite des Kernes liegt, so erhalten wir ein optisches System, welches wir eine zusammengesetzte convexconcave Linse nennen können.

Es sei dies System in Fig. 14 dargestellt; ab sei die Axe, g der Scheitel der äussersten convexen, h der concaven Fläche des Systems. Vor der convexen Seite des Systems liege ein leuchtender Punkt a. Nach dem, was wir in Bezug auf eine einzelne solche Linse bewiesen haben, folgt, dass die erste Linse ein Bild von a entwirft, welches vor ihrer zweiten Fläche, also auch vor der ersten Fläche der zweiten Linse liegt. Daraus folgt weiter, dass auch diese Linse und so jede folgende ein Bild von a entwirft, welches vor ihrer zweiten Fläche liegt. Das ganze System wird also ein Bild von a entwerfen, welches vor seiner letzten brechenden Fläche liegt, etwa in α.

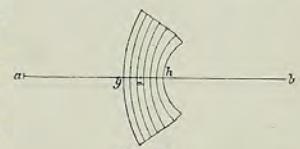


Fig. 14.

Ferner ergiebt sich leicht, dass, wenn a näher nach g rückt, auch α sich dem Punkte h nähern muss. Denn einfache Linsen mit negativer Brennweite entwerfen von näheren reellen Objecten, welche vor ihnen liegen, auch nähere Bilder. Nähert sich also a der ersten Linse, so entwirft diese auch ein näheres Bild, welches wieder Object der zweiten Linse wird, und so fort.

Endlich ergiebt sich, dass, wenn wir das Brechungsvermögen einer der Schichten erhöhen, das Bild α näher an h fallen wird. Bis zu der veränderten Schicht hin bleibt der Gang der Lichtstrahlen und die Lage der Bilder unverändert, die Schicht mit erhöhtem Brechungsvermögen entwirft aber jetzt ein näheres Bild von a, welches ein näheres Object für die folgenden Schichten wird, und dem ein näher an h gelegenes letztes Bild α entsprechen muss.

Wenn also das Bild α dieselbe Lage behalten soll, während wir das Brechungsvermögen einer der Schichten erhöhen, müssen wir die Entfernung ag entsprechend vergrössern.

Die ganze Krystalllinse können wir nun zusammengesetzt denken aus zwei solchen Systemen concavconvexer Linsen B und C und ihrem biconvexen Kerne A, wie in Fig. 15. Wenn

die Krystallinse als Ganzes von einem vor ihr gelegenen Punkte a ein reelles umgekehrtes Bild in b entwirft, so wird das Schichtensystem B ein Bild α vor der vorderen Fläche des Kernes entwerfen müssen, und dem Bilde b wird ebenso ein Bild β hinter der hinteren Fläche des Kernes entsprechen müssen, welches die Strahlen nach der Brechung im Kerne und vor der Brechung im Systeme C bilden. Der Kern muss also nach Art von biconvexen Linsen ein umgekehrtes Bildchen von α in β entwerfen. Er thut dies, wenn α vor seinem vorderen Brennpunkte liegt.

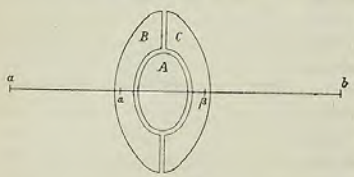


Fig. 15.

Rückt a in unendliche Entfernung, so wird b im hinteren Brennpunkte der ganzen Krystallinse liegen müssen.

Erhöhen wir nun das Brechungsvermögen einer der Schichten in B, so wird α näher an die Vorderfläche von A rücken, folglich das Bild β, welches A von α, und das Bild b, welches C von β entwirft, sich nach hinten entfernen.

Erhöhen wir ebenso das Brechungsvermögen einer der Schichten von C, so wird dem Bilde β, welches seinen Platz behält, ein entfernteres Bild b entsprechen.

Erhöhen wir also das Brechungsvermögen einzelner Schichten der Systeme B und C, so entfernt sich der hintere Brennpunkt der Krystallinse von ihrer hinteren Fläche.

Wir können das Brechungsvermögen sämmtlicher Schichten der Krystallinse bis zu dem des Kernes wachsen lassen, ohne dass der Brennpunkt in unendliche Entfernung hinausrückt, da ja schliesslich, wenn die Beschaffenheit aller Schichten der des Kernes gleich geworden ist, die Krystallinse eine einfache homogene biconvexe Linse darstellt, deren Brennweite positiv und endlich sein muss.

Was für den hinteren Brennpunkt der Linse gilt, gilt

natürlich auch für den vorderen, und somit ist bewiesen, dass die Brennpunkte der Krystallinse ihr näher liegen, als sie es thun würden, wenn alle ihre Schichten die Dichtigkeit und das Brechungsvermögen des Kernes hätten.

2) Die Entfernung der Hauptpunkte von einander ist in der Krystallinse kleiner als in einer Linse, welche dieselbe Form und das Brechungsvermögen des Kernes hätte.

Die Hauptpunkte sind die von der Linse selbst entworfenen Bilder eines in ihr liegenden Punktes, nämlich ihres sogenannten optischen Mittelpunktes. Wo dieser auch liegen mag, so lässt sich in ganz ähnlicher Weise, wie es eben zur Bestimmung der Brennpunkte geschehen ist, nachweisen, dass die Bilder des optischen Mittelpunktes desto näher den Oberflächen der Linse rücken werden, je mehr das Brechungsvermögen der einzelnen Schichten der Krystalllinse steigt, dass dabei also auch die Entfernung der beiden Bilder von einander algebraisch grösser wird. Wenn nun sämmtliche Schichten der Linse schliesslich das Brechungsvermögen des Kernes erreicht haben, wird im allgemeinen der optische Mittelpunkt der Krystalllinse nicht mehr mit dem optischen Mittelpunkte dieser neuen gleichartigen Linse zusammenfallen. Da aber bei einer Linse mit positiven Brennweiten die Entfernung der Hauptpunkte ein Maximum ist unter den Entfernungen zusammengehöriger Bilder, so ist die Entfernung der Hauptpunkte dieser neuen gleichartigen Linse jedenfalls grösser als die Entfernung der von ihr entworfenen Bilder des optischen Mittelpunktes der unveränderten Krystalllinse, folglich auch grösser als die Entfernung der Hauptpunkte der unveränderten Krystallinse, von einander.

Es lässt sich ferner nachweisen, dass die Entfernung der Hauptpunkte der Krystallinse einen positiven Werth hat, d. h. dass der zweite Hauptpunkt hinter dem ersten liegt, wenn wir annehmen, wie dies aus der Form der Linsenschichten hervorzugehen scheint, dass die Krümmungsradien der in der Axe gelegenen Theile der Schichtflächen grösser sind als die Entfernungen dieser Flächen vom Kerne der Linse. Brechende Kugelflächen entwerfen von Punkten, welche zwischen ihnen

und ihrem Mittelpunkte liegen, Bilder, die der brechenden Fläche näher sind als das Object. Folglich wird das Bild des Mittelpunktes des Linsenkernes, welches die vordere Linsenhälfte entwirft, vor seinem Objecte, das, welches die hintere Linsenfläche entwirft, hinter seinem Objecte liegen. Die beiden zusammengehörigen Bilder des Mittelpunktes des Linsenkernes haben also eine positive Entfernung. Da der Abstand der Hauptpunkte algebraisch grösser ist als der aller anderen zusammengehörigen Bilder, so ist dieser Abstand jedenfalls positiv.

Die Hauptpunkte einer Linse, welche die Gestalt der menschlichen Krystallinse und das Brechungsvermögen ihres
76 Kernes hätte, würden nur $^1/_4$ mm von einander entfernt sein; dadurch ist die Entfernung der Hauptpunkte der Krystallinse von einander also in sehr enge Grenzen eingeschlossen.

Aus § 13.

Schärfe des Bildes unter dem Einfluss von Zerstreuungskreisen.

Die chromatische Dispersion des Lichtes im menschlichen Auge ist sehr gering, weil die brechenden Medien überwiegend aus Wasser bestehen, welches eine sehr geringe Dispersion zeigt. Indessen ergeben die Messungen dieser Grösse doch, dass der Durchmesser der durch die Dispersion erzeugten Zer-
131 streuungskreise ebenso gross sein muss wie der, den ein leuchtender Punkt in 1,5 Meter ($4^3/_4$ Fuss) Entfernung in einem für unendliche Entfernung accommodirten Auge giebt. Eine solche Abweichung der Accommodation giebt bei der Betrachtung feinerer Gegenstände schon eine recht merkliche Ungenauigkeit des Bildes, wie man bei Anstellung eines entsprechenden Versuches leicht erkennt. Um zu erklären, warum die Dispersion des weissen Lichtes im Auge trotz der gleichen Grösse der Zerstreuungskreise keine merkliche Ungenauigkeit des Bildes hervorbringt, muss man nicht blos die Grösse der Zerstreuungskreise, sondern auch die Vertheilung des Lichtes in denselben berücksichtigen.

Wenn ein Lichtkegel von einem einfarbig leuchtenden

Punkte in das Auge fällt, und die Netzhaut sich vor oder hinter dem Vereinigungspunkte der Strahlen befindet, so wird ein Zerstreuungskreis gebildet, der in allen seinen Theilen gleiche Helligkeit hat.

Wenn dagegen das Auge von einem Kegel weissen Lichtes getroffen wird und sich im Vereinigungspunkte der grüngelben Strahlen, welche die lichtstärksten sind, befindet, so werden diese auf einen Punkt der Netzhaut vereinigt, während die übrigen Strahlen Zerstreuungskreise bilden, welche um so grösser werden, je mehr ihre Brechbarkeit von der der mittleren Strahlen abweicht.

Während also der Mittelpunkt des beleuchteten Kreises von Strahlen aller Art gleichzeitig getroffen wird, und namentlich auch von den lichtstärksten und am meisten concentrirten Strahlen, fallen auf die dem Rande näher liegenden Theile des Kreises nur Strahlen von den äussersten Farben des Spectrum, welche erstens an und für sich schon lichtschwächer sind als die mittleren und zweitens dadurch, dass sie ihr Licht über grössere Zerstreuungskreise vertheilen, noch mehr geschwächt sind. Die Rechnung ergiebt, dass unter diesen Umständen die Helligkeit im Mittelpunkte des Zerstreuungs- 132
kreises unendlich gross sein muss gegen alle anderen Punkte des Kreises.

Da wir für das Gesetz der Helligkeit der einzelnen Farben des Spectrum noch keinen mathematischen Ausdruck angeben können, wollen wir die Rechnung unter der Annahme durchführen, dass alle Farben des Spectrum gleiche Helligkeit haben. Dabei werden wir allerdings die Helligkeit der Ränder der Zerstreuungskreise grösser finden, als sie in Wahrheit ist, aber es wird sich auch unter dieser für unseren Zweck ungünstigen Annahme zeigen, warum die durch Farbenzerstreuung bedingten Zerstreuungskreise eine weit geringere Undeutlichkeit des Bildes geben als die durch mangelnde Accommodation bedingten von gleicher Grösse.

Berechnung der Helligkeit in einem durch Dispersion erzeugten Zerstreuungskreise eines einzelnen leuchtenden Punktes.

Es sei in Fig. 16 *bb* die Hauptebene des reducirten Auges

vom Radius R; in ihr möge, wie das beim Auge nahehin der Fall ist, die Blendung liegen, welche das Strahlenbündel begrenzt, sodass bb ein Durchmesser der Blendung ist, deren Halbmesser wir in der Rechnung mit b bezeichnen wollen. Die Strahlen, welche in das Auge fallen, mögen parallel sein. Es sei ferner v der Brennpunkt für die äussersten violetten, w der für die äussersten rothen Strahlen. Diese äussersten Strahlen schneiden sich in g, sodass gg der Durchmesser des ganzen Zerstreuungskreises und h sein Mittelpunkt ist. Die Netzhaut muss sich in der Ebene gg befinden, wenn sie das deutlichste Bild aufnehmen soll. Das Brechungsverhältniss der mittleren Strahlen, die sich in h vereinigen, nennen wir N, ihre Brennweite ah sei F. Dann ist nach S. 86 Gleichung (3a):

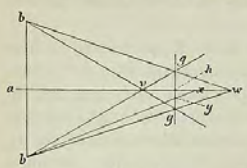


Fig. 16.

$$F = \frac{N.R}{N-1} \quad (1a)$$

Das Brechungsverhältniss irgend einer anderen Art von Strahlen, welche ihren Brennpunkt in x haben, sei n, die zugehörige Brennweite ax gleich f. Dann ist:

$$f = \frac{nR}{n-1} \quad (1b)$$

Den Radius des Zerstreuungskreises, den diese Strahlen geben, hy nennen wir ϱ. Er ist gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{\varrho}{b} = \frac{f-F}{f},$$

wenn $f > F$, also $n < N$, oder durch:

$$\frac{\varrho}{b} = \frac{F-f}{f},$$

wenn $f < F$, also $n > N$. Setzen wir hierin die Werthe von F und f aus (1a) und (1b), so erhalten wir:

$$\frac{\varrho}{b} = \frac{N-n}{n(N-1)} \quad (2a)$$

wenn $n < N$, und

$$\frac{\varrho}{b} = \frac{n-N}{n(N-1)} \quad (2b)$$

wenn $n > N$.

Die Helligkeit H nun, mit welcher die Farbe von dem 133
Brechungsverhältniss n die Netzhaut beleuchtet, ist

$$H = A\frac{b^2}{\varrho^2} \quad (3)$$

wenn wir die Helligkeit mit A bezeichnen, mit welcher das betreffende Licht die Fläche bb beleuchtet. Setzen wir in (3) statt b/ϱ seinen Werth aus (2a) oder (2b), so erhalten wir übereinstimmend:

$$H = A\frac{n^2(N-1)^2}{(n-N)^2} \quad (3a)$$

Die Helligkeit J irgend eines Punktes im Zerstreuungskreise wird nun werden:

$$J = \int H dn \quad (4)$$

wobei wir das Integral über alle diejenigen Werthe von n auszudehnen haben, deren zugehörige Farben auf jenen Punkt fallen.

In dem Ausdrucke für H ist der Factor A in Wirklichkeit eine Funktion von n, deren mathematischen Ausdruck wir aber nicht kennen. Der Factor n^2 verändert in der ganzen Ausdehnung des Spectrum seinen Werth sehr wenig. Wir wollen deshalb setzen:

$$An^2(N-1)^2 = B$$

und B als constant ansehen, d. h. annehmen, dass die Helligkeit der Spectralfarben durch die ganze Ausdehnung des Spectrum nahehin constant sei, und nur wenig vom rothen zum violetten Ende hin abnehme. Diese Annahme ist für unseren Zweck jedenfalls ungünstiger als die Wirklichkeit. Dann wird nach (4):

$$J = \int \frac{B\,dn}{(N-n)^2} \quad (4a)$$

zwischen den gehörigen Grenzen genommen. Es fallen aber auf jeden Punkt des Zerstreuungskreises erstens Strahlen von dem rothen und zweitens Strahlen von dem violetten Ende

des Spectrum. Die Grenzen der Brechbarkeit für die ersteren seien n_1 und n_2, sodass:

$$N > n_2 > n_1,$$

die Grenzen für die letzteren seien n_3 und n_4, sodass:

$$n_4 > n_3 > N.$$

Dann wird die Gleichung (4a):

$$J = B\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{(N-n)^2} + B\int_{n_3}^{n_4} \frac{dn}{(N-n)^2}$$

$$= B\left\{\frac{1}{N-n_2} - \frac{1}{N-n_1} + \frac{1}{N-n_4} - \frac{1}{N-n_3}\right\} \qquad (4b)$$

Ist nun ϱ_0 die Entfernung des Punktes, dessen Helligkeit wir bestimmen wollen, vom Mittelpunkte des Zerstreuungskreises, so wird dieser Punkt von allen denjenigen Farben getroffen, für welche die Radien der Zerstreuungskreise grösser sind als ϱ_0, also zwischen ϱ_0 und r liegen. Nun ist für die weniger brechbaren Farben, wenn wir aus Gleichung (2a) den Werth von $N-n$ bestimmen:

$$\frac{1}{N-n} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N(N-1)} \cdot \frac{b}{\varrho}.$$

134 Für n_1 ist $\varrho = r$, für n_2 ist $\varrho = \varrho_0$, also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{N-n_1} &= \frac{1}{N} + \frac{1}{(N-1)N} \cdot \frac{b}{r} \\ \frac{1}{N-n_2} &= \frac{1}{N} + \frac{1}{(N-1)N} \cdot \frac{b}{\varrho_0} \end{aligned}\right\} \qquad (4c)$$

Für die Bestimmung von n_3 und n_4 müssen wir den Werth von $N-n$ aus Gleichung (2b) entnehmen:

$$\frac{1}{N-n} = \frac{1}{N} - \frac{1}{N(N-1)} \frac{b}{\varrho}.$$

Für $n = n_4$ wird $\varrho = r$, und für $n = n_3$ wird $\varrho = \varrho_0$, also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{N-n_4} &= \frac{1}{N} - \frac{1}{N(N-1)} \frac{b}{r} \\ \frac{1}{N-n_3} &= \frac{1}{N} - \frac{1}{N(N-1)} \cdot \frac{b}{\varrho_0} \end{aligned}\right\} \qquad (4d)$$

Setzen wir die Werthe aus (4c) und (4d) in (4b), so erhalten wir endlich:

$$J = \frac{2B}{N(N-1)}\left\{\frac{b}{\varrho_0} - \frac{b}{r}\right\} \qquad (5)$$

Dieser Werth von J wird in der Mitte des Zerstreuungskreises für $\varrho_0 = 0$ unendlich gross, am Rande, wo $\varrho_0 = r$ gleich 0.

Berechnung der Helligkeit am Rande einer gleichmässig erleuchteten Fläche. Es sei in Fig. 17 AB die Grenzlinie der leuchtenden Fläche, und angenommen, dass jeder Punkt derselben als Zerstreuungskreis erscheine. Es sei ferner p der Punkt, dessen Helligkeit bestimmt werden soll, und $pq = r$ der Radius der Zerstreuungskreise. Es wird auf p Licht gelangen aus allen denjenigen Punkten der Fläche, welche innerhalb des mit dem Radius r um p geschlagenen Kreises liegen. Wenn s einer dieser Punkte ist, und wir die Länge sp mit ϱ, den Winkel spq mit ω, und die Helligkeit des Zerstreuungskreises eines einzelnen Punktes in der Entfernung ϱ vom Centrum mit J bezeichnen, so wird die Helligkeit H im Punkte p werden:

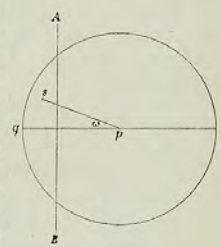


Fig. 17.

$$H = \iint J\varrho\, d\omega\, d\varrho \qquad (6)$$

dieses Integral ausgedehnt über alle Theile der Fläche, welche innerhalb des um p geschlagenen Kreises liegen.

Wenn der Rand der Fläche eine gerade Linie und der Abstand des Punktes s von diesem Rande gleich x ist, so ist für die am Rande gelegenen Punkte der Fläche:

$$\varrho\cos\omega = x,$$

und wenn wir den Ausdruck für H zuerst nach ω integriren, und aus der letzten Gleichung den Werth für die Grenzen von ω entnehmen:

$$H = \int_x^r 2J\varrho \operatorname{arc}\cdot\cos\left(\frac{x}{\varrho}\right) d\varrho \qquad (6a)$$

135 Wenn die Zerstreuungskreise durch unpassende Accommodation entstehen, können wir J als unabhängig von ϱ betrachten und erhalten dann:

$$H = J\left[r^2 \operatorname{arc}\cdot\cos\left(\frac{x}{r}\right) - x\sqrt{r^2 - x^2}\right] \Bigg\} \qquad (7)$$

welche Gleichung für diesen Fall die Helligkeit in der Nähe des Randes der Fläche als Function des Abstandes vom Rande giebt. Für $x = r$ wird $H = 0$, für $x = -r$ wird $H = Jr^2\pi$ und geht hier in die constante Helligkeit der Fläche über.

Wenn die Zerstreuungskreise durch Dispersion entstanden sind, können wir in Gleichung (6a) den Werth von J aus Gleichung (5) setzen, und erhalten durch Ausführung der Integration:

$$\left.\begin{aligned} H = \frac{2Bb}{N(N-1)}\Bigg\{ & r \operatorname{arc}.\cos\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r}\sqrt{r^2 - x^2} \\ & + x \log.\operatorname{nat}\left(\frac{r - \sqrt{r^2 - x^2}}{r + \sqrt{r^2 - x^2}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Für $x = r$ wird $H = 0$, für $x = -r$ wird:

$$H = \frac{2Bbr\pi}{N(N-1)}$$

und geht hier in die constante Helligkeit des mittleren Theiles der Fläche über.

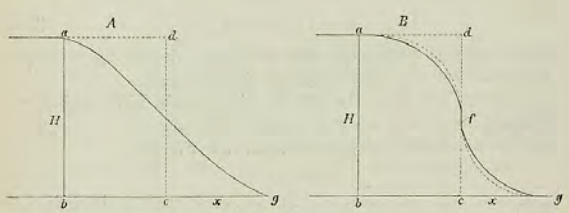


Fig. 18.

Um den Gang dieser Functionen übersichtlicher darzustellen, habe ich in Fig. 18 die beiden Curven construirt. A entspricht der Gleichung (7), B der Gleichung (8). In

beiden sind die Werthe von x in horizontaler, die Werthe der Helligkeit H in verticaler Richtung aufgetragen. Die Ordinate ab entspricht der Helligkeit in der Mitte der Fläche, c bezeichnet den Ort des Randes, sodass die Linie adc die Helligkeit eines ganz scharfen Bildes bezeichnen würde. Die Grenzen des Zerstreuungskreises von c sind b und g. Die Curve B zeichnet sich dadurch vor der an deren aus, dass sie in ihrer Mitte bei f, entsprechend dem wirklichen Orte des Randes, ganz senkrecht abfällt. Es wird hier für $x = 0$ nämlich der Differentialquotient:

$$\frac{dH}{dB} = \frac{2Bb}{N(N-1)}\left\{\frac{2}{r}\sqrt{r^2 - x^2} + \log.\operatorname{nat}.\left[\frac{r - \sqrt{r^2 - x^2}}{r + \sqrt{r^2 - x^2}}\right]\right\} \qquad (9)$$

unendlich gross. Dieser plötzliche Abfall der Helligkeit am Rande der Fläche macht für das Auge die Lage des Randes erkennbar, wenn auch eine gewisse Menge Licht sich noch weiter verbreitet, während in der Curve A die Abnahme der Helligkeit ziemlich gleichmässig stattfindet und der Ort des Randes durch kein besonderes Kennzeichen ausgezeichnet ist.

Wenn man die nach den Enden des Spectrum abnehmende Helligkeit der Farben in Rechnung ziehen könnte, 136
so würde die Curve B etwa die Form der punktirten Linie bekommen müssen. Die Helligkeit innerhalb der Grenzen der Fläche würde sich der normalen noch mehr nähern und ausserhalb dieser Grenzen würde sie noch geringer werden.

Aus diesen Verhältnissen erklärt es sich, warum die Farbenzerstreuung der Bilder im Auge der Schärfe des Sehens so wenig Eintrag thut. Ich habe mir Linsen zusammengestellt, welche im Stande waren, das Auge achromatisch zu machen, aber nicht gefunden, dass die Schärfe des Gesichts dadurch merklich erhöht wurde. Ich fand zu dem Ende eine concave Flintglaslinse von 15,4 Mm. Brennweite, von einem Objectivglase eines Mikroskops genommen, passend. Diese setzte ich zusammen mit convexen Crownglaslinsen, sodass dadurch ein System von etwa $2^1/_2$ Fuss negativer Brennweite entstand, wie es für mein Auge passte, um ferne Gegenstände gut zu erkennen. Wenn ich durch dieses System sah und die halbe Pupille verdeckte, entstanden keine farbigen Ränder

an der Grenze dunkler und heller Gegenstände mehr. Ebenso wenig entstanden dergleichen bei unpassender Accomodation des Auges, sodass das Auge durch dieses Linsensystem wirklich achromatisch gemacht war. Ich konnte aber nicht finden, dass die Schärfe des Sehens in irgend merkbarer Weise zugenommen hätte.

Aus § 16.

Allgemeine Sätze über Helligkeit reciproker Bilder mit Anwendungen auf die Theorie der Augenspiegel.

168

Satz I.

Wenn zwei Lichtstrahlen in entgegengesetzter Richtung durch beliebig viele einfach brechende Mittel gehen, und in einem dieser Medien in eine gerade Linie zusammenfallen, so fallen sie in allen zusammen.

Es sei AB Fig. 19 der Theil der beiden Strahlen, von dem wir wissen, dass er beiden gemeinschaftlich angehöre. Der erste Strahl sei von E längs der Linie EB gekommen, in B gebrochen und nach A gegangen. Der zweite Strahl kommt von A längs der Linie AB nach B, wird hier gebrochen, und gehe nach $E_,$. Zunächst ist zu beweisen, dass $E_,B$ mit EB zusammenfällt. DBC sei das Einfallsloth, m das Brechungsverhältniss des Mittels, in welchem E und $E_,$ der Winkel $EBD = \alpha$ und der Winkel $E_,BD = \alpha_,$ liegen; n dagegen das Brechungsverhältniss des Mittels, in welchem A und der Winkel $ABC = \beta$ liegt. Für den ersten Strahl muss nach dem Brechungsgesetz AB in der durch DB und EB gelegten Ebene liegen, und ferner sein:

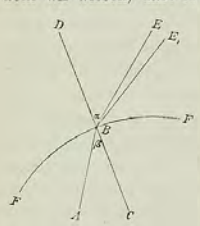


Fig. 19.

$$m \sin \alpha = n \sin \beta.$$

Ebenso muss für den zweiten Strahl $E_,B$ in der durch DB und AB gelegten Ebene liegen, also in derselben, in welcher auch EB liegt, und es muss sein:

$$m \sin \alpha_, = n \sin \beta.$$

Daraus folgt:

$$\sin \alpha = \sin \alpha_,$$

oder

$$\alpha = \alpha_,$$

da beide Winkel nur im ersten Quadranten liegen können.

Daraus folgt, dass $E_,B$ mit EB zusammenfällt. Somit congruiren die beiden Strahlen auch in dem Mittel, in welchem E liegt, soweit dieses reicht.

Bei der nächsten brechenden Fläche lässt sich ihre Congruenz dann wieder für das dritte Medium folgern u. s. w.

Zusätze. 1) Auch sieht man leicht ein, dass bei Reflexionen an spiegelnden Flächen die Congruenz nicht gestört wird.

2) Für das Auge folgt, dass ein Strahl, der auf seinem Wege von der Netzhaut zur Linse mit einem anderen zusammenfällt, der von einem leuchtenden Punkte in das Auge und auf die Netzhaut fällt, auch ausserhalb des Auges mit diesem congruirt.

3) Stellt man den Satz so allgemein hin, wie es hier geschehen ist, so muss man daran denken, dass bei gewissen Polarisationsrichtungen und Einfallswinkeln die Strahlen bei einer Brechung oder Reflexion ganz verlöschen könnten. Bei unseren Anwendungen auf die Beleuchtung des Auges treten 169
solche Umstände nicht ein. Das Licht fällt auf die brechenden Flächen des Auges fast senkrecht ein, wobei seine etwa vorhandene Polarisation so gut wie keinen Einfluss auf die Stärke des gebrochenen und reflectirten Antheils hat. Uebrigens können wir die Schwächung der Strahlen durch Reflexion und Absorption an und in den Augenmedien vernachlässigen. Nur wenn man schräg gestellte Glasplatten als Reflector benutzt, muss man an die Schwächung des Lichtes durch Reflexion denken.

Für die Intensität des hin und zurück gehenden Lichtstrahles lässt sich übrigens ebenfalls eine ganz entsprechende Regel von sehr ausgedehnter Gültigkeit aufstellen, die ausge-

sprochen zu haben hier genügen mag, da wir bei gegenwärtiger Anwendung das Princip in seiner allgemeineren Form nicht brauchen. Den Beweis kann sich übrigens Jeder, der die Gesetze der Optik kennt, leicht selbst führen. Man kann diese allgemeinere Regel folgendermassen aussprechen:

„Ein Lichtstrahl gelange von dem Punkte A nach beliebig vielen Brechungen, Reflexionen u. s. w. nach dem Punkte B. In A lege man durch seine Richtung zwei beliebige, auf einander senkrechte Ebenen a_1 und a_2, nach welchen seine Schwingungen zerlegt gedacht werden. Zwei eben solche Ebenen b_1 und b_2 werden durch den Strahl in B gelegt. Alsdann lässt sich folgendes beweisen: Wenn die Quantität J nach der Ebene a_1 polarisirten Lichtes von A in der Richtung des besprochenen Strahles ausgeht, und davon die Quantität K nach der Ebene b_1 polarisirten Lichtes in B ankommt, so wird rückwärts, wenn die Quantität J nach b_1 polarisirten Lichtes von B ausgeht, dieselbe Quantität K nach a_1 polarisirten Lichtes in A ankommen."

Soviel ich sehe, kann hierbei das Licht auf seinem Wege der einfachen und doppelten Brechung, Reflexion, Absorption, gewöhnlichen Dispersion und Diffraction unterworfen sein, ohne dass das Gesetz seine Anwendbarkeit verliert, nur darf keine Aenderung seiner Brechbarkeit stattfinden, und es darf nicht durch Körper gehen, in denen der Magnetismus nach Faraday's Entdeckung auf die Lage der Polarisationsebene einwirkt.

Satz II.

Wenn die Pupille des beobachteten Auges leuchtend erscheinen soll, so muss sich auf seiner Netzhaut das Bild der Lichtquelle ganz oder theilweise mit dem Bilde der Pupille des Beobachters decken.

Wenn von irgend einer Stelle der Netzhaut des beobachteten Auges Licht in das Auge des Beobachters dringen soll, so muss diese Stelle erstens von der Lichtquelle erleuchtet sein, also dem Bilde der Lichtquelle angehören. Zweitens, wenn wir die Fiction machen, dass Licht von der Pupille des

Beobachters ausgeht, so müsste nach dem vorigen Satze eben so gut Licht von der Pupille des Beobachters zur betreffenden Stelle der Netzhaut des beobachteten Auges wie umgekehrt gehen können. Die Netzhautstelle muss also gleichzeitig dem Netzhautbilde der Pupille des Beobachters angehören, mag dieses Bild nun scharf oder ein Zerstreuungsbild sein.

Zusätze. 1) Dieser Satz gilt nicht nur für den Fall, wo die Strahlen auf geradem Wege von der Lichtquelle zum beobachteten Auge und von diesem zum Auge des Beobachters gehen, sondern auch wenn beliebig viele Linsen und Spiegel dazwischen geschoben sind. Dadurch erhält man ein bequemes Mittel, sich experimentell die Wirkung jedes Augenspiegels am eigenen Auge deutlich zu machen. Man stelle das zur Erleuchtung dienende Licht auf und bringe das Instrument vor sein Auge in dieselbe Lage, wie es sonst vor dem Auge des Beobachteten steht; der Theil des Gesichtsfeldes, welcher alsdann hell erscheint, entspricht dem Theile der Netzhaut, welcher beleuchtet ist. Man kann erkennen, ob das helle Feld gross oder klein, ob es gleichmässig erleuchtet ist, oder ob sich dunkle Stellen darin befinden, und wie dunkel diese sind. Alsdann nehme man die Flamme von der Stelle weg, wo sie zur Erleuchtung des Auges dient, und bringe sie hinter das Instrument, da wo sich sonst das Auge des Beobachters befindet, so dass das Licht durch die Oeffnung scheint, welche dem Beobachter zum Durchsehen dient. Was jetzt im Ge- 170
sichtsfelde erleuchtet ist, ist der Kreis, den der Beobachter von der Netzhaut übersehen kann.

2) Ich empfehle diesen Weg, um bei den verschiedenen Combinationen ebener und gekrümmter Spiegel, convexer und concaver Linsen in den Augenspiegeln und vielen anderen optischen Apparaten sich die Wirkungen klar zu machen, ohne dass man sich auf verwickelte geometrische Construction einzulassen braucht, die den Ungeübten leicht mehr verwirren als aufklären.

Ein solches Reciprocitätsgesetz, wie wir es eben dafür aufgestellt haben, dass überhaupt Licht von einem leuchtenden zu einem zu beleuchtenden Punkte hin und her gehe, lässt sich auch für die Quantität des hin und zurück gelangenden

Lichtes aufstellen. Wir erinnern in dieser Beziehung zunächst an folgendes

Allgemeines Gesetz der Beleuchtung.

Wenn sich in einem durchsichtigen Medium zwei verschwindend kleine Flächenelemente von der Grösse a und b in der gegenseitigen Entfernung r befinden, ihre Normalen mit der sie verbindenden geraden Linie beziehlich die Winkel α und β bilden, und a mit der Helligkeit H Licht aussendet, so ist die Lichtmenge L, welche von a auf b fällt:

$$L = \frac{H . a b \cos\alpha \cos\beta}{r^2} \qquad (1)$$

Ebenso gross ist auch die Lichtmenge, welche von b auf a fallen würde, wenn b mit der Helligkeit H Licht aussendete.

Satz III.

In einem centrirten Systeme von brechenden Kugelflächen sei n_1 das Brechungsverhältniss des ersten, n_2 das des letzten brechenden Mittels. In dem ersten befinde sich senkrecht gegen die Axe des Systems gerichtet und der Axe nahe ein Flächenelement α, in dem letzten ein eben solches β. Wenn α die Helligkeit $n_1^2 H$ hat und β die Helligkeit $n_2^2 H$, so fällt ebenso viel Licht von α auf β, wie von β auf α.

Um den Beweis nicht complicirter zu machen, als unsere beabsichtigten Anwendungen verlangen, vernachlässigen wir dabei die Schwächungen, welche die Strahlen an den brechenden Flächen durch Reflexion erleiden, und nehmen an, dass
171 die Einfallswinkel der Strahlen an den brechenden Flächen immer klein genug sind, um ihre Cosinus gleich 1 setzen zu können, obgleich der Satz sich auch in allgemeinerer Form beweisen lässt.

1) Wenn β nicht am Orte des Bildes von α liegt.

Es sei AC Fig. 20 die optische Axe des brechenden Systems, F sein erster, G sein zweiter Hauptpunkt, α das erste Flächenelement, welches wir, da es verschwindend klein sein soll, nur

durch einen Punkt in der Zeichnung dargestellt haben, γ sein Bild $f_1 f_2$ der Durchschnitt des einfallenden Strahlenbündels in der ersten Hauptebene, $g_1 g_2$ derselbe in der zweiten. Die Grundfläche des Strahlenbündels in der ersten Hauptebene ist congruent derselben in der zweiten; ihre gemeinsame Grösse

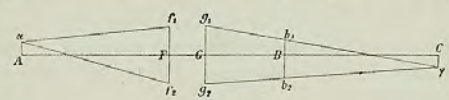


Fig. 20.

sei Φ. Das zweite Flächenelement β liege in der Ebene, welche in B senkrecht gegen die optische Axe steht, und $b_1 b_2$ sei der Durchschnitt des Strahlenbündels von α in dieser Ebene. Die Fusspunkte der von α und γ auf die optische Axe gefällten Lothe seien A und C.

Die Lichtmenge, welche von α auf die Grundfläche des Strahlenkegels $f_1 f_2$ fällt, ist nach Gleichung (1) gleich

$$\frac{n_1^2 H . \alpha . \Phi}{A F^2},$$

wenn $n_1^2 H$ die Helligkeit von α ist. Dieselbe Lichtmenge fällt auch auf die weiteren Querschnitte des Strahlenkegels in $g_1 g_2$ und $b_1 b_2$. Die Lichtmenge nun, welche in der letzteren Ebene auf das Flächenelement β fällt, verhält sich zu der ganzen Lichtmenge, welche die Fläche $b_1 b_2$ trifft, wie die Oberfläche von β zu dem Querschnitt des Strahlenkegels in $b_1 b_2$, den wir mit Ξ bezeichnen wollen. Es ist also die ganze Lichtmenge X, welche von α auf β fällt, gleich

$$X = \frac{\Phi}{\Xi} \cdot \frac{n_1^2 H \alpha \beta}{A F^2} \Bigg\} \qquad (2)$$

Nun ist aber ferner

$$\frac{\Phi}{\Xi} = \frac{(g_1 g_2)^2}{(b_1 b_2)^2} = \frac{C G^2}{B C^2}.$$

Dieser Werth, in die Gleichung (2) gesetzt, giebt:

$$X = n_1^2 H \alpha \beta \frac{C G^2}{B C^2 . A F^2}.$$

Da nun nach S. 101 Gleichung (8a)

$$\frac{G\,C}{A\,F} = \frac{F_2}{A\,F - F_1},$$

wo F_1 und F_2 die beiden Brennweiten des Systems sind, so ist:

$$X = H\alpha\beta \cdot \frac{n_1^2 F_2^2}{[AF \,.\, F_2 + BG \,.\, F_1 - AF \,.\, BG]^2} \Bigg\} \quad (2a).$$

Ebenso bekommt man nun für die Lichtmenge Y, welche von β, wenn es mit der Helligkeit $n_2^2 H$ leuchtet, auf α fällt, den Ausdruck:

$$Y = H\alpha\beta \cdot \frac{n_2^2 F_1^2}{[AF \,.\, F_2 + BG \,.\, F_1 - AF \,.\, BG]^2} \Bigg\} \quad (2b).$$

Da auf beiden Seiten Alles symmetrisch ist, braucht man, um dies zu erhalten, in dem Ausdrucke für X nur zu vertauschen:

$$\begin{gathered} A\,F \text{ mit } B\,G \\ F_1 \text{ mit } F_2 \\ \alpha \text{ mit } \beta \\ n_1^2 H \text{ mit } n_2^2 H. \end{gathered}$$

172 Da nun nach S. 102 Gleichung (9c)

$$n_1 F_2 = n_2 F_1,$$

so folgt aus (2a) und (2b)

$$X = Y,$$

was zu beweisen war.

2) Wenn β an den Ort des Bildes von α fällt.

Wir nehmen zuerst an, dass β in Grösse und Lage dem Bilde von α genau entspreche, dann entspricht auch α genau dem Bilde von β. Alles Licht also, was von α aus durch die brechenden Flächen dringt, fällt auf β, umgekehrt alles, was von β durch die brechenden Flächen dringt, fällt auf α.

Wir behalten die Bezeichnungen der Figur 20 bei, nur dass wir uns das Element β jetzt in γ liegend denken.

Es ist die von α bei der Helligkeit $n_1^2 H$ auf die brechenden Flächen und also auch auf β fallende Lichtmenge X:

$$X = n_1^2 H \frac{\alpha\,\Phi}{A\,F^2} \Bigg\} \quad (3a)$$

und die von β bei der Helligkeit $n_2^2 H$ auf die brechenden Flächen und also auch auf α fallende Menge Y:

$$Y = n_2^2 H \frac{\beta\,\Phi}{G\,C^2} \Bigg\} \quad (3b)$$

Da nun β das Bild von α sein soll, so ist nach S. 101 Gleichung (8b), indem man berücksichtigt, dass α und β ähnliche Flächen, also dem Quadrate ihrer entsprechenden Linear-dimensionen proportional sind:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{F_2^2}{(G\,C - F_2)^2},$$

und da ferner nach S. 101 Gleichung (8a):

$$G\,C - F_2 = \frac{G\,C \,.\, F_1}{A\,F},$$

so folgt

$$\frac{\alpha\,F_1^2}{A\,F^2} = \frac{\beta\,F_2^2}{G\,C^2},$$

und da $F_1 : F_2 = n_1 : n_2$, so folgt:

$$\frac{\alpha\,n_1^2}{A\,F^2} = \frac{\beta\,n_2^2}{G\,C^2} \Bigg\} \quad (3c)$$

Aus (3a), (3b) und (3c) zusammen folgt endlich:

$$X = Y,$$

was zu beweisen war.

Sollte eines der beiden Elemente, z. B. α, grösser sein als das Bild von β, so würden die Theile von α, welche nicht zum Bilde von β gehören, weder Licht auf β werfen, noch von β empfangen können, es würde dadurch also weder X noch Y geändert werden und unser Satz richtig bleiben.

Zusätze. 1) Die ganze Beweisführung lässt sich ebenso gut auf centrirte Systeme brechender und spiegelnder Kugelflächen anwenden.

2) Die leuchtende und beleuchtete Fläche brauchen auch 173
nicht verschwindend klein zu sein, wenn sie nur klein genug sind, dass die Cosinus der Einfallswinkel der Strahlen an den brechenden Flächen sich nicht merklich von 1 unterscheiden. Denn da für jedes Paar verschwindend kleiner Flächenelemente der beiden Flächen der Satz gilt, so gilt er auch für die ganzen Flächen.

Wenn wir den eben bewiesenen Satz auf die Verhältnisse des Augenleuchtens anwenden und das eine Flächenelement in die Netzhaut des beobachteten Auges verlegen, statt des anderen die Pupille des Beobachters setzen, übrigens den Unterschied der Brechung zwischen wässriger und gläserner Feuchtigkeit vernachlässigen und zwischen den beiden Augen ein beliebiges System centrirter brechender oder spiegelnder kugeliger Flächen angebracht denken, so können wir den Satz folgendermaassen aussprechen:

Satz IIIa.

Die Menge Licht, welche von einem Flächenelemente der Netzhaut des beobachteten Auges in das Auge des Beobachters fällt, ist gleich der Helligkeit, mit der das Netzhautelement von der Lichtquelle erleuchtet wird, multiplicirt mit der Menge Licht, welche von der Pupille des Beobachters, wenn sie die Helligkeit = 1 hätte, auf das Netzhautelement fallen würde.

H sei die Helligkeit, mit der das Netzhautelement von der Lichtquelle erleuchtet wird, und k die Lichtmenge, welche von der Pupille des Beobachters, wenn diese mit der Helligkeit 1 leuchtet, auf das Netzhautelement fällt, so würde nach dem eben bewiesenen Satze k auch gleich der Lichtmenge sein, welche von dem Netzhautelemente, wenn dieses die Helligkeit 1 hätte, in die Pupille des Beobachters gelangte. Da dieses nun aber die Helligkeit H hat, so ist die Lichtmenge, welche von diesem Elemente wirklich in die Pupille des Beobachters gelangt, Hk, wie es unser Satz ausspricht.

Es ist dieser Satz gleichsam die weitere Ausführung des Satzes II, indem hier die quantitativen Bestimmungen gegeben werden, welche dort fehlten. Zunächst ist er nur erwiesen für Augenspiegel, an deren brechenden und spiegelnden Flächen die Lichtstrahlen nahe senkrecht einfallen und keinen erheblichen Verlust erleiden. Es ist aber leicht einzusehen, dass er auch für die Beleuchtung des Auges mit schief gestellten spiegelnden Glasplatten gilt, da unpolarisirtes Licht, vom beobachtenden zum beobachteten Auge durch eine solche Platte gehend, ebenso stark geschwächt wird, als wenn es den umgekehrten Weg verfolgte.

Satz IV.

Wenn ein Beobachter durch ein centrirtes System brechender und spiegelnder Kugelflächen ein scharfes Bild eines leuchtenden Gegenstandes erblickt und wir den Verlust von Licht an den brechenden und spiegelnden Flächen vernachlässigen können, so erscheint jede Stelle des Bildes dem Beobachter ebenso hell, wie ihm die entsprechende Stelle des Gegenstandes ohne optische Instrumente gesehen erscheinen würde, so oft die ganze Pupille des Beobachters von den Strahlen getroffen wird, die von einem einzelnen Punkte jener Stelle ausgehen. Ist diese letztere Bedingung nicht erfüllt, so verhält sich die Helligkeit des optischen Bildes zur Helligkeit des frei gesehenen Gegenstandes, wie der von Strahlen eines leuchtenden Punktes getroffene Flächenraum der Pupille des Beobachters zur ganzen Pupille.

Wenn das Auge direct oder durch ein centrirtes optisches System ein deutliches Bild eines Gegenstandes sieht, so können wir das Auge mit dem vorgesetzten optischen Systeme zu- 174
sammen wiederum als ein optisches System betrachten, welches ein Bild des Gegenstandes auf der Netzhaut entwirft. Es sei a ein Flächenelement des Gegenstandes, b sein Bild auf der Netzhaut. So viel Licht von a nach b geht, würde auch nach Satz III dieses Paragraphen von b nach a gehen, wenn dem Netzhautelemente b die Helligkeit $H \cdot n_2^2/n_1^2$ ertheilt würde. In diesem Ausdrucke ist H die Helligkeit des Elements a, n_1 das Brechungsverhältniss des Mediums, in dem sich a befindet, n_2 des Glaskörpers. Es lässt sich aber leicht berechnen, wie viel Licht von b nach a unter diesen Umständen gehen würde. Ist q der Querschnitt des von einem Punkte von b nach einem Punkte von a gehenden Strahlenbündels in der Pupille, so ist

die von b nach a gehende Lichtmenge M gleich der von b nach q gehenden, und diese ist:

$$M = \frac{{n_2}^2}{{n_1}^2} H. \frac{q\,b}{R^2},$$

worin R den Abstand der Pupille von der Netzhaut bedeutet. Streng genommen würde hier unter q der Querschnitt des Strahlenbündels in dem von der Linse entworfenen Bilde der Pupille, und unter R die Entfernung dieses Bildes von der Netzhaut zu verstehen sein. In diesem Ausdrucke für die Lichtmenge, welche von dem leuchtenden Flächenelemente H in das Auge fällt, sind zwei Grössen, welche von der Beschaffenheit des dem Auge vorgesetzten optischen Systems abhängen, nämlich q der Querschnitt des Strahlenbündels in der Pupille und b die Grösse des Bildes auf der Netzhaut.

Die Helligkeit dieses Bildchens hängt nun aber nicht nur von der einfallenden Lichtmenge ab, sondern auch von der Grösse der Fläche b, über welche die Lichtmenge ausgebreitet wird, und ist der letzteren umgekehrt proportional. Setzen wir als Einheit der Beleuchtungsstärke die Lichtmenge, welche die Einheit der Fläche trifft, so ist die Beleuchtungsstärke J des Netzhautelements b:

$$J = \frac{M}{b} = \frac{{n_2}^2}{{n_1}^2} H \cdot \frac{q}{R^2},$$

in welchem Ausdrucke nur noch q von der Beschaffenheit des optischen Systems abhängig ist. Sieht das Auge frei den Gegenstand an, so füllt das Strahlenbündel die ganze Pupille, deren Querschnitt Q sei, und die Beleuchtungsstärke wird:

$$J = \frac{(n_1)^2}{(n_2)^2} H \cdot \frac{Q}{R^2}.$$

Grösser als Q kann q niemals werden; dieser letztere Ausdruck ist also das Maximum der Helligkeit; er stellt die natürliche Helligkeit des Bildes dar. Die Helligkeit ausgedehnter Flächen kann durch optische Instrumente nie grösser, nur kleiner werden, wenn q kleiner als Q, und verhält sich zur natürlichen Helligkeit wie q zu Q.

Zusätze. 1) Nur wenn wir verschwindend kleine leuchtende Punkte durch optische Instrumente betrachten, deren

Bild auch bei den stärksten Vergrösserungen nur die Ausdehnung der kleinsten Zerstreuungskreise auf der Netzhaut bedeckt, also immer dieselbe Flächenausdehnung behält, können optische Instrumente die Helligkeit vergrössern. Dies geschieht z. B. für die Fixsterne, und deshalb können auch Fixsterne durch stark vergrössernde Fernröhre mit grossen Aperturen bei Tage sichtbar gemacht werden. Die scheinbare Helligkeit des Fixsterns steigt proportional der Lichtmenge, welche das Instrument in seinen Focus vereinigt, während die Helligkeit des Himmelsgewölbes im Fernrohre nicht vermehrt wird.

2) Auch wenn Zerstreuungsbilder einer leuchtenden Fläche von gleichmässiger Helligkeit im Auge entworfen werden, kann die Helligkeit des Netzhautbildes nur gleich, nie grösser werden als die Helligkeit bei freier Betrachtung der Fläche. 176
Der Beweis lässt sich ganz so führen wie für scharf gesehene Bilder, da Satz III für scharfe Bilder und für Zerstreuungsbilder gleichmässig gilt. Auch hier ist die Helligkeit proportional dem Querschnitt des Strahlenbündels in der Pupille, welches von dem entsprechenden Punkte der Netzhaut bis nach der leuchtenden Fläche gelangen kann.

Ich erlaube mir zu bemerken, dass gegen die hier entwickelten Grundsätze der Helligkeit dioptrischer und katoptrischer Apparate noch oft gesündigt wird. Man glaubt noch oft, dass wenn man Licht durch Sammellinsen oder Hohlspiegel in das Auge, in Mikroskope u. s. w. fallen lässt, man dadurch nicht bloss die scheinbare Grösse der leuchtenden Fläche, sondern auch ihre scheinbare Helligkeit vermehren könne. Der Vermehrung des in das Auge fallenden Lichtes, welche durch solche Mittel erreicht werden kann, entspricht stets eine entsprechende Vergrösserung des Bildes, sodass das Bild eben nur grösser, nicht heller wird. Durch kein optisches Instrument kann man die Helligkeit einer leuchtenden Fläche von erkennbaren Dimensionen für das Auge grösser machen, als sie dem blossen Auge erscheint. Ebenso wenig kann eine beleuchtete Fläche jemals eine grössere Helligkeit bekommen, als die leuchtende hat.

Satz V.

Allgemeines Verfahren, die Helligkeit zu bestimmen, mit welcher dem Beobachter durch einen Augenspiegel eine Stelle der Netzhaut des beobachteten Auges erscheint.

a) Wenn der Verlust, den die einzelnen Strahlen an den brechenden und reflectirenden Flächen erleiden, vernachlässigt werden kann. Es sei x ein Punkt an der betreffenden Stelle der Netzhaut; wir haben zu untersuchen, wie das Strahlenbündel verläuft, welches von x nach der Pupille desselben Auges geht. Nach Satz I und II muss ein Theil dieses Strahlenbündels zum leuchtenden Körper, ein anderer zur Pupille des Beobachters gehen. Es sei P der Querschnitt der Pupille des beobachteten Auges, p in dieser Pupille der Querschnitt desjenigen Theiles des Strahlenbündels, welches zum leuchtenden Körper zurückgelangt, H die Helligkeit, welche der betreffenden Netzhautstelle zukommen würde, wenn das beobachtete Auge, frei nach dem leuchtenden Körper blickend, auf ihr ein Bild dieses Körpers entwürfe. Wir können diese die normale Helligkeit nennen. Sie hängt natürlich wesentlich von der Structur der Netzhaut selbst ab, ferner von der Helligkeit des leuchtenden Körpers und der Weite der Pupille P. Bei Anwendung des Augenspiegels muss nothwendig die wirkliche Helligkeit der Netzhautstelle kleiner werden, nämlich:

$$\frac{p}{P} H.$$

Weiter ermittelte man den Querschnitt q, den der Theil des von x ausgegangenen Strahlenbündels, welcher in die Pupille des Beobachters gelangt, in dieser Pupille hat, deren ganzer Flächeninhalt Q sei, so ergiebt sich schliesslich für die Helligkeit der Netzhautstelle, wie sie dem Beobachter erscheint,

$$\frac{q \cdot p}{Q \cdot P} H.$$

b) Wenn die Strahlen durch Spiegelung oder Brechung einen merklichen Verlust erleiden. Unter den bisher construirten Formen der Augenspiegel kommt ein solcher nur bei dem von mir angegebenen mit unbelegten spiegelnden Platten vor. Das vom Auge zum leuchtenden Körper gehende Strahlenbündel wird in diesem Falle und allen ähnlichen ebenso viel verlieren als die vom Lichte wirklich zum Auge gehenden Strahlen. Man braucht also auch nur den Verlust des ersteren zu berechnen. Es möge von einem Strahl, der vom Licht zum beobachteten Auge geht und dessen Intensität 1 ist, α im Auge ankommen, und von einem eben solchen Strahle, der vom beobachteten Auge ausgeht, β in dem des Beobachters ankommen, dann müssen wir den obigen Ausdruck 176
für die Helligkeit noch mit α und β multipliciren: er wird also:

$$\frac{\alpha \cdot \beta \cdot p \cdot q}{P \cdot Q} H.$$

Durch die in den vorstehenden Sätzen vollzogene Umkehr des Problems von der Erleuchtung des Auges haben wir die Untersuchung der Helligkeit der Bilder für jeden Fall auf die Bestimmung des Ganges eines einzigen Strahlenbündels reducirt, während es sonst nöthig war die Helligkeit einer einzelnen Netzhautstelle aus der Helligkeit aller über einander gelagerten Zerstreuungskreise, welche den einzelnen Punkten der Lichtquelle entsprechen, durch Summation zu bestimmen. Auch glaube ich, dass die Sache dadurch der Anschauung zugänglicher wird. Den Gang der Strahlen von einem Netzhautpunkte durch die verhältnissmässig einfachen optischen Systeme der Augenspiegel, von denen eines zur Beleuchtung, eines zur Beobachtung dient, einzeln genommen kann man sich leicht veranschaulichen, während die ganze Uebersicht des Ganges der Lichtstrahlen von der Lichtquelle bis zum Auge des Beobachters meist deshalb schwierig wird, weil auf der Netzhaut eine unendliche Zahl ineinander greifender Zerstreuungskreise der Punkte der Lichtquelle und der Pupille des Beobachters entstehen.

Aus § 19.

Ort und Beschaffenheit der durch Prismen entworfenen Bilder.

Im allgemeinen sind homocentrische Strahlen, nachdem 238
sie durch ein Prisma gebrochen worden sind, nicht mehr homo-

centrisch, sondern ein jedes unendlich dünne Strahlenbündel hat zwei Vereinigungsweiten der Strahlen, ähnlich wie es bei homocentrischen Strahlen der Fall ist, welche von ellipsoidischen Flächen, oder bei schiefem Einfall von Kugelflächen gebrochen sind.[1] Um die Betrachtung dieser Verhältnisse zu erleichtern, will ich eine Form des Brechungsgesetzes benutzen, welche bald nach seiner Entdeckung durch Fermat aufgefunden wurde, und welche es namentlich für die Untersuchung solcher Fälle bequem macht, bei denen die einzelnen Theile desselben Strahles nicht alle in einer Ebene liegen.

Definition.

Wenn ein Strahl durch verschiedene brechende Mittel hindurchgeht, und man die Länge seines Weges in jedem einzelnen Mittel mit dem Brechungsverhältnisse dieses Mittels multiplicirt, und alle diese Längen addirt, so nennt man die Summe die optische Länge des Strahles.

Es seien r_1, r_2, r_3 u. s. w. die Weglängen des Strahles im ersten, zweiten, dritten Mittel, und n_1, n_2, n_3 die zugehörigen Brechungscoefficienten, so ist die optische Länge Ψ nach dieser Definition:

$$\Psi = n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3 \text{ etc.} + n_m r_m.$$

Nennen wir die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume c_0, in dem ersten, zweiten, dritten u. s. w. brechenden Mittel dagegen c_1, c_2, c_3, so ist (nach § 9 Seite 36):

$$n_1 = \frac{c_0}{c_1} \quad n_2 = \frac{c_0}{c_2} \quad n_3 = \frac{c_0}{c_3} \ldots . \quad n_m = \frac{c_0}{c_m},$$

also

$$\Psi = c_0 \left[\frac{r_1}{c_1} + \frac{r_2}{c_2} + \frac{r_3}{c_3} + \text{etc.} + \frac{r_m}{c_m} \right].$$

Nenne ich nun t die Zeit, welche das Licht gebraucht,

1) Siehe mein Handbuch d. Physiol. Optik S. 142 und 143. Die folgenden Theoreme können auch für das citirte Kapitel von den monochromatischen Abweichungen des Auges verwendet werden.

um vom Anfang bis zum Ende des hier betrachteten Weges zu gelangen, so ist:

$$t = \frac{r_1}{c_1} + \frac{r_2}{c_2} + \frac{r_3}{c_3} + \text{etc.} \frac{r_m}{c_m},$$

also

$$\Psi = c_0 t.$$

Die optische Länge ist also proportional der Zeit, in der das Licht die Länge des Strahles durchläuft, und ist gleich dem Wege, welchen das Licht in derselben Zeit im leeren Raume zurückgelegt haben würde.

Es kann der Begriff der optischen Länge auch angewendet werden auf den Fall, wo man den Strahl des letzten Mittels rückwärts verlängert denkt bis über die Grenze des Mittels hinaus, etwa bis zu einem Punkte hin, wo ein potentielles Bild des leuchtenden Punktes sich befindet. Um die optische Länge zwischen dem leuchtenden Punkte und seinem potentiellen Bilde 239
zu bestimmen, verfährt man dann wie vorher, nur rechnet man die Entfernung vom Eintritt des Strahles in das letzte Mittel bis zu dem potentiellen Bilde gemessen negativ. Die hier folgenden analytischen Sätze werden dadurch nicht geändert.

I. Lehrsatz.

Das Brechungsgesetz der Lichtstrahlen lässt sich durch die Bedingung ausdrücken, dass die optische Länge des Strahles zwischen einem ihm angehörigen Punkte im ersten und im zweiten Mittel ein Grenzwerth (Maximum oder Minimum) sein solle.

Die beiden brechenden Mittel mögen durch eine beliebig gestaltete Fläche von continuirlicher Krümmung getrennt sein; das Coordinatensystem wollen wir so wählen, dass das Einfallsloth die Axe der z sei, die Gestalt der brechenden Fläche sei gegeben, indem z als Function von x und y bestimmt ist. Für den Einfallspunkt wird:

$$x = y = z = 0, \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0. \tag{1}$$

Ferner seien a_1, b_1, c_1 die Coordinaten eines Punktes im einfallenden Strahle, a_2, b_2, c_2 die eines Punktes im gebrochenen

Strahle. Verbinden wir diese Punkte mit einem Punkte der brechenden Fläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, so ist die optische Länge dieses Weges:

$$\Psi = n_1 \sqrt{(a_1-x)^2+(b_1-y)^2+(c_1-z)^2} + n_2 \sqrt{(a_2-x)^2+(b_2-y)^2+(c_2-z)^2}.$$

Damit Ψ, welches eine Function der unabhängigen Variablen x und y ist, ein Maximum oder Minimum werde, sind die ersten Bedingungen, welche hier schon genügend sind:

$$\frac{d\Psi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Psi}{dy} = 0,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 0 &= n_1 \frac{x-a_1+(z-c_1)\frac{dz}{dx}}{\sqrt{(a_1-x)^2+(b_1-y)^2+(c_1-z)^2}} \\ &\quad + n_2 \frac{x-a_2+(z-c_2)\frac{dz}{dx}}{\sqrt{(a_2-x)^2+(b_2-y)^2+(c_2-z)^2}} \\ 0 &= n_1 \frac{y-b_1+(z-c_1)\frac{dz}{dy}}{\sqrt{(a_1-x)^2+(b_1-y)^2+(c_1-z)^2}} \\ &\quad + n_2 \frac{y-b_2+(z-c_2)\frac{dz}{dy}}{\sqrt{(a_2-x)^2+(b_2-y)^2+(c_2-z)^2}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Für den Einfallspunkt des gebrochenen Strahls werden diese Gleichungen nach den in 1 gegebenen Bestimmungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= n_1 \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} + n_2 \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \\ 0 &= n_1 \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} + n_2 \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \end{aligned}\right\} \quad (2a)$$

240 Wenn wir nun die Lage der Punkte a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 in der gewöhnlichen Weise durch Polarcoordinaten ausdrücken, d. h. setzen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= r_1 \sin\alpha_1 \cos\vartheta_1 & a_2 &= r_2 \sin\alpha_2 \cos\vartheta_2 \\ b_1 &= r_1 \sin\alpha_1 \sin\vartheta_1 & b_2 &= r_2 \sin\alpha_2 \sin\vartheta_2 \\ c_1 &= r_1 \cos\alpha_1 & c_2 &= r_2 \cos\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

so verwandeln sich die Gleichungen (2a) in folgende:

$$\left.\begin{aligned} n_1 \sin\alpha_1 \cos\vartheta_1 &= -n_2 \sin\alpha_2 \cos\vartheta_2 \\ n_1 \sin\alpha_1 \sin\vartheta_1 &= -n_2 \sin\alpha_2 \sin\vartheta_2 \end{aligned}\right\} \quad (2b)$$

Beide in das Quadrat erhoben und addirt, geben:

$$n_1^2 \sin^2 a = n_2^2 \sin^2 \alpha_2,$$

d. h.

$$n_1 \sin\alpha_1 = \pm n_2 \sin\alpha_2.$$

Es passt hier nur das positive Zeichen, weil α_1 zwischen 0^0 und 90^0, α_2 aber nach der hier gewählten Bezeichnung zwischen 90^0 und 180^0 liegen muss, also $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, sowie auch n_1 und n_2 immer positiv sind. Es ist also:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 \quad (4)$$

und wenn man dies in die Gleichungen (2b) einsetzt, erhält man:

$$\cos\vartheta_1 = -\cos\vartheta_2, \qquad \sin\vartheta_1 = -\sin\vartheta_2$$

d. h.

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + 180^0. \quad (4a)$$

Die Gleichungen (4) und (4a), welche wir aus der Bedingung hergeleitet haben, dass die optische Länge des Strahles ein Grenzwerth sei, sind aber identisch mit den beiden Bedingungen des Brechungsgesetzes. Es ist nämlich, wie aus den Gleichungen (3) hervorgeht, α_1 der Brechungswinkel, ϑ_1 der Winkel, den die xzEbene mit der Einfallsebene, ϑ_2 der, den die xzEbene mit der Brechungsebene macht. Einfalls- und Brechungsebene machen also mit einander einen Winkel von 180^0, d. h. fallen in eine Ebene zusammen. Genau dieselbe Beweisführung passt auf das Problem der Spiegelung des Strahles an der bisher als brechend vorausgesetzten Fläche. Man hat nur $n_1 = n_2$ zu setzen, weil der Strahl in demselben Mittel bleibt, und α_2 ist wie α_1 zwischen 0 und 90^0 zu nehmen. Dann werden die Gleichungen (4) und (4a):

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \alpha_2$$
$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + 180,$$

welches die beiden Gesetze der Spiegelung eines Strahles sind.

Nachdem der aufgestellte Lehrsatz für eine brechende Fläche erwiesen ist, lässt er sich leicht auf beliebig viele ausdehnen. Wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von brechenden Mitteln hindurchgegangen ist, welche durch Flächen von continuirlicher Krümmung begrenzt sind, so lässt sich sein Weg durch die Bedingung bestimmen, dass die optische Länge des Strahls zwischen einem seiner Punkte im ersten und einem im letzten Mittel ein Grenzwerth (Maximum oder Minimum) ist.

Es sei Ψ die optische Länge des Strahles, und es seien die Punkte der ersten brechenden Fläche durch die Coordinaten x_1 und y_1, die der zweiten durch x_2 und y_2, die der $m$ten durch x_m und y_m gegeben, und alle diese Coordinatensysteme mögen so gelegt sein: dass ihre zAxe mit dem Einfallsloth zusammen-
241 fällt, die xyEbene die brechende Fläche tangirt. Es sind die ersten Bedingungen des Grenzwerthes:

$$\frac{d\Psi}{dx_1} = 0, \qquad \frac{d\Psi}{dy_1} = 0,$$

$$\frac{d\Psi}{dx_2} = 0, \qquad \frac{d\Psi}{dy_2} = 0$$

u. s. w.

$$\frac{d\Psi}{dx_m} = 0. \qquad \frac{d\Psi}{dy_m} = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen ist nach dem eben bewiesenen Lehrsatze identisch mit der Bedingung, dass der Strahl an der ersten Fläche nach dem bekannten Brechungsgesetze gebrochen werde; die zweite sagt dasselbe für die zweite Fläche, die $m$te für die $m$te. Also ist der Weg des Strahles durch die aufgestellte Bedingung genau ebenso bestimmt wie durch das Brechungsgesetz.

Auch in diesem Falle genügt die Untersuchung der ersten Differentialquotienten der optischen Länge. Ob der Weg des Strahles für alle Verschiebungen der Einfallspunkte ein Maximum, oder für alle ein Minimum, oder für einige ein Maximum, für andere ein Minimum u. s. w. ist, hängt bekanntlich von den zweiten Differentialquotienten ab, kommt aber hier zunächst nicht in Betracht, und es mag deshalb in der vorliegenden Untersuchung erlaubt sein, Grenzwerthe im allgemeinen alle die Werthe der optischen Länge des Strahles zu nennen, deren erste Differentialquotienten den für das Maximum und Minimum aufzustellenden Bedingungen entsprechen, ohne dass weiter nach dem Vorzeichen und der Grösse der zweiten Differentialquotienten gefragt wird. Welchen Einfluss bei unserer Untersuchung die zweiten Differentialquotienten haben, wird sich später zeigen.

II. Wenn Lichtstrahlen von einem Punkte ausgegangen und durch beliebig viele Flächen von continuirlicher Krümmung gebrochen worden sind, stehen sie nach der letzten Brechung senkrecht auf jeder krummen Fläche, für deren sämmtliche Punkte die optische Länge des Strahles einen constanten Werth hat.

Die Bezeichnung bleibe dieselbe, wie bei der Verallgemeinerung des Satzes I. Der Endpunkt des Strahles liege in einer krummen Fläche, für welche:

$$\Psi = \text{Const.} \qquad (1)$$

Wir wollen die einzelnen Punkte dieser Fläche durch dasselbe Coordinatensystem bestimmen, durch welches die Punkte der letzten brechenden Fläche bestimmt sind, und für die Punkte der Fläche $\Psi = C$ setzen $x_m = a$, $y_m = b$, $z_m = c$, und c als Function von a und b ansehen.

Wir wollen nun zwei gebrochene Strahlen betrachten, welche unendlich wenig von einander entfernt sind. Es seien die Coordinaten der Punkte, wo der erste die betreffenden Flächen trifft:

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2 \text{ etc. } x_m,\ y_m,\ a,\ b,\ c,$$

die des zweiten:

$$x_1 + \Delta x_1,\ y_1 + \Delta y_1,\ x_2 + \Delta x_2,\ y_2 + \Delta y_2 \text{ etc.}$$
$$x_m + \Delta x_m,\ y_m + \Delta y_m,\quad a + \Delta a,\quad b + \Delta b,\quad c + \Delta c,$$

wobei wir zu setzen haben, weil c eine Function von a und b ist:

$$\Delta c = \frac{dc}{da}\,\Delta a + \frac{dc}{db}\,\Delta b.$$

242 Die optische Länge des ersten Strahles sei Ψ, die des zweiten $\Psi + \Delta\Psi$, so ist für unendlich kleine Werthe der Aenderungen:

$$\Psi + \Delta\Psi = \Psi + \frac{d\Psi}{dx_1}\Delta x_1 + \frac{d\Psi}{dx_2}\Delta x_2 \text{ etc.} + \frac{d\Psi}{dx_m}\Delta x_m + \left(\frac{d\Psi}{da} + \frac{d\Psi}{dc}\cdot\frac{dc}{da}\right)\Delta a + \frac{d\Psi}{dy_1}\Delta y_1 + \frac{d\Psi}{dy_2}\Delta y_2 \text{ etc.} + \frac{d\Psi}{dy_m}\Delta y_m + \left(\frac{d\Psi}{db} + \frac{d\Psi}{dc}\cdot\frac{dc}{db}\right)\Delta b.$$

Da nun der Werth von Ψ in der Fläche, deren Punkte durch die Coordinaten a, b und c gegeben sind, constant sein soll, so folgt, dass:

$$\Delta\Psi = 0,$$

und da ferner nach dem vorigen Lehrsatze:

$$0 = \frac{d\Psi}{dx_1} = \frac{d\Psi}{dy_1} = \frac{d\Psi}{dx_2} = \frac{d\Psi}{dy_2} \text{ etc.},$$

so folgt:

$$\left(\frac{d\Psi}{da} + \frac{d\Psi}{dc}\cdot\frac{dc}{da}\right)\Delta a + \left(\frac{d\Psi}{db} + \frac{d\Psi}{dc}\cdot\frac{dc}{db}\right)\Delta b = 0,$$

welche Gleichung für alle beliebigen Werthe von $\Delta a / \Delta b$ gültig sein muss, woraus folgt, dass einzeln:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Psi}{da} + \frac{d\Psi}{dc}\cdot\frac{dc}{da} &= 0\\ \frac{d\Psi}{db} + \frac{d\Psi}{dc}\cdot\frac{dc}{db} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Nennen wir nun r_0, r_1 etc. r_m die Weglängen des Strahles in den verschiedenen brechenden Medien, n_0, n_1 etc. n_m die Brechungsverhältnisse, so ist:

$$\Psi = n_0 r_0 + n_1 r_1 + \text{etc.} + n_m r_m.$$

Hierin ist nur r_m abhängig von a, b und c, folglich:

$$\frac{d\Psi}{da} = n_m\frac{dr_m}{da} = n_m\frac{a - x_m}{r_m}$$

$$\frac{d\Psi}{db} = n_m\frac{dr_m}{db} = n_m\frac{b - y_m}{r_m}$$

$$\frac{d\Psi}{dc} = n_m\frac{dr_m}{dc} = n_m\frac{c - z_m}{r_m},$$

so verwandeln sich endlich die Gleichungen (2) in:

$$\left.\begin{aligned}(a - x_m) + (c - z_m)\frac{dc}{da} &= 0\\ (b - y_m) + (c - z_m)\frac{dc}{db} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

welche bedeuten, dass a, b, c der Fusspunkt einer vom Punkt x_m, y_m, z_m auf die Fläche $\Psi = C$ gefällten Normale ist.

Dass dies so sei, ergiebt sich am einfachsten, wenn man 243 bedenkt, dass die Normale selbst ein Maximum oder Minimum der Entfernung zwischen dem Punkte, von dem man sie fällt, und der krummen Fläche ist. Es ist aber die Entfernung r_m zwischen dem Punkte x_m, y_m, z_m und dem Punkte a, b, c der Fläche:

$$r_m = \sqrt{(x_m - a)^2 + (y_m - b)^2 + (z_m - c)^2};$$

um sie zu einem Maximum oder Minimum zu machen, muss man setzen:

$$0 = \frac{dr_m}{da} + \frac{dr_m}{dc}\frac{dc}{da} = \frac{a - x_m}{r_m} + \frac{dc}{da}\cdot\frac{c - z_m}{r_m},$$

$$0 = \frac{dr_m}{db} + \frac{dr_m}{dc}\frac{dc}{da} = \frac{b - y_m}{r_m} + \frac{dc}{db}\cdot\frac{c - z_m}{r_m},$$

welche mit den Gleichungen (2a) identisch sind.

Der durch den Punkt a, b, c gehende Strahl ist also eine Normale auf der durch denselben Punkt gehenden Fläche $\Psi = C$.

Da das Licht gleiche optische Längen in gleicher Zeit zurücklegt, so gelangt es auch in gleicher Zeit von dem leuchtenden Punkte zu allen Punkten der Fläche $\Psi = C$, und diese ist daher eine Wellenfläche, d. h. sie geht durch alle diejenigen Punkte, in denen die gleiche Phase der Aetherschwingung stattfindet.

Bestimmung des Verlaufs eines unendlich dünnen Strahlenbündels. Nachdem bewiesen worden ist, dass es eine krumme Fläche giebt, die Wellenfläche, auf welcher alle durch Brechung in beliebigen Flächen von continuirlicher Krümmung aus homocentrischem Licht entstandenen Strahlen senkrecht stehen, folgt auch, dass für die gebrochenen Licht-

strahlen die Sätze gelten, welche für die Normalen krummer Flächen bekannt sind. Denken wir uns also durch einen beliebig gewählten Strahl A eine Ebene gelegt, welche die Wellenfläche in einer Curve schneidet, und die Ebene um den Strahl gedreht, so wird die Schnittlinie im allgemeinen, da wo sie den Strahl A schneidet, verschiedene Krümmung zeigen, und zwar wird die Ebene der grössten Krümmung der Schnittlinie senkrecht stehen auf der Ebene ihrer kleinsten Krümmung. Errichtet man nun in den Punkten der Wellenfläche, welche dem Strahle A unendlich nahe sind, Normalen, welche also benachbarten Strahlen entsprechen, so schneiden diejenigen, deren Fusspunkte in der Linie grösster oder kleinster Krümmung liegen, den Strahl A in dem Mittelpunkte bezüglich des grössten oder kleinsten Krümmungskreises, die dagegen, deren Fusspunkte weder in der Linie grösster noch kleinster Krümmung liegen, schneiden den Strahl A gar nicht. Auf jedem Strahle giebt es also im allgemeinen zwei Brennpunkte, in denen er von benachbarten Strahlen geschnitten wird, welche den Mittelpunkten der grössten und kleinsten Krümmung der Wellenfläche im Fusspunkte des Strahles entsprechen. Nur wenn beide Punkte in einen zusammenrücken, d. h. die Krümmung der Wellenfläche im Fusspunkte des Strahles nach allen Richtungen hin gleich gross wird, wird der Strahl A von allen ihm unendlich nahen Strahlen in einem Punkte geschnitten.

Um diese Sätze analytisch darzustellen, wollen wir ein Coordinatensystem benutzen, dessen zAxe mit dem Strahle A zusammenfällt. Für die einzelnen Punkte der Wellenfläche setzen wir:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Die Fläche sei gegeben dadurch, dass c als Function von a und b gegeben ist. Nach der Annahme über die Lage des Coordinatensystems ist für:

244 $$a = b = 0 \quad \text{auch} \quad \frac{dc}{da} = \frac{dc}{db} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Wenn x, y, z die Coordinaten eines Punktes der in a, b, c auf der Wellenfläche errichteten Normale bezeichnen, haben wir, wie in Lehrsatz II Gleichung (2a):

$$\left.\begin{aligned}(a-x)+(c-z)\frac{dc}{da}&=0\\(b-y)+(c-z)\frac{dc}{db}&=0\end{aligned}\right\} \quad (1a)$$

Setzt man für a und b die unendlich wenig davon verschiedenen Grössen $a+\Delta a$, $b+\Delta b$, so werden die Gleichungen (1a):

$$\begin{aligned}&(a+\Delta a-x)+(c+\frac{dc}{da}\Delta a+\frac{dc}{db}\Delta b-z)\frac{dc}{da}\\&\qquad+(c-z)\left(\frac{d^2c}{da^2}\Delta a+\frac{d^2c}{da\,db}\Delta b\right)=0\\&(b+\Delta b-y)+(c+\frac{dc}{da}\Delta a+\frac{dc}{db}\Delta b-z)\frac{dc}{db}\\&\qquad+(c-z)\left(\frac{d^2c}{da.db}\Delta a+\frac{d^2c}{db^2}\Delta b\right)=0.\end{aligned}$$

Setzen wir hierin $a = b = 0$ und nach (1) auch $dc/da = dc/db = 0$, so erhalten wir die Gleichungen einer Normale, die dem Strahl A unendlich nahe die Wellenfläche in dem durch die Coordinaten Δa und Δb gegebenen Punkte schneidet, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\Delta a-x+(c-z)\left(\frac{d^2c}{da^2}\Delta a+\frac{d^2c}{da.db}\Delta b\right)&=0\\\Delta b-y+(c-z)\left(\frac{d^2c}{da.db}\Delta a+\frac{d^2c}{db^2}\Delta b\right)&=0\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Für alle Punkte des Strahles A ist gleichzeitig $x = y = 0$. Soll A also von dem Strahle geschnitten werden, dessen Weg durch die Gleichungen (2) gegeben ist, so muss auch in diesen für irgend einen Werth von z gleichzeitig $x = y = 0$ werden. Setzen wir nun in ihnen $x = y = 0$ und eliminiren z, so bleibt als Bedingung für die Möglichkeit des Schneidens:

$$\frac{d^2c}{da.db}\Delta a^2+\left(\frac{d^2c}{db^2}-\frac{d^2c}{da^2}\right)\Delta a\,\Delta b-\frac{d^2c}{da.db}\Delta b^2=0. \quad (3)$$

Nennen wir die unendlich kleine Entfernung der Fusspunkte der beiden Normalen r und den Winkel, den sie mit der xAxe macht, α, welches also zwischen 0 und π liegen muss, so ist:

$$\Delta a = r\cos\alpha, \qquad \Delta b = r\sin\alpha.$$

Setzen wir ausserdem:

$$2n = \frac{\frac{d^2c}{db^2} - \frac{d^2c}{da^2}}{\frac{d^2c}{da.db}},$$

245 so wird die Gleichung (3) vorausgesetzt, dass $d^2c/(da.db)$ nicht gleich Null ist:

$$\operatorname{tang}^2\alpha - 2n\operatorname{tang}\alpha = 1 \qquad (3a)$$

also

$$\operatorname{tang}\alpha = n \pm \sqrt{1+n^2} \qquad (3b)$$

Die beiden Werthe von $\operatorname{tang}\alpha$, welche jedenfalls reell sind, kann man auch schreiben:

$$n + \sqrt{1+n^2} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{n+\sqrt{1+n^2}}.$$

Wenn also α_0 der eine entsprechende Werth von α ist, ist $\alpha + \pi/2$ oder $\alpha - \pi/2$ der andere. Die beiden Winkel sind um einen Rechten unterschieden. Die Grösse r, die den Abstand der Normalen in der Wellenfläche bezeichnet, verschwindet aus der Gleichung (3a). Es wird also der Strahl A geschnitten von allen unendlich nahen Strahlen, welche in Ebenen liegen, die mit der xAxe die Winkel α_0 und $\alpha_0 + \pi/2$ bilden.

Bisher war die Lage der x und yAxe willkürlich in der auf den Strahl A senkrechten Ebene. Zur Vereinfachung wollen wir sie jetzt so gelegt denken, dass sie mit den Ebenen der schneidenden Strahlen zusammenfallen, was jedenfalls ausführbar sein muss. Es müssen dann die beiden Werthe von $\operatorname{tang}\alpha$ werden 0 und ∞, dies bedingt, dass:

$$n = \pm\infty$$

und

$$\frac{d^2c}{da.db} = 0.$$

In der That, wenn wir die letztere Bedingung erfüllt denken, reducirt sich die Bedingung des Schneidens, Gleichung (3) auf:

$$\left(\frac{d^2c}{db^2} - \frac{d^2c}{da^2}\right) \Delta a \Delta b = 0,$$

welche erfüllt wird durch die Annahme, dass entweder $\Delta a = 0$ oder $\Delta b = 0$, dass also die schneidenden Normalen entweder

in der yzEbene oder in der xzEbene liegen. Ist endlich gleichzeitig auch noch:

$$\frac{d^2c}{db^2} - \frac{d^2c}{da^2} = 0,$$

so ist die Bedingung des Schneidens für alle beliebigen unendlich kleinen Werthe von Δa und Δb erfüllt, es schneiden also alle unendlich nahen Normalen den Strahl A. Indem wir weiter die Annahme $d^2c/(dadb) = 0$ festhalten, und dann entweder $\Delta a = 0$ oder $\Delta b = 0$ setzen, finden wir, wie oben bemerkt wurde, die Entfernung z, in der die benachbarten Strahlen den der zAxe parallelen Strahl schneiden, indem wir in den Gleichungen (2) $x = y = 0$ setzen.

Für die Strahlen in der xzEbene ist $\Delta b = 0$, und es folgt aus der ersten der Gleichungen (2) für $z - c$, die Entfernung des Schneidepunkts von der Wellenfläche:

$$z - c = \frac{1}{\frac{d^2c}{da^2}}. \qquad 246$$

Die zweite Gleichung wird $0 = 0$. Für die Strahlen in der yzEbene ist $\Delta a = 0$, und

$$z - c = \frac{1}{\frac{d^2c}{db^2}}.$$

Wenn endlich $d^2c/da^2 = d^2c/db^2 = 1/\varrho$, so ist für alle benachbarte Strahlen ohne Unterschied:

$$z - c = \varrho.$$

Uebrigens sind in diesem Falle die xz und yzEbene auch die Ebenen grösster und kleinster Krümmung, und die Werthe der entsprechenden Krümmungsradien ϱ_a und ϱ_b sind:

$$\varrho_a = \frac{1}{\frac{d^2c}{da^2}}, \qquad \varrho_b = \frac{1}{\frac{d^2c}{db^2}},$$

sodass also die Brennpunkte auch mit den Krümmungsmittelpunkten der Wellenfläche zusammenfallen.

Form eines unendlich dünnen kreisförmigen Strahlenbündels. Um eine deutlichere Vorstellung von dem Verlauf der Strahlen in einem unendlich dünnen Bündel

zu erhalten, wollen wir die Form eines Strahlenbündels betrachten, dessen Basis in der Wellenfläche eine Kreislinie ist. Wir setzen also in den Gleichungen (2) wie vorher:

$$\frac{d^2c}{da.db} = 0 \quad \text{und} \quad \Delta a = r\cos\alpha,\ \Delta b = r\sin\alpha$$

und erhalten aus den Gleichungen (2):

$$r\cos\alpha - x + (c-z)\frac{d^2c}{da^2}r\cos\alpha = 0$$

$$r\sin\alpha - y + (c-z)\frac{d^2c}{db^2}r\sin\alpha = 0.$$

Um die Schnittlinie der Oberfläche des Bündels mit einer auf der Axe des Bündels senkrechten Ebene zu erhalten, müssen wir z constant setzen und den Winkel α eliminiren. Setzen wir zur Abkürzung:

$$p = +r\left[1 + (c-z)\frac{d^2c}{da^2}\right] = +\frac{r}{\varrho_a}[\varrho_a + c - z]$$

$$q = +r\left[1 + (c-z)\frac{d^2c}{db^2}\right] = +\frac{r}{\varrho_b}[\varrho_b + c - z],$$

so erhalten wir:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren Axen von der Länge $2p$ und $2q$ den Axen der x und y parallel liegen. Beide Axen der Ellipse sind kleiner, wenn r kleiner ist; füllt das Strahlenbündel also in der ersten Wellenfläche nicht bloss
247 eine Kreislinie, sondern eine Kreisfläche an, so bleiben sämmtliche Strahlen doch innerhalb des Raumes, den die äusseren Strahlen begrenzen, eingeschlossen, und die letzteren bestimmen mithin die Gestalt des Bündels. In der Wellenfläche selbst, von der wir ausgingen, ist $c - z = 0$, also die Axen $p = q = r$, der Querschnitt ein Kreis. Die Axe p wird gleich Null, wenn:

$$z - c = \frac{1}{\frac{d^2c}{da^2}} = \varrho_a,$$

wenn also der Querschnitt des Bündels durch die Brennpunkte der Strahlen in der xzEbene gelegt wird. Ebenda ist die andere Halbaxe:

$$q = \pm\frac{r}{\varrho_b}(\varrho_a + \varrho_b).$$

Der Querschnitt des Bündels ist alsdann eine der yAxe parallele gerade Linie, deren Länge gleich dem eben angegebenen Werthe von q ist.

Dagegen wird der Querschnitt des Bündels eine der xAxe parallele gerade Linie, wenn:

$$z - c = \frac{1}{\frac{d^2c}{db^2}} = \varrho_b$$

$$q = 0, \qquad p = \pm\frac{r}{\varrho_a}(\varrho_a + \varrho_b).$$

Endlich giebt es noch eine zweite Stelle, wo der Querschnitt des Strahlenbündels ein Kreis ist, wo nämlich:

$$p = -q$$

$$1 + \frac{c-z}{\varrho_a} = -1 - \frac{c-z}{\varrho_b}$$

$$z - c = \frac{2\varrho_a\varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b},$$

daselbst wird:

$$p = q = \pm r\cdot\frac{\varrho_a - \varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b}.$$

Zwischen den beiden kreisförmigen Querschnitten des Bündels muss einer der linienförmigen Querschnitte liegen. Dieser Linie sind die grösseren Axen der elliptischen Querschnitte parallel, welche zwischen den beiden kreisförmigen angelegt

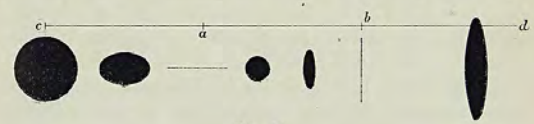


Fig. 21.

werden, während die grossen Axen der ausserhalb dieses Zwischenraumes liegenden senkrecht dagegen gestellt sind. In Fig. 21 bezeichnet die Linie cd den mittleren Strahl, in c ist ein kreisförmiges Diaphragma angenommen, in a und b die

Brennpunkte. Unter der Linie sind die Querschnitte des Bündels, welche den darüber liegenden Punkten der Linie entsprechen, abgebildet.

Allgemeine analytische Bedingung für die Lage der Brennpunkte.

248 Wir wollen die optische Länge zweier unendlich naher Strahlen A und B von ihrem gemeinsamen Ausgangspunkte an bis zu einem Brennpunkte hin, wo sie nach beliebig vielen Brechungen an beliebigen brechenden Flächen von continuirlicher Krümmung wieder zusammentreffen, Ψ und $\Psi + \Delta\Psi$ nennen. Die Coordinatensysteme, nach denen wir die Punkte in den einzelnen brechenden Flächen bestimmen, werden wieder so gedacht, dass ihre zAxe mit den dem Strahle A angehörigen Einfallslothen zusammenfällt, und ihre xyEbene die brechende Fläche tangirt. Die Coordinaten der Einfallspunkte des Strahles B seien in der ersten Fläche x_1, y_1, z_1, in der zweiten x_2, y_2, z_2 u. s. w., in der $m$ten x_m, y_m, z_m. Es wird indessen im Folgenden vorausgesetzt, dass die optischen Längen ausgedrückt sind als Function der x und y allein, und die z, welche selbst wieder Functionen von x und y sind, aus diesen Werthen eliminirt sind; da übrigens die Strahlen A und B unendlich nahe sein sollen, werden die Grössen x_1, y_1 bis x_m, y_m als unendlich klein betrachtet.

Nach dem Taylor'schen Satze ist alsdann:

$$\Psi + \Delta\Psi = \Psi + \frac{d\Psi}{dx_1}x_1 + \frac{d\Psi}{dx_2}x_2 + \text{etc.} + \frac{d\Psi}{dx_m}x_m + \frac{d\Psi}{dy_1}y_1 + \frac{d\Psi}{dy_2}y_2 + \text{etc.} + \frac{d\Psi}{dy_m}y_m.$$

Es müssen nun beide Strahlen den im ersten Lehrsatze ausgesprochenen Bedingungen genügen, d. h. die ersten Differentialquotienten von Ψ und von $\Psi + \Delta\Psi$ nach x_1, y_1, x_2, y_2 etc. x_m, y_m genommen müssen gleich 0 sein. Dies giebt für den ersten Strahl:

$$\frac{d\Psi}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\Psi}{dx_2} = 0 \text{ etc. } \frac{d\Psi}{dx_m} = 0,$$

$$\frac{d\Psi}{dy_1} = 0, \quad \frac{d\Psi}{dy_2} = 0 \text{ etc. } \frac{d\Psi}{dy_m} = 0$$

und mit Berücksichtigung dieser Gleichungen für den zweiten Strahl folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\Psi}{dx_1^2}x_1 + \frac{d^2\Psi}{dx_1dy_1}y_1 + \text{etc.} + \frac{d^2\Psi}{dx_1dx_m}x_m + \frac{d^2\Psi}{dx_1dy_m}y_m = 0\\
&\frac{d^2\Psi}{dy_1dx_1}x_1 + \frac{d^2\Psi}{dy_1^2}y_1 + \text{etc.} + \frac{d^2\Psi}{dy_1dx_m}x_m + \frac{d^2\Psi}{dy_1dy_m}y_m = 0\\
&\frac{d^2\Psi}{dx_mdx_1}x_1 + \frac{d^2\Psi}{dx_mdy_1}y_1 + \text{etc.} + \frac{d^2\Psi}{dx_m^2}x_m + \frac{d^2\Psi}{dx_mdy_m}y_m = 0\\
&\frac{d^2\Psi}{dy_mdx_1}x_1 + \frac{d^2\Psi}{dy_mdy_1}y_1 + \text{etc.} + \frac{d^2\Psi}{dy_mdx_m}x_m + \frac{d^2\Psi}{dy_m^2}y_m = 0
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die Anzahl der Glieder in diesen Gleichungen vermindert sich übrigens dadurch beträchtlich, dass $d^2\Psi/dx_fdx_g$ und $d^2\Psi/dx_fdy_g$ und $d^2\Psi/dy_fdy_g$ gleich Null werden, so oft die Indices f und g um mehr als Eins verschieden sind.

Die Zahl unserer Gleichungen ist $2m$ und sie enthalten $2m$ Unbekannte x_1, y_1 bis x_m, y_m. Da indessen nicht alle diese Unbekannten gleich Null werden dürfen (der Strahl B 249 soll ja von A unterschieden sein), so kann man alle Gleichungen durch eine der Unbekannten x_l, welche nicht Null wird, dividiren, und die $(2m-1)$ anderen Unbekannten dividirt durch x_l als neue Unbekannte betrachten. Dann hat man $2m$ Gleichungen mit $2m-1$ Unbekannten, sodass, wenn man die letzteren eliminirt, noch eine Gleichung übrig bleibt, in welcher die Grössen x_1, y_1 bis x_m, y_m nicht mehr vorkommen, sondern nur noch die partiellen zweiten Differentialquotienten von Ψ. Diese letzte Eliminationsgleichung, in welcher die Determinante der Gleichungen (4) gleich Null gesetzt wird, ist die gesuchte Gleichung für die Lage der Brennpunkte.

Die Determinante der Gleichungen (4) ist nach bekannten Regeln[1] leicht zu bilden. Sie ist eine Summe von Gliedern, deren erstes das Product darstellt:

$$\frac{d^2\Psi}{dx_1 \cdot dx_1} \cdot \frac{d^2\Psi}{dy_1dy_1} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx_2 \cdot dx_2} \text{ etc. } \frac{d^2\Psi}{dx_m \cdot dx_m} \cdot \frac{d^2\Psi}{dy_m \cdot dy_m}.$$

1 S. Jacobi in Crelle's Journ. für Math. XXII.

Die übrigen Glieder der Summe erhält man, indem man in den Nennern der Differentialquotienten, welche Producte je zweier Factoren sind, alle ersten Factoren unverändert lässt, mit den zweiten aber alle möglichen Variationen bildet, und so oft man dabei zwei dieser Factoren mit einander vertauscht, auch das Vorzeichen des Gliedes wechseln lässt.

Nach der Bezeichnungsweise der Variationsrechnung ausgedrückt, wird also die Lage eines Strahles gefunden zwischen seinem Anfangs- und Endpunkt durch die Bedingung, dass die erste Variation seiner optischen Länge gleich Null sei. Und sein Anfangs- und Endpunkt sind zusammengehörige Brennpunkte, wenn die zweite Variation der optischen Länge auch gleich Null gemacht werden kann. Im letzteren Falle ist diese Länge nicht nothwendig ein Maximum oder Minimum.

Brechung im Prisma.

Wir denken die Lage des leuchtenden Punktes durch drei rechtwinkelige Coordinaten a, b, c gegeben, sodass die Axe der c mit der brechenden Kante, die Ebene der bc mit der ersten brechenden Fläche zusammenfällt, und die positiven a ausserhalb des Prisma liegen. Für den Einfallspunkt des Strahles auf dieser Fläche sei $a = 0$, $b = y$, $c = z$. Ebenso denken wir einen Punkt des aus dem Prisma getretenen Strahles durch drei rechtwinkelige Coordinaten α, β, γ gegeben, die einem zweiten Systeme angehören, dessen γ Axe wieder mit der brechenden Kante, dessen $\beta\gamma$ Ebene aber mit der zweiten brechenden Fläche zusammenfällt, und dessen positive α ebenfalls ausserhalb des Prisma liegen. Die γ sollen von demselben Punkte der Kante ab gemessen werden wie die c, sodass also die ab Fläche des ersten Systems mit der $\alpha\beta$ Fläche des zweiten identisch ist. Für den Austrittspunkt des Strahles aus dem Prisma sei $\alpha = 0$, $\beta = v$, $\gamma = \zeta$. Der brechende Winkel des Prisma sei φ, das Brechungsverhältniss der Substanz des Prisma gegen das äussere Medium sei n. Die Länge des Strahles vor dem Prisma sei r_0, die im Prisma r_1, hinter dem Prisma r_2, die optische Länge des ganzen Strahles Ψ, so ist:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{a^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} \\ r_1 &= \sqrt{y^2 - 2yv\cos\varphi + v^2 + (z-\zeta)^2} \\ r_2 &= \sqrt{\alpha^2 + (\beta - v)^2 + (\gamma - \zeta)^2} \\ \Psi &= r_0 + nr_1 + r_2 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Wenn wir die Coordinaten des ersten Systems in denen des 250 zweiten ausdrücken, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -a\cos\varphi - b\sin\varphi \\ \beta &= -a\sin\varphi + b\cos\varphi \\ \gamma &= c \end{aligned}\right\} \quad (5a)$$

Nach Lehrsatz I sind für den Strahl, wenn er nach dem Brechungsgesetze gebrochen sein soll, folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d\Psi}{dy} = \frac{y-b}{r_0} + n\frac{y - v\cos\varphi}{r_1} \\ 0 &= \frac{d\Psi}{dv} = \frac{v-\beta}{r_2} + n\frac{v - y\cos\varphi}{r_1} \\ 0 &= \frac{d\Psi}{dz} = \frac{z-c}{r_0} + n\frac{z-\zeta}{r_1} \\ 0 &= \frac{d\Psi}{d\zeta} = \frac{\zeta-\gamma}{r_2} + n\frac{\zeta - z}{r_1} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Wenden wir folgende Bezeichnung an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{b-y}{nr_0} &= \frac{y - v\cos\varphi}{r_1} = \cos m \\ \frac{\beta - v}{nr_2} &= \frac{v - y\cos\varphi}{r_1} = \cos\mu \\ \frac{c-z}{nr_0} &= \frac{\zeta-\gamma}{nr_2} = \frac{z-\zeta}{r_1} = \cos\nu \end{aligned}\right\} \quad (6a)$$

wobei sich ergiebt:

$$\sin^2\varphi\sin^2\nu = \cos^2 m + 2\cos m\cos\mu\cos\varphi + \cos^2\mu \quad . \quad (6b).$$

und bilden wir mit Benutzung dieser Bezeichnung die zweiten Differentialquotienten von Ψ, so wird das System der Gleichungen (4), welche die Lage der Brennpunkte und die Verhältnisse der unendlich kleinen Differenzen Δy, Δz, Δv, $\Delta\zeta$ beziehlich der Coordinaten y, z, v und ζ je zweier benachbarter und sich in conjugirten Brennpunkten schneidender Strahlen ergeben, folgendes:

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{1}{r_0}(1-n^2\cos^2 m)+\frac{n}{r_1}\sin^2 m\right]\Delta y-\\&\left(\frac{n^2}{r_0}+\frac{n}{r_1}\right)\cos m\cos\nu\,\Delta z-\frac{n}{r_1}(\cos\varphi\\&\quad+\cos m\cos\mu)\,\Delta v+\frac{n}{r_1}\cos m\cos\nu\,\Delta\zeta=0\end{aligned}\right\}\quad(7\,a)$$

$$\left.\begin{aligned}&-\left(\frac{n^2}{r_0}+\frac{n}{r_1}\right)\cos m\cos\nu\,\Delta y+\left[\frac{1}{r_0}(1-n^2\cos^2\nu)\right.\\&\quad\left.+\frac{n}{r_1}\sin^2\nu\right]\Delta z-\frac{n}{r_1}\cos\mu\cos\nu\,\Delta v\\&\quad-\frac{n}{r_1}\sin^2\nu\,\Delta\zeta=0\end{aligned}\right\}\quad(7\,b)$$

251
$$\left.\begin{aligned}&-\frac{n}{r_1}(\cos\varphi+\cos m\cos\mu)\,\Delta y-\frac{n}{r_1}\cos\mu\cos\nu\,\Delta z\\&\quad+\left[\frac{1}{r_1}(1-n^2\cos^2\mu)+\frac{n}{r_1}\sin^2\mu\right]\Delta v\\&\quad+\left(\frac{n^2}{r_2}+\frac{n}{r_1}\right)\cos\mu\cos\nu\,\Delta\zeta=0\end{aligned}\right\}\quad(7\,c)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n}{r_1}\cos m\cos\nu\,\Delta y-\frac{n}{r_1}\sin^2\nu\,\Delta z\\&\quad+\left(\frac{n^2}{r_2}+\frac{n}{r_1}\right)\cos\mu\cos\nu\,\Delta v\\&\quad+\left[\frac{1}{r_2}(1-n^2\cos^2\nu)+\frac{n}{r_1}\sin^2\nu\right]\Delta\zeta=0\end{aligned}\right\}\quad(7\,d)$$

Im allgemeinen werden wir r_1 die Länge des Weges, den die Strahlen im Prisma zurücklegen, vernachlässigen können gegen die Wege ausserhalb des Prisma r_0 und r_2. Multipliciren wir die vier Gleichungen mit r_1 und vernachlässigen dann die mit r_1/r_0 oder r_1/r_2 multiplicirten Glieder als unendlich klein, so erhalten wir folgende drei Gleichungen [(7 b) und (7 d) geben zwei identische Gleichungen]:

$$\left.\begin{aligned}&\sin^2 m\,\Delta y-(\cos\varphi+\cos m\cos\mu)\,\Delta v\\&\quad-\cos m\cos\nu\,(\Delta z-\Delta\zeta)=0\\&-\cos m\cos\nu\,\Delta y-\cos\mu\cos\nu\,\Delta v\\&\quad+\sin^2\nu\,(\Delta z-\Delta\zeta)=0\\&-(\cos\varphi+\cos m\cos\mu)\,\Delta y+\sin^2\mu\,\Delta v\\&\quad-\cos\mu\cos\nu\,(\Delta z-\Delta\zeta)=0\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Von diesen drei Gleichungen folgt aber wieder eine aus den beiden anderen, sodass sie sich nach Elimination von $(\Delta z-\Delta\zeta)$ oder von Δv reduciren auf folgende beide:

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\mu+\cos m\cos\varphi)\,\Delta y=(\cos m+\cos\mu\cos\varphi)\,\Delta v\\&\text{oder}\\&\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta v}{v}\end{aligned}\right\}\quad(8\,a)$$

und

$$\left.\begin{aligned}&(\Delta z-\Delta\zeta)\,(\cos m+\cos\mu\cos\varphi)=\cos\nu\sin^2\varphi\,\Delta y\\&\text{oder}\\&\frac{\Delta z-\Delta\zeta}{z-\zeta}=\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta v}{v}\end{aligned}\right\}\quad(8\,b)$$

Diese beiden Gleichungen sind nur die Bedingungen dafür, dass die beiden Strahlen auf ihrem unendlich kurzen Wege durch das Prisma als merklich parallel angesehen werden können, was selbstverständlich der Fall sein muss, wenn ihre Convergenzpunkte im Vergleich zu ihrem Wege im Prisma unendlich weit entfernt sind.

So haben wir zunächst zwei der unbekannten Grössen Δv und $\Delta\zeta$ durch die beiden anderen Δy und Δz ausgedrückt. Wir müssen uns nun aus den Gleichungen (7) durch Elimination zwei neue Gleichungen bilden, welche die verschwindende Grösse r_1 nicht mehr enthalten, und aus welchen wir die Verhältnisse $\Delta z/\Delta v$ und r_2/r_0 bestimmen können.

Eine solche Gleichung erhalten wir, indem wir (7 b) und (7 d) addiren:

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{n^2}{r_0}\cos m\cos\nu\,\Delta y+\frac{1}{r^0}(1-n^2\cos^2\nu)\,\Delta z\\&\quad+\frac{n^2}{r_2}\cos\mu\cos\nu\,\Delta v+\frac{1}{r_2}(1-n^2\cos^2\nu)\,\Delta\zeta=0\end{aligned}\right\}\quad(8\,c)$$

Um die zweite zu erhalten, multipliciren wir die Gleichung 252
(7 a) mit:

$$y=\frac{r_1}{\sin^2\varphi}(\cos m+\cos\mu\cos\varphi),$$

die Gleichung (7 c) mit:

$$v=\frac{r_1}{\sin^2\varphi}(\cos\mu+\cos m\cos\varphi),$$

die Gleichung (7 b) mit:

$$z-\zeta=r_1\cos\nu$$

und addiren die drei Gleichungen, so fallen die Glieder sämmtlich heraus, welche mit $1/r_1$ multiplicirt sind, und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y}{r_0}\{(1-n^2\cos^2 m)\,\Delta y - n^2\cos m\cos\nu\,\Delta z\}\\&+\frac{z-\zeta}{r_0}\{-n^2\cos m\cos\nu\,\Delta y+(1-n^2\cos^2\nu)\,\Delta z\}\\&+\frac{v}{r_2}\{1-n^2\cos^2\mu)\,\Delta v+n^2\cos\mu\cos\nu\,\Delta\zeta\}=0\end{aligned}\right\}\quad(8\mathrm{d})$$

Wenn man aus (8a) und (8b) die Werthe von Δv und $\Delta\zeta$, in Δy und Δz ausgedrückt, nimmt, und sie in (8c) und (8d) substituirt, erhält man zwei Gleichungen, welche die unbekannten Grössen $\Delta z/\Delta y$ und r_2/r_0 enthalten. Eliminirt man eine von ihnen, so erhält man für die andere eine quadratische Gleichung, welche je zwei Werthe liefert. Da man so für jede Combination beliebig gewählter Werthe der Winkel m, μ, ν einen oder zwei bestimmte Zahlenwerthe des Verhältnisses r_2/r_0 bekommt, so ist für jede gegebene Richtung des Strahlenbündels r_2 proportional r_0, wenn dieses sich ändert. Wird r_0 unendlich gross, so wird es auch r_2. Die Eliminationsgleichungen hier hinzuschreiben, ist nicht nöthig. Wir wollen nur die besonderen Fälle untersuchen, welche uns für die Versuche interessiren.

Zuerst untersuchen wir, in welchen Fällen homocentrisches Licht nach der Brechung im Prisma homocentrisch bleibt. Wenn sich alle Strahlen schneiden sollen, welche vom leuchtenden Punkte ausgegangen sind, so müssen die Bedingungen des Schneidens (8c) und (8d) erfüllt sein, welches auch die Werthe von Δy und Δz sein mögen, die man wählt. Man kann also jede dieser Grössen für sich gleich 0 setzen, und erhält dadurch folgende Bedingungen.

1) Wenn man in (8c) $\Delta y = 0$ setzt, wobei auch nach (8a) und (8b) $\Delta v = 0$ und $\Delta\zeta = \Delta z$:

$$\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_2}\right)(1-n^2\cos^2\nu)=0\qquad(9\mathrm{a})$$

Da nun nach (6a) $n\cos\nu=(c-z)/r_0$, so kann der zweite Factor dieser Gleichung nur gleich Null werden, wenn $r_0=c-z$, wenn also der Lichtstrahl die brechende Fläche streifte, wobei er

nicht eindringen würde. Es muss also der erste Factor von (9a) gleich Null sein, d. h.

$$r_2=-r_0.$$

2) Wenn man in (8d) $\Delta z = 0$ setzt, und $r_2=-r_0$, so 253 wird:

$$0=(1+n^2\sin^2\nu+n^2\cos^2\nu)(\cos^2 m-\cos^2\mu).$$

Der erste Factor ist $1+n^2$, also nie gleich Null, daraus folgt:

$$\cos m=\pm\cos\mu\qquad(9\mathrm{b})$$

3) Wenn man entweder in (8c) $\Delta z = 0$, oder in (8d) $\Delta y = 0$ setzt, und $r_2=-r_0$, so wird mit Berücksichtigung von (6b):

$$(1-n^2)\cos\nu\sin^2\varphi=0.$$

Da aber φ der brechende Winkel des Prisma ist, $\sin\varphi$ also nicht gleich Null werden darf, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\nu&=0\\c=z&=\zeta=\gamma\end{aligned}\right\}\qquad(9\mathrm{c})$$

Der Strahl liegt also ganz in einer auf der brechenden Kante senkrechten Ebene. Unter diesen Verhältnissen schreiben wir die Gleichung (9b) gemäss (6a) unter der Form:

$$y-v\cos\varphi=\pm(v-y\cos\varphi)$$
$$y(1\pm\cos\varphi=\pm v(1\pm\cos\varphi),$$

also:

$$y=v\qquad(9\mathrm{d})$$

Nun ist, wenn ε den Einfallswinkel an der ersten Fläche bezeichnet, ε_1 den Brechungswinkel, η_1 den (im Prisma liegenden) Einfallswinkel an der zweiten Fläche, η den (in der Luft liegenden) Brechungswinkel:

$$\cos\varepsilon_1=\frac{v\sin\varphi}{r_1},\quad\cos\eta_1=\frac{y\sin\varphi}{r_1},$$

also unter den gemachten Voraussetzungen:

$$\cos\varepsilon_1=\cos\eta_1,$$

also auch:

$$\sin\varepsilon=n\sin\varepsilon_1=n\sin\eta_1=\sin\eta,$$

d. h. die Winkel zwischen dem Strahl und den Einfallslothen beider Flächen sind auf beiden Seiten des Prisma gleich.

Diese Richtung, in welcher homocentrische Strahlen durch das Prisma gehen müssen, um homocentrisch zu bleiben, ist noch dadurch ausgezeichnet, dass auch die Ablenkung des Strahles von seinem ursprünglichen Wege ein Minimum ist.

Wenn wir die Coordinaten des ersten Systems a, b, c, x und y nach Gleichungen (5a) in solche des zweiten Systems verwandeln, so erhalten wir die Cosinus der Winkel, welche der ankommende Strahl mit den Axen der α, β und γ im zweiten Systeme macht, beziehlich gleich:

$$-\frac{a\cos\varphi + (b-y)\sin\varphi}{r_0},\quad \frac{(b-y)\cos\varphi - a\sin\varphi}{r_0},\quad \frac{c-z}{r_0};$$

die entsprechenden Cosinus der Winkel, welche der austretende Strahl mit den der Axen α, β und γ macht, sind:

$$\frac{\alpha}{r_2},\quad \frac{\beta-v}{r_2},\quad \frac{\gamma-\zeta}{r_2}.$$

254 Wenn wir den Winkel zwischen der Richtung des ankommenden und der Richtung des ausgetretenen Strahles mit ω bezeichnen, so ist:

$$\left.\begin{aligned}\cos\omega = -\frac{[a\cos\varphi+(b-y)\sin\varphi]}{r_0}\frac{\alpha}{r_2} + \frac{[(b-y)\cos\varphi - a\sin\varphi]}{r_0}\frac{\beta-v}{r_2}\\ + \frac{(c-z)}{r_0}\frac{(\gamma-\zeta)}{r_2}\end{aligned}\right\}(10)$$

Mittels der Gleichungen (5) und (6) kann man hieraus die Grössen a, b, c, α, β und γ eliminiren. Es ist zunächst:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{r_2} &= \sqrt{1 - n^2\frac{(y - v\cos\varphi)^2 + (z-\zeta)^2}{r_1^2}}\\ &= \sqrt{\frac{n^2v^2\sin^2\varphi}{r_1^2} - (n^2-1)}\\ \frac{a}{r_2} &= \sqrt{1 - n^2\frac{(v - y\cos\varphi)^2 + (z-\zeta)^2}{r_1^2}}\\ &= \sqrt{\frac{n^2y^2\sin^2\varphi}{r_1^2} - (n^2-1)}\end{aligned}\right\}\quad\ldots(10a)$$

Wenn eine der beiden Wurzeln imaginär werden sollte, haben wir an der entsprechenden Fläche totale Reflexion des Strahles. Für die Quotienten $(b-y)/r_0$, $(c-z)/r_0$, $(\beta-v)/r_2$, $(\gamma-\zeta)/r_2$ geben die Gleichungen (6) unmittelbar die passenden Werthe. Denkt man diese in den obigen Ausdruck von $\cos\omega$ eingesetzt, so erhält man $\cos\omega$ ausgedrückt durch y, v, z und ζ, und zwar kann man es leicht so einrichten, dass die beiden letzteren Grössen nur noch in r_1 enthalten darin vorkommen. Man erhält folgenden Werth:

$$\left.\begin{aligned}\cos\omega = &-n^2 + n^2\frac{\sin^2\varphi}{r_1^2}(y^2 - yv\cos\varphi + v^2)\\ &- n\frac{\sin\varphi}{r_1^2}(y - v\cos\varphi)\sqrt{n^2y^2\sin^2\varphi - (n^2-1)r_1^2}\\ &- n\frac{\sin\varphi}{r_1^2}(v - y\cos\varphi)\sqrt{n^2v^2\sin^2\varphi - (n^2-1)r_1^2}\\ &- \frac{\cos\varphi}{r_1^2}\sqrt{n^2y^2\sin^2\varphi - (n^2-1)r_1^2}\sqrt{n^2v^2\sin^2\varphi - (n^2-1)r_1^2}\end{aligned}\right\}(10b)$$

Betrachten wir die Grössen x und y als constant, und suchen v und ζ so zu bestimmen, dass der Winkel ω ein Maximum wird, so müssen wir setzen:

$$\frac{d\omega}{dv} = 0 \text{ und } \frac{d\omega}{d\zeta} = 0.$$

Die letztere Gleichung können wir, da ζ nur in r_1 enthalten im Werthe von $\cos\omega$ vorkommt, auch schreiben:

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = -\frac{1}{\sin\omega}\frac{d(\cos\omega)}{d(r_1^2)}\cdot(\zeta - z) = 0.$$

Diese Gleichung wird für alle Werthe von v erfüllt, wenn wir setzen:

$$\zeta - z = 0.$$

Nur dann würde diese Annahme nicht hinreichen, wenn entweder $\sin\omega = 0$, der Strahl also gar nicht gebrochen würde, was nur bei parallelen brechenden Flächen vorkommen kann, 255
oder wenn der Differentialquotient von $\cos\omega$ einen unendlichen Werth annehmen könnte, dadurch dass ein darin vorkommender Nenner gleich Null würde. Man sieht leicht aus (10b), dass nur r_1 und die beiden Wurzeln im Nenner vorkommen

können. Es kann aber r_1 nicht gleich Null werden, so lange y und v positive, wenn auch unendlich kleine Werthe haben, die sie haben müssen, wenn der Strahl durch das Prisma gehen soll. Es können ferner die Wurzeln wegen der Gleichungen (6a) nicht gleich Null werden, wenn der Strahl in den Raum vor und hinter dem Prisma eintreten soll. Wir erfüllen also die Bedingung:

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = 0$$

für alle Werthe von v, indem wir setzen:

$$z = \zeta.$$

Daraus folgt, wie oben, nach den Gleichungen (6) auch:

$$z = c \quad \text{und} \quad \zeta = \gamma,$$

sämmtliche Theile des Strahles verlaufen alsdann in einer auf der brechenden Kante (Axe der z) senkrechten Ebene.

Um die zweite Bedingung zu erfüllen, welche erfüllt werden muss, um ω zu einem Maximum zu machen, nämlich:

$$\frac{d\omega}{dv} = 0,$$

können wir den Ausdruck für $\cos\omega$ zuerst dadurch vereinfachen, dass wir darin $z = \zeta$ setzen, also:

$$r_1^2 = y^2 + v^2 - 2yv\cos\varphi.$$

Führen wir statt v eine neue Variable q ein, indem wir setzen:

$$v = qy,$$

so verschwindet aus dem Ausdruck für $\cos\omega$ in Gleichung (10b) mit v gleichzeitig auch y und $\cos\omega$ wird eine Function von q allein:

$$\cos\omega = \varphi_{(q)}.$$

Da nun aber $\cos\omega$ seinen Werth behält, wenn wir überall die Buchstaben y und v mit einander vertauschen, so muss für jeden Werth von q sein:

$$\cos\omega = \varphi_{(q)} = \varphi_{\left(\frac{1}{q}\right)}.$$

Setzen wir ferner:

$$\frac{d\varphi_{(q)}}{dq} = \varphi'_q,$$

so ist:

$$\frac{d\cos\omega}{dv} = \frac{1}{y}\cdot\varphi'_{(q)} = -\frac{1}{y}\varphi'_{\left(\frac{1}{q}\right)}\frac{1}{q^2}.$$

Für $v = y$, d. h. $q = 1$ wird:

$$\varphi'_{(1)} = -\varphi'_{(1)},$$

woraus folgt:

$$\varphi'_{(1)} = 0,$$

also auch: 256

$$\frac{d\cos\omega}{dv} = 0,$$

und wenn nicht gleichzeitig $\sin\omega = 0$, auch:

$$\frac{d\omega}{dv} = -\frac{d\cos\omega}{dv}\cdot\frac{1}{\sin\omega} = 0.$$

Wenn also:

$$z = \zeta \quad \text{und} \quad y = v$$

ist gleichzeitig:

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{dv} = 0$$

und ω ein Grenzwerth. Die Untersuchung der zweiten Differentialquotienten zeigt, dass ω in diesem Falle ein Maximum ist. Der Winkel zwischen der Verlängerung des eintretenden Strahls und dem gebrochenen Strahle, welcher der Nebenwinkel von ω ist und die Ablenkung des Strahls von seiner ursprünglichen Bahn misst, wird dabei ein Minimum.

Der Maximalwerth von ω findet sich, wenn man in (10b) $y = v$ und $z = \zeta$ setzt:

$$\omega = \varphi + 2arc\cos\left[n\sin\frac{\varphi}{2}\right] \qquad (10c)$$

Ein unendlich dünnes Bündel homocentrischer Strahlen, welches von einem endlich entfernten Punkte ausgeht, bleibt nach dem Durchtritt durch ein Prisma also nur dann homocentrisch, wenn es im Minimum der Ablenkung durchgetreten ist, d. h. wenn es in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene verläuft, und gegen beide Prismenflächen unter gleichen Winkeln geneigt ist.

Unter diesen Umständen wird also vom leuchtenden Punkte durch das Prisma ein potentielles Bild entworfen, welches auf

derselben Seite und in derselben Entfernung vom Prisma liegt wie sein Object. Das Bild liegt aber an einem anderen Orte, vom Prisma gesehen um den Winkel $(\pi/2) - \omega$ verschoben nach der Seite der brechenden Kante hin.

Nicht homocentrische Brechung.

Wenn ein Lichtpunkt betrachtet wird, kann sein Bild nur unter der Bedingung deutlich sein, dass das gebrochene Licht homocentrisch sei. Wird aber eine Lichtlinie betrachtet, so schaden Abweichungen der Strahlen, die in Richtung des Bildes dieser Linie liegen, nicht der Genauigkeit des Bildes. Dies ist nun der gewöhnliche Fall im Spectrum. Ist nun die Lichtlinie der brechenden Kante des Prisma oder der Axe der z parallel, so schaden Abweichungen in Richtung der z nichts, wohl aber solche in der darauf senkrecht stehenden durch den Strahl gelegten Ebene. Sollen Abweichungen nur in Richtung der z vorkommen, so müssen wir in den Gleichungen (8) $\Delta y = 0$ setzen, also auch $\Delta v = 0$ $\Delta z = \Delta\zeta$ und erhalten aus (8c) und (8d):

$$\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_2}\right)(1 - n^2\cos^2 v) = 0,$$

also:

$$r_2 = -r_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11a)$$

257 und zweitens:

$$(1 - n^2)\cos v \sin^2\varphi = 0,$$

woraus wie oben folgt:

$$\cos v = 0$$
$$c - z = z - \zeta = \gamma - \zeta = 0.$$

Wenn die letztere Bedingung erfüllt ist, liegen die Abweichungen Δy in einer durch den Strahl senkrecht gegen die Δz gelegten Ebene. Ihnen entspricht also die zweite Convergenzebene, welche senkrecht auf der bisher betrachteten sein muss. Die zugehörige Vereinigungsweite der Strahlen für die auf der brechenden Kante senkrechte Convergenzebene ergiebt sich, wenn wir in (8d) $\Delta z = 0$ setzen und $\cos v = 0$, woraus auch $\Delta\zeta = 0$ folgt:

$$\frac{1}{r_0}(1 - n^2\cos^2 m)\,y^2 + \frac{1}{r_2}(1 - n^2\cos^2\mu)\,v^2 = 0,$$

oder wenn wir wie vorher die Einfallswinkel an den beiden Prismenflächen in Luft mit ε und η, im Glas mit ε_1 und η_1 bezeichnen:

$$\cos\varepsilon_1 = \frac{v\sin\varphi}{r_1} \qquad \cos\eta_1 = \frac{y\sin\varphi}{r_1}$$

$$\sin\varepsilon = n\sin\varepsilon_1 = n\frac{y - v\cos\varphi}{r_1} = n\cos m$$

$$\sin\eta = n\cos\mu,$$

so folgt:

$$\frac{r_2}{r_0} = -\frac{\cos^2\varepsilon_1\cos^2\eta}{\cos^2\varepsilon\cos^2\eta_1} \qquad (11b)$$

oder

$$r_2\frac{\cos^2\eta_1}{\cos^2\eta} = -r_0\frac{\cos^2\varepsilon_1}{\cos^2\varepsilon}$$

$$r_2\left[1 + \frac{n^2 - 1}{\cos^2\eta}\right] = -r_0\left[1 + \frac{n^2 - 1}{\cos^2\varepsilon}\right].$$

In dieser letzten Form erkennt man leicht, dass r_2 wächst, r_0 abnimmt, wenn η abnimmt und ε wächst. Die grössere Vereinigungsweite kommt also den Strahlen auf der Seite des Prisma zu, wo der Einfallswinkel kleiner ist.

Im Minimum der Ablenkung, wo $\varepsilon = \eta$, wird auch $r_2 = -r_0$, die Vereinigungsweite in der zur brechenden Kante senkrechten Ebene also gleich weit mit der Vereinigungsweite in der jener Kante parallelen Ebene.

Das Bild einer der brechenden Kante parallelen leuchtenden Linie wird da entworfen, wo die Vereinigung der Strahlen in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene stattfindet nach Gleichung (11b). Die Entfernung des Bildes einer der brechenden Kante parallelen Lichtlinie vom Prisma ist also grösser als die Entfernung des Objects, wenn der Einfallswinkel an der ersten Fläche des Prisma, auf welches die Lichtstrahlen fallen, grösser ist als beim Minimum der Ablenkung. Die Entfernung des Bildes ist dagegen kleiner als die des Objects, wenn jener Einfallswinkel kleiner ist.

Betrachtet man also eine solche Lichtlinie durch ein Prisma mit blossem Auge oder mit dem Fernrohr, so muss man für das Minimum der Ablenkung Auge oder Fernrohr für die 258

Entfernung des wirklichen Objects einrichten. Wenn man aber das Prisma dann um eine der brechenden Kante parallele Axe dreht, muss man auch die Einrichtung des Auges oder Fernrohrs passend abändern. Nur wenn das Object unendlich weit entfernt ist, ist auch das Bild unendlich weit entfernt, und die Einrichtung des Auges oder Fernrohrs kann für jede Stellung des Prisma dieselbe bleiben.

Wenn der leuchtende Gegenstand eine verticale helle Linie ist, welche einfarbiges, z. B. rothes Licht aussendet, so ist ihr Bild, wie es durch ein vertical stehendes Prisma erscheint, wieder eine verticale Linie. Geht von der leuchtenden Linie auch noch violettes Licht aus, so entwirft das Prisma auch mittels der violetten Strahlen ein Bild, welches eine verticale Linie ist, die aber weiter entfernt von dem leuchtenden Objecte ist als die rothe Linie, weil das violette Licht stärker gebrochen wird. Geht endlich von der leuchtenden Linie Licht von allen Graden der Brechbarkeit aus zwischen Roth und Violett, so entspricht jedem einzelnen Grade der Brechbarkeit ein besonderes Bild der verticalen Linie und diese linienförmigen Bilder reihen sich zwischen dem rothen und violetten Bilde ein in der Ordnung ihrer Brechbarkeit, und bilden ein Spectrum von rechteckiger Gestalt. Sind in dem Lichte des leuchtenden Objects Strahlen von allen continuirlich in einander übergehenden Graden der Brechbarkeit enthalten, so bildet auch das Spectrum eine continuirlich leuchtende Fläche. Fehlen einzelne Stufen der Brechbarkeit, so fehlen auch im Spectrum die entsprechenden linienförmigen Bilder, und man sieht an ihrer Stelle dunkle verticale Linien das Spectrum durchziehen, die Frauenhofer'schen Linien.

Scheinbare Breite der prismatischen Bilder.

Da man nun leuchtende geometrische Linien nicht herstellen kann, sondern bei den Versuchen immer schmale leuchtende Flächen als Objecte benutzen muss, so haben auch deren Bilder eine gewisse Breite, welche wir jetzt bestimmen wollen.

Nennen wir wieder ε und ε_1 Einfalls- und Brechungswinkel

an der ersten, η_1 und η Einfalls- und Brechungswinkel an der zweiten Fläche, sodass die Winkel ε_1 und η_1 innerhalb des Prisma liegen, den brechenden Winkel selbst φ, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varepsilon &= n\sin\varepsilon_1 \\ \sin\eta &= n\sin\eta_1 \\ \eta_1 + \varepsilon_1 &= \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Nun sei der Spalt sehr weit entfernt und der sehr kleine Gesichtswinkel, unter dem er vom Orte des Prisma aus gesehen wird, sei $d\varepsilon$, sodass der Einfallswinkel des Lichtes vom einen Rande des Spaltes ε, vom anderen $\varepsilon + d\varepsilon$ sei. Die Winkel ε_1, η_1 und η werden für diesen letzteren Strahl beziehlich $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$, $\eta_1 + d\eta_1$ und $\eta + d\eta$. Aus den obigen Gleichungen (12) folgt dann durch Differentiiren:

$$\begin{aligned} \cos\varepsilon\, d\varepsilon &= n\cos\varepsilon_1\, d\varepsilon_1 \\ \cos\eta\, d\eta &= n\cos\eta_1\, d\eta_1 \\ d\eta_1 + d\varepsilon_1 &= 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination von $d\varepsilon_1$ und $d\eta_1$ erhält man:

$$-\frac{\cos\varepsilon\,.\,\cos\eta_1}{\cos\eta\,.\,\cos\varepsilon_1}\, d\varepsilon = d\eta \qquad (12a)$$

$d\eta$ ist der Gesichtswinkel, unter dem der Spalt nach der Brechung im Prisma erscheint; seine Grösse ist durch diese Gleichung gegeben. Geschieht diese Brechung im Minimum der Ablenkung, sodass:

$$\varepsilon = \eta, \quad \varepsilon_1 = \eta_1,$$

so wird: 259

$$-d\varepsilon = d\eta.$$

Die scheinbare Grösse des Spaltes bleibt also unter diesen Umständen unverändert.

Der grösste Werth für ε ist ein rechter Winkel; wenn der Strahl längs der brechenden Fläche nach der brechenden Kante hinläuft, dann bleiben die anderen Winkel spitze Winkel, sodass ihre Cosinus nicht gleich Null werden, und es wird:

$$d\eta = 0.$$

Bei dieser Stellung ist also das Bild des Spaltes unendlich schmal; aber man kann bei praktischen Anwendungen sich der streifenden Incidenz des Lichtes wohl nähern, aber sie

natürlich nie ganz erreichen. Das Entgegengesetzte ist der Fall, wenn man das Prisma so hält, dass das austretende Licht die Fläche beinahe streift, dass also $\cos\eta$ nahehin gleich Null wird. Dann ist:

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon} = -\infty.$$

Ist r_0 die Entfernung des Spaltes vom Prisma und r_2 die scheinbare Entfernung seines Bildes vom Prisma für horizontal divergente Strahlen, so folgt aus (11b), dass:

$$\sqrt{r_0} : \sqrt{r_2} = d\eta : d\varepsilon \qquad (12b)$$

Reinheit des Spectrum. Je kleiner der Unterschied dn des Brechungsverhältnisses derjenigen Farben ist, die an demselben Orte des Spectrum zusammentreffen, desto reiner ist das Spectrum, wir können also die Grösse des angegebenen dn als Maass der Unreinheit betrachten.

Wenn wir als gebrochenen Strahl denjenigen festhalten, welcher von dem betreffenden Orte des Spectrum nach dem Knotenpunkte des Auges verläuft, so ist dessen Lage, also auch der Winkel η fest gegeben. Dagegen variirt der Winkel ε für Strahlen, die von verschiedenen Theilen des Spaltes kommen, und das Brechungsverhältniss variirt für verschiedene Farben. Betrachten wir nun in den drei Gleichungen:

$$\sin\varepsilon = n\sin\varepsilon_1$$
$$\sin\eta = n\sin\eta_1$$
$$\eta_1 + \varepsilon_1 = \varphi$$

φ und η als constant, ε, ε_1, η_1 und n als variabel, so erhalten wir durch Differentiation folgende Gleichungen:

$$\cos\varepsilon\, d\varepsilon = \sin\varepsilon_1\, dn + n\cos\varepsilon_1\, d\varepsilon_1$$
$$0 = \sin\eta_1\, dn + n\cos\eta_1\, d\eta_1$$
$$d\eta_1 + d\varepsilon_1 = 0.$$

Durch Elimination von $d\varepsilon_1$ und $d\eta_1$ erhalten wir:

$$\cos\varepsilon.\cos\eta_1.d\varepsilon = (\sin\varepsilon_1\cos\eta_1 + \cos\varepsilon_1\sin\eta_1)dn$$
$$= \sin\varphi.dn.$$

Wenn wir unter $d\varepsilon$ die scheinbare Breite des Spaltes vom Prisma aus gesehen verstehen, ist das Maass der Unreinheit des Spectrum:

$$dn = \frac{\cos\varepsilon.\cos\eta_1}{\sin\varphi}\, d\varepsilon \qquad (13)$$

Wenn ε sich einem rechten Winkel nähert, also bei streifender Incidenz des Lichtes, wird $\cos\varepsilon = 0$, und demnach auch $dn = 0$. Das Spectrum wird dann also bei gegebener Grösse 260
des Spaltes am reinsten, aber gleichzeitig wird auch die Apertur des Prisma bei so schiefer Incidenz sehr klein, der Lichtverlust durch Reflexion sehr gross, sodass es im Ganzen vortheilhafter bleibt, die Reinheit des Spectrum durch Verengerung des Spaltes (Verkleinerung von $d\varepsilon$) zu erreichen, was ja meist keine Schwierigkeiten hat.

Was die Helligkeit des Spectrum betrifft, so verhält sich die Helligkeit h des Spaltes, die er für irgend eine einzelne homogene Farbe hat, zu der seines Bildes umgekehrt wie seine Breite $d\varepsilon$ zu der des Bildes $d\eta$, wenn man übrigens von den Verlusten absieht, die das Licht durch Reflexion an den Glasflächen erleidet, und wenn die Apertur des Prisma grösser als die Pupille ist, oder beim Gebrauch eines Fernrohrs grösser als das Objectivglas. Also:

$$h\, d\varepsilon = h_1\, \delta\eta$$

oder mit Benutzung des früher gefundenen Verhältnisses von $d\varepsilon$ und $d\eta$:

$$h_1 = h\,\frac{\cos\eta\,\cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon\,\cos\eta_1}.$$

Nun ist die Helligkeit H irgend einer Stelle des Spectrum aber gleich der Summe der Helligkeiten h_1 aller einzelnen homogenen Farben, welche sich dort decken. Im allgemeinen können wir annehmen, dass einfache Farben von sehr kleinem Unterschiede der Wellenlänge λ dieselbe Helligkeit haben. Bezeichnen wir also mit $d\lambda$ und dn dies Intervall der Wellenlänge und Brechbarkeit, innerhalb deren die sich deckenden Farben liegen, so können wir setzen:

$$H = h_1 d\lambda = h_1\,\frac{d\lambda}{dn}\, dn,$$

woraus mit Berücksichtigung des in (13) gefundenen Werthes von dn folgt:

$$H = h\,\frac{\cos\eta\,\cos\varepsilon_1}{\sin\varphi}\, d\varepsilon.\frac{d\lambda}{dn},$$

wo $d\varepsilon$ die scheinbare Breite des Spaltes bezeichnet. Um die Bedeutung dieses Ausdruckes für H zu verstehen, bemerken wir noch, dass wenn wir unter Voraussetzung einer geometrischen Lichtlinie statt des Spaltes den Gesichtswinkel $d\eta$ bestimmen, unter welchem die innerhalb des Intervalls dn vorkommenden Farben in dem ideell reinen Spectrum erscheinen, sich das Verhältniss $dn/d\lambda$, dessen Werth wir mit l bezeichnen wollen, durch eine ähnliche Differentiation wie vorher findet:

$$\frac{d\eta}{dn} = \frac{d\eta}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dn} = l\frac{d\lambda}{dn} = \frac{\sin\varphi}{\cos\eta\cos\varepsilon_1}.$$

Dann wird:

$$H = \frac{h \,.\, d\varepsilon}{l}.$$

Abgesehen also von dem Verluste durch Reflexion und Absorption, ist die Helligkeit des Spectrum, unabhängig von der Brechkraft des Prisma und den Brechungswinkeln, direct proportional der Helligkeit der betreffenden Farben im Spectrum, der scheinbaren Breite des Spaltes und umgekehrt proportional der scheinbaren Länge des betreffenden Theils des Spectrum.

261 Wenn die Brechung im Minimum der Ablenkung geschieht, ist die scheinbare Breite des Spaltes der seines Bildes gleich, und man kann $l/d\varepsilon$ als Maass der Reinheit des Spectrum betrachten. Dann ist also die Helligkeit des Spectrum bei gleichbleibender Helligkeit des durch den Spalt dringenden Lichtes einfach umgekehrt proportional seiner Reinheit. Daraus folgt denn, dass zur Erreichung der grössten Reinheit auch das intensivste Licht nöthig ist.

Dagegen würde es theoretisch möglich sein, etwas gössere Helligkeit bei gleicher Reinheit des Spectrum zu gewinnen, wenn man den Einfallswinkel an der ersten brechenden Fläche vergrössert und den Spalt breiter macht; um aber die Länge des Spectrum constant zu erhalten, müsste man auch noch den brechenden Winkel vergrössern. Indessen lässt sich praktisch dadurch nichts gewinnen, weil der Lichtverlust

durch Reflexion immer grösser wird, und die kleinen Abweichungen der brechenden Flächen von einer vollkommenen Ebene das Bild desto mehr verwirren, je grösser der Einfallswinkel ist.

Bisher ist der Gebrauch des Prisma ohne Vergrösserungsgläser vorausgesetzt worden. Das prismatische Spectrum kann nun aber auch wie jedes andere optische Bild als Object für ein Fernrohr gebraucht und beliebig vergrössert werden. Dabei wird die Reinheit des Spectrum natürlich nicht verändert, und wenn das Fernrohr eine hinreichend grosse Apertur hat, um die gesehenen Gegenstände in ihrer natürlichen Helligkeit zu zeigen, und die Apertur des Prisma dieser gleichkommt, so ist auch die Helligkeit des vergrösserten Bildes unverändert. Auch bleiben die in dem Vorausgehenden hingestellten Regeln über Helligkeit und Reinheit des Spectrum unverändert, wenn man unter $d\varepsilon$ die scheinbare Grösse des Spaltes, unter $d\eta$ die seines Bildes, unter l die Länge des bestimmten Theils des Spectrum versteht, wie sie durch das Fernrohr erscheinen. Aus der für die Helligkeit hingestellten Bedingung ergiebt sich übrigens, warum für Versuche ohne Fernrohr ganz kleine Prismen ausreichen, während man für Fernrohrversuche desto grössere haben muss, je stärker die Vergrösserung.

Bei der Einstellung des Fernrohrs auf das Spectrum hat man noch zu beachten, dass die Farbenstreifen und dunkeln Linien scharf erscheinen, wenn die horizontal divergirenden Strahlen vereinigt werden (Spalt und brechende Kante, wie hier immer, senkrecht gedacht), die obere und untere Begrenzungslinie des Spectrum dagegen und andere horizontale Linien, die durch kleine Unregelmässigkeiten der Grenzen des Spaltes oder durch Staubfäden in ihm leicht im Spectrum entstehen können, scharf erscheinen, wo die vertical divergirenden Strahlen vereinigt werden. Nur bei der Stellung des Prisma daher, welche das Minimum der Ablenkung giebt, kann man das Fernrohr gleichzeitig auf die verticalen und horizontalen Linien einstellen. Und zwar braucht man bei vollkommen ebenen Prismenflächen dazu dieselbe Einstellung des Fernrohrs, wie um den Spalt direct ohne Prisma deutlich zu sehen. Dreht man,

vom Minimum der Ablenkung ausgehend, dagegen die brechende Kante des Prisma mehr gegen das Objectivglas des Fernrohrs hin, so muss man für die Farbenstreifen und dunkeln Linien eine Einstellung auf grössere Entfernung nehmen, bei einer entgegengesetzten Drehung des Prisma dagegen auf eine kleinere Entfernung, während die Einstellung für die horizontalen Linien in beiden Fällen unverändert bleibt.

LV.

Ueber die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Mikroskope.

Aus den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 20. October 1873.

Nach einem zuerst von Lagrange aufgestellten allge- 625
meinen Gesetze der optischen Instrumente, werden die Strahlenbündel, welche von einem einzelnen Objectpunkte aus durch das Instrument gehen, desto enger, je stärker die Vergrösserung wächst. Je enger die Strahlenkegel, desto geringer wird die Helligkeit des Bildes, desto stärker die durch entoptische Schatten und Diffraction bedingte Undeutlichkeit des Bildes. Wenn die Grösse der kleinsten wahrnehmbaren Objecte beurtheilt wird nach dem Abstand je zweier heller Linien, die noch als getrennt von einander erkannt werden können, so wird diese Grösse derjenigen gleich gesetzt werden dürfen, welche im vergrösserten Bilde des Objectes gleich der Breite der äusseren Diffractionsfransen eines jeden hellen Punktes ist. Es ist dies eine nur von dem Divergenzwinkel der einfallenden Strahlen abhängige, übrigens von der Construction des Instrumentes unabhängige Grösse.

Nennt man α den Winkel, den die äussersten Strahlen des von dem Axenpunkt des Objectes in das Instrument fallenden und dieses ganz durchlaufenden Strahlenbündels bei ihrem Ausgangspunkte mit der Axe bilden, λ die Wellenlänge des Lichtes in dem Medium, wo das Object liegt, ε die Grösse der kleinsten erkennbaren Distanz am Object, so ist diese:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}.$$

Gehen die Strahlen durch eine ebene zur Axe senkrechte Fläche in Luft über, und bezeichnet man die auf Luft bezogenen Werthe von λ und α mit λ_0 und α_0, so kann man auch schreiben:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha_0}.$$

Unsere neueren Immersionsmikroskope machen α_0 nahe gleich einem Rechten, dann wird ε gleich der halben Wellenlänge des gebrauchten Lichtes. Für mittleres grüngelbes Licht von grösster Helligkeit kann man setzen:

$$\lambda_0 = 0{,}00055 \text{ Mm.}$$

$$\varepsilon = 0{,}000275 = \frac{1}{3636} \text{ mm}$$

626 Die zuverlässigeren neueren Messungen, namentlich die an solchen Objecten, welche wirklich einen breiten Lichtkegel geben, angestellten, ergeben Zahlen $\left(\frac{1}{3312} \text{ mm Harting}\right)$, die nicht viel grösser sind als jene.

LVI.

Die theoretische Grenze für die Leistungsfähigkeit der Mikroskope.

Aus Poggendorff's Annalen. Jubelband 1874. S. 557—584.

Die Frage, ob und wie weit noch Fortschritte in der 557
Leistungsfähigkeit der Mikroskope gemacht werden können, ist für viele Zweige der Naturwissenschaft von allergrösstem Interesse. Fortschritte sind allerdings immer noch gemacht worden, namentlich durch die von Herrn Hartnack mit so viel Glück wieder aufgenommene Idee der Amici'schen Immersionslinsen, aber freilich nur noch in sehr kleinen und zögernden einzelnen Schritten. Wir sind offenbar schon bei einem Zustande angekommen, wo jede kleinste neue Verbesserung nur noch durch einen unverhältnissmässigen Aufwand von geistiger und mechanischer Arbeit zu erreichen ist. Und doch wusste man, so viel ich sehe, bisher keinen Grund dafür anzugeben, warum es so sein sollte, ausser der etwas allgemein gehaltenen Vorstellung, dass die sphärische Abweichung so kleiner und stark ge- 558
krümmter Linsen, wie sie in den Objectivsystemen stark vergrössernder Mikroskope nothwendig sind, schwer zu beseitigen ist. Vor nicht langer Zeit erst hat Herr Listing[1]), einer der ausgezeichnetsten Kenner dieses Gebietes, die Mittel discutirt, durch welche man zu Vergrösserungen von 2500 oder selbst 50000 Mal gelangen könnte, während die praktisch brauchbaren Vergrösserungen bisher zwischen 400 und 800 ihre Grenze zu finden pflegen.

1) Poggendorff's Annalen, Bd. 136. S. 467. 473.

Die aus den vielfältigen Versuchen der praktischen Optiker hervorgehende Erfahrung hat ferner gelehrt, dass stärkere Vergrösserungen mit guter Sehschärfe nur durch solche Instrumente zu erreichen sind, bei denen der von jedem Objectpunkt in das Objectivlinsensystem fallende Strahlenkegel eine sehr grosse Apertur hat. Man ist allmälig vorgeschritten bis zur Construction von Instrumenten, bei denen Strahlen, welche fast senkrecht gegen die Axe gerichtet sind, in das Objectivglas eintreten und zum Ocular hingelenkt werden. Freilich geschieht das nur, wenn die untere Seite der Objectivlinse mit Luft in Berührung ist; dann dringen in der That in die besten Immersionslinsensysteme Strahlen ein, welche bis $87^1/_2{}^0$ gegen die Axe geneigt sind. Dieser Winkel reducirt sich indessen auf etwa 48^0, wenn das Instrument in normaler Weise gebraucht wird, sodass Wasser zwischen Objectiv und Deckgläschen eingeschaltet wird. Immerhin ist der genannte Winkel viel grösser, als man ihn in dem Linsensystem eines Teleskops oder einer photographischen Camera obscura zulassen würde, weil bei so schrägen Incidenzen die sphärischen Abweichungen selbst in den sorgfältig berechneten und genau auszuführenden Linsen dieser Instrumente unerträglich gross werden würden. Warum ist nun trotzdem in den Mikroskopen ein breiter einfallender Lichtkegel vortheilhafter als ein schmaler von grösserer Helligkeit, der dieselbe Menge Licht in das Instrument liefert? Die bisherigen Beantwortungen dieser Frage scheinen mir nicht genügend zu sein. Denn die sogenannte Penetration, das heisst die Fähigkeit des Instrumentes, Körper, deren Brechungsvermögen sehr wenig von dem ihrer
559 Umgebung abweicht, deutlich schattirt zu zeigen und erkennen zu lassen, hängt nur von dem Verhältniss ab zwischen der Oeffnung des beleuchtenden Strahlenkegels und der Oeffnung des in das Instrument fallenden Kegels. Eine hinreichend starke Schattirung kann man durch Verengerung des ersteren mittels Blendungen immer hervorbringen; nur kann man relativ weitere Blendungen unter dem Object anwenden, wenn auch der in das Objectiv fallende Strahlenkegel breiter ist.

In der That ist nun in den zusammengesetzten Mikroskopen eine Ursache vorhanden, welche unter den hier gegebenen Bedingungen viel stärkere Abweichungen der Strahlen von ihrem Brennpunkte hervorbringt als die chromatische und sphärische Aberration, und welche gerade bei engen Lichtkegeln sich am meisten geltend macht. Das ist die Diffraction des Lichtes. Wenn dieselbe auch vielleicht gelegentlich als Ursache für Verschlechterung des Bildes erwähnt worden ist, habe ich nirgends eine methodische Untersuchung über die Grösse ihres Einflusses gefunden. Eine solche Untersuchung zeigt aber, dass die Diffraction der Strahlen mit steigender Vergrösserung nothwendig und unausweichlich wächst, und dem mikroskopischen Sehen eine unübersteigbare Grenze zieht, der unsere besseren neueren Instrumente sogar schon ziemlich nahe gekommen sind.

Dass die Dunkelheit und Diffraction des mikroskopischen Bildes mit steigender Vergrösserung nothwendig zunehmen müssen, und zwar unabhängig von der besonderen Construction des optischen Instrumentes, beruht auf einem allgemeinen Gesetz der optischen Instrumente, welches zuerst für beliebige Zusammenstellungen unendlich dünner Linsen Lagrange[1]) aufgestellt hat. Dasselbe ist aber, wie es scheint, fast unbekannt geblieben, vielleicht deshalb, weil er es in Form von Gleichungen aufgestellt hat, deren Coefficienten keine leicht zu veranschaulichende Bedeutung haben. Ich selbst habe das betreffende Gesetz in etwas allgemeinerer Form (nämlich für centrirte Systeme brechender Kugelflächen mit beliebigen einfach brechenden Medien dazwischen) in meiner Physiologischen Optik § 9 S. 50 abgeleitet und mich bemüht, ihm eine leicht 560
anschauliche physikalische Deutung zu geben.

Ich recapitulire hier zunächst kurz das bezeichnete Theorem und seinen Beweis.

Dasselbe gilt für jedes centrirte System kugeliger brechender oder spiegelnder Flächen, durch welches Strahlen unter so kleinen Einfallswinkeln gehen, dass das System von punktförmigen Objecten punktförmige Bilder entwirft, das heisst also: homocentrische Strahlen homocentrisch bricht. Ein cen-

1) Sur une loi générale d'Optique. Mémoires de l'Académie de Berlin. 1803. Cl. de Mathém. p. 3. — Siehe oben S. 95 und 96.

trirtes System nenne ich ein solches, in welchem die Krümmungsmittelpunkte sämmtlicher brechenden oder spiegelnden Kugelflächen in einer geraden Linie, der Axe des Systems, liegen. Wir denken uns vor einem solchen System einen leuchtenden Punkt in der Axe gelegen, der einem zur Axe senkrechten ebenen Objecte $a'a''$ (Fig. 22) angehört, und von dem Strahlen durch das optische System gehen, wir nennen den Winkel zwischen einem dieser Strahlen und der Axe des Systems den Divergenzwinkel des betreffenden Strahles. Wird durch die Axe und den Strahl eine Ebene gelegt, so ist diese die Einfallsebene des Strahles bei der nächsten Brechung und wird denselben Strahl also auch nach der nächsten Brechung und somit auch nach jeder folgenden Brechung enthalten. Von dieser Ebene, die von der Axe in zwei Hälften getheilt wird, rechnen wir die eine Hälfte als positiv, die andere als negativ, und dem entsprechend den Divergenzwinkel des Strahles als positiv oder negativ, je nachdem der Strahl gegen die positive oder negative Hälfte der Ebene hin fortschreitet. Sind diese Festsetzungen gemacht, so ist der besprochene Satz folgender:

Theorem.

Das Product aus dem Divergenzwinkel eines beliebigen Strahles, dem Brechungsverhältniss des Medium, durch welches er sich zur Zeit bewegt, und der Grösse des Bildes, welchem die durch das betreffende Medium sich bewegenden Strahlen angehören, bleibt in einem centrirten Systeme kugeliger brechender und spiegelnder Flächen bei jeder Brechung unverändert, wenn überhaupt die Bedingungen für die Entwerfung genauer Bilder eingehalten sind.

561 Es wird das genannte Product also nach dem Austritt der Strahlen aus dem System noch denselben Werth haben wie vor dem Eintritt in dasselbe.

Beweis. Es sei ab ein Stück der Axe des Systems, hh' eine der brechenden Flächen, c ihr Krümmungsmittelpunkt, a der Convergenzpunkt der (nöthigenfalls verlängerten) auf hh'

einfallenden Strahlen, b der Vereinigungspunkt der von hh' gebrochenen Strahlen, f der vordere, g der hintere Hauptbrennpunkt der Fläche hh'. Es sei ferner das Brechungsverhältniss

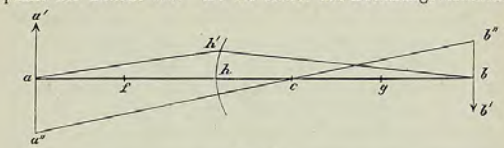


Fig. 22.

des vor hh' liegenden Medium n', das des dahinter liegenden n''; den Divergenzwinkel im ersteren Medium für den durch h' gehenden Strahl, $h'ah$ bezeichnen wir mit α', den im zweiten Medium $-h'bh$ mit α''; die Grösse des Bildes aa'', welches den Strahlen des ersten Medium angehört, mit β', des Bildes $-bb''$ für das zweite Medium mit β''. Wir haben zunächst wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $aa''c$ und $bb''c$:

$$\frac{\beta'}{\beta''} = -\frac{ac}{cb}. \tag{1}$$

Andererseits wenn wir das sehr kleine Bogenstück hh' der brechenden Fläche als eine zur Axe senkrechte gerade Linie betrachten:

$$hh' = ah.\ \text{tang.}\ \alpha' = -bh.\ \text{tang.}\ \alpha''$$

oder, wenn wir, was hier wegen der Kleinheit der Winkel erlaubt ist, statt der Tangenten die Winkel setzen:

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} = -\frac{bh}{ah}. \tag{2}$$

Multipliciren wir die Gleichung (1) mit (2), so ergiebt dies:

$$\frac{\alpha'.\beta'}{\alpha''.\beta''} = -\frac{ac.bh}{bc.ah} \tag{3}$$

Nun ist aber nach den bekannten Gesetzen der Brechung 562 an einer Kugelfläche, deren Radius $hc = r$, der Werth ihrer Hauptbrennweiten:

$$F' = hf = \frac{n'r}{n''-n'}$$
$$F'' = hg = \frac{n''r}{n''-n'}, \tag{4}$$

woraus folgt:

$$\frac{F'}{F''} = \frac{n'}{n''} \tag{4a}$$

$$F'' - F' = r. \tag{4b}$$

Ferner

$$\frac{F'}{ah} + \frac{F''}{bh} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{F''}{ac} + \frac{F'}{bc} = 1$$

oder

$$\frac{bh}{ah} = \frac{bh - F''}{F'} \quad \text{und} \quad \frac{bc}{ac} = \frac{bc - F'}{F''}.$$

Division der letzten beiden Gleichungen ergiebt:

$$\frac{bh \,.\, ac}{ah \,.\, bc} = \frac{F''(bh - F')}{F'(bc - F')}.$$

Nun ist aber

$$bh = bc + r = bc + F'' - F'$$

nach (4b), und also

$$bh - F'' = bc - F'$$

und daher

$$\frac{bh \,.\, ac}{ah \,.\, bc} = \frac{F''}{F'} = \frac{n''}{n'}$$

nach (4a). Also wird Gleichung (3):

$$\frac{\alpha' \,.\, \beta'}{\alpha'' \,.\, \beta''} = \frac{n''}{n'}$$

oder

$$n' \,.\, \alpha' \,.\, \beta' = n'' \,.\, \alpha'' \,.\, \beta'' \tag{5}$$

q. e. d.

Es folgt aus diesem Satze zunächst, dass wenn der Strahl B bei seinem Abgang vom leuchtenden Punkte einen absolut
563 kleineren Divergenzwinkel hat als der Strahl A, der Divergenzwinkel von B auch nach jeder folgenden Brechung kleiner bleiben muss als der von A; weil eben das auf B bezügliche Product unseres Satzes von Anfang an kleiner ist als das für A und deshalb nach jeder Brechung kleiner bleiben muss.

Wenn zwei von demselben Punkte der Axe ausgegangene Strahlen aber gleich grosse Divergenzwinkel in zwei verschiedenen durch die Axe gelegten Ebenen haben, so bleiben ihre Divergenzwinkel nach allen Brechungen gleich gross; was sich übrigens schon aus der Symmetrie des Systems rund um seine Axe ergiebt.

Denken wir uns also das durch das optische System gehende Strahlenbündel irgendwo begrenzt durch eine kreisförmige Blendung, deren Ebene senkrecht zur Axe steht und deren Mittelpunkt in der Axe liegt, so sind die Strahlen, welche dicht am Rande der Blendung vorbeigehen, diejenigen, welche die grössten für sie alle gleichen Divergenzwinkel haben und bei allen Brechungen behalten. Diese Strahlen werden offenbar Kegelflächen von kreisförmiger Basis bilden, deren Axe die optische Axe des Systems ist, und welche das ganze von einem Punkte der Axe ausgegangene Strahlenbündel, soweit es überhaupt das Instrument passirt, abgrenzen. Der Divergenzwinkel dieser Grenzstrahlen ist alsdann auch auf dem ganzen Wege der Strahlen der Winkel, welcher die halbe Oeffnung der das Bündel begrenzenden Kegelfläche misst.

Zunächst ergeben sich hieraus nun wichtige Folgen für die photometrischen Verhältnisse.

Nach den bekannten Gesetzen der Photometrie kann man die Lichtmenge L, welche das leuchtende Flächenelement dS auf das in der Entfernung r befindliche Flächenelement ds sendet, wenn (r, N) und (r, n) die Winkel zwischen der Linie r und den Normalen N und n der beiden Flächenelemente bezeichnen, setzen:

$$L = J \frac{dS \cdot ds}{r^2} \cdot \cos(r, N) \cdot \cos(r, n). \tag{6}$$

Wenn wir nun unter ds die kreisförmige Apertur des Strahlenkegels an einer der brechenden Flächen verstehen, und unter dS ein von der Axe geschnittenes leuchtendes Flächenelement, 564
sodass r in die Richtung der Axe fällt, so ist:

$$\cos(rn) = 1 \quad \text{und} \quad dS \cdot \cos(r, N),$$

ist die Projection von dS auf eine zur Axe normale Ebene. Ist α der Divergenzwinkel, der nach dem Umfange von ds gerichteten Strahlen, so ist:

$$ds = \pi . r^2 . \alpha^2$$
$$L = J . \pi . \alpha^2 . dS . \cos(r, N). \qquad (6a)$$

Dieselbe Lichtmenge muss aber auch im folgenden Medium in der Fortsetzung desselben Strahlenkegels enthalten sein. Bezeichnen wir hier mit J', α', dS', N' die entsprechenden Grössen, so ist also auch:

$$L = J' . \pi . \alpha' . dS' \cos(r, N'). \qquad (6b)$$

Nun ist dS' das Bild von dS, und dessen Projection normal zur Axe $dS' \cdot \cos(r, N')$ das Bild der entsprechenden Projection von dS. Also haben wir die Proportion:

$$dS . \cos(r, N) : dS' . \cos(r, N') = \beta^2 : \beta'^2.$$

Daraus folgt:

$$J . \alpha^2 . \beta^2 . = J' . \alpha'^2 . \beta'^2,$$

und wegen der Gleichung (5):

$$J : J' = n^2 : n'^2. \qquad (6c)$$

Dadurch ist die Helligkeit, mit welcher die Fläche des Bildes innerhalb des von den Strahlen ausgefüllten Lichtkegels leuchtet, gegeben, unabhängig von der Richtung, welche dS und dS' gegen die Axe haben, und von den Entfernungen derselben von der brechenden Fläche.

Von dem Bilde dS' kann man auf ein zweites dS'' übergehen, und so weiter. Es wird offenbar zwischen jedem folgenden Bilde und dS eine entsprechende Gleichung bestehen müssen wie (6c). Ist also $n = n'$, das heisst, liegen Object und Bild in demselben Medium, so wird die Helligkeit eines durch Strahlen, die mit der Axe und den Einfallslothen sehr kleine Winkel machen, entworfenen optischen Bildes (von Verlust durch Reflexion und
565 Absorption abgesehen) der Helligkeit des Objectes immer nur gleich sein können.

Aber dieser Satz muss auch gültig sein ohne die Beschränkung, dass die Strahlen mit der Axe und den Einfallslothen sehr kleine Winkel machen. Wäre er nämlich nicht richtig, wäre es möglich von einem Flächenstück dS, welches nach dem in Gleichung (6) ausgesprochenen Gesetz ein begrenztes Strahlenbündel aussendet, ein Bild dS' zu entwerfen,

welches in Richtung der Fortsetzung dieses Strahlenbündels mit grösserer Helligkeit leuchtete, als Gleichung (6c) zulässt, so würden wir dieses Strahlenbündel senkrecht durch eine ebene Grenzfläche in Luft übergehen und in das Auge eines Beobachters fallen lassen können. Es wäre dann der Fall gegeben, dass man durch ein optisches Instrument ein Object heller sehen müsste, als es ist, etwas, was allen an den mannigfachsten Formen durchsichtiger brechender Körper gemachten Erfahrungen widerspricht. Wäre eine solche Möglichkeit für Lichtstrahlen gegeben, so würden wir sie auch auf Wärmestrahlen übertragen können, und es wäre dann das Gesetz der Gleichheit der Strahlung zwischen Körpern gleicher Temperatur verletzt. Durch ähnliche Betrachtungen, wie sie Herr G. Kirchhoff zum Beweise seines Gesetzes von der Gleichheit der Absorption und Emission angewendet hat, deren Uebertragung auf unsern Fall ohne Mühe geschehen kann, wäre dies leicht zu erweisen. Man braucht zu dem Ende nur die beiden Elemente dS und dS' von gleicher Temperatur, wie eine sie rings umschliessende Hülle anzunehmen, die durchsichtigen Medien als frei von Absorption, und ein passendes Diaphragma angebracht, ebenfalls von gleicher Temperatur, um das zu verdichtende Strahlenbündel abzugrenzen. Wenn dann dS durch dieses Diaphragma dem dS' ein dichteres Strahlenbündel zusendete, als dieses vermöge seiner Temperatur zurücksendet, müsste die Temperatur von dS' steigen, die von dS fallen.

Genauere Fassung des Gesetzes der Divergenzwinkel. Die Gleichung (5) setzte unendlich kleine Divergenzwinkel voraus, bei solchen ist es einerlei, ob wir α mit $\sin \alpha$ oder $\tang. \alpha$ oder ähnlichen Functionen vertauschen, die für verschwindend kleine α gleich α werden.

Nehmen wir grössere Divergenzwinkel eines Strahlenbündels 566
von kreisförmigem Querschnitt, und die leuchtende Fläche dS senkrecht zur Axe, so ist:

$$L = J dS . \int_0^\alpha 2\pi . \cos\alpha . \sin\alpha . d\alpha = \pi J dS . \sin^2\alpha.$$

Ist nach einer Reihe von Brechungen die Fläche dS vollständig und genau in dS_1 abgebildet, mit der Helligkeit $J n_1^2 / n^2$ und α_1

der zugehörige Divergenzwinkel, so muss dieselbe Lichtmenge sein:

$$L = \pi J \frac{n_1^2}{n^2} . dS_1 . \sin^2 \alpha_1 .$$

Da

$$dS : dS_1 = \beta^2 : \beta_1^2,$$

so folgt aus diesen Gleichungen:

$$n . \beta . \sin \alpha = n_1 . \beta_1 . \sin \alpha_1 \qquad (7)$$

als die auch für grössere Winkel gültige Formulirung der Gleichung (5) unter der Voraussetzung, dass β und β_1 zwei sich einander genau abbildende, zur Axe senkrechte flächenhafte Bilder sind.

Helligkeit der Bilder. Wenn die Pupille des Beobachters ganz eingetaucht ist in das Strahlenbündel, welches von einem Punkte des Bildes β ausgeht, so wird der Beobachter β_1 in der durch Gleichung (6c) bedingten Helligkeit sehen. Also wenn Object und Bild beide in Luft liegen, werden beide für ihn gleiche Helligkeit haben. Diese Folgerung ist schon von Lagrange gezogen worden. Leider hat er den zweiten Fall, der gerade bei starken Vergrösserungen der gewöhnlichere ist, nicht besprochen, nämlich den, wo das in die Pupille eindringende Strahlenbündel diese nicht ganz ausfüllt. Das mag nicht wenig zu der Vergessenheit beigetragen haben, in welche seine wichtige Abhandlung gefallen ist.

Wenn das in die Pupille fallende Lichtbündel, welches immer einen kleinen Divergenzwinkel α_1 hat, so oft das Bild β_1 in richtiger Sehweite liegt, die Pupille nicht ganz ausfüllt, so wird die Helligkeit H des Netzhautbildes eine geringere
567 sein als die Helligkeit H_0 für das freie Auge, dessen Pupille ganz mit Lichtstrahlen ausgefüllt ist. Bezeichnen wir mit s die Sehweite und mit p den Radius der Pupille, so ist πp^2 deren Fläche, der Querschnitt des Lichtbündels ist $\pi s^2 \cdot \sin^2 \alpha_1$, und es verhält sich also:

$$H : H_0 = s^2 . \sin^2 \alpha_1 : p^2$$

oder mit Benutzung von Gleichung (7):

$$H = H_0 \cdot \frac{s^2}{p^2} \cdot \frac{n^2}{n_1^2} \cdot \frac{\beta^2}{\beta_1^2} \sin^2 \alpha .$$

Das letzte Medium vor dem Auge muss nothwendig Luft sein, also $n_1 = 1$, und wenn wir den nach der Listing'schen Methode in Luft gemessenen Divergenzwinkel des Instrumentes mit α_0 bezeichnen, so ist $\sin \alpha_0 = n \cdot \sin \alpha$. Setzen wir ferner die Vergrösserung $\beta_1 / \beta = N$, so ist:

$$H = H_0 \frac{s^2 . \sin^2 \alpha_0}{p^2 . N^2} .$$

Bei derjenigen Vergrösserung N_0, wobei der Lichtkegel die Pupille gerade ausfüllt, und welche wir die Normalvergrösserung des Instrumentes nennen wollen, muss $H = H_0$ werden. Daraus ergiebt sich:

$$N_0 = \frac{s}{p} \sin \alpha_0 \qquad (8)$$

und wenn α_0 unverändert bleibt:

$$H : H_0 = N_0^2 : N^2 \qquad (8a)$$

wenn, wie vorausgesetzt:

$$N > N_0,$$

während $H = H_0$ wird, wenn $N \leqq N_0$.

Das heisst also: Die Helligkeit des Instrumentes wird gleich der des freien Auges, wenn die Vergrösserung gleich oder kleiner als die Normalvergrösserung ist. Dagegen wächst bei gleichbleibender Divergenz der einfallenden Strahlen die Helligkeit umgekehrt proportional der Vergrösserung der Flächen, wenn diese grösser als die Normalvergrösserung ist.

Die Normalvergrösserung wächst, wie Gleichung (8) zeigt, mit dem Sinus des Winkels α_0. Dessen grösster Werth ist 568
Eins, wenn α_0 ein Rechter, ein Werth, den die neueren Instrumente auch nahehin erreichen. Dann ist:

$$N_0 = \frac{s}{p} .$$

Setzen wir s, wie es für die Berechnung der Vergrösserung jetzt gewöhnlich geschieht, gleich 250 mm, und p für helle Beleuchtung gleich 1,5 mm, so wird:

$$N_0 = 166{,}7$$

und man erhält die

Helligkeit	$\frac{1}{4}$	für Vergrösserung	333,3
—	$\frac{1}{9}$	—	500,0
—	$\frac{1}{16}$	—	666,7

u. s. w.

Das zeigt, wie schnell die Helligkeiten bei steigender Vergrösserung abnehmen.

Wäre es möglich den halbkugelförmigen Lichtkegel eines in Wasser liegenden Objectes in ein Immersionslinsensystem überzuleiten und damit ein gutes Bild zu erzeugen, so würden alle diese Vergrösserungen bei gleicher Helligkeit im Verhältniss $n:1 = 1{,}3351:1$ gesteigert werden können. Aber wie schon oben bemerkt, haben die bisher gefertigten Instrumente nur in Luft, nicht in Wasser nahehin halbkugelförmige Kegel der einfallenden Strahlen.

Der Querschnitt des in die Pupille eintretenden Strahlenbündels lässt sich leicht empirisch ermitteln. Wenn man das Instrument auf ein helles Feld eingestellt hat, entferne man das Auge vom Ocular in Richtung der verlängerten optischen Axe des Instruments, und betrachte das Ocular selbst. Man wird in oder etwas vor seiner Fläche eine helle kleine Kreisfläche auf dunklem Grunde sehen. Dieser kleine Kreis ist das optische Bild, welches das Ocularsystem (hauptsächlich das Collectivglas) von dem Objectivglase entwirft. Alles Licht was vom Objectiv hergekommen ist, und die Oculare passirt hat, muss in diesem Bildchen des Objectivs vereinigt sein. Dieses Bildchen entspricht also auch dem Querschnitt, den die
569 sämmtlichen Lichtkegel, welche von den Punkten des Objectes ausgegangen sind, an dieser Stelle des Raumes haben. Um alles dieses Licht aufzufangen und somit ein möglichst grosses und möglichst helles Gesichtsfeld zu erlangen, muss die Pupille an den Ort dieses Bildchens gebracht werden. Das Verhältniss zwischen der Fläche dieses hellen Bildchens und der Fläche der Pupille ergiebt also unmittelbar das Verhältniss, in welchem die Helligkeit des Bildes kleiner als die des direct gesehenen Objectes ist. Nur wenn jenes Bildchen gleich oder grösser als die Pupille ist, hat man volle Helligkeit.

Dass bei einem Fernrohr das Verhältniss zwischen dem Durchmesser des Objectivs und dem Durchmesser dieses Ocularbildchens des Objectivs gleich der Vergrösserung ist, hat schon Lagrange ausgesprochen, und vorgeschlagen mittels dieser Beziehung die Vergrösserung zu messen. Bei den Teleskopen ist man übrigens einer solchen Abnahme der Helligkeit bei steigender Vergrösserung nicht nothwendig unterworfen, weil die Quantität des einfallenden Lichtes durch Vergrösserung der Apertur des Objectivglases oder des Objectivspiegels in das Unbestimmte vergrössert werden kann. Die Oeffnung des mikroskopischen Lichtkegels dagegen wird durch einen Winkel gemessen und hat daher eine bestimmte Grenze.

Der Gang der bisherigen Darstellung zeigt, dass die Beziehung zwischen Helligkeit und Vergrösserung, die hier aufgestellt ist, gänzlich unabhängig von der besonderen Construction des Instrumentes ist, vorausgesetzt nur, dass es scharf gezeichnete Bilder giebt. Eine Steigerung der Vergrösserung wäre also nur möglich unter Anwendung sehr viel stärkeren Lichtes, z. B. directen Sonnenlichtes, wie dies auch schon Herr Listing für die von ihm vorgeschlagenen Methoden, sehr hohe Vergrösserungen zu erreichen, in Aussicht genommen hat.

Hier aber treten andere Hindernisse auf, die durch den sehr geringen Divergenzwinkel der austretenden Strahlen, wie er bei starken Vergrösserungen durch die Gleichung (7) gefordert wird, bedingt sind.

Zunächst sind es die Schatten der entoptischen Objecte im Auge, welche das Gesichtsfeld um so dichter erfüllen, je kleiner das oben erwähnte Ocularbild des Objectivglases ist. Dieses Bild ist für die Beleuchtung der Netzhaut gleichsam 570
die Lichtquelle; von ihm geht alles Licht aus, welches in das Auge dringt. Dasselbe ist auch die Basis der sämmtlichen Strahlenkegel, die den einzelnen Punkten des Objectes und seines Netzhautbildes angehören, und sein Durchmesser wächst, wie oben gezeigt, für starke Vergrösserungen nothwendig umgekehrt proportional der Vergrösserung. Die bekannte Bedingung aber, welche erfüllt sein muss, um recht scharfe Schlagschatten von den entoptischen Objecten zu erhalten, ist eben die, dass hinreichendes Licht von einer recht kleinen

Fläche aus in das Auge fällt. Jeder, der einmal versucht hat, das Feld eines Mikroskops von übertrieben starker Vergrösserung durch Anwendung von Sonnenlicht aufzuhellen, wird das eigenthümlich fleckige Ansehen des Gesichtsfeldes kennen, was man dann erhält. Ein Theil der Flecken liegt fest im Felde der Blendung, ein anderer bewegt sich mit dem Auge. Erstere rühren von Flecken und Unvollkommenheiten der Politur der Ocularlinsen her, letztere von der Hornhaut, Krystallinse, dem Glaskörper des Auges. Auch ist diese Beobachtungsweise als Methode die entoptischen Objecte zu sehen, längst bekannt und in der That sehr brauchbar. In dem Maasse aber, als die entoptischen Objecte deutlicher werden, werden immer mehr von den zarteren mikroskopischen Objecten unerkennbar.

Ein zweiter unvermeidlicher Nachtheil der engen Lichtbündel liegt in dem Auftreten von Diffractionserscheinungen, wodurch die Umrisslinien der gesehenen Objecte verwischt und gleichzeitig verdoppelt oder vervielfacht werden. Wir haben es hier hauptsächlich mit den Diffractionserscheinungen zu thun, wie sie beim Sehen durch eine kreisförmige Oeffnung auftreten. Ein heller Lichtpunkt (Sonnenreflex auf einer Thermometerkugel), durch eine solche Oeffnung (Nadelstich durch ein Kartenblatt) gesehen, erscheint bekanntlich als eine helle Kreisscheibe, die abwechselnd von hellen und dunklen Ringen umgeben ist. Die scheinbare Breite dieser Ringe, von Minimum zu Minimum gerechnet, entspricht sehr nahehin dem Gesichtswinkel, dessen Sinus gleich λ/d ist, wo λ die Wellenlänge des betref-
571 fenden Lichtes und d den Durchmesser der Oeffnung bezeichnet. Die äusseren Ringe haben genau diese Breite, die innersten sind ein wenig breiter; der Radius des innersten hellen Kreises ist $1{,}220\ \lambda/d$. Da der kleinste Gesichtswinkel, unter dem wir zwei feine helle Linien von einander trennen können, gleich einer Winkelminute gesetzt werden kann, so werden die Fransen des hellsten gelbgrünen Lichtes, dessen Wellenlänge gleich 0,00055 mm ist, sichtbar, wenn der Durchmesser der Oeffnung $d = 1{,}89$ mm. Die Verbreiterung eines hellen Punktes in einen Kreis, oder einer hellen Linie in einen Streifen, muss sogar bei noch etwas weiteren Oeffnungen merkbar werden können.

Wenn man durch solche Oeffnungen nach Objecten hin-

blickt, welche helle Flächenstücke zeigen, so werden die Diffractionsfiguren der einzelnen Lichtpunkte einer solchen Fläche sich theilweis decken, sodass die kreisförmigen Fransen jedes einzelnen Punktes für sich genommen allerdings nicht erkennbar werden. Aber offenbar wird die Wirkung der Diffraction, da sie jeden lichten Punkt in eine kleine kreisförmige Fläche verwandelt, die Zeichnung des Objectes verwaschen machen müssen, ähnlich wie dies durch die kleinen Zerstreuungskreise bei ungenauer Accommodation des Auges geschieht. Sehr feine Objecte, die nur bei grösster Schärfe des Netzhautbildes erkennbar sind, werden alsdann unerkennbar werden.

Man kann sich durch einfache Versuche davon überzeugen, dass dies der Fall ist. Das empfindlichste Object sind Gitter mit abwechselnd hellen und dunklen parallelen Streifen, seien sie aus parallelen Drähten zusammengesetzt, oder aus weissen und schwarzen Linien auf Papier gedruckt. Man stelle sich in solcher Entfernung von dem Gitter auf, dass man mit einem zur vollkommenen Accommodation des Auges genügenden Brillenglase bewaffnet, die Stäbe des Gitters gerade noch von einander sondern kann. Man schiebe dann ein Kartenblatt vor das Auge, in welches man feine Oeffnungen von verschiedenem Durchmesser angebracht hat, und achte darauf, ob man die Linien des Gitters durch diese Oeffnungen noch erkennen und ebenso gut erkennen kann als ohne das Kartenblatt. Die Beleuchtung des Gitters muss sehr hell sein, ein auf Papier 572
gedrucktes zum Beispiel direct von der Sonne beschienen, damit das durch die Oeffnung gesehene Bild noch hinreichend hell bleibt. Bei solchen Versuchen finde ich in der That, dass eine merkliche Verschlechterung des Bildes schon durch eine Oeffnung von 1,72 mm Durchmesser hervorgebracht wird. Sehr viel auffallender ist jene, wenn man durch noch engere Oeffnungen sieht.

Statt der Gitter kann man auch gedruckte Buchstaben unter ähnlichen Bedingungen anwenden, indem man sich so weit von ihnen entfernt, dass man sie gerade noch lesen kann. Dann werden sie schwerer oder gar nicht lesbar, wenn man durch eine Oeffnung von etwa 1 mm Durchmesser blickt. Aber diese Probe finde ich nicht so empfindlich wie die mit dem Gitter.

Es muss hierbei natürlich für beste Accommodation des Auges gesorgt werden, denn wenn diese unvollkommen ist, kann Einschiebung des Kartenblattes die Zerstreuungskreise auf der Netzhaut verkleinern und das Bild sogar verbessern.

Die Theorie für die Diffraction der Strahlen im Mikroskop, wie sie etwas weiter unten auseinandergesetzt werden wird, ergiebt nun die Folgerung, dass ein einzelner Lichtpunkt des mikroskopischen Objectes, durch das Mikroskop gesehen, gerade so erscheinen muss, als würde ein am Orte seines Bildes befindlicher wirklicher Lichtpunkt durch eine Oeffnung betrachtet, welche in Bezug auf Ort und Grösse dem Ocularbilde der relativ engsten Blendung entspricht.

Daraus geht zunächst hervor, dass die Diffraction sich merklich machen muss, wenn das letztgenannte Bildchen einen Durchmesser kleiner als 1,89mm hat, und dass die Breite der durch die Diffraction erzeugten Zerstreuungskreise umgekehrt proportional dem Durchmesser dieser Oeffnung, also direct proportional der Vergrösserung zunehmen muss, wenn der von jedem Objectspunkte einfallende Lichtkegel unverändert bleibt. Es wird also unter diesen Umständen bei weiter gesteigerter Vergrösserung, soweit die Diffraction in Betracht kommt, das Bild unveränderte Schärfe der Zeichnung zeigen, weil eben dabei die Zerstreuungskreise dasselbe Verhältniss zur schein-
573 baren Grösse der Objecte behalten. Dagegen werden die Störungen, welche aus der Verminderung der Helligkeit und aus der zunehmenden Zahl und Dunkelheit der entoptischen Schatten herfliessen, sich mit zunehmender Vergrösserung steigern. Daraus folgt denn, dass im allgemeinen diejenigen Vergrösserungen am meisten erkennen lassen werden, bei denen die kleinsten Objecte, die in dem Bilde überhaupt noch sichtbar sind, unter bequemem, d. h. etwas grösserem Gesichtswinkel erscheinen, als der Schwinkel des Beobachters für die überhaupt wahrnehmbaren kleinsten Objecte beträgt.

Nach Gleichung 7 berechnet, entspricht der Durchmesser 1,89mm des in die Pupille fallenden Strahlenbündels für halbkugelförmige Ausbreitung der einfallenden Strahlen in Luft einer Vergrösserung von 264,5 Mal. Für Mikroskope mit engerem Lichtkegel würde sie niedriger anzusetzen sein. Dem

entsprechend finden wir in Hugo v. Mohl's Mikrographie die Angabe, dass Vergrösserungen zwischen 300 und 400 am meisten erkennen lassen, während Harting bei den neueren Mikroskopen mit beinahe halbkugelförmigem Lichtkegel für seine Messungen Vergrösserungen von 430 bis 450 am vortheilhaftesten fand.

Wenn es sich darum handelt, die Grösse der kleinsten erkennbaren Objecte als Maass für die Genauigkeit des mikroskopischen Bildes zu bestimmen, so liegen hier dieselben Gründe vor, wie bei der Bestimmung der Sehschärfe des Auges, Gründe, die ich in meinem Handbuche der Physiologischen Optik S. 217 besprochen habe, dass man nicht den Durchmesser einzelner heller Punkte oder Linien auf dunklem Grunde und ebenso wenig dunkler Punkte und Linien auf hellem Grunde dazu benutzen darf. Denn dann hängt das Resultat nicht bloss von den Grössenverhältnissen des Bildes, sondern auch von der Empfindlichkeit des Auges gegen schwache Lichtunterschiede ab.

Das zweckmässigste Object sind auch hier feine Gitter, welche abwechselnd helle und dunkle Streifen zeigen. Solche sind ja auch für die Mikroskope in den Nobert'schen Glasgittern und Liniensystemen der Diatomeen und Schmetterlingsschuppen vielfach benutzt worden. Da die Lichtmengen der weissen Streifen, ehe dieselben ununterscheidbar werden, jedenfalls 574
sehr stark ausgebreitet sind, so kommt es fast nur auf die Abstände der Mittellinien der weissen Streifen, viel weniger auf die ursprüngliche Vertheilung des Lichtes in etwas schmaleren oder breiteren weissen Streifen an. Ich nehme also als Maass für die kleinsten unterscheidbaren Objecte denjenigen Abstand der Mitten heller Gitterstäbe an, bei welchem diese noch als getrennt wahrgenommen werden können.

Bei der Diffraction durch eine quadratische Oeffnung lässt sich nachweisen, dass das Gitter als gleichförmig beleuchtete helle Fläche erscheinen muss, wenn die Fransenbreite gleich der Breite eines Gitterintervalles ist. Für runde Oeffnungen wird die Integration in der Berechnung der Lichtvertheilung äusserst weitläuftig. Wenn der Durchmesser der kreisförmigen Oeffnung gleich der Seite der quadratischen ist, sind die

äusseren Fransen im Spectrum eines hellen Punktes von gleicher Breite, die inneren sind aber breiter bei der kreisförmigen Oeffnung. Wenn nun die der quadratischen Oeffnung ausreichen die Trennung der hellen Linien eines Gitters auszulöschen, wenn deren Mitten um die Fransenbreite von einander abstehen, so wird dies bei den theilweise noch etwas breiteren Fransen der kreisförmigen Oeffnung ebenfalls der Fall sein müssen. Ich habe deshalb im Folgenden als untere Grenze der am Objecte unterscheidbaren Distanzen die Breite der äusseren Fransen benutzt, welche die kreisförmige Oeffnung ergiebt. Unmöglich ist es nicht, dass bei günstiger Ueberlagerung der Fransen gelegentlich wohl auch noch etwas kleinere Objecte halb gesehen, halb errathen werden können. Eine sichere und unzweideutige Wahrnehmung solcher wird aber kaum möglich sein.

Es sei die Grösse der kleinsten wahrnehmbaren Distanz ε, die der Wellenlänge im Medium des Objectes λ, der Divergenzwinkel der einfallenden Strahlen ebenda α, und λ_0, α_0 seien die Werthe der letztgenannten Grössen für Luft. Dann ist nach den weiter unten abgeleiteten Formeln:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha_0}.$$

Für weisses Licht können wir die Wellenlänge der mittleren
575 hellsten Strahlen, wie oben, setzen:

$$\lambda_0 = 0{,}00055 \text{ mm}.$$

Ist $\alpha_0 = 90^0$, so giebt dies:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_0}{2} = 0{,}000275 \text{ mm} = \frac{1}{3636} \text{ mm}$$

Wäre es möglich, die Divergenz der Strahlen in Wasser bei einem Immensionssystem bis zu halbkugeliger Ausbreitung zu treiben, so wäre $\alpha = 90^0$ zu setzen, λ wäre nahehin gleich $^3/_4 \lambda_0$, und daher

$$\varepsilon = \frac{1}{4848} \text{ mm}.$$

Nach den von Hrn. Harting[1]) veröffentlichten Messungen ist

1) Poggend. Annalen 114.

die Grösse der mit einem Hartnack'schen Objectivsystem Nr. 10 wahrgenommenen kleinsten Distanzen nach unserer Berechnungsweise:

$$\varepsilon = \frac{1}{3313} \text{ mm}.$$

(Die von Hrn. Harting selbst angegebene Zahl $^1/_{5210}$ bezieht sich auf die Breite des dunkeln Intervalles.) In naher Uebereinstimmung damit sind die von Hrn. L. Dippel[1]) an den feinsten noch erkennbaren Liniensystemen der Diatomaceen angestellten Messungen. Er kam bis zu $^1/_{3500}$, an dem feinsten Nobert'schen Liniensystem $^1/_{3600}$. Aeltere Angaben der HHrn. Sollitt und Harrison[2]) vom Jahre 1853 gehen allerdings viel weiter. Von den erkennbaren Linien der Navicula Arcus sollen 5120 auf ein Millimeter gehen. Damit wäre die theoretische Grenze an Objecten, die in Luft liegen, weit überschritten. Da aber alle neueren Messungen hinter dieser weit zurückgeblieben sind, weiss ich nicht, ob man sie als zuver-
576 lässig betrachten darf. Auch Hr. Harting, der diese Angaben citirt, bezweifelt ihre Richtigkeit.

Ausser der möglicherweise zu erreichenden Steigerung der Strahlendivergenz für Objecte, die in Wasser liegen, wäre die Leistungsfähigkeit der Instrumente wohl noch zu steigern durch Anwendung von blauem Licht.[3]) Die Wellenlänge der Linie G ist 0,0004282, also etwa nur $^{25}/_{32}$ von dem oben angewendeten Werthe der Wellenlänge des stärksten Lichtes. Im Verhältniss 1,28 : 1,00 würden die obigen Nenner der Werthe von ε zu vermehren sein, wenn man nur blaues Licht anwendete. Dies gäbe für die wirklich ausgeführten Immersionsmikroskope:

$$\varepsilon = \frac{1}{4654}, \text{ statt } \frac{1}{3636} \text{ mm}.$$

In den Photographien wirkt hauptsächlich das blaue Licht, und diese scheinen in der That etwas mehr zu leisten als

1) Das Mikroskop und seine Anwendung. Braunschweig 1867. S. 135.
2) Quart. Journal of Microsc. Science. V p. 62.
3) Mündlich wird mir berichtet, dass Hr. Hartnack dies schon gethan habe bei Instrumenten, die er 1873 zur Wiener Ausstellung gesendet hat.

das Auge bei weisser Beleuchtung. In einer Photographie, die Hr. Dr. J. Stinde mit einem Gundlach'schen Objective ausgeführt hat, von Surinella gemma in 1000maliger Vergrösserung sind Linien sichtbar, von denen 3800 bis 4000 auf das Millimeter gehen.

Es scheint mir hiernach nicht zweifelhaft zu sein, dass die Diffraction der Strahlen die hauptsächlichste Ursache für die begrenzte Schärfe der mikroskopischen Bilder ist. Die chromatischen und sphärischen Abweichungen der Linsen scheinen neben der Diffraction nur noch unerheblichen Einfluss zu haben trotz der sehr grossen Einfallswinkel und Divergenzwinkel der Strahlen. Im Vergleich zu der grossen Mühe, die auf die Berechnung und Ausführung der Linsen für Teleskope und Dunkelkammern verwendet werden musste, um die sphärische Abweichung auf ein genügend kleines Maass zurückzuführen, muss es billiger Weise auffallen, dass bei den viel schwerer nach vorgeschriebenen Maassen herzustellenden Linsensystemen der Mikroskope und den grossen Oeffnungswinkeln
577 ihrer Lichtkegel die sphärische Aberration sich so wenig geltend machte. Uebrigens habe ich schon hervorgehoben, dass, wenn zwischen Object und Deckglas sowie zwischen Deckglas und Objectiv Wasser ist, die Divergenzwinkel nicht bis zu 87° 5′ steigen, den gewöhnlichen Angaben entsprechend, sondern nur bis 48° 30′. Wenn aber zwischen Object und Deckgläschen das Wasser fehlt, so können allerdings Divergenzwinkel bis 87,5° vorkommen, aber nur auf der sehr kurzen Strecke zwischen dem Object und dem ihm ganz dicht anliegenden Deckglase, sodass die davon herrührende sphärische Abweichung nicht erheblich wird.

Da breite Strahlenbündel nothwendig sind, um die Diffraction in engen Grenzen zu halten, muss natürlich auch der Beleuchtungsapparat dergleichen Strahlenbündel liefern können namentlich um die Umrisslinien dunkler Objecte deutlich zu zeichnen. Wenn in dem Objecte linsenartig wirkende Gebilde vorkommen, können diese allerdings auch ein schmales beleuchtendes Strahlenbündel in ein stark divergentes verwandeln und deutlich sichtbar werden. Sonst erhält man ein schwer zu übersehendes Gewirr von Diffractionen am und

im Object einerseits, und in der Apertur des Mikroskops andererseits.

Hier liegt offenbar der Grund, dass sonst gute Mikroskope, wenn ihr Beleuchtungsapparat nicht besonders zu diesem Zwecke geregelt ist, so unbrauchbare Bilder von den Grenzlinien dunkler Objecte bei künstlicher Beleuchtung durch eine Flamme liefern. Für eine Immersionslinse wird der Beleuchtungsapparat selbst am besten nach dem Princip einer umgekehrten Linse derselben Art gebaut. Wenn man nach Einstellung des Instrumentes das Ocularbild des Objectivs mit einer Loupe betrachtet, erkennt man am leichtesten, ob der Beleuchtungsapparat genügend breite Strahlenkegel giebt.

Ich habe hier noch über einen gescheiterten Verbesserungsversuch zu berichten, dessen negatives Resultat von Wichtigkeit ist. Aus der Theorie glaubte ich folgern zu dürfen, dass man die Diffraction eines Mikroskops beseitigen könnte, wenn man die Punkte der engen Oeffnung, welche die Diffraction erzeugt, zu von einander unabhängigen leuchtenden Punkten machte, indem man durch die Beleuchtungslinsen in 578
der Ebene dieser Oeffnung ein scharfes optisches Bild der Lichtquelle, also etwa sonnenbeleuchteter Wolken, erzeugte.

Ich habe schon vor Jahren in Bonn Versuche der Art an einem Nobert'schen Mikroskop mit Immersionslinse von ausgezeichneter Bildschärfe angestellt. Der Versuch ergab indessen, dass es einerlei war, ob das Bild der Lichtquelle in die Ebene des Objectes oder des Objectivglases fiel; die durch zu starke Oculare hervorgebrachten Diffractionsfransen blieben unverändert.

Ich habe mich neuerdings auch in anderen mit grösseren Linsen angestellten Versuchen überzeugt, dass ein solches Verfahren keinen Erfolg hat. Wenn man eine gute achromatische Linse von etwa anderthalb Fuss Brennweite so aufstellt, dass sie das scharfe Bild der Lichtquelle, also zum Beispiel der bewölkten Himmelsfläche, auf der Ebene eines in Glas geritzten Gitters entwirft, so werden die Bilder verschiedener leuchtender Punkte auf die verschiedenen durchsichtigen Spalten des Gitters geworfen, und man sollte also denken, dass die Interferenz des Lichtes, was durch benachbarte Spalten

gegangen ist, aufhören sollte. Wenn man aber durch das Gitter nach dem Objectivglas hinsieht, und vor das letztere Kartenblätter schiebt, in welche man feine Spalten eingeschnitten hat, so sieht man mit blossem Auge sowohl an diesen Spalten, wie an den Aussenrändern der Blätter genau dieselben Diffractionsfransen, als wenn die Linse fortgenommen oder das Gitter aus ihrem Focus gebracht wird.

Statt des Gitters habe ich dann auch zwei in ein Kartenblatt eingeschnittene feine Spalten benutzt, welche etwa 1 mm Abstand von einander hatten, und durch welche ich ein System sehr feiner Interferenzlinien in dem Diffractionsbilde eines anderen Spaltes mit blossem Auge eben noch sehen konnte. Letzterer hatte die Form eines sehr kleinen spitzen Winkels. Nahe der Spitze dieses Winkels war er fein genug, um jene Interferenzstreifen zu zeigen. Auch diese Streifen verschwanden nicht, wenn ich das einfallende Licht zu einem optischen Bilde in der Ebene des Doppelspaltes vereinigte. In diesem Falle konnte der Verdacht, dass chromatische oder
579 sphärische Aberration der Strahlen sie über einen Zwischenraum von 1 mm Breite ausgebreitet haben sollte, nicht im entferntesten aufkommen.

Die Erklärung kann ich nur darin suchen, dass das Licht, was von dem Objectiv ausgehend durch den engsten Theil des Spaltes, der als optisches Object dient, hindurchgeht, so starke Diffraction erleidet, dass es nachher beide Oeffnungen des Doppelspaltes mit entsprechender Wellenphase erreicht, und somit interferirende Bündel durch beide senden kann. Damit man die Interferenzstreifen sehen kann, ist es nöthig, dass deren Minima weiter von einander entfernt erscheinen, als die Breite des Lichtstreifens beträgt, dessen Bilder sie sind, und wenn diese Bedingung erfüllt ist, ergiebt die Theorie in der That, dass der mittelste helle Theil der Diffractionsfigur des einfachen Spaltes einen Lichtstreifen bildet, der breiter als der Abstand der beiden Spalten des Doppelspaltes ist.

Aehnliche, wenn auch schwerer der Rechnung zu unterwerfende Verhältnisse finden statt, wenn das Object die einfache Kante eines dunklen Schirms ist. Es ist bekannt, dass von einer solchen aus sich ebenfalls streifenförmig unterbrochene Strahlenbündel in den dunklen Raum hineinziehen, welche correspondirende Schwingungsphasen haben, und also durch einen zweiten Schirm gebeugt, regelmässig interferiren können. Dass die resultirende Wirkung hierbei nicht Null werden kann, ergiebt sich am einfachsten daraus, dass die Wirkung eines hellen Streifens dargestellt werden kann als die Summe der Wirkungen zweier unendlicher, durch eine gerade Linie begrenzter heller Halbebenen, die mit ihren Rändern etwas übereinander fallen, minus derjenigen einer ebenso hellen Ganzebene. Da die letztere keine Interferenzerscheinung giebt, so könnte der helle Streifen allein in keiner Stelle des Raums eine solche geben, wo nicht auch jede der beiden Halbebenen eine solche giebt. Daraus folgt, dass auch das von einer geraden Kante aus gebeugte Licht sich in merklicher Stärke ebenso weit ausbreiten muss wie das eines von zwei Spalten begrenzten Spaltes.

Theorie der Diffraction im Mikroskop. Schliesslich will ich noch den Weg angeben, wie man die Diffraction der durch ein Mikroskop gehenden Strahlen theoretisch berechnen 580
kann. Statt der einfachen Längen geradliniger Strahlen, wie sie bei der Theorie der Beugung des Lichtes, welches sich nur in einem und demselben optischen Medium fortpflanzt, zu betrachten sind, muss man die optischen Längen derselben in Betracht ziehen, das heisst die Längen, welche man erhält, wenn man jedes Stück des Strahles mit dem Brechungsverhältniss des Medium multiplicirt, in dem er sich bewegt, und alle diese Producte addirt. Die Wellenphasen zweier Strahlen, die von demselben leuchtenden Punkte ausgegangen sind, und gleiche optische Länge haben, sind auch am anderen Endpunkt einander gleich, weil die Wellenlängen in verschiedenen Medien den Brechungsverhältnissen umgekehrt proportional sind. Ferner ist bekannt[1]), dass die optische Länge aller Strahlen zwischen zwei conjugirten Brennpunkten desselben Strahlenbündels, in denen eine vollkommene Vereinigung dieser Strahlen stattfindet, gleich gross ist.

1) Der Beweis der hier angeführten Sätze findet sich unter andern auch in meinem Handbuche der Physiologischen Optik. S. 238—249. (Oben S. 849—864.)

Um die Diffraction durch die relativ engste Apertur des Mikroskops zu berechnen, wird man jeden Punkt c in der Ebene dieser Apertur als Strahlencentrum behandeln müssen, dessen Phase gegeben ist durch die optische Länge des normal gebrochenen Strahles, der von dem leuchtenden Objectpunkte a aus nach c gelangt ist; welche Länge ich mit $(a\,c)$ bezeichne. Andererseits hängt der Phasenunterschied zwischen c und dem Punkte b in der Bildfläche, für den die Helligkeit gesucht wird, von der optischen Länge $(c\,b)$ ab, die dem normal gebrochenen, von c nach b gehenden Strahle zukommt. Die Phase der von a durch c, als neues Strahlencentrum, nach b fortgepflanzten Bewegung wird also abhängen von der Summe der optischen Längen $(ac)+(cb)$. Der Antheil, den dieser Strahl an der Bewegung im Punkte b hat, wird zu geben sein durch einen Ausdruck von der Form:

$$\text{A. sin}\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left[(ac)+(cb)-at\right]+\text{Const}\right\}$$

wo λ die Wellenlänge im leeren Raume, a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, t die Zeit bezeichnet. Die Summe dieser
581 Grösse, genommen für sämmtliche Punkte c der Oeffnung, wobei der Factor A als annähernd unabhängig von c angesehen werden kann, wird schliesslich die Bewegung in b bestimmen.

Denkt man sich nun die von a und b nach den Punkten c der relativ engsten Apertur gehenden Strahlen verlängert in der Richtung, welche sie in den Punkten c haben, bis sie sich schneiden in den Punkten α und β, so werden diese letzterer Punkte die in dem Medium von c entworfenen Bilder der Punkte a und b sein. Da nun nach dem oben Gesagten die optischen Längen $(a\alpha)$ und $(b\beta)$ als Längen zwischen conjugirten Brennpunkten constant sind, so kann man setzen:

$$(ac)=(a\alpha)-(c\alpha)$$
$$(cb)=(\beta b)-(\beta c).$$

Die Richtung der Bewegung des Strahles muss nur immer vom ersten zum zweiten Buchstaben fortlaufend gedacht, und

$$(c\alpha)=-(\alpha c),\ \text{sowie}\ (\beta c)=-(c\beta)$$

gesetzt werden. Dann wird der Ausdruck für die Wirkung des einzelnen Strahles auf den Punkt b gleich:

$$\text{A. sin.}\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left[(\alpha c)-(\beta c)-\frac{t}{a}+(\alpha a)+(\beta b)\right]+C\right\}$$

Die einzigen mit dem Punkte c veränderlichen Glieder unter dem Sinuszeichen sind $(\alpha c)-(\beta c)$; diese optischen Längen liegen aber ganz in dem Medium von c, und sind also gerade Linien. Somit wird die Diffractionswirkung des Lichtes von a im Punkte b, abgesehen von dem Factor A, der die Gesammtintensität giebt, dieselbe werden, als die des Lichtes von α für den Punkt β. Die letztere ist aber in der bekannten, für geradlinige Strahlen geltenden Weise zu berechnen.

Es sei $\gamma\gamma'$ Fig. 23 die relativ engste Apertur, und c ihr

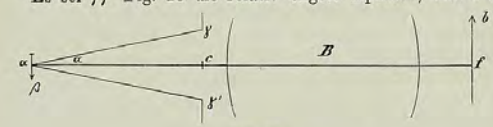


Fig. 23.

Mittelpunkt, B der hinter der Apertur folgende Theil des optischen Systems.

Es sei α das Bild des Axenpunktes a des Objectes, ferner
582 $\alpha\beta$ dessen im Medium von $\gamma\gamma'$ liegendes Bild, und fb das durch B davon im letzten Medium entworfene Bild. Wenn von α Licht ausgeht, und dasselbe durch die Oeffnung $\gamma\gamma'$ von Radius ϱ gesehen wird, so werden rings um α Interferenzfransen erscheinen, bei denen die Distanz δ je zweier benachbarter Maxima (mit Ausnahme der beiden ersten) nach bekannten Gesetzen gleich ist:

$$\delta=\frac{(\alpha c)\lambda}{2\varrho}=\tfrac{1}{2}\frac{\lambda}{\alpha},$$

wenn wir mit α auch, wie früher, den als klein vorausgesetzten Divergenzwinkel $c\alpha\gamma$ bezeichnen. Ist N die Vergrösserung des Bildes bf im Vergleich zu $\alpha\beta$, so wird in bf die Fransenbreite δ' sein:

$$\delta'=N\delta=\tfrac{1}{2}N\frac{\lambda}{\alpha};\qquad(8)$$

oder da

$$N=\frac{n\alpha}{n'\alpha'},$$

wenn α' den Divergenzwinkel des austretenden Strahles, n' das Brechungsverhältniss des letzten Medium, n das des Medium bei c bezeichnet:

$$\delta = \frac{n}{2n'} \cdot \frac{\lambda}{\alpha'} \tag{8a}$$

Wenn $n = n'$, so ist dieser Werth der Fransenbreite im Bilde bf dem obigen für $\alpha\beta$ ganz analog gebildet, und dieser Umstand zeigt, dass die Fransen im letzten Bilde gerade so gross sind, als sähe man es durch die Oeffnung, die den Strahlenkegel vom Divergenzwinkel α' begrenzt, das heisst durch das Ocularbild der engsten Blendung.

Dieser Beweis setzt nur voraus, dass die relativ engste Blendung an einer Stelle liegt, wo die Divergenzwinkel der Strahlenkegel sehr klein sind; übrigens kann sie an jeder Stelle des Instrumentes liegen. Bei einem Immersionsmikroskop ist allerdings diese Bedingung nicht erfüllt, wenn die unterste Begrenzung des Objectivglases die relativ engste Apertur ist. Sie wäre es aber schon, wenn die Blendung an der oberen Seite der zweiten oder dritten Linse läge. Selbst wenn also keine seitliche Ausbreitung der Lichtbewegung vorkäme auf
583 dem Wege durch die unteren Objectivlinsen, wo der Strahlenkegel noch stark divergirend ist, so würde von da ab, wo er schwach divergent oder convergent geworden ist, seine seitliche Begrenzung, sei sie nun durch ein dort liegendes reelles Diaphragma erzeugt oder nur durch den bisherigen Lauf der Strahlen bedingt, doch Diffraction hervorbringen müssen.

Für das Endresultat macht es schliesslich kaum einen Unterschied, ob man sich die Apertur am Umfang desselben Strahlenbündels etwas weiter vor oder weiter zurückliegend denkt. Ihr von den Ocularlinsen entworfenes Bild wird um ein Minimum grösser, wenn sie in der Höhe der obersten Objectivlinse liegt, als wenn sie in der Höhe der untersten liegt, aber der Unterschied ist ohne praktische Bedeutung.

In Gleichung (8) ist δ' die Fransenbreite im letzten Bilde. α der Divergenzwinkel in dem Medium, wo die Blendung liegt, λ die Wellenlänge eben da, N die Vergrösserung des letzten Bildes gegen dasjenige, welches die die Blendung passirenden Strahlen erzeugen. Bezeichnen wir dagegen mit N_1

die Vergrösserung des letzten Bildes in Bezug auf das Object, mit λ_1 und n_1 die Wellenlänge und das Brechungsverhältniss für das Medium, in dem das Object liegt, so können wir nach Gleichung (7) setzen

$$\frac{n_1}{N_1} \sin \alpha_1 = \frac{n}{N} \cdot \alpha,$$

da α als klein betrachtet wird; α_1 ist der Divergenzwinkel im ersten Medium.

Setzen wir den Werth von α / N in die Gleichung (8), so wird dies:

$$\frac{\delta'}{N_1} = \tfrac{1}{2} \lambda \frac{n}{n_1} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_1} = \varepsilon$$

oder da $\lambda n = \lambda_1 n_1 = \lambda_0 n_0$, welche letztere Werthe sich auf Luft beziehen, so haben wir

$$\frac{\delta'}{N_1} = \frac{\lambda_1}{2 \sin \alpha_1} = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha_0} = \varepsilon \tag{9}$$

Dies ε ist die wahre Grösse derjenigen Längen im Object, welche im vergrösserten Bilde der Fransenbreite gleich erscheinen und deshalb verwischt werden. Es kann also ε 584
als das Maass der kleinsten unterscheidbaren Distanzen im Object angesehen werden. Das ε wird am kleinsten, wenn α_0 am grössten, das heisst gleich einem Rechten wird. Alsdann ist

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} \lambda_0 \tag{9}$$

Diese Grenzbestimmung ist, wie man sieht, ebenfalls unabhängig von dem Bau des optischen Apparats. Sie gilt ebenso gut für einen photographischen Apparat wie für die Verbindung des Mikroskops mit dem Auge des Beobachters. Es sind dies die Formeln, die den obigen Berechnungen zu Grunde gelegt sind.

Nachschrift. Die vorliegende Arbeit war fertig ausgearbeitet und zur Absendung bereit, als ich im letzten Augenblick die im Aprilheft 1874 des Archivs für mikroskopische Anatomie veröffentlichte Arbeit von Hrn. Professor E. Abbe: „Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung“ zu Gesicht bekam. Dieselbe enthält eine vorläufige Zusammenstellung der Ergebnisse ausgedehnter, theils theoretischer, theils experimenteller Untersuchungen, welche

zum grossen Theil mit den von mir gegebenen zusammenfallen. Die Theoreme über Divergenz der Strahlenbündel, über die Grösse der Diffraction in Mikroskopen und über deren Helligkeit, welche die Grundlage meiner Schlüsse bilden, sind auch von Hrn. Abbe gefunden, aber zunächst ohne Beweis veröffentlicht. Ausserdem enthält dessen Arbeit aber auch einen Abriss von wichtigen Untersuchungen über die Diffraction in den mikroskopischen Objecten selbst bei schmalen Beleuchtungskegeln. Die besondere festliche Veranlassung, zu welcher dieser Band der Annalen veröffentlicht wird, verbietet mir, meine Arbeit zurückzuhalten oder ganz zurückzuziehen. Da sie die von Hrn. Abbe noch zurückgehaltenen Beweise der von uns beiden gebrauchten Theoreme und einige einfache Versuche zur Erläuterung der theoretischen Betrachtungen enthält, mag ihre Veröffentlichung auch vom wissenschaftlichen Standpunkte aus entschuldigt werden.

LVII.

Zur Theorie der anomalen Dispersion.

Aus Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 154. S. 582 bis 596. 1875. Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. October 1874.

Hr. W. Sellmeier hat in Pogg. Annal. Bd. 145, S. 399 582
und 520, Bd. 147, S. 386 und 525 eine Theorie der anomalen Dispersion gegeben, welche von den bisher beschriebenen wesentlichen Zügen des genannten Phänomens Rechenschaft zu geben wohl geeignet ist. Die Grundlage seiner Erklärung ist die Annahme von ponderablen in den Aether eingelagerten Molekeln, welche des Mitschwingens fähig sind. Nur für diejenigen Fälle bietet seine Hypothese Schwierigkeiten, wo die eigene Schwingungsperiode der mitschwingenden Molekeln der der Lichtoscillationen gleich wird. Dann näm- 583
lich tritt thatsächlich Absorption des Lichtes ein, das heisst Vernichtung der lebendigen Kraft der Lichtschwingungen. Nun hat aber Hr. Sellmeier in seine Rechnungen keine Kraft eingeführt, welche die mechanische Arbeit der schwingenden Bewegung vernichten, beziehlich in Wärme verwandeln könnte, sondern hilft sich für diesen Fall mit Betrachtungen, die das Wesen des Vorgangs vielleicht richtig beschreiben mögen, aber vorläufig den Nachtheil haben, keiner analytischen Fassung zugänglich zu sein.

Ein zweiter Aufsatz über die Theorie desselben Phänomens ist von Hrn. Ketteler im Jubelbande von Pogg. Annal. gegeben worden. Der Autor geht darin nicht unmittelbar zurück auf die Mechanik der Aetherschwingungen, sondern

hat sich nur bemüht Formeln für die Abhängigkeit des Brechungscoëfficienten von der Wellenlänge den Experimenten anzupassen. Diese Formeln sind aber nach Analogie derjenigen gebildet, welche er selbst in früheren Aufsätzen aus der Annahme mitschwingender Atome hergeleitet hatte. Auch hier sind Kräfte, welche Absorption bedingen können, nicht in die Rechnung eingeführt. Die Folge davon ist, dass die angewendeten Formeln zum Theil zwei oder mehrere Werthe für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Brechung ergeben und kein bestimmter Grund erhellt, warum gerade der eine oder andere Zweig der Curven als der den thatsächlichen Verhältnissen entsprechende gewählt wird.

Anderseits hat Hr. O. E. Meyer (Poggend. Annal. Bd. 145, S. 80) Reibung im Aether, aber ohne mitschwingende Theilchen angenommen und daraus wohl Aenderungen der Brechung in dem gewünschten Sinne, aber keine Absorption eines eng begrenzten Farbenstreifens ableiten können.

Ich habe nun versucht die von Hrn. Sellmeier gegebene Erklärung in der Weise umzubilden, dass ich eine Reibungskraft, welche der Bewegung der ponderablen Molekeln ent-
584 gegenwirkt, in derselben Form eingeführt habe, wie sie sich bei den langsameren Schwingungen des Pendels und der tönenden Körper wohl bewährt und eine mit den Versuchen gut zusammenstimmende Theorie des Mitschwingens ergeben hat. Die Untersuchung hat auch für einen mit mitschwingenden Theilchen beladenen Aether gute Resultate ergeben und wenn man sich dabei auf die einfachsten, für das Wesen des Phänomens nothwendigsten Annahmen beschränkt, so gewinnt man eine verhältnissmässig einfache und kurz zusammenfassende Theorie.

Um zunächst die Verwickelungen zu beseitigen, welche die Einführung discontinuirlich vertheilter Molekeln in der Rechnung hervorbringt, Schwierigkeiten, deren Ueberwindung übrigens in den von Cauchy und seinen Nachfolgern ausgebildeten theoretischen Arbeiten gelehrt wird, nehme ich an, dass die ponderablen Atome dicht genug liegen, um alle Theile der zwischen ihnen liegenden Aethermassen in merklich gleichmässiger Weise zu afficiren, so als ob der Aether und die mit ihm schwingenden ponderablen Atome zwei sich gegenseitig

durchdringende continuirliche Medien bilden, welche sich gegen einander verschieben können. Eine solche Annahme wird erlaubt sein, wenn die Entfernungen der ponderablen Theile von einander verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind.

Ferner wird es genügen, hier nur eine Art ponderabler Atome anzunehmen, welche in Mitschwingungen versetzt werden. Wir beschränken uns auf die Untersuchung ebener Wellen, die sich in Richtung der y fortpflanzen. Es sei mit x die Verschiebung der ponderablen Theilchen, mit ξ die der Aethertheilchen zur Zeit t bezeichnet für eine Schicht, deren Coordinate y ist.

Wenn nur die Elasticität des Aethers wirkt, ist die Bewegungsgleichung des Aethers für ebene Wellen bekanntlich von der Form:

$$\mu \frac{d^2\xi}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2\xi}{dx^2},$$

worin μ die Dichtigkeit und α^2 die Elasticitätsconstante des Aethers bezeichnet. Die linke Seite dieser Gleichung drückt 585
die für die Volumeneinheit berechnete Kraft durch die Beschleunigung aus, die der Aether erleidet; die rechte Seite giebt dieselbe Kraft, als herrührend von der elastischen Deformation des benachbarten Aethers.

Um nun die Bewegungsgleichung zu vervollständigen für den Fall, dass eingelagerte ponderable Theile, die aber wie ein continuirliches Medium wirken, eine Kraft auf den Aether ausüben, werden wir für unendlich kleine Verschiebungen (als welche die Lichtschwingungen ja immer vorzustellen sind) diese Kraft der relativen Lagenänderung des Aethers gegen das System der benachbarten ponderablen Atome proportional setzen dürfen und erhalten so:

1. Die Bewegungsgleichung des Aethers

$$\mu \frac{d^2\xi}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2\xi}{dx^2} + \beta^2 (x - \xi). \qquad (1)$$

Dazu kommt die Bewegungsgleichung der ponderablen Atome, deren Dichtigkeit wir mit m bezeichnen. Auf die Volumeneinheit berechnet wäre $m\, d^2x/dt^2$ die auf sie wirkende Kraft, gemessen durch die Beschleunigung. Andererseits wird diese Kraft zusammengesetzt sein:

a) aus der Kraft, die der Aether auf die ponderablen Atome ausübt, nämlich $\beta^2(\xi - x)$;

b) aus der Kraft, welche die übrigen, relativ festliegenden Theile der ponderablen Massen, wenn solche da sind, auf den bewegten Theil ausüben. Wiederum mag hier zur Vereinfachung der Rechnung die der Wirklichkeit wohl nicht ganz entsprechende, mechanisch aber unanstössige Annahme gemacht werden, dass schwere centrale Massen der Molekeln festliegen und die beweglichen Theile derselben gegen diese und den Aether eine bestimmte Gleichgewichtslage zu bewahren streben. Bei der Verschiebung der beweglichen Atome um x setzen wir die Kraft, welche sie in die Gleichgewichtslage zurückführt, gleich $-a^2 x$.

c) Wenn Absorption stattfindet, muss lebendige Kraft der Wellenbewegung in innere unregelmässige Bewegung der Mo-
586 lekeln, d. h. in Wärme, übergeführt werden, durch einen der Reibung im Resultat ähnlichen Vorgang. Wir nehmen also noch eine der Reibung ähnliche Kraft an zwischen dem beweglichen und dem festliegenden Theil der Atome jedes Molekels und setzen diese gleich $-\gamma^2 . dx/dt$.

2. Die Bewegungsgleichung der mitschwingenden Atome ist dann:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2(\xi - x) - a^2 x - \gamma^2\frac{dx}{dt} \qquad (1\,a)$$

Durch die beiden Gleichungen (1) und (1 a) ist die Bewegung ebener Wellen vollständig bestimmt.

Ein entsprechendes particuläres Integral ist:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \mathfrak{A}\,e^{ly-int}\\ x &= A\,e^{ly-int}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen (1) und (1 a), so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}[-\mu n^2 - \alpha^2 l^2 + \beta^2]\,\mathfrak{A} &= \beta^2 A\\ [-m n^2 + a^2 + \beta^2 - \gamma^2 i n]\,A &= \beta^2\mathfrak{A}\end{aligned}\right\} \qquad (2\,a)$$

Das Product beider Gleichungen ergiebt nach Weglassung des Factors $A\mathfrak{A}$:

$$(\mu n^2 + \alpha^2 l^2)(m n^2 - a^2 + \gamma^2 i n) - \beta^2[m n^2 - a^2 + \gamma^2 i n + \mu n^2 + \alpha^2 l^2] = 0$$

oder

$$-\frac{l^2}{n^2} = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2}\left[1 + \frac{\beta^2}{m n^2 - a^2 - \beta^2 + \gamma^2 i n}\right] \qquad (2\,b)$$

Diese Bedingung muss also zwischen den Constanten der Gleichung (2) erfüllt sein, wenn sie als Integrale der Gleichungen (1) und (1 a) zulässig sein sollen. Demnächst ist dann mittels der Gleichungen (2 a) das Verhältniss $\mathfrak{A} : A$ zu bestimmen.

Soll die in (2) dargestellte Bewegung rein periodische Oscillationen darstellen, so muss n reell sein. Dann wird l der Regel nach complex sein. Wir wollen es schreiben:

$$l = -k + \frac{i n}{c} \qquad (2\,c)$$

Darin wird k den Absorptionscoëfficienten darstellen und c die 587
Fortpflanzungsgeschwindigkeit; unter k und c sind reelle Werthe zu verstehen.

Setzen wir diese Werthe in (2 b) und trennen das Reelle vom Imaginären, so erhalten wir folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{n^2} &= \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} - \frac{\beta^4}{\alpha^2 n^2}\cdot\frac{m n^2 - a^2 - \beta^2}{(m n^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 n^2} = F\\ \frac{2k}{c\,n} &= \frac{-\beta^4\gamma^2}{\alpha^2 n}\cdot\frac{1}{(m n^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 n^2} = G\end{aligned}\right\} \qquad (2\,d)$$

durch deren Auflösung k und c gefunden werden können. Man setze:

$$\frac{1}{c} = \varrho\cos\omega,$$

$$\frac{k}{n} = \varrho\sin\omega,$$

wobei ω im ersten Quadranten liege, während ϱ positiv oder negativ sein kann. Dann sind die oben gefundenen Werthe von

$$\frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{n^2} = \varrho^2\cos 2\omega = F,$$

$$\frac{2k}{c\,n} = \varrho^2\sin 2\omega = G,$$

und daraus ϱ und ω also auch $1/c$ und k/n zu finden.

$$\frac{1}{c^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{F^2 + G^2} + \tfrac{1}{2}F,$$

$$\frac{k^2}{n^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{F^2 + G^2} - \tfrac{1}{2}F.$$

Die Wurzel muss hier positiven Werth haben, da ihr Werth gleich ϱ^2 sein soll.

Gang der Function bei schwacher Absorption.

Ist $G^2 < F^2$ und F positiv, so kann man diese Werthe in die Reihe entwickeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c^2} &= F + \frac{F}{2}\left(\tfrac{1}{2}\frac{G^2}{F^2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{G^4}{F_4}\,\text{etc.}\right) \\ \frac{k^2}{n^2} &= \frac{1}{c^2} - F = \frac{G^2}{4F} - \frac{G^4}{16F^3}\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (2\,\text{e})$$

588 Wenn F negativ ist, giebt die obere Reihe den Werth von $-k^2/n^2$ und die untere den von $1/c^2$. In den sichtbaren Theilen des Spectrum, wo die Absorption gering, also G relativ sehr klein ist, wird man in den beiden Reihen nur die grössten Glieder zu berücksichtigen haben und annähernd setzen können:

$$\frac{1}{c^2} = F \text{ und } k = \frac{n}{2}\cdot\frac{G}{\sqrt{F}}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\frac{G}{F} = 2\frac{k\,c}{n} = 2\,k\,\lambda,$$

wenn wir die Wellenlänge mit λ bezeichnen; und die Annahme, dass G klein gegen F sei, bedeutet also, dass in einer Strecke von zwei Wellenlängen nur wenig Licht absorbirt werde. Es wird dies bei den gewöhnlich gebrauchten Lösungen von Farbstoffen, die anomale Dispersion zeigen, zutreffen.

Der Werth von k ergiebt sich auch aus der zweiten der Gleichungen (2 d) in folgender Form:

$$\frac{k}{c} = \tfrac{1}{2}\,n\,G = \frac{-\beta^4\gamma^2}{2\alpha^2 m^2}\cdot\frac{1}{(n^2-\mathfrak{n}^2)^2 + 4(\mathfrak{n}^2+\mathfrak{p}^2)\mathfrak{p}^2} \qquad (3)$$

worin gesetzt ist:

$$m\,\mathfrak{n}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\gamma^4}{2m} \text{ und } \mathfrak{p}^2 = \frac{\gamma^4}{4m^2}.$$

Die Form der Gleichung (3) zeigt, dass der Werth von k/c bei sich ändernder Schwingungszahl n ein Maximum erreicht, wenn $n = \mathfrak{n}$. Das letztere giebt also die mit 2π multiplicirte

Schwingungszahl des stärkst absorbirten Streifen. Bezeichnen wir diesen Maximalwerth von k mit k_0 und den entsprechenden von c mit c_0, so wird:

$$\frac{k_0}{c_0} = \frac{-\beta^4}{2\alpha^2\gamma^2}\cdot\frac{1}{(\mathfrak{n}^2+\mathfrak{p}^2)} \qquad (3\,\text{a})$$

Bei gleichbleibender Lage des Absorptionsmaximum im Spectrum, das heisst bei gleichbleibendem Werthe von $\mathfrak{n}$, wird also die Grösse k^0/c_0 desto grösser werden, je grösser β^4 im 589 Verhältniss zu γ^2 ist, also je grösser β, d. h. die den Aether mit den Körpertheilchen verbindende Kraft und je kleiner γ, die Reibungskraft ist.

Die Gleichung (3) können wir nun auf die Form bringen:

$$\frac{c}{k} = \frac{c_0}{k_0}\left(1 + \frac{(n^2-\mathfrak{n}^2)^2}{4\mathfrak{p}^2(n^2+\mathfrak{p}^2)}\right) \qquad (3\,\text{b})$$

Bei gleichbleibender Farbe n ist k/c nicht das Maass der Absorption für gleichbleibende absolute Dicken der absorbirenden Schicht, sondern für gleichbleibende Zahlen von Wellenlängen. Wenn die Brechungsverhältnisse nicht allzusehr variiren, werden beide Grössen sich aber nicht sehr wesentlich unterscheiden. Die Gleichung (3 b) zeigt nun, dass wenn n und $\mathfrak{n}$ constant gehalten werden, die Grösse k/c um so grösser im Verhältniss zum Maximum der Absorption k_0/c^0 ist, je grösser

$$\mathfrak{p}^2 = \frac{\gamma^4}{4m^2}.$$

Das heisst, grosse Werthe des Reibungscoefficienten γ^2 und kleine der mitschwingenden Massen m geben breite Absorptionsstreifen, umgekehrt kleine von γ^2 und grössere von m schmale Absorptionsstreifen.

Wenn nun die Anzahl der eingelagerten Atome derselben Art zunimmt, wird, falls keine anderweitige Aenderung der Structur erfolgt, γ^2, welches die auf die Volumeneinheit von m ausgeübte Reibung misst, proportional m wachsen, also die Breite des Absorptionsstreifens, bei Schichten, die seine Mitte gleich stark verdunkeln, nahehin gleich bleiben.

Unter denselben Verhältnissen würde aber auch β^2, welches die auf die Volumeneinheit von m ausgeübte elastische Kraft misst, wie m wachsen, und das Maximum der Absorp-

tion k_0/c_0 bei gleicher Dicke der absorbirenden Schicht also wachsen.

590 Nachdem wir so unter Voraussetzung, dass G klein gegen F sei, den Gang der Absorption, den die Formeln geben, untersucht haben, gehen wir unter Festhaltung derselben Voraussetzung dazu über, den Gang der Brechung zu bestimmen. Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im freien Raum mit C, so ist das Brechungsverhältniss N unseres Medium:

$$N^2 = \frac{C^2}{c^2}$$

für $n = (\alpha^2 + \beta^2)/m$, welches nahehin der Werth für den Streifen der stärksten Absorption ist, wollen wir es mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen. Die obigen Gleichungen ergeben

$$\mathfrak{N}^2 = C^2\left(\frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2}\right),$$

wir erhalten demnach unter den gemachten Voraussetzungen und mit Anwendung der vorher für $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$ festgestellten Werthe:

$$N^2 - \mathfrak{N}^2 = -\frac{C^2\beta^4(n^2 - \mathfrak{n}^2 - 2\mathfrak{p}^2)}{\alpha^2 n^2 m[(n^2-\mathfrak{n}^2)^2 + 4\mathfrak{p}^2(\mathfrak{n}^2+\mathfrak{p}^2)]} \qquad (4)$$

Der Ausdruck in den Parenthesen erreicht seine Grenzwerthe, wo

$$4\mathfrak{p}^2(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{p}^2) = (n^2 - \mathfrak{n}^2)^2 - 4\mathfrak{p}^2(n^2 - \mathfrak{n}^2) \qquad (4a)$$

Bei schmalem Absorptionsstreifen können wir die Aenderung des Factors n^2 vor der Parenthese vernachlässigen und ist, wie sich oben zeigte, $\mathfrak{p}^2$ klein gegen $\mathfrak{n}^2$. Vernachlässigen wir es, so ergiebt die Gleichung (4a) für die Grenzwerthe:

$$n^2 - \mathfrak{n}^2 = \pm 2\mathfrak{n}\mathfrak{p} = \pm\frac{\mathfrak{n}\gamma^2}{m}.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (3b) würde dies für das Maximum und Minimum der Brechung, so lange die gemachten Vernachlässigungen zulässig sind, ergeben:

$$\frac{k}{c} = \frac{1}{2}\frac{k_0}{c_0}.$$

An Stelle des Maximum und Minimum der Brechung würde
591 also eine doppelt so dicke Schicht als für die Farbe der stärksten Absorption nöthig sein, um die gleiche Absorption

hervorzubringen, sodass diese Grenzwerthe der Brechung schon immer in die wegen der Absorption schwer zu beobachtenden Theile des Spectrum fallen.

Für die Grenzwerthe von N wird annähernd:

$$N^2 - \mathfrak{N}^2 = \pm C^2\frac{\beta^4}{2\alpha^2 n^2 \mathfrak{n}\gamma^2} = \pm\mathfrak{N}\cdot C\frac{k_0}{\mathfrak{n}}.$$

Ist der Unterschied zwischen N und $\mathfrak{N}$ klein, und bezeichnen wir die Wellenlänge im freien Raume für die Farbe von $\mathfrak{n}$ Schwingungen mit $\lambda_0 = C/\mathfrak{n}$, so wird die letzte Gleichung:

$$N - \mathfrak{N} = \pm\tfrac{1}{2}k_0\lambda_0.$$

Die Grösse $e^{-\frac{1}{2}k_0\lambda}$ ist aber der Bruchtheil des eintretenden Lichtes, welcher durch eine Schicht von der Dicke $\frac{1}{2}\lambda$ wiederaustritt, wenn das Licht der am stärksten absorbirten Farbe angehört. Es ist also die durch die Absorption bedingte maximale Aenderung des Brechungscoëfficienten nach der hier entwickelten Theorie gleich dem logarithmischen Decrement der Lichtstärke, genommen für eine Schicht, deren Dicke einer halben Wellenlänge der entsprechenden Farbe im freien Raume gleich ist. In so dünnen Schichten zeigen übrigens nur sehr kräftig absorbirende Mittel überhaupt eine merkliche Verminderung der Lichtstärke; nur von solchen wäre also ein erheblicher Grad anomaler Dispersion zu erwarten.

Nach den von Hrn. Christiansen (Poggendorff's Annalen Bd. 143, S. 254) veröffentlichten Messungen beträgt für eine concentrirte Fuchsinlösung der Unterschied der Brechungsverhältnisse für das Maximum bei D und das Minimum bei $(F\frac{1}{2}G)$ 0,276. Davon würden 0,006 auf das Alkohol zu rechnen sein, und die Hälfte des Restes 0,135 würde unserem $N - \mathfrak{N}$ entsprechen. Daraus würde folgen, dass in der Dicke einer halben Wellenlänge die Amplitude des am stärksten absorbirten grünen Lichtes auf 0,8737, die Intensität auf 0,7634 reducirt würde. Reduction auf ein $\frac{1}{10}$ der Intensität würde eintreten, wenn die Dicke der Schicht 8,528 halbe Wellenlängen beträgt. 592
In der That zeigte mir eine concentrirte Fuchsinlösung, die ich zwischen zwei zur Demonstration Newton'scher Ringe bestimmte Glaslinsen gebracht hatte, dass der mittlere kreisförmige Fleck, durch den man auch das spectrale Grün sehen

konnte, etwas breiter war als die Stelle, welche Newton'sche Ringe zeigte. Das zeigt vorläufig wenigstens, dass die wirklich stattfindende Absorption von derselben Grössenordnung ist, wie die theoretisch verlangte. Eine genaue Uebereinstimmung nachzuweisen wird das Fuchsin kaum geeignet sein, da es nach einer Bemerkung von Kundt zwei Maxima der Absorption hat.

Uebrigens geht hieraus auch hervor, dass bei solchen Medien, welche beträchtliche anomale Dispersion zeigen, in der Mitte des Absorptionsstreifens die Bedingungen nicht mehr zutreffen, unter denen die bisher auseinandergesetzte abgekürzte Rechnung ausreichend ist, wenn dieselbe immerhin für die weniger absorbirten Theile des Spectrum auch noch zulässig bleibt.

Gang der Function bei stärkerer Absorption, wo die bisher gemachten Vernachlässigungen nicht mehr zulässig sind.

Für sehr grosse n wird annähernd:

$$F = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} \text{ und } G = -\frac{\beta^4 \gamma^2}{\alpha^2 m^2} \cdot \frac{1}{n^5},$$

also G verschwindend klein gegen F. Es bleibt deshalb, wie bisher:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2},$$

$$k = \frac{-\beta^4 \gamma^2}{2\alpha m \sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{n^4}.$$

Die Absorption wird also verschwindend klein und das Brechungsverhältniss nähert sich bei steigender Schwingungszahl einem festen Werthe:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{\alpha^2}.$$

593 Wären die Dichtigkeit μ des Aethers und seine Elasticitätsconstante α^2 für das durchsichtige Medium dieselben wie für den freien Raum, so würde das Brechungsverhältniss für die schnellsten Oscillationen gleich 1 werden, was nicht zulässig erscheint den Beobachtungen gegenüber. Man muss also in den durchsichtigen Medien entweder eine solche veränderte Structur des Aethers annehmen, dass μ/α^2 grösser als im

freien Raume wird, oder mit Hrn. Sellmeier annehmen, dass jenseits des Ultraviolett in jedem Spectrum einer durchsichtigen Substanz starke Absorptionen vorkommen, welche im ganzen sichtbaren Spectrum das Brechungsverhältniss in die Höhe treiben.

Für sehr kleine Werthe von n andererseits wird;

$$F = -\frac{\beta^2 \alpha^2}{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot \frac{1}{n^2},$$

$$G = -\frac{\beta^4 \gamma^2}{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cdot \frac{1}{n},$$

also $G/F = 0$.

Mittels der Reihen (2e) ergiebt sich:

$$k = -\frac{\beta\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta^3 \gamma^2}{2\alpha\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wenn $\alpha = 0$, wird $k = 0$ und $1/c = \infty$; sonst werden beide Werthe endlich sein.

In der Nähe der Farbe stärkster Absorption lässt sich der Gang der Absorption und Brechung, wie ihn die Gleichungen (2d) und (2e) ergeben, durch die folgende Construction versinnlichen.

Man setze:

$$\frac{m n^2 - \alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 n} = \operatorname{tang} \omega,$$

wobei ω von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ gehen wird, wenn n von 0 bis ∞ geht. Wie der Werth von ω aus dem gegebenen Werthe 594
von n durch Construction zu finden ist, wollen wir erst am Schluss besprechen.

Man mache (s. Fig. 24 S. 224)die Strecke:

$$AB = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2},$$

errichte in B das Loth BD von der Länge:

$$BD = \frac{\beta^4}{\alpha^2 \gamma^2 n^3},$$

und construire einen Kreis, dessen Durchmesser BD ist. Man mache den Winkel $DBE = \omega$; E sei der Schnittpunkt seines

zweiten Schenkels mit dem Kreise. Dann fälle man von E das Loth EH auf die Linie AB, so ist:

$$AH = F \quad \text{und} \quad EH = G.$$

$$AE = \sqrt{F^2 + G^2},$$

also:

$$\frac{1}{c^2} = \tfrac{1}{2}(AE + AH),$$

$$\frac{k^2}{n^2} = \tfrac{1}{2}(AE - AH).$$

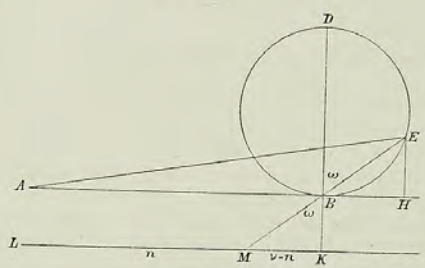


Fig. 24.

Wenn der Absorptionsstreifen schmal ist, sodass sich n nicht erheblich ändert, während man durch ihn hindurch geht, so kann man in den Werthen der Strecken AB und BD das
595 n constant setzen und dafür den Werth ν nehmen:

$$m\nu^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

welcher etwa der Mitte des Absorptionsstreifens entspricht. Dann wird, während n wächst, der Punkt E den festen Kreis durchlaufen, auf dessen oberster Seite bei D wird die stärkste Absorption eintreten, dagegen vorher an der von A abgewendeten Seite die stärkste, nachher an der A zugewendeten Seite die schwächste Brechung.

Unter derselben Voraussetzung ergiebt sich der Werth von tang ω annähernd:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{(n-\nu)m}{2\gamma^2}.$$

Man verlängere DB über B hinaus, mache:

$$BK = \frac{2\gamma^2}{m},$$

ziehe durch K die Parallele LK mit AB, mache $LK = \nu$ und trage nun die Werthe des n von L anfangend auf LK ab. Es sei z. B. $LM = n$, so ist annähernd der Winkel $MBK = \omega$, und der Punkt E wird gefunden, wenn man die Linie MB zieht und sie verlängert, bis sie zum zweiten Male den Kreis schneidet.

Es ist leicht ersichtlich, dass je kleiner BK ist, desto kleinere Veränderungen genügen werden, um den Punkt E gleiche Bogen des Kreises durchlaufen zu lassen, was schmalen Absorptionsstreifen entspricht. Die Stärke der Absorption hängt dagegen von dem Durchmesser BD ab.

Eine Methode zu genauerer Construction des Winkels ω lässt sich leicht finden für Fälle, wo die Absorptionsstreifen breiter sind. Die hier beschriebene Construction wird im Wesentlichen genügen, um den Gang der Erscheinung verfolgen zu lassen.

Dabei zeigt sich nun wieder, dass die Curve der Brechung sich fortdauernd continuirlich verändert und auch zwischen dem Maximum und Minimum durch den Absorptionsstreifen von jenem zu diesem absteigend hindurchläuft. Dass die Curve der Brechung einen solchen Gang habe, hat schon Hr. Christiansen aus seinen Versuchen geschlossen. (Poggend. Annal. Bd. 143.)

Neuere Beobachtungen, welche Hr. Dr. Wernicke kürz- 596
lich der hiesigen physikalischen Gesellschaft mitgetheilt hat, bestätigen dasselbe.

Die Ausdehnung der Theorie der Medien mit einer grösseren Anzahl von Absorptionsstreifen würde so geschehen können, dass man statt Gleichung (1) setzte:

$$\mu \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\xi}{dy^2} + \Sigma[\beta^2_a (x_a - \xi)],$$

wo der Index a sich auf die verschiedenen Arten mitschwin-

gender Massen bezieht. Für jede derselben würde dann eine andere Bewegungsgleichung bestehend entsprechend (1a):

$$m_a \cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} = \beta^2_a (\xi - x_a) - \alpha^2_a x_a - \gamma^2_a \cdot \frac{dx_a}{dt}.$$

Wenn wir für ebene Wellen Integrale von der Form der Gleichungen (2) annehmen, erhalten wir eine lineare Gleichung für die complexe Constante l^2, deren reeller und imaginärer Theil wieder wie oben die Absorption k und Fortpflanzungsgeschwindigkeit c bestimmen. Die Werthe von k und c lassen sich also dann immer noch durch directe Auflösung der Gleichungen finden, aber der Gang ihrer Werthe bei wachsendem n wird allerdings beträchtlich complicirter als in dem betrachteten einfachen Falle. Der Gang der Functionen liesse sich auch dann durch eine Construction, wie die oben gegebene, anschaulich machen, nur müssten über der Linie LK, auf der die Werthe von n abgetragen werden, mehrere Kreise den verschiedenen Absorptionsstreifen entsprechend, von vielleicht verschiedener Grösse, verschiedenen verticalen und horizontalen Abstande stehen. Die EH entsprechenden Strecken würden mit einander zu addiren sein, und ebenso die BH entsprechenden unter einander und zu AB. Der Gang der Brechung würde im Ganzen derselbe werden, wie ihn Hr. Kundt in den Annalen Bd. 144, S. 131 beschrieben hat.

Physiologische Optik.