



XXIX.

Ueber die physiologische Wirkung kurz dauernder elektrischer Schläge im Innern von ausgedehnten leitenden Massen.

Aus: Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. S. 14–17 vom 12. Februar 1869.

¹⁴ Bei neueren Versuchen über die Fortpflanzung der Reizung in den Nerven, welche im Physiologischen Laboratorium angestellt worden sind, wurde der Vortragende aufmerksam gemacht auf die, übrigens auch schon von den Elektrotherapeuten bemerkte geringe Wirksamkeit, welche elektrische Inductionsschläge auf die tiefer gelegenen Nerven des menschlichen Körpers ausüben, während es andererseits verhältnissmässig leicht ist, selbst tief liegende Nerven durch die constanten Ströme einer Batterie von zehn bis zwanzig Platinzinklelementen zur Erregung von Zuckungen oder selbst von Tetanus zu veranlassen. Die elektromotorische Kraft eines Inductionsapparates, der zwischen den genäherten Enden der inducirten Spirale kleine Funken hervorbringt, ist aber jedenfalls viel grösser, als die einer Batterie der genannten Grösse, welche nie einen sichtbaren Schliessungsfunken giebt. Es gehören im Gegentheil nach den Versuchen von Gassiot gegen vierhundert Platinzinklelemente dazu, um kleine sichtbare Funken beim Schluss der Kette zu geben. Dagegen ist die grosse elektromotorische Kraft eines Inductionsapparates nur während eines ausserordentlich kurzen Bruchtheiles einer Secunde wirksam, während man die der Batterie beliebig lange Zeit hindurch auf die reizbaren Theile wirken lassen kann.

Um zunächst die Thatsache rein fest zu stellen, hat der Vortragende Versuche angestellt am stromprüfenden Froschenkel, dessen Nerv auf ein feuchtes Fliesspapier gelegt wurde, welches letztere die Oberfläche eines mit Kochsalzlösung von $\frac{1}{2}$ Procent gefüllten Gefässes bedeckte, sodass der Nerv dadurch zu einem nurkleinen Theile einer grösseren leitenden Flüssigkeitsmasse gemacht wurde. Die Elektroden für den erregenden Strom waren zwei an Platindrähten angeschmolzene Platinkügelchen von 1 mm Durchmesser, welche, unverrückbar neben einander in 3 mm Abstand befestigt, mit der Oberfläche des genannten feuchten Leiters in Berührung gesetzt wurden, sodass Stromesschlingen bald von grösserer, bald von geringerer Länge durch den bald ferner, bald näher liegenden Nerven geleitet wurden. Die Ströme, welche durch diese Elektroden zugeleitet wurden, waren meistens erzeugt durch die secundäre Spirale eines Inductionsschlittens, und zwar wurden bei einem Theile der Versuche in gewöhnlicher Weise die bei der Oeffnung oder Schliessung der primären Spirale entstehenden inducirten Ströme einfach durch den feuchten Leiter geleitet. Ich will diese als Oeffnungsschläge und Schliessungsschläge bezeichnen. Die letzteren sind bekanntlich von geringerer Intensität und relativ längerer Dauer, sodass sie der Regel nach ¹⁵ physiologisch viel weniger wirksam sind, als die viel intensiveren, aber in demselben Verhältniss kürzeren Oeffnungsschläge desselben Apparates, welche bei derselben Stellung des Schlittens durch die Unterbrechung des primären Stromes erzeugt werden. In einem anderen Theile der Versuche brachte ich dagegen eine noch grössere Verkürzung der Dauer dieser Oeffnungsschläge hervor, indem ich ausser dem feuchten Leiter und seinen zuführenden Platinkügelchen, auch noch eine bis drei kleine Leydener Flaschen einfügte, deren jede aus zwei ineinander gestellten und mit Quecksilber gefüllten Reagenzgläsern gebildet war. Das eine Ende der Inductionsspirale war mit der inneren Quecksilbermasse dieser Gläser, das andere durch den feuchten Leiter hindurch mit der äusseren verbunden. Die Elektricitätsbewegung ist in diesem Falle eine solche, dass, hinreichend schnelle Unterbrechung des Stromes vorausgesetzt, die Leydener Flaschen sich laden, und dann eine



Reihe ausserordentlich kurzer und schneller Oscillationen der Elektrizität zwischen ihren Belegungen durch den sie verbindenden Draht der inducirten Spirale eintritt. Diese gehen dann bei der getroffenen Einrichtung durch den feuchten Leiter und erregen den diesem anliegenden Nerven. Ich will diese Art der Strömung als Entladungsschlag bezeichnen.

Der Eisenkern des Inductionsapparates war bei allen zu beschreibenden Versuchen entfernt worden.

A. Der Nerv wurde soweit von den Platinkügelchen entfernt (etwa 4 mm), bis der Entladungsschlag einer der kleinen Leydener Flaschen bei zusammengeschobenen Spiralen des Inductionsapparates gerade noch hinreichte, eine Spur von Zuckung hervorzurufen. Der Oeffnungsinductionsschlag musste dann durch Einlagerung eines Widerstandes von bestimmter Grösse in den primären Stromkreis geschwächt werden, bis er auf den Nerven gleich stark wie der Entladungsschlag der Flasche wirkte.

Nun wurde der Widerstand entfernt und der Nerv dicht an die Elektroden geschoben, der Schlitten des Inductionsapparates von der primären Spirale abgezogen, bis der Entladungsschlag der Flasche nur noch eine Spur von Zuckung gab. Der Oeffnungsschlag, bei Einlagerung desselben Widerstandes in den primären Kreis wie vorher, gab nun keine Wirkung, sondern dieser Widerstand musste soweit verringert werden, dass die Stärke des primären Stromes mehr als doppelt so gross wurde, als sie bei den früheren Oeffnungsschlägen gewesen war.

In einer anderen Versuchsreihe, wo drei Leydener Flaschen angewendet wurden und deshalb der Nerv weiter bis auf 5 mm entfernt werden konnte, erforderte bei gleicher Wirkung der Entladungsschläge der Oeffnungsschlag eine drei Mal so grosse Intensität des primären Stromes bei berührendem Nerven als bei abstehendem Nerven.

¹⁶ B. Noch auffallender war der Unterschied der Wirkungen in der Nähe und in der Ferne, wenn man die Entladungsströme der Leydener Flaschen mit der des Schliessungsinductionsstromes verglich. Während diese beiden Arten von Strömen bei Berührung des Nerven mit den Elektroden nahezu gleich stark wirken, musste bei der Wirkung in die Ferne

der primäre Strom für den Schliessungsinductionsschlag etwa nur ein Neuntel derjenigen Stärke erhalten, die für die Entladung von drei Leydener Flaschen nöthig war, wenn beide gleiche Wirkung hervorbringen sollten.

C. Endlich habe ich dann auch noch den Entladungsschlag von einem der Leydener Flaschen mit den Schliessungs- und Oeffnungsschlägen eines constanten Stromes verglichen, der von der primären Leitung durch Verzweigung abgeleitet wurde. Die inducirte Spirale blieb dabei in unveränderter Stellung, und die Wirkung der Ströme wurde nur durch Veränderung des Widerstandes in der primären Leitung auf das Maass gebracht, dass bei verschiedenen Lagen des Nerven immer die ersten Spuren der Zuckung eintraten. Auch hierbei zeigte sich eine relativ stärkere Fernwirkung der constanten Ströme. Doch reichten die mir zu Gebote stehenden Drahtwiderstände bisher nur für verhältnissmässig kleine Abänderungen des Abstandes zwischen Nerv und Elektroden aus.

Die am Froschnerven in Berührung mit einer grösseren leitenden Flüssigkeitsmasse beobachteten Erscheinungen bestätigen also allerdings die am menschlichen Körper beobachteten Thatsachen. Gleichzeitig stellten aber die von mir in Verbindung mit diesen Versuchen angestellten Untersuchungen über die Vorgänge bei kurz dauernden elektrischen Entladungen, worüber ich mir späteren Bericht vorbehalte, verschiedene Möglichkeiten der Erklärung dieser Erscheinungen heraus, zwischen denen erst nach weiteren experimentellen Untersuchungen über die Dauer des Funkens, und die Dauer der elektrischen Oscillationen in der angewendeten Spirale bei ihrer Verbindung mit den Leydener Flaschen, entschieden werden kann.

Bei den Versuchen mit Schliessungsinductionsschlägen hängen die Erfolge wahrscheinlich hauptsächlich davon ab, dass durch die Rückwirkung des inducirten Stromes auf den inducirenden die steile Ansteigung und damit die physiologische Wirkung des ersteren desto mehr begünstigt wird, je näher die Spiralen einander stehen, was eben bei weiter entferntem Nerven der Fall war. Wenn die Dauer der elektrischen Oscillationen bei den Entladungsschlägen der Leydener Flaschen klein ist im Vergleich mit der Dauer des Oeffnungsfunkens, was nur



durch weitere Versuche zu ermitteln ist, kann etwas Aehnliches auch bei der Vergleichung dieser Entladungsschläge eintreten.

Andererseits ergibt die Theorie, dass schnell oscillirende elektrische Entladungen, welche sich von zwei Einströmungspunkten aus in einem Leiter verbreiten, ausser der Schwächung, welche auch constante Ströme bei ihrer Ausbreitung zeigen, durch elektrodynamische Induction eine stärkere Schwächung erleiden, welche einen Factor e^{-kr} in den Ausdruck für ihre Intensität einführt. Hierin ist unter r die Entfernung von dem Elektrodenpaar, unter k eine positive Constante verstanden, deren Grösse von der Leitungsfähigkeit des Medium abhängt. Bei hinreichender Schnelligkeit der Oscillationen der von uns gebrauchten Entladungsschläge würde dieser Umstand ebenfalls die beobachteten Resultate hervorbringen können.

XXX.

Ueber elektrische Oscillationen.

Aus: Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. S. 27–31 vom 30. April 1869.

Die Erklärung der unter dem 12. Februar d. J. der Gesellschaft mitgetheilten Versuche über die Ausbreitung elektrischer Entladungen in ausgedehnten leitenden Massen erforderte eine Kenntniss der Oscillationsdauer der Ströme in den angewendeten Apparaten, namentlich in einer Inductionsspirale von der angewendeten Grösse, die an ihren Enden mit den Belegen einer Leydener Flasche verbunden ist. Der Vortragende hat solche Versuche nach einer neuen Methode gemacht, welche vor allen ihm bekannten bisher gebrauchten Methoden den Vorzug hat, dass die elektrischen Oscillationen zwischen den Belegen der Leydener Flasche in einem vollständigen, nirgends unterbrochenen Bogen vor sich gehen können, der keine Funkenstrecke enthält, und in welchem deshalb diese Oscillationen bis auf ihre letzten schwächsten Reste ungestört ablaufen können. Als Reagenz zur Wahrnehmung der elektrischen Bewegungen wandte er einen stromprüfenden Froschnerven an, der in einem solchen Falle bisher noch allen bekannten physikalischen Mitteln an Empfindlichkeit überlegen ist.

Zur Zeitmessung wurde ein schweres festes Secundenpendel angewendet, was einem nach A. Fick's Vorschlage construirtem Pendelmyographion angehörte. Dasselbe fiel immer von gleicher Höhe und stiess mit einem unten hervorragenden Vorsprunge im Verlauf seiner Schwingung kurz nach ein-



ander gegen zwei Hebelchen, wodurch zwei Stromleitungen geöffnet wurden.

Die erste dieser Stromleitungen war die des primären Stromes eines Du Bois'schen Schlittenapparates. Die Enden der inducirten Spirale dieses Apparates waren mit den Belegungen einer oder mehrerer Leydener Flaschen metallisch verbunden. Die Unterbrechung des primären Stromes inducirte also zunächst in der secundären Spirale einen gleichgerichteten Strom, der die Belege der Batterie lud, darauf entlud sich die Batterie wieder in oscillirender Weise durch dieselbe Spirale, durch die sie geladen war. Die eisernen Drähte aus dem Innern der primären Spirale waren in allen Fällen entfernt, um durch die Einwirkung, die sie von der secundären Spirale empfangen und wieder rückwirkend auf sie ausüben konnten, den Vorgang nicht zu compliciren. Ausserdem würden die Oscillationen durch die Anwesenheit der Eisendrähte beträchtlich verzögert worden sein.

Die gute metallische Leitung des inducirten Stromes wurde an einer Stelle unterbrochen, sobald das Pendel des Myographion gegen den zweiten Hebel stiess; dann trat eine Nebenleitung in Function, welche den Nerven des stromprüfenden Schenkels enthielt. Letzteren hatte ich übrigens ganz und gar in eine Kochsalzlösung von $\frac{1}{2}$ Procent eingelegt, wo sich seine Reizbarkeit 3 bis 4 Stunden lang vortrefflich erhielt. Der Nerv war zum Theil in ein enges Glasröhrchen hineingezogen, welches auch in die Flüssigkeit tauchte, und in welches ein feiner Platindraht als Elektrode hineinragte. Die andere Elektrode war eine Platinplatte in der grösseren Flüssigkeitsmasse. So lange die metallische Nebenschliessung zum Nerven nicht geöffnet war, ging kein merklicher Theil des Stromes durch den Nerven. Sobald jene geöffnet war, entlud sich der Rest des Stromes durch den Nerven, und erregte Zuckungen, wenn er dazu kräftig genug war.

Die Wirkung des Stromes ist hierbei am stärksten, wenn die Unterbrechung der Leitung zu einer Zeit geschieht, wo die Geschwindigkeit der Strömung in der Spirale ein Maximum erreicht hat, zu welcher Zeit die Belege der Batterie nur schwach oder gar nicht geladen sind. Dann stürzt nämlich ganz plötzlich der Extracurrent der Spirale in den Nerven,

und zwar mit einer Intensität, welche wegen des sehr kleinen elektrodynamischen Potentials der Nervenleitung der in der Spirale zur Zeit der Unterbrechung bestehenden Stromintensität fast gleich sein muss. Dieser Strom wird nachher allerdings wegen des grossen Widerstandes des Nerven sehr schnell an Stärke abnehmen und entweder geradezu, oder nach wenigen schnell abnehmenden Oscillationen verschwinden. Aber die physiologische Wirkung seines plötzlichen Hereinbrechens in den Nerven kann dennoch eine sehr kräftige sein.

Wird dagegen die metallische Leitung unterbrochen zu einer Zeit, wo die Belege der Batterie das Maximum ihrer Ladung erreicht haben, und der die Elektrizität ihnen zuführende Strom in der Spirale eben aufhört und in die entgegengesetzte Richtung überzugehen beginnt: so müssen sich nach der Unterbrechung die in der Batterie aufgesammelten Elektrizitäten durch den Nerven, also durch einen Bogen von viel grösserem Widerstande, entladen, wodurch die lebendige Kraft der nun noch stattfindenden Oscillationen schnell vernichtet wird. Die Ansteigung des Stromes zum Maximum geschieht dann erst allmählig ansteigend im Laufe einer Viertel-Oscillation, und während dieser Zeit kann die Intensität der schnell erlöschenden Oscillationen schon sehr merklich vermindert sein, so dass die physiologische Wirkung in diesem Falle sowohl wegen der verminderten Ansteigungsgeschwindigkeit, als auch wegen der geringeren Höhe des zu erreichenden Maximums ²⁹ schwächer ist als im ersten Falle.

Die Intensität der physiologischen Wirkung liess sich nun dadurch vergleichen, dass ich bei verschiedenen Werthen der Zeitdauer zwischen den beiden durch das Pendel ausgeführten Stromunterbrechungen jedesmal diejenige Stellung der verschiebbaren inducirten Spirale suchte, wo sie noch eben sichtbare Muskelzuckung gab. Wenn das Pendel zur Zeit eines Stromesmaximums in der Spirale die Nebenleitung zum Nerven unterbrach, konnte ich die inducirte Spirale weit von der inducirenden entfernen; wenn es zur Zeit eines Stromesminimums unterbrach, musste ich die Spiralen einander mehr nähern, oder erhielt auch von den späteren Minimis gar keine Wirkungen mehr.



Die Unterbrechungszeit konnte durch eine feine Schraube regulirt werden, welche die Stellung des zweiten Hebelchen änderte, und deren Kopf ich mit einer groben Kreistheilung versehen hatte. Um die den Schraubenumgängen entsprechenden Zeitwerthe zu berechnen, mass ich den Weg, den das Pendel zwischen den beiden Unterbrechungen zurücklegte, mit einem an diesem selbst befestigten feinen Maassstabe und berechnete die Zeit aus der Schwingungsdauer und Schwingungsamplitude des Pendels.

Der Apparat war extemporirt, und wird sich in vieler Beziehung zweckmässiger und feiner einrichten lassen, aber es liessen sich schon so eine ganze Reihe von Resultaten erreichen.

Zunächst ist zu bemerken, dass bei Anwendung von einem Grove'schen Elemente für den primären Strom, die Gesamtdauer der wahrnehmbaren elektrischen Oscillationen in der mit einer Leydener Flasche verbundenen Spirale etwa $\frac{1}{50}$ Secunde betrug. Diese Gesamtdauer ist der Theorie nach unabhängig von der Capacität der mit der Spirale verbundenen Batterie.

Bezeichnen wir nämlich das elektrodynamische Potential der inducirenden Spirale auf die inducirte bei Einheit der Stromstärke in beiden mit P , das der inducirten auf sich selbst mit p , die Capacität der Batterie mit c , den Widerstand und die Stromstärke der inducirten Spirale mit w und i , die Stromstärke, welche in der inducirenden vorhanden war, mit J , die in der inneren Belegung der Batterie aufgehäufte Elektrizitätsmenge mit q , die Zeit mit t , die Oscillationsdauer mit T , und setzen wir $t=0$ für den Moment der Unterbrechung des primären Stromes, so ist nach Kirchhoff's und W. Thomson's Theorie:

$$q = J \frac{P}{\beta p} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$

$$i = \frac{JP}{p} \left\{ \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right\}$$

$$\alpha = \frac{w}{2p}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1}{pc} - \alpha^2}.$$

so worin:

Die Anzahl der Oscillationen für die Secunde ergab sich zum Beispiel bei der Verbindung der Spirale mit einer Leydener Flasche gewöhnlicher Form zu 2164; von solchen konnten hinter einander an meinem Apparate 45 Maxima beobachtet werden. Die drei kleinen aus mit Quecksilber gefüllten Reagenzgläschen gebildeten Leydener Flaschen, welche ich in meiner früheren Mittheilung erwähnt habe, hatten wegen ihres viel dünneren Glases zusammen genommen noch etwas grössere Capacität als jene Flasche und gaben 2050 Schwingungen für die Secunde. Die drei kleinen und die grössere Flasche zusammen genommen gaben 1550 Schwingungen. Letzterer Werth hätte der Berechnung nach nur 1484 betragen sollen, wenn als Capacität des Apparates nur die der Leydener Flaschen in Betracht gezogen wurde. Die Differenz erklärt sich daraus, dass bei diesen Versuchen auch die Spirale selbst in einem gewissen Grade die Rolle einer kleinen Leydener Flasche spielt. Das mit der zur Zeit positiv geladenen Belegung der Batterie zusammenhängende Ende der Drahtmasse ladet sich selbst positiv, das andere negativ, und da jede so geladene Drahtwindung mit anderen, welche einer entfernteren Stelle des Drahtes angehören und geringeres elektrostatisches Potential haben, in naher Berührung ist, und jene von diesen letzteren nur durch die dünne isolirende Schicht der umspinnenden Seide getrennt ist, so wird dadurch eine Anhäufung entgegengesetzter Elektricitäten an beiden Seiten dieses Ueberzuges bedingt. Dabei wird die äusserste Lage von Drahtwindungen nur Elektricität der einen Art, die innerste nur solche der anderen Art anhäufen. In den inneren Drahtschichten tritt nur Vertheilung der entgegengesetzten Elektricitäten nach der äusseren und inneren Seite des Drahtes ein.

Diese Ueberlegung führte mich dazu zu untersuchen, ob Oscillationen nachweisbar seien, auch wenn die Spirale gar nicht mit einer Leydener Flasche verknüpft ist, wie dies bei den unipolaren Zuckungen vorkommt. Dies gelang in der That.

Zu dem Ende wurde das eine Ende der Spirale ganz isolirt, das andere mit den Gasröhren des Hauses verknüpft. Die zweite Unterbrechungsstelle mit dem Nerven als Neben-



schliessung wurde zwischen die Spirale und die Gasröhren eingeschaltet. Die Oscillationen waren in diesem Falle sehr schnell, etwa 7300 in der Secunde, und ihre physiologische Wirkung schwach, sodass überhaupt nur die ersten Maxima eine solche ausübten. Ich konnte in diesem Falle nur die neun ersten Strömungsmaxima beobachten. Der Theorie nach sollte die Abnahme der Oscillationen in diesem Falle nicht schneller geschehen, als in den früher beobachteten; doch lässt die Theorie erkennen, dass ein etwaiger Mangel an Isolation der Drahtwindungen hier viel grösseren Einfluss haben musste als bei langsameren Oscillationen. Andererseits kann hier aber auch in Betracht kommen, dass vielleicht der Nerv durch so schnelle Schwankungen nicht mehr kräftig genug afficirt wird.

Hier wie in den früheren Versuchen mit langsameren Oscillationen unterscheiden sich die im Nerven aufsteigend fliessenden Strommaxima von den abwärts fliessenden durch grössere physiologische Wirkung, sodass man auch die abwechselnde Strömungsrichtung dieser Maxima erkennen kann.

Dadurch ist constatirt, dass selbst eine leere, am einen Ende isolirte, am anderen Ende mit dem Erdboden verbundene Spirale sich abwechselnd positiv und negativ ladet, und die entgegengesetzte Elektricität in den Erdboden austreibt, bis sie nach einer Reihe von Schwankungen zur Ruhe kommt.

Die Theorie lässt ferner hieraus die Folgerung ziehen, dass solche Schwankungen, nur etwas schneller abnehmend, in einer inducirten Spirale beim Oeffnungsschlage auch dann stattfinden, wenn ihre Enden durch einen schlecht leitenden Körper, z. B. einen Nerven, verbunden sind, sodass auch die elektrische Bewegung im Nerven aus Oscillationen von schnell abnehmender Stärke und nahehin derselben Schwingungsdauer besteht, welche die Spirale bei vollkommener Isolation eines ihrer Enden giebt.

XXXI.

Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern.

Aus: Verhandlungen des naturhistorisch-medieinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. S. 84–89. 21. Januar 1870. (Vorläufige Anzeige des folgenden Aufsatzes.)

Wenn leitende Körper von elektrischen Strömen von veränderlicher Intensität durchströmt werden, ist die elektromotorische Kraft im Innern derselben nicht bloss abhängig von den elektrostatischen Kräften der freien Elektricität, die auf der Oberfläche oder auch vielleicht im Innern der Leiter verbreitet ist, sondern sie hängt auch von Inductionswirkungen ab, welche die elektrischen Ströme bei der Veränderung ihrer Intensität gegenseitig auf einander ausüben. In den meisten Fällen, so oft nämlich die Dichtigkeit der freien Elektricität an der Oberfläche oder im Innern der Leiter sich verändert, haben wir es nicht durchaus mit geschlossenen Strömen zu thun, für welche allein die Gesetze der Induction vollständig und genau bekannt sind, sondern die vorkommenden Ströme sind der Regel nach zum Theil, oder auch wohl alle, ungeschlossene.

Das mathematische Gesetz der elektrischen Induction ist in verschiedenen Formen gegeben worden; die erste derselben von Herrn F. E. Neumann (dem Vater)¹⁾, eine zweite von Herrn W. Weber²⁾, mit welcher auch die Consequenzen der von Herrn C. Neumann (dem Sohne) aufgestellten Hypothese

1) Denkschriften der Berliner Akademie für 1845 und 9. Aug. 1847.

2) Elektrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig 1846.



wenigstens für schwächere Ströme zusammenstimmen, eine dritte ist in den Arbeiten über Elektrodynamik von Herrn A. Maxwell¹⁾ enthalten.

Alle diese Formen geben für alle Fälle, wo der inducirende Strom geschlossen ist, vollkommen übereinstimmende Resultate, aber sie differiren, wenn sie auf ungeschlossene Ströme angewendet werden. Die bisher bekannten Thatsachen erlaubten nicht eine sichere Entscheidung zwischen diesen verschiedenen Formen des Inductionsgesetzes zu treffen.

Es wird nur als natürlich angesehen werden dürfen, wenn zunächst die geistreiche Hypothese von Herrn W. Weber, welche den Vortheil hatte, alle bis dahin bekannten elektrischen Phänomene unter einem verhältnissmässig einfachen Gesichtspunkte zu vereinigen, als Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen bevorzugt wurde. Die Bewegungsgesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlichen Leitern wurden aus der Weber'schen Hypothese von Herrn Kirchhoff²⁾ abgeleitet, und auf die Ströme in dünnen Drähten angewendet; ein Fall der Anwendung, bei welchem übrigens, wie ich hier gleich bemerken will, die Unterschiede der verschiedenen Theorien verschwinden, wenigstens wenn man gewisse factisch unendlich klein bleibende Grössen auch in der Theorie als unendlich klein voraussetzt. Dieselben Bewegungsgleichungen sind dann von Herrn Jochmann³⁾ auf die Ströme in Leitern, die unter dem Einflusse eines Magneten rotiren, angewendet worden; endlich von Herrn Lorberg⁴⁾ auf Bewegungen der Elektricität in einer Kugel, wie sie unter dem Einflusse periodisch wechselnder inducirender äusserer Kräfte zu Stande kommen müssen. In den Untersuchungen von Herrn Jochmann verschwindet ebenfalls das, was dem Weber'schen Gesetze eigenthümlich ist, weil er es wesentlich auch nur mit geschlossenen Strömen zu thun hatte. Die Untersuchungen von Herr Lorberg zeigen, dass in der Kugel unter dem Einflusse beliebiger

1) London Philosophical Transactions 1865. P. I. p. 459.

2) Pogg. Annalen. CII. S. 529.

3) Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. LXIII.

4) Ebenda. Bd. LXXI. S. 53.

periodischer Kräfte Integrale der Bewegungsgleichungen hergestellt werden können, welche stets endlich bleibenden Bewegungen entsprechen, aber es kann in diesem Falle nicht unterschieden werden, ob diese Bewegungen durch die betreffenden äusseren Kräfte hervorgerufen werden können, oder nur durch sie in ihrem Ablauf verändert sind, eine Unterscheidung, die in diesem Falle wesentliche Bedeutung hat.

Ich würde zu den Untersuchungen, deren Resultate ich hier mittheilen will, geführt durch die Frage, wie elektrische Ströme im Innern von leitenden Körpern anheben zu fliessen, da ihre physiologische Wirkung wesentlich auf der Plötzlichkeit ihres Eintrittes beruht. Dabei zeigte sich, dass die auf das Weber'sche Gesetz gegründeten Bewegungsgleichungen der Elektricität einer Revision bedürfen.

Es lassen sich alle bisher aufgeführten Formen des Inductionsgesetzes auf eine gemeinsame Form zurückführen, in welcher sie nur durch die verschiedenen Werthe einer darin enthaltenen Constanten verschieden sind.

Nennen wir i die Intensität in einem Stromelement Ds , und j in einem anderen $D\sigma$, positiv gerechnet, wenn die positive Elektricität in Richtung der wachsenden ζ oder σ strömt, r die Entfernung zwischen Ds und $D\sigma$, ferner $(D\zeta, D\sigma)$ den Winkel zwischen den Richtungen von $D\zeta$ und $D\sigma$, $(r, D\zeta)$ und $(r, D\sigma)$ die Winkel, welche die Richtung von r mit $D\zeta$ und $D\sigma$ macht, so ist der allgemeinste Ausdruck p für das elektrodynamische Potential der Stromelemente Ds und $D\sigma$ auf einander, wenn wir nur die Voraussetzung festhalten, dass die Wirkungen ungeschlossener Ströme nicht von einer anderen Function der Entfernung abhängen, als die geschlossener, folgender:

$$p = -\frac{1}{r} \left\{ (1+k) \cos(D\zeta, D\sigma) + (1-k) \cos(r, D\zeta) \cos(r, D\sigma) \right\}$$

Darin ist k eine Constante von unbekanntem Werthe. Der mit k multiplicirte Theil dieses Ausdruckes ist gleich:

$$-\frac{1}{4} i \cdot j \cdot \frac{d^2 r}{d\zeta \cdot d\sigma}$$



und verschwindet also, so oft ξ oder σ eine geschlossene Strombahn ist, und wir über die geschlossene Bahn integrieren. Es hat also der Werth von k keinen Einfluss auf alle diejenigen elektrischen Bewegungen, bei denen alle Ströme geschlossen sind.

Die Werthe von k sind:

bei F. E. Neumann	$k = 1$
bei Cl. Maxwell	$k = 0$
bei W. Weber	$k = -1$.

Aus diesem Werthe von p habe ich also, wie Herr Kirchhoff aus dem Weber'schen Gesetze, die Bewegungsgleichungen der Elektrizität in einem körperlich ausgedehnten Leiter entwickelt.

Diese Gleichungen lassen sich auf folgende Form bringen: Es seien U , V , W die Werthe des elektrodynamischen Potentials für die Einheit des Stromes, die an einem gegebenen Orte, beziehlich den x , y oder z parallel fließt, Φ die elektrostatische Potentialfunction ebendasselbst, t die Zeit. Die Bewegung der Elektrizität soll im Innern eines Leiters S bestimmt werden, dessen spezifischer Widerstand κ sei; den äusseren Raum bezeichnen wir mit S^1 , die Grenzfläche zwischen S und S^1 mit Ω , und die nach aussen gerichtete Normale derselben mit N .

Die Werthe der Functionen U etc. in S^1 bezeichnen wir mit U^1 etc. Wir setzen ferner voraus, dass die etwa vorhandenen Stromcomponenten, welche Bewegungen elektrischer Massen im äusseren Raume entsprechen, u^1 , v^1 , w^1 gegeben seien. Dann sind die Bedingungen des Problems folgende:

A) Im Innern von S und S^1 :

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = -k \frac{d\Phi}{dt}.$$

87

B) Im Innern von S :

$$\begin{aligned} \Delta U - (1-k) \frac{d^2 \Phi}{dx \cdot dt} &= \frac{4\pi}{\kappa} \left[\frac{d\Phi}{dx} + A^2 \frac{dU}{dt} \right] \\ \Delta V - (1-k) \frac{d^2 \Phi}{dy \cdot dt} &= \frac{4\pi}{\kappa} \left[\frac{d\Phi}{dy} + A^2 \frac{dV}{dt} \right] \\ \Delta W - (1-k) \frac{d^2 \Phi}{dz \cdot dt} &= \frac{4\pi}{\kappa} \left[\frac{d\Phi}{dz} + A^2 \frac{dW}{dt} \right]. \end{aligned}$$

C) Im Innern von S^1 :

$$\begin{aligned} \Delta U^1 - (1-k) \frac{d^2 \Phi^1}{dx \cdot dt} &= -4\pi u^1 \\ \Delta V^1 - (1-k) \frac{d^2 \Phi^1}{dy \cdot dt} &= -4\pi v^1 \\ \Delta W^1 - (1-k) \frac{d^2 \Phi^1}{dz \cdot dt} &= -4\pi w^1. \end{aligned}$$

In B und C ist mit dem Zeichen ΔU u. s. w. gemeint die Operation:

$$\Delta U = \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2}.$$

D) Grenzbedingungen an der Fläche Ω :

$$U - U^1 = V - V^1 = W - W^1 = 0$$

$$\frac{dU}{dN} - \frac{dU^1}{dN} = \frac{dV}{dN} - \frac{dV^1}{dN} = \frac{dW}{dN} - \frac{dW^1}{dN} = 0.$$

E) Grenzbedingungen für unendliche Entfernung:

$$U^1 = V^1 = W^1 = \Phi^1 = 0.^1)$$

Die Geschwindigkeiten u , v , w der strömenden Elektrizität im Innern von S werden durch Gleichungen, die ganz von der Form wie C sind, erhalten.

Hier ist eine Analogie hervorzuheben. Die Form der Gleichungen A und B für das Innere von S ist nämlich gleich den Gleichungen für die Bewegungen eines der Reibung unterworfenen Gases, dessen Geschwindigkeiten und Dichtigkeitsänderungen so klein sind, dass man die davon abhängenden Glieder zweiter Dimension vernachlässigen kann. Es vertreten dann in unseren Gleichungen die Componenten des elektrodynamischen Potentials U , V , W die Geschwindigkeitscomponenten des Gases, $k\Phi$ die Vergrößerung der Dichtigkeit des

1) In Hrn. Prof. Kirchhoff's Gleichungen werden meine übergeführt, wenn man setzt $k = -1$ und:

$$\Phi = \frac{1}{4}\Omega, \quad \kappa = \frac{1}{4k}, \quad A^2 = \frac{2}{c^2}.$$



⁸⁸ Gases, Φ/A^2 die Vergrösserung des durch die Dichtigkeit dividirten Druckes. Es ist ferner $\kappa/4\pi A^2$ die Constante für diejenige Reibung, die durch Verschiebung der Schichten entsteht, $\kappa(1-k)/4\pi A^2$ die Constante der Reibung, welche durch Dichtigkeitsänderungen hervorgerufen wird. Diese Vergleichung ist aber direct anwendbar nur so lange, als k und $1-k$ positive Werthe haben. Wenn k negativ wäre, würde ein solches Gas bei Verdichtung kleineren, bei Verdünnung grösseren Druck ausüben müssen, und deshalb labiles Gleichgewicht haben.

Art des Gleichgewichts der Elektrizität. Der Gesamtbetrag P derjenigen Arbeit, welche durch Aenderung der elektrischen Strömung und Vertheilung in S verändert werden kann, lässt sich auf die Form bringen:

$$P = \frac{1}{2} \int \frac{A^2}{4\pi} \sum \left[\left(\frac{dU_p}{dx_p} - \frac{dU_q}{dx_p} \right)^2 \right] + \frac{1}{4\pi} \sum \left[\left(\frac{d\Phi}{dx_p} \right)^2 \right] + \frac{kA^2}{4\pi} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 (dS + dS^1).$$

Darin sollen U_p und U_q irgend eine der Grössen U, V, W , und x_p wie x_q die entsprechenden Coordinaten x, y oder z bedeuten. Wenn $k=0$ oder positiv ist, so ist P die Summe von lauter positiven Quadraten, und also nothwendig positiv. Wenn k negativ ist, kann P aber auch negativ werden, z. B. in dem sehr allgemeinen Falle, wo $\Phi=0$ und U, V, W Differentialquotienten einer und derselben Function der Coordinaten nach x, y, z sind.

Aus den gegebenen Gleichungen folgt ferner, dass der Differentialquotient dP/dt nothwendig negativ ist, wenn keine äusseren Kräfte einwirken. Nämlich es ist:

$$\frac{dP}{dt} = -k \int (u^2 + v^2 + w^2) dS.$$

Daraus folgt, dass wenn P bei negativem Werthe von k einmal negativ werden kann, es zu immer grösseren und grösseren negativen Werthen fortschreiten muss, wenn die Bewegung ohne Wirkung äusserer Kräfte vor sich geht. Auch lässt sich zeigen, dass dP/dt unter diesen Umständen nicht

unter einen gewissen endlichen Werth herabgehen kann, dass also P schliesslich negativ unendlich werden muss.

Das zeigt an, dass wenn k negativ ist, die oben aufgestellten Bewegungsgleichungen der Elektrizität für diese ein labiles Gleichgewicht ergeben¹⁾; dagegen ist das Gleichgewicht stabil, wenn k positiv oder Null ist.

Ueber die Frage, ob die zu unendlich zunehmender Störung ⁸⁹ des Gleichgewichts fortschreitenden Bewegungen durch äussere inducirende Kräfte hervorgerufen werden können, habe ich erst in einem Falle²⁾ entscheiden können, nämlich wenn in einer unendlich ausgedehnten ebenen leitenden Platte durch Annäherung oder Entfernung ihr paralleler unendlich ausgedehnter Elektrizitätsschichten elektrische Bewegungen hervorgerufen werden. Es lässt sich zeigen, dass im Allgemeinen solche Bewegungen entstehen, so oft einer der Differentialquotienten der Geschwindigkeit der inducirenden Platten, nach der Zeit genommen, discontinuirlich wird.

Ich folgere hieraus, dass die für die Elektrizitätsbewegung aufgestellten Gleichungen mit der Annahme eines negativen Werthes von k nicht zulässig sind, während sie bei Annahme des Werthes Null (Maxwell) oder positiven Werthes (Neumann sen.) vollkommen entsprechende Resultate liefern.

Die auch von Herrn Lorberg acceptirte Modification der Weber'schen Annahme, wonach die Elektrizität Masse und Beharrungsvermögen haben soll, ändert an diesen Resultaten nichts Wesentliches.

Fortpflanzungsweise elektrischer Bewegungen in Leitern. Die Fortpflanzung geschieht, theils in Querschwingungen, die, wie schon Herr Prof. Kirchhoff nachgewiesen hat, sich nach Art der geleiteten Wärme verbreiten, wobei

1) Dass bei gewissen Bewegungen im Innern einer leitenden Kugel sich das Gleichgewicht der Elektrizität nach dem Weber'schen Gesetze als labil erweist, hatte vor mir schon Hr. Prof. Kirchhoff bemerkt, wie ich aus mündlichen Mittheilungen von ihm weiss.

2) Nachträglicher Zusatz. Es ist mir seitdem der Beweis auch für die Bewegungen in einer leitenden Kugel gelungen, in der die Elektrizität durch Annäherung und Entfernung eines elektrischen Körpers in Bewegung gesetzt ist.



der Werth der Constante k ohne Einfluss ist. Zum Theil geschieht sie in Längsschwingungen, die einer, nach der Schwingungsdauer und dem Widerstande des Leiters verschiedenen Dämpfung unterworfen sind. Bei grosser Schwingungsdauer oder sehr guter Leitung, wenn die Dämpfung unmerklich wird, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich $1/A\sqrt{k}$. Bei Maxwell's Annahme wird sie unendlich gross, und die Untersuchung zeigt, dass hierbei dann gar keine freie Elektrizität in das Innere des Leiters eintreten kann, wenn sie nicht von Anfang an da war. Nach F. E. Neumann's Annahme, $k=1$, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich $1/A$, welche Grösse nach Weber's Messungen der Geschwindigkeit des Lichtes gleich zu sein scheint.

XXXII.

Ueber die Theorie der Elektrodynamik.

Erste Abhandlung.

Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper.

Aus: Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Bd. LXXII. S. 57–129.

Bei Gelegenheit gewisser Versuche wurde ich veranlasst, ⁵⁷ die Frage zu discutiren, in welcher Weise elektrische Ströme im Inneren eines körperlich ausgedehnten Leiters zu fliessen beginnen. Ich suchte Aufschluss darüber aus der Theorie zu gewinnen. Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Ströme von veränderlicher Intensität für Leiter von drei Dimensionen, welche sich aus Herrn W. Weber's sinnreicher Hypothese über das Wesen der elektrischen Fernwirkungen ergeben, sind von Herrn G. Kirchhoff ¹⁾ entwickelt, und theils von ihm, theils von anderen Mathematikern mit Erfolg zur Erklärung einiger Beobachtungsthaten benutzt worden. Bei meinem Versuche, sie auf eine neue Aufgabe anzuwenden, ergaben sich physikalisch unzulässige Folgerungen, und die nähere Untersuchung überzeugte mich bald, dass der Grund davon in den Principien der Theorie stecke, dass nämlich nach den Folgerungen aus der Weber'schen Theorie das Gleichgewicht der ruhenden Elektrizität in einem leitenden Körper labil sei, und

1) Pogg. Annalen CIL. S. 529.
Helmholtz, wissenschaftl. Abhandlungen.



dass deshalb die darauf gegründete Theorie die Möglichkeit von elektrischen Strömungen anzeige, die zu immer grösser werdenden Werthen der Strömungsintensität und der elektrischen Dichtigkeit fortschritten.

Als ich dagegen versuchte, neue Bewegungsgleichungen zu bilden, bei denen ich statt des Weber'schen Gesetzes für die Induction zweier Stromelemente auf einander das von Herrn F. E. Neumann ¹⁾ (dem Vater) formulirte Gesetz zu Grunde legte, erhielt ich brauchbare Gleichungen, die für die ruhende Elektrizität stabiles Gleichgewicht ergaben.

Bei diesem Widerstreite der Theorien schien es mir rathsam, möglichst wenig den Boden der Thatsachen zu verlassen und in der Theorie unbestimmt zu lassen, was bisher nicht als durch Versuche entschieden angesehen werden konnte. Die Art, wie ich in diese Frage hineingezogen war, liess schon erkennen, dass die Untersuchung selbst eine gewisse Einengung in der Breite der zulässigen Annahmen herbeiführen würde; denn nur diejenigen Annahmen konnten beibehalten werden, die für die ruhende Elektrizität stabiles Gleichgewicht ergeben. Zweitens schien zu hoffen, dass eine solche Theorie erkennen lassen würde, bei welchen Classen von elektrischen Versuchen wir erwarten dürften Erscheinungen zu beobachten, welche auf das wahre Gesetz der Fernwirkung zweier Stromelemente gegen einander einen Rückschluss erlauben würden, und umgekehrt, bei welchen anderen Classen von Versuchen die bestehende Lücke unserer Kenntnisse keinen wesentlichen Einfluss auf ihre theoretische Erklärung und Ableitung habe. Diese Aussicht ist auch in einem gewissen Sinne erfüllt worden, indem sich zeigt, dass die mit den uns gegenwärtig zu Gebote stehenden Beobachtungsmitteln wahrzunehmenden Erscheinungen von jener Lücke in unseren Kenntnissen wahrscheinlich nirgends Kunde geben, und daher auch zunächst nichts zu deren Ausfüllung beitragen werden.

1) Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Schriften der Berliner Akademie der Wissensch. von 1845. — Besonders abgedruckt. Berlin, Reimer 1846. — Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin, Reimer 1848. (Vorgelegt der Berliner Akademie 9. August 1847.)

Die wesentlichste Lücke der Theorie in dem vorliegenden Gebiete bezieht sich auf die durch Aenderung der Stromintensität vorhandener elektrischer Ströme inducirten elektromotorischen Kräfte, sobald die inducirenden Ströme nicht vollständig geschlossen sind. Der charakteristische Unterschied zwischen einem System geschlossener und einem System ungeschlossener Ströme ist, dass in ersterem keine Veränderungen in der Dichtigkeit der freien Elektrizität vorkommen, wohl aber in dem letzteren. Bisher kennen wir nun aus der Erfahrung mit hinreichender Genauigkeit die Gesetze der elektrodynamischen Anziehungen und die damit connexen Gesetze der inducirten elektromotorischen Kräfte nur für geschlossene Ströme, oder höchstens solche Fälle ungeschlossener Ströme (Leydener Flaschen), bei denen die Unterbrechungsstelle einflusslos auf die elektrodynamischen Wirkungen blieb.

Der Standpunkt der reinen Erfahrungsthatfachen ist gewahrt, wenn man nach Ampère's Vorgang die elektrodynamischen Anziehungen darstellt als die Kräfte, welche zwei von den Stromkreisen begrenzte Flächen, mit magnetischen Doppelschichten bedeckt, auf einander ausüben; aber diese Art der Darstellung kann, wie ersichtlich, auf ungeschlossene Ströme nicht ausgedehnt werden.

Indessen liegt es in der Natur der Sache, dass man versuchen musste die Gesamtwirkung zweier Stromkreise auf einander nicht von zwei imaginären, durch sie begrenzten Flächen herzuleiten, sondern sie in die Wirkungen ihrer einzelnen Elemente aufzulösen. Dabei zeigte sich, dass das Gesetz der Elementarwirkungen nicht vollständig und eindeutig aus dem der Gesamtwirkung bestimmt werden konnte. Schon Ampère hatte ein Gesetz für die anziehenden und abstossenden Kräfte gegeben, welche zwei Stromelemente aufeinander ausüben. Hr. Grassmann ¹⁾ zeigte, dass dafür auch andere Kräfte eingeführt werden konnten, ohne das Resultat bei irgend einer Anwendung auf geschlossene Ströme zu verändern. Herr F. E. Neumann (Vater) leitete aus Ampère's Gesetzen für die Kräfte

1) Neue Theorie der Elektrodynamik in Poggendorff's Annalen LXIV. 1845.



den Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente ab, und sprach zuerst das daraus herfliessende Gesetz der Induction aus, im Wesentlichen gestützt auf die Erfahrungsregel, dass die durch Bewegung von Magneten oder Stromleitern inducirten Ströme dieser Bewegung immer entgegenwirken. Wenig später erschien der erste Abschnitt von Herrn W. Weber's „Elektrodynamischen Maassbestimmungen“, in denen er zuerst das unter seinem Namen bekannte Gesetz der elektrischen Fernwirkung aufstellte, welches alle bis dahin bekannten Wirkungen der Elektrizität, die elektrostatischen, elektrodynamischen und inducirenden unter einen Gesichtspunkt zusammenfasste. Das daraus hergeleitete Inductionsgesetz war abweichend von dem Neumann'schen Gesetze; aber es zeigte die darauf folgende Discussion, dass, bei richtiger Anwendung des Weber'schen Gesetzes, es für alle Fälle, wo der inducirende Strom geschlossen ist, genau dieselben Resultate giebt, wie das von Herrn Neumann aufgestellte Gesetz.

Da die von Herrn C. Neumann (Sohn)¹⁾ aufgestellte Hypothese über die elektrischen Fernwirkungen für geringere Strömungsgeschwindigkeiten der elektrischen Massen zum Weber'schen Gesetze führt, so ist auch das daraus folgende Inductionsgesetz dasselbe, so lange nur die ersten Potenzen der Stromstärken zu berücksichtigen sind.

Ein anderes Gesetz der Induction ist dagegen in den Arbeiten von Herrn Cl. Maxwell²⁾, wenn auch in verdeckter Form, enthalten, welches wiederum für geschlossene, aber nicht für ungeschlossene Ströme mit den beiden vorher erwähnten übereinstimmt.

Analytisch genommen beruht das bezeichnete Verhältniss dieser verschiedenen Gesetze darauf, dass die Differenzen zwischen den Werthen, die sie ergeben, alle auf die Form:

$$B \frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma}$$

1) Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 16. Juni 1868.

2) London, Philosophical Transactions 1865. P. I. p. 459.

gebracht werden können, wo r die Entfernung der beiden Stromelemente ds und $d\sigma$, und B eine Constante bezeichnet. Diese Grösse liefert aber ein Integral vom Werthe Null, so oft sie über einen ganzen geschlossenen Stromkreis, sei es s oder σ , integrirt wird. Ihr Einfluss verschwindet also aus dem Resultate, so oft dabei einer der beiden Stromkreise als geschlossen in die Rechnung eingeführt wird. Dasselbe würde übrigens der Fall sein, wenn r auch nur irgend eine Function der Entfernung bedeutete. Im ersten Paragraphen der folgenden Untersuchung ist gezeigt worden, dass letzteres die allgemeinste Annahme ist, welche für das Potential zweier Stromelemente gewählt werden kann, wenn das Potential geschlossener Stromsysteme immer seinen richtigen Werth erhalten soll. Wenn man übrigens noch die Annahme hinzufügt, wie dies in den folgenden Untersuchungen geschehen ist, dass die Wirkung ungeschlossener Ströme in die Ferne keiner anderen Function der Entfernung proportional sei, als die aller anderen elektrischen Wirkungen, so ist unter r in dem obigen Ausdrucke die Entfernung selbst zu verstehen.

Auf die hier gemachten Bemerkungen gestützt, habe ich meiner Untersuchung einen Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente zu Grunde gelegt [§ 1, Gleichung (1)], welcher eine Constante von unbekanntem Werthe (bezeichnet mit k) enthält, und in dieser Form die sämtlichen bisher für dieses Potential aufgestellten Ausdrücke umschliesst. Aus meinem allgemeineren Ausdrucke ergiebt sich nämlich der von Herrn F. E. Neumann gebrauchte, wenn wir setzen $k = 1$, dagegen der von Herrn Cl. Maxwell, wenn wir setzen $k = 0$, und endlich der von Herrn W. Weber und C. Neumann, wenn wir setzen $k = -1$.

Die besondere Form der Herleitung des betreffenden Ausdruckes, wie sie im ersten Paragraphen durchgeführt ist, habe ich gewählt, um hervortreten zu lassen, dass unter Hinzunahme der schon erwähnten Hypothese dieser Ausdruck der allgemeinste ist, der den Bedingungen der Aufgabe und dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft entspricht. Die weitere Annahme, dass auch die elektrodynamischen Wirkungen der ungeschlossenen Stromtheile ihrer Stromintensität einfach pro-



portional sind, widerspricht gewissen Folgerungen der Weber'schen Hypothese, die übrigens noch in keinem Falle durch die Erfahrung unterstützt worden sind. Wie es sich damit aber auch verhalten mag, jedenfalls wird für geringere Stromstärken, die unterhalb einer gewissen Grenze bleiben, meine Annahme zulässig sein, sodass diese ungünstigsten Falls die Anwendbarkeit der von mir gezogenen Folgerungen nur in Bezug auf die zulässigen Stromstärken beschränkt.

Im zweiten Paragraphen sind die Werthe des elektrodynamischen Potentials für Ströme, die continuirlich im Raume verbreitet sind, entwickelt, und zum weiteren Gebrauche umgeformt. Die Art der Umformung und die analytischen Kunstgriffe, welche dabei angewendet sind, sind im Wesentlichen dieselben, welche schon Herr Kirchhoff für denselben Zweck, aber auf einen etwas anders gestalteten Ausdruck angewendet hatte.

Dann sind im dritten Paragraphen die Bewegungsgleichungen der Elektrizität aufgestellt, und auf ein System von Differentialgleichungen gebracht worden. Letztere sind im Innern eines Leiters von gleichmässiger Beschaffenheit dieselben, wie für verschwindend kleine Bewegungen in einem der Reibung unterworfenen Gase, nur mit anderen Grenzbedingungen. Dabei entsprechen aber die elektromotorischen Kräfte den Geschwindigkeiten des Gases, die elektrostatische Potentialfunction den Druck- und Dichtigkeitsänderungen des Gases.

Im vierten Paragraphen folgt dann die Untersuchung, ob durch die aufgestellten Gleichungen der Verlauf der Bewegung eindeutig bestimmt sei. Dies ist der Fall, wenn die Constante k nicht negativ ist. Wenn sie aber negativ ist, ergibt sich, dass der Werth der durch die elektrische Bewegung repräsentirten Arbeit negativ, d. h. kleiner als im Ruhezustande werden kann, was das Zeichen eines labilen Gleichgewichtes der Elektrizität im Ruhezustande ist. In der That wird ganz allgemein für Leiter jeder Form nachgewiesen, dass, wenn die genannte Arbeitsgrösse erst einmal einen negativen Werth hat, die Bewegung, sich selbst überlassen, fortdauernd

anschwillt und zu unendlichen Geschwindigkeiten und Dichtigkeiten der Elektrizität führt.¹⁾

Die Frage konnte noch sein, ob solche Bewegungen, die nach der labilen Seite des elektrischen Gleichgewichtes hin ausschlagen, durch die bekannten äusseren Einwirkungen, welche uns bei wirklichen Versuchen zu Gebote stehen, hervorgerufen werden könnten, falls die Constante k wirklich einen negativen Werth hätte. Es wird im fünften Paragraphen an einem Beispiel, nämlich der Kugel, gezeigt werden, dass dies wirklich der Fall ist. Es muss dies nachweisbar im allgemeinen geschehen, so oft elektrische Bewegungen in einer homogenen leitenden Kugel dadurch hervorgerufen werden, dass man ihr einen elektrisirten Körper nähert, und ihn dann wieder entfernt, gewisse besondere Bewegungsarten des elektrisirten Körpers ausgenommen.

Daraus geht hervor, dass die Annahme eines negativen Werthes für die Constante k , wie sie im Weber'schen Inductionsgesetze gemacht ist, unzulässig ist.

Es kann auffallen, dass in den bisherigen Arbeiten über dieses Thema, welche alle das von Herrn Kirchhoff²⁾ aus dem Weber'schen Inductionsgesetz hergeleitete System von Gleichungen benutzt haben, diese Unzulänglichkeit nicht zum Vorschein gekommen ist. In dieser Beziehung ist zu bemerken, dass Herr Kirchhoff selbst Anwendungen der von ihm gefundenen Gleichungen nur auf unendlich dünne Drähte gemacht hat, und es wird in § 7 gezeigt werden, dass, wenn nur solche Oscillationen der Elektrizität als stattfindend vorausgesetzt werden, gegen deren Wellenlänge der Durchmesser des Drahtes verschwindend klein ist, der Einfluss der Constante k ebenfalls verschwindet, sodass Herrn Kirchhoff's Resultate durch die meinigen nicht beeinträchtigt werden.

1) Aus mündlichen Mittheilungen meines Collegen Kirchhoff weiss ich, dass er schon vor mir gefunden hatte, dass gewisse elektrische Bewegungen in der Kugel nach den von ihm aus der Weber'schen Hypothese abgeleiteten Gleichungen diese Eigenschaft haben.

2) Poggendorff's Annalen CII. S. 529.



Dann hat Herr Jochmann¹⁾ dieselben Gleichungen angewendet zur Bestimmung der Ströme in einem rotirenden und der Einwirkung eines Magneten ausgesetzten Leiter. Solche Ströme sind in einer rotirenden Kugel immer geschlossene, sodass der Einfluss der Constante k verschwindet, und in einem Leiter von anderer Form (Scheibe) hat Herr Jochmann die Einwirkung der theilweise ungeschlossenen inducirten Ströme aufeinander ausser Rechnung gelassen.

Endlich hat Herr Lorberg²⁾ die unter Einwirkung beliebiger periodischer äusserer Kräfte in einer homogenen leitenden Kugel vor sich gehenden periodischen Bewegungen der Elektrizität untersucht, und es ist ihm gelungen, das ziemlich complicirte System der Differentialgleichungen für diesen Fall vollständig zu integrieren. Seine Arbeit zeigt, dass periodische ³⁾ endlich bleibende Bewegungen der Elektrizität in einer Kugel unter Einfluss periodischer Kräfte vor sich gehen können, aber nicht, dass solche Bewegungen durch solche Kräfte aus dem Zustande der Ruhe hervorgerufen werden. Im Gegentheil, die Vergleichung mit den von mir aufgestellten Integralen der Differentialgleichungen zeigt, dass dauernd endliche Bewegungen unter zeitweiliger Einwirkung äusserer Kräfte in der Kugel nur möglich sind, wenn schon vorher eine schwellende Bewegung der Elektrizität bestand, welche durch Einwirkung der äusseren Kräfte in eine abschwelende verwandelt worden ist.

Die von den Herren W. Weber und Lorberg hinzugefügte Annahme, dass die elektrischen Flüssigkeiten träge Masse und Beharrungsvermögen hätten, ändert nichts Wesentliches an diesen Ergebnissen.

Auch die von Herrn W. Weber³⁾ angedeutete Annahme, dass in elektrisch geladenen Theilen des Leiters sich positive und negative Elektrizität mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen könnten, wobei dann die Fernwirkungen seiner Hypothese gemäss nicht einfach der Intensität der Strömung pro-

1) Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. LXIII. S. 158–178; 329–331.

2) Ebenda. Bd. LXXI. S. 53.

3) Elektrodynamische Maassbestimmungen. Heft I. S. 160–164.

portional, sondern auch von dem Producte dieser Intensität und der elektrischen Dichtigkeit abhängig werden würden, beseitigt die Schwierigkeit nicht, da die genannte Annahme nur Glieder höherer Dimensionen hinzufügen würde, die unzulässigen Folgerungen aber schon aus den Gliedern erster Dimension herfließen, und sich daher bei den allerschwächsten Strömen schon geltend machen müssen.

Es scheint mir vielmehr, dass die hier zu Tage kommende Unzulänglichkeit des Weber'schen Gesetzes in der Natur desselben tief begründet ist. Dieses Gesetz fügt sich allerdings insofern dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft ein, als es keinen Kreisprocess zulässt, der Arbeit aus Nichts erzeugt. Aber es widerspricht insofern, als zwei elektrische Theilchen, die sich nach diesem Gesetze bewegen und mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen und also eine unendlich grosse Arbeit leisten können.

Es sei m die Masse, welche sich mit dem elektrischen Theilchen e bewegt; dieses sei der abstossenden Kraft des gleichartigen Theilchens e' unterworfen; die Bewegung geschehe in Richtung der Entfernung r beider Theilchen. Nach dem Weber'schen Gesetze ist:

$$m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{e \cdot e'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \right].$$

Wir multipliciren mit dr/dt und integrieren:

$$\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = C - \frac{e \cdot e'}{r} + \frac{e \cdot e'}{r \cdot c^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

oder:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{C - \frac{e \cdot e'}{r}}{\frac{1}{2} m \cdot c^2 - \frac{e \cdot e'}{r}}.$$

Ist $e \cdot e'/r > \frac{1}{2} m c^2 > C$, so ist $(dr/dt)^2$ positiv und grösser als c^2 , also dr/dt reell. Ist letzteres selbst positiv, so wird r wachsen, bis $e \cdot e'/r = \frac{1}{2} m \cdot c^2$, dann wird dr/dt unendlich gross.

Dasselbe wird geschehen, wenn im Anfange $C > \frac{1}{2} m \cdot c^2 > e \cdot e'/r$, und dr/dt negativ ist.



Dies könnte also schon im einfachsten denkbaren Falle, bei der Bewegung zweier isolirter elektrischer Theilchen geschehen. Die Resultate unseres fünften Paragraphen zeigen, dass dasselbe auch bei wirklich ausführbaren Versuchen müsste vorkommen können, wenn das Weber'sche Gesetz in Wirklichkeit das Grundgesetz der elektrischen Fernwirkungen wäre.¹⁾

Im sechsten Paragraphen folgt dann eine Untersuchung darüber, ob und bei was für Versuchen ein wahrnehmbarer Einfluss der neu eingeführten Constante k etwa erwartet werden könne. Bilden wir die Gleichungen für eine radial von einem Centrum in einem unendlich ausgedehnten leitenden Medium sich ausbreitende elektrische Bewegung, so zeigt sich, dass sich in einem solchen Falle die Elektrizität in longitudinalen Wellen ausbreiten kann, die aber je nach der Schwingungsdauer und dem Leitungswiderstande des Mediums ⁶⁵ einem verschiedenen Grade von Dämpfung unterworfen sind. Ist die Dämpfung gering, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher longitudinalen Wellen nach unserer Bezeichnung gleich $1/A\sqrt{k}$, wobei der Factor $1/A$ nach Herrn Weber's Bezeichnung gleich $c/\sqrt{2}$ ist, welche letztere Grösse, wie schon Herr Kirchhoff gefunden hat, der Lichtgeschwindigkeit ausserordentlich nahe gleich ist und als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in einem sehr gut leitenden Drahte von ihm nachgewiesen wurde.

Nach Herrn Maxwell's Annahme $k=0$ würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen elektrischen Wellen in einem Leiter unendlich gross werden, das heisst, die strömende Elektrizität würde sich wie ein incompressibles

1) Das Potential zweier elektrischer Theilchen ist nach Weber:

$$\frac{e \cdot e'}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right].$$

Fügte man diesem Ausdrucke noch ein Glied hinzu, nämlich:

$$- \frac{1+k}{2} \cdot \frac{e \cdot e'}{c^2} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2},$$

so würde man das in Gleichung (1) § 1 gegebene Potential zweier Stromelemente erhalten, und wenn k positiv, stabiles Gleichgewicht der Elektrizität. Diese Annahme würde aber in den Ausdruck der Kraft ein Glied mit $d^2 r/dt^2$ bringen, und ich wage deshalb keineswegs sie zu empfehlen.

Fluidum verhalten. Es bringt diese Annahme eine sehr beträchtliche Vereinfachung der analytischen Schwierigkeiten hervor, die bei den hierher gehörigen Aufgaben vorliegen, weil bei diesem Werthe von k nie freie Elektrizität in das Innere eines homogenen Leiters eintritt, wenn sie nicht von Anfang an darin vorhanden war. Es wird dabei eine der Grundgleichungen der Aufgabe [(II), beziehlich (IIa.) des § 3] frei von dem Differentialquotienten nach der Zeit, also ihre Integration nach der Zeit unnöthig.

Nach Herrn F. E. Neumann's Annahme $k=1$ wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen gleich der des Lichtes. Wäre k eine nicht sehr grosse positive Zahl, so würde die genannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit doch zu der des Lichtes immer noch in einem endlichen Verhältniss stehen. Nach Fourier's Satz kann man sich jede elektrische Bewegung zerlegt denken in eine Summe superponirter einfacher Oscillationen. So lange nun die Wellenlängen der Longitudinalwellen der mit den gegebenen Beobachtungsmitteln wahrzunehmenden Oscillationen so gross sind, dass die Dimensionen der leitenden Körper dagegen verschwinden, so lange kann auch die Bewegung keinen merklichen Einfluss der Constante k zeigen, und kann, selbst wenn k von Null verschieden ist, mit hinreichender Annäherung gefunden werden, auch wenn wir zur Erleichterung der Rechnung $k=0$ setzen.

Der einzige praktisch vorkommende Fall eines Leiters von sehr erheblicher Erstreckung, wenigstens nach einer Richtung hin, ist der eines langen Drahtes. Ich habe deshalb im siebennten Paragraphen den Ablauf elektrischer Wellen in einem unendlichen Cylinder von kreisförmiger Basis so weit untersucht, als für den vorliegenden Zweck nöthig war. Ist die Wellenlänge sehr gross gegen den Durchmesser, so afficirt die Constante k erst die kleinen Glieder höherer Ordnung. ⁶⁵ Die der ersten Ordnung finden sich übereinstimmend mit Herrn Kirchhoff's Analyse.

Es geht daraus hervor, dass wir uns bei den elektrischen Versuchen der von der Constante k abhängigen Geschwindigkeit der elektrischen Longitudinalwellen gegenüber in einer ähnlichen Lage befinden, wie in der Optik der Lichtgeschwindig-



keit gegenüber. Bei unseren Laboratoriumsversuchen werden wir nicht leicht in die Lage kommen, die eine oder die andere berücksichtigen zu müssen, oder ihren Werth bestimmen zu können, wenn wir nicht Mittel anwenden ganz ungewöhnlich feine Zeitunterschiede wahrnehmbar zu machen, wie dies für die physikalische Messung der Lichtgeschwindigkeit geschehen ist.

In den bisher besprochenen ersten sieben Paragraphen der vorliegenden Arbeit sind die elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen als reine Wirkungen in die Ferne behandelt worden, welche die zwischen liegenden isolirenden Medien nicht afficiren und von ihnen nicht afficirt werden; es war dies, bisher wenigstens, die geläufige Betrachtungsweise der meisten mathematischen Physiker, wenigstens des Continents. Indessen wissen wir jetzt, namentlich durch Faraday's Entdeckungen, dass bei weitem die meisten körperlichen Medien magnetisierbar sind, und dass ein der magnetischen Polarisation ähnlicher Zustand von dielektrischer Polarisation in den elektrischen Isolatoren vorkommt. Die einfachste Theorie des Diamagnetismus wird gewonnen, wenn wir auch den den Weltraum füllenden Lichtäther als magnetisierbar voraussetzen, und ist dies einmal angenommen, so liegt es nicht fern, ihn auch als Diëlektricum, in Faraday's Sinne, zu betrachten. Für die Wirkungen ruhender oder langsam bewegter Elektrizität, ruhender oder langsam bewegter Magnetismen ergibt eine solche Hypothese, welche das den Weltraum füllende Medium selbst als diëlektrisch und magnetisierbar betrachtet, durchaus dieselben Resultate, wie die, welche den Raum als absolut wirkungslos ansieht. Faraday's Theorie freilich, welcher Herr Cl. Maxwell in dem oben citirten Aufsätze ihren mathematischen Ausdruck gegeben hat, geht weiter, indem sie die Fernkräfte ganz leugnet, und dafür nur die durch contiguirlich fortschreitende Polarisation des Mediums fortgepflanzten Wirkungen setzt. Beide Theorien sind einander in gewissem Sinne entgegengesetzt, da nach der von Poisson ausgegangenen Theorie der magnetischen Induction, welcher die Theorie der diëlektrischen Polarisation der Isolatoren ganz entsprechend durchgeführt werden kann, die Fernwirkung durch die Polari-

sation verkleinert, nach Herrn Maxwell's Theorie dagegen ^{er} die Fernwirkung durch die Polarisation des Mediums geradezu ersetzt wird.

Aus Herrn Maxwell's Theorie hat sich nun das merkwürdige Resultat ergeben, dass elektrische Störungen in isolirenden Diëlektricis sich in Transversalwellen verbreiten, für deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich im Luftraume die Grösse $1/A$, das heisst die Lichtgeschwindigkeit, ergibt.

Bei der hervorragenden Bedeutung, welche dieses Resultat für die weitere Entwicklung der Physik haben könnte, und da die Frage über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wirkungen in neuerer Zeit mehrfach angeregt worden ist, schien es mir wichtig auch noch zu untersuchen, was das von mir verallgemeinerte Inductionsgesetz für den Fall ergebe, dass magnetisierbare und diëlektrisch polarisierbare Medien vorhanden seien. Dies ist im achten Paragraphen geschehen.

Diese Untersuchung ergibt Folgendes:

- 1) In diëlektrischen Isolatoren, selbst wenn sie nicht magnetisierbar sind, können sich elektrische Bewegungen in transversal und longitudinal oscillirenden Wellen fortpflanzen.
- 2) Die Geschwindigkeit der transversalen Wellen im Luftraume (beziehlich Weltraume) ergibt sich in der Rechnung als desto geringer, je grösser seine diëlektrische Polarisirungsfähigkeit angenommen wird. Ist diese Null, so ist die genannte Geschwindigkeit unendlich; ist die Polarisirungsfähigkeit sehr gross, so findet man die Geschwindigkeit der transversalen Wellen, wie bei Herrn Maxwell, gleich der Lichtgeschwindigkeit.
- 3) Die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Luftraume findet sich gleich dem Product aus der der transversalen Wellen mit dem Factor $1/\sqrt{k}$ und einer von der magnetischen Beschaffenheit des Luftraumes abhängigen Constanten. In Herrn Maxwell's Theorie ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen elektrischen Wellen als unendlich vorausgesetzt, was dem Werthe $k=0$ entspricht; das heisst, longitudinale Wellen kommen gar nicht zu Stande.
- 4) Die Geschwindigkeit der transversalen und der elektrischen longitudinalen Wellen in anderen Isolatoren wird desto



kleiner, je mehr ihre elektrische und magnetische Polarisirbarkeit die des Luftraumes übertrifft. In den Leitern der Elektrizität pflanzen sich die Wellen unter allmählicher Schwächung durch Absorption fort. Für die Transversalwellen stimmt auch dies mit Herrn Maxwell's Theorie.

5) Wenn der Isolator, in welchem sich transversale elektrische Wellen fortpflanzen, magnetisch polarisierbar ist, und die elektrischen Oscillationen parallel einer durch die Fortpflanzungsrichtung gelegten Ebene geschehen, so finden magnetische transversale Oscillationen senkrecht zu dieser Ebene statt, die mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt werden. Für magnetische longitudinale Oscillationen ergibt sich in solchen Medien unendliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es ergibt sich also aus diesen Untersuchungen, dass die merkwürdige Analogie zwischen den Bewegungen der Elektrizität in einem Dielektricum und denen des Lichtäthers¹⁾ nicht von der besonderen Form von Herrn Maxwell's Hypothesen abhängt, sondern sich in wesentlich ähnlicher Weise auch ergibt, wenn wir die ältere Ansicht über die elektrischen Fernwirkungen beibehalten.

Zu der bisher nicht bestimmbar Constanten k unserer Untersuchungen kommt also noch eine zweite, nämlich die aus den bisherigen Versuchen ebenfalls nicht bestimmbar dielektrische Constante des Luftraumes, oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Transversalwellen im Luftraume.

§ 1. Die allgemeinere Form des Inductionsgesetzes.

Das von Herrn F. E. Neumann aufgestellte Inductionsgesetz für die Ströme, welche durch Bewegung von Magneten

1) Diese Analogie ist noch in einer anderen sehr wichtigen Beziehung vorhanden, welche Herr Maxwell nicht berührt hat. Man hat den mechanischen Zustand des Lichtäthers in durchsichtigen Medien bisher dem der festen elastischen Körper gleich gesetzt. Diese Annahme ergibt aber für die Grenze zweier durchsichtiger Medien andere Grenzbedingungen als man braucht, um die Refraction und Reflexion des Lichtes an dieser Grenze zu erklären, sodass hier in der theoretischen Optik ein ungelöster Widerspruch bestanden hat. Die Theorie der elektrischen Oscillationen

oder von Leitern constanter geschlossener Ströme inducirt werden, ist der unmittelbare Ausdruck der Erfahrung, wonach die durch Bewegung inducirten Ströme dieser Bewegung immer entgegenwirken, und wonach die elektromotorische Gesamtkraft des durch eine gewisse Bewegung erzeugten Integralstromes unabhängig von der Schnelligkeit dieser Bewegung ist. Um den mathematischen Ausdruck hierfür zu geben, mussten die Kräfte, welche zwei durchströmte Leiter, oder ein solcher⁶⁹ und ein Magnet auf einander ausüben, auf die Differentialquotienten einer Kräftefunction, oder wie diese hier genannt wurde, eines Potentials zurückgeführt werden.

Dies war zunächst unmittelbar möglich mittels des Ampère'schen Satzes, wonach die Fernwirkung eines geschlossenen Stromes auf Magnete oder andere Ströme gleich ist derjenigen einer vom Strome begrenzten Fläche, die mit einer magnetischen Doppelschicht bedeckt ist, deren Moment in allen gleich grossen Flächenstücken das gleiche und der Stromstärke proportional ist.

Das Potential eines Stromes auf einen anderen oder auf einen Magneten, im Neumann'schen Sinne, kann definirt werden als die Quantität mechanischer Arbeit, welche durch die elektrodynamischen oder elektromagnetischen Abstossungskräfte geleistet wird, wenn die beiden Ströme, beziehlich Strom und Magnet, bei unveränderter Stromstärke und Magnetisirung in unendliche Entfernung von einander übergeführt werden.

Das von Herrn Neumann formulierte Gesetz sagt dem entsprechend aus, dass die inducirte elektromotorische Kraft, welche in dem Stromleiter s durch Bewegung anderer con-

(Gleichungen (20c) bis (20e) unten) ergibt aber nicht blos im Inneren eines gleichartigen isolirenden Mediums, sondern auch an der Grenze von zwei solchen Medien, dieselben Gesetze der Fortpflanzung, der Refraction und Reflexion der Wellen, wie wir sie beim Lichte thatsächlich finden, vorausgesetzt dass man entweder die magnetische oder die dielektrische Polarisationsfähigkeit beider Medien gleich und letztere sehr gross setzt. Von der bezeichneten Alternative hängt es ab, ob die elektrischen oder magnetischen Oscillationen eines polarisirten Strahles in der Polarisations-ebene geschehen.



stanter Ströme oder Magneten hervorgebracht wird, proportional ist der auf die Zeiteinheit berechneten Zunahme des Potentials jener Ströme und Magnete, genommen auf den von der Stromeinheit durchströmten Leiter s .

Ich habe dann gezeigt, dass, wenigstens bei der Induction durch Bewegung eines unveränderlichen und die Elektrizität nicht leitenden Magneten, aus dem Gesetze der Erhaltung der Kraft folgt, dass die genannte elektromotorische Kraft der genannten Aenderung des Potentials nicht nur proportional, sondern gleich sein muss, wenn man die Einheit des Widerstandes so wählt, dass die Einheit des Stromes in derselben während der Zeiteinheit eine der Einheit der Arbeit äquivalente Wärmemenge erzeugt.

Weitere Erfahrungen zeigten, dass die elektromotorische Kraft des Integralstromes ebenfalls den gleichen Werth hat, wenn der inducirende Strom im unbewegten Leiter geschlossen wird, als wenn der Leiter mit dem schon bestehenden Strome aus unendlicher Ferne her schnell in die betreffende Lage geführt wird. Es folgt daraus, dass es für die inducirende Wirkung einerlei ist, ob die Zunahme des Potentials durch Bewegung oder Verstärkung des Stromes erfolgt.

Die Induction, welche ein Strom auf sich selbst ausübt, und welche in seiner eigenen Bahn den Extracurrent der Schliessung und Oeffnung hervorruft, konnte unter dasselbe Gesetz gebracht werden, und ich selbst habe durch den Versuch nachgewiesen, dass die Stärke auch dieser verhältnissmässig schnell verlaufenden Stromesschwankungen, wenigstens bei vielgewundenen gut leitenden Spiralen, einfach durch das Neumann'sche Gesetz geregelt wird.¹⁾ Für einen einzelnen Stromkreis, dessen Widerstand W ist und in welchem die constante elektromotorische Kraft A wirkt, ist also nach dem Ohm'schen Gesetze:

$$JW = A + 2P \cdot \frac{dJ}{dt},$$

worin P das Potential des von der Stromeinheit durchlaufenen

1) Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten Ströme. Pogg. Annalen LXXXIII, S. 505. — Nr. XXV oben.

Stromkreises auf sich selbst bezogen bedeutet, und zwar so berechnet, dass die Wirkung aller Elemente a des Stromes auf alle diejenigen Elemente b , die noch nicht als a in die Summe aufgenommen sind, addirt wird. So berechnet, ist das Potential das Maass der mechanischen Arbeit, die bei Formveränderungen des Stromes geleistet werden kann. Bei den Inductionswirkungen kommt jedes Stromelement als inducirendes und inducirtes in Betracht, und kehrt deshalb jede Combination aus je zweien zwei Mal wieder. Daher der Factor 2 vor P .

Aus jener Gleichung folgt die Gleichung der Erhaltung der Kraft:

$$J^2 W dt - AJ dt = \frac{d}{dt} [PJ^2] \cdot dt.$$

Nun ist $AJ dt$ die Arbeit (chemische in den hydroelektrischen Ketten), welche während der Zeit dt , um den Strom zu treiben, aufgebraucht ist; $J^2 W dt$ ist der Theil dieser Arbeit, der durch Wärmeentwicklung in der Stromleitung vernichtet ist. Daraus folgt, dass die gleichzeitige Zunahme der Grösse $-PJ^2$ einer Arbeitsleistung entspricht, welche die den Strom treibenden Kräfte verrichtet haben, während der Strom ansteigt. Umgekehrt, wenn die elektromotorische Kraft A beseitigt wird, und der Strom allmählig auf Null sinkt in der übrigens geschlossen bleibenden Leitung, so wird durch den Extracurrent die der Grösse $-PJ^2$ äquivalente Wärmemenge wiedererzeugt.

Es ist hierbei zu bemerken, dass die Grösse P nach Herrn Neumann's Definition nothwendig negativ ist, und daher $-PJ^2$ positiv. Dieser Satz, dass das negativ genommene Gesamtpotential sämmtlicher vorhandener Ströme auf einander dem durch das Bestehen dieser Ströme repräsentirten Arbeitsäquivalent gleich ist, gilt ganz allgemein für beliebige Systeme geschlossener Ströme. Es wird nicht nöthig sein, den Beweis dafür an dieser Stelle auszuführen, da in § 4, Gleichung (5a) der Beweis ganz allgemein (auch ungeschlossene Ströme nach der neuen Inductionsformel umfassend) gegeben werden wird.

Daraus folgt also, wie schon die Herren W. Thomson und Ol. Maxwell hervorgehoben haben, dass die Strömung



der Elektrizität, ähnlich der lebendigen Kraft einer bewegten trägen Masse, einer Arbeit äquivalent ist. Nur tritt der Unterschied ein, dass dies Arbeitsäquivalent der elektrischen Strömung in einer complicirten Weise von den räumlichen Verhältnissen der vorhandenen Ströme abhängt.

Wenn zwei geschlossene Stromkreise s und σ mit den Stromintensitäten i und j vorhanden sind, ist das Potential von der Form:

$$P_{s,s}i^2 + P_{s,\sigma}i.j + P_{\sigma,\sigma}j^2.$$

Darin sind $P_{s,s}$ und $P_{\sigma,\sigma}$ die Potentiale der Kreise s und σ auf sich selbst, $P_{s,\sigma}$ das Potential der beiden aufeinander, alle für die Stromeinheit in s und σ berechnet.

Die Grösse $P_{s,\sigma}i.j$ ist also nach ihrer ursprünglich von Herrn F. E. Neumann ihr gegebenen Bedeutung die Grösse mechanischer Arbeit, welche bei constanten Strömen die beiden Leiter leisten können, wenn sie in unendliche Entfernung von einander gebracht werden. Ihre negativen Differentialquotienten, für irgend eine Lagenänderung genommen, sind die elektrodynamischen Kräfte, welche diese Lagenänderung hervorzu- bringen streben. Dass für geschlossene Ströme diese Kräfte auf ein Potential zurückgeführt werden können, ist durch die Ergebnisse der Versuche erwiesen. Für ungeschlossene Ströme könnte dies zweifelhaft erscheinen.

Eben deshalb ist es wichtig, dass die Grösse $-P_{s,\sigma}i.j$ noch die zweite, von den Bewegungen der Stromleiter unabhängige Bedeutung hat. Sie ist derjenige Theil des vorhandenen Arbeitsäquivalentes, der von dem gleichzeitigen Vorhandensein der beiden Ströme i und j herrührt. Eine Function dieser Art muss offenbar auch für eine einzelne oder zwei neben einander bestehende ungeschlossene Strömungen existiren. Es muss sich der Werth des Arbeitsäquivalentes ihrer elektrischen Bewegung angeben lassen.

Wenn wir mit D_s und D_σ die Elemente der Länge zweier linearen Leiter s und σ bezeichnen, mit (D_s, D_σ) den Winkel, welchen die Richtungen beider mit einander machen, mit r ihre Entfernung, mit i die Intensität des Stromes in s , mit j

die in σ , so ist nach Herrn F. E. Neumann das Potential der beiden Stromelemente aufeinander gleich:

$$-A^2.i.j.\frac{\cos(D_s, D_\sigma)}{r}.D_s.D_\sigma.$$

Darin ist A^2 eine Constante, deren Grösse von dem zur Messung der Stromstärke gebrauchten Maasse abhängt. Herr Neumann hat Ampère's elektrodynamische Stromeinheiten gebraucht, und demzufolge $A^2 = \frac{1}{2}$ gesetzt. Wir wollen im Folgenden elektrostatisches Strommaass gebrauchen, das heisst als Einheit der Stromstärke diejenige ansehen, wobei die gesamte Quantität Elektrizität (algebraisch summiert), welche durch einen Querschnitt des Leiters in der Zeiteinheit fliesst, gleich Eins ist.¹⁾ Als Einheit der Elektrizität bezeichnen wir mit Gauss diejenige, welche ruhend in der Einheit der Entfernung die gleiche ruhende Masse mit der Einheit der Kraft abstösst. Dann ist nach den Messungen der Herren W. Weber und R. Kohlrausch zu setzen:

$$\frac{1}{A} = 310\,740 \cdot 10^9 \frac{\text{Millim.}}{\text{Secdm.}}$$

oder $1/A$ ist eine Geschwindigkeit von 41 928 geographischen Meilen in der Secunde, eine Geschwindigkeit, welche der des Lichtes gleich kommt.

Der obige Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente, sowie auch der von Ampère für die Anziehungskraft zweier Stromelemente gegebene Ausdruck, aus dem jener Werth des Potentials abgeleitet wurde, ist selbst hergeleitet aus und geprüft worden an Beobachtungsthatssachen, welche sich auf geschlossene Ströme beziehen.²⁾ Er ist aber

1) Diese Bestimmung ist analog gemacht derjenigen, welche die Commission der British Association für Bestimmung des Widerstandsmaasses gewählt hat. Herrn W. Weber's mechanische Stromeinheit ist doppelt so gross, weil er verlangt, dass die Einheit der positiven Elektrizität allein genommen, in der Zeiteinheit den Querschnitt durchfliesse.

2) Ströme mit Gleitstellen können immer als geschlossene Ströme von veränderlicher Form betrachtet werden. Entladungsströme von Leydener Flaschen sind bisher auf die elektrodynamischen Wirkungen der Unterbrechungsstelle zwischen den beiden Belegen nicht untersucht worden.



bisher nicht durch die Erfahrung als gültig erwiesen für solche Ströme, welche nicht als ein System überall geschlossener Stromcurven angesehen werden können, deren jede einzelne in ihrer ganzen Länge constante Intensität hat, und in der That ergeben die Theorien der Herren W. Weber und Cl. Maxwell andere abweichende Ausdrücke für das Potential zweier Stromelemente, obgleich ihre Ergebnisse für alle elektrodynamischen und inducirenden Wirkungen geschlossener Ströme durchaus mit der Neumann'schen Theorie zusammenstimmen.

⁷³ Wir haben zunächst zu untersuchen, welches die allgemeinste Form des Ausdrucks für das Potential der einzelnen Stromelemente sei, die in allen den Fällen, wo einer der Ströme geschlossen ist, den gleichen Werth wie die Neumann'sche Formel ergibt. Zu dem Ende stellen wir folgende Ueberlegung an.

Es gehe der Stromleiter s vom Punkte a zum Punkte b , und der in ihm fließende Strom habe die Intensität i , ferner gehe der Stromleiter σ vom Punkte c zum Punkte d , und der Strom in ihm habe die Intensität j . Es sei Q der wirkliche Werth des Potentials dieser beiden Stromleiter und P der nach Neumann's Formel berechnete Werth. Wenn wir nun statt des Stromleiters s einen anderen s_1 mit denselben Endpunkten setzen, und in ihm dieselbe Stromintensität i von a nach b fließen lassen, mögen die entsprechenden Werthe von Q und von P beziehlich mit Q_1 und P_1 bezeichnet werden. Lassen wir nun die beiden Stromleiter s und s_1 zugleich bestehen, aber so, dass die Stromintensität in letzterem gleich $-i$ gemacht wird, und daher sein Potential auf σ den negativen Werth $-Q_1$ erhält, so bilden i in s und $-i$ in s_1 einen geschlossenen Strom, dessen Potential $Q - Q_1$ ist. Dieses ist aber auch durch die Neumann'sche Form vollständig gegeben, also:

$$Q - Q_1 = P - P_1.$$

Setzen wir also:

$$Q = P + F,$$

so ist auch:

$$Q_1 = P_1 + F$$

und die Grösse F überhaupt durchaus unabhängig von der Form, Länge, Lage, Richtung des Stromleiters s zwischen a

und b , wenn nur die Lage dieser seiner Endpunkte unverändert bleibt.

Ebenso ergibt sich, dass F auch unabhängig von der Form des Stromleiters σ zwischen den Punkten c und d ist, wenn nur diese beiden Endpunkte von σ unverändert bleiben.

Die Grösse F hängt also von keinen anderen Raumgrößen ab, als von den Coordinaten der Punkte a, b, c und d . Wenn nun überhaupt die Gesamtwirkungen, welche zwei Ströme auf einander ausüben, als die Summen der gleichartigen Wirkungen aller einzelnen Elemente des einen auf alle einzelnen Elemente des anderen betrachtet werden dürfen, so sind die Ausdrücke Q und F entstanden durch Integrationen über sämtliche Elemente von s und σ , und die Function F , welche nur von den Coordinaten der Endpunkte abhängt, muss also die Form haben: ⁷⁴

$$F = F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c},$$

wo jede dieser rechts stehenden Functionen nur von der Lage der durch die Indices bezeichneten Punkte abhängt.

Die einzige Raumgrösse, welche durch zwei Punkte vollständig bestimmt ist, ist deren Entfernung; also müssen $F_{b,d}$ etc. Functionen der Entfernungen $r_{b,d}$ etc. sein. Von anderen Raumgrößen können sie nicht abhängen, wohl aber können sie noch beliebige Functionen der Intensitäten i und j sein.

Reduciren wir nun die beiden Stromleiter s und σ auf zwei verschwindend kleine Elemente Ds und $D\sigma$, und verstehen wir unter F irgend eine Function der Entfernung r dieser Elemente und der Intensitäten i und j , so wird:

$$F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c} = \frac{d^2 F}{ds \cdot d\sigma} \cdot Ds \cdot D\sigma.$$

Dies ist also die allgemeinste Form der Ergänzung, welche dem Neumann'schen Ausdrucke des Potentials zweier Stromelemente gegeben werden kann, ohne dass dadurch die Gesamtwirkung eines geschlossenen Stromes auf einen beliebig beschaffenen anderen Strom geändert wird.

Ich erlaube mir im Folgenden die Form der Function F durch die schon in der Einleitung erwähnten Hypothesen zu



beschränken, welche sich auf die Analogie der sämtlichen bisher bekannten Fälle elektrischer Wirkungen stützen.

Erstens setze ich die in der Function F zusammengefassten Wirkungen den Intensitäten i und j direct proportional.

Zweitens setze ich voraus, dass die Abhängigkeit von der Entfernung in diesem Falle dieselbe ist, wie bei allen anderen elektrischen Fernwirkungen, die sich von einem Masselemente gleichmässig nach allen Richtungen ausbreiten; dass nämlich die Potentialfunction proportional $1/r$, die Kräfte proportional $1/r^2$ sind.

Nach diesen beiden Hypothesen haben wir zu setzen:

$$\frac{d^2 F}{ds \cdot d\sigma} = B \cdot i \cdot j \cdot \frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma},$$

wo B eine Constante bezeichnet.

Bezeichnen wir die Coordinaten von Ds und $D\sigma$ beziehlich mit x, y, z und ξ, η, ζ , die Projectionen beider Elemente 75 auf die Coordinaten beziehlich mit Dx, Dy, Dz und $D\xi, D\eta, D\zeta$, so ist:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} \cdot Ds &= \frac{x - \xi}{r} \cdot Dx + \frac{y - \eta}{r} \cdot Dy + \frac{z - \zeta}{r} \cdot Dz \\ &= \cos(r, Ds) \cdot Ds, \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{d\sigma} \cdot D\sigma = -\cos(r, D\sigma) \cdot D\sigma,$$

wenn (r, Ds) und $(r, D\sigma)$ die Winkel bezeichnen, welche die vom Punkte (ξ, η, ζ) nach (x, y, z) positiv gerechnete Richtung von r mit den Richtungen der Elemente Ds und $D\sigma$ macht.

Weiter erhalten wir durch nochmalige Differentiirung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma} \cdot Ds \cdot D\sigma &= -\frac{1}{r} (Dx \cdot D\xi + Dy \cdot D\eta + Dz \cdot D\zeta) \\ &\quad + \frac{1}{r} \cos(r, Ds) \cdot \cos(r, D\sigma) Ds \cdot D\sigma, \end{aligned}$$

oder:

$$\frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma} = \frac{1}{r} [\cos(r, Ds) \cdot \cos(r, D\sigma) - \cos(Ds, D\sigma)].$$

Es hat also der oben gegebene Werth von $d^2 F/ds \cdot d\sigma$ wirklich dieselbe Art der Abhängigkeit von r , wie andere elektrische Potentialfunctionen. Dagegen wäre, wie man sich leicht

überzeugt, keine andere Function von r , als allein $F = B \cdot i \cdot j \cdot r$, im Stande, den in den obigen beiden Hypothesen gestellten Anforderungen zu genügen.

Was die Annahme insbesondere betrifft, dass die Function F den Intensitäten i und j direct proportional sei, so werden wir es im Folgenden mit Gleichungen zu thun haben, in denen die Stromintensitäten nur linear vorkommen. Sollte also die Abhängigkeit der Function F von i eine solche sein, dass sie nach Potenzen von i entwickelt höhere Potenzen dieser Grösse eintreten liesse, als die erste, — worauf bisher aber noch keine Erfahrungsthatsache hindeutet, — so würden immerhin unsere Gleichungen noch für Strömungen von einer gewissen geringeren Intensität ihre Geltung behalten.

Dasselbe würde, wie schon erwähnt, der Fall sein, wenn nach einer von Herrn W. Weber aufgestellten Hypothese die Fernwirkungen nicht bloss von der Intensität, sondern auch vom Product der Intensität und der Dichtigkeit der freien Electricität abhängen sollten, eine Hypothese, die übrigens ebenfalls noch durch keine Erfahrungsthatsache unterstützt wird.

In den von uns zu behandelnden Fällen wenigstens würde die Dichtigkeit im Innern der Leiter bei verschwindend kleinen Stromintensitäten immer selbst eine verschwindend kleine Grösse 76 derselben Ordnung sein, und also das Product beider zu vernachlässigen.

Beide Möglichkeiten würden also nur die Breite der Anwendbarkeit unserer Folgerungen für stärkere Ströme beschränken, ohne ihre Richtigkeit für schwache Ströme aufzuheben.

Ich setze jetzt, um den von uns zu brauchenden verallgemeinerten Ausdruck des elektrodynamischen Potentials zweier Elemente auf die zweckmässigste Form zu bringen, die oben gebrauchte Constante:

$$B = -\frac{1-k}{2} \cdot A^2,$$

worin k eine neue Constante bezeichnet. Dann wird das Potential zweier Stromelemente gleich dem Ausdrucke:

$$\left. \begin{aligned} &-\frac{1}{2} A^2 \frac{i \cdot j}{r} [(1+k) \cdot \cos(Ds, D\sigma) \\ &+ (1-k) \cdot \cos(r, Ds) \cdot \cos(r, D\sigma)] Ds \cdot D\sigma \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



§ 2. Umformung der Ausdrücke des Potentials für continuirlich im Raume verbreitete Strömungen.

Ich bezeichne mit u, v, w die Componenten der elektrischen Strömung in Richtung der positiven rechtwinkligen Coordinaten x, y, z im Innern eines continuirlich durchströmten Körpers, und die Werthe des elektrodynamischen Potentials, welches die sämtlichen vorhandenen Ströme in Bezug auf die Stromcomponenten u, v, w im Volumenelemente $dx \cdot dy \cdot dz$ hervorbringen, der Reihe nach mit:

$$\begin{aligned} & -A^2 \cdot U \cdot u \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \\ & -A^2 \cdot V \cdot v \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \\ & -A^2 \cdot W \cdot w \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned}$$

Der Werth von U ist nach dem in Gleichung (1) festgestellten Werthe des Potentials je zweier einzelner Stromelemente:

$$U = \iiint \left\{ \frac{1+k}{2} \cdot \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{x-\xi}{r^3} [u \cdot (x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)] \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (1a)$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Unter dem Integralzeichen sind u, v, w als Functionen von ξ, η, ζ zu nehmen, und die Integration ist entweder über den ganzen Raum, oder wenigstens über alle Stellen des Raumes auszudehnen, in denen elektrische Strömungen oder Bewegungen elektrisirter Massen vorkommen.

Die Werthe von V und W erhalten wir, wenn wir in (1a)

vertauschen: U, u, x, ξ
mit V, v, y, η
oder mit W, w, z, ζ .

Der Werth von U lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$U = \iiint \left\{ \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \left[u \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x \cdot \partial \xi} + v \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x \cdot \partial \eta} + w \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x \cdot \partial \zeta} \right] \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta. \quad (1b)$$

Bezeichnen wir mit Ψ folgenden Ausdruck:

$$\Psi = \iiint \left(u \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi} + v \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta} + w \cdot \frac{\partial r}{\partial \zeta} \right) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \quad (1c)$$

so können wir, vorausgesetzt, dass Ψ einen endlichen Werth hat, die Werthe von U, V und W in folgender Form geben:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \iiint \frac{u}{r} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \\ V &= \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \iiint \frac{v}{r} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \\ W &= \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \iiint \frac{w}{r} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (1d)$$

In dem Ausdrucke (1c) für Ψ sind die Grössen $dr/d\xi, dr/d\eta, dr/d\zeta$ echte Brüche, und Ψ ist jedenfalls endlich, wenn, wie im Folgenden mit Ausnahme von § 7 immer angenommen werden wird, nur endliche elektrische Massen mit endlicher Geschwindigkeit bewegt werden, und diese sich alle in endlicher Entfernung von einander befinden, so dass jenseits eines gewissen Abstandes:

$$u = v = w = 0. \quad (1e)$$

Um die Continuität der Functionen Ψ, U, V und W , sowie ihrer Differentialquotienten festzustellen, beziehlich die Ausnahmefälle zu finden, nehmen wir hierzu noch die Gleichungen, welche die Constanz der Quantität der Elektrizität ausdrücken.

Bezeichnen wir mit q die Potentialfunction der freien Elektrizität, so ist im Innern eines Raumes, in welchem die Elektrizität endliche Dichtigkeit hat, die Abnahme dieser Dichtigkeit für die Zeiteinheit gleich:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\Delta q}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}, \quad (2)$$

worin das Zeichen Δ die Operation bezeichnet:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Und an einer mit Elektrizität belegten Fläche Ω mag N die Normale der Fläche bezeichnen, a, b, c die Winkel, welche ihre Richtung mit den positiven Axenrichtungen der x, y, z bildet, $d\Omega$ das Flächenelement; q, u, v, w mögen Werthe dieser Functionen bezeichnen an der Seite der Fläche, die der



negativen Richtung der Normale zugekehrt ist, dagegen q_1 , u_1 , v_1 und w_1 die Werthe an der Seite der Fläche, wo die positive Richtung der Normale hinzeigt. Dann ist die Zunahme der Elektrizitätsmenge auf der Flächeneinheit gleich:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \left[\frac{d^2 q}{dt \cdot dN} - \frac{d^2 q_1}{dt \cdot dN} \right] \\ & = (u - u_1) \cos a + (v - v_1) \cos b + (w - w_1) \cos c. \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

Wenn man nun mit Benutzung von (2) und (2a) die Gleichung (1c) partiell integrirt, so erhält man:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int r \left(\frac{dq}{dN} - \frac{dq_1}{dN} \right) \cdot d\Omega - \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int r \cdot \Delta q \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \quad (2b)$$

oder auch, wenn man die freie Elektrizität mit E bezeichnet:

$$\Psi = \int r \cdot \frac{dE}{dt} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta. \quad (2c)$$

Die Integrale, welche bei der Bildung von (2b) sich auf die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes beziehen, müssen nach der bei (1c) gemachten Annahme gleich Null werden, und sind deshalb weggelassen.

Durch Benutzung des Green'schen Satzes ergibt sich ferner, dass, wenn dq/dt nirgends discontinuirlich ist, das heisst, wenn nirgends elektromotorische Flächen von veränderlicher Kraft vorkommen, der in (2b) angegebene Werth von Ψ gleich sei:

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dq}{dt} \cdot \Delta r \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta.$$

Auch hier können wieder die auf die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes bezüglichen Integrale weggelassen werden, unter Voraussetzung, dass daselbst dq/dt keine grösseren Glieder enthält, als solche von der Form:

$$B \cdot \frac{\cos \alpha}{r^2},$$

wo α der Winkel ist, den die Linie r mit irgend einer festen geraden Linie bildet, und B eine Constante. Die gemachte Voraussetzung wird immer zutreffen, wenn alle zu berücksichtigenden elektrischen Bewegungen nur in endlicher Entfernung von der untersuchten Stelle vor sich gehen.

Da nun:

$$\Delta r = \frac{2}{r},$$

so folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{r} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \\ \text{und:} \quad \Delta \Psi &= 2 \cdot \frac{dq}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2d)$$

Die Function Ψ ist also analytisch darstellbar als die Potentialfunction einer mit der Dichtigkeit $-(1/2\pi) \cdot dq/dt$ ausgebreiteten Masse. Da nun dq/dt jedenfalls nicht an einer Fläche unendlich wird, so ist Ψ überall stetig, ebenso seine Differentialquotienten $d\Psi/dx$, $d\Psi/dy$, $d\Psi/dz$; beide mit eventueller Ausnahme solcher Punkte, in denen dq/dt unendlich wird.

Demgemäss sind die oben in (1d) gegebenen Werthe von U , V , W jedenfalls überall stetig, mit Ausnahme solcher Punkte, wo die elektrische Strömung unendlich wird.

Es ergibt sich ferner aus (2d) durch Differentiation nach x :

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dq}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r^3} d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta,$$

und durch partielle Integration nach ξ :

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2 q}{dt \cdot d\xi} \cdot \frac{1}{r} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta. \quad (2e)$$

Daraus folgt, dass auch die ersten Differentialquotienten von Ψ nach x , y , z genommen als Potentialfunctionen einer Masse dargestellt werden können, deren Dichtigkeit $-(1/2\pi) \cdot d^2 q/dt \cdot dx$ ist. Diese ist überall endlich, ausgenommen in Punkten, in denen die Geschwindigkeiten unendlich werden. Also müssen mit Ausnahme solcher Punkte auch die zweiten Differentialquotienten von Ψ überall stetig sein.

Nachdem dies festgestellt ist, folgt aus den in (1b) für U , V und W gegebenen Werthen, dass auch U , V , W mit Ausnahme einzelner Punkte unter den angegebenen Voraussetzungen überall, namentlich auch an den Grenzflächen der Leiter, stetige Differentialquotienten haben müssen. Dasselbe



Resultat kann übrigens auch direct aus der Gleichung (1a) mittels ähnlicher Betrachtungen abgeleitet werden, wie sie angewendet werden, um für die Potentialfunctionen von Massen endlicher Dichtigkeit den gleichen Beweis zu führen.

80 Aus der Gleichung (2d) folgt:

$$\Delta \Psi = 2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2f)$$

und demgemäss aus (1d):

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= (1-k) \cdot \frac{d^2 \varphi}{dx \cdot dt} - 4\pi u, \\ \Delta V &= (1-k) \cdot \frac{d^2 \varphi}{dy \cdot dt} - 4\pi v, \\ \Delta W &= (1-k) \cdot \frac{d^2 \varphi}{dz \cdot dt} - 4\pi w. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ferner ergibt sich aus (1d):

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = \frac{1-k}{2} \cdot \Delta \Psi + \int \left(u \cdot \frac{x-x}{r^3} + v \cdot \frac{y-y}{r^3} + w \cdot \frac{z-z}{r^3} \right) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta.$$

Indem man aus (2f) für das erste Glied links den Werth setzt, und das folgende Glied partiell integrirt mit Berücksichtigung von (2) und (2a), so erhält man:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = -k \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3a)$$

Nachdem diese Eigenschaften der Functionen U, V, W festgestellt sind, können wir zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen übergehen.

§ 3. Bewegungsgleichungen der Electricität.

Die elektromotorische Kraft, die im Punkte x, y, z wirkt, ist zusammengesetzt aus derjenigen, die von der elektrostatischen Kraft der freien Electricität herrührt, und deren Grösse durch die negativ genommenen Differentialquotienten der Potentialfunction φ der freien Electricität gegeben wird, und ferner aus der Inductionskraft, die in Richtung der x gleich $-A^2 dU/dt$

ist. Bezeichnen wir also den Widerstand eines prismatischen Leiters von der Einheit der Länge und Einheit des Querschnittes mit α , so sind Folgendes die Bewegungsgleichungen der Electricität: ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \alpha u &= -\frac{d\varphi}{dx} - A^2 \frac{dU}{dt}, \\ \alpha v &= -\frac{d\varphi}{dy} - A^2 \frac{dV}{dt}, \\ \alpha w &= -\frac{d\varphi}{dz} - A^2 \frac{dW}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

Was den Werth der Constanten α betrifft, so ist Herrn W. Weber's elektromagnetische Stromeinheit nach unserer Bezeichnung gleich $1/A$, seine Einheit der elektromotorischen Kraft dagegen gleich A zu setzen, also seine elektromagnetische Widerstandseinheit gleich A^2 . Für Kupferdrähte von 1 mm Länge und 1 mg Gewicht ergeben seine Messungen die Grösse des Widerstandes, aus verschiedenen Drahtproben berechnet, wie folgt:

Jacobi's Draht	2310 000
Kirchhoff's Draht.	1916 000
W. Weber's Draht	1865 000
Mittel	2030 300.

Um für einen Leiter von einem Millimeter Länge und einem Quadratmillimeter Querschnitt den Widerstand zu finden, muss man diese Zahlen durch das specifische Gewicht des Kupfers 8,95 dividiren, und so ergibt sich als dem Mittel jener drei Kupfersorten entsprechend:

$$\alpha = 227\,000 A^2 \frac{\text{Quadratmillim.}}{\text{Secdn.}}$$

oder:

$$\alpha = \frac{1}{425\,370 \cdot 10^{12}} \text{ Secdn.}$$

¹⁾ Um die hier gegebenen Gleichungen auf die Kirchhoff'schen zurückzuführen, setze man:

statt	k	α	φ	A^2
nunmehr	-1	$\frac{2}{4k}$	$\frac{1}{4}\Omega$	$\frac{2}{c^2}$



Der bestleitende Draht von galvanoplastischem Kupfer ergibt:

$$\kappa = \frac{1}{513\,144 \cdot 10^{12}} \text{ Secdn.}$$

In den Gleichungen (3b) sind U , V , W und q zunächst als Integrale gegeben. Um die betreffenden Gleichungen in die Form von Differentialgleichungen zu bringen, brauchen wir nur die genannten vier Grössen als Unbekannte zu benutzen.

Wir haben dabei zu unterscheiden:

1) Theile des Raumes, die wir mit S bezeichnen wollen, welche leitend sind, und auf deren Inneres keine anderen Kräfte wirken, als die elektrostatischen und inducirten elektromotorischen Kräfte. Innerhalb solcher Theile gelten die Gleichungen (3b), welche bei Berücksichtigung von (3) die Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U - (1-k) \frac{d^2 q}{dx \cdot dt} &= \frac{4\pi}{\kappa} \left\{ \frac{dq}{dx} + A^2 \frac{dU}{dt} \right\}, \\ \Delta V - (1-k) \frac{d^2 q}{dy \cdot dt} &= \frac{4\pi}{\kappa} \left\{ \frac{dq}{dy} + A^2 \frac{dV}{dt} \right\}, \\ \Delta W - (1-k) \frac{d^2 q}{dz \cdot dt} &= \frac{4\pi}{\kappa} \left\{ \frac{dq}{dz} + A^2 \frac{dW}{dt} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

2) In anderen Theilen des Raumes können wir die elektrischen Strömungen als vorgeschrieben betrachten. Dies wird zum Beispiel der Fall sein, wo elektrisch geladene Isolatoren bewegt werden, oder elektrische Ströme in Drähten unter Einfluss relativ grosser hydroelektrischer Kräfte circuliren. Auch wenn man Magnete durch ein System elektrischer Ströme ersetzt denkt, sind diese als unveränderlich vorgeschriebene Ströme zu betrachten. Diese Theile des Raumes mögen mit S_1 , die Werthe der Functionen U , V , W , q etc. mit U_1 , V_1 , W_1 , q_1 etc. bezeichnet werden. In ihnen ist:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_1 - (1-k) \frac{d^2 q_1}{dx \cdot dt} &= -4\pi u_1, \\ \Delta V_1 - (1-k) \frac{d^2 q_1}{dy \cdot dt} &= -4\pi v_1, \\ \Delta W_1 - (1-k) \frac{d^2 q_1}{dz \cdot dt} &= -4\pi w_1. \end{aligned} \right\} \quad (Ia)$$

3) Im ganzen Raume S und S_1 gilt die Gleichung (3a):

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = -k \cdot \frac{dq}{dt}, \quad (II)$$

$$\frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} + \frac{dW_1}{dz} = -k \cdot \frac{dq_1}{dt}. \quad (IIa)$$

4) Die Grenzbedingungen an mit Elektrizität belegten Flächen Ω sind:

$$U - U_1 = V - V_1 = W - W_1 = q - q_1 = 0, \quad (III)$$

$$\frac{dU}{dN} - \frac{dU_1}{dN} = \frac{dV}{dN} - \frac{dV_1}{dN} = \frac{dW}{dN} - \frac{dW_1}{dN} = 0. \quad (IV)$$

5) In unendlicher Entfernung von den Leitern und bewegten Massen:

$$U = V = W = q = 0. \quad (V)$$

Wenn aus diesen Gleichungen U , V , W und q bestimmt sind, erhält man u , v , w durch die Gleichungen (3).

Das System der Gleichungen (I) bis (V) vertritt vollständig die Bedingungen der Aufgabe, die ausgesprochen sind durch die Gleichungen (1a), nebst den entsprechenden Gleichungen für v und w , und durch (2), (2a), (3b).

Da das System (I) bis (V) abgeleitet ist aus den Bedingungengleichungen der Aufgabe, so fügt es keine neuen Bedingungen hinzu, die jene nicht enthalten.

Umgekehrt ist nachzuweisen, dass, wenn das System (I) bis (V.) erfüllt ist, jene vier Bedingungengleichungen der Aufgabe erfüllt sind.

Zunächst ist ersichtlich, dass die Gleichungen (3b) unmittelbar aus (I) erhalten werden, wenn man ΔU etc. durch die Geschwindigkeiten ausdrückt, wie in den u , v , w definirenden Gleichungen (3) vorgeschrieben ist.

Die Gleichung (2) erhält man, wenn man die Gleichungen (II) und (IIa) der Operation Δ unterwirft, und die Werthe von $\Delta(dU/dx)$ etc. aus (3) bildet.

Die Gleichung (2a), welche an Flächen Ω gilt, erhält man



durch folgende Betrachtungen. Wenn Ψ eine Function ist, die auf beiden Seiten der Fläche Ω gleiche Werthe hat,

$$\Psi = \Psi_1,$$

aber $d\Psi/dN$ von $d\Psi_1/dN$ verschieden ist, so ist, wie leicht zu sehen:

$$\begin{aligned}\frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dx} &= \frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dN} \cos a, \\ \frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dy} &= \frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dN} \cos b, \\ \frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dz} &= \frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dN} \cos c,\end{aligned}$$

wo a, b, c wie früher die Winkel sind, welche die Normale N mit den Coordinatenaxen macht. Da $dU/dx, dU/dy, dU/dz$ auf beiden Seiten der Fläche Ω nicht verschieden sind, so ist:

$$\begin{aligned}\frac{d^2(U - U_1)}{dx \cdot dy} &= \frac{d}{dN} \left\{ \frac{d(U - U_1)}{dy} \right\} \cos a, \\ \frac{d^2(U - U_1)}{dy \cdot dz} &= \frac{d}{dN} \left\{ \frac{d(U - U_1)}{dz} \right\} \cos b,\end{aligned}$$

und daraus folgt:

$$\frac{d^2(U - U_1)}{dx \cdot dy} \cos b - \frac{d^2(U - U_1)}{dy^2} \cos a = 0.$$

Daraus folgt weiter, dass, wenn man die Werthe von dq/dt und dq_1/dt aus den Gleichungen (II) entnimmt:

$$\begin{aligned}84 \cos a \left[A(U - U_1) + k \frac{d^2(q - q_1)}{dt \cdot dx} \right] + \cos b \left[A(V - V_1) + k \frac{d^2(q - q_1)}{dt \cdot dy} \right] \\ + \cos c \left[A(W - W_1) + k \frac{d^2(q - q_1)}{dt \cdot dz} \right] = 0,\end{aligned}$$

und wenn man hierin für $\Delta U, \Delta U_1$ u. s. w. die Werthe setzt aus (3) und (1a), so folgt die Gleichung (2a).

Endlich ist noch zu erweisen, dass die Functionen U, V, W der Gleichungen (I) bis (V), wenn man vermöge der Gleichungen (3) die Geschwindigkeiten u, v, w einführt, gleich den in (1a) und gemäss (1a) gebildeten Werthen dieser Grössen sind. Dies geht daraus hervor, dass eine Function, die überall endlich und stetig ist, deren Differentialquotient ebenfalls überall endlich und stetig sind, und die in unendlicher Entfernung gleich Null ist, wie dies die Gleichungen (III), (IV),

(V) von U, V, W aussagen, nach den bekannten Sätzen über Potentialfunctionen dargestellt werden kann in der Form:

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta U}{r} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta.$$

Setzt man nun statt ΔU die in (3) und (1a) gegebenen Werthe, so erhält man Gleichungen von der Form (1d), wo der Werth von $d\Psi/dx$ u. s. w. zunächst in der Form von (2e) gegeben ist. Die Transformationen aber des Werthes von Ψ , welche uns von der Form (1c) zu (2e) geführt haben, und welche auf partiellen Integrationen beruhen, kann man alle rückwärts machen, und kommt so auf die Gleichungen (1d) und (1c), die nur eine andere Schreibweise von (1a) sind.

Es ist in diesen Entwicklungen keine Rücksicht genommen auf das Vorkommen elektromotorischer (hydroelektrischer oder thermoelektrischer) Molecularprocesse. Haben diese constante Kraft, so geben sie einfach einen den übrigen Strömen superponirten constanten Strom. Haben sie aber inconstante Kraft, so lassen sich die Umformungen der Function Ψ nicht immer so ausführen, wie oben geschehen.

Die in der Einleitung erwähnte Analogie zwischen den Bewegungen der Elektrizität in einem Leiter und denen eines Gases zeigt sich in folgender Weise. Es sei p der Druck, ρ die Dichtigkeit, u, v, w die Componenten der Strömungsgeschwindigkeit; letztere seien so klein, p und ρ so wenig von den Werthen p_0 und ρ_0 in der ruhenden Flüssigkeit unterschieden, dass die Glieder zweiter Dimension der Grössen $(p - p_0), (\rho - \rho_0)$ vernachlässigt werden können. Dann sind die Bewegungsgleichungen eines reibenden Gases, auf dessen Inneres keine äusseren Kräfte wirken:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} - \mu \Delta u - \nu \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \\ -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} - \mu \Delta v - \nu \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \\ -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} - \mu \Delta w - \nu \frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \\ -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.\end{aligned}$$



Man setze:

$$\text{statt } u, v, w, \quad \frac{p-p_0}{q_0}, \quad \frac{q-q_0}{q_0}, \quad \mu, \quad v$$

$$U, V, W, \quad \frac{1}{A^2} \varphi, \quad k \varphi, \quad \frac{x}{4\pi A^2}, \quad \frac{1-k}{k} \cdot \frac{x}{4\pi A^2},$$

so erhalten wir die für das Innere eines Leiters von constantem Leitungsvermögen geltenden Bewegungsgleichungen der Elektrizität. Dabei ergibt sich:

$$\frac{p-p_0}{q-q_0} = \frac{1}{k A^2}.$$

Dem kann ein Gas von stabilem Gleichgewicht nur entsprechen, wenn k positiv ist. Ist $k=0$, wie in Herrn Maxwell's Annahme, so würde die Elektrizität sich wie eine incompressible Flüssigkeit bewegen. Auch müssen die beiden Reibungscoefficienten μ und ν positiven Werth haben, wenn die Vergleichung statthaft sein soll, was bei ν nur der Fall ist, wenn $1 > k > 0$ ist.

Die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit entsprechen aber hierbei, wie man sieht, nicht den Geschwindigkeiten der Elektrizität, sondern den elektromotorischen Kräften. Die Geschwindigkeiten der Elektrizität wären vielmehr den durch die Reibung hervorgebrachten Bewegungskräften proportional.

Die Grenzbedingungen freilich sind abweichend; indessen giebt eine solche Vergleichung immerhin einen Anhalt für die Vorstellung.

§ 4. Eindeutigkeit der Lösungen und Stabilität des Gleichgewichts.

Bezeichnen wir mit Φ denjenigen Theil der Arbeit, welcher durch Abänderung der elektrischen Strömungen in den Leitern S verändert wird, so besteht derselbe aus zwei Theilen Φ_0 , welcher den elektrodynamischen, und Φ_1 , welcher den elektrostatischen Wirkungen entspricht. Die ganze Grösse dieser Arbeit ist:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1, \quad (4)$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} A^2 \int (Uu + Vv + Ww) dx dy dz, \quad (4a)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \left(\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN} \right) d\Omega - \frac{1}{8\pi} \int \varphi \cdot A \varphi \cdot dx dy dz. \quad (4b)$$

Durch partielle Integration ist dieser letztere Werth, wie bekannt, auf die Form zu bringen:

$$\Phi_1 = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz, \quad (4c)$$

und ist also nothwendig positiv.

In dem Werthe von Φ_0 ersetzen wir zunächst u, v, w durch die Werthe dieser Grössen in (3) und (1a) und erhalten:

$$\Phi_0 = - \frac{A^2}{8\pi} \int \left\{ U \cdot \Delta U + V \cdot \Delta V + W \cdot \Delta W \right. \\ \left. - (1-k) \left[U \frac{d^2 \varphi}{dx \cdot dx} + V \frac{d^2 \varphi}{dy \cdot dy} + W \frac{d^2 \varphi}{dz \cdot dz} \right] \right\} dx dy dz.$$

Wenn man hier partiell integrirt mit Berücksichtigung der Gleichungen (III), (IV) und (V), so erhält man:

$$\Phi_0 = \frac{A^2}{8\pi} \int \left\{ \sum \left[\left(\frac{dU_m}{dx_n} \right)^2 \right] + \frac{1-k}{k} \left[\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} \right]^2 \right\} dx dy dz.$$

Hierin bezeichnet U_m irgend eine von den Grössen U, V, W , und x_n irgend eine von den Coordinaten x, y, z .

Wenn man berücksichtigt, wie sich aus (III) und (IV) durch partielle Integration ergibt, dass:

$$\int \left(\frac{dU}{dy} \cdot \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dx} \cdot \frac{dV}{dy} \right) dx dy dz = 0,$$

so verwandelt sich der letzte Ausdruck in:

$$\Phi_0 = \frac{A^2}{8\pi} \int \left\{ \sum \left[\left(\frac{dU_m}{dx_n} - \frac{dU_n}{dx_m} \right)^2 \right] + k \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} dx dy dz. \quad (4d)$$

Durch die in (4c) und (4d) gegebenen Werthe von Φ_1 und Φ_0 ergibt sich, dass beide nothwendig positiv sind, wenn k einen positiven Werth hat, oder gleich Null ist. Wenn aber k einen negativen Werth hat, so kann das Arbeitsäquivalent der elektrischen Bewegung negativ, also kleiner als im Gleichgewichtszustande werden. Es wäre alsdann der Zustand der Ruhe nicht ein Minimum der Arbeit, also das Gleichgewicht in diesem Zustande nicht stabil.

Der Unterschied im Verlauf der Störungen des Gleichgewichtszustandes, je nachdem k positiv oder negativ ist, zeigt sich noch bestimmter, wenn wir die Gleichung der lebendigen



Kraft für die elektrischen Bewegungen aufstellen. Dieselbe wird uns auch dazu dienen, nachzuweisen, dass durch die Gleichungen (I) bis (V), wenn gleichzeitig der Anfangszustand gegeben ist, die elektrische Bewegung eindeutig bestimmt ist, vorausgesetzt, dass $k \geq 0$.

Wenn nämlich zwei von einander verschiedene Lösungen der Gleichungen (I) bis (V) existierten, und in der einen:

$$U', V', W', \varphi',$$

in der anderen:

$$U'', V'', W'', \varphi''$$

die Werthe der in den Gleichungen vorkommenden Functionen wären, so würden auch ihre Unterschiede:

$$\left. \begin{aligned} U' - U'' &= U, & V' - V'' &= V, \\ W' - W'' &= W, & \varphi' - \varphi'' &= \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4e)$$

gesetzt, den Gleichungen (I) bis (V) genügen, wenn in diesen $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ gesetzt würde.

Um nun zu ermitteln, unter welchen Bedingungen eine solche Verschiedenheit der Lösungen möglich wäre, wollen wir den Werth von $d\Phi/dt$ mittels der Gleichungen (I) bis (V) bestimmen, wobei wir festsetzen, dass:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad (5)$$

sei, also keine Bewegung der Elektrizität ausserhalb der Leiter S vorkomme.

Aus den in § 1 aufgestellten Principien ist schon klar, dass der Werth sein muss:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int \kappa (u^2 + v^2 + w^2) dS, \quad (5a)$$

da, wenn äussere inducirende Kräfte fehlen, die in der Leitung erzeugte Wärme, deren mechanisches Aequivalent rechts in Gleichung (5a) steht, nur erzeugt werden kann auf Kosten des Arbeitsäquivalents der elektrischen Vertheilung und Bewegung. In der That lässt sich die Gleichung (5a) verificiren aus den Gleichungen (3), (I) bis (V), (4) bis (4d) und (5). Am

einfachsten geschieht dies mittels der mit (I) identischen Gleichungen (3b).

$$\begin{aligned} \int \kappa (u^2 + v^2 + w^2) dS &= - \int \left(u \cdot \frac{dq}{dx} + v \cdot \frac{dq}{dy} + w \cdot \frac{dq}{dz} \right) dS \\ &\quad - A^2 \int \left(u \cdot \frac{dU}{dt} + v \cdot \frac{dV}{dt} + w \cdot \frac{dW}{dt} \right) dS. \end{aligned} \quad 83$$

Aus der in (1b) vorgeschriebenen Bildungsweise von U und der in (4a) vorgeschriebenen von Φ_0 ist leicht ersichtlich, dass:

$$\begin{aligned} A^2 \int \left(u \cdot \frac{dU}{dt} + v \cdot \frac{dV}{dt} + w \cdot \frac{dW}{dt} \right) dS \\ = A^2 \int \left(U \cdot \frac{du}{dt} + V \cdot \frac{dv}{dt} + W \cdot \frac{dw}{dt} \right) dS = \frac{d\Phi_2}{dt}. \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich aus (4c) leicht:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{dq}{dx} \cdot \frac{d^2q}{dx \cdot dt} + \frac{dq}{dy} \cdot \frac{d^2q}{dy \cdot dt} + \frac{dq}{dz} \cdot \frac{d^2q}{dz \cdot dt} \right] dx \cdot dy \cdot dz \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \varphi \cdot \left(\frac{d^2q}{dN \cdot dt} - \frac{d^2q_1}{dN \cdot dt} \right) d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int \varphi \cdot A \left(\frac{dq}{dt} \right) dx \cdot dy \cdot dz, \end{aligned}$$

und wenn wir hierin die Grössen u, v, w mittels der Gleichungen (2) und (2a) einführen, und partiell integrieren, ergibt sich:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \int \left(u \cdot \frac{dq}{dx} + v \cdot \frac{dq}{dy} + w \cdot \frac{dq}{dz} \right) dx \cdot dy \cdot dz.$$

Da ausserhalb S nach Gleichung (5a) u, v, w überall Null sind, ist es einerlei, ob wir die Integration in diesem letzten Ausdruck nur auf den Raum S , oder auf den ganzen unendlichen Raum ausdehnen.

Diese Umformungen zeigen, dass die Gleichungen (I) bis (V) der Forderung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft, wie sie in (5a) aufgestellt ist, entsprechen.

Die Gleichung (5a) zeigt, dass die Grösse $d\Phi/dt$ nur einen negativen Werth haben kann, da das rechts stehende Integral eine Summe von lauter Quadraten ist, und κ , der Widerstand, jedenfalls positiv.

A. Wenn $k \geq 0$ ist, ist Φ nothwendig immer positiv, und kann nicht kleiner als Null werden. Ist es also in irgend einem Augenblicke der Bewegung gleich Null, so muss es von da ab fortdauernd gleich Null sein. Damit Φ aber Null sei,



müssen alle die positiven Quadrate, deren Summe es ist, gleich Null sein, also entsprechend (4), (4c) und (4d):

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dy} = \frac{dq}{dz} = 0,$$

was, da q im Unendlichen gleich Null sein muss, nur geschehen kann, wenn im ganzen Raume $q = 0$, d. h. wenn gar keine freie Elektrizität existirt.

89 Ferner, wenn wir (4d) gleich Null setzen, ergibt sich:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dz} = \frac{dW}{dy}, \quad \frac{dW}{dx} = \frac{dU}{dz},$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Durch Differenzieren erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\Delta U = \Delta V = \Delta W = 0,$$

und da ausserdem U, V, W und ihre ersten Differentialquotienten nirgends unstetig sein sollen, so folgt, dass im ganzen Raume:

$$U = V = W = 0.$$

Daraus folgt also entsprechend den Gleichungen (4e), dass, wenn im Anfang der Bewegung:

$$U' - U'' = V' - V'' = W' - W'' = q' - q'' = 0,$$

diese Differenzen fortdauernd gleich Null bleiben.

Wenn also $k \geq 0$, und wenn für den Anfang der Bewegung die Werthe von U, V, W gegeben sind, so bestimmen die Gleichungen (I) bis (V) in Verbindung mit (3) die Bewegung der Elektrizität vollständig.

Es folgt ferner daraus, dass, wenn wir für die Zeit $t < \tau$ und $t > \tau$ zwei verschiedene analytische Ausdrücke der Bewegung haben, diese eine einzige continuirliche Bewegung darstellen, wenn zur Zeit $t = \tau$ beide Ausdrucksformen überall im Raume gleiche Werthe von q, U, V und W ergeben.

B. Wenn k negativ ist, so kann Φ negativ werden, und die Bewegung der Elektrizität kommt nicht nothwendig zum Stillstand, wenn Φ gleich Null wird. Aber auch in diesem Falle muss, wenn äussere Einwirkungen fehlen, $d\Phi/dt$ nach Gleichung (5a) nothwendig immer einen negativen Werth

haben, und wenn also Φ einmal negativ geworden ist, so muss es zu immer grösseren und grösseren negativen Werthen fortschreiten. Damit Φ einen endlichen negativen Werth F haben könne, muss nothwendig der mit dem negativen k multiplicirte Theil seines Werthes:

$$\int \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 dx \cdot dy \cdot dz = \frac{1}{k^2} \int \left[\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} \right]^2 dx \cdot dy \cdot dz$$

grösser als $F/(-k)$ sein und bleiben.

Wenn q überall endlich ist und bleibt, so muss dq/dt in endlichen Theilen des Raumes einen endlichen Werth haben, damit das vorstehende Integral einen endlichen Werth haben 90 könne. Wenn die leitenden Körper S endlich begrenzt sind, nimmt dq/dt in unendlicher Entfernung ab wie $1/r^2$, und die von unendlich entfernten Theilen des Raumes herrührenden Theile des Integrals werden also jedenfalls unendlich klein. Damit aber dq/dt endliche Werthe in endlicher Raumerstreckung habe, müssen endliche Geschwindigkeiten der Elektrizität in endlichen Räumen, oder unendlich grosse Geschwindigkeiten in unendlich kleinen Räumen bestehen. Denn es ist:

$$\frac{dq}{dt} = \int \left[u \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{r} \right) + v \cdot \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r} \right) + w \cdot \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta.$$

Wenn aber die Geschwindigkeiten fortdauernd in endlichen Räumen endliche Werthe haben, muss $d\Phi/dt$ nach Gleichung (5a) fortdauernd einen endlichen negativen Werth haben, und Φ also fortdauernd wachsen bis zu unendlicher negativer Grösse.

Daraus folgt, dass, wenn nicht $dq/dt, u, v$ oder w von vornherein an einzelnen Stellen unendliche Werthe haben, sie jedenfalls mit der Zeit zu unendlichen Werthen anwachsen müssen. Ist also bei negativem k die Grösse Φ nur einmal negativ geworden, so wird die entsprechende elektrische Bewegung sich fortwährend an Intensität steigern, wenn sie nicht von Anfang an in einzelnen Stellen unendlich ist.

Das bedeutet also, dass bei negativen Werthen von k das Gleichgewicht der ruhenden Elektrizität in leitenden Körpern ein labiles Gleichgewicht ist.

Bewegungen, welche Φ negativ machen, sind in sehr mannigfacher Weise möglich. Man braucht nur anzunehmen, dass



in irgend einem Augenblick keine freie Elektrizität existire, also $q = 0$ sei, und dass ausserdem sei:

$$U = \frac{d\chi}{dx}, \quad V = \frac{d\chi}{dy}, \quad W = \frac{d\chi}{dz}.$$

Dann fallen alle positiven Theile von Φ weg, und nur der negative bleibt übrig. Die Function χ ist hierbei nur den Bedingungen unterworfen, dass nach den Gleichungen (Ia) bis (V) und (5a) ausserhalb S :

$$\Delta\Delta\chi = 0,$$

und an den Grenzen von S die ersten und zweiten Differentialquotienten von χ continuirlich und in unendlicher Entfernung gleich Null seien. Es kann χ innerhalb S vollkommen beliebig gewählt werden, und ist dann für den Aussenraum bis auf eine willkürliche Constante bestimmt.

Unter diesen Umständen ist nun auch die für positive Werthe von k gezogene Folgerung nicht zulässig, dass die Gleichungen (I) bis (V) die Bewegung der Elektrizität eindeutig bestimmen, wenn die Werthe U, V, W, q für die Anfangszeit gegeben sind. Es kann sich nämlich zu der gegebenen Anfangsbewegung eine verschwindend kleine labile Bewegung gesellen, welche nach Verlauf einer gewissen Zeit endliche Werthe erhält.

Wohl aber kann auch für negative Werthe von k gezeigt werden, dass, wenn in zwei verschiedenen Integralen der Gleichungen (I) bis (V) sich die Grössen U, V, W, q zu Anfang und zu Ende einer gewissen Zeit unendlich wenig von einander unterscheiden, die beiden Integrale auch während der ganzen Dauer dieser Zeit sich unendlich wenig von einander unterscheiden.

Denn für ihre Differenz gilt Gleichung (5a), und ist $d\Phi/dt$ fortdauernd negativ. Wenn also für ihre Differenz der Werth von Φ zu Anfang und zu Ende der betreffenden Zeitperiode verschwindend klein ist, so muss er während der ganzen Dauer dieser Periode verschwindend klein gewesen sein.

Wenn also auf einen elektrischen Leiter während einer gewissen endlichen Zeit inducirende Kräfte einwirken, und ein Integral der entsprechenden Bewegung gefunden wird, welches

die Werthe von U, V, W, q für $t = -\infty$ und $t = +\infty$, gleich Null ergibt, so giebt es keine zweite Lösung, die denselben Bedingungen genügt.

§ 5. Radiale Strömungen der Elektrizität in einer leitenden Kugel.

Die Erörterungen des vorigen Paragraphen zeigen nur die Möglichkeit, dass unendlich fortschreitende Störungen des elektrischen Gleichgewichts eintreten könnten, wenn k einen negativen Werth hat; aber sie lassen noch dem Zweifel Raum, ob solche Störungen auch wirklich zu Stande kommen können bei denjenigen Methoden, elektrische Bewegungen hervorzurufen, welche uns bei Versuchen zu Gebote stehen.

Um zu zeigen, dass dies der Fall sei, wird es genügen, ein möglichst einfaches Beispiel zu behandeln, und ich wähle dazu radiale Bewegungen der Elektrizität in einer Kugel, die hervorgebracht werden durch Verengerung und Erweiterung einer äusseren concentrischen, mit Elektrizität geladenen Kugelschale. In dieser Form wird zwar das wirkliche Experiment nicht leicht ausgeführt werden. Aber es ist zu bemerken, dass ein unserem Falle entsprechendes, von den Richtungen der Radialen unabhängiges Glied jedesmal vorkommen wird, wenn man die durch Annäherung eines elektrisirten Körpers in der Kugel hervorgerufene Bewegung nach Kugelfunctionen entwickelt. Denkt man sich nämlich alle die elektrischen Bewegungen in der Kugel superponirt (und ungestörte Superposition verschiedener Bewegungen ist möglich), welche dadurch entstehen würden, dass der gleiche elektrisirte Körper von allen möglichen verschiedenen Richtungen aus zur Kugel in gleicher Weise bewegt wird, so wird die Summe aller dieser Bewegungen auf den von uns zu behandelnden Fall führen, und es ist klar, dass die durch solche Superposition entstandene Gesamtbewegung kein mit der Zeit in das Unendliche wachsendes Glied enthalten kann, wenn nicht die ursprüngliche einzelne Bewegung ein solches enthält. Stellt sich also heraus, dass unser vorausgesetzter einfachster Fall eine labile Störung des elektrischen Gleichgewichts ergibt, so folgt, dass diese auch stattfindet in jedem Falle, wo eine elektrische Masse



in gleicher Weise der leitenden Kugel genähert und von ihr entfernt worden ist, wie wir dies von der von uns angenommenen concentrischen elektrischen Schicht voraussetzen.

Wir setzen:

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \cos \beta, \quad z = \rho \cos \gamma.$$

Der Radius der leitenden Kugel sei $\mathfrak{R}$; über eine grössere concentrische Kugelfläche von dem veränderlichen Radius R sei die elektrische Masse M gleichmässig ausgebreitet. Die elektrischen Strömungen sollen nur in Richtung des Radius geschehen; wir werden also setzen können:

$$u = \frac{dz}{dx}, \quad v = \frac{dz}{dy}, \quad w = \frac{dz}{dz}. \quad (6)$$

Da alles um den Mittelpunkt der Kugel symmetrisch ist, werden auch die Werthe der elektromotorischen Kräfte U , V , W von der Form sein:

$$U = \frac{d\Pi}{dx}, \quad V = \frac{d\Pi}{dy}, \quad W = \frac{d\Pi}{dz}. \quad (6a)$$

und q wird wie χ und Π nur eine Function von ρ und t sein.

Da die Herren W. Weber und Lorberg die Annahme gemacht haben, die Elektricität könne auch träge Masse haben, so will ich diese Annahme in diesem Paragraphen ebenfalls recipiren, und den linken Seiten der Bewegungsgleichungen (3b) noch entsprechende Glieder hinzusetzen; die träge Masse der elektrostatischen elektrischen Einheit werde mit μ bezeichnet. Die Gleichungen (3b) verschmelzen dann in eine Integralgleichung für das Innere der Kugel:

$$\mu \frac{d\chi}{dt} + \chi\chi = -q - A^2 \frac{d\Pi}{dt}, \quad (6b)$$

und die Gleichungen (3) und (3a), die im ganzen Raume gelten, werden:

$$A\Pi = (1-k) \frac{dq}{dt} - 4\pi\chi, \quad (6c)$$

$$A\Pi = -k \frac{dq}{dt}. \quad (6d)$$

Die Gleichungen (6b) und (6c) treten hier an Stelle von je drei Gleichungen, die durch Differentiirung nach x , y und z

aus ihnen entstehen. Es ist beim Uebergang von den letzteren zu ihren beiden Integralgleichungen nicht nöthig, eine willkürliche Function der Zeit hinzuzufügen, da eine solche schon in Π und χ steckt, deren Differentialquotienten nach x , y , z genommen wir allein brauchen.

Die letzten beiden Gleichungen ergeben noch, wenn sie von einander subtrahirt werden:

$$\frac{dq}{dt} = 4\pi\chi. \quad (6e)$$

Die Gleichung (6d) ergibt ferner, dass Π durch den ganzen Raum gleich der Potentialfunction der Dichtigkeit $(k/4\pi) \cdot dq/dt$ sei. Dadurch ist Π ebenfalls bis auf eine willkürliche Function der Zeit, die keinen Einfluss auf die Lösung unserer Aufgabe hat, vollständig bestimmt, wenn q gefunden ist.

Zur Bestimmung von q im Innern der Kugel ergibt sich zunächst aus der Gleichung (6b), wenn wir an ihr die Operation A ausführen, und die Werthe von Π und χ aus (6d) und (6e) substituiren:

$$A \left\{ \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\chi}{4\pi} \cdot \frac{dq}{dt} + q \right\} = A^2 k \cdot \frac{d^2 q}{dt^2}. \quad (7)$$

Im äusseren Raume dagegen ist der Werth von q nur abhängig von den Gesammtmengen der Elektricität $\mathfrak{M}$ auf der Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$, M auf der vom Radius R .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für } \mathfrak{R} < \rho < R \text{ ist } q = \frac{\mathfrak{M}}{\rho} + \frac{M}{R} \text{ und } \frac{dq}{dt} = -\frac{M}{R^2} \cdot \frac{dR}{dt}; \\ \text{für } \rho > R \text{ ist } q = \frac{\mathfrak{M} + M}{\rho} \text{ und } \frac{dq}{dt} = 0. \end{array} \right\} \quad (7a)$$

Was die Grenzbedingungen (III), (IV), (V) betrifft, so sind diese erfüllt, wenn Π die Potentialfunction von $(k/4\pi) \cdot dq/dt$, und letztere Grösse überall continuirlich ist. Also die einzige Grenzbedingung ist, dass die aus der Gleichung (7) gefundene Function q für $\rho = \mathfrak{R}$ sei:

$$q = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \frac{M}{R}. \quad (7b)$$

Ich bemerke hier gleich, dass für den Fall $k = 0$, wenn ²⁴



wir mit e die Dichtigkeit der Elektrizität bezeichnen, die Gleichung (7) ergibt:

$$\mu \frac{d^2 e}{dt^2} + \kappa \frac{de}{dt} + 4\pi e = 0,$$

woraus folgt:

$$e = B_0 e^{-n_0 t} + B_1 e^{-n_1 t},$$

wo n_0 und n_1 die beiden Wurzeln der Gleichung sind:

$$\mu n^2 - \kappa n + 4\pi = 0.$$

Soll vor Einwirkung der äusseren Kräfte Ruhe bestehen, so muss $B_0 = B_1 = 0$ sein, folglich für alle Zeit $e = de/dt = 0$. Folglich tritt gar keine Bewegung ein, wenn $k = 0$.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze über den Werth des Arbeitsäquivalents der elektrischen Bewegung und die continuirliche Abnahme dieses Werthes bei einer durch äussere Kräfte nicht influirten Bewegung ändern sich in unserem Falle nur in so weit, als zu dem elektrostatischen und elektrodynamischen Arbeitsäquivalent noch die lebendige Kraft der bewegten Elektrizität hinzukommt, deren Grösse ist:

$$\Phi_2 = \frac{\mu}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2) dS = \frac{\mu}{32 \cdot \pi^2} \int \left(\frac{d^2 q}{dt \cdot dq} \right)^2 dS,$$

die Integration über die ganze Kugel ausgedehnt.

Wenn man die Gleichung (7) mit dq/dt multiplicirt, über die ganze Ausdehnung der Kugel integrirt, und diese Integration partiell ausführt, beachtend, dass in diesem Falle an der Oberfläche der Kugel $dq/dt = 0$ ist, so können wir der Bezeichnung des vorigen Paragraphen entsprechend setzen:

$$\frac{1}{2} A^2 k \int \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 dS + \frac{\mu}{8\pi} \int \left(\frac{d^2 q}{dt \cdot dq} \right)^2 dS + \frac{1}{2} \int \left(\frac{dq}{dq} \right)^2 dS = 4\pi \cdot \Phi,$$

und erhalten dann das Resultat:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\kappa}{16\pi^2} \int \left(\frac{d^2 q}{dt \cdot dq} \right)^2 dS.$$

Es entspricht diese Gleichung (5a) des vorigen Paragraphen, mit der durch Einführung der Grösse μ bedingten Modification, und es lassen sich dieselben Schlüsse betreffs der Stabilität des Gleichgewichts, der Eindeutigkeit der Lösungen, der Continuität zweier Bewegungen von verschiedenem analytischen Ausdrücke daraus ableiten.

Ablauf elektrischer Radialströme in der Kugel ohne äussere⁹⁵ Einwirkung.

Um später die vollständigen Integrale der durch eine gegebene äussere Einwirkung hervorgerufenen Ströme finden zu können, müssen wir zuerst das vollständige Integral der Gleichung (7) mit der Grenzbedingung (7b) suchen für den Fall, dass:

$$\frac{dR}{dt} = 0. \quad (8)$$

Setzen wir innerhalb der Kugel:

$$q = \frac{\Re}{\Re} + \frac{M}{R} + \frac{B_0}{\rho} \cdot e^{n a t} \cdot \sin \left(\frac{\pi a \rho}{\Re} \right), \quad (8a)$$

so ist Gleichung (7b) erfüllt, wenn a eine ganze Zahl ist, und Gleichung (7), wenn:

$$-\frac{\pi^2 a^2}{\Re^2} \left\{ \frac{\mu}{4\pi} \cdot n_a^2 + \frac{\kappa}{4\pi} \cdot n_a + 1 \right\} = A^2 \cdot k \cdot n_a^2, \quad (8b)$$

oder:

$$\frac{1}{n_a} = -\frac{\kappa}{8\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{8\pi} \right)^2 - \frac{\mu}{4\pi} - k \left(\frac{A \Re}{\pi a} \right)^2}. \quad (8c)$$

Die beiden hier für $1/n_a$ gegebenen Werthe sind auch die Werthe für die Grösse:

$$n_a \left[\frac{\mu}{4\pi} + k \left(\frac{A \Re}{\pi a} \right)^2 \right].$$

Ich bemerke dabei, dass ein complexer Werth für a die Bedingungen nicht erfüllen kann, da ein solcher einen complexen auch für n ergeben würde, und dann nicht für jeden Werth von t die Gleichung (7b) zu erfüllen wäre.

Da κ und μ positive Grössen bedeuten, so hat n_a Werthe, deren reeller Theil jedenfalls negativ ist, und einer zum Gleichgewichtszustand zurückkehrenden Bewegung entspricht, wenn k positiv ist.

Ist k dagegen negativ, so wird n ebenfalls für sehr grosse Werthe von a negative reelle Theile haben. Wenn aber $\Re$ gross genug ist, dass für niedrige Werthe von a :

$$-k \left(\frac{A \Re}{\pi a} \right)^2 > \frac{\mu}{4\pi},$$

so wird von den beiden entsprechenden Werthen von n_a einer



positiv werden, und einer das Gleichgewicht zerstörenden Bewegung entsprechen. Wenn $\mu = 0$ ist, wird dies für jeden Werth von q der Fall sein. Hat μ einen gewissen positiven Werth, so wird jedenfalls $\Re$ so gross gedacht werden können, dass es der vorstehenden Ungleichung Genüge leistet. Da
 95 übrigens die Constante μ so klein ist, dass ihr Einfluss durch keine bisher angestellten Versuche sich entdecken liess, so wird es sich dabei gar nicht um erhebliche Werthe von $\Re$ handeln. Hätte μ Werthe, welche neben der Grösse $A^2 \Re^2$ in Betracht kämen, wenn $\Re$ auch nur mit den Dimensionen gewöhnlich gebrauchter Drahtspiralen vergleichbar wäre, so müssten solche Spiralen, die zwei neben einander laufende Fäden enthalten, einen merklichen Extracurrent auch dann geben, wenn beide Fäden in entgegengesetzter Richtung durchströmt werden. In diesem Falle würde es das durch die Grösse μ gemessene Beharrungsvermögen der Elektrizität fast allein sein, was den Extracurrent in Gang erhielte. Jedenfalls ist aber der so entstehende Extracurrent verschwindend klein gegen denjenigen, welcher bei gleich gerichteter Durchströmung solcher Doppelspiralen entsteht, und dessen Grösse von dem mit A^2 multiplicirten Potential der ganzen Spirale, auf sich selbst genommen, abhängt.

Aus der Gleichung (8a) können wir ein vollständiges Integral der Gleichungen (7) und (7b) ableiten in der Form:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\Re}{\Re} + \frac{M}{R} + q_0, \\ q_0 &= \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{\infty} \left\{ [B_a \cdot e^{n_a t} + \mathfrak{B}_a \cdot e^{n_a t}] \sin \left(\frac{\pi a q}{\Re} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Darin sind n_a und n_a die beiden Werthe, welche Gleichung (8b) für den betreffenden Werth von a ergibt, B_a und $\mathfrak{B}_a$ aber sind willkürliche Coefficienten, welche so bestimmt werden können, dass q und dq/dt für $t=0$ willkürlich gegebene Functionen von q im Innern der Kugel werden.

Wenn q und dq/dt für die Zeit $t=0$ gegeben sind, so ist in unserem Falle, wo

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dz} = \frac{dW}{dy}, \quad \frac{dW}{dx} = \frac{dU}{dz},$$

der Anfangszustand vollständig bestimmt, da dann die Potentiale Φ_0 und Φ_1 nach (4c) und (4d) vollständig bestimmt sind, ebenso wie das von der lebendigen Kraft der elektrischen Bewegung abhängige Glied Φ_2 des Potentials, welches noch hinzukommt, wenn μ von Null verschieden ist. Es können also zwei Bewegungen, für welche q und dq/dt überall im Anfang gleich ist, sich, wenigstens wenn k positiv ist, überhaupt nicht von einander unterscheiden. Ebensowenig können sich bei negativem Werthe von k zwei Bewegungen von einander unterscheiden, bei denen zur Zeit $t=0$ die Functionen q und dq/dt ⁹⁷ überall die gleichen Werthe haben, und die beide nach Ablauf unendlicher Zeit:

$$\left. \begin{aligned} q &= \text{Const.}, \\ \frac{dq}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

machen. Zu dem Ende müssen in der Reihe (9) nur die Glieder bewahrt bleiben, welche hinreichend grosse Werthe von a enthalten, dass n_a und n_a nur negative reelle Theile enthalten.

Die Fälle, wo n_a oder n_a positive reelle Theile enthalten, werden wir erst am Schlusse dieses Paragraphen besonders besprechen.

Elektrische Radialströme bei bestimmter äusserer Erregungsweise.

Es sei λ irgend eine Constante, für welche wir nur, um die Behandlung von Ausnahmefällen zu umgehen, festsetzen, dass $\sin(\lambda \Re)$ nicht gleich Null sein soll. Es seien ferner r_0 und r_1 die Werthe von n aus der Gleichung:

$$-\lambda^2 \left\{ \frac{\mu}{4\pi} n^2 + \frac{\alpha}{4\pi} n + 1 \right\} = A^2 \cdot k \cdot n^2, \quad (9a)$$

und es werde gesetzt:

$$\frac{M}{R} = \frac{C}{r_1 - r_0} [v_1 \cdot e^{r_1 t} - v_0 \cdot e^{r_0 t}] + C_0, \quad (9b)$$

so ist innerhalb der Kugel:

$$q = \frac{C}{r_1 - r_0} \cdot \frac{\Re \cdot \sin(\lambda q)}{q \cdot \sin(\lambda \Re)} [v_1 \cdot e^{r_1 t} - v_0 \cdot e^{r_0 t}] + \frac{\Re}{\Re} + q_0 + C_0, \quad (9c)$$



wo unter q_0 die in der Gleichung (9) enthaltene unendliche Reihe zu verstehen ist.

Dass q ein Integral der Gleichung (7) mit Einhaltung der Grenzbedingung (7b) ist, geht aus dem Bisherigen hervor. Die Coefficienten B_a und $\mathfrak{B}_a$ der Reihe q_0 werden wir nun nach Fourier's Methode so bestimmen können, das für die Zeit $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} q &= C + \frac{\Re}{\Re} + C_0, \\ \frac{dq}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9d)$$

wird. Zu dem Ende muss sein:

$$\left. \begin{aligned} C \left[1 - \frac{\Re \cdot \sin(iq)}{q \cdot \sin(i\Re)} \right] &= \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{\infty} \left\{ (B_a + \mathfrak{B}_a) \sin\left(\frac{\pi a q}{\Re}\right) \right\}, \\ 0 &= n_a \cdot B_a + n_a \cdot \mathfrak{B}_a, \end{aligned} \right\} \quad (9e)$$

was nach bekannten Rechnungsmethoden ergibt:

$$\left. \begin{aligned} B_a + \mathfrak{B}_a &= (-1)^{a+1} \cdot \frac{2\Re^2 k^2}{\pi a (i^2 \Re^2 - \pi^2 a^2)}, \\ B_a &= \frac{-n_a}{n_a - n_a} [B_a + \mathfrak{B}_a], \\ \mathfrak{B}_a &= \frac{n_a}{n_a - n_a} [B_a + \mathfrak{B}_a]. \end{aligned} \right\} \quad (9f)$$

Da die Coefficienten B und $\mathfrak{B}$ für hohe Werthe von a abnehmen, wie a^{-3} , so convergirt die Reihe für q_0 und hat einen eindeutigen Werth für $t = 0$ und alle positiven Werthe von t , wenn nicht eine von den Grössen n_a oder n_a positiv unendlich wird, was geschieht, wenn gleichzeitig $\mu = 0$ und k negativ ist. Ebenso sind die Reihen für dq/dt und für dq/dq , wenn $t \geq 0$, und die Reihe für $d^2 q/dt \cdot dq$, wenn ausserdem auch $\mu = 0$, convergent und eindeutig.

Unter diesen Umständen können wir den Grössen q und dq/dt die ihnen in den Gleichungen (9d) für die Zeit $t = 0$ und den ganzen Raum beigelegten Werthe auch für alle negativen Werthe von t beilegen, ohne die Continuität der Bewegung zu stören.

Das entscheidende Kennzeichen für die Möglichkeit, zwei Bewegungen von verschiedenem analytischen Ausdrucke in einem gegebenen Zeitpunkte aneinander zu schliessen, ist, wie oben gezeigt wurde, dass die den gesamten Arbeitswerth ihrer Differenz messende Function Φ gleich Null sei. Das ist aber im vorliegenden Beispiele der Fall, da die in dem Werthe von Φ vorkommenden Werthe von dq/dq , dq/dt , und eventualiter auch $d^2 q/dt \cdot dq$, für $t = 0$ einerseits durch convergente Reihen gegeben sind, deren Werthe andererseits mit den Werthen der Gleichungen (9d) zusammenfallen.

Dadurch ist also diejenige elektrische Bewegung in der Kugel gegeben, welche nach vorausgehendem Gleichgewichtszustande der Elektrizität erregt wird, wenn von der Zeit $t = 0$ ab die äussere Kugelschicht eine solche Bewegung ausführt, dass die elektrische Potentialfunction in dem Raume zwischen den beiden Kugeln die durch Gleichung (9b) gegebene Function der Zeit wird.

So oft entweder μ von Null verschieden ist, oder k positiv ist, wird es immer möglich sein, für λ einen so hohen Werth zu nehmen, dass v_0 und v_1 reelle negative Grössen sind, und also die Bewegung der äusseren Kugel eine vorübergehende ist. Dies werde im Folgenden immer angenommen.

Da man übrigens beliebig viele verschiedene Bewegungen derselben Art, die zu verschiedener Zeit anfangen und verschiedene Intensität haben, in der Kugel superponiren kann, so erhalten wir die Lösung einer allgemeineren Form der letztbehandelten Aufgabe, wenn wir mit $\mathfrak{F}$ die elektrische Potentialfunction bezeichnen, die Bezeichnung q_t dagegen für die in den Gleichungen (9) bis (9f) gegebene Function q der Zeit beibehalten und setzen:

$$\mathfrak{F} = \int_{-\infty}^{\infty} q_{(-\tau)} \cdot \psi_{\tau} \cdot d\tau + \int_{-\infty}^t q_{(t-\tau)} \cdot \psi_{\tau} \cdot d\tau. \quad (10)$$

Darin ist unter ψ_{τ} eine willkürliche Function von τ verstanden, von der wir nur voraussetzen, dass das Integral $\int \psi_{\tau} \cdot d\tau$, zwischen welchen Grenzen man es auch nehme, immer endlich sei. Unter $q_{(-\infty)}$ dagegen ist der constante Werth verstanden.



den in den Gleichungen (9) bis (9f) das q_i für negative Werthe von t hat:

$$q_{(-\infty)} = C + \frac{M}{R} + C_0.$$

Zu bemerken ist, dass für den Raum zwischen beiden Kugelflächen bei der in Gleichung (10) angezeigten Integration immer nur die Werthe von q zu nehmen sind, die diesem Zwischenraume entsprechen, auch wenn R zeitweilig kleiner gewesen wäre, als das entsprechende ρ .

Der Werth von q ist eine Summe von Theilen, die theils wie $(M/\rho + C_0)$ in aller Zeit unverändert bleiben, und deshalb in der Gleichung (10) nur eine Constante zum Werthe von $\tilde{\gamma}$ hinzufügen, theils aber auch veränderlich sind.

Zunächst wollen wir berechnen, welcher Art von Bewegung der äusseren Kugelfläche die in Gleichung (10) dargestellte Bewegung der Elektrizität angehört, und dazu den Werth von $\tilde{\gamma}$ für den Raum zwischen R und R berechnen. Der veränderliche Theil von q ist hier das Glied $M/R - C_0$, was wir als Function der Zeit mit ε_t bezeichnen wollen. Es hat aber für negative Werthe von $t - \tau$ die Grösse $\varepsilon_{t-\tau}$ den constanten Werth C , und für positive Werthe von $t - \tau$ ist entsprechend der Gleichung (9b):

$$\varepsilon_{t-\tau} = \frac{C}{v_1 - v_0} [v_1 \cdot e^{v_1 t} - v_0 \cdot e^{v_0 t}]. \quad (10a)$$

Diese Grösse genügt, wie leicht zu sehen, der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} - (v_0 + v_1) \frac{dq}{dt} + v_0 v_1 q = 0. \quad (10b)$$

Bezeichnen wir nun den entsprechenden veränderlichen Theil von $\tilde{\gamma}$ mit E , indem wir setzen:

$$E = C \int_t^\infty \psi_\tau \cdot d\tau + \int_{-\infty}^t \varepsilon_{t-\tau} \cdot \psi_\tau \cdot d\tau. \quad (10c)$$

Der oben gemachten Annahme gemäss sind v_0 und v_1 negative reelle Grössen, und ψ_τ immer endlich, folglich ist für $\tau = -\infty$:

$$\varepsilon_{t-\tau} \cdot \psi_\tau = 0,$$

ferner ist für $t = \tau$:

$$\varepsilon_{t-\tau} = C \text{ und } \frac{d\varepsilon_{t-\tau}}{dt} = 0.$$

Wenn wir mit Berücksichtigung davon die Differentialquotienten von E bilden, so erhalten wir:

$$\frac{dE}{dt} = \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon_{t-\tau}}{dt} \cdot \psi_\tau \cdot d\tau,$$

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = \int_{-\infty}^t \frac{d^2 \varepsilon_{t-\tau}}{dt^2} \cdot \psi_\tau \cdot d\tau,$$

und indem wir diese Ausdrücke und (10c) entsprechend der Gleichung (10b) zusammenfügen, erhalten wir:

$$\frac{d^2 E}{dt^2} - (v_0 + v_1) \frac{dE}{dt} + v_0 \cdot v_1 E = v_0 \cdot v_1 \cdot C \cdot \int_t^\infty \psi_\tau \cdot d\tau. \quad (10d)$$

Wenn wir also E als Function der Zeit als gegeben ansehen, so können wir mittels der letzten Gleichung daraus den entsprechenden Werth von ψ herleiten. Eine nochmalige Differentiation nach t giebt diesen Werth nämlich unmittelbar. Die Function E ist nur der Bedingung unterworfen, dass sie selbst, sowie dE/dt und $d^2 E/dt^2$ zu jeder Zeit endlich sein müssen, weil sie sonst nicht in Gestalt der oben gegebenen Integrale unzweideutig auszudrücken sind. Nun ist für die in Gleichung (10) dargestellte Bewegung:

$$\frac{M}{R} - C_0 = E.$$

Folglich ist auch M/R eine bis auf die Endlichkeit der ersten beiden Differentialquotienten willkürliche Function der Zeit, und die Gleichung (10) stellt die elektrische Bewegung in der leitenden Kugel für jede beliebige Function der äusseren elektrischen Schicht mit continuirlich sich ändernder Geschwindigkeit dar.

Ausgeschlossen sind jedoch, wie mehrfach hervorgehoben ist, die Fälle, wo $\mu = 0$ und k negativ ist, in denen die Reihe (9c) nicht convergirt.



101 Ist k positiv, so ist die Lösung die einzige mögliche, wie aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen und den im Anfange des jetzigen dazu gegebenen Zusätzen hervorgeht. Wird von einer gewissen Zeit ab E constant, und also $\psi_t = 0$, so bleiben nur Bewegungen übrig, die die Zeit mit Factoren von negativen reellen Theilen in den Exponenten haben, und daher zum Gleichgewichtszustand zurückkehren.

Wenn dagegen k negativ ist, und μ einen positiven endlichen Werth hat, werden bei gewisser Grösse der leitenden Kugel eine Anzahl Exponenten n_a , welche den unterhalb einer gewissen Grenze liegenden Werthen von a entsprechen, positiv sein, und schwellende Bewegungen darstellen, die nie zum Gleichgewicht zurückkehren. Das im Ausdruck für φ Gleichung (9) vorkommende Glied:

$$B_a e^{n_a t}$$

giebt laut Gleichung (10) im Werthe von $\mathfrak{F}$ ein Glied:

$$B_a e^{n_a t} \int_{t_0}^{t_1} \psi_t \cdot e^{-n_a t} \cdot dt,$$

wenn t_0 und t_1 die Grenzen bezeichnen, zwischen denen ψ_t von Null verschieden ist. Da ψ_t innerhalb dieser Grenzen vollkommen willkürlich ist, wenn sein Integral nur endlich bleibt, so wird das Integral in dem letztgenannten Ausdruck nicht nothwendig gleich Null sein, und diese Glieder, welche schwellende Bewegungen darstellen, werden im Werthe von $\mathfrak{F}$ für Zeiten $t > t_1$ nicht zu fehlen brauchen.

Es könnte nun fraglich erscheinen, ob der gefundene Werth von $\mathfrak{F}$, der solche Glieder mit ansteigender Bewegung enthält, deren Summe mit S bezeichnet werde, das einzige Integral der Bewegungsgleichungen ist, welches den vorgeschriebenen Werthen von M/R und einem anfänglichen Zustande elektrischen Gleichgewichtes entspricht, und ob nicht ein zweites davon verschiedenes Integral existire, welches keine Glieder von schwellender Bewegung enthielte.

Um diesen Zweifel zu beseitigen, beachte man, dass

$$\mathfrak{F} - S$$

ebenfalls ein Integral derselben Bewegungsgleichungen ist, welches denselben Werthen von M/R entspricht, wie $\mathfrak{F}$, welches für $t = -\infty$ wie für $t = +\infty$ sich einem endlichen constanten Werthe nähert. Dieses letztere Integral hat aber einen anderen Anfangszustand. Nämlich vor der Einwirkung der Aenderungen von R besteht schon die durch die Summe S dargestellte schwellende Bewegung. Sie wird durch die äussere Einwirkung ¹⁰² vernichtet, und geht in eine abschwelende über, die den Gleichgewichtszustand erreicht. Im vorigen Paragraphen ist aber gezeigt worden, dass nur eine einzige solche Bewegung existiren kann, die unter Einwirkung gegebener äusserer Kräfte von einem gegebenen Zustande unendlich kleiner Bewegung zu einem Endzustand unendlich kleiner Bewegung führt. Also ist das Integral $\mathfrak{F} - S$ das einzige dieser Art, und es giebt kein anderes, welches bei den gegebenen Kräften aus anfanglichem in endliches Gleichgewicht führt.

Untersuchung des Falles, wo k negativ und $\mu = 0$. In diesem Falle giebt es keinen Werth von a oder λ , für welchen nicht einer der beiden Werthe von n_a oder r reell positiv würde. Um daher eine dauernd endlich bleibende Bewegung zu erhalten, muss man die anfängliche Bewegung durch die schwellenden, die endliche durch die abschwelenden Glieder zusammensetzen.

Wir wollen mit n_a und mit r_e die positiven Werthe, mit n_a und r_i die negativen der Exponenten bezeichnen. Die Gleichungen (8b) und (9a) werden dabei:

$$\left. \begin{aligned} A^2 k n_a^2 + \frac{\pi^2 a^2}{9\pi^2} \left\{ \frac{\kappa}{4\pi} n_a + 1 \right\} &= 0, \\ A^2 k r^2 + \lambda^2 \left\{ \frac{\kappa}{4\pi} r + 1 \right\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Man setze:

1) für negative Werthe von t :

$$\frac{M}{R} = C \cdot r_i \cdot e^{r_i t} + C \cdot r_e, \quad (11a)$$

und für $\Re < \varrho < R$:

$$\varphi = \frac{M}{R} + \frac{\Re}{\varrho}, \quad (11b)$$



für $\varrho < \Re$:

$$\varphi = C \frac{\Re \cdot \sin(\lambda \varrho)}{\varrho \cdot \sin(\lambda \Re)} \cdot v_1 \cdot e^{v_1 t} + C \cdot v_0 + \frac{\Re}{\varrho} \left\{ B_a \cdot e^{n_a t} \cdot \sin\left(\frac{\pi a \varrho}{\Re}\right) \right\}; \quad (11c)$$

2) für positive Werthe von t :

$$\frac{M}{R} = C \cdot v_1 + C \cdot v_0 \cdot e^{v_1 t}, \quad (11d)$$

und für $\Re < \varrho < R$:

$$\varphi = \frac{\Re}{\varrho} + \frac{M}{R}, \quad (11b)$$

dagegen für $\varrho < R$:

$$\varphi = C \cdot v_1 + C \cdot v_0 \cdot \frac{\Re \cdot \sin(\lambda \varrho)}{\varrho \cdot \sin(\lambda \Re)} \cdot e^{v_1 t} + \frac{\Re}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} \sum \left\{ B_a \cdot e^{n_a t} \cdot \sin\left(\frac{\pi a \varrho}{\Re}\right) \right\}. \quad (11e)$$

103 Die Continuität der Bewegung zur Zeit $t = 0$ ist hergestellt, wenn die Werthe von φ und $d\varphi/dt$ übereinstimmen, also:

$$0 = C(v_0 - v_1) \left[1 - \frac{\Re \cdot \sin(\lambda \varrho)}{\varrho \cdot \sin(\lambda \Re)} \right] + \frac{1}{\varrho} \sum \left\{ (B_a + \Re_a) \cdot \sin\left(\frac{\pi a \varrho}{\Re}\right) \right\} \quad (11f)$$

und:

$$n_a B_a + n_a \Re_a = 0.$$

Es sind dies Gleichungen von der Form wie (9e) und finden ebenso ihre Lösung.

So ist zunächst eine immer endlich bleibende Lösung für die eine in den Gleichungen (11a) und (11d) vorgeschriebene Bewegung der äusseren elektrischen Schicht gewonnen. Aus dieser kann man wieder andere Lösungen für andere äussere Kräfte durch Superposition zusammensetzen.

Es ist ebenso, wie in dem allgemeineren Falle, wo μ nicht gleich Null war, der Beweis zu führen, dass durch solche Superposition jede beliebige Art der Bewegung der äusseren Kugel, bei der die Geschwindigkeit sich nur nicht sprunghaft ändert, darzustellen ist.

Die durch eine solche Lösung dargestellte Bewegung ist eine, die immer endlich bleibt, und zur Zeit $t = -\infty$ wie zur

Zeit $t = +\infty$ unendlich wenig vom Gleichgewichtszustande verschieden ist.

Da es für dieselben gegebenen Werthe von M/R keine zweite derselben Art geben kann, so folgt, dass im allgemeinen, wenn vor Beginn der Bewegung der Masse M Ruhe geherrscht hat, eine dauernd fortschreitende Störung des Gleichgewichtes in der Kugel erregt werden muss.

Ausnahmen hiervon können bei diesen und den vorigen Fällen, wo $k < 0 < \mu$, nur bei bestimmten Bewegungsweisen eintreten, wenn nämlich für jedes positive n_a :

$$\int \psi_r \cdot e^{-n_a \tau} d\tau = 0, \quad (11g)$$

dies Integral zwischen den Grenzen genommen, zwischen welchen ψ_r von Null unterschieden ist.

Für eine endliche Anzahl von Werthen von a lässt sich diese Gleichung offenbar erfüllen, wenn man über entsprechend viele Constanten in dem Ausdrucke für ψ verfügen kann.

Da aber ψ_r ganz willkürlich zwischen beliebigen Grenzen bestimmt werden kann, und nur der Bedingung unterworfen ist, dass

$$\int \psi_r \cdot d\tau,$$

zwischen beliebigen Grenzen genommen, immer endlich bleibt, 104 so werden die Gleichungen (11g) im allgemeinen nicht erfüllt sein.

§ 6. Ueber den Einfluss der Constante k bei ausführbaren Versuchen.

Die Grössen U , V , W in den Bewegungsgleichungen (3b) hängen nach ihrer in (1d) gegebenen Definition von der Constante k ab. Um die Theile derselben, die davon abhängen, zu trennen von denjenigen, die von k unabhängig sind, führen wir die Bezeichnung ein:

$$\left. \begin{aligned} U &= U + \frac{k}{2} \frac{d\Psi}{dx}, \\ V &= V + \frac{k}{2} \frac{d\Psi}{dy}, \\ W &= W + \frac{k}{2} \frac{d\Psi}{dz}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



wo unter Ψ die in der Gleichung (2c) definirte Function zu verstehen ist, und nach (2d):

$$\Delta \Psi = 2 \frac{dq}{dt}. \quad (2d)$$

Ψ selbst, wie seine ersten und zweiten Differentialcoefficienten, nach den Coordinaten genommen, sind an den mit Elektrizität belegten Flächen continuirlich.

Wir setzen ferner in diesem Paragraphen voraus, dass die Abhängigkeit der behandelten Functionen von der Zeit nur dadurch gegeben sei, dass sie alle den Factor e^{nt} enthalten. Wenn n complex oder imaginär ist, sind schliesslich in der Lösung nur die reellen Theile der betreffenden Functionen zu nehmen. Das System der Gleichung (I) bis (V) wird unter diesen Umständen:

Im Innern der Leiter:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{4\pi} \cdot \Delta u - A^2 \cdot n \cdot u &= \left(1 + \frac{xn}{4\pi}\right) \cdot \frac{dq}{dx} - A^2 \cdot \frac{kn}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dx}, \\ \frac{x}{4\pi} \cdot \Delta \mathfrak{B} - A^2 \cdot n \cdot \mathfrak{B} &= \left(1 + \frac{xn}{4\pi}\right) \cdot \frac{dq}{dy} - A^2 \cdot \frac{kn}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dy}, \\ \frac{x}{4\pi} \cdot \Delta \mathfrak{B} - A^2 \cdot n \cdot \mathfrak{B} &= \left(1 + \frac{xn}{4\pi}\right) \cdot \frac{dq}{dz} - A^2 \cdot \frac{kn}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Ferner im äusseren Raume:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_1 - n \cdot \frac{dq_1}{dx} &= -4\pi \cdot u_1, \\ \Delta \mathfrak{B}_1 - n \cdot \frac{dq_1}{dy} &= -4\pi \cdot v_1, \\ \Delta \mathfrak{B}_1 - n \cdot \frac{dq_1}{dz} &= -4\pi \cdot w_1. \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

Im ganzen Raume:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} + \frac{d\mathfrak{B}}{dy} + \frac{d\mathfrak{B}}{dz} &= 0, \\ \frac{du_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{B}_1}{dy} + \frac{d\mathfrak{B}_1}{dz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12c)$$

An den mit Elektrizität belegten Flächen:

$$u - u_1 = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1 = q - q_1 = 0, \quad (12d)$$

$$\frac{du}{dN} - \frac{du_1}{dN} = \frac{d\mathfrak{B}}{dN} - \frac{d\mathfrak{B}_1}{dN} = \frac{d\mathfrak{B}}{dN} - \frac{d\mathfrak{B}_1}{dN} = 0. \quad (12e)$$

In unendlicher Entfernung:

$$u = \mathfrak{B} = q = \Psi = 0.$$

In diesem ganzen Systeme von Gleichungen kommt k nur noch als Factor der Function Ψ in den Gleichungen (12a) vor. Wir werden also zu untersuchen haben, wann diese k enthaltenden Glieder merklichen Einfluss auf die Lösung der Aufgabe erhalten können, wann nicht.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (2d) und (12c) folgt aus denen (12a):

$$0 = \left(\frac{xn}{4\pi} + 1\right) \Delta q - A^2 kn^2 q, \quad (12f)$$

und ein particuläres Integral dieser Gleichung ist:

$$q = \frac{B}{\rho} e^{te+nt}, \quad (12g)$$

wo $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, und:

$$l^2 = \frac{4\pi A^2 kn^2}{xn + 4\pi}. \quad (12g^*)$$

Bei wechselnden Werthen von z erreicht der Modulus von l seinen höchsten Werth, wenn $z = 0$. Dann wird:

$$l = nA\sqrt{k},$$

und also bei imaginärem n die Grösse $1/A\sqrt{k}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch die Gleichung (12g) dargestellten Wellen. Wenn z nicht gleich Null ist, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner und die Fortpflanzung mit Absorption der Wellen verbunden. Uebrigens ist zn gegen 4π verschwindend klein im Kupfer, selbst wenn die Schwingungsperiode ein Milliontheil einer Secunde ist.

Wenn wir nun die letzten beiden Glieder in jeder der Gleichungen (12a) der Grösse nach vergleichen, so ist:

$$\frac{dq}{dx} = - \int E \cdot \frac{x-\xi}{r^3} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \quad (12h)$$

$$\frac{A^2 kn}{4\pi + xn} \cdot 2\pi \frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{2} \int E \cdot \frac{x-\xi}{r^3} \cdot l^2 \cdot r^2 \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta. \quad (12i)$$

So oft nun $\frac{1}{2}l^2r^2$ für diejenigen Werthe von r , welche zwischen den Punkten x, y, z des Körpers und den Orten ξ, η, ζ



der beweglichen elektrischen Massen vorkommen, verschwindend klein ist, wird im Allgemeinen auch der mit k multiplicirte Ausdruck verschwindend klein gegen die Differentialquotienten von q sein, zu denen er summirt ist.

Es ist aber $1/2\pi$ die Wellenlänge der Oscillationen, deren Schwingungsdauer $n/2\pi$ ist, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Oscillationen ist gleich der des Lichts, dividirt durch γk . Wenn also k wie in Herrn F. E. Neumann's Annahme gleich Eins ist, oder wenigstens nicht unverhältnissmässig viel grösser als Eins, so werden im Allgemeinen bei Versuchen an irdischen Leitern die Bewegungen der Elektricität nicht merklich anders ausfallen, als wenn $k=0$ wäre, wenn nicht eben Dimensionen der Leiter benutzt und so kleine Zeittheile beobachtet werden können, dass sich die von der Lichtgeschwindigkeit herrührenden Unterschiede innerhalb dieser Dimensionen und Zeittheile geltend machen.

Diese Folgerung ist darauf gegründet, dass die in (12h) und (12i) ausgedrückten Grössen Summen sind von denselben Summanden, aber so, dass in der zweiten Summe jeder Summand mit einem verschwindend kleinen Factor multiplicirt ist, der bei imaginärem n einen immer negativen reellen und einen der Regel nach dagegen verschwindenden imaginären Theil hat. Diese Folgerung würde nicht ohne Weiteres zulässig sein, wenn q die relativ kleine Differenz einer sehr grossen positiven und einer nahehin ebenso grossen negativen Quantität wäre, und dabei der mittlere Werth von r^2 für die eine dieser Quantitäten einen endlichen Unterschied von dem der anderen angehörigen Mittelwerthe hätte. Nun kann allerdings q in der angegebenen Weise zusammengesetzt sein, aber dabei nur dann ¹⁰⁷ überall endlich bleiben, wenn zwei unendlich grosse elektrische Quanta in unendlich kleiner Entfernung von einander als elektrische Doppelschicht von endlichem Momente gelagert sind, wie in den beiden Platten eines Condensators oder in den beiden Belegungen einer Leydener Flasche. In diesen Fällen ist aber offenbar die zweite Bedingung nicht erfüllt, nämlich die, dass der mittlere Werth von r^2 für die positive und negative elektrische Masse endlich verschieden sei.

In der Voraussetzung also, dass die Constante k keine sehr grosse Zahl ist, wird man die analytische Behandlung der Aufgaben über Elektricitätsbewegung vereinfachen dürfen, indem man $k=0$ setzt, oder die Fortpflanzung der Longitudinalwellen unendlich gross annimmt, so oft die Dimensionen der gebrauchten Leiter verschwindend klein sind gegen die Moduln der (reellen oder complexen) Wellenlängen der zur Wahrnehmung kommenden elektrischen Oscillationen (deren Periode auch complex sein kann).

Die Vereinfachung der analytischen Operationen, welche eintritt, wenn wir $k=0$ setzen, gründet sich darauf, dass die Gleichungen (II) und (IIa) nicht mehr nach t integrirt zu werden brauchen. Die Gleichung (12f) ergibt alsdann für das Innere der Leiter entweder:

$$n = -\frac{4\pi}{\kappa},$$

oder:

$$\Delta q = 0.$$

Die letztere Alternative ergibt, dass gar keine freie Elektricität im Innern der Leiter vorkommt. Die erstere giebt:

$$q = f_{x,y,z} \cdot e^{-\frac{4\pi}{\kappa} t},$$

unabhängig von aller Einwirkung äusserer Kräfte. Bei denjenigen elektrischen Bewegungen also, die im Innern eines Leiters nach vorausgegangenem elektrischen Gleichgewicht durch äussere Kräfte hervorgerufen werden können, wird freie Elektricität, bei der Annahme $k=0$, nur immer an der Oberfläche der Leiter oder an den Grenzflächen verschiedener Leiter vorkommen können.

§ 7. Bewegung in einem unendlichen Cylinder.

Die einzige praktisch angewendete Form eines Leiters von hinreichend grossen Dimensionen, an der man hoffen könnte, Unterschiede, die der Lichtgeschwindigkeit entsprechen, zu entdecken, wäre die eines sehr langen Drahtes. Ich will deshalb ¹⁰⁸ die Theorie der elektrischen Bewegung in einem solchen hier noch ausführen, basirt auf die Gleichungen (12a) bis (12f),



indem, wie dort, die Abhängigkeit von t auf einen Factor e^{at} beschränkt bleibe, und zugleich die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 im äusseren Raume gleich Null gesetzt werden:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0. \quad (13)$$

Die Axe des Drahtes sei auch die Axe der x , der Draht cylindrisch mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius R . Die Bewegung geschehe theils in Richtung der x , theils in den darauf senkrechten Richtungen der

$$\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (13a)$$

Wir können unter diesen Umständen setzen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{d^2\chi}{dx \cdot d\varrho} \cdot \frac{y}{\varrho} = \frac{d^2\chi}{dx \cdot dy}, \\ \mathfrak{B} &= \frac{d^2\chi}{dx \cdot d\varrho} \cdot \frac{z}{\varrho} = \frac{d^2\chi}{dx \cdot dz}. \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

Aus den Gleichungen (12a) fliessen die drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\kappa}{4\pi} \cdot \mathcal{A} \left\{ \frac{d\mathfrak{B}}{dz} - \frac{d\mathfrak{B}}{dy} \right\} - A^2 \cdot n \cdot \left\{ \frac{d\mathfrak{B}}{dz} - \frac{d\mathfrak{B}}{dy} \right\} &= 0, \\ \frac{\kappa}{4\pi} \cdot \mathcal{A} \left\{ \frac{d\mathfrak{B}}{dx} - \frac{d\mathfrak{U}}{dz} \right\} - A^2 \cdot n \cdot \left\{ \frac{d\mathfrak{B}}{dx} - \frac{d\mathfrak{U}}{dz} \right\} &= 0, \\ \frac{\kappa}{4\pi} \cdot \mathcal{A} \left\{ \frac{d\mathfrak{U}}{dy} - \frac{d\mathfrak{B}}{dx} \right\} - A^2 \cdot n \cdot \left\{ \frac{d\mathfrak{U}}{dy} - \frac{d\mathfrak{B}}{dx} \right\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13c)$$

Die erste von diesen ist durch die Annahmen in (13b) erfüllt. Die beiden anderen ergeben, dass die Differentialquotienten nach y und z genommen von folgendem Ausdrücke gleich Null sind:

$$\frac{\kappa}{4\pi} \cdot \mathcal{A} \left\{ \frac{d^2\chi}{dx^2} - \mathfrak{U} \right\} - A^2 n \left\{ \frac{d^2\chi}{dx^2} - \mathfrak{U} \right\} = f_x, \quad (13c^*)$$

und gleichzeitig giebt (12c):

$$\frac{d}{dx} \left\{ \mathfrak{U} + \frac{d^2\chi}{dy^2} + \frac{d^2\chi}{dz^2} \right\} = 0,$$

oder:

$$\mathfrak{U} - \mathfrak{F}_{\varrho} = -\frac{d^2\chi}{dy^2} - \frac{d^2\chi}{dz^2} = -\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\chi}{d\varrho}.$$

Da eine Function von ϱ allein zu χ hinzugesetzt werden kann, ohne die Werthe von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ zu ändern, so können wir die

willkürliche Function $\mathfrak{F}_{\varrho}$ hier weglassen, ohne die Allgemeinheit der Integration zu beschränken, und haben:

$$\mathfrak{U} = \frac{d^2\chi}{dx^2} - \mathcal{A}\chi. \quad (13d)$$

Wir erhalten dann für die Function χ aus (13c*) folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\kappa}{4\pi} \cdot \mathcal{A} \mathcal{A}\chi - A^2 n \mathcal{A}\chi = 0. \quad (13e)$$

Die dort stehende willkürliche Function $f(x)$ kann hier wiederum durch eine in χ eingegriffene Function von x ersetzt gedacht werden, da die Hinzufügung einer solchen zu χ die Werthe von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B}$ nicht verändert.

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen (12a) ein, so findet man, dass die drei Differentialquotienten, nach x , y und z genommen, der folgenden Gleichung gleich Null sind:

$$\frac{\kappa}{4\pi} \mathcal{A} \left(\frac{d\chi}{dx} \right) - A^2 \cdot n \cdot \frac{d\chi}{dx} = \left(1 + \frac{\kappa n}{4\pi} \right) \varphi - A^2 \cdot \frac{\kappa n}{2} \psi + \text{Const.} \quad (13f)$$

Folglich muss diese Gleichung (13f) erfüllt sein, und sie zusammen mit der Gleichung (13e) ersetzt die Gleichungen (12a). Führt man die Operation $\mathcal{A}$ an (13f) aus, so erhält man die Differentialgleichung für φ :

$$\left(1 + \frac{\kappa n}{4\pi} \right) \mathcal{A}\varphi - A^2 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \varphi = 0. \quad (13g)$$

Man kann auch im äusseren Raume die Functionen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1$ auf die Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= \frac{d^2\chi_1}{dx^2} - \mathcal{A}\chi_1 = -\frac{d^2\chi_1}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\chi_1}{d\varrho}, \\ \mathfrak{B}_1 &= \frac{d^2\chi_1}{dx \cdot dy}, \\ \mathfrak{B}_1 &= \frac{d^2\chi_1}{dx \cdot dz}, \end{aligned} \right\} \quad (13h)$$

welche die Gleichung (12c) erfüllen.

Die Gleichungen (12b) und (13) werden durch sie erfüllt, wenn man setzt:

$$\mathcal{A} \left(\frac{d\chi_1}{dx} \right) = n \varphi_1 = \frac{1}{2} \mathcal{A}\psi_1 \quad (13i)$$



und:

$$\Delta \left(\frac{d\chi_1}{dx} \right) = n \cdot \Delta q_1 = 0. \quad (13k)$$

Daraus folgt, dass im äusseren Raume sich $d\chi_1/dx$ und $\frac{1}{2}\Psi_1$ nur um eine Potentialfunction unterscheiden können, da die Gleichung (13i) sich auch schreiben lässt:

$$\Delta \left\{ \frac{d\chi_1}{dx} - \frac{1}{2}\Psi_1 \right\} = 0. \quad (13l)$$

110 Wie wir oben schon angenommen haben, dass die Abhängigkeit der hier zu untersuchenden Functionen von t darauf beschränkt sei, dass sie den Factor e^{nt} enthalten, so fügen wir nun die weitere Beschränkung hinzu, dass ihre Abhängigkeit von x dadurch gegeben sei, dass sie den Factor e^{mx} enthalten, worin m einen imaginären Werth haben soll. Imaginär muss m sein, weil nur unter dieser Bedingung die in den Gleichungen (1a) oder (1b) gegebenen elektromotorischen Kräfte endlich sind.

Unter dieser Annahme werden die Bedingungsgleichungen unseres Problems folgende:

$$\frac{\pi}{4\pi} \cdot \Delta \Delta \chi - A^2 \cdot n \cdot \Delta \chi = 0, \quad (14)$$

$$\Delta \Delta \chi_1 = \Delta q_1 = 0, \quad (14a)$$

$$\frac{\pi m}{4\pi} \Delta \chi - A^2 \cdot n \cdot m \chi = \left(1 + \frac{\pi n}{4\pi} \right) q - \frac{1}{2} A^2 \cdot k \cdot n \cdot \Psi, \quad (14b)$$

$$2m \cdot \Delta \chi_1 = \Delta \Psi_1 = 2n q_1. \quad (14c)$$

Dazu kommen noch die Grenzbedingungen für die Oberfläche des Cylinders, (12d) und (12e), welche sich reduciren auf folgende:

$$m^2 \chi - \Delta \chi = m^2 \chi_1 - \Delta \chi_1, \quad (14d)$$

$$\frac{d\chi}{dq} = \frac{d\chi_1}{dq}, \quad (14e)$$

$$\Delta \left(\frac{d\chi}{dq} \right) = \Delta \left(\frac{d\chi_1}{dq} \right), \quad (14f)$$

$$q = q_1, \quad (14g)$$

$$\Psi = \Psi_1, \quad (14h)$$

$$\frac{d\Psi}{dq} = \frac{d\Psi_1}{dq}. \quad (14i)$$

Endlich für $\rho = \infty$ müssen alle diese Functionen gleich Null werden.

Bezeichnen wir mit $J_{(\rho q)}$ diejenige Bessel'sche Function, welche für $\rho = 0$ endlich bleibt und die Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \cdot [J_{(\rho q)}] + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} [J_{(\rho q)}] + p^2 J_{(\rho q)} = 0, \quad (15)$$

so ist:

$$\Delta [e^{mx} \cdot J_{(\rho q)}] = (m^2 - p^2) \cdot e^{mx} \cdot J_{(\rho q)},$$

und es wird also die Gleichung (13g) integrirt durch die Annahme:

$$q = \mathfrak{A} \cdot e^{nt+mx} \cdot J_{(\rho q)}, \quad (15a)$$

wenn:

$$\left(1 + \frac{\pi n}{4\pi} \right) (m^2 - p^2) = A^2 \cdot k \cdot n^2. \quad (15b)$$

Bezeichnen wir dagegen mit $\mathfrak{J}_{(\rho q)}$ dasjenige Integral der Gleichung (15), welches für $\rho = \infty$ gleich Null wird, so ist im äusseren Raume mit Berücksichtigung von (14a) und (14g) zu setzen:

$$q_1 = \mathfrak{A} \cdot e^{nt+mx} \cdot \frac{J_{(\rho R)}}{\mathfrak{J}_{(\rho R)}} \cdot \mathfrak{J}_{(\rho q)}. \quad (15c)$$

Die aus q zu bildende Function Ψ ist dadurch bestimmt, dass im ganzen Raume:

$$\Delta \Psi = 2n q \quad \text{und} \quad \Delta \Psi_1 = 2n q_1, \quad (15d)$$

sowie durch die Bedingungen für die Oberfläche (14h) und (14i). Danach wird im Innern des Cylinders Ψ die Form haben:

$$\Psi = \left\{ \frac{2n}{m^2 - p^2} \cdot \mathfrak{A} \cdot J_{(\rho q)} + \mathfrak{C} \cdot J_{(\rho q)} \right\} \cdot e^{nt+mx}, \quad (15e)$$

und im äusseren Raume:

$$\Psi_1 = \left\{ -\frac{n q}{m^2} \cdot \mathfrak{A} \cdot \frac{J_{(\rho R)}}{\mathfrak{J}_{(\rho R)}} \cdot \mathfrak{J}_{(\rho q)} + \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{J}_{(\rho q)} \right\} \cdot e^{nt+mx}. \quad (15f)$$



Aus der Differentialgleichung (15) folgt leicht, wenn wir sie nach p differenzieren, p dann mit m vertauschen und zur Abkürzung setzen:

$$\mathfrak{S}'_{(mq)} = \frac{d}{dq} \cdot \mathfrak{S}_{(mq)},$$

dass:

$$\frac{d^2}{dq^2} \left[\frac{q}{m} \cdot \mathfrak{S}'_{(mq)} \right] + \frac{1}{q} \cdot \frac{d}{dq} \left[\frac{q}{m} \cdot \mathfrak{S}'_{(mq)} \right] + m^2 \cdot \left[\frac{q}{m} \cdot \mathfrak{S}'_{(mq)} \right] = -2m \cdot \mathfrak{S}_{(mq)}$$

und somit (15d) erfüllt sei. Die Coefficienten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ bestimmen sich durch die Gleichungen (14h) und (14i), welche ergeben:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{2n}{m^2 - p^2} \cdot J_{(pR)} + \frac{nR}{m^2} \cdot J_{(pR)} \cdot \frac{\mathfrak{S}'_{(mR)}}{\mathfrak{S}_{(mR)}} \right] \mathfrak{A} + \mathfrak{E} \cdot J_{(mR)} - \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{S}_{(mR)} &= 0, \\ \left[\frac{2n}{m^2 - p^2} \cdot J'_{(pR)} - nR \cdot J_{(pR)} \right] \mathfrak{A} + \mathfrak{E} \cdot J'_{(mR)} - \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{S}'_{(mR)} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (15g)$$

Wir haben nun noch die Function χ zu bilden. Zunächst muss die Function $\mathcal{A}\chi$ die Differentialgleichung (14) erfüllen und dabei für $q = 0$ endlich bleiben. Daraus folgt unter den vorausgeschickten Annahmen:

$$112 \quad \text{und:} \quad \mathcal{A}\chi = \mathfrak{B} \cdot e^{nt + m\kappa} \cdot J_{(q\varrho)} \quad (16)$$

$$\frac{\kappa}{4\pi} (m^2 - q^2) = \mathcal{A}^2 \cdot n. \quad (16a)$$

Daraus folgt dann weiter, dass χ von der Form sein muss:

$$\chi = \left[\frac{1}{m^2 - q^2} \cdot \mathfrak{B} \cdot J_{(q\varrho)} + \mathfrak{G} \cdot J_{(m\varrho)} \right] \cdot e^{nt + m\kappa}, \quad (16b)$$

wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}$ zwei constante Coefficienten sind. Der letztere bestimmt sich aus der Gleichung (14b), die sich bei Einsetzung der Werthe (16b), (15e) und (15a) reducirt auf:

$$\mathfrak{G} = \frac{k}{2m} \cdot \mathfrak{E}. \quad (16c)$$

Im äusseren Raume muss die Function χ_1 nach (14c) von der Form sein:

$$\chi_1 = \frac{1}{2m} \mathcal{U}_1 + \mathfrak{H} \cdot e^{nt + m\kappa} \cdot \mathfrak{S}_{(m\varrho)}. \quad (16d)$$

Die Coefficienten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ bestimmen sich durch die Grenzbedingungen (14d), (14e) und (14f), nämlich:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{q^2}{m^2 - q^2} \cdot \mathfrak{B} \cdot J_{(qR)} + m^2 \cdot \mathfrak{G} \cdot J_{(mR)} \\ &= \frac{n p^2}{m(m^2 - p^2)} \cdot \mathfrak{A} \cdot J_{(pR)} + \frac{m}{2} \cdot \mathfrak{E} \cdot J_{(mR)} + m^2 \cdot \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{S}_{(mR)}, \\ & \frac{1}{m^2 - q^2} \cdot \mathfrak{B} \cdot J'_{(qR)} + \mathfrak{G} \cdot J'_{(mR)} \\ &= \frac{n}{m(m^2 - p^2)} \cdot \mathfrak{A} \cdot J'_{(pR)} + \frac{1}{2m} \cdot \mathfrak{E} \cdot J'_{(mR)} + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{S}'_{(mR)}, \\ & \mathfrak{B} \cdot J'_{(qR)} = \frac{n}{m} \cdot \mathfrak{A} \cdot J_{(pR)} \cdot \frac{\mathfrak{S}'_{(mR)}}{\mathfrak{S}_{(mR)}}. \end{aligned} \right\} \quad (16e)$$

Die zwei Gleichungen (15g), die eine (16c) und die drei (16e) bilden ein System von sechs homogenen linearen Gleichungen mit den sechs Unbekannten:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}.$$

Folglich muss die Determinante derselben gleich Null sein. Dies giebt schliesslich eine Gleichung, welche zur Bestimmung von n dient. Zur Abkürzung setzen wir:

$$P = \frac{J'_{(pR)}}{J_{(pR)}}, \quad Q = \frac{J'_{(qR)}}{J_{(qR)}} \quad \text{und} \quad M = \frac{\mathfrak{S}'_{(mR)}}{\mathfrak{S}_{(mR)}}. \quad (16f)$$

Dann ist die Eliminationsgleichung folgende:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{q^2}{m^2 - q^2} \cdot \frac{M}{Q} [M - Q] - k \cdot \frac{m^2}{m^2 - p^2} [M - P] \\ &+ \frac{1-k}{2} \cdot R [M^2 + m^2] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16g)$$

Die unbekannte Grösse n ist hier in den q , p , Q und P enthalten. Es ist nun $2\pi/im$ gleich der Wellenlänge der betrachteten elektrischen Wellen nach der Länge des Drahtes gemessen; wir nehmen an, dass diese sehr gross gegen die Dicke des Drahtes sei, und betrachten deshalb mR als eine Grösse, die gegen die Einheit verschwindet.

Ferner ist $2\pi/\sqrt{m^2 - p^2}$ nach (15b) die Wellenlänge der longitudinalen elektrischen Wellen in einem ausgedehnten leitenden Medium, deren Schwingungsdauer $2\pi/n$ ist; wir können



deshalb auch $(m^2 - p^2)R^2$ und p^2R^2 wie m^2R^2 als verschwindend klein gegen die Einheit betrachten. Dagegen ist:

$$m^2 - q^2 = \frac{4\pi n \cdot A^2}{\kappa},$$

und für Kupfer wird dies:

$$m^2 - q^2 = 4\pi n \cdot \frac{\text{Sedn.}}{227000 \text{ Quadratmillim.}}$$

Wenn also R nicht unverhältnissmässig viel grösser als ein Millimeter ist, und n nicht viele Tausende beträgt, so wird auch $(m^2 - q^2)R^2$ und q^2R^2 als eine gegen die Einheit kleine Grösse betrachtet werden können.

Da nun:

$$J_{(pR)} = 1 - \frac{p^2 \cdot R^2}{2 \cdot 2} + \frac{p^4 \cdot R^4}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} - \text{etc.}$$

ist, so kann für sehr kleine Werthe von pR und qR gesetzt werden:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2}p^2R, \\ \frac{q^2}{Q} &= -\frac{2}{R} + q^2\frac{R}{4}. \end{aligned}$$

Wenn wir diese Werthe in (16g) einsetzen, erhalten wir die für kleine Werthe von pR und qR zunächst noch ohne Einschränkung der Werthe von mR gültige Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= -m^2 \left[M + \frac{m^2 R}{2} \right] + \frac{\kappa n}{4\pi} \left[-\frac{2}{R} M^2 \left(1 - \frac{m^2 R^2}{4} \right) \right] \\ &- 2Mm^2 - \frac{m^4 R}{2} + A^2 n^2 \left[M + \frac{R}{4} M^2 + \frac{m^2 R}{2} - \frac{1}{2} k R M^2 \right]. \end{aligned} \quad (16h)$$

Es ist nun nach Kirchhoff¹⁾ zu setzen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{(mR)} &= J_{(mR)} \left[\Psi_0 - \log \left(\frac{imR}{2} \right) \right] + \left\{ -\frac{m^2 R^2}{2 \cdot 2} (1) \right. \\ &+ \frac{m^4 R^4}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} (1 + \frac{1}{2}) - \frac{m^6 R^6 (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} + \text{etc.} \left. \right\}, \end{aligned}$$

114 worin:

$$\Psi_0 = -0,5772157.$$

1) Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. XLVIII, Heft 4.

Daraus geht hervor, dass, wenn mR sehr klein ist, auch RM sehr klein ist, dagegen M/m sehr gross. Mit Berücksichtigung hiervon können wir die Gleichung (16h) auf folgenden einfacheren Ausdruck bringen:

$$0 = -m^2 - \frac{\kappa n}{2\pi R} \cdot M + A^2 \cdot n^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} k \cdot RM \right\}. \quad (16i)$$

Wenn k nicht so gross ist, dass kRM endlich wird, verschwindet das letzte Glied mit k ganz aus dieser Gleichung. Der Rest der Gleichung stimmt überein mit der Gleichung, welche Herr Kirchhoff aus dem Weber'schen Gesetze abgeleitet hatte, wenigstens in Bezug auf die Glieder, welche allein Einfluss haben, wenn R unendlich klein wird. Nur in den Gliedern, welche zunächst zu berücksichtigen sind, wenn $\log R$ nicht mehr als unendlich gross betrachtet werden kann, zeigt sich ein Unterschied, indem statt unserer Function:

$$M = \frac{1}{R \left\{ -\log \left(\frac{im}{2} \right) + \Psi_0 - \log R \right\}}$$

in Kirchhoff's Gleichung steht:

$$\frac{1}{R \left\{ \log l - \log R \right\}},$$

wo l die Länge des Drahtes bezeichnet, und $\log l$ statt der in meiner Formel vorkommenden Grösse steht:

$$-\log \left(\frac{im}{2} \right) + \Psi_0 = -\log(\pi) + \Psi_0 + \log(\lambda).$$

Im letzteren Ausdrucke bezeichnet λ die Wellenlänge der betreffenden Oscillationen.

Zu bemerken ist noch, dass durch die Annahme, kMR sei eine sehr kleine Grösse, das Vorkommen labiler Gleichgewichtsstörungen für negative Werthe von k von vornherein ausgeschlossen worden ist.

§ 8. Einfluss diëlektrischer und magnetischer Polarisation der Media.

Nachdem wir uns bisher mit der Frage beschäftigt haben, welchen Einfluss die aus den bisherigen Versuchen nicht bestimmbare Constante k bei den elektrischen Bewegungen haben



könne, bleibt es noch übrig, den Einfluss zu erörtern, den die
 116 zwischen den durchströmten Leitern liegenden und sie um-
 gebenden Isolatoren haben können. Wenn in ihnen Verände-
 rungen vorgehen, so können diese auf die Ausbreitung der
 inducirenden Wirkungen Einfluss haben. Dass die meisten,
 vielleicht alle Naturkörper magnetisch (bezüglich diamagnetisch)
 polarisierbar sind, ist bekannt; für eine Reihe von Isolatoren
 ist auch nachgewiesen, dass in ihnen eine ähnliche Scheidung
 der Elektricitäten, dielektrische Polarisation, stattfinden
 kann unter Einfluss elektrischer Kräfte, wie in magnetischen
 Körpern Scheidung der Magnetismen unter Einwirkung magne-
 tischer Kräfte.

Es ist bekannt, dass man, wenigstens bei mässigeren
 Graden der Magnetisirung, das magnetische Moment, welches
 an irgend einer Stelle inducirt ist, der Stärke der an der be-
 treffenden Stelle wirkenden magnetisirenden Kraft, diese mul-
 tiplicirt mit einer von der Art des Stoffes abhängenden Con-
 stanten, gleich setzen kann. Die magnetisirende Kraft ist
 dabei diejenige, welche durch die äusseren Einflüsse in Ver-
 bindung mit dem in dem magnetisirten Körper selbst und an
 seiner Oberfläche entwickelten freien Magnetismus hervor-
 gebracht wird. Genau dieselben Gesetze wenden wir auf die
 Dielektrica an, wobei wir zunächst von den Vorgängen, die den
 elektrischen Rückstand der Leydener Flaschen hervorbringen,
 und die von der Anwesenheit schwach leitender Theile herzu-
 führen scheinen, absehen.

Es seien x, y, z die Componenten der durch Vertheilung
 erzeugten elektrischen Momente parallel den Axen der x, y, z
 genommen, X, Y, Z die Componenten der gegebenen äusseren
 Kräfte, q die Potentialfunction der durch deren Wirkung ver-
 theilten Elektricität, so setzen wir dem entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} x &= \epsilon \left(X - \frac{dq}{dx} \right), \\ y &= \epsilon \left(Y - \frac{dq}{dy} \right), \\ z &= \epsilon \left(Z - \frac{dq}{dz} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Dichtigkeit freier Elektricität im Innern eines der Ver-
 theilung unterworfenen Körpers, in zweierlei Weise ausgedrückt,
 ist gleich:

$$-\frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dy} - \frac{dz}{dz} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \Delta q. \quad (17a)$$

An einer Oberfläche, wo x, y, z und q einen Sprung machen,
 ist mit Beibehaltung der bisher für die Oberflächen Ω ge-
 brauchten Bezeichnungen:

$$(x-x_1) \cos a + (y-y_1) \cos b + (z-z_1) \cos c = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{dq}{dN} - \frac{dq_1}{dN} \right]. \quad (17b)$$

In Verbindung mit den Festsetzungen, welche den Werth
 von q im Unendlichen bestimmen, und das Vorhandensein
 äusserer elektrischer Massen betreffen, genügen diese Glei-
 chungen zur Bestimmung von q, x, y und z .

Sind die Kräfte X, Y und Z von der Form:

$$X = -\frac{d\psi}{dx},$$

$$Y = -\frac{d\psi}{dy},$$

$$Z = -\frac{d\psi}{dz},$$

also gleich den Anziehungskräften einer mit der Dichtigkeit:

$$E = -\frac{1}{4\pi} \cdot \Delta \psi$$

verbreiteten elektrischen Masse, so ergeben die Gleichungen
 (17) und (17a) nach Elimination von x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ (1 + 4\pi\epsilon) \frac{d}{dx} (q + \psi) \right\} + \frac{d}{dy} \left\{ (1 + 4\pi\epsilon) \frac{d}{dy} (q + \psi) \right\} \\ + \frac{d}{dz} \left\{ (1 + 4\pi\epsilon) \frac{d}{dz} (q + \psi) \right\} = -4\pi E, \end{aligned} \right\} \quad (17c)$$

und an den Grenzflächen, wo zwei Körper von verschiedenen
 Werthen von ϵ zusammenstossen, wenn E an der Fläche keine
 unendliche Dichtigkeit hat:

$$(1 + 4\pi\epsilon) \frac{d}{dN} (q + \psi) = (1 + 4\pi\epsilon_1) \frac{d}{dN} (q_1 + \psi). \quad (17d)$$



Ist ϵ constant in dem Theile S des Raumes, wo E von Null verschieden ist, so ist:

$$-\frac{1}{4\pi} \Delta(\psi + q) = \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon} \cdot E.$$

Das heisst: Die gesammte Potentialfunction $(\psi + q)$ wird in dem Raume, in welchem E liegt, sich so verhalten, als wenn in einem nicht dielektrischen Raume nur $E/(1 + 4\pi\epsilon)$ läge. Durch die erfolgte Vertheilung wird dorthin die Quantität $-4\pi\epsilon E/(1 + 4\pi\epsilon)$ geschoben, die einen entsprechenden Theil von E neutralisirt.

Für die Verschiebungen von E im Raume S , so weit ϵ constant ist, bildet diese neutralisirende Elektricität kein Hinderniss, weil sie überall mitfolgen kann. Die Anziehungskräfte also, welche von anderweitig vorhandenen elektrischen Massen auf E ausgeübt werden, müssen ebenso gross sein, als wenn die E zum Theil neutralisirende Elektricität gar nicht vorhanden wäre.

117 Die Potentialfunction einer punktförmigen Masse E_1 ist also:

$$\frac{E_1}{(1 + 4\pi\epsilon)r}$$

und die Abstossung, welche sie auf die Masse E ausübt:

$$\frac{E \cdot E_1}{(1 + 4\pi\epsilon)r^2}$$

Die Grösse der Massen E und E_1 , elektrostatisch gemessen, erscheint also im Verhältniss $\sqrt{1 + 4\pi\epsilon}:1$ verkleinert durch den Einfluss des Dielektricum, in dem sie liegen.

Wenn wir nun unter c eine beliebige constante Zahl verstehen, und jede Masse E auf das c -fache vergrössert denken, jede Grösse $(1 + 4\pi\epsilon)$ aber auf das c^2 -fache, so bleibt die Anziehung der beiden Massen E unter so veränderten Umständen unverändert, die Potentialfunction einer jeden wird verringert im Verhältniss $1/c$, und die Gleichung (17c), welche die Vertheilung bestimmt, bleibt vollständig ungeändert.

Wir können also durch alle elektrostatischen Mes-

sungen immer nur das Verhältniss der Werthe von $(1 + 4\pi\epsilon)$ zwischen verschiedenen Körpern, oder zwischen diesen und dem vom Lichtäther gefüllten, übrigens leeren Raume ermitteln, aber nicht den absoluten Werth der genannten Grösse. Dasselbe gilt für die Coefficienten der magnetischen Induction. Dass Poisson und andere Bearbeiter der Theorie des Magnetismus den magnetischen Coefficienten, welcher der Grösse $(1 + 4\pi\epsilon)$ entspricht, im Luftraume gleich Eins gesetzt haben, ist willkürlich. Es ist bekannt, dass eine Reihe von Physikern durch die diamagnetischen Erscheinungen veranlasst wurden, den betreffenden Coefficienten für den nur mit Lichtäther gefüllten Raum grösser als Eins zu setzen, um ϵ in den diamagnetischen Körpern nicht negativ setzen zu müssen.

Die Bestimmung der elektrostatischen Einheit der Elektricität, wenn sie im Innern eines dielektrischen Isolators vorgenommen wird, muss diese Einheit im Verhältniss $\sqrt{1 + 4\pi\epsilon}:1$ zu gross ergeben, und ebenso auch die elektrostatische Einheit der Stromstärke in demselben Verhältnisse zu gross. Die Constante A^2 ist der elektrodynamischen Anziehung zweier elektrostatischen Stromeinheiten proportional. Ist also das Medium, in dem wir uns befinden, und diese Versuche angestellt haben, dielektrisch, so ist der wahre Werth der betreffenden Constante, wie er für einen absolut einflusslosen Raum gelten würde, $A^2/(1 + 4\pi\epsilon_0)$, wo ϵ_0 die dielektrische Polarisationsconstante der Luft, beziehlich des den Weltraum füllenden Mediums ist.

Wir müssen ferner die dielektrische Polarisation auch bei der Bestimmung der Bewegung der Elektricität beachten.

Wenn in dem Volumenelement dS die Menge E positiver Elektricität sich um $\frac{1}{2}s$ in Richtung der positiven x , und die Menge negativer um $\frac{1}{2}s$ nach Richtung der negativen x bewegt, so wird dadurch in demselben das elektrische Moment:

$$\chi = E \cdot s$$

hergestellt, und gleichzeitig ist dieser Vorgang entsprechend einer Strömung in dem Element:

$$u_0 \cdot dt = E \cdot s.$$



Der Act der Polarisation bildet also eine Art elektrischer Bewegung, bei welcher:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{dx}{dt}, \\ v_0 &= \frac{dy}{dt}, \\ w_0 &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Zu dieser kann sich noch hinzugesellen diejenige Bewegung, welche dem Ohm'schen Gesetze entsprechend in leitenden Körpern geschieht, deren Componenten mit u_2 , v_2 und w_2 bezeichnet werden mögen.

Da nun nach den in Gleichung (17) gemachten Feststellungen, die die Elektrizität in Richtung der Coordinatenachsen fortreibenden Kräfte gleich sind:

$$\frac{1}{\epsilon} \cdot \mathfrak{E}, \quad \frac{1}{\epsilon} \cdot \mathfrak{H}, \quad \frac{1}{\epsilon} \cdot \mathfrak{Z},$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \kappa u_2 &= \frac{1}{\epsilon} \cdot \mathfrak{E}, \\ \kappa v_2 &= \frac{1}{\epsilon} \cdot \mathfrak{H}, \\ \kappa w_2 &= \frac{1}{\epsilon} \cdot \mathfrak{Z}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

und die Gesamtgeschwindigkeiten der elektrischen Strömung werden:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\epsilon \cdot \kappa} \cdot \mathfrak{E}, \\ v &= \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\epsilon \cdot \kappa} \cdot \mathfrak{H}, \\ w &= \frac{dz}{dt} + \frac{1}{\epsilon \cdot \kappa} \cdot \mathfrak{Z}. \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

¹¹⁹ In Bezug auf diese Grössen u bleiben dann auch die Gleichungen (2) und (2a) bestehen:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\mathfrak{Q}}{dt}, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (u - u_1) \cdot \cos a + (v - v_1) \cdot \cos b + (w - w_1) \cdot \cos c \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{dt \cdot dN} (\varphi - \varphi_1), \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

und die Berechnungen der elektrodynamischen Kräfte U , V , W , welche in den Gleichungen (1a) bis (3a) in § 2 gegeben sind.

Nachdem so die elektrostatischen und elektrodynamischen Kräfte in einem dielektrischen Medium bestimmt worden sind, haben wir noch festzustellen, wie die Induction zweier Stromleiter in einem magnetisch polarisirbaren Medium verändert wird. Ich bezeichne die magnetischen Momente mit λ , μ , ν und die magnetische Potentialfunction mit χ , die Polarisationsconstante mit $\mathfrak{P}$, die ausserdem vorhandenen magnetisirenden Kräfte mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, so ist, wie in Gleichung (17), zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \mathfrak{P} \left[\mathfrak{L} - \frac{d\chi}{dx} \right], \\ \mu &= \mathfrak{P} \left[\mathfrak{M} - \frac{d\chi}{dy} \right], \\ \nu &= \mathfrak{P} \left[\mathfrak{N} - \frac{d\chi}{dz} \right], \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

und:

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz} = \frac{1}{4\pi} \cdot \Delta\chi, \quad (19a)$$

oder an Flächen, welche freien Magnetismus enthalten:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda - \lambda_1) \cdot \cos a + (\mu - \mu_1) \cdot \cos b + (\nu - \nu_1) \cdot \cos c \\ = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{d\chi}{dN} - \frac{d\chi_1}{dN} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19a^*)$$

Die magnetisirenden Kräfte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ am Orte x , y , z , herührend von den Stromcomponenten u , v , w am Orte ξ , η , ζ , sind die folgenden:



Herrührend von der Strom- komponente	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{N}$
u	0	$-A \cdot u \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \right)$	$A \cdot u \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \right)$
v	$A \cdot v \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \right)$	0	$-A \cdot v \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right)$
w	$-A \cdot w \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \right)$	$A \cdot w \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right)$	0.

Also, wenn man sie für die sämtlichen vorhandenen Strömungen berechnet:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L} &= A \left[\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \right], \\ \mathfrak{M} &= A \left[\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \right], \\ \mathfrak{N} &= A \left[\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

Somit sind, wenn u, v, w bekannt sind, die Grössen λ, μ, ν durch die Gleichungen (19), (19a), (19b) gegeben.

Die inducirende Wirkung der Grössen λ, μ, ν im Element $dx \cdot dy \cdot dz$ dagegen auf die Stromelemente u, v, w in ξ, η, ζ ist proportional der Zunahme des Potentials:

Für Strom- komponente	Induktionskraft
u	$-A \cdot \frac{d}{dt} \left[r \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz$
v	$-A \cdot \frac{d}{dt} \left[\lambda \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \right) - \nu \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz$
w	$-A \cdot \frac{d}{dt} \left[\mu \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) - \lambda \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz$

Also wenn wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} L &= \iiint \frac{\lambda}{r} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \\ M &= \iiint \frac{\mu}{r} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \\ N &= \iiint \frac{\nu}{r} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (19c)$$

so sind die Componenten der elektromotorischen Kraft, die von der Magnetisirung des Medium herrührt:

$$\left. \begin{aligned} &+ A \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz} \right], \\ &+ A \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx} \right], \\ &+ A \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy} \right], \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

und aus den Gleichungen (17) folgen endlich folgende Bewegungsgleichungen der Elektrizität, in denen $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die durch andere, z. B. hydroelektrische und thermoelektrische Prozesse bedingten äusseren Kräfte bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{e} \cdot \mathfrak{L} &= -\frac{dq}{dx} - A^2 \cdot \frac{dU}{dt} + A \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz} \right] + \mathfrak{L}, \\ \frac{1}{e} \cdot \mathfrak{M} &= -\frac{dq}{dy} - A^2 \cdot \frac{dV}{dt} + A \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx} \right] + \mathfrak{M}, \\ \frac{1}{e} \cdot \mathfrak{N} &= -\frac{dq}{dz} - A^2 \cdot \frac{dW}{dt} + A \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy} \right] + \mathfrak{N}, \end{aligned} \right\} \quad (19e)$$

wozu noch aus (19) und (19b) kommen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\sigma} &= A \left[\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \right] - \frac{d\chi}{dx}, \\ \frac{\mu}{\sigma} &= A \left[\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \right] - \frac{d\chi}{dy}, \\ \frac{\nu}{\sigma} &= A \left[\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \right] - \frac{d\chi}{dz}, \end{aligned} \right\} \quad (19f)$$

endlich, wenn wir mit E die freie Elektrizität bezeichnen:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \quad (19g)$$



Kennt man von den veränderlichen Grössen $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu, E$ durch den ganzen Raum, so ist aus den drei ersten u, v, w mittels der Gleichungen (18a) zu finden, der freie Magnetismus durch (19a), und es sind alsdann $\varphi, \chi, U, V, W, L, M, N$ durch Quadraturen zu berechnen, so dass die sieben vorstehenden Gleichungen (19e), (19g) und (19f) zur Bestimmung der vorgenannten sieben Unbekannten als Functionen der Zeit dienen können.

Um aus diesen Gleichungen die Integrale zu entfernen, und sie in reine Differentialgleichungen zu verwandeln, erinnere ich an folgende Sätze:

Wenn man drei Functionen ξ, η, ζ von x, y, z hat, und für alle Orte innerhalb eines gewissen einfach zusammenhängenden Raumes S die drei Gleichungen erfüllt sein sollen:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad (20)$$

so folgt daraus, dass innerhalb des Raumes S sei:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} &= 0, \\ \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} &= 0, \\ \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} &= 0, \\ \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

Es lässt sich nun zeigen, dass das System der Gleichungen (20a) das System der Gleichungen (20) vollständig ersetzt, wenn die Bedingungen hinzugefügt werden:

1) dass ξ, η, ζ im ganzen Raume S endlich und stetig seien,

2) dass an der Oberfläche von S sei:

$$\xi \cdot \cos a + \eta \cdot \cos b + \zeta \cdot \cos c = 0, \quad (20b)$$

wo a, b, c die Winkel sind, welche die Normale N der Oberfläche von S mit den Coordinatenachsen macht.

Aus den ersten drei Gleichungen des Systems (20a) folgt nämlich direct, dass es eine Function Ψ von x, y, z geben müsse, von der Beschaffenheit, dass:

$$\xi = \frac{d\Psi}{dx}, \quad \eta = \frac{d\Psi}{dy}, \quad \zeta = \frac{d\Psi}{dz}.$$

Dann ergibt die letzte der Gleichungen (20a):

$$\Delta\Psi = 0,$$

und die Gleichung (20b), dass an der ganzen Oberfläche des Raumes S :

$$\frac{d\Psi}{dN} = 0.$$

Da der Raum S der Voraussetzung nach einfach zusammenhängend, und die Grössen ξ, η, ζ überall endlich und stetig sein sollen, so genügen diese Bedingungen nach bekannnten Gesetzen über die Potentialfunctionen, um zu zeigen, dass im ganzen Raume S :

$$\begin{aligned} \Psi &= \text{Const.}, \\ \xi &= \eta = \zeta = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Wenden wir diese Sätze auf das System der Gleichungen (19e), und dann auch auf das der Gleichungen (19f) an, betrachten wir dabei den unendlichen Raum als den Raum S , und berücksichtigen wir, dass aus (19c), (19a) und (19a*) folgt:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = -\chi,$$

so erhalten wir folgende Systeme von Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{\eta}{\epsilon} \right) &= \frac{1+4\pi\vartheta}{9} \cdot A \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}, \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{\eta}{\epsilon} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right) &= \frac{1+4\pi\vartheta}{9} \cdot A \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\chi}{dz} - \frac{d\beta}{dx}, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\eta}{\epsilon} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right) &= \frac{1+4\pi\vartheta}{9} \cdot A \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\chi}{dy}, \end{aligned} \right\} \quad (20c)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\chi}{\epsilon} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\eta}{\epsilon} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right) \\ = -A\varphi + A^2 \cdot k \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\chi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\beta}{dz}, \end{aligned} \right\} \quad (20d)$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(\frac{v}{\vartheta} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) &= A \cdot \left[\frac{d^2 q}{dx \cdot dt} - 4\pi \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{4\pi}{\kappa \varepsilon} \cdot \chi \right], \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{\lambda}{\vartheta} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{v}{\vartheta} \right) &= A \cdot \left[\frac{d^2 q}{dy \cdot dt} - 4\pi \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{4\pi}{\kappa \varepsilon} \cdot \eta \right], \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\lambda}{\vartheta} \right) &= A \cdot \left[\frac{d^2 q}{dz \cdot dt} - 4\pi \cdot \frac{dz}{dt} - \frac{4\pi}{\kappa \varepsilon} \cdot \delta \right], \end{aligned} \right\} (20e)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda}{\vartheta} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{v}{\vartheta} \right) = -A\chi. \quad (20f)$$

Dazu kommen noch die Bedingungen für die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes:

$$\chi = \eta = \delta = \lambda = \mu = v = q = \chi = 0.$$

Ferner die Bedingung, dass die in (19e) und (19f) gleich Null gesetzten Grössen überall stetig und endlich seien. Da nun dies für die Grössen U, V, W, L, M, N und ihre Differentialquotienten schon nach der für sie vorgeschriebenen Bildungsweise durch Integration der Fall ist, so oft $u, v, w, \lambda, \mu, \nu$ überall endlich sind, so reduciren sich die Bedingungen der Stetigkeit darauf, dass die sechs Grössen:

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{\varepsilon} + \frac{dq}{dx} - \chi, & \quad \frac{\lambda}{\vartheta} + \frac{d\chi}{dx}, \\ \frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{dq}{dy} - \eta, & \quad \frac{\mu}{\vartheta} + \frac{d\chi}{dy}, \\ \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{dq}{dz} - \delta, & \quad \frac{v}{\vartheta} + \frac{d\chi}{dz} \end{aligned}$$

überall stetig seien, namentlich auch an solchen Flächen, wo ε, ϑ und χ unstetig sind.

Da χ an solchen Flächen stetig ist, so ist:

$$\frac{d}{dx}(\chi - \chi_1) = \cos a \frac{d}{dN}(\chi - \chi_1) \text{ u. s. w.}$$

Wir haben ferner nach der Gleichung (19a*):

$$\left. \begin{aligned} (\lambda - \lambda_1) \cdot \cos a + (\mu - \mu_1) \cdot \cos b + (\nu - \nu_1) \cdot \cos c \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dN}(\chi - \chi_1) \end{aligned} \right\} (20g)$$

und nach den Stetigkeitsbedingungen somit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\vartheta} - \frac{\lambda_1}{\vartheta_1} &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \cos a \cdot \frac{d}{dN}(\chi - \chi_1), \\ \frac{\mu}{\vartheta} - \frac{\mu_1}{\vartheta_1} &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \cos b \cdot \frac{d}{dN}(\chi - \chi_1), \\ \frac{\nu}{\vartheta} - \frac{\nu_1}{\vartheta_1} &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \cos c \cdot \frac{d}{dN}(\chi - \chi_1). \end{aligned} \right\} (20h)$$

Aus den Gleichungen (20g) und (20h) kann $\chi - \chi_1$ unmittelbar eliminirt werden. Dann kommt χ nur noch in der Gleichung (20f) vor. Es können also aus den Gleichungen (20c), (20d), (20e) und den Stetigkeitsbedingungen die anderen unbekannten Grössen bestimmt werden, ohne auf χ Rücksicht zu nehmen.

Sind die Kräfte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ an der betreffenden Fläche stetig, oder ist nur ihre senkrecht zur Fläche gerichtete Resultante $\mathfrak{P}$ unstetig, so erhalten wir für die χ, η, δ ein ähnliches System von Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\chi}{\varepsilon} - \frac{\chi_1}{\varepsilon_1} &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \cos a \left[\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 + \frac{d}{dN}(\varphi - \varphi_1) \right], \\ \frac{\eta}{\varepsilon} - \frac{\eta_1}{\varepsilon_1} &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \cos b \left[\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 + \frac{d}{dN}(\varphi - \varphi_1) \right], \\ \frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\delta_1}{\varepsilon_1} &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \cos c \left[\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 + \frac{d}{dN}(\varphi - \varphi_1) \right]. \end{aligned} \right\} (20i)$$

Dass die Gleichungen (20c) bis (20i) mit Ausschluss von (20f) ¹²⁵ die Lösung eindeutig bestimmen, wenn k nicht negativ ist, ergibt sich aus der Gleichung der lebendigen Kraft, die wir deshalb hier zunächst aufstellen wollen.

Für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken, also:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0,$$

erhält man die Gleichung der lebendigen Kraft, indem man die Gleichungen (20c) der Reihe nach mit $\lambda/\vartheta, \mu/\vartheta, \nu/\vartheta$ multiplicirt und addirt, dann ebenso die Gleichungen (20e) der Reihe nach mit $\chi/\varepsilon, \eta/\varepsilon, \delta/\varepsilon$ multiplicirt und addirt, die letztere Summe von der ersteren abzieht. Die Glieder der linken Seite lassen sich dann integrieren, und ihr Integral wird wegen der Stetigkeitsbedingungen (20h) und (20i) gleich Null. Die Glieder



der der rechten Seite, welche q enthalten, können durch eine partielle Integration mit Rücksicht auf (20d) umgeformt werden, und man erhält endlich:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint \left\{ \frac{1+4\pi\vartheta}{g^2} \cdot [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] + \frac{4\pi}{g} [x^2 + y^2 + z^2] \right. \\ & + \left[\left(\frac{dq}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dq}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dq}{dz} \right)^2 \right] + A^2 \cdot k \cdot \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ & = - \iiint \frac{4\pi}{x \cdot y \cdot z} [x^2 + y^2 + z^2] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ & = - \iiint x [u_x^2 + v_x^2 + w_x^2] \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned} \right\} \quad (20k)$$

Aus dieser Gleichung sind entsprechende Folgerungen, wie aus der früheren (5a) zu ziehen. Bezeichnen wir das Integral, dessen nach der Zeit genommener Differentialquotient die linke Seite der Gleichung (20h) bildet, mit Φ , so ist Φ nothwendig immer positiv, wenn k positiv ist. Sein Werth muss aber während des Ablaufs der Bewegung nothwendig immer kleiner werden. Ist derselbe Null, so muss er Null bleiben.

Daraus folgt, dass, wenn ausser den Kräften $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ die Anfangswerthe von:

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \lambda, \mu, \nu, q, \frac{dq}{dt}$$

durch den ganzen Raum gegeben sind, die Gleichungen (20c) bis (20i) die Bewegung eindeutig bestimmen.

Ist $k = 0$, so fällt dq/dt aus diesen Bestimmungsstücken weg.

Um die Art der durch diese Gleichungen angezeigten Bewegungszustände anschaulicher zu machen, wollen wir sie auf einen Körper S anwenden, in dessen Innerem ε und ϑ constant sind und $\infty = \infty$ ist; ferner $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$. Wir erhalten dann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dy} - \frac{dy}{dz} &= A \cdot \varepsilon \cdot \frac{1+4\pi\vartheta}{g} \cdot \frac{d\lambda}{dt}, \\ \frac{d\lambda}{dz} - \frac{dz}{dx} &= A \cdot \varepsilon \cdot \frac{1+4\pi\vartheta}{g} \cdot \frac{d\mu}{dt}, \\ \frac{d\mu}{dx} - \frac{dx}{dy} &= A \cdot \varepsilon \cdot \frac{1+4\pi\vartheta}{g} \cdot \frac{d\nu}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\frac{1}{g} \left[\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dz} + \frac{dz}{dx} \right] = -Aq + A^2 \cdot k \cdot \frac{d^2 q}{dt^2}. \quad (21a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\nu}{dy} - \frac{d\mu}{dz} &= A \cdot \vartheta \cdot \left[\frac{d^2 q}{dx \cdot dt} - 4\pi \cdot \frac{dx}{dt} \right], \\ \frac{d\lambda}{dz} - \frac{d\nu}{dx} &= A \cdot \vartheta \cdot \left[\frac{d^2 q}{dy \cdot dt} - 4\pi \cdot \frac{dy}{dt} \right], \\ \frac{d\mu}{dx} - \frac{d\lambda}{dy} &= A \cdot \vartheta \cdot \left[\frac{d^2 q}{dz \cdot dt} - 4\pi \cdot \frac{dz}{dt} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21b)$$

Wenn wir aus (21) neue Gleichungen bilden, nach der Weise wie (20a) aus (20) gebildet ist, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} A\mathfrak{X} &= 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2 \frac{d^2 x}{dt^2} \\ &+ \left[1 - \frac{(1+4\pi\vartheta)(1+4\pi\varepsilon)}{k} \right] \frac{d}{dx} \left[\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dz} + \frac{dz}{dx} \right] \end{aligned} \right\} \quad (21c)$$

Die entsprechenden Gleichungen für $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ erhält man, indem man in (21c) x und x beziehlich mit y und y , oder mit z und z vertauscht.

In ähnlicher Weise erhält man für die magnetischen Momente:

$$\left. \begin{aligned} A\lambda &= 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2 \cdot \frac{d^2 \lambda}{dt^2}, \\ A\mu &= 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2 \cdot \frac{d^2 \mu}{dt^2}, \\ A\nu &= 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2 \cdot \frac{d^2 \nu}{dt^2}, \\ \frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21d)$$

In den Gleichungen (21c) sind die elektrischen Verschiebungen in einem dielektrischen Isolator durch ganz dieselben Gleichungen gegeben, wie die Verschiebungen der wägbaren Theilchen in einem festen elastischen Körper, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beträgt:

für die Transversalwellen:

$$\frac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}},$$

für die Longitudinalwellen:

$$\frac{1}{A} \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon \cdot k}}.$$



Die Gleichungen (21d) dagegen für die magnetischen Verschiebungen entsprechen denen im Inneren eines incompressiblen elastischen Körpers, in welchem die Geschwindigkeit der Transversalwellen dieselbe ist, wie die angegebene der elektrischen Verschiebungen, die Geschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen dagegen unendlich gross. Es ergeben diese Gleichungen, wie schon Hr. Maxwell für den von ihm behandelten Grenzfall ($k=0$, ϵ und ϑ unendlich gross) gezeigt hat, dass bei den Transversalwellen die elektrische Oscillation in der einen Polarisationssebene, die magnetische in der darauf senkrechten geschieht.

Um zu ermitteln, was unter Annahme eines dielektrischen Raumes der gemessene Werth der Constante A bedeute, müssen wir noch den Fall der gut leitenden Körper untersuchen, wenn z so klein ist, dass die durch die Polarisation entstehende Geschwindigkeit dy/dt gegen die von der Leitung abhängende $x/z\epsilon$ verschwindet. Unter dieser Annahme ergeben die Gleichungen (20c) bis (20e) bei eben solcher Behandlung, wie für den Isolator:

$$x \Delta u = (1 + 4\pi\vartheta) 4\pi A^2 \frac{du}{dt} - \frac{d}{dx} \left\{ A\varphi + (1 + 4\pi\vartheta - k) A^2 \frac{d^2 y}{dt^2} \right\}$$

u. s. w.

Die beiden anderen erhält man, indem man u und x mit v und y , oder mit w und z vertauscht.

Vergleicht man diese mit denen, welche durch die Operation Δ aus (3b) gebildet werden:

$$x \Delta u = 4\pi A^2 \frac{du}{dt} - \frac{d}{dx} \left\{ A\varphi + (1 - k) A^2 \frac{d^2 y}{dt^2} \right\}$$

u. s. w.,

so sieht man, dass nur die Constanten verschieden sind. Statt A^2 der letzteren steht in der ersten $A^2(1 + 4\pi\vartheta)$, und statt k der letzteren steht:

$$\frac{k}{1 + 4\pi\vartheta}$$

in der ersteren. Ist also das Medium magnetisierbar, so erscheint der Werth der Constante k darin verkleinert in dem angegebenen Verhältniss.

Andererseits erscheint die Constante A^2 , wenn in einem ¹²⁸ magnetisierbaren Medium experimentirt wird, vergrößert durch ihre Multiplication mit dem Factor $(1 + 4\pi\vartheta)$. Da wir nun durch alle statischen Versuche über magnetische Vertheilung nur immer das Verhältniss der Werthe von $(1 + 4\pi\vartheta)$ für verschiedene Stoffe zu einander, oder zu dem nur mit Lichtäther gefüllten sogenannten Vacuum ermitteln können, so finden wir durch Versuche im Luftraum oder Vacuum immer nur das Product der Constante A^2 mit dem Factor $(1 + 4\pi\vartheta_0)$, wenn wir mit ϑ_0 den unbekannten Werth dieses Coefficienten für den Luftraum bezeichnen.

Ferner ist schon oben nachgewiesen worden, dass die Quantitäten Elektricität, welche strömen, nach elektrostatischen Einheiten bestimmt im Verhältniss $\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} : 1$ verkleinert erscheinen, und ebenso alle nach elektrostatischer Einheit gemessenen Strömeinheiten. Dagegen erscheint der Widerstand z im Verhältniss $1 : (1 + 4\pi\epsilon_0)$ vergrößert und ebenso die Constante A^2 . Ist also $\mathfrak{A}$ der im Luftraume gefundene, der Lichtgeschwindigkeit nahe gleiche Werth von $1/A$, so ist der wahre Werth:

$$\frac{1}{A} = \mathfrak{A} \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} \cdot \sqrt{1 + 4\pi\vartheta_0},$$

und der Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in einem isolirenden Medium wird:

$$\text{longitudinal: } \mathfrak{A} \sqrt{\frac{(1 + 4\pi\epsilon)(1 + 4\pi\epsilon_0)(1 + 4\pi\vartheta_0)}{4\pi\epsilon k}},$$

$$\text{transversal: } \mathfrak{A} \sqrt{\frac{(1 + 4\pi\epsilon_0)(1 + 4\pi\vartheta_0)}{4\pi\epsilon(1 + 4\pi\vartheta)}}.$$

In der Luft selbst werden diese Werthe:

$$\text{longitudinal: } \mathfrak{A} (1 + 4\pi\epsilon_0) \sqrt{\frac{1 + 4\pi\vartheta_0}{4\pi\epsilon_0 k}},$$

$$\text{transversal: } \mathfrak{A} \sqrt{\frac{1 + 4\pi\vartheta_0}{4\pi\epsilon_0}}.$$

Für die elektrodynamische Induction erweist es sich also nicht als gleichgültig, wie es bei den elektrostatischen Phänomenen der Fall war, ob der Luftraum ein Diëlectricum ist oder nicht, sondern es hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der indu-



girenden Wirkung von der absoluten Grösse von ϵ_0 ab, und ϵ_0 würde durch experimentelle Bestimmung dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Transversalwellen im Luft-
raume bestimmt werden können. Diese Geschwindigkeit müsste
129 der vorliegenden Theorie nach grösser sein, als die aus Herrn
W. Weber's Versuchen bestimmte Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$, und
dieser nur gleich werden können, wenn die dielektrische Polari-
sationsconstante der Luft ϵ_0 unendlich gross gegen $1/4\pi$ wäre.
Es geht daraus hervor, dass die bisher vorliegenden Erfah-
rungen auch ohne wesentliche Aenderungen in den Grund-
zügen der acceptirten Theorie der Elektrodynamik eine Aus-
breitung der elektrischen Fernwirkungen mit endlichen Ge-
schwindigkeiten als möglich erscheinen lassen; und zwar würden
sich die elektromagnetischen Wirkungen dabei mit einer der
Lichtgeschwindigkeit gleichen oder grösseren Geschwindigkeit
ausbreiten, während die Ausbreitung der elektrostatischen von
der unbekannten Constante k abhängig bliebe.

Heidelberg, 1870.

XXXIII.

Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektro- dynamischen Wirkungen.

Aus: Monatsberichte der Berliner Akademie vom 25. Mai 1871. S. 292—298.

Die Frage, wie die elektrodynamischen Fernwirkungen zu 292
Stande kommen, ob nach Hrn. W. Weber durch unmittelbar
in die Ferne wirkende Kräfte der bewegten elektrischen Theil-
chen selbst, die aber von den Geschwindigkeiten und Beschleu-
nigungen dieser Theilchen in Richtung ihrer Verbindungslinie
abhängen, oder nach Hrn. C. Neumann (Sohn) durch Kräfte,
die sich mit endlicher Geschwindigkeit im Raume verbreiten,
oder ob sie nach Faraday und Hrn. Maxwell erst mittelbar
durch eine Veränderung des den Raum füllenden Mediums be-
dingt werden, hat in neuester Zeit viele Forscher beschäftigt.
Sie ist in der That eine Frage von principieller Wichtigkeit
für die Grundlagen der Naturwissenschaft. Nach den beiden
zuletzt bezeichneten Ansichten würden die elektrodynamischen 293
Fernwirkungen elektrischer Ströme nicht augenblicklich zu
Stande kommen, sondern der Antrieb zu ihnen würde sich mit
endlicher Geschwindigkeit durch den Raum verbreiten. Aller-
dings ist in Hrn. Neumann's und Hrn. Maxwell's Theorien
diese Geschwindigkeit nach den Ergebnissen der elektrodyna-
mischen Maassbestimmungen nahe gleich der Lichtgeschwindig-
keit gesetzt worden. Indessen zeigte die von mir kürzlich¹⁾
veröffentlichte Discussion der elektrodynamischen Theorien.

1) In vorstehendem Aufsatz.



dass je nach den Annahmen, die man über die magnetische und dielektrische Polarisationsfähigkeit der Luft macht, auch andere Werthe dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich mit den übrigen Thatsachen vereinigen lassen.

Unterdessen ist nun von Hrn. P. Blaserna¹⁾ eine grosse Reihe von Versuchen veröffentlicht worden, aus denen derselbe schliesst, dass die Fortpflanzung wenigstens der inducirenden Wirkungen elektrischer Ströme in der Luft mit einer sehr mässigen Geschwindigkeit vor sich ginge. Nach den Versuchen mit Oeffnungsinductionsschlägen, die Hr. Blaserna als die zuverlässigeren betrachtet, würde diese Geschwindigkeit in der Luft nur 550 m, im Gummilack sogar nur 330 m betragen, also im letzteren der Geschwindigkeit des Schalles in der Luft ungefähr gleich sein. Aus den Versuchen mit Schliessungsinduction hatte der Genannte sogar noch viel kleinere Geschwindigkeiten gefolgert; indessen hat er selbst anerkannt, dass in diesem Falle die Rückwirkung der inducirten Spirale auf die inducirende die Deutung des Ergebnisses seiner Versuche zweifelhaft mache.

Zu bemerken ist nun, dass bei diesen Versuchen nur sehr kleine Distanzen der inducirenden und inducirten Spirale angewendet worden sind, zwischen einem und drei Centimeter wechselnd; beide Spiralen waren übrigens flach gewunden. Die der Fortpflanzung durch den Zwischenraum von zwei Centimeter entsprechende Zeit betrug in den Versuchen mit Oeffnungsinduction nur $\frac{22}{1000}$ Secunde. Abgesehen von den Unregelmässigkeiten, die die immer sprungweise unterbrochene Berührung eines schleifenden Contactes zwischen festen Metallen bei feinen zeitmessenden Versuchen herbeiführt, schien mir zweifelhaft, ob so kleine Zeitunterschiede nicht von der verschiedenen Dauer des Funkens an der Unterbrechungsstelle des inducirenden Stromes bedingt sein könnten. Ich habe mich in den unten zu beschreibenden eigenen Versuchen überzeugt, dass selbst unter viel ungünstigeren Verhältnissen, als sie in Hrn. Blaserna's Versuchen gegeben waren, der Unterbrechungsfunklen die Dauer von $\frac{1}{1000}$ Secunde erreichen kann; die Herren

1) Giornale di Scienze Naturali ed Economiche. Vol. VI. 1870. Palermo.

Lucas und Cazin fanden kürzlich $\frac{1}{30000}$ für grössere elektrische Batterien mit 2,292 mm Schlagweite, $\frac{1}{15000}$ bei 5 mm Schlagweite.¹⁾ Während Hr. Blaserna mehrere Bunsen'sche Elemente zur Erzeugung des Stromes verwendete, habe ich nur ein Daniel'sches angewendet, und während seine Spiralen eng zusammengedrängte Drahtwindungen enthielten, hatte die meinige eine sehr grosse Peripherie und wenige Windungen, war also zur Erzeugung eines starken Extracurrents viel weniger geeignet. Dennoch erreichte die Dauer des Funkens die angegebene Grösse. Beachtet man nun, dass die Intensität des Funkens durch Annäherung einer zweiten Spirale, in der ein Inductionsstrom zu Stande kommt, wie bekannt, erheblich vermindert wird, weil der inducirte Strom hemmend auf den inducirenden wirkt, und dass Hrn. Blaserna's Spiralen einander immer verhältnissmässig sehr nahe standen: so tritt der Zweifel ein, ob nicht die längere Dauer des Funkens eine scheinbare Verzögerung der Wirkung bei grösserem Abstände der Spiralen hervorgebracht hat.

Da ich seit längerer Zeit mit Versuchen über den Verlauf sehr kurz dauernder elektrischer Ströme beschäftigt war, und Apparate zu diesem Zwecke hatte anfertigen lassen, so schien es mir vor allen Dingen nöthig zu prüfen, ob die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Wirkungen wirklich einen so niedrigen Werth habe, wie ihn Hr. Blaserna erschlossen hat. Meine bisher ausgeführten Versuche beziehen sich auf die Fortpflanzung der Wirkung durch Luft allein. Der sehr merkwürdige Einfluss, den die elektrischen Isolatoren in den Versuchen des italienischen Forschers gezeigt haben, erfordert noch weiteres Studium. Dass auch in Isolatoren sehr kurz dauernde elektrische Bewegungen vorkommen, welche unter Umständen wohl inducirend auf die Nachbarschaft wirken können, ähnlich der Bewegung des Magnetismus im Eisen, erscheint bei dem Einflusse, den solche Medien als Diëlektrica haben, sehr wahrscheinlich. Vorläufig habe ich diese Seite der Frage nicht verfolgt.

1) Hr. J. Bernstein in einer eng gewickelten Spirale von feinem Draht $\frac{1}{100000}$. (Pogg. Annalen CXLII. S. 65.)



Der von mir gebrauchte Unterbrechungsapparat für die Stromleitungen bestand aus einem schweren und festen eisernen Pendel, dessen Träger in die Mauer eingelassen war, und welches immer aus gleicher Höhe fallen gelassen wurde. Am unteren Ende trug es zwei mit Achatplatten belegte Hervorragungen, welche in dem Augenblicke, wo das Pendel durch die Gleichgewichtslage ging, gegen die stählernen Enden zweier leichten Hebelchen schlugen, durch deren Bewegung zwei Stromleitungen unterbrochen wurden. Das eine dieser Hebelchen ruhte auf einer festen Unterlage, das andere auf einem Schlitten, der durch eine Mikrometerschraube verschoben werden konnte, so dass der Anschlag an dieses verschiebbare Hebelchen um beliebige kleine Zeiträume bald früher, bald später erfolgte, als an das andere. Der Zeitunterschied wurde berechnet aus der mikrometrisch gemessenen Verschiebung der Anschlagspunkte und aus der Geschwindigkeit des fallenden Pendels; letztere aus seiner Schwingungsdauer und dem Schwingungsbogen. Ein Theilstrich am Kopfe der Mikrometerschraube entsprach $\frac{231}{170}$ Secunde. Genauere Ablesungen zu machen, wäre bei der bisherigen Einrichtung wegen der ungleichmässigen Dauer des Funkens ohne Nutzen gewesen.

Da es mir darauf ankam, möglichst grosse Entfernungen der Spiralen zu gebrauchen, so habe ich diesen die Form von Ringen von etwa 80 cm Durchmesser gegeben. Die inducirende Spirale hatte nur $12\frac{1}{2}$ Windungen eines Kupferdrahtes von 1 mm Dicke, mit einer $\frac{1}{2}$ mm dicken Schicht von Guttapercha überzogen. Die inducirte Spirale dagegen hatte 560 Windungen eines mit Seide besponnenen Kupferdrahtes von $\frac{1}{4}$ mm Durchmesser. Diese Spirale konnte bis auf 170 cm von der inducirenden entfernt werden, ohne dass die inducirende Wirkung aufhörte deutlich zu sein. Aber auch die nächste Entfernung, in welche beide Rollen gebracht wurden, betrug immer noch 34 cm, um die Rückwirkung des inducirten auf den inducirenden Strom unwahrnehmbar klein zu machen, was auch, so weit es aus den zeitmessenden Versuchen beurtheilt werden kann, gelungen war.

²⁹⁶ Die Anordnung bei den Versuchen war folgende: Der inducirende Stromkreis enthielt ein Daniell'sches Element,

die kleinere Spirale und die zuerst angeschlagene Unterbrechungsstelle. Durch deren Anschlag wurde er aufgehoben, und seine Unterbrechung wirkte inducirend auf den nun allein übrig bleibenden zweiten Stromkreis.

Dieser war nicht vollständig geschlossen, sondern seine Enden führten zu einem Condensator nach Kohlrausch mit zwei vergoldeten Metallscheiben, die bis auf $\frac{1}{3}$ mm einander genähert waren. Dieser Kreis bestand aus der grösseren Drahtspirale, deren eines Ende unmittelbar mit der zur Erde abgeleiteten festen Platte des Condensators verbunden war. Das zweite Ende stand durch das zweite Unterbrechungshebelchen mit der isolirten beweglichen Platte des Condensators in Verbindung. Die durch Induction in Bewegung gesetzte Elektrizität strömte also in den Condensator ein bis zu dem Moment, wo die zweite Unterbrechungsstelle aufgeschlagen wurde. Von da ab war die bewegliche Condensatorplatte isolirt und behielt die empfangene Ladung.

Deren Grösse und Art wurde dann an einem nach Sir W. Thomson's Princip construirten Elektrometer, nach Entfernung der beiden Condensatorplatten voneinander, gemessen.

Der Vorgang, der hierbei der Beobachtung unterworfen wurde, ist also die Reihe der nach Unterbrechung des primären Stromes zurückbleibenden elektrischen Oscillationen in der inducirten und mit dem Condensator verbundenen Spirale. Da diese Oscillationen von der einen zur anderen Condensatorplatte in einer übrigens ununterbrochenen Leitung ohne Funkenstrecke vor sich gehen, so verlaufen sie viel regelmässiger und sind viel zahlreicher, als die in den Schliessungsbögen von Leydener Batterien beobachteten. Die Länge meines Mikrometers erlaubte mir bei 34 cm Entfernung zwischen den Spiralen bis zu 35 positiven und ebenso vielen negativen Phasen abzulesen. Die Dauer einer ganzen Oscillation (positiv und negativ zusammen) betrug $\frac{231}{111}$ Secunde, die Gesamtdauer der 35 beobachteten Oscillationen also $\frac{1}{50}$ Secunde; und sie waren da, wo ich die Beobachtungen abbrechen musste, noch keineswegs so schwach, dass sich nicht bei grösserem Spielraume des Mikrometers noch eine lange Reihe derselben hätte beobachten lassen.



Versuche, bei denen ich den Abstand der Condensatorplatten, und somit die elektrische Capacität des Condensators veränderte, ergaben, dass die Oscillationsdauer nur sehr wenig durch die Capacität des Condensators beeinflusst war. Ich habe schon in einer früheren Mittheilung¹⁾ darauf hingewiesen, dass auch eine eng gewundene Spirale selbst als Condensator wirkt, indem die Windungen des einen Endes positiv, die des anderen negativ geladen werden, und nur durch die sehr dünnen Schichten der isolirenden Seide von ihren weniger stark positiv oder negativ geladenen Nachbarschichten getrennt sind; daher häuft sich an beiden Seiten der isolirenden Schicht eine elektrische Belegung an. Da die Verringerung der Capacität des Condensators so wenig Einfluss auf die Schwingungsdauer hatte, folgt, dass die condensatorische Capacität der Spirale die des Condensators sehr beträchtlich übertroffen haben muss.

Um die etwaige Verzögerung der Fernwirkung zu entdecken, war es nöthig einen mit sehr grosser Schärfe zu bestimmenden ausgezeichneten Punkt im Verlaufe der elektrischen Oscillationen zu entdecken. Der erste Moment des Anfanges war hierzu ungeeignet, da, wie es scheint, der Strom mit der Ansteigungsgeschwindigkeit Null beginnt, und diese nur allmähig wächst; daher die Stromstärke im Anfang höchstens dem Quadrate der Zeit proportional zunimmt. Der Grund hiervon ist darin zu suchen, dass auch der primäre Strom während der Funkendauer nur allmähig verschwindet, und daher die inducirte elektromotorische Kraft im secundären Kreise keineswegs plötzlich vollständig entwickelt da ist, sondern selbst erst continuirlich anwächst. Die Funkendauer ist aber in unserem Falle etwa dem zehnten Theile einer ganzen Oscillationsperiode gleich, also keineswegs unbeträchtlich.²⁾ Ihre

1) Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg, 30. April 1869 (oben Nr. XXX). In den früheren Beobachtungen hatte ich mit Hilfe des stromprüfenden Froschschenkels bis zu 45 Oscillationen constatirt, deren Gesamtdauer $\frac{1}{3}$ Secunde betrug.

2) Die relativ langsame Abnahme der Intensität des primären Stromes während des Funkens ist auch offenbar der Grund, warum, wie ich früher gefunden, in einer inducirten Spirale mit mehr als 7000 elektrischen Oscillationen auf die Secunde die letzteren so schwach ausfallen. Für die kurze Schwingungsdauer ist dann die Unterbrechung nicht jäh genug.

mittlere Länge bestimmt sich, wenn man die Zeit zwischen dem Anschlag des Pendels, welcher die primäre Leitung unterbricht, und dem ersten Nullpunkt des Stromes vergleicht mit der Zeit zwischen den folgenden Nullpunkten. Die erstere Grösse ist länger, weil sie ausser einer halben Oscillationsdauer auch noch die Funkendauer umfasst, und deren Betrag kann durch eine solche Vergleichung annähernd gefunden werden.

Dagegen sind die folgenden Nullpunkte des Stromes sehr scharf zu bestimmen, selbst bei der entfernteren Stellung der secundären Spirale. Da die Funkendauer selbst bei so schwachen elektromotorischen Kräften und so windungsarmen Spiralen, wie ich im primären Kreise angewendet habe, niemals constant ist, wovon der Grund wohl in der Fortschleuderung von Platintheilchen durch den Funken zu suchen ist: so sind die Ausschläge in dem dem Nullpunkte entsprechenden Theilstriche selbst bei guter Einrichtung des Apparates bald positiv, bald negativ, dagegen an den vorhergehenden und nachfolgenden Theilstrichen, entweder ausschliesslich oder doch überwiegend in einer bestimmten Richtung.

Bei der beschriebenen Anordnung, auf die ich nach langem Herumtastengekommen war, zeigte sich nun, dass die grössere Entfernung der beiden Spiralen von 136 cm die Lage der Nullpunkte des inducirten Stromes nicht um einen Theilstrich des Mikrometers, das heisst, nicht um $\frac{1}{231170}$ einer Secunde veränderte. Pflanzen sich also die inducirenden Wirkungen wirklich mit einer angebbaren Geschwindigkeit fort, so muss diese grösser sein als 314 400 m, oder etwa 42,4 geograph. Meilen in der Secunde.

Zu einer weiteren Verfeinerung dieser Messungen habe ich Vorbereitungen getroffen; wie weit dieselbe zu treiben sein wird, wird, wie mir scheint, hauptsächlich davon abhängen, wie weit der Funken an der Unterbrechungsstelle zu reduciren sein wird, wenn man dem primären Kreise sehr geringen Widerstand und sehr geringe elektromotorische Kraft giebt, und die ihn bildenden Drahtwindungen möglichst weit von einander entfernt.



XXXIV.

Ueber die Theorie der Elektrodynamik.

Aus: Monatsberichte der Berliner Akademie vom 18. April 1872.
S. 247—256. (Vorläufige Anzeige des folgenden Aufsatzes.)

247 Die Theorie der elektrodynamischen Wirkungen hat ausser ihrem unmittelbaren Interesse für das Verständniss dieses wichtigen und reichen Zweiges der Physik ein noch bedeutenderes und allgemeineres für die Grundprincipien der Mechanik überhaupt. Die übrigen bekannten Wirkungen in die Ferne lassen sich leicht und vollständig auf anziehende und abstossende Kräfte von Massenpunkten zurückführen, wobei die Intensität dieser Kräfte nur von den gegenseitigen Entfernungen der betreffenden Punkte, nicht von ihrer Bewegung abhängt. Auch die bis jetzt bekannten Wirkungen zwischen den Molekeln lassen sich entweder ganz auf solche Kräfte zurückführen, oder sind doch wenigstens in ihrer ganzen Erscheinungsweise den Wirkungen, welche die Schwere hervorbringt, so ähnlich, dass wir keine Schwierigkeit finden, sie uns als Wirkungen von Kräften ähnlichen Charakters vorzustellen. Allein die elektrodynamischen machen eine Ausnahme; sie bilden eine Classe von Fernwirkungen, die nur durch einen Bewegungszustand des wirkenden Agens, der Elektricität, hervorgebracht werden, einen Bewegungszustand, der sich als solcher durch eine ganze Reihe von Erscheinungen, durch Wärmeentwicklung in den Stromleitern, durch chemische Zersetzung in den flüssigen Leitern u. s. w. zu erkennen giebt. Die factischen Gesetze der Erscheinungsweise dieser Kräfte sind der Hauptsache nach gut bekannt und von Hrn. F. E. Neumann (dem Vater)

auf einen verhältnissmässig einfachen Ausdruck zurückgeführt worden, welcher aber nicht die Wirkung von Massenpunkt auf Massenpunkt, sondern von einem linearen Stromelement auf das andere giebt. Ich selbst habe den Neumann'schen Potentialausdruck in einem im 72. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik veröffentlichten Aufsatz eine allgemeinere Form gegeben, in welcher er auch die aus den Theorien von W. Weber und Maxwell hervorgegangenen abweichenden Potentialausdrücke für je zwei Stromelemente umfasst. Für geschlossene Ströme geben alle diese Ausdrücke die gleichen Resultate; dagegen für ungeschlossene, deren Wirkungen praktisch freilich noch wenig untersucht sind, ergeben sie Unterschiede. Der Plan meiner Arbeit war, hauptsächlich diejenigen Unterschiede aufzusuchen, welche etwa bei ausführbaren Versuchen entdeckt werden könnten. Dabei ist zu bemerken, dass die verschiedenen, von mir gebildeten Potentialausdrücke sich von einander nur durch eine Constante (in meiner Arbeit mit k bezeichnet) unterscheiden. Neumann's Ausdruck erhält man, wenn man $k = +1$ setzt, Maxwell's wenn $k = 0$, W. Weber's $k = -1$. Die Untersuchung ergab, dass die Ausdrücke mit negativem k zu unmöglichen Folgerungen führten, nämlich zu einem labilen Gleichgewicht der Elektricität in Leitern, welches, wenn einmal gestört, zu unendlich grossen Stromintensitäten und unendlich grossen Ladungen führen konnte. Die Ausdrücke mit positivem k dagegen, oder mit $k = 0$, ergaben stabiles Gleichgewicht, und auch für ungeschlossene Ströme nur solche Unterschiede, wie sie mit unseren bisherigen experimentellen Hilfsmitteln kaum werden entdeckt werden können, sodass also, was in der mathematischen Fassung des Gesetzes noch zweifelhaft ist, nämlich der Werth der Constante k , für die experimentelle Anwendung zunächst noch als einflusslos erscheint.

Diese Ausdrücke für das Potential je zweier Stromelemente sind nun aber offenbar keine elementaren Ausdrücke der letzten wirkenden Kräfte; sie führen nämlich für jedes Stromelement, wenn man sich dieses als festen Körper denkt, auf mindestens zwei Kräfte, oder auf eine Kraft und ein Kräftepaar; und die Grösse, zum Theil auch die Richtung dieser Kräfte, hängt ab



nicht bloß von der Lage der Elemente, sondern auch von der Geschwindigkeit der elektrischen Ströme. Die Inductionerscheinungen sind nur indirect durch Vermittelung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie aus dem elektrodynamischen Potentiale abgeleitet.

Unter den weiter eindringenden Hypothesen, welche die elementaren Kräfte zu ermitteln suchen, die den elektrodynamischen Erscheinungen zu Grunde liegen, sind namentlich zwei zu erwähnen. Hr. Cl. Maxwell hat die Annahme von Fernkräften fallen lassen und nimmt an, dass die sämtlichen magnetischen, elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen durch Fortpflanzung molecularer Bewegungen und Kräfte in einem den Raum ausfüllenden elastischen Medium in die Ferne übertragen werden. Da die Theorie für dieses Medium schliesslich die Fähigkeit, Oscillationen auszuführen, ergiebt, die denen des Lichtes vollkommen ähnlich sind, und auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes haben, so würde dieses Medium mit dem Lichtäther zu identificiren sein. Für die Einwirkung benachbarter Volumenelemente dieses Mediums auf einander nimmt er allerdings Gesetze an, die von denen der uns bekannten elastischen Körper wesentlich abweichen. Aber er hat gezeigt, dass diese Art gegenseitiger Einwirkung, wie er sie den Volumenelementen des Aethers zuschreibt, in der That durch eine mechanische Combination fest elastischer Körper wirklich hergestellt werden könnte. Es würde dazu ein System von Zellen mit elastischen Wänden und kugeligen Hohlräumen angenommen werden müssen, in denen elastische Kugeln rotiren können, die durch die Centrifugalkraft abgeplattet werden. Zwischen ihnen müssten in den Wänden der Zellen selbst, wie Frictionsrollen, andere Kugeln von unveränderlichem Volumen liegen. Diese würden frei rotiren können, ihr Schwerpunkt aber in isolirenden Medien sich nur durch elastisches Nachgeben der Zellenwand verschieben, in leitenden Medien dagegen bei jeder Verschiebung einen einer Reibung in einer zähen Flüssigkeit ähnlichen Widerstand erleiden müssen. Die Uebertragung der Bewegung zwischen diesen Kugeln würde nur durch die Adhäsion ihrer Oberflächen aneinander geschehen. Verschiebung der zuletzt genannten Kugeln giebt dielek-

trische Polarisation des Mediums, Fortströmen derselben einen elektrischen Strom; Rotation der elastischen Kugeln entspricht der Magnetisirung des Mediums, die Rotationsaxe ist die Richtung der magnetischen Kraft.

Wenn nun auch die Vorstellung eines solchen molecularen Baues des raumfüllenden Aethers unserer Einbildungskraft als zu künstlich widerstreben mag, so scheint mir doch die Hypothese von Maxwell deshalb sehr wichtig zu sein, weil sie den Beweis führt, dass in den elektrodynamischen Erscheinungen nichts liegt, was uns zwänge sie auf eine ganz abweichende Art von Naturkräften zurückzuführen, auf Kräfte, die nicht bloß von der Lage der betreffenden Massen, sondern auch von ihrer Bewegung abhängen. In der That lässt sich aus der Annahme derjenigen gegenseitigen Reactionen der Volumenelemente des Aethers gegen einander, welche Hr. Maxwell angenommen hat, eine vollständige und mathematisch sehr elegante Theorie der sämtlichen elektrischen, magnetischen, elektrodynamischen und Inductionerscheinungen entwickeln, und dieselbe Theorie giebt auch noch von den Erscheinungen des Lichtes Rechenschaft.

Die Theorie von Hrn. Weber dagegen leitet die Erklärung²⁵⁰ der elektrodynamischen Wirkungen aus Fernkräften eigenthümlicher Art ab, welche zwischen den elektrischen Massenpunkten wirken, und gleichzeitig von den Entfernungen, den relativen Bewegungen und den relativen Beschleunigungen je zweier Punkte gegen einander abhängen sollen. Diese Theorie giebt verhältnissmässig einfache Erklärungen der elektrodynamischen Anziehungen und der Inductionswirkungen in linearen Leitern, und ihre analytischen Folgerungen stimmten für alle an linearen geschlossenen Strömen zu beobachtenden Erscheinungen vollständig mit den Folgerungen des von Hrn. F. E. Neumann aus den Erscheinungen abgeleiteten Potentialgesetzes. Die Theorie von Weber, welche älter als die erwähnte von Cl. Maxwell ist, wurde deshalb auch, namentlich von den deutschen Physikern, in sehr günstiger Weise aufgenommen. Sie hatte und behält übrigens entschieden das Verdienst eines jeden scharfsinnigen und originellen Gedankens, welcher neue Bahnen in der Wissenschaft zu betreten strebt, wenn die alten Pfade



in unentwirrbares Dickicht zu führen scheinen. Ich brauche hier wohl nicht hervorzuheben, dass der Werth eines solchen Versuches neue Wege zu eröffnen, wenn er dem Stande der Wissenschaft zu der Zeit genüge, wo er aufgestellt wurde, nicht geschmälert wird, wenn sich nach 25jährigen weiteren Fortschritten der Wissenschaft die Unmöglichkeit herausstellen sollte ihn durchzuführen. Auch dann ist ein solcher Versuch nicht fruchtlos gewesen. Eine Recognoscirung unbekannten Terrains, was neben der bisher eingehaltenen Strasse liegt, wenn sie sorgfältig und scharfsinnig durchgeführt ist, behält ihren Werth, auch wenn sie nur lehren sollte, dass ausser der grossen Strasse kein Weg existirt.

Es war durch die Weber'sche Hypothese eine für die Principien der Naturwissenschaft höchst bedeutende Frage zum ersten Male zur Prüfung an thatsächlichen Problemen gelangt, nämlich die, ob elementare, nicht weiter zerlegbare Kräfte angenommen werden müssen, die nicht blos von der Lage, sondern auch von der Bewegung der wirkenden Punkte abhängig sind. Ich selbst hatte schon in meiner Schrift: „Ueber die Erhaltung der Kraft“ hervorgehoben, dass Kräfte, die nur von der Entfernung und den Geschwindigkeiten, d. h. also von den Coordinaten der Punkte und von deren ersten Differentialquotienten abhängen, das allgemeine Naturgesetz von der Erhaltung der Energie, welches sich auch in den elektrodynamischen Erscheinungen durchaus bestätigt, nothwendig verletzen müssen. Dagegen diesen noch complicirteren Fall, welchen das Weber'sche Gesetz aufstellt, wo die Kräfte von den Coordinaten und von den ersten und zweiten Differentialquotienten derselben nach der Zeit abhängen, hatte ich damals nicht berücksichtigt, und dieser Fall ist mit einer etwas erweiterten Form des Gesetzes von der Erhaltung der Energie allerdings vereinbar. Nennen wir lebendige Kraft oder actuelle Energie, wie es immer bisher geschehen ist, die Summe der bewegten trägen Massen, jede multiplicirt mit dem halben Quadrate ihrer Geschwindigkeit, so ist in der gewöhnlichen Form des Gesetzes die Grösse, welche ich Quantität der Spannkraft, die englischen Physiker potentielle Energie genannt haben, eine Function der Coordinaten der be-

wegten Punkte allein, und das Gesetz von der Erhaltung der Energie sagt aus, dass die Summe der actuellen und potentiellen Energie bei jeder von aussen her nicht beeinflussten Bewegung eines Massensystems constant bleibe.

Findet aber unter Einwirkung äusserer Kräfte ein in sich selbst zurücklaufender Cirkelprocess statt, an dessen Ende sämtliche Punkte des Massensystems genau dieselbe Lage, und das Ganze dieselbe lebendige Kraft wie im Anfang hat, so muss die Summe der dabei von aussen empfangenen und nach aussen abgegebenen Arbeit gleich Null sein, so dass durch keine Wiederholung des Cirkelprocesses dauernd Arbeit gewonnen oder vernichtet werden kann. Wäre ersteres der Fall, so wäre dadurch ein ewig fortlaufender Gewinn von Arbeit ohne fortschreitende Veränderung des betreffenden Massensystems möglich, und ein Perpetuum mobile construierbar.

Die Weber'sche Erweiterung des Gesetzes von der Energie macht nun auch den Werth der potentiellen Energie zu einer Function nicht blos der Lage, sondern auch der Geschwindigkeiten der Massenpunkte. Auch unter dieser Annahme wird durch keinen Kreisprocess, der die sämtlichen Massen des Systems nicht blos in die anfänglichen Lagen, sondern auch alle einzeln in die anfänglichen Geschwindigkeiten zurückführt, mehr Arbeit nach aussen abzugeben als von aussen aufzunehmen sein, weil eben jene Grössen der actuellen und potentiellen Energie, welche das Maass der Arbeit bilden, zu Ende jedes solchen Kreisprocesses dieselben sind, wie zu Anfang.

Unter diesen Umständen werden aber die Werthe der Kräfte nothwendig zweite Differentialquotienten der Coordinaten enthalten müssen, weil die Summe der den einzelnen Punkten und einzelnen Coordinataxen entsprechenden Kraftcomponenten, jede multiplicirt mit der entsprechenden Geschwindigkeitscomponente, dem Differentialquotienten der potentiellen Energie nach der Zeit genommen gleich sein muss, und letzterer unter der gemachten Voraussetzung nothwendig auch die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit enthält.

In Bezug auf die vollkommenen Kreisprocesse hat Hr. Helmholtz, wissensch. Abhandlungen.



W. Weber¹⁾ den Beweis geführt, dass seine Annahme über den Werth der elektrischen Kräfte keine Erzeugung von Arbeit ohne entsprechenden Verbrauch arbeitsfähiger Kräfte zulasse.

Andererseits hatten mich Anwendungen, die ich von den aus Weber's Annahme von Kirchhoff hergeleiteten Differentialgleichungen zu machen suchte, zu der Entdeckung geführt, dass diese einem labilen Gleichgewichtszustande der Elektrizität in Leitern entsprächen, und dass danach Strömungen sich entwickeln könnten, die zu unendlichen Stromstärken und unendlichen elektrischen Dichtigkeiten führten.

Entgegnungen von Hrn. W. Weber und Hrn. C. Neumann haben mich zu einer Wiederaufnahme und Verallgemeinerung dieser Untersuchungen geführt, von denen ich der Akademie hier kurz die Resultate vorlegen will.²⁾

Wenn man eine Anzahl von beliebig vielen Massenpunkten hat, deren träge Masse mit μ_n bezeichnet werden mag, welche alle oder zum Theil auch Quanta von Elektrizität enthalten, die, nach elektrostatischem Maass gemessen, mit e_n bezeichnet werden mögen, wenn ferner r_{nm} die Entfernung der Punkte n und m ist, und q_n die resultirende Geschwindigkeit des Punktes n , ϑ_{nm} der Winkel, den sie mit der über n hinaus verlängerten Richtung der Linie r_{nm} macht, so ist der Werth:

1) des elektrostatischen Potentials:

$$P = \frac{1}{2} \sum \sum \left[\frac{e_n \cdot e_m}{r_{nm}} \right],$$

2) des elektrodynamischen Potentials:

$$Q = \frac{1}{cc} \sum \sum \left[\frac{e_n \cdot e_m}{r_{nm}} \cdot q_n \cdot q_m \cdot \cos(\vartheta_{nm}) \cdot \cos(\vartheta_{mn}) \right].$$

Wir setzen ferner die Grösse:

$$p_n = \frac{1}{cc} \sum \left[\frac{e_m}{r_{nm}} \cos^2(\vartheta_{mn}) \right]$$

1) Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie im X. Bande der Abh. d. math.-phys. Classe der Königl. Sächsischen Ges. der Wissenschaften 1871. — Den Werth des Potentials hat derselbe Autor schon in Poggendorff's Annalen 1848 Bd. 73 S. 229 gegeben.

2) Die ausführliche Veröffentlichung der betreffenden Untersuchung wird im Journal f. reine u. angew. Mathematik geschehen. (S. unten Nr. XXXV.)

und bezeichnen die potentielle Energie der übrigen Kräfte, welche auf die trägen Massen wirken, mit V . Dann wird die Gleichung, welche in Hrn. Weber's Sinne die Erhaltung der Kraft ausdrückt:

$$\frac{1}{2} \sum \left[(\mu_n - p_n e_n) q_n^2 \right] + P + V - Q = \text{Const.}$$

Die hier vorkommende Summe, welche die Stelle der lebendigen Kraft vertritt, und die wir mit L bezeichnen wollen, unterscheidet sich von der gewöhnlichen Form dieses Ausdruckes dadurch, dass die nothwendig positiven Quadrate der q_n nicht allein mit den nothwendig positiven trägen Massen μ_n multiplicirt sind, sondern dass statt dieser letzteren die Differenzen $(\mu_n - e_n p_n)$ als Coefficienten der Quadrate eintreten. Diese Differenzen können aber auch negativ werden, da μ_n jedenfalls reducirt werden kann bis auf die auch von den Herren Weber und C. Neumann doch immer als ausserordentlich klein angesehene träge Masse des elektrischen Quantums e_n , die Grösse p_n aber eine nach Art der Potentialfunctionen gebildete Function ist, die von beliebig grossen elektrischen Massen herühren kann. Wenn nun $e_n p_n > \mu_n$, so besässe der Punkt e_n gleichsam negative Masse. Beschleunigung seiner Bewegung würde einer Verminderung der lebendigen Kraft entsprechen. Bestände die lebendige Kraft L aus einer Anzahl positiver und negativer Glieder dieser Art, so würde sie einen unveränderten endlichen Werth erhalten können, während ihre negativen, wie ihre positiven Glieder in das Unendliche wachsen.

Am einfachsten stellen sich diese Verhältnisse dar, wenn man nur eine der Massen μ sich bewegt denkt und die übrigen auf einer die Masse μ umgebenden Kugelfläche gleichmässig ausgebreitet und festhaftend (etwa an der Fläche eines Isolators). Dann werden p und P Constanten, die von der Lage des Punktes μ in der Kugel unabhängig sind, ferner ist $Q=0$ und die Gleichung reducirt sich auf:

$$\frac{1}{2} (\mu - ep) q^2 + V = \text{Const.}$$

Ist nun das Quantum der Elektrizität auf der Kugel gross genug, dass $ep > \mu$, so müssen q^2 und V gleichzeitig wachsen



und abnehmen. Bewegt sich μ in einer Richtung, welche der von V repräsentirten Kraft entgegengesetzt ist, so wächst V , und die Geschwindigkeit q muss zunehmen. Bewegt sich μ dagegen in Richtung der Kraft, so nimmt im Gegentheil die Geschwindigkeit ab. Bewegt sich μ auf vorgeschriebener Bahn gegen eine Kraft, die ihm immer widersteht, zum Beispiel gegen eine Reibung, so muss seine Geschwindigkeit fortdauernd und in das Unendliche zunehmen, womit auch Wärmezeugung in das Unendliche verbunden wäre. Stösst die Masse auf ihrem Wege immer von neuem gegen eine ihr in den Weg gelegte grössere träge elastische Masse, so wird sie diese fortstossen und selbst bei jedem Stosse an Geschwindigkeit zunehmen, um den nächsten Stoss noch kräftiger zu vollführen. Dadurch wäre offenbar ein Perpetuum mobile gegeben.

Ich bemerke hierbei, dass, wenn man die linearen Dimensionen der elektrischen Kugelschicht auf das n -fache wachsen lässt, aber die Dichtigkeit unverändert erhält, die Grösse p auf das n -fache steigt, sodass wir sie trotz immer steigender Entfernung der wirkenden Masse beliebig gross werden lassen können. Es handelt sich hierbei also keineswegs um Wirkungen in molecularen Distanzen, sondern um Fernwirkungen der Weber'schen Kräfte.

Der von mir früher nachgewiesene Fall, in welchem die Masse μ unendliche Geschwindigkeit erhält, beruhte darauf, dass dies immer geschehen muss, so oft sie unter Wirkung einer beschleunigenden Kraft irgendwo hinkommt, wo der die Masse vertretende Coefficient $(\mu - pe) = 0$ wird, weil die Masse Null durch eine endliche Kraft eine unendliche Beschleunigung erhält. Uebrigens ist in meiner gegenwärtigen Arbeit nachgewiesen, dass dies weder nothwendig nur in molecularen Distanzen geschieht, noch unendliche Anfangsgeschwindigkeit erfordert, wenn nur die elektrischen Massen hinreichend gross gewählt werden, und auf dem ganzen Wege der beiden Massen eine äussere Kraft einwirkt, die sie gegen einander treibt, und welche stark genug ist ihre elektrostatische Abstossung zu überwinden.

Dadurch werden die Einwände beseitigt, welche Hr. W.

Weber gegen die Ableitung einer der in meiner früheren Arbeit aus seiner Theorie gezogenen physikalisch unmöglichen Consequenzen erhoben hatte.

Hr. C. Neumann hat in seinen neuesten elektrodynamischen Untersuchungen seine Zustimmung zu den Weber'schen Einwänden ausgesprochen, und seinerseits die von mir nachgewiesenen Unzulänglichkeiten der Theorie zu beseitigen gesucht, indem er eine Aenderung des Weber'schen Ausdruckes für sehr kleine Distanzen eingeführt hat. Dass eine solche die besprochenen physikalischen Unmöglichkeiten nicht beseitigen kann, ist aus dem eben Gesagten leicht ersichtlich.

Auch für die elektrischen Ströme kann die Einführung irgend welcher molecularen Vorgänge, Bewegungen oder Kräfte das labile Gleichgewicht nicht beseitigen, weil bei n -facher Vergrösserung der Dimensionen und ungeänderten elektrischen Dichtigkeiten das Arbeitsäquivalent der Molecularprocesse nur wie n^3 , das der Potentiale aber wie n^4 oder n^5 wächst, je nachdem sie von Flächen oder Räumen herrühren, sodass letztere, wenn sie eine Arbeitsgrösse repräsentiren, welche kleiner ist, als die dem Gleichgewichte der Elektrizität entsprechende, bei genügender Vergrösserung immer das Uebergewicht erhalten. Wenn sich überall gleich grosse Quanta positiver und negativer Elektrizität in entgegengesetzten Richtungen bewegen, heben sich die Grössen p_a weg, aber das elektrodynamische Potential $(-Q)$ kann kleiner als Null werden. Dass aber eine solche Vertheilung der elektrischen Dichtigkeiten und Ströme vorkommen kann, zeigt ganz unabhängig von den Differentialgleichungen, die den Ablauf dieser Ströme reguliren, schon meine frühere Arbeit.

Sobald eine Stromvertheilung gegeben ist, welche eine Arbeitsgrösse repräsentirt, die kleiner als die des elektrischen Gleichgewichts ist, so kann eine solche Strömung nur durch Aufwendung äusserer Arbeit zur Ruhe gebracht werden, und muss andererseits durch Entziehung von Arbeit, wie sie durch die Wärmeentwicklung im durchströmten Leiter stattfindet, in das Unendliche gesteigert werden.

Es wird auf diese Weise an einem Beispiele klar, von welcher Wichtigkeit es ist, dass der analytische Ausdruck der



lebendigen Kraft nur positive Glieder enthalte, und dass diese Bedingung durch die Fernwirkungen des Weber'schen Gesetzes nicht erfüllt ist, zeigt sich hier als der letzte Grund der physikalisch unmöglichen Consequenzen, zu welchen es führt. Diese können jedenfalls nicht ohne sehr eingreifende neue Hypothesen, die nicht nur die Wirkungen in molecularen Abständen, sondern auch die in die Ferne verändern müssten, beseitigt werden.

Schliesslich habe ich in der vorgelegten Arbeit noch die Bedenken aufzuklären gesucht, welche Hr. J. Bertrand gegen die Bildung der Differentialgleichungen der Bewegung der Elektrizität geäussert hatte.¹⁾

1) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. T. 73 p. 968.

XXXV.

Ueber die Theorie der Elektrodynamik.

Zweite Abhandlung. Kritisches.

Aus: Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik.
Bd. 75. S. 35–66; 1873.

Gegen meinen Aufsatz: „Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper“ sind von den HHrn. W. Weber, J. Bertrand und C. Neumann Einwände verschiedener Art erhoben worden, die theils gegen die von Hrn. Kirchhoff und mir bei der Bildung jener Bewegungsgleichungen angewendeten Grundlagen gerichtet sind, theils die physikalisch unzulässigen Folgerungen, welche ich als Consequenzen der Weber'schen Hypothese nachgewiesen hatte, durch neue Hypothesen zu beseitigen suchen. Bei der grossen Wichtigkeit, welche der genannte Gegenstand nicht bloss für das besondere Kapitel, sondern auch für die allgemeinen Grundprincipien der theoretischen Physik und Mechanik überhaupt hat, erlaube ich mir noch einmal darauf zurück zu kommen.

Die Weber'sche Hypothese über die elektrischen Kräfte ist der erste, bis zu einem gewissen Grade erfolgreiche Versuch gewesen, die Erklärung einer Classe von Erscheinungen, die noch nicht auf Elementarkräfte hatten zurückgeführt werden können, auf die Annahme von Kräften zu gründen, welche nicht bloss von der Lage der wirkenden Massenpunkte, sondern auch von ihrer Bewegungsart abhängen sollten. Zwar hat man schon längst die Theorie der Reibung so dargestellt, als



wäre diese hervorgebracht durch Kräfte, die von den relativen Geschwindigkeiten der reibenden Körper abhängen. Indessen war es klar, dass diese Reibungskräfte keine elementaren Kräfte sein konnten, sondern nur das mechanische Resultat eines ziemlich complicirten Processes, der sich noch durch andere Wirkungen, wie durch Entwicklung von Wärme, Elektrizität u. s. w., zu erkennen gab, kurz zusammenfassend ausdrücken sollten.

Schon in meiner Schrift: „Ueber die Erhaltung der Kraft“ hatte ich nachgewiesen, dass elementare Kräfte zweier Massenpunkte, die ausser von der Entfernung auch von den Geschwindigkeiten abhängig wären, das Gesetz von der Erhaltung der Energie würden verletzen müssen. Hr. Weber hatte nun die von ihm angenommene Kraft zweier elektrischer Massenpunkte abhängig gemacht nicht blos von den Geschwindigkeiten, sondern auch von den Beschleunigungen, und unter diesen Umständen besteht allerdings die Möglichkeit für ein beliebiges System von materiellen Punkten, welche sich unter Einwirkung theils von Weber'schen Kräften, theils von gewöhnlichen, dem Gesetze von der Erhaltung der Energie genügenden Kräften bewegen, eine Integration der Bewegungsgleichungen auszuführen, die derjenigen entspricht, durch welche man für die Wirkungen der gewöhnlichen mechanischen Kräfte die Gleichung von der Erhaltung der Energie herstellt. Diese Integralgleichung enthält auch in diesem Falle eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten, und setzt sie einer Function der Coordinaten gleich. Aus ihr ist, wie die Herren W. Weber und C. Neumann (junior) hervorgehoben haben, zu schliessen, dass durch keinen Cirkelprocess, der irgend ein Massensystem aus irgend einem Anfangszustande schliesslich in denselben Zustand, und zwar nicht blos in Beziehung auf die relative Lage, sondern auch auf die relativen Geschwindigkeitscomponenten aller einzelnen Punkte des Systems, zurückführt, mehr Arbeit erzeugt und nach aussen hin abgegeben werden könne, als andererseits dabei von aussen eingenommen und zerstört wird. — Die Summe der positiv und negativ abgegebenen Arbeit des Systems muss immer Null sein. Es kann also auch unter Mitwirkung der Weber'schen Kräfte durch Wiederholung eines solchen in sich immer wieder zurück-

laufenden Cirkelprocesses kein Perpetuum mobile hergestellt werden.

Man hat sich bei den Untersuchungen darüber, ob das Gesetz der Erhaltung der Energie für gewisse Naturprocesse gültig sei oder nicht, meist damit begnügt zu untersuchen, ob, wenn ich das analytische Resultat praktisch ausdrücken darf, ein immer wiederholter Cirkelprocess in das Unendliche Arbeit erzeugen oder zerstören könne.

In diesem Sinne nun verletzt die Weber'sche Annahme das Gesetz von der Erhaltung der Energie nicht; aber sie thut es in anderem Sinne, und es zeigt sich hierbei, dass die eben angegebene Prüfung nicht genügt.

Wenn nämlich das Arbeitsäquivalent eines bewegten Massensystems jemals kleiner werden kann, als das desselben Massensystems im Zustande der Ruhe, und zwar desto kleiner, je grösser seine Geschwindigkeiten sind: so wird Arbeit aufgewendet werden müssen, um das betreffende System in den Ruhezustand zurückzuführen; und umgekehrt jeder Vorgang, der ihm noch weitere Arbeitskraft entzieht, wird seine Geschwindigkeiten nothwendig steigern, und also auch die weitere Gelegenheit gewähren, das Quantum der abgegebenen Arbeitsäquivalente immer weiter bis in das Unendliche zu steigern. Diese Möglichkeit ist nun in der That beim Weber'schen Gesetze gegeben. In meiner früheren Untersuchung war es der Leitungswiderstand der elektrischen Leiter, der der elektrischen Bewegung Arbeitsquanta, nämlich die durch die Strömung erzeugte Wärme, entzog, und sie nach dem Weber'schen Gesetze dadurch bei gewissen Arten der Bewegung, zum Beispiel bei Radialströmen in einer Kugel, in das Unendliche steigern konnte.

Bei allen anderen bekannten physikalischen Kräften gestaltet sich das Gesetz der Energie so, dass in seinem Ausdrucke nur die lebendige Kraft der bewegten Massen von den Geschwindigkeiten abhängt; diese ist aber eine nothwendig positive Grösse, weil sie eine Summe von Quadraten der mit ausschliesslich positiven Coefficienten behafteten Geschwindigkeiten ist; sie bildet also ein mit Steigerung der Bewegung wachsendes, immer positives Arbeitsäquivalent. Das Arbeits-



äquivalent der bewegten Masse ist also nothwendig immer grösser, als das der in derselben Lage ruhenden Masse.

Mischen sich aber die Weber'schen Kräfte ein, so ist nach der Bezeichnung der Herren Weber und C. Neumann das gesammte Arbeitsäquivalent des Massensystems gleich:

- 1) der lebendigen Kraft der bewegten trägen Massen
- 2) plus der potentiellen Energie der elektrostatischen und anderweitigen mechanischen Kräfte
- 3) minus dem elektrodynamischen Potential.

Dieses letzte hängt auch von den Geschwindigkeiten ab, und sobald sein Werth positiv und grösser ist als der von Nr. 1), so treten die oben angegebenen Consequenzen ein. Unter welchen Bedingungen und in welchen Fällen dies nun vorkommen kann, wird unten erörtert werden.

Geschieht die Bewegung eines solchen Massensystems unter räumlichen Verhältnissen, welche die Glieder 1) und 3) sich gerade aufheben machen, so wird jede endliche Kraft, die im Sinne der vorhandenen Bewegung vorwärts treibt, diese in das Unendliche steigern müssen, weil durch endliche Zunahme der Bewegung dann das Arbeitsäquivalent nicht mehr vermehrt wird, während die Kraft doch Arbeit leistet. Unter diese Kategorie fällt einer der Einwände, die ich in meiner früheren Arbeit aufgestellt hatte.

Ich habe hiermit den Grund der physikalisch unmöglichen Folgerungen, welche Hrn. W. Weber's Annahme liefert, in möglichst genereller Form auszusprechen gesucht, und werde ³⁸ die Gleichung, welche bei Annahme der Weber'schen Kräfte dem Gesetze von der Erhaltung der Energie entspricht, in einer Form geben, wo das Verhältniss noch klarer als in der oben gebrauchten Eintheilung der Energie hervortritt.

Die speciellen Streitpunkte sind also folgende:

A. Ich hatte aus den Differentialgleichungen der elektrischen Strömungen, wie sie von Hrn. Kirchhoff aus dem Weber'schen Gesetze hergeleitet und von Hrn. Lorberg verallgemeinert waren, gefolgert, dass die Weber'sche Annahme labiles Gleichgewicht der Elektricität in leitenden Körpern gebe. Von dieser Folgerung war mitbetroffen die frühere elektrodynamische Theorie von Hrn. C. Neumann,

wonach die Ausbreitung des elektrischen Potentials in die Ferne Zeit brauchen sollte.

B. Ich hatte an dem einfachsten Falle der Bewegung zweier elektrischer Massenpunkte in Richtung ihrer Verbindungslinie gezeigt, dass diese mit endlicher Geschwindigkeit anfangend in endlicher Entfernung unendliche Geschwindigkeit erreichen können.

Auf B. hat Hr. W. Weber im letzten Hefte seiner elektrodynamischen Maassbestimmungen ¹⁾ selbst geantwortet, ohne A. zu berühren. Derselbe ist der Meinung, dass durch Annahme eines gewissen Verhältnisses zwischen den dabei in Betracht kommenden Constanten die Entfernung, in der jener unendliche Werth der Geschwindigkeit zu Stande komme, immer in das Bereich der Molecularkräfte der betreffenden Massen gebracht und dadurch verhindert werden könne, dass jener von mir als unmöglich bezeichnete Erfolg eintrete. Ich werde in § 10 dieses Aufsatzes zeigen, dass die von ihm gemachte Annahme über die Constanten dazu nicht ausreicht, wenigstens nicht, so lange wir beliebige Vermehrung der elektrischen Quanta uns vorbehalten.

Ein zweiter Einwand von Hrn. Weber beruht darauf, dass in dem von mir gewählten Beispiele die Theilchen im Anfange ihrer Bewegung eine Geschwindigkeit haben müssten, grösser als der sehr hohe Werth der von ihm gebrauchten Constante c , dass diese praktisch jedenfalls nicht herzustellen sei, und vielleicht auch der Natur der Sache nach unmöglich sein könnte. Dagegen führe ich in § 9 den Beweis, dass, wenn eine endliche Kraft die Annäherung der elektrischen Quanta zu einander dauernd unterstützt, die unendliche Geschwindigkeit auch bei beliebig kleiner Anfangsgeschwindigkeit zu Stande kommen kann.

Hr. C. Neumann hat in seiner neuesten Abhandlung ³⁹ über Elektrodynamik ²⁾ sich dahin ausgesprochen, dass, wie ihm

1) Abhandlungen der math. physik. Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. X. 1871.

2) Elektrodynamische Untersuchungen. Berichte der Königl. Sachs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 20. October 1871.



scheine, mein Einwand B. von Hrn. Weber in endgültiger Weise widerlegt sei. Er selbst hat, ohne auf seine frühere elektrodynamische Theorie zurückzukommen, eine neue Modification des Weber'schen Gesetzes aufgestellt, indem er eine unbestimmte Function der Entfernung eingeführt hat, die in endlichen Distanzen mit der Weber'schen zusammenfallen, in molecularen Distanzen aber davon abweichen soll. Ich darf wohl annehmen, dass dies in der Meinung geschehen ist, durch die Einführung irgend welcher Molecularkräfte könnten die von mir gemachten Einwände, namentlich B. beseitigt werden. Ich habe deshalb in § 12 die allgemeine Form des Gesetzes von der Erhaltung der Energie benutzt, um zu zeigen, dass die unzulässigen Folgerungen überhaupt gar nicht von den Wirkungen in molecularen Distanzen abhängen, sondern im Gegentheil von den Fernwirkungen.

Gegen meinen Einwand A. hat Hr. C. Neumann nur im allgemeinen geltend gemacht, die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen seien noch auf andere, nicht genau präcisirte Hypothesen gegründet, ohne aber die ihm hypothetisch erscheinenden Punkte näher zu bezeichnen. Was ich aus diesen gefolgert hätte, gelte nicht gegen das Weber'sche Gesetz. Uebrigens hat er selbst aus seiner eigenen neuen Annahme keine Differentialgleichungen der elektrischen Bewegung hergeleitet, sondern erklärt nur auf S. 472 seines Aufsatzes, dass das zur Aufstellung dieser Gleichungen nöthige „Potentialgesetz“ bisher für andere als geschlossene lineare Strömungen noch nicht eruiert worden sei. Demgemäss ist denn Hr. C. Neumann auch den Beweis schuldig geblieben, dass seine neue Modification des Weber'schen Gesetzes zu stabilem Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in Leitern führe.

Die Urtheile von Hrn. C. Neumann hat auch Hr. Zöllner¹⁾ wiederholt, ohne irgend etwas Neues hinzuzufügen, was bei einer wissenschaftlichen Discussion zu berücksichtigen wäre.

Ich habe deshalb in § 13 die Hypothesen der angeschuldigten Kirchhoff'schen Gleichungen zusammengestellt, welche in der That keine anderen sind, als die Hr. W. Weber selbst

1) Ueber die Natur der Cometen u. s. w. Leipzig bei Engelmann. 1872.

seiner ersten Ableitung des Inductionsgesetzes zu Grunde gelegt hatte, und habe dann den Beweis hinzugefügt, dass beliebige Annahmen über die Molecularvorgänge und Molecularkräfte bei elektrischer Strömung die Möglichkeit nicht beseitigen, dass das Arbeitsäquivalent der elektrischen Strömung kleiner als das des Ruhezustandes werde, aus welchem Verhältnisse dann die übrigen vorher aufgeführten physikalisch unmöglichen Folgen fließen.

Endlich habe ich in § 14 noch die von Hrn. J. Bertrand ausgesprochenen Bedenken gegen den Gebrauch der Potentialausdrücke in der Theorie der Induction und wegen der Anwendung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte auf die inducirten elektromotorischen Kräfte zu beseitigen gesucht.

Die Nummern der Paragraphen setzen die meiner früheren Abhandlung fort.

§ 9. Bewegung zweier elektrischer Massenpunkte in Richtung ihrer Verbindungslinie.

Ich beginne mit diesem einfachsten Falle, an dem sich die wesentlichen Züge dessen, was später in allgemeinerer Form nachgewiesen werden soll, schon aufweisen lassen. Derselbe ist bereits in der Einleitung meiner früheren Arbeit und dann von Hrn. Weber besprochen worden. Ich nehme wie früher an: das elektrische Quantum e liege fest, das gleichartige Quantum e sei mit der trägen Masse μ verbunden und in der Entfernung r von jenem befindlich; es bewege sich in Richtung der Verbindungslinie r . Ich ändere die früheren Annahmen nur insofern, als ich noch eine zweite Kraft gewöhnlicher Art R hinzufüge, die auf die träge Masse μ einwirkt, ebenfalls in Richtung der Verbindungslinie, und welche positiv genommen wird, wenn sie r zu vergrössern strebt. Die Bewegungsgleichung ist alsdann nach Weber:

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{cc'} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{cc'} \frac{d^2 r}{dt^2} \right\} + R. \quad (1)$$

Setzen wir mit Weber:

$$\frac{2ee'}{cc'\mu} = \varrho,$$



so können wir diese Gleichung schreiben:

$$\mu \left(1 - \frac{\rho}{r} \right) \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{cc'} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) + R. \quad (1a)$$

In dieser Form hat sie die Form einer gewöhnlichen Bewegungsgleichung, wo rechts die auch von der Geschwindigkeit abhängige Kraft steht, und der Ausdruck links sich nur dadurch von den gewöhnlichen Gleichungen dieser Art unterscheidet, dass der Coefficient der Beschleunigung nicht einfach die Masse ist, sondern eine Differenz, welche positiv bleibt, so lange $r > \rho$, aber gleich Null wird, wenn $r = \rho$, und negativ, wenn $r < \rho$. Wir wollen ρ im Folgenden die kritische Entfernung nennen.

Die Weber'sche Voraussetzung, dass die letztgenannten Fälle nicht eintreten könnten, werden wir nachher discutiren. Wenn sie aber doch eintreten sollten, so wird die Beschleunigung unendlich gross werden müssen, so oft $r = \rho$, und sie wird in ihrem Zeichen dem Werthe der Kraft entgegengesetzt werden müssen, wenn $r < \rho$ ist. Es wird alsdann eine jede Kraft, welche die Masse μ in Richtung der wachsenden r vorwärts zu treiben strebt, bewirken, dass sie im Gegentheil rückwärts beschleunigt wird und umgekehrt, und ich bitte wohl zu bemerken, dass dies keineswegs nur eine Eigenthümlichkeit der elektrischen Abstossungskraft ee'/rr sein würde, der man einige sonderbare Eigenthümlichkeiten vielleicht nachsehen würde, und die also in diesem Falle, wenigstens bei mässigen Werthen der Geschwindigkeit dr/dt , die Masse m , statt abzustossen, im Gegentheil heranziehen würde; sondern dasselbe würde auch gelten für die Einwirkung jeder beliebigen anderen mechanischen Kraft. Die Masse m wird sich verhalten, als hätte sie negative Trägheit.

Noch einfacher treten diese Verhältnisse heraus, wenn wir die Gleichung (1) mit dr/dt multipliciren, um die Gleichung für die Constanz der Energie zu bilden. Wir erhalten dann:

$$\frac{1}{2} \mu \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} dt = - \frac{d}{dt} \left[\frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{1}{cc'} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) \right] dt + R \frac{dr}{dt} dt. \quad (2)$$

Das letzte Glied ist die Arbeit, welche die Kraft R in der Zeit dt leistet. Setzen wir:

$$\int_0^t R \cdot \frac{dr}{dt} dt = \mathfrak{R},$$

so ergibt die Integration:

$$\frac{1}{2} \mu \left(1 - \frac{\rho}{r} \right) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{ee'}{r} = \text{Const.} + \mathfrak{R}.$$

Die Grösse $\mathfrak{R}$ braucht in dieser Gleichung nicht nothwendig eine von der Art der Bewegung unabhängige Function der Coordinaten zu sein. Legen wir den Anfangspunkt der Zeit t auf einen Augenblick, wo $dr/dt = 0$ ist, setzen auch $\mathfrak{R}$ für denselben gleich Null, und $r = r$, so ist:

$$\frac{1}{2} \mu \left(1 - \frac{\rho}{r} \right) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = ee' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) + \mathfrak{R}. \quad (2a)$$

Wenn nun $r > \rho$ ist, das heisst das Theilchen μ sich im Anfang jenseits der kritischen Distanz befindet, ferner R einen solchen negativen Werth hat, dass

$$R + \frac{ee'}{r^2} < 0$$

ist, so wird die rechte Seite von Gleichung (2a) für negative Werthe von dr/dt positiv sein, und e sich dem e' nähern, die Geschwindigkeit wachsen, zuletzt unendlich werden, sobald $r = \rho$ geworden ist.

Es braucht hierbei also die Kraft R nur eine endliche Grösse zu haben, und durch eine endliche Strecke hin zu arbeiten, also einen endlichen Betrag an Arbeit $\mathfrak{R}$ zu leisten, um der Masse μ unendliche Geschwindigkeit mitzuthemen. Es geht hieraus zunächst hervor, dass es keineswegs nöthig ist, der Masse μ eine übermässig grosse Geschwindigkeit im Anfang mitzuthemen. In meiner früheren Arbeit war dies nur dadurch bedingt, dass ich keine Kraft R hinzugenommen hatte, und also die ganze Arbeit, welche nöthig ist die Masse μ gegen die elektrische Abstossungskraft bis ρ heranzutreiben, ihr von Anfang an in Gestalt einer grossen Geschwindigkeit mitgegeben sein musste.



Da die hier gemachte kleine Abänderung des vorliegenden Beispiels die Nothwendigkeit einer grossen Anfangsgeschwindigkeit beseitigt, wird es unnöthig sein, die principiellen Bedenken zu erörtern, welche Hr. Weber's Widerspruch gegen die Zulässigkeit einer so grossen Anfangsgeschwindigkeit (grösser als $\sqrt{2}$ mal der Lichtgeschwindigkeit) hervorrufen könnte.

§ 10. Ist die kritische Entfernung ρ immer eine moleculare Entfernung?

Der zweite Einwand von Hr. W. Weber gegen die Anwendbarkeit der von mir aus dem eben besprochenen Beispiel gegen seine Theorie gezogenen Schlüsse ist auf die Annahme gestützt, dass die Entfernung ρ eine ausserordentlich kleine, nur moleculare Entfernung sei, sodass was innerhalb derselben geschieht überhaupt unserer Wahrnehmung gar nicht zugänglich sei, oder durch das gleichzeitige Eingreifen anderer molecularer Kräfte gehemmt werde, wie ja z. B. auch das Unendlichwerden der Geschwindigkeit zweier gravitirender Massenpunkte, wie es für die Entfernung $r=0$ eintreten müsste, dadurch vermieden wird, dass die molecularen Kräfte, welche der Volumverminderung beider Massen widerstehen, in das Spiel kommen, ehe die Entfernung Null erreicht wird.

Der Werth der Entfernung ρ ist:

$$\rho = \frac{2ee'}{cc\mu}.$$

Ist das elektrische Theilchen e nur mit seiner eigenen Masse behaftet, so wird e/μ irgend einen bestimmten Werth β haben. Enthält μ auch noch ponderable Masse, so wird $e/\mu < \beta$ sein.

Ueber den Werth von β wissen wir bisher gar nichts; es steht also der von Weber gemachten Annahme, dass $2e/cc\mu = \beta/cc = b$ eine ausserordentlich kleine Grösse sei, wenigstens nichts entgegen. Nur geht diese Annahme aus den bisher bekannten Thatsachen keineswegs hervor, sondern sie ist eben eine neue Annahme, welche Hr. Weber erst gemacht hat, um meinen Einwänden zu entgehen. Von der Masse μ , wenn diese keinen ponderablen Bestandtheil enthält, weiss man nur, dass sie so

klein ist, dass sie sich bisher allen Messungen entzogen hat, während c allerdings sehr gross ist, aber doch gemessen werden konnte. Eben deshalb aber ist der Werth von μcc aus erfahrungsmässigen Daten nicht zu bestimmen, und es mag jede Hypothese über ihn als erlaubt angesehen werden.

Aber wenn auch b eine äusserst kleine Grösse ist, so ist ρ doch nicht allein von b abhängig, sondern es ist $\rho = be'$, und e' kann noch jede beliebige Grösse haben, folglich auch ρ . Dabei ist wohl zu beachten, dass wenn wir uns e' als eine kugelförmige Masse von bestimmter Dichtigkeit denken wollten, sei es als elektrisches Fluidum, sei es als einen mit Elektrizität einer Art durchdrungenen oder bedeckten Isolator, bei wachsendem e' der Durchmesser dieser Kugel wie $\sqrt[3]{e'}$ oder wie $\sqrt[2]{e'}$ wachsen würde, je nachdem e' im Innern oder an der Oberfläche angesammelt ist, ρ aber wie e' selbst, also viel schneller, und dass wir also durch entsprechende Vergrösserung von e' der Grösse ρ jede beliebige endliche Grösse, und ihrem Endpunkt jeden beliebigen Abstand von der Oberfläche der elektrischen Masse e' geben können.

Daher ist auch weiter schon hier klar, dass, wenn wir e' immer grösser und grösser werden lassen, schliesslich die kritische Entfernung ρ zum Durchmesser der Masse e' jedes beliebig grosse Verhältniss erreichen kann, sodass zuletzt auch dieser Durchmesser wieder gegen ρ verschwindend klein wird, und dann das einfache Weber'sche Gesetz wieder angewendet werden kann, wie es für zwei Massenpunkte gilt. Für die dazwischen liegenden Fälle, wo die linearen Dimensionen von e' endlich gegen ρ sind, würden dagegen Integrausdrücke zu bilden sein, von denen wir einige der einfachsten Formen im nächsten Paragraphen bilden werden.

Hr. Weber selbst hat einen etwas anderen Ausdruck für ρ gewonnen, weil er beide elektrische Massen als beweglich betrachtet; sind deren träge Massen μ und μ' , so ist der Werth:

$$\rho = \frac{ee'}{cc} \cdot \frac{\mu + \mu'}{\mu\mu'}.$$

Lässt man e' und μ' sehr gross werden, so führt dieser Ausdruck auf dieselben Schlüsse, die ich eben gezogen habe.



Wenn man also nicht willkürliche, und durch den ursprünglichen Sinn des Weber'schen Gesetzes in keiner Weise gebotene Beschränkungen für die Grösse der elektrischen Quanta e und e' festsetzen will, so folgt aus den angestellten Betrachtungen, dass, selbst wenn man Hrn. Weber's Annahme über den Werth der Constanten $e/\mu cc$ acceptirt, die kritische Entfernung ρ keineswegs immer eine moleculare Entfernung sein wird, sondern jede beliebige endliche Grösse erreichen kann. Es kann also das Zustandekommen unendlicher Geschwindigkeit der bewegten Masse μ , oder dieses Zustandes, den ich kurz als negative Trägheit bezeichnet habe, innerhalb der Entfernung ρ auch durch Molecularkräfte keineswegs verhindert werden.

Wenn nun $\rho = be'$ eine endliche Grösse ist, so wird die elektrische Abstossungskraft, welche von der Kraft R des § 9 überwunden werden müsste, im Maximo sein:

$$\frac{ee'}{q^2} = \frac{e^2\mu}{2q} = \frac{e^2\mu}{2be'}$$

Je grösser e' und somit ρ wird, desto kleiner wird die Kraft, die zur Annäherung bis zur Grenze ρ nöthig wird, sodass schliesslich jede der Masse μ proportionale Kraft, wie die Schwere $g\mu$, bei hinreichender Vergrösserung von e' dazu ausreichen würde.

Nun ist die Constante c gemessen und sehr gross gefunden⁴⁵ worden, die Constante b von unbekannter Grösse und, nach Hrn. Weber's Annahme, vielleicht sehr klein. Dann würde es allerdings für unsere praktischen Hilfsmittel wahrscheinlich unmöglich werden, soviel Elektrizität e' zu sammeln, dass die Schwere oder eine zur Schwere in endlichem Verhältnisse stehende Kraft, die allein auf die Masse μ wirkte, für die Ausführung des Versuches zureichte. Wenn wir aber das Weber'sche Gesetz als ein wirklich elementares anerkennen sollen, als ein solches, welches den letzten Grund der betreffenden Erscheinungen vollständig ausspricht, und nicht nur als einen angenähert richtigen Ausdruck der Thatsachen für gewisse engere Grenzen, so müssen wir verlangen, dass es, auch auf Objecte von den denkbar grössten Dimensionen angewendet, Folgerungen gebe, die physikalisch möglich sind.

Uebrigens bemerke ich noch, dass die in diesem Falle verlangte Kraft wieder nur dann so gross ausfallen müsste, wenn dieselbe ihren Angriffspunkt nur in der Masse μ haben sollte. Drängt man dagegen die Masse μ vorwärts durch eine andere Masse M , welche beliebig gross sein, und der Angriffspunkt beliebig grosser, der Abstossung von μ überlegener Kräfte sein kann, so würde allerdings die Masse $M + \mu$ nicht in derselben Entfernung ρ wie μ selbst unendliche Geschwindigkeit erhalten. Sowie aber die Grenze von ρ überschritten wäre, würde μ von der elektrischen Abstossungskraft jetzt anziehend, und zwar im ersten Moment unendlich stark beschleunigt, sich von M trennen, und sich fortan, wie Hr. Weber schon gezeigt hat, im Innern der Kugel vom Radius ρ bewegen in demjenigen Zustande, den ich vorher als negative Trägheit bezeichnet habe, und dessen Attribute wir im Folgenden näher kennen lernen werden.

§ 11. Die Gleichung der lebendigen Kraft für die Weber'schen Kräfte.

Das Beispiel des vorigen Paragraphen wies uns auf die Wirkung im Raume ausgedehnter elektrischer Massen hin, deren Resultate nur durch Integrationen zu bestimmen sind. Um diese zu vollziehen, wollen wir die Gleichung der lebendigen Kraft bilden. Diese ist zwar für zwei elektrische Massenpunkte schon von Hrn. Weber, für eine beliebige Anzahl solcher von Hrn. C. Neumann gebildet worden. Indessen werden die Consequenzen dieser Gleichung anschaulicher, wenn wir die einzelnen Theile etwas anders zusammengruppieren. Deshalb wiederhole ich hier ihre Ableitung mit einigen Aenderungen.

Es seien gegeben Massenpunkte in beliebiger Anzahl,⁴⁶ einzeln bezeichnet durch die verschiedenen Werthe ihres Index n . Es bezeichne e_n das nach elektrostatischen Einheiten gemessene elektrische Quantum des n ten Punktes, welches bei nicht elektrischen Massenpunkten auch gleich Null gesetzt werden kann, und μ_n sei die träge Masse, x_n, y_n, z_n die Coordinaten desselben Punktes. Die Componenten nicht elektrischer



Kräfte, die denselben angreifen, seien X_n , Y_n und Z_n . Dann ist nach Weber's Gesetz:

$$\mu_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = X_n + e_n \sum \left[\frac{e_m (x_n - x_m)}{r_{n,m}^3} \left\{ 1 - \frac{1}{cc} \left(\frac{dr_{n,m}}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{2r_{n,m}}{cc} \cdot \frac{d^2 r_{n,m}}{dt^2} \right] \quad (3)$$

Entsprechende Gleichungen ergeben sich für die beiden anderen Coordinaten jedes der Punkte n ; im Ganzen also $3n$ Gleichungen. Man multiplicire die Gleichung (3) mit dx_n/dt , die übrigen Gleichungen mit den entsprechenden Differentialquotienten, und addire alle, so erhält man die Gleichung der lebendigen Kraft.

Um diese einfach zusammenzufassen, brauchen wir noch folgende Bezeichnungen:

q_n die resultirende Geschwindigkeit des Punktes n , also:

$$q_n^2 = \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_n}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_n}{dt} \right)^2, \quad (3a)$$

$\vartheta_{m,n}$ der Winkel zwischen der Richtung q_n und der über n hinaus verlängerten Richtung von $r_{n,m}$, also:

$$\frac{dr_{n,m}}{dt} = q_n \cos \vartheta_{m,n} + q_m \cos \vartheta_{n,m}, \quad (3b)$$

P das elektrostatische Potential:

$$P = \frac{1}{2} \sum \sum \left[\frac{e_n e_m}{r_{n,m}} \right], \quad (3c)$$

$$n \geq m,$$

Q das elektrodynamische Potential:

$$Q = \frac{1}{cc} \sum \sum \left[\frac{e_n e_m}{r_{n,m}} q_n \cdot q_m \cdot \cos \vartheta_{n,m} \cdot \cos \vartheta_{m,n} \right], \quad (3d)$$

$$n \geq m,$$

V die von den nicht elektrischen Kräften geleistete Arbeit:

$$\frac{dV}{dt} = \sum \left\{ X_n \frac{dx_n}{dt} + Y_n \frac{dy_n}{dt} + Z_n \frac{dz_n}{dt} \right\}, \quad (3e)$$

p_n eine den Potentialfunctionen ähnlich gebildete Function für den Punkt n :

$$p_n = \sum \left[\frac{e_m}{r_{n,m}} \cos^2 \vartheta_{m,n} \right], \quad (3f)$$

L endlich die lebendige Kraft, aber so berechnet, dass unter ihr alle mit Quadraten der Geschwindigkeiten multiplicirten Glieder zusammengefasst sind:

$$L = \frac{1}{2} \sum \left[\left(u_n - \frac{1}{cc} e_n p_n \right) q_n^2 \right]. \quad (3g)$$

Braucht man diese Bezeichnungen, so ist die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$L + P - V = \text{Const.} \quad (3h)$$

Sind die Coordinaten und die Geschwindigkeiten zur Zeit t_1 alle von gleichem Werthe, wie zur Zeit t_0 , so haben L , P , Q auch wieder die gleichen Werthe, und es muss also:

$$V_1 - V_0 = 0$$

sein. Das heisst, während eines Cirkelprocesses, der zu den Anfangswerthen der Coordinaten und Geschwindigkeiten zurückführt, wird nicht mehr Arbeit nach aussen abgegeben, als von aussen empfangen. Dies ist die verallgemeinerte Form, in der die Herren Weber und C. Neumann das Gesetz von der Erhaltung der Energie gefasst haben.

Das elektrodynamische Potential hat hier dieselbe Form, wie in der ursprünglichen Form des Weber'schen Inductionsgesetzes. Die Glieder mit den Quadraten der Geschwindigkeiten sind dagegen, abweichend von den Herren Weber und Neumann, zur lebendigen Kraft hinübergezogen.

Andererseits zeigt die Gleichung (3g), dass die Coefficienten der Geschwindigkeitsquadrate q_n^2 nicht nothwendig immer positiv zu bleiben brauchen, wie dies der Fall ist, wenn sie nur träge Massen vertreten, sondern auch negativ werden können. Somit lässt das Weber'sche Gesetz die Möglichkeit offen, dass sich gleichzeitig die positiv und die negativ genommenen q^2 in das Unendliche steigern, ohne dass die Potentiale der linken Seite der Gleichung (3h) unendlich zu werden brauchen, d. h. ohne dass die Massenpunkte sich einander auf unendlich kleine Distanzen nähern. In der gewöhnlichen Fas-



sung des Gesetzes von der Constanz der Energie sind alle q^2 mit nothwendig positiven Factoren multiplicirt, kein q^2 kann unendlich werden, ohne dass einerseits die lebendige Kraft unendlich wird, und andererseits die potentielle Energie um ein unendliches Quantum verkleinert wird. Nach dem Weber'schen Gesetz könnte bei einem endlichen Werthe der gesamten ⁴⁹ Energie die lebendige Kraft der ponderablen Theile in das Unendliche steigen, freilich müsste gleichzeitig auch die Geschwindigkeit der elektrischen Bewegungen ebenfalls in das Unendliche gesteigert werden.

Weiter ist hier zu bemerken, dass in der Differenz:

$$\mu_n - \frac{1}{cc} e_n p_n = m_n,$$

welche die Stelle der Masse einnimmt, nicht mehr ein einzelnes elektrisches Theilchen der Masse μ_n gegenübergestellt ist, sondern in der Function p_n , welche nach Art einer Potentialfunction zusammengesetzt ist, eine beliebig grosse Menge anderer elektrischer Massen e_m , die jedenfalls so gross gemacht werden kann, dass sie grösser wird als $\mu_n cc/e_n$, wobei die Massen e_m durchaus nicht nahe an der Masse e_n zu liegen brauchen.

Die Grösse p kann betrachtet werden als die Potentialfunction der vorhandenen übrigen freien Elektrizität, wobei nur deren elektrostatische Quanta mit dem immer positiven Factor $\cos^2(\theta_{m,n})$ multiplicirt sind. Denken wir nun alle freie Elektrizität gleichnamig und den grösseren Theil derselben an einer Fläche abgelagert, dann ohne Veränderung ihrer Dichtigkeit die linearen Dimensionen des Körpersystems auf das n -fache vergrössert, so wird p auf das n -fache wachsen. Ist die Elektrizität, von der p abhängt, aber continuirlich im Raume verbreitet, so wächst in solchem Falle p_n auf das n^2 -fache. In beiden Fällen können wir durch eine solche Veränderung jedenfalls zu Werthen von p unter gleichzeitiger Vergrösserung der Entfernungen zwischen den Massen e_m und e_n kommen, bei denen der die Masse vertretende Factor:

$$\mu_n - \frac{1}{cc} e_n p_n = m_n$$

negativ wird, und wo es möglich wird, die Massen μ_n mit stets zunehmender Geschwindigkeit beliebig grosse Arbeit leisten zu lassen. Praktisch hätten wir dann das Perpetuum mobile, wenn auch theoretisch die erweiterte Form des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, wie es in Gleichung (2) ausgesprochen ist, gewahrt bliebe.

§ 12. Die Folgen des Weber'schen Gesetzes im Falle fester gleichmässiger elektrischer Belegung einer Kugel.

Die eben angedeuteten Folgen treten am einfachsten und übersichtlichsten auf, wenn wir annehmen, dass nur ein einzelner Massenpunkt, den wir ohne Index lassen, μ mit dem ⁴⁹ elektrischen Quantum e beweglich sei, alle übrige Elektrizität aber festgeheftet sei an der Oberfläche einer Kugel, an der sie eine gleichmässige Belegungsschicht bilde. Praktisch könnte der Fall vorkommen, wenn die Kugel aus isolirendem Material bestände. Wir wollen beide Fälle untersuchen, sowohl den, wo das μ sich innerhalb der Kugel bewegt, und diese hohl ist als auch, wenn μ ausserhalb der Kugel liegt.

Diese Kugelfläche habe den Radius R , das Quantum Elektrizität auf der Flächeneinheit ihrer Oberfläche sei ϵ . Ferner seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes μ zur Zeit t , und x, y, z die des Flächenelements $d\omega$ auf der Oberfläche der Kugel vom Radius R ; die Entfernung zwischen μ und $d\omega$ sei r .

Zur Berechnung von p setzen wir voraus, die x -Axe sei so gelegt, dass sie der eben der Geschwindigkeit q zukommenden Richtung parallel sei. Dann ist nach Gleichung (3f):

$$p = \int \frac{\epsilon (x - \xi)^2}{r^3} d\omega,$$

wo die Integration über die ganze Kugelfläche auszudehnen ist.

Nun ist aber:

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x - \xi)^2}{r^3},$$

also:

$$p = \int \frac{\epsilon}{r} d\omega - \frac{d^2}{d\xi^2} \int \epsilon r d\omega,$$



was wir zur Abkürzung schreiben wollen:

$$p = s - \frac{d^2 \sigma}{d\xi^2}.$$

Der erste Theil s ist bekanntlich ausserhalb der Kugel, wenn ϱ den Abstand des Punktes μ von deren Mittelpunkt bezeichnet:

$$s_a = \frac{4\pi R^2 \epsilon}{\varrho},$$

innerhalb der Kugel:

$$s_i = 4\pi R \epsilon.$$

Die Grösse σ ist durch Integration leicht zu finden. Wenn η der Winkel zwischen dem nach $d\omega$ geführten Radius der Kugel und der positiven x -Axe ist, so ist:

$$\sigma = \int_0^\pi \sqrt{R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \cos \eta} \cdot 2\pi \sin \eta \cdot R^2 d\eta.$$

Das unbestimmte Integral hiervon ist:

$$\frac{2\pi R}{3\varrho} [R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \cos \eta]^{\frac{3}{2}}.$$

Zwischen den Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = \pi$ genommen, giebt dies für den inneren Raum:

$$\sigma_i = \frac{2\pi R}{3\varrho} [(R + \varrho)^3 - (R - \varrho)^3] = \frac{4\pi R}{3} [3R^2 + \varrho^2],$$

für den äusseren Raum der Kugel:

$$\sigma_a = \frac{2\pi R \epsilon}{3\varrho} [(R + \varrho)^3 - (\varrho - R)^3] = \frac{4\pi R^2 \epsilon}{3\varrho} [3\varrho^2 + R^2].$$

Daraus ergibt sich für den inneren Raum:

$$p_i = 4\pi \epsilon R - \frac{8\pi \epsilon R}{3} = \frac{4\pi \epsilon}{3} R \quad (4)$$

und für den äusseren Raum:

$$p_a = \frac{4\pi \epsilon R^2}{\varrho} - 4\pi \epsilon R^2 \left[\frac{1}{\varrho} - \frac{(x - \xi)^2}{\varrho^3} \right] - \frac{4\pi R^2 \epsilon}{3} \left[-\frac{1}{\varrho^3} + \frac{3(x - \xi)^2}{\varrho^5} \right],$$

oder wenn wir den Winkel zwischen dem Radius-Vector r und der Richtung von q mit η bezeichnen,

$$p_a = \frac{4\pi \epsilon R^2}{\varrho} \cos^2 \eta \cdot \left[1 - \frac{R^2}{\varrho^2} \right] + \frac{4\pi \epsilon R^4}{3\varrho^3}. \quad (4a)$$

Im Inneren einer solchen Kugel hat also p_i einen von dem Ort und der Bewegungsrichtung von μ unabhängigen constanten Werth, und wenn:

$$\frac{4\pi \epsilon}{3} R > \frac{\mu}{e} cc$$

ist, so ist für jede Bewegung von μ innerhalb der Hohlkugel das Aequivalent der Masse m negativ.

Was die übrigen Grössen in der Gleichung (3h) betrifft, so wird innerhalb der Kugel:

$$P = e \cdot 4\pi \epsilon R^2, \\ Q = 0, \text{ weil } q_a = 0;$$

also wenn wir die constante Grösse P mit in die Integrations-constante C einbegreifen, wird Gleichung (3h):

$$\frac{1}{2} m q^2 + V + C = 0. \quad (3i)$$

Dabei ist es auch offenbar gleichgültig, ob die Masse μ in einen Punkt concentrirt ist, wie bisher angenommen wurde, oder ob sie über ein körperliches Volumen von beliebiger Grösse ausgebreitet ist, wenn nur ihre Theile relativ gegeneinander unbeweglich sind. Die Grössen p , P , Q haben eben für alle Theile von μ denselben Werth, wo diese auch liegen mögen. Sind nun die Massen e_n gross genug, dass die in diesem Falle constante Grösse m negativ wird, so haben wir durch das ganze Innere der Kugel gleichmässig diese verkehrte Art der Mechanik, dass bei vorwärts treibender Kraft der Punkt μ rückwärts beschleunigt wird, und umgekehrt; ferner die potentielle Energie der treibenden Kraft und die Geschwindigkeit q gleichzeitig wachsen, während in allen Fällen der gewöhnlichen Mechanik die eine immer abnehmen muss, während die andere wächst.

Aus der Gleichung (3i) folgt zunächst, dass, wenn m negativ ist und q nicht gleich Null ist, eine solche Bewegung nie aufhören kann, ohne dass von aussen her mittels der Kraft, deren Potential V ist, Arbeit geleistet werde. Das Arbeitsäquivalent einer solchen bewegten Masse ist negativ, ist kleiner, als es im Zustande der Ruhe sein würde, und die Ruhe kann also ohne Arbeitsleistung von aussen nicht wieder hergestellt werden.



Lassen wir nun das Theilchen μ auf irgend einem vorgeschriebenen Wege, dessen Länge wir mit s bezeichnen, sich innerhalb der Kugel bewegen, so ist:

$$q = \frac{ds}{dt}.$$

Differentiiren wir unter diesen Annahmen, wo p constant ist, die Gleichung (3h) nach t , so erhalten wir mit Weglassung des Factors ds/dt :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = S, \quad (4b)$$

wenn wir mit S die Componente der treibenden Kraft in Richtung des Weges s bezeichnen. Ist nun m negativ, so wird die Kraft S immer in verkehrtem Sinne einwirken; wenn sie der Bewegung entgegenwirkt, wird sie diese immer beschleunigen, und wenn dasselbe fortdauernd oder immer wiederholt geschieht, sie schliesslich in das Unendliche steigern.

Um die Folgen davon zunächst an einem einfachsten Beispiele solcher Art zu veranschaulichen, dass dabei Constanz des mechanischen Theiles der Arbeit stattfindet, setzen wir voraus, dass man ruhende elastische Kugeln von der Masse M auf die vorgeschriebene Bahn der Masse μ bringe. Der Erfolg jedes Stosses lässt sich in gewöhnlicher Weise berechnen. Das Princip von der Erhaltung des Schwerpunktes, welches, wie man leicht einsieht, für das Massenäquivalent m hier gerade ebenso gelten würde, wie für eine wirkliche Masse, giebt, wenn q_0 die Geschwindigkeit von μ vor dem Stosse, q_1 und Q die von μ und M nach dem Stosse bezeichnen:

$$m q_0 = m q_1 + M Q.$$

Das Princip von der Erhaltung der Kraft giebt:

$$m q_0^2 = m q_1^2 + M Q^2.$$

Ist $M + m$ negativ, so erfolgt der Stoss in gewöhnlicher Weise, die beiden Massen trennen sich wieder, M eilt vorwärts mit der Geschwindigkeit $2m q_0 / (M + m)$, und μ bleibt zurück mit der vergrösserten Geschwindigkeit $(m - M) q_0 / (m + M)$, wobei zu bemerken ist, dass wegen der gemachten Annahme Zähler und Nenner beider Brüche negativ sind. Somit können wir durch

das bewegte elektrische Theilchen beliebig oft ponderable Massen fortstossen lassen und ihnen Geschwindigkeit ertheilen, während gleichzeitig die Geschwindigkeit der elektrischen Masse μ immer mehr zunimmt.

Wäre $M > (-m)$, so würden die beiden stossenden Massen nicht voneinander prallen, sondern sich immer fester und fester aneinander drängen mit wachsender Geschwindigkeit beider.

Ein anderer entsprechender Fall, wo die Kraft S aber keine Kräftefunction hat, wäre der, wo das Theilchen μ sich auf seinem vorgeschriebenen Wege s gegen einen Reibungswiderstand bewege. Es würde mit wachsender Geschwindigkeit laufen müssen, und dabei immer steigende Wärmemengen bis in das Unendliche entwickeln. Dieser Fall würde auch mit dem eines elektrischen Stromes in dem Wege s zusammenfallen, letzteren als linearen Leiter gedacht, wenn wir mit Hrn. C. Neumann annehmen, dass bei jedem elektrischen Strome sich nur eine Art der Elektrizität bewegt.

Bei der anderen Annahme über die elektrischen Ströme, wie sie den meisten Berechnungen der Herren Weber und Kirchhoff zu Grunde liegt, wonach sich immer gleiche Quanta entgegengesetzter Elektrizität in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, fällt dagegen die besprochene Veränderung der trägen Masse fort, weil sie für die positiven und negativen bewegten Partikel entgegengesetztes Zeichen erhält. Diese Fälle werden wir im nächsten Paragraphen behandeln.

Es ist klar, dass die beiden hier gegebenen Beispiele das ∞ Perpetuum mobile realisiren würden.

Es bleibt noch übrig zu erörtern, wie sich ein bewegtes Theilchen im äusseren Raume verhält. Hier ist das Massenäquivalent m nicht für jede Art von Bewegung negativ, sondern wie die Gleichung (4a) zeigt, hängt p_a vom Werthe des Winkels η zwischen den Richtungen von r und q ab. Fallen beide zusammen, so ist:

$$p_a = \frac{4\pi \epsilon R^2}{q} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{R^2}{q^2}\right),$$



was für den Fall, dass R/r unendlich klein wird, in den für einen einzelnen Massenpunkt geltenden Werth e_n/q übergeht. Ist η dagegen ein rechter Winkel, so wird:

$$p = \frac{4\pi e R^4}{3q^3}.$$

Dicht an der Kugelfläche, wo $R = \rho$, sind beide Werthe gleich, und gleich dem Werthe im Inneren der Kugel, sodass also der Unterschied der Richtungen sich erst in einiger Entfernung von der Kugel geltend macht.

Aus den vorstehenden Untersuchungen ergibt sich, dass die physikalisch unzulässigen Folgerungen des Weber'schen Gesetzes durchaus nicht an moleculare Distanzen gebunden sind, sondern durch die Wechselwirkung elektrischer Theilchen über beliebig grosse Entfernungen hin zu Stande kommen können. Diese Folgerungen sind also nicht zu beseitigen durch die von Hrn. W. Weber selbst gemachte Annahme, dass $ee'/cc\mu$ eine sehr kleine Grösse sei; denn diese zerfällt schon an und für sich in zwei getrennte Annahmen, nämlich dass $e/cc\mu$, und dass e' sehr klein sei. Die letztere aber kann nicht allgemein gemacht werden, da gar kein allgemein geltender Grund ersichtlich ist, durch den die Grösse von e' beschränkt werden könnte; und wir haben gesehen, dass selbst, wenn man der angehäuften Elektricität ein gewisses Maximum der Dichtigkeit zuschreiben wollte, und also grössere Quanta e' über grössere Volumina oder Flächen ausgedehnt vorkommen müssten, dies an den Folgerungen nichts Wesentliches verändert.

Ebensowenig können jene unzulässigen Folgerungen beseitigt werden durch die Annahme von Hrn. C. Neumann, dass in molecularen Distanzen zu der Weber'schen Kraft eine andere hinzukomme, die in grösseren Entfernungen gegen jene verschwinde. Derselbe hat den Theil der Weber'schen Kraft zwischen zwei elektrischen Massenpunkten, welcher mit dem Factor $1/cc$ behaftet ist, gesetzt gleich:

$$2ee' \cdot \frac{d\Psi}{dr} \cdot \frac{d^2\Psi}{dt^2}.$$

Dieser Ausdruck wird gleich der Weber'schen Kraft, wenn man setzt:

$$\Psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}.$$

Hr. C. Neumann nimmt an, dass in Wahrheit dieser Werth nur für grössere Entfernungen genau gelte, für sehr kleine aber davon in einer nicht näher definirten Weise abweiche.

Eine solche Aenderung im Werthe von Ψ würde an der ganzen, von mir im vorigen Paragraphen gegebenen Deduction gar nichts ändern, weil dort alle relativ zu einander bewegten elektrischen Theilchen, für welche $d^2\Psi/dt^2$ nicht gleich Null ist, in beliebig grossen Entfernungen voneinander liegen können.

§ 13. Folgerungen für die elektrischen Ströme.

Im vorigen Paragraphen wurde vorausgesetzt, dass nur eine Art von Elektricität in Bewegung sei; es wären die dort gezogenen Schlüsse, wie schon bemerkt, direct anwendbar auf elektrische Ströme in Leitern, wenn bei diesen, wie es Hr. C. Neumann in seiner letzten Arbeit angenommen hat, sich nur eine Elektricität bewegte, oder wenigstens eine mit grösserer Menge oder Geschwindigkeit als die andere. Wäre dies der Fall, so würde ein elektrischer Strom innerhalb einer mit hinreichender Menge festliegender gleichartiger Elektricität bekleideten Kugelhülle ein Arbeitsäquivalent haben, welches kleiner als in der Ruhe wäre, mit allen unzulässigen Consequenzen eines solchen.

Wenn dagegen angenommen wird, dass bei jeder elektrischen Strömung in einem Leiter gleiche Quanta Elektricität sich mit gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten bewegen, so werden die Schlüsse des vorigen Paragraphen unanwendbar, weil die träge Masse beider elektrischen Fluida durch äussere ruhende Elektricität in entgegengesetzter Weise verändert werden würde. In diesem Falle bleibt nur das elektrodynamische Potential, welches oben mit Q bezeichnet ist, übrig, um die Arbeit der Strömung negativ zu machen; und dies



sind gerade die Fälle, welche ich in meiner früheren Arbeit als möglich nachgewiesen habe. Für die Bewegung der Elektrizität sind dabei Differentialgleichungen benutzt, die mit den von Hrn. Kirchhoff aus der Weber'schen Hypothese hergeleiteten zusammenfallen. Meinen Nachweis, dass diese Differentialgleichungen labiles Gleichgewicht der Elektrizität in Leitern ergeben, glaubt Hr. C. Neumann durch folgende Erklärung zu beseitigen:

„Diese Differentialgleichungen aber beruhen nur theilweise auf jenem Grundgesetze, zum anderen Theil aber auf mancherlei anderen sehr hypothetischen (und bisher nicht einmal bestimmt formulirten) Voraussetzungen, sodass also jenes Grundgesetz durch ein gegen diese Differentialgleichungen geäußertes Bedenken nicht im Mindesten tangirt werden kann.“ Uebrigens hat, wie oben bemerkt, Hr. C. Neumann es nicht auf sich genommen, richtigere Differentialgleichungen an Stelle der von ihm angezweifelte zu setzen.

Ich erlaube mir deshalb hier zunächst die aus Hrn. Kirchhoff's Arbeit¹⁾ leicht heraus zu lesenden Voraussetzungen hier zusammenzustellen.

1) Derselbe benutzt den von Hrn. W. Weber selbst gegebenen Werth für die elektrodynamisch inducirten elektromotorischen Kräfte, welchen dieser unter der Voraussetzung abgeleitet hat, dass in jedem elektrischen Strome gleich grosse Quanta positiver und negativer Elektrizität mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen fließen. Aus dieser Voraussetzung können die von Hrn. Kirchhoff gebrauchten Ausdrücke in der Form, wie er sie braucht, nach bekannten Methoden, ohne Schwierigkeit hergeleitet werden. Diese Annahme fällt übrigens mit der anderen zusammen, dass an jeder Stelle eines Leiters die absolute Menge beider elektrischer Fluida zusammen genommen stets constant ist. Dieselbe Annahme bedingt auch weiter, dass alle Anziehungskräfte, welche gleichzeitig auf die positive und negative Elektrizität des Leiters ausgeübt werden, diesen

1) Pogg. Annalen Bd. 102. S. 529–533.

selbst zu bewegen streben müssen, da die beiden Elektrizitäten nicht gleichzeitig ihren Ort verlassen können.¹⁾

2) Es wird vorausgesetzt, dass die elektrischen Fluida²⁾ in dem Leiter continuirlich verbreitet sind, und ihre Geschwindigkeiten continuirliche Functionen der Coordinaten sind. Diese Voraussetzung liegt der Ausführbarkeit der über den Raum erstreckten Integrationen zu Grunde.

1) Bei diesem Punkte erlaube ich mir auf einen Fehler aufmerksam zu machen, den Hr. C. Neumann auf S. 409 des angeführten Aufsatzes in seinen Rechnungen begangen hat. Er behauptet daselbst unter (30), dass er durch seine Gleichungen (29) „den wichtigen Satz, dass die auf irgend eine ponderable Masse ausgeübte bewegende Kraft identisch ist mit der Resultante sämmtlicher distantiiellen Kräfte, welche einwirken theils auf die ponderable Masse selber, theils auf die augenblicklich in ihr enthaltene elektrische Materie“ bewiesen habe, und fügt hinzu: „Man betrachte diesen Satz gewöhnlich als selbstverständlich. Dass das indessen nicht der Fall sei, zeigt die hier für den Satz gegebene Deduction. Denn aus dieser Deduction geht hervor, dass die Richtigkeit des Satzes wesentlich geknüpft ist an die Voraussetzung, die elektrische Masse besitze keine oder nur eine verschwindend geringe Trägheit.“ Ich erstaunte nicht wenig, als ich diesen Satz las, denn in den Hypothesen, von denen Hr. C. Neumann ausging, und auf welche seine „Deduction“ gegründet ist, war über die mechanischen Beziehungen zwischen der sich bewegenden, hier nur positiven Elektrizität und der Materie des Leiters nichts weiter angenommen, als dass die Elektrizität der Reibung des Leitungswiderstandes und den voltaischen elektromotorischen Kräften (Schiebungs Kräften) unterworfen sei. Dass nun durch blosser Rechnung eine neue mechanische Beziehung zwischen beiden, zu welcher in den Prämissen kein Grund gelegt war, erzeugt werden sollte, machte mich neugierig das Verfahren kennen zu lernen, welches so etwas leisten konnte. Der Fehler ist einfach folgender: In Gleichung (25) kommt ein Summandus vor $p \frac{d^2 \xi}{dt^2}$, worin p die träge Masse der positiven Elektrizität, ξ deren x -Coordinate bezeichnet. Hr. Neumann setzt der von ihm erwähnten Annahme gemäss, die er erst einführt, nachdem die genannte Gleichung gebildet ist, $p = 0$ und lässt den genannten Summandus ausfallen. In Gleichung (24) aber ist $p \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ einer endlichen Kraft gleich gesetzt, und wenn also $p = 0$, so wird die Beschleunigung $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$ unendlich gross, aber das Product beider wird darum noch nicht Null, kann also aus Gleichung (25) auch nicht weggelassen werden. Vielmehr musste erwiesen werden, dass die Summe der Kräfte, welcher $p \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ gleich gesetzt ist, gleich Null sei, und dieser Beweis wird sich, so viel ich sehe, nur führen lassen, wenn der angeblich deducirte Satz (30) als Voraussetzung angenommen wird. (Weiteres unten S. 687.)



3) Es werden die Grundhypothesen des Ohm'schen Gesetzes gemacht, dass nämlich in jedem Augenblicke die elektrische Strömung so hoch steige, bis die durch den Leitungswiderstand erzeugte Gegenkraft der treibenden elektromotorischen Kraft gleich sei. Es liegt hierin die Annahme, dass die elektrischen Fluida keine träge Masse haben. Diese sub 3) hingestellte Annahme hat Hr. C. Neumann in seiner letzten Arbeit in gleicher Weise gemacht.

Andere Hypothesen kann ich aus Hrn. Kirchhoff's Behandlung des Problems nicht herausfinden. Die von Hrn. Bertrand erhobenen und im folgenden Paragraphen besprochenen Bedenken existiren nicht für Jemanden, der vom Weber'schen Gesetze ausgeht, da durch dieses der Sinn der resultirenden Kraft bestimmt gegeben ist.

57 Was die unter 3) gemachte Annahme betrifft, dass die elektrischen Fluida im Leiter sich ohne träge Masse bewegten, so habe ich diese in dem betreffenden § 5 meines früheren Aufsatzes sogar noch fallen lassen, und vielmehr die allgemeineren von Hrn. Lorberg aufgestellten Differentialgleichungen benutzt, welche eine solche träge Masse annehmen. Dieselbe könnte den elektrischen Fluidis, als solchen, direct angehören, oder auch irgend einer Art der Bewegung der ponderablen Masse des Leiters zukommen, welche aber immer der Stromstärke genau proportional bleiben müsste, und nicht wie die Wärmebewegung mit der Temperatur unabhängig von der augenblicklichen Stromstärke gross oder klein werden dürfte.

Diese von Hrn. Lorberg benutzte Hypothese einer trägen Masse der bewegten Elektrizität (oder auch träger Masse, welche von der Elektrizität mitbewegt wird) beseitigt nun allerdings, wie meine frühere Abhandlung zeigt, das labile Gleichgewicht in Körpern von kleinen Dimensionen, aber lässt es bestehen in Körpern von grossen Dimensionen.¹⁾ Und schon dieser Umstand genügt, um zu zeigen, dass auch bei den Strömungen unter Voraussetzung der Kirchhoff'schen Annahmen das labile Gleichgewicht gar nicht von den Einwir-

1) Borchardt's Journal Bd. LXXII, S. 95. Erläuterung zu Gleichung (8c). — S. oben S. 589.

kungen abhängt, die in molecularen Abständen erfolgen, sondern im Gegentheil von den Fernwirkungen der Weber'schen Kräfte.

Unser oben aufgestelltes Gesetz (3h), welches dem für die Erhaltung der Energie analog ist, lässt auch erkennen, dass abgeänderte Annahmen über die molecularen Vorgänge und molecularen Kräfte im elektrischen Strome dem Fehler nicht abhelfen können.

Sind überall nur gleiche Mengen positiver und negativer Elektrizität in Bewegung, so hebt sich, wie schon bemerkt, das zur Masse hinzugefügte Glied fort, und negative Werthe der Arbeit können dann nur durch die Potentialgrössen $+P-Q$ hervorgebracht werden, die auf der linken Seite der Gleichung (3h) stehen. Dass übrigens diese negativ werden können, zeigen meine früheren Untersuchungen in § 5, da ja die Berechnung dieser Grössen unabhängig ist von der Art, wie die Bewegung in dem Leiter weiter verläuft. Erst diese letztere wird durch die angezweifelte Differentialgleichungen bestimmt. Da P seiner Natur nach nothwendig immer positiv ist, so kommt es hauptsächlich auf das Vorzeichen und den Werth von Q an. Setzen wir nun:

$$L = \sum (mq^2),$$

wo die Summe über alle trägen, ponderablen oder imponderablen Massen auszudehnen ist, so ist:

$$L + P - Q + V = \mathfrak{A}$$

die gesammte Summe der nach Weber's Annahmen durch die Elektrizität bedingten Arbeit. Setzen wir hier voraus, dass V nur die Potentialfunction von Molecularkräften irgend welcher Art sei, also auch die Ergänzungen umfasse, welche etwa noch an der Weber'schen Kraft anzubringen sind, die aber jenseits einer kleinen Distanz gänzlich verschwinden sollen, und vergrössern wir die sichtbaren Dimensionen des betreffenden Körpersystems auf das n -fache, so aber, dass die Molecularstructur, die molecularen Vorgänge und die Geschwindigkeiten dieser, wie der elektrischen Strömungen unverändert bleiben (die Zahl der Molekeln also auf das n^3 -fache wächst): so werden L und V wachsen im Verhältnisse $1:n^3$, aber P und Q werden wachsen



im Verhältnisse $1:n^6$. Bei genügender Vergrößerung der Dimensionen werden also schliesslich diese letzteren Grössen immer den Ausschlag geben, und wenn $P - Q$ negativ ist, wird also dann die gesammte Arbeit negativ werden, und wird, wenn ihr durch Reibung mit Wärmeentwicklung noch weitere Verluste zugefügt werden, immer grössere negative Werthe erreichen müssen.

Gehen wir also von einem Zustande einer leitenden Kugel aus, wo im ersten Moment der Bewegung die mittlere Dichtigkeit der Elektrizität überall gleich Null ist, dagegen entweder centrifugale oder centripetale Strömungen gleichmässig in allen Radien bestehen, übrigens mit beliebiger Vertheilung der Intensität in einzelnen concentrischen Kugelschichten, so wird $P = 0$, Q positiv sein; und welche lebendige Kraft und Arbeit für die molecularen Prozesse verwendet sein mag, es wird immer nur auf hinreichende Grösse der Dimensionen der leitenden Kugel ankommen, damit die Arbeit negativ werde, und die elektrische Bewegung nicht ohne neuen Zuschuss von Arbeitskraft von aussen her zur Ruhe gebracht werden kann!

Schliesslich erlaube ich mir die gegenwärtige Lage dieser Discussion folgendermaassen zusammenzufassen, so weit sie das Weber'sche Gesetz betreffen:

1) Die elektromagnetischen und elektrodynamischen Erscheinungen sind keineswegs in der Art von den übrigen Vorgängen in der unorganischen Natur unterschieden, dass es notwendig wäre für ihre Erklärung eine andere Art von Grundkräften, nämlich solche, die nicht blos von der Lage der wirkenden Massen, sondern auch von deren Bewegung abhängen, anzunehmen. Dies geht aus der Theorie von Maxwell hervor, welche die genannten Erscheinungen nicht auf Fernkräfte, sondern auf eine continuirlich im Aether sich fortpflanzende Bewegung zurückführt. Die dabei angenommene Wirkungsweise zwischen zwei aneinander stossenden Volumenelementen des Aethers ist zwar eine andere, als die uns von den fest-elastischen Körpern her bekannte, aber sie lässt sich durch einfache mechanische Vorrichtungen nachahmen, ist also eine solche, wie sie durch die uns wohlbekannten mechanischen Kräfte hervorgebracht werden könnte.

2) Die Rückführung dieser Erscheinungen auf Fernkräfte, die von der Bewegungsweise der wirkenden Theilchen abhängen sollen, wie dies in der Weber'schen Hypothese geschehen ist, ergibt die Möglichkeit von Bewegungen, bei denen das Arbeitsäquivalent des Massensystems kleiner wird als in der Ruhe, und desto kleiner, je schneller die Bewegung. Daran knüpfen sich physikalisch unzulässige Folgerungen, nämlich die Möglichkeit ein Perpetuum mobile herzustellen und labiles Gleichgewicht der Elektrizität in ihren Leitern.

3) Diese unzulässigen Folgerungen werden durch die von den Herren W. Weber und C. Neumann gemachten Annahmen einer trägen Masse der elektrischen Fluida und von molecularen Zusatzkräften höchstens für Leiter von geringen Dimensionen beseitigt, und können überhaupt durch Hypothesen, welche die molecularen Vorgänge und Kräfte betreffen, immer nur für solche beseitigt werden; sie bleiben bestehen für Leiter von hinreichender Grösse und elektrische Quanta von hinreichender Grösse.

4) So lange keine Hülfsypothesen gefunden sind, welche das labile Gleichgewicht und die Möglichkeit in das Unendliche steigender Bewegung vollständig beseitigen, scheint mir, dass überhaupt jede Erklärung aus der Weber'schen Hypothese, auch wo eine solche scheinbar gelingt, ungenügend begründet ist. Was hilft es zu berechnen, dass constante Ströme solche und solche Anziehungskräfte und bei ihrer gegenseitigen Näherung solche und solche inducirende Kräfte aufeinander ausüben würden, wenn nach dem zu Grunde gelegten Gesetze constante Ströme und Ruhe der Elektrizität in einem Leiter gar nicht bestehen können.

Um das Verhältniss anschaulicher zu machen, erlaube ich mir einen Vergleich. Wenn Jemand eine physikalische Erklärung gründen wollte auf Strömungen, die in Wasser vorgängen, welches in einem unten geschlossenen Gefässe mit horizontaler Grenzfläche, also in labilem Gleichgewichte, über Luft geschichtet ist, so würde eine solche Erklärung eben wegen des labilen Gleichgewichts einer so suspendirten Wassermasse offenbar sofort verworfen werden, obgleich in engen Röhren und Spalten, wo die molecularen Capillarkräfte wirken,



wirklich stabiles Gleichgewicht bestehen, und eine solche Erklärung zulässig erscheinen könnte. Wenn es aber in der Natur der Sache läge, dass dieselbe Erklärung auch auf Gefässe von vielen Quadratfuss Querschnitt anwendbar sein müsste, wo das Gleichgewicht jedenfalls labil ist, so würde dieselbe eben darum auch für die engen Gefässe als unzureichend verworfen werden müssen.

Ganz ähnlich verhält es sich mit dem Weber'schen Gesetze. Die Annahme von träger Masse der Elektrizität oder von Molecularkräften könnte das Gleichgewicht in kleinen Leitern vielleicht stabil machen; in Leitern von grossen Dimensionen aber würde es labil bleiben, und wir können das genannte Gesetz deshalb weder für die letzteren, noch für die ersteren als den richtigen Ausdruck der letzten Ursache anerkennen.

Was die frühere Hypothese von Hrn. C. Neumann betrifft, wonach das Potential der elektrischen Massen Zeit zu seiner Verbreitung brauchen soll, so stimmt sie nur für geringe Geschwindigkeiten der Elektrizitäten mit dem Weber'schen Gesetze überein. Die von mir gezogenen Folgerungen auf das Zustandekommen unendlicher Geschwindigkeiten nach letzterem Gesetze sind also auf jene C. Neumann'sche Hypothese nicht ohne weitere Untersuchung anwendbar. Wohl aber bleibt unverändert auch für diese Hypothese bestehen, dass nach ihr Bewegungen vorkommen können, bei denen das Arbeitsäquivalent geringer ist als im Ruhezustande, wodurch eben labiles Gleichgewicht und endlose Bewegung bedingt sind, wenn auch vielleicht nicht nothwendig in das Unendliche steigende Bewegung.

Ich will hier übrigens hinzufügen, dass die zweite Abtheilung der jüngst veröffentlichten „Elektrodynamischen Untersuchungen“ von Hrn. C. Neumann¹⁾, welche sich speciell mit dem von mir aufgestellten allgemeineren Ausdruck des elektrodynamischen Potentials beschäftigt, die Konsequenzen meiner Hypothese nicht blos für ruhende Leiter, auf welche

1) Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 20. October 1871. S. 450–478.

ich mich beschränkt hatte, um die von mir discutirten Fragen des elektrodynamischen Grundgesetzes nicht unnöthig zu compliciren, sondern auch für bewegte Leiter behandelt, und namentlich den allgemeinen Beweis des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft aus meinen Hypothesen auch für diesen allgemeinsten Fall durchgeführt hat. Ich würde dabei höchstens gegen die Einführung der „Schiebungskräfte“ (elektromotorische Contactkräfte im Volta'schen Sinne) Einwendungen zu machen haben, deren Erörterung übrigens einem anderen Orte vorbehalten bleiben mag, da sie überwiegend physikalische Dinge zu besprechen hat.

Nur in Betreff der Kritik, in welcher sich Hr. C. Neumann dabei gegen meine vor 25 Jahren erschienene Schrift von der Erhaltung der Kraft ergeht, will ich mir zu bemerken erlauben, dass ich selbst schon längst in allen wesentlichen Punkten diese Kritik ausgeübt hatte. Die Darstellung in der „Erhaltung der Kraft“ leidet, wie ich ausdrücklich auf S. 69 schon in dem Büchlein selbst hervorgehoben habe, an dem Mangel, dass man damals den Verlauf der durch plötzliche Stromesschwankungen inducirten Ströme noch nicht kannte, und also die davon herrührende Wärmeentwicklung nicht berechnen konnte. Dann bin ich selbst es zuerst gewesen, welcher im Jahre 1851¹⁾ diese Lücke durch neue Versuchsreihen ausgefüllt hat, indem ich zeigte, dass der Verlauf auch dieser Ströme durch F. Neumann's des Vaters und Ohm's Gesetz bestimmt wird. Welche Aenderungen dem entsprechend in der Anwendung des Gesetzes von der Constanz der Energie auf die inducirten Ströme zu machen sind, habe ich 1854 in einer Antwort gegen Hrn. Clausius²⁾ kurz, aber in den wesentlichen Punkten vollständig angegeben. Dort wird vorangestellt der Satz, dass ein galvanischer Strom von der Intensität I durch sein Bestehen ein Arbeitsäquivalent von der Form $\frac{1}{2} p I^2$ repräsentire, und habe weiter hinzugefügt: „Für einen einzelnen Stromkreis ist mir noch nicht gelungen zu beweisen“ (nämlich vom Gesetze der Energie her ausgehend), „dass die mit p bezeichnete

1) Pogg. Annalen, Bd. LXXXIII, S. 505–540.

2) Ebenda Bd. XCI, S. 258–260.



Constante gleich dem doppelten Potentiale“ (des Stromes auf sich selbst) „sein müsse, so wahrscheinlich dies auch nach der Analogie der übrigen Fälle sein mag.“ In der That kommt hierbei die Frage nach der Trägheit der Elektricität in Betracht, die durch bloß theoretische Schlüsse ohne That-sachen nicht zu entscheiden ist.

Die Anwendung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie auf die elektrischen Ströme modificirte sich in der That nur dadurch, dass zu den übrigen schon sonst bekannt gewesenen Arbeitsäquivalenten auch noch jenes $\frac{1}{2} p I^2$ für die bestehenden elektrischen Ströme hinzugenommen werden musste.

⁶² Wenn aber Hr. C. Neumann, der doch die Streitschriften von Clausius gegen mich citirt, meine Antwort darauf nicht gekannt haben sollte, so hätte er billiger Weise nicht übersehen sollen, dass diese selbe Bedeutung des Potentials der elektrischen Ströme, deren fehlende Kenntniss den wesentlichen Mangel des betreffenden Kapitels meiner Schrift von der Erhaltung der Kraft bildet, von mir in meiner letzten Arbeit im 72. Bande des Journals für Mathematik geradezu zum Fundament der ganzen Betrachtung gemacht ist, aus welcher die auch von ihm in seiner letzten Arbeit benutzten Hypothesen hergeleitet sind.

Der Streit darüber, ob die Existenz der elektrodynamischen Induction aus dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft „deducirt“ werden könne, hat für mich nur den Werth eines Wortstreites. Meine Aufgabe in der Erhaltung der Kraft war, die sämtlichen damals bekannten That-sachen durchzugehen und zu prüfen, ob sie mit dem betreffenden allgemeinen Gesetze in Uebereinstimmung waren, ob sich vielleicht im Gegentheil irgendwo Lücken oder Widersprüche zeigten. Als Form der Darstellung ist es bei solcher Aufgabe oft anschaulicher die Richtigkeit des allgemeinen Gesetzes vorauszusetzen, und die Folgen zu deduciren, nicht um sie durch eine solche Deduction als bewiesen zu betrachten, sondern um sie mit den That-sachen zu vergleichen, und dadurch die Zulässigkeit des allgemeinen Gesetzes zu prüfen, was den Ausgangspunkt bildete. Will man alle bei der elektrodynamischen Induction in

Betracht kommenden That-sachen bis auf eine als bekannt voraussetzen, so wird man diese eine immer noch aus dem Gesetze von der Constanz der Energie „deduciren“ können, so z. B. den Werth der Inductionconstante. Aber als Beweismittel von thatsächlichen Wahrheiten kenne ich nur den Weg der Induction.

§ 14. Die Einwürfe von Hrn. J. Bertrand.

Hr. J. Bertrand hat aus meinem Aufsatz über die Bewegungsgleichungen der Elektricität einige Punkte hervorgehoben, welche ihm bedenklich erscheinen.¹⁾ Ich erlaube mir dieselben hier zu beantworten, namentlich auch deshalb, da sie in der That Punkte der Theorie betreffen, die wenigstens noch nicht explicite auseinander gesetzt sind.

Zunächst findet Hr. Bertrand Schwierigkeiten in der Anwendung des Potentialbegriffs auf zwei Stromelemente überhaupt. Er geht dabei von der Hypothese von Ampère aus, dass die Kraft zwischen zwei Stromelementen eine anziehende oder abstossende in der Richtung ihrer Verbindungslinie sei. Dreht man eines der Elemente um die Richtung dieser Kraft als Axe, so würde dadurch keine Arbeit geleistet werden; dennoch änderte sich der Werth des Potentials, dessen Ausdruck nach Neumann, oder in der allgemeineren von mir gegebenen Form ja auch die Winkel zwischen den Elementen ds und ds' enthält.

Hiergegen ist nun zu erwidern, dass die Existenz eines Potentials zweier Stromelemente nicht bloß die Existenz einer anziehenden oder abstossenden Kraft zwischen ihnen bedingt, sondern auch an jedem der Elemente die Existenz eines Kräftepaares, welches das betreffende Element in eine bestimmte Richtung zu stellen strebt. Diese Richtung ist, wenn wir Hrn. F. E. Neumann's Form des Potentials zu Grunde legen, der Richtung des anderen Elementes parallel, nach Hrn. W. Weber's Form dagegen fällt sie in die Richtung der Verbindungslinie r .

Denkt man sich jedes dieser Kräftepaare dargestellt durch

¹⁾ Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. T. LXXIII, p. 965.



zwei Kräfte, die an den Endpunkten von ds oder ds' angreifen, so werden diese Kräfte allerdings von der Ordnung der Grössen r/ds und r/ds' sein müssen im Vergleich mit der anziehenden oder abstossenden Kraft beider Elemente, und die Arbeit, welche geleistet werden muss, um eines der Elemente ds aus der Lage seines stabilen Gleichgewichts um einen rechten Winkel zu drehen, während das andere Element ds' fest liegen bleibt, wird ebenso gross sein müssen, als wenn man ds bei unveränderter Richtung in unendliche Entfernung brächte. Darin liegt aber durchaus kein Widerspruch und keine Unmöglichkeit, wie Hr. Bertrand sie zu finden glaubt. Denn das ist alles genau ebenso, wenn man statt der beiden Stromelemente ds und ds' zwei magnetische Linienelemente nimmt, deren Potential von der Form ist:

$$mm' ds ds' \frac{\cos [ds, ds'] - 3 \cos [r, ds] \cos [r, ds']}{r^3}.$$

Für zwei solche magnetische Elemente ist die Form des Potentials offenbar berechtigt, und auch hier müssen wir dieselbe Arbeit leisten, um einerseits eines der Elemente aus irgend einer gegebenen Lage in unendliche Entfernung zu bringen, oder andererseits es so zu drehen, dass das Potential gleich Null wird. Auch in diesem Falle sind die Kräfte des Kräftepaars, welches wirklich an den Enden eines solchen Linienelementes angreift, von der Ordnung r/ds , im Vergleich mit denen, die das Element parallel mit sich selbst zu verschieben streben.

Die Annahme eines Potentials der Stromelemente ist also nicht, wie Hr. Bertrand meint, im Widerspruch mit sich selbst, sondern nur im Widerspruch mit der Hypothese von Ampère, welche ausschliesslich eine anziehende oder abstossende Kraft für jedes lineare Stromelement annimmt. Den Thatsachen gegenüber, welche an geschlossenen Stromkreisen beobachtet werden können, ergeben beide Hypothesen gleiche Resultate und sind deshalb gleich berechtigt, wie Hr. Bertrand anerkennt.

Der zweite Einwand bezieht sich auf die Art und Weise, wie zuerst Hr. Kirchhoff und dann ich selbst das mittels

einer Potentialformel ausgedrückte Inductionsgesetz angewendet haben, um die Componenten der stromerregenden Kraft nach den Richtungen der Coordinatenachsen zu finden. Wenn $Pi ds$ die Potentialfunction auf ein lineares Stromelement ds mit der Stromintensität i ist, so ist nach Hrn. F. E. Neumann's Inductionsgesetz die elektromotorische Kraft der Induction dP/dt . Aber, fragt Hr. Bertrand, welches ist die Richtung dieser Kraft? Diese Richtung ist nun in dem speciellen Falle, auf den Neumann seine Ausdrücke zuerst angewendet hat, nämlich für lineare Stromelemente, jedenfalls gegeben; es ist die Richtung dieses Elementes. Ich glaube, ich bezeichne den Sinn von Hrn. Bertrand's Zweifel richtig so: Längs des Elementes ds wirkt nur eine Componente der Inductionskraft, deren Grösse das Neumann'sche Gesetz giebt. Diese ändert sich mit der Richtung von ds . Giebt es in dem Sinne eine bestimmte Richtung und Grösse der Inductionskraft, dass die Componente längs ds nach dem gewöhnlichen Verfahren der Zerlegung der Kräfte gefunden werden kann? Das von Hrn. Kirchhoff und mir eingeschlagene Verfahren für nicht lineare Leiter setzt allerdings voraus, dass die Zusammensetzung der Inductionskräfte in derselben Weise geschehen dürfe, wie bei allen anderen Kräften, nämlich nach dem Gesetze des Kräfteparallelogramms. Dies ist nicht unmittelbar klar, wenn man die gesammte Potentialfunction aller vorhandenen Stromelemente auf ein einzelnes Element ds schon durch Integration vollständig gebildet hat. Hr. Bertrand hat Recht, dass er dafür einen Beweis verlangt. Dieser Beweis ist aber so leicht mittels der in den Abhandlungen von F. E. Neumann und W. Weber oft gebrauchten Umformungen zu führen, dass darin für Hrn. Kirchhoff und mich die Entschuldigung gefunden werden wird, wenn wir ihn dem mit jenen Abhandlungen vertrauten Leser sich selbst zu ergänzen überlassen haben.

Hrn. F. E. Neumann's Potential ist eine Summe von Gliedern von der Form:

$$p = i \cdot i' \cdot ds \cdot ds' \cdot \frac{\cos [ds, ds']}{r}.$$

Wenn wir nun die Winkel, welche die Richtung des Elementes ds mit den positiven Coordinatenachsen macht, mit α, β, γ , die



entsprechenden für das Element ds' mit α' , β' und γ' bezeichnen, so wird:

$$p = i ds ds' \left\{ \frac{i' \cos \alpha'}{r} \cos \alpha + \frac{i' \cos \beta'}{r} \cos \beta + \frac{i' \cos \gamma'}{r} \cos \gamma \right\},$$

und wenn man das Integral über sämtliche Elemente ds' nimmt, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$\int p ds' = iP = i \cdot ds \{ A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma \},$$

wo A , B , C unabhängig von i , α , β und γ sind, d. h. unabhängig von der Richtung des Elementes ds und von seiner Stromstärke. Die elektromotorische Induktionskraft, welche durch irgend eine Aenderung in der Lage, Richtung oder Stromstärke der Elemente ds' im Elemente ds erzeugt wird, ist nach F. E. Neumann:

$$\varepsilon \frac{dP}{dt} = \varepsilon \frac{dA}{dt} \cdot ds \cdot \cos \alpha + \varepsilon \frac{dB}{dt} \cdot ds \cdot \cos \beta + \varepsilon \frac{dC}{dt} \cdot ds \cdot \cos \gamma. \quad (8)$$

Setzen wir:

$$R^2 = \left(\frac{dA}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dC}{dt} \right)^2$$

und betrachten wir R als eine Kraft, welche mit den positiven Koordinatenachsen Winkel macht, deren Cosinus sind:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dA}{dt}, \quad \frac{1}{R} \cdot \frac{dB}{dt}, \quad \frac{1}{R} \cdot \frac{dC}{dt},$$

so ist die Induktionskraft, die im Elemente ds zur Wirkung kommt, nach Gleichung (8) gleich der Componente, welche die Kraft $\varepsilon R ds$ in Richtung des Elementes ds hervorbringt.

Die Weber'sche Form des Potentials zweier Stromelemente giebt ähnliche Resultate. Hier wird:

$$p_1 = i i' ds ds' \cdot \frac{\cos [r, ds] \cos [r, ds']}{r}.$$

Da nun:

$$\cos [r, ds] = \frac{x' - x}{r} \cdot \cos \alpha + \frac{y' - y}{r} \cdot \cos \beta + \frac{z' - z}{r} \cdot \cos \gamma$$

ist, so kommt auch hier wieder das Integral unter die Form:

$$P_1 = ds \{ A_1 \cos \alpha + B_1 \cos \beta + C_1 \cos \gamma \},$$

wo A_1 , B_1 und C_1 von i , α , β , und γ unabhängig sind.

Endlich führt die von mir angegebene allgemeinere Form des Potentials:

$$p_2 = i \cdot i' \cdot ds \cdot ds' \cdot \frac{(1+k) \cos [ds, ds'] + (1-k) \cos [r, ds] \cos [r, ds']}{r}$$

auf die entsprechende Form:

$$P_2 = (1+k) P + (1-k) P_1,$$

und die Induktionskraft wird:

$$\varepsilon \cdot \frac{dP_2}{dt} = \varepsilon \cdot \frac{dA_2}{dt} \cdot ds \cos \alpha + \varepsilon \cdot \frac{dB_2}{dt} \cdot ds \cos \beta + \varepsilon \cdot \frac{dC_2}{dt} \cdot ds \cos \gamma,$$

wo:

$$A_2 = (1+k) A + (1-k) A_1,$$

$$B_2 = (1+k) B + (1-k) B_1,$$

$$C_2 = (1+k) C + (1-k) C_1.$$

Die resultierende Kraft und deren Richtung ist gerade wie im ersten Falle zu bestimmen.

Die elektromotorischen Kräfte, welche durch die von Hrn. Kirchhoff und mir angewendeten Potentialausdrücke gesetzt sind, haben also ebenso gut eine bestimmte Richtung und Grösse, wie die elektrostatischen Anziehungskräfte für strömende Elektrizität, oder die die Wärme fortreibenden Temperaturunterschiede in den Problemen über Wärmeleitung, und sind also genau in gleicher Weise in Rechnung zu bringen und von uns beiden in Rechnung gebracht worden, wie es in den genannten beiden anderen Fällen geschehen muss, d. h. es ist in jedem Punkte des Leiters und für jedes durch ihn gezogene Linienelement die in dieses Linienelement fallende Componente der (durch den Widerstand des Leiters gehemmten) Strömung proportional gesetzt worden der in dasselbe Linienelement fallenden Componente der treibenden (elektrostatischen und inducirten) Kraft.



Zusatz (1881).

Hr. W. Weber hat am Schlusse seiner im XVIII. Bande der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften¹⁾ enthaltenen Abhandlung über: „Elektrodynamische Maassbestimmungen“ auch das von mir als Illustration gebrauchte Beispiel eines elektrischen Theilchens ϵ discutirt, welches mit der trägen Masse μ vereinigt sich im Inneren einer mit Elektrizität oberflächlich beladenen Hohlkugel bewegt. Er bestätigt meine Rechnung, insofern auch er findet, dass ein solches Theilchen bei Ansammlung endlicher elektrischer Quanta und in endlichen Entfernungen von diesen unendliche Geschwindigkeit erhalten könnte, und dass bei noch weiter gesteigerter Ladung der Zustand eintritt, den ich kurz als „negative Trägheit“ bezeichnet habe, wo jede auf μ wirkende beschleunigende Kraft, die nicht elektrischen Ursprungs ist, μ in der ihr entgegengesetzten Richtung beschleunigen würde.

Hr. W. Weber glaubt annehmen zu dürfen, dass die unendliche Geschwindigkeit nur durch eine verschwindend kleine Weglänge existiren und dann schnell wieder abnehmen würde; hierbei tritt aber unendliche Geschwindigkeit unter unendlicher, erst positiver und dann negativer Beschleunigung ein, welcher Fall doch eine nähere Untersuchung erfordert, da $\infty - \infty$ nicht nothwendig $= 0$ ist.

Die Gleichung der lebendigen Kraft, welche Hr. Weber für diesen Fall in Uebereinstimmung mit der von mir in § 12 der vorausgehenden Abhandlung angestellten Analyse aufstellt, ist:

$$\frac{1}{2} \left(\mu - \frac{8\pi}{3ce} R \epsilon \epsilon' \right) q \cdot q - V + C = 0.$$

Darin ist μ die träge Masse des elektrisirten Theilchens ϵ , ϵ' ist die Dichtigkeit der elektrischen Belegung der Kugel, und wird als mit der Zeit wachsend angenommen, R ist der Radius der grossen Kugel, q die Geschwindigkeit von μ in Richtung des Radius, V das Potential der äusseren, auf das Theilchen μ wirkenden Kräfte, und C ist die Constante der lebendigen Kraft, in welche der hier nicht weiter in Betracht kommende Werth der im Inneren der Kugel constanten Potentialfunction ihrer elektrischen

1) Abgedruckt in Wiedemann's Annalen Bd. 4, S. 366—373.

Belegungsschicht eingeschlossen ist; c ist die Weber'sche Geschwindigkeit. Der Kürze wegen setzt Hr. Weber:

$$\eta = \frac{3ce\mu}{8\pi R\epsilon},$$

wonach die obige Gleichung zu schreiben wäre:

$$\frac{1}{2} \mu \left(1 - \frac{\epsilon'}{\eta} \right) \cdot q^2 = V - C.$$

Nun kann man aus dieser Gleichung direct erkennen, dass wenn ϵ' bis zum Werthe η und über diesen hinaus wachsen könnte, und vor dem Moment, wo $\epsilon' = \eta$ wird, q reell wäre, es in dem genannten Momente unendlich und nachher imaginär werden würde, wenn nicht gleichzeitig $V - C$ durch Null geht, und sein Zeichen wechselt. Das könnte bei einem gewissen Werthe von C allerdings geschehen, aber der Werth von C ist bestimmt, wenn in irgend einem früheren Augenblicke der Bewegung der Werth von q gleichzeitig mit dem von ϵ' und V als gegeben angenommen worden ist. Der Werth von C muss also beliebig zu wählen sein, damit man ihn den verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten anpassen kann.

Es ist klar, dass, wenn vor und nach dem Moment, wo $\epsilon' = \eta$, die Grösse q irgend welchen reellen Werth haben soll, die Grösse $V - C$ von einem positiven Werthe, der jede endliche Grösse haben könnte, zu einem negativen Werthe springen müsste. Soll aber das Gesetz von der Constanz der Energie gewahrt werden, so muss die Constante C (abgesehen von dem in ihr steckenden Potentialwerthe, der ϵ' proportional ist) unverändert bleiben, und da V jedenfalls, und ϵ' nach der Weber'schen Annahme sich continuirlich ändern sollen, so kann die Grösse $V - C$ keinen solchen Sprung machen.

Man sieht, dass von Hrn. Weber gewählte Beispiel ist noch gefährlicher für seine Theorie, als es die meinigen waren. Ich suchte nur unendliche Geschwindigkeiten nachzuweisen, er stösst auf imaginäre. Uebrigens können im Interesse meines Gegners Zweifel gegen die Zulässigkeit des von ihm gewählten Beispiels erhoben werden, da die von ihm angenommene fortschreitende Ladung der grossen Kugel eine zufließende Bewegung der Elektrizität verlangt, deren Wirkung auf das Theilchen μ nicht berechnet ist.



Hr. Weber selbst hat aus der Gleichung der Energie eine Gleichung für die Beschleunigung abgeleitet, in der er dann ε' der Zeit proportional wachsend annimmt. Diese Gleichung enthält die Constante C nicht mehr, sodass deren Aenderung auch in der Lösung nicht unmittelbar sichtbar wird. Sie ist von der Form:

$$dq = -\frac{a\vartheta}{\mu} \frac{dt}{t},$$

deren Integral kann geschrieben werden:

$$q = -\frac{a\vartheta}{\mu} \log(ht),$$

wo h eine Integrationsconstante ist. Soll q reell sein, so muss h vor der Zeit $t=0$ negativen Werth haben, nachher positiven Werth, muss also nothwendig im Momente $t=0$ seinen Werth ändern. Änderte es ihn nicht, so wäre q jedenfalls in dem einen Zeitabschnitte complex. Hr. W. Weber schreibt für positive und negative t gleichmässig:

$$q = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \log\left(\frac{t \cdot t}{\vartheta \cdot \vartheta}\right),$$

d. h. er setzt voraus, dass der Werth h_0 für positive und h_1 für negative Werthe von t der Gleichung genügen:

$$h_0 + h_1 = 0,$$

für welche Annahme ich einen zwingenden Grund nicht zu finden weiss. Allerdings wird aber dadurch der Sprung im Werthe der Integrationsconstante verdeckt. So lange t endlich ist, kann man allerdings statt dt/t auch schreiben $t \cdot dt/t$, und als Integral statt $\log t$ schreiben $\frac{1}{2} \log(t \cdot t)$. Aber für den Uebergang durch 0 wird dieser Factor t/t in seinem Werthe unbestimmt. Dass in diesem Falle in der That die spätere Bewegung nicht mehr die ungestörte Fortsetzung der früheren ist, zeigte sich ganz zweifellos aus der Gleichung der Energie, wie oben erörtert. Wenn andererseits in dem Augenblick, wo $\varepsilon' = \eta$, die erstere Grösse zu wachsen aufhört, müsste die unendliche Geschwindigkeit bestehen bleiben, und sogar unbestimmte Zeit hindurch bestehen bleiben, wenn der Punkt μ in einer Kreisbahn erhalten bleiben könnte.

Die negative Beschleunigung durch eine vorwärts treibende Kraft findet auch Hr. Weber, sobald $\varepsilon' > \eta$ geworden. Er

lässt seinen bewegten Punkt auf geradliniger Bahn die Kugel verlassen, wobei der abnorme Zustand schnell aufhören würde. Aber dieselbe Art abnormer Beschleunigung würde auch in kreisförmiger Bewegung, die unter dem Widerstande einer rückwärts treibenden Kraft ausgeführt würde, eintreten müssen, und dann würde in der That gegen diese äussere Kraft Arbeit in das Unendliche und zwar mit steigender Geschwindigkeit geliefert werden müssen.

Ich bedaure, dass die Art, wie Schüler und Freunde von Hrn. W. Weber von meinen Einwänden gegen die Zulässigkeit seiner Hypothese als von einer gänzlich abgethanen Sache reden, mich zu dieser Kritik gezwungen haben, der ich dem hochverdienten Manne gegenüber gern aus dem Wege gegangen wäre. Uebrigens erlaube ich mir noch zu bemerken, dass ich die Konsequenzen seiner Hypothese nie als „ungereimt und absurd“ bezeichnet habe.¹⁾

1) Betreffs der in der Anmerkung zu S. 671 erwähnten Rechnung von Hrn. C. Neumann hat derselbe in seiner 1874 erschienenen Abhandlung: „Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz“ (Abhandl. d. Königl. Sächsischen Ges. d. Wiss. Math.-Phys. Classe Bd. XI. S. 162) geantwortet, dass die Kraft der der Werth $p \cdot d^2\xi/dt^2$ gleichgesetzt wird, auch Weber'sche Kräfte enthalten solle, in denen selbst Glieder mit Coefficienten $d^2\xi/dt^2$ vorkommen. Dadurch wird allerdings der Werth 0/0 beseitigt und die Gleichung behält bestimmten Sinn. Die sogenannte „Deduction“ des „wichtigen und bisher gewöhnlich für selbstverständlich gehaltenen Satzes“ wird dadurch meines Erachtens um kein Haar besser. Der Autor hat in seinen verschiedenen Aufsätzen verschiedene elektrodynamische Hypothesen discutirt. Diesmal wählt er solche, die ihm Werthe für die Beschleunigung der elektrischen trägen Masse p geben. Er findet, dass diese hypothetisch aufgestellten Gleichungen auch noch einen physikalisch zulässigen Sinn behalten, auch wenn die Masse $p = 0$ gesetzt wird, also gar nicht existirt. Daraus folgt doch nur, dass der so gewonnene Satz richtig sein kann, aber nicht, dass er richtig ist. Ich bin in meinen Irrthum verfallen, weil ich einen so bescheidenen Sinn hinter dem, was der Autor „Deduction“ nennt, nicht gesucht habe. — Ebenda S. 128–149 befinden sich die Auseinandersetzungen des Autors über das, was er in der Ableitung der Kirchhoff'schen Differentialgleichungen als zweifelhaft betrachtet. Sie beruhen auf der Möglichkeit, dass nicht alle Elektricität in Bewegung sei, und dass der Uebergang ruhender in bewegte Elektricität vielleicht noch unbekannte Wirkungen habe.



XXXVI.

Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte.

Aus: Monatsberichte der Berliner Akademie 1873, 6. Februar, S. 91–104.
(Vorläufige Anzeige des folgenden Aufsatzes.)

- 91 Hr. F. E. Neumann (Vater) hat das ganze Gebiet:
- 1) der elektrodynamischen Bewegungskräfte, welche durch das Ampère'sche Gesetz umfasst werden,
 - 2) der elektrodynamischen Induction, hervorgebracht durch Bewegung von Stromleitern,
 - 3) der elektrodynamischen Induction, hervorgebracht durch Aenderungen der Stromintensität,

unter ein einziges, relativ sehr einfaches Gesetz vereinigt. Dieses Gesetz ergiebt unmittelbar nicht die Kräfte, welche die durchströmten Leiter aus einer Lage in die andere zu führen streben, sondern giebt das Potential, d. h. die Arbeit, welche 92 durch die Ueberführung aus der einen in die andere Lage gewonnen werden kann. Für die unter 1) und 2) genannten Erscheinungen hätte sich allerdings der gesetzliche Ausdruck geben lassen, auch wenn die elektrodynamischen Kräfte nicht als die Variationscoefficienten eines Potentials sich hätten darstellen lassen; die unter 3) genannten dagegen fordern die Existenz eines Potentials, wie ich in der Einleitung zu meiner Arbeit: „Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität“ im 72. Bande von Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik schon erörtert habe.

Dieses Neumann'sche Potentialgesetz, welches in der allerglücklichsten Weise eines der verwickeltesten und verwir-

rendsten Gebiete von Erscheinungen unter einen ebenso einfachen, wie quantitativ genauen Ausdruck bringt, hat sich bisher bei richtiger Anwendung noch immer in Uebereinstimmung mit den thatsächlichen Erfahrungen gezeigt, auch mit solchen, auf die es von seinem Entdecker ursprünglich nicht bezogen war. Ich selbst habe mich bestrebt seine Anwendbarkeit auch für die schnell veränderlichen Ströme der Oeffnungs- und Schliessungsinduction experimentell nachzuweisen, und habe in der vorher genannten theoretischen Arbeit seine Consequenzen für die allgemeinste Form oscillatorischer elektrischer Entladungen in beliebig geformten Leitern von drei Dimensionen verfolgt, welche überall mit dem uns empirisch bekannten allgemeinen Gange der Erscheinungen übereinstimmen, wenn auch quantitative Messungen, die mit der Theorie verglichen werden könnten, bisher nur für lineare Schliessungsdrähte existiren. Für diese stimmen übrigens die Folgerungen des Neumann'schen Gesetzes mit den von Hrn. Kirchhoff aus dem Weber'schen Gesetze abgeleiteten und mit der Erfahrung theilweise verglichenen überein.

Nun hat Hr. F. E. Neumann, in den von ihm veröffentlichten Abhandlungen wenigstens, den Beweis, dass das Potentialgesetz für die elektrodynamischen Bewegungskräfte unter den bisher eingehaltenen Bedingungen des Experiments, nämlich an geschlossenen Strömen, übereinstimmende Resultate mit dem für diese Fälle thatsächlich richtigen Ampère'schen Gesetze gebe, nur nachgewiesen unter der beschränkteren Voraussetzung, dass die betreffenden beiden Stromleiter ohne Veränderung ihrer Form und Grösse bewegt werden. In der That fehlten zur Zeit seiner Veröffentlichung¹⁾ noch die Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Strömungen in Leitern von drei Dimensionen und deren experimentelle Bestätigung; ohne diese konnte das Potential eines beweglichen Leiters auf sich selbst nicht gebildet werden, da dies für einen linearen Leiter unendlich gross wird; und ohne dieses Potential

1) Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin, Reimer 1848. In der Akademie vorgelegt 9. Aug. 1847.

Helmholtz, wissenschaftl. Abhandlungen.



konnten die Kräfte, welche die Theile eines beweglichen Leiters gegenseitig auf einander ausüben, nicht oder wenigstens nicht ohne nebensächliche Betrachtungen, die damals noch verwickelt und bedenklich erscheinen mochten, behandelt werden. Hr. F. E. Neumann, in seiner vorsichtigen und streng an dem Gegebenen festhaltenden Weise, hat wohl aus diesem Grunde seinen Beweis auf die schon damals ganz klar vorliegenden Fälle beschränkt.

Nachdem in der Zwischenzeit die damals noch fehlenden Untersuchungen, namentlich durch Hrn. Kirchhoff, ausgeführt worden sind, und ihre Ergebnisse als gesichert betrachtet werden können, war eine weitere Anwendung des Potentialgesetzes auf die allgemeinsten Fälle der Bewegung elektrischer Leiter ohne Schwierigkeit auszuführen, wozu allerdings noch in der Formulirung des Gesetzes eine gewisse Beziehung auf diese erweiterten Fälle genommen werden muss, die übrigens aus der ursprünglich von Hrn. Neumann gegebenen Begriffsbestimmung fast mit Nothwendigkeit abzuleiten ist. Da nun dies, so viel ich weiss, noch nirgends explicite geschehen ist, und andererseits wegen des Mangels einer solchen ausführlichen Specialisirung des Gesetzes Zweifel gegen seine Anwendbarkeit aufstiegen, wie solche namentlich von den Herren Ed. Riecke¹⁾, Bertrand²⁾ und C. Neumann³⁾ (Sohn) ausgesprochen worden sind, so habe ich mich bemüht diese Lücke auszufüllen, und erlaube mir hier die Resultate dieser Arbeit zusammenzufassen.

1) Werth des Potentials P zweier linearer Stromelemente Ds und $D\sigma$ auf einander, deren Stromintensitäten i und j sind, deren Entfernung mit r bezeichnet wird. Für diesen Werth habe ich die in meiner oben erwähnten Abhandlung gebrauchte Form beibehalten, welche durch Einführung einer vorläufig unbestimmt bleibenden, jedenfalls positiven Constante k allgemeiner gehalten ist, als die von Hrn. F. E. Neumann

1) Göttinger Nachrichten 14. Aug. 1872.

2) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences 14. Octob. 1872.

3) Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. 3. Aug. 1872. Mathematische Annalen Bd. V. 606.

vorzugsweise gebrauchte Form, die dem Werthe $k = 1$ entspricht:

$$P = -\frac{1}{2} A^2 \frac{i j}{r} [(1+k) \cos(Ds, D\sigma) + (1-k) \cos(r, Ds) \cos(r, D\sigma)] Ds \cdot D\sigma. \quad (1)$$

Die Grössen $(Ds, D\sigma)$, (r, Ds) und $(r, D\sigma)$ bezeichnen die Winkel zwischen den Richtungen der eingeklammerten Linien, wobei als positive Richtung für r die von σ nach s laufende gewählt ist, für Ds und $D\sigma$ aber diejenige, in der die positive Elektrizität fliesst.

Die Grösse $-P$ bezeichnet die durch das gleichzeitige Bestehen der elektrischen Ströme in Ds und $D\sigma$ gesetzte Energie, welche als Inductionsstrom beim Aufhören einer der Strömungen zur Erscheinung kommt.

Die Grösse $+P$ ist dagegen die potentielle Energie der auf die Leiter wirkenden elektrodynamischen Bewegungskräfte, unter der Voraussetzung, dass bei deren Bewegungen die Stromintensitäten i und j unverändert bleiben.

Da das Potential P auch von den Winkeln abhängig ist, so folgt daraus unmittelbar, dass die mechanische Wirkung des Stromes in $D\sigma$ auf das als festen Stab vorgestellte Stromelement Ds sich im allgemeinen nicht durch eine einzige Kraft, wie bei Ampère, Grassmann, Stefan, sondern nur durch zwei an den Enden von Ds angreifende Kräfte ersetzen lassen wird, deren Intensität unabhängig von der Länge Ds ist. Die Art dieser Kräfte, wie sie auf ein vollkommen nachgiebiges Element wirken, ergibt sich übrigens aus der folgenden Analyse vollständiger.

Die vier auf die Enden von Ds und $D\sigma$ einwirkenden Kräfte genügen für jeden Werth der Constante k dem Gesetze von der Gleichheit der Action und Reaction¹⁾, was die von Ampère angenommenen Kräfte ebenfalls thun, die von Hrn. ²⁾

1) Dies ist wohl nur in Folge eines Versehens von Hrn. C. Neumann in seiner oben citirten Abhandlung geleugnet worden. Dass die Angabe im Texte richtig ist, ergibt sich einfach aus dem Umstande, dass das Potential dieser Kräfte nur von der relativen Lage von Ds und $D\sigma$ gegen einander abhängig gemacht ist.



Grassmann und Stefan angenommenen aber im allgemeinen nicht.

2) Gesetz der elektrodynamischen Bewegungskräfte. Um dieses auszusprechen für Leiter von drei Dimensionen muss man sich diese erst in leitende Fäden zerlegt denken, welche überall der Richtung der zur Zeit bestehenden Strömungslinien folgen, sodass keine Elektrizität von einem dieser Fäden zu seinen Nachbarn übergeht.

Die elektrodynamischen Bewegungskräfte, welche auf jedes Element eines jeden Stromfadens ausgeübt werden, sind alsdann gegeben durch die Regel, dass die mechanische Arbeit, welche die genannten Kräfte bei irgend einer unendlich kleinen Verschiebung der als beliebig biegsam und dehnbar gedachten Stromfäden leisten, gleich ist der bei derselben Verschiebung eintretenden Abnahme des elektrodynamischen Potentials, diese berechnet unter der Voraussetzung, dass die Stromintensität in jedem, von denselben ponderablen Theilchen gebildeten Faden unverändert bleibt.

3) An jeder Stelle des leitenden Systems, wo das Quantum der freien Elektrizität durch die zur Zeit bestehenden Ströme nicht geändert wird, laufen die Stromfäden continuirlich fort. Dagegen sind Enden von Stromfäden überall da anzunehmen, wo das Quantum der freien Elektrizität sich ändert. Liegen solche Stellen im Innern des Leiters, so kann ein Theil der Elektrizität auch weiter strömen; es kann also dort das Ende eines Stromfadens oder eines Theiles eines solchen mit Längenelementen eines anderen Theiles desselben Fadens zusammenfallend gedacht werden. Ist i die Stromintensität in dem Faden, und e die freie Elektrizität an seinem Ende, so ist am oberen Ende (nach welchem ein positives i hin gerichtet ist) $i = de/dt$, am unteren Ende $i = -de/dt$.

Für die Wirkungen eines linearen Stromleiters σ auf einen eben solchen s lässt sich der Gang der Rechnung kurz angeben, wie folgt. Da bei dehnbaren Leiterelementen die Längen s und σ selbst sich verändern, so müssen zwei andere Parameter p und ϖ eingeführt werden, um die einzelnen materiellen

Punkte des Leiters zu charakterisiren. Wir nehmen an, der Werth von p bleibe bei der Bewegung für jeden Punkt des Leiters s , und der von ϖ für jeden des Leiters σ unverändert, und es sei s eine continuirliche eindeutige Function von p , σ eine ebensolche von ϖ . Wir setzen den Werth von P aus zwei Theilen zusammen, nämlich:

$$P = P_1 + P_2, \quad (1a)$$

$$P_1 = -A^2 ij \iint \frac{\cos(Ds, D\sigma)}{r} Ds \cdot D\sigma, \quad (1b)$$

$$P_2 = -A^2 \frac{1-k}{2} ij \iint \frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma} Ds \cdot D\sigma. \quad (1c)$$

Der Ausdruck für P_1 lässt sich schreiben:

$$P_1 = -A^2 ij \iint \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\varpi} \right) \right] dp \cdot d\varpi. \quad (1d)$$

Hierin sind x, y, z die Coordinaten der Punkte des Leiters s ; ξ, η, ζ die des Leiters σ .

Um die Kräfte X, Y, Z zu finden, die auf s wirken und von P_1 abhängig sind, sind x, y, z zu variiren um $\delta x, \delta y, \delta z$ und dann zu setzen:

$$\iint (X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z) + \delta P_1 = 0. \quad (2)$$

Um die X -Kräfte zu finden, genügt es x zu variiren. Dies giebt:

$$\begin{aligned} \delta P_1 = & -A^2 ij \iint \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) \left[\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\varpi} \right] \delta x \cdot dp \cdot d\varpi \\ & - A^2 ij \iint \frac{1}{r} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} \cdot \frac{d\delta x}{dp} \cdot dp \cdot d\varpi. \end{aligned}$$

Aus dem zweiten Theile dieses Ausdrucks ist durch partielle Integration das $d\delta x/dp$ fortzuschaffen. Wenn man dies thut und dabei berücksichtigt, dass nach Gleichung (2) die mit δx multiplicirten Factoren die negativen Werthe der an der betreffenden Stelle angreifenden X -Kräfte sind, so erhält man:

1) für das Innere von s :

$$\begin{aligned} Xds = & A^2 \cdot ij \cdot dy \int \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{d\eta}{d\varpi} - \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{d\xi}{d\varpi} \right] d\varpi \\ & + A^2 \cdot ij \cdot dz \int \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{d\zeta}{d\varpi} - \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{d\xi}{d\varpi} \right] d\varpi \end{aligned} \quad (2a)$$



2) für die Endpunkte von s , deren freie Elektrizität mit e bezeichnet werden mag:

$$\bar{X} = A^2 j \frac{de}{dt} \int \frac{1}{r} \frac{d\xi}{d\sigma} \cdot d\sigma. \quad (2b)$$

Die analogen Ausdrücke für die Y und Z Kräfte sind hier nach leicht zu bilden.

Die Kräfte X für das Innere sind übereinstimmend mit Grassmann's Form, die $\bar{X}$ für die Enden von s unterscheiden die Potentialtheorie von der Grassmann'schen.

In diesen Ausdrücken kann nun, da Verschiebungen der Leiterelemente in der weiteren Rechnung nicht mehr zu berücksichtigen sind, statt der unbestimmten Variablen p und π auch wieder s und σ eingeführt werden.

Wenn man die aus dem zweiten Integrale im Werthe von δP_1 entstandenen Glieder, welche alle $d\xi/d\sigma$ als Factor enthalten, noch einmal partiell integrirt, sodass $d\xi/d\sigma$ fortgeschafft und dafür dessen Integral $(\xi - x)$ eingeführt wird, so kann man den Werth von X setzen:

$$X = \int X_i d\sigma + \sum X_a, \quad (3)$$

wo X_a die von der partiellen Integration herrührenden auf die Enden von σ bezüglichen Theile des Ausdruckes sind. Die X_i ergeben sich aber hierbei als die Componenten der Ampère'schen Kräfte, nämlich:

$$X_i = -\frac{x-\xi}{r} \cdot ij \cdot A^2 \left\{ \frac{2}{r^3} \left[\frac{dx}{ds} \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{dy}{ds} \frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{dz}{ds} \frac{d\zeta}{d\sigma} \right] + \frac{3}{r^3} \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \right\} \quad (3a)$$

$$X_a = -A^2 i \cdot \frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds}. \quad (3b)$$

Indem man dieselbe partielle Integration an der Gleichung (2b) vollzieht, kommt diese auf die Form:

$$\bar{X} = \sum \bar{X}_a + \int \bar{X}_i d\sigma,$$

wo:

$$\bar{X}_i = -A^2 j \frac{de}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \quad (3c)$$

$$\bar{X}_a = -A^2 i \frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r}. \quad (3d)$$

Endlich kommen noch hinzu die Kräfte, welche von dem in (1c) gegebenen zweiten Theile P_2 des Potentials P herrühren. Dessen Werth lässt sich aber durch Integration über s und σ auf die Form bringen:

$$P_2 = -A^2 \frac{1-k}{2} \sum \left\{ \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} \cdot r \right\},$$

wo sich die Summirung auf die Werthe bezieht, die den verschiedenen Combinationen aus je zwei Enden von s und σ entsprechen. Dieses P_2 ist nicht mehr von den Richtungen der Leiterelemente abhängig, sondern nur von der Entfernung ihrer Endpunkte von einander, und zeigt also die Existenz abstossender Kräfte zwischen ihnen an von der Intensität:

$$A^2 \frac{1-k}{2} \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt},$$

deren Componenten sich zu den unter $\bar{X}_a$ angegebenen hinzuaddiren. Die Summe beider abstossender Kräfte ist:

$$-A^2 \frac{1+k}{2} \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt}.$$

Die Uebertragung dieser Rechnung auf verzweigte lineare Leitungen, auf Leitungen, die nach drei Dimensionen ausgedehnt sind, und auf die Wirkungen eines Leiters auf sich selbst, ist ohne principielle Schwierigkeiten.

Zusammenstellung der Resultate dieser Rechnung. Das Ampère'sche und Grassmann'sche Gesetz kennen nur Kräfte, welche von Stromelement auf Stromelement wirken, keine zwischen Stromelementen und Stromenden oder von Stromenden unter einander. In Bezug auf die erste Classe von Wirkungen, nämlich der Stromelemente auf Stromelemente, ist das Potentialgesetz mit jenen beiden in vollkommenster Uebereinstimmung für jede beliebige Art der Verschiebung eines vollkommen biegsamen, dehnbaren oder flüssigen Leiters. Die Fälle der Gleitstellen sind bei richtiger und genauer Anwendung der obigen Principien mit einbegriffen.

Das Potentialgesetz ergibt aber ausser den Kräften von Stromelement auf Stromelement noch weiter:

- a) Kräfte zwischen Stromelementen und Stromenden,
- b) Kräfte zwischen Stromenden.



Die Berechnung derselben fällt etwas verschieden aus, je nachdem man die Berechnung der Kräfte zwischen Stromelementen auf das Grassmann'sche oder Ampère'sche Gesetz zurückführt; denn diese beiden unterscheiden sich selbst wieder, im Falle der eine Strom ungeschlossen ist, durch eine Wirkung seiner Stromenden auf die Stromelemente des anderen.

Wir können, wie es durch Ampère geschehen ist, alle diese Kräfte zurückführen auf anziehende oder abstossende, die alle nur in Richtung der Verbindungslinie der betreffenden Linienelemente und Endpunkte wirken. Das Gesetz der Wirkung zweier Stromelemente aufeinander nach Ampère ist bekannt und in Gleichung (3a) ausgedrückt.

Nach dem Potentialgesetz kommt dann hinzu:

- a) eine abstossende Kraft zwischen dem Stromelement $jD\sigma$ und der am Ende des Stromfadens s freiwerdenden Elektrizität e von der Grösse:

$$A^2 j \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{\cos(r, D\sigma)}{r} D\sigma.$$

Diese ist, wie man sieht, jedem Potentialgesetz eigen und unabhängig von dem besonderen Werth der Constante k .

- b) eine abstossende Kraft zwischen je zwei Stromenden mit den elektrischen Quantis e und ε von der Grösse

$$-A^2 \frac{1+k}{2} \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Diese ist von k abhängig und unabhängig von r .

¹⁰⁰ Zu bemerken ist, dass nach dem Potentialgesetz wie nach dem Grassmann'schen Gesetz die gesamte elektrodynamische Resultante aller vorhandenen Stromelemente und Stromenden zusammengenommen immer senkrecht zur Strömungsrichtung ist. Nach dem Ampère'schen Gesetz ist dies nur für die Wirkungen geschlossener Ströme der Fall. Daraus folgt, dass eine sich ändernde Vertheilung der ponderablen Masse längs des Stromfadens, zu dem sie gehört, nach dem Potentialgesetz gar keinen Einfluss auf die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte hat, was also auch den Grenzfall mit ein-

schliesst, wo aus einem Leiterelement die ponderablen Theilchen ganz verschwinden, vorausgesetzt, dass nur noch die Elektrizitäten in Richtung desselben übergehen.

4) Gleitstellen. Stellt man sich die Gleitung eines Leiterstückes längs der Oberfläche des anderen als eine Bewegung zweier absolut fester Körper vor, so könnte die Anwendbarkeit des sub 2 aufgestellten Gesetzes auf den Fall, wo ein elektrischer Strom durch eine solche Gleitstelle geleitet wird, zweifelhaft erscheinen. Denn hierbei würde in der Gleitstelle jeder Stromfaden, soweit er aus einer continuirlichen Reihe ponderabler Theile besteht, nothwendig zerrissen werden. Da übrigens thatsächlich die Elektrizität sich an den zerrissenen Enden nicht anhäuft, sondern durch neu gebildete Schliessungen übergeht, so müssten wir in der Rechnung die beiden Enden des ponderablen Theiles des Stromfadens nicht als Enden der Leitung überhaupt betrachten, sondern als verbunden durch ein unendlich kleines, von ponderablen Theilen freies Linienelement. In diesem Sinne wären dann alle unsere bisher angestellten Rechnungen und Resultate auch auf einen solchen Fall anwendbar.

Es ist dies einer der Fälle, wo die Voraussetzung absoluter Festigkeit der betreffenden Körper und absoluter Discontinuität der Bewegung diesseits und jenseits der Gleitfläche physikalisch nicht zulässig ist, sondern nur als Grenze hingestellt werden kann, der sich die wirklichen Vorgänge unter Umständen bis zum Ununterscheidbaren annähern. Um zu ermitteln, wie wir in einem solchen Falle das Potentialgesetz anzuwenden haben, werden wir untersuchen müssen, wie die aus ihm gezogenen Folgerungen im Grenzfall bei allmählicher Annäherung einer continuirlichen Bewegung an die discontinuirliche ausfallen würden.

In der That ist nun in den Fällen, wo wir die Wirkung ¹⁰¹ elektrodynamischer Kräfte an Leitern mit sogenannten Gleitstellen beobachten können, gar keine Discontinuität der Bewegung vorhanden. Denn da die bewegenden Kräfte verhältnissmässig schwach sind und gute Leitung gefordert wird, so müssen wir bei der Ausführung der Versuche immer eine lei-



tende Flüssigkeit, Quecksilber oder einen Elektrolyten, zwischen die Enden der metallischen Leiter bringen, um gute Leitung bei leichter Beweglichkeit zu haben. Dann geschieht in der That die Bewegung unter continuirlicher Verschiebung der Flüssigkeitsschichten gegen einander, während die äussersten Schichten der Flüssigkeit an den metallischen Zuleitern haften. Brauchen wir trockene Metalle, die aufeinander schleifen, so müssen wir bekanntlich harte Reibung, die die Oberflächen verändert, unter starkem Druck herstellen, um Ströme von schwachen elektromotorischen Kräften durchzuleiten, und bei starken elektromotorischen Kräften blitzen Funken, das heisst Ströme glühenden Metaldampfes fast in jedem Augenblick an den schleifenden Theilen auf. Dadurch wird factisch immer eine dünne Uebergangsschicht hergestellt, in der der Uebergang von dem ruhenden zu dem bewegten Theile des Leiters continuirlich erfolgen kann. Sowie aber eine noch so dünne Uebergangsschicht da ist, welche die Continuität der Verschiebungen herstellt, so unterliegt die Anwendung aller oben hingestellten Sätze gar keiner Schwierigkeit, und es bleiben die Folgerungen des Potentialgesetzes für geschlossene Ströme mit solchen Gleitstellen in vollkommener Uebereinstimmung mit dem Ampère'schen Gesetze und mit der Erfahrung.

Will man den Erfolg in Fällen dieser Art direkt aus dem Potentialgesetz berechnen, so kommt hier in Betracht, dass die Stromfäden in der Uebergangsschicht Winkeldrehungen machen, die bei gleicher Geschwindigkeit der Gleitung desto schneller werden, je kürzer diese sich drehenden Abschnitte der Fäden sind, und dass daher die bei ihrer Drehung zu leistende elektrodynamische Arbeit unabhängig von ihrer Länge wird, also unabhängig von der Dicke der Uebergangsschicht.

Will man bei einer solchen Betrachtung von der Existenz der unendlich dünnen Uebergangsschicht absehen, so muss man doch das Kräftepaar an den Gleitflächen hinzusetzen, welches auf diese vernachlässigten Stromelemente ds wirkt. Die Intensität seiner beiden Kräfte aber ist unabhängig von der Länge ds , wie schon soeben bemerkt wurde.

Wenn, wie in dem Beispiel von Hrn. Riecke, ein Radius eines Kreises den Strom vom Mittelpunkte desselben, um den

er drehbar ist, zur leitenden Peripherie führt, und dabei unter dem Einflusse anderer concentrischer Kreisströme steht, so wirkt, wie Hr. Riecke richtig bemerkt, nach dem Potentialgesetz unmittelbar gar keine Kraft auf den festen Theil des Radius, dessen relative Lage gegen die Kreisströme sich nicht verändert, und es kommt allein das Kräftepaar zur Erscheinung, welches auf die Uebergangsschicht an der Gleitstelle wirkt. Dieses aber bedingt in der That den ganzen Erfolg.

Was die von Hrn. Bertrand angeregte Frage nach den Kräften betrifft, welche den Zusammenhang des Leiters zu trennen suchen, so zeigt die hier angestellte ausführliche Analyse, die den allgemeinsten Fall beliebig dehnbarer und verschiebbarer Elemente in Rechnung zieht, dass auf alle inneren Elemente der Stromfäden, soweit die elektrische Stromintensität constant ist, nur und ausschliesslich die Kräfte des Grassmann'schen Gesetzes wirken. Wenn aber Zerreiassung des leitenden Zusammenhanges einträte, so würden allerdings an den Endflächen die in (2b) ermittelten Kräfte wirksam werden und auf beide Endflächen in entgegengesetztem Sinne wirken. Diese könnten den Stromleiter s zu zerreiassn streben, wenn der Strom in σ hinreichend stark, nahe und parallel, aber von entgegengesetzter Richtung mit dem in s wäre. Die darauf hinwirkenden Kräfte würden aber immer eine endliche Intensität haben, und ausserdem würde nach erfolgter Trennung sogleich die relativ sehr mächtige elektrostatische Kraft der durch den Extracurrent an den Trennungsflächen angehäuften Elektricitäten auf die Wiedervereinigung hinwirken.

Hrn. Bertrand's zunächst für einen elastischen Stromfaden angestellte Betrachtung aber, durch deren Resultat er das ganze Potentialgesetz zu vernichten glaubt, da nach ihm diese Kräfte jeden durchströmten Leiter zertrümmern müssten, beruht auf einem Irrthum. Er hat die relative Deformation, das heisst das Verhältniss zwischen den Verschiebungen und den linearen Dimensionen des betreffenden Volumenelementes, mit der absoluten Deformation, das heisst mit dem absoluten Betrage jener Verschiebungen verwechselt. Unter Einwirkung eines endlichen Kräftepaares ist die relative Deformation einer unendlich dünnen Lamelle allerdings end-



lich, wie Hr. Bertrand angiebt. Damit aber die bei der Deformation geleistete Arbeit des Kräftepaares endlich wäre, müsste die absolute Deformation der betreffenden Lamelle endlich sein, was nicht der Fall ist. Diese ist vielmehr von derselben Grössenordnung, wie die Dicke der Lamelle, und daher die bei der Deformation an der Lamelle geleistete Arbeit ebenfalls von der Ordnung ihrer Dicke, und die am ganzen Körper geleistete Arbeit ist endlich.

5) Was die Möglichkeit betrifft, zwischen dem Ampère'schen Gesetz der Elektrodynamik und dem Potentialgesetze zu entscheiden, so ist das nur möglich an Strömen mit freien Enden, an denen sich freie Elektricität anhäuft und wieder verschwindet. In dieser Beziehung bietet sich folgender Weg dar, der nicht als unausführbar erscheint, wenn er auch nicht ohne die Hülfe sehr grosser Drahtmassen wird gelingen können.

Ein geschlossener Ringmagnet oder ein entsprechendes in sich zurücklaufendes Solenoid von Kreisströmen wirkt bekanntlich nach dem Ampère'schen Gesetze gar nicht nach aussen. Nach dem Potentialgesetze wirkt es auf geschlossene Ströme nicht ein, wohl aber auf die Enden ungeschlossener Ströme. Hängt man eine ebene kreisförmige Franklin'sche Tafel so auf, dass sie um ihren verticalen Durchmesser, der mit dem verticalen Durchmesser des Ringes zusammenfällt, sich drehen kann, und verbindet ihre Platten mit den Enden der Drahtleitung des Ringes, so wird die Entladung der Franklin'schen Tafel durch den Ring, die in diesem Falle oscillatorisch sein würde, nach dem Potentialgesetze die Tafel der Ebene des Ringes parallel zu stellen streben, dagegen nach dem Ampère'schen Gesetze ohne Einfluss sein.

Andererseits, wenn eine kreisförmige Franklin'sche Tafel horizontal aufgehängt wird, drehbar um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Verticale, und unter ihr ein cylindrischer Elektromagnet mit verticaler Axe steht, durch dessen Drahtwindungen sich die Franklin'sche Tafel entladet, so muss sie nach dem Ampère'schen Gesetze um ihre Verticalaxe gedreht werden, nach dem Potentialgesetze dagegen nicht.

Ich werde versuchen, diese beiden Experimente anzustellen, doch sind noch Voruntersuchungen über Beseitigung der Funken, Anwendbarkeit von Eisenkernen u. s. w. nöthig, ehe ich die Construction des Apparates mit einiger Sicherheit auf Erfolg¹⁰⁴ beginnen kann. Da dies vielleicht noch längere Zeit in Anspruch nehmen möchte, habe ich mich entschlossen, die Veröffentlichung der Resultate vorstehender theoretischer Untersuchungen nicht länger zu verzögern.¹⁾

1) Die Ausführung der hier vorgeschlagenen Versuche scheiterte an dem Umstande, dass die dabei auftretenden elektrostatischen Kräfte zu mächtig waren und bei den minimalsten Graden von Asymmetrie in der Stellung der Apparate viel grössere Ablenkungen hervorbrachten als von den elektromagnetischen Kräften je zu hoffen waren. (1881).



XXXVII.

Ueber die Theorie der Elektrodynamik.

Dritte Abhandlung.

Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern.

Aus: Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Bd. LXXVIII. S. 273—324. (1874).

²⁷³ Meine Abhandlung im 72. Bande dieses Journals behandelt die elektrodynamischen Wirkungen nur in ruhenden leitenden Körpern; in solchen beschränken sich die genannten Wirkungen auf die Induction elektromotorischer Kräfte. Dieser Fall erschien als der verhältnissmässig einfachste für die theoretische Behandlung, weil die bestehende elektrische Bewegung irgend einen Arbeitswerth, das heisst ein Potential, nothwendig haben muss, und der Werth desselben für geschlossene Stromleiter als wohlbekannt angesehen werden durfte. Der Zweck jener Arbeit war ein wesentlich praktischer; es handelte sich darum zu untersuchen, welche verschiedenen Formen der Werth der elektrodynamischen Energie für ungeschlossene Ströme etwa noch haben konnte, wenn man ihn für geschlossene Ströme durch die von F. E. Neumann dem Vater (bezüglich durch Gauss¹⁾ gegebenen Ausdrücke als bekannt ansieht; ferner bei welcher Art von Versuchen sich möglicher Weise Unterschiede zeigen könnten, welche von den noch unbestimmten

¹⁾ Gauss' Werke, Bd. V, S. 610 u. 613. Die nachgelassenen Papiere aus dem Jahre 1835 enthalten den Werth des elektrodynamischen Potentials.

Theilen des Ausdruckes herrührten. Hielt man an der Wahrscheinlichkeit fest, dass gewisse allgemeinste Eigenschaften der bekannten Theile der gesuchten Ausdrücke auch den noch unbekannten zukommen würden, so liess sich das, was zweifelhaft blieb, auf den unbekannt bleibenden Werth einer Constanten k zurückführen, welche in der Lehre von der Elektrodynamik etwa dieselbe Rolle spielt, wie in der Lehre von der Elasticität diejenige Constante, welche das Verhältniss zwischen dem Widerstande gegen Compression und dem gegen Schiebung der Schichten angiebt. Ueber diese Constante ergab die Untersuchung nur soviel, dass sie nicht negativ sein dürfe (ebenso wenig wie die genannte Constante der Elasticität), weil sonst das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in einem ruhenden Leiter labil würde, und sich dann die Möglichkeit elektrischer Bewegungen ergeben hätte, deren Arbeitswerth geringer gewesen wäre als der des Ruhezustandes.

Ich habe in jener Arbeit die von Hrn. F. E. Neumann in die Wissenschaft einmal eingeführten Bezeichnungen beibehalten. Die Grösse, die in demselben Sinne wie die lebendige Kraft ponderabler bewegter Massen das der elektrischen Bewegung entsprechende Quantum von Energie angiebt, und die man deshalb mit Cl. Maxwell auch passend die actuelle Energie der elektrischen Bewegung nennen kann, ist gleich dem negativen Werthe des von Neumann senior definirten elektrodynamischen Potentials, und nur in diesem Sinne ist letzterer Ausdruck an den meisten Stellen jener Arbeit beibehalten worden.

Der genannte Begriff wird also daselbst ohne jede Beziehung auf die bei Bewegungen von Leitern eintretenden elektrodynamischen Erscheinungen gebraucht, und seine Anwendung bleibt unberührt durch die Einwände, welche seitdem von mehreren Physikern und Mathematikern gegen eine erweiterte Anwendung desselben auf die von Leitern elektrischer Ströme gegen einander ausgeübten Bewegungskräfte (ponderomotorischer Kräfte nach Hrn. C. Neumann juniors zweckmässiger Nomenclatur) erhoben worden sind. Letzteres entspricht einer anderen Bedeutung des elektrodynamischen Potentials, die mit der erst erwähnten nicht nothwendig verbunden



ist, sich aber historisch zuerst entwickelt und die Terminologie bestimmt hat. Danach spielt das elektrodynamische Potential den ponderomotorischen Kräften zweier linearer Stromleiter gegenüber dieselbe Rolle, wie das magnetische oder elektrostatische Potential den magnetischen oder elektrischen Anziehungskräften gegenüber. Es giebt in diesem Sinne die potentielle Energie der ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs an, welche, wenn die Stromstärken in den leitenden Fäden unverändert bleiben, bei den Bewegungen der Leiter in mechanische Arbeit verwandelt werden kann. Und zwar ist die bei einer bestimmten Verschiebung der Leiter und bei unverändert gebliebenen Stromintensitäten von den ponderomotorischen Kräften elektrodynamischen Ursprungs geleistete Arbeit gleich zu setzen der Differenz, um welche der Werth des elektrodynamischen Potentials während dieser Verschiebung kleiner geworden ist. Bei diesem Gebrauche des Potentialbegriffes ist also die Rede von einer besonderen Art von Arbeit (der mechanischen bei Bewegung der Leiter geleisteten), welche unter besonderen beschränkenden Bedingungen (Constanz der Stromintensitäten) geleistet werden kann. Wenn wir in dem Sinne meiner früheren Arbeit das negativ genommene elektrodynamische Potential gleich der actuellen Energie der elektrischen Bewegung setzen, so ist dabei keine Beschränkung weder der einen, noch der anderen Art zu machen nöthig. Der Beweis, dass das elektrodynamische Potential negativ genommen das Arbeitsäquivalent der elektrischen Bewegung ausdrücke, ist allerdings dort nur geführt worden unter der Voraussetzung, dass die elektrischen Ströme ohne Bewegung der Leiter verlaufen und erlöschen. Die Wärme, welche dabei in den durchströmten Leitern entwickelt wird, ergiebt sich als das Aequivalent jenes Arbeitswerthes. Dadurch ist aber die Bedeutung jener Grösse als eines Arbeitsäquivalents ein für alle Mal festgestellt.

Die Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes ist nun, den Umfang festzustellen, in welchem die andere und ursprünglichere Bedeutung des elektrodynamischen Potentials als eines Potentials der ponderomotorischen Kräfte den vorhandenen Thatsachen gegenüber zulässig erscheint.

Die Hypothese, dass die ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs, wenn die Intensität sämtlicher elektrischer Strömungen in deren materiellen leitenden Fäden constant bleibt, ein Potential haben, können wir mit dem von Hrn. C. Neumann angewendeten Namen kurz das Potentialgesetz der ponderomotorischen elektrodynamischen Kräfte nennen. Ist der Werth des Potentials gegeben, und wird ferner die Hypothese gemacht, dass die Grösse und Richtung der genannten ponderomotorischen Kräfte unabhängig von den gleichzeitig erfolgenden virtuellen oder actuellen Verschiebungen der Leiterelemente sei, so ist dadurch die Grösse dieser Kräfte vollständig bestimmt.

Thatsächlich bekannt ist die Grösse der ponderomotorischen Kräfte bisher erst für die Wirkungen von je zwei oder mehreren geschlossenen Strömen aufeinander, und für die Wirkungen eines geschlossenen Stromes auf seine einzelnen Theile. Wir dürfen das Ampère'sche Gesetz als einen thatsächlich richtigen gesetzlichen Ausdruck dieses bis jetzt bekannten Reiches von Erscheinungen ansehen.

Wir werden also zunächst nachzuweisen haben, dass für geschlossene Ströme bei beliebiger Biegsamkeit, Dehnbarkeit und Verschiebbarkeit der Leiterstücke die Berechnung der ponderomotorischen Kräfte aus dem Potentialgesetze genau dieselben Werthe giebt, wie die aus dem Ampère'schen Gesetze.

Dieser Nachweis ist von Hrn. F. E. Neumann¹⁾ selbst nur gegeben worden für den Fall, dass die betreffenden Stromleiter linear sind, und jeder von ihnen unveränderliche Form und Grösse hat. Vergegenwärtigt man sich den Zustand der mathematischen Theorie der elektrischen Vorgänge zur Zeit der Veröffentlichung dieses Beweises, so ist leicht zu verstehen, warum der Autor desselben in seiner vorsichtigen, an wohlbestätigten Thatsachen streng festhaltenden Weise sich jene Beschränkungen auferlegte, und die Tragweite seines wichtigen und fruchtbaren Gesetzes, welches die ganze Elektrodynamik

1) Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin 1848. — Abhandlungen d. Berliner Akademie 1847.

Helmholtz, wissensch. Abhandlungen.



zu umfassen fähig war, zunächst noch so eng abgrenzte. Zu jener Zeit war nämlich die Theorie der Vertheilung elektrischer Ströme in Leitern von drei Dimensionen noch nicht durchgearbeitet, also konnten auch die Wirkungen der elektrodynamischen Induction auf nicht lineare Leiter noch nicht behandelt werden. Das Potential eines Leiters auf sich selbst wird aber unendlich gross, wenn man ihn als eine Linie im strengen Sinne des Wortes betrachtet, und die Kräfte, welche die Theile eines seine Form verändernden Leiters aufeinander ausüben, lassen sich nicht behandeln, ehe der Werth des Potentials, welches er auf sich selbst ausübt, sicher berechnet werden kann.

Was im Jahre 1847 mangelte, ist jetzt geleistet; ist theoretisch und experimentell durchgearbeitet zum grossen Theil durch Hrn. Neumann senior selbst und seine Schüler, sodass, was an dem damals gegebenen Beweise fehlte, jetzt verhältnissmässig leicht zu ergänzen ist. Die mathematischen Methoden dafür waren durch die früheren Arbeiten gegeben, und ich würde kaum gewagt haben für eine solche Arbeit den Platz in diesem Journale in Anspruch zu nehmen, wenn nicht die Schwierigkeiten, auf welche die Herren J. Bertrand¹⁾, C. Neumann²⁾ und Riecke³⁾ bei der Anwendung des Potentialgesetzes gestossen sind, und die Einwände, die sie daraus nehmen zu dürfen glaubten, mir gezeigt hätten, dass eine methodische Durchführung des Beweises mit Beseitigung der früheren beschränkenden Annahmen wünschenswerth und nützlich sein würde.

Die Einwände der letztgenannten beiden Herren beziehen sich auf die Erscheinungen an Stromkreisen mit Gleitstellen. Eine vollständig genügende Behandlung dieser Fälle ist nur zu geben, wenn man die Werthe der Kräfte in Leitern von drei Dimensionen schon bestimmt hat. Bei den wirklich ausführbaren Versuchen mit Gleitstellen haben wir immer eine

1) Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. 1872, 14 Octobre; 1873, 3 et 10 Novembre.

2) Berichte der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1872, 3. August. — Mathematische Annalen Bd. V, 606.

3) Göttinger Nachrichten. 1872, 14. August.

flüssige Schicht (Quecksilber, elektrolytische Flüssigkeiten oder auch wohl elektrische Funken und Lichtbogen) zwischen den Leitern, welche einen continuirlichen Uebergang der Bewegung von einem zum anderen Leiter herstellen, sodass auch an der Gleitstelle die Componenten der Geschwindigkeit continuirliche Functionen der Coordinaten bleiben. Dies letztere muss vorausgesetzt werden, wenn das Potentialgesetz überhaupt anwendbar sein soll. Nun lässt sich aber zeigen, dass die Wirkung einer sehr dünnen Uebergangsschicht dieser Art von ihrer Dicke unabhängig ist, und sich auch nicht ändert, wenn letztere verschwindend klein wird, und dadurch die Componenten der Geschwindigkeit an der Gleitfläche discontinuirlich werden. Daraus ergibt sich, wie man die Sache zu behandeln hat, wenn man zur Vereinfachung der Rechnung die mathematische Fiction einer absoluten Discontinuität der Bewegung einführen will. Wenn man diese Discontinuität analytisch richtig behandelt, als Grenze eines continuirlichen Ueberganges, so ergibt das Potentialgesetz genau dieselben Folgerungen wie das Ampère'sche, die auch in guter Uebereinstimmung mit den bekannten That-sachen sind.

Während für geschlossene Stromkreise die genannten beiden Gesetze die vollkommenste Uebereinstimmung zeigen bei ganz beliebigen Formveränderungen der Leiter, so unterscheiden sie sich von einander in Bezug auf die ponderomotorischen Wirkungen an ungeschlossenen Leitern. Ungeschlossene Leiter haben Enden, und diese Enden sind dadurch charakterisirt, dass an ihnen freie positive oder negative Elek-tricität auftritt oder verschwindet. Das Ampère'sche Gesetz reducirt alle ponderomotorischen Wirkungen auf anziehende oder abstossende Kräfte zwischen Stromelementen. Ist das Potentialgesetz auch für ungeschlossene Ströme gültig, so müssen ausser 1) den Ampère'schen Kräften zwischen Strom-elementen, auch noch 2) anziehende oder abstossende Kräfte zwischen Stromelementen und Stromenden und 3) eben solche zwischen Stromenden existiren. Die Art des Stromendes charakterisirt man am zweckmässigsten durch den Werth von de/dt , wo e die freie positive Elek-tricität an der betreffenden Stelle bezeichnet. Die Kräfte ad 2) sind proportional de/dt



und der auf das Stromende e hin gerichteten Componente der Strömung in dem wirkenden Stromelemente, abstossend, wenn diese Componente und de/dt gleiches Zeichen haben, übrigens umgekehrt proportional der Entfernung beider und unabhängig von der Constante k , also jeder Form des Potentialgesetzes in gleicher Stärke zukommend. Die Kräfte ad 3) für zwei Stromenden mit den freien Elektricitäten e und ϵ sind proportional dem Product $(de/dt) \cdot (d\epsilon/dt) \cdot (1 + k)$; sie sind anziehend, wenn die beiden Differentialquotienten gleiches Zeichen haben, und unabhängig von der Entfernung. Sie könnten nur bei dem unzulässigen Werthe $k = -1$ wegfallen.

An den Umstand, dass hier Kräfte aufgeführt werden, deren Intensität von der Entfernung unabhängig ist, hat Hr. Bertrand¹⁾ Einwendungen geknüpft, welche berechtigt sein würden, wenn es sich um unabhängig voneinander bestehende Elementarkräfte handelte. Das Potentialgesetz in seiner ursprünglichen Form kennt ebenso gut wie das Ampère'sche nur Fernwirkungen, die mit wachsender Entfernung abnehmen. Wenn man aber die Differenz zwischen den von beiden Gesetzen angezeigten Wirkungen nimmt, und diese Differenz nach Art der von Ampère gewählten Darstellung in einfache anziehende Kräfte auflöst, die von Punkt zu Punkt wirken, so kommt man auf Kräfte, die von der Entfernung unabhängig sind. Da aber jede ungeschlossene Linie zwei Enden hat, und von beiden Enden gleich grosse und entgegengesetzte Kräfte dieser Art ausgehen, diese sich auch der Natur der Sache nach nothwendig noch mit anderen von den Elementen der Stromcurve herrührenden Summanden verbinden, so kommt es nicht darauf an, ob die zu einem bestimmten Zwecke ausgesonderten Theile einzeln, sondern nur darauf, ob ihre Summe physikalisch unzulässige Folgerungen giebt. Das letztere aber ist nicht der Fall.

Diese Verhältnisse sind in § 15 dieser Arbeit für unverzweigte lineare Leiter auseinandergesetzt, in § 16 für körper-

1) Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. T. LXXVII p. 1054. — Die Einwände beziehen sich auf den oben als Nr. XXXVI abgedruckten vorläufigen Auszug der vorliegenden Arbeit.

liche Leiter, in § 17 ist die Behandlung der analytischen Ausdrücke für Gleitstellen besprochen.

Da directe Versuche über die ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprunges an Stromenden noch nicht vorliegen, so blieb zunächst nur noch nachzuweisen übrig, dass das Potentialgesetz in seiner Anwendung auf ungeschlossene Leiter von beliebig veränderlicher Form dem Gesetze von der Constanz der Energie genüge. Zu dem Ende sind in § 18 die analytischen Ausdrücke für die elektrodynamische Induction²⁷⁰ durch Bewegung körperlicher Leiter entwickelt, und ist in § 19 mit deren Hilfe die Constanz der Energie nachgewiesen.

Nachdem auf diese Weise der Nachweis vervollständigt war, dass das Potentialgesetz in seiner verallgemeinerten Fassung in allen Fällen den an ein solches Gesetz nach dem jetzigen Stande unserer physikalischen Kenntnisse zu stellenden Anforderungen entspreche, habe ich noch die Frage zu beantworten gesucht, ob und welche Abweichungen in den Werthen der ponderomotorischen und durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte von dem Potentialgesetze etwa stattfinden könnten, ohne das Gesetz von der Erhaltung der Kraft zu verletzen, und ohne die ponderomotorischen Wirkungen geschlossener Ströme gegen einander zu verändern.

Die Untersuchung hierüber ist in § 20 geführt worden; da die allgemeineren Formen der durch Aenderungen der Stromstärken inducirten Kräfte von mir schon früher discutirt sind, so konnte ich mich hier auf die durch Bewegung der Leiter zu inducirenden beschränken. Es ist dabei die Annahme festgehalten worden, 1) dass die zu den elektromotorischen Kräften vielleicht hinzuzufügenden Zusatzkräfte im Leiterelement Ds unabhängig von der Stromstärke i in Ds , aber proportional der Stromstärke j in dem inducirenden Elemente $D\sigma$ zu setzen, und dass die ponderomotorische Arbeit, welche sie bei einer kleinen Verschiebung leisten, proportional mit i, j ist; 2) dass die Analogie zwischen der Wirkung geschlossener Ströme und der von Magneten auch in diesen Fällen bestehe, 3) dass die elektromotorischen und ponderomotorischen Wirkungen der einzelnen wirkenden Elemente $D\sigma$ auf das Element Ds sich einfach summiren.



Diese Annahmen führen zu den in den Gleichungen (7a) und (7b) aufgestellten Werthen der Zusätze, welche zu den elektromotorischen Kräften j_r , ausgeübt auf D_s , i_r , auf D_c , und zu der ponderomotorischen Arbeit $i \cdot j \cdot \delta w$ gemacht werden könnten. Darin kommen sechs unbekannte Functionen der Entfernung r beider Elemente vor, nämlich q, ψ, χ und q_1, ψ_1, χ_1 , von denen die drei ersteren auch noch von dr/ds und die drei letzteren auch noch von dr/ds abhängen können. Nimmt man an, wie es Hr. Neumann gethan, dass nur die Ampère'schen ponderomotorischen Kräfte existiren, und keine anderen, so bestimmen sich die genannten Functionen, wie es in den Gleichungen (8) angegeben ist, und der Werth der durch Bewegung der Leiter inducirten elektromotorischen Kraft wird in Gleichung (8b) gegeben. Dieser Werth unterscheidet sich von dem, den Hr. C. Neumann¹⁾ bei Lösung einer sehr ähnlichen Aufgabe gefunden hat, dadurch dass er die unbestimmt bleibende Constante k enthält, welche nach der Neumann'schen Deduction den bestimmten Werth $k = -1$ annehmen müsste. Der von mir gefundene allgemeinere Werth entspricht aber allen denjenigen Forderungen, welche Hr. C. Neumann als die Grundlagen seiner Rechnung vorangestellt hat (l. c. S. 419–420 und 468–470).

Der Unterschied ist dadurch bedingt, dass der genannte Autor im Laufe der Rechnung (l. c. S. 481–482) noch eine weitere beschränkende Hypothese gleichsam als selbstverständlich einführt, die dies aber, wie mir scheint, durchaus nicht ist. Er nimmt nämlich an, dass bei einer durch Bewegung erzeugten Verlängerung eines Stromelementes dasselbe inducirend so wirke, als ob in dem hinzugekommenen Theile seiner Länge ein neuer Strom entstände, und wendet auf diesen Vorgang das Gesetz der Induction durch Intensitätsänderung an, welches, wenn man das Potentialgesetz verlässt, von dem der Induction durch Lagenänderung verschieden ist. Man könnte aber eine Dehnung eines Stromelementes ebenso gut als eine Entfaltung

1) Ueber die den Kräften elektromotorischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. Abhandlungen der Königl. Sächs. Akademie der Wissenschaften. Math.-Phys. Classe Bd. X. — Die elektrischen Kräfte. Leipzig, 1873. Aus der ersteren Abhandlung ist oben citirt.

vorher eingefalteter Theile desselben ansehen, und müsste dann offenbar das Gesetz der Induction durch Lagenänderung anwenden. Da ich keine solche beschränkende Hypothese gemacht habe, ist der von mir gefundene Ausdruck allgemeiner, indem er eine Constante k mehr enthält.

Dieser Unterschied ist aber von grosser Wichtigkeit. Hr. C. Neumann's Deduction zeigt nämlich, dass, wenn man von seinen Voraussetzungen ausgeht, die Constante k einen negativen Werth erhält, und das Gleichgewicht der Elektrizität in den Leitern labil wird. Wie ich in meinen früheren beiden Arbeiten gezeigt habe, sind überhaupt negative Werthe von k nicht zulässig. Wären Hr. C. Neumann's Voraussetzungen unanfechtbar, so würde durch seine sorgfältige und scharfsinnige Untersuchung meines Erachtens nach der Beweis geführt gewesen sein, dass das Ampère'sche Gesetz, als ausschliessliches Gesetz der ponderomotorischen Kräfte betrachtet, mit dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft unvereinbar sei.¹⁾ Da aber die bezeichnete, nachträglich gemachte Hypothese über die Induction durch Dehnung der Leiterelemente keineswegs als unumgänglich erscheint, ist, so weit ich sehe, aus rein theoretischen Gründen über die an den Enden ungeschlossener Leiter wirkenden ponderomotorischen Kräfte keine Entscheidung zu gewinnen, und muss an das Experiment appellirt werden.

Ich habe schon in der der Berliner Akademie gemachten Mittheilung (Februar 1873) kurz angedeutet, wie solche Versuche gemacht werden könnten.

Die dort geplanten Versuche werden aber nur bei Anwendung sehr grosser Drahtmassen und Batterien Erfolg gewähren können. Leichter ausführbar ist vielleicht eine andere Classe von Versuchen, bei deren Erfolg freilich noch eine andere Frage in Betracht kommt, welche zwischen den verschiedenen Theorien streitig ist. Hr. W. Weber's Theorie setzt nämlich voraus, dass elektrische Quanta, welche irgendwie ihre

1) Von dieser Meinung ausgehend habe ich einen Bericht für die englische Zeitschrift „the Academy“ (March 14, 1874) geschrieben, und erst später gesehen, dass gegen Hr. C. Neumann's Deduction Einwendungen zu machen seien.



relative Lage zu einander ändern, elektrodynamische Wirkungen hervorbringen müssen, einerlei ob ihre ponderablen Träger sich mit ihnen bewegen oder nicht. Das Potentialgesetz dagegen kennt nur Wirkungen, welche die strömende Elektrizität hervorbringt, wenn sie sich in ihren Leitern und relativ zu diesen bewegt. Letzterer Annahme entsprechend würden Spitzen, durch welche Elektrizität ausströmt oder einströmt, sei es gegen die Scheibe einer Elektrizitätsmaschine, sei es um von der bewegten Luft fortgetragen zu werden, als Stromenden zu betrachten sein, und würden die elektrodynamischen Eigenschaften von solchen zeigen können.

Einstweilen, ehe solche Versuche ausgeführt sind, bleiben wir auf die Wahrscheinlichkeit beschränkt, welche die grössere oder geringere Einfachheit und Symmetrie der Gesetze, die mehr oder weniger gut bewahrte Analogie der wesentlichen Eigenschaften der wirksamen Kräfte in den verschiedenen Fällen darbietet. Solche Betrachtungen geben allerdings keine definitive Entscheidung, aber sie geben doch immerhin den verhältnissmässig besten Leitfaden in die Hand, um den richtigen Weg zu finden.

In dieser Beziehung ist zu bemerken, dass das Potentialgesetz unter denselben analytischen Ausdruck, der namentlich bei der Annahme $k=1$ ausserordentlich einfach wird, die sämtlichen Erscheinungen 1) der ponderomotorischen Kräfte, 2) der Induction durch Stromesänderung, 3) der Induction durch Bewegung vereinigt, also überhaupt das ganze Gebiet der bisher bekannten Thatsachen der Elektrodynamik. Die Auffindung des Potentialgesetzes durch Gauss und Neumann senior kann in der That als eine der glücklichsten und glänzendsten Errungenschaften der mathematischen Physik angesehen werden. Weichen wir dagegen ab vom Potentialgesetze, so brauchen wir für jedes der genannten Gebiete besondere Gesetze, wobei das für 2) mit dem Potentialgesetze übereinstimmt, die beiden anderen complicirter sind als jenes.

An geschlossenen Stromkreisen finden wir thatsächlich folgende allgemeine Eigentümlichkeiten der elektrodynamischen Wirkungen:

1) Die ponderomotorischen Kräfte geschlossener Strom-

kreise haben ein Potential. Das heisst: die mechanische Arbeit der ponderomotorischen Kräfte beider Kreise bei constant bleibenden Stromintensitäten¹⁾ ist nur von der Anfangs- und Endlage beider Kreise, nicht von der Art des Uebergangs abhängig.

2) Die ponderomotorischen Kräfte, welche ein geschlossener Stromkreis auf ein lineares Stromelement ohne freie Enden ausübt, stehen auf der Richtung des letzteren senkrecht.

3) Die gesammte elektromotorische Kraft, welche ein geschlossener Stromkreis während einer endlichen Verschiebung und Aenderung seiner Stromstärke in einem anderen hervorbringt, ist nur abhängig von der anfänglichen und endlichen relativen Lage beider Kreise zu einander, sowie von der anfänglichen und endlichen Stromstärke des Inducen ten, nicht von den Zwischenzuständen.

Diese drei Eigenschaften der elektrodynamischen Kräfte überträgt das Potentialgesetz hypothetisch auch auf ungeschlossene Ströme. Wird eine von ihnen übertragen, so werden nothwendig auch die anderen übertragen.

Wenn wir dagegen das Ampère'sche Gesetz als den vollständigen Ausdruck für die ponderomotorischen Kräfte annehmen, so überträgt sich keine von diesen allgemeinen Eigenschaften der Wirkungen geschlossener Ströme auf die ungeschlossenen. Es wird in diesem Falle nur eine mögliche, aber nicht nothwendige Zerlegungsweise der ponderomotorischen Kräfte geschlossener Stromkreise in Elemente, die physikalisch nicht direct nachweisbar sind, auf die ungeschlossenen Kreise übertragen.

Ich muss gestehen, dass es mir im höchsten Grade unwahrscheinlich dünkt, dass Eigenschaften, wie 1) und 3), die am entscheidendsten für den Charakter der Naturkräfte sind, bei den uns bekannten elektrodynamischen Wirkungen nur durch einen gleichsam zufälligen Einfluss der Summirung über eine geschlossene Linie entstanden sein sollten, während sie den einzelnen Summanden an und für sich nicht zukämen.

¹⁾ Gleitstellen sind dabei zu behandeln als sich entfaltende Falten, oder man muss die neuen Leiterstücke durch Dehnung entwickelt denken.



§ 15. Die ponderomotorischen Kräfte nach dem Potentialgesetz.

Das Potentialgesetz giebt unmittelbar nur den Werth der mechanischen Arbeit, welche von den ponderomotorischen Kräften elektrodynamischen Ursprungs geleistet wird, wenn zwei lineare Stromleiter eine Aenderung ihrer relativen Lage erleiden, während die Intensität des elektrischen Stromes in beiden constant bleibt. Die letztere Bedingung, nämlich Constanz der Stromstärke, wird im Folgenden immer als erfüllt vorausgesetzt, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist. Der Ausdruck, den das genannte Gesetz für den Werth der genannten Arbeit giebt, lässt sich auf ganz beliebige Verschiebungen der einzelnen Punkte der Leiter anwenden, wie sie durch beliebige andere gleichzeitig einwirkende mechanische Kräfte hervorgebracht werden können, wobei nur zu bemerken ist, dass überall, wo die Strömung fortbestehen soll, die Componenten der Verschiebungen continuirliche Functionen der Coordinaten sein müssen, da discontinuirliche Verschiebungen die Continuität der Leitung aufheben würden. Unter diesen Umständen genügt der Ausdruck für den Werth der Arbeit, um die elektrodynamischen Kräfte vollständig zu bestimmen, welche auf die einzelnen Punkte des Leiters wirken, wenn wir voraussetzen, dass die elektrodynamische Kraft, welche auf jeden Punkt des Leiters wirkt, unabhängig ist von den Geschwindigkeiten dieses Punktes und unabhängig von den gleichzeitigen Verschiebungen der übrigen Punkte des Leiters.¹⁾ Die Aufgabe dieses Paragraphen ist, zu zeigen, dass ein eindeutig bestimmtes System von solchen Kräften angegeben werden kann, welches die durch den Werth des Potentials angezeigte Arbeit in jedem Falle hervorzubringen geeignet ist; und ferner werden wir die Werthe dieser durch das Potentialgesetz angezeigten Kräfte zu vergleichen haben mit denen, welche Ampère angenommen hat.

1) Diese Formulirung der Aufgabe ist gewählt, um die von Hrn. Bertrand (Comptes Rendus T. LXXVII, p. 1049–1054) begangenen Missverständnisse bestimmter auszuschliessen.

Das Längenelement des einen Leiters s sei Ds , und die Stromintensität in demselben i , während wir dieselben Grössen für den anderen Leiter σ mit $D\sigma$ und j bezeichnen. Die Entfernung zwischen Ds und $D\sigma$ bezeichnen wir mit r . Für den Werth des Potentials DP der ponderomotorischen Kräfte, welches die beiden Elemente Ds und $D\sigma$ gegen einander hervorbringen, nehme ich aus den in meiner ersten Abhandlung auseinander gesetzten Gründen wieder den allgemeineren Ausdruck:

$$DP = -\frac{1}{2} A^2 \cdot \frac{i j}{r} \left[(1 + k) \cos(Ds, D\sigma) + (1 - k) \cos(r, Ds) \cos(r, D\sigma) \right] Ds \cdot D\sigma. \quad (1)$$

Darin ist A die von Hrn. W. Weber gemessene Constante, oder $1/A$ eine der Lichtgeschwindigkeit nahestehende Geschwindigkeit, k eine vorläufig noch unbekannt bleibende Constante, welche nicht negativ sein kann, und $(Ds, D\sigma)$, (r, Ds) , $(r, D\sigma)$ sind die Winkel zwischen den Richtungen der bezeichneten Linien, wobei Ds und $D\sigma$ als positiv wachsend zu nehmen sind nach der Richtung, in welcher die positive Elektricität fliesst, r aber positiv wächst von $D\sigma$ nach Ds . Als Einheit der Stromstärke ist, wie früher, diejenige genommen, bei welcher die algebraische Summe der durch einen Querschnitt in bestimmtem Sinne fliessenden Elektricität gleich der elektrostatischen Maasseinheit ist.

Das ganze Potential der beiden Leiter s und σ aufeinander würde sein:

$$P = \int \int DP.$$

Das Potentialgesetz sagt aus, dass wenn die beiden Stromleiter s und σ aus einer ersten Lage mit dem Potentialwerth P_1 in eine zweite mit dem Potentialwerthe P_2 bewegt werden, und die Ströme i und j dabei constante Intensität behalten, die während der Bewegung von den elektrodynamischen Bewegungskräften, welche jeder Leiter auf den andern ausübt, geleistete Arbeit gleich $P_1 - P_2$ sei.

Es wird in diesem Paragraphen also vorläufig noch abgesehen von den Kräften, welche jedes Element des Leiters s



von sämtlichen übrigen desselben Leiters erleidet. Diese Kräfte können nur bei Berücksichtigung der drei Dimensionen der Leiter berechnet werden, da, wie schon bemerkt, das elektrodynamische Potential für lineare Leiter mit endlicher Strömung unendlich wird.

Wir bezeichnen die rechtwinkligen Coordinaten des Linienelements Ds mit x, y, z , die des Elements $D\sigma$ mit ξ, η, ζ . Während einer unendlich kleinen Lagenänderung mögen die ersteren zunehmen um $\delta x, \delta y, \delta z$, die zweiten um $\delta \xi, \delta \eta, \delta \zeta$, der Potentialwerth P um δP . Dabei seien $X \cdot Ds, Y \cdot Ds, Z \cdot Ds$ die Componenten der elektrodynamischen Kräfte, welche σ auf Ds ausübt, und $\bar{X} D\sigma, \bar{Y} D\sigma, \bar{Z} D\sigma$ seien dieselben für die Wirkung von s auf $D\sigma$. Ferner seien $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ und $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ die Componenten der Kräfte, welche auf die Enden der beiden Stromleiter einwirken, und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, sowie $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ die zugehörigen Coordinaten. Nach dem Potentialgesetze ist alsdann:

$$\delta P + \int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) Ds + \Sigma [\bar{X} \delta \bar{x} + \bar{Y} \delta \bar{y} + \bar{Z} \delta \bar{z}] + \int (\bar{Z} \delta \bar{\xi} + \bar{Y} \delta \bar{\eta} + \bar{X} \delta \bar{\zeta}) D\sigma + \Sigma [\bar{\xi} \delta \bar{\xi} + \bar{\eta} \delta \bar{\eta} + \bar{\zeta} \delta \bar{\zeta}] = 0. \quad (1a)$$

Die Variationen der Coordinaten sind hierbei ganz beliebig zu nehmen, nur müssen, wie oben bemerkt, $\delta x, \delta y$ und δz continuirliche Functionen der Länge s , und $\delta \xi, \delta \eta$ und $\delta \zeta$ der Länge σ sein, wenn wir mit s und σ die längs des Leiters gemessenen Abstände der Elemente Ds und $D\sigma$ von zwei beliebig gewählten festen Anfangspunkten verstehen. Wäre diese Bedingung an irgend einer Stelle nicht erfüllt, so würde die Continuität der Leitung daselbst unterbrochen werden. In diesem Falle wäre eine solche Stelle als ein Paar von Endpunkten der sich trennenden beiden Leiterstücke zu betrachten. Welche Kräfte auf solche wirken, wird sich im Folgenden ergeben. Wie die Fälle discontinuirlicher Lagenänderungen in Gleitstellen zu behandeln sind, in denen die Leitung des Stromes nicht aufhört, werde ich in § 17 auseinandersetzen.

Zur bequemeren Berechnung von δP wollen wir P zunächst in zwei Theile zerlegen:

$$P = P_0 + P_1,$$

$$DP_0 = -A^2 \frac{ij}{r} \cos(Ds, D\sigma) \cdot Ds \cdot D\sigma,$$

$$DP_1 = -\frac{1}{2} A^2 \frac{ij}{r} (1-k) [\cos(r, Ds) \cos(r, D\sigma) - \cos(Ds, D\sigma)] \cdot Ds \cdot D\sigma$$

oder:

$$DP_1 = -\frac{1}{2} A^2 ij \cdot (1-k) \frac{d^2 r}{ds d\sigma} \cdot Ds \cdot D\sigma.$$

Wenn wir durch Integration nach s und σ aus der letzteren Gleichung den Werth von P_1 bilden, und die an den Enden von s und σ angesammelte freie Elektricität beziehlich mit e und ϵ bezeichnen, können wir schreiben:

$$P_1 = -\frac{1-k}{2} A^2 \Sigma \left[\frac{de}{dt} \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \cdot r \right], \quad (1b)$$

wo sich das Summenzeichen auf alle aus je einem Endpunkt von s und je einem Endpunkt von σ zu bildenden Combinationen bezieht. Der Werth von P_1 ist also nur von der Lage der Endpunkte der beiden Leiter abhängig, und ergibt also auch nur Kräfte, welche auf diese wirken, deren Grösse wir weiter unten bestimmen werden.

Der andere Theil des Potentials P_0 hat die ursprüngliche von Hrn. F. E. Neumann in der oben citirten Abhandlung gewählte Form, abgesehen von einer anderen Wahl der Strom-einheit. Er kann im allgemeinen von dem Integralzeichen nicht befreit werden. Da nun bei der Ausführung der Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ auch die Längen der Elemente Ds variiren werden, so wollen wir unter dem Integrationszeichen statt s und σ zwei andere Variabele p und ϖ einführen, deren Werthe für jeden einzelnen materiellen Punkt des Leiters bei der Bewegung unverändert bleiben sollen, und die so gewählt sind, dass s eine continuirliche Function von p , σ eine eben solche von ϖ ist. Dann ist also:

$$P_0 = -A^2 ij \iint \frac{\cos(Ds, D\sigma)}{r} \cdot \frac{ds}{dp} \cdot \frac{d\sigma}{d\varpi} \cdot dp \cdot d\varpi$$

oder:

$$P_0 = -A^2 ij \iint \frac{1}{r} \left[\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\varpi} \right] \cdot dp \cdot d\varpi. \quad (1c)$$



Da die Variationen der Coordinaten keiner anderen einschränkenden Bedingung unterliegen, als der, dass sie continuirliche Functionen der Coordinaten sind, so kann man die Variation für jede derselben einzeln berechnen, indem man die Variationen der anderen Coordinaten gleich Null setzt. Variiren wir nur x , so wird:

$$\delta P_0 = -A^2 \cdot ij \int \int \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) \delta x \left[\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\sigma} \right] \cdot dp \cdot d\sigma \\ - A^2 \cdot ij \int \int \frac{1}{r} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma} \cdot \frac{d\delta x}{dp} \cdot dp \cdot d\sigma.$$

Schaffen wir aus dem letzten Gliede den Factor $d\delta x/dp$ durch partielle Integration nach p fort, so erhalten wir ein Integral, welches in allen seinen Gliedern den Factor δx hat, und da δx eine willkürliche continuirliche Function von p ist, so kann Gleichung (1a), die in diesem Falle:

$$\delta P_0 + \delta P_1 + \int X \delta x \cdot ds + \bar{X} \cdot \delta \bar{x} = 0$$

wird, bei der im Anfange dieses Paragraphen ausgesprochenen Annahme, dass der Werth von X , wie der der übrigen Kraftcomponenten unabhängig von δx , δy , δz sei, nur dann erfüllt sein, wenn die mit δx multiplicirte Grösse für jeden Punkt von s gleich Null ist. Für innere Punkte giebt dies:

$$X \frac{ds}{dp} = A^2 \cdot ij \int \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) \left[\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\sigma} \right] d\sigma \\ - A^2 \cdot ij \int \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{d\xi}{d\sigma} d\sigma \quad (2)$$

und für die Endpunkte von s ergibt sich mit Berücksichtigung von (1b):

$$\bar{X} = A^2 \cdot j \frac{de}{dt} \int \frac{1}{r} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma} d\sigma + \frac{1-k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \Sigma \left[\frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \right]. \quad (2a)$$

Da bei der weiteren Berechnung dieser Werthe Verschiebungen nicht mehr zu berücksichtigen sind, können wir als unabhängige Variable unter dem Integrationszeichen wieder s und σ anwenden, und erhalten:

$$X = A^2 \cdot ij \cdot \frac{dy}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(y-\eta) \frac{d\xi}{d\sigma} - (x-\xi) \frac{d\eta}{d\sigma} \right] d\sigma \\ + A^2 \cdot ij \cdot \frac{dz}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(z-\zeta) \frac{d\xi}{d\sigma} - (x-\xi) \frac{d\zeta}{d\sigma} \right] d\sigma$$

und entsprechend:

$$Y = A^2 \cdot ij \cdot \frac{dx}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(x-\xi) \frac{d\eta}{d\sigma} - (y-\eta) \frac{d\xi}{d\sigma} \right] d\sigma \\ + A^2 \cdot ij \cdot \frac{dz}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(z-\zeta) \frac{d\eta}{d\sigma} - (y-\eta) \frac{d\zeta}{d\sigma} \right] d\sigma, \\ Z = A^2 \cdot ij \cdot \frac{dx}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(x-\xi) \frac{d\zeta}{d\sigma} - (z-\zeta) \frac{d\xi}{d\sigma} \right] d\sigma \\ + A^2 \cdot ij \cdot \frac{dy}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(y-\eta) \frac{d\zeta}{d\sigma} - (z-\zeta) \frac{d\eta}{d\sigma} \right] d\sigma. \quad (2b)$$

Daraus ergibt sich leicht:

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = 0,$$

das heisst: Nach dem Potentialgesetz ist die Resultante der elektrodynamischen Bewegungskräfte, welche ein linearer Stromleiter auf ein Stromelement im Innern einer linearen Leitung ausübt, jedesmal senkrecht auf die Richtung der Strömung. Dies ist in Uebereinstimmung mit Hrn. Grassmann's¹⁾ Elementargesetz, stimmt aber mit Ampère's Gesetz nur, wenn σ ein geschlossener Leiter ist. Von dem Grassmann'schen Gesetze unterscheidet sich das Potentialgesetz dadurch, dass jenes die in Gleichung (2a) gegebenen, auf die Endpunkte der Leitung und die dort frei werdende Elektricität de/dt wirkenden Kräfte nicht kennt. Wenn man die in den Gleichungen (2b) vor Ausführung der Integration mit $d\sigma$ multiplicirten Werthe mit ξ , η und ζ bezeichnet, so dass:

$$X = \int \xi d\sigma,$$

$$Y = \int \eta d\sigma,$$

$$Z = \int \zeta d\sigma,$$

1) Poggendorff's Annalen LXIV. 1845.



so sind diese Grössen ξ , η und ζ die Componenten der Wirkung, welche das Stromelement $d\sigma$ auf die inneren Punkte von Ds ausübt. In der That reducirt sich der Werth von X , Y , Z auf ξ , η , ζ , wenn man den Stromleiter σ auf das Element $d\sigma$ reducirt. Bezeichnen wir nun mit α , β , γ die Cosinus der Winkel, welche die Coordinatenachsen mit derjenigen Richtung machen, die zugleich senkrecht gegen r und gegen $D\sigma$ ist, so ist leicht einzusehen, dass:

$$\alpha \cdot \xi + \beta \cdot \eta + \gamma \cdot \zeta = 0,$$

das heisst, dass die Richtung der vom Elemente $D\sigma$ auf die inneren Punkte von Ds ausgeübten Kraft auch senkrecht zu der Richtung ist, deren Projectionen α , β , γ sind, oder dass die Richtung der Kraft in der durch r und $D\sigma$ gelegten Ebene liegt, wie es dem von Hrn. Grassmann aufgestellten Gesetze entspricht.

Für ein einzelnes lineares Element Ds bleiben also stehen, ebenso wie für ein längeres Stück von s , erstens die Kräfte, welche auf sämtliche Punkte der Länge von Ds senkrecht zu Ds wirken, und zweitens zwei Kräfte (2a), welche auf die Endpunkte von Ds wirken. Ist das Linielement Ds als ein fester Körper anzusehen, so lassen sich diese Kräfte im allgemeinen auf zwei einzelne Kräfte als Resultanten reduciren¹⁾ oder, wenn man lieber will, auf eine Kraft und ein Kräftepaar, wie ich dies in meiner zweiten Abhandlung (Bd. 75 dieses Journals) schon angegeben habe.

Einen linearen Leiter kann man in jedem Punkte sich getheilt denken, also jeden Punkt desselben als die zusammenfallenden Endpunkte zweier Leiterstücke betrachten. Dann

1) Es würde unstatthaft sein, zuerst, wie es Hr. Bertrand in Comptes Rendus T. LXXVII, p. 1052–1053 verlangt, für jedes Element diese Reduction der Kräfte auf eine Kraft und ein Kräftepaar ausführen zu wollen, um dann die aus dieser Reduction sich ergebenden Resultanten zur weiteren Berechnung der Wirkungen auf die einzelnen Punkte eines vollkommen beweglichen Leiters zu benutzen. Denn jene Reduction ist nur zulässig für Stücke Ds , welche als absolut feste Körper zu betrachten sind, während die Anwendung, auf die es hier ankommt, an die Voraussetzung gebunden ist, dass die Theile des Leiters im Gegentheil nachgiebig seien.

würde diesem Paar von Endpunkten von der einen Seite her eben so viel frei werdende positive Elektricität zuströmen, als von der andern Seite negative. Die Summe der frei werdenden Elektricität würde also doch wieder gleich Null sein. Dem entsprechend würde Gleichung (2a) anzeigen, dass zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf den betreffenden Punkt wirkten, die eine, insofern er oberes Ende des einen Leiterstückes ist, und in ihm positive Elektricität frei wird, die andere, insofern er unteres Ende des andern Leiterstückes ist, und in ihm negative Elektricität frei wird. Da beide Kräfte genau denselben Punkt mit genau gleicher Grösse und genau entgegengesetzter Richtung angreifen, so werden sie sich gegenseitig vollkommen aufheben, so lange nicht der Zusammenhang des Leiters an dieser Stelle zerrissen wird; die Summe ihrer virtuellen Momente oder ihrer Arbeit für irgend eine denkbare oder wirkliche Verschiebung des Leiters ohne Aufhebung der Continuität der Strömungslinie wird immer gleich Null sein.¹⁾ Dagegen ist dies nicht mehr der Fall, sowie der Leiter an dieser Stelle zerreisst, und seine Verschiebungen discontinuirliche Functionen der Coordinaten werden. Es werden also die Kräfte der Gleichung (2a), welche auf die Stromenden wirken, in der That auch im Innern des Leiters bei geeigneter Richtung des Stromes j ein Zerreißen des Leiters s und eine Aufhebung seines Zusammenhanges befördern können. Zugleich zeigt aber auch die Gleichung (2a), dass bei endlichen Stromstärken und endlicher Länge der Stromleiter die beiden Kräfte, welche in jedem einzelnen Querschnitt des Leiters den Molecularkräften, welche den Zusammenhang zu bewahren streben, entgegenwirken, von endlicher Grösse sind.²⁾

Die bis hierher ausgeführte Zerlegung der ponderomoto-

1) Hr. Bertrand (l. c. p. 1053) behauptet, diese Endkräfte, welche nicht die Richtung der Tangente des Leiters s hätten, müssten den Leiter verschieben. Er hat dabei nicht beachtet, dass jeder innere Punkt des Leiters von zwei gleich grossen und entgegengesetzten Kräften dieser Art angegriffen wird, die sich genau aufheben, so lange der Leiter nicht zerreisst.

2) Einen hierauf bezüglichen Einwand von Hrn. Bertrand will ich am Ende des Paragraphen besprechen.



rischen Kräfte in diejenigen Kräfte, welche auf die einzelnen Punkte des Innern und der Oberfläche des bewegten Leiters wirken, hat ihre bestimmte physikalische Bedeutung, da im Falle der Bewegung die Beschleunigung jedes einzelnen Leiterpunktes nur von den auf ihn selbst wirkenden Kräften mechanischen und elektrodynamischen Ursprungs abhängt. Die weitere
 290 Zerlegung der elektrodynamischen Kraft, welche der Leiter σ auf einen jeden der Punkte von s ausübt, in Theile, welche den einzelnen Theilen von σ entsprechen, hat etwas Willkürliches, da die Art, wie wir σ theilen, willkürlich ist. Bisher haben wir es in Längenelemente getheilt. Indessen können wir auch bis auf Kräfte, die von den Punkten von σ ausgehen, zurückgehen, da ja andererseits bei der Bewegung von σ die Beschleunigungen seiner einzelnen Punkte auf Kräfte zurückführen, welche vom ganzen Leiter s auf die einzelnen Punkte von σ ausgeübt werden.

Eine solche Zerlegung ist nun in unserem Falle namentlich vorthellhaft, um den Unterschied der von dem Potentialgesetz angezeigten Wirkungen von denen des Ampère'schen Gesetzes möglichst einfach heraustreten zu lassen. Ausserdem ist zu bemerken, dass die von dem Grassmann'schen Gesetze angezeigten Elementarkräfte zwischen Stromelement und Stromelement dem Gesetz der Gleichheit der Action und Reaction nicht genügen, obgleich dieses Gesetz bei der Zusammenfassung der gleichzeitig auf Stromelemente und Stromenden stattfindenden Wirkungen gewahrt bleibt. Die Zerlegung in Punktkräfte führt dagegen auf Elementarwirkungen, die dem Gesetze von der Action und Reaction genügen.

Um elementare Kräfte der letzteren Art zu erhalten, muss man eine nochmalige partielle Integration des letzten Gliedes der Gleichung (2) ausführen, was bei gleichzeitiger Einführung von s und σ an Stelle der Variablen p und ω das Resultat giebt:

$$X = \Sigma \left[A^2 i \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \cdot (x - \xi) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ - A^2 \cdot ij \int \left[(x - \xi) \frac{d^2}{ds \cdot d\sigma} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{x - \xi}{r^3} \cdot \cos(ds, d\sigma) \right] d\sigma,$$

$$Y = \Sigma \left[A^2 i \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \cdot (y - \eta) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ - A^2 \cdot ij \int \left[(y - \eta) \frac{d^2}{ds \cdot d\sigma} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{y - \eta}{r^3} \cdot \cos(ds, d\sigma) \right] d\sigma, \\ Z = \Sigma \left[A^2 i \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \cdot (z - \zeta) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ - A^2 \cdot ij \int \left[(z - \zeta) \frac{d^2}{ds \cdot d\sigma} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{z - \zeta}{r^3} \cdot \cos(ds, d\sigma) \right] d\sigma.$$

Es sind dies die Componenten einer Summe von Abstossungskräften, welche theils von den Enden, theils von den linearen Stromelementen der Leitung σ auf das Stromelement ds ausgeübt werden. Die Werthe sind folgende:

1) Abstossende Kraft eines Endes von σ auf ein
 291 Stromelement ds :

$$+ A^2 i \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \cdot r \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) = - A^2 i \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds}.$$

2) Abstossende Kraft der Stromelemente von σ auf die von s :

$$- A^2 \cdot ij \cdot \left[r \cdot \frac{d^2}{ds \cdot d\sigma} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^3} \cdot \cos(ds, d\sigma) \right].$$

Da nun:

$$\frac{d^2}{ds \cdot d\sigma} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds} \right] = - \frac{1}{r^3} \cdot \frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma} + \frac{2}{r^4} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma},$$

und ferner:

$$\frac{dr}{ds} = \cos(r, ds),$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = -\cos(r, d\sigma),$$

$$\frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma} = \frac{1}{r} [\cos(r, ds) \cdot \cos(r, d\sigma) - \cos(ds, d\sigma)],$$

so wird der Werth der Abstossungskraft:

$$- \frac{A^2 \cdot ij}{r^3} \cdot [2 \cos(ds, d\sigma) - 3 \cos(r, ds) \cdot \cos(r, d\sigma)],$$

was die bekannte Form von Ampère ist.



Die auf die Enden von s wirkenden Kräfte bringen wir auf die entsprechende Form, indem wir in (2a) das $d\xi/d\sigma$ durch partielle Integration fortschaffen:

$$\bar{X} = -\frac{1+k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \cdot \sum \left[\frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r} \right] + A^2 \frac{de}{dt} \cdot j \cdot \int (x-\xi) \cdot \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

und ebenso:

$$\bar{Y} = -\frac{1+k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \cdot \sum \left[\frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{y-\eta}{r} \right] + A^2 \frac{de}{dt} \cdot j \cdot \int (y-\eta) \cdot \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

$$\bar{Z} = -\frac{1+k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \cdot \sum \left[\frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{z-\zeta}{r} \right] + A^2 \frac{de}{dt} \cdot j \cdot \int (z-\zeta) \cdot \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Dies sind die Componenten von Abstossungskräften, welche theils von den Enden der Leitung σ , theils von deren inneren Elementen auf die Enden der Leitung s ausgeübt werden. Und zwar ist die Grösse der Abstossung

3) zwischen den Enden der Leitungen:

$$-\frac{1+k}{2} \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} \cdot A^2$$

unabhängig von der Entfernung;

292 4) zwischen den inneren Elementen von σ und den Enden von s :

$$A^2 \frac{de}{dt} \cdot j \cdot r \cdot \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = -A^2 \frac{de}{dt} \cdot i \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\sigma} d\sigma,$$

welcher Ausdruck dem vorher für die Abstossung zwischen den Enden von σ und den inneren Elementen von s gefundenen genau entspricht.

Die Ergebnisse der bisher angestellten Untersuchung sind also folgende:

Für die Kräfte, welche die inneren Längenelemente zweier linearen, unverzweigten, in beliebigem Grade biegsamen und dehnbaren Leiter aufeinander ausüben, ergiebt das Potentialgesetz genau dieselben Werthe wie das Gesetz von Ampère. Der Werth der Constanten k in der von mir gewählten allgemeineren Form des Potentialgesetzes hat darauf keinen Einfluss.

Unterschieden ist das Potentialgesetz von dem von Ampère nur durch die Kräfte, welche auf die Enden der Leitungen nicht geschlossener Ströme wirken, an denen sich Elektricität ansammelt. Dergleichen Kräfte kennt Ampère's Gesetz nicht. Das Potentialgesetz dagegen ergiebt, wenn man alle Kräfte in anziehende und abstossende zerlegt, eine in Richtung der Verbindungslinie wirkende Kraft sowohl zwischen Stromelementen und Stromenden, wie zwischen je zwei Stromenden. Die Kraft zwischen Stromelementen und Stromenden (1 und 3 oben) ist eine anziehende, wenn die an dem Stromende sich sammelnde Art der Elektricität gleichnamig ist mit derjenigen, welche in dem Stromelemente sich von dem Stromende entfernt. Die Grösse dieser Kraft ist proportional der Geschwindigkeit der Ansammlung der betreffenden Elektricität an dem Stromende, ferner proportional der Geschwindigkeit, mit der die Entfernung zwischen beiden wächst, endlich umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung, übrigens unabhängig von der Constante k . Sie ist also ein nothwendiges Ergebniss jeder Form des Potentialgesetzes. Im Gegensatz zu Hrn. W. Weber's Hypothese ist es hier nicht die schon angesammelte freie, sondern die eben aus Bewegung in Ruhe übergehende sich ansammelnde Elektricität, welche die Wirkung ausübt, und die Wirkung selbst nicht dem Quadrate, sondern der ersten Potenz von dr/dt proportional.

Es strebt also hiernach bewegte Elektricität die eben frei werdende Elektricität derselben Art in dieselbe Bewegung nachzuziehen, in welcher erstere relativ zu letzterer begriffen ist.

Die Kraft zwischen Stromenden endlich ist eine anziehende, wenn sich Elektricität gleicher Art an beiden Stromenden sammelt. Dass in der Unabhängigkeit dieser Kraft von der Entfernung keine physikalische Schwierigkeit liegt, ist schon in der Einleitung erörtert worden.



In den Comptes Rendus vom 14. October 1872 hat Hr. Bertrand der Académie des Sciences eine Betrachtung mitgeteilt, durch welche er beweisen zu können glaubt, dass die durch das Potentialgesetz gegebenen Kräfte, die, wenn man sich die einzelnen Längenelemente des Leiters als feste Stäbe denkt, für jedes derselben auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar zurückgeführt werden könnten, nothwendig den festesten Leiter zertrümmern müssten, wenn sie existirten. Ich habe in der vorläufigen Zusammenfassung der hier vorgetragenen Resultate, die ich der Berliner Akademie (Februar 1873) gab, diesen Einwurf erwähnt und kurz bezeichnet, was mir die wahrscheinlichste Quelle des Irrthums in Hrn. Bertrand's Raisonement zu sein schien. Meine dort gegebene Interpretation seiner Meinung hat mein Gegner aber in dem Comptes Rendu vom 10. November 1873 als unrichtig bezeichnet, und eine Auseinandersetzung wiederholt, welche ich vorher nur für eine nicht sehr glücklich gewählte und leicht misszuverstehende Form der Darstellung gehalten und deshalb übergangen hatte. Bei der hervorragenden Stellung, welche Hr. Bertrand unter den französischen Mathematikern einnimmt, muss ich hier auf die Sache zurückkommen. Um meinem Gegner nichts unterzuschieben, was er nicht selbst gesagt hat, citire ich aus C. R. LXXV S. 863 die Stelle, wo derselbe die Sache in möglichst drastischer Anschaulichkeit beschreibt:

„Lassen Sie uns einen geradlinigen horizontalen Draht annehmen, der ein Meter lang und in 100 Milliarden gleicher Theile getheilt ist, welche die Stelle der unendlich kleinen Elemente in der Formel (nämlich des Potentialgesetzes) vertreten; nehmen wir weiter an, jedes derselben werde durch ein Kräftepaar von zwei verticalen Kräften angegriffen, deren jede dem Gewicht von 1 mgr gleich ist. Es kommt hier nicht darauf an, dass solche Kräfte, wenn sie auf einen als absolut fest betrachteten Stab einwirken, sich nach den Regeln der Statik in ein Kräftepaar von sehr kleinem Moment zusammensetzen würden, welches, ohne Zweifel, unfähig sein würde, einen Spinnenfaden zu zerreißen; muss der Kupferdraht, welcher nach oben gezogen wird durch 100 Milliarden Milligramm, das heisst durch 100,000 kg, und nach unten durch

eine gleiche Kraft, nicht augenblicklich zerrissen werden? Und man bemerke wohl, es handelt sich nicht nur um sehr kleine, sondern um unendlich kleine Elemente; man muss also die Existenz nicht nur von 100 Milliarden solcher Kräfte voraussetzen, sondern von einer unendlichen Zahl, und wie klein auch der Werth jeder einzelnen derselben wäre, der Faden müsste einen unendlich grossen Widerstand entwickeln können, um fest zu bleiben.“

Im C. R. t. LXXVII S. 1050–1051, wo mich Hr. Bertrand darüber tadelt, dass ich so entscheidender Auseinandersetzungen gar nicht Erwähnung gethan hätte, fasst er dies Beispiel noch einmal zusammen: „Betrachten wir einen geradlinigen Stab, der an seinen Enden von gleichen und entgegengesetzten Kräften von unendlicher Intensität gezogen wird“ u. s. w. Hier sind die Kräfte, die ein Jahr früher wenigstens noch über den ganzen Stab vertheilt waren, nun ganz an die Enden verlegt.

Wenn Hr. Bertrand Recht hat, so werden wir uns hüten²⁰⁴ müssen, einen stählernen Magnetstab je von Osten nach Westen zu richten, denn dann müsste derselbe in Staub zerfallen. An einem solchen können wir uns durch den Versuch überzeugen, dass jedes durch zwei zur magnetischen Axe senkrechte Querschnitte aus dem Stabe herausgetrennte Stück, so klein und kurz es auch sein mag, noch immer seine zwei Pole hat, und wenn die Magnetisirung des Stabes in seiner ganzen Länge gleichmässig gewesen ist, so ist die Anziehungskraft des Erdmagnetismus auf jeden Pol jedes kleinsten Stückes gleich gross. Jedes von ihnen wird also vor der Trennung, wie nach der Trennung, vom Erdmagnetismus gerichtet durch ein Kräftepaar, dessen zwei Kräfte endliche Grösse behalten, so klein auch die der magnetischen Axe parallele Länge des betreffenden Stückes sein mag. Nehmen wir an, diese Kraft sei gleich der Schwere von einem Milligramm. Theilen wir die Länge des Magnetstabes in 100 Milliarden Theile u. s. w., so ergiebt sich bei ostwestlicher Richtung des Stabes, dass 100,000 kgr den Magneten nach Norden reißen, andere 100,000 kg nach Süden. Müssen wir nun wirklich mit Hrn. Bertrand schliessen, dass der Magnet unter



solchen Umständen zerrissen wird? Die Natur entscheidet gegen die Meinung des berühmten Akademikers, und Alle, die sich bisher mit mathematischer Mechanik beschäftigt haben, nicht bloß ich allein, haben in diesem, wie allen ähnlichen Fällen geglaubt, die mechanische Theorie sei hier vollständig im Einklang mit dem, was in Wirklichkeit geschieht.

Man denke sich zwei Längenelemente eines Stabes ab und bc in Richtung der x . Es sei ab afficirt von den beiden, ein Paar bildenden, Kräften $-Y$ in a und $+Y$ in b . Ein gleiches Paar wirke auf bc , nämlich eine Kraft $-Y$ in b und $+Y$ in c . Die Summe der virtuellen Momente der beiden Kräfte $+Y$ und $-Y$, welche die beiden Seiten eines und desselben Querschnittes b des Stabes angreifen, bleibt Null bei allen Bewegungen aller Theile des Stabes, ausser bei solchen, welche den Stab im Querschnitt b zerreißen. Also auf Trennung der beiden Seiten eines Querschnittes wirken immer nur die beiden endlichen Kräfte hin, die ihn direct angreifen. Die Cohäsion des Leiters braucht folglich in jedem Querschnitte nur zwei endlichen Kräften zu widerstehen. Bei allen anderen Bewegungen werden die beiden Kräfte, welche jeden einzelnen Querschnitt angreifen, sich aufheben, und so bleibt schliesslich nichts von allen diesen Kräften übrig als die erste am Anfang des ersten und die letzte am Ende des letzten Längenelementes dx , also zwei endliche Kräfte, welche ein endliches Moment hervorbringen.

Ich muss gestehen, Hrn. Bertrand's Rechnung scheint mir allen wohlbewährten Principien der Mechanik und der Differentialrechnung zu widersprechen; ich ziehe deshalb vor zu glauben, dass ich seine wahre Meinung nicht gefunden und nicht verstanden habe. Wenn er seine Ansicht darüber ausinandersetzen will, warum ein von Osten nach Westen gerichteter Magnetstab nicht zertrümmert wird, trotzdem er sich, so weit ich sehe, genau unter derselben Art von Kraftwirkung befindet, wie ein von einem elektrischen Strome durchflossener Draht nach den von mir aus dem Potentialgesetze gezogenen Folgerungen, so werde ich vielleicht verstehen können, welchen Sinn die von ihm angestellte Betrachtung haben soll.

§ 16. Die elektrodynamischen Kräfte in körperlichen Leitern. 295

Der von Hrn. F. E. Neumann aufgestellte Werth des elektrodynamischen Potentials soll die durch die elektrodynamischen Kräfte bei Bewegungen der ponderablen Leiter zu leistende ponderomotorische Arbeit geben unter der Voraussetzung, dass die Intensität der Strömungen in jedem linearen Leiter während der Bewegung ungeändert bleibt. Die Aenderungen des Potentials, welche von Aenderungen in der Intensität der Strömungen abhängen, seien diese nun durch Aenderungen des Widerstandes oder der elektromotorischen Kräfte hervorgebracht, haben keinen Einfluss auf den ponderomotorischen Theil der geleisteten Arbeit.

Die ponderomotorischen Kräfte hängen eben nur ab von den Stromstärken, wie sie zur Zeit der Wirkung bestehen, nicht von deren Veränderungen. Die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen für unverzweigte Leiter lassen sich ohne Schwierigkeit auf zwei beliebig verzweigte Systeme linearer Leiter übertragen. An jedem Verzweigungspunkte ist:

$$\frac{de}{dt} = \sum [\pm i] = 0,$$

wenn man mit i die Intensitäten der Strömung in den einzelnen von dort ausgehenden Zweigen bezeichnet und das $-$ Zeichen für die Strömungen benutzt, deren positive Richtung von dem genannten Punkte ausgeht, das $+$ Zeichen für die, deren positive Richtung auf den Punkt hingeht. Wenn aber $de/dt = 0$ ist, so ist auch die Summe der elektrodynamischen Wirkungen gleich Null, welche von dem besprochenen Verzweigungspunkte als Endpunkte mehrerer Strömungen ausgehen, oder auf ihn einwirken. Wenn durch die Bewegung einzelne Fäden des Netzes gedehnt, andere verkürzt werden, und die Stromvertheilung wegen veränderten Widerstandes solcher Zweige sich ändert, so wird dies ebenso wenig, wie bei einfachen unverzweigten Leitungen auf die ponderomotorischen Kräfte Einfluss haben.

Von dem Falle eines verzweigten Leiters kann man durch immer steigende Anzahl der Verzweigungspunkte übergehen zu



einem im Raume ausgedehnten Leiter von drei Dimensionen. Wenn man sich einen solchen in Fäden abgetheilt denkt, welche überall den Stromlinien parallel gerichtet sind, sodass von keinem dieser Fäden zu seinen Nachbarn Elektrizität bei der bestehenden Stromvertheilung überfließt, so wird die elektrodynamische Wirkung dieselbe sein müssen, als wären dieselben Stromfäden als lineare Leiter vorhanden und von einander durch nichtleitende Zwischenräume isolirt. Will man den Neumann'schen Begriff des elektrodynamischen Potentials auf körperlich ausgedehnte Leiter übertragen, so wird man bei der Variation des Potentials für die Berechnung der geleisteten mechanischen Arbeit die Stromstärke in jedem, aus denselben materiellen Theilen gebildeten Stromfaden als unveränderlich betrachten müssen.

Wir wollen die Stromcomponenten der elektrischen Strömung im Punkte x, y, z mit u, v, w bezeichnen, die Componenten der Geschwindigkeit des materiellen Leiters dagegen mit α, β, γ . Das Linienelement Ds wird die Richtung der elektrischen Strömung haben, wenn:

$$Dx : Dy : Dz : Ds = u : v : w : \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Wenn wir nun unter q den Querschnitt eines unendlich dünnen Stromfadens verstehen, dessen Axe ds ist, und von dem das unendlich kleine Stück ds als cylindrisch betrachtet werden kann, so ist $q\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ die Stromintensität in diesem Stromfaden, und qds sein Volumen, welches wir mit $D\omega$ bezeichnen wollen, also die Stromintensität:

$$i = \frac{D\omega}{Ds} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{u}{Ds} D\omega = \frac{v}{Dy} D\omega = \frac{w}{Dz} D\omega.$$

Wenn also für das betreffende Stück des Stromfadens bei der Variation der Grössen x, y, z das i unverändert bleiben soll, so haben wir:

$$0 = \delta \left[\frac{u}{Ds} D\omega \right] = \delta \left[\frac{v}{Dy} D\omega \right] = \delta \left[\frac{w}{Dz} D\omega \right].$$

Die erste dieser Gleichungen giebt:

$$0 = \frac{D\omega}{Ds} \delta u + \frac{u}{Ds} \delta D\omega - \frac{u}{Ds^2} D\omega \cdot \delta Ds$$

oder:

$$\delta u = u \frac{\delta Ds}{Ds} - \frac{\delta D\omega}{D\omega}. \quad (3)$$

Das zweite Glied rechts in dieser Gleichung ist die relative Volumvergrößerung in der Umgebung des Punktes x, y, z , und diese ist nach bekannten Sätzen, wenn $\delta x, \delta y, \delta z$ continuirliche Functionen der Coordinaten sind:

$$\frac{\delta D\omega}{D\omega} = \frac{\delta \delta x}{\delta x} + \frac{\delta \delta y}{\delta y} + \frac{\delta \delta z}{\delta z}.$$

Ferner ist:

$$\delta Ds = \frac{\delta \delta x}{\delta x} \cdot Dx + \frac{\delta \delta y}{\delta y} \cdot Dy + \frac{\delta \delta z}{\delta z} \cdot Dz,$$

also:

$$u \frac{\delta Ds}{Ds} = u \cdot \frac{\delta \delta x}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta \delta y}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta \delta z}{\delta z}, \quad (3a)$$

und die Gleichung für δu ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= \left(v \cdot \frac{\delta \delta x}{\delta y} - u \cdot \frac{\delta \delta y}{\delta y} \right) + \left(w \cdot \frac{\delta \delta x}{\delta z} - u \cdot \frac{\delta \delta z}{\delta z} \right), \\ \delta v &= \left(u \cdot \frac{\delta \delta y}{\delta x} - v \cdot \frac{\delta \delta x}{\delta x} \right) + \left(w \cdot \frac{\delta \delta y}{\delta z} - v \cdot \frac{\delta \delta z}{\delta z} \right), \\ \delta w &= \left(u \cdot \frac{\delta \delta z}{\delta x} - w \cdot \frac{\delta \delta x}{\delta x} \right) + \left(v \cdot \frac{\delta \delta z}{\delta y} - w \cdot \frac{\delta \delta y}{\delta y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

Der von den beiden Elementen Ds und Ds' abhängige Theil des Neumann'schen Potentials P_0 , wie es oben in (1c) gegeben ist, erhält dann den Werth:

$$DP_0 = - \frac{A^2 Ds \cdot Ds'}{r} \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2} \left[\frac{Dx}{Ds} \cdot \frac{Dx'}{Ds'} + \frac{Dy}{Ds} \cdot \frac{Dy'}{Ds'} + \frac{Dz}{Ds} \cdot \frac{Dz'}{Ds'} \right] \cdot q \cdot q'$$

oder da:

$$\frac{Dx}{Ds} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

u. s. w.

$$DP_0 = - \frac{A^2 D\omega \cdot D\omega'}{r} [uu' + vv' + ww'].$$

Wenn man hier nach den Volumenelementen $D\omega$ und $D\omega'$ integrirt, erhält man:

$$P_0 = - \frac{1}{2} A^2 \iint D\omega \cdot D\omega' \cdot \frac{uu' + vv' + ww'}{r}.$$



Der Factor $\frac{1}{2}$ ist hier eingetreten, da bei der Ausdehnung der sechs Integrationen über sämtliche Punkte des gesamten Leitersystems jede Combination zweier Elemente $D\omega$ und $D\omega'$ zweimal vorkommt. Wären $D\omega$ und $D\omega'$ Volumenelemente zweier getrennter Leiter S und S' und die Integration über x, y, z nur auf S , die nach x', y', z' nur über S' auszudehnen, so würde der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen sein. Dass diejenigen Elemente des Integrals P_0 , welche wegen $r = 0$ unendlich werden, das Integral nicht unendlich machen, so lange u, v, w daselbst endlich sind, ist aus der Theorie der Potentialfunctionen bekannt.

Beschränken wir uns zunächst darauf, den hier gegebenen Theil P_0 des Potentials zu variiren und die davon abhängigen Kräfte zu suchen, die wir mit X_0, Y_0, Z_0 bezeichnen wollen, so haben wir:

$$298 \quad \delta P_0 + \int (X_0 \delta x + Y_0 \delta y + Z_0 \delta z) D\omega = 0. \quad (3d)$$

Wir setzen wieder die Theilchen des Körpers als frei verschieblich voraus, sodass $\delta x, \delta y$ und δz von einander ganz unabhängige, aber continuirliche Functionen der Coordinaten sind. Beschränken wir uns zunächst auf Variation der x , sodass vorläufig $\delta y = \delta z = 0$ gesetzt wird, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta P_0 = & -A^2 \iint \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) \delta x (u u_1 + v v_1 + w w_1) D\omega \cdot D\omega' \\ & -A^2 \iint \frac{1}{r} [u_1 \delta (u D\omega) + v_1 \delta (v D\omega) + w_1 \delta (w D\omega)] D\omega'. \end{aligned}$$

Setzt man nun, nach Gleichung (3) und (3a):

$$\begin{aligned} \delta (u \cdot D\omega) &= u D\omega \cdot \frac{\delta D\omega}{\delta x} \\ &= D\omega \cdot \left[u \frac{d\delta x}{dx} + v \frac{d\delta x}{dy} + w \frac{d\delta x}{dz} \right] \end{aligned}$$

und entsprechende Werthe für $\delta (v \cdot D\omega)$ und $\delta (w \cdot D\omega)$, so wird:

$$\begin{aligned} \delta P_0 = & -A^2 \iint \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) \delta x (u u_1 + v v_1 + w w_1) + \frac{u_1}{r} \left(u \frac{d\delta x}{dx} \right. \right. \\ & \left. \left. + v \frac{d\delta x}{dy} + w \frac{d\delta x}{dz} \right) \right] D\omega \cdot D\omega'. \end{aligned}$$

Setzt man nun statt $D\omega$ seinen Werth:

$$D\omega = dx \cdot dy \cdot dz,$$

so kann man durch partielle Integration die Differentialquotienten von δx fortschaffen, vorausgesetzt, dass δx eine continuirliche Function der Coordinaten ist, oder dass keine Gleitstellen mit absoluter Discontinuität der Bewegung vorkommen. In dem resultirenden Ausdrucke ist die mit δx multiplicirte Grösse nach (3d) gleich $-X_0 D\omega$ zu setzen. Führen wir die Grössen ein:

$$U' = \int \frac{u'}{r} D\omega',$$

$$V' = \int \frac{v'}{r} D\omega',$$

$$W' = \int \frac{w'}{r} D\omega',$$

und berücksichtigen wir die Gleichung:

$$-\frac{de}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

worin e die Dichtigkeit der freien Elektricität ist, so erhalten wir:

$$X_0 = A^2 \left[v \left(\frac{dV'}{dx} - \frac{dU'}{dy} \right) + w \left(\frac{dW'}{dx} - \frac{dU'}{dz} \right) + U' \frac{de}{dt} \right], \quad (3e)$$

und für die auf die Flächeneinheit der Oberfläche des Leiters ²⁹⁹ wirkende Kraft, wenn ε die Menge freier Elektricität an dieser Flächeneinheit ist:

$$\bar{X}_0 = U' \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (3f)$$

Dazu kommt nun noch die von dem Theile P_1 des Potentials herrührende Kraft. Ehe man hier variirt, kann man seine Integration vornehmen, wie in (1b), und man erhält, wie dort:

$$P_1 = -\frac{1-k}{4} A^2 \iint \frac{de}{dt} \cdot \frac{de}{dt} r D\omega \cdot D\omega'.$$

Die Integrationen sind beide über die sämtlichen vorhandenen Volumenelemente auszudehnen, und da sich dabei die Combination jeder zwei Elemente zweimal wiederholt, so ist vorn



der Factor $\frac{1}{2}$ hinzugefügt. Dabei ist aber zu bemerken, dass unter diesem de/dt und $d\epsilon/dt$ auch die Werthe der frei werdenden elektrischen Massen an den vorhandenen Grenzflächen der Leiter mitzubefassen sind.

Da das P_1 eine ähnliche Form, wie die Potentiale anziehender Massen de/dt und $d\epsilon/dt$ hat, so ergibt sich in bekannter Weise daraus die Kraft:

$$X_1 = \frac{1-k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \int \frac{d\epsilon}{dt} \frac{x-\xi}{r} D\omega'. \quad (3g)$$

Oder wenn man die in Gleichung (2c) meiner ersten Abhandlung gebrauchte Bezeichnung¹⁾ beibehält:

$$\Psi = \int r \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \cdot D\omega',$$

so ist:

$$X_1 = \left(\frac{1-k}{2} \right) A^2 \frac{de}{dt} \frac{d\Psi}{dx}. \quad (3h)$$

Führt man ferner die anderen ebenda gebrauchten Functionen ein, nämlich:

$$U = U' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi'}{dx},$$

$$V = V' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi'}{dy},$$

$$W = W' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi'}{dz},$$

so werden die Ausdrücke der elektrodynamischen Bewegungskräfte einfach folgende:

$$\left. \begin{aligned} X &= A^2 \left[v \left(\frac{dV'}{dx} - \frac{dU'}{dy} \right) + w \left(\frac{dW'}{dx} - \frac{dU'}{dz} \right) + U' \frac{de}{dt} \right], \\ Y &= A^2 \left[u \left(\frac{dU'}{dy} - \frac{dV'}{dx} \right) + w \left(\frac{dW'}{dy} - \frac{dV'}{dz} \right) + V' \frac{de}{dt} \right], \\ Z &= A^2 \left[u \left(\frac{dU'}{dz} - \frac{dW'}{dx} \right) + v \left(\frac{dV'}{dz} - \frac{dW'}{dy} \right) + W' \frac{de}{dt} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3i)$$

Dabei ist unter e alle an Flächen und in körperlichen Räumen angesammelte freie Elektricität zu verstehen, ebenso wie dies

¹⁾ In dieser Gleichung ist ein Druckfehler. Der Factor 4π im Nenner muss getilgt werden, da $\Delta\varphi = -4\pi\epsilon$ ist. (Der Fehler ist oben S. 570 schon corrigirt)

bei der Bildung der Function Ψ mit $d\epsilon/dt$ geschehen ist. Dass die mit u, v, w multiplicirten Factoren den Componenten der magnetischen Kraft, welche durch die Ströme erzeugt wird, proportional sind, ist in Gleichung (19b) meiner ersten Abhandlung nachgewiesen.

Die in (3i) gegebenen Werthe der elektrodynamischen Kräfte haben die Grassmann'sche Form, nur dass in dieser letzteren die auf die freiwerdende Elektricität de/dt wirkenden Kräfte fehlen. Es bleibt noch übrig den von de/dt unabhängigen Theil auf die Ampère'sche Form zu bringen.

Zu dem Ende führe man in dem Ausdrucke:

$$\left. \begin{aligned} K &= u \frac{dU'}{dx} + v \frac{dU'}{dy} + w \frac{dU'}{dz} \\ &= - \iiint u' \frac{[u(x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)]}{r^3} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (3k)$$

eine partielle Integration nach ξ aus, welche ergibt:

$$\begin{aligned} K &= + \int u_1 (x-\xi) \frac{[u(x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)]}{r^3} \cos a \cdot d\omega \\ &+ \iiint (x-\xi) \left[\frac{u_1 u}{r^3} - 3 \frac{(x-\xi)^2 u + (y-\eta)(x-\xi)v + (z-\zeta)(x-\xi)w}{r^5} \right] d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \\ &- \iiint (x-\xi) \frac{du_1}{d\xi} \frac{[u(x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)]}{r^3} d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta. \end{aligned}$$

Mittels der Gleichung:

$$-\frac{de}{dt} = \frac{du'}{d\xi} + \frac{dv'}{d\eta} + \frac{dw'}{d\zeta}$$

lässt sich aus dem letzten Integral zuerst das $du'/d\xi$ und dann $dv'/d\eta$ und $dw'/d\zeta$ durch partielle Integration beseitigen. Das giebt:

$$\begin{aligned} K &= \iiint \frac{de}{dt} (x-\xi) \frac{[u(x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)]}{r^3} d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \\ &- u \frac{dU'}{dx} - v \frac{dU'}{dy} - w \frac{dU'}{dz} - 3 \iiint \frac{(x-\xi)}{r^5} [(x-\xi)u + (y-\eta)v \\ &+ (z-\zeta)w] [(x-\xi)u' + (y-\eta)v' + (z-\zeta)w'] d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta. \end{aligned} \quad 301$$

Wenn man nun zur ersten der Gleichungen (3i) hinzuaddirt die aus (3k) folgende Gleichung:

$$0 = A^2 \left[-K + u \frac{dU'}{dx} + v \frac{dU'}{dy} + w \frac{dU'}{dz} \right],$$



so erhält man:

$$X = A^2 U \frac{de}{dt} - A^2 \iiint \frac{de}{dt} \frac{x-\xi}{r^3} [u(x-\xi) + v(y-\eta)] \\ + w(z-\zeta)] d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta - A^2 \iiint \frac{x-\xi}{r^3} [2 \cos(i, j) \\ - 3 \cos(i, r) \cos(j, r)] d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta. \quad (31)$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist die Ampère'sche Kraft zwischen zwei Stromelementen. Das erste Glied rührt her von den Wirkungen auf die freiwerdende Elektrizität in x, y, z . Das zweite giebt die Wirkung der anderwärts frei werdenden Elektrizität auf die Strömung im Punkte x, y, z . Wird nirgends Elektrizität frei, das heisst, sind alle Ströme, die auf einander wirken, geschlossen, so bleibt die Ampère'sche Kraft allein übrig.

Dadurch ist auch für Leiter von drei Dimensionen, bei denen die Bewegungen der einzelnen Volumenelemente in ganz beliebiger Weise geschehen können, vorausgesetzt nur, dass sie continuirlich für benachbarte Theilchen geschehen und die Stromfäden nicht zerreißen, erwiesen, dass für geschlossene Strömungen das Potentialgesetz genau dieselben elektrodynamischen Bewegungskräfte ergiebt, wie Ampère's Gesetz.

Der zweite Theil des Werthes von X in (31) ist die x -Componente einer anziehenden Kraft:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{de}{dt} d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \left[u \frac{x-\xi}{r} + v \frac{y-\eta}{r} + w \frac{z-\zeta}{r} \right],$$

welche die freiwerdende Elektrizität de/dt im Volumenelemente $d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$ auf die von ihr weg in Richtung von r fließende elektrische Strömung im Punkte x, y, z ausübt.

Der erste Theil jenes Werthes von x endlich entspricht der auf die im Punkte x, y, z frei werdende Elektrizität ausübten Kraft.

302 § 17. Die Anwendung des Potentialgesetzes auf Gleitstellen.

Die in § 15 angestellten Betrachtungen setzen voraus, dass entweder die Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ continuirliche Functionen der Coordinaten sind, wobei dann die Continuität der Strom-

leitung erhalten bleibt, oder dass die Stromleitung abbricht, wo die Variationen discontinuirlich werden. Nun können aber auch Fälle vorkommen, in denen man die Bewegung der leitenden Metallstücke als discontinuirlich betrachten kann, und doch die Stromleitung erhalten bleibt. Ein solcher Fall wäre zunächst der, wo die zwei Metallstücke sich trennen, und der Strom zwischen ihnen einen leitenden Bogen von glühendem Metaldampf erzeugt. Hier besteht weiter keine analytische Schwierigkeit in der Anwendung unseres Gesetzes, da das materielle leitende Verbindungsglied sich durch Dehnung aus den vorher an der Berührungsstelle liegenden Metalltheilchen gebildet hat. Hier ist und bleibt das neue Leiterelement, welches die Lücke ausfüllt, für sich bestehend, so lange überhaupt Leitung besteht, und an diesen Fall kann sich also kein Zweifel anknüpfen.

Weniger augenfällig wird das Verhältniss, wenn der Draht, welcher sich von seiner bisherigen Berührungsstelle mit dem anderen Leiter trennt, sogleich wieder mit anderen Stellen des letzteren Leiters in Berührung kommt, sodass sich immer wieder neue Stromfäden anknüpfen, und deshalb der Funkenbogen zwischen beiden Leitern gar nicht oder nur in unterbrochener Weise zur Erscheinung kommt. Dieser Fall würde dem Bestehen einer Gleitstelle zwischen den beiden Leitern entsprechen.

Denkt man sich die Stromfäden construirt, welche durch die Gleitstelle hindurchgehen, und nehmen wir einen absoluten Sprung in den Werthen der Geschwindigkeiten diesseits und jenseits der Gleitfläche an, so würde aus einer solchen Annahme folgen, dass in der Gleitstelle jeder der zur Zeit bestehenden Stromfäden immer und immer wieder zerrissen wird. Die Berechnung der ponderomotorischen Kräfte aus dem Potentialgesetze kann aber nur unter der Voraussetzung geschehen, dass die Strömung in jedem aus denselben materiellen Theilen bestehenden Stromfaden ungeändert bleibt. Wie sich die materiellen Theile des Leiters dabei in dem Faden verschieben, hat keinen Einfluss auf die geleistete Arbeit, da nach der Länge des Leiters keine elektrodynamischen Bewegungskräfte wirken. Man würde also auch in diesem Falle bei der Berechnung der Variationen voraussetzen müssen, dass die ab-



reissenden Stromfäden noch durch ein leitendes Linienelement für einen Augenblick verbunden bleiben. Diese Vorstellung kann unnatürlich oder willkürlich erscheinen, sie ist es aber nicht, wenn wir beachten, dass bei wirklich ausführbaren Versuchen eine absolute Discontinuität der Bewegung gar nicht eintritt, und wenn man von den wirklich vorkommenden Verhältnissen den Uebergang zur Grenze einer theoretisch-discontinuirlichen Bewegung der beiden Leiter macht.

Bei der Schwäche der elektrodynamischen Kräfte, welche auf einen einzelnen Leitungsdraht wirken, müssen wir den Draht sehr leicht beweglich machen und doch dafür sorgen, dass an der Gleitstelle sehr gute Leitung des Stromes stattfindet. Um beide Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen, kennen wir bisher keine andere Methode, als die, an der Gleitstelle flüssige Leiter, entweder Quecksilber oder Elektrolyten, einzuschalten, deren Grenzschichten an den beiden metallischen Elektroden festhaften, und deren innere Schichten sich so bewegen, dass sie einen continuirlichen Uebergang von der Bewegung der einen zu der der anderen Elektrode herstellen. Hierbei ist von einer wirklichen Discontinuität der Bewegung also gar keine Rede, und auf dergleichen Versuche bleibt die bisher gegebene Beweisführung, dass für geschlossene Ströme das Ampère'sche und Neumann'sche Gesetz dieselben Resultate geben, vollkommen anwendbar.

Denkt man sich die flüssige Schicht immer dünner werdend, so kann man die besprochene continuirliche Bewegung einer discontinuirlichen bis zu jedem Grade der Annäherung ähnlicher machen, ohne dass die bisher angestellten Betrachtungen ihre Anwendbarkeit verlieren.

Solche Fälle treten ein, wenn wir zwei harte Metalle aufeinander schleifen lassen. Es ist bekannt, dass dies unter ziemlich starkem Druck geschehen muss, wenn eine gute Stromleitung erreicht werden soll; dabei verändern sich die oberflächlichen Schichten der Metalle sehr merklich und reiben sich ab, woraus wir schliessen müssen, dass ihre oberflächlichen Schichten der Bewegung des anderen Stückes zum Theile folgen. Bei leicht entzündlichen Metallen, wie Eisen, sprühen

dabei Funken auf, welche zeigen, dass der Uebergang der Elektricität zum Theil auch durch kurze Dampfbögen unterhalten wird. Für dergleichen Fälle hat man die elektrodynamischen Bewegungskräfte der Gleitstelle allerdings noch nicht direct beobachtet, doch hat Hr. F. E. Neumann durch den Versuch gezeigt, dass die inducirten elektromotorischen Kräfte auch in diesen Fällen seinem Potentialgesetze folgen, und daraus folgt nach dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft, dass es auch die elektrodynamischen Kräfte thun müssen (s. unten § 20).

Die Annahme einer Gleitung mit discontinuirlicher Verschiebung ist also den bisher beobachteten Thatsachen gegenüber nur eine Grenze, der die wirklichen Verhältnisse sehr nahe kommen können, und die deshalb analytisch als vereinfachende Darstellung derselben gebraucht werden mag, vorausgesetzt dass man in der Rechnung das richtige Annäherungsverfahren anwendet. Ähnliche Grenzbegriffe haben wir in der mathematischen Physik viele, wie den des absolut festen Körpers, der incompressiblen Flüssigkeit u. s. w., deren Eigenschaften sich aus den allgemeinen Principien der Mechanik (Newton's Axiomen) auch nur dann herleiten lassen, wenn man sie als die Grenze der elastischen Körper von grossem Elasticitätscoefficienten ansieht. Thut man dies nicht, so muss man bei ihrer Behandlung noch besondere Hypothesen zu Hülfe nehmen, welche die besondere Art und Weise definiren, wie Kräfte, gegen feste Körper wirkend, zu zerlegen sind.

In unserem Falle ergeben sich also richtige Folgerungen aus dem Neumann'schen Gesetze, wenn man eine Gleitung mit discontinuirlicher Verschiebung als den Grenzfall continuirlicher Verschiebung ansieht, welche nur auf eine immer dünner werdende Schicht zusammengedrängt wird. Man kann nun entweder so verfahren, dass man aus dem Potentialausdrucke die Ampère'schen Kräfte herleitet, ehe man die Uebergangsschicht als unendlich dünn gesetzt hat; oder wenn man auf diese unmittelbar den Potentialausdruck anwenden will, das Potential von verschwindend kleinen Stromfadenelementen mitberechnet, welche die gleitenden Flächen verbinden.

Nehmen wir an, dass an der negativen Seite der yz -Fläche



die leitende Masse in Ruhe sei, dass zwischen $x = 0$ und $x = \lambda$ deren Geschwindigkeit in Richtung der y sei:

$$v = \frac{x\beta}{\lambda};$$

dagegen für $x > \lambda$:

$$v = \beta.$$

Die elektrische Strömung sei senkrecht zur Gleitfläche parallel x und von dem constanten Werthe u_0 , so würden in den Schichten zwischen $x = 0$ und $x = \lambda$, wenn jeder materielle leitende Faden seine Stromintensität behielte, nach dem Zeittheilchen dt die Stromcomponenten sein:

$$u = u_0,$$

$$v = u_0 \frac{\beta}{\lambda} dt,$$

$$w = 0.$$

305 Betrachten wir die Dicke λ als verschwindend klein und vernachlässigen wir die Glieder, welche λ in höherer als der ersten Potenz enthalten, so wird der Werth des elektrodynamischen Potentials für das Flächenstück Q dieser verschiebbaren Schicht sein:

$$P = - \left(U u_0 + V u_0 \frac{\beta}{\lambda} dt \right) Q \lambda,$$

und wenn wir die gesammte Intensität des durch Q gehenden Stromes mit J bezeichnen:

$$J = Qu,$$

so ist:

$$\frac{dP}{dt} dt = - V J \beta dt,$$

also unabhängig von der Dicke λ der verschiebbaren Schicht. Eine Kraft Y , welche an der Ebene $x = \lambda$ angebracht dieselbe Arbeit leisten würde, müsste sein:

$$Y \beta dt = - \frac{dP}{dt} dt,$$

woraus folgt:

$$Y = JV.$$

Es ist dies einfach der Werth der Kraft, welche auf die Endfläche der verschiebbaren Schicht wirken würde, wenn sie eine Endfläche des Stromes wäre. Auf diese Endkraft reducirt

sich die ganze elektrodynamische Wirkung, welche die übrigen vorhandenen Strömungen auf die verschiebbare Schicht ausüben, sobald diese verschwindend kleine Dicke hat.

Da aber die Fläche $x = \lambda$ in Wahrheit keine Endfläche des durchströmten Leiters ist, sondern an den gleitenden festen Leiter sich anschliesst, so begegnet die Endkraft der sich verschiebenden Schicht der entgegengesetzt gerichteten gleich grossen Endkraft an der Endfläche des festen Leiters, und beide heben sich gegenseitig auf.

Der ganze Einfluss einer solchen unendlich dünnen Uebergangsschicht, wie wir sie angenommen haben, besteht also darin, dass die beiden Endkräfte wegfallen, welche auf die Grenzfläche der beiden Leiter wirken würden, wenn statt der leitenden Uebergangsschicht eine isolirende Zwischenschicht bestände. Das heisst also, es wirken diesseits und jenseits der Gleitfläche nur die Ampère'schen (oder Grassmann'schen) Kräfte. Diejenigen Theile dieser Kräfte, welche auf die leitenden Elemente der Uebergangsschicht selbst wirken, sind verschwindend klein, 309 wenn die Dicke der Schicht verschwindend klein ist.

Will man also die elektrodynamische Arbeit direct aus dem Werthe des Potentials berechnen, und dabei die Existenz der Uebergangsschicht vernachlässigen, so muss man an Stelle dieser Schicht zwei Endkräfte an die Grenzflächen der gleitenden Leiter hinzugefügt denken, welche denjenigen gerade entgegengesetzt sind, die ebenda auf Endflächen der Strömung wirken würden. Denn die genannten Grenzflächen sind eben keine Endflächen der Strömung. Diese Art der Darstellung vereinfacht die Berechnung der Wirkung oft in hohem Grade. Nehmen wir z. B. das von Hrn. Riecke angeführte Beispiel, wo der bewegliche Theil des Leiters der Radius eines Kreises ist, der an der leitenden Peripherie des Kreises gleitet, und die Zuleitung des Stromes zum Centrum des Kreises, die Ableitung von der Peripherie symmetrisch zur Axe geschieht, während die elektrodynamische Wirkung von starken Kreisströmen ausgeht, die concentrisch mit dem Gleitkreise angebracht sind. In einem solchen Falle rotirt bekanntlich der Radius entgegengesetzt der positiven Elektrizität in den Kreisströmen. Hr. Riecke hat Recht, dass in diesem Falle



das Potential, welches die Kreisströme auf den Radius ausüben, sich bei dessen Bewegung nicht ändert, weil er immerfort in symmetrischer Lage zu ihnen bleibt. Aber die Stromfäden in der Gleitstelle gehen fortdauernd aus der radialen in die tangential Richtung über, und deren Potential gegen die Kreisströme ist in erster Lage Null, in zweiter Lage hat es einen von Null verschiedenen Werth. Die Vorgänge in der Gleitstelle allein sind in diesem Falle das Treibende, und aus unserer Darstellung ergibt sich, dass der Werth der drehenden Kraft einfach zu finden ist, indem man die Endkraft für die gleitende Spitze berechnet und diese negativ nimmt.

An ähnlichen Beispielen hat Hr. C. Neumann Anstoss genommen¹⁾ und leugnet deshalb die Anwendbarkeit des von seinem Vater aufgestellten Potentialgesetzes auf Stromelemente. Die absolute Discontinuität der Bewegung in der Gleitstelle, welche die Schwierigkeit (das Zerreißen der Stromfäden) herbeiführt, ist aber nur eine mathematische Fiction. Nimmt man sie streng, so giebt das Potentialgesetz, welches Fortdauer des Stromes in denselben materiellen Stromfäden voraussetzt, keine falsche, sondern überhaupt gar keine Auskunft für die Stellen, wo die Fäden zerreißen. Den richtigen Werth findet man auf dem von uns eingeschlagenen Wege, welcher die den wirklichen Verhältnissen entsprechende Art der Annäherung an die Discontinuität analytisch ausdrückt.

§ 18. Die elektrodynamische Induction.

Hr. F. E. Neumann hat das von ihm aufgestellte Gesetz der Induction im Anfange der oben citirten Abhandlung auch nur für geschlossene lineare Ströme erwiesen. In der ersten meiner elektrodynamischen Abhandlungen (Bd. 72 dieses Journals) habe ich seine Anwendung ausgedehnt auf die durch Aenderung der Stromstärke hervorgerufene Induction in ruhenden Leitern von drei Dimensionen mit ungeschlossenen Strömungen. Dasselbe ist hier noch zu thun für die allgemeinsten Fälle der Induction, bei denen gleichzeitig Aenderungen der Stromintensität und der Lage der Leiter vorkommen.

1) Die elektrischen Kräfte. Leipzig 1873. S. 77–79.

Die elektromotorische Kraft, welche auf das Element Ds eines Stromfadens einwirkt, ist, wenn wir die bisher gewählten Maasseinheiten beibehalten und die Neumann'schen Sätze, welche zunächst nur für Leiter von endlicher Länge aufgestellt sind, auf deren einzelne Längenelemente übertragen, unabhängig von der Stromstärke in Ds selbst, und gleich der Geschwindigkeit der Aenderung des Potentials dP/dt , welches sämtliche vorhandenen Ströme auf das von der Einheit der Stromstärke durchflossene materielle leitende Element Ds hervorbringen.

Für zwei lineare Stromelemente Ds und $D\sigma$ mit den Stromstärken i und j können wir setzen:

$$DP = i \cdot j \cdot A^2 \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2r}{ds \cdot d\sigma} \right] Ds \cdot D\sigma, \quad (4)$$

oder wie in (1):

$$DP = -\frac{1}{2} A^2 \cdot \frac{j}{i} \cdot [(1+k) \cos(Ds, D\sigma) + (1-k) \cos(r, Ds) \cdot \cos(r, D\sigma)] \cdot Ds \cdot D\sigma.$$

Die inducirte Kraft $\mathfrak{R}$ für die Längeneinheit der Stromleiter s und σ wäre nach dem eben ausgesprochenen Principe durch folgende Beziehung gegeben:

$$\mathfrak{R} \cdot Ds \cdot D\sigma = \frac{A^2}{\delta t} \cdot \delta \left\{ j \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2r}{ds \cdot d\sigma} \right] \cdot Ds \cdot D\sigma \right\} \quad (4a)$$

oder:

$$\mathfrak{R} \cdot Ds \cdot D\sigma = -\frac{A^2}{2\delta t} \cdot \delta \left\{ \frac{j}{i} \cdot [(1+k) \cos(Ds, D\sigma) + (1-k) \cos(r, Ds) \cdot \cos(r, D\sigma)] \cdot Ds \cdot D\sigma \right\}.$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_1$ die entsprechende inducirte Kraft, die ³⁰⁸ im Stromleiter σ wirkt, so ist:

$$\mathfrak{R}_1 \cdot Ds \cdot D\sigma = \frac{A^2}{\delta t} \cdot \delta \left\{ i \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2r}{ds \cdot d\sigma} \right] \cdot Ds \cdot D\sigma \right\}$$

und die Arbeit $\delta \mathfrak{B}$, welche die ponderomotorischen Kräfte an den Längeneinheiten der Stromleiter verrichten,

$$\delta \mathfrak{B} \cdot Ds \cdot D\sigma = -A^2 \cdot i \cdot j \cdot \delta \left\{ \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2r}{ds \cdot d\sigma} \right] \cdot Ds \cdot D\sigma \right\} \quad (4b)$$



Daraus folgt:

$$\delta(DP) = [\mathfrak{R}.i + \mathfrak{R}_1.j] \delta t + \delta \mathfrak{B}.Ds.Ds. \quad (4c)$$

Diese letztere Gleichung ist, wie wir später sehen werden, der Ausdruck des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft.

Wenn wir diese Ausdrücke auf Leiter von drei Dimensionen übertragen wollen, so müssen wir die Aenderung des Potentials P suchen für ein Stück Ds eines aus denselben materiellen Theilchen bestehenden und von der Stromstärke $J=1$ durchströmten Stromfadens. Sind Dx , Dy , Dz die Projectionen von Ds auf die Coordinatenachsen, so ist der Theil von P , der sich auf Ds bezieht, mit Benutzung der schon früher gebrauchten Zeichen:

$$PDs = -JA^2[U.Dx + V.Dy + W.Dz]. \quad (5)$$

Dieser Ausdruck bleibt nach bekannten Sätzen endlich, auch wenn das Element Ds des Stromfadens innerhalb desselben Raumes liegt, der die Elemente für die Integrale U , V , W liefert. Ich werde im Folgenden diese Grössen als Functionen der Zeit und der Coordinaten x , y , z des im Raume festen Punktes betrachten, auf den sie sich beziehen. Die Variationen δU , δV , δW sollen also die Veränderungen bezeichnen, welche U , V , W in dem festen Raumpunkte x , y , z durch Aenderungen der Stromstärke und Bewegungen der übrigen Stromelemente erleiden. Dagegen wollen wir $\delta(U)$, $\delta(V)$, $\delta(W)$ gebrauchen, um die Aenderungen in dem bewegten materiellen Punkte zu bezeichnen, der zu Anfang der Zeit δt im Punkte x , y , z sich befindet. Es ist also:

$$\delta(U) = \delta U + \frac{dU}{dx} \cdot \delta x + \frac{dU}{dy} \cdot \delta y + \frac{dU}{dz} \cdot \delta z,$$

wenn δx , δy und δz die Verschiebungen bezeichnen, welche jener materielle Punkt im Zeittheilchen δt erlitten hat. Die Veränderung von Dx ist, wie sich leicht ergibt,

$$\delta Dx = \frac{d\delta x}{dx} \cdot Dx + \frac{d\delta x}{dy} \cdot Dy + \frac{d\delta x}{dz} \cdot Dz. \quad 309$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe ergibt Gleichung (5), da $J=1$,

$$\mathfrak{R}.Ds.\delta t = \delta(P.Ds) = (\mathfrak{X}.Dx + \mathfrak{Y}.Dy + \mathfrak{Z}.Dz)\delta t, \quad (5a)$$

worin gesetzt ist:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{X}.\delta t &= -A^2 \left[\delta(U) + U \cdot \frac{d\delta x}{dx} + V \cdot \frac{d\delta y}{dx} + W \cdot \frac{d\delta z}{dx} \right], \\ \mathfrak{Y}.\delta t &= -A^2 \left[\delta(V) + U \cdot \frac{d\delta x}{dy} + V \cdot \frac{d\delta y}{dy} + W \cdot \frac{d\delta z}{dy} \right], \\ \mathfrak{Z}.\delta t &= -A^2 \left[\delta(W) + U \cdot \frac{d\delta x}{dz} + V \cdot \frac{d\delta y}{dz} + W \cdot \frac{d\delta z}{dz} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

Setzen wir statt der Verschiebungen δx , δy und δz die entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit:

$$\delta x = \alpha.\delta t, \quad \delta y = \beta.\delta t, \quad \delta z = \gamma.\delta t,$$

so ergeben sich die Werthe der Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, welche, wie Gleichung (5a) zeigt, die den Coordinatenachsen parallelen Componenten der inducirten elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$ sind, wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{X} &= -A^2 \left[\frac{\delta U}{\delta t} + \alpha \cdot \frac{dU}{dx} + \beta \cdot \frac{dU}{dy} + \gamma \cdot \frac{dU}{dz} \right. \\ &\quad \left. + U \cdot \frac{d\alpha}{dx} + V \cdot \frac{d\beta}{dx} + W \cdot \frac{d\gamma}{dx} \right], \\ \mathfrak{Y} &= -A^2 \left[\frac{\delta V}{\delta t} + \alpha \cdot \frac{dV}{dx} + \beta \cdot \frac{dV}{dy} + \gamma \cdot \frac{dV}{dz} \right. \\ &\quad \left. + U \cdot \frac{d\alpha}{dy} + V \cdot \frac{d\beta}{dy} + W \cdot \frac{d\gamma}{dy} \right], \\ \mathfrak{Z} &= -A^2 \left[\frac{\delta W}{\delta t} + \alpha \cdot \frac{dW}{dx} + \beta \cdot \frac{dW}{dy} + \gamma \cdot \frac{dW}{dz} \right. \\ &\quad \left. + U \cdot \frac{d\alpha}{dz} + V \cdot \frac{d\beta}{dz} + W \cdot \frac{d\gamma}{dz} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5c)$$

Diese Werthe lassen sich auch schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{X} &= -A^2 \left[\frac{\delta U}{\delta t} + \beta \left(\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \right) + \gamma \left(\frac{dU}{dz} - \frac{dW}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dx} (U\alpha + V\beta + W\gamma) \right], \\ \mathfrak{Y} &= -A^2 \left[\frac{\delta V}{\delta t} + \alpha \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy} \right) + \gamma \left(\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dy} (U\alpha + V\beta + W\gamma) \right], \\ \mathfrak{Z} &= -A^2 \left[\frac{\delta W}{\delta t} + \alpha \left(\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \right) + \beta \left(\frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dz} (U\alpha + V\beta + W\gamma) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5d)$$



Die ersten Theile dieser Ausdrücke $\delta U/\delta t$, $\delta V/\delta t$ und $\delta W/\delta t$ geben die inducirten Kräfte, denen das Leiterelement ausgesetzt sein würde, auch wenn es nicht selbst bewegt würde.
 310 Wenn wir die in Gleichung (19b) meiner Abhandlung im 72. Bande eingeführten Werthe der magnetischen Kraftcomponenten $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ anwenden:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q} &= A \left[\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \right], \\ \mathfrak{M} &= A \left[\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \right], \\ \mathfrak{N} &= A \left[\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \right],\end{aligned}\quad (5e)$$

so erhalten die zweiten in (5d) mit α , β , γ multiplicirten Theile der obigen Kräfte, die wir mit $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ bezeichnen wollen, die Werthe:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_1 &= -A [\beta \mathfrak{M} - \gamma \mathfrak{N}], \\ \mathfrak{Y}_1 &= -A [\gamma \mathfrak{Q} - \alpha \mathfrak{N}], \\ \mathfrak{Z}_1 &= -A [\alpha \mathfrak{M} - \beta \mathfrak{Q}],\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{X}_1 Dx + \mathfrak{Y}_1 Dy + \mathfrak{Z}_1 Dz = -A \{ \gamma (\mathfrak{Q} Dy - \beta Dz) + \mathfrak{M} (\alpha Dz - \gamma Dx) + \mathfrak{N} (\beta Dx - \alpha Dy) \} \quad (5f)$$

Das ist die durch Bewegung des Leiterelements Ds quer durch die Richtung der magnetischen Kraftlinien erzeugte inducirende Kraft.

Endlich der letzte Theil der Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, der die Differentialquotienten von $(U\alpha + V\beta + W\gamma)$ enthält, und den wir beziehlich mit $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_2$ bezeichnen wollen, giebt für einen linearen Leiter, dessen Längenelemente Ds sind,

$$\int (\mathfrak{X}_2 Dx + \mathfrak{Y}_2 Dy + \mathfrak{Z}_2 Dz) = - (U\alpha + V\beta + W\gamma), \quad (5g)$$

wo der Ausdruck rechts die Differenz der den Grenzen der Integration angehörigen Werthe bezeichnet. Er wird gleich Null, wenn die Integration über eine geschlossene Curve ausgedehnt wird.

Ich will hier nur noch an die seit Ampère bekannten Beziehungen zwischen $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und U , V , W erinnern. Es sei $d\omega$ das Flächenelement einer einfach zusammenhängenden

Fläche, und es seien a , b , c die Winkel, welche die Normale dieses Elements mit den Coordinatenaxen macht, ds aber das Linienelement der Grenzcurve, so ergibt sich mit Benutzung der in (5e) gegebenen Werthe, wenn $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und U , V , W in der Fläche überall stetig und endlich sind,

$$\begin{aligned}& i \iint (\mathfrak{Q} \cos a + \mathfrak{M} \cos b + \mathfrak{N} \cos c) d\omega \\ &= i \iint (\mathfrak{Q} dy \cdot dz + \mathfrak{M} dx \cdot dz + \mathfrak{N} dx \cdot dy) \\ &= i \int (U dx + V dy + W dz) \\ &= \int (U u + V v + W w) ds,\end{aligned}$$

worin die ersten beiden Integrale über die ganze Fläche, das 311 letzte über die ganze Umfangslinie auszudehnen sind. Das elektrodynamische Potential für die vom Strome i durchflossene Umfangslinie findet sich gleich dem magnetischen Potential für die Fläche, wenn deren Flächeneinheit das magnetische Moment i in Richtung ihrer Normale hat. Es entspricht dies dem von Ampère aufgestellten Satze, wonach die ponderomotorische Einwirkung eines geschlossenen Stromes auf andere Ströme oder Magneten gleich der magnetischen Einwirkung einer in der angegebenen Art magnetisirten und von der Stromlinie begrenzten Fläche ist.

Daraus ergibt sich weiter, dass die inducirte elektromotorische Kraft in der ganzen Länge der Grenzcurve gleich ist der Grösse:

$$\frac{d}{dt} \iint [L \cos a + M \cos b + N \cos c] d\omega.$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Grösse ist die in Richtung der Normale von $d\omega$ wirkende magnetische Richtkraft, multiplicirt mit $d\omega$. Nennen wir diese R , und beschränkt sich die Fläche auf ihr eines Element $d\omega$, so ist die längs des ganzen Umfangs von $d\omega$ inducirte elektromotorische Kraft:

$$\frac{d}{dt} (R \cdot d\omega).$$



§ 19. Die Erhaltung der Energie.

Wir haben noch zu untersuchen, in wiefern die gefundenen ponderomotorischen Kräfte X, Y, Z der Gleichung (3i) und die elektromotorischen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ der Gleichungen (5b) die Forderungen des Gesetzes von der Erhaltung der Energie erfüllen. Wir wollen zunächst die Werthe beider Arten von Kräften als unbekannt betrachten und aus der Constanz der Energie den Zusammenhang herleiten, der zwischen beiden besteht.

Wenn wir den Leitungswiderstand der Volumeneinheit eines körperlich ausgedehnten Leiters, nach denselben Einheiten gemessen wie in den Gleichungen (3b) meiner ersten Abhandlung, mit κ bezeichnen, so sind die Gleichungen der elektrischen Strömung:

$$\left. \begin{aligned} \kappa u &= -\frac{dq}{dx} + \mathfrak{X} + \mathfrak{A}, \\ \kappa v &= -\frac{dq}{dy} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{B}, \\ \kappa w &= -\frac{dq}{dz} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{C}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

³¹² Darin ist q die elektrostatische Potentialfunction, und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind die anderweitigen elektromotorischen Kräfte hydroelektrischen oder thermoelektrischen Ursprungs, welche etwa mitwirken.

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit $u dt$, die zweite mit $v dt$, die dritte mit $w dt$, addieren und integrieren die ganze Summe über den ganzen Raum, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} &\delta t \iiint \kappa (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \\ &= \delta t \iiint [\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w] dx dy dz, \\ &- \delta t \iiint \left(u \frac{dq}{dx} + v \frac{dq}{dy} + w \frac{dq}{dz} \right) dx dy dz, \\ &+ \delta t \iiint [\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w] dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Das Integral links ist das Arbeitsäquivalent der in den Stromleitern während des Zeittheilchens δt entwickelten Wärme. Das

erste Integral rechts ist das Arbeitsäquivalent der bei der Strömung aufgebrauchten chemischen Kräfte in hydroelektrischen Erregern, beziehlich der durch das Peltier'sche Phänomen aufgebrauchten Wärme in thermoelektrischen Erregern, wie ich dies schon in meinem Büchlein über die Erhaltung der Kraft entwickelt habe. Das zweite Integral links ist das durch die elektrischen Strömungen verloren gegangene Arbeitsäquivalent elektrostatischer Kräfte, wie die zur Gleichung (5a) meiner Abhandlung im 72. Bande dieses Journals (oben S. 580) gegebenen Erläuterungen mit Berücksichtigung von (4b) ebendasselbst zeigen.

Daraus folgt, dass das dritte Integral der rechten Seite, welches wir mit $Q \delta t$ bezeichnen wollen,

$$Q = \iiint (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w) dx dy dz \quad (6b)$$

dasjenige Arbeitsäquivalent darstellt, welches die inducirten elektromotorischen Kräfte zur Wärmeentwicklung in der Leitung beigetragen haben. Ausserdem haben die ponderomotorischen Kräfte der elektrischen Ströme mechanische Arbeit erzeugt, deren Betrag $\mathfrak{B} \delta t$ ist,

$$\mathfrak{B} = \iiint (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) dx dy dz, \quad (6c)$$

worin α, β, γ , wie im vorigen Paragraphen, die Geschwindigkeitscomponenten des materiellen Volumenelements $dx dy dz$ in Richtung der x, y und z bezeichnen.

Diese letzten beiden Arbeitsäquivalente $Q \delta t$ und $\mathfrak{B} \delta t$ sind nun zu leisten auf Kosten des Arbeitswerthes der elektrischen Strömungen, den wir in Gleichung (4a) meiner ersten Abhandlung mit Φ_0 bezeichnet haben:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} A^2 \iiint (U \cdot u + V \cdot v + W \cdot w) dx dy dz; \quad (6d)$$

und wir haben also:

$$Q + \mathfrak{B} = -\frac{d\Phi_0}{dt}, \quad (6e)$$

als Ausdruck des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft.

Wenn wir in den Werth von $\mathfrak{B}$ der Gleichung (6c) die von uns aus dem Potentialgesetz hergeleiteten Werthe der



Kräfte X, Y, Z der Gleichung (3) setzen, darin aber die Grösse de/dt durch ihren Werth ersetzen, nämlich in Volumenelementen:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz},$$

und in Flächenelementen an der Grenze der Leiter:

$$\frac{de}{dt} = u \cdot \cos a + v \cdot \cos b + w \cdot \cos c,$$

endlich die Differentialquotienten von u, v, w durch partielle Integration beseitigen, so erhalten wir einen Ausdruck von der Form:

$$\mathfrak{B} = A^2 \iiint [\mathfrak{P} \cdot u + \mathfrak{Q} \cdot v + \mathfrak{R} \cdot w] dx \cdot dy \cdot dz, \quad (6f)$$

worin:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \beta \left(\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \right) + \gamma \left(\frac{dU}{dz} - \frac{dW}{dx} \right) \\ &\quad + \frac{d}{dx} [U \cdot \alpha + V \cdot \beta + W \cdot \gamma], \\ \mathfrak{Q} &= \alpha \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy} \right) + \gamma \left(\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \right) \\ &\quad + \frac{d}{dy} [U \cdot \alpha + V \cdot \beta + W \cdot \gamma], \\ \mathfrak{R} &= \alpha \left(\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \right) + \beta \left(\frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz} \right) \\ &\quad + \frac{d}{dz} [U \cdot \alpha + V \cdot \beta + W \cdot \gamma]. \end{aligned} \right\} \quad (6g)$$

Damit die hier vorgenommene partielle Integration ausführbar sei, muss wieder vorausgesetzt werden, dass die Grössen U, V, β und W, γ continuirliche Functionen der Coordinaten seien. In dieser Beziehung müssen also Gleitstellen bei Berechnung der elektromotorischen Kräfte ebenso behandelt werden, wie bei Berechnung der ponderomotorischen Kräfte in § 17 geschehen ist. Die Grösse Φ_0 ist (wie die in (1a) und (1b) des § 2 [S. 568 oben] meiner ersten Abhandlung für U, V, W gegebenen Ausdrücke zeigen:

$$U = \iiint \left\{ \frac{u_1}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \left[u_1 \cdot \frac{d^2 r}{dx \cdot d\xi} + v_1 \cdot \frac{d^2 r}{dx \cdot d\eta} + w_1 \cdot \frac{d^2 r}{dx \cdot d\zeta} \right] \right\} d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta,$$

wo u_1, v_1, w_1 die Werthe von u, v, w im Punkte ξ, η, ζ sind) eine vollkommen symmetrisch gebaute Function der ³¹⁴ Werthe u, v, w in x, y, z und der Werthe u_1, v_1, w_1 in ξ, η, ζ , und jedes Raumelement kommt darin einmal als influirtes in $dx \cdot dy \cdot dz$ und einmal als influirendes in $d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$ vor; da demnach jedes Paar doppelt vorkommt, so ist der Factor $\frac{1}{2}$ vorgesetzt. Die Aenderung von Φ_0 wird also ganz gefunden, wenn wir jedes Leiterelement, sofern es als influirendes in ξ, η, ζ vorkommt, sich nach Lage und Stromintensität ändern, sofern es als influirtes in x, y, z vorkommt, unverändert beharren lassen und den Factor $\frac{1}{2}$ beseitigen. Dies giebt:

$$\frac{d\Phi_0}{dt} = A^2 \iiint \left[u \cdot \frac{dU}{dt} + v \cdot \frac{dV}{dt} + w \cdot \frac{dW}{dt} \right] dx \cdot dy \cdot dz. \quad (6h)$$

Setzt man in Gleichung (6e) die Werthe aus (6b), (6f), (6g) und (6h), so erhält man:

$$0 = \iiint \left\{ u \cdot \left[\mathfrak{X} + A^2 \cdot \mathfrak{P} + A^2 \cdot \frac{dU}{dt} \right] + v \cdot \left[\mathfrak{Y} + A^2 \cdot \mathfrak{Q} + A^2 \cdot \frac{dV}{dt} \right] + w \cdot \left[\mathfrak{Z} + A^2 \cdot \mathfrak{R} + A^2 \cdot \frac{dW}{dt} \right] \right\} dx \cdot dy \cdot dz. \quad (6i)$$

Diese Gleichung ist durch die oben in (5d) gegebenen Werthe von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ wirklich erfüllt, und somit den Forderungen des Gesetzes von der Erhaltung der Energie Genüge geleistet.

Wir haben noch den Fall zu besprechen, dass ein Magnet sich relativ zum Strome bewege, sei es ein permanenter, sei es einer, der durch die Einwirkung elektromagnetischer Kräfte aus einer magnetisirbaren Substanz erst gebildet wird. Wir wollen der einfacheren Darstellung wegen annehmen, die magnetische Substanz selbst sei nichtleitend für die Elektrizität. Die Fälle der Anwendung werden dadurch nicht eingeschränkt. Denn in leitenden magnetischen Substanzen würde man sich die Elementarmagnete nur mit leitenden Hüllen umgeben zu denken und die in diesen inducirten Ströme dem System der übrigen vorhandenen elektrischen Ströme zuzurechnen



brauchen. Nun ist bekannt, dass die ponderomotorischen und inducirenden Fernwirkungen eines jeden Elementarmagneten in der magnetisirten Masse genau dieselben sein würden, wenn an Stelle des kleinen Magneten ein elektrischer Kreisstrom gesetzt würde, dessen Intensität multiplicirt mit der Fläche, die er umfließt, gleich dem magnetischen Momente des Elementarmagneten ist.

Nehmen wir an, dass diese Kreisströme existirten an 316 Stelle der Elementarmagneten, und dass in jedem von ihnen fortdauernd eine elektromotorische (etwa hydroelektrische) Kraft wirksam gehalten würde, welche genau der zu der betreffenden Zeit und an dem betreffenden Orte eintretenden Magnetisirung entspräche, so würden die sämtlichen Theile der ponderomotorischen Arbeit genau dieselben sein, wie für die magnetische Substanz, und die inducirenden Wirkungen in den sämtlichen elektrischen Leitern ebenfalls. Dagegen würde in den hypothetischen Kreisströmen noch hinzukommen die chemische und thermische Arbeit dieser Ströme selbst und die inducirten elektromotorischen Kräfte in ihren Bahnen; wegfallen würde die Arbeit der Magnetisirung der Elementarmagnete. In dem hypothetischen Systeme, welches statt der Magnete nur Ströme enthält, wäre nach dem von uns geführten Beweise das Gesetz von der Constanz der Energie gültig. Es fragt sich also nur, ob diejenigen Antheile der hier betrachteten Arbeitsgrößen, die auf die Kreisströme fallen, durch die auf die Elementarmagnete fallenden ersetzt werden können. Wenn in einem solchen Kreisstrom zur Zeit keine inducirte elektromotorische Kraft wirkt, so wird die in ihm geleistete thermische Arbeit ein genaues Aequivalent der in ihm verbrauchten chemischen Energie sein, und beide sich gegenseitig in der Berechnung aufheben. Wenn aber die elektromotorische Kraft $\mathfrak{R}$ inducirt wird und die Stromstärke i herrscht, so wird die Wärmeentwicklung $i\mathfrak{R}dt$ während des Zeittheilchens dt stattfinden, welche nicht durch die in dem Kreisstrom selbst wirkenden Arbeitsäquivalente gedeckt wird. Nennen wir andererseits die zur entsprechenden Magnetisirung erforderliche Arbeit S , so würde $(dS/dt).dt$ die in demselben Theilchen aufgewendete Arbeit sein, wenn der Kreisstrom durch den Elementarmag-

neten ersetzt würde. Wir würden also für jeden einzelnen Kreisstrom haben müssen:

$$\mathfrak{R}.i = \frac{dS}{dt},$$

da jeder einzelne Kreisstrom durch seinen Elementarmagneten müsste ersetzt werden können. Nun ist aber i dem magnetischen Momente proportional, und dieses ist eine Function der magnetisirenden Kraft, die wir mit σ bezeichnen wollen. Das magnetische Moment des betreffenden Elementarmagneten sei q_σ , und $d\omega$ die Fläche des Kreisstromes, so ist:

$$i.d\omega = q_\sigma.$$

Andererseits ist die inducirte Kraft $\mathfrak{R}$ nach dem am Schluss von § 18 gegebenen Nachweise bestimmt durch die Gleichung: 316

$$\mathfrak{R} = \frac{d\sigma}{dt}.d\omega.$$

Die obige Bedingungsleichung wird also:

$$q_\sigma \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

Da wir nun über S im allgemeinen nichts weiter wissen, als dass es eine Function der Magnetisirungsstärke q_σ , also auch eine Function von σ ist, so entspricht die letzte Gleichung dieser Anforderung, wenn wir setzen:

$$S = \int_0^\sigma q_\sigma . d\sigma.$$

Bei permanenten Magneten würden S , σ und q gleich Constanten zu setzen sein.

Bei magnetischen Substanzen mit Coërcitivkraft geht beim Magnetisiren und Entmagnetisiren Arbeit verloren, deren Aequivalent sich wahrscheinlich als neu entwickelte Wärme in den Magneten vorfinden wird.

§ 20. Das Inductionsgesetz unter Voraussetzung ausschliesslicher Gültigkeit des Ampère'schen Gesetzes.

Es bleibt noch die Frage übrig, ob nicht noch andere Gesetze der ponderomotorischen und durch Bewegung indu-



cirten elektromotorischen Kräfte bestehen könnten, welche dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft genügen, ohne dass dabei die Wirkung geschlossener Ströme auf geschlossene, deren Uebereinstimmung mit dem Potentialgesetz durch die Versuche genügend festgestellt erscheint, verändert würde, und ohne dass die Analogie zwischen permanenten Magneten und geschlossenen Strömen in Bezug auf ihre elektrodynamische Wirkung dabei aufgehoben würde.

Die Gleichung (6e), welche das Gesetz von der Erhaltung der Kraft ausdrückt, reducirt sich für zwei lineare Leiterstücke offenbar auf die Gleichung (4c).

Bezeichnen wir also wie dort die inducirte elektromotorische Kraft, welche das Leiterstück $D\sigma$ in Ds hervorbringt, mit $\mathfrak{R} \cdot Ds \cdot D\sigma$, diejenige dagegen, welche Ds in $D\sigma$ hervorbringt, mit $\mathfrak{R}_1 \cdot D\sigma \cdot Ds$ und die Arbeit, welche bei der Bewegung beider geleistet wird, mit $\delta \mathfrak{B} \cdot Ds \cdot D\sigma$, die actuelle Energie der elektrischen Bewegungen mit $P \cdot Ds \cdot D\sigma$, so muss sein:

$$\delta P = i \cdot \mathfrak{R} \cdot \delta t + j \cdot \mathfrak{R}_1 \cdot \delta t + \delta \mathfrak{B}. \quad (4c)$$

Der Werth von P ist bestimmt durch die Energie, welche die in Ds und $D\sigma$ bestehenden Stromstärken durch die beim Schwinden ihrer Strömungen inducirten Ströme bei gegenseitiger Einwirkung noch hervorbringen können. Die allgemeine Form von P ist schon in meinem ersten Aufsätze (Bd. 72) discutirt worden. Zu P haben wir also keine Zusätze mehr zu machen; es enthält schon die bis jetzt unbestimmte Constante h . Die Zusätze zu $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{B}$, wollen wir bezüglich mit jv , iv_1 und $ij \cdot w$ bezeichnen. Unsere Gleichung (4c) ergibt alsdann:

$$0 = v \cdot \delta t + v_1 \cdot \delta t + \delta w. \quad (7)$$

Diese Gleichung muss ungestört bleiben, wenn der Leiter s eine geschlossene Curve bildet, und seine Fernwirkung durch einen permanenten Magneten ersetzt wird. In einem solchen fällt die elektromotorische Kraft v fort, während v_1 und w unverändert bleiben. Daraus ergibt sich, dass:

$$\int v \cdot Ds = 0,$$

so oft es über einen geschlossenen Stromkreis genommen wird.

Einen solchen stellen wir her, wenn wir irgend zwei lineare Leiter s_1 und s_2 so zusammenlegen, dass ihre Endpunkte a und b zusammenfallen, und ein Strom von derselben Intensität i in s_1 von a nach b , in s_2 von b nach a fließt.

Daraus folgt, dass die elektromotorische Zusatzkraft $\int_a^b v \cdot Ds$ in der Richtung von a nach b wirkend für beide die gleiche sein muss, wenn ihre Endpunkte zusammenfallen, wie auch übrigens der Verlauf der beiden Curven s_1 und s_2 sein mag, und dass also die Grösse dieser Zusatzkraft in einem ungeschlossenen linearen Leiter allein von der Lage und den Bewegungen seiner Endpunkte abhängt. Ferner, dass sie gleich Null ist, wenn diese Endpunkte unveränderte relative Lage gegen alle Theile des Leiters σ behalten, weil dann auch der Leiter s_2 als vollkommen ruhend gegen σ gewählt werden könnte, und unter diesen Umständen in ihm keine Induction vorgehe.

Da nun der Werth der gesamten elektromotorischen Kraft in s durch eine Integration über die Längenelemente Ds gefunden wird, so muss der Werth dieses Integrals nur von der Lage der Endpunkte von s abhängen, nicht von dem Verlauf der Curve zwischen diesen Endpunkten, das heisst, die zu integrierende Function muss der nach s genommene Differentialquotient einer Function Φ sein, die nur von der relativen Lage der einzelnen Punkte von s gegen die Elemente $d\sigma$ abhängt. Da bei der Lagenänderung Aenderungen in der Länge von σ vorkommen können, so ist es zweckmässiger, wie in § 15, die einzelnen Punkte von s und σ wieder durch zwei bei der Bewegung unverändert bleibende Parameter p und ϖ zu bestimmen. Wir werden dann zu setzen haben:

$$v \cdot Ds \cdot D\sigma = v \cdot \frac{ds}{dp} \cdot \frac{d\sigma}{d\varpi} \cdot Dp \cdot D\varpi = \frac{d\Phi}{dp} \cdot Dp \cdot D\varpi. \quad (7a)$$

Die relative Lage von $D\sigma$ gegen einen Punkt von s ist gegeben, wenn die drei Seiten des Dreiecks zwischen diesem Punkte und den Endpunkten von $D\sigma$ gegeben sind. Diese sind:

$$r, \quad r + \frac{dr}{d\varpi} \cdot D\varpi, \quad \frac{d\sigma}{d\varpi} \cdot D\varpi.$$



Es muss also $\Phi \cdot D\sigma$ eine Function dieser Grössen und ihrer Aenderungen sein, und zwar linear nach den letzteren, und selbst proportional $D\sigma$; es wird also von der Form sein:

$$\Phi \cdot D\sigma = q \cdot \frac{d\sigma}{d\sigma} \cdot \delta r \cdot D\sigma + \psi \cdot \delta \left(\frac{dr}{d\sigma} \right) \cdot D\sigma + \chi \cdot \delta \left(\frac{d\sigma}{d\sigma} \right) \cdot D\sigma. \quad (7b)$$

Hierin können q , ψ , χ Functionen sein von r und $dr/d\sigma$, da nur noch solche Verbindungen der Seiten des oben genannten Dreiecks vorkommen dürfen, deren Werthe frei von $D\sigma$ sind.

Wenn ψ nur von r abhängig ist, nicht von $dr/d\sigma$, wenn ferner f und g Functionen von r bezeichnen und:

$$\begin{cases} q = f(r) \cdot \frac{dr}{d\sigma}, \\ \chi = g(r) \cdot \frac{dr}{d\sigma}, \end{cases} \quad (7c)$$

so hätte jedes Glied in dem Werthe von $j \cdot \Phi$ entweder den Factor:

$$j \cdot \frac{dr}{d\sigma} = -j \cdot \cos[r, D\sigma]$$

oder:

$$j \cdot \delta \left(\frac{dr}{d\sigma} \right) = -j \cdot \delta \cos[r, D\sigma].$$

319 Es käme also von der Strömung j , die nach $D\sigma$ gerichtet ist, nur die in Richtung von r fallende Componente in Betracht. Da nun diese Projection gleich der Summe der Projectionen der nach beliebigen Richtungen genommenen Componenten von j ist, so kann in diesem Falle j in dem Leiterelement ersetzt werden durch eine beliebige Anzahl beliebig gerichteter Componenten, deren Resultante gleich j ist. Dies kann aber nicht geschehen, wenn q , ψ und χ eine andere Art der Abhängigkeit von $dr/d\sigma$ hätten. Unter der genannten Annahme, deren Wahrscheinlichkeit wohl als sehr gross bezeichnet werden kann, und die auch von Hrn. C. Neumann seinen Deductionen zu Grunde gelegt wurde, würden also die Gleichungen (7a) bis (7c) die allgemeinste Form des Werthes von r geben.¹⁾

chungen (7a) bis (7c) die allgemeinste Form des Werthes von r geben.¹⁾

Für die speciellere Aufgabe jedoch eine Form des Inductionsgesetzes zu finden, welche unter Voraussetzung des Ampère'schen Gesetzes für die ponderomotorischen Kräfte, mit Ausschluss der auf die Enden der Leiter wirkenden Kräfte, gültig ist, genügt die Form (7b). Zunächst werden wir aus denselben Gründen für die in dem Leiter σ inducirte elektromotorische Kraft r_1 analoge Ausdrücke aufstellen dürfen:

$$r_1 \cdot Ds \cdot D\sigma = \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \cdot Dp \cdot D\sigma \quad (7d)$$

und

$$\Phi_1 = \varphi_1 \cdot \frac{ds}{dp} \cdot \delta r + \psi_1 \cdot \delta \left(\frac{dr}{dp} \right) + \chi_1 \cdot \delta \left(\frac{ds}{dp} \right), \quad (7e)$$

worin φ_1 , ψ_1 und χ_1 Functionen von r und dr/ds sein müssen. Benutzen wir dann die Gleichung (7)

$$\delta w = -(r + r_1) \delta l, \quad (7)$$

so erhalten wir durch Integration über die Längen der beiden Leiter s und σ mit ähnlicher Bezeichnung, wie in § 15: 320

$$\begin{aligned} i \cdot j \cdot \iint \delta w \cdot Ds \cdot D\sigma = & - \sum \Sigma \left[\frac{de}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot (\psi + \psi_1) \delta r \right] \\ & - \sum \int \left[j \cdot \frac{de}{dt} \cdot \left(q - \frac{d\psi}{d\sigma} \right) \delta r \cdot D\sigma \right] \\ & - \sum \int \left[i \cdot \frac{de}{dt} \cdot \left(\varphi_1 - \frac{d\psi_1}{dp} \right) \delta r \cdot Dp \right] \\ & - \sum \int \left[j \cdot \frac{de}{dt} \cdot \chi \cdot \frac{d\delta\sigma}{d\sigma} \cdot D\sigma \right] \\ & - \sum \int \left[i \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \chi_1 \cdot \frac{d\delta s}{dp} \cdot Dp \right]. \end{aligned} \quad (7f)$$

1) Die hier gemachte Annahme verbunden mit der, dass das Potential zweier Leiter mit der Formel von Hrn. Neumann senior übereinstimmen müsse, wenn beide geschlossen sind, genügt die im 72. Bande dieses Journals in § 1 meiner Arbeit ausgeführte Verallgemeinerung der Potentialformel zu rechtfertigen, an Stelle der dort gemachten Voraussetzung, dass die Uebereinstimmung stattfinden müsse, wenn auch nur einer von beiden Leitern geschlossen sei, deren experimentelle Begründung zur Zeit vielleicht zu mangelhaft erscheinen könnte.



Die Summen sind hier für die einzelnen Stromenden zu nehmen. Die drei ersten Glieder dieses Ausdrucks entsprechen anziehenden oder abstossenden Kräften zwischen je zwei Stromenden, oder zwischen Stromenden und Stromelementen, wie wir dergleichen ähnlich aus dem Potentialgesetze hergeleitet haben. Die beiden letzten Glieder geben Kräftepaare, welche die Stromelemente zu dehnen und zu verkürzen streben, und in den Kräften des Potentialgesetzes kein Analogon finden. Es lassen sich daher die sechs noch unbekannten Functionen q , ψ , χ , q_1 , ψ_1 , χ_1 so bestimmen, dass die Kräfte, welche von den Stromenden ausgehen, gleich Null werden. Zu dem Ende müssen wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \chi_1 = 0, \\ \psi + \psi_1 &= -\frac{1+k}{2} \cdot A^2, \\ q &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\omega} \cdot A^2, \\ q_1 &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dp} \cdot A^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die obige Gleichung (4a) für den Werth der nach dem Potentialgesetze inducirten Kraft lässt sich schreiben:

$$\Re \cdot \frac{ds}{dp} \cdot \frac{d\sigma}{d\omega} \cdot \delta t = A^2 \delta \left\{ j \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dp} \cdot \frac{dr}{d\omega} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2 r}{dp \cdot d\omega} \right) \right\},$$

und es wird also die gesammte Inductionskraft, welche das Element $D\sigma$ auf Ds ausübt, wenn nur die Ampère'schen Kräfte als ponderomotorische existiren:

$$\left. \begin{aligned} &(\Re + j \cdot r) Ds \cdot D\sigma \cdot \delta t \\ &= A^2 \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dp} \cdot \frac{dr}{d\omega} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2 r}{dp \cdot d\omega} \right) \cdot \delta j \cdot Dp \cdot D\omega \\ &+ A^2 \cdot j \cdot \left[\frac{1+k}{4} \cdot \frac{d^2 (\delta r)}{dp \cdot d\omega} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dp} \cdot \frac{d(\delta r)}{d\omega} - \frac{\delta r}{r} \cdot \frac{d^2 r}{dp \cdot d\omega} \right] Dp \cdot D\omega. \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

321 Der erste mit δj multiplicirte Theil dieses Ausdrucks giebt die von der Stromesschwankung herrührende Induction, der zweite Theil dagegen die von der Bewegung herrührende. Wenn wir berücksichtigen, dass:

$$Dp \cdot D\omega \cdot \delta \left[\frac{d^2 r}{dp \cdot d\omega} \right] = \delta \left[\frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma} \cdot Ds \cdot D\sigma \right],$$

$$\frac{dr}{dp} \cdot Dp \cdot D\omega \cdot \delta \left[\frac{dr}{d\omega} \right] = \frac{dr}{ds} \cdot \delta \left[\frac{dr}{d\sigma} \cdot D\sigma \right] \cdot Ds,$$

so ergibt sich der Werth der durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kraft P im Elemente Ds gleich:

$$\left. \begin{aligned} P \cdot Ds \cdot D\sigma \cdot \delta t &= A^2 \cdot j \cdot \left\{ -\frac{1}{r} \cdot \cos \vartheta \cdot \delta [\cos \vartheta_1 \cdot D\sigma] Ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta r}{r^2} [\cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_1 - \cos \varepsilon] Ds \cdot D\sigma \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+k}{4} \delta \left[\frac{1}{r} \cdot (\cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_1 - \cos \varepsilon) Ds \cdot D\sigma \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich in den von Hrn. C. Neumann gefundenen, wenn man $k = -1$ setzt, welche Annahme übrigens nach den in meinem früheren Aufsatz im 72. Bande gemachten Auseinandersetzungen unzulässig ist, da die Stabilität des Gleichgewichts der ruhenden Elektrizität fordert, dass k keinen negativen Werth habe. Der hier gefundene Werth der inducirten elektromotorischen Kraft genügt übrigens, wie ich schon in der Einleitung bemerkt habe, den sämtlichen von Hrn. C. Neumann an die Spitze seiner Deduction (Abh. der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. X. S. 419 u. 420, sowie S. 468–470) gestellten Forderungen. Er genügt aber nicht der Annahme, die derselbe auf S. 481 u. 482 seiner Arbeit eingeführt hat, wonach die Verlängerung eines Stromelements in der Weise inducirend wirken soll, als wenn in dem hinzukommenden Theile seiner Länge der Strom neu einsetzte, und die Induction nach dem Gesetze der durch Aenderungen der Intensität inducirten Ströme geschähe.

Ich habe in der vorliegenden Entwicklung keine einschränkende Hypothese über die Art, wie Verlängerung der Stromelemente wirkt, gemacht. Deshalb ist die Constante k mit unbestimmtem Werthe stehen geblieben, und es geht daher aus dieser Untersuchung hervor, dass das Ampère'sche Gesetz der ponderomotorischen Kräfte in der That mit dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft, wie mit der Stabilität des elektrischen Gleichgewichts vereinbar wäre. Aber freilich



322 wird eine solche elektrodynamische Theorie viel complicirter, als die auf das einfache Potentialgesetz gegründete. Die Entscheidung kann also nur durch Versuche, nicht durch theoretische Betrachtungen gewonnen werden.

Der erwähnte Unterschied zwischen der Induction durch Stromsteigerung und der durch Bewegung bei Verlängerung eines Elementes hängt in dem von uns gegebenen Ausdrucke davon ab, dass das mit $1+k$ multiplicirte Glied im ersten Fall die Factoren $\frac{1}{2}Ds \cdot D\sigma \cdot \delta j$, im letzteren aber $\frac{1}{2}j\delta(Ds \cdot D\sigma)$ enthält.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn wir $k = -1$ setzen, nach den hier entwickelten Formeln sich ergibt:

$$(\mathfrak{R} + \mathfrak{r}) Ds \cdot D\sigma \cdot \delta t = -A^2 \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^2} \cdot Ds \cdot \delta [jr \cos \vartheta_1 \cdot D\sigma] \\ + A^2 \cdot j \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{\delta r}{r^2} \cdot Ds \cdot D\sigma,$$

während nach der von Hrn. C. Neumann l. c. auf S. 503, Gleichung (132) gegebenen Formulirung das $D\sigma$ aus der mit δ behafteten Parenthese herausbleiben würde. Die letztere Formulirung nimmt keine Rücksicht auf Induction durch Verlängerung der Leiterelemente. Wenn sie diese nähme, so würde der letzterwähnte Unterschied verschwinden, falls ich den Sinn der Neumann'schen Deduction richtig verstehe.

Endlich ist hier noch zu bemerken, dass in dem mit dem Factor $1-k$ behafteten Gliede bei allen diesen Entwicklungen statt $d^2r/ds \cdot d\sigma$ auch $d^2q(r)/ds \cdot d\sigma$ gesetzt werden könnte, worin q irgend eine eindeutige und continuirliche Function von r bedeutet. Diese ist in meinem Aufsatz im 72. Bande dieses Journals nur deshalb gleich r gesetzt worden, weil es wahrscheinlich erschien, dass die noch unbekannten Theile der Wirkung eines Stromelementes dasselbe Gesetz der Wirkung in die Ferne zeigen würden, wie die bekannten. Dabei wäre aber noch besonders zu untersuchen, ob ein solches q geeignet wäre, den Bedingungen der Stabilität des Gleichgewichts zu genügen.

Was die möglicher Weise experimentell zu beobachtenden Unterschiede zwischen den beiden Inductionsgesetzen betrifft, die aus dem Potentialgesetze einerseits und aus dem Ampère-

schen andererseits folgen, so zeigt unsere Darstellung, dass die in geschlossenen Kreisen inducirten Kräfte überhaupt keinen Unterschied zeigen werden, sondern nur die in geöffneten Kreisen. In letzteren werden verhältnissmässig die stärksten Wirkungen hervorzubringen sein, wenn der inducirende Kreis σ 323 geschlossen ist. Er kann dann viele Windungen haben, oder durch starke Magnete ersetzt werden. In diesem Falle fällt das mit dem Factor $1+k$ behaftete Glied durch die Integration über den Leiter σ aus, und der Unterschied zwischen beiden Gesetzen reducirt sich auf das Glied:

$$j\mathfrak{r} \cdot \delta t = -A^2 \cdot j \cdot \frac{d}{ds} \left[\delta r \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \right].$$

Bezeichnen wir die Längenelemente der Linien, in denen sich die Endpunkte des Leiters s bewegen, für den höchsten und niedersten Werth von s beziehlich mit $d\varrho_1$ und $d\varrho_2$, so können wir setzen:

$$\delta r = \frac{dr}{d\varrho_1} \cdot \delta\varrho_1, \quad \text{beziehlich} \quad \delta r = \frac{dr}{d\varrho_2} \cdot \delta\varrho_2.$$

Dann wird:

$$\delta t \int j\mathfrak{r} \cdot ds = A^2 \cdot j \left[\delta\varrho_2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{dr}{d\varrho_2} - \delta\varrho_1 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{dr}{d\varrho_1} \right],$$

worin für r und $dr/d\sigma$ die den entsprechenden Endpunkten des Leiters zugehörigen Werthe zu nehmen sind.

Die nach dem Potentialgesetze stattfindende elektrodynamische Kraft reducirt sich dagegen bei geschlossenem σ auf:

$$\delta t \int \mathfrak{R} \cdot ds = A^2 \cdot j \cdot \delta \int \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \right] ds.$$

Denken wir uns also einen Stromkreis ϱ zusammengesetzt aus:

- 1) der zweiten Lage von s , positiv durchlaufen,
- 2) der Bahn $d\varrho_1$ des oberen Endpunktes von s , gegen die Richtung der Bewegung durchlaufen,
- 3) der ersten Lage von s , negativ durchlaufen,
- 4) der Bahn $d\varrho_2$ des unteren Endpunktes von s , in Richtung der Bewegung durchlaufen,

so würde die vom Element $j \cdot d\sigma$ inducirte Kraft nach dem Ampère'schen Gesetze sein müssen:

$$\delta t \int (\mathfrak{R} + \mathfrak{r}) ds = A^2 \cdot j \int \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{dr}{d\varrho} d\varrho.$$



Das wäre gleich der elektromotorischen Kraft, die der Strom j beim Entstehen in dem ganzen beschriebenen Umkreise ϱ erzeugen würde.

³²⁴ Diese Formulirung hatte Hr. Neumann sen.¹⁾ vor der Aufstellung des Potentialgesetzes aus dem Ampère'schen Gesetze abgeleitet.

Wenn das Potentialgesetz gilt, fallen dagegen diejenigen Theile des letzten Integrals fort, welche sich nicht auf die beiden Lagen des Leiters s , sondern auf die Bahn seiner Endpunkte beziehen.

Denken wir uns eine drehrunde Metallscheibe, schnell um ihre Axe rotirend, und von magnetischen Kraftlinien durchzogen, die der Axe parallel, und rings um die Axe symmetrisch vertheilt sind, so wird der Rand der Scheibe nach dem Ampère'schen Gesetze elektrisch werden, nach dem Potentialgesetze nicht.

Berlin, im April 1874.

1) Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Abhandl. d. Berliner Akademie d. Wiss. 1845.

XXXVIII.

Kritisches zur Elektrodynamik.

Aus: Poggendorff's Annalen Bd. CLIII. S. 545–556. (1874).

Auf S. 138 ff. dieses Bandes sind von Hrn. Zöllner, und ⁵⁴⁵ S. 262 von Hrn. Herwig elektrodynamische Versuche beschrieben worden, welche nach Ansicht ihrer Urheber geeignet sein sollen, das von Hrn. F. E. Neumann (dem Vater) aufgestellte und von mir in erweiterter Anwendung durchgeführte Grundgesetz der elektrodynamischen Erscheinungen als unvereinbar mit den experimentellen Erfahrungen darzustellen. Dieses Gesetz, welches wir kurzweg als das elektrodyna- ⁵⁴⁶ mische Potentialgesetz, oder so weit es noch nicht durch die Versuche bestätigt ist, als die Potentialhypothese bezeichnen wollen, sagt aus, dass die elektrodynamischen Kräfte ein Potential haben, und dass dessen Werth derselbe sei, mögen die Kräfte nun als ponderomotorische (nach Hrn. C. Neumann's zweckmässiger Bezeichnung) die Leiter selbst bewegen, oder als elektromotorische die Elektricität in den Leitern bewegen.

Hr. Neumann senior hatte schon im Jahre 1848 ¹⁾ zunächst für den Fall, dass die Stromleiter linear sind und unveränderliche starre Form besitzen, nachgewiesen, dass das von ihm aufgestellte Gesetz gerade dieselben ponderomotorischen Kräfte ergebe, wie das von Ampère. Ich habe diesen Be-

1) Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin, Reimer.



weis neuerdings¹⁾ ausgedehnt auf beliebig geformte und nach drei Dimensionen ausgedehnte Leiter, deren einzelne Theile beliebige Arten von Dehnbarkeit, Biegsamkeit, elastischer oder flüssiger Nachgiebigkeit besitzen. Vorausgesetzt, dass wir es nur mit geschlossenen Strömen zu thun haben, ergeben beide, Ampère's Gesetz und das Potentialgesetz, genau dieselben Werthe der resultirenden Kräfte, welche jeden einzelnen Punkt des bewegten Leiters angreifen, wenn auch die Ansichten über die Componenten, aus denen diese Resultanten sich zusammensetzen, weit auseinander gehen.

Die Abweichung beider Theorien voneinander beginnt erst, wenn man es mit ungeschlossenen Strömen zu thun hat, und der Zweck meiner theoretischen Arbeiten war es eben, diejenigen Fälle herauszufinden, wo ein Unterschied beider Gesetze sich bei ausführbaren Versuchen zu erkennen geben würde. Uebrigens haben wir es bei den Versuchen meiner beiden Gegner durchaus nur mit geschlossenen Strömen zu thun, und es müssen also, wenn ich nicht einen Rechenfehler in meinen theoretischen Untersuchungen begangen habe, die Ergebnisse dieser Versuche entweder mit beiden Gesetzen übereinstimmen oder mit beiden in Widerstreit sein. In Wirklichkeit tritt der erste Fall ein; sie stimmen mit beiden überein, wie ich zeigen werde.

Das elektrodynamische Potential p zweier linearen Stromelemente ds und $d\sigma$, welche von den Stromstärken i und j durchflossen werden, deren Richtungen miteinander den Winkel ε bilden, und deren Entfernung gleich r ist, hat nach der Neumann'schen Formulirung bei Festsetzung passender Einheiten der Stromstärke den Werth:

$$p = -i \cdot j \cdot ds \cdot d\sigma \cdot \frac{\cos \varepsilon}{r}.$$

Die mechanische Bedeutung dieses Ausdruckes besteht darin, dass er die Grösse des Arbeitsvorrathes angiebt, den die ponderomotorischen Kräfte der beiden Elemente bei unveränderten Stromstärken i und j zu leisten im Stande sind,

1) Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Borchardt's Journal für Mathematik. Bd. 78, S. 273.

wenn man beide entweder in unendliche Entfernung voneinander oder überhaupt in eine Lage überführt, wo $p = 0$ ist. Letzteres geschieht zum Beispiel auch, wenn man sie rechtwinkelig gegen einander richtet. Die Kräfte, welche die genannten beiden Elemente aufeinander ausüben, ergeben sich aus der Bedingung, dass diese Kräfte, ohne selbst von der Art der Bewegung der Elemente abhängig zu sein, bei jeder virtuellen Verschiebung der Elemente eine Arbeit leisten müssen, deren Betrag gleich $-dp$ ist.

Betrachten wir, wie oben geschehen, die Elemente ds und $d\sigma$ als linear, d. h. ihren Querschnitt als verschwindend klein gegen ihre Länge, sie selbst aber als geradlinig bleibend, wie es bei den unendlich kleinen Längenelementen einer Curve geschehen darf, so können sich in dem Ausdrucke von p ändern die Grössen ds , $d\sigma$, ε und r . Die entsprechenden Kräfte sind dem entsprechend:

1) ein Kräftepaar, welches die Enden von ds angreift, dessen Componenten parallel $d\sigma$ gerichtet sind, und die Intensität haben:

$$\frac{i \cdot j \cdot d\sigma}{r}.$$

Dieses Kräftepaar strebt den Strom i in ds parallel und gleichgerichtet zu stellen dem Strome j in $d\sigma$.

2) ein entsprechendes Kräftepaar, welches $d\sigma$ parallel ds zu stellen sucht, dessen Componenten die Endpunkte von $d\sigma$ angreifen, parallel ds gerichtet sind, und die Intensität haben:

$$\frac{i \cdot j \cdot ds}{r}.$$

Beide Kräftepaare werden die Elemente auch zu dehnen streben, wenn $\cos \varepsilon$ positiv ist.

3) eine Anziehungskraft zwischen beiden Elementen in Richtung der Linie r , deren Grösse ist:

$$i \cdot j \cdot ds \cdot d\sigma \cdot \frac{\cos \varepsilon}{r^2}.$$

Das heisst: wenn die Stromesrichtungen gleichnamiger Electricität mit einander einen spitzen Winkel bilden, ziehen sich



die beiden Ströme an; bilden sie einen stumpfen Winkel, so stossen sie sich ab.

Das Drehungsmoment jener beiden Kräftepaare hat den Werth:

$$i \cdot j \cdot ds \cdot d\sigma \frac{\sin}{r}.$$

Aus der Vergleichung dieses Werthes mit dem für die Anziehungskraft geht hervor, dass wie bei den Einwirkungen, welche eine kleine Magnethadel von entfernten Magneten erleidet, in grösseren Entfernungen die drehenden Kräfte einen überwiegenden Einfluss den anziehenden gegenüber haben werden.

Will man ermitteln, ob die elektrodynamischen Kräfte eine gewisse Lagenänderung eines der Leiter oder seiner Theile unterstützen können, so hat man nur nachzusehen, ob durch die betreffende Lagenänderung der Werth des Potentials der beiden Stromleitungen aufeinander kleiner werde. Ist das der Fall, so unterstützen die elektrodynamischen Kräfte die Bewegung, oder streben sie hervorzubringen, wenn sie noch nicht besteht. Natürlich muss aber eine solche Untersuchung sich auf alle bewegten Theile des Leiters erstrecken, und man muss nicht willkürlich einige berücksichtigen und andere ausser Betracht lassen.

Bei der gewöhnlichen Art die Rotation eines Leiters um einen vertical aufgestellten Magneten zu zeigen, lässt man einen starren Bügel um eine mit der Axe des Magneten zusammenfallende verticale Axe rotiren. Die Theile des Leiters können dabei keine andere Bewegung machen, als die Rotationsbewegung; folglich ist bei der Anwendung des Potentialgesetzes auf diesen besonderen Fall auch auf keine andere mögliche Bewegung des starren Leiters Rücksicht zu nehmen. Hr. Riecke¹⁾ hatte richtig hervorgehoben, dass in diesem Falle das elektrodynamische Potential auf die verschiedenen Theile des rotirenden Bügels keine Aenderung erleidet, und da dennoch Rotation desselben eintritt glaubt daraus einen Einwand gegen das Potentialgesetz hernehmen zu können. Ich selbst hatte dagegen darauf aufmerksam gemacht, dass

1) Göttinger Nachrichten 14. August 1872.

rotirende Kräfte auf die stromleitenden Flüssigkeitsfäden des Quecksilbers oder der Elektrolyten einwirken, durch welche man dem peripherischen Ende des Bügels den Strom zuleiten muss. Dadurch werden die dem Leiter adhären den Theile dieser Flüssigkeitsfäden im Sinne der wirklich stattfindenden Rotation fortbewegt, und nehmen den festen Leiter mit.

Dies hindert nun natürlich nicht, dass wenn man irgend welche Theile des Bügels beweglich macht, diese ihrerseits durch die elektrodynamischen Kräfte, denen sie ausgesetzt sind, entsprechend gerichtet werden. Dies hat zum Beispiel Hr. Zöllner betreffs der seitlichen verticalen Theile des Bügels gethan, indem er sie aus Ketten oder dünnen frei herabhängenden Kupferdrähten bestehen liess. Da nun bekanntlich ein Magnet einen seiner Längsaxe parallel neben ihm herlaufenden Stromleiter nach dem Ampère'schen, wie nach dem Potentialgesetze quer gegen seine Längsaxe, das heisst parallel den dem Drahte zugewendeten Seiten seiner Kreisströme, zu stellen sucht, so geschieht dies auch in diesem Falle so, wie es der genannte Autor beobachtet hat. Da es die gleiche drehende Kraft ist, welche auf den beweglichen Draht und auf die stromleitenden Flüssigkeitsfäden wirkt, in die sich sein unteres Ende verlängert, so werden beide auch in gleichem Sinne gedreht, nur dass die Drehung des Drahtes ihre Grenzen findet an seiner Festigkeit und Schwere, die Drehung in der Flüssigkeit aber ohne Grenze vorwärts gehen kann. Darum geht das obere Ende des beweglichen Drahtes bei der Rotation voraus, oder neigt sich wenigstens im Sinne derselben vorwärts, wenn die Flüssigkeit zu zäh ist, um die Rotation zu gestatten.

Diese so einfache und bei folgerichtiger Anwendung des Principis sich nothwendig ergebende Erklärung der Zöllner'schen Versuche hat auch Hr. C. Neumann (Sohn) übersehen, indem er (Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. 8. Aug. 1874, S. 145) die Erwartung ausspricht, dass diesen Versuchen gegenüber die Potentialtheorie nicht mehr zu halten sein würde.

Ich wende mich nun zu den von Hrn. Herwig beschriebenen Versuchen. Derselbe hat das Quecksilber beseitigt und dafür sehr biegsame Drähte angewendet. Der feste Bügel



ist aufgehängt an einem oberen verticalen Draht, der bei der Drehung torquirt wird, und dessen elektromagnetische Wirkung nicht in Betracht kommt, wie besonders zu diesem Zwecke angestellte Versuche gezeigt haben. Letzteres stimmt übrigens mit den Folgerungen aus der Theorie überein, wenn man die Dicke des Drahtes als verschwindend klein betrachtet. Der zweite Draht (*def* in der Figur S. 265 dieses Bandes), der den Strom zum unteren Ende des Bügels leitet, beschreibt einen horizontalen Halbkreis, dessen Mittelpunkt in der gemeinsamen Axe des Elektromagneten und der Rotation liegt. Dieser Draht muss von den Kreisströmen des Elektromagneten angezogen und abgestossen werden, je nachdem in beiden die Ströme gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Im ersteren Falle wird er gegen *d* drücken, im zweiten Falle daran ziehen, und da der Bügel so aufgehängt ist, dass er nur im Sinne der Rotation merkliche Verschiebungen machen kann, wird er Drehbewegungen beginnen und so weit fortsetzen, bis die Elasticität der gebogenen Drähte *def* und *dgf* den elektromagnetischen Kräften das Gleichgewicht hält. Drehung in dem genannten Sinne ist es, die wirklich eintritt.

Alles dies ist in Uebereinstimmung mit dem Potentialgesetze. Auch dass Hr. Herwig bei Verschiebungen des Magneten durch Berechnung nach Ampère's Formel annähernd richtige Verhältnisse für die Grösse der Drehkräfte erhielt, ist kein Widerspruch gegen das Potentialgesetz, da die resultirenden Kräfte nach beiden Gesetzen immer die gleichen sein müssen. Ebenso hat der genannte Experimentator aus dem Potentialgesetze richtig geschlossen, dass die Drehkraft gleich gross sein müsse, wenn er den Draht *def* durch Heben und Senken des Magneten in symmetrische Lage zu beiden Polen brachte. Der Versuch bestätigte dies. Ich erlaube mir dabei zu bemerken, dass dies eines der Beispiele ist, welche zeigen, wie übersichtlich die Erscheinungen durch das Potentialgesetz werden. Um diese Folgerung bei der sehr asymmetrischen Beschaffenheit des Bügels direct aus dem Ampère'schen Gesetze zu ziehen, wären wohl ziemlich weitläufige Rechnungen nöthig gewesen. Sich ableiten lassen muss sie schliesslich aus dem letzteren auch.

Was nun die Punkte betrifft, an denen Hr. Herwig Anstoss nimmt, so hat er erstens einen Versuch beschrieben, bei dessen Deutung ein ähnliches Uebersehen vorkommt, wie das oben besprochene. Er hat nämlich, um die nach Ampère direct auf den Bügel wirkenden Kräfte zu beseitigen, eine zweite Ableitung am unteren Ende des Bügels durch einen feinen in radialer Richtung geführten Draht (*ch* der Figur auf S. 265) angebracht. Geht nun der Strom durch *def* und *ch*,⁵⁰² so bleibt die Wirkung des Magneten auf *def* unverändert, die auf den Bügel *ca*, falls eine solche vorhanden ist, fällt weg. Der Versuch ergab ihm nun in der That, dass die Rotationskraft auf einen kleinen Bruchtheil ihrer früheren Grösse vermindert wurde, und Hr. Herwig schliesst daraus, dass die Wirkung auf den Draht *def* unerheblich sei, die hauptsächlichste Drehkraft dagegen auf den Bügel *abc* ausgeübt werde.

Unser Autor hat dabei übersehen, dass er durch Einführung des beweglichen Drahtes *ch* eine Gegenkraft einführt, die vorher nicht bestand. Das Potential des Drahtes *ch* ist Null, so lange er streng radiale Richtung hat. Es wird dagegen von Null verschieden, sowie der Punkt *c* der Drehung des Bügels folgt, während das entferntere Ende des Drahtes festgehalten wird; und zwar ist der Sinn dieser Wendung des Drahtes *ch* der Richtung entgegengesetzt, in welche die elektromagnetischen Kräfte ihn zu drehen streben. Hr. Herwig scheint die Wirkung dieses Drahtes für unbedeutend gehalten zu haben, da er sich auf kürzestem Wege vom Elektromagneten entfernt, und sehr dünn war. Eine leicht auszuführende Rechnung ergibt dagegen, dass, wenn die Länge des Magneten sehr beträchtlich wäre im Vergleich mit der Länge dieser Drähte von *f* bis *h*, die elektromagnetischen Kräfte, die auf *def* und *ch* nach dem Potentialgesetze ausgeübt werden, sich gegenseitig vollständig im Gleichgewicht halten würden.

Rings um die Mitte eines sehr langen gleichmässig magnetisirten cylindrischen Magneten ist nämlich das elektromagnetische Potential eines Stromelements *i.ds* von der Form:

$$M.i \cdot \frac{ds \cdot \cos \eta}{q},$$



wo M eine von der Stärke der Magnetisirung abhängige Constante bedeutet, η den Winkel, den die Richtung von i in ds mit der Tangente eines durch ds gehenden Kreises vom Radius ρ bildet, dessen Mittelpunkt in der Axe des Magneten liegt und dessen Ebene senkrecht zu dieser Axe ist. Denken wir uns durch die Axe des Magneten als Pollinie eine feste Meridianebene gelegt, und nennen ω den Winkel, welchen die Linie ρ mit dieser festen Meridianebene bildet, so ist $\rho \cdot d\omega = ds \cdot \cos \eta$. Somit wird der obige Ausdruck gleich:

$$Mi \cdot d\omega$$

und der ganze Werth des Potentials des Drahtes:

$$Mi(\omega_1 - \omega_0),$$

wo ω_1 und ω_0 die Werthe des Winkels ω für Anfang und Ende der übrigens ganz beliebig zu führenden Drahtcurve bezeichnen. Sind also diese Endpunkte fest, wie in Hrn. Herwig's Versuch die Punkte f und h , so kann keinerlei Lagenänderung der dazwischen befindlichen Drahtleitung das Potential verändern, und also keine elektrodynamische Wirkung auf den Draht vorhanden sein. Dass Hr. Herwig doch noch einen kleinen Rest einer solchen gesehen hat, wird darauf zurückzuführen sein, dass die Länge seines Magneten verglichen mit den Längen der Drähte endlich war, und dadurch die nahen Theile des Drahtes in ein etwas günstigeres Verhältniss zum Magneten kamen als die entfernten.

Ausserdem aber spricht Hr. Herwig die Meinung aus, dass so dünne Drähte, wie er sie zur Ueberleitung des Stromes auf den Bügel angewendet hat, keine für die Bewegung des schwer belasteten Bügels in Betracht kommende Wirkung auf diesen zu übertragen im Stande seien. Eines ist ohne weitere Ueberlegung einzusehen, dass wenn der Draht def vom Magneten abgestossen wurde, er, weil er sehr dünn und vollkommen biegsam war, durch die Abstoßung gespannt werden und dann den drehbaren Bügel nach sich ziehen musste, wie er auch wirklich that.

Zweifelhafter könnte die Sache aussehen, wenn der Draht angezogen wurde, wo er sich ohne erheblichen Widerstand in irgend eine Curve zusammenbiegen konnte. Wir dürfen aber

wohl annehmen, dass er immer noch steif genug war, um durch die Anziehung des Magneten nicht bis zur Berührung an diesen herangezogen zu werden. Wäre letzteres eingetreten, würde es Hr. Herwig wohl erwähnt haben. Ueber einen solchen Fall nun giebt das Princip von den virtuellen Geschwindigkeiten ganz bestimmte Auskunft. Dieses sagt bekanntlich aus, dass, wenn ein System von Massenpunkten unter der gleichzeitigen Einwirkung von inneren und äusseren Kräften im Gleichgewicht ist, die äusseren Kräfte sich für sich im Gleichgewicht halten müssen, wenn man sich das System in seiner Gleichgewichtstellung erstarrt denkt. Das System ist hier der Draht, die inneren Kräfte sind diejenigen seiner Elasticität, die äusseren sind die elektrodynamischen Kräfte und diejenigen, welche an den Befestigungspunkten auf seine beiden Enden ausgeübt werden. Da möglichst grosse Beweglichkeit des Drahtes dem Zwecke des Versuches am besten entspricht, nehme ich an, der Draht sei um seine beiden Endpunkte vollkommen frei drehbar gewesen. Alsdann wird jedes der Enden längs der Horizontalebene nur von einer Kraft, nicht von einem Kräftepaar afficirt werden können. Da die Resultante der elektrodynamischen Kräfte in diesem Falle eine solche ist, die die Mitte des Bogens def zur Axe hintreibt, so wird an jedem Ende des Bogens eine halb so grosse Kraftcomponente in paralleler, aber entgegengesetzter Richtung angreifen müssen. Ist der Bogen ein Halbkreis, wie in den vorliegenden Versuchen, so ist diese Richtung die der Tangente an den Enden des Halbkreises, und es folgt daraus, dass der Draht seinerseits auf den drehbaren Bügel eine Kraft in Richtung der Rotation ausübt, welche dem halben Betrage sämtlicher auf den Bogen def in Richtung dieser Tangente ausgeübten Kraftcomponenten gleich ist; und zwar ist der Bogen dabei in derjenigen Lage zu nehmen, die er unter der Anziehung des Magneten angenommen hat.

Da Ampère's Gesetz und das Potentialgesetz für alle ponderomotorischen Wirkungen geschlossener Ströme gleiche Konsequenzen ergeben, so könnte es gleichgültig erscheinen, welches von beiden man acceptiren will, wenigstens so lange



über die Frage, welches von ihnen bei ungeschlossenen Strömen gelte, noch nicht durch Versuche entschieden ist. Ich hoffe übrigens bald im Stande zu sein, Versuche dieser Art zu vollenden. Inzwischen spricht für das Potentialgesetz nur die grössere Einfachheit und das grössere Gebiet seiner Geltung. Das Potentialgesetz braucht einen und denselben, verhältnissmässig einfachen mathematischen Ausdruck, um das ganze bisher experimentell gekannte Gebiet der Elektrodynamik, ponderomotorische und elektromotorische Wirkungen, zu umfassen, und im Gebiete der ponderomotorischen Wirkungen bringt es dieselbe grosse Vereinfachung und Uebersichtlichkeit hervor, welche die Einführung des Potentialbegriffs in die Lehre von der Elektrostatik und vom Magnetismus gebracht hat. Ich selbst kann dafür Zeugnis ablegen, da ich seit nunmehr dreissig Jahren nie ein anderes Grundprincip als das Potentialgesetz angewendet und nie eines andern bedurft habe, um mich in ziemlich labyrinthischen Aufgaben der Elektrodynamik und zuweilen doch auch auf vorher unbetretenem Boden zurecht zu finden.

Und selbst, wenn man das wohlbekannte Gebiet der Wirkungen geschlossener Ströme verlässt, und die Konsequenzen des Gesetzes auf die Wirkungen der ungeschlossenen Ströme ausdehnt, trifft man auf Ergebnisse, die den bekannten That-sachen sich anschliessen und keinen allgemeinen Naturgesetzen widersprechen. Namentlich lassen sich ohne Hülfsypothesen verhältnissmässig einfache Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektrizität in Leitern ableiten, von denen das zuletzt Gesagte gilt.

Dagegen braucht Hr. C. Neumann ein besonderes, nämlich Ampère's Gesetz für die ponderomotorischen Wirkungen, ein zweites für die Induction durch Bewegung, ein drittes davon verschiedenes für die Induction durch Aenderung der Stromstärke; und versucht man Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektrizität aus diesen Gesetzen zu ziehen, so ergeben sie, wie Hr. W. Weber's Hypothese, labiles Gleichgewicht der Elektrizität in Leitern, das heisst, sie treten in Widerspruch mit der allerbekanntesten That-sache, dass die Elektrizität in Leitern ruhen kann, wenn keine bewegenden

Kräfte auf sie wirken. Günstigsten Falls (das giebt auch Hr. C. Neumann in seiner letzten, oben citirten Veröffentlichung der Hauptsache nach zu) wird durch Einführung von Molecularkräften (welche die Gleichungen viel verwickelter machen würden) die Stabilität des Gleichgewichts sich retten lassen für Leiter von mässigen Dimensionen, nicht für beliebig grosse. Das sind die Gründe, warum mir das Potentialgesetz eine überwiegend grosse Wahrscheinlichkeit für sich zu haben scheint, und ich es nach dem bisherigen Stande unserer Kenntnisse für den sichersten Führer im Gebiete der Elektrodynamik, seine Entdeckung aber durch Hr. F. E. Neumann, den Vater, stets für einen der glücklichsten und fruchtbarsten Gedanken gehalten habe, welchen die neuere mathematische Physik aufzuweisen hat.

Zusatz 1881: Von Hr. F. Zöllner ist noch eine weitere Erwiderung in Berichten der Sächs. Ges. der Wiss. Februar 1876 (auch in Poggen-dorff's Annalen Bd. 158, S. 106) gegeben worden, auf die ich nochmals zu antworten nicht nöthig gefunden habe. Wieder werden Experimente ähnlicher Art, wie die oben besprochenen, vorgeführt, deren Erfolg nicht nur in keinem Widerspruche mit der Potentialtheorie steht, sondern aus dieser sogar leicht vorausgesagt werden konnte. Ich habe vorausgesetzt, dass jeder hinreichend unterrichtete Leser, dem es um Einsicht in die Sache zu thun ist, dies von selbst erkennen würde, und sich auch über die damit zusammenhängende literarische Polemik sein Urtheil bilden würde.