



XIV.

Ueber Combinationstöne.

Erste Mittheilung aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 22. Mai 1856. S. 279–285.

Ich erlaube mir der Akademie folgende Resultate meiner
279 Untersuchungen über die Combinationstöne mitzutheilen:

Wenn wir mit m und n ganze Zahlen bezeichnen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so stand schon lange fest, dass zwei Töne von den Schwingungszahlen $m\lambda$ und $(m+1)\lambda$ den Combinationston λ geben. Für zwei Töne dagegen von den Schwingungszahlen $m\lambda$ und $n\lambda$ im Allgemeinen hatten W. Weber und M. Ohm die Meinung aufgestellt, dass der Combinationston ebenfalls die Schwingungszahl λ habe; während Hüllström als ersten Combinationston den Ton $(m-n)\lambda$ aufstellte, zugleich aber auch eine Reihe anderer Combinationstöne höherer Ordnung annahm von den Schwingungszahlen $(2n-m)\lambda$, $(3m-2n)\lambda$, u. s. w. Die Combinationstöne höherer Ordnung sollten durch Combination eines Combinationstones niederer Ordnung mit einem der ursprünglichen Töne sich bilden. Dem schlossen sich Scheibler und Roeder in ihren Untersuchungen über die Zahl der Schwebungen an; aber mit Recht stellte hierbei Poggendorff die Frage, ob diese sogenannten Combinationstöne höherer Ordnung nicht etwa Combinationstöne der höheren Nebentöne sein könnten, welche bei den Tönen fast aller musikalischen Instrumente vorkommen.

Um darüber entscheiden zu können, handelte es sich zunächst darum Töne herzustellen, denen die höheren Nebentöne

ganz fehlen, also Töne, bei denen die Elongationen der schwingenden Theilchen als Function der Zeit t durch ein einziges Glied von der Form $A \sin(at + c)$ ausgedrückt werden, und nicht, wie es gewöhnlich der Fall ist, durch eine Summe solcher Glieder mit verschiedenen Werthen von a . Wir wollen solche Töne nach Analogie der einfachen Farben des Spectrums²⁸⁰ einfache Töne nennen, im Gegensatz zu den zusammengesetzten Tönen der musikalischen Instrumente, welche eigentlich Accorde mit dominirendem Grundton sind.

1) Einfache Töne kann man nach folgender allgemeinen Methode herstellen: Man nehme einen tönenden Körper, dessen Schallschwingungen nicht leicht an die Luft übergehen, und erzeuge durch Resonanz die Schwingungen eines zweiten elastischen Körpers, der seine Schwingungen leicht an die Luft abgibt, dessen Grundton mit dem des primär schwingenden Körpers genau übereinstimmt, dessen höhere Obertöne aber von denen des letzteren hinreichend verschieden sind: so wird der resonirende Körper nur im Grundtone stark mitklingen und diesen an die Luft abgeben, die höheren Obertöne des Schallerregers werden ausgeschlossen bleiben. Practisch ausführbar ist dieses Princip mittels einer Stimmgabel, als Schallerregers, deren Töne man entweder durch die Resonanz eines Luftraums oder einer Saite, auf welche man die Gabel in einer bestimmten Entfernung von ihrem Ende aufsetzt, verstärkt. Der Luftraum darf aber nicht die einfache Gestalt einer ganz offenen oder ganz gedackten Orgelpfeife haben, und das resonirende Stück der Saite muss in einem Punkte seiner Länge eine kleine Belastung haben, damit die höheren Nebentöne dieser Resonatoren nicht harmonisch zum Grundton seien, wie das bei den Orgelpfeifen und unbelasteten Saiten der Fall ist. Die Stimmgabeln geben nämlich, wie ich gefunden habe, ausser den seit Chladni bekannten unharmonischen höheren Beutönen, welche mit Bildung einer grösseren Zahl von Knotenstellen entstehen, auch schwache harmonische Beutöne, welche dadurch ausgeschlossen werden müssen, dass man die höheren Beutöne der resonirenden Körper unharmonisch macht. Die Octave des Grundtons war bei allen Stimmgabeln, welche ich geprüft habe, immer deutlich nachzuweisen.



Indem ich zwei einfache Töne dieser Art erklingen liess, war ich immer nur im Stande einen einzigen tieferen Ton deutlich zu hören, und zwar den von der Schwingungszahl $(m-n)\lambda$, also Hällström's ersten Combinationston.

Ich konnte mittels meiner Stimmgabeln, die mit Hilfe der Schwebungen genau nach den angegebenen Zahlenverhältnissen gestimmt waren, folgende Combinationen bilden:

Primäre Töne	Combinations- ton	Zahlenverhältniss	
		der primären Töne unter einander	des Combina- tionstons
b f''	B	2 : 3	1
f'' b'	B	3 : 4	1
b d'	$B-1$	4 : 5	1
d' f'	$B-1$	5 : 6	1
f' as'	$B-1$	6 : 7	1
b g'	es	3 : 5	2
d' as'	B	5 : 7	2
d' b'	f	5 : 8	3

In den letzten drei Fällen war ich nicht im Stande, den von Weber und Ohm geforderten Ton 1 zu hören, ebenso wenig, als es mir bei allen diesen Versuchen gelang irgend einen von Hällström's Combinationstönen höherer Ordnung zu erkennen. Andererseits ist zu bemerken, dass wenn man die Stimmgabeln durch Aufkleben von Wachs ein wenig verstimmt, man sehr leise die Schwebungen hört, welche Scheibler und Roeber aus dem Vorhandensein der Combinationstöne höherer Ordnung erklärt und berechnet haben.

Ebenso fand ich immer, dass die Combinationstöne $(m-n)\lambda$ auch bei zwei Tönen von Orgelpfeifen oder der Sirene die am stärksten hörbaren waren.

2) Um die Combinationstöne deutlich zu hören, müssen die ursprünglichen Töne stark sein. Die Stärke des Combinationstons wächst in einem viel stärkeren Verhältnisse als die der primären Töne, so dass endlich bei grosser Stärke diese neben dem Combinationstone fast verschwinden können.

Ich habe nun gefunden, dass bei hinreichend starken Tönen von den Schwingungszahlen p und q neben dem bisher bekannten Combinationstone $p-q$ zunächst am deutlichsten ein

höherer Ton $p+q$ hervortritt, dessen Existenz ich noch nirgends erwähnt gefunden habe. Die durch Luftresonanz verstärkten Töne der Stimmgabeln waren nicht stark genug, um diesen Ton leicht hören zu lassen; doch habe ich ihn bei diesen zuerst wirklich gehört, nachdem ich durch theoretische Untersuchungen zu der Ueberzeugung gekommen war, dass er da sein müsse. Ich war im Stande neben b und f' (2λ und 3λ) den Ton d'' (5λ) und neben f' und b' (3λ und 4λ) den Ton as'' (7λ) zu hören. Dagegen ist bei der mehrstimmigen Sirene und bei Orgelpfeifen, wenn man das Ohr den Lippen der Pfeifen nähert, der Ton sehr leicht mit grösster Bestimmtheit zu hören. Eine Verwechslung mit den höheren Beitönen der primären Töne ist nicht möglich, weil er von diesen immer verschieden ist, wenn nicht n selbst ein Multiplum von m ist.

3) Was die Theorie der Combinationstöne betrifft, so leiden die bisher aufgestellten Erklärungen an grossen Schwierigkeiten, sobald man den Ton nicht als eine Reihe getrennter Stösse, sondern als eine regelmässige Wellenbewegung betrachtet; sie müssen ausserdem noch dem Ohre eine besondere Eigenschaft zuschreiben, wonach es zusammentreffende Stösse nicht blos als Summe der beiden einzelnen auffasst, sondern diese Doppelstösse noch besonders combinirt, und endlich würden jene Theorien schwerlich im Stande sein, die Entstehung des Tones $p+q$ genügend zu erklären. Ich erlaube mir daher der Academie eine neue Erklärung vorzulegen, welche nicht nöthig macht dem menschlichen Ohre besondere Eigenschaften beizulegen, sondern sich ganz auf eine weitere Entwicklung bekannter mechanischer Sätze stützt.

Es ist bekannt, dass das Princip von der ungestörten Superposition oscillirender Bewegungen im allgemeinen nur so lange gilt, als die Bewegungen klein sind, so klein, dass die Bewegungskräfte, welche durch die Verschiebungen der kleinsten Theile des schwingenden Mittels gegen einander hervorgerufen werden, diesen Verschiebungen selbst merklich proportional sind. Es lässt sich nun zeigen, dass Combinationstöne entstehen müssen, sobald die Schwingungen so gross werden, dass auch noch das Quadrat der Verschiebungen auf die Bewegungen Einfluss erhält. Es möge



253 für jetzt genügen, als einfachstes Beispiel die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einfluss eines Wellenzuges zu betrachten, um das Resultat daran zu entwickeln. Nach einer ganz ähnlichen Methode lassen sich auch die Bewegungen der Luft und anderer elastischer Medien behandeln. Ein Punkt von der Masse m soll in Richtung der x -Axe oscilliren können. Die Kraft, welche ihn in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, sei:

$$k = ax + bx^2.$$

Es mögen auf ihn zwei Schallwellenzüge einwirken mit der Kraft $f \sin(pt)$ und $g \sin(qt + c)$, so ist seine Bewegungsgleichung:

$$-m \frac{d^2x}{dt^2} = ax + bx^2 + f \sin(pt) + g \sin(qt + c).$$

Diese Gleichung kann man durch eine Reihe integrieren, indem man darin setzt:

$$x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \text{etc.},$$

$$f = \varepsilon f_1,$$

$$g = \varepsilon g_1$$

und die mit gleichen Potenzen von ε multiplicirten Glieder einzeln gleich Null setzt, also:

$$1) \quad ax_1 + m \frac{d^2x_1}{dt^2} = -f_1 \sin(pt) - g_1 \sin(qt + c).$$

$$2) \quad ax_2 + m \frac{d^2x_2}{dt^2} = -bx_1^2.$$

$$3) \quad ax_3 + m \frac{d^2x_3}{dt^2} = -2bx_1x_2 \text{ etc.}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$x_1 = A \sin\left(t \sqrt{\frac{a}{m}} + b\right) + u \sin(pt) + v \sin(qt + c),$$

wobei:

$$u = \frac{f_1}{m p^2 - a} \quad \text{und} \quad v = \frac{g_1}{m q^2 - a}.$$

Es ist dies das bekannte Resultat für unendlich kleine Schwingungen, wonach der mitschwingende Körper nur seinen eigenen Ton $\sqrt{a/m}$ und die ihm mitgetheilten p und q angiebt. Da der Eigenton hierbei schnell verschwindet, können wir $A = 0$ setzen. Dann giebt die Gleichung (2):

$$x_2 = -\frac{b}{2a}(u^2 + v^2) - \frac{u^2}{2(4mp^2 - a)} \cos(2pt),$$

$$-\frac{v^2}{2(4mq^2 - a)} \cos 2(qt + c) + \frac{uv}{m(p-q)^2 - a} \cos[(p-q)t - c],$$

$$-\frac{uv}{m(p+q)^2 - a} \cos[(p+q)t + c].$$

Dieses zweite Glied der Reihe von x enthält, wie man sieht, ausser einer Constanten, die Töne $2p$, $2q$, $(p-q)$ und $(p+q)$. Ist der Eigenton $\sqrt{a/m}$ des mitschwingenden Körpers tiefer als $(p-q)$, wie man es für das mit den Gehörknöchelchen verbundene Trommelfell des Ohres in den meisten Fällen wird voraussetzen dürfen, und sind die Intensitäten u und v nahe gleich, so wird von den einzelnen Gliedern von x_2 der Ton $(p-q)$ die grösste Intensität haben; er entspricht dem bekannten tiefen Combinationstone. Der Ton $(p+q)$ wird viel schwächer sein, und die Töne $2p$ und $2q$ werden als schwache harmonische Obertöne der primären schwer zu hören sein.

Das dritte Glied der Reihe x_3 enthält die Töne $3p$, $3q$, $2p+q$, $2p-q$, $p+2q$, $p-2q$, p und q . Von diesen ist $2p-q$ oder $2q-p$ ein Combinationston zweiter Ordnung nach Hällströms Bezeichnung. Ebenso giebt das vierte Glied x_4 Combinationstöne dritter Ordnung u. s. w.

Wenn wir nun annehmen, dass bei den Schwingungen des Paukenfells und seiner Annexa das Quadrat der Elongationen auf die Schwingungen Einfluss gewinnt, so geben die ausgeführten mechanischen Entwicklungen einen vollständigen Aufschluss über die Entstehung der Combinationstöne. Namentlich erklärt die neue Theorie ebensogut das Entstehen der Töne $(p+q)$, wie der Töne $(p-q)$, und lässt einsehen, warum bei vermehrter Intensität u und v der primären Töne die der Combinationstöne, welche proportional uv ist, in einem schnelleren Verhältnisse steigt.

Aus der Voraussetzung über die Grösse der wirkenden Kraft, welche wir oben gemacht haben:

$$k = ax + bx^2,$$

folgt, dass, bei einem Zeichenwechsel von x , k nicht blos sein Zeichen, sondern auch seinen absoluten Werth ändert. Diese 255 Annahme passt also nur auf einen elastischen Körper, der sich



gegen positive und negative Verschiebungen nicht symmetrisch verhält; nur bei einem solchen kann das Quadrat der Elongationen Einfluss auf die Bewegungen haben, und die Combinationstöne erster Ordnung hervorrufen. Unter den im Ohre des Menschen vorhandenen schwingenden Theilen ist nun besonders das Trommelfell durch seine Asymmetrie ausgezeichnet, indem es durch den Stiel des Hammers stark nach innen gezogen ist, und ich glaube deshalb die Vermuthung aufstellen zu dürfen, dass namentlich diese eigenthümliche Form des Trommelfells das Entstehen der Combinationstöne bedinge.

Es folgt aus den gegebenen Entwicklungen, dass Combinationstöne nicht nur im Ohre, sondern auch ausserhalb des Ohres objectiv entstehen können. Es ist mir bisher erst in einem Falle gelungen die objective Existenz der Combinationstöne nachzuweisen, nämlich an der von Dove beschriebenen mehrstimmigen Sirene, wo sie bekanntlich in ausserordentlicher Stärke auftreten. Ich fand, dass die Töne ($p + q$) dieses Instruments im Stande sind eine Membran, deren Grundton mit ihnen übereinstimmt, in Mitschwingung zu versetzen. Ausserdem beobachtete ich an einer ähnlichen Sirene, welche ich habe construiren lassen, und welche auf derselben Axe zwei Scheiben mit je vier Löcherreihen trägt, und für jede Scheibe einen besonderen Windkasten hat, dass die Combinationstöne nur dann ungewöhnlich stark sind, wenn beide primäre Töne an derselben Scheibe, nicht aber, wenn jeder an einer anderen Scheibe angegeben wird. Die Beziehung des Ohrs zu den beiden Tönen wird dadurch nicht geändert, dass ihre Erregungsstellen entfernter voneinander liegen, wohl aber wird dadurch vermieden, dass die am stärksten schwingenden Centra der beiden Wellenzüge ineinander greifen. Auch daraus ergibt sich die objective Natur dieser Combinationstöne.

XV.

Ueber Combinationstöne.

Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 99.
S. 497—540. (1856.)

Man weiss im allgemeinen, dass wenn in derselben Luft-¹⁹⁷masse von mehreren tönenden Körpern Schallwellenzüge erregt werden, jedes einzelne Wellensystem sich so ausbreitet und so verhält, wie wenn die übrigen gar nicht vorhanden wären. Es findet eine ungestörte Superposition der verschiedenen Wellenzüge in der Luftmasse statt. Andererseits weiss man, dass auch das menschliche Ohr, gleichzeitig von mehreren solchen Schallwellenzügen getroffen, die Fähigkeit hat jeden einzelnen unter ihnen einzeln wahrzunehmen und zu erkennen. Aber das Ohr hört in solchem Falle nicht blos die verschiedenen von den tönenden Körpern erregten Töne, sondern es hört ausser diesen, wenn auch schwach, noch andere Töne, die Combinationstöne, welche nicht primär von einem der tönenden Körper, sondern erst secundär durch das Zusammentreffen zweier primären Töne entstehen. Da man der ungestörten Superposition der Schallwellenzüge in der Luft gewiss zu sein glaubte, hat man die Combinationstöne bisher stets als subjective Erscheinungen aufgefasst, d. h. als solche, die nur in der besonderen Weise, wie der Hörnerv die Schallvibrationen empfindet, gegründet sind. Sobald es sich darum handelt, die fundamentalen Eigenschaften des Hörnerven festzustellen, bilden die Combinationstöne einen Gegenstand von besonderer Wichtigkeit. Da ich ausserdem fand, dass sowohl in Bezug auf die Thatsachen noch Zweifel bestehen konnten, als auch die bisherigen Erklärungsweisen noch nicht eine feste Formu-



498 liring klarer Begriffe über die Thätigkeit des Hörnerven zuzulassen schienen, so glaubte ich es nützlich den genannten Gegenstand einer neuen Untersuchung zu unterwerfen. Dabei fand ich eine neue bisher unbekannte Classe von Combinationstönen, welche in die bisherigen Theorien nicht hineinpasste; ich fand, dass es auch objective Combinationstöne giebt, welche unabhängig vom menschlichen Ohre bestehen, und dass man endlich eine von den bisherigen ganz verschiedene Theorie der Combinationstöne geben kann, bei welcher für ihre Erklärung keine besondere Eigenschaft des Hörnerven vorausgesetzt wird, und welche vollständiger als die bisherigen die Thatsachen umfasst.

1. Bestimmung der tieferen Combinationstöne von zwei einfachen Tönen.

Die ersten Angaben über die Höhe der im Jahre 1745 von Sorge entdeckten, später von Tartini weiter untersuchten Combinationstöne beziehen sich nur auf den Fall, wo das Schwingungsverhältniss der beiden primären Töne durch zwei um eine Einheit verschiedene ganze Zahlen m und $m+1$ ausgedrückt werden kann. In derselben Zeit, wo die primären Töne m und $m+1$ Schwingungen vollführen, macht der Combinationston eine Schwingung (nicht, wie Tartini irrthümlich behauptete, zwei). Nach der Analogie dieses Falles hat Chladni¹⁾ die allgemeinere Regel ausgesprochen, dass überhaupt in allen Fällen, wo das Schwingungsverhältniss der primären Töne durch zwei relative Primzahlen m und n ausgedrückt werden kann, die Höhe des Combinationstones durch die Zahl 1 auszudrücken sei. Dieses Gesetz scheint er aber nur aus seiner theoretischen Ansicht über die Entstehungsweise der Combinationstöne gefolgert zu haben. W. Weber²⁾ modificirte dies Gesetz später noch weiter, sodass es auch auf irrationelle Tonverhältnisse passte, und schloss sich dabei der 499 Beobachtung an, dass auch ein nicht ganz rein gestimmtes Intervall ziemlich denselben Combinationston giebt wie ein rein gestimmtes. Er schrieb vor das Schwingungsverhältniss in

1) Akustik, Leipzig 1802, S. 207.

2) Poggendorff's Annalen Bd. XV, S. 216.

einen Kettenbruch zu entwickeln, und daraus die Reihe der Näherungswerthe zu finden. Jedem einzelnen Näherungswerthe könnte dann ein besonderer Combinationston entsprechen.

Dagegen stellte Hällström¹⁾, sich auf eine grosse Reihe eigener Beobachtungen stützend, das Gesetz auf, dass in jedem Falle, wenn m und n die Schwingungszahlen der primären Töne sind, die Schwingungszahl des ersten Combinationstones $m-n$ sei. Diese Regel fällt mit der älteren nur dann zusammen, wenn m und n ganze Multipla von $(m-n)$ sind, wenn also das Schwingungsverhältniss der beiden primären Töne durch zwei um eine Einheit verschiedene ganze Zahlen ausgedrückt werden kann. Wäre aber zum Beispiel das Schwingungsverhältniss 5:3, so würde nach Chladni der Combinationston 1, nach Hällström dagegen der Ton 2 entstehen.

Schon Thomas Young²⁾ hatte bemerkt, dass zuweilen zwei Combinationstöne zu hören sind, z. B. bei der grossen Terz die Quarte unter dem Grundtone neben der zweiten tieferen Octave. Hällström erklärt das Entstehen solcher anderen Combinationstöne dadurch, dass der erste Combinationston mit einem der primären Töne einen Combinationston zweiter Ordnung bilden könne, dieser wieder einen dritter Ordnung u. s. w. Sind also m und n die Schwingungszahlen, so giebt:

m	mit	n	den Combinationston	$m-n$
n	„	$m-n$	„	$2n-m$
m	„	$2n-m$	„	$2m-2n$

Mit den Beobachtungen, welche Hällström über Violintöne angestellt hat, stimmt seine Berechnungsweise der Combinationstöne vollständig überein, während die Berechnung durch Kettenbrüche nach W. Weber nur in einer kleinen Zahl von Fällen einigermaßen passende Ergebnisse liefert. Nur ist es auffallend, dass Hällström verhältnissmässig oft den ersten Combinationston nicht hören konnte, während andere deutlich waren, und dass er bei denselben Intervallen der primären

1) Poggendorff's Ann. Bd. XXIV, S. 488.

2) Philos. Transact. 1800. T. I, p. 106–150.



Töne, wenn sie in wenig von einander verschiedener Höhe angegeben wurden, oft verschiedene Combinationstöne hörte.

Hällström's Gesetze über die Höhe der Combinationstöne wurden von Scheibler¹⁾ und Roerber benutzt, um die Zahl der Schwebungen zu berechnen, welche beim Zusammenklingen zweier oder mehrerer Stimmgabeln von genau bekannten Schwingungszahlen entstehen, und hierbei wurde eine ausserordentliche genaue Uebereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung gefunden.

Gegen die Ansicht, dass ein Combinationston erster Ordnung mit denselben zwei primären Tönen, durch deren Combination er entstanden ist, neue Combinationstöne zweiter und dritter Ordnung bilden könne, erhob Poggendorff²⁾ theoretische Bedenken; Roerber³⁾ selbst, der die Theorie der Versuche von Scheibler ausgearbeitet hatte, will die Herleitung der Stösse aus den Combinationstönen höherer Ordnung keineswegs für den Ausdruck des eigentlichen physikalischen Vorganges ausgeben. Wenn also auch die wahrgenommenen Combinationstöne sich in Bezug auf ihre Höhe unter Hällström's Gesetz bringen liessen, so schienen doch ihre Ordnung und die Bedingungen ihrer Entstehung noch zweifelhaft zu bleiben. Zu bemerken ist übrigens, dass auch der nach der älteren Theorie vorhandene Ton, dessen Schwingungszahl dem grössten gemeinschaftlichen Theiler derjenigen der primären Töne entspricht, in der Reihe der Töne von Hällström vorkommt.

501 Die Verschiedenheiten in den Resultaten von Hällström mochten zum Theil durch verschiedene Reinheit in der Stimmung der Intervalle, zum Theil durch das Vorhandensein starker höherer Nebentöne bedingt sein; namentlich sind wohl Violintöne, an denen er die Beobachtungen anstellte, und in denen der Grundton sehr stark von seiner höheren Octave, und recht hörbar von deren Quinte begleitet wird, wenig geeignet zu diesen Versuchen. Da alle Combinationstöne höherer Ordnung nach ihm unter den Ausdruck $am - bn$ fallen, wo a

1) Poggendorff's Annalen Bd. XXXII, S. 493 bis 503.

2) Ebendaselbst S. 522.

3) Dove und Moser, Repertorium Bd. III, S. 38.

und b zwei beliebige ganze Zahlen, m und n die Schwingungszahlen der primären Töne bezeichnen, so können sie auch alle durch Combination von zwei Obertönen der primären Töne entstanden sein.¹⁾ Der erste Combinationston des a ten Obertones von m und des b ten von n , würde die Schwingungszahl $am - bn$ haben müssen.

Um sich vom Einflusse der Obertöne frei zu machen, und wo möglich regelmässige Resultate zu erhalten, schien es mir daher nothwendig zu sein, wie auch G. S. Ohm schon vorgeschlagen hatte, die Combination solcher Töne zu beobachten, welche keine Obertöne haben. Es entstand also zunächst die Aufgabe, dergleichen Töne herzustellen, welche wir im Gegensatz zu den zusammengesetzten, von Obertönen begleiteten Tönen der gewöhnlichen musikalischen Instrumente einfache Töne nennen wollen.

Wir wollen im Laufe dieses Aufsatzes eine solche vibratinge Bewegung eines elastischen Körpers, bei welcher die Entfernung eines jeden schwingenden Theilchens von der Gleichgewichtslage als Function der Zeit ausgedrückt wird, durch ein einziges Glied von der Form:

$$A \sin(2\pi mt + c),$$

eine einfache Schwingungsbewegung nennen, und wenn die Schwingungen sich durch ein elastisches Mittel fortpflanzen, eine einfache Wellenbewegung. So sind zum Beispiel die Aetherschwingungen, welche dem homogenen Lichte einer einfachen Farbe angehören, solche einfache Wellenbewegungen. 502 Eine jede andere schwingende Bewegung dagegen, bei welcher die Elongationen der schwingenden Theilchen andere periodische Functionen der Zeit sind, und daher nicht durch ein einziges Glied von der Form $A \sin(2\pi mt + c)$, sondern nur durch eine Summe solcher Glieder dargestellt werden können, nennen wir zusammengesetzte Schwingungs- oder Wellenbewegungen. Da nun die Erfahrung lehrt, dass überall, wo die mathematisch-mechanische Untersuchung zusammengesetzte Wellenbewegungen nachweist, ein geübtes Ohr Töne unter-

1) S. Ohm in Pogg. Ann. Bd. XLVII, S. 463.



scheiden kann, welche den darin enthaltenen einfachen Wellenbewegungen entsprechen, so verwandelt sich unsere Aufgabe in diejenige, einfache Wellenbewegungen in der Luft hervorzubringen.

Da alle tönenden elastischen Körper mehrfache Schwingungsformen annehmen können, wobei sie Töne verschiedener Höhe hervorbringen, und es im allgemeinen nicht möglich ist dem tönenden Körper einen solchen Anstoss zur Bewegung beizubringen, dass er sich nur in einer einzigen dieser Formen bewegt, so musste zur Lösung der gestellten Aufgabe ein mehr mittelbarer Weg eingeschlagen werden, wobei ich folgendem Princip folgte. Nehmen wir an, wir hätten zwei elastische Körper, welche in Schwingung versetzt, gleichen Grundton haben; der eine, der Tonerreger, möge, wenn er in Schwingung versetzt ist, seine Schwingungen möglichst wenig an die Luft abgeben, der andere, der Resonator, welcher von dem ersteren in Mitschwingung versetzt wird, sei dagegen so eingerichtet, dass er seine Schwingungen leicht und stark der Luft mittheile. Während der Grundton beider Körper genau gleich ist, seien sämtliche höhere Nebentöne des einen von denen des anderen verschieden. Bringt man nun den Tonerreger in Schwingung, so tönt der Resonator mit, aber nur in denjenigen Tönen, welche beiden gemeinsam sind. Ist also nur der Grundton gemeinsam, so wird der Resonator nur von diesem erregt werden, und nur die Schwingungen des Grundtones der Luft mittheilen.

503 Stimmgabeln, die man in der Hand hält, haben ganz die Eigenschaften, welche wir von unserem Tonerreger verlangen. Als Resonator habe ich theils die Saite eines Monochordes, theils Lufträume gebraucht. Durch die letzteren erhielt ich einen stärkeren Ton, und habe sie deshalb namentlich für die Versuche über Combinationstöne gebraucht. Dagegen erwies sich eine eigenthümliche Verbindung der Stimmgabeln mit dem Monochord, als ein besonders brauchbares Mittel, um die Lage der höheren Nebentöne der Stimmgabeln zu bestimmen. Da die Untersuchung der letzteren den übrigen Versuchen vorausgehen musste, beginne ich mit ihr.

Den Stimmgabeln, welche ich zu diesen Versuchen ge-

brauchte, gab ich am Ende ihres Stieles eine sattelförmige Fläche, die nach einer Richtung concav, nach der anderen convex war. Wenn man eine Gabel mit dieser Fläche auf eine gespannte Saite setzt, so berührt sie die Saite in einem Punkte, und kann nicht leicht seitlich abgleiten, während man sie längs der Saite hin und herschiebt. Uebrigens wurde noch der Stiel jeder Stimmgabel in ein Holzklötzchen befestigt, aus welchem unten nur die Spitze des Stieles mit der sattelförmigen Fläche hervorsah, und welches dazu diente, die Gabel zu fassen, ohne sie durch Berührung mit den Fingern zu erwärmen.

Wenn man eine solche Gabel anschlägt, und auf die Saite eines Monochordes setzt, so hört man im allgemeinen den Ton der Gabel kaum vernehmbar ertönen, wenn nicht eine der Abtheilungen der Saite zwischen dem Berührungspunkte der Gabel und einem der Befestigungspunkte genau einen der Gabeltöne zum Grundton oder Oberton hat. Verschiebt man also die Gabel längs der Saite, bis man sich der Stelle nähert, wo die Saite abzugrenzen wäre, um den Grundton der Gabel zu geben, so hört man mit einmal diesen Grundton laut anschwellen, und sowie man die Stelle überschreitet, den Ton ebenso schnell wieder verschwinden. Die Breite der Stelle, welche das Maximum der Resonanz giebt, ist sehr klein, noch nicht $\frac{1}{2}$ mm breit, so- 504 dass man die entsprechenden Saitenlängen mit grosser Genauigkeit bestimmen kann, namentlich wenn man die Stimmgabel nicht am Ende der einfachen Saitenlänge ihres Grundtones, sondern am Ende der vierfachen oder sechsfachen Saitenlänge desselben aufsetzt. Man bekommt nämlich dieselbe starke Resonanz des Grundtones, wenn die durch die Stimmgabel abgegrenzte Saitenlänge ein Multiplum von der des Grundtones ist. Bequem ist es bei solchen Versuchen zwischen dem einen Endpunkte der Saite und der Stimmgabel eine Dämpfung anzubringen, indem man ein zusammengelegtes Tuch zwischen die Saite und den Resonanzboden einschiebt; dann kann nur die andere Abtheilung der Saite tönende Schwingungen geben.

Hat man dann die Saite zur Resonanz gebracht, und legt auf ihre tönende Abtheilung den Finger, so verschwindet der Ton augenblicklich, bis auf einen sehr kleinen Rest, der durch Längsschwingungen der Saite zu entstehen scheint, und der



hörbar bleibt, an welcher Stelle der Saite man die Gabel auch aufsetzen möge, übrigens desto schwächer ist, je glatter die sich berührenden Oberflächen der Saite und Gabel sind.

Zwischen den Punkten der Saite, wo der Grundton der Stimmgabel hörbar wird, findet man leicht andere heraus, wo die höheren Nebentöne der Gabel resoniren. Da diese kräftig ertönen, während der Grundton kaum vernommen wird, ist es leicht, auch verhältnissmässig schwache Obertöne wahrzunehmen. Ausser den schon von Chladni untersuchten sehr hohen Nebentönen der Stimmgabeln, welche durch Bildung von mehrfachen Knotenstellen an der Gabel entstehen, habe ich aber auch an allen von mir untersuchten Gabeln immer die schon von Røeber¹⁾ gehörte genaue Octave des Grundtones, wenn auch schwach gefunden.

So fand ich bei einer Gabel, welche den Ton *b* gab, folgende Saitenlängen, bei welchen die Saite am stärksten in Mitschwingung versetzt wurde:

505

1. Gabel *b*.

Ton <i>b</i>	Ton <i>b</i> ₁	Ton <i>g</i> ₄
251	125,5	38
500	376,5	76
Mittel 250,66	125,5	114
		151,5
		127
		302
		377
		37,81.

Bei vier anderen Gabeln, welche mit Hilfe der Schwebungen als genaue grosse Terz, Quinte, Octave und grosse Septime zu der eben genannten Gabel *b* gestimmt waren, fand ich folgende Saitenlängen:

2. Gabel *d*₁.

Ton *d*₁: 200
Ton *d*₂: 100
Ton *a*is₂: 31,9

3. Gabel *f*₁.

Ton *f*₁: 166,3
Ton *f*₂: 83,5
Ton *c*is₁: 26,7

1) Repertorium der Physik Bd. III, S. 55.

4. Gabel *b*₁.

Ton *b*₁: 125,3
Ton *b*₂: 62,7
Ton *f*₄: 21,04

5. Gabel *a*₁.

Ton *a*₁: 133
Ton *a*₂: 66,5
Ton *e*s₁: 23.

Der dritte bei jeder Gabel angegebene Ton entspricht dem ersten höheren Nebenton in Chladni's Beobachtungen, bei welchem die Gabel vier Schwingungsknoten zeigt. Sein Verhältniss zum Grundton der Gabel, dem zwei Schwingungsknoten zukommen, ist nach Chladni $6\frac{1}{4}$; in den eben angeführten Beobachtungen schwankt es zwischen $5\frac{1}{2}$ und $6\frac{3}{4}$. Wegen der hohen Lage und unharmonischen Beschaffenheit dieses Tones ist sein Einfluss bei den Versuchen über Combinationstöne meistentheils nicht zu fürchten.

Viel wichtiger ist der zweite Ton, welcher stets genau der Octave des Grundtones entspricht. Er befindet sich nicht unter den von Chladni beobachteten Tönen, welche durch Streichen mit dem Violinbogen von ihm auf der Gabel erzeugt wurden, scheint auch mit Henrici's¹⁾ schwachen Nebentönen zweiter Art nicht identisch zu sein, da diese einen bis zwei Töne höher sind als die Octave des Grundtones. Davon, dass die höhere Octave des Grundtones nicht bloss durch die besondere Methode der Beobachtung, etwa als eine Art Klirrtönen an der Berührungsstelle der Gabel mit der Saite erzeugt wird, kann man sich überzeugen, wenn man die Gabeln vor der Mündung einer Resonanzröhre tönen lässt, deren eigener Ton die höhere Octave des Grundtones der Gabel ist. Man hört dann, wenn die Gabel stark angeschlagen ist, diese Octave ganz deutlich.

Uebrigens hat auch A. Seebeck²⁾ ähnliche Beobachtungen gemacht, aus denen hervorgeht, dass harmonische Obertöne auch bei Glocken und Stimmgabeln vorkommen, wo man der Theorie nach nur unharmonische erwarten sollte. Er fand, dass der Ton *d*₁ eines gläsernen Pokales den Ton *d*₂ einer

1) Pogg. Annalen Bd. LVIII, S. 265. Uebrigens scheint bei Henrici leider ein Irrthum in der Bezeichnung der Töne vorgekommen zu sein, da das Verhältniss des ersten zu unserem dritten Tone bei ihm nur 2,7 bis 3, die Hälfte des wahren ist.

2) Repertorium der Physik, Bd. VIII, S. 69.



Saite zum Mitschwingen brachte, und a_1 einer Stimmgabel a_2 einer Saite. Ich glaube, dass der Grund dieser Erscheinung darin zu suchen ist, dass die Schwingungen der betreffenden elastischen Körper bei diesen Versuchen die Grenze überschreiten, innerhalb deren die elastischen Kräfte den Elongationen proportional sind. Dass dadurch harmonische Obertöne entstehen müssen, lässt sich theoretisch durch eine ähnliche mathematische Entwicklung, wie wir sie später für die Theorie der Combinationstöne geben werden, zeigen. Dass übrigens die Schwingungen einer stark angeschlagenen Gabel die bezeichnete Grenze wirklich überschreiten können, geht auch aus der von mehreren Beobachtern gemachten Wahrnehmung hervor, wonach auch die Tonhöhe der Gabel, während sie verklingt, sich merklich ändert. Es wird also auch der Isochronismus der Schwingungen bei starkem Anschlagen merklich gestört, und das kann nur geschehen, wenn bei starken Schwingungen die elastischen Kräfte den Elongationen nicht mehr genau proportional sind.

Wenn wir nun eine Stimmgabel an einer solchen Stelle auf eine Saite aufsetzen, wo diese in dem Grundtone der Gabel mitschwingt, so werden allerdings die höheren unharmonischen Töne der Gabel das Mitschwingen der Saite nicht erregen, und nicht auf deren Resonanzboden und die umgebende Luftmasse übertragen werden, wohl aber die höhere Octave des Grundtones. Um diese auszuschliessen muss man der Saite selbst unharmonische Obertöne geben, was sehr leicht zu bewirken ist, dadurch, dass man in der Mitte des mitschwingenden Saitenstückes eine kleine Belastung anbringt. Wenn L die Saitenlänge ist, welche den Grundton der Stimmgabel giebt, so braucht man nur in der Entfernung von etwa $\frac{1}{2}L$ vom Ende der Saite als Belastung derselben ein Tröpfchen Siegellack auf ihr zu befestigen. Man wird dann finden, dass die Saitenlänge, welche den Grundton der Stimmgabel giebt, jetzt beträchtlich kleiner geworden ist, und dass ausserdem der zweite Erregungspunkt der höheren Octaven des Grundtones, der ursprünglich mit dem ersten Erregungspunkte des Grundtones selbst zusammenfiel, jetzt von diesem getrennt ist. Wenn man also die Gabel nun in dem letzteren Punkte aufsetzt, erregt

man nur den Grundton und nicht mehr gleichzeitig dessen höhere Octave.¹⁾

Um bei der Ausführung der Versuche die Gabeln nicht immer in der Hand halten zu müssen, ohne sie doch mit einem schalleitenden Körper in Berührung zu bringen, ist es am besten, wenn man sie an der Saite aufhängt. Zu dem Ende stelle ich das Monochord so auf, dass die Saiten nach unten gekehrt sind. In der Mitte der Saite wird ein Häkchen fest angekittet, an welches die Gabel, nachdem sie angeschlagen ist, gehängt werden kann. Auf der einen Seite des Häkchens dämpft man die Saite durch ein untergeschobenes Tuch; auf der anderen Seite wird das Siegellacktröpfchen und weiterhin ein beweglicher Steg angebracht, den man so lange verschiebt, bis man das Maximum der Tonstärke erhält.

Man erhält auf diese Weise ziemlich laute und lang anhaltende reine Töne, welche verschwinden, so wie man die Saite zwischen der Gabel und dem Stege mit dem Finger berührt und dadurch ihre Querschwingungen dämpft. Die Klangfarbe dieser einfachen Töne ist im Ganzen der der Stimmgabeltöne ähnlich, nur etwas dumpfer, dem U ähnlich, und wenn man ihre Höhe an einem Claviere zu bestimmen sucht, wird man leicht verleitet, sie eine Octave tiefer zu suchen, als sie wirklich liegen.

Eine zweite Methode, den Grundton der Stimmgabeln mit Ausschluss ihrer Obertöne der Luft mitzutheilen, beruht auf der Wirkung resonirender Röhren. Die Röhren, welche ich angewendete, waren aus Pappe verfertigt, cylindrisch, an beiden

1) Die Theorie der Bewegung beschwerter Saiten siehe bei Duhamel, *Compt. rend.* XI, 15 und 810. (*Pogg. Annalen* LVII. 392 u. 397.) Seebeck im Repertorium der Physik VIII. 33 giebt auch die Gleichung für die Höhe der Töne. Es sei M die Masse der Belastung, m die der Saite, l und l_1 die Länge ihrer beiden Stücke, in welche sie durch die Belastung getheilt wird, L die Länge einer unbelasteten Saite von gleicher Art und Spannung, deren Grundton dem betreffenden Tone der beschwerten Saite gleich ist, so wird L gegeben durch die transcendente Gleichung:

$$\cotang \frac{al_1}{L} + \cotang \frac{al_2}{L} = \frac{aM(l_1 + l_2)}{mL}.$$



Enden durch einen ebenen Boden geschlossen, von denen der eine in der Mitte eine runde Oeffnung besass. Ich gebe hier folgend ihre Maasse in Centimetern an, und die Töne, welche ich erhalten konnte, indem ich durch eine enge Röhre gegen ihre Mündung blies.

Gehörig zur Gabel	Länge	Durchmesser		Töne
		der Röhre	der Oeffnung	
b	17,3	5,3	1,1	b, des_3
d_1	17,1	4,0	1,0	d_1, des_3, h_3
f_1	14,3	4,0	1,1	f_1, e_3
b_1	13,2	4,1	1,8	b_1, fis_3

Da die Mündungen dieser Röhren keine scharfen Ränder hatten, war das Anblasen schwierig, und es gelang mir deshalb nur bei einer von ihnen den dritten Ton zu erhalten. Um die Lage dieses Tones in noch anderen Fällen zu bestimmen, verfertigte ich mir noch eine Röhre von ähnlicher Gestalt, die durch Ausziehen eines hölzernen Stempels verlängert werden konnte, und deren Mündung einen scharfen Rand hatte, sodass das Anblasen leichter war. Sie hatte 3,8 cm, ihre Oeffnung 1 cm Durchmesser und konnte bis auf 28,5 cm verlängert werden. Auch hier konnte ich nur bei den niederen Tönen den zweiten Oberton durch stärkeres Anblasen erreichen.

Länge der Röhre	Töne
26	c_1, gis_2, fis_3
22	d_1, ais_2, gis_3
17	f_1, d_3, cis_4

Das Verhältniss des zweiten zum dritten Tone ist in allen diesen Fällen das einer kleinen oder grossen Septime, und wir dürfen ihn deshalb wohl in den Fällen, wo er nicht durch Anblasen hervorgebracht werden konnte, nach diesem Verhältnisse ergänzen.

Ich stelle jetzt die verschiedenen Töne, welche die zusammengehörigen Röhren und Gabeln geben, unter einander, wobei die nicht direct beobachteten Obertöne eingeklammert sind:

- 1) Gabel: b, b_1, g_3
Röhre: $b, des_3, (h_3)$
- 2) Gabel: d_1, d_2, ais_3
Röhre: d_1, des_3, h_3
- 3) Gabel: f_1, f_2, cis_4
Röhre: $f_1, e_3, (d_4)$
- 4) Gabel: b_1, b_2, f_4
Röhre: $b_1, fis_3, (e_4)$
- 5) Gabel: a_1, a_2, dis_4
Röhre: a_1, fis_3, e_4

Man sieht aus dieser Zusammenstellung, dass die ersten Obertöne der Gabeln, welche die höhere Octave des Grundtones bilden, durch die Resonanz der Röhren nicht verstärkt werden können. Dagegen kommen die zweiten Obertöne der Gabeln und Röhren sich einige Male ziemlich nahe. Indessen ergab der Versuch, dass die Uebereinstimmung doch nicht gross genug war, um eine wesentliche Verstärkung jener Obertöne durch die Resonanz der Röhren zu bedingen, in denen sich wahrscheinlich die durch Anblasen schwer zu erzeugenden Töne überhaupt schwer bilden. Wenn man die Gabeln mit einem harten Körper anschlägt, hört man die höheren Obertöne, welche einer vermehrten Zahl von Knoten entsprechen, deutlich neben dem Grundtone; doch verklingen sie schnell. Bringt man dann die Gabel vor die Mündung ihrer Resonanzröhre, so schwillt ihr Grundton mächtig an, während keine Verstärkung des höheren Tones wahrzunehmen ist.

Insbesondere überzeugte ich mich noch, dass die Röhren nicht im Stande sind die Octave ihres Grundtones durch Resonanz zu verstärken. Wenn ich die Gabel b_1 vor die Oeffnung der Röhre b hielt, war nicht die geringste Verstärkung des Tones zu bemerken. Dagegen verstärkten die Röhren die Töne, welche von ihrem Grundton um einen halben oder ganzen Ton abwichen, noch ziemlich bedeutend. Die Röhre für b_1 war eben so gut für a_1 zu gebrauchen, und selbst as_1 wurde noch beträchtlich dadurch verstärkt.

Da die Resonanz der Röhren einen merklich stärkeren



Ton gab, als die der Saiten, und die Gabeln in ihrer Verbindung mit den Röhren auch leichter zu handhaben waren, habe ich die meisten Versuche über Combinationstöne mit den Röhren angestellt.

Bei den Versuchen muss man darauf achten, dass die schwingenden Stimmgabeln nirgends Klirren erregen. Am besten hält man sie in den Händen. Will man sie fest hinstellen, so müssen sie in einer hölzernen Unterlage durch stark angezogene Schrauben befestigt sein, und diese muss auf Leder oder einer dicken Lage Papier stehen, nicht auf dem blossen Tische. Die klirrenden Töne, welche entstehen, wenn die Gabeln nicht ganz fest in ihrer hölzernen Unterlage sitzen, oder diese lose auf dem Tische steht, werden offenbar durch kleine Stösse der betreffenden Körper gegen einander hervorgebracht, welche den Schwingungen der Gabel meist isochron sind. Daher ist der Klirrton meist gleich hoch, wie der Gabelton (zuweilen tiefer), aber da er nicht durch eine einfache Sinusbewegung hervorgebracht wird, hat er stark hervortretende Obertöne, welche ihm seinen spitzen Klang zu geben scheinen. Eben dieser Obertöne wegen, muss das Klirren vermieden werden.

Mittels der mehrfach angeführten Gabeln und einer sechsten, deren Schwingungszahl zu der des b im Verhältniss von 7 zu 4 stand, die also ein etwas tieferes as_1 gab und die ich durch aufgeklebte Wachsklumpchen bis auf g_1 erniedrigen konnte, waren folgende Combinationen von Tönen herzustellen, die ich hier folgend mit dem dabei gehörten Combinationstone angebe.

Primäre Töne	Combinationston	Schwungsverhältniss	
		der primären Töne zueinander	des Combinationstones
b	f_1	B	2:3
f_1	b_1	B	3:4
b	d_1	$B-1$	4:5
d_1	f_1	$B-1$	5:6
f_1	as_1	$B-1$	6:7
as_1	b_1	$B-1$	7:8
b	g_1	es	3:5
d_1	as_1	B	5:7
d_1	b_1	f	5:8
b	as_1	f	4:7

Ich war in allen diesen Fällen nicht im Stande, durch das Gehör das Vorhandensein anderer Combinationstöne zu erkennen, welche tiefer gewesen wären als die primären Töne, während ich andererseits bei je zwei Tönen von Orgelpfeifen, oder der Sirene oder der Violine sehr wohl im Stande war, Combinationstöne zweiter Ordnung wahrzunehmen. Indessen habe ich bei Orgelpfeifen und bei der Sirene kein Beispiel gefunden, wo nicht der Combinationston erster Ordnung bei Weitem der deutlichste gewesen wäre. Als Beispiele solcher Combinationstöne zweiter Ordnung, die ich hörte, führe ich an:

Neben den Tönen 4 und 5 den Ton 3 = 2.4 - 5
" " " 5 " 7 " " 3 = 2.5 - 7
" " " 5 " 8 " " 2 = 2.5 - 8
" " " 3 " 5 " " 1 = 2.3 - 5.

Die Violine, welche Tartini und Hüllström anwendeten, scheint mir nach meinen eigenen Erfahrungen viel weniger zu, den Untersuchungen über Combinationstöne geeignet zu sein, als die Orgelpfeifen und die Sirene. Ich hatte allerdings nur Gelegenheit die Hilfe dilettirender Violinspieler in Anspruch zu nehmen, und kann daher nicht beurtheilen, ob eine künstlerische Vollendung der Bogenführung andere Resultate geben möchte. Die Combinationstöne waren dabei in einer eigenthümlichen Weise inconstant, hörten sich heulend an, indem sie bald etwas höher, bald etwas tiefer wurden, was namentlich dann sehr entschieden der Fall war, wenn nicht zwei ganze Saiten angestrichen wurden, sondern eine derselben an das Griffbrett gedrückt und verkürzt wurde. Ausserdem pflegten auch schnell hintereinander verschiedene Combinationstöne zu wechseln. Der Grund davon liegt wohl darin, dass durch den Bogen die Saite nicht ganz gleichmässig bewegt wird, sondern fortdauernd die Form ihrer Schwingung wechselt, sodass ihre Obertöne in Bezug auf Stärke und auf die Gleichzeitigkeit oder Ungleichzeitigkeit ihrer Wellenberge und Wellenthäler vielfach variiren, sodass die verschiedenen Combinationstöne des Grundtones und seiner Obertöne sich bald gegenseitig verstärken, bald durch Interferenz aufheben, und deshalb bald der eine bald der andere Combinationston stärker hervortritt. Was das



Heulen des Combinationstones betrifft, so muss man bedenken, dass wenn die primären Töne nahe bei einander liegen, ausserordentlich kleine Schwankungen ihrer Höhe sehr merklich die Höhe des Combinationstones verändern können. Geben doch schon die Terzen, welche nach der gleichschwebenden Temperatur gestimmt sind, Combinationstöne, welche um einen halben Ton verändert sind. Das Verhältniss des c_1 zum c_1 in der reinen Temperatur ist 100:125, in der gleichschwebenden 100:126. Ersteres giebt den Combinationston C von 25 Schwingungen, letzteres einen Ton von 26 Schwingungen. Das Verhältniss dieser beiden Combinationstöne ist also nahe gleich dem eines kleinen halben Tones 24:25. Statt C erhalten wir daher bei der Stimmung nach gleichschwebender Temperatur nahehin C_{18} , und, wenn wir c_1 und g_1 angeben, statt desselben C vielmehr H_{11} . Bei einem Instrumente mit starken, gleichmässig anhaltenden Tönen, z. B. einer Physharmonika, welches nach gleichschwebender Temperatur gestimmt ist, bilden deshalb auch diese Combinationstöne für den, der darauf zu achten gewöhnt ist, eine unangenehme Störung der Harmonie.

614 Wir entnehmen aus den angeführten Thatsachen das Resultat, dass das menschliche Ohr Hällström's Combinationstöne zweiter Ordnung bei einfachen Tönen von der Stärke, wie sie unsere mit Resonanzröhren versehenen Stimmgabeln geben, nicht zu erkennen vermag, wohl aber bei solchen Tönen gleicher Stärke, welche, wie die der Orgelpfeifen, Sirenen, Violinen mit Obertönen verbunden sind. Wir dürfen daraus wohl den Schluss ziehen, dass wenn wir bei Tönen mittlerer Stärke Combinationstöne zweiter oder höherer Ordnung deutlich hören, diese durch die höheren Nebentöne der primären Töne erzeugt sind.

Andererseits ist noch eine Erscheinung zu erwähnen, aus der wir vielleicht schliessen müssen, dass auch bei den einfachen Tönen, wenn auch ausserordentlich schwach, Combinationstöne höherer Ordnung vorkommen. Es sind dies die von Scheibler und Roeder untersuchten Schwebungen, welche bei nicht ganz reinen Consonanzen hörbar sind. Die Schwebungen sind in der That ein Mittel, durch welches man die

Gegenwart sehr schwacher Töne oft besser erkennt als durch das Ohr.

Um das Intervall bb_1 meiner Stimmgabeln zu prüfen, habe ich mir eine Hülfs-gabel gestimmt, welche vier Schwingungen weniger als b_1 in der Secunde macht. Lasse ich die Gabel b_1 vor ihrer Resonanzröhre verklingen, und nähere der Röhre von Zeit zu Zeit die angeschlagene Hülfs-gabel, so höre ich die Schwebungen noch zu einer Zeit, wo ich von dem Tone der verklingenden Gabel ohne dieses Hülfsmittel nichts mehr wahrnehmen kann. Wenn wir wie beim Lichte die Intensität des Schalls nach dem Quadrate der Schwingungsweite bestimmen, muss in der That, wo zwei Schallwellenzüge von gleicher Stärke mit gleichen Phasen zusammen kommen, die Schwingungsweite verdoppelt, die Intensität vervierfacht werden. Wo entgegengesetzte Phasen zusammenfallen, wird die Intensität gleich Null. Nähern wir also die Hülfs-gabel der Resonanzröhre so weit, dass der Schall beider Gabeln die gleiche Stärke welche wir 1 nennen wollen, bekommt, so wechselt die Intensität des Tons zwischen 0 und 4, und dieser Wechsel kann also noch sehr wohl wahrnehmbar sein, während die Intensität 1 schon nicht mehr wahrgenommen wird. Scheibler hat nun bekanntlich nachgewiesen, dass die Zahl der Schwebungen, welche unrein gestimmte Octaven, Quinten, Quarten und Terzen geben, genau berechnet werden kann aus der Annahme, dass dabei Combinationstöne verschiedener Ordnung von nahe gleicher Höhe miteinander interferiren. Lässt man diese Erklärungsweise von Scheibler zu, so würden die Schwebungen die Anwesenheit von Combinationstönen verrathen können, welche zu schwach sind, um ohne ihre Hülfe wahrgenommen zu werden. Ich habe deshalb Versuche über diese Schwebungen an den mit Resonanzröhren versehenen Gabeln gemacht. Verstimmen kann man sie leicht in beliebigem Grade, indem man Klümpchen Wachs an ihre Zinken klebt. So konnte ich die Schwebungen zweier Gabeln hören, welche eine schwach verstimmte Octave, Quinte, Quarte oder grosse Terz bilden. Aber während sie bei der Octave leicht und deutlich hörbar waren, zeigten sie sich bei jedem folgenden Intervalle schwächer und waren schon bei der grossen Terz nur sehr schwer zu



hören. Bei der kleinen Terz konnte ich die Schwebungen nicht mehr mit Bestimmtheit erkennen, ebensowenig bei der kleinen Sexte.

Bei der unreinen Octave, deren Töne die Schwingungszahlen λ und $2\lambda + \delta$ haben mögen, ist es nach der Erklärung von Scheibler der Combinationston erster Ordnung $\lambda + \delta$, welcher mit dem Grundton λ Schwebungen von der Zahl δ hervorbringt.

Bei der unreinen Quinte, 2λ und $3\lambda + \delta$, ist es ein Combinationston erster Ordnung $\lambda + \delta$, welcher mit einem der zweiten Ordnung $2 \cdot (2\lambda) - (3\lambda + \delta) = \lambda - \delta$ Schwebungen von der Zahl 2δ hervorbringt.

Bei der unreinen Quarte 3λ und $4\lambda + \delta$ ist es ein Combinationston zweiter Ordnung $2(3\lambda) - (4\lambda + \delta) = 2\lambda - \delta$ und ein solcher dritter Ordnung $2(4\lambda + \delta) - 2(3\lambda) = 2\lambda + 2\delta$ welche 3δ Schwebungen hervorbringen.

Bei der unreinen grossen Terz endlich 4λ und $5\lambda + \delta$ ist es ein Combinationston dritter Ordnung $2(5\lambda + \delta) - 2(4\lambda) = 2\lambda + 2\delta$, und ein solcher vierter Ordnung $3(4\lambda) - 2(5\lambda + \delta) = 2\lambda - 2\delta$, welche mit einander 4δ Schwebungen geben.

Auch Scheibler hat wahrgenommen, dass die Schwebungen desto schwächer werden, einer je höheren Ordnung die Combinationstöne angehören, durch welche sie entstehen. Seiner Theorie gemäss müssten also Combinationstöne bis zur vierten Ordnung auch von einfachen Tönen erzeugt werden können. Scheibler hatte für seine Theorie nur die eine Bestätigung, welche in der genauen Uebereinstimmung der berechneten Zahl der Schwebungen mit der beobachteten lag. Ich hoffte noch eine zweite Bestätigung seiner Theorie gewinnen zu können, wenn ich auf die Höhe der als schwebend wahrgenommenen Töne achtete. In der That glaubte ich in allen Fällen die Töne schwebend zu hören, welche Scheibler's Theorie fordert, namentlich im Falle der unreinen Quarte $f_1 b_1$ den Combinationston zweiter Ordnung b , im Falle der unreinen grossen Terz den Ton dritter Ordnung B mittels der Schwebungen wahrzunehmen. Doch stehe ich an, mich in diesem Falle auf die Aussagen meines Ohres fest zu verlassen, da es sehr schwierig ist bei so ausserordentlich schwachen Tönen, die Octave, in der der Ton liegt, sicher zu bestimmen. Uebrigens lehrt auch eine

vollständig durchgeführte Theorie dieser Schwankungen, dass nicht bloss die von Scheibler als schwebend berechneten Töne Wechsel ihrer Stärke zeigen müssen, sondern schwächere Schwebungen auch bei den übrigen Combinationstönen anderer Ordnung eintreten müssen.

Auch dadurch, dass man dritte Töne daneben angiebt, kann man zuweilen Schwebungen hörbar machen, welche nicht durch Combinationstöne erster Ordnung, sondern nur durch solche höherer Ordnung erklärt werden können.

Wenn ich z. B. die einfachen Töne b und d_1 angab, und dazu auf dem Clavier f , welches nicht genau mit den beiden vorigen consonirte, so hörte ich sehr deutlich sowohl den Ton B_{-1} als den Ton f Schwebungen machen. Die ersteren erklären sich dadurch, dass der erste Combinationston sowohl von f und b , wie von b und d_1 , B_{-1} ist, und wenn das letztere Intervall nicht ganz rein ist, die beiden Combinationstöne nicht ganz übereinstimmen können, folglich Schwebungen geben müssen. Mit dem Ton f fällt aber kein Combinationston erster Ordnung zusammen, auch keiner mit den höheren Nebentönen dieses Tones, wohl aber ist f ein Combinationston zweiter Ordnung von b und d_1 . Dieses f wird dadurch, dass man ein etwas verschiedenes f auf dem Claviere angiebt, und es dadurch in Schwebungen bringt, wahrnehmbar gemacht.

In derselben Weise konnte ich Schwebungen des zweiten Combinationstones b der kleinen Terz $d_1 f_1$ hörbar machen, wenn ich dies b auf dem Claviere angab. Daneben hörte man ebenfalls Schwebungen des B_{-1} .

Ebenso konnte ich deutlich die Schwebungen des f hören, wenn ich das b , der Stimmgabel durch aufgeklebtes Wachs verstimmte, und nun zunächst b und b_1 , beide gleichmässig stark ertönen liess. Unter diesen Umständen hört man die Schwebungen wenig, welche die unreine Octave sonst deutlich hören lässt, wenn der tiefere Ton an Stärke überwiegt. Sobald man aber zu den Tönen b und b_1 noch d_1 angiebt, hört man sehr deutlich das f schweben. Dieses f ist der erste Combinationston von $d_1 b_1$ und der zweite von $b d_1$. Ein anderer erster Combinationston fällt damit nicht zusammen, der die Schwebungen verursachen könnte.



Wenn wir nun auch Scheibler's und Röber's Theorie der Schwebungen, welche die Erscheinungen mit grosser Genauigkeit erklärt, als gültig betrachten, und aus dem Vorhandensein der entsprechenden Schwebungen schliessen, dass auch einfache Töne zur Bildung von Combinationstönen höherer Ordnung Veranlassung geben, so folgt daraus keineswegs, dass bei den Beobachtungen des blossen Ohres, wo diese Töne nicht gehört werden konnten, ein Irrthum stattgefunden habe. Im Gegentheil, da die Schwebungen, welche durch Combinationstöne höherer Ordnung veranlasst werden, in allen diesen Fällen ausserordentlich schwach sind, und andererseits die Schwebungen ein so sehr viel feineres Mittel der Wahrnehmung eines Tones abgeben, wird dadurch vielmehr bestätigt, dass diese Combinationstöne durch das Ohr allein, namentlich neben anderen, sehr viel stärkeren Tönen, nicht wohl wahrgenommen werden konnten.

Als Resultat der bisherigen Untersuchung der tieferen Combinationstöne können wir aussprechen, dass einfache Töne nur solche tiefere Combinationstöne deutlich hören lassen, deren Schwingungszahl gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne ist, und dass, wenn Combinationstöne anderer Ordnung daneben existiren, diese zu schwach sind, um bei mässiger Stärke der primären Töne dem Ohre hörbar zu werden. Wenn bei zusammengesetzten Tönen Combinationstöne höherer Ordnung oft sehr deutlich auftreten, müssen wir diese daher für Combinationstöne der höheren Beittöne erklären.

2. Ueber eine neue Art höherer Combinationstöne.

Ausser den bisher besprochenen Combinationstönen besteht noch eine zweite Classe solcher Töne, welche, so viel ich finde, bisher noch niemals beobachtet worden zu sein scheint, nämlich Töne, deren Schwingungszahl gleich ist der Summe der primären Töne. Ich werde diese neuen Töne mit dem Namen der Summationstöne bezeichnen, im Gegensatz zu den früher besprochenen und schon länger bekannten, welche wir Differenztöne nennen können, weil ihre

Schwingungszahl der Differenz der Schwingungszahlen der primären oder ihrer combinirten Töne niedriger Ordnung gleich ist. Ich wurde zuerst durch die theoretischen Entwicklungen, welche ich weiter unten geben werde, darauf aufmerksam, dass solche Töne existiren möchten, und versuchte sie an den mit Resonanzröhren versehenen Stimmgabeln zu hören. Das gelang mir auch, aber nur sehr schwierig, weil die Töne der Stimmgabeln nur eine mässige Stärke haben, und die Combinationstöne überhaupt erst bei grösserer Stärke der primären Töne deutlich werden. Die Summationstöne sind nun schwächer als die Differenztöne erster Ordnung, und es gehört deshalb grosse Uebung und Aufmerksamkeit dazu, sie bei geringerer Stärke der primären Töne zu hören. Indessen gelang es mir doch mittels der Stimmgabeln folgende Töne dieser Art wahrzunehmen.

Primäre Töne	Summationston	Schwungsverhältniss	
		der primären Töne	des Summationstones
b, f_1	d_2	2:3	5
f_1, b_1	as_2	3:4	7
b, d_1	c_2	4:5	9

Viel leichter sind sie zu hören, wenn man stärkere Schallquellen anwendet, auch braucht man hierbei die Obertöne der primären Töne nicht zu fürchten. Einmal kann der Summationston mit keinem Oberton der primären Töne zusammenfallen, wenn nicht einer der primären Töne selbst ein Oberton des anderen ist. Denn wenn m und n die Schwingungszahlen der primären Töne sind, so kann die Schwingungszahl des Summationstones $m + n$ kein Multiplum von m oder n sein, wenn nicht m selbst ein Multiplum von n , oder n ein solches von m ist. Zweitens ist auch keine Täuschung durch Differenztöne der höheren Obertöne zu fürchten, weil es leicht gelingt die Summationstöne eben so stark oder stärker zu erhalten, als die ersten und stärksten Obertöne, sodass sie jedenfalls viel stärker werden als die Differenztöne dieser letzteren.

Recht gut hört man die Summationstöne bei Orgelpfeifen, namentlich, wenn man das Ohr den beiden Mundstücken der



Pfeifen nähert. Man gebe erst den höheren der beiden Töne an, welche man combiniren will; indem man dann den tieferen auch beginnen lässt, hört man einen noch höheren, den Summationston hinzukommen. Auch die Physharmonika lässt die Summationstöne gut hören, wenn man starken Wind giebt. Von allen aber die beste Gelegenheit gewährt die von Dove¹⁾ beschriebene mehrstimmige Sirene, an welcher die Combinationstöne überhaupt so laut hervortreten, wie an keinem andern Instrumente. An ihr sind auch die Summationstöne so laut und auffallend, dass sie gleichsam die Oberstimme des gehörten Accordes bilden, und sich auch ungetübten Ohren leicht bemerklich machen. Sie sind es auch, die die Accorde der Sirene häufig so rau und misstönend machen, weil sie meistens nicht in der Harmonie des Duraccordes bleiben, wie dies bei den Differenztönen der consonirenden Intervalle gewöhnlich der Fall ist.

Der Summationston der Octave, *C* und *c*, ist die Quinte des höheren Tones *g*. Selbst in diesem Falle, wo der zweite Oberton des *C* mit dem Summationstone zusammenfällt, kann man sich überzeugen, dass ein Summationston da ist. Wenn man nämlich zuerst *C* angiebt, hört man anfangs schwach dessen zweiten Oberton *g*; sobald man nun aber daneben auch *c* angiebt, wird dieses *g* viel stärker als vorher, obgleich *c* keinen entsprechenden Oberton hat.

Neben der Quinte *CG* hört man, wie oben schon angegeben ist, die Decime des Grundtones, nämlich *e*. Es wird dadurch der Durdreiklang vollständig.

Zur grossen Sexte *Ge* (3:5) kommt *c*₁ (8) die kleine Sexte des höheren Tones. Der Differenzton ist *C*; so wird auch hier durch die Combinationstöne der Duraccord ergänzt.

Zur Quarte *Gc* (3:4) kommt die etwas vertiefte kleine Septime *b* (7) des höheren Tones.

Zur grossen Terz *CE* (4:5) kommt die None des Grundtones *d* (9), welche den Eindruck des Duraccordes schon erheblich stört, wenn sie deutlich gehört wird.

Zur kleinen Terz *EG* (5:6) kommt der Ton 11, welcher

1) Poggendorff's Annalen Bd. LXXXII. S. 596.

zwischen *f* und *fis* liegt, und die Harmonie in sehr unangenehmer Weise stört.

Einen eben so unangenehmen Missklang giebt bei der kleinen Sexte *Ec* (5 und 8) der Summationston 13 zwischen *b* und *h*. Auf der mehrstimmigen Sirene, wo die Combinationstöne so stark hervortreten, sind deshalb die grosse und kleine Terz, die kleine Sexte und alle Accorde, in denen sie vorkommen, sehr misstönig, während die Octave, Quinte, Quarte und grosse Sexte einen sehr reinen Wohlklang geben, der durch die hinzukommenden die Harmonie ausfüllenden Combinationstöne noch gewinnt. Ich bemerke hierbei, dass die bei der Quarte vorkommende etwas vertiefte kleine Septime, deren Schwingungszahl zu der des Grundtones im Verhältniss von 7:4 steht, dem Ohre durchaus den Eindruck einer Consonanz macht.

Endlich war ich noch im Stande neben den bisher erwähnten Summationstönen bei der Sirene Summationstöne zweiter Ordnung schwach aber deutlich zu hören. Sind *p* und *q* die Schwingungszahlen der primären Töne, so ist die Schwingungszahl dieses zweiten Summationstones $2p + q$. Ich konnte wahrnehmen neben zwei Sirenentönen vom Schwingungsverhältniss:

2	zu 3	den Ton	$2.2 + 3 = 7$	und
	"	"	$2.3 + 2 = 8$	
3	" 4	"	$2.3 + 4 = 10$	
5	" 6	"	$2.5 + 6 = 16$	
4	" 5	"	$2.5 + 4 = 14$	

In jedem dieser Fälle hätten zwei Töne dieser Art, wie bei der Quinte gehört werden müssen, nämlich neben den Tönen 10, 16 und 14 noch 11, 17 und 13. Indessen ist es schwer die Aufmerksamkeit auf einen schwachen Ton zu lenken, der ausserhalb der musikalischen Tonleiter liegt, und dessen Höhe man sich nicht durch Auffassung einer bestimmten musikalischen Relation zu den übrigen Tönen zu fixiren weiss. Ich glaubte mitunter einen Augenblick die unharmonischen Töne zu hören, aber das Ohr lenkte immer so schnell wieder auf die nahe liegenden harmonischen ein, dass ich mich der Höhe der ersteren nicht bestimmt versichern konnte.



3. Theorie der Combinationstöne.

Die bisher von Chladni¹⁾, Lagrange²⁾, Th. Young³⁾, Hällström und Roeber aufgestellten Ansichten über die Entstehung der Combinationstöne, obgleich sie sich in Einzelheiten unterscheiden, haben doch mehrere wesentliche Züge gemeinsam. Alle nehmen nämlich an, dass eine ungestörte Superposition der Wellensysteme, welche den gleichzeitig erklingenden primären Tönen angehören, in der Luft und den schalleitenden Körpern überhaupt stattfindet, d. h. dass bei gleichzeitig erklingenden Tönen die Bewegung jedes schwingenden Theilchens genau die Resultante derjenigen Bewegungen sei, welche jeder einzelne Ton für sich hervorrufen würde.

Wenn m und n zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, und die Schwingungszahl des einen primären Tones m, f , die des anderen n, f ist, so wird die resultierende Luftbewegung periodisch, und die Zahl ihrer Perioden in der Secunde wird gleich f sein. Wir wissen nun, dass eine jede regelmässig wiederkehrende periodische Bewegung der Luft, wenn die Zahl f der gleichen Perioden in der Secunde gross genug ist, in dem Ohre im allgemeinen die Empfindung der Töne von $f, 2f, 3f$ u. s. w. Schwingungen, und zwar einiger oder aller von ihnen, hervorrufen kann. In der That gehören nun auch die Combinationstöne, welche man in einem solchen Falle hört, der Reihe der Töne von $f, 2f, 3f$ u. s. w. Schwingungen an. Wenn es sich nun aber weiter darum handelte zu bestimmen, welche von diesen Tönen, und wie stark die einzelnen, wirklich in einem gegebenen Falle gehört werden, so würde man vor allen Dingen haben suchen müssen die Frage zu entscheiden, nach welchem Gesetze sich das Ohr eine solche periodische Luftbewegung in einzelne, einzelnen Tonempfindungen entsprechende Theile zerlegt. Indessen hat man sich⁵²³ bei den Untersuchungen über Combinationstöne meist mit unbestimmteren Vorstellungen über die Rolle, welche das Ohr

1) Akustik, Leipzig 1802, S. 207.

2) Misc. taurin. T. I, p. 103 bis 105.

3) Philos. Transact. 1800, T. I, p. 130.

dabei spielt, begnügt, und erst später ist diese Frage, wenn auch nicht mit specieller Beziehung auf die Combinationstöne, Gegenstand des Streites zwischen G. S. Ohm und A. Seebeck gewesen. Sie ist offenbar von fundamentaler Wichtigkeit für die ganze Lehre von den Gehörempfindungen, und gerade die Erscheinungen der Combinationstöne scheint wichtige Entscheidungspunkte abgeben zu können.

G. S. Ohm¹⁾ hat bekanntlich eine bestimmte Annahme über die Art, wie das Ohr die periodischen Luftbewegungen in einzelne Töne zerlegt, aufgestellt, eine Annahme, die stillschweigend wohl schon vor ihm von den meisten mathematischen Physikern, die akustische Probleme behandelten, gemacht worden war. Er nimmt nämlich an, dass das Ohr in seiner Empfindung die Luftbewegung genau ebenso in einfache Schwingungsbewegungen (nach der oben S. 267 gegebenen Definition) zerlege, wie es der Mathematiker mittels der Sätze von Fourier in der Rechnung thut, und dass das Ohr den einer jeden solchen einfachen Schwingungsbewegung entsprechenden Ton hört. Dieses von Ohm ausgesprochene Gesetz scheint mir in der That die allerauffallendste Bestätigung zu erhalten durch die Genauigkeit, mit welcher ein geübtes Ohr die theoretisch geforderten Töne zu hören im Stande ist. Ein auffallendes Beispiel, welches schon Th. Young²⁾ besprochen hat, giebt die Bewegung der Saiten, deren Gesetze gut genug bekannt sind, um sie vollständig berechnen zu können. Wenn man eine Saite mit einem spitzen Stift seitwärts zieht, und dann von der Spitze abgleiten lässt, sodass sie zu tönen anfängt, so kann man in dem Moment des Anfangs der Bewegung annehmen, dass die Geschwindigkeit aller Theile der Saite gleich Null ist, ihre Gestalt aber aus zwei geraden Linien besteht, die an der Berührungsstelle einen Winkel bilden. Daraus berechnet sich dann die ganze Bewegung der Saite nach bekannten Regeln. Ist l die Länge der Saite, T die Schwingungsdauer, y die Elongation des um x von der Mitte entfernten Punktes der Saite zur Zeit t , so ist:

1) Poggendorff's Annalen Bd. LIX, S. 513.

2) Phil. Transact. 1800, T. I, p. 137.



$$y = A \left\{ \cos. \frac{\pi x}{l} \sin. \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{9} \cos. \frac{3\pi x}{l} \sin. \frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{25} \cos. \frac{5\pi x}{l} \sin. \frac{10\pi t}{T} + \text{etc.} \right\}.$$

Wenn der Grundton tief ist, hört ein etwas geübtes Ohr alle in dieser Reihe enthaltenen Obertöne selbst bis zum elften Tone der Saite, entsprechend dem Gliede:

$$\frac{A}{121} \cos \frac{11\pi x}{l} \sin \frac{22\pi t}{T},$$

dessen Amplitude nur der 121. Theil von der des Grundtones ist. Nehmen wir an, die letztere sei ein halber Zoll in der Mitte der Saite, was bei hörbaren Tönen vielleicht vorkommen kann, so würde die Amplitude des elften Tones $\frac{1}{30}$ Linie, also dem Auge nicht mehr wahrnehmbar sein. Das Ohr unterscheidet demnach in diesem Falle die kleinen Glieder, die in der Bewegung enthalten sind, genauer als das Auge. Man bedenke ferner, dass es in diesem Falle gar keinen Sinn hat von einer Schwingung zu reden, deren Periode die Dauer von $\frac{1}{11} T$ hat, ausser insofern man die Bewegung in eine Fourier'sche Reihe auflöst. Denn in Wahrheit findet sich in der Gesamtbewegung der einzelnen Saitenpunkte nichts, was in $\frac{1}{11} T$ der Schwingungszeit periodisch wiederkehrt. Die Bewegung des Mittelpunktes der Saite wird nach Young als Function der Zeit durch eine Curve von der Form 1 dargestellt, die Be-



wegung eines jeden anderen Punktes der Saite durch eine Curve ähnlich 2.



Erst wenn man die ersten neun Glieder der Fourier'schen Reihe von der Bewegung abgezogen hat, entsteht ein Rest der innerhalb einer Wellenlänge des Grundtones etwas von einer elfmaligen periodischen Wiederkehr ähnlicher Theile

zeigt. Th. Young beweist ferner, dass wenn man die Saite in einem der Knotenpunkte ihrer Obertöne anschlägt, das diesem Obertone entsprechende Glied der Fourier'schen Reihe wegfällt. In diesem Falle verschwindet auch dem Ohre der entsprechende Oberton, was wenigstens nicht regelmässig der Fall sein könnte, wenn etwa das Ohr die Gesamtbewegung der Luft in andere periodische Glieder als die der Fourier'schen Reihe zerlegte.

Gegen die Annahme von Ohm hat A. Seebeck¹⁾ einen Streit geführt, der leider durch den Tod der beiden ausgezeichneten Physiker beendet worden ist. Seine Einwände sind meist von der Schwierigkeit hergenommen, welche das Ohr findet die theoretisch geforderten Obertöne wahrzunehmen, so wie davon, dass in vielen Fällen ein Ton durch Verstärkung seiner Obertöne stärker wird.

Indessen glaube ich, dass wenn man in diesem Falle genau unterscheidet, wass der sinnlichen Empfindung des Hörnerven, und was der psychischen Thätigkeit angehört, die von ihm gefundenen Schwierigkeiten verschwinden. Wir wissen, dass fast alle unsere Tonwerkzeuge zusammengesetzte Töne erzeugen, in denen der einfache Grundton immer mehr oder weniger stark von gewissen Obertönen begleitet ist, meist aber so, dass der Grundton an Stärke überwiegt. Wir beurtheilen deshalb auch die Höhe des ganzen zusammengesetzten Tones nur nach der Höhe des Grundtones. Im Sinne der Ohm'schen Theorie müssen wir vermuthen, dass die Klangverschiedenheiten solcher Töne, welche nicht discontinuirliche Bestandtheile enthalten, von der verschiedenen Stärke ihrer Obertöne herrühren. Ich will mir deshalb hier erlauben, um die Begriffe schärfer heraus-⁵²⁶zustellen, den zusammengesetzten Ton eines musikalischen Instrumentes Klang zu nennen, und den Namen des Tones nur auf einfache Töne anzuwenden. Ein Klang wäre danach also eigentlich ein Accord mit überwiegendem Grundton, seine Stärke würde gleich der Summe der Stärke der einzelnen in ihn ein-

¹⁾ Ohm, Poggendorff's Annalen Bd. LIX, S. 513; Bd. LXII, S. I. Seebeck, ebendaselbst Bd. LX, S. 449; Bd. LXIII, S. 353 und 368. Repert. d. Physik Bd. VIII, Abschn. XXI, S. 1. Helmholtz, wissenschaft. Abhandlungen.



tretenden Töne sein, seine Höhe gleich der Höhe seines Grundtones. Das Ohr ist nun gewöhnt, die Klänge der musikalischen Instrumente, der menschlichen Stimme u. s. w. immer in derselben Zusammensetzung wiederkehrend zu hören, sodass sie ihm zu bestimmten und bekannten Sinneswahrnehmungen werden, über deren Zusammensetzung zu reflectiren es keine Veranlassung hat, ebensowenig, wie wir uns für gewöhnlich klar machen, dass die sinnliche Anschauung eines körperlich ausgedehnten Gegenstandes aus zwei verschiedenen Netzhautbildern beider Augen zusammengesetzt ist. Wir beachten die Sinnesempfindungen im gewöhnlichen Gebrauche unserer Sinne ja überhaupt nur so weit, als sie uns dienen Gegenstände und Ereignisse der Aussenwelt zu erkennen, und vernachlässigen, was dazu unnöthig ist in solchem Grade, dass eine besondere, oft schwierige Uebung der Aufmerksamkeit nöthig ist, um dergleichen wahrzunehmen. Ich erinnere an die Doppelbilder, die Erscheinungen des blinden Fleckes. So ist uns ein gewisser zusammengesetzter Ton das ausreichende sinnliche Zeichen für die Anwesenheit eines gewissen tönenden Körpers, und insofern von Interesse. Die Art seiner Zusammensetzung dagegen interessiert erst den Physiker, und dieser muss für die Wahrnehmung der Obertöne seine Aufmerksamkeit in ähnlicher Weise künstlich unterstützen, wie für die Wahrnehmung der Doppelbilder und des blinden Fleckes. Ich finde, dass für die Wahrnehmung der Obertöne keineswegs ein besonders geübtes musikalisches Gehör nöthig ist, denn es hören sie auch Personen von geringer musikalischer Uebung, wenn man nur passende Mittel anwendet ihre Aufmerksamkeit auf den Ton zu lenken, der gehört werden soll. Ein geübtes musikalisches Ohr hat nur den Vorzug zu wissen, wie die Octave, Duodecime u. s. w. des angegebenen Tones klingen muss, und daher den betreffenden Ton ohne weitere Hilfe finden zu können. Sonst kann man sich helfen, wenn man kurz vorher den zu hörenden Oberton auf dem Claviere angiebt. Bei aushaltenden Klängen ist es ein sehr vortheilhaftes Mittel, während sie erklingen, den Oberton auf dem Claviere anzugeben und auf sein Verklingen zu achten. Existirt nun derselbe Ton in der angegebenen Klangmasse, so scheint der Clavierton nicht vollständig zu verklingen,

sondern das Ohr wird von ihm unmittelbar auf den entsprechenden Oberton übergeleitet, und hält diesen für die Fortsetzung jenes. Nach dieser Methode hört man z. B. die Obertöne der Orgelpfeifen, der menschlichen Stimme, der Sirenentöne sehr gut.

Ein zusammengesetzter Klang erscheint uns also allerdings als eine einfache Sinnesempfindung, aber wir sind im Stande durch geeignete Leitung unserer Aufmerksamkeit verschiedene sinnliche Empfindungen in ihm zu entdecken, deren Verschmelzung und Vereinigung also, da sie durch die Aufmerksamkeit zu lösen ist, auch nicht durch die Thätigkeit des Nerven sondern selbst nur durch psychische Thätigkeit herbeigeführt sein kann. Seebeck behauptet, dass Ohm's Definition des Tones zu eng sei, dass ausser der dem Grundton entsprechenden einfachen Wellenbewegung auch noch andere Glieder der Fourier'schen Reihe die Empfindung des Grundtones verstärken könnten. Dies erscheint ganz richtig, wenn er unter Ton das versteht, was wir oben mit dem Namen Klang bezeichnet haben, und was für die nur durch die Uebung des gewöhnlichen Lebens geschulte Aufmerksamkeit allerdings ein sinnliches Ganze ist, während die Ohm'sche Definition des Tones in der That das zu bezeichnen scheint, was in der Thätigkeit des Gehörnerven das einfachste Element ist.¹⁾

Wenn wir nun Ohm's Definition des Tones auf die Entstehung der Combinationstöne anwenden, so ergibt sich leicht, dass ihr entsprechend Combinationstöne so lange gar nicht

1) Ich bemerke hier noch, dass in einzelnen von den Versuchen, die Seebeck in dieser Streitsache angestellt hat, wo er eine Sirenscheibe von zwei Seiten her angeblasen hat, die Berechtigung der von ihm gezogenen Schlüsse zweifelhaft bleibt, weil die Schwingungsrichtung der Lufttheilchen bei der Ankunft der Wellen am Ohre möglicherweise eine ganz andere sein konnte, als er voraussetzt, wie er denn selbst in seinem Streite mit Savart (Pogg. Annalen Bd. LIX, S. 177, Bd. LXVII, S. 145, Bd. LXVIII, S. 465) nachgewiesen hat, dass die Schwingungsrichtung sich ändert, wenn sich die Fortpflanzungsrichtung ändert. Er giebt den Wellen, welche durch Anblasen in entgegengesetzter Richtung erzeugt waren, entgegengesetzte Vorzeichen, während sie an einzelnen Stellen des Raumes parallel geworden sein konnten und gleiche Vorzeichen haben mussten.



vorkommen können, als eine ungestörte Superposition der primären Tonwellen in der Luft stattfindet. Denn da jede periodische Function der Zeit nur in einer einzigen Weise durch eine Fourier'sche Reihe ausgedrückt werden kann, so kann auch die zusammengesetzte Luftbewegung mehrerer primärer Töne nur in dieselben einfachen Wellen wieder zerlegt werden, aus denen sie zusammengesetzt ist. Aber auch, wenn es gelänge, statt der von Ohm angenommenen Form der Luftbewegung für einen einfachen Ton eine andere bestimmte Form zu finden, welche die Phänomene der Obertöne genügend zu erklären zuliesse: auch dann würde doch immer die zusammengesetzte Luftbewegung vom Ohr nur wieder in dieselben primären Tönen entsprechenden Glieder zu zerlegen sein, aus denen sie entstanden war. Nehmen wir aber wie Seebeck an, dass dem einfachen Tone viele verschiedene Formen der Luftbewegung entsprechen könnten, so würde es ganz unbestimmt bleiben, in welche Glieder das Ohr die durch zwei Töne erzeugte periodische Luftbewegung zerlegte. Bei einer solchen unbestimmten Annahme würde also wohl die allgemeine Möglichkeit offen gehalten werden, dass das Ohr Combinationstöne hörte, deren Schwingungszahl dem gemeinschaftlichen Maasse der Schwingungszahlen der primären Töne gleich, oder ein

529 Multiplum derselben wäre, indessen würde doch immer noch die Ursache zu finden sein, welche das Ohr bestimmte, diesen oder jenen Ton wirklich zu hören. Ausserdem sehe ich nicht ein, wie diese Hypothese in Bezug auf irrationelle Tonverhältnisse zu anderen Folgerungen führen sollte, als die W. Weber daraus gezogen hat, wonach die angenäherten Verhältnisse der Kettenbrüche zu benutzen wären, um die Höhe der Combinationstöne zu finden. Aber gerade diese Folgerung stimmt nicht mit der Erfahrung überein.

Noch habe ich eine bestimmtere Annahme zu erwähnen, welche Young andeutet, und welche auch Hällström und Röber benutzt haben; sie gründet sich auf die scheinbare Analogie der Stösse zweier nahe gleich hoher Töne und der Combinationstöne. Die Zahl der Stösse ist nämlich ebenso wie die Schwingungszahl des Differenztones erster Ordnung, gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne.

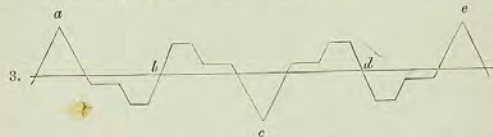
Ist diese Differenz klein, so ist der Combinationston unhörbar tief, dagegen sind die Stösse hörbar. Ist die Differenz gross, so kann das Ohr die Zahl der Stösse nicht mehr fassen, dagegen hört es den Combinationston. Die Stösse entstehen bekanntlich dadurch, dass die Wellensysteme zweier nicht genau gleich hoher Töne abwechselnd mit gleichen und entgegengesetzten Phasen zusammenfallen und sich demgemäss abwechselnd verstärken und schwächen. Jeder Stoss entspricht einer vorübergehenden Verstärkung der Luftvibrationen, umfasst also eine Reihe hin- und hergehender Bewegungen der Lufttheilchen. Young nahm nun an, dass solche Stösse zweier schwebenden Töne ebenso wie die einfachen Luftstösse, z. B. der Sirene, wenn sie schnell genug einander folgen, dem Ohre die Empfindung eines Tones geben könnten, und solch ein Ton sei der Combinationston. Diese Hypothese scheint sich viele Freunde erworben zu haben. Aber abgesehen davon, dass sie den Ursprung der Summationstöne nicht erklärt, und nicht erklärt, warum die Stösse bei den allerleisesten, die Combinationstöne nur bei starken Tönen hörbar sind, so passt sie ganz allein auf solche Fälle, wo die Differenz der Schwingungszahlen ⁵³⁰ klein ist gegen die Schwingungszahlen selbst.

Es kommt bei dieser Annahme doch wesentlich darauf an, dass sich nach Ablauf jeder Schwingungsdauer des Combinationstons ähnliche Eindrücke, nämlich die eines verstärkten Tones, für das Ohr wiederholen sollen. Wenn ein Ton *A* nun 100 Schwingungen macht, während der andere *B* 101 ausführt, und im Anfange der Bewegung zwei positive Maxima von *A* und *B* zusammenfallen, so wird das 100te Maximum von *A* mit dem 101ten von *B* zusammenfallen, und ein Maximum von doppelter Stärke erzeugen, aber auch das 101, 102, 103te Maximum von *A* wird genau genug mit dem 102, 103, 104ten von *B* zusammenfallen, um nahe ebenso starke zusammengesetzte Maxima zu geben. Auch wird es für den Grad der Tonverstärkung gleichgültig sein, ob die positiven Maxima nach 100 Schwingungen von *A* und 101 von *B*, oder die negativen Maxima nach 99½ und 101½ Schwingungen bez. von *A* und *B*, oder die Nullpunkte nach 99¾ und 100¾ Schwingungen es sind, die genau zusammenfallen. Immer wird die



Stärke der doppelten Maxima und Minima, und die Gestalt des zusammengesetzten Wellenzuges fast genau dieselbe sein; aber, und das ist wohl zu beachten, diese Aehnlichkeit entsteht nur daher, dass die Differenz der Schwingungsdauer gegen diese selbst sehr klein ist.

Jetzt wollen wir die entgegengesetzte Annahme machen. Die Curve 3 stellt die Resultate zweier Wellenzüge von gleicher lebendiger Kraft vor, deren jeder eine Gestalt wie die Curve 1 S. 288 hat, und deren einer zwischen *a* und *e* drei, der andere sieben Schwingungen macht. Ihr Combinationston macht in



derselben Zeit vier Schwingungen. Wenn wir also die Entfernung *ae* in vier gleiche Theile *ab*, *bc*, *cd*, *de* theilen, so müssten zur Erzeugung des Combinationstones gleichartige Eindrücke auf das Ohr in folgenden Momenten hervorgebracht werden: 1) durch die positiven grössten Maxima *a* und *e*; 2) durch den Nullpunkt der Curve *b*; 3) durch das negative Maximum *c*; 4) durch den Nullpunkt *d*. Hier kann von einer Aehnlichkeit dieser Curventheile keine Rede mehr sein, und so scheint mir die gegebene Erklärung hier ihre Bedeutung zu verlieren. Man hat sie auf eine Eigenthümlichkeit der zusammengesetzten Wellenbewegung gegründet, welche unter den Umständen, wo Stösse eintreten, bei verhältnissmässig geringer Differenz der Schwingungszahlen stattfindet, aber gerade unter den Umständen, wo Combinationstöne eintreten, bei verhältnissmässig grosser Differenz der Schwingungszahlen nicht mehr vorhanden ist.

Durch diese Ueberlegungen auf das Ungenügende der bisherigen Theorien aufmerksam gemacht, glaubte ich einen Fingerzeig, der auf den richtigen Weg führen konnte, in dem bisher wenig beobachteten Umstande zu entdecken, dass die Combinationstöne nur bei starken primären Tönen auftreten, und

ihre Intensität in einem viel schnelleren Verhältnisse zu wachsen scheint, als die der primären Töne. Danach glaubte ich vermuthen zu dürfen, dass sie bei Wellenzügen von unendlich kleinen Amplituden, wie man theoretisch die Schallwellen gewöhnlich annimmt, nicht vorkommen möchten, sondern nur bei solchen von endlichen Amplituden.

Die daraus im Folgenden entwickelte Theorie führte mich auf die Entdeckung der Summationstöne, welche sowohl in auffallender Weise die Richtigkeit der neuen Theorie bestätigen, als auch eine von den früheren Theorien aus unerklärbare Erscheinung sein möchten.

Während man bisher immer angenommen hat, dass verschiedene Tonwellenzüge, welche gleichzeitig in der Luft oder einem anderen elastischen Mittel erregt werden, sich einfach superponiren ohne gegenseitig Einfluss auf einander zu haben, und man diese Annahme durch die bekannten Erfahrungen der Möglichkeit, gleichzeitig erklingende Töne verschiedener Instrumente oder menschlicher Stimmen, jede mit ihrer besonderen Tonhöhe und ihrer Klangfarbe, neben einander zu erkennen, hinreichend gerechtfertigt glaubte: so war doch andererseits zu bedenken, dass die theoretische Mechanik eine solche ungestörte Superposition nur für den Fall unendlich kleiner Schwingungen nachwies, während aus den Bewegungsgleichungen der Luft gleichzeitig ersehen werden konnte, dass bei Wellenzügen von endlicher Grösse der Amplituden eine solche ungestörte Superposition nicht stattfinden kann. Die theoretische Untersuchung der letztgenannten Fälle ergab mir nun, dass verschiedene einfache Schwingungsbewegungen eines elastischen Körpers sich ungestört superponiren, so lange die Amplituden der Schwingungen so klein sind, dass die durch die Verschiebungen hervorgebrachten Bewegungskräfte diesen Verschiebungen selbst merklich proportional sind. Wenn aber die Amplituden der Schwingungen so gross werden, dass die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einfluss auf die Grösse der Bewegungskräfte erhalten, so entstehen neue Systeme einfacher Schwingungsbewegungen, deren Schwingungsdauer derjenigen der bekannten Combinationstöne entspricht.



Der einfachste Fall ist der, wo wir nur die Bewegungen eines einzelnen beweglichen Massenpunktes zu betrachten haben, der durch elastische Kräfte in einer bestimmten Gleichgewichtslage festgehalten wird, und den Tonwellenzüge des umgebenden elastischen Mittels erschüttern. Es ist dieser Fall den Verhältnissen in unserem Ohre einigermassen ähnlich. Der bewegliche Massenpunkt entspricht dem Stiele des Hammers, das Paukenfell einer elastischen Feder, die ihn in einer bestimmten Stellung festzuhalten sucht.

Die Masse des beweglichen Punktes sei m , seine Entfernung von der Gleichgewichtslage zur Zeit t sei x . Die Kraft h , welche ihn in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, sei abhängig nicht bloß von der ersten, sondern auch von der zweiten Potenz der Elongation, also:

$$h = ax + bx^2.$$

Ausserdem mögen zwei Schallwellenzüge den beweglichen Massenpunkt treffen, und auf ihn einen periodisch veränderlichen Druck $f \sin(pt)$ und $g \sin(qt + c)$ ausüben. Die Bewegungsgleichung des Massenpunktes ist alsdann:

$$-m \frac{d^2x}{dt^2} = ax + bx^2 + f \sin(pt) + g \sin(qt + c) \quad (1)$$

Diese Gleichung kann man durch eine Reihe integrieren, indem man darin setzt:

$$x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \text{etc.} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} f &= \varepsilon f_1 \\ g &= \varepsilon g_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2a)$$

und die mit gleichen Potenzen von ε multiplicirten Glieder einzeln gleich Null setzt. Also:

$$ax_1 + m \frac{d^2x_1}{dt^2} = -f_1 \sin(pt) - g_1 \sin(qt + c) \quad (3a)$$

$$ax_2 + m \frac{d^2x_2}{dt^2} = -bx_1^2 \quad (3b)$$

$$ax_3 + m \frac{d^2x_3}{dt^2} = -2bx_1x_2 \text{ etc.} \quad (3c)$$

Das vollständige Integral der Gleichung (3a) ist:

$$x_1 = A \sin \left(t \sqrt{\frac{a}{m}} + h \right) + u \sin(pt) + v \sin(qt + c),$$

worin A und h die beiden Integrationsconstanten sind, u und v aber folgende Werthe haben:

$$u = \frac{f_1}{m p^2 - a} \quad \text{und} \quad v = \frac{g_1}{m q^2 - a}.$$

Das erste Glied x_1 der Reihe 2 entspricht also drei Tönen, von denen der erste die Schwingungszahl $\sqrt{a/m}/2\pi$ hat, und dem eignen Tone des schwingenden Punktes entspricht. Dieser Ton, wenn er auch im Anfange der Bewegung vorhanden sein möchte, erlöscht jedenfalls schnell. Wir können also in unserem Falle A gleich Null setzen, und haben dann:

$$x_1 = u \sin(pt) + v \sin(qt + c), \quad (4)$$

Dieses erste Glied unserer Reihe läßt erkennen, dass der schwingende Punkt zunächst die erregenden Töne wiedergibt. Dieses Glied würde das einzige der Reihe sein, wenn die Kraft nicht vom Quadrat der Entfernung abhängig, also $b = 0$, oder x so klein wäre, dass bx^2 gegen ax vernachlässigt werden könnte. In diesem Gliede findet noch eine ungestörte Superposition der Schwingungen statt. Ihre Amplituden u und v fallen gleich gross aus, gleichviel ob der andere Ton vorhanden ist oder nicht.

Setzt man den Werth x_1 aus der Gleichung 4 in 3, so erhält man:

$$\begin{aligned} ax_2 + m \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -b \left\{ u^2 \sin^2(pt) + v^2 \sin^2(qt + c) \right. \\ &\quad \left. + 2uv \sin(pt) \sin(qt + c) \right\} \\ &= -b \left\{ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}u^2 \cos(2pt) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}v^2 \cos(2qt + 2c) + uv \cos[(p - q)t - c] \right. \\ &\quad \left. - uv \cos[(p + q)t + c] \right\}. \end{aligned}$$

Das Integral dieser Gleichung ist folgendes, wenn man den eignen Ton des schwingenden Punktes wieder fortlässt:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{b}{2a}(u^2 + v^2) - \frac{bu^2}{2(4mp^2 - a)} \cos 2pt \\ &\quad - \frac{bv^2}{2(4mq^2 - a)} \cos 2(qt + c) + \frac{buv}{m(p - q)^2 - a} \cos[(p - q)t - c] \\ &\quad + \frac{buv}{m(p + q)^2 - a} \cos[(p + q)t + c]. \quad (5) \end{aligned}$$



Das zweite Glied unserer Reihe liefert uns also Töne von den Schwingungszahlen $2p/2\pi$, $2q/2\pi$, $(p-q)/2\pi$ und $(p+q)/2\pi$. Die ersten beiden sind höhere Nebentöne der primären Töne $p/2\pi$ und $q/2\pi$, der dritte ist der Differenzton erster Ordnung, und der vierte der Summationston erster Ordnung. Die Amplitude der beiden Combinationstöne enthält als Factor das Product uv der Amplituden der primären Töne. Sind die letzteren also sehr klein, so ist die Amplitude der Combinationstöne eine kleine Grösse zweiter Dimension, und wachsen u und v gleichmässig, so wächst uv im quadratischen Verhältnisse. Daraus folgt mit der Erfahrung übereinstimmend, dass bei sehr schwachen primären Tönen die Combinationstöne unhörbar sein müssen, bei starken primären Tönen die letzteren dagegen in einem stärkeren Verhältnisse wachsen müssen.

Den eigenen Ton des schlaff gespannten Trommelfells in seiner Verbindung mit den trägen Massen der Gehörknöchelchen und des Labyrinthwassers dürfen wir wohl als ziemlich tief ansehen, so dass, wenn wir unsere Rechnung auf den Trommelfellapparat anwenden wollen, folgen würde, dass:

$$\sqrt{\frac{a}{m}} < p - q < p + q,$$

oder:

$$a < m(p - q)^2 < m(p + q)^2$$

und:

$$\frac{buv}{m(p - q)^2 - a} > \frac{buv}{m(p + q)^2 - a},$$

dass also die Amplitude des Differenztones grösser ist als die des Summationstons. Vernachlässigen wir die Grösse a , so würden sich bei der Quinte die Amplituden der beiden Combinationstöne zu einander verhalten wie $(3 + 2)^2 : (3 - 2)^2 = 25 : 1$, bei der Quarte wie $49 : 1$, bei der Terz wie $81 : 1$. Wirklich finden wir, dieser Berechnung entsprechend, in der Erfahrung die Intensität des Summationstons stets sehr viel geringer als die des Differenztons.

Das dritte Glied der Reihe enthält die Töne, welche in 2π Sekunden $3p$, $3q$, $2p + q$, $2p - q$, $p + 2q$, $p - 2q$, p und q Schwingungen machen. Unter diesen sind die Töne $p \pm 2q$ und $q \pm 2p$ Combinationstöne zweiter Ordnung. Ihre Ampli-

tude ist eine kleine Grösse dritter Dimension. Ebenso lässt sich übersehen, dass das n te Glied der Reihe Combinationstöne n ter Ordnung liefern wird, deren Amplitude eine kleine Grösse n ter Dimension sein wird.

Zu bemerken ist noch, dass bei einem einzelnen schwingenden Massenpunkte das Quadrat der Elongationen, nur dann Einfluss auf die Bewegungen haben kann, wenn er unsymmetrisch befestigt ist. Denn in der oben gemachten Annahme für die Grösse der elastischen Kraft k , welche den Massenpunkt in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt,

$$k = ax + bx^2$$

liegt implicite die Bedingung, dass eine Verschiebung in Richtung der negativen x eine andere elastische Kraft hervorruft, als eine solche in der Richtung der positiven x .

Unter den Theilen im Ohre finden wir nun namentlich das Trommelfell in höchst unsymmetrischer Weise gebildet. Der Stiel des ersten Gehörknöchelchens, des Hammers, ist in dasselbe eingewachsen und zieht es trichterförmig nach innen. Eben dieser zur Entstehung der Combinationstöne nothwendigen unsymmetrischen Bildung wegen glaube ich annehmen zu dürfen, dass wenn im Ohre Combinationstöne entstehen, namentlich das Trommelfell dabei betheiligt sei. Die Asymmetrie des Ohres spricht sich auch deutlich aus bei Scheibler's Versuchen über die Schwingungen unrein gestimmter harmonischer Intervalle, welche Versuche, wie ich oben erwähnt habe, auch mit einfachen Tönen gelingen. Es lässt sich aus Scheibler's Bestimmungen der Zahl der Stösse nachweisen, dass zwei Schallwellenzüge verschiedene Empfindungen im Ohre erregen, wenn die Elongationen der Lufttheilchen in ihnen in entsprechenden Zeitpunkten gleiche Grösse, aber entgegengesetzte Richtung haben.

Nimmt man z. B. zwei Gabeln, die genau eine Octave miteinander bilden, und verstimmt die höhere um so viel, dass sie in der Secunde eine Schwingung mehr macht als vorher, so hört man beim Zusammenklingen beider Gabeln in jeder Secunde eine Schwebung. Diese Schwebung giebt sich dem Ohre mehr durch einen Wechsel der Klangfarbe, als durch wechselnde Stärke des Tons zu erkennen. Es klingt ungefähr



wie $\text{U} - \text{E} - \text{U} - \text{E} - \text{U} - \text{E}$ u. s. w. Während also die beiden zusammenklingenden Töne zu Anfang und Ende der Secunde einen gewissen sinnlichen Eindruck *A* hervorbringen, bringen sie in der Mitte der Secunde einen anderen sinnlichen Eindruck *B* hervor. Eine leicht anzustellende Untersuchung der Bewegungsform der Lufttheilchen zeigt nun, dass der Eindruck *B* in der Mitte der Secunde einer Form der Schallwellen entspricht, welche das negative Abbild derjenigen ist, die zu Anfang und zu Ende der Secunde den Eindruck *A* hervorbringt. Fallen z. B. die positiven Maxima des höheren Wellenzuges zu Anfang und Ende der Secunde abwechselnd auf die positiven und negativen Maxima des tieferen Wellenzuges, so sind es in der Mitte der Secunde die negativen Maxima des ersten die mit den Maximis des zweiten zusammenfallen, und die zweite Wellencurve bekommt von einem negativen Maximum angefangen ganz dieselbe Gestalt aber entgegengesetzte Lage, wie die erste Wellencurve von einem positiven Maximum angefangen. Daraus geht also hervor, dass das Ohr von entgegengesetzt gerichteten, aber gleich grossen Luftbewegungen ungleich afficirt wird.

Aus der gegebenen Entwicklung ergibt sich, dass wir den Ursprung der Combinationstöne nicht notwendig in der Empfindungsweise des Hörnerven zu suchen haben, sondern dass bei zwei gleichzeitig erklingenden Tönen von gehöriger Stärke den Combinationstönen wirkliche Schwingungen des Trommelfelles und der Gehörknöchelchen entsprechen können, welche von dem Nervenapparate in der gewöhnlichen Weise empfunden werden. Danach würden die Combinationstöne nicht eine blos subjective Existenz haben, sondern würden auch objectiv, wenn auch zunächst nur in den schwingenden Theilen des Ohres selbst bestehen können.

Wir haben die gegebene Entwicklung zunächst auf die Bewegungen des Apparates der Trommelhöhle bezogen; indessen ist klar, dass ähnliche Verhältnisse sich auch ausserhalb des Ohres müssen wiederholen können, dass also auch den Combinationstönen entsprechende Schwingungen ganz unabhängig vom menschlichen Ohre und ausserhalb desselben unter geeigneten Umständen müssen vorkommen können.

Wir haben ferner nur die Bewegung eines einzelnen von elastischen Kräften festgehaltenen Massenpunktes der Berechnung unterworfen; indessen kann man aus der Analogie leicht schliessen, dass ähnliches auch bei Systemen von Massenpunkten zwischen denen elastische Kräfte wirksam sind, also in elastischen festen oder flüssigen Körpern wird vorkommen können. Die mathematische Untersuchung der nicht unendlich kleinen Schwingungen elastischer Körper ist jedoch sehr weitläufig und da ich bisher noch über keine Versuche zu berichten habe, zu deren Verständniss eine ausführliche Kenntniss der Theorie notwendig wäre, so möge es hier genügen anzuführen, was mich die theoretische Untersuchung der Bewegung der Luft in dieser Beziehung gelehrt hat.

Bei der mathematischen Untersuchung über die Schallbewegung in der Luft berücksichtigt man in der Regel nur die Glieder der Gleichungen, welche die ersten Potenzen der Elongationen der Lufttheilchen enthalten und vernachlässigt die höheren Potenzen derselben. Behält man auch die Glieder bei, welche die zweiten Potenzen der Elongationen enthalten, so findet man folgendes:

1) Jeder Punkt der Luftmasse, in welchem die Schwingungen, die einem einzelnen der angegebenen primären Töne angehören, heftig genug wären, wird Centrum von neuen secundären Wellensystemen, welche den harmonischen Obertönen des betreffenden Tones entsprechen.

2) Jeder Punkt der Luftmasse, wo die Schwingungen beider primär angegebenen Töne gleichzeitig hinreichende Grösse erreichen, wird das Centrum neuer secundärer Wellensysteme die den Combinationstönen entsprechen, und zwar entstehen daselbst sowohl Differenz- als Combinationstöne, erster und höherer Ordnungen.

Wir werden die Bildung von Combinationstönen in der Luftmasse also namentlich dann zu erwarten haben, wenn die Centra der beiden primären Tonwellensysteme nahe aneinander liegen, sodass die dazwischenliegende Luftmasse gleichzeitig von beiden Tönen heftig erschüttert wird.

Es ist möglich die objective Existenz von Combinationstönen durch das Mitschwingen dünner Membranen nachzuweisen.



Aber nur bei der mehrstimmigen Sirene fand ich bisher die Combinationstöne stark genug für diesen Zweck. Ich spannte über die eine Oeffnung einer cylindrischen Röhre von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser eine dünne Kautschukmembran. Das andere Ende der Röhre war durch einen Deckel mit engerer Oeffnung verschlossen. Wenn man gegen die Ränder dieser Oeffnung blies, konnte man verschiedene Töne erzeugen, wobei die Membran aufgestreuten Sand in verschiedene Klangfiguren ordnete. Der Grundton war e_1 ; wenn er angegeben wurde, sammelte sich aller Sand am Rande der Membran. Ich brachte nun die Mündung des Rohres über die Scheibe der mehrstimmigen Sirene, während die Membran nach oben gewendet, und mit Sand bestreut war, und blies dann die Sirene an, sodass diese allmählig immer schneller rotirte und Töne von wachsender Höhe gab, wobei ich zwei Löcherreihen öffnete. Zuerst tritt alsdann eine Bewegung des Sandes ein, wenn der höhere der beiden gegebenen Töne bis e gestiegen ist, sodass der erste höhere Nebenton des e mit dem Tone der Membran zusammenstimmt. Bei weiter steigender Geschwindigkeit der Sirenscheibe kam die Membran wieder zur Ruhe, und gerieth zum zweiten Male, und zwar in stärkere Bewegung, wenn der Summationston beider Töne bis e_1 gestiegen war. Vermittels der Sandfigur konnte man controliren, dass die Membran in der That im Tone e_1 mitschwang. Auch stimmt der Summationston niemals mit einem der höheren Nebentöne der primären Töne überein, wenn nicht der eine primäre Ton selbst ein höherer Nebenton des anderen ist. Es blieb also kein Zweifel, dass die Membran durch den Summationston in Schwingung versetzt wurde, und dass dieser Ton also objectiv vorhanden war.

640 Es möge hier genügen, durch einen Versuch das Factum festgestellt zu haben, dass Combinationstöne unabhängig vom menschlichen Ohre entstehen können. Einen anderen Nachweis derselben Thatsache der in mancher Beziehung noch lehrreicher ist, habe ich mittels einer eigenthümlichen Form der Sirene erhalten. Das neue Instrument und die damit auszuführenden Versuche behalte ich mir indessen vor in einem anderen Aufsatze im Zusammenhange zu schreiben.

XVI.

Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.

Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 57 S. 1—72. (1859.)

Die mathematische Theorie der Orgelpfeifen ist von den ¹ bedeutendsten mathematischen Physikern vielfältig behandelt worden, aber seit den ersten Schritten, welche D. Bernoulli und Euler gethan haben, und durch welche die Hauptzüge der Erscheinung eine annähernde Erklärung fanden, um keinen wesentlichen Schritt vorgerückt. Der Grund davon hat hauptsächlich darin gelegen, dass die Mathematiker es nicht wagten die Annahme aufzugeben, dass die Bewegung der Lufttheilchen im Innern der Röhre überall ihrer Axe parallel gerichtet, und sowohl die Geschwindigkeit wie der Druck in allen Punkten desselben Querschnittes der Röhre gleich gross sei. Diese von den ersten Bearbeitern der Einfachheit wegen gemachte Annahme ist ganz unbedenklich für die von offenen Enden entfernten Theile einer cylindrischen oder prismatischen Röhre, aber in der Nähe offener Enden, wo die ebenen Wellen der Röhre in den freien Raum überzugehen anfangen, um sich dort in Form kugelliger Wellen auszubreiten, ist jene Annahme nicht mehr zulässig, da es klar ist, dass ein solcher Uebergang nicht sprungweise geschehen kann. Bernoulli, Euler und Lagrange hatten angenommen, dass die Verdichtung am offenen Ende der Röhre stets gleich Null sei. Dass sie sehr viel kleiner sein müsse als bei den gleichen Wellenphasen im Innern der Röhre, wo die bewegte Luft von den Röhrenwänden gehindert



wird, sich seitlich auszudehnen, ist leicht einzusehen, da am offenen Ende kein anderes Hinderniss ihrer Ausdehnung besteht als die Trägheit der benachbarten Luftmassen. Insofern nähert sich jene Annahme und die darauf basirte Theorie allerdings sehr der Wahrheit, aber sie ist nicht vollständig richtig. Denn die Dichtigkeit am Ende der Röhre muss allerdings gleich gesetzt werden der Dichtigkeit der anstossenden Luft im freien Raume, aber nicht der constanten Dichtigkeit der ruhenden Luft, sondern der veränderten Dichtigkeit dieser selbst in Vibration gerathenen Luft. Deshalb widersprechen die Folgerungen aus jener Annahme auch in mancher anderen Beziehung der Erfahrung. So folgt daraus, wie schon Poisson hervor-
gehoben hat, dass bei gewissen Röhrenlängen die Schwingungen im Innern, welche eine endliche Kraft oder eine endliche mitgetheilte Bewegung erregt, unendlich gross werden, und einmal erregt, nicht wieder erlöschen, weil sie nichts von ihrer lebendigen Kraft der äusseren Luft mittheilen. Euler¹⁾ selbst hatte diese Abweichungen dadurch erklären wollen, dass die Erschütterung sich zum Theil den Wänden der Röhre mittheilte und dadurch der Luftmasse verloren ginge. Poisson²⁾ suchte den Grund richtiger in dem Umstande, dass die Verdichtung am offenen Ende der Röhre nicht vollständig gleich Null, sondern nur sehr klein sei. Aber er wusste ihren wirklichen Werth nicht zu finden, sondern baute seine Theorie auf eine neue Hypothese, welche sich in unserer Untersuchung als im allgemeinen unrichtig erweisen wird. Er machte nämlich die Annahme, dass die Verdichtung am Ende der Röhre proportional der Geschwindigkeit sei, wie sie es bei ebenen fortschreitenden Wellen ist. Wenn die Geschwindigkeit v , die Verdichtung s , die Schallgeschwindigkeit a ist, so setzte er:

$$kv = as.$$

Die Constante k nimmt er an geschlossenen Enden als sehr klein, an offenen als sehr gross an; ihr wirklicher Werth bleibt unbestimmt. Dieser Annahme gemäss müssten am offenes Ende der Röhre die Maxima der Geschwindigkeit mit den

1) Novi Commentarii Acad. Petrop. Tom. XVI, p. 347.

2) Mémoires de l'Académie des Sciences 1817 T. II, p. 305.

Maximis der Verdichtung der Luft der Zeit nach zusammenfallen. Im Gegentheil wird die von uns anzustellende vollständige Analyse zeigen, dass beide nahehin um ein Viertel der Schwingungsdauer auseinanderfallen. Poisson's Annahme beseitigt die genannten Uebelstände der früheren Theorien, indem bei seiner Hypothese allerdings Schall in den freien Raum übergeht, und deshalb die Schallschwingungen in der Röhre schnell erlöschen, sobald die erregende Kraft aufgehört hat zu wirken. Wie viel Schall aber in den freien Raum bei jeder Reflexion der Schallwellen übergeht, hängt von dem unbekannten Werthe der Constante k ab, und bleibt deshalb selbst unbekannt.

Andererseits folgt aus Poisson's wie aus der älteren Annahme, dass die Flächen kleinster Bewegung (Knotenflächen) genau um eine Viertelwellenlänge vom offenen Ende der Röhre abstehen, was allen älteren und neueren Erfahrungen über die Höhe der durch Anblasen erzeugten Töne und der durch die Resonanz der Röhre verstärkten Töne widerspricht und durch die directen Versuche von Hopkins über die Lage der Knotenflächen widerlegt wird. Diese Flächen sind in offenen cylindrischen und prismatischen Röhren vom Ende der Röhre etwas weniger entfernt, als die Viertelwellenlänge beträgt. Gegen Poisson's Versuch zu erklären, warum beim Anblasen beiderseits offener Röhren tiefere Töne entstehen, als seine Theorie erwarten lässt, haben schon Quet und Zamminer gegründete Bedenken erhoben. Poisson's Formeln ergeben nämlich, dass, wenn eine Bewegung von bestimmter Amplitude der Luft der Röhre in einem Knotenpunkte mitgetheilt wird, die Amplitude in den Schwingungsbäuchen sehr gross wird, nämlich von derselben Ordnung wie Poisson's Constante k . Daraus schliesst er, dass für diesen Fall die Amplituden der Schwingung grösser würden, als es die bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen gemachte Annahme unendlich kleiner Vibrationen erlaubte. Unter diesen Umständen sei also Schallbewegung unmöglich, und es könnten deshalb beim Anblasen der Röhre nur Töne entstehen, die sich dieser Grenze der Tonhöhe näherten, wirklich aber immer tiefer bleiben müssten. Mathematisch ist dieser Schluss unzulässig, denn wie gross auch die übrigens durchaus unbekannt bleibende Grösse k sein mag, so würde doch immer



die Grösse der mitgetheilten Amplituden so klein gewählt werden können, dass die Bewegungsgleichungen der Schallbewegung anwendbar bleiben, und auch der Erfahrung widerspricht diese Darstellung. Allerdings tritt in den Versuchen von Hopkins die Schwierigkeit, der Luft der Röhre in einer Knotenfläche eine gegebene Bewegung mitzuthellen, deutlich in die Erscheinung, weil nämlich hier der Widerstand der Luft den Schwingungen der von Hopkins angewendeten schwingenden Platten am meisten hinderlich wird. Die lebendige Kraft der Bewegung, welche der schwingende Körper an die Luft abgeben muss, um die starke Resonanz der Röhre zu unterhalten, wird hier am bedeutendsten, und wenn also der schwingende Körper nicht genügend viel lebendige Kraft erzeugen und abgeben kann, hört er auf zu schwingen. Wendet man dagegen Platten an, die von Stimmgabeln erschüttert werden, deren Vibrationen zu kräftig sind, um durch den Luftwiderstand erheblich verändert zu werden, so erhält man gerade in den Fällen die vollste und schönste Resonanz, wo die Platte in einer Knotenfläche der Röhre liegt, und nach Poisson die Resonanz unmöglich wäre. Ausserdem zeigt sich in den Versuchen von Hopkins die Schwierigkeit des Tönens der Platten gerade bei solchen Tönen, wie sie das Anblasen der Röhre giebt, aber nicht bei den etwas höheren Tönen, welche Poisson als unmöglich betrachtet; diese kommen ohne Schwierigkeit zu Stande.

Es hat übrigens Quet¹⁾ diese Unzulänglichkeiten von Poisson's Theorie, die nicht nothwendig aus seiner Fundamentalthypothese fliessen, verbessert, während er sich übrigens dieser Hypothese anschliesst und ihre Richtigkeit wahrscheinlich zu machen sucht.

Hopkins²⁾ hat die Beschränkung, welche in Poisson's Grenzbedingung für das offene Ende der Röhre liegt, weglassen und nur die Bedingung festgehalten, dass der Druck am offenen Ende klein sein müsse, und dadurch die Möglichkeit offen behalten in seinen Formeln die Uebereinstimmung mit

1) Liouville Journal, Tom. XX, p. 1.

2) Transactions of the Cambridge Philos. Soc. Vol. V. — Poggen-
dorff's Annalen Bd. XLIV, p. 246.

den Thatsachen vollständig zu bewahren, aber freilich bleiben die Constanten, von denen die Lage der Knotenflächen und die Phasenunterschiede in den einzelnen Theilen der Röhre abhängen, in der Theorie unbekannt. Dagegen hat Hopkins eine Reihe wichtiger Versuche über die Lage der Knotenpunkte und die Tonhöhe ausgeführt, um eine jener Constanten wenigstens empirisch zu bestimmen.

Duhamel¹⁾ stellte sich zur Aufgabe, den Einfluss der der Axe nicht parallelen Bewegungen in Röhren zu ermitteln. Da er aber für das offene Ende sich mit der einfachen Annahme begnügt, dass hier der Druck gleich Null sei, verschwindet der Einfluss, den die seitlichen Bewegungen der Lufttheile hier haben, aus seiner Rechnung, und er kommt zu dem Schlusse, dass die Differenz zwischen Theorie und Erfahrung nicht von dem Vorkommen solcher Bewegungen abhängt.

Masson²⁾ endlich vertheidigt die Theorie von Poisson im Ganzen und sucht die Uebereinstimmung zwischen ihr und der Erfahrung durch eine neue Hypothese über die Bewegungsart der Luft in dem der Anblaseöffnung nächsten Abschnitte der Luftsäule herzustellen.

Uebrigens ist es klar, dass, sobald die Gestalt des ganzen Lufraumes, sowohl des inneren der Pfeife als des äusseren, gegeben ist — wir nehmen ihn im Folgenden immer als von festen Wänden begrenzt an — und wenn ferner die den Schall erregenden Kräfte gegeben sind, die Aufgabe mathematisch vollständig bestimmt ist, und keine weitere Hypothese über den Zustand der Luft am offenen Ende einer Pfeife zu machen ist. Eine richtig angestellte Analyse der Aufgabe muss darüber vollständigen Aufschluss geben.

Akustische Untersuchungen, bei denen ich über die bisher unerledigten Punkte der Theorie Auskunft brauchte, waren für mich die Veranlassung die Untersuchung aufzunehmen, in welcher Weise sich ebene Schallwellen, die in der Tiefe einer cylindrischen Röhre erregt worden sind, bei ihrem Uebergange in den freien Raum verhalten, und ich habe gefunden, dass die

1) Liouville Journal, Tom. XIV, p. 49.

2) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tom. XL, p. 418.



gegenwärtigen Hilfsmittel der Analysis ausreichen, über die wesentlichen hier in Betracht kommenden Fragen genügende Auskunft zu geben, ohne dass es nöthig ist, irgend eine Hypothese zu machen.

Die Kräfte der Analyse sind in den bisherigen Arbeiten über Theorie des Schalles hauptsächlich darauf hin angespannt worden, den Verlauf einer ursprünglich vorhandenen Gleichgewichtsstörung in einer Luftmasse, die übrigens keiner Einwirkung fremder Kräfte unterliegt, zu bestimmen. Bei den Tönen der Pfeifen ist aber dieses Problem von verhältnissmässig untergeordneter Wichtigkeit. Es handelt sich hauptsächlich darum die Schwingungsform zu ermitteln, welche schliesslich sich dauernd herstellt, wenn die die Schwingungen erregende Ursache dauernd und gleichmässig fortwirkt. Es ist ferner unnöthig, dass wir die Analyse durch Beibehaltung der willkürlichen Functionen verwickelter machen, welche die Form der ursprünglich erregten Schwingung ausdrücken. Wir werden vielmehr voraussetzen, dass diese Vibrationen denen eines einfachen Tones von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, also von der Form $\cos(2\pi nt + c)$ sind. Die Willkürlichkeit der Form würde sich ja auch nach erfolgter Auflösung des Problems immer leicht herstellen lassen durch Zusammensetzung einer grösseren Zahl von solchen einfachen Tönen.

Da somit die Form der Aufgabe etwas anders gefasst wird, als es in den akustischen Untersuchungen bisher geschehen war, ist es nöthig in den ersten fünf Paragraphen einige allgemeine Untersuchungen über die Natur der hier vorkommenden Functionen vorzuschicken. Es zeigt sich, dass wir es dabei mit Functionen zu thun haben, die, wenn die Wellenlänge unendlich gross wird, übergehen in die Formen der elektrischen (oder magnetischen) Potentialfunctionen und dass eine ganze Reihe der interessanten Eigenschaften, die für diese Functionen bekannt sind, auch für jene gelten. Da ich schon in einer früheren Arbeit für die Function, deren Differentialquotient nach drei rechtwinkligen Coordinatenachsen genommen die drei entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit geben, den Namen des Geschwindigkeitspotentials vorgeschlagen habe, so lässt sich diese Analogie auch weiter

in der Bezeichnung festhalten. Den elektrischen Massenzentren entsprechen die Erregungspunkte des Schalles, der Masse der ersteren die Intensität der letzteren. Sind die letzteren continuirlich im Raume oder auf einer Fläche vertheilt, so lässt sich der Begriff der Dichtigkeit auf sie übertragen, und es lassen sich in beiden Fällen Beziehungen ganz analoger Art zwischen ihrer Dichtigkeit und den Differentialquotienten des Geschwindigkeitspotentials aufstellen, wie sie für die elektrische Dichtigkeit und die Differentialquotienten der elektrischen Potentialfunctionen gelten.

Den Hauptnutzen gewährt aber die Uebertragung des Theorems von Green¹⁾ auf die hier vorliegenden Verhältnisse, welches sich schon für die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus so ausserordentlich fruchtbar gezeigt hat. Von allgemeinen Sätzen, die daraus herfliessen, sollen nur folgende hervorgehoben werden: 1) Die Schallbewegung in jedem allseitig begrenzten Raume, welcher keine Erregungspunkte enthält, kann stets dargestellt werden als ausgehend von Erregungspunkten, die nur längs der Oberfläche des Raumes in einer oder zwei einander unendlich nahen Schichten ausgebreitet sind. 2) In jedem Raume, dessen sämtliche Dimensionen verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind, können für das Geschwindigkeitspotential der Luftbewegung die analytischen Formen der elektrischen Potentialfunctionen gesetzt werden, welche von jenem nur unendlich wenig unterschieden sind. 3) Wenn in einem theils von endlich ausgedehnten festen Wänden begrenzten, theils unbegrenzten Raume Schall im Punkte a erregt wird, so ist das Geschwindigkeitspotential in einem anderen Punkte b so gross, als es in a sein würde, wenn dieselbe Schallerregung in b stattfände.

Speciell werden in § 1 die Bewegungsgesetze der Luft für die vorliegende Aufgabe umgeformt, in § 2 die allgemeinen Formen des Geschwindigkeitspotentials für einen von Erregungs-

1) Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. XLIV, S. 360.



punkten freien Raum untersucht, in § 3 die Beziehungen zwischen der Dichtigkeit continuirlich verbreiteter Erregungspunkte und dem Geschwindigkeitspotential festgestellt, in § 4 dieselben für Erregungspunkte, die continuirlich über eine Fläche verbreitet sind, und das Theorem von Green auf die Schallbewegung übertragen, in § 5 endlich werden die Grenzbedingungen für weit von den Erregungspunkten entfernte Flächen aufgestellt, durch welche die Wellen in den unendlichen freien Raum hinauslaufen.

Nachdem so die wichtigsten allgemeinen Gesetze der elektrischen Potentialfunctionen für die Lehre von den Schallwellen anwendbar gemacht worden sind, werden die allgemeinen Gesetze der Bewegung der Luft in Röhren mit offenen Mündungen durch wiederholte Anwendung des Green'schen Satzes in § 6 abgeleitet. Es wird hier zunächst vorausgesetzt, dass die Röhren unendlich lang und cylindrisch von beliebigem Querschnitt seien. Nur in einer so kleinen Entfernung von ihrer Mündung, dass deren Grösse gegen die Wellenlänge vernachlässigt werden kann, darf die Röhre in beliebiger Weise von der cylindrischen Form abweichen, und z. B. trompetenförmig erweitert oder verengt sein. Ebenso werden die Dimensionen der Oeffnung als sehr klein gegen die Wellenlänge betrachtet. Da auch die Gestalt des äusseren Luftraumes bestimmt sein muss, wird angenommen, derselbe sei durch eine gegen die Axe der Röhre senkrechte Ebene einseitig begrenzt, mit welcher auch die Ebene der Mündung zusammenfällt. Ueber die Bewegung wird vorausgesetzt, dass Vibrationen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen angehören, irgendwo in der Röhre dauernd erregt werden, und dass zwischen der Erregungsstelle und der Mündung ein Abschnitt der Röhre existire, in welcher die Bewegung nicht merklich von der ebenen Wellen unterschieden sei. Mittels des Green'schen Satzes kann man nun, ohne die specielle Form der Mündung und der Luftbewegung in der Mündung zu kennen, gewisse Beziehungen herleiten zwischen diesen ebenen Wellen und den sich halbkugelförmig ausbreitenden Wellen in den entfernten Theilen des freien Raumes, und dadurch die bisher offenen Fragen über den Einfluss des offenen Endes auf die

ebenen Wellen beantworten, so weit sie allgemein beantwortet werden können.

Nehmen wir die Axe der Röhre als Axe der x , und die Ebene der Mündung als Ebene der yz , so dass der freie Raum den positiven x , die Röhre den negativen entspricht, so ist bei passender Festsetzung des Anfangspunktes der Zeit t die allgemeine Form des Geschwindigkeitspotentials in dem Theile der Röhre, wo die Wellen eben sind, wenn wir die Wellenlänge gleich $2\pi/k$ setzen:

$$\psi = \left(\frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx \right) \cos(2\pi nt) + \mathfrak{B} \cos kx \cdot \sin(2\pi nt).$$

In den unendlich entfernten Theilen des freien Raumes dagegen, wo r die Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet, ist:

$$\psi = M \frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r}.$$

Nach Euler's Theorie würde $B = \mathfrak{B} = 0$ sein, nach Poisson's $B = 0$, $\mathfrak{B}$ eine unbestimmte kleine Grösse, nach Hopkins' sowohl B wie $\mathfrak{B}$ unbestimmte kleine Grössen, M bleibt in allen dreien unbekannt. Wir finden folgende Beziehungen, wenn wir unter Q die Grösse des Querschnitts der Röhre verstehen, und die Fläche der Oeffnung gegen das Quadrat der Wellenlänge als verschwindend klein betrachten:

$$\begin{aligned} A Q &= -2\pi M, \\ k A Q &= -2\pi \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Zwischen A und B lässt sich keine allgemeine, von der Form der Mündung unabhängige Beziehung aufstellen. Nur lässt sich nachweisen, dass, wenn der Querschnitt der Röhre zur Fläche der Oeffnung ein endliches Verhältniss hat, A/B eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie die Dimensionen der Oeffnung ist, die aber jeden beliebigen Werth annehmen kann, wenn die Oeffnung sehr klein gegen den Querschnitt ist.

Wir setzen das Verhältniss:

$$\frac{B}{A} = -k \tan k\alpha$$

und nennen dann die Grösse $\alpha - \alpha_0$ die reducirte Länge des Stückes der Röhre, welches zwischen $x = 0$ und $x = -\alpha_0$



liegt, die Grösse α selbst die Differenz der wahren und reducirten Länge der Röhre.

Nachdem diese Beziehungen zwischen den Coefficienten ermittelt sind, wird in § 7 die Form der Wellen in der Röhre näher bestimmt. Knotenflächen, d. h. Flächen kleinster Bewegung liegen, wo die reducirte Länge der Röhre gleich einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge ist, Schwingungsbäuche oder Maxima der Bewegung, wo die reducirte Länge ein gerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist. Die Phasen der Bewegung sind am Orte der Maxima um die Zeit einer Viertel-Undulation von denen am Orte der Minima verschieden.

Die Knotenflächen sind zugleich Stellen des grössten Wechsels der Dichtigkeit, die Bäuche Stellen des kleinsten Wechsels der Dichtigkeit. In nächster Nähe der Knotenflächen und der Flächen stärkster Bewegung fällt die stärkste nach der Mündung gerichtete Geschwindigkeit der Zeit nach zusammen mit der stärksten Verdichtung. In den zwischenliegenden Abtheilungen der Röhre aber liegen beide um eine Viertel-Schwingungsdauer auseinander.

Wenn man die Lage des Geschwindigkeitsmaximums und die des Verdichtungsmaximums für einen jeden einzelnen Zeitpunkt bestimmt, so findet man für die fortschreitenden Wellen in den entfernteren Stellen des freien Raumes bekanntlich, dass beide mit der constanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen fortschreiten, und dabei allmähig an Grösse abnehmen. Auch in der Röhre bewegt sich das Geschwindigkeitsmaximum vorwärts gegen die Mündung hin, aber so dass sein absoluter Werth am Ort der Bäuche sehr gross, in den Knotenflächen sehr klein ist, und ferner so, dass die Geschwindigkeit seiner Fortbewegung in den Bäuchen sehr klein, in den Knoten sehr gross ist, so dass es überall, wo sich ein Bauch befindet, während einer halben Schwingungsdauer fast ganz still steht, um zu Ende dieser Zeit schnell auf den Ort des nächsten Bauches fortzuschreiten, an dem es dann wieder ebenso lange fast stillsteht. Ebenso bewegt sich das Verdichtungsmaximum, nur dass es in den Knotenflächen anhält und gross ist, während es am Ort der Bäuche klein ist und schnell vorwärts eilt.

Die gewonnenen Resultate können weiter benutzt werden, um die Stärke der Resonanz und die Phasen der in der Luft erregten Schwingungen bei verschiedenen Erregungsweisen des Schalles genau zu bestimmen.

Wenn die Röhre in irgend einem Querschnitte durch eine feste Platte begrenzt ist, welche durch eine äussere Kraft (z. B. eine aufgesetzte Stimmgabel) in eine schwingende Bewegung versetzt wird, deren Grösse durch den Widerstand der Luft nicht merklich verändert werden kann, so ist die Resonanz am stärksten, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist, am schwächsten, wenn sie ein gerades Vielfache ist. Im ersteren Falle, also beim Maximum der Resonanz, verhalten sich die Amplituden in den Schwingungsbäuchen zur Amplitude der schwingenden Schlussplatte der Röhre, wie das durch $2\pi \cos ka$ dividirte Quadrat der Wellenlänge zum Querschnitt der Röhre. Bei Röhren mit wenig verengter Mündung ist $\cos ka$ nicht merklich von 1 unterschieden, die Grösse des Maximums der Resonanz also von 10 der Form der Mündung ziemlich unabhängig, und die Stärke des Schalles im freien Raume ist bei solchen Röhren sowohl vom Querschnitt als von der Form der Mündung unabhängig. Bei stark verengter Mündung steigt die Resonanz in der Röhre und auch die Stärke des Schalles im freien Raume. Bei stärkster Resonanz ist die Phase der Bewegung in den Schwingungsbäuchen von den entsprechenden Phasen der mitgetheilten Bewegung der Zeit nach um eine Viertel-Schwingungsdauer verschieden.

Ähnliche Ergebnisse finden sich, wenn der Schall in der Röhre von einem in den entfernteren Theilen des freien Raumes befindlichen tönenden Punkte erregt wird, und für eine jede beliebige Lage des tönenden Punktes im freien Raume vor der Mündung der Röhre lässt sich durch das unter Nr. 3 als Folgerung des Green'schen Theorems oben aufgeführte Reciprocitätsgesetz wenigstens das Verhältniss der Stärke der Resonanz für verschiedene Röhrenlängen angeben. Auch in diesem allgemeinsten Falle findet sich, dass die Resonanz der einerseits geschlossenen Röhre am stärk-



sten ist, wenn ihre reducirte Länge ein ungerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist.

Auf offene Röhren, deren beide Mündungen denselben Bedingungen unterliegen, wie die eine Mündung der bisher betrachteten Röhren, lassen sich die Resultate leicht übertragen. Ihre Resonanz ist am stärksten, wenn ihre reducirte Länge gleich einem Vielfachen der halben Wellenlänge ist.

In § 8 werden Röhren betrachtet, welche Rotationskörper sind, und die Methoden aufgesucht, um Formen der Mündung zu finden, für welche die Bewegung der Luft vollständig angegeben werden kann.

In § 9 werden die Rechnungen für die einfachsten Formen der Functionen, welche die Form der Mündung bestimmen, durchgeführt. Unter diesen Formen kommt eine vor, bei welcher die Differenz zwischen reducirter und wahrer Länge verschwindet. Ihre Mündung ist schwach trompetenförmig erweitert, sodass die Fläche der Mündung doppelt so gross ist als der Querschnitt des Cylinders. Eine andere dieser Formen, bei welcher die Weite der Oeffnung gleich der des Cylinders ist, weicht so ausserordentlich wenig von einem vollständigen Cylinder ab, dass man für die meisten praktischen Anwendungen die Differenz vernachlässigen dürfen. Der Abstand ihrer Wandung von der eines reinen Cylinders ist berechnet und in einer Tabelle zusammengestellt; mehr als $\frac{1}{100}$ des Radius beträgt diese Abweichung nur auf einem Streifen dicht an der Mündung, dessen Breite 0,54 des Radius beträgt, und die grösste Abweichung, die überhaupt vorkommt, ist $\frac{1}{50}$ des Radius. Die Differenz zwischen der reducirten und wahren Länge dieser Röhre beträgt $\pi/4 = 0,785$ des Radius. Die eines vollständigen Cylinders muss ein wenig grösser sein. Die neuesten und sorgfältigsten experimentellen Bestimmungen der Grösse dieser Differenz von Wertheim¹⁾ und Zamminer²⁾ zeigen noch keine sehr grosse Uebereinstimmung untereinander, was vielleicht darin seinen Grund hat, dass die Röhren durch Anblasen zum Tönen gebracht sind, wobei man zwar, wie die

1) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tom. XXXI, p. 394.

2) Pogg. Annalen der Physik XCVII, p. 183.

Erfahrung lehrt, im Allgemeinen Töne derselben Höhe bekommt, wie die Töne der stärksten Resonanz der Röhre, aber doch nicht genau weiss, wie weit die Tonhöhe durch kleine Modificationen des Anblasens verändert werden kann. Auch ist die Länge der Schallwellen nur schwer so genau zu bestimmen, dass auch die verhältnissmässig kleine Differenz der wahren und reducirten Länge der Röhren genau gefunden wird. Wertheim findet den Werth dieser Differenz, wenn sie in Theilen des Radius ausgedrückt wird, ziemlich unabhängig von dem Verhältniss des Durchmessers zur Wellenlänge, und zwar bei beiderseits offenen Röhren für jedes Ende zwischen 0,560 und 0,819, Mittel 0,663 R , für einerseits gedeckte Röhren zwischen 0,638 und 0,862, Mittel 0,746 R , sodass der theoretisch gefundene Werth 0,785 R zwar grösser ist als seine Mittelwerthe, aber doch noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsdifferenzen liegt. Zamminer findet dagegen einen stärkeren Einfluss der Tonhöhe. Bei offenen Röhren variirt der Werth der Differenz von 0,848 bis 0,493 R , während die Viertelwellenlänge von 20,9 R auf 3,9 R sich ändert, und bei geschlossenen Röhren variirt die Differenz zwischen 1,304 und 0,376 R , während die Viertelwellenlänge von 40,1 R auf 7,03 R sinkt. Dies stimmt nicht so gut mit der Theorie, welche so starke Aenderungen des Werthes 0,785 R , der für die tiefsten Töne gilt, bei veränderter Tonhöhe nicht erwarten lässt. Indessen sind bei den Röhren, deren Länge mehr als 30 R beträgt, auch hier die Differenzen so gering, dass Aenderungen der Schwingungszahl um ein Procent genügen würden, die Uebereinstimmung herzustellen, und bei verschiedener Stärke des Anblasens können leicht viel grössere Aenderungen eintreten sein.

Endlich ist in § 10 noch eine Aufgabe in ihren allgemeinen Zügen behandelt, welche bisher der theoretischen Bearbeitung unzugänglich gewesen war, nämlich die Bestimmung der Luftschwingungen in solchen Hohlräumen, deren drei Dimensionen gleichmässig als verschwindend klein gegen die Wellenlänge betrachtet werden können, und die durch eine Oeffnung, deren Fläche selbst gegen die Oberfläche des Hohlraumes verschwindend klein ist, mit der äusseren Luft communiciren. Es lässt



sich die Höhe der Töne, für welche solche kugel- und flaschenförmige Pfeifen stärkste Resonanz geben, allgemein bestimmen. Ist die Oeffnung kreisförmig, und ihr Flächeninhalt s , das Volumen des Hohlkörpers S , die Schallgeschwindigkeit a , und die Schwingungszahl des Tones n , so ist nach der Theorie:

$$n = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}.$$

Wählen wir als Längeneinheit das Millimeter, und setzen $a = 332260$, so ist:

$$n = 56174 \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}.$$

Sondhauss¹⁾ hat aus Versuchen die Schwingungszahl der durch Anblasen solcher Hohlkörper erhaltenen Töne in die Formel gebracht:

$$n = 52400 \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}.$$

Noch besser stimmt die Theorie mit den Versuchen von Wertheim, bei welchen das Verhältniss der Fläche der Oeffnung zur Oberfläche des Hohlraumes noch kleiner ist als bei Sondhauss, und die Uebereinstimmung ist desto grösser, je kleiner jenes Verhältniss ist.

Für elliptische Oeffnungen lässt sich der Werth von n ebenfalls bestimmen. Er wird etwas kleiner als für kreisförmige.

Auch für Hohlkörper mit zwei Oeffnungen lässt sich dieselbe Aufgabe lösen; das theoretische Gesetz stimmt auch hier mit den empirischen Formeln von Sondhauss und seinen Versuchen überein.

§ 1. Die Gleichungen der Luftbewegung.

Es sei innerhalb einer Luftmasse in dem Punkte, der durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, zur Zeit t der Druck gleich p , die den drei Coordinatenachsen

1) Pogg. Annalen LXXXI, S. 235 und 347. Es ist übrigens in diesem Aufsätze die Bezeichnungsweise der französischen Physiker gebraucht, wonach die Schwingungszahlen der Töne doppelt so gross werden als nach der deutschen Bezeichnung.

parallelen Componenten der Geschwindigkeit u, v, w , die Dichtigkeit h , und die Componenten der auf die Einheit der gasigen Masse wirkenden äusseren Kräfte X, Y und Z seien auszu-¹³ drücken als Differentialquotienten einer Potentialfunction P , sodass:

$$X = \frac{dP}{dx}, \quad Y = \frac{dP}{dy}, \quad Z = \frac{dP}{dz}.$$

Die bekannten Bewegungsgleichungen für die inneren Punkte der Luftmasse sind demgemäss:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{h} \cdot \frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}, \\ \frac{dP}{dy} - \frac{1}{h} \cdot \frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz}, \\ \frac{dP}{dz} - \frac{1}{h} \cdot \frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz}, \\ - \frac{dh}{dt} &= \frac{d(hu)}{dx} + \frac{d(hv)}{dy} + \frac{d(hw)}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Wenn Luft, ohne Wärme abzugeben, ihre Dichtigkeit ändert, ist:

$$p = b^2 h^{\nu}, \quad (1a)$$

wo b eine Constante und $\nu = 1,42$ ist. Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= b^2 \nu h^{\nu-1} \frac{dh}{dx} \quad \text{und} \\ \frac{1}{h} \frac{dp}{dx} &= b^2 \nu h^{\nu-2} \frac{dh}{dx} = \frac{b^2 \nu}{\nu-1} \frac{d(h^{\nu-1})}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

und ähnlich für die Differentialquotienten nach y und z .

Die Schallbewegung gehört zu denjenigen Bewegungen, denen ein Geschwindigkeitspotential zukommt, welches mit Φ bezeichnet werde, sodass wir haben:

$$u = \frac{d\Phi}{dx}, \quad v = \frac{d\Phi}{dy}, \quad w = \frac{d\Phi}{dz}. \quad (1c)$$

Setzt man die Werthe aus (1b) und (1c) in die Gleichungen (1), so haben die drei ersten derselben eine gemeinschaftliche Integralgleichung, nämlich:

$$P - \frac{b^2 \nu}{\nu-1} (h^{\nu-1} - h_0^{\nu-1}) = \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 \right\}, \quad (1d)$$

wo h_0 eine Function der Zeit sein kann, und die vierte Gleichung lässt sich auf die Form bringen:



$$0 = \frac{d(h^{v-1})}{dt} + (v-1)h^{v-1} \left[\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} \right] + \frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{dh^{v-1}}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} \cdot \frac{dh^{v-1}}{dy} + \frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{dh^{v-1}}{dz}. \quad (1e)$$

14 In dem Folgenden nehmen wir an, dass die Geschwindigkeiten und Aenderungen der Dichtigkeit verschwindend klein seien. Setzen wir:

$$h = h_0(1 + \eta),$$

so betrachten wir also P, η , sämtliche Differentialquotienten von η, P und Φ als unendlich kleine Grössen und vernachlässigen ihre höheren Potenzen. Dann werden die beiden Gleichungen (1d) und (1e), indem man $b^2 v h_0^{v-1} = a^2$ setzt:

$$P - a^2 \eta = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1f)$$

$$0 = \frac{d\eta}{dt} + \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}. \quad (1g)$$

Indem man die erste Gleichung nach t differentiirt, kann man η aus beiden eliminiren¹⁾ und erhält:

$$0 = \frac{dP}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dt^2} + a^2 \left[\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} \right]. \quad (2)$$

Wir wollen im Folgenden nur Fälle behandeln, wo wir es mit einem einzigen gleichmässig anhaltenden Tone von n Schwingungen in der Zeiteinheit zu thun haben, und also Φ von der Form ist:

$$\Phi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t), \quad (2a)$$

wo Ψ' und Ψ'' Functionen von x, y, z sind. Dabei kann die Gleichung (2) nur bestehen, wenn auch P von der Form ist:

$$\frac{n}{2a^2} P = -q'' \cos(2\pi n t) + q' \sin(2\pi n t). \quad (2b)$$

1) Ich bemerke hier noch, dass diese Elimination von h auch an den unverkürzten Gleichungen (1d) und (1e) vollzogen werden kann, und dass man die Eliminationsgleichung, welche von der dritten Dimension in Bezug auf Φ und seine Differentialquotienten ist, ebenfalls mit Hilfe der hier folgenden Theoreme durch eine nach Sinus und Cosinus der Zeit fortlaufende Reihe integriren kann, deren Glieder von n ter Dimension der kleinen Grössen den Combinationstönen n ter Ordnung der primär angegebenen Töne entsprechen.

Es zerfällt dann die Gleichung (2) in die folgenden beiden:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 4\pi q' + k^2 \Psi' + \frac{d^2 \Psi'}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi'}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi'}{dz^2}, \\ 0 &= 4\pi q'' + k^2 \Psi'' + \frac{d^2 \Psi''}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi''}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi''}{dz^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wo:

$$k = \frac{2\pi n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3a)$$

und λ die Wellenlänge ist.

Zunächst werden wir uns mit der Integration dieser Differentialgleichungen zu beschäftigen haben. Aus ihrer Ableitung geht hervor, dass q' und q'' Functionen der Coordinaten sind, welche sich nur an solchen Stellen des Raumes von 0 unterscheiden, wo veränderliche Kräfte auf die Luftmasse einwirken und Schallschwingungen erregen. In allen anderen Theilen der Luftmasse ist $q = 0$, und dort sind daher die Functionen Ψ der Bedingung unterworfen:

$$0 = k^2 \Psi + \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz^2}. \quad (3b)$$

Ich werde im Folgenden den immer wiederkehrenden Ausdruck:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz^2}$$

nach dem Vorgang von Green mit $\nabla^2 \Psi$, oder wo es unzweideutig ist, mit $\nabla \Psi$ bezeichnen.

§ 2. Integration der Wellengleichung.

§ 2. Wir beginnen mit der Integration der einfacheren Gleichung:

$$0 = k^2 \Psi + \nabla^2 \Psi. \quad (3b)$$

Ein bekanntes particulares Integral derselben ist:

$$\Psi = \frac{A \cos(kr + g)}{r}, \quad (4)$$

wenn wir mit A und g Constanten bezeichnen, mit r aber die Entfernung des Punktes x, y, z von einem festen Punkte α, β, γ , also:

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2.$$

Es ist nämlich:

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{A(x - \alpha)}{r^3} [\cos(kr + g) + kr \sin(kr + g)], \quad (4a)$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} &= -A \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} \right] [\cos(kr+g) + kr \sin(kr+g)] \\ &\quad - \frac{Ak^2(x-\alpha)^2}{r^3} \cos(kr+g), \\ \frac{d^2 \Psi}{dy^2} &= -A \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(y-\beta)^2}{r^5} \right] [\cos(kr+g) + kr \sin(kr+g)] \\ &\quad - \frac{Ak^2(y-\beta)^2}{r^3} \cos(kr+g), \\ \frac{d^2 \Psi}{dz^2} &= -A \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\gamma)^2}{r^5} \right] [\cos(kr+g) + kr \sin(kr+g)] \\ &\quad - \frac{Ak^2(z-\gamma)^2}{r^3} \cos(kr+g). \end{aligned} \right\} (4b)$$

16 Wenn man die drei Gleichungen (4b) addirt, so erhält man:

$$\nabla_x \Psi = -Ak^2 \frac{\cos(kr+g)}{r} = -k^2 \Psi,$$

vorausgesetzt, dass nicht $r=0$ und dabei die Werthe von $d^2 \Psi/dx^2$, $d^2 \Psi/dy^2$, $d^2 \Psi/dz^2$ und Ψ unendlich werden. Mit Ausnahme des Punktes α, β, γ ist also dann die Differentialgleichung (3b) mittels des in Gleichung (4) angenommenen Werthes von Ψ durch den ganzen unendlichen Raum erfüllt.

Indem wir in Gleichung (4) g entweder gleich Null oder gleich $-\frac{1}{2}\pi$ machen, erhalten wir zwei verschiedene Formen des particularen Integrals.

1) Wenn $g = -\frac{1}{2}\pi$, wird:

$$\Psi = A \frac{\sin kr}{r}, \quad (4c)$$

und erhält für $r=0$ den endlichen Werth Ak . Auch die Differentialquotienten bleiben endlich, es wird nämlich für $r=0$:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = \frac{d^2 \Psi}{dy^2} = \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = -\frac{1}{3} Ak^3,$$

wie man leicht sieht, wenn man $\cos kr$ und $\sin kr$ nach Potenzen der verschwindenden Grösse r entwickelt. Daraus ergibt sich für $r=0$:

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = 0.$$

Die Funktion $\Psi = A \sin kr/r$ ist also ein solches particuläres Integral der Gleichung (3b), welches im ganzen Raume und auch im Punkte α, β, γ gültig ist.

2) Wenn wir $g=0$ setzen, wird:

$$\Psi = A \frac{\cos kr}{r} \quad (4d)$$

und für $r=0$ unendlich gross, ebenso wie seine Differentialquotienten. Die Gleichung (3b) wird also im ganzen Raume erfüllt, mit Ausnahme der Punkte α, β, γ .

Daraus ergibt sich ferner leicht, dass wenn wir setzen:

$$\Psi = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \left[A_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\sin kr}{r} \right], \quad (4e)$$

wo bei den einzelnen Gliedern der Summe die Werthe von α, β, γ und A verschieden sind, die Gleichung (3b) erfüllt ist im ganzen Raume, ohne Ausnahme der Punkte α, β, γ .

Wenn wir aber setzen:

$$\Psi = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \left[A_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\cos kr}{r} \right], \quad (4f)$$

so ist die Gleichung (3b) im ganzen Raume erfüllt mit Ausnahme derjenigen Punkte, deren Coordinaten α, β, γ in der Summe vorkommen.

Denken wir uns die Punkte α, β, γ continuirlich neben einander im Raume vertheilt, so werden aus den Summen Integrale, und wir schliessen, dass die Function:

$$\Psi = \iiint h_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\sin kr}{r} d\alpha d\beta d\gamma \quad (4g)$$

im ganzen Raume der Gleichung (3b) genügt, dagegen die Function:

$$\Psi = \iiint h_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\cos kr}{r} d\alpha d\beta d\gamma \quad (4h)$$

nur in denjenigen Theilen des Raumes, für welche $h=0$. In beiden soll h eine willkürliche Function von α, β und γ bedeuten.

Wenn wir in der Gleichung (3b) $h=0$ setzen, verwandelt sie sich in:

$$\nabla_x \Psi = 0, \quad (3c)$$

die bekannte Differentialgleichung für die Potentialfunctionen solcher Massen, welche in die Ferne mit anziehenden oder abstossenden Kräften wirken, deren Intensität dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Die verschiedenen



Formen für das Integral Ψ der Gleichung (3b), welche wir aufgestellt haben, verwandeln sich, wenn sie $\sin kr/r$ enthalten, in:

$$\Psi = \text{Constans},$$

welches Integral im ganzen Raume ohne Ausnahme eines Punktes der Gleichung (3c) genügt, oder, wenn sie $\cos kr/r$ enthalten, in:

$$\Psi = \Sigma \left[\frac{A}{r} \right],$$

oder:

$$\Psi = \iiint \frac{h}{r} da d\beta d\gamma,$$

welche beiden Formen in denjenigen Punkten des Raumes nicht genügen, in denen anziehende oder abstossende Masse vorhanden ist, in denen also A oder h nicht gleich Null ist.

Da die Gleichung:

$$0 = k^2 \Psi + \nabla^2 \Psi$$

im ganzen mit Luft gefüllten Raume erfüllt sein muss mit Ausnahme solcher Stellen, wo veränderliche Kräfte auf die Luft wirken, schliessen wir, dass in den Formen des Integrals (4d), (4f), (4h) diejenigen Punkte und Theile des Raumes, in denen die Gleichung (3b) nicht erfüllt ist, Erregungspunkte des Schalles sind. Wir wollen sie auch als solche bezeichnen. Es mag in den Formen des Integrals (4d) und (4f) die Constante A die Intensität des betreffenden Erregungspunktes heissen, und in (4h), wo die Erregungspunkte continuirlich durch den Raum vertheilt gedacht sind, nennen wir die Constante h ihre Dichtigkeit. Bei electricischen Problemen, wo $k = 0$, würden die Erregungspunkte den Massenpunkten, die Intensität der Masse, die Dichtigkeit der Dichtigkeit entsprechen. Da die Functionen Ψ die Bedeutung von Geschwindigkeitspotentialen haben, wollen wir, entsprechend dem Sprachgebrauch in der Lehre von der Electricität und dem Magnetismus, eine solche Summe wie (4f), welche sich auf eine bestimmte Zahl von Punkten α, β, γ bezieht, das Geschwindigkeitspotential dieser bestimmten Erregungspunkte nennen. Die Gleichung (3b) wird also erfüllt durch die ganze Ausdehnung eines gegebenen Raumes S , wenn Ψ

das Geschwindigkeitspotential ausserhalb S gelegener Erregungspunkte ist.

§ 3. Gesetz der Raumdichtigkeit.

Wenn wir nun zur Betrachtung der Differentialgleichung:

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q \quad (3)$$

übergehen, so ist zunächst zu bemerken, dass für $k = 0$ diese Gleichung in:

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi q \quad (3d)$$

übergeht, deren Integral bekanntlich ist:

$$\Psi = \iiint \frac{q_{\alpha, \beta, \gamma}}{r} da d\beta d\gamma + \Phi,$$

worin Φ eine Function bezeichnet, für welche in dem ganzen Theile des Raumes, wo die Gleichung (3d) erfüllt sein soll, $\nabla \Phi = 0$ ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dass in ganz analoger Weise das Integral der Gleichung:

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q \quad (3)$$

ist:

$$\Psi = \iiint q_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\cos kr}{r} da d\beta d\gamma + \Phi, \quad (5)$$

wo Φ eine Function bezeichnet, für welche in den Theilen des Raumes, wo die Gleichung (36) gültig sein soll:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0.$$

Um die durch das Zeichen $\nabla^2 \Psi$ vorgeschriebenen Differentiationen unter dem Integralzeichen in (5) vornehmen zu können, denke ich mir den ganzen Raum durch eine den Punkt x, y, z in unendlich kleiner Entfernung umgebende rings geschlossene Fläche getheilt, und nenne den unendlich kleinen inneren Raum S_0 , den umgebenden äusseren S_1 . Das in dem Werthe von Ψ [Gleichung (5)] enthaltene Integral zerlege ich dem entsprechend in zwei Theile, von denen der eine Ψ_0 der Integration über S_0 , der andere Ψ_1 der über S_1 entspricht.

Es ist also:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Phi. \quad (5a)$$

Da Ψ_1 ein Potential von Erregungspunkten, die ausserhalb S_0 liegen, für einen innerhalb S_0 enthaltenen Punkt ist, so ist:

$$\nabla^2 \Psi_1 + k^2 \Psi_1 = 0,$$



ebenso:

$$\nabla_z \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

also:

$$\nabla_z \Psi + k^2 \Psi = \nabla_z \Psi_0 + k^2 \Psi_0. \quad (5b)$$

Nun setze ich:

$$f_r = \frac{\cos kr}{r} - \frac{1}{r},$$

welche Grösse f_r für $r = 0$ auch gleich Null wird, während aus den Gleichungen (4b) sich ergibt, dass für sehr kleine Werthe von r $d^2 f/dx^2$, $d^2 f/dy^2$ und $d^2 f/dz^2$ sich auf Grössen von der Dimension $1/r$ reduciren, und für $r = 0$:

$$\nabla_z f_r = -\frac{k^2}{r}$$

wird. Ferner setze ich:

$$\Psi' = \iiint q_{\alpha, \beta, \gamma} f_r d\alpha d\beta d\gamma,$$

$$\Psi'' = \iiint q_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{1}{r} d\alpha d\beta d\gamma,$$

beide Integrale über den unendlich kleinen Raum S_0 ausdehnt, so dass:

$$\Psi_0 = \Psi' + \Psi''. \quad (5c)$$

Um zu ermitteln, von welcher Grössenordnung Ψ' , Ψ'' und $\Delta \Psi'$ sind, führe man statt der rechtwinkligen Coordinaten α , β und γ Kugelcoordinaten ein, indem man setzt:

$$x - \alpha = r \cos \omega,$$

$$y - \beta = r \sin \omega \cos \vartheta,$$

$$z - \gamma = r \sin \omega \sin \vartheta,$$

dann wird:

$$d\alpha d\beta d\gamma = r^2 \sin \omega d\omega d\vartheta dr.$$

Ist also die mit $da d\beta d\gamma$ unter dem Integrationszeichen multiplicirte Grösse für $r = 0$ entweder endlich, wie $q f_r$, oder von der Ordnung $1/r$, wie q/r und $\nabla_z f_r$, welches gleich $-k^2/r$ ist, so wird die zu integrierende Grösse unendlich klein und über eine unendlich kleine Distanz r integrirt. Daher werden die Grössen Ψ' , Ψ'' , Ψ_0 [wegen (5c)] und $\nabla_z \Psi'$ unendlich klein. Dagegen ist $\nabla_z \Psi''$ endlich und hat den bekannten Werth:

$$\nabla_z \Psi'' = -4\pi q.$$

Folglich wird aus (5b) und (5c):

$$\Delta_z \Psi + k^2 \Psi = \Delta_z \Psi' + \Delta_z \Psi'' + k^2 \Psi' + k^2 \Psi''$$

und, indem wir die unendlich kleinen Grössen gegen die endliche vernachlässigen:

$$\nabla_z \Psi + k^2 \Psi = -4\pi b, \quad (3)$$

was zu erweisen war.

§ 4. Gesetz der Raumdichtigkeit.

Es lässt sich für die hier untersuchten Formen von Geschwindigkeitspotentialen ferner dieselbe Relation erweisen, welche für die Potentialfunctionen elektrischer Massen an solchen Flächen stattfindet, die mit endlichen Massen in unendlich dünner Schicht belegt sind.

Setzen wir:

$$\Psi = \int p \frac{\cos kr}{r} d\omega, \quad (6)$$

wo $d\omega$ das Flächenelement einer beliebigen Fläche Ω bezeichnet und p eine Function, die sich in der Fläche continuirlich ändert, und untersuchen die ersten Differentialquotienten von Ψ für solche Punkte x , y , z des Raumes, welche der Fläche Ω unendlich nahe liegen.

Wir setzen wieder:

$$\frac{\cos kr}{r} = f_r + \frac{1}{r},$$

$$\Psi = \Psi' + \Psi'',$$

$$\Psi' = \int p f_r d\omega,$$

$$\Psi'' = \int p \frac{1}{r} d\omega.$$

Ψ' ist jedenfalls endlich, wenn p und die Grösse der Fläche Ω endlich sind, da f_r immer endlich ist. Dass Ψ'' unter denselben Bedingungen endlich ist, ist aus der Theorie der elektrischen Potentialfunctionen bekannt, ebenso dass Ψ'' auf beiden Seiten dicht an der Fläche dieselben Werthe hat. Dass letzteres auch mit Ψ' und also auch mit Ψ der Fall sei, ist leicht zu ersehen, da f_r , auch wenn man durch die Schicht selbst hindurchgeht, sich immer nur continuirlich ändern kann. Dagegen wissen wir, dass die Differentialquotienten von Ψ'' an der Fläche einen endlichen Sprung ihres Werthes erleiden,



während leicht zu erkennen ist, dass die von Ψ' an der Fläche continuirlich sein müssen. Denken wir uns durch eine geschlossene Linie, die in unendlich kleiner Entfernung den Fusspunkt des von x, y, z auf die Fläche Ω gefällten Lothes umgiebt, ein Stück Ω_0 aus der Fläche herausgeschnitten und das Integral $\int p f_r d\omega$ getheilt in Ψ'_0 , welches über die Fläche Ω_0 und Ψ'_1 , welches über den Rest der Fläche ausgedehnt ist, sodass:

$$\Psi' = \Psi'_0 + \Psi'_1.$$

Nun ist die Grösse:

$$\frac{df_r}{dx} = -\frac{k^2 x - a}{2r}$$

für unendlich kleine Werthe von r ; bleibt also endlich, macht aber einen Sprung, wenn man von positiven Werthen von $x-a$ durch $r=0$ nach negativen übergeht, ist dagegen continuirlich, wenn man nicht durch $r=0$ hindurchgeht. Letzteres geschieht nun keinenfalls, wenn man in Ψ'_1 die Werthe von x, y, z sich ändern lässt. Dagegen ist $d\Psi'_0/dx$, wo allerdings ein Sprung eintreten würde, unendlich klein als das Integral einer endlichen Grösse über eine unendlich kleine Fläche genommen, und wir können deshalb seinen Werth gegen $d\Psi'_1/dx$ und $d\Psi''/dx$ vernachlässigen. Folglich sind die Differentialquotienten von Ψ' , welches gleich $\Psi'_0 + \Psi'_1$ ist, continuirlich, und die ²² von Ψ müssen an der Fläche Ω einen Sprung von derselben Grösse wie die von Ψ' machen. Bezeichnen wir die von der Fläche ab nach beiden Seiten hingehenden Normalen mit n , und n_n , so ist bekanntlich:

$$\frac{d\Psi''}{dn_n} + \frac{d\Psi''}{dn} = -4\pi p,$$

und daraus folgt, dass auch:

$$\frac{d\Psi}{dn_n} + \frac{d\Psi}{dn} = -4\pi p \quad (6a)$$

sei, was zu beweisen war.

Man kann ferner den für die Lehre von den elektrischen und magnetischen Potentialfunctionen so äusserst fruchtbaren

Lehrsatz von Green¹⁾ auch auf die hier vorliegenden Functionen mit dem grössten Vortheil anwenden.

Wenn Ψ und Φ zwei Functionen sind, welche innerhalb eines abgegrenzten Raumes S eindeutig und stetig sind, d. h. überall endliche erste Differentialquotienten haben, so ist nach jenem Satze von Green:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega + \iiint \Psi \nabla \Phi dx dy dz = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + \iiint \Phi \nabla \Psi dx dy dz,$$

wo $d\omega$ ein Flächenelement der Oberfläche von S , n die nach innen gerichtete Normale bedeutet, und die Integrationen nach $d\omega$ über die ganze Oberfläche von S , die nach $dx dy dz$ durch das ganze Innere von S auszudehnen sind. Wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung addiren $k^2 \iiint \Psi \Phi dx dy dz$, so bringen wir den Satz in die Form, welche wir hier brauchen:

$$\begin{aligned} & \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega + \iiint \Psi (\nabla \Phi + k^2 \Phi) dx dy dz \\ &= \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + \iiint \Phi (\nabla \Psi + k^2 \Psi) dx dy dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Sind Ψ und Φ dargestellt als Geschwindigkeitspotentiale von Erregungspunkten, die theils innerhalb, theils ausserhalb des Raumes S continuirlich mit der Dichtigkeit q und p verbreitet sind, so ist nach Gleichung (3), (5) und (7):

$$\begin{aligned} & \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \Psi p dx dy dz \\ &= \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \Phi q dx dy dz. \end{aligned} \quad (7a)$$

Sind Ψ und Φ Geschwindigkeitspotentiale von ausserhalb S ²³ gelegenen Erregungspunkten, so wird:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega. \quad (7b)$$

Green hat bewiesen, dass eine solche Gleichung wie (7a) auch richtig bleibt, wenn in einem unendlich kleinen Raumelement ds des Raumes S die Dichtigkeit p einen so grossen constanten Werth annimmt, dass $p ds$ einer endlichen Grösse A gleich wird,

1) Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 44, S. 360.



obgleich dann Φ an dieser Stelle nicht stetig bleibt, sondern unstetig wird, wie A/r . Nehmen wir an, dass Φ das Geschwindigkeitspotential der in dem unendlich kleinen Raumelemente ds , dessen Coordinaten α, β, γ seien, mit der gleichmässigen Dichtigkeit p vertheilten Erregungspunkte sei, während p überall sonst gleich Null ist, sodass also Φ in endlicher Entfernung vom Punkte α, β, γ den Werth habe:

$$\Phi = A \frac{\cos kr}{r},$$

so reducirt sich das dreifache Integral der linken Seite der Gleichung (7a), indem wir den Werth, welchen Ψ im Punkte α, β, γ hat, mit Ψ_a bezeichnen, auf:

$$\Psi_a \int p ds = A \Psi_a.$$

Die Gleichung (7) wird also:

$$\begin{aligned} -4\pi \Psi_a &= \int \frac{d\Psi}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega - \int \Psi \frac{d}{dn} \left(\frac{\cos kr}{r} \right) d\omega \\ &+ \iiint (\nabla_x \Psi + k^2 \Psi) \frac{\cos kr}{r} dx dy dz. \end{aligned} \quad (7c)$$

Somit ist die Function Ψ , welche wir nur der Bedingung unterworfen hatten eindeutig und stetig zu sein, die übrigens ganz beliebiger Art sein kann, auf die Form unserer Geschwindigkeitspotentiale gebracht. Ist übrigens innerhalb des ganzen Raumes S :

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

so wird die Gleichung (7c):

$$\int \Psi \frac{d}{dn} \left(\frac{\cos kr}{r} \right) d\omega - \int \frac{d\Psi}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega = 4\pi \Psi_a. \quad (7d)$$

Nun ist das zweite dieser beiden Integrale das Potential einer Schicht von Erregungspunkten, welche an der Oberfläche von S ausgebreitet ist und die Dichtigkeit $d\Psi/dn$ hat. Das andere ²⁴ Integral können wir aber betrachten als das Potential einer Doppelschicht von Erregungspunkten, die derselben Fläche anliegen. Denken wir die eine Schicht mit der Dichtigkeit $-\Psi/\varepsilon$ auf der äusseren Seite der Oberfläche von S in der unendlich kleinen Entfernung $\frac{1}{2}\varepsilon$ von dieser Oberfläche ausgebreitet, die andere mit der Dichtigkeit $+\Psi/\varepsilon$ auf der inneren

Seite der Oberfläche von S auch in der unendlich kleinen Entfernung $\frac{1}{2}\varepsilon$ von dieser Oberfläche entfernt, so wird das Potential dieser Schichten dem ersten Integral in (7d) gleich sein. Somit lässt sich jede stetige und eindeutige Function Ψ , welche in allen Theilen des Raumes S der Gleichung genügt:

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

als Geschwindigkeitspotential von Erregungspunkten ausdrücken, die blos längs der Oberfläche von S ausgebreitet sind.

Hier aber hört die Aehnlichkeit mit den elektrischen Potentialfunctionen auf, indem diese letzteren sich stets ausdrücken lassen als Potentialfunctionen einer einfachen Schicht von Elektrizität an der Oberfläche des Raumes, was bei unseren Potentialen zwar im Allgemeinen auch der Fall ist, aber für eine unendlich grosse Zahl von bestimmten Werthen von k für eine jede gegebene geschlossene Oberfläche Ausnahmen erleidet. Es sind dies nämlich diejenigen Werthe von k , die den eigenen Tönen der eingeschlossenen Luftmasse entsprechen.

Man kann sich davon leicht an einem Beispiele überzeugen, indem man das Potential für eine gleichmässig und continuirlich mit Erregungspunkten belegte Kugelschale berechnet.

Wenn sämtliche Dimensionen des Raumes S sehr klein gegen die Wellenlänge sind, kann kr gegen 1 vernachlässigt werden, so oft r die Entfernung zweier innerhalb S gelegener Punkte ist. Unter diesen Umständen wird die Gleichung (7d):

$$4\pi \Psi_a = \int \Psi \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) d\omega - \int \frac{d\Psi}{dn} \frac{1}{r} d\omega.$$

Bei dieser Weglassung unendlich kleiner Grössen wird also Ψ eine Function, welche der Gleichung $\nabla \Psi = 0$ im Raume S genügt, und es folgt daraus, dass man in Räumen, deren Dimensionen gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, statt der Functionen, die der Gleichung $\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0$ genügen, stets unendlich wenig davon unterschiedene Functionen finden kann, die der Gleichung $\nabla \Psi = 0$ genügen.

Wendet man die Gleichung (7d) auf theilweis zusammen- ²⁵ stossende Räume S_1 und S_2 an, indem man die Elemente



ihrer nicht gemeinsamen Oberfläche mit $d\omega$, und $d\omega_n$, die des gemeinsamen Stückes ihrer Oberfläche mit $d\omega_0$ bezeichnet, unter n , die nach dem Inneren von S , unter n_n , die nach dem Inneren von S_n , gerichteten Normalen dieser Flächenelemente versteht, so hat man:

$$\begin{aligned} &\text{wenn innerhalb } S, \quad \nabla \Psi + k^2 \Psi = 0, \\ &\text{und innerhalb } S_n, \quad \nabla \Psi_n + k^2 \Psi_n = 0, \end{aligned}$$

der Punkt α, β, γ , von dem die Entfernungen r gerechnet werden, aber innerhalb S liegt, und wir unter dem Integralzeichen $[d\omega, + d\omega_0]$ schreiben, wo die Integration über sämtliche Elemente $d\omega$, und sämtliche $d\omega_0$ ausgedehnt werden soll:

$$\begin{aligned} 4\pi \Psi_\alpha &= \int \Psi, \frac{d}{dn} \left(\frac{\cos kr}{r} \right) [d\omega, + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi,}{dn} \frac{\cos kr}{r} [d\omega, + d\omega_0], \\ 0 &= \int \Psi_n, \frac{d}{dn_n} \left(\frac{\cos kr}{r} \right) [d\omega_n, + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi_n}{dn_n} \frac{\cos kr}{r} [d\omega_n, + d\omega_0]. \end{aligned}$$

Wenn nun an der gemeinsamen Trennungsfäche beider Räume:

$$\Psi, = \Psi_n, \quad \frac{d\Psi,}{dn}, = \frac{d\Psi_n}{dn_n} = - \frac{d\Psi_n}{dn_n},$$

ist, so giebt die Addition beider Gleichungen, da $dn, = -dn_n$:

$$\begin{aligned} 4\pi \Psi_\alpha &= \int \Psi, \frac{d}{dn} \left(\frac{\cos kr}{r} \right) d\omega, - \int \frac{d\Psi,}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega, \\ &+ \Psi_n, \frac{d}{dn_n} \left(\frac{\cos kr}{r} \right) d\omega_n - \int \frac{d\Psi_n}{dn_n} \frac{\cos kr}{r} d\omega_n. \end{aligned}$$

Die Function Ψ , erscheint also hier als Potential von Punkten ausgedrückt, die an der nicht gemeinsamen Oberfläche der Räume S , und S_n , liegen, während die Punkte der gemeinsamen Trennungsfäche ganz aus dem Integral verschwinden. Genau denselben Ausdruck erhält man aber für Ψ_n , wenn man den Punkt α, β, γ in den Raum S_n verlegt. Es sind also in diesem Falle Ψ , und Ψ_n , Potentiale derselben ausserhalb des gemeinsamen Raumes S , und S_n , liegenden Erregungspunkte, und beide Functionen müssen continuirlich ineinander übergehen.

Wenn wir also im Folgenden für das Geschwindigkeitspotential in verschiedenen Theilen eines zusammenhängenden Luftraumes verschiedene Ausdrücke Ψ , und Ψ_n , werden wählen

müssen, wird die Continuität an der Grenzfläche hergestellt zu sein, wenn in allen Punkten derselben:

$$\Psi, = \Psi_n, \text{ und } \frac{d\Psi,}{dn}, = \frac{d\Psi_n}{dn_n}, \text{ oder } = - \frac{d\Psi_n}{dn_n}.$$

§ 5. Verhalten in unendlicher Entfernung.

§ 5. Wir müssen noch die Grenzbedingungen aufstellen für solche unendlich entfernt gedachte Oberflächen, durch welche Schallwellen in den unendlichen Raum hinauslaufen, und jenseits welcher es keine Erregungspunkte mehr giebt. Wenn von einem einzelnen Punkte aus in der vorher unbewegten Luft eine Erschütterung ausgeht, so hat das Geschwindigkeitspotential bekanntlich die Form $F_{[r-a\theta]}/r$, wo F eine willkürliche Function, a die Schallgeschwindigkeit, r die Entfernung vom Erregungspunkte α, β, γ bezeichnet. Soll F einer einfach periodischen Bewegung von n Perioden in der Secunde entsprechen, so müssen wir ihm die Form geben $\cos [kr - 2\pi nt + \epsilon]/r$, wo $2\pi n = ak$, wie in (3a) festgesetzt ist. Haben wir nun eine beliebige Anzahl Schall erregender Punkte in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten, sodass das Geschwindigkeitspotential Ψ von der Form wird:

$$\Psi = \sum \left\{ A_a \frac{\cos [kr_a - 2\pi nt + g_a]}{r_a} \right\}, \quad (8)$$

wo r_a die Entfernung vom Punkte a , A_a und g_a Constanten bezeichnen, die für die verschiedenen Punkte verschieden sind, und setzen wir die Coordinaten x, y, z des Punktes, in dem die Schallbewegung bestimmt werden soll, gleich:

$$\rho \cos \omega, \quad \rho \sin \omega \cos \vartheta, \quad \rho \sin \omega \sin \vartheta,$$

für den Punkt a aber gleich:

$$\text{so ist:} \quad \alpha_a, \quad \beta_a, \quad \gamma_a,$$

$r = \sqrt{\rho^2 - 2\rho(\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega \cos \vartheta + \gamma \sin \omega \sin \vartheta) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, und für unendlich grosse Werthe von ρ wird:

$$r = \rho - \alpha \cos \omega - \beta \sin \omega \cos \vartheta - \gamma \sin \omega \sin \vartheta,$$

indem wir die weiteren Glieder vernachlässigen, welche ρ im Nenner enthalten und deshalb unendlich klein werden. Danach



wird nun der Werth von Ψ , wenn wir nur die Glieder von der Ordnung $1/\rho$ beibehalten:

$$27 \quad \Psi = \frac{\cos(k\rho - 2\pi nt)}{\rho} \sum \{ A_a \cos[k(\alpha_a \cos \omega + \beta_a \sin \omega \cos \vartheta + \gamma_a \sin \omega \sin \vartheta) - g_a] \} + \frac{\sin(k\rho - 2\pi nt)}{\rho} \sum \{ A_a \sin[k(\alpha_a \cos \omega + \beta_a \sin \omega \cos \vartheta + \gamma_a \sin \omega \sin \vartheta) - g_a] \}. \quad (8a)$$

Die beiden Summen in diesem Ausdruck sind von ρ unabhängig, dagegen Functionen von ω und ϑ . Wir können also schliesslich für unendlich grosse Werthe von ρ den Werth von Ψ auf die Form bringen:

$$\Psi = \mathfrak{A} \frac{\cos[k\rho - 2\pi nt + c]}{\rho}, \quad (8b)$$

wo $\mathfrak{A}$ und c Functionen von ω und ϑ sind.

Dieselbe Betrachtung lässt sich auch anwenden, wenn in der Nähe der Schall erregenden Punkte begrenzte feste Körper vorhanden sind in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten, insofern man an der Oberfläche dieser Körper periodisch wirkende Kräfte annehmen kann, welche die Bewegung der Lufttheilchen senkrecht gegen ihre Oberfläche zu vernichten im Stande sind. Ist der Raum durch irgend eine unendlich ausgedehnte Fläche nach einer Richtung begrenzt, so ist diese Betrachtung nicht unmittelbar anwendbar, weil man dann periodisch wirkende Kräfte an dieser Fläche bis in unendliche Entfernung hinaus haben würde. Wohl aber lässt sich einfach der Fall behandeln, wo der Raum durch eine unendliche Ebene begrenzt ist, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Man braucht sich zu den Erregungspunkten nur noch ihre Spiegelbilder hinter der Ebene hinzu zu denken, von beiden zusammen das Geschwindigkeitspotential zu nehmen, so erfüllt dies die Bedingung, dass an der Ebene $d\Psi/dn = 0$ sei, und es lassen sich auf ein solches Geschwindigkeitspotential dieselben Betrachtungen anwenden, als wenn nur endliche feste Körper in der Nähe wären.

Unter diesen Umständen ist also die Grenzbedingung, welche für die unendlich entfernten Theile des freien Raumes aufzustellen ist, die, dass das Bewegungspotential Ψ dort die in Gleichung (8b) angegebene Form habe.

Reciprocitätsgesetz. Setzen wir jetzt voraus, dass Ψ das Geschwindigkeitspotential eines Schallwellenzuges sei, der in dem Punkte a erregt wird, in dessen Nachbarschaft sich eine beliebige Anzahl fester begrenzter Körper befinden möge, sodass nur an dieser Stelle Ψ unendlich werde, wie:

$$A \frac{\cos k r_a}{r_a} \cos(2\pi nt),$$

sonst überall endlich und stetig bleibe, und in der unendlich grossen Entfernung ρ von derselben Form wie in Gleichung (8b) ²⁸ sei. Ausserdem möge an der Oberfläche der festen Körper die Gleichung $d\Psi/dn = 0$ stattfinden. Es sei ferner Φ das Geschwindigkeitspotential einer Schallbewegung, die im Punkte b erregt worden ist, sodass in unendlich kleiner Entfernung von b die Function Φ unendlich wird, wie:

$$\Phi = A \frac{\cos k r_b}{r_b} \cos(2\pi nt),$$

in unendlicher Entfernung ρ dagegen:

$$\Phi = \mathfrak{B} \frac{\cos[k\rho - 2\pi nt + \delta]}{\rho}$$

sei, wo $\mathfrak{B}$ und δ nach verschiedenen Richtungen vom Anfangspunkte der Coordinaten aus verschiedene Werthe haben; übrigens muss Φ wie Ψ überall sonst endlich sein, und an der Oberfläche der festen Körper $d\Phi/dn = 0$.

Wir wenden nun die Gleichung (7) auf einen Raum S an, der durch eine mit dem unendlich grossen Radius ρ um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebene Kugelschaale umschlossen ist, von welchem wir nur ausschliessen alle die Theile, die durch die festen Körper eingenommen sind. Für die Integration an den Punkten a und b , wo Ψ und Φ unendlich gross werden, findet dieselbe Betrachtung wie bei Gleichung (7c) statt. Wir erhalten:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 4\pi A [\Psi_b \cos(2\pi nt) - \Phi_a \cos 2\pi nt], \quad (9)$$

wo Ψ_b den Werth von Ψ im Punkte b , und Φ_a den von Φ im Punkte a bezeichnet. Die Integration nach $d\omega$ ist sowohl über die Oberflächen der vorhandenen festen Körper auszu-dehnen, an denen aber $d\Phi/dn = d\Psi/dn = 0$, sodass diese



Theile wegfallen, als auch über die Oberfläche der Kugel. Hier wird nun:

$$\Psi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\Psi}{dn} = \mathfrak{A} \mathfrak{B} h \sin(b-c).$$

Wenn wir nun bedenken, dass Ψ und Φ von der Form sein müssen:

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi' \cos(2\pi nt) + \Psi'' \sin(2\pi nt), \\ \Phi &= \Phi' \cos(2\pi nt) + \Phi'' \sin(2\pi nt),\end{aligned}$$

wo Ψ' , Φ' , Ψ'' und Φ'' von der Zeit unabhängige Grössen sind, so wird:

$$\begin{aligned}&\Psi_b \cos(2\pi nt) - \Phi_a \cos(2\pi nt) \\ &= \frac{1}{2}[\Psi_b' - \Phi_a'] + \frac{1}{2}[\Psi_b' - \Phi_a'] \cos(4\pi nt) + \frac{1}{2}[\Psi_b'' - \Phi_a''] \sin(4\pi nt).\end{aligned}$$

Da nun die Gleichung (9) für jeden Werth von t erfüllt sein muss, so muss einzeln gleich sein:

$$\begin{aligned}\Psi_b' - \Phi_a' &= 0, \\ \Psi_b'' - \Phi_a'' &= 0,\end{aligned}$$

$$\int \mathfrak{A} \mathfrak{B} \sin(b-c) d\omega = 0,$$

also auch:

$$\begin{aligned}\Psi_b &= \Psi_b' \cos(2\pi nt) + \Psi_b'' \sin(2\pi nt) \\ &= \Phi_a' \cos(2\pi nt) + \Phi_a'' \sin(2\pi nt) = \Phi_a.\end{aligned} \quad (9a)$$

Daraus geht der wichtige Satz hervor: Wenn in einem mit Luft gefüllten Raume, der theils von endlich ausgedehnten festen Körpern begrenzt, theils unbegrenzt ist, im Punkte a Schallwellen erregt werden, so ist das Geschwindigkeitspotential derselben in einem zweiten Punkte b ebenso gross, als es in a sein würde, wenn nicht in a , sondern in b Wellen von derselben Intensität erregt würden. Auch ist der Unterschied der Phasen des erregenden und erregten Punktes in beiden Fällen gleich.

Aus der nach der Gleichung (8b) gemachten Bemerkung geht hervor, dass dasselbe noch gilt, wenn der Raum von einer unendlichen Ebene theilweise begrenzt ist.

Ist Φ das Geschwindigkeitspotential von Schallwellen, die eine grössere Zahl von Erregungspunkten b_1, b_2 etc. b_m haben, also von der Form:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_m,$$

wo Φ_m das Potential der in b_m erregten Schallwellen ist, so wird:

$$\sum [\Psi_{bm}] = \sum [\Phi_{ma}].$$

In dem Falle, wo die durch Ψ dargestellte Schallbewegung nicht davon herrührt, dass ein tönender Punkt a sich im freien Raume befindet, sondern dass an irgend einem Oberflächen-elemente der Begrenzung des Luftraumes, das wir mit da bezeichnen wollen, $d\Psi/dn$ nicht Null, sondern:

$$\frac{d\Psi_a}{dn} = B \cos 2\pi nt$$

ist, so wird aus der Gleichung (9):

$$4\pi A \Psi_b = -B \Phi_a da. \quad (9c)$$

Dieser Satz kann dazu dienen, um in solchen Fällen, wo man die Schallbewegung der Luft vollständig nur für gewisse besondere Lagen des schallerregenden Punktes bestimmen kann, doch wenigstens für alle anderen Lagen eines oder beliebig vieler schallerregender Punkte die Erregung in jenen ersten Stellen des Raumes zu bestimmen. Namentlich ist der Satz wichtig, wenn man die Schallbewegung für eine jede entfernte Lage des tönenden Punktes bestimmen kann, weil man dann rückwärts auch für jede andere Lage des tönenden Punktes die Fernwirkung bestimmen kann, auf die es bei den akustischen Versuchen meistens allein ankommt.

§ 6. Wellen in offener Röhre.

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über, die Bewegung der Luft am offenen Ende einer cylindrischen Röhre zu bestimmen, wenn im Innern der Röhre durch irgend eine Ursache ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, zu Stande gekommen sind, und sich die Bewegung durch die Mündung der Röhre der äusseren Luft mittheilt, welche übrigens zunächst durch keine anderen Schall erregenden Kräfte afficirt sein möge.

Die Form der Röhre sei im Allgemeinen cylindrisch von beliebigem Querschnitte; nur in geringer Entfernung von der Mündung möge dieselbe von der cylindrischen Form abweichen dürfen. Wir schliessen also Röhren mit trompetenförmigen oder halb gedeckten Mündungen in unsere Untersuchung ein.



Uebrigens setzen wir voraus, dass sowohl die Dimensionen der Oeffnung, wie auch die Länge des nicht cylindrischen Theils der Röhre gegen die Wellenlänge verschwindend klein seien. Den äusseren Raum denken wir uns der Einfachheit wegen nach einer Seite begrenzt durch eine unendliche Ebene, welche senkrecht gegen den cylindrischen Theil der Röhrenwand gerichtet ist, und in welcher die Röhrenmündung selbst liegt. Diese Ebene sei die yz -Ebene, die Röhre befinde sich auf Seite der negativen x , deren Axe im Innern der Röhre liegen und dem cylindrischen Theile ihrer Wand parallel sein soll. Auf Seite der positiven x sei der Luftraum unbegrenzt. Nach der gemachten Annahme betrachten wir ky und kz als verschwindend klein gegen 1, wenn y und z Coordinaten eines Punktes der Röhrenmündung sind, und ebenso kx , wenn x einem Punkte des nicht cylindrischen Theils der Röhrenwand angehört.

Unsere Voraussetzungen über die Natur der Bewegung, welche wir untersuchen wollen, drücken sich nun in folgenden Gleichungen aus. Erstens nehmen wir an, dass irgendwo in der Röhre sich ein Abschnitt befinde, zwischen welchem und der Mündung keine äusseren Kräfte auf die Luftmasse einwirken, und in welchem das Geschwindigkeitspotential ψ unendlich wenig verschieden sei von der Form:

$$\psi = \left(\frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx \right) \cos(2\pi nt) + \left(\frac{\mathfrak{A}}{k} \sin kx + \mathfrak{B} \cos kx \right) \sin(2\pi nt).$$

Dies ist die allgemeinste Form, welche ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen angehören, haben können. Zur weiteren Vereinfachung wollen wir gleich den Anfang der Zeit t so festsetzen, was offenbar immer möglich ist, dass $\mathfrak{A} = 0$ wird, und somit ψ in dem besagten Abschnitte der Röhre die Form erhält:

$$\psi = \left(\frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx \right) \cos(2\pi nt) + \mathfrak{B} \cos kx \sin(2\pi nt). \quad (10)$$

Auf Seite der positiven x denke man sich zwei halbe Kugelflächen von sehr grossem Radius construirt, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Zwischen beiden soll ψ

die Form kugelliger Wellen haben, die in den unendlichen Raum hinauslaufen, nämlich, wenn wir wie früher die Entfernung vom Anfang der Coordinaten mit ϱ bezeichnen:

$$\psi = M \frac{\cos(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho} - M_1 \frac{\sin(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho}, \quad (10a)$$

wo M und M_1 unabhängig von ϱ , aber möglicher Weise abhängig von den Winkeln sind, die ϱ mit den Coordinatenachsen bildet.

Jenseits der äusseren jener beiden Kugelflächen mag noch ein Raum liegen, wo die Schallbewegung erst beginnt; aber zwischen der Region der ebenen Wellen in der Röhre, deren Bewegung in der Gleichung (10) gegeben ist, und der Region der Kugelwellen von der Form (10a) soll die Stärke und Phase der Luftschwingungen stationär geworden sein, also ψ hier überall von der Form sein:

$$\psi = \psi' \cos(2\pi nt) + \psi'' \sin(2\pi nt), \quad (10b)$$

worin ψ' und ψ'' Functionen der Coordinaten, aber unabhängig von der Zeit sind und in diesem ganzen Theile des Luftraumes die Bedingung erfüllen:

$$0 = k^2 \psi + \nabla^2 \psi. \quad (3b)$$

Endlich muss noch längs der ganzen Wand der Röhre und an dem Theile der yz -Ebene, welcher nicht von der Röhrenmündung eingenommen ist, sein:

$$\frac{d\psi}{dn} = 0. \quad (10c)$$

Wir wollen nun die Beziehungen zwischen den Coefficienten $A, B, \mathfrak{B}, M$ und M_1 der Gleichungen (10) und (10a) mittels des erweiterten Green'schen Theorems aufsuchen.

Die erste Anwendung der Gleichung (7) machen wir auf ³² den inneren Raum der Röhre, diesen von der Ebene der Mündung bis zu einer damit parallelen Ebene genommen, welche in der Region der ebenen Wellen liegt. Die Function Φ der Gleichung (7) setzen wir hier:

$$\Phi = \cos kx.$$

Da sowohl Φ wie ψ die Gleichung (3b) erfüllen innerhalb des hier betrachteten Raumes, so reducirt sich Gleichung (7) auf:

$$\int \psi \frac{d^2 \Phi}{dn^2} d\omega - \int \Phi \frac{d^2 \psi}{dn^2} d\omega = 0. \quad (7b)$$



Nun ist $d\psi/dn$ nur an der Mündung und in dem Querschnitte der Röhre von Null verschieden, dort ist es gleich $-d\psi/dx$, hier gleich $+d\psi/dx$. Es wird also:

$$\int \Phi \frac{d\psi}{dn} d\omega = -\cos 2\pi nt \int \frac{d\psi'}{dx} d\omega - \sin 2\pi nt \int \frac{d\psi''}{dx} d\omega \\ + Q(A \cos kx - Bk \sin kx) \cos kx \cos(2\pi nt) \\ - Q\mathfrak{B}k \sin kx \cos kx \sin(2\pi nt).$$

Durch den Horizontalstrich $\overline{\psi}$ oder $d\overline{\psi}/dx$ sollen hier und fortan die Werthe bezeichnet werden, welche die betreffenden Functionen in der Ebene der Röhrenmündung haben. Mit Q ist die Grösse des Querschnitts des cylindrischen Theils der Röhre bezeichnet. Dagegen ist $d\Phi/dn$ am cylindrischen Theile der Röhrenwand und in der Oeffnung der Röhre gleich Null. Von Null verschieden ist es nur in dem Querschnitte der Röhre, wo es den Werth $-k \sin kx$ hat, und in dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand. Nennt man den Winkel, den die nach innen gerichtete Normale der Röhrenwand mit den positiven x bildet, β , so ist, da $d\Phi/dy = d\Phi/dz = 0$:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \cos \beta \frac{d\Phi}{dx} = -k \sin kx \cos \beta.$$

Wir haben also:

$$\int \psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega = -Q(A \sin kx + Bk \cos kx) \sin kx \cos(2\pi nt) \\ - Qk\mathfrak{B} \cos kx \sin kx \sin(2\pi nt) \\ + k \cos(2\pi nt) \int \psi' \sin kx \cos \beta d\omega \\ + k \sin(2\pi nt) \int \psi'' \sin kx \cos \beta d\omega.$$

Wenn man diese Werthe der Integrale in die Gleichung (7b) einführt, und einzeln die mit $\cos(2\pi nt)$ und die mit $\sin(2\pi nt)$ multiplicirten Glieder gleich Null setzt, so erhält man:

$$AQ = \int \frac{d\overline{\psi}'}{dx} d\omega + k \int \psi' \sin kx \cos \beta d\omega, \quad (11)$$

$$0 = \int \frac{d\overline{\psi}''}{dx} d\omega + k \int \psi'' \sin kx \cos \beta d\omega. \quad (11a)$$

In beiden Gleichungen ist das erste Integral über die ganze Oeffnung der Röhre zu nehmen, das zweite über die Wand der Röhre; doch wollen wir gleich bemerken, dass an allen

Stellen, wo $\cos \beta$ von Null verschieden ist, kx nach unserer Annahme eine verschwindend kleine Grösse wird. In rein cylindrischen Röhren mit ganz offener oder theilweise gedeckter Mündung fallen diese letzteren Integrale ganz weg.

Die zweite Anwendung des Theorems (7) machen wir auf den freien Raum auf Seite der positiven x , der einerseits begrenzt gedacht wird durch die yz -Ebene, andererseits durch eine um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt construirte halbe Kugelfläche, welche in die Region der kugligen Wellen fällt. Innerhalb dieses Raumes liege der Punkt, dessen Coordinaten α, β, γ sind. Die Entfernung des Punktes x, y, z von ihm sei r , während r'' die Entfernung von dem Punkte sei, dessen Coordinaten $- \alpha, \beta, \gamma$ sind, und der ausserhalb des hier betrachteten Raumes liegt. Die Function Φ der Gleichung (7) setzen wir:

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r} + \frac{1}{2} \frac{\cos(kr'' - 2\pi nt)}{r''}.$$

Indem wir nun die Gleichung (7) anwenden mit Beachtung des in (7c) berücksichtigten Umstandes der Unstetigkeit von Φ im Punkte α, β, γ , erhalten wir:

$$\int \psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\psi}{dn} d\omega = 2\pi \cos(2\pi nt) \psi_a, \quad (11b)$$

wo ψ_a den Werth von ψ im Punkte α, β, γ bezeichnet.

Wie im Falle der Gleichung (9) wird die Grösse $\Phi d\psi/dn - \psi d\Phi/dn$ an der weit entfernten Kugelfläche eine von der Zeit unabhängige Grösse, ebenso natürlich auch das Integral dieser Grösse über die Kugelfläche, welches wir mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wollen. An der yz -Ebene dagegen ist $d\Phi/dn$ überall gleich Null, ebenso $d\psi/dn$ überall mit Ausnahme der Oeffnung, wo es gleich $d\psi/dx$ ist; Φ aber bekommt den Werth:

$$\overline{\Phi} = \frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r},$$

weil an der yz -Ebene $r = r''$ ist. So erhalten wir die Gleichung:

$$\mathfrak{S} - \int \frac{d\overline{\psi}}{dx} \cos(kr - 2\pi nt) d\omega = 2\pi \cos(2\pi nt) \psi_a. \quad (11c)$$



Setzen wir nun nach Gleichung (10b):

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi nt) + \Psi'' \sin(2\pi nt), \quad (10b)$$

so können wir in der Gleichung (11c), welche für alle Werthe von t erfüllt sein muss, die Quadrate und Producte von $\cos(2\pi nt)$ und $\sin(2\pi nt)$ durch $\cos(4\pi nt)$ und $\sin(4\pi nt)$ ausdrücken und dann einzeln gleich Null setzen: 1) die Glieder, welche nach der Zeit constant sind, 2) die Glieder, welche mit $\cos(4\pi nt)$ multiplicirt sind und 3) die mit $\sin(4\pi nt)$ multiplicirt, und erhalten dadurch folgende drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \pi \Psi'_a + \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\Psi'}{dx} \frac{\cos kr}{r} + \frac{d\Psi''}{dx} \frac{\sin kr}{r} \right) d\omega, \\ 0 &= \pi \Psi'_a + \frac{1}{2} \int \frac{d\Psi'}{dx} \frac{\cos kr}{r} d\omega - \frac{1}{2} \int \frac{d\Psi''}{dx} \frac{\sin kr}{r} d\omega, \\ 0 &= \pi \Psi'_a + \frac{1}{2} \int \frac{d\Psi'}{dx} \frac{\sin kr}{r} d\omega + \frac{1}{2} \int \frac{d\Psi''}{dx} \frac{\cos kr}{r} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (11d)$$

Die Integrationen sind über die Oeffnung der Röhre auszudehnen. Durch die beiden letzten Gleichungen ist der Werth der Functionen Ψ' und Ψ'' für alle Punkte des Raumes auf Seite der positiven x gegeben, wenn die Werthe von $d\Psi/dx$ und $d\Psi''/dx$ in der Oeffnung der Röhre bekannt sind. Die erste Gleichung folgt aus den beiden anderen mittels des Theorems (7d). Der Werth von Ψ_a wird demnach:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_a &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\Psi'}{dx} \frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\Psi''}{dx} \frac{\sin(kr - 2\pi nt)}{r} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (11e)$$

Wenn wir statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcordinaten einführen, nämlich:

$$\alpha = \rho \cos \omega, \quad \beta = \rho \sin \omega \cos \vartheta, \quad \gamma = \rho \sin \omega \sin \vartheta,$$

so wird in unendlich grosser Entfernung ρ vom Anfangspunkte der Coordinaten mittels einer ähnlichen Umformung, wie sie in (8a) ausgeführt ist:

$$\Psi = M \frac{\cos(k\rho - 2\pi nt)}{\rho} - M_1 \frac{\sin(k\rho - 2\pi nt)}{\rho}, \quad (10a)$$

wo:

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{1}{2\pi} \iint \left(\frac{d\Psi'}{dx} \cos k\varepsilon + \frac{d\Psi''}{dx} \sin k\varepsilon \right) dy dz, \\ M_1 &= -\frac{1}{2\pi} \iint \left(\frac{d\Psi'}{dx} \cos k\varepsilon - \frac{d\Psi''}{dx} \sin k\varepsilon \right) dy dz, \end{aligned} \right\} \quad (11f) \quad 35$$

$$\varepsilon = y \sin \omega \cos \vartheta + z \sin \omega \sin \vartheta,$$

und wo die Integrationen über die Oeffnung der Röhre auszudehnen sind.

Eine dritte Anwendung des erweiterten Green'schen Satzes machen wir auf den Raum, welcher zwischen einem Querschnitte der Röhre in der Region der ebenen Wellen und einer halben Kugelfläche in der Region der kugeligten Wellen liegt. Für die Functionen Ψ und Φ der Gleichung (7) setzen wir Ψ' und Ψ'' und haben wie in (7b):

$$\int \Psi' \frac{d\Psi''}{dn} d\omega - \int \Psi'' \frac{d\Psi'}{dn} d\omega = 0. \quad (7b)$$

Da längs der ganzen festen Wand des Raumes $d\Psi'/dn = d\Psi''/dn = 0$, so ist die Integration nur über den Querschnitt der Röhre und die Halbkugel auszudehnen. Im Querschnitt ist:

$$\Psi' = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx,$$

$$\Psi'' = \mathfrak{B} \cos kx,$$

$$\Psi' \frac{d\Psi''}{dx} - \Psi'' \frac{d\Psi'}{dx} = -A\mathfrak{B}.$$

An der Kugelfläche ist:

$$\Psi' = M \frac{\cos k\rho}{\rho} + M_1 \frac{\sin k\rho}{\rho},$$

$$\Psi'' = M \frac{\sin k\rho}{\rho} - M_1 \frac{\cos k\rho}{\rho},$$

$$-\Psi' \frac{d\Psi''}{d\rho} + \Psi'' \frac{d\Psi'}{d\rho} = -\frac{k(M^2 + M_1^2)}{\rho^2}.$$

Wenn man die Integrale nimmt, wird:

$$0 = A\mathfrak{B}Q + k \int_0^{1/2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int d\vartheta (M^2 + M_1^2) \sin \omega. \quad (11g)$$



36 Endlich wenden wir noch das Theorem (7) auf den inneren Raum der Röhre an von der Ebene der Mündung bis zu einem Querschnitt in der Region der ebenen Wellen für die Function Ψ' und:

$$\Phi = \sin kx, \\ \int \Psi' \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi'}{dn} = 0. \quad (7b)$$

Am Querschnitte der Röhre wird:

$$\Psi' \frac{d\Phi}{dx} - \Phi \frac{d\Psi'}{dx} = kB.$$

An der Wand der Röhre wird $d\Psi'/dn = 0$, an ihrer Mündung $\Phi = 0$, sodass das zweite Integral der Gleichung (7b) verschwindet. Im ersten wird an der Wand der Röhre:

$$\frac{d\Phi}{dn} = k \cos kx \cos \beta,$$

an der Mündung $d\Phi/dn = -k$. Also haben wir:

$$QB + \int \Psi' \cos kx \cos \beta d\omega - \int \bar{\Psi} d\omega = 0, \quad (11h)$$

wo das erste Integral über den nicht cylindrischen Theil der Röhrenwand auszudehnen ist, so weit $\cos \beta$ sich von Null unterscheidet, das zweite über die Oeffnung der Röhre.

Wir haben jetzt in den Gleichungen (11), (11a), (11d), (11f), (11g), (11h) die Werthe der Coëfficienten $A, B, \mathfrak{B}, M, M_1$ und der Functionen Ψ' und Ψ'' im freien Raume zurückgeführt auf Integrale, in denen nur die Werthe vorkommen, welche Ψ', Ψ'' und ihre Differentialquotienten theils in der Mündung der Röhre selbst, theils an dem nicht cylindrischen Theile ihrer Wand haben. Wir wollen jetzt die Vereinfachungen dieser Ausdrücke einführen, welche daraus herfliessen, dass die Dimensionen der Mündung und die Länge des nicht cylindrischen Theiles der Röhre unserer Annahme nach gegen die Wellenlänge verschwindend klein sein sollen. Vernachlässigen wir Grössen von der Ordnung $k\epsilon$ gegen 1, so nehmen unsere Gleichungen (11), (11a) und (11f) folgende Gestalt an:

$$AQ = \int \frac{d\Psi'}{dx} d\omega, \quad (12)$$

$$0 = \int \frac{d\bar{\Psi}'}{dx} d\omega + k^2 \int \Psi'' x \cos \beta d\omega, \quad (12a) \quad 37$$

$$M = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\bar{\Psi}'}{dx} d\omega = -\frac{1}{2\pi} AQ. \quad (12b)$$

Für den Werth von M_1 ist zu bemerken, dass das von k unabhängige Glied desselben $\int d\bar{\Psi}''/dx d\omega$ nach (11a) selbst eine verschwindend kleine Grösse ist, dass ferner auch das mit der ersten Potenz von k multiplicirte $\int (d\bar{\Psi}''/dx) \epsilon d\omega$ der Null gleich gemacht werden kann, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten, über den bisher nur bestimmt ist, dass er in der Oeffnung der Röhre liegen solle, in den Schwerpunkt einer Masse verlegt, welche mit der Dichtigkeit $d\bar{\Psi}''/dx$ über die Fläche der Oeffnung verbreitet ist; also reducirt sich der Werth von M_1 auf verschwindend kleine Grössen, nämlich:

$$M_1 = \frac{k^2}{2\pi} \int \Psi'' x \cos \beta d\omega + \frac{k^2}{4\pi} \int \frac{d\bar{\Psi}''}{dx} \epsilon^2 d\omega. \quad (12c)$$

Wir werden also M_1 gegen M vernachlässigen und letzteres als unabhängig von den Winkeln ω und θ betrachten dürfen, also aus (11g) erhalten:

$$A\mathfrak{B}Q = -2\pi kM^2,$$

oder mit Berücksichtigung von:

$$AQ = -2\pi M, \quad (12b)$$

$$\mathfrak{B} = kM = -\frac{k}{2\pi} AQ, \quad (12d)$$

endlich:

$$QB = \int \bar{\Psi} d\omega - \int \Psi' \cos \beta d\omega. \quad (12e)$$

Da nun übrigens nach (11e) in der Ebene der Mündung mit Vernachlässigung kleiner Grössen:

$$\bar{\Psi}' = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\bar{\Psi}'}{dx} \frac{d\omega}{r}$$

und:

$$M = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\bar{\Psi}'}{dx} d\omega = -\frac{1}{2\pi} AQ, \quad (12b)$$

so sind M oder AQ und $\bar{\Psi}'$ Grössen von gleicher Ordnung. Nun können wir die Gleichung von (12e) schreiben:

$$QB = \pm \iint \Psi' dy dz,$$



wo die Integration über alle Werthe von x und y auszudehnen ist, welche der Oeffnung und Wand der Röhre angehören, und das + Zeichen sowohl an der Oeffnung als an denjenigen Theilen der Wand zu nehmen ist, deren Normale mit den negativen x einen spitzen Winkel bildet, das - Zeichen an den Theilen, deren Normale mit den positiven x einen spitzen Winkel bildet. QB ist also gleich den Werthen von Ψ' in der Nähe der Oeffnung integrirt über eine Fläche von der Grösse Q , also ist B von der Grössenordnung Ψ' oder AQ/ϵ . Wenn also der Querschnitt der Röhre von derselben Ordnung kleiner Grössen wie die Oeffnung, d. h. von der Ordnung ϵ^2 ist, ist B von der Ordnung $A\epsilon$. Genauer lässt sich bei der Allgemeinheit unserer Annahmen das Verhältniss B/A nicht bestimmen. Wir werden später bei den Beispielen sehen, dass es von der Form der Mündung abhängt, von welcher wir das Verhältniss B/A unabhängig gefunden haben, und dass es nicht merklich von dem Werthe von k abhängt, so lange der Querschnitt der Röhre und die Länge des nicht cylindrischen Theiles als verschwindend gegen die Wellenlänge zu betrachten sind. Ist übrigens die Oeffnung der Röhre sehr klein gegen den Querschnitt, so kann B/A jeden beliebigen grösseren Werth erreichen.

Innerhalb der tieferen Theile der Röhre ist also, wenn wir setzen:

$$\frac{kB}{A} = -\tan k\alpha, \quad (12f)$$

$$\Psi = \frac{A}{k \cos k\alpha} \sin k(x - \alpha) \cos(2\pi nt) - \frac{AkQ}{2\pi} \cos kx \sin(2\pi nt), \quad (12g)$$

und dazu gehört die Bewegung in den entfernten Stellen des freien Raumes, indem wir M_1 gegen M vernachlässigen,

$$\Psi = -\frac{AQ}{2\pi} \frac{\cos(kq - 2\pi nt)}{q}, \quad (12h)$$

in welchen beiden Gleichungen A eine willkürliche Constante ist, und α für jede besondere Röhrenform besonders bestimmt werden muss.

Die Natur des hier behandelten Problems wird noch klarer,

wenn man auf den Grenzfall übergeht, wo $k = 0$ wird. Dann werden die beiden Functionen Ψ' und Ψ'' voneinander unabhängig, und es entstehen aus unserem Problem folgende zwei Aufgaben:

1) Es ist eine Function Ψ' zu suchen, welche in dem ganzen betrachteten Raume der Bedingung genügt, dass:

$$\nabla \Psi' = 0,$$

welche für grosse negative x übergeht in $Ax + B$, für grosse positive in $-AQ/2\pi q$, und für die längs der ganzen festen Wand $d\Psi'/dn = 0$ ist. Es ist dies mathematisch dieselbe Aufgabe, als hätten wir einen homogenen elektrischen Leiter von der Gestalt unseres Luftraumes, welchen ein elektrischer Strom von bestimmter Intensität (AQ , wenn das Leitungsvermögen des Stoffes gleich 1 ist) durchfliesst, der aus dem cylindrischen Theile in den unendlichen Raum übergeht. Wir nennen bekanntlich den Leitungswiderstand zweier Leiter gleich, wenn bei gleicher Intensität des Stromes ihre Endflächen constanten Potentials sind und dieselbe Differenz des Potentials zeigen. Nun ist in irgend einem Querschnitte des cylindrischen Theiles die Potentialfunction $Ax + B$, für unendliche Entfernung im freien Raume Null. Denken wir uns dagegen den cylindrischen Leiter cylindrisch fortgesetzt und überall die Potentialfunction gleich $Ax + B$, so wird sie Null, wenn $x = -B/A = \alpha$. Es ist also $-(x - \alpha)$ die Länge eines cylindrischen Leiters von demselben Material, welcher denselben elektrischen Widerstand bietet wie der Leiter von Gestalt unseres Luftraumes, gerechnet von einem Querschnitte des cylindrischen Theiles in der Entfernung $-x$ von der Mündung bis in unendliche Entfernung im freien Raume. Nach der in der Elektrizitätslehre gebräuchlichen Terminologie würde also $-(x - \alpha)$ die reducirte Länge jenes Leiters genannt werden können, und wir wollen dieselbe Benennung auch hier brauchen. Die Constante B oder α verschwindet also nicht mit k zugleich, obgleich andererseits einzusehen ist, dass sie meistens nicht gross sein kann, da der Widerstand unendlich ausgedehnter Leiter, wie der der Erde, immer sehr klein ist verglichen mit dem Widerstande cylindrischer Leiter von dem-



selben Material, aus denen die Elektrizität in den unendlichen Leiter ausströmt, und es folgt auch weiter aus den bekannten Theoremen über Elektrizitätsleitung, dass a desto grösser werden muss, je enger die Mündung der Röhre gemacht wird, was sich auch in den akustischen Versuchen durch die Veränderung des Tones der Röhren zeigt, dessen Abhängigkeit vom Werthe von a wir unten feststellen werden.

Wenn die Oeffnung sehr klein und kreisförmig ist, während die den Cylinder schliessende Wand in ihrer Nähe nahezu eben ist, lässt sich annehmen, dass der Widerstand hauptsächlich nur von den dicht bei der Oeffnung gelegenen Theilen herrührt, wo die Bahn der Strömung am engsten ist. Der Widerstand einer kreisförmigen Oeffnung vom Radius R in einer isolirenden Ebene, welche zwei unendlich ausgedehnte Leiter voneinander trennt, ist aber ausgedrückt durch die Länge l eines Cylinders vom Querschnitt Q :

$$l = \frac{Q}{2R}, \quad (12i)$$

und dies würde in diesem Falle auch der Werth von $-B/A$ sein.

2) Es ist eine Function Ψ'/k zu suchen, welche im ganzen betrachteten Raume der Bedingung genügt, dass $\nabla \Psi' = 0$, welche für grosse Entfernungen von der Mündung sowohl auf Seite der negativen wie der positiven x wird:

$$\frac{1}{k} \Psi' = -\frac{AQ}{2\pi}$$

und längs der ganzen festen Wand des Luftraumes $d\Psi/dn = 0$. Offenbar ist unter diesen Umständen Ψ' im ganzen Raume constant. Hierbei wird dann ersichtlich, dass in der Oeffnung nicht blos, wie wir schon gesehen, die Grösse $\int \frac{d\Psi'}{dx} d\omega$, sondern auch $d\Psi'/dx$ selbst mit k zugleich verschwindet.

Die bisher gewonnenen Sätze lassen nun eine Reihe allgemeiner Folgerungen ziehen nicht blos über die Lage der Schwingungs-Minima und Maxima (Knoten und Bäuche der Schwingungen) und die davon abhängende Höhe der natürlichen Töne der Röhre, die wir als Töne stärkster Re-

sonanz charakterisiren können, welche Aufgaben schon die bisherigen Theorien mehr oder weniger genügend behandelt haben, sondern sie geben uns für eine Reihe besonderer Erregungsweisen der Töne auch bestimmte Auskunft über die Stärke und Phasen der in der Röhre erregten Schwingungen.

Die Geschwindigkeit der Lufttheilchen ist aus (12a) berechnet:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{A}{\cos ka} \cos k(x-a) \cos(2\pi nt) + \frac{Ak^2 Q}{2\pi} \sin kx \sin(2\pi nt) \quad (13)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} &= J \cos(2\pi nt + \tau), \\ \text{wenn} \\ J &= A \sqrt{\frac{\cos^2 k(x-a)}{\cos^2 ka} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 kx}, \\ \text{tang } \tau &= -\frac{k^2 Q \sin kx \cos ka}{2\pi \cos k(x-a)}. \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

Die Werthe von x , für welche J^2 ein Maximum oder Minimum wird, werden gefunden durch die Gleichung:

$$\text{tang } 2k(x-a) = \frac{k^4 Q^2 \sin ka \cos^3 ka}{2\pi^2 \left(1 - \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \cos^2 ka\right)}.$$

Wenn x_0 ein Werth ist, der für x gesetzt diese Gleichung erfüllt, so wird sie auch erfüllt durch:

$$x = x_0 + a \frac{\lambda}{4} = x_0 + \frac{\pi}{2k},$$

worin a eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Die Maxima und Minima der Schwingung liegen also in der Röhre um Viertelwellenlängen von einander entfernt. Sie liegen aber nicht nothwendig um ein genaues Vielfache einer Viertelwellenlänge von der Oeffnung der Röhre entfernt. Wenn, wie wir im Folgenden immer annehmen wollen, $k^2 Q$ eine unendlich kleine Grösse ist, so wird mit Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung die Gleichung (13b):

$$\text{tang } 2k(x-a) = 0.$$



Dann wird J^2 ein Maximum J^2 , wenn:

$$k(x - \alpha) = a\pi, \text{ also: } \cos k(x - \alpha) = \pm 1,$$

$$J^2 = \frac{A^2}{\cos^2 ka},$$

und J^2 wird ein Minimum J_{min}^2 , wenn:

$$k(x - \alpha) = (a + \frac{1}{2})\pi, \text{ also: } \cos k(x - \alpha) = 0,$$

$$J_{\text{min}}^2 = A^2 \frac{k^2 Q^2}{4\pi^2} \cos^2 ka.$$

Denken wir uns die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt, so würde in der kleinen Entfernung α vor der Oeffnung ein Maximum der Schwingung liegen. Denken wir uns die Entfernungen der Querschnitte der Röhre von diesem um die Länge α vor der Oeffnung in der Axe der Röhre gelegenen Punkte gezählt und nennen diese Entfernungen die reducirten Längen des betreffenden Röhrenstückes, so erhalten wir Maxima der Schwingung überall, wo die reducirte Länge gleich einem geraden Vielfachen der Viertelwellenlänge und Minima der Schwingung (Knotenflächen), wo die reducirte Länge der Röhre einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge gleich ist. In den Knotenflächen herrscht aber nicht absolute Ruhe, sondern die Bewegung wird nur sehr klein.

Am Orte der Maxima der Schwingung wird $\tan \tau$ gleich einer unendlich kleinen Grösse, also $\tau = a\pi$, am Orte der Minima wird $\tan \tau = \infty$, also $\tau = (a + \frac{1}{2})\pi$, folglich sind die Phasen der Bewegung am Orte der Maxima und Minima um eine Viertelschwingungsdauer verschieden.

Nach Gleichung (1f) ist die Verdichtung der Luft, wo keine äusseren Kräfte wirken:

$$\eta = -\frac{1}{a^2} \frac{d\Psi}{dt},$$

also in unserem Falle:

$$\eta = \frac{A}{a \cos ka} \sin k(x - \alpha) \sin(2\pi nt) + \frac{Ak^2 Q}{2\pi a} \cos kx \cos(2\pi nt) \quad (14)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= L \sin(2\pi nt) + \tau, \\ \text{wenn} \\ L &= \frac{A}{a} \sqrt{\frac{\sin^2 k(x - \alpha)}{\cos^2 ka} + \frac{k^2 Q^2 \cos^2 kx}{4\pi^2}}, \\ \tan \tau &= \frac{k^2 Q \cos kx \cos ka}{2\pi \sin k(x - \alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

Die Bedingungsgleichung, welche die Werthe von x giebt, für welche L^2 ein Maximum oder Minimum wird, ist dieselbe wie (13b), welche oben für die Grenzwerte von J^2 aufgestellt ist, aber wo letzteres ein Maximum ist, wird L^2 ein Minimum, und umgekehrt. Wo L ein Maximum, wird $\tan \tau = 0$ (oder vielmehr gleich einer verschwindend kleinen Grösse), also:

$$\eta = \pm \frac{A}{a \cos ka} \sin(2\pi nt), \quad \frac{d\Psi}{dx} = \pm \frac{Ak^2 Q \cos ka}{2\pi} \sin(2\pi nt),$$

wo L^2 ein Minimum ist, wird $\tan \tau = \infty$,

$$\eta = \pm \frac{Ak^2 Q \cos ka}{2\pi a} \cos(2\pi nt), \quad \frac{d\Psi}{dx} = \pm \frac{A}{\cos ka} \cos(2\pi nt).$$

An diesen Stellen also fällt das Maximum der Verdichtung mit dem Maximum der Geschwindigkeit in der Zeit zusammen, nicht aber an den zwischenliegenden Stellen. Denn wo weder $\sin k(x - \alpha)$ noch $\cos k(x - \alpha)$ der Null nahe sind, sind sowohl $\tan \tau$ als $\tan \tau$, sehr kleine Grössen, und es wird also nahehin:

$$\eta = L \sin(2\pi nt), \quad \frac{d\Psi}{dx} = J \cos(2\pi nt),$$

sodass hier die Maxima des Druckes und der Geschwindigkeit nahehin um eine Viertel-Undulationszeit auseinanderfallen.

Denkt man sich die ebenen Wellen bis zur Oeffnung der Röhre, wo $x = 0$, fortgesetzt, so wird dort $\tan \tau = 0$, dagegen:

$$\tan \tau = -\frac{k^2 Q}{2\pi} \cotang ka.$$

Nun ist im Allgemeinen $\tan ka$ eine kleine Grösse erster Ordnung, $k^2 Q$ eine solche zweiter Ordnung, also $\tan \tau$, sehr klein und τ , nahe an Null. Aber es kann auch für besondere Röhrenformen $a = 0$ werden, dann würde $\tau = \frac{1}{2}\pi$. Im ersteren Falle würden in der Oeffnung die Maxima der Geschwindig-



keit und der Verdichtung um eine Viertelundulation der Zeit nach auseinander liegen, im zweiten Falle zusammenfallen. Poissons Voraussetzung, dass die Verdichtung in der Oeffnung gleich der Geschwindigkeit multiplicirt mit einer sehr kleinen Constanten sei, ist also nur in einem besonderen Falle richtig, den er allerdings als den allgemeinen betrachtete. Auch in diesem Falle ist sie übrigens nur richtig, wenn man sich erlaubt, die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt zu denken, aber nicht, wenn man die wirklich in der Oeffnung stattfindenden mittleren Werthe der Geschwindigkeit und Verdichtung nimmt.

Was die Lage der einzelnen Wellenphasen in einem gegebenen Augenblicke betrifft, so finden wir die Lage der Geschwindigkeitsmaxima in der Region der ebenen Wellen, indem wir $d^2\psi/dx^2 = 0$ setzen, oder auch $\psi = 0$, da hier $d^2\psi/dx^2 + k^2\psi = 0$. Also:

$$0 = \frac{A}{k} \cos(2\pi nt) \sin kx + [B \cos(2\pi nt) + \mathfrak{B} \sin(2\pi nt)] \cos kx;$$

daraus folgt als Bedingung (s. (12f) und (12g))

$$\tan kx = \tan ka - \frac{k^2 Q}{2\pi} \tan(2\pi nt).$$

Wenn $t = 0$, wird:

$$\tan kx = \tan ka,$$

die Maxima der Geschwindigkeit liegen dann, wo $-(x-a) = a\lambda$, die Minima, wo $-(x-a) = (a+\frac{1}{2})\lambda$. Wenn nun t wächst, so bleibt, weil $k^2 Q$ eine verschwindend kleine Grösse ist, doch immer noch $\tan kx$ unmerklich wenig verschieden von $\tan ka$, also die Lage der Maxima und Minima unverändert, so lange $\tan(2\pi nt)$ endliche Werthe hat. Wenn aber t sich dem Werthe einer Viertel-Schwingungsdauer nähert, wird auch $\tan kx$ gleichzeitig mit $\tan(2\pi nt)$ erst $+\infty$, dann $-\infty$, dann aber, so wie $\tan(2\pi nt)$ endliche negative Werthe erreicht hat, wird $\tan kx$ wieder gleich $\tan ka$, und so bleibt es wieder während beinahe einer halben Schwingungsdauer stationär, so lange $\tan(2\pi nt)$ endlich bleibt. So oft nun $\tan kx$ vom Werthe $\tan ka$ auf $+\infty$ wächst, dann von $-\infty$ durch die negativen Werthe bis 0 und wieder auf $\tan ka$ übergeht, muss kx um π wachsen und x selbst um $\frac{1}{2}\lambda$. So wird also ein

Maximum, welches zur Zeit $t=0$ da liegt, wo die reducirte Länge $a\lambda$ beträgt, um die Zeit $t=1/4n$ schnell übergehen auf die reducirte Länge $(a+\frac{1}{2})\lambda$, hier beinahe stillstehen bis $t=3/4n$, dann schnell fortschreiten auf $(a-1)\lambda$ u. s. w.

Im freien Raume dagegen bewegen sich die Maxima der Geschwindigkeit mit der gleichmässigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit a vorwärts. In den entfernteren Theilen des freien Raumes liegen sie zur Zeit $t=0$, wo $\varrho = (b+\frac{1}{2})\lambda$. Der Abstand zweier Maxima der Geschwindigkeit, von denen eines im freien Raume in der x -Axe, das andere in der Röhre gelegen ist, zur Zeit $t=0$ ist $(a+b+\frac{1}{2})\lambda - a$. Da bis zur Zeit $t=1/4n$ das Maximum in der Röhre fast ganz still steht, das im freien Raume um $\frac{1}{2}\lambda$ fortschreitet, so wächst die Entfernung beider Maxima bis auf nahehin $(a+b+\frac{1}{2})\lambda - a$, geht dann ziemlich schnell zurück auf $(a+b)\lambda - a$, um während der nächsten halben Schwingungsdauer wieder auf $(a+b+\frac{1}{2})\lambda - a$ zu steigen, und bewegt sich so immer zwischen den genannten Grenzen.

Mit der Verdichtung verhält es sich ähnlich. Ihre Maximalwerthe werden gegeben durch die Gleichung:

$$\cotang kx = -\tan ka + k^2 Q \cotg(2\pi nt).$$

Zur Zeit $t=1/4n$ ist $\cotg(2\pi nt)=0$, und die Maxima der Verdichtung liegen, wo die reducirte Länge der Röhre $(a-\frac{1}{2})\lambda$ beträgt. Diese Lage behalten sie auch unverändert bis nahehin $t=2/4n$, wo $\cotg(2\pi nt)$ unendlich gross wird. Dann rücken sie schnell vorwärts bis $(a-\frac{1}{2})\lambda$. In den entfernteren Theilen des freien Raumes liegen sie, wenn $t=1/4n$, da, wo $\varrho = (b+\frac{1}{2})\lambda$. Ihr Abstand von denen in der Röhre beträgt also dann $(a+b+\frac{1}{2})\lambda - a$, wächst allmählich auf $(a+b+\frac{1}{2})\lambda - a$, sinkt schnell auf $(a+b)\lambda - a$, wächst dann wieder allmählich u. s. w. Sowohl die Maxima des Druckes wie der Geschwindigkeit haben ihren grössten Werth in der Röhre, wenn sie stillstehen, ihren kleinsten, wenn sie vorwärts eilen. Uebrigens eilen die Maxima der Geschwindigkeit vorwärts zu den Zeiten und an den Orten, wo die des Druckes stillstehen, und umgekehrt.

Stärke der Resonanz in der Röhre. Denkt man sich



die Röhre nur bis $x = -l$ reichend und ihr Ende im Bereiche der ebenen Wellen gelegen, so kann die Erschütterung der Luft in der Röhre entweder an diesem Ende mitgetheilt werden oder von der vorderen Oeffnung der Röhre her, indem ein Schallwellenzug gegen die Mündung der Röhre schlägt. Was zunächst den ersten Fall betrifft, so kann nach Feststellung der Form der ebenen Wellen leicht der Fall behandelt werden, wo die Röhre durch irgend eine Platte von beliebiger Masse geschlossen ist, welche durch irgend eine elastische Kraft (z. B. einer über die Mündung der Röhre ausgespannten Membran) in ihrer Lage gehalten und durch eine beliebig periodisch wirkende Kraft in Erschütterung versetzt wird. Es lässt sich dann für jede Röhrenform und Tonhöhe, für welche der Werth der Constanten α bekannt ist, sowohl die Form der ebenen Wellen als der Kugelwellen in den entfernteren Theilen des freien Raumes vollständig angeben. Hier genüge es nur kurz den Fall zu erwähnen, wo eine Bewegung von bestimmter Geschwindigkeit mitgetheilt wird, der also praktisch etwa dem Falle entspricht, wo eine Stimmgabel die Schlussplatte der Röhre erschüttert.

Die Geschwindigkeit der der Schlussplatte mitgetheilten Bewegung sei:

$$G \cos(2\pi nt + \tau_n),$$

wo wir unter τ_n eine willkürliche Constante verstehen, mittels deren wir den Anfang von t passend bestimmen. Dann muss sein für $x = -l$:

$$\frac{d\Psi}{dx} = J \cos(2\pi nt + \tau) = G \cos(2\pi nt + \tau_n),$$

also:

$$G = J = A \sqrt{\frac{\cos^2 k(l + \alpha)}{\cos^2 ka} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 kl}, \quad (15)$$

$$\tan \tau_n = \tan \tau = \frac{k^2 Q \sin kl \cos k\alpha}{2\pi \cos k(l + \alpha)}. \quad (15a)$$

Das Geschwindigkeitspotential in den fernerer Theilen des freien Raumes ist:

$$\Psi = M \frac{\cos(kq - 2\pi nt)}{q},$$

wo:

$$M = -\frac{AQ}{2\pi}. \quad (12b)$$

Es lässt sich also A und M aus G und l bestimmen. A , das Schwingungsmaximum in der Röhre, und ebenso M , die Intensität der Kugelwellen im freien Raume, wird bei constantem G , also bei constanter Bewegung der Schlussplatte der Röhre, am grössten, wenn der Factor von A in (15) am kleinsten ist, d. h. wenn:

$$\cos k(l + \alpha) = 0, \quad k(l + \alpha) = (\alpha + \frac{1}{2})\pi.$$

$$\text{Dann ist: } A = \frac{2\pi}{k^2 Q \cos k\alpha}, \quad G = \frac{\lambda^2}{2\pi Q \cos k\alpha} G,$$

$$M = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2 \cos k\alpha} G,$$

$$\tau = (-1)^{\alpha} \frac{1}{2}\pi.$$

Die stärkste Resonanz der Röhre und der stärkste Schall im freien Raume findet also statt, wenn die Bewegung der Luft am Orte einer Knotenfläche mitgetheilt wird. Die Stärke der Schallwellen wird dabei sehr gross, aber keineswegs unendlich. Denn damit der im Nenner der Werthe von A und M stehende Factor $\cos k\alpha$ Null werde, müsste die Fläche der Oeffnung gleich Null werden. Dabei zeigt sich zugleich, dass die Resonanz sowohl in der Röhre als auch im freien Raume desto mächtiger wird, je enger die Oeffnung der Röhre ist. Wenn wie gewöhnlich $k\alpha$ klein ist, kann $\cos k\alpha = 1$ gesetzt werden. Dann ist die Wirkung im freien Raume unabhängig von der Form der Röhre. Die Vibrationen der Schwingungsmaxima in der Röhre und der um ganze Wellenlängen von der Oeffnung entfernten Wellen im freien Raume unterscheiden sich dabei von denen der mitgetheilten Bewegung um eine Viertel-Undulation.

Das Minimum der Resonanz tritt ein, wenn der Factor von A im Werthe von G in (15) sein Maximum erreicht, d. h. wenn:

$$\cos k(l + \alpha) = 1, \quad k(l + \alpha) = \alpha\pi;$$

1) Der Factor $4\pi^2$ im Nenner fehlt irrtümlich im Original.
Helmholtz, wissenschaft. Abhandlungen. 23



dann wird mit Weglassung kleiner Grössen:

$$G \cos k\alpha = A, \quad \tau = \alpha\pi, \quad M = \frac{QG \cos k\alpha}{2\pi}.$$

47 Die Wirkung im freien Raume ist also, je nach dem Werthe von α , gleich oder kleiner, als wenn gar keine Röhre vorhanden wäre, und die erschütterte Schlussplatte der Röhre einen Theil der übrigens festen yz -Ebene bildete.

Die grosse Verschiedenheit der Schallstärke in der Luft bei gleicher Excursionsweite der schwingenden Endplatte der Röhre, von der die Wellen erregt werden, kann überraschen. Sie beruht darauf, dass, wenn auch die Excursion der Schwingungen dieselbe bleibt, doch die Arbeit, die die schwingende Platte durch die Bewegung der Luft leistet, eine ausserordentlich verschiedene ist, je nachdem sie gegen verdichtete oder nicht verdichtete Luft sich vorwärts bewegen muss. Bei stärkster Resonanz findet am Ende der Röhre auch der stärkste Wechsel von Verdichtung und Verdünnung statt.

Gehen wir jetzt über zu dem anderen Falle, wo der Schall im freien Raume in grösserer Entfernung von der Oeffnung der Röhre erregt wird, letztere aber an der Stelle $x = -l$ fest geschlossen ist. Da die in dem tönenden Punkte, dessen Coordinaten α, β, γ seien, erregten Wellen von der festen yz -Ebene reflectirt werden, müssen wir uns die Bewegung im freien Raume zusammengesetzt denken aus den Wellen, welche der tönende Punkt erregt, und denen, welche sein Spiegelbild, dessen Coordinaten $-\alpha, \beta, \gamma$ sind, erregen würde. Setzen wir das Geschwindigkeitspotential Φ dieser Bewegung auf Seite der positiven x im freien Raume:

$$\Phi = H \left[\frac{\cos kr_r - 2\pi nt + c}{r_r} + \frac{\cos(kr_{rr} - 2\pi nt + c)}{r_{rr}} \right], \quad (16)$$

wo r_r die Entfernung vom Punkte α, β, γ und r_{rr} die von seinem Spiegelbilde $-\alpha, \beta, \gamma$ bedeutet, so ist an der ganzen yz -Ebene:

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0.$$

Ist der tönende Punkt weit von der Oeffnung der Röhre entfernt und diese klein gegen die Wellenlänge, so können wir die kleinen Verschiedenheiten des Werthes von Φ in verschiedenen Punkten der Oeffnung vernachlässigen und hier setzen:

$$\bar{\Phi} = G \cos(2\pi nt + \tau_n),$$

wo:

$$G = \frac{2H}{r_r},$$

$$\text{tang } \tau_n = -\text{tang}(kr_r + c).$$

Innerhalb der Röhre setzen wir dann:

$$\Phi = G \cos kx \cos(2\pi nt + \tau_n). \quad (16a)$$

Dann ist Φ an der Oeffnung continuirlich und $d\Phi/dx$ innen und aussen eben da gleich Null. Innerhalb der Röhre können wir bei dieser Annahme $d\Phi/dn = 0$ setzen, indem wir die verschwindend kleinen Werthe, welche es am nicht cylindrischen Theile der Röhre annimmt, vernachlässigen. Nur am verschlossenen Ende ist $d\Phi/dx$ im allgemeinen nicht gleich Null. Hier müssen wir setzen:

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} = 0$$

und das Geschwindigkeitspotential im ganzen Raume gleich $\Phi + \Psi$, wo Ψ das von uns früher bestimmte Bewegungspotential der ebenen Wellen in der Röhre, die in den freien Raum übergehen, ist. Dadurch ist allen Bedingungen der Aufgabe genügt. Wir haben also für $x = -l$:

$$-kG \sin kl \cos(2\pi nt + \tau_n) = J \cos(2\pi nt + \tau), \quad (16b)$$

also:

$$\tau_n = \tau + \pi, \quad kG \sin kl = J = A \sqrt{\frac{\cos^2 k(l + \alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2 \sin^2 kl}{4\pi^2}} \quad (16c)$$

Das Minimum von A bei gleichen Werthen von G tritt offenbar ein, wenn $\sin kl = 0$; dann wird $A = 0$, und die Bewegung im freien Raume so, als wäre die Mündung der Röhre gar nicht in der yz -Ebene vorhanden. Das Maximum aber tritt ein, wenn $\cos k(l + \alpha) = 0$; dann wird:

$$A = G \frac{2\pi}{kQ},$$



und wieder wird beim Maximum der Resonanz der Phasenunterschied von einer Viertel-Undulation zwischen den erregenden Wellen und den erregten eintreten. Das Maximum der Resonanz in der an einem Ende geschlossenen Röhre tritt also in beiden Fällen, sowohl wenn der Schall vom geschlossenen als wenn er vom offenen Ende her der Luft der Röhre mitgetheilt wird, ein, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist. Aus dem Reciprocitätsgesetz des Schalles, welches in (9a) ausgesprochen ist, lässt sich nun dasselbe Gesetz auch für jede andere Lage des tönenden Punktes ableiten. Es passt auf unseren Fall direct die Form, welche wir dem Gesetze in (9c) gegeben haben. Die dortige Constante A , welche der Intensität des tönenden Punktes b entspricht, indem dort Φ unendlich wird, wie:

$$\Phi = A \frac{\cos kr_b}{r_b} \cos(2\pi nt),$$

wollen wir gleich 1 setzen. Der Werth von $d\psi/dn$ ist in (9c) an der erschütterten Stelle da der Wand gleichgesetzt worden:

$$\frac{d\psi_a}{dn} = B \cos(2\pi nt).$$

Am Grunde der Röhre ist $d\psi_a/dn = d\psi_a/dx$, und in dem Falle, wo der Boden der Röhre erschüttert wird, von uns in den Gleichungen (15) und (15a) gesetzt worden:

$$\frac{d\psi_a}{dx} = G \cos(2\pi nt + \tau_n);$$

wir haben also die Constante B der Gleichung (9c) mit G zu vertauschen und im Ausdrucke für ψ statt $2\pi nt$ zu schreiben $2\pi nt - \tau_n$. Ausserdem ist in dem Falle unserer Anwendung nicht bloß ein einziges Flächenelement da erschüttert worden, sondern der ganze Boden der Röhre; wir müssen also über diesen integrieren, und erhalten so:

$$4\pi\psi_b = -Gf\psi_a d\omega, \quad (17)$$

wo die Integration über den Boden der Röhre auszudehnen ist. Ist nun der tönende Punkt vom Boden der Röhre nur

weit genug entfernt, dass hier ebene stehende Wellen entstehen können, also Φ hier von Form ist:

$$\Phi = f \cos k(l+x) \cos(2\pi nt + c),$$

so wird aus (17):

$$\begin{aligned} 4\pi\psi_b &= -fGQ \cos(2\pi nt + c), \\ 4\pi[\psi_b \cos(2\pi nt - \tau_n) + \psi_b'' \sin(2\pi nt - \tau_n)] \\ &= -fGQ \cos(2\pi nt + c), \\ 4\pi(\psi_b \cos \tau_n - \psi_b'' \sin \tau_n) &= -fGQ \cos c, \\ 4\pi(\psi_b \sin \tau_n + \psi_b'' \cos \tau_n) &= fGQ \sin c, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (17a)$$

$$4\pi \sqrt{(\psi_b')^2 + (\psi_b'')^2} = fGQ.$$

Nun ist der Werth der Functionen ψ' und ψ'' für jeden Punkt b proportional der in den Gleichungen (10) bis (16) vorkommenden Constanten A , deren Verhältniss zu G für eine bestimmte Röhrenlänge gegeben ist in Gleichung (15). Also ist bei wechselnder Röhrenlänge auch f proportional dem Verhältniss A/G . Dies Verhältniss wird, wie aus (15) hervorgeht, ein Maximum, wenn:

$$l + \alpha = (2a + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Daraus folgt also, dass auch bei einer beliebigen Lage des tönenden Punktes die ebenen Wellen im Innern der Röhre, wenn dergleichen überhaupt entstehen, das Maximum ihrer Intensität erreichen, wenn die Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist.

Die ebenen Wellen im Innern einer an beiden Seiten offenen Röhre lassen sich mittels der aufgestellten Probleme behandeln, wenn die Mündungen der Röhre nach der von uns gemachten Annahme in zwei parallelen festen Ebenen liegen, die den Luftraum in zwei Theile trennen, und der Schall auf der einen Seite von einem weit entfernten tönenden Punkte ausgeht. Auf der einen Seite dieser Wand setzt man das Geschwindigkeitspotential gleich der in den Gleichungen (10) bis (12) gebrauchten Function ψ , auf der anderen Seite gleich der in den Gleichungen (16) bis (16c) vorkommenden Form $\Phi + \psi$, welche der Resonanz einer Röhre entspricht, in welche



der Schall von der offenen Mündung eintritt. Man hat dann nur die Coefficienten der ebenen Wellen in der Röhre in diesen beiden Ausdrücken des Geschwindigkeitspotentials so zu bestimmen, dass hier beide Functionen identisch werden. Da das weiter keine Schwierigkeiten macht, möge das Gesagte genügen. Die Resonanz in der Röhre wird am stärksten, wenn die reducirte Länge der Röhre, an welcher man die Correctionen für beide Mündungen anzubringen hat, ein Vielfaches der halben Wellenlänge ist.

§ 8. Reducirte Länge verschiedener Röhrenformen.

Wir wollen schliesslich noch eine Reihe von Röhrenformen aufsuchen, für welche mit den bis jetzt bereiten Hilfsmitteln der Analysis sich die Luftbewegung in der Mündung und die reducirte Länge vollständig wenigstens für Schallwellen von so grosser Wellenlänge bestimmen lässt, dass gegen diese die Dimensionen der Röhrenöffnung, ihres Querschnitts und des von der Cylindergestalt abweichenden Theiles der Mündung verschwinden. Die Wand der Röhre sei übrigens eine Rotationsfläche, welche in kleiner Entfernung von der kreisförmigen Mündung, deren Radius R sei, übergeht in einen Cylinder von kreisförmigem Querschnitt, dessen Radius wir R_1 nennen wollen. Wir setzen ferner voraus, dass auch die Bewegung der Luft überall symmetrisch um die Axe der Röhre vor sich gehe. Wir können nun im Allgemeinen nicht so zu Werke gehen, dass wir eine bestimmte Röhrenform annehmen und dazu die Potentiale der Bewegung suchen, sondern wir müssen umgekehrt von der Potentialfunction ausgehen und die dazu gehörige Röhrenform bestimmen, was sich in jedem Falle ausführen lässt. Nur müssen wir eben solche Formen der Potentialfunction suchen, welche Röhren geben, die in kleiner Entfernung von der Mündung in einen Cylinder übergehen.

Dem Bewegungspotentiale der Luft haben wir die Form gegeben:

$$\psi = \psi' \cos(2\pi nt) + \psi'' \sin(2\pi nt).$$

Für die tieferen Theile der Röhre haben wir in (12g) gefunden:

$$\psi'' = -\frac{AkQ}{2\pi} \cos kx. \quad (12k)$$

Im freien Raume ist aber, wenn wir $d\bar{\psi}'/dx = 0$ setzen, wel-

ches, wie wir oben schon gefunden haben, mit k verschwindet, nach (11d).

$$\psi'' = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\bar{\psi}'}{dx} \frac{\sin kr}{r} d\omega,$$

welches innerhalb der Mündung, wo wir kr , verschwinden lassen dürfen, wird:

$$\bar{\psi}'' = -\frac{k}{2\pi} \int \frac{d\bar{\psi}'}{dx} d\omega = -\frac{AkQ}{2\pi}. \quad (12l)$$

Sowohl (12k) wie (12l) giebt innerhalb der Mündung den gleichen Werth von $\bar{\psi}''$ und den Werth Null für $d\bar{\psi}''/dx$. Sie gehen also an der Mündung der Röhre continuirlich ineinander über. Längs der festen Wände des Luftraumes geben beide $d\bar{\psi}''/dn = 0$, nur an dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand wird dieser Differentialquotient nicht genau Null aber verschwindend klein. Es ist also $\bar{\psi}''$ unter dieser Annahme eine continuirliche Function, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet, und kann unmittelbar berechnet werden, nachdem $\bar{\psi}'$ gefunden ist.

Die Function $\bar{\psi}'$ hat im freien Raume die Form:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}' &= \int h \frac{\cos kr}{r} d\omega, \\ \text{wo } h &= -\frac{1}{2\pi} \frac{d\bar{\psi}'}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Im Innern der Röhre werden wir ihr eine andere analytische Form $\bar{\psi}_i$ geben müssen, welche die Eigenschaft haben muss:

1) im Innern der Röhre die Bedingung zu erfüllen:

$$\nabla^2 \bar{\psi}_i + k^2 \bar{\psi}_i = 0, \quad (18a)$$

2) für grosse negative Werthe von x folgende Form annehmen:

$$\bar{\psi}_i = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx, \quad (18b)$$

3) an der Fläche der Oeffnung den Bedingungen zu genügen:

$$\bar{\psi}_i = \bar{\psi}' \text{ und } \frac{d\bar{\psi}_i}{dx} = \frac{d\bar{\psi}'}{dx} = -2\pi h. \quad (18c)$$



Dann wird die Form der Röhre gefunden durch die Bedingung, dass an der Wand:

$$\frac{d\psi_i}{dn} = 0, \quad (18d)$$

welche Form aber noch der Bedingung genügen muss, dass nur für solche Werthe von x , welche gegen die Wellenlänge λ verschwindend klein sind, die Fläche eine merkliche Neigung gegen die x -Axe haben darf, weil wir vorher auch:

$$\frac{d \cos kx}{dn} = 0$$

gesetzt haben längs der ganzen Ausdehnung der Röhrenwand, und weil nur unter dieser Bedingung die Form der Röhrenwand von der Wellenlänge unabhängig gefunden wird. Indem wir setzen:

$$\rho \cos \omega = y, \quad \rho \sin \omega = z,$$

und berücksichtigen, dass nach der Voraussetzung ψ nur eine Function von ρ und x , nicht von ω sein soll, wird Gleichung (18a):

$$\frac{d^2 \psi_i}{dx^2} + \frac{d^2 \psi_i}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi_i}{d\rho} + k^2 \psi_i = 0. \quad (18e)$$

Wir setzen:

$$\Phi = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx + \sum [E_m e^{+z} V^{m^2+k^2} U_{(m)}], \quad (19)$$

wo E_m beliebige Constanten, $U_{(m)}$ folgende Function bedeutet:

$$U_{(m)} = 1 - \frac{m^2 \rho^2}{2 \cdot 2} + \frac{m^4 \rho^4}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} - \frac{m^6 \rho^6}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \text{ u. s. w.}, \quad (19a)$$

und unter dem Summenzeichen für m diejenigen Werthe zu setzen sind, welche $dU_{(m)}/d\rho = 0$ machen, wenn $\rho = R_1$. Dann ist Φ eine Function, welche der Differentialgleichung (18e) Genüge leistet und an der Wand einer cylindrischen Röhre vom Radius R_1 auch der Bedingung genügt, dass $d\Phi/dn = 0$. In dem Exponenten von e muss der Wurzel immer das positive Vorzeichen gegeben werden, wenn die Röhre unendlich lang ist, damit Φ für unendliche negative x endlich bleibt. Ist die Röhre aber irgendwo abgeschlossen, so sind auch negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen, und die Coefficienten derselben so zu bestimmen, dass die Grenzbedingungen an dem geschlos-

senen Ende erfüllt werden. Da übrigens der kleinste Werth von mR_1 , der die Bedingung $dU/d\rho$ für $\rho = R_1$ erfüllt, 3,83171, der zweite 7,01751 ist, während die folgenden sich allmählig der Grösse $(n + \frac{1}{2})\pi$ nähern, so nehmen alle diese Exponentialfunctionen schnell ab, wenn man sich von dem Ende der Röhre entfernt, an welchem sie einen merklichen Werth haben, und so oft die Länge der Röhre beträchtlich gross gegen den Durchmesser ist, werden sie in der Mitte oder am Ende derselben zu vernachlässigen sein. Es wird also im allgemeinen genügen, dass wir uns auf die Glieder beschränken, für welche die Wurzel im Exponenten ein positives Vorzeichen hat. Da übrigens mR_1 nach dem Gesagten eine endliche, kR_1 aber eine verschwindend kleine Zahl ist, so können wir in dem Exponenten k^2 gegen m^2 vernachlässigen und setzen:

$$\Phi = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx + \sum \{E_m e^{mz} U_{(m)}\}. \quad (19b)$$

Diese Function erfüllt also allerdings die Forderung der Gleichungen (18a) und (18b), welche wir oben für die Function Φ aufgestellt haben, sie wird aber im allgemeinen nicht der dritten Bedingung (18c) entsprechen, dass, wenn wir setzen:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\psi_i}{dx},$$

auch sei:

$$\Phi = \bar{\psi}_i = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\psi_i}{dx} \frac{\cos kr}{r} d\omega,$$

oder, da innerhalb der Oeffnung kr unendlich klein ist, kann man diese Bedingung auch darauf reduciren, dass sein müsste:

$$\bar{\Phi} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\Phi}{dx} \frac{d\omega}{r}.$$

Wäre diese letztere Bedingung durch besondere Annahmen über die Grösse der Coefficienten erfüllt, so würde die Gestalt der Röhre einfach cylindrisch sein. Ich habe aber keine Methode finden können, um die Coefficienten dieser Bedingung gemäss zu bestimmen und somit die Aufgabe für ganz cylindrische Röhren streng zu lösen. Auch lässt sich einsehen, dass die Convergenz der Reihe für Φ in Gleichung (19) für diesen Fall eine sehr langsame sein würde, da die Geschwindigkeit



der Lufttheilchen $d\Phi/dx$ am Rande der Oeffnung, die durch eine scharfe rechtwinkelige Kante begrenzt sein würde, unendlich gross wie $(R - \varrho)^{-\frac{1}{2}}$ werden müsste, und daher die Reihe für $d\Phi/dx$ für den Werth $\varrho = R$ und $x = 0$ überhaupt nicht convergiren kann.

Wir fügen deshalb zu Φ noch eine andere Function hinzu, die in grösserer Entfernung von der Oeffnung verschwindet, also auch nur in der Nähe der Oeffnung Einfluss auf die Gestalt der Röhre ausübt, aber die Continuität an der Oeffnung herstellt.

Bezeichnen wir der Einfachheit wegen die Potentialfunction einer auf der Kreisfläche der Oeffnung mit der Dichtigkeit h verbreiteten Masse mit P_h , also:

$$P_h = \int h \frac{\cos kr}{r} d\omega, \quad (20)$$

dieses Integral über die ganze Fläche der Oeffnung genommen. Wenn die Distanz des Punktes, für welchen wir P_h bestimmen, von der Oeffnung klein ist, so ist $\cos kr = 1$ und:

$$P_h = \int \frac{h d\omega}{r}. \quad (20a)$$

Setzen wir ferner:

$$h = i + l, \quad (21)$$

$$i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\bar{\Phi}}{dx}, \quad (21a)$$

und bestimmen wir l so, dass in der Fläche der Oeffnung:

$$\bar{P}_i = \frac{1}{2} \bar{\Phi}, \quad (21b)$$

was sich immer ausführen lässt, weil die Vertheilung einer Masse auf einer Kreisscheibe, die an der Oberfläche dieser Scheibe eine Potentialfunction von gegebener Grösse giebt, nach bekannten Methoden gefunden werden kann. Setzen wir ferner auf Seite der positiven x , wie schon oben geschehen:

$$\Psi' = P_h = P_i + P_l; \quad (21c)$$

in der Röhre dagegen, also für negative x :

$$\Psi_i = \Phi + P_i - P_l, \quad (21d)$$

so genügen die Functionen Ψ' und Ψ_i allen für sie gestellten

Bedingungen. Dass nämlich Ψ' im freien Raume und Ψ_i im Innern der Röhre der Bedingung genügen:

$$\nabla \Psi + h^2 \Psi = 0, \quad (18a)$$

ist aus der Bildungsweise dieser Functionen klar. Das Ψ_i für grosse Werthe von $-x$ übergeht in: 55

$$\Psi_i = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx,$$

erhält daraus, dass P_i und P_l in einer gegen die Oeffnung der Röhre grossen Entfernung unendlich klein werden, Φ aber wirklich in jene Form übergeht. Da ferner in der Fläche der Oeffnung:

$$\bar{P}_i = \frac{1}{2} \bar{\Phi}, \quad (21b)$$

wird:

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi}_i = \bar{P}_i + \bar{P}_l. \quad (21e)$$

Da ferner an der Fläche der Oeffnung:

$$\frac{dP_i}{dn} = -2\pi i = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\Phi}}{dx}$$

und auf Seite der positiven x :

$$\frac{dP}{dn} = \frac{d\bar{P}}{dx},$$

auf Seite der negativen aber:

$$\frac{dP}{dn} = -\frac{dP}{dx},$$

so ist:

$$\frac{d\bar{\Psi}'}{dx} = \frac{d\bar{\Psi}_i}{dx} = \frac{dP_i}{dn} + \frac{dP_l}{dn} = -2\pi(i + l). \quad (21f)$$

Somit sind die gestellten Bedingungen (18a), (18b) und (18c) erfüllt.

Die Form der Röhrenwand wird endlich durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{d\Psi_i}{dn} = 0. \quad (18d)$$

Da wir die Bedingung gemacht haben, dass, wenn r eine innerhalb des nicht cylindrischen Theiles der Röhre liegende Entfernung ist, $h^2 r^2$ gegen 1 zu vernachlässigen sei, können wir entsprechend der zur Gleichung (7d) gemachten Bemerkung in



dieser Gleichung der Röhrenwand $k = 0$ setzen, werden dann aber natürlich auch die Aufgabe nur für solche Werthe von k als gelöst betrachten dürfen, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Dann ist also für diesen Zweck in der Nähe der Röhrenmündung zu setzen statt (19b):

$$\Phi = Ax + B + \sum \{ E_m e^{mz} U_{(m\varphi)} \}, \quad (22)$$

$$P_i = \int \frac{i d\omega}{r}, \quad P_l = \int \frac{l d\omega}{r}, \quad (20a)$$

$$i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\bar{\Phi}}{dx}, \quad \bar{P}_l = \frac{1}{2} \bar{\Phi}, \quad (21a), (21b)$$

$$\Psi_i = \Phi + P_i - P_l. \quad (21d)$$

50 In der That sind auch alle diese Functionen von einer solchen Form, dass sich ihr Werth in der Nähe der Mündung nicht ändert dadurch, dass man $k = 0$ setzt. Die Bedingung (18d) ergibt, dass die Röhrenwand eine zu allen Flächen, deren Gleichung $\Psi_i = \text{Const.}$ ist, orthogonale Rotationsfläche sein muss, oder wenn wir die Gleichung der Röhrenwand (und überhaupt der Strömungscurven) ausdrücken durch:

$$\varrho x = \text{Const.},$$

so muss sein:

$$\frac{d\Psi_i}{dx} \frac{d(\varrho x)}{dx} + \frac{d\Psi_l}{d\varrho} \frac{d(\varrho x)}{d\varrho} = 0. \quad (22a)$$

Zu bemerken ist noch, dass man, um die Form der Function Φ festzustellen, die Grösse des Radius des cylindrischen Theiles der Röhre R_1 bestimmen muss, weil von dessen Grösse die in der Summe vorkommenden Werthe von m abhängen. Um P_i und P_l zu finden, muss wiederum die Grösse des Radius der Oeffnung R festgestellt sein, und schliesslich, wenn man die Röhrenform aus der Gleichung $d\Psi_i/dn = 0$ bestimmt, wird die Stromescurve, welche von dem Rande der Oeffnung ausgeht, nicht nothwendig in einen Cylinder vom Radius R_1 übergehen. Um dies nun zu bewirken, muss man eine der Constanten von Φ durch die oben gefundene Gleichung:

$$AQ = -2\pi M \quad (12b)$$

bestimmen, worin in unserem Falle Q der Querschnitt der Röhre:

$$Q = \pi R_1^2,$$

$$M = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\bar{\Psi}}{dx} d\omega = \int (i + l) d\omega.$$

Daraus folgt:

$$AR_1^2 = -2 \int (i + l) d\omega. \quad (22b)$$

Wenn R und R_1 gegeben sind, giebt diese Gleichung eine Bedingung, welche durch die Coefficienten des Ausdrucks für Φ in (22) erfüllt werden muss, sodass einer von ihnen durch die anderen bestimmt werden kann.

§ 9. Einfachste Röhrenformen.

Wir wollen endlich noch einige Röhrenformen berechnen, welche den einfachsten Annahmen über die Function Φ entsprechen. Setzen wir:

$$\Phi = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx, \quad (23)$$

so wird nach (21a):

$$i = -\frac{A}{4\pi}, \quad \int i d\omega = -\frac{1}{4} AR^2 \quad (23a)$$

und in der Ebene der Mündung nach (21b):

$$\bar{P}_l = \frac{1}{2} B,$$

woraus nach bekannten Sätzen über Elektricitätsvertheilung auf einer leitenden Kreisscheibe folgt, dass:

$$l = \frac{B}{2\pi^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2}}, \quad \int l d\omega = \frac{BR}{\pi}. \quad (23c)$$

Somit folgt aus Gleichung (22b):

$$AR_1^2 = \frac{1}{2} AR^2 - \frac{2}{\pi} BR. \quad (23d)$$

Den Unterschied α der wahren und reducirten Röhrenlänge haben wir oben (12a) definirt durch die Gleichung:

$$-\frac{kB}{A} = \tan k\alpha. \quad (12f)$$



Da ka eine sehr kleine Grösse ist, so oft das Verhältniss $R_1 : R$ endlich ist, können wir diesem Falle annähernd setzen:

$$\alpha = -\frac{B}{A} = \frac{\pi R_1^2}{2R} - \frac{\pi}{4}R, \quad (23e)$$

wodurch für die hier in Betracht kommenden Röhrenformen der Unterschied zwischen wahrer und reducirter Länge gegeben ist, wenn die Radien des Cylinders und seiner Mündung bestimmt sind. Die reducirte Länge der Pfeife ist gleich der wahren, also $\alpha = B = 0$, wenn $R = R_1 \sqrt{2}$.

Wenn die Mündung ebenso weit ist wie der Cylinder, also $R = R_1$, wird $\alpha = R\pi/4$ und $B = -RA\pi/4$. Wenn R sehr klein gegen R_1 ist, wird annähernd:

$$\frac{B}{A} = -\frac{\pi R_1^2}{2R} = -\frac{Q}{2k'},$$

wie es schon oben für diesen Fall in (12i) gefunden ist. Unter diesen Umständen kann natürlich nicht die abgekürzte Form (23e) für die Gleichung (12f) angewendet werden.

Die Bedeutung der Function χ der Gleichung (22a), welche zur Bestimmung der Strömungscurven dient, setzen wir durch folgende Gleichung fest:

$$\varrho\chi = \int_0^x \frac{d\psi_i}{dx} \varrho d\varrho, \quad (24)$$

58 worin unter dem Integralzeichen x einen constanten Werth behält. Daraus folgt zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varrho}(\varrho\chi) &= \varrho \frac{d\psi_i}{dx}, \\ \frac{d}{dx}(\varrho\chi) &= \int_0^x \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \varrho d\varrho. \end{aligned} \quad (24a)$$

Da wir nun für unseren jetzt vorliegenden Zweck uns erlauben durften in den Functionen Φ , P_1 und P_2 (s. (22) und (20a)), aus denen ψ_i zusammengesetzt ist, $k = 0$ zu setzen, so reducirt sich die Gleichung (18e) in der Nähe der Mündung auf:

$$\frac{d^2\psi_i}{dx^2} = -\frac{d^2\psi_i}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{d\psi_i}{d\varrho},$$

und wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\varrho\chi) &= -\int_0^x \left(\varrho \frac{d^2\psi_i}{d\varrho^2} + \frac{d\psi_i}{d\varrho} \right) d\varrho, \\ \frac{d}{dx}(\varrho\chi) &= -\varrho \frac{d\psi_i}{d\varrho}; \end{aligned} \quad (24b)$$

aus (24a) und (24b) folgt, dass die Function χ der Bedingung genügt:

$$\frac{d(\varrho\chi)}{d\varrho} \frac{d\psi_i}{d\varrho} + \frac{d(\varrho\chi)}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} = 0,$$

und dass in einer durch die x -Axe gelegten Ebene die Curven $\varrho\chi = \text{Const.}$

orthogonal sind zu den Curven:

$$\psi_i = \text{Const.},$$

erstere also Stromescurven sind.

Wenn wir in die Gleichung (24) für ψ_i setzen:

$$\psi_i = \Phi + P_1 - P_2, \quad (21d)$$

so können wir auch χ ähnlich zerfallen:

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 - \chi_2, \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho\chi_0 &= \int_0^x \frac{d\Phi}{dx} \varrho d\varrho, \\ \varrho\chi_1 &= \int_0^x \frac{dP_1}{dx} \varrho d\varrho, \\ \varrho\chi_2 &= \int_0^x \frac{dP_2}{dx} \varrho d\varrho. \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

Da sich Φ hier reducirt auf:

$$\Phi = Ax + B,$$

so ist:

$$\chi_0 = \frac{1}{2} A\varrho. \quad (25b) \quad 59$$

Um die Berechnung von χ_1 abzukürzen, bemerke ich Folgendes. Es sei W eine Potentialfunction, die auf Seite der negativen x der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{d^2W}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dW}{d\varrho} = 0,$$



und ferner sei:
so ist:

$$P_1 = \frac{dW}{dx}, \quad (25c)$$

$$\varrho \chi_1 = \int_0^q \frac{d^2 W}{dx^2} \varrho d\varrho = - \int_0^q \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dW}{d\varrho} \right) d\varrho = - \varrho \frac{dW}{d\varrho}. \quad (25d)$$

Nun ist P_1 die Potentialfunction einer Masse, die mit der constanten Dichtigkeit $-A/4\pi$ auf einer Kreisscheibe vom Radius R ausgebreitet ist. Die Gleichung (25c) erfüllen wir, wenn wir W zur Potentialfunction eines soliden Cylinders machen, dessen Basis die kreisförmige Röhrenmündung ist, und der von $x=0$ bis $x=+\infty$ reicht und mit Masse von der constanten Dichtigkeit $-A/4\pi$ gefüllt ist. Man braucht sich nur den Cylinder um ein unendlich kleines Stück in der Richtung der positiven x verschoben zu denken und die neue Dichtigkeit so wie die neue Potentialfunction von der früheren abzuziehen, so erhält man das angegebene Resultat. Die Gleichung (25d) kann man aber schreiben, weil $y = \varrho \cos \omega$:

$$\chi_1 \cos \omega = - \frac{dW}{d\varrho} \cos \omega = - \frac{dW}{dy}. \quad (25e)$$

Es ist aber $-dW/dy$ die Potentialfunction der Oberfläche des Cylinders, die mit Masse von der Dichtigkeit $-(A/4\pi) \cos \omega$ bedeckt ist, wie sich wieder leicht ergibt, wenn man den Cylinder in Richtung der negativen y unendlich wenig verschoben denkt. Also lässt sich χ_1 unmittelbar finden:

$$\chi_1 = - \frac{A}{4\pi} \int_0^{2\pi} da \int_0^{\pi} \frac{R \cos \omega d\omega}{\sqrt{(x-a)^2 + (\varrho - R \cos \omega)^2 + R^2 \sin^2 \omega}}. \quad (26)$$

Der Werth, mit Hülfe elliptischer Integrale ausgedrückt, ist folgender:

$$\chi_1 = \frac{AR}{\pi} \left\{ \frac{x \cos \vartheta}{x^2 \sqrt{1-x^2 \sin^2 \vartheta}} (K-E) - \frac{x \sin \vartheta}{1-x^2 \sin^2 \vartheta} \left[\frac{1}{2}\pi + (K-E) F' \varphi - KE' \varphi \right] \right\} - c, \quad (26a)$$

wo worin gesetzt ist:

$$x^2 = \frac{4R\varrho}{x^2 + (R+\varrho)^2}, \quad x^2 = 1 - x'^2, \quad x \sin \vartheta = \pm \frac{R-\varrho}{R+\varrho},$$

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{1-x'^2 \sin^2 \omega}}, \quad E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-x'^2 \sin^2 \omega} d\omega,$$

$$F' \varphi = \int_0^{\varphi} \frac{d\omega}{\sqrt{1-x'^2 \sin^2 \omega}}, \quad E' \varphi = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-x'^2 \sin^2 \omega} d\omega,$$

$$c = \frac{AR^2}{4\varrho}, \quad \text{wenn } \varrho > R,$$

$$c = \frac{A\varrho}{4}, \quad \text{wenn } R > \varrho,$$

oder in beiden Fällen:

$$c = \frac{AR}{4} \frac{1-x \sin \vartheta}{1+x \sin \vartheta}.$$

Uebrigens ist für $\sin \vartheta$, für $\cos \vartheta$, wie für x , immer der positive Werth zu nehmen, der sich aus den obigen Formeln ergibt.

Endlich ergibt sich χ_1 leicht aus den bekannten Sätzen über Potentialfunctionen, die durch elliptische Coordinaten ausgedrückt sind. Setzen wir:

$$x = R \mu s, \quad \varrho = R \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1+s^2},$$

so ist die Potentialfunction P_1 einer Scheibe, auf welcher selbst die Potentialfunction constant gleich $\frac{1}{2}B$ ist,

$$P_1 = \frac{B}{\pi} \arctan \frac{1}{s}.$$

Die Linien $\mu = C$ sind confocale Hyperbeln und orthogonal gegen die Linien $s = C$, welche confocale Ellipsen sind. Da die letzteren in unserem Falle Curven gleichen Potentials sind, sind die Linien $\mu = C$ Strömungskurven, und wir brauchen die Grösse $\varrho \chi_1$, nur für den Scheitelpunkt derselben in der Scheibe zu bestimmen, so muss sie denselben Werth in der ganzen Länge haben.

An der Scheibe selbst wird $s = 0$, für sehr kleine Werthe von s und $-x$ wird:

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2}}, \quad s = - \frac{x}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}},$$

$$P_1 = - \frac{B}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}{x},$$

$$\frac{dP_1}{dx} = + \frac{B}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}},$$



$$\varrho Z'' = \int_0^{\vartheta} \frac{dP_1}{dx} \varrho d\vartheta = \frac{BR}{\pi} (1 - \mu). \quad (27)$$

Um μ in den bei den elliptischen Integralen gebrauchten Hilfsgrößen auszudrücken, dient, wenn ϑ für $\varrho > R$ negativ genommen wird, die Gleichung:

$$\mu = \sqrt{\frac{2x(1 + \sin \vartheta)}{(1 + x)(1 + x \sin \vartheta)}}.$$

Somit haben wir denn in den Gleichungen (25b), (26) und (27) die Werthe von Z_0 , Z , und Z'' , und die Gleichung der Strömungscurven wird:

$$\varrho(Z_0 + Z + Z'') = \text{Const.}$$

Soll die Strömungscurve der Röhrenwand entsprechen, so muss sie durch den Rand der Oeffnung gehen, und die Constante ist:

$$\text{Const.} = \int_0^R \frac{dV'}{dx} \varrho d\varrho = \frac{1}{2} AR_1^2;$$

folglich wird die Gleichung der Röhrenwand:

$$\varrho(Z_0 + Z + Z'') = \frac{1}{2} AR_1^2. \quad (27b)$$

Um die Röhrenform zu erhalten, für welche die Differenz zwischen der wahren und reducirten Länge verschwindet, müssen wir $B = 0$, $R = R_1/2$ setzen, dann verschwindet auch Z'' , und die Gleichung der Röhrenwand reducirt sich auf:

$$\varrho Z = \frac{1}{2} A(R_1^2 - \varrho^2).$$

Es giebt dies eine Röhre mit trompetenförmigem, schwach erweitertem Ende. Die Krümmung der Wand ist überall nach innen convex, und ihr Krümmungshalbmesser, der vom cylindrischen Theile an gegen die Mündung allmählig abnimmt, wird am Rande der Oeffnung zuletzt unendlich klein.

Macht man den Radius der Oeffnung gleich dem der Röhre, so nähert sich die Form der Röhre am meisten einem reinen Cylinder. Es wird dann die Differenz zwischen der reducirten und wahren Länge der Röhre, wie schon oben bemerkt, gleich $\frac{1}{2}\pi R$. Da in diesem Falle die Grösse:

$$x^2 \sin^2 \vartheta = \frac{(R - \varrho)^2}{(R + \varrho)^2}$$

immer sehr klein bleibt, und also auch $\sin \vartheta$ für alle nicht zu kleinen Werthe von x , sehr klein bleibt, kann man zur Berechnung von $x = 0$ bis $x = \sin 89^\circ$ die höheren Potenzen als die erste von $x \sin \vartheta$ und als die zweite von $\sin \vartheta$ vernachlässigen. Die so vereinfachte Gleichung für die Röhrenwand, aus der man $\sin \vartheta$ für eine Reihe von Werthen von x , leicht mit Hilfe der Tafeln von Legendre berechnen kann, ist:

$$0 = \frac{4x}{\pi x^2} (K - E) - \sqrt{\frac{2x}{1+x}} + x \sin \vartheta \left\{ \frac{8x}{\pi x^2} (K - E) + 6 + \frac{1-x}{\sqrt{2x(1+x)}} \right\} - x \sin^2 \vartheta \left\{ \frac{2x}{\pi x^2} (K - E) - \frac{4E}{\pi} - \frac{1}{4\sqrt{2x(1+x)}} \right\}.$$

Aus den zusammengehörigen Werthen von x , und ϑ lassen sich endlich x und ϱ berechnen, deren Werthe in diesem Falle sind:

$$\frac{\varrho - R}{R} = \frac{2x \sin \vartheta}{1 + x \sin \vartheta},$$

$$\frac{x}{R} = -\frac{2x \cos \vartheta}{x(1 - x \sin \vartheta)}.$$

In der folgenden Tabelle bedeutet demnach $(\varrho - R)/R$ den Abstand zwischen der Wand unserer Pfeifenform und der des Cylinders, ausgedrückt in Theilen des Radius, und ebenso x/R den Abstand der betreffenden Stelle von der Oeffnung, ausgedrückt in Theilen des Radius.

ang. sin x ,	ϑ	$\frac{\varrho - R}{R}$	$\frac{x}{R}$
0°	90°	0	0
1°	26° 2'	0,0153	0,03161
2°	15° 42'	0,0187	0,06787
3°	10° 59'	0,0197	0,10392
4°	8° 14'	0,0198	0,13979
5°	6° 26'	0,0193	0,17556
6°	5° 9'	0,0186	0,21132
7°	4° 13'	0,0177	0,24708
8°	3° 30'	0,0168	0,28291
9°	2° 56'	0,0159	0,31888
10°	2° 29'	0,0149	0,35496
15°	1° 11' 40"	0,0107	0,53867
20°	0° 37' 50"	0,0075	0,73058
25°	0° 21' 0"	0,0051	0,93502
30°	0° 12' 0"	0,0035	1,15668



In grösserer Entfernung von der Scheibe findet man:

$$\frac{q-R}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{2R-x}{2R+x} \right)^2.$$

Am schnellsten ändert die Curve ihre Natur dicht an der Oeffnung. Zwischen $x=0$ und $x=\sin 1^\circ$ kann man folgende annähernd richtige Gleichung brauchen:

$$0 = \log \left(\frac{4}{x} \right) - 1 + \left(\frac{1}{2} \pi + \vartheta \right) \cdot \tan \vartheta - \frac{\pi}{4 \sqrt{x} \sin \left(\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \vartheta \right)}.$$

Wenn x , sehr klein wird, verschwindet $\log x$, gegen $1/\sqrt{x}$, und $\tan \vartheta$ muss sehr gross, ϑ nahe gleich $\frac{1}{2} \pi$ werden, dann ist:

$$0 = \tan \vartheta - \frac{1}{8 \sqrt{x}},$$

oder:

$$\frac{q-R}{x} = \frac{\sqrt{2R}}{8 \sqrt{(q-R)^2 + x^2}},$$

oder, da x auch sehr klein gegen $q-R$ werden muss:

$$(q-R)^3 = \frac{1}{8} R x^2.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt, dass die Wandfläche die verlängerte Ebene der Oeffnung an deren Rande tangirt und hier einen unendlich kleinen Krümmungshalbmesser hat.

§ 10. Tonhöhe von Resonatoren.

Das verallgemeinerte Theorem von Green liefert uns auch einige allgemeine Gesetze der Schallbewegung für solche Hohlkörper, deren sämtliche Dimensionen verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind, und die mit einer oder mehreren Oeffnungen versehen sind, deren Flächeninhalt sehr klein gegen die ganze Oberfläche des Hohlraumes ist. Da solche Hohlkörper mit kleinen Oeffnungen beim Anblasen oder durch Resonanz sehr tiefe Töne geben, so ist die erstere Bedingung für diese ihre tiefsten Töne immer erfüllt.

Wenn Ψ das Geschwindigkeitspotential im Innern des überall begrenzten Raumes S darstellt, der keine tönenden Punkte enthalten soll, und der Punkt α, β, γ , von welchem ab die Entfernung r gerechnet wird, innerhalb der Raumes S liegt, so ist nach (7b):

$$\int \frac{\sin kr}{r} \frac{d\Psi}{dn} d\omega = \int \Psi \frac{d}{dn} \left(\frac{\sin kr}{r} \right) d\omega.$$

Wenn nun alle Dimensionen des Raumes S gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, so können wir kr gegen 1 vernachlässigen, so oft r , wie hier der Fall ist, die Entfernung zweier Punkte, die innerhalb S gelegen sind, bezeichnet. Wir setzen also:

$$\frac{\sin kr}{r} = k - \frac{k^3 r^2}{2 \cdot 3}.$$

Dies in die obige Gleichung eingeführt giebt:

$$\int \frac{d\Psi}{dn} d\omega = \frac{k^2}{2 \cdot 3} \int \frac{d\Psi}{dn} r^2 d\omega - \frac{k^2}{3} \int \Psi r \frac{dr}{dn} d\omega. \quad (28)$$

Nehmen wir jetzt an der Raum S sei von einer festen Wand umgeben, in der nur eine oder einige Oeffnungen seien, an der festen Begrenzung sei überall $d\Psi/dn = 0$, in den sämtlichen Oeffnungen aber habe $d\Psi/dn$ endliche positive Werthe. Das Verhältniss der Fläche sämtlicher Oeffnungen zur ganzen Oberfläche des Raumes S sei $\eta^2:1$, und η eine verschwindend kleine Grösse, so ist das Integral $\int (d\Psi/dn) d\omega$ von derselben Ordnung kleiner Grössen wie η^2 , das erste Integral rechts $(k^2/2 \cdot 3) \int (d\Psi/dn) r^2 d\omega$ aber von der Ordnung $k^2 r^2 \eta^2$, also zu vernachlässigen. Lassen wir nun k immer mehr sich der Null nähern, so muss dabei offenbar das Integral $\int \Psi r (dr/dn) d\omega$ und also auch die Function Ψ selbst immer grösser und grösser werden. Bezeichnen wir $k^2 \Psi$ mit χ , so würde χ eine Function sein, die bei abnehmendem k von constanter Grössenordnung bleibt, und in eine Function übergeht, welche der Differentialgleichung $\nabla \chi = 0$ in ganzer Ausdehnung des Raumes S genügt, und für welche an der ganzen Oberfläche des Raumes S $d\chi/dn = 0$. Daraus folgt nach den bekannten Sätzen über elektrische Potentialfunctionen, dass χ im ganzen Raume S constant sein müsse.

Dem entsprechend wollen wir nun zeigen, dass, wenn die Dimensionen des Raumes S überall endlich sind, d. h. wenn man den Raum S nicht durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei Theile von endlicher Grösse zerlegen kann, dass dann Ψ höchstens in unendlich kleinen Theilen des Raumes S von der Ordnung η^2 sich um endliche Theile seiner Grösse von einer Constanten C unterscheiden könne. Wenn Ψ und



seine ersten Differentialquotienten nämlich, wie es hier sein soll, innerhalb S überall continuirlich und eindeutig sind, so ist, wie bekannt:

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= - \int \psi \frac{d\psi}{dn} d\omega - \iiint \psi \nabla \psi dx dy dz, \end{aligned}$$

wo die dreifachen Integrale über den ganzen Raum S auszu-
dehnen sind. Berücksichtigt man, dass $k^2 \psi + \nabla \psi = 0$, und
denkt man sich weiter beide Seiten der Gleichung mit einer
constanten Grösse ϵ^2 multiplicirt, die so gewählt sein soll, dass
65 $\epsilon^2 \psi$ eine endliche Grösse ist, wozu nach Gleichung (28) ϵ^2 von
gleicher Ordnung mit $k^2 r / \eta^2$ sein muss, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \iiint \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (28a) \\ &= - \epsilon^2 \int \psi \frac{d\psi}{dn} d\omega + k^2 \epsilon^2 \iiint \psi^2 dx dy dz. \end{aligned}$$

Da nun die Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung
verschwindend klein von der Ordnung η^2 sind, so ist es auch
das dreifache Integral links. Da hier unter dem Integral-
zeichen eine überall positive Grösse steht, so können die
Werthe von $\epsilon d\psi/dx$, $\epsilon d\psi/dy$ und $\epsilon d\psi/dz$ im allgemeinen
selbst nur von derselben Ordnung kleiner Grössen wie η sein,
oder wenigstens nur in Theilen des Raumes S , welche selbst
von der Ordnung η^2 sind, endlich werden.

Nun denke man die Flächen construirt, welche der
Gleichung:

$$\psi = \text{Const.}$$

entsprechen, und für den Theil des Raumes S , welcher zwi-
schen zwei beliebigen solchen Flächen liegt, bilde man das
Integral:

$$\epsilon \iiint \sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2} dx dy dz = \Xi. \quad (28b)$$

Nach dem Vorausgesagten kann dies Integral nur von der-
selben Ordnung kleiner Grössen wie η sein. Man kann nun
die Integration so ausführen, dass man zuerst diejenigen Theile
des Integrals zusammennimmt, welche zwischen zwei unendlich

nahen Potentialflächen liegen. Es sei $d\omega$ ein Flächenelement
einer solchen Fläche, in der das Potential den Werth ψ hat,
 dn die Entfernung zwischen $d\omega$ und der nächsten Fläche, an
der der Werth des Potentials $\psi + d\psi$ ist, dann ist $d\omega dn$
ein Element des Volumens und:

$$\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2} d\omega dn = d\psi d\omega,$$

also:

$$\Xi = \epsilon \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \int d\omega,$$

wenn ψ_0 und ψ_1 die Werthe von ψ an den äussersten Po-
tentialflächen sind, zwischen denen man integrirt. Für jeden
Werth von ψ ist nun $\int d\omega$ gleich dem Flächeninhalt Q des-
60 jenigen Theiles der betreffenden Potentialfläche, der innerhalb
des Raumes S liegt. Also wird:

$$\Xi = \epsilon \int_{\psi_0}^{\psi_1} Q d\psi,$$

worin Q als Function des Werthes von ψ anzusehen ist. Wenn
nun Q überall endlich ist, darf die Differenz $\epsilon \psi_1 - \epsilon \psi_0$, inner-
halb deren die Variable sich ändert, nur von der Ordnung η
sein, da der Werth von Ξ von der Ordnung η ist. Oder es
muss, wenn $\epsilon \psi_1 - \epsilon \psi_0$ endlich ist, innerhalb dieses Intervalles
 Q von der Ordnung η sein. Da nun nach unserer Voraus-
setzung der Raum S nicht eine solche Gestalt haben darf,
dass man ihn durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei
Theile von endlichem Volumen theilen kann, wie das z. B. der
Fall sein würde, wenn er aus zwei durch ein röhrenförmiges
Stück verbundenen Hohlräumen bestände, so folgt aus dem
Gesagten, dass nur in unendlich kleinen Theilen desselben, und
namentlich auch nur in unendlich kleinen Theilen seiner Ober-
fläche, der Werth von $\epsilon \psi$ um eine endliche Grösse von einem
constanten Werthe C abweichen könne.

Nach diesen Bemerkungen reducirt sich die Gleichung
(28) auf:

$$\int \frac{d\psi}{dn} d\omega = - \frac{k^2 C}{3} \int r \frac{dr}{dn} d\omega = k^2 CS. \quad (28c)$$



Wenn wir nämlich die vom Punkte α, β, γ auf die Tangentialebene von $d\omega$ gefällte Normale n nennen, ist $dr/dn = -n/r$, und $-\frac{1}{3}r(dr/dn)d\omega = nd\omega/3$ gleich dem Volumen eines Kegels, dessen Grundfläche $d\omega$ und dessen Spitze α, β, γ ist. Deshalb ist:

$$-\frac{1}{3}\int r \frac{dr}{dn} d\omega = S.$$

Setzen wir jetzt voraus, der Raum S habe eine Oeffnung, die in einem nahehin ebenen Theile der Wand gelegen sei, dessen Ebene wir äusserlich unendlich verlängert und den freien Raum nach einer Seite begrenzend voraussetzen, wählen wir wie früher diese Ebene als Ebene der yz und verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten in die Oeffnung selbst. Nehmen wir ferner an, dass die Vibrationen des Hohlraumes erregt werden durch einen Schallwellenzug, der gegen die Oeffnung schlägt. Wir müssen nun an der Oeffnung den Werth von Ψ so bestimmen, dass er aussen und innen continuirlich wird und im Innern in einer gegen die Dimensionen der Oeffnung grossen Entfernung in den constanten Werth $C \cos(2\pi nt)$ übergeht.

Es sei h eine Grösse, welche in verschiedenen Punkten der Oeffnung des Hohlraums verschiedene Werthe hat. Wir setzen, indem wir die Integration über die Fläche der Oeffnung ausdehnen, für den freien Raum:

$$\Psi = \int h \frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r} d\omega + H \cos kr \cos(2\pi nt) \quad (29)$$

$$+ J \cos kx \sin(2\pi nt).$$

Dieses Geschwindigkeitspotential stellt einen Zug ebener Wellen dar, die an der yz -Ebene reflectirt sich in stehende verwandeln, und ein System fortschreitender Wellen, welche von der Oeffnung ausgehen. Statt der unendlich ausgedehnten ebenen Wellen lässt sich übrigens ebenso gut die etwas allgemeinere Voraussetzung der Gleichung (16) hier anwenden, dass nämlich die Wellen von einem weit von der Oeffnung entfernten tönenden Punkte ausgehen, dann bekommen sie, wie dort gezeigt, dicht vor der Oeffnung die in (29) angenommene Form.

An der yz -Ebene ist ausserhalb der Oeffnung $d\Psi/dx = 0$, in der Oeffnung:

$$\frac{d\Psi}{dx} = -2\pi h \cos(2\pi nt) \quad (29a)$$

und annähernd:

$$\Psi = \left[\int \frac{h}{r} d\omega + H \right] \cos(2\pi nt) + \left[k \int h d\omega + J \right] \sin(2\pi nt). \quad (29b)$$

Innerhalb des Raumes S setzen wir dagegen:

$$\Psi = \left[C - \int \frac{h \cos kr}{r} d\omega \right] \cos(2\pi nt). \quad (29c)$$

Dann ist in der Oeffnung:

$$\frac{d\Psi}{dx} = -2\pi h \cos(2\pi nt), \quad (29d)$$

$$\Psi = \left[C - \int \frac{h d\omega}{r} \right] \cos(2\pi nt). \quad (29e)$$

Die Werthe von $d\Psi/dx$ aus (29a) und (29d) sind identisch. Damit auch die von Ψ aus (29b) und (29e) identisch seien, muss sein:

$$J + k \int h d\omega = 0, \quad (29f)$$

$$C - H = 2 \int \frac{h d\omega}{r}. \quad (29g)$$

Es muss also die Grösse h für die einzelnen Punkte der Oeffnung so bestimmt werden, dass ihre Potentialfunction innerhalb der Oeffnung constant wird. Die Bedingung endlich, dass $d\Psi/dn = 0$ ist längs der Oberfläche von S mit Ausnahme der Mündung, wird durch die Gleichung (29c) erfüllt, wenn die Wand, in der die Oeffnung sich befindet, so weit merklich eben ist, als das Potential von h nicht gegen C verschwindet.

Endlich wird für diesen Fall die Gleichung (28c):

$$2\pi \int h d\omega = k^2 CS. \quad (29h)$$

Aus (29f) und (29h) folgt:

$$J = -\frac{k^3 CS}{2\pi}. \quad (29i)$$

Nennen wir nun M die Masse, welche nöthig ist, um, auf der



Fläche der Oeffnung passend vertheilt, in dieser die Potentialfunction constant gleich 1 zu machen, so ist:

$$\int h d\omega = \frac{1}{2} (C - H) M, \quad (29k)$$

da die Dichtigkeit h nach (29g) den Potentialwerth $\frac{1}{2}(C-H)$ hervorbringt. Wir haben also nach (29f):

$$J + \frac{1}{2} k (C - H) M = 0. \quad (29l)$$

Das Maximum des Potentials der stehenden Wellen im freien Raume ist $\sqrt{H^2 + J^2}$, das Maximum in dem Hohlkörper S ist C . Aus (29i) und (29l) folgt:

$$\frac{H^2 + J^2}{C^2} = \left(1 - \frac{k^2 S}{\pi M}\right)^2 + \left(\frac{k^2 S}{2\pi}\right)^2.$$

Dieses Verhältniss erreicht seinen Minimalwerth, die Resonanz wird also am stärksten, wenn das erste der beiden Quadrate, gegen welches im allgemeinen das zweite verschwindend klein ist, gleich Null wird. Die Bedingung für das Maximum der Resonanz ist also:

$$\pi M = k^2 S, \quad (30)$$

oder wenn wir statt k seinen Werth setzen durch die Schwingungszahl n und die Schallgeschwindigkeit a ausgedrückt:

$$k = \frac{2\pi n}{a}. \quad (3a)$$

so ist:

$$n^2 = \frac{a^2 M}{4\pi S}. \quad (30a)$$

Ist die Oeffnung kreisförmig, so ist (s. (23b) und (23c)):

$$M = \frac{2R}{a},$$

oder, wenn wir die Fläche der Oeffnung mit s bezeichnen:

$$s = \pi R^2, \quad M = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{s}{\pi}},$$

$$n = \frac{a \sqrt{s}}{\sqrt{2} \sqrt{\pi^3} \sqrt{S}}.$$

Wenn wir für die Schallgeschwindigkeit den Werth 332 290 mm (entsprechend 0° und trockner Luft) nehmen, so wird:

$$n = 56174 \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{\text{Mm.}}{\text{Secd.}}$$

während Sondhauss aus seinen Versuchen für n die empirische Formel für kreisförmige und quadratische Oeffnungen herleitet:

$$n = 52400 \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{\text{Mm.}}{\text{Secd.}}$$

worin nur der von Sondhauss gegebene Zahlencoefficient halbiert ist, weil Sondhauss nach der Art der französischen Physiker die Schwingungszahlen der Töne doppelt so hoch nimmt, als es nach unserer Bezeichnungsweise geschieht.

Noch besser stimmt die Berechnung für einige Versuche von Wertheim, bei denen das Verhältniss der Oeffnung zum Volumen des Hohlkörpers noch kleiner ist, als bei den Versuchen von Sondhauss. Ich habe aus den Versuchen, welche er mit drei verschiedenen Glaskugeln angestellt hat¹⁾, deren Volumen durch Eingiessen von Wasser verkleinert wurde, diejenigen nach der theoretischen Formel berechnet, bei welchen der Durchmesser der Oeffnung weniger als $\frac{1}{10}$ des Durchmessers einer Kugel war, deren Volumen dem des Hohlraumes gleich ist, und setze die Zahlen hierher, um zu zeigen, wie gut die theoretische Formel mit den Versuchen übereinstimmt. (Siehe umstehende Tabelle.)

Zur Erleichterung der Vergleichung sind in der letzten Rubrik unter Δ die Logarithmen des berechneten n dividirt durch das beobachtete n hinzugefügt. Der Logarithmus des halben Tones $\frac{1}{2}$ beträgt 0,028. Die Werthe von Δ zeigen, dass nur bei den verhältnissmässig zur Oeffnung kleineren Werthen des Volumens die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung sich einem halben Tone nähert.

1) Annales de Chimie et de Physique Sér. 3, Tome XXXI, p. 428.



70	Durchmesser der Öffnung.	Volumen des Hohl- raumes in Cem.	2n		Δ
			beobachtet	berechnet	
Erste Kugel. Volumen 6528 cc. Temperatur 24°. $a = 3\ 46\ 550\text{ mm.}$	20 mm	6528	184,2	193,1	0,020
		5712	206,4	206,4	0,000
		4896	218,8	222,9	0,068
		4080	232,9	244,2	0,021
Zweite Kugel. Volumen 2030 cc. Temperatur 18°. $a = 3\ 43\ 030\text{ mm.}$	10 mm	2030	234,9	242,3	0,013
		1827	262,6	255,5	-0,012
		1624	285,1	270,9	-0,022
		1421	300,5	290,3	-0,015
		1218	320,0	312,9	-0,010
		1015	345,0	342,7	-0,003
	15 mm	812	372,6	383,2	+0,008
		609	416,3	442,5	0,028
Dritte Kugel. Volumen 715 cc. Temperatur 20°. $a = 3\ 44\ 210\text{ mm.}$	6 mm	2030	286,0	296,8	0,016
		1827	298,7	322,8	0,020
		715	328,2	317,4	-0,015
		615	340,4	342,2	+0,002
		515	373,7	374,0	0,000
		415	416,3	416,6	0,000
	10 mm	315	481,2	478,2	-0,003
		215	581,8	578,8	-0,002
		115	766,5	791,4	+0,014
		715	384,4	409,7	0,028
		615	411,6	441,8	0,031

Für Ellipsen von der Excentricität ε und der grossen Axe R ist die Masse M , welche, auf der Fläche passend vertheilt, in dieser das constante Potential 1 giebt¹⁾,

$$M = \frac{R}{K},$$

worin K , das ganze elliptische Integral erster Gattung für den Modul ε bezeichnet. Es wird also nach (30a.) für Hohlräume mit einer elliptischen Öffnung:

$$n^2 = \frac{a^2 R}{4\pi K S},$$

1) S. Clausius in Poggendorffs Annalen LXXXVI S. 161.

oder wenn man den Flächeninhalt s der elliptischen Öffnung einführt und setzt:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

$$s = \pi R^2 \varepsilon_1,$$

so wird:

$$n = \sqrt{\frac{\pi}{2KV\varepsilon_1}} \cdot \frac{a\sqrt{s}}{\sqrt{\pi^2} \sqrt{2S}}.$$

Der Werth von n^2 ist also von dem für eine kreisförmige Öffnung gültigen durch den Factor $\pi/2KV\varepsilon_1$ verschieden, und da dieser Factor grösser ist als 1, so wird der Ton einer elliptischen Öffnung von gleicher Fläche etwas höher als der einer kreisförmigen.

Hat der Hohlraum noch eine zweite Öffnung, die ebenfalls in einem nahen ebenen Theile der Wand liegt, so setze man für den äusseren vor ihr liegenden Raum:

$$\psi = \int h_1 \frac{\cos(kr - 2\pi nt + \tau)}{r} d\omega,$$

in dem ihr benachbarten Theile des inneren Raumes:

$$\Psi = \left[C_1 - \int \frac{h_1 \cos kr}{r} d\omega \right] \cos(2\pi nt - \tau) + k \int h_1 d\omega \sin(2\pi nt - \tau).$$

Es sind wie vorher an der Öffnung die Werthe von $d\Psi/da$ übereinstimmend, die Werthe von Ψ werden:

$$\bar{\Psi} = \int \frac{h_1 d\omega}{r} \cos(2\pi nt - \tau) + k \int h_1 d\omega \sin(2\pi nt - \tau),$$

$$\bar{\Psi} = \left[C_1 - \int \frac{h_1 d\omega}{r} \right] \cos(2\pi nt - \tau) + k \int h_1 d\omega \sin(2\pi nt - \tau).$$

Es muss also sein:

$$C_1 = 2 \int \frac{h_1 d\omega}{dr},$$

und setzen wir wie bei der ersten Öffnung in (29k):

$$\int h_1 d\omega = \frac{1}{2} C_1 M_1,$$

so wird in den von der Öffnung entfernteren Stellen des inneren Raumes:

$$\Psi = C_1 \cos(2\pi nt - \tau) + \frac{1}{2} k C_1 M_1 \sin(2\pi nt - \tau).$$



Dies muss aber gleich werden dem früher festgesetzten Werthe von ψ im Innern der Kugel:

$$\psi = C \cos(2\pi nt).$$

Daraus folgt, dass:

$$C_1 [\cos \tau - \frac{1}{2} k M_1 \sin \tau] = C, \\ \sin \tau + \frac{1}{2} k M_1 \cos \tau = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass τ sehr klein ist, und demgemäss aus der ersten, dass mit Vernachlässigung kleiner Grössen:

$$C = C_1.$$

Nun wird aus Gleichung (28c):

$$\int \frac{d\psi}{dn} d\omega = 2\pi \int h d\omega + 2\pi \int h_1 d\omega = k^2 CS$$

oder:

$$\pi M(C - H) + \pi M_1 C = k^2 CS, \quad (31)$$

dazu:

$$J = -\frac{k^3 CS}{2\pi}, \\ \frac{H^2 + J^2}{C^2} = \frac{[\pi(M + M_1) - k^2 S]^2}{\pi^2 M^2} + \frac{k^3 S}{2\pi} \quad (31a)$$

Damit $(H^2 + J^2)/C^2$ ein Minimum werde, und die stärkste Resonanz eintrete, setzen wir:

$$\pi(M + M_1) = k^2 S, \quad (31b)$$

durch welche Gleichung die Tonhöhe der stärksten Resonanz bestimmt ist, wie es in (30) für eine Oefnung geschehen war. Diese Gleichung stimmt, wenn die Oefnungen geometrisch ähnlich sind, mit dem von Sondhauss aus den Versuchen abgeleiteten Gesetze. Sind beide Oefnungen congruent, so verhält sich die Schwingungszahl des Körpers zu der desselben Körpers mit einer Oefnung, wie $\sqrt{2}:1$. Der Ton ist also im ersten Falle um eine verminderte Quinte höher als im zweiten Falle, was genau mit einigen Versuchen von Sondhauss¹⁾ übereinstimmt.

Heidelberg, im März 1859.

¹⁾ Poggendorff's Annalen LXXXI S. 366.

XVII.

Ueber den Einfluss der Reibung in der Luft auf die Schallbewegung.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. III. S. 16–20. Sitzung vom 27. Februar 1863. — Heidelberger Jahrbücher der Litteratur. 1863. Nr. 17.

Der Vortragende hat in einer früheren Arbeit die mathematische Theorie der Schallschwingungen in cylindrischen Röhren gegeben. Er hat damals gezeigt, warum ein Unterschied zwischen der wirklichen Länge der Orgelpfeifen und ihrer nach der älteren Theorie berechneten Länge existiren muss. Der Grund war darin zu suchen, dass an einem offenen Ende einer solchen Röhre die ebenen Schallwellen des Innern nicht plötzlich in die kugeligen Wellen des freien Raumes übergehen können, und sich daher noch etwas über die Mündung der Röhre hinaus ausbreiten. Die Theorie erlaubte für einzelne Gestalten der Röhrenmündungen diesen Unterschied der wahren und reducirten Länge zu berechnen. Bei cylindrischen Röhren vom Radius R , deren kreisförmige Oefnung in einer weit ausgedehnten ebenen Platte liegt, fand er sich gleich $\pi R/4$.

Es wurden durch diese Untersuchung die auffallendsten Unterschiede zwischen der Theorie und der Erfahrung zwar beseitigt, indessen konnte man nicht sagen, dass die Uebereinstimmung dadurch eine vollständig genaue geworden wäre. Namentlich zeigten die Versuche von Zamminer, dass der Unterschied zwischen der wahren und reducirten Länge bei engen Röhren merklich grösser war, als die Theorie erwarten



liess, und gerade bei solchen hätte man die beste Uebereinstimmung erwarten dürfen.

Der Vortragende hat nun gefunden, dass die Uebereinstimmung viel vollständiger wird, wenn man die Reibung in der Luft mit in Rechnung zieht, sich dabei stützend auf die theoretischen Untersuchungen und die Bestimmung der Reibungsconstante von Stokes.

Der erste Theil der Untersuchung bezog sich auf die Fortpflanzung kugelliger oder ebener Wellen in unendlich ausgedehnten, mit Luft gefüllten Räumen. Es zeigt sich, dass die Reibung dabei die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls der Theorie nach zwar etwas vermindern müsse, aber in einer praktisch ganz unerheblichen Weise. Ausserdem hat die Reibung zur Folge, dass die Schallwellen, indem sie fortlaufen, etwas an Intensität abnehmen. Der Ausdruck für ihre Intensität findet sich nämlich näherungsweise mit dem Factor:

$$e^{-\frac{4\pi^2 n^2 k^2 z}{a \cdot a \cdot a}}$$

multiplicirt, worin n die Schwingungszahl, a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, z die Länge des Weges und k die Reibungsconstante bezeichnet, welche nach Stokes gleich 2,946 mm ist, wenn man die Secunde als Zeiteinheit benutzt.¹⁾

Jener Ausdruck lässt erkennen, dass die Abnahme desto bedeutender ist, je grösser n , also je höher der Ton ist. Bei den Tönen der gewöhnlichen musikalischen Scala ist jene Abnahme äusserst unbedeutend, bei sehr hohen Tönen kann sie aber sehr merklich werden. Wenn man berechnet, wie weit sich ein Zug ebener Schallwellen fortpflanzen muss, ehe seine Intensität durch Reibung auf die Hälfte vermindert wird, so findet man:

Ton	Schwingungszahl	Weglänge in Metern
a_1	440	383545
a_5	7040	1498
d_8	38016	52,7
a_{11}	450560	0,365

1) (1881) Es ist die auf S. 196 und 225 dieser Sammlung gebrauchte Bezeichnungsweise hier benutzt, und keine Reibung bei Condensation oder Dilatation des Volumens angenommen. Kommt letztere hinzu, wie in den auf S. 159 gebrauchten Gleichungen, so ist k^2 noch mit $4/3$ zu multipliciren.

Darin ist a_1 das gewöhnlich bei der Stimmung der Instrumente gebrauchte eingestrichene a , a_5 der höchste Ton der Pianofortes, d_8 der höchste Ton, der bisher erreicht worden ist bei Despretz's Versuchen mit kleinen Stimmgabeln. Man sieht, dass eine merkliche Abnahme des letzteren schon eintreten könnte bei einer nicht übermässig grossen Weglänge. Dagegen würden noch höhere Töne, wenn sie sich auch hervorbringen liessen, unfähig sein sich durch längere Luftstrecken fortzupflanzen. Das a_{11} der Tabelle würde nach einem Wege von 1 Fuss schon fast auch die Hälfte reducirt sein.

Es ist dieser Umstand wichtig, weil er eine obere Grenze für die Höhe physikalisch möglicher Töne anzeigt.

Der zweite Theil meiner Untersuchung betrifft die Fortpflanzung ebener Wellen in cylindrischen Röhren. Hierbei zeigt sich, dass sowohl die Abnahme der Intensität als auch namentlich die Verzögerung der Fortpflanzung in solchen Röhren wegen der Reibung an den Wänden viel bedeutender werden, als bei der Fortpflanzung im freien Raume. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer cylindrischen Röhre vom Radius R ist mit Beibehaltung der oben gebrauchten Bezeichnungen:

$$a \left[1 - \frac{k}{2R\sqrt{\pi n}} \right].$$

Der Coefficient, welcher die Abnahme der Intensität anzeigt, ist:

$$e^{-\frac{2kz\sqrt{\pi n}}{aR}}.$$

Wegen der verminderten Fortpflanzungsgeschwindigkeit müssen Orgelpfeifen ebenfalls kürzer gemacht werden, als die ältere Theorie verlangt, und zwar ist der Unterschied bei engeren Röhren gar nicht unbedeutend. Die Rechnung ergab für einige der von Zamminer gebrauchten Röhren folgende Correctionen; wobei die Längen in Millimetern gegeben sind:

Röhren-Länge	Durchmesser	Verkürzung wegen Reibung, wenn	
		offen	gedeckt
522	25	4	5,4
207,6	10	2,4	3,4
229	59	0,5	



Man sieht, dass bei den engeren Röhren die Verkürzung zum Theil über ein Procent der ganzen Länge beträgt, während sie bei den weiteren Röhren fast unmerklich ist.

Was die Stärke der Resonanz in solchen Röhren betrifft, wenn ein schwingender fester Körper ihrer Mündung genähert wird, so habe ich in meiner früheren Untersuchung bei Vernachlässigung der Reibung mit der Erfahrung übereinstimmend gefunden, dass die Resonanz einer an beiden Seiten offenen Röhre am stärksten ist, wenn ihre reducirte Länge einer geraden Anzahl von Viertelwellenlängen gleich ist. Aber in Bezug auf den Einfluss der Weite der Röhre widersprach die Theorie der Erfahrung. Der Theorie nach hätte die Resonanz desto stärker sein sollen, je enger die Röhre, weil die Reflexion der Wellen an den offenen Enden desto vollständiger ist, je enger diese sind. Dagegen zeigte die Erfahrung, dass enge Röhren namentlich für tiefe Töne schlecht resoniren. Wenn man die Reibung der Luft berücksichtigt, erklärt sich dieser Unterschied. In engen Röhren erlöschen die Schallwellen bald, wenn sie oft hin und her reflectirt werden, wegen der starken Reibung an den nahen Wänden. Es giebt daher eine gewisse mittlere Weite, bei welcher die Resonanz am stärksten ist.

260 Die Theorie ergibt für die vortheilhafteste Weite, wenn m bezeichnet, wie viel Schwingungen des angegebenen Tons auf eine Schwingung des Grundtons der Röhre kommen, und λ die Wellenlänge:

$$R^3 = \frac{m k \lambda^2 \sqrt{\lambda}}{16 \pi \sqrt{\pi a}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass wir den Radius R der Röhre kleiner machen müssen für höhere Töne, sowohl wenn wir m unverändert lassen, also die Röhre im Verhältniss der abnehmenden Wellenlänge verkürzen, als auch, wenn wir die Röhrenlänge, welche gleich $m\lambda/4$ oder $m\lambda/2$ ist, unverändert lassen, und einen höheren Oberton derselben hervorrufen. Im letzteren Falle müsste R^3 in demselben Verhältnisse abnehmen wie λ .

Obgleich wir den mechanischen Vorgang beim Anblasen der Röhren noch nicht genau zergliedern können, so zeigt sich doch allgemein, dass das Anblasen diejenigen Töne hervor-

bringt, welche in der Röhre die stärkste Resonanz finden. Das bestätigt sich auch für den Einfluss der Weite. Die obige Gleichung giebt nämlich ziemlich genau die Höhe der Töne an, welche in Röhren von gegebenem Radius und Länge am leichtesten ansprechen.

Am überraschendsten ist aber die Uebereinstimmung mit der von dem berühmtesten Orgelbauer des vorigen Jahrhunderts, Silbermann, gegebenen Regel, dass man, um Register von gleichmässiger Klangfarbe zu erhalten, die Weite der Pfeifen bei abnehmender Länge so abnehmen lassen müssen, dass die None den halben Durchmesser bekomme. Gleichbleibende Klangfarbe bedeutet gleichbleibende relative Stärke der Obertöne. Soll $R = 1/2$ werden, bei gleichbleibend guter Resonanz, so zeigt unsere Formel, dass werden müsse:

$$\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{6/5} = 0,435,$$

während für die None $\lambda = 0,444$.

Wir erhalten also durch die Berücksichtigung der Reibung auch die Erklärung für den Umstand, dass eine gewisse Weite für die Pfeifen nöthig ist, und dass engere Pfeifen leichter höhere Töne ansprechen lassen, weitere tiefe, eine Thatsache, für welche bisher noch jede Erklärung fehlte.



XVIII.

Zur Theorie der Zungenpfeifen.

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg vom 26. Juli 1861. Bd. II S. 159–164. — Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 114 S. 321–327.

321 Unter Zungenpfeifen verstehe ich alle solche Blasinstrumente, in denen dem Luftstrom der Weg durch einen schwingenden elastischen Körper bald geöffnet, bald verschlossen wird. Die erste Arbeit, welche die Mechanik der Zungenpfeifen verständlich machte, war die von W. Weber. Er experimentirte aber hauptsächlich mit metallenen Zungen, die wegen ihrer grossen Masse und Elasticität nur dann von der Luft kräftig bewegt werden, wenn sich der von der Pfeife angegebene Ton nicht zu sehr von dem Eigenton der freien Zunge unterscheidet. Daher sind die Pfeifen mit metallenen Zungen in der Regel nur fähig einen einzigen Ton anzugeben, nämlich nur denjenigen unter den theoretisch möglichen Tönen, welcher dem eigenen Tone der Zunge am nächsten liegt.

Anders verhält es sich mit Zungen von leichtem, wenig Widerstand leistendem Material, wie es die Rohrzungen der Clarinette, Oboe, des Fagotts, die menschlichen Lippen in den Trompeten, Posaunen, Hörnern sind. Sehr geeignet für die Versuche sind auch membranöse Zungen aus vulkanisirtem Kautschuk, ähnlich den Stimmbändern des Kehlkopfes gestellt; nur muss man sie, damit sie leicht und gut ansprechen, schräg gegen den Luftstrom stellen.

322 Die Wirkung der Zungen ist wesentlich verschieden, je nachdem die von ihnen geschlossene Oeffnung sich öffnet, wenn

sich die Zunge dem Winde entgegen nach der Windlade zu bewegt, oder wenn sie sich mit ihm gegen das Ansatzrohr bewegt. Die ersteren nenne ich einschlagende Zungen, die letzteren ausschlagende. Die Zungen der Clarinette, Oboe, des Fagotts, der Zungenwerke der Orgel sind alle einschlagende Zungen. Die menschlichen Lippen in den Blechinstrumenten repräsentiren dagegen ausschlagende Zungen. Die von mir gebrauchten Kautschukzungen kann man einschlagend und ausschlagend stellen.

Die Gesetze für die Tonhöhe der Zungenpfeifen ergeben sich vollständig, wenn man die Bewegung der Zunge unter dem Einflusse des periodisch wechselnden Luftdruckes im Ansatzrohr und Windrohr bestimmt, und berücksichtigt, dass das Maximum des Ausströmens der Luftmenge nur erreicht werden kann, wenn die von der Zunge gedeckte Oeffnung ihre grösste Weite erreicht hat.

1) Zungen mit cylindrischem Ansatzrohr ohne Windrohr. Die Zunge wird betrachtet als ein Körper, der durch elastische Kräfte in seine Gewichtslage zurückgeführt wird, und durch den, wie der Sinus der Zeit periodisch wechselnden, Druck im Ansatzrohre wieder daraus entfernt wird. Die Bewegungsgleichungen¹⁾ zeigen, dass der Augenblick stärksten Druckes in der Tiefe des Ansatzrohres fallen muss zwischen eine grösste Elongation der Zunge nach aussen, die ihm vorausgeht, und eine grösste Elongation nach innen, welche nachfolgt, und wenn man sich die Schwingungsdauer gleich der Peripherie eines Kreises in 360 Grade abgetheilt denkt, ist der Winkel ε , um welchen das Maximum des Druckes nach dem Durchgange der Zunge durch ihre Mittellage eintritt, gegeben durch die Gleichung:

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{L^2 - \lambda^2}{\beta^2 L^2 \lambda},$$

wo L die Wellenlänge des Tones der freien Zunge in der Luft bezeichnet, λ die des wirklich eingetretenen Tones und β^2 eine Constante ist, welche bei Zungen von leichtem Material

1) Ähnlich zu behandeln wie Seebeck's Theorie des Mittönens. Repertorium der Physik. VIII. 60–64.



und grösserer Reibung grösser ist als bei schwerem und vollkommen elastischem Material. Der Winkel ε ist zu nehmen zwischen -90° und $+90^\circ$.

In derselben Weise muss nun bestimmt werden die Zeit, um welche der grösste Druck in der Tiefe des Ansatzrohres abweicht von der grössten Geschwindigkeit, welche letztere wieder zusammenfallen muss mit derjenigen Stellung der Zunge, wo die Öffnung am weitesten ist. Die Berechnung dieser Grösse ergibt sich aus meinen Untersuchungen über die Luftbewegung im Innern eines offenen cylindrischen Rohres.¹⁾ Das Maximum der nach der Öffnung gerichteten Geschwindigkeit geht dem Maximum des Druckes voraus um einen Winkel δ (die Schwingungsdauer als Peripherie eines Kreises betrachtet), der gegeben ist durch die Gleichung:

$$\tan \delta = \frac{-\lambda^2}{4\pi Q} \sin \left[\frac{4\pi(l+a)}{\lambda} \right],$$

worin Q den Querschnitt, l die Länge des Ansatzrohres bezeichnet und a eine von der Form der Öffnung abhängige Constante, welche bei cylindrischen Röhren vom Radius ρ ist, gleich $\pi/4 \rho$ ist. Der Winkel δ ist wieder zwischen -90° und $+90^\circ$ zu nehmen.

Da nun Luft in das Ende des Ansatzrohres nur eintreten kann, wenn die Zunge geöffnet ist, so muss bei einschlagenden Zungen das Maximum der nach aussen gerichteten Strömungsmenge der Luft zusammenfallen mit der grössten Elongation der Zunge nach innen; es muss also sein:

$$-\varepsilon = \delta + 90^\circ$$

und δ sowie ε müssen negativ sein.

Bei ausschlagenden Zungen dagegen muss das Maximum der Luftausströmung zusammenfallen mit der grössten Elongation der Zunge nach aussen, es muss sein:

$$90^\circ = \delta + \varepsilon$$

und δ wie ε müssen positiv sein.

1) S. diese Sammlung S. 347 und 349, wo $\delta = \tau - \tau_1 + \pi/2$.

Beide Fälle vereinigen sich in der Gleichung:

$$\tan \varepsilon = \cot \delta$$

$$\text{oder:} \quad \sin \frac{4\pi(l+a)}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} Q \beta^2 \frac{L^2}{\lambda^2 - L^2} \dots \dots \dots (1)$$

bei der die Zungen beziehlich einschlagen oder ausschlagen müssen, je nachdem die auf beiden Seiten der Gleichung 1 stehenden Grössen positiv oder negativ ausfallen.

Da Q und β^2 sehr kleine Grössen sind, kann $\sin [4\pi(l+a)/\lambda]$ nur in dem Falle einen erheblichen Werth annehmen, wenn $\lambda^2 - L^2$ sehr klein ist, also der Ton der Pfeife dem der freien Zunge nahe kommt, wie das bei den metallenen Zungen meist der Fall ist. Wenn aber der Unterschied beider Töne $\lambda - L$ gross ist, muss im Gegentheil $\sin [4\pi(l+a)/\lambda]$ sehr klein sein, also nahelin:

$$l + a = a \frac{\lambda}{4}$$

worin a eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Der Druckwechsel in der Tiefe des Ansatzrohres ist nun proportional $\sin [2\pi(l+a)/\lambda]$, also ein Maximum, wenn:

$$l + a = 2a \frac{\lambda}{4}$$

und ein Minimum, wenn:

$$l + a = (2a + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Im ersten Fall ist die Kraft des Luftdruckes nicht ausreichend, um die Zunge zu bewegen, im zweiten Falle genügt sie bei nicht zu schweren und widerstehenden Zungen. Daher sprechen gut an die Töne, bei welchen nahelin:

$$l + a = (2a + 1) \frac{\lambda}{4}$$

bei denen also die Luftsäule des Ansatzrohres wie die einer gedackten Pfeife schwingt. Gleichzeitig sieht man, dass diese Töne fast unabhängig sind von der eigenen Tonhöhe der Zunge.

Von dieser Art sind die Töne der Clarinette; auch membranöse einschlagende Kautschukzungen an Glasröhren bis zu 16 Fuss Länge sprechen leicht an, und lassen verschiedene Obertöne hervorbringen, die der Gleichung 1 gut entsprechen. Ausschlagende Zungen müssen sehr tief gestimmt sein, um reine



Töne des Rohres zu geben, daher die menschlichen Lippen dazu geeignet sind, in denen die elastischen Faserzüge mit einer grossen Masse wässerigen unelastischen Gewebes belastet sind. Cylindrische Glasröhren können leicht wie Trompeten angeblasen werden und geben die Töne einer gedackten Pfeife. Von diesen sind die höheren, in denen die Differenz $L^2 - \lambda^2$ gross ist, fest anzugeben, und rein gestimmt, die unteren dagegen nicht ganz unabhängig vom Werthe von L , d. h. der Spannung und Dicke der Lippen, daher unsicher und veränderlich.

2) Zungen mit kegelförmigem Ansatzrohr ohne Windrohr. Es findet ein sehr merkwürdiger Unterschied statt zwischen cylindrischen und kegelförmigen Ansatzröhren. Die Luftbewegung im Innern der letzteren lässt sich nach denselben Grundsätzen bestimmen, welche ich für die cylindrischen Röhren gebraucht habe, indem man innerhalb des Rohres das Potential der Luftbewegung setzt gleich:

$$\frac{A}{r} \sin 2\pi \frac{(R-r+a)}{\lambda} + \frac{B}{r} \cos 2\pi \frac{(R-r)}{\lambda}$$

worin r der Abstand eines beliebigen Punktes von der Spitze des Kegels ist, R der Werth von r für die weite Mündung der Röhre. Man erhält, wenn man B/A vernachlässigt:

$$\begin{aligned} \tan \delta &= -\frac{\lambda^2}{2\pi Q} \cdot \sin \frac{2\pi(l+a)}{\lambda} \\ &+ \left[\cos \frac{2\pi(l+a)}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\pi r} \sin \frac{2\pi(l+a)}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

worin r auf den Ort der Zunge zu beziehen ist. Auch hier ist zu setzen:

$$\cotang \delta = \tan \epsilon.$$

Es interessiren uns hier hauptsächlich die von dem Zungen-ton stark abweichenden Töne der Pfeife, für welche also $(L^2 - \lambda^2)$ gross, $\tan \epsilon$ daher ebenfalls sehr gross ist, und $\tan \delta$ sehr klein. Für diese muss also entweder nahehin sein:

$$\sin \frac{2\pi(l+a)}{\lambda} = 0$$

was aber keine Töne giebt, weil hierbei der Druckwechsel in der Tiefe des Ansatzrohres zu schwach ist, oder:

$$\tan \frac{2\pi(l+a)}{\lambda} = -\frac{2\pi r}{\lambda} \dots \dots \dots (2)$$

Diess ist die Gleichung für die kräftig ansprechenden höheren Töne der Röhre.

Ich gebe hier folgend die Reihe der aus Gleichung 2 berechneten Töne für eine kegelförmige Röhre aus Zink, welche folgende Maasse hatte:

Länge $l = 122,7$ ctm.

Durchmesser der Oeffnungen 5,5 und 0,7 ctm.

Reducirte Länge $l+a$, berechnet 124,77 ctm.

Ton	Wellenlänge berechnet	Länge der entsprechenden Pfeife	
		offenen	gedackten
1) H —	283,61 = $\frac{7}{8} \cdot 141,80$	= $\frac{7}{8} \cdot 70,90$	
2) h —	139,83 = $\frac{3}{8} \cdot 139,84$	= $\frac{3}{8} \cdot 104,88$	
3) fis ₁	91,81 = $\frac{3}{8} \cdot 137,71$	= $\frac{3}{8} \cdot 114,76$	
4) h ₁ +	67,94 = $\frac{3}{8} \cdot 135,88$	= $\frac{3}{8} \cdot 118,89$	
5) dis ₁	53,76 = $\frac{3}{8} \cdot 134,39$	= $\frac{3}{8} \cdot 120,95$	
6) g ₁	44,40 = $\frac{3}{8} \cdot 133,21$	= $\frac{3}{8} \cdot 122,11$	
7) b ₁ —	37,79 = $\frac{3}{8} \cdot 132,26$	= $\frac{3}{8} \cdot 122,82$	
8) c ₂	32,87 = $\frac{3}{8} \cdot 131,50$	= $\frac{3}{8} \cdot 123,28$	
9) dis ₂	29,22 = $\frac{3}{8} \cdot 131,47$	= $\frac{3}{8} \cdot 124,17$	

Die Töne vom 2ten bis 9ten konnten beobachtet werden, und fanden sich vollständig übereinstimmend mit der Rechnung. Man sieht aus den beiden letzten Rubriken, dass die hohen Töne sich fast genau denen einer gedackten Pfeife anschliessen, deren Länge der reducirten Länge der Röhre 124,7 gleich ist; die tieferen schliessen sich näher an die einer offenen Pfeife, 327 deren Länge bis zur Spitze des Kegels reichte. Die reducirte Länge einer solchen wäre $R+a = 142,6$ ctm. Gewöhnlich werden die Töne der Blechinstrumente den Tönen einer offenen Pfeife gleich gesetzt, aber die oberen sind verhältnissmässig zu tief gegen die unteren, in unserem Falle um mehr als einen halben Ton. Bei den Trompeten und Hörnern wird dieser Fehler vielleicht einigermassen durch den Schallbecher an der Mündung corrigirt. Bei den Posaunen helfen die Auszüge nach.



Während die Trompeten, Posaunen und Hörner zu den Zungenwerken dieser Klasse mit kegelförmigem Rohr und tiefen ausschlagenden Zungen gehören, tragen die Oboen und Fagotte hohe einschlagende Zungen. Sie geben bei der Ueberblasung ebenfalls die höhere Octave und dann die Duodecime, wie eine offene Pfeife. Die Rechnung nach Gleichung 2 stimmt für die Oboe sehr gut mit Zamminer's Messungen.

XIX.

Ueber die Vocale.

Archiv für die holländischen Beiträge zur Natur- und Heilkunde. Bd. I
S. 354–355. (1857.)

Betreffs der Vocale habe ich leider vergessen, Ihnen einen ³⁵⁴ Versuch vorzumachen, den Sie aber leicht selbst anstellen können. Heben Sie bei einem gut gestimmten Clavier den Dämpfer und singen Sie auf irgend einen der Claviertöne die Vocale a, e, i, o, u, ä, ö, ü, â kräftig gegen den Resonanzboden, so klingen ganz deutlich auf den Saiten diese Vocale nach. Es kommt dabei nur darauf an den betreffenden Ton genau zu treffen und festzuhalten. Geübteren Sängern gelingt der Versuch deshalb besser; meiner Frau besser, als mir selbst. Es gelingt auch, aber weniger deutlich, wenn man den Dämpfer von nur einer Saite hebt. Ich halte diese Erfahrung für interessant für die Theorie der Vocale, und werde mich bemühen die Art der Bewegung einer Saite, welche einen Vocal nachtönt, genauer zu bestimmen.

Ich theilte Ihnen schon mit, dass ich noch vor Ihren Ermittlungen über die Reibungsgeräusche der Luft bei den Vocalen gefunden hatte, dass die Vocale sich auch durch die höheren Nebentöne, welche den Grundton begleiten, unterscheiden. Aber es ist ziemlich schwer diese Unterschiede genau zu bestimmen.

Wenn man sich auch einübt nach der Methode, die ich in meinem Aufsatz über die Combinationstöne angegeben habe, die höheren Nebentöne, welche überhaupt da sind, zu hören, so ist es doch schwer ihre Stärke einigermaßen mit ³⁵⁵



der des Grundtons zu vergleichen. Singt man in das Clavier hinein, so bringt man leicht bei a, o und e die den höheren Nebentönen entsprechenden Saiten zum Nachklingen; u und i aber kann man nicht stark genug singen, um auf diesem Wege über ihre Nebentöne zu entscheiden. Nenne ich den Grundton den ersten Ton, den höheren Ton, welcher zwei-, drei-, vier- u. s. w. mal so viele Schwingungen macht, den zweiten, dritten, vierten u. s. w. Ton, so glaube ich den Charakter der Hauptvocale folgendermassen bezeichnen zu können:

A. Neben dem ersten ist deutlich der dritte und fünfte, schwächer 2, 4 und 7 vorhanden.

O. Etwas schwächer als bei A ist 3, sehr schwach 2 und 5.

U. Fast allein der Grundton, schwach 3.

E. Sehr kräftig 2, die höheren kaum hörbar.

I. Es scheint mir 2 und 3 in Verhältniss zu dem schwachen Grundtone den hellen Charakter des Vocals zu bedingen. — Schwach ist auch 5 vorhanden.

Sehr deutlich hört man übrigens die höheren Nebentöne mitklingen, wenn man den zuerst erwähnten Versuch ausführt, und bei gehobenem Dämpfer in das Clavier hineinsingt.

XX.

Ueber die Klangfarbe der Vocale.

Gelehrte Anzeigen der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften.
Sitzung vom 2. April 1859. Nr. 67—69. S. 537—541; 445—549; 553—556.
Poggendorff's Annalen Bd. 108 S. 280—290.

Ein musikalischer Ton wird hervorgebracht durch eine in ²⁸⁰ gleichen und hinreichend kleinen Zeitabschnitten sich in gleicher Weise wiederholende periodische Bewegung der Luft. Innerhalb jeder einzelnen Schwingungsperiode bleibt die Bewegung dabei ganz willkürlich, wenn nur dieselbe Bewegung, welche innerhalb der ersten Periode stattgefunden hat, in allen folgenden Perioden ebenso wiederkehrt.

Wenn die Lufttheilchen während einer jeden Schwingungsperiode sich genau in derselben Weise einmal hin und her bewegen, wie der Schwerpunkt eines Pendels bei einer sehr kleinen Schwingung thut, so hören wir nur einen einfachen und einzigen Ton, dessen musikalische Höhe durch die Anzahl der gleichen Perioden bestimmt ist, die in einer Secunde enthalten sind. In diesem Falle ist sowohl die Geschwindigkeit wie der Druck der Luft in jedem einzelnen Punkte der schwingenden Luftmasse einfach mathematisch auszudrücken durch einen Ausdruck von der Form $A \sin(2\pi nt + c)$. Ich selbst habe in einer früheren Arbeit über die Combinationstöne eine Methode nachgewiesen, vermittels deren man dergleichen einfache pendelartige Schwingungen der Lufttheilchen, oder, wie ich sie zu nennen vorschlug, einfache Luftwellen, hervorbringen kann. Ich benutzte dazu Stimmgabeln, die angeschlagen und frei in die Luft gehalten, ihre Schwingungen nicht in merklicher Weise der Luftmasse mittheilen. Wenn man sie aber



vor die Oeffnung von Resonanzröhren hält, deren tiefster Ton mit dem der Stimmgabel im Einklang ist, so wird dieser tiefste Ton der Stimmgabel der Luft kräftig mitgetheilt. Wenn auch die Stimmgabel beim Anschlagen noch höhere Töne geben kann, so lässt es sich doch leicht so einrichten, dass die höheren Töne der Stimmgabel nicht im Einklang mit den höheren Tönen der Resonanzröhre sind, und deshalb, durch die Resonanzröhre nicht verstärkt, unhörbar bleiben.

Wenn aber die Luftbewegung während einer Schwingungsperiode nicht dem einfachen Gesetze der Pendelbewegung folgt, sondern einem beliebigen anderen Gesetze, so hört man bei gehörig gerichteter Aufmerksamkeit der Regel nach mehrere Töne, selbst wenn die Luftbewegung nur von einem einzigen tönenden Körper hervorgebracht wird. Nun kann nach dem bekannten Theorem von Fourier eine jede periodische Bewegung der Luft mathematisch ausgedrückt werden durch eine Summe von Gliedern, deren jedes von der Form $A \sin(2\pi mt + c)$ ist, und also einer einfachen pendelartigen Schwingung der Lufttheilchen entspricht. In diesem Ausdrucke sind A und c abhängig vom Werthe von m , und m durchläuft die Werthe $n, 2n, 3n, 4n$ u. s. w., wo n wieder wie früher die Zahl der einfachen Perioden in der Sekunde bedeutet.

In allen solchen Fällen nun, wo die Form der Bewegung des tönenden Körpers theoretisch vollständig gefunden werden kann, und wo man sich diese Bewegung mathematisch als eine Summe von solchen Sinusgliedern dargestellt hat, hört das Ohr bei gehöriger Aufmerksamkeit in der That die Töne von $n, 2n, 3n$ u. s. w. Schwingungen, obgleich es in allen den Fällen, wo eine solche Luftbewegung nicht wirklich von verschiedenen Tonquellen her hervorgerufen ist, eben nur eine mathematische Fiction ist, dass eine Anzahl von einfachen pendelartigen Schwingungen der Lufttheilchen neben einander existiren.

Die Allgemeinheit dieser Wahrnehmung veranlasste das berühmte frühere Mitglied dieser Akademie G. S. Ohm es als Definition des einfachen Tones aufzustellen, dass ein solcher nur hervorgebracht werde durch eine einfache pendelartige Luftbewegung von der Form $A \sin(2\pi mt + c)$. Diese Definition des Tons von Ohm wurde von Seebeck heftig ange-

griffen, welcher behauptete, dass die Definition zu eng sei, und dass die Empfindung eines einzigen Tons auch durch Luftbewegungen hervorgerufen werden könnte, welche beträchtlich von der Form der einfachen pendelartigen Schwingung abwichen. Ich kann hier nicht auf eine vollständige Widerlegung der Einwürfe von Seebeck eingehen, und behalte mir vor bei einer anderen Gelegenheit darauf zurückzukommen. Ich bemerke nur, dass seine Einwürfe wesentlich auf der Schwierigkeit beruhen, die man in vielen Fällen findet, die höheren Töne wahrzunehmen. In der That muss man hier wie bei allen Sinneswahrnehmungen zweierlei von einander trennen, nämlich die unmittelbare körperliche Empfindung des Hörnerven, und die Vorstellung, welche in Folge davon durch psychische Prozesse entsteht, und in welcher auf das Vorhandensein eines bestimmten tönenden Körpers geschlossen wird. In der unmittelbaren Empfindung werden allerdings die einzelnen vorhandenen einfachen Töne bei gehörig angespannter Aufmerksamkeit immer von einander getrennt, während sie in der Vorstellung zusammenfliessen in den sinnlichen Eindruck, den der Ton eines bestimmten tönenden Körpers auf unser Ohr macht, und es gehört meist eine künstliche Unterstützung der Aufmerksamkeit dazu, um die einzelnen Elemente der zusammengesetzten Empfindung voneinander zu scheiden, ebenso wie es z. B. besondere Beobachtungsmethoden erfordert, um sich zu überzeugen, dass die Anschauung der Körperlichkeit eines betrachteten Gegenstandes auf der Verschmelzung zweier verschiedener Bilder desselben in beiden Augen beruhe.

Ich habe deshalb auch früher schon vorgeschlagen, die ganze zusammengesetzte Empfindung, wie sie die von einem einzelnen tönenden Körper ausgehende Luftbewegung erregt, mit dem Namen Klang zu bezeichnen, den Namen des Tons aber zu beschränken auf die einfache Empfindung, wie sie durch eine einfache pendelartige Luftbewegung hervorgebracht wird. Die Empfindung eines Klanges ist demnach in der Regel aus der Empfindung mehrerer einfacher Töne zusammengesetzt. Lässt man Alles, was Seebeck in dem Streite mit Ohm behauptet hat, vom Klange gelten, und was Ohm behauptet hat, vom Tone, so sind beide ausgezeichnete Akustiker



mit ihren Behauptungen im Rechte, und beide Behauptungen können ungestört neben einander bestehen.

Diese Bezeichnung wollen wir im Folgenden beibehalten, und dabei festsetzen, dass unter Tonhöhe eines Klanges die Höhe des tiefsten darin enthaltenen einfachen Tones von n Schwingungen, seines Grundtones oder ersten Tones verstanden werde, während wir die übrigen als Obertöne bezeichnen. Den Ton von $2n$ Schwingungen, die höhere Octave des vorigen bezeichne ich als zweiten Ton, den von $3n$ Schwingungen als dritten Ton u. s. w.

Ich bin nun daran gegangen die Consequenzen des Ohmschen Satzes für die Lehre von der Klangfarbe zu untersuchen, und danke der Gnade Sr. Maj. des Königs von Bayern die Geldmittel zur Anschaffung der Apparate für diese Untersuchung. In physikalischer Beziehung war man längst zu der Erkenntniss gelangt, dass dem, was unser Ohr als verschiedene Klangfarbe unterscheidet, die verschiedene Form der Luftwellen innerhalb jeder einzelnen Schwingungsperiode entspreche; aber freilich beruhte dieser Satz nur darauf, dass keine andere Möglichkeit übrig blieb, die Verschiedenheiten der Klangfarbe zu erklären, und bedurfte noch der experimentellen Bestätigung, die durch meine Versuche nun gegeben werden kann. In physiologischer Beziehung liess sich aus Ohm's Satze noch eine weitere Consequenz ziehen.

Da nämlich alle Schwingungen, die nicht der einfachen pendelartigen Bewegung entsprechen, in der Empfindung des Ohres zerlegt werden in eine gewisse Zahl einfacher Töne, so müssen Klänge von verschiedener Klangfarbe und gleicher Höhe des Grundtons für das Ohr durch verschiedene Stärke der harmonischen Obertöne verschieden sein. Wenn wir nun absehen von der verschiedenen Weise, wie die Klänge verschiedener Instrumente und Stimmen anheben oder ausklingen, ferner von den mancherlei sausenden, kratzenden, knarrenden, unregelmässigen Geräuschen, welche viele davon begleiten, und die nicht eigentlich zu dem musikalischen Theile des Tones zu rechnen sind, und den Theil der Klangfarbe, der eben nicht von den genannten Nebenumständen abhängt, die musikalische Klangfarbe des Tons nennen, so war die aufzu-

stellende Frage: Unterscheidet sich die musikalische Klangfarbe nur durch die verschiedene Stärke der darin enthaltenen Nebentöne?

Denkt man eine Wellenform aus den in ihr enthaltenen einfachen Wellen zusammengesetzt, so kommt es nicht nur darauf an, dass die letzteren die richtige Schwingungsweite haben, sondern auch darauf, dass die Phasenunterschiede zwischen ihnen und dem Grundtone richtig gewählt werden. Wir bekommen ganz verschiedene Wellenformen, wenn wir die Welle eines Grundtones und seiner ersten höheren Octave zusammensetzen, je nachdem wir das Verdichtungs-Maximum des Grundtones mit dem der Octave zusammenfallen lassen, oder etwa mit dem Verdichtungsminimum der Octave oder mit irgend einer dazwischen liegenden Phase der Octave, und es concentrirte sich nun jene Frage in folgende speciellere Form: Beruht die Unterscheidung der musikalischen Klangfarbe nur in der Empfindung von Obertönen verschiedener Stärke, oder unterscheidet das Ohr auch die Phasenunterschiede?

Die Entscheidung dieser Frage wurde am einfachsten gewonnen, wenn man geradezu versuchte Töne verschiedener Klangfarbe durch directe Zusammensetzung einfacher Töne, wie man sie durch Stimmgabeln erzeugen kann, herzustellen. Als eines der passendsten Objecte der Nachahmung boten sich die verschiedenen Vocale der menschlichen Sprache dar, weil diese als gleichmässig anhaltende musikalische Töne hervorgebracht und ziemlich, wenn auch nicht ganz frei von unmusikalischen Geräuschen gehalten werden können.

Mein Apparat besteht aus einer Reihe von 8 Stimmgabeln, die dem B (in der tiefsten Octave der Männerstimmen), und seinen harmonischen Obertönen bis zum b_2 (in den höchsten Soprantönen) entsprechen, nämlich den Tönen $B, b, f_1, b_1, d_2, f_2, a_2$ und b_2 . Jede Stimmgabel ist zwischen den Schenkeln eines kleinen hufeisenförmig gebogenen Elektromagneten befestigt, und mit einer abgestimmten Resonanzröhre verbunden. Die Oeffnungen der Resonanzröhren sind mit beweglichen Deckeln versehen, welche durch Fäden, deren Enden an einer kleinen Claviatur befestigt sind, fortgezogen werden können. Die Stimmgabeln werden in Bewegung gesetzt durch intermittirende elektrische



Ströme, die nach dem Princip des Neef'schen Hammers erzeugt werden, und deren Zahl in der Secunde gleich ist der Schwingungszahl der tiefsten Gabel, nämlich 112. Die Einrichtungen sind so getroffen, — ich hatte dabei mit ziemlich bedeutenden Schwierigkeiten zu kämpfen — dass man, nachdem der Apparat in Gang gesetzt ist, kaum ein leises Summen von den Gabeln hört, so lange die Resonanzröhren alle geschlossen sind; sobald man aber mittels der Claviatur eine oder einige der Resonanzröhren öffnet, treten die betreffenden Töne kräftig hervor. Die Stärke der Töne, welche man angeben will, kann man leicht reguliren, indem man die betreffenden Röhren mehr oder weniger vollständig öffnet.

Ich verfuhr nun so, dass ich erst die zwei tiefsten Töne allein combinirte, dann den dritten und allmählig immer mehrere hinzunahm, und die entstandenen Klänge mit der Stimme nachzuahmen suchte. So lernte ich allmählig die verschiedenen Vocallänge mehr oder weniger vollständig nachbilden, und zwar ziemlich gut und deutlich U, O, Oe, E, etwas weniger gut J, Ue, bei welchen das Sausen der Luft in der Mundhöhle, auf dessen verschiedenen Charakter bei den Vocalen Donders aufmerksam gemacht hat, verhältnissmässig am lautesten ist, und weniger gut auch A und Ae, weil bei diesen eine sehr grosse Anzahl von Tönen zusammenwirken muss, die sich nicht alle einzeln so vollständig in ihrer Stärke beherrschen lassen, ja beim A sogar noch eine Reihe höherer Töne hinzutreten müsste, für welche ich keine Gabeln mehr hatte.

Ueberhaupt ist zu bemerken, dass die mittels Stimmgabeln ²⁵⁶ zusammengesetzten Vocaltöne den gesungenen Tönen der menschlichen Stimme ähnlicher waren als den gesprochenen. Bei dem trockenen Klange der gewöhnlichen Sprache wählt man eine andere Art der Intonation, wobei der Grundton viel schwächer zum Vorschein kommt, als die höheren Nebentöne und die Geräusche; dadurch eben aber werden die Unterschiede der Klangfarbe viel deutlicher als beim Singen, wo der Grundton stärker hervortritt, und die Nebentöne mehr bedeckt. Am ähnlichsten sind die künstlich zusammengesetzten Vocale denen, welche auf einem Claviere nachklingen, wenn man einen der Vocale stark hineinsingt.

Im einzelnen waren meine Resultate nun folgende:

Der einfache Grundton hat verglichen mit den zusammengesetzten Klängen die Klangfarbe des U. Noch etwas deutlicher wird der Vocal, wenn der Grundton ganz schwach vom dritten Tone begleitet wird.

Das O entsteht, wenn der Grundton kräftig von der höheren Octave begleitet wird. Eine ganz schwache Begleitung durch den dritten und vierten Ton ist vortheilhaft aber nicht nothwendig.

Das E wird namentlich durch den dritten Ton charakterisirt, bei mässiger Stärke des zweiten. Schwach kann man auch den vierten und fünften mitklingen lassen.

Der Uebergang von O zu E geschieht also dadurch, dass man den zweiten Ton abnehmen, den dritten anschwellen lässt, giebt man beide genannte Nebentöne stark an, so entsteht Oe.

Ue entsteht durch den Grundton der in mässiger Stärke von dem dritten Tone begleitet ist.

Bei J muss man den Grundton schwächen, den zweiten verhältnissmässig zum Grundton stark, den dritten ganz schwach, aber den vierten, der für diesen Vocal charakteristisch ist, stark angeben, den fünften dazu in mässiger Stärke gesellen. Man kann ohne wesentliche Aenderung des Charakters übrigens die schwachen Töne, den dritten und fünften, auch weglassen.

Bei A und Ae dagegen sind es die höheren Nebentöne, welche charakteristisch werden. Man kann den zweiten Ton ²⁵⁷ ganz weglassen, den dritten schwach angeben, dann aber die höheren Töne hervortreten lassen, soweit es die Stärke der Gabeltöne erlaubt, die aber für diese höchsten Töne überhaupt bei der angegebenen Erregungsweise gering ist. Beim Ae kommt es namentlich auf den vierten und fünften Ton an, beim A auf den fünften bis siebenten. Wenn man bei A den dritten Ton ganz weglässt, bekommt es einen nasalen Klang.

Uebrigens muss ich bemerken, dass die angegebenen Verhältnisse zwischen Grundton und Obertönen zunächst nur zu beziehen sind auf die Tonhöhe meiner Gabeln. Der Grundton B entspricht etwa der Tonhöhe, in welcher mässig tiefe Männerstimmen zu sprechen pflegen. Ich habe meine Untersuchungen über die Vocale in höheren Tonlagen noch nicht



abzuschliessen Zeit gehabt, mit den Gabeln liess sich die Untersuchung darüber nicht viel weiter führen, weil mir die höheren Töne fehlten. Wählte ich das *b*, welches bisher zweiter Ton war, als Grundton, so hatte ich nur drei dazu passende Nebentöne. Mit diesen liessen sich U, O, Oe, E, Ue und J nach der gegebenen Regel herstellen, nur unvollkommen wegen Mangels der höheren Töne A und Ae, sodass auch hier dasselbe Verhältniss der Nebentöne zum Grundtone entscheidend für den Vocalcharakter zu sein schien, wie in der tieferen Lage. Es entspricht diese höhere Lage ungefähr der, in welcher Altstimmen zu sprechen pflegen.

Dagegen habe ich die Untersuchung weiter geführt durch directe Beobachtung der menschlichen Stimme mittels eines besonderen Hilfsmittels, welches auch den ganz Ungeübten in den Stand setzt, die Obertöne jedes musikalischen Tons herauszuhören, was bisher eine Aufgabe war, die nur durch andauernde Übung und mit grosser Anstrengung der Aufmerksamkeit gelöst werden konnte. Ich benutze dazu nämlich eigenthümliche Resonatoren, die an das Ohr selbst angesetzt werden. Die beste Form dieser Resonatoren sind Glaskugeln mit zwei Oeffnungen, von denen die eine in einen ganz kurzen trichterförmigen Hals ausläuft, dessen Ende in den Gehörgang einpasst. Bewaffnet man ein Ohr mit einem solchen Resonator; während man das andere schliesst, so hört man die meisten äusseren Töne nur sehr gedämpft, denjenigen aber, der dem eigenen Tone der Glaskugel (diese in Verbindung mit dem Gehörgange genommen) entspricht, in ausserordentlicher Stärke; in derselben Stärke treten nun auch diejenigen Obertöne äusserer Töne auf, welche dem Tone der Glaskugel entsprechen. Setzt man z. B. eine Kugel an das Ohr, deren Ton f_1 ist, und singt auf *B*, dessen dritter Ton jenes f_1 ist, die Vocale, so hört man bei *u*, *i*, *ü*, *a*, *ö* nur schwach den Ton der Kugel, während er bei *o* und *ö* sich stark hervorhebt, und bei *e* gewaltig in das Ohr hineinschmettert. Mit Hilfe solcher Resonatoren werden eine Menge akustischer Phänomene, die objectiven Combinationstöne, die Obertöne und ihre Schwebungen, die sonst schwer zu untersuchen waren, ausserordentlich leicht zugänglich. Die damit ausgeführte Untersuchung der mensch-

lichen Stimmtöne bestätigte nun durchaus, wenn auf *B* gesungen wurde, die Resultate, die ich mit den Stimmgabeln erhalten hatte, für höhere Stimmlagen traten aber einige Abweichungen ein. Es stellte sich nämlich heraus, dass für die Nebentöne einzelner Vocale gewisse Gegenden der musikalischen Scala besonders günstig sind, sodass die in diese Theile der Scala fallenden Nebentöne stärker werden als in anderen Höhelagen; so ist für das O die obere Hälfte der eingestrichenen Octave eine solche begünstigte Stelle. Der dritte und vierte Oberton, welche in der tiefen Lage des Vocals deutlich zu hören sind, liegen in dieser Gegend, und treten nicht so deutlich heraus, wenn O höher gesungen wird. Für das A ist die obere Hälfte der zweigestrichenen Octave begünstigt. Der 2., 3., 4. Ton, die in der tiefen Lage schwach waren, treten sehr mächtig heraus, wenn das A zwischen b und b_1 gesungen wird. Uebrigens fand ich mittels der beschriebenen Resonatoren, dass namentlich beim Vocal A auch noch höhere schwach hörbare Obertöne da sind, als meine Gabeln reichen. Es resonirte bei dem Vocal A gesungen auf *F*, noch eine Kugel merklich, welche auf es_3 abgestimmt war, welcher Ton 14 mal so viel Schwingungen macht als jenes *F*.

Was nun die Einwirkung der Phasenunterschiede betrifft, so hat sich eine solche bei meinen Versuchen nicht gezeigt. Die Schwingungsphasen der Stimmgabeln habe ich nach der optischen Methode von Lissajou controliren können. Man kann erstens durch Umkehrung der elektrischen Ströme in dem Elektromagnet einer jeden einzelnen Gabel deren Schwingung um eine halbe Undulation verändern, sodass Maximum und Minimum ihrer Abweichung miteinander vertauscht werden, und man kann ferner durch etwas aufgeklebtes Wachs die Gabeln ein wenig verstimmen, dann wird ihre Schwingung schwächer, und die Phasen verschieben sich desto mehr, je grösser die Verstimmung ist, bis zur Grenze einer Viertel-Undulation. Noch leichter auszuführen ist die Veränderung der Phasen der schwächeren Töne, wenn man sie bald durch grössere Entfernung der Resonanzröhren schwächt, wobei die Phase der Luftschwingung nicht verändert wird, bald durch unvollständige Oeffnung der Resonanzröhren, wobei eine Ver-



änderung der Phasen der Luftwellen eintritt, wie aus den Resultaten einer theoretischen Arbeit über die Schallschwingungen hervorgeht, die gegenwärtig in Crelle's Journal für Mathematik gedruckt wird.¹⁾ Alle die Phasenänderungen, welche auf solche Weise hervorgebracht werden können, verändern nicht die Klangfarbe, wenn die Stärke der Töne dieselbe bleibt, sodass also die früher gestellte Frage im Allgemeinen dahin beantwortet wird, dass die musikalische Klangfarbe nur abhängt von der Anwesenheit und Stärke der Nebentöne, die in dem Klange enthalten sind, nicht von ihren Phasenunterschieden.

Indessen muss ich gleich bemerken, dass scheinbare Ausnahmen vorkommen. Es können sich bei hinreichend starken Tönen Combinationstöne einmischen, die je nach den Phasenunterschieden die primären Töne theils schwächen, theils verstärken, sodass dadurch auch Unterschiede der Klangfarbe eintreten. Hier glaube ich aber neben den übrigen Erfahrungen die Erklärung festhalten zu dürfen, dass der Klangunterschied eben nur von dem Unterschiede der Tonstärke bedingt ist, welcher letztere aber unter solchen Verhältnissen vom Phasenunterschiede abhängt.

Ferner möchte ich den ausgesprochenen Satz vorläufig wenigstens noch einschränken auf die unteren, in der Scala weit auseinanderliegenden Nebentöne bis etwa zum 6. oder 8ten. Die höheren Nebentöne geben Dissonanzen miteinander und Schwebungen; und wenn nun eine Menge solcher schwebender Tonpaare zusammenwirken, wird es für die Empfindung wahrscheinlich nicht gleichgültig sein, ob die Pausen aller dieser Schwebungen zusammenfallen oder nicht. Das hängt aber von den Phasenunterschieden ab. Uebrigens halte ich es auch für wahrscheinlich, dass diese Masse hoher dissonanter Obertöne das bildet, was das Ohr als begleitendes Geräusch hört, und was wir schon von anderer Seite her ausgeschlossen haben von unserer Betrachtung der musikalischen Klangfarbe.

Ich habe schon an einem anderen Orte die Hypothese

1) S. oben S. 354 bis 358.

ausgesprochen, dass jede Nervenfasern des Hörnerven für die Wahrnehmung einer besonderen Tonhöhe bestimmt ist, und in Erregung kommt, wenn der Ton das Ohr trifft, welcher der Tonhöhe des mit ihr verbundenen elastischen Gebildes (Cortischen Organs oder Borste in den Ampullen) entspricht. Danach würde sich die Empfindung verschiedener Klangfarben darauf reduciren, dass gleichzeitig mit der Faser, welche den Grundton empfindet, gewisse andere in Erregung gesetzt werden, welche den Nebentönen entsprechen. Diese einfache Erklärung würde nicht gegeben werden können, wenn die Phasenunterschiede der tieferen Nebentöne in Betracht kämen.



XXI.

Ueber Klangfarben.

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg.
Bd. II S. 57 vom 20. Juli 1860.

⁵⁷ Professor Helmholtz setzte die Resultate fortgesetzter Untersuchungen über die Klangfarbe der Vocale auseinander. Die früheren Untersuchungen hatten sich nur auf die Zusammensetzung der Vocalklänge bezogen, wenn diese auf der Note B von einer Männerstimme gesungen wurden, und die Obertöne waren nur bis zum b_2 hin untersucht worden. Er hat nun die Untersuchung für alle Tönhöhen des gesungenen Vocale ausgedehnt, und gefunden, dass bei gewissen Vocalen noch höher liegende Obertöne charakteristisch sind. Die Resultate sind folgende:

1) Die Vocale sind in drei Reihen einzutheilen. Die erste derselben geht von U durch O in A über; die zweite von I durch E in A, und die dritte liegt zwischen den beiden anderen, geht von Ü durch O und Oa (französisch oeu) in A über.

2) Im allgemeinen sind die Obertöne der Vocale desto schwächer, je mehr die Mundhöhle verengt und geschlossen ist, in jeder der drei Reihen nehmen sie deshalb vom A an nach dem anderen Ende der Reihe hin in Stärke ab, und die erste Reihe mit weiter Mundhöhle hat im Ganzen stärkere Obertöne als die anderen beiden. Die höheren Obertöne sind im Allgemeinen schwächer als die tieferen.

3) Von dieser allgemeinen Regel bilden für jeden Vocal einzelne Obertöne eine Ausnahme, indem sie viel stärker zum Vorschein kommen, als jener Regel entspricht. Die erste

Reihe der Vocale hat nur in einer Gegend der Tonleiter verstärkte Obertöne, und zwar ist diese Gegend dadurch bestimmt, dass die Mundhöhle für sie abgestimmt ist. Die verstärkten Töne des U liegen in der Gegend des f. Beim reinen O ist die Mundhöhle für h_1 abgestimmt, und die diesem Tone benachbarten Obertöne erscheinen verstärkt. Bei A entspricht die Abstimmung der Mundhöhle und Verstärkung der Töne dem h_2 .

4) Die zweite Reihe der Vocale hat zwei Gegenden der Scala mit verstärkten Tönen. Die oberen davon scheinen der Abstimmung der Mundhöhle zu entsprechen. Für Ä liegen diese Verstärkungen in der Gegend des c_2 und e_3 , für E bei f_1 und g_3 , für I bei f und c_4 .

5) Die dritte Reihe hat ebenfalls zwei Verstärkungsstellen. Für Ü fällt die untere mit der des U und der unteren des I auf f, die obere mit den oberen des E zusammen auf g_3 . Für Ö fällt die untere mit der des E und OU zusammen auf f_1 , die obere mit der des Ä auf e_3 .

6) Für weibliche Stimmen liegen die Verstärkungsstellen ebenso wie für männliche nur fallen die tiefen des U, I und Ä weg, weil diese ausserhalb oder an der Grenze des Stimmumfanges liegen.

Zusatz (1881).

Die weitere Entwicklung dieser Sätze ist in meinem Buche: „Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig. (1. Auflage 1863, 4. Auflage 1877) gegeben.



XII.

Ueber die Bewegung der Violinsaiten.

Aus: Proceedings of the Glasgow Philosophical Society. Dec. 19, 1860. — Phil. Magaz. 4 Series. T. 21 p. 393—396, zurück übersetzt.

393 Seit einiger Zeit bin ich beschäftigt, die Ursachen der verschiedenen Qualitäten des Klanges zu studiren; und da ich fand, dass diese Unterschiede hauptsächlich von der Zahl und Stärke der harmonischen Obertöne, die den Grundton begleiten, abhängen: so war ich genöthigt, die Formen der elastischen Schwingungen zu untersuchen, die von verschieden tönenden Körpern ausgeführt werden. Unter diesen Schwingungen, deren Formen noch nicht genau bekannt sind, erscheinen die durch einen Geigenbogen hervorgebrachten Schwingungen der Saiten besonders interessant. Th. Young bezeichnet sie als sehr unregelmässig; ich vermute jedoch, dass diese Aussage sich hauptsächlich nur auf die Bewegungen beziehe, welche zurückbleiben, nachdem der Bogen zu wirken aufgehört hat. Ich selbst wenigstens fand die Bewegung sehr regelmässig, so lange nur der Bogen an einem Ende der Saite in der richtigen Art und Weise, wie Violinspieler es zu thun pflegen, angesetzt wird. Ich bediente mich einer Beobachtungsmethode, die derjenigen von Lissajous sehr ähnlich ist. Schon ohne alle Hülfe von Instrumenten kann man wahrnehmen, dass die durch den Bogen bewegte Saite nur in einer Ebene schwingt, nämlich derjenigen, in welcher die Saite selbst und die Haare des Bogens sich befinden. Diese Ebene war horizontal bei meinen

Versuchen. Die Saite wurde mit Amylum bepudert und stark beleuchtet. Auf eines der kleinen Stärkekörnchen, das als heller Punkt erschien, wurde ein senkrecht gerichtetes Mikroskop eingestellt, dessen Objectivglas an einer Zinke einer Stimmgabel befestigt war. Die Stimmgabel, welche 120 Schwingungen in der Secunde macht, wurde zwischen die Enden eines hufeisenförmigen Elektromagnets gebracht, welcher durch einen unterbrochenen Strom magnetisirt wurde; die Zahl der Unterbrechungen betrug ebenfalls 120 pro Secunde. Auf diese Weise konnte die Stimmgabel so lange als ich es wünschte in Schwingung erhalten werden. Die Linse des Mikroskops vibrirte parallel zur Saite, demzufolge senkrecht zu der Schwingungsrichtung ihrer Theilchen. Die von mir benützte Saite war die zweite Violinsaite, welche die Note *a'* giebt; sie war aber etwas höher als gewöhnlich, auf 480 Schwingungen gestimmt, und vollzog also vier Schwingungen auf eine Schwingung der Stimmgabel. Durch das Mikroskop sah ich das Stärkekörnchen eine leuchtende Curve beschreiben, deren horizontale Abscissen den Elongationen der Stimmgabel und deren verticale den Elongationen der Saite entsprachen. Ich fand es sehr wichtig, hierbei eine Geige von bester Construction zu benützen, und war so glücklich, mir ein schönes Instrument von Guadanini für diese Versuche verschaffen zu können. Auf den gewöhnlichen Instrumenten von geringerer Güte konnte ich die Curve nicht constant genug erhalten, um die kleinen Einschnitte, die ich nachher beschreiben werde, zu zählen, obwohl der Gesamtcharakter der Curve derselbe blieb bei allen Instrumenten, die ich untersuchte: Die Curve pflegte sich sprungweise längs der Abscissenlinie zu verschieben, und jeder Sprung war von einem kratzenden Ton des Bogens begleitet. Dies geschah schnell hinter einander bei den schlechteren Instrumenten; bei dem italienischen Instrument dagegen gelang es mir nach einiger Uebung eine ganz ruhige Curve zu erzielen, so lange der Bogen sich in einer Richtung bewegte, und der Klang war sehr rein und frei von Kratzen.

Wir können uns die Bewegung der Saite als aus zwei verschiedenen Schwingungsarten zusammengesetzt denken; deren erste in Bezug auf Grösse der Amplitude bei weitem über-



wiegt. Ihre Periode entspricht der Periode des Grundtons der Saite, und sie ist unabhängig von der Stelle, an der der Bogen angesetzt wird. Die zweite Bewegung bringt nur ganz kleine Einschnitte in der Curve hervor. Ihre Schwingungsperiode entspricht einem der höheren Obertöne der Saite. Es ist bekannt, dass eine Saite, wenn sie uns einen der höheren Obertöne hervorbringt, sich in verschiedene schwingende Abtheilungen von gleicher Länge theilt, welche durch ruhende Knotenpunkte von einander getrennt sind. In allen Knotenpunkten des Obertons der der kleineren hier erwähnten Bewegung der Saite entspricht, erscheint die Hauptbewegung allein; auch an anderen Stellen der Saite können die Einschnitte, welche der zweiten Bewegung entsprechen, leicht unendlich werden, wenn die Lichtlinie zu breit ist.

Die Hauptbewegung der Saite ist derartig, dass jeder Punkt derselben erst mit einer constanten Geschwindigkeit in der einen Richtung vorwärts geht und dann mit einer andern constanten Geschwindigkeit in die erste Lage zurückkehrt.

Figur 7 stellt vier solcher Schwingungen dar, welche einer Schwingung der Stimmgabel entsprechen. Die horizontalen

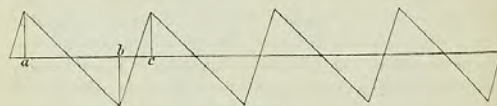


Fig. 7.

Abscissen sind proportional der Zeit, die senkrechten Ordinaten sind proportional der Ablenkung des schwingenden Punktes. Jede Schwingung wird auf der Curve durch zwei gerade Linien gebildet. Die Curve wird nicht ganz in dieser Gestalt durch's Mikroskop gesehen, weil dieses ihre horizontalen Abscissen nicht der Zeit, sondern dem Sinus der Zeit proportional zeigt. Man muss sich vorstellen, dass die Curve (Fig. 7) um einen durchsichtigen Cylinder aufgewickelt sei, sodass die beiden Enden derselben zusammenstossen, und dass das Ganze perspectivisch aus grosser Entfernung gesehen werde; auf diese Weise giebt es das wirkliche Aussehen der Curve wieder, wie es in Figur 8

in zwei verschiedenen Ansichten dargestellt ist. Wenn die Zahl der Saitenschwingungen in gleicher Zeit genau viermal grösser ist, als die der Stimmgabelschwingungen, so verharret die Curve ruhig in derselben Stellung. Wenn dagegen ein kleiner Unterschied in der Stimmung stattfindet, so sieht es aus, als ob der Cylinder sich langsam um seine Axe drehte, und durch die Bewegung der Curve erhält der Beobachter den lebhaften Eindruck einer cylindrischen Oberfläche mit darauf gezeichneten Linien, als ob er ein stereoskopisches Bild vor sich hätte. Derselbe Eindruck kann hervorgebracht werden, wenn man die beiden Zeichnungen Fig. 8 stereoskopisch vereinigt.



Fig. 8.

Wir lernen demnach aus diesen Versuchen: 1) dass die Saiten einer Violine, wenn ein Bogen darüber geführt wird, in einer Ebene schwingen; 2) dass jeder Punkt der Saite in constanter Geschwindigkeit sich hin und her bewegt.

Diese beiden Daten genügen, um die vollständige Gleichung für die Bewegung der ganzen Saite zu finden. Es ist die folgende:

$$y = A \sum_n \left\{ \frac{1}{n^2} \cdot \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) \right\} \dots \dots (1)$$

y ist die Elongation des Punktes, dessen Entfernung von einem Ende der Saite mit x bezeichnet ist, l die Länge der Saite; t die Zeit; T die Dauer einer Schwingung; A eine willkürliche Constante; n bezeichnet die Reihe der ganzen Zahlen, nach denen zu addiren ist, wie das Zeichen Σ anzeigt.

Eine anschauliche Vorstellung von der durch diese Gleichung ausgedrückten Bewegung kann auf folgende Weise gegeben werden:

Man lasse ab , Fig. 9 die Gleichgewichtsstellung der Saite sein. Während der Schwingung wird ihre Form $ac'b$ sein, zu-



sammengesetzt aus zwei geraden Linien ac und bc , die sich in dem Punkte schneiden. Man lasse diesen Schnittpunkt mit gleichbleibender Geschwindigkeit sich längs zweier flacher kreisförmiger Bogen fortbewegen, die zu beiden Seiten der Saite symmetrisch liegen und durch deren Enden gehen, wie Fig. 9 zeigt. So erhält man eine Bewegung, die der der wirklichen Saite entspricht.

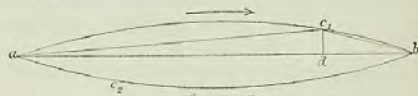


Fig. 9.

Die Bewegung jedes einzelnen Punktes betreffend, so kann aus Gleichung (1) hergeleitet werden, dass die zwei Theile ab und bc (Fig. 7) der Zeitdauer jeder Schwingung proportional sind den zwei Theilen, in die die Saite durch den beobachteten Punkt getheilt wird. Die beiden Geschwindigkeiten sind natürlich umgekehrt proportional zu den Zeiten ab und bc . In derjenigen Hälfte der Saite, welche vom Bogen berührt wird, hat die kleinere Geschwindigkeit dieselbe Richtung, als der Bogen; in der anderen Hälfte der Saite hat sie die entgegengesetzte Richtung: Indem ich die Geschwindigkeit des Bogens mit der Geschwindigkeit des von ihm berührten Punktes verglich, fand ich, dass dieser Punkt der Saite ganz fest am Bogen haftet und der Bewegung des letztern während der Zeitdauer ab vollständig folgt; dann reisst er sich los und kehrt zu seiner ersten Stellung bc zurück, bis der Bogen ihn wieder packt und festhält.

Mit dieser Hauptschwingungsform setzen sich, wie schon erwähnt, kleinere Schwingungen zusammen, deren Art ich nur in dem Falle genau anzugeben vermag, wenn der Bogen einen Punkt berührt, dessen Entfernung vom nächsten Ende der Saite $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ seiner ganzen Länge, allgemein also $\frac{1}{m}$ ist, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet. Da der Punkt, wo der Bogen angesetzt wird, nicht durch irgend welche Schwingung, die zum m ten, $2m$ ten etc. Oberton gehört, in Bewegung gesetzt

wird, so ist es ganz gleichgültig für die Bewegung dieses Punktes und für die Anstösse, die der Bogen der Saite mittheilt, ob Schwingungen, die den m ten Oberton entsprechen, existiren oder nicht. Th. Young hat bewiesen, dass wenn wir die Schwingungen einer Saite dadurch hervorrufen, dass wir sie mit dem Finger zupfen, wie bei der Harfe, oder sie mit einem Schläge treffen, wie beim Clavier, in der darauf folgenden Bewegung alle diejenigen Obertöne fehlen, welche an dem berührten Punkte einen Knoten haben. Ich schloss also daraus, dass auch der Bogen diejenigen Obertöne nicht erregen kann, welche einen Knotenpunkt an der Stelle haben, wo er angesetzt wird; und ich fand in der That, dass das Ohr, wenn der Punkt $1/m$ vom Ende entfernt ist, den m ten Partialton nicht hört, selbst wenn es sehr wohl alle anderen Obertöne unterscheidet. Deshalb werden in der Gleichung (1) alle diejenigen Bestandtheile der Summe fehlen müssen, in denen n gleich m oder $2m$ oder $3m$ etc. ist. Diese Glieder zusammengekommen, bilden eine Schwingung der Saite mit m schwingenden Abtheilungen. Jede dieser Abtheilungen schwingt in derselben Weise, wie ich es für die Hauptschwingung der ganzen Saite vorher beschrieben habe. Diese kleinen Schwingungen müssen von der Hauptschwingung der ganzen Saite abgezogen werden, um die wirkliche Schwingung zu erhalten. Curven, die nach dieser theoretischen Ansicht gebildet werden, entsprechen sehr gut den wirklich beobachteten Curven.

Wenn $m = 5$ und der beobachtete Punkt $\frac{1}{5}$ der Saiten-

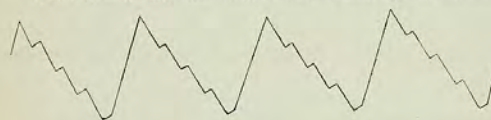


Fig. 10.

länge vom anderen Ende der Saite entfernt ist, so entsteht die in Fig. 10¹⁾ dargestellte Form der Bewegung. Nahe dem Ende

¹⁾ Die Figur ist neu construirt, um sie deutlicher und richtiger zu machen (1881).



der Saite, da wo die Geiger gewöhnlich den Bogen ansetzen, liegen die Knotenpunkte der verschiedenen Obertöne sehr nahe beisammen, sodass der Bogen fast immer auf oder doch ganz nahe an einem solchen Knoten ist. Wenn ich die Saite in der Mitte zwischen zwei Knoten anschlug, so konnte ich keine Curve hervorbringen, die genügend constant für sichere Beobachtung gewesen wäre. Wenn ich sehr nahe an dem Ende streiche, so wechselt der Ton sehr oft zwischen dem Grundton und dem zweiten und dritten Oberton, was sich durch allmähliche und entsprechende Veränderungen an der Curve zeigt.

Zusatz (1881).

Vollständigere Behandlung desselben Themas findet sich in meiner „Lehre von den Tonempfindungen“ Abth. I. Abschn. 5. Nr. 4 und Beilage VI. Aus letzteren ergänze ich im Folgenden die in der vorstehenden Abhandlung fehlende mathematische Behandlung des Problems:

Rechnen wir die Zeit in Fig. 7 von der Abscisse des Punktes a ab, sodass für a $t = 0$, setzen wir ferner für den Punkt b $t = \mathfrak{T}$, und für den Punkt c $t = T$, sodass letzteres die Dauer einer ganzen Periode bezeichnet, dann ist der Werth von y zu setzen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{von } t = 0 \text{ bis } t = \mathfrak{T} \quad y = ft + h \\ \text{von } t = \mathfrak{T} \text{ bis } t = T \quad y = g(T - t) + h \end{array} \right\} \dots (1)$$

wobei für $t = \mathfrak{T}$ sich ergibt, dass:

$$f\mathfrak{T} = g(T - \mathfrak{T}).$$

Wenn wir nun y entwickelt denken in eine Fouriersche Reihe:

$$\begin{aligned} y = & A_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + A_2 \sin \frac{4\pi t}{T} + A_3 \sin \frac{6\pi t}{T} \text{ etc.} \\ & + B_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + B_2 \cos \frac{4\pi t}{T} + B_3 \cos \frac{6\pi t}{T} \text{ etc.,} \end{aligned}$$

so ergibt sich durch Integration:

$$A_n \int_0^T \sin^2 \frac{2n\pi t}{T} dt = \int_0^T y \sin \frac{2n\pi t}{T} dt$$

$$B_n \int_0^T \cos^2 \frac{2n\pi t}{T} dt = \int_0^T y \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

und dies giebt folgende Werthe von A_n und B_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(g+f)T}{2n^2\pi^2} \sin \frac{2n\pi\mathfrak{T}}{T} \\ B_n &= -\frac{(g+f)T}{2n^2\pi^2} \left\{ 1 - \cos \frac{2n\pi\mathfrak{T}}{T} \right\} \end{aligned}$$

und y bekommt die Form:

$$y = \frac{(g+f)T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n\mathfrak{T}}{T} \sin \frac{2n\pi}{T} \left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2} \right) \right\} \dots (2)$$

In der Gleichung (2) bedeutet y nur die Entfernung eines bestimmten Saitenpunktes von der Gleichgewichtslage. Wenn x die Entfernung dieses Punktes vom Anfang der Saite bezeichnet, und L die Länge der Saite, so ist die allgemeine Form des Werthes von y :

$$\begin{aligned} y = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sin \frac{2n\pi}{T} \left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2} \right) \right\} \\ & + \sum \left\{ D_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \frac{2n\pi}{T} \left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2} \right) \right\} \dots (3) \end{aligned}$$

Die Vergleichung der Gleichungen (2) und (3) zeigt unmittelbar, dass alle:

$$D_n = 0 \quad \text{und}$$

$$C_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = \frac{g+f}{\pi^2} \cdot \frac{T}{n^2} \sin \frac{n\pi\mathfrak{T}}{T} \dots (3a)$$

Hierin sind $g+f$ und $\mathfrak{T}$ abhängig von x aber nicht von n . Nimmt man die Gleichungen für $n=1$ und $n=2$ und dividirt sie durch einander, so giebt es:

$$\frac{C_2}{C_1} \cos \frac{\pi x}{L} = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi\mathfrak{T}}{T}.$$

Daraus folgt für $x = L/2$, wie auch die Beobachtung lehrt, $\mathfrak{T} = T/2$. Wenn aber $x=0$; so wird nach den Beobachtungen auch $\mathfrak{T} = 0$; es folgt also:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{4} C_1 \\ \frac{x}{L} &= \frac{\mathfrak{T}}{T} \dots (3b) \end{aligned}$$



und daraus, dass $g + f$ unabhängig von x sei. Nennen wir p die Amplitude der Schwingung des Saitenpunktes x , so ist:

$$f\mathfrak{T} = g(T - \mathfrak{T}) = 2p$$

$$g + f = \frac{2p}{\mathfrak{T}} + \frac{2p}{T - \mathfrak{T}} = \frac{2pT}{\mathfrak{T}(T - \mathfrak{T})} = \frac{2pL^2}{Tx(L - x)}.$$

Und da $g + f$ von x unabhängig ist, muss sein:

$$p = 4P \cdot \frac{x(L - x)}{L^2},$$

wo P die Amplitude in der Mitte der Saite bezeichnet. Aus der Gleichung (3b) folgt, dass die Abschnitte ab und bc der Schwingungsfigur, Fig. 7 (S. 412), sich verhalten müssen wie die entsprechenden Theile der Saite auf beiden Seiten des beobachteten Punktes. Daraus folgt schliesslich, dass:

$$y = \frac{8P}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{2n\pi}{T} \left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2} \right) \right\} \dots (3c)$$

als vollständiger Ausdruck für die Bewegung der Saite.

Setzt man $t - \mathfrak{T}/2 = 0$, so wird y für jeden Werth von x gleich Null, also gehen alle Theile der Saite gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage der Saite. Von da ab ist die Geschwindigkeit f des Punktes x :

$$f = \frac{2p}{\mathfrak{T}} = \frac{8P(L - x)}{LT}.$$

Diese Geschwindigkeit bleibt aber nur während der Zeit $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T} = T \frac{x}{L}$$

bestehen. Nach der Zeit t ist also:

$$y = ft = \frac{8P}{LT} \cdot (L - x)t \dots \dots \dots (4)$$

so lange:

$$t < T \frac{x}{L}$$

und also:

$$y < \frac{8P}{L^2} x(L - x).$$

Von da ab geht y mit der Geschwindigkeit $g = 2p/(T - \mathfrak{T}) = 8Px/LT$ zurück. Es ist also y nach der Zeit $t = \mathfrak{T} + t_1$:

$$y = \frac{8P}{L^2} x(L - x) - \frac{8Px}{LT} t_1$$

Und da:

$$L - x = \frac{T - \mathfrak{T}}{T} L,$$

$$\text{so ist: } y = \frac{8Px}{LT} \{ T - (\mathfrak{T} + t_1) \} = \frac{8Px}{LT} (T - t) \dots \dots (4a)$$

Auf dem einen Theile der Saite ist also die Ablenkung gegeben durch die Gleichung (4), auf dem anderen durch (4a). Beide Gleichungen geben für die Gestalt der Saite eine gerade Linie, welche entweder (4) durch den Punkt $x = L$, oder (4a) durch den Punkt $x = 0$ geht. Es sind dies die beiden Endpunkte der Saite. Ihr Schnidepunkt ist gegeben durch die Bedingung:

$$y = \frac{8P}{LT} (L - x)t = \frac{8P}{LT} x(T - t).$$

Es muss also sein:

$$(L - x)t = x(T - t), \quad Lt = xT.$$

Die Abscisse x des Schnittpunktes wächst also proportional der Zeit. Der Schnittpunkt, welcher zugleich der am meisten aus der Gleichgewichtslage entfernte Punkt der Saite ist, rückt also mit constanter Geschwindigkeit von einem Ende der Saite zum anderen, und während dieser Zeit liegt der Schnittpunkt selbst auf einem parabolischen Bogen, da für ihn:

$$y = p = \frac{8P}{L^2} x(L - x).$$

Die Bewegung der Saite lässt sich also kurz so beschreiben, dass in Fig. 9 der Fusspunkt d der Abscisse ihres Gipfels, mit constanter Geschwindigkeit auf der Linie ab hin- und hereilt, während der Gipfelpunkt selbst die beiden parabolischen Bögen ac_1b und bc_2a nach einander durchläuft, und die Saite selbst in den beiden geraden Linien ac_1 und bc_1 oder ac_2 und bc_2 ausgespannt ist.

Die beim Anstrich in einem Knotenpunkte, L/m vom Ende der Saite entfernt, wegfallenden Obertöne werden durch diejenigen Glieder der Reihe $3c$ dargestellt, in denen n den Factor m hat. Diese bilden unter sich eine Reihe welche genau dieselbe Gestalt, wie die ganze Reihe hat, und genau dieselbe Bewegung für jeden m ten Theil der Saitenlänge darstellt, vor sich gehend während des m ten Theils der Schwingungsdauer, und von einer Amplitude, die der m^2 te Theil von der der Hauptbewegung ist. Die Geschwindigkeiten der Saitenpunkte sind dagegen $1/m$ von den entsprechenden Geschwindigkeiten der Hauptbewegung. Mit Hülfe dieser Angaben kann man die in Fig. 10 ausgeführte Construction machen.



XXIII.

Ueber musikalische Temperatur.

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg vom 23. November 1860. — Poggendorff's Annalen Bd. 113 S. 87—90.

87 Jede Durtonleiter enthält in sich die Töne dreier Duraccorde; C dur z. B. der drei Accorde

F a C, C e G, G h D.

Sollen diese Accorde rein klingen, so müssen die grossen Terzen das Verhältniss der Schwingungszahlen 4:5, und die Quinten das Verhältniss 2:3 haben: innerhalb der Grenzen einer Tonart ist auch kein Hinderniss, sie so zu stimmen. Wenn man aber in eine andere Tonart übergehen will, z. B. G dur, so giebt der neu hinzutretende Accord D, fis, A eine Quinte A, welche nicht mehr gleich dem ersten a der Terz von F ist. Wenn wir die Schwingungszahl von F gleich 1 setzten, ist a, die grosse Terz von F = $\frac{5}{4}$ und A die Quinte von D = $\frac{3}{2}$. Die beiden Werthe von A stehen im Verhältniss:

$$a : A = 80 : 81.$$

Das Bedürfniss der Tastaturinstrumente hat die Musiker verleitet, statt dieser beiden Töne einen einzigen setzen zu wollen, wobei nothwendig eins beider Intervalle oder beide falsch werden müssen. Die Griechen, welche, wie es scheint, nur einstimmig oder in Octaven einhergehend ihre Musik ausführen, beobachteten richtig, dass ein Fehler in der Fortschreitung von einer Quinte viel auffallender sei, als in der Fortschreitung von einer Terz, und hielten also die Quinten rein, indem sie die Pythagoräische Terz 64:81 als Norm festsetzten.

Wenn man aber sich das auch gefallen lässt, und weiter modulirt in Quinten fortschreitend von A nach E, H, Fis, Cis, Gis, Dis, Ais, so kommt man zuletzt auf Eis, welches beinahe, aber nicht ganz mit dem F zusammenfällt, von dem man ausgegangen ist. Es ist nämlich höher im Verhältniss 531441:524288, oder abgekürzt mittels Kettenbrüchen, im Verhältniss 74:73. Um nun im Interesse der Tastatur-Instrumente die beiden Töne Eis und F vereinigen zu können, mussten wieder eine oder mehrere Quinten unrein gemacht werden. Es ergab sich als das Beste, den Fehler unter alle gleichmässig zu vertheilen, indem man alle Quinten etwas zu klein macht. Die Abweichung der Quinten in diesem jetzt allgemein herrschenden Stimmungssystem ist nun in der That ausserordentlich klein, indem die reine zur temperirten Quinte sich wie 886:885 verhält. Dabei verringert sich denn auch der Fehler in der Terz etwas, indem er von $\frac{81}{80}$ auf $\frac{157}{156}$ sinkt.

Die neuere Musik ist nun entschieden harmonisch, und für diesen Fall ist die Voraussetzung nicht richtig, dass Fehler der Terzen weniger schädlich sind, als Fehler der Quinten. Das Widrige falsch gestimmter Intervalle entsteht vornehmlich durch die Schwebungen ihrer Combinationstöne und harmonischen Obertöne. Die Schwingungszahl der stärksten Combinationstöne ist gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne. Im reinen Duraccord:

$$64:80:96$$

geben beide Terzen den Combinationston 16, die zweite Unter-octave des Grundtons. Aber im Pythagoräischen Accord:

$$64:81:96$$

geben sie die Combinationstöne 17 und 15, welche bezüglich einen halben Ton höher und tiefer sind, als der richtige Combinationston, miteinander 2 Schwebungen machen in der Zeit, wo der Grundton des Accordes 64 Schwingungen macht. Ist dieser c, mit 256 Schwingungen, so ist die Zahl der Schwebungen der Combinationstöne 8 in der Sekunde, was ein entschiedenes Knarren des Tons giebt. Ausserdem klingen jene beiden Combinationstöne, sobald man auf sie aufmerksam wird, abscheulich zur Harmonie.

Nun sind nicht alle Musikinstrumente gleich empfindlich



gegen Dissonanzen. Singstimmen sind gar nicht an eine Temperatur gebunden, auf den Streichinstrumenten sind es nur die Töne der leeren Saiten. Hier kann also ein fein geübter Musiker den grösseren Härten ausweichen. Das Clavier ist wenig empfindlich gegen Dissonanzen, weil seine Töne zu kurz verhallen, und die Orgel ist wegen der constanten Stärke ihrer Töne zu rauschender Musik mit gehäuften Dissonanzen mehr geeignet, als für ausdrucksvolle von weichem Wohlklange. Aus diesen Gründen konnten sich die zur künstlerischen Musik am besten geeigneten Instrumente mit den Nachtheilen der temperirten Stimmung ziemlich abfinden. Ausserdem werden die Schwebungen, wenn sie nicht sehr schnell sind, wenig fühlbar in schnell bewegter Musik, wenn die Dauer der meisten Töne kürzer ist, als die Dauer der Schwebungen.

Deutlich fühlbar werden die Mängel der Stimmung bei allen langsam sich bewegenden, aushaltenden Tönen, und desto mehr, je kräftiger diese sind. Chöre von Blasinstrumenten sind deshalb für die vollendet künstlerische Musik fast gar nicht anwendbar. Besonders auffallend sind nun die Nachtheile auch in der gegenwärtig sich sehr verbreitenden Physharmonika, um so mehr, als die Combinationstöne an diesem Instrumente wegen seiner besonderen Construction etwas stärker sind, als an anderen. Hier ist der Unterschied rein gestimmter und temperirter Accorde so gross, dass letztere nach ersteren wie Dissonanzen klingen.

Will man also reine Harmonien haben, so bleibt nichts übrig, als jedem Tone der Scala zwei verschiedene Werthe zu geben, je nachdem er Terz oder Quint beziehlich Grundton eines Duraccordes ist, welche Werthe im Verhältniss 80:81 stehen. Ich bezeichne im Folgenden die höheren Töne mit grossen Buchstaben, die niederen mit kleinen. Berücksichtigt man nun noch, dass die oben berechnete Differenz zwischen E is und F , nämlich $\frac{1}{3}$ nahehin gleich ist der zwischen F und f , welche $\frac{1}{30}$ beträgt, so kann man nahehin die durch Kreuze erhöhten Töne der niederen Reihe gleich den durch b erniedrigten Tönen der oberen setzen, also $cis = Des$, $fis = Ges$ u. s. w. So erhält man folgende Reihe von Duraccorden zur Verfügung:

$Fes^* as Ces^* es Ges^* b Des^* f As c Es g B d$ ⁹⁰
 $F a C e G h D fis A cis E gis^* H dis^*$
 $Fis ais^* Cis eis^*$

Die mittleren seien mathematisch rein, in den äussersten ist bei den mit Sternchen versehenen die erwähnte Verwechslung vorgenommen worden, welche streng genommen allerdings einen Fehler giebt, der aber verschwindend klein ist. In den betreffenden Accorden hat nämlich nur die Terz den kleinen Fehler, den in der gleichschwebenden Temperatur die Quinte hat; er beträgt $\frac{1}{885,6}$.

Wenn man diesen Fehler auf die verschiedenen Quinten vertheilen wollte, würde er für jede $\frac{1}{2}$ dieser Grösse betragen, aber diese erhöhte theoretische Genauigkeit wäre praktisch illusorisch, da schon jetzt der ganze Fehler von $\frac{1}{885}$ bei den Quinten an der Grenze dessen liegt, was ein geübtes musikalisches Ohr unterscheiden kann.

Für die praktische Ausführung sind entweder zwei Tastaturen nöthig, wobei es dem Spieler überlassen bleibt, die Töne des Accordes passend in der einen oder anderen Reihe zu wählen, oder man sondert die Töne in 8 Gruppen:

F	a	Cis	f	A	cis
C	e	as	c	E	gis
G	h	es	g	H	dis
D	fis	b	d	Fis	B

Alle Töne jeder dieser Gruppen werden durch einen besonderen Windkanal gespeist, und durch Pedale wird regulirt, dass der Wind entweder der rechten oder linken Gruppe jeder Linie zugeführt wird. Es sind nur vier Ventile nöthig, zu stellen durch vier Pedale; dadurch kann dann das Instrument für jede Tonart, welche im Laufe des Musikstückes eintritt, in richtige Stimmung gebracht werden.



XXIV.

Ueber die arabisch-persische Tonleiter.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg.
Bd. II S. 216–217. (Manuscript eingeleitet am 2. Juli 1862.)

²¹⁶ Ich habe in einer früheren Sitzung vom 23. Novbr. 1860¹⁾ ein Sytem der Construction und Stimmung musikalischer Instrumente beschrieben, welches erlaubt, durch alle Tonarten in reinen consonanten Accorden zu spielen. Es sind zu dem Ende doppelt so viel Tonstufen nöthig, als für die gewöhnliche gleichschwebende Temperatur. Es hängt aber noch von einem besonderen Umstande ab, dass man mit dieser Zahl von Tonstufen auskommt. Wenn man vom Tone C aus in aufsteigenden Quinten fortschreitet C—G—D—A—E, so kommt man bei der vierten Quinte auf den Ton E, welcher der natürlichen Terz des Tons C, die ich wie in der früheren Mittheilung nennen will, bis auf das kleine Intervall $\frac{1}{10}$ nahe kommt. In der griechischen Stimmung wird dieses E statt des Tones e als Terz von C benutzt. Wenn man dagegen von C aus in acht Quintenschritten abwärts geht, C—F—B—Es—As—Des—Ges—Ces—Fes, so kommt man auf den Ton Fes, welcher nur etwa noch um den zehnten Theil des Intervalls $\frac{1}{10}$ sich von e unterscheidet, und praktisch in allen Fällen ohne Bedenken für e gesetzt werden kann. Das damals beschriebene Stimmungssystem beruht wesentlich darauf, dass vertauscht werden

Fes mit e, Ces mit h, Ges mit fis u. s. w.

¹⁾ Vgl. Verhandlungen Bd. II. Heft III. p. 73. — Diese Sammlung Nr. XXIII.

Ich habe nun gefunden, dass die arabisch-persischen Musiker, obgleich sie ihre Tonleitern nur für einstimmige Musik ausbildeten, doch dieselbe Vertauschung benutzt haben, um reine natürliche Scalen zu erhalten. Die gewöhnliche Ansicht ist, dass die arabisch-persische Scala in 17 Dritteltöne eingetheilt sei. In dem Werke von Kiesewetter über die Musik der Araber finden sich aber die Vorschriften, welche Abdul Kadir und Schafieddin, persische Musiker des XIV. Jahrhunderts, gegeben haben für die Eintheilung des Monochords, und für die Weise, wie die Bunde auf der Laube zu setzen sind. Aus diesen ergibt sich ganz genau die Construction ihrer Tonleiter, welche wir in den von uns nach Hauptmann's Vorschlag gebrauchten Zeichen folgendermassen schreiben können:

C—Des—d—D—Es—e—E—F—Ges—g—G—As—a—
B—h—c—C.

Diese Leiter ist nach einer Reihe von 17 Quinten gestimmt, nämlich:

c—g—d—a—e—h—fis

das fis können wir auch Ges schreiben und dann fortfahren: ²¹⁷

Ges—Des—As—Es—B—F—C—G—D—A—E.

Die Perser und Araber bilden daraus theils Scalen nach griechischer Art mit Pythagoräischen Terzen und Sexten, theils solche mit natürlichen Terzen und Sexten. Als Tonica ist in der Regel die Quarte der Leiter F zu betrachten.

A. Griechisch

Tonart Uschah: C—D—E—F—G—A—B—C.

Tonart Newa: C—D—Es—F—G—As—B—C.

Tonart Buselik: C—Des—Es—F—Ges—As—B—C.

B. Natürlich

Tonart Rast: C—d—e—F—G—a—B—C.

Tonart Sengule: C—D—e—F—g—a—B—C.

Tonart Rehawi: C—d—e—F—g—As—B—C.

Tonart Hussein: C—d—Es—F—g—As—B—C.

Tonart Hidschef: C—d—Es—F—g—a—B—C.

Bei den späteren alexandrinischen Griechen Didymus und Ptolomeus im I. und II. Jahrhundert unserer Zeitrechnung



finden wir unter anderen „Tonfarben“ auch ein sogenanntes syntonisches Geschlecht, welches natürliche Terzen enthält, und dessen Tetrachord in die Intervalle

$$\frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}$$

getheilt ist. Da wir aber bei den Persern die Unterschiede der natürlichen und Pythagoräischen Stimmung auf ein den Griechen ganz unbekanntes, bei jenen aber consequent durchgeführtes System begründet finden, erscheint es, wenn man eine Communication annehmen will, viel wahrscheinlicher, dass die alexandrinischen Griechen einige Bruchstücke des Persischen Systems aufgenommen haben, als umgekehrt. Dass die Araber diese Systeme von den Persern entlehnt haben, nachdem sie Persien erobert hatten, steht durch die Zeugnisse der arabischen Schriftsteller fest.

Elektrodynamik.



XXV.

Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromeschwankungen inducirten elektrischen Ströme.

Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 83 S. 505–540.
(1851.) Vorläufige Notiz im Monatsberichte der Berliner Akademie 1851
S. 287.

Die von Pouillet vorgeschlagene Methode, eine zu messende kleine Zeitgrösse aus der Wirkung zu berechnen, welche während derselben ein elektrischer Strom von bekannter Intensität auf einen Magnet ausgeübt hat, ist von mir für physiologische Zwecke benutzt worden. Im weiteren Verlaufe dieser Messungen sah ich mich genöthigt Versuche anzustellen über die Dauer der durch plötzliche Stromeschwankungen inducirten elektrischen Ströme, welche ich zur Reizung der thierischen Theile gebrauchte, und über die Art, wie der zeitmessende Strom unter dem Einflusse des ihm entgegenwirkenden Schliessungsgegenstromes der Multiplicatorspirale zu strömen anfangt. Durch diese Versuche bin ich im Stande gewesen, einzelne Bestätigungen für ein sehr allgemeines mathematisches Princip zu geben, welches sich zur Bestimmung des Verlaufes solcher Strömungen darbot. Die rein physikalischen Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in dem vorliegenden Aufsatze zusammengestellt.

Ich schicke die theoretischen Erörterungen voraus, weil sie für das Verständniss der Anordnung der Versuche nothwendig sind. Man hat bis jetzt das Ohm'sche Gesetz über die Abhängigkeit der Stromstärke von den elektromotorischen Kräften und dem Widerstande der Leitungen nur auf Ströme



von constanter Intensität angewendet oder höchstens auf solche, deren Dauer noch in die Grenzen unmittelbar durch unsere Sinne wahrnehmbarer Zeittheile fällt, wie es z. B. bei den durch Bewegung von Magneten inducirten der Fall ist. Dagegen erregte sein Gebrauch für diejenigen Ströme Bedenken, welche durch Schliessung und Oeffnung eines galvanischen Stromes inducirt werden, weil die dem Ansteigen und Verschwinden des inducirenden Stromes entsprechende geringe Dauer derselben zu kurz zu sein schien, als dass die Erfüllung der Grundbedingung des Ohm'schen Gesetzes, nämlich die Ausgleichung der Stromstärke durch die ganze Länge der Leitung, angenommen werden konnte. Bei der Induction durch Unterbrechung der Leitungen ist die inducirende Stromschwankung nothwendig auf die Zeit beschränkt, während welcher sich die Metalle an der Unterbrechungsstelle von einander lösen. Diese Zeit ist allerdings nicht gleich Null, weil der hier entstehende Funke noch einen Augenblick durch die übergeführten Metalltheilchen die Verbindung unterhält, aber die Funkendauer ist doch so klein, dass sie bis jetzt noch nicht gemessen werden konnte, und wir deshalb auch ihr Verhältniss zu der Fortpflanzungszeit der Elektricität durch die Leitungen nicht kennen. Dazu kommt, dass auch der Widerstand der inducirenden Leitung während der Unterbrechungszeit uns unbekannt ist, und selbst wiederum von der elektromotorischen Kraft des Oeffnungsgegenstromes abzuhängen scheint. Anders ist es bei der Induction durch Schliessung der Leitungen. Hier finden sämmtliche Ströme von Anfang an Wege von constantem Widerstande, und keiner ist in seiner Dauer durch äussere mechanische Einflüsse beschränkt. Wenn ein elektrischer Strom in einer nicht spiralförmig aufgewundenen Leitung ohne merklichen Anfangsgegenstrom entsteht, ist allerdings wohl während seines Ansteigens keine gleichmässige Vertheilung der Stromstärke in der Leitung vorauszusetzen. Wenn er aber gleichzeitig inducirte Ströme hervorruft, fragt es sich, ob diese nicht das Anwachsen des inducirenden Stromes so verzögern, dass die Ausgleichung der Stromstärke in der ganzen Leitung fortwährend möglich bleibt, und in der That lässt sich schon aus den bisher bekannten Thatsachen und Gesetzen nach-

weisen, dass Anordnungen, in denen dies zutrifft, ausführbar sein müssen.

Beschränken wir zunächst unsere Erörterungen auf den einfachsten Fall, den, wo eine einfache Leitung geschlossen wird, welche Volta'sche Elemente und eine Spirale enthält. Im Augenblicke der Schliessung fängt die Elektricität an sich in Bewegung zu setzen, aber das Ansteigen des Stromes selbst bringt in der Spirale eine ihm entgegenwirkende elektromotorische Kraft hervor, wodurch seine volle Entwicklung nothwendig verzögert werden muss. Schon Dove¹⁾ hat aus magnetischen Versuchen den wichtigen Schluss gezogen, dass durch diese Schliessungsinduction der sich entwickelnde Strom niemals überwältigt und in der Richtung umgekehrt, sondern nur vermindert werde; dasselbe wird aus meinen später beizubringenden Versuchsreihen hervorgehen. Denken wir uns den in der Leitung vorhandenen Strom aus dem Batteriestrom von constanter Stärke und einem inducirten Strome von entgegengesetzter Richtung und veränderlicher Stärke zusammengesetzt, so muss die letztere stets kleiner sein als jene des Batteriestromes. Der inducirte Strom allein würde aber während seiner kurzen Dauer eine elektromagnetische Wirkung von bestimmter Grösse hervorbringen. Damit der ihm entgegengerichtete Batteriestrom dieselbe Wirkung hervorbringen könne, muss er eine bestimmte endliche Zeit hindurch auf den Magnet wirken. Wenn aber die elektromagnetische Wirkung eines Stromes von geringerer, der eines anderen von höherer Intensität gleich sein soll, muss ersterer länger dauern, als letzterer. Daraus folgt unmittelbar, dass die Dauer des inducirenden Stromes grösser sein muss, als diejenige Zeit, in welcher der inducirende dieselbe elektromagnetische Wirkung hervorbringt.

Ein ruhender Magnet wird durch den inducirten Strom allein genommen, abgelenkt um einen Bogen proportional:

$$\int_0^{\infty} i dt = \frac{P}{W} J, \quad (1)$$

1) Ueber den Gegenstrom zu Anfang und Ende eines primären. Pogg. Annalen Bd. LVI, S. 365.



wo i die Intensität des inducirten, J die des Batteriestromes bezeichnet, W den Widerstand der Leitung in absoluten Einheiten¹⁾, t die Zeit und P das nur von den geometrischen Verhältnissen abhängige Potential der Spirale auf sich selbst. Ebenso verursacht der Batteriestrom J , wenn er allein während der sehr kurzen Zeit t auf den Magnet wirkte, einen Ausschlag proportional:

$$\int_0^t J dt = Jt.$$

Machen wir:

$$t = \frac{P}{W},$$

so üben beide Ströme gleiche elektromagnetische Wirkung aus und da i immer kleiner als J sein soll, muss nothwendig die Dauer des Stromes i grösser als P/W sein.

Da es uns darauf ankommt, diese Dauer möglichst gross zu machen, um die Fortpflanzungszeit der Elektrizität durch die Leitung dagegen verschwinden zu lassen, wollen wir die Bedingungen untersuchen, unter denen dies erreicht wird. Zunächst müssen wir den Nenner W dadurch verkleinern, dass wir den ausser der Spirale vorhandenen Widerstand möglichst verschwinden machen, was sich in der Ausführung durch Anwendung grossplattiger Volta'scher Elemente oder Anordnung von solchen in nebeneinander wirkenden Parallelreihen bis zu jeder beliebigen Grenze wird erreichen lassen. Setzen wir voraus, dies sei geschehen, sodass wir unter W uns nur noch den Widerstand der Spirale zu denken haben. Alsdann wird der Werth des Quotienten P/W nur von der Masse des Drahtes und der Gestalt der Spirale abhängen, aber fast unabhängig sein von der Zahl der Windungen. Denken wir nämlich die Drahtleitung der Spirale in zwei Leitungen von gleicher Länge und halbem Querschnitte zerlegt, welche vom Strome hintereinander durchlaufen werden, so wird sowohl W als P vervierfacht; ersteres weil jetzt die Leitung bei doppelter Länge nur den halben Querschnitt hat, letzteres weil wir jetzt doppelt so viel inducirende, und doppelt so viel inducirte Stromelemente

1) S. Kirchhoff in Pogg. Ann. Bd. LXXVI, S. 426.

haben. Nur in dem Falle kann sich der Werth von P/W dabei ändern, wenn die Dicke der Drähte im Verhältniss zu den Dimensionen der Spirale so beträchtlich ist, dass die Induction an verschiedenen Stellen desselben Querschnittes des Drahtes mit merklich verschiedener Kraft wirkt. Da die Ausgleichungszeit der Stromstärke durch die Leitung wahrscheinlich nur von ihrer Länge abhängt, kann man sie durch Verminderung der Zahl der Windungen bei gleichbleibender Masse des Drahtes jedenfalls kleiner als jede bis jetzt messbare Zeitgrösse machen, ohne dass dabei die Dauer des Inductionsstromes geändert wird. Was den Einfluss einer Vermehrung der Masse des Drahtes betrifft, so giebt der von Neumann für das Potential zweier Strombahnen entwickelte Ausdruck folgenden Anhaltspunkt. Sind ds_1 und ds_2 Längenelemente der Strombahnen, r ihre Entfernung, α der von ihren Richtungen gebildete Winkel, so ist das Potential der Bahnen das Integral:

$$\iint \frac{ds_1 ds_2}{r} \cos \alpha$$

über beide Bahnen ausgedehnt. Denken wir nun die Länge der Elemente ds_1 und ds_2 , so wie sämtliche lineare Dimensionen der Strombahnen, also auch r , auf das n -fache vergrössert, so wird auch der Werth jenes Integrals, des Potentials der Bahnen, der n -fache. Wir erhalten dadurch das Potential einer Spirale, welche der ersten gegebenen geometrisch ähnlich ist, eine n^3 so grosse Masse und einen Draht von der n -fachen Länge und dem n^2 -fachen Querschnitt, also dem Widerstande $1/n$ hat. Der Quotient P/W wird also für diese n^2 mal so gross sein als für die erste. Daraus geht hervor, dass wir die Dauer des Schliessungsinductionsstromes durch entsprechende Vermehrung der Drahtmassen bis zu jeder beliebigen Grösse vermehren können.

Es wird also jedenfalls möglich sein Bedingungen herzustellen, unter welchen die Fortpflanzungszeit der Elektrizität durch die Leitung verschwindend klein ist gegen solche Zeittheilchen, während welcher sich die Intensität des Stromes nicht merklich ändert. Nur dadurch, dass in einzelnen Zeittheilchen die Ansteigungsgeschwindigkeit vielleicht unendlich gross würde, könnten Ausnahmen eintreten. Uebrigens will ich



als Anhaltspunkt für die Anschauung gleich vorweg bemerken, dass zur Verwirklichung der aufgestellten Bedingungen gar nicht so sehr grosse Drahtmassen nothwendig sind. Für eine möglichst eng gewickelte Spirale von 2 Pfund Kupferdraht, wie ich sie in den unten beschriebenen Versuchen gebraucht habe, ist die Grösse $P/W = 0,00497$ Secunden, während die Fortpflanzungszeit der Elektrizität in dem etwa 64 m langen Drahte nach der Bestimmung von Fizeau und Gounelle über 10,000 mal kleiner sein würde.

Wenden wir also nach diesen Vorbemerkungen das Ohm'sche Gesetz auf den bisher betrachteten Fall der Schliessungsinduction in einer einfachen Leitung an. Es sei J die ganze in derselben vorhandene Stromintensität, A die elektromotorische Kraft der Volta'schen Elemente; die übrigen Buchstaben behalten ihre Bedeutung. Die elektromotorische Inductionskraft wird $P \, dJ/dt$ sein, unter der Voraussetzung, welche wir vorläufig machen und später noch experimentell prüfen werden, dass diese Kraft mit der inducirenden Stromeschwankung vollkommen gleichzeitig sei, oder wenigstens nur verschwindend kleine Zeiträume hinter ihr zurückbleibe. Dann ist:

$$JW = A - P \frac{dJ}{dt} \quad (2)$$

oder:

$$\frac{-\frac{dJ}{dt}}{\frac{A}{W} - J} = -\frac{W}{P}.$$

511 Dies integrirt giebt:

$$\log \left[\frac{A}{W} - J \right] = -\frac{W}{P} t + C,$$

oder, wenn wir $J = 0$ für $t = 0$ setzen:

$$J = \frac{A}{W} \left(1 - e^{-\frac{W}{P} t} \right). \quad (3)$$

Dadurch ist der Verlauf der Induction vollständig bestimmt; ihre Dauer ist keine begrenzte, sondern die Intensität des ganzen vorhandenen Stromes nähert sich asymptotisch demjenigen Werthe A/W , welcher ihr ohne Berücksichtigung der Induction nach dem Ohm'schen Gesetze zukommt.

In derselben Weise kann der Verlauf der inducirten Ströme in einer beliebigen Anzahl von beliebig verzweigten Leitungen mit einer beliebigen Anzahl aufeinander einwirkender Spiralen bestimmt werden, wenn nur keine Intensitätsänderung von so grosser Schnelligkeit vorkommt, dass das Ohm'sche Gesetz seine Anwendbarkeit verliert. Es gehören hierher sämtliche Inductionen durch Schliessung von Leitungen, und von den Oeffnungsinductionen wenigstens diejenigen Stromtheile, welche den Funken überdauern. Ich werde späterhin Versuche beschreiben, aus denen sich ergibt, dass auch die Oeffnungsschläge die ersten vielleicht unregelmässigen Nachwirkungen der plötzlichen Unterbrechung des inducirenden Stromes an Dauer bedeutend übertreffen. Um die Aufgabe ganz allgemein zu lösen, denke man die verzweigten Leitungen in die möglichst geringe Zahl einfacher Umgänge zerlegt.¹⁾ Es gehöre dem Umgange a die Intensität i_a ; sein ganzer Widerstand sei w_a , der Widerstand desjenigen Stückes der Leitung, welches ihm und dem Umgange b gemeinschaftlich zukommt sei w_{ab} , welches man positiv setze, wenn i_a und i_b dieselbe, negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben; die Summe der constanten in ihm vorhandenen elektromotorischen Kräfte sei A_a , sein Potential auf sich selbst P_a , das gegen den Umgang b sei Q_{ab} . Die Intensitäten in den einzelnen Zweigen der Leitung, welche Kirchhoff als unbekannte Grössen gebraucht hat, sind bei dieser Art der Zerlegung zu ersetzen durch die algebraische Summe der Intensitäten aller derjenigen Umgänge, denen der betreffende Zweig angehört. Die von Kirchhoff aus den Ohm'schen Principien hergeleiteten Gleichungen, welche aussprechen, dass in jedem Umgange die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich sei der Summe aus den Producten der Intensitäten der zugehörigen Zweige und ihrer Widerstände, nimmt dabei folgende Form an, wenn K_a die gesammte elektromotorische Kraft ist, d. h. der Volta'schen Elemente und der Induction zusammen genommen:

$$K_a = i_a w_a + i_1 w_{1,a} + i_2 w_{2,a} + i_3 w_{3,a} + \text{etc.}$$

1) Kirchhoff in Pogg. Ann. Bd. LXXII, S. 497.



Ersetzt man K_a durch seine einzelnen Summanden, so erhält man bei n Umgängen folgendes System von Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= i_1 w_1 + i_2 w_{1,2} + i_3 w_{1,3} + \text{etc.} + i_n w_{1,n} \\ &+ P_1 \frac{di_1}{dt} + Q_{1,2} \frac{di_2}{dt} + Q_{1,3} \frac{di_3}{dt} + \text{etc.} + Q_{1,n} \frac{di_n}{dt} \\ A_2 &= i_1 w_{1,2} + i_2 w_2 + i_3 w_{2,3} + \text{etc.} + i_n w_{2,n} \\ &+ Q_{1,2} \frac{di_1}{dt} + P_2 \frac{di_2}{dt} + Q_{2,3} \frac{di_3}{dt} + \text{etc.} + Q_{2,n} \frac{di_n}{dt} \\ A_3 &= i_1 w_{1,3} + i_2 w_{2,3} + i_3 w_3 + \text{etc.} + i_n w_{3,n} \\ &+ Q_{1,3} \frac{di_1}{dt} + Q_{2,3} \frac{di_2}{dt} + P_3 \frac{di_3}{dt} + \text{etc.} + Q_{3,n} \frac{di_n}{dt} \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \\ A_n &= i_1 w_{1,n} + i_2 w_{2,n} + i_3 w_{3,n} + \text{etc.} + i_n w_n \\ &+ Q_{1,n} \frac{di_1}{dt} + Q_{2,n} \frac{di_2}{dt} + Q_{3,n} \frac{di_3}{dt} + \text{etc.} + P_n \frac{di_n}{dt} \end{aligned} \right\} (4)$$

Das zweite System der von Kirchhoff aufgestellten Gleichungen, welche aussprechen, dass die algebraische Summe sämtlicher in einem Kreuzungspunkt der Zweige zusammenfließender Intensitäten gleich sei, wird bei der angegebenen Zerlegung von selbst identisch, weil bei jedem Kreuzungspunkt jede Intensität der zugehörigen Umgänge einmal positiv als zuführend, und einmal negativ als abführend vorkommt. Das System der Gleichungen (4) genügt also für sich allein. Seine Integrale sind:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= J_1 + c_{1,1} e^{a_1 t} + c_{1,2} e^{a_2 t} + c_{1,3} e^{a_3 t} + \text{etc.} + c_{1,n} e^{a_n t} \\ i_2 &= J_2 + c_{2,1} e^{a_1 t} + c_{2,2} e^{a_2 t} + c_{2,3} e^{a_3 t} + \text{etc.} + c_{2,n} e^{a_n t} \\ i_3 &= J_3 + c_{3,1} e^{a_1 t} + c_{3,2} e^{a_2 t} + c_{3,3} e^{a_3 t} + \text{etc.} + c_{3,n} e^{a_n t} \end{aligned} \right\} (5)$$

Die Grössen J sind hierin diejenigen Werthe von i , welche bei fehlender Induction eintreten würden; man erhält sie, wenn man in den Gleichungen (4) die P und Q gleich Null setzt, und die Werthe der i sucht. Die n Grössen a und die n^2 Grössen c sind Constanten, deren Werthe sich in folgender Weise bestimmen: Man substituirt die Werthe der i und der di/dt aus den Gleichungen (5) in die (4), und setze in jeder der n Gleichungen welche für jeden Werth von t gelten müssen,

die Coefficienten von $e^{a_i t}$, von $e^{a_j t}$ u. s. w. einzeln gleich Null. Dadurch erhält man n^2 Gleichungen zwischen den Constanten von der Form:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= w_1 c_{1,a} + w_{1,2} c_{2,a} + w_{1,3} c_{3,a} + \text{etc.} \\ &+ a_a [P_1 c_{1,a} + Q_{1,2} c_{2,a} + Q_{1,3} c_{3,a} + \text{etc.}] \\ 0 &= w_{1,2} c_{1,a} + w_2 c_{2,a} + w_{2,3} c_{3,a} + \text{etc.} \\ &+ a_a [Q_{1,2} c_{1,a} + P_2 c_{2,a} + Q_{2,3} c_{3,a} + \text{etc.}] \\ 0 &= w_{1,3} c_{1,a} + w_{2,3} c_{2,a} + w_3 c_{3,a} + \text{etc.} \\ &+ a_a [Q_{1,3} c_{1,a} + Q_{2,3} c_{2,a} + P_3 c_{3,a} + \text{etc.}] \end{aligned} \right\} (6)$$

Ausserdem erhält man noch n Bestimmungsgleichungen, wenn man in den Gleichungen (5) die Zeit $t = 0$ setzt, und für i_1 bis i_n die entsprechenden Anfangswerthe derselben. Dann hat man zur Bestimmung der $(n^2 + n)$ Constanten ebenso viele Bedingungsgleichungen, wodurch die Lösung der Aufgabe vollständig bedingt wird. Die Eliminationsgleichung, welche man zur Bestimmung von a_a aus den n Gleichungen des Systems (6), welche a_a und $c_{1,a}$ bis $c_{n,a}$ enthalten, durch Elimination der Grössen c bekommt, ist vom n ten Grade, ihre n Wurzeln ⁵¹⁴ entsprechen den n Grössen a . Dass alle diese Wurzeln stets reell sind, lässt sich beweisen. Da der Beweis aber sehr weitläufig ist, genüge es hier auf einen ähnlichen zu verweisen, den Cauchy in den Exerc. de Mathém. Tome IV. p. 140 (Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes) für ein etwas einfacheres System als unser (6) führt. Doch lässt sich letzteres auf das von Cauchy zurückführen. Die Frage, ob wohl alle Wurzeln reell sind, ist deshalb von Interesse, weil imaginären Exponenten eine Wellenbewegung der Elektrizität entsprechen würde. Sie müssen ausserdem immer negativ sein, weil sonst für $t = \infty$ auch die Grössen i unendlich gross werden würden.

Die Zerlegung der vorhandenen Strömungen in die Einzelströme der Umgänge war im allgemeinen nöthig, weil nur geschlossenen Strömen ein Potential zukommt. Liegen aber die Verzweigungen der Leitung nicht innerhalb der Spiralen, sondern ausserhalb, so kann man jede Spirale als einen geschlos-



senen Umgang ansehen, dem ein Potential zukommt, und die Inductionskräfte der ausgestreckten Stromtheile dagegen vernachlässigen. Man braucht alsdann die Ströme nicht nach den Umgängen zu zerlegen, sondern kann unmittelbar die Formeln von Kirchhoff für die Intensitäten in den einzelnen Zweigen anwenden, indem man nur die Spiralen als den Sitz der inducirten elektromotorischen Kräfte ansieht, und diese in die Rechnung einführt.

Ich gehe jetzt zur Beschreibung der Versuche über, durch welche ich die Anwendbarkeit der gegebenen theoretischen Ableitungen geprüft habe. Bei diesen Versuchen wird die Zeit nicht direct gemessen, sondern aus den Wirkungen der Ströme auf einen Magnet nach einer hier nöthig gewordenen Modification der Methode von Pouillet berechnet. Das Princip der meisten meiner Versuche ist folgendes. Ich bestimme die Wirkung, welche der ansteigende Strom während einer 515 gewissen vorläufig noch unbekannten Zeitdauer hervorbringt, und dann die Intensität, welche er im Augenblicke der Unterbrechung erlangt hatte. Aus einer Reihe von solchen zusammengehörigen Werthen der Intensität und ihres Integrals nach der Zeit lässt sich dann bestimmen, welche Function der Zeit die Intensität sei.

Für die Versuche habe ich eine neue Art von galvanischer Wippe gebraucht, welche bezweckt verschiedene Stromleitungen in sehr kurz auf einander folgenden Augenblicken zu schliessen oder zu öffnen. Dieselbe ist dargestellt in Fig. 2 Taf. I. von oben gesehen, in Fig. 1 der Querschnitt AB . Auf dem Brettchen $CCDD$ (0,126 m lang, 0,197 m breit) sind drei horizontale zweiarmlige in Spitzen drehbare Hebel angebracht, welche ihrer Hauptmasse nach aus Elfenbein bestehen. In den Figuren ist Elfenbein durch die feine Punktirung angedeutet. Der grösste und oberste der Hebel $aabb$ hat seine Axe bei oo ; die beiden anderen cd stehen rechtwinkelig gegen ihn, sodass sich ihre Enden c unterhalb des Endes aa von jenem befinden, und haben ihre Axen bei ee . Jeder der beiden trägt je zwei von einander isolirte Metallstücke, welche verschiedenen Stromleitungen angehören. Ihre nach aussen gewendeten Hälften tragen nämlich zunächst der Axe die Drahtklemme g , welche durch

eine auf dem Elfenbein befestigte Messingplatte, mit der am äusseren Ende befindlichen Schraube d in leitender Verbindung steht. Letztere ist durch eine Gegenmutter festzustellen, endet unten in einer Kuppe von Gold, welche auf dem am Brette befestigten Goldplättchen i ruht. Dieses steht mit der Klemmschraube h und dem Quecksilbernäpfchen p in Verbindung. Die Klemmschraube g dagegen trägt einen Draht, welcher in das Quecksilber des Näpfchens q taucht. Die metallische Leitung ist zwischen dem Näpfchen p und q also hergestellt, so lange das untere Ende der Schraube d auf dem Plättchen i ruht. Diese Berührung wird durch die Feder ll unterhalten. Ebenso trägt die andere Hälfte eines jeden der beiden Hebelchen eine Leitung, welche mit dem Quecksilbernäpfchen r an- 515 fängt, durch den Draht rf zu der dem Hebel angehörigen Drahtklemme f und dann zu dem Goldplättchen c am mittleren Ende des Hebels geht. Ihre Fortsetzung liegt auf dem oberen Hebel. Jedem Plättchen c entspricht an diesem eine Schraube m , von derselben Art wie d , mit Gegenmutter und Goldkuppe, welche mit der Drahtklemme n und durch den Draht ns mit den Quecksilbergefässen s in leitender Verbindung steht. Sinkt das Ende aa des Hebels $aabb$ herab, so stossen die Kuppen der Schrauben m auf die Goldplatten c , und es werden die Näpfe r und s in leitende Verbindung gebracht. Der Hebel trägt am Ende a an zwei Stahlstäben das Gewicht E (87 Grm. schwer), dessen Gestalt aus Fig. 10 Taf. III. E erhellt. Es kann auf den Stäben verschoben, und an jeder beliebigen Stelle durch Anziehen des Schraubenkopfes festgeklemmt werden. Am Ende b befindet sich der stählerne pyramidalische Fortsatz t , dessen Spitze von unten gegen die horizontale Stahlplatte u drückt. Diese wird von dem Hebel uv getragen, welcher bei v um eine verticale Axe drehbar ist. Drückt man den Griff w , dessen Bewegungen durch die Schrauben x möglichst beschränkt werden, nach links herüber, so wird die Spitze von t frei, und vermöge der Schwere des Gewichtes fallen die Schrauben m auf die Enden c der kleineren Hebel, drücken diese nieder, während sich die Schrauben d von den zugehörigen Platten abheben, sodass die beiden Leistungen r und s geschlossen, die pq aber unterbrochen werden. Uebereinander geschichtete



Kautschuk- und Lederplatten hh nehmen den Stoss auf, und verhindern das Zurückspringen.

Beim Gebrauch werden die beiden Schrauben m so gestellt, dass sie nicht ganz gleichzeitig auf die Platten c aufreffen. Da die Auslösung des oberen Hebels möglichst gleichförmig geschieht, und alle Umstände während des Fallens immer dieselben sind, so bleibt auch bei unveränderter Stellung der Schrauben die Zwischenzeit der beiden Stösse ziemlich gleich, und erlaubt die Vergleichung der Wirkungen, welche elektrische Ströme bei verschiedener Anordnung der Schliessung und Oeffnung ihrer Leitungen während dieser Zeit hervorbringen. Durch Veränderung in der Stellung der Schrauben kann die Zwischenzeit leicht bis auf $\frac{1}{1000}$ Secunde und weniger vermindert werden, während die Abweichungen der einzelnen Versuche selten über $\frac{1}{4}$ ihrer mittleren Grösse gehen. Bei jedem Stosse wird eine Leitung des zugehörigen unteren Hebels geschlossen, die andere geöffnet. Letzteres geschieht nicht genau gleichzeitig mit ersterem, sondern wie ich als Resultat der Versuche hier gleich anführen will, etwa $\frac{1}{3000}$ Secunde später, weil der Stoss Zeit gebraucht, sich durch die Masse des Elfenbeins hin fortzupflanzen.

Da die Berührungsstellen der Goldkuppen und Goldplatten dem Strome einen sehr veränderlichen Widerstand entgegenstellen, muss man die Widerstände der übrigen Leitungen stets so gross machen, dass jene Ungleichheit dagegen verschwindet. Ferner muss man sich versichern, dass kein Klirren der Metalltheile an den Schliessungsstellen vorkomme. Das geschieht am besten durch eine kräftig durchströmte Spirale, deren Extracurrent bei der Unterbrechung des Stromes in einer Nebenableitung eine merkliche physiologische Wirkung hervorzubringen vermag. Bezeichnen wir die Theile derjenigen Seite des Apparates wo der erste Stoss stattfindet mit einem Striche, die der anderen mit zweien, so leite man den Strom der Spirale durch p, q , verbinde p durch einen Draht mit s , und q mit r . Lässt man den oberen Hebel fallen, so bleibt bei der Unterbrechung der Leitung p, q der Strom der Spirale durch p, s, n, m, c, f, r, q geschlossen. Klirren die Metallstücke nicht auf einander, so erfolgt auch kein Schlag; wohl aber zeigt sich

dieser beim allerleisesten Klirren. Ebenso controllirt man die zweite Seite der Wippe. Kommt es bei der ersten Seite, wie es gewöhnlich der Fall ist, nur darauf an, die leitende Berührung bis zu dem Augenblicke zu unterhalten, wo p, q unterbrochen wird, so führt man die Leitung des Extracurrents durch diese Stelle. Sollte dann auch noch nach dem zweiten Stosse die erste Unterbrechungsstelle klirren, so fühlt man keine Wirkung von dem Extracurrent, weil dieser keine Leitung mehr hat.

Die bisher beschriebene Form des Instruments ist sehr brauchbar, wo es sich um eine angenäherte Zeitbestimmung einzelner, namentlich sehr schnell vorübergehender Stromvorgänge handelt, und es lässt sehr mannigfaltige Combinationen von Oeffnungen und Schliessungen zu. Für genauere Messungsreihen, namentlich etwas grösserer Zeiträume, konnte ich aber das Fallen des oberen Hebels trotz aller aufgewendeten Sorgfalt nicht regelmässig genug machen, und nur durch sehr häufige Wiederholung derselben Versuche erhielt ich Mittelzahlen, welche mit der Rechnung ziemlich gut stimmten. Ich habe deshalb zu solchen Zwecken die Wippe in der in Fig. 3 Taf. I. dargestellten Weise mit Benutzung ihrer Haupttheile angewendet. Die Stücke x, u, v, w und die Quecksilbernäpfe der Fig. 2 Taf. I. sind weggenommen, der obere Hebel umgewendet, sodass sein Ende aa nach dem Rande DD des Brettes sieht, letzteres in senkrechter Stellung, CC nach unten, befestigt. In der abgebildeten Stellung befindet sich der Hebel fast in labilem Gleichgewichte, und sein oberer Theil hat ein ganz geringes Uebergewicht nach der vom Brette abgewendeten Richtung. Er wird in dieser Lage durch den kleinen Elektromagnet $\theta\theta$ erhalten, dessen Eisenkern das am Hebel befestigte Eisenstückchen ηb festhält. Sobald der Strom in seiner Drahtumwicklung unterbrochen wird, setzt sich der Hebel in der sanftesten und gleichmässigsten Weise mit zunehmender Geschwindigkeit in Bewegung. Während seines Falles taucht zunächst die Platinspitze γ in die breite und sorgfältig rein erhaltene Quecksilberfläche $\xi\xi$ ein. In diese Spitze endigt der horizontale, aus starkem Kupferdraht angefertigte Hebelarm $\beta\gamma$, der durch die Klemmschrauben nn und das Querholz ka be-



festigt ist; ein kupferner Ansatz δ dieses Armes taucht dauernd in das Quecksilber des Näpfchens ϵ . Im Momente der Berührung von γ und ζ wird also die Leitung zwischen ϵ und ζ hergestellt. Indem der Hebel weiter fällt, stösst endlich die Kuppe unterhalb seines Endes b auf eines der Plättchen c , und löst dadurch die Leitung am andern Ende des zugehörigen untern Hebels aus. Das Aufstossen geschieht wegen des geringeren Uebergewichts hier stets mit kleinen Rücksprängen, sodass die leitende Verbindung zwischen b und c für die Versuche nicht zu gebrauchen ist. Bei dieser Anordnung schliesst der Apparat also zuerst eine Leitung und einen Augenblick später öffnet er eine andere; eine andere Combination kann er nicht ausführen. Da aber die Hauptstörungen der regelmässigen Bewegung des oberen Hebels, welche von der Art seiner Auslösung und von dem Stosse halbelastischer Körper gegen einander herrühren, so weit es nöthig ist, beseitigt sind, so vollführt er seine Aufgabe mit viel grösserer Regelmässigkeit, welche eine genauere Bestätigung der theoretisch gefundenen Gesetze zulässt. Natürlich muss jede Erschütterung der Quecksilberfläche vermieden werden, selbst eine so kleine, wie ein fern fahrender Wagen verursacht. Ich habe deshalb die Messungsreihen des Abends vollführt. Verändern konnte ich die Zwischenzeit durch Vermehrung oder Verminderung des Quecksilbers.

Das Ansteigen der Stromintensität in einer einfachen Leitung mit einer Spirale konnte nur mittels der ersten Form der Wippe untersucht werden, das in einer verzweigten Leitung dagegen auch mit der zweiten. Aus den vorher angegebenen Ursachen waren die ersteren Versuche viel weniger genau als die zweiten, ihre Ergebnisse sind aber für später zu beschreibende mit derselben Form der Wippe ausgeführte Versuche nothwendig. Ich werde die Art ihrer Anstellung deshalb hier kurz beschreiben.

Der Kreis wurde gebildet durch vier Daniell'sche Elemente und das Multiplicatorgewinde, welches ich zu den zeitmessenden physiologischen Versuchen gebraucht hatte. Sein Widerstand war wegen der Länge und Feinheit seines Drahts 30mal so gross, als der der Batterie. Es diente gleichzeitig

als inducirende Spirale und als Galvanometer; neben ihm hing ein Magnet mit Spiegel. Für die Berechnung der Stromintegrale aus den Schwingungen des Magnets ist es am vorthellhaftesten vor dem Versuche, den Schwingungsbogen möglichst klein zu machen, und den Strom in dem Augenblicke eintreten zu lassen, wo der Magnet durch den Meridian in solcher Richtung hindurchgeht, dass der Strom seine Bewegung beschleunigt. Nennen wir i die Intensität des Stromes in der Spirale in Scalentheilen gemessen, b_1 den Ausschlag des Magnets vor, b_2 denselben nach Einwirkung des Stromes, T die Schwingungsdauer, so ist für kleine Ausschläge und eine kleine Stromesdauer:

$$\int i dt = \frac{T(b_2 - b_1)}{2\pi}. \quad (7)$$

Mit F sind im Folgenden die Differenzen ($b_2 - b_1$) bezeichnet, welche erhalten wurden, wenn der Strom durch die erste Schliessung der Wippe geschlossen und durch die zweite Öffnung derselben unterbrochen worden war, mit G dagegen diejenigen, bei denen ausserdem durch die zweite Schliessung eine Nebenschliessung der Spirale geschlossen wurde, welche denselben Widerstand hatte als die Batterie. Letztere Bedingung war leicht hinreichend genau zu erfüllen, da die Schwankungen des Widerstandes der Elemente gegen den der ganzen Leitung sehr unbedeutend waren. Es bezeichne W den Widerstand der Spirale und Batterie zusammengekommen, und w den der Batterie und den ihr gleichen der Nebenschliessung. Aus (7) und (3) ergibt sich:

$$F = \frac{2\pi A}{TW} \left\{ t - \frac{P}{W} \left(1 - e^{-\frac{w}{P}t} \right) \right\}. \quad (8)$$

Die Wirkung G ist um den Extracurrent grösser, welcher sich hier durch die Nebenschliessung ergiessen kann; derselbe ist gleich iP/W , was zu F addirt giebt:

$$G = \frac{2\pi A}{TW} t.$$

Berücksichtigt man, dass die Nebenschliessung um die Zeit z früher geschlossen, als die der Batterie unterbrochen wird, so findet man mit Weglassung der mit den höheren



Dimensionen der kleinen Grössen z und w/W multiplicirten Glieder:

$$G = \frac{2\pi A}{TW} \left\{ t - \frac{z}{2} \right\}. \quad (9)$$

Um die Grösse z , die Fortpflanzungszeit des Stosses durch das Elfenbein des zweiten unteren Hebels, zu finden, wurden die Wirkungen f des Stromes beobachtet, wenn er durch die zweite Schliessung geschlossen, durch die zweite Lösung unterbrochen wurde. Es ist:

$$f = \frac{2\pi A}{TW} \left\{ z - \frac{P}{W} \left(1 - e^{-\frac{W}{P}z} \right) \right\}.$$

Daraus ergibt sich angenähert:

$$z^2 = \frac{PfT}{\pi A}. \quad (10)$$

Die nicht ganz constanten Grössen A und W wurden durch Ablenkungsversuche ermittelt, bei denen nur $\frac{1}{142,06}$ des Stromes durch den Multiplicator kreiste, weil der ganze zu heftig auf den Magnet wirkte. Ihre Veränderungen waren sehr unbedeutend. Um z zu finden, habe ich zunächst aus denjenigen Beobachtungen, wo t einen hohen Werth hatte, und deshalb das Glied mit t im Exponenten in Gleichung (8) sehr klein wird, einen angenäherten Werth von P gesucht; mit dessen Hülfe erhält man aus (10) leicht einen hinreichend genauen Werth von z , um in einer zweiten Annäherung die Werthe zu finden, mittels deren die Berechnung ausgeführt ist, deren Resultate ich hier zusammenstelle. (Siehe umstehende Tabelle.)

Die Fortpflanzungszeit des Stosses z fand sich 0,000337 Secunden, ihr entsprach im Mittel von 14 Versuchen der Ausschlag $f = 0,253$ Scalentheile. So kleine Ausschläge sind leider wegen der Luftströmungen im Magnetkasten schwer mit Sicherheit zu messen. Wenn der Schliessungsgegenstrom der Multiplicatorspirale die Stromstärke nicht verminderte, würde dafür der Ausschlag 1,212 entstanden sein. Die ganze Grösse des Inductionstromes beträgt bei dem entsprechenden Zustande der Batterie 4,323 Scalentheile.

Man ersieht aus der Gleichung (9), dass der störende Einfluss des Inductionstromes auf die Messungen der Zeit zwischen

Nr.	G		F			Differenz	Zeit in 1 ^{ten} Secdn. berechnet
	Zahl der Ver- suche	be- obachtet	Zahl der Ver- suche	be- obachtet	aus G berechnet		
11	8	0,981	8	0,356	0,324	+ 0,032	0,035
4	24	2,286	22	0,920	0,870	+ 0,050	0,065
3	16	2,950	32	1,167	1,229	- 0,062	0,083
2	17	3,869	32	1,950	1,797	+ 0,153	0,103
10	15	4,076	20	1,120	0,928	+ 0,192	0,108
7	6	6,500	13	3,723	3,724	- 0,001	0,162
5	14	10,502	11	7,178	7,213	- 0,035	0,252
13	12	10,867	12	7,862	7,550	+ 0,312	0,260
1	8	10,865	15	7,887	7,750	+ 0,137	0,261
6	11	15,876	16	12,731	12,336	+ 0,395	0,372
12	17	16,212	12	12,995	12,679	+ 0,316	0,381
14	11	16,267	7	12,725	12,734	- 0,009	0,382
9	7	23,866	9	20,256	20,274	- 0,018	0,556
8	10	24,762	8	21,062	21,101	- 0,039	0,566

erster Schliessung und zweiter Lösung der Wippe nach Pouillet's Methode durch die beschriebene Einschaltung einer Nebenleitung beseitigt werden kann. Will man die Zwischenzeit der anderen Zeitmomente der Wippe kennen lernen, so muss man die Fortpflanzungszeit des Stosses durch das Elfenbein berücksichtigen, welche ich übrigens gleich gefunden habe, sowohl in beiden Hebeln, als auch bei verschiedenen Stellungen der aufstossenden Schrauben des oberen Hebels. Insbesondere ergibt sich aus den aufgestellten Formeln, was wir in der Folge noch gebrauchen werden, dass bei vollständiger Gleichzeitigkeit der ersten Lösung und zweiten Schliessung, der zeitmessende Ausschlag, den man bei eingeschalteter Nebenleitung zwischen erster Schliessung und zweiter Lösung erhält, 1,832 Scalentheile beträgt. Kleine Aenderungen in dem Zustande der Batterie haben auf so kleine Ausschläge kaum einen Einfluss.

Ich gehe nun zu den besseren Messungen über, welche ich mit der zweiten Form der Wippe und im verzweigten Schliessungsdrahte angestellt habe. Der Apparat kann dabei nichts weiter ausführen, als eine Stromschliessung, und nach einer



gewissen kleinen Zwischenzeit eine Oeffnung. Die Stromleitung hatte drei Zweige. Der erste a enthielt die galvanische Batterie, acht Daniell'sche Elemente, je vier hinter, je zwei nebeneinander, der zweite b einen dünnen Platindraht von 1,5 m Meter Länge, der zickzackförmig hin und her gebogen auf einem Brettchen befestigt war, so dass er keine merkliche inducirende Wirkung ausüben konnte, der dritte c eine möglichst eng gewickelte Spirale von 2 Pfund Kupferdraht. Sie bestand aus zwei parallel laufenden Drähten, jeder etwa 32 m lang, welche für diese Versuche hintereinander als ein Draht von 64 m in die Leitung eingefügt waren. Die Höhe der Spirale ist 40 mm, der Durchmesser des inneren Lumens 20 mm, der ihrer äusseren Peripherie 87 mm. Der fallende Hebel der Wippe schloss zunächst die Leitung a , und öffnete dann entweder a oder c . Im ersteren Falle konnte sich der Endgegenstrom der Spirale durch den Zweig b entladen; im letzteren wurde ihm jede Leitung abgeschnitten. Die Wirkung der Ströme wurde durch die Ablenkungen eines Magnetstäbchens gemessen, welches parallel der einen Grundfläche der Spirale an einem Coconfaden schwebte. Die Ausschläge des Magnets wurden mit Hilfe von Spiegel, Scala und Fernrohr in der bekannten Weise beobachtet.

524 Für die Anwendung der zu prüfenden Gesetze auf die vorliegenden Versuche dürfen wir die inducirende Wirkung der ausserhalb der Spirale liegenden einfachen Drahtleitungen vernachlässigen, und können die Inductionswirkung einer elektromotorischen Kraft gleich setzen, welche nur in dem Zweige c ihren Sitz hat. Bezeichnen wir mit p das Potential der Spirale, mit i_a, i_b, i_c die Intensitäten, mit w_a, w_b, w_c die Widerstände der drei Zweige a, b, c , mit A die elektromotorische Kraft der Batterie in a , so ist:

$$i_a = i_b + i_c$$

$$A - i_a w_a = i_b w_b = i_c w_c + p \frac{di_c}{dt}.$$

Durch Elimination von i_a und i_b erhalten wir:

$$A w_b = i_c (w_a w_b + w_a w_c) + p (w_a + w_b) \frac{di_c}{dt}.$$

Der Kürze wegen bezeichnen wir die Grösse $w_a w_b + w_a w_c + w_b w_c$ mit N ; das Integral wird dann:

$$i_c = \frac{A w_b}{N} \left\{ 1 - e^{-\frac{Nt}{p(w_a + w_b)}} \right\}. \quad (11)$$

Daraus findet sich ferner:

$$i_b = \frac{A}{w_a + w_b} - \frac{A w_a w_b}{N(w_a + w_b)} \left\{ 1 - e^{-\frac{Nt}{p(w_a + w_b)}} \right\}. \quad (12)$$

$$i_a = \frac{A}{w_a + w_b} - \frac{A w_b^2}{N(w_a + w_b)} \left\{ 1 - e^{-\frac{Nt}{p(w_a + w_b)}} \right\}. \quad (13)$$

Während also i_c von 0 an steigend sich asymptotisch dem Werthe nähert, welcher ihm dauernd in dem verzweigten Systeme zukommt, haben i_b und i_a anfangs den Werth, welcher ihnen bei Abwesenheit der Leitung a zukommen würde, ersteres sinkt, letzteres steigt zu dem Werthe, welcher der dreitheiligen Leitung entspricht.

Wir können am Magnet nur die Wirkung von i_c beobachten. Wenn bei der Unterbrechung des Stromes die Leitung c selbst geöffnet wird, haben wir nichts als die Wirkung des ansteigenden Stromstückes. Sei F die Differenz der Ausschläge des Magnetes, dann ist nach (7) und (11):

$$\frac{TF}{2\pi} = \int_0^t i_c dt = \frac{A w_b}{N} t - \frac{A w_b (w_a + w_b) p}{N^2} \left\{ 1 - e^{-\frac{Nt}{p(w_a + w_b)}} \right\}.$$

Bezeichnen wir den Werth von i_c zur Zeit der Unterbrechung des Stromes mit J_c , so ist:

$$\frac{TF}{2\pi} = \frac{A w_b}{N} t - \frac{(w_a + w_b) p}{N} J_c. \quad (14)$$

Wird dagegen nicht die Leitung c , sondern a unterbrochen, so ist bis zum Augenblicke der Unterbrechung der Verlauf der Ströme ganz derselbe wie im ersten Falle, nachher aber bildet sich ein Extracurrent in der Leitung b und c , dessen Grösse der Intensität, welche im Augenblicke der Unterbrechung in der Spirale stattfindet, proportional sein muss. Dadurch wird



die Gesamtwirkung G auf den Magnet grösser als F in dem vorigen Falle. Wie oben in Gleichung (1) ergibt sich:

$$\frac{T(G-F)}{2\pi} = \frac{p J_c}{w_b + w_c} \quad (15)$$

Um die Gleichungen (14) und (15) zur Berechnung der Versuche geschickter zu machen, setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(G-F)N}{(w_b + w_c)AC} &= E \\ \frac{FN^2}{(w_a + w_b)(w_b + w_c)^2 AC} + E &= z \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\frac{2\pi p \cdot w_b}{TC(w_b + w_c)^2} = a. \quad (17)$$

Darin ist C eine vorläufig willkürliche Constante. Es ist alsdann:

$$E = a \left[1 - e^{-\frac{z}{a}} \right]. \quad (18)$$

Die Werthe von E und z lassen sich aus den einzelnen zusammengehörigen Werthen von F und G berechnen, wenn die dazu gehörigen von w_a , w_b , w_c und A gegeben sind. Die Widerstände der Drähte w_b und w_c sind bei allen einzelnen Versuchen dieselben, und im Vergleich zu einem als willkürliche Einheit gebrauchten Drahte b bestimmt worden. Es fand sich:

$$\begin{aligned} w_b &= 2,7266 b \\ w_c &= 2,5146 b. \end{aligned}$$

In w_a ist aber der veränderliche Widerstand der Kette einbegriffen, und diese Grösse musste deshalb ebenso wie die elektromotorische Kraft A durch besondere, zwischen die Inductionsversuche eingeschaltete Intensitätsmessungen bestimmt werden. Da der Strom der Batterie bei derjenigen Anordnung der Leitung, welche für die Inductionsversuche diente, viel zu heftig auf den Magnet wirkte, um dauernde Ablenkungen beobachten zu können, wurden statt des Zweiges c (der Spirale) zwei andere Drahtstücke m und q eingeschaltet, und die Spirale endlich wieder als Nebenleitung von q , sodass nur ein sehr kleiner Theil des Stromes hindurchging. Bei dieser Anordnung beobachtete ich die Intensität einmal (J_1) ohne weitere

Einschaltung, dann (J_2) mit Einschaltung des Drahts b in die Leitung a . Es ist:

$$\begin{aligned} m &= 2,8141 b \\ q &= 0,0193 b. \\ w_a &= \left[\frac{J_2}{J_1 - J_2} - 1,3848 \right] b \\ A &= \frac{J_1 J_2 (w_b + m + q)(w_c + q)}{(J_1 - J_2) w_b q} b. \end{aligned}$$

Dadurch sind alle zur Berechnung von E und z nöthigen Data gegeben. Die Constante C setzte ich, um die Rechnung möglichst zu vereinfachen:

$$C = \frac{w_b q}{(w_b + m + q)(w_c + q)}.$$

Dann ist:

$$AC = \frac{J_1 J_2}{J_1 - J_2} b.$$

Der Werth der Constante a der Gleichung (17) ist nur von Grössen abhängig, welche bei allen Versuchen dieselben bleiben. Unter diesen kommt die Potentialgrösse p vor, welche nicht wohl anders als aus den Resultaten der Inductionsversuche bestimmt werden kann. Ich habe deshalb den passendsten Werth für a nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Streng genommen müsste das so geschehen, dass die Werthe von F , welche nach den zugehörigen von G berechnet werden, möglichst wenig von den beobachteten abweichen, indessen ist die Abhängigkeit zwischen F und G , welche in der Gleichung (18) mit Berücksichtigung von (16) ausgesprochen wird, so verwickelt, dass weder F durch G , noch G durch F geschlossen ausgedrückt werden kann. Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate macht deshalb grosse Weitläufigkeiten. Ich habe vielmehr die Rechnung so geführt, dass die Werthe von E aus z berechnet, möglichst wenig von denen, welche die erste der Gleichungen (16) aus den Beobachtungen giebt, abweichen. Das Resultat kann sich nicht wesentlich von dem der strengeren Rechnung unterscheiden, weil die Fehler von E denen von F nahehin proportional sind, und die letzteren wenig Einfluss auf die Grösse z haben. Das F hebt sich



nämlich aus der zweiten Gleichung (16) bis auf einen verhältnissmässig kleinen Rest heraus. Aus den Fehlern von E können dann schliesslich die von F mit hinreichender Genauigkeit leicht berechnet werden. Den Werth der Constante a fand ich auf diese Weise für die folgende Versuchsreihe:

$$a = 0,087\,058.$$

Ueber die in der folgenden Tafel zusammengestellten Zahlen ist noch zu bemerken: Die Intensitäten J_1 und J_2 sind bei der vorher beschriebenen Anordnung der Leitung ermittelt worden durch je eine Bestimmung der Stellung des Magnetes bei kreisendem Strome. Jede dieser Bestimmungen beruht wiederum auf 5 Ablesungen der Schwingungsgrenzen. Die Correctionen wegen der Verwandlung der abgelesenen Tangenten des doppelten Winkels in doppelte Tangenten des einfachen Ablenkungswinkels sind angebracht. Bei den Inductionversuchen bezeichnen F und G die durch die Stromwirkung hervorgebrachten Vergrösserungen des Ausschlags, d. h. des halben Schwingungsbogens. Jede dieser Zahlen beruht auf zwei Ablesungen der Schwingungsgrenzen vor und fünf solchen nach der Einwirkung des Stromes. Nach Beendigung dieser Ablesungen wurde der Magnet durch einen seiner Bewegung entgegenwirkenden Strom von gleicher Grösse, wie der welcher ihn in Bewegung gesetzt hatte, wieder in sehr kleine Schwingungen zurückgebracht. Die sehr kleinen Correctionen wegen der Tangenten und der Abnahme der Schwingungsbögen sind angebracht. Erstere betragen nur wenige Hunderttheile, letztere höchstens nur ein Drittel eines Scalentheiles. Neben den beobachteten Werthen von F befinden sich diejenigen, welche nach der Rechnung den zugehörigen Werthen von G entsprechen. Die Versuchsgruppen 1 bis 5 sind in unmittelbarer Folge hintereinander angestellt, ebenso 6 bis 12, und in der Reihenfolge ihrer Anstellung aufgeführt worden.

	Beobachtete Werthe von		Mittel der beobachteten Werthe		Berechnete Werthe von F	Differenzen.	Zeit in Secunden
	G .	F .	G .	F .			
J_2	151,12						
J_1	109,29						
1	80,85	67,21	80,775	67,243	67,391	-0,148	0,01569
	80,70	67,36					
	80,80	67,18					
	80,75						
J_2	109,92						
J_1	152,66						
2	70,98	56,71	70,567	56,877	57,234	-0,357	0,01379
	70,08	57,26					
	70,38	56,66					
	70,83						
J_2	153,12						
J_1	110,09						
3	58,39	45,37	58,640	45,470	45,562	-0,092	0,01163
	58,79	45,47					
	58,64	45,57					
	58,74						
J_2	111,26						
J_1	159,06						
4	50,15	38,09	50,613	38,123	37,836	+0,287	0,01018
	50,90	38,14					
	50,45	38,14					
	50,95						
J_2	152,66						
J_1	110,88						
5	40,92	28,75	40,945	28,783	28,727	+0,056	0,00844
	40,82	28,85					
	40,97	28,75					
	41,07						
J_2	110,76						
J_1	152,20						
J_2	149,05						
J_1	108,97						
6	40,12	27,80	39,708	27,650	27,756	-0,106	0,00854
	39,52	27,65					
	39,57	27,50					
	39,62						
J_2	109,39						
J_1	149,62						



	Beobachtete Werthe von		Mittel der beobachteten Werthe		Be-rechnete Werthe von F .	Diffe-renzen	Zeit in Secun-den
	G .	F .	G .	F .			
7	28,75 29,20 29,10 29,05	18,41 18,56 18,11	29,025	18,360	18,086	+0,274	0,00629
J_2	150,22						
J_1	109,52						
8	20,26 20,66 20,56 20,76	11,39 11,39 11,09	20,560	11,157	10,998	+0,159	0,00463
J_2	109,51						
J_1	150,19						
9	12,09 12,84 13,19 13,09	5,27 5,27 5,57	12,802	5,370	5,317	+0,053	0,00303
J_2	150,27						
J_1	109,53						
10	7,77 8,12 8,12 8,32 8,47	2,76 2,71 2,66 2,81	8,160	2,735	2,551	+0,184	0,00201
J_2	109,32						
J_1	149,50						

Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung scheint hinreichend gross, um die Richtigkeit der aufgestellten Theorie zu beweisen. Die Abweichungen zwischen beiden sind kleiner als die der einzelnen Beobachtungen unter einander, zeigen aber noch eine gewisse Regelmässigkeit, welche vielleicht von Fehlern der Widerstandsmessungen oder davon herrühren mag, dass bei Unterbrechung der Spiralenleitung der Extracurrent doch nicht ganz so vollständig ausgeschlossen wurde, als wir angenommen haben. Der letztere fliesst wenigstens noch so lange, als der Funke dauert. Dessen Dauer ist zwar bisher noch immer verschwindend klein gefunden worden, da es in unsern Untersuchungen aber auf Hunderttausendtheile von Secunden ankommt, kann es noch zweifelhaft erscheinen,

ob sie nicht genüge, die elektromotorische Wirkung in den Zehnteln der Scalentheile zu verändern.

Wir haben bei dem eingeschlagenen Verfahren das aufgestellte Gesetz über den Verlauf des Inductionsstromes nicht direct geprüft, d. h. wir haben nicht die Intensität als Function der Zeit bestimmt, sondern wir haben nur die Abhängigkeit zwischen der Intensität und ihrem Integral nach der Zeit bestimmt. Es könnte noch gefragt werden, ob dieses Verfahren nicht eine Zweideutigkeit zulasse, ob nicht auch eine andere Function der Zeit dieselbe Abhängigkeit zwischen ihr selbst und ihrem Integral gebe. Ich will deshalb noch beweisen, dass durch die experimentell erwiesene Abhängigkeit zwischen F und G auch i als Function von t vollkommen und eindeutig bestimmt sei.

Als erwiesen durch die Versuche betrachten wir die Abhängigkeit zwischen G und F , welche ausgesprochen ist durch die Gleichungen (16) und (18):

$$\left. \begin{aligned} \frac{(G-F)N}{(w_b + w_c)AC} &= E \\ \frac{FN^2}{(w_a + w_b)(w_b + w_c)^2 AC} + E &= z \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

und mit einer leichten Umformung:

$$\log \left[1 - \frac{E}{a} \right] = - \frac{z}{a}. \quad (18) \quad 831$$

Darin ist C eine beliebige Constante, und a eine solche, deren Bedeutung wir noch zu bestimmen haben werden. Dazu kommt noch die Gleichung:

$$F = \frac{2\pi}{T} \int_0^t i_c dt, \quad (19)$$

welche auf bekannten elektromagnetischen Gesetzen beruht, und endlich die Gleichung (15):

$$G - F = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{p i_c}{(w_b + w_c)}, \quad (15)$$

welche durch die bekannten Gesetze über die ganze Grösse des Oeffnungsgegenstromes gegeben ist. Darin bedeutet i_c den



Werth dieser Variablen zur Zeit der Unterbrechung. Durch Differentiiren nach t geben diese Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d(G-F)}{dt} \cdot \frac{N}{(w_b + w_c)AC} &= \frac{dE}{dt} \\ \frac{dF}{dt} \cdot \frac{N^2}{(w_a + w_b)(w_b + w_c)^2 AC} &= \frac{dz}{dt} - \frac{dE}{dt} \\ a \frac{dE}{dt} &= (a - E) \frac{dz}{dt} \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{2\pi i_c}{T} \\ \frac{d(G-F)}{dt} &= \frac{2\pi p}{T(w_b + w_c)} \frac{di_c}{dt}.\end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen F , G , E und z , so bekommt man folgende Differentialgleichung für i_c :

$$\frac{2\pi pN}{a(w_b + w_c)^2 ACT} \frac{di_c}{dt} = \frac{N}{(w_a + w_b)p} \left[1 - \frac{2\pi pN}{a(w_b + w_c)^2 ACT} i_c \right].$$

Deren vollständiges Integral ist:

$$i_c = \frac{a(w_b + w_c)^2 ACT}{2\pi pN} \left[1 - e^{-\frac{N(t+b)}{p(w_a + w_b)}} \right], \quad (20)$$

wo b die Integrationsconstante ist. Setzen wir wie früher t für den Zeitpunkt gleich 0, wo auch i_c gleich 0 ist, so wird b ebenfalls 0. Dann stimmt die Gleichung (20) mit der theoretisch entwickelten (11) überein bis auf den Factor, mit dem der eingeklammerte Ausdruck multiplicirt ist. Dieser Factor ist aber, wie sich aus der Form beider Gleichungen sogleich ergibt, diejenige Stromgrösse, welche nach Verlauf des Inductionstromes constant bestehen bleibt, und deren Grösse durch das Ohm'sche Gesetz gegeben ist:

$$= \frac{Aw_b}{N}.$$

Wir müssen also setzen:

$$\frac{a(w_b + w_c)^2 ACT}{2\pi pN} = \frac{Aw_b}{N},$$

wodurch einmal die Gleichung (20) vollkommen identisch wird

mit (11), und sich der Werth von a ganz ebenso wie in der theoretisch abgeleiteten Gleichung (17) bestimmt:

$$a = \frac{2\pi p w_b}{TC(w_b + w_c)^2}.$$

Somit ist der Beweis vollendet, dass i_c keine andere Function von t sein könne, als die in der Gleichung (11) hingestellte.

Dadurch wird es auch möglich und gerechtfertigt, mit Hilfe der obigen Formeln die Zeitdauer in Secunden zu berechnen, welche in unsern Versuchen der Schliessung der Stromleitung entspricht. Die Zahlen finden sich in der letzten Rubrik der gegebenen Tafel.

Bei der Zeitmessungsmethode von Pouillet müssen die von uns gewonnenen Ergebnisse jedenfalls berücksichtigt werden, wenn sie zu genauen Resultaten führen soll. Sind die gemessenen Zeiträume grösser als die Dauer des Schliessungsgegenstromes, wie es bei den von mir ausgeführten physiologischen Messungen der Fall war, so genügt es zu allen nach Pouillet berechneten Zeiträumen eine kleine constante Correction zu addiren, welche erhalten wird, wenn man den Potentialwerth der Spirale durch den Widerstand der Leitung dividirt. Dieser Quotient betrug bei der Anordnung des Apparates, wie ich ihn für meine physiologischen Versuche beschrieben habe, 0,000 983 Secunden. Sind die Zeiträume aber kleiner, so genügt eine constante Correction nicht mehr, sondern es muss dann die Ansteigungsform des Stromes berücksichtigt werden, zugleich werden die Messungen immer ungenauer und schwieriger, weil die elektromagnetische Wirkung in sehr viel grösserem Verhältniss abnimmt als die Zeit. Für solche Messungen wird es also rathsam sein, nicht zu eng gewundene Spiralen mit nicht zu vielen Windungen anzuwenden, und nöthigenfalls die elektromotorische Wirkung derselben durch Vergrösserung der Batterie zu verstärken, nicht aber durch Vermehrung der Windungen. Wo es ausführbar ist, möchte der beste Ausweg die Einschaltung einer Nebenleitung sein, wie in unseren obigen Versuchen mit der Wippe.

Wir sind von der Voraussetzung ausgegangen, dass die



inducirte elektromotorische Kraft in demselben Momente vorhanden sei, wo die inducirende Stromesschwankung stattfindet. Diese Ausnahme scheint durch die Uebereinstimmung der Versuche mit den Folgerungen des darauf basirten mathematischen Principes bestätigt zu werden. Ich habe noch einige directere Versuche angestellt, um zu erfahren, ob ein Zeitunterschied zwischen diesen Vorgängen wahrnehmbar zu machen sei.

Die beste Gelegenheit dazu bietet sich bei der Induction durch Unterbrechung eines Stromes, weil hier die Dauer der Stromesschwankung auf die Dauer des Funkens beschränkt ist. Man wähle zu solchen Versuchen eine Spirale, in welcher man sich von der vollständig guten Isolation aller Drahtwindungen überzeugt hat, am besten eine mit zwei neben einander gewickelten Drähten, weil man deren Isolation immer wieder prüfen kann. Ich gebrauchte die zweipfündige der obigen Versuchsreihe mit zwei Drähten, deren jeder 32 m lang war. Man berücksichtige ferner, dass sich innerhalb des elektrodynamischen Wirkungskreises der Spirale keine geschlossene Leitung finden darf, wovon der Grund sogleich ersichtlich werden wird. Die oben beschriebene Wippe macht es möglich, äusserst schnell nach der Unterbrechung des Stromes der Spirale an der ersten 534 Lösungsstelle, ihr an der zweiten Schliessungsstelle statt der Leitung durch die Batterie eine andere durch einen Multiplikator oder durch den menschlichen Körper zu geben. Ich habe aber nie eine Wirkung auf den Magnet gesehen, oder einen Schlag gefühlt, wenn die geringste Zeit zwischen der Unterbrechung und Schliessung der neuen Leitung verfloss. Wenn ich die Schrauben m des oberen Hebels der Wippe allmählich so verstellte, dass die Zwischenzeit immer kleiner und kleiner wurde, bis endlich Wirkungen eintraten, was stets am Magnet und am Körper gleichzeitig geschah, so fand ich den zeitmessenden Ausschlag des Magnetes, der zwischen erster Schliessung und zweiter Lösung durch die zur Messung der Grössen G in der ersten Versuchsreihe gebrauchte Anordnung bewirkt wurde, zwischen 1,73 und 1,83. Ich habe oben gezeigt, dass derselbe 1,832 sein muss, wenn erste Lösung und zweite Schliessung gleichzeitig erfolgen sollen. Auf die Unterschiede

dieser drei Zahlen ist kein Gewicht zu legen, weil die genauere Messung so kleiner Ausschläge durch die Luftströmungen verhindert wird. Daraus geht hervor, dass keine durch die angewendeten elektromagnetischen Mittel messbare Zeit zwischen der Oeffnung der Spirale und Schliessung ihrer Nebenleitung vergehen darf, wenn noch Induction stattfinden soll. Ich glaube nach meinen Messungen behaupten zu dürfen, dass jedenfalls ein Zehntausendstel Secunde nach der Unterbrechung schon alle inducirende Wirkung verschwunden sei.

Ganz ebenso verhält es sich, wenn man zwei Spiralen hat, und die Leitung der einen erst geschlossen wird, unmittelbar nachdem der Strom in der anderen unterbrochen worden ist.

Meine Versuche stehen hier in directem Widerspruche mit Marianini¹⁾ und E. du Bois-Reymond²⁾, welche beide sehr beträchtliche Nachwirkungen unter Verhältnissen fanden, wo die Pause zwischen Oeffnung und Schliessung wahrscheinlich sehr viel grösser war, als bei mir. Ob die Spiralen beider Beobachter nicht hinlänglich gut isolirten?

Wenn dagegen zur Zeit der Unterbrechung des Stromes innerhalb seines elektrodynamischen Wirkungskreises sich eine geschlossene Leitung befindet, so entsteht in dieser ein inducirter Strom, welcher nach einer gewissen Zeit allmählich erlischt. Wird dann noch während der Dauer dieses Stromes entweder die erste inducirende Spirale oder eine dritte geschlossen, so können in diesen wiederum durch Vermittelung der zweiten Spirale Ströme erzeugt werden, welche dieselbe Richtung haben, als wären sie verspätete Wirkungen der ersten Stromunterbrechung. Solche Wirkungen zeigte z. B. die zweipfündige bifilare Spirale sehr kräftig, fast ebenso stark, als würde der directe Extracurrent beobachtet, wenn ich einen der Drähte zum Kreise schloss, durch den andern einen Strom gehen liess, und kurz nach dessen Unterbrechung eine Nebenschliessung einschaltete. Es folgt daraus, dass auch die durch

1) Ann. de Chim. et de Phys. Juin 1844. t. XI. p. 395.

2) Unters. über thier. Elekt. Bd. I. S. 425.



Unterbrechung des primären inducirten Ströme viel länger dauern, als die Unterbrechung selber.

Wenn in eine Spirale solide Eisenkerne eingeschoben werden, so müssen bei der Unterbrechung des Stromes in diesen inducirte Ströme entstehen, welche eine gewisse Zeit dauern, und das Eisen in demselben Sinne magnetisirt erhalten, als es der ursprüngliche Strom that. Es können demnach noch eine gewisse Zeit nach der Unterbrechung des primären Stromes Inductionen durch die secundären Ströme und den zurückgehaltenen Magnetismus erhalten werden. Man hat diese Nachwirkungen beim Eisen längst bemerkt, und sie von einer gewissen Trägheit der magnetischen Fluida herleiten zu müssen geglaubt. Um dies zu prüfen, kam es darauf an die Entstehung von Strömen in der Eisenmasse zu verhindern. Ich bildete mir daher einen Kern aus einem Bündel der feinsten Eisendrähte, welche ich bekommen konnte (sogenannten feinsten Blumendraht, 0,123 Par. Linien dick), überzog jeden Draht mit einer dünnen isolirenden Schicht aus einer Mischung von Wachs und Harz, und untersuchte mittels der Wippe die Nachwirkungen dieses und verschiedener anderer Drahtbündel, welche ich so stark gemacht hatte, dass sie alle Inductionsströme von ungefähr gleicher elektromagnetischer Wirkung (gleicher Quantität von Elektrizität) gaben. Es ergab sich sehr augenscheinlich, dass bei derselben Stellung der Wippe die Nachwirkungen desto grösser waren, je dicker die Drähte, und bei dem feinen Blumendrahte fehlte jede Spur davon. Es konnte zwischen ihm und einer ganz leeren Spirale kein Unterschied in dieser Beziehung gefunden werden, obgleich die inducirten Ströme mit dem Drahtbündel viermal stärker waren, als ohne dasselbe. Daraus folgt, dass in linearen Eisenstücken sich die Gleichgewichtsstände der magnetischen Vertheilung in unmessbar kleiner Zeit herstellen können. Dies geschieht in Stücken von beträchtlicher Ausdehnung nach drei Dimensionen, wie wir gezeigt haben, schon wegen der dabei erregten elektrischen Strömungen niemals. Wieviel andere Einflüsse, z.B. Mischung des Eisens, die Schwierigkeit der Wirkung auf das Innere der Masse, dabei mitwirken mögen, müssen wir dahin gestellt sein lassen. Dass solche andere Ursachen nicht ganz

fehlen, zeigen die Versuche von Faraday¹⁾ über das oft minutenlange Ansteigen der Kraft in grossen Elektromagneten, welche längere Zeit geruht haben.

Ueber die Schnelligkeit der Inductionsvorgänge im Momente einer plötzlichen Unterbrechung der Stromleitung geben uns die physiologischen Wirkungen in noch anderer Weise Anhaltspunkte. Es flicse in einer Spirale ein Strom von der Intensität J , ihr Potential gegen eine andere Spirale sei Q , deren Widerstand W und Potential auf sich selbst P ; so wird durch die Unterbrechung des Stromes der ersten in der zweiten ein Inductionsstrom erzeugt, dessen Grösse JQ/W ist. Von dem Augenblicke an, wo die Kraft des inducirenden Stromes vollständig geschwunden ist, bestimmt sich der Verlauf des inducirten Stromes nach den oben entwickelten Principien durch die Gleichung:

$$iW = -P \frac{di}{dt},$$

deren Integral ist:

$$i = Ce^{-\frac{W}{P}t},$$

wo C die Integrationsconstante ist. Da nach den eben berichteten Versuchen die Zeit der unmittelbaren Nachwirkung des inducirenden Stromes gegen die Dauer des inducirten verschwindet, können wir im Integral des Stromes die jener ersteren angehörenden Stromtheile vernachlässigen. Darnach ist:

$$\int_0^{\infty} i dt = \frac{P}{W} C = \frac{JQ}{W}.$$

Hierdurch bestimmt sich C , und wir erhalten:

$$i = \frac{JQ}{P} e^{-\frac{W}{P}t}.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass im Augenblicke der Unterbrechung des inducirenden Stromes, wo $t = 0$, die Intensität des inducirten plötzlich auf den Werth JQ/P steigt, und dann allmählig sinkt. Ersteres wird nun in Wirklichkeit nicht

1) Exper. Res. 2170, 2332, 2650.



absolut plötzlich geschehen, aber doch jedenfalls mit einer Schnelligkeit, welche die des Sinkens bei weitem übertrifft. Daraus folgt, dass auch die physiologische Wirkung dieser Ströme, welche desto grösser zu sein pflegt, je schneller die Stromesschwankung, hauptsächlich von dem ansteigenden Theile herrührt. Man kann sich davon leicht überzeugen, wenn man mittels der Wippe die Leitung zum menschlichen Körper möglichst schnell nach der Unterbrechung des inducirenden Stromes unterbricht. Die physiologische Wirkung wird dadurch nicht im geringsten geschwächt, und hört bei immer grösserer Verminderung der elektromagnetisch zu messenden Zwischenzeit von erster Schliessung und zweiter Lösung erst dann auf, wenn diese der Zwischenzeit der zweiten Schliessung und zweiten Lösung gleich geworden ist, wenn also beide Schliessungen und beide Lösungen gleichzeitig erfolgen. Es zeigt sich auch hier wieder, dass die Wippe nicht schnell genug unterbrechen kann, um die Unterbrechung während des Ansteigens des Stromes auszuführen.

Die physiologische Wirkung verräth uns aber noch andere Eigenthümlichkeiten der ansteigenden Phase des Stromes. Sie ist nämlich an Stärke verschieden bei verschiedenen Oeffnungsweisen. Unterbricht man den Strom dadurch, dass man einen amalgamirten Draht aus Quecksilber langsam aushebt, so ist die Wirkung am schwächsten, bei schnellerem Ausheben wird sie stärker, beträchtlich stärker aber, wenn man zwischen festen Metallen unterbricht. Bei passender Regulirung der Stromstärke kann die erstere Wirkung fast unmerklich, die letztere sehr empfindlich sein. Daraus müssen wir wohl schliessen, dass die Dauer der Ansteigung des inducirten Stromes, also die Dauer der inducirenden Kraft, wesentlich von der Zeit abhängt, während welcher sich die Metalle an der Unterbrechungsstelle von einander lösen. Dies geschieht wegen der Ueberführung glühender Metalltheile, welche den Funken bilden, stets nur allmählig, niemals absolut plötzlich, und wahrscheinlich bei lockeren Metallen, deren Theile leicht von einander gerissen werden, also namentlich bei Quecksilber, langsamer als bei festen. Darans erklärt sich dann leicht der Unterschied in der physiologischen Wirkung. Fände dagegen eine beträchtliche Nachwirkung statt,

so würde das Ansteigen des inducirten Stromes hauptsächlich von dieser und viel weniger von der Funkendauer abhängen.

Ganz dieselben Versuche können mit einer Spirale angestellt werden, in deren Nebenleitung der menschliche Körper den Extracurrent empfängt, wobei letztere unmittelbar nach der Unterbrechung der Leitung zur Batterie ebenfalls unterbrochen wird. Man findet denselben Erfolg, dieselben Unterschiede bei verschiedenen Oeffnungsweisen und kann darauf dieselben Schlussfolgen bauen.

Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass die hier besprochenen Verzögerungen des Anfanges und Endes der elektrischen Ströme bei den Versuchen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben von dem grössten Einflusse sein müssen, was bisher nicht gehörig beachtet worden ist. Die dabei gebrauchten Leitungen enthalten stets grosse Spiralen, zum Theil selbst Elektromagnete, und haben wegen der unvollkommenen Isolation der Telegraphendrähte stets Nebenleitungen, in denen sich auch bei der Oeffnung der Hauptleitung Extracurrents bilden können. Da nun Anfang und Ende des Hauptstromes dadurch sehr verschieden verzögert werden, je nachdem kleinere oder grössere Drahtlängen (Widerstände) eingeschaltet sind, so müssen wahrscheinlich sämtliche bis jetzt gewonnenen Resultate der Art beträchtlichen Correctionen unterliegen, über deren Grösse und Sinn bei den mangelhaften bisher veröffentlichten Beschreibungen der Versuche man aber noch kein Urtheil bilden kann. Die ersten von Walker¹⁾ angestellten Versuche sind vielleicht ganz illusorisch, weil die Extracurrents gerade dieselben Wirkungen hervorbringen konnten, welche der Fortpflanzungszeit der Elektrizität zugeschrieben sind.

Es sind dabei die zeichnenden Telegraphen von Morse benutzt, deren Zeichenstift so lange auf einem bewegten Papierstreifen zeichnet, als der Strom kreiset. Wird dieser an irgend einer Stelle unterbrochen, so entfernen sich augenblicklich die zeichnenden Spitzen auf sämtlichen Stationen von dem Papier.

1) Schuhmacher's Astron. Nachrichten Nr. 679. — Astronomical Journal (Cambridge, America) Nr. 7.



Da nun den Extracurrents der Elektromagnete desto mehr Nebenleitungen zu Gebote stehen, je weiter sie von der Unterbrechungsstelle entfernt sind, so schwindet auch ihr Magnetismus und heben sich die Zeichenstifte in demselben Verhältnisse später, ohne dass die Fortpflanzungszeit der Elektrizität dabei in Betracht zu kommen braucht. Bei den Versuchen von Mitchell¹⁾ gehört der Elektromagnet, welcher den zeichnenden Stift andrückt, entweder einem kurzen oder einem sehr langen Kreise von gleicher Stromintensität an, und es werden die Zwischenzeiten zwischen Schliessung des Kreises und Anschlagen des Stiftes gemessen. Diese können aber auch, abgesehen von der Fortpflanzungszeit der Elektrizität, nur dann gleich sein, wenn nicht nur die Intensitäten, sondern auch die Geschwindigkeiten der Stromanstiegungen, d. h. die Grössen P/W , in beiden Kreisen gleich sind. Darüber finden sich aber gar keine Angaben. Falls in dem grossen Kreise die Elektromagnete der einzelnen Zwischenstationen eingeschaltet blieben, was wohl der Fall gewesen zu sein scheint, konnte P/W für den grossen Kreis sehr viel grösser als für den kleinen sein, und die Verspätung der Wirkung ganz allein davon herrühren. Die Geschwindigkeit der Elektrizität ist in beiden Versuchsreihen dem entsprechend auch viel geringer gefunden worden als von Fizeau und Gounelle. Bei der Methode der letzteren kann wenigstens durch die besprochenen Verhältnisse keine vollständige Täuschung hervorgebracht sein; ob und wie grosse Correctionen nöthig werden sollten, lässt sich noch nicht übersehen.

1) Astron. Journ. Nr. 2. (Poggendorff's Ann. Bd. LXXX, S. 161.)

XXVI.

Telephon und Klangfarbe.

Monatsberichte der Berliner Akademie 1878, 11. Juli, S. 488—500. —
Wiedemann's Annalen Bd. V. S. 448—460.

Hr. E. du Bois-Reymond hat, kurz nach Bekanntwerden des Telephons¹⁾, eine Erklärung der Wirkungen des neuen Apparates aufgestellt, namentlich der Bewahrung der Klangfarbe, bei der er sich jeden Klang in seine Partialtöne zerlegt denkt und sich darauf stützt, dass jeder dieser Partialtöne zwar in veränderter Phase, aber mit derselben Schwingungszahl und verhältnissmässiger Amplitude durch die elektrischen sinusoiden Schwingungen des Leitungsdrahtes auf das Telephon des Hörers übertragen werde. Da die Verschiebung der Phase nach meinen Untersuchungen gleichgültig für die Klangfarbe sei, könne auf diese Weise die Klangfarbe der gesprochenen Klänge bewahrt bleiben.

Gegen diese Erklärung hat Hr. L. Hermann²⁾ Versuche geltend gemacht, welche nach seiner Ansicht die genannte Theorie der Wirkung des Telephons widerlegen und mit der von mir gegebenen Theorie der Klangfarbe nur unter der Voraussetzung vereinbar sein sollen, dass das Grundgesetz der Induction für oscillatorische Potentialänderungen nicht stattfindet, was soviel heisst wie, dass meine Theorie falsch ist. Diese Versuche bestehen darin, dass die Leitung des stromerregen-

1) Du Bois-Reymond, Arch. f. Physiol. 1877. S. 573. 582. — Arch. de Genève 1878. LXI. p. 120. LXII. p. 76.

2) Pflüger's Archiv. XVI. 1878. S. 264. 314.



den Telephons durch den einen Draht einer aus zwei nebeneinander liegenden Drähten gewundenen Spirale geschlossen wird, der zweite von jenem ersten vollkommen isolirte Draht dagegen entweder direct mit dem Telephon des Beobachters, oder auch wohl wieder mit einem Drahte einer anderen doppeldrähtigen Spirale verbunden wird, deren zweiter Draht dann zu dem Telephon des Beobachters geht. In diesem Falle werden die elektrischen Bewegungen im zweiten und eventualiter dritten Stromkreise durch elektrodynamische Induction zwischen den Drahtpaaren der angewendeten Spiralen erregt. Man kann alsdann die Worte, die in das erste Telephon gesprochen werden auch im letzten ohne auffallende Aenderung der Klangfarbe hören und verstehen. Da nun nach dem bekannten und wohl geprüften Gesetze der elektrodynamischen Induction deren elektromotorische Kraft dem Differentialquotienten der Stromintensität proportional ist, und beim Differentiiren einer Sinusfunction:

$$J = A \sin(2\pi nt + c),$$

die Schwingungszahl n als Factor zur Amplitude tritt:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 2\pi n A \cos(2\pi nt + c),$$

so würden nach Hrn. Hermann's Meinung bei dieser Uebertragung der elektrischen Oscillationen durch Induction in jeder der Doppelspiralen die Amplituden der den höheren Partialtönen jedes Klanges entsprechenden elektrischen Oscillationen im Verhältnisse ihrer grösseren Schwingungszahlen gegen die der tieferen zunehmen, und so würde das Verhältniss der Intensitäten der aus dem zweiten Telephon herausdringenden Partialtöne erheblich verändert werden müssen.

Die Erklärung der Hermann'schen Versuche aus den bekannten Gesetzen ergibt sich aber leicht, wenn man nicht bloss die Induction jedes Stromkreises auf den benachbarten, sondern auch die jedes Stromkreises auf sich selbst berücksichtigt.

I. Beginnen wir mit dem Falle zweier Stromkreise, die ich durch die Indices 1 und 2 bezeichnen will. J_1 und J_2 seien die Intensitäten, w_1 und w_2 die Widerstände, P sei das elektro-

dynamische Potential der beiden verflochtenen Spiralen aufeinander für die Stromeinheit berechnet, dagegen Q_1 und Q_2 die Potentiale jeder Spirale auf sich selbst genommen mit Einschluss des Potentials der von jeder Spirale magnetisirten Eisenstücke auf diese Spirale selbst, dagen M das elektromagnetische Potential des von aussen erregten Magnetismus auf die erste Spirale im Telephon des Sprechers. Dann sind nach den bekannten Gesetzen der Induction folgende beide Gleichungen aufzustellen:

$$J_1 w_1 = \frac{\partial M}{\partial t} - Q_1 \cdot \frac{\partial J_1}{\partial t} - P \cdot \frac{\partial J_2}{\partial t} \quad (1)$$

$$J_2 w_2 = - Q_2 \cdot \frac{\partial J_2}{\partial t} - P \cdot \frac{\partial J_1}{\partial t}. \quad (1a)$$

Ist nun M von der Form einer einfachen harmonischen Schwingung, so können wir setzen:

$$M = A e^{2\pi i n t},$$

wobei sich auch die Werthe von J_1 und J_2 in imaginäre und reelle Theile scheiden, von denen die ersteren dem imaginären, die letzteren dem reellen Theile von M angehören werden.

Setzen wir dem entsprechend:

$$J_1 = B_1 e^{2\pi i n t}, \quad J_2 = B_2 e^{2\pi i n t},$$

so werden die obigen Gleichungen:

$$B_1 [w_1 + Q_1 \cdot 2\pi i n] + B_2 P \cdot 2\pi i n = 2\pi i n A \quad (2)$$

$$B_1 P \cdot 2\pi i n + B_2 [w_2 + Q_2 \cdot 2\pi i n] = 0, \quad (2a)$$

woraus sich ergibt:

$$[B_2 \{4\pi^2 n^2 P^2 + [w_1 + Q_1 \cdot 2\pi i n][w_2 + Q_2 \cdot 2\pi i n]\} = 4\pi^2 n^2 A P, \quad (3)$$

oder:

$$B_2 = A \cdot \frac{4\pi^2 n^2 P}{w_1 w_2 + 2\pi i n (w_1 Q_2 + w_2 Q_1) + 4\pi^2 n^2 (P^2 - Q_1 Q_2)}. \quad (3)$$

Den entsprechenden Fall von nur einem Kreise, der beide Telephone enthält, vom Widerstande w und Potentiale Q erhalten wir, wenn wir in Gleichung (1) $P = 0$ setzen. In diesem Falle ist:

$$B = \frac{2\pi i n A}{w + 2\pi i n Q}. \quad (3a)$$

Die Gleichungen (3) und (3a) zeigen zunächst, dass für sehr grosse Werthe von n , d. h. für sehr hohe Töne, die Helmholtz, wissenschaft. Abhandlungen. 30



Werthe von B und von B_2 unabhängig von n werden, da die höchste Dimension des n in Zähler und Nenner beider Ausdrücke dieselbe ist. Dabei ist zu bemerken, dass die Grösse:

$$Q_1 \cdot Q_2 - P^2,$$

welche in (3) vorkommt, immer positive Werthe haben muss, selbst wenn keine weiteren Spiralen in den beiden Stromkreisen vorkommen, als die ineinander gewundenen. Dies ergibt sich aus der Bildungsweise der Werthe von P und Q . P wird um so grösser, je näher sich die beiden Spiralen rücken. Den grössten Werth erhält es also, wenn beide zusammenfallen. Dann wird es aber Q , falls beide gleiche Zahl von Windungen haben.

Bei der Bildung von:

$$Q = \iint \frac{ds \cdot d\sigma \cdot \cos(ds \cdot d\sigma)}{r}$$

wird hierbei jede Combination $ds \cdot d\sigma$ zweimal gerechnet, nämlich so oft sie vorkommt, wenn man, wie bei der Bildung von P , unabhängig voneinander sowohl ds als $d\sigma$ seinen ganzen Stromkreis durchlaufen lässt.

Wird die Zahl der Windungen aber in der ersten Spirale auf das m fache, in der zweiten auf das n fache gebracht, so wächst P auf das $n \cdot m$ fache, Q_1 auf das m^2 fache, Q_2 auf das n^2 fache, also P^2 ebenso gut wie $Q_1 \cdot Q_2$ auf das $n^2 \cdot m^2$ fache.

In unserem Falle wird nun P^2 im allgemeinen ziemlich klein gegen $Q_1 \cdot Q_2$ sein, weil die letzteren Grössen durch die Spiralen und Eisenmassen der Telephone erheblich vergrössert werden.

Was die Grössenbeziehungen zwischen den Q und den w betrifft, so bekommen diese im Fall eines einfachen Kreises, auf den keine äusseren Kräfte wirken, für den also $M = P = 0$ ist, folgende Bedeutung: In einem solchen ist:

$$J = A e^{-\frac{wt}{Q}}, \quad (3a)$$

welches den Verlauf eines in dem betreffenden Kreise erlöschenden Stromes darstellt. Das heisst, Q/w ist diejenige Zeit,

innerhalb deren die Stärke des Stromes auf die Grösse $1/e = 0.36788$ ihrer früheren Stärke hinabsinkt, wenn die elektromotorische Kraft zu wirken aufgehört hat. In Stromkreisen, welche Elektromagnete enthalten, ist diese Zeit kein sehr kleiner Bruchtheil einer Secunde. Ich habe sie in einem Falle an einer Drahtspirale bestimmt, welche nur eine kleine Menge dünner Eisendrähte, also viel weniger Eisen, aber allerdings mehr Kupferdraht (1 kg) enthielt, als die Telephonwindungen zu haben pflegen. Der Werth von Q/w für die leere Spirale ohne Eisen war etwa $\frac{1}{24}$ Sec., mit dem kleinen Eisenkern dagegen etwa $\frac{1}{6}$ Sec.¹⁾ Da nun Eiseneinlagen ausserordentlich viel wirksamer zu sein pflegen als Vermehrung des Kupferdrahtes, so werden wir schliessen dürfen, dass die Grösse $2\pi Qn/w$, welche in unseren Formeln eine Rolle spielt, auch bei den tiefsten Tönen der menschlichen Stimme schon grösser als 1 sein wird, bei den höheren dagegen erheblich viel grösser, sodass wir die Quadrate und Producte der w gegen die Quadrate und Producte von Qn , beziehlich gegen $n^2 (2Q_1 Q_2 - P^2)$ vernachlässigen können.

Um die Intensität des Stromes im Kreise des empfangenden Telephons zu finden, müssen wir, da B_2 und B complexe Grössen sind, deren Modul suchen. Wir setzen:

$$B_2 = -\frac{4\pi^2 A P}{R_2} e^{+i\varphi}, \quad (3b)$$

$$B = \frac{2\pi A}{R} e^{+i\psi} \quad (3c)$$

worin:

$$R_2 \cos \varphi = 4\pi^2 (Q_1 Q_2 - P^2) - \frac{w_1 w_2}{n^2},$$

$$R_2 \sin \varphi = 2\pi \left(\frac{w_1}{n} Q_2 + \frac{w_2}{n} Q_1 \right)$$

und:

$$R \cos \sigma = 2\pi Q, \quad R \sin \sigma = \frac{w}{n}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{w}{2\pi n Q},$$

¹⁾ Pogg. Ann. LXXXIII. S. 523–536. (Voriger Aufsatz.)



also als eine kleine Grösse, deren Quadrat zu vernachlässigen ist, sodass eben deshalb auch $\cos \sigma$ nicht merklich von 1 unterschieden ist. Daher kann der von n unabhängige Werth von $R \cos \sigma$ auch für R selbst gesetzt werden.

Ebenso zeigt es sich, dass auch $\operatorname{tg} \varrho$ eine kleine Grösse ist, dass $\cos \varrho$ nicht von 1 unterschieden zu werden braucht, und dass also ein genügend angenäherter Werth von R_2 ist:

$$R_2 = 4\pi^2 (4Q_1 Q_2 - P^2)$$

unabhängig von n .

Danach ergeben sich schliesslich die Werthe von J_2 und J :

$$J_2 = -\frac{4\pi^2 AP}{R_2} e^{i(2\pi nt + \varphi)}, \quad J = \frac{2\pi A}{R} e^{2\pi i nt + i\sigma}.$$

Die Verschiebung der Phase ist hierbei proportional der ersten Potenz der kleinen Grösse $w/2\pi n Q_1$, die Aenderung der Intensität dem Quadrate derselben. Beide Aenderungen verschwinden für sehr hohe Töne.

454 Die genauere Berechnung der Werthe von R und R_2 zeigt dagegen, dass beide für tiefe Töne etwas grösser, also die entsprechenden Ströme im Telephon etwas schwächer werden müssen, als sie bei Vernachlässigung der w/nQ erscheinen würden. Dies entspricht in der That der Erfahrung. Die tiefen Töne der Männerstimmen erscheinen im allgemeinen in den gebräuchlichen Telephonen verhältnissmässig zu schwach. Dabei ist aber freilich auch noch zu beachten, dass die Resonanz in den vibrierenden Eisenplatten der Telephone, welche angeschlagen ziemlich hohe Geräusche geben, einen ähnlichen Einfluss auf die Intensitäten der hohen Töne haben muss.

II. Was wir hier für zwei Kreise gefunden haben, gilt nun auch für beliebig viele Stromkreise, zwischen denen in beliebiger Weise inducirende und inducirte Spiralen vertheilt sind. Bezeichnen wir mit J_a die Stromstärke in dem durch den Index a bezeichneten Kreise, mit w_a seinen Widerstand, mit Q_a sein elektrodynamisches Potential auf ihn selbst genommen mit Einrechnung der von ihm magnetisirten Eisenstücke, mit P_{ab} dasselbe des a ten auf den b ten Stromkreis

und mit M_2 den Einfluss des von aussen erregten Magnetismus, so gilt für den a ten Kreis die Gleichung:

$$J_a \cdot w_a + Q_a \frac{\partial J_a}{\partial t} + \sum_b [P_{ab} \frac{\partial J_b}{\partial t}] = \frac{\partial M_a}{\partial t}. \quad (4)$$

Solcher Gleichungen giebt es so viel, als Stromkreise da sind; bei den telephonischen Versuchen wird nur in einem dieser Kreise, in dem des erregten Telephons, M_a von Null verschieden sein. Die Gleichungen können wir auflösen für den Fall eines einfachen harmonischen Tones, indem wir setzen:

$$M_a = A e^{2\pi i nt}, \quad J_a = B_a e^{2\pi i nt}.$$

Das System der Gleichungen (4) verwandelt sich dann in folgendes System von Gleichungen:

$$B_a \left(Q_a + \frac{w_a}{2\pi n i} \right) + \sum_b [P_{ab} B_b] = A_a. \quad (5)$$

Aus diesem lassen sich die Constanten B_a finden, falls nicht 455 die Determinante ihrer Coefficienten gleich Null ist. Dass dies für keinen reellen Werth der Zahl n und auch nicht für $n=0$ der Fall ist, lässt sich zeigen, wie gleich nachher geschehen soll.

Dann ist also aus dem Systeme der Gleichungen (5) der Werth des B_a , welches dem Kreise des empfangenden Telephons angehört, zu finden. Wenn der Index des erregenden Kreises mit o bezeichnet wird, ist der Werth:

$$B_o = A_o \cdot \frac{D_{o,q}}{D}, \quad (5a)$$

worin D die Determinante der Coefficienten der B in den Gleichungen (5) bezeichnet, und $D_{o,q}$ diejenige, welche entsteht, wenn man die Horizontalreihe mit dem Index o , und die Verticalreihe mit dem Index q weglässt.

Beide Determinanten sind ganze Functionen von $1/n$ und lassen sich nach Potenzen dieser Grösse ordnen. Wenn in beiden das erste von $1/n$ unabhängige Glied nicht gleich Null ist, wird das Verhältniss B/A für hinreichend hohe Werthe von n unabhängig von n . Dass der Modul der Grösse B/A sogar nur nach Potenzen von $1/n^2$ sich entwickelt,



ergibt sich dann aus ähnlichen Betrachtungen, wie sie oben für je zwei Stromkreise angestellt sind.

Dass zunächst, wie schon angeführt, die Determinante D im Nenner nur für imaginäre Werthe von n , oder, wenn wir $2\pi ni = -1/\lambda$ setzen, nur für reelle positive Werthe von λ gleich Null werden kann, ergibt sich daraus, dass zwei Spiralen mit den Indices a und b , von denen die eine a , die andere β Windungen hat, einen Beitrag zur Grösse Q_a liefern, welcher grösser ist als $\alpha P_{a,b}/\beta$, und einen solchen zu Q_b , der grösser ist als $\beta P_{a,b}/\alpha$. Wenn wir also das Verhältniss β/α für die einzelnen Spiralen des a -ten Kreises mit $\epsilon_{a,b}$ bezeichnen, wobei:

$$\epsilon_{ab} = \frac{1}{\epsilon_{ba}}$$

und beide Grössen auch negativ sein können, so ist allgemein:

$$Q_a = a_a + \sum [\epsilon_{a,b} \cdot P_{a,b}],$$

worin a_a eine positive Grösse bezeichnet. Wenn wir nun die quadratischen homogenen Functionen bilden:

$$q = \sum_a [Q_a B_a^2] + 2 \sum_a \sum_b [P_{a,b} \cdot B_a B_b] \quad (6)$$

und:

$$\psi = \sum [w_a B_a^2], \quad (6a)$$

so sind die Werthe beider für reelle Werthe der B nothwendig immer positiv. Für ψ , welches eine Summe von Quadraten mit den, ihrem physikalischen Sinne nach immer positiven Coefficienten w_a bildet, ist dies von selbst klar. Für q ergibt es sich dadurch, dass man es in die Form bringen kann:

$$q = \sum_b [a_b B_b^2] + \sum [P_{ab} (\sqrt{\epsilon_{ab}} B_a + \sqrt{\epsilon_{ba}} B_b)^2], \quad (6b)$$

welcher Ausdruck ebenfalls eine Summe von Quadraten mit positiven Coefficienten ist. Sucht man nun nach bekannten Methoden diejenigen Werthe der B , welche bei constant bleibendem ψ das q zu einem Maximum oder Minimum machen, so erhält man das System von Gleichungen:

$$\lambda w_a B_a = Q_a B_a + \sum [P_{ab} B_b], \quad (7)$$

worin λ eine Constante ist, deren Werth sich ergibt, wenn man berücksichtigt, dass die Determinante der Gleichungen

(7) gleich Null sein muss. Man erhält so viel Werthe von λ , als verschiedene B_a (d. h. Stromkreise) existiren, welche Werthe alle positiv sein müssen. Denn wenn man die Gleichung (7) mit B_a multiplicirt und alle ähnlich gebildeten Gleichungen ähnlich behandelt und addirt, so erhält man:

$$\lambda \psi = q. \quad (7a)$$

Ist λ reell, so sind, wie gezeigt, ψ und q positiv, also λ positiv.

Wäre λ complex, so würden auch die Verhältnisse zwischen den B complex sein.

Dies ist unmöglich, denn wenn man die Reihe der Gleichungen (7) mit der Reihe der conjugirten B_a (d. i. mit geänderten Vorzeichen der $\sqrt{-1}$) multiplicirt, und alle addirt, erhielte man das complexe λ , multiplicirt mit einer positiven reellen Grösse gleich einer anderen solchen Grösse, was nicht möglich ist.

Folglich kann die Determinante der Gleichungen (7) [beziehlich (5)] nur für positive Werthe λ (beziehlich des $-i/2\pi n$) gleich Null werden. Sie kann auch nicht für $\lambda = 0$ (d. h. $n = \infty$) gleich Null werden, wenn nicht sämtliche Coefficienten a_a und P_{ab} bis auf $(p-1)$ derselben (p ist hier wieder Anzahl der Stromkreise) gleich Null gesetzt werden.

Was die Determinante $D_{n,0}$ im Zähler der rechten Seite von (5a) betrifft, so kann deren constantes Glied allerdings gleich Null werden, wenn die Grössen Q , P und w eine bestimmte Beziehung gegeneinander einhalten. In diesen Falle würde die Amplitude sehr hoher Partialtöne im hörenden Telephon bei steigender Schwingungszahl unendlich klein, wie $1/n$ werden. Für den einen Fall, der in den oben erwähnten Versuchen von L. Hermann eingehalten ist, wo nur die $P_{a,a+1}$ von Null verschieden sind, reducirt sich die Determinante $D_{n,0}$ auf ihr constantes Glied, welches einfach das Product aller dieser Potentiale P zwischen den aufeinander folgenden Stromkreisen ist, und dasselbe könnte also Null nur dann werden, wenn eines dieser Potentiale gleich Null wird, und also überhaupt kein Zusammenhang zwischen den beiden Telephonen mehr stattfindet.



Uebrigens lässt sich auch noch die vorher an die Gleichungen (3b) und (3c) angeknüpfte Betrachtung auf beliebig viele Stromkreise übertragen. Wenn wir die Determinante der Gleichungen (7) nach Potenzen der Unbekannten λ ordnen, so sind die ersten beiden Glieder:

$$D_{\lambda=0} - \lambda \sum_a [w_a D_{a,a}] \text{ etc.,}$$

wo die Determinanten für $\lambda = 0$ zu bilden sind. Wenn nun unter λ_t die dem System der Gleichungen (7) entsprechenden Werthe verstanden werden, so ist nach den bekannten Eigenschaften der Gleichungen:

$$\sum \left(\frac{1}{\lambda_t} \right) = \frac{\sum [w_a D_{a,a}]}{D}. \quad (8)$$

Für den Fall aber, dass in den Gleichungen (4) alle $M = 0$ gesetzt werden, wir also den Ablauf von aussen nicht beeinflusster Inductionsströme in dem System untersuchen, ist das Integral dieses Systems von Differentialgleichungen:

$$J_a = \sum [B_{a,t} \cdot e^{-\frac{t}{\lambda_t}}].$$

Das heisst: die λ_t sind die Zeiten, in denen die hier vorkommenden Exponentialfunctionen auf den Bruchtheil $1/e$ herabsinken.

Wir können also die Determinante D der Gleichung (5a) in ihren ersten Gliedern schreiben:

$$D = D_{\lambda=0} \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi n i} \sum \left(\frac{1}{\lambda} \right) \text{ etc.} \right\}. \quad (8a)$$

Nun sind die Grössen λ durch die Gleichung (7a) bestimmt:

$$\lambda \psi = \varphi,$$

worin ψ und φ die immer positiven Functionen sind, die durch die Gleichungen (6a) und (6b) gegeben sind. Da für jeden Werth λ_t von λ nur die Verhältnisse der $B_{a,t}$ zu einem von ihnen durch die Gleichungen (7) bestimmt sind, so kann man diesem einen immer den Werth geben, dass:

$$\psi = 1 \text{ und } \lambda = \varphi$$

wird. Die Grösse φ kann alsdann verschwindend klein nach Gleichung (6b) nur unter der Bedingung werden, dass:

1) von den Grössen $B_{a,t}$ und a_a in jedem Stromkreise mindestens eine verschwindet, also namentlich in den Kreisen der beiden Telephone, wo das a_a erheblich grossen Werth hat, der Strom von Anfang an klein ist;

2) auch gleichzeitig in jedem Paare aufeinander inducirend wirkender Stromkreise entweder P_{ab} oder $(\sqrt{\varepsilon_{ab}} B_a + \sqrt{\varepsilon_{ba}} B_b)$ verschwindet. Wenn also die Verhältnisse der Windungszahlen ε_{ab} in den einzelnen Paaren aufeinander wirkender Spiralen endlich sind, und man vom Kreise des ersten zu dem des letzten Telefons durch eine Reihenfolge von Kreisen fortschreiten kann, zwischen denen P_{ab} immer endlich ist, so müssen sämtliche $B_{a,t}$ endlich sein, auch die in den Telephonkreisen, und folglich kann die Function $\varphi = \lambda_t$ nicht verschwindend klein werden. Folglich kann die Summe $\sum (1/\lambda_t)$, die in den Gleichungen (8) und (8a) vorkommt, nicht sehr gross werden, und bei hinreichend grossem Werthe von n wird das Quadrat des $1/n$ enthaltenden Gliedes der Determinante D gegen das von $1/n$ unabhängige Glied zu vernachlässigen sein.

So weit der hier geführte Beweis sich auf die Voraussetzung beliebig vieler durch beliebig angeordnete Spiralen verbundener Stromkreise bezieht, kann er auch auf den in den Versuchen vorkommenden Fall ausgedehnt werden, wo in körperlich ausgedehnten Eisenmassen continuirlich gelagerte geschlossene Ströme entstehen.

Die Rückwirkung, welche von der schwingenden Eisenplatte im Telephon des Hörers ausgeht, habe ich in dieser ganzen Auseinandersetzung nicht berücksichtigt, weil deren Oscillationen jedenfalls eine sehr viel geringere Amplitude haben als die der entsprechenden Platte im Telephon des Sprechers.

Wenn also in den Telephonen, wie das bisher wohl meistens thatsächlich der Fall gewesen ist, die Bedingungen eingehalten sind, welche bewirken, dass die Dauer der ohne äussere Störung ablaufenden Inductionsströme 0,01 Secunde übertrifft, werden wir zu erwarten haben, dass die den höchsten Tönen und Geräuschen entsprechenden elektrischen Oscillationen weder in



ihrer Phase, noch in ihrer relativen Stärke wesentlich von denen des erregenden Magnetismus abweichen, ob nun die Verbindung beider Telephone direct oder durch mehrere zwischengeschaltete Spiralen hergestellt ist. Dagegen können die tieferen Töne in der Phase merklich verschoben und in der Stärke etwas benachtheiligt sein. Durch die Vermittelung der elektrischen Bewegungen wird also die Klangfarbe immer nur sehr unerheblich beeinflusst werden können. Viel mehr geschieht dies offenbar durch die mitschwingenden Eisenplatten, wie denn überhaupt die Klangfarbe durch die Telephone doch so weit verändert ist, dass man sich erst daran gewöhnen muss, ehe man die gesprochenen Worte gut versteht.

XVII.

Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer
Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf
die thierisch-elektrischen Versuche.

Poggendorff's Annalen Bd. 89, S. 211—233; S. 353—377. (1853.)

Die Grundsätze für die Lösung solcher Aufgaben, in denen die Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern in Betracht kommt, sind durch Smaasen und Kirchhoff hingestellt worden. Indessen reichen unsere mathematischen Hilfsmittel nur in wenigen der einfachsten Fälle aus, um mittels jener Grundsätze die Lösung der genannten Aufgaben wirklich vollständig durchführen zu können. Es stellen sich hier dieselben Schwierigkeiten in den Weg wie bei den Problemen der Vertheilung statischer Elektricität auf der Oberfläche leitender Körper, Problemen, welche in mathematischer Beziehung die nächste Verwandtschaft mit denen der Stromvertheilung haben. Dazu kommt, dass wir bisher noch nicht im Stande sind, die Stromintensitäten in anderen als linearen Leitern²¹² praktisch zu messen, daher würden wir Ergebnisse der Theorie für das Innere der durchströmten körperlichen Leiter nicht einmal mit der Wirklichkeit vergleichen können. Desto grössere praktische Wichtigkeit haben in neuerer Zeit solche Aufgaben, bei denen die Stromintensität in Verbindungen von körperlichen und linearen Leitern zu bestimmen ist, namentlich durch die thierisch-elektrischen Versuche erhalten. Für sie lassen sich, auch wo die Vertheilung der Ströme im Innern des körperlichen Leiters unbekannt ist, mehrere sehr einfache Gesetze



nachweisen, die eine grosse Zahl der bei Versuchen in Betracht kommenden Fragen zu lösen geeignet sind. Ich werde im Folgenden zuerst die hierher gehörigen Theoreme, welche ich gefunden habe, erweisen, dann die Versuche berichten, durch welche ich sie, so weit es anging, zu bestätigen suchte, und endlich die Art ihrer Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche kurz auseinander setzen.

I. Ich beginne mit einem Satze, den wir mit du Bois-Reymond das Princip der Superposition der elektrischen Ströme nennen können. Er ist nicht ganz neu; denn für lineare Leitersysteme kann man ihn unmittelbar aus Kirchhoff's allgemeinen Formeln herauslesen; für körperliche Leiter, in welche die Elektrizität aus linearen einströmt, hat ihn Smaasen¹⁾ ausgesprochen, und du Bois-Reymond²⁾ baut einige seiner Schlüsse auf die Einsicht, dass es ein solches Princip geben müsse. Aber da ich es nirgends in ganz allgemeiner Form bewiesen fand, und es in dem Folgenden vielfach gebrauchen werde, so hielt ich für nöthig, es hier zuvörderst in voller Allgemeinheit hinzustellen.

Man kann es folgendermassen aussprechen:

Wenn in einem beliebigen Systeme von Leitern elektromotorische Kräfte an verschiedenen Stellen vorkommen, so ist die elektrische Spannung in jedem Punkte des durchströmten Systems gleich der algebraischen Summe derjenigen Spannungen, welche jede einzelne der elektromotorischen Kräfte unabhängig von den anderen hervorbringen würde. Und ebenso sind die mit drei rechtwinkligen Axen parallelen Componenten der Stromintensität gleich der Summe der entsprechenden Componenten, welche den einzelnen Kräften zugehören.

Der Beweis ergibt sich sehr leicht aus den drei Bedingungen, welche Kirchhoff³⁾ für die Stromvertheilung in Systemen körperlicher Leiter als nothwendig und ausreichend

1) Pogg. Ann. Bd. 69, S. 161.

2) Unters. über thier. Elektr. Bd. I, S. 647.

3) Pogg. Ann. Bd. 75, S. 189.

erwiesen hat. Wir nehmen an, dass das System aus Stücken von verschiedenem Material zusammengesetzt sei, und bezeichnen innerhalb eines solchen Stückes die elektrische Spannung in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, mit u , die nach innen gerichtete Normale eines Punktes der Oberfläche oder der Berührungsfläche mit einem anderen Stücke des Systems mit n , die Leitungsfähigkeit mit k , und dieselben Grössen für ein anstossendes Stück von anderem Material mit u_1, n_1, k_1 , so sind die drei Bedingungen für das dynamische Gleichgewicht der Elektrizität:

1) für jeden Punkt im Innern:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0.$$

2) für jeden Punkt der Berührungsfläche zweier Stücke von verschiedenem Material:

$$k \frac{du}{dn} + k_1 \frac{du_1}{dn_1} = 0.$$

Darin liegt gleichzeitig, dass an der freien Oberfläche, jenseits welcher wir $k_1 = 0$ setzen müssen,

$$\frac{du}{dn} = 0.$$

3) für jeden Punkt einer Fläche, in welcher eine elektromotorische Kraft ihren Sitz hat:

$$u - u' = U,$$

wo U die constante Spannungsdifferenz bezeichnet.

Denken wir uns nun die elektromotorischen Kräfte in zwei Gruppen A und B gesondert, und nennen die Spannungen, welche unter dem Einflusse der gleichzeitigen Wirkung der Kräfte aus der Gruppe A und derer aus B eintreten, wie bisher u , die von den Kräften A allein hervorgerufenen v , die von den Kräften B allein hervorgerufenen w , so behauptet unser Princip, dass:

$$u = v + w.$$

Ich will zunächst nachweisen, dass die Function $(v + w)$ statt u in die obigen drei Bedingungsgleichungen gesetzt, dieselben identisch macht.



Da v und w die elektrischen Spannungen sein sollen, welche bei der Durchströmung des Systems unter dem Einflusse der betreffenden elektrischen Kräfte aus der Gruppe A oder B eintreten, so muss ein jedes von ihnen einzeln genommen die drei obigen Bedingungen erfüllen. Wir haben also für jeden Punkt im Innern:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} = 0; \quad (1b)$$

für jeden Punkt der Trennungsfläche zweier Stücke von verschiedenem Widerstande:

$$k \frac{dv}{dn} + k_1 \frac{dv_1}{dn_1} = 0, \quad (2a)$$

$$k \frac{dw}{dn} + k_1 \frac{dw_1}{dn_1} = 0; \quad (2b)$$

für jeden Punkt einer elektromotorischen Fläche, dessen Kräfte der Gruppe A angehören:

$$v - v_1 = U, \quad (3a)$$

$$w - w_1 = 0; \quad (3b)$$

oder für jeden, dessen Kräfte der Gruppe B angehören:

$$v - v_1 = 0, \quad (4a)$$

$$w - w_1 = U. \quad (4b)$$

Berücksichtigt man nun, dass wenn $u = v + w$ ist:

$$\frac{du}{dn} = \frac{d(v+w)}{dn} = \frac{dv}{dn} + \frac{dw}{dn}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2(v+w)}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dx^2}$$

u. s. w.,

so erhält man sogleich durch Addition der Gleichungen (1a) und (1b) die Gleichung (1), durch Addition von (2a) und (2b) die Gleichung (2), durch Addition von (3a) und (3b) oder (4a) und (4b) die Gleichung (3). Somit sind alle Bedingungen der Stromvertheilung erfüllt, wenn wir $u = v + w$ setzen, und da Kirchhoff nachgewiesen hat, dass nur eine Function existiren

kann, welche alle diese Bedingungen erfüllt, so folgt, dass $u = v + w$ diese Function sei.

Wie wir nun die Gesamtzahl der vorhandenen elektromotorischen Kräfte in zwei beliebige Gruppen A und B zerlegt haben, so können wir auch wieder A in zwei kleinere Gruppen C und D theilen, B in E und F . Durch die Kräfte der Gruppe C allein möge die Spannung q hervorgebracht werden, durch D oder E oder F beziehlich die Spannungen r oder s oder t . Wir haben dann entsprechend dem vorigen Falle:

$$v = q + r$$

$$w = s + t$$

$$u = v + w = q + r + s + t.$$

So können wir die Theilung der Kräfte offenbar beliebig weit fortsetzen.

Auch braucht man die elektromotorische Kraft U irgend eines Punktes in einer elektromotorischen Fläche nicht ganz in die eine oder andere Gruppe hineinzunehmen, sondern kann sie selbst in zwei Theile V und W theilen, sodass:

$$U = V + W$$

und V in die Gruppe A , W in die Gruppe B kommt. Die dritte Bedingungsgleichung wird dann an dieser Stelle folgende:

$$v - v_1 = V$$

$$w - w_1 = W,$$

daraus folgt:

$$u - u_1 = (v + w) - (v_1 + w_1) = V + W = U,$$

wie es die Gleichung (3) verlangt.

Somit ist das Princip der Superposition für die elektrischen Spannungen vollständig erwiesen. Es darf natürlich nur bei constanten elektromotorischen Kräften angewendet werden. Hängen diese Kräfte dagegen von der Stromesdichtigkeit ab, so bekommt die dritte Bedingungsgleichung eine andere Form, welche die einfache Addition nicht mehr zulässt.

Ich bemerke noch, dass es zuweilen vortheilhaft ist zu den vorhandenen elektromotorischen Kräften eines leitenden Systems noch andere hinzuzudenken, und die vorhandenen Spannungen als die Differenz der den gesammten und der den



hinzugesetzten Kräften zugehörigen Spannungen zu betrachten, ein Verfahren, welches nach dem bewiesenen Principe offenbar erlaubt ist.

Aus dem für die Spannungen bewiesenen Satze folgt sogleich der entsprechende für die Componenten der Stromintensität. Sind erstere u oder v oder w , so sind letztere nach der Axe der x beziehlich:

$$-k \frac{du}{dx}, \quad \text{oder} \quad -k \frac{dv}{dx}, \quad \text{oder} \quad -k \frac{dw}{dx};$$

und aus:

$$u = v + w$$

folgt:

$$k \frac{du}{dx} = k \frac{dv}{dx} + k \frac{dw}{dx},$$

und ebenso nach den beiden anderen Axen:

$$k \frac{du}{dy} = k \frac{dv}{dy} + k \frac{dw}{dy}$$

$$k \frac{du}{dz} = k \frac{dv}{dz} + k \frac{dw}{dz}.$$

II. Die folgenden Sätze beziehen sich auf den Fall, wo constante elektromotorische Kräfte von beliebiger Zahl und Vertheilung im Innern eines beliebig zusammengesetzten Leitersystems A wirksam sind, und an die Oberfläche von A ein anderer Leiter B angelegt wird, in welchen ein Theil der A durchkreisenden Ströme abgeleitet wird. Wir können daher A den abgeleiteten und B den ableitenden Leiter nennen. Wir setzen zunächst voraus, dass in B und an seinen Berührungsstellen mit A keine elektromotorischen Kräfte vorkommen. Es wird dadurch die allgemeine Brauchbarkeit der folgenden Sätze für beliebige Fälle der Anwendung nicht beschränkt, da man nach dem Principe der Superposition die Ströme, welche von den inneren Kräften des Leiters A in dem Systeme erregt werden, erst mit Anwendung der folgenden Theoreme gesondert bestimmen, und nachher die hinzufügen kann, welche Kräften im Innern von B oder an den Berührungsstellen von A und B , wenn dort solche vorkommen, angehören.

1) Ich lasse zunächst einen Satz folgen, welchen wir wohl passend das Princip von der elektromotorischen Oberfläche nennen können:

Für jeden Leiter A , in dessen Innerem elektromotorische Kräfte beliebig vertheilt sind, lässt sich eine bestimmte Vertheilung elektromotorischer Kräfte in seiner Oberfläche angeben, welche in jedem angelegten Leiter B dieselben abgeleiteten Ströme wie die inneren Kräfte von A hervorbringen würde.

Diese Vertheilung wird folgendermassen gefunden. Man nehme den Leiter A isolirt, ohne Verbindung mit anderen Leitern, bestimme die elektrische Spannung, welche ein jeder Punkt seiner Oberfläche bei den durch seine inneren Kräfte erregten Strömen annimmt, und setze die gesuchte elektromotorische Kraft der Oberfläche, in der Richtung von innen nach aussen genommen, gleich dieser elektrischen Spannung, indem man nach Ohm's Weise die elektromotorischen Kräfte durch die zugehörigen Spannungsunterschiede gemessen denkt. Ich werde im Folgenden die Oberfläche des Leiters A , wenn sie in der angegebenen Weise elektromotorisch wirksam gedacht wird, die positiv wirksame Oberfläche nennen, negativ wirksam dagegen, wenn ihren Kräften die entgegengesetzte Richtung bei derselben absoluten Grösse beigelegt werden soll.

Der Beweis des vorstehenden Satzes ergibt sich am leichtesten in folgender Weise. Man denke die Oberfläche des Leiters A negativ wirksam gemacht, und dann einen unwirksamen zweiten Leiter B angebracht. Aus den von Kirchhoff gegebenen drei Bedingungen der Stromvertheilung in dem Systeme $A+B$ ergibt sich leicht, dass bei dieser Anordnung gar keine Ströme in B entstehen, die elektrische Spannung in seinem Innern überall gleich Null bleibt, und die Ströme und Spannungen, welche vorher in A bestanden, unverändert fortbestehen. Im Innern von A und im Innern von B sind natürlich jene drei Bedingungen nach wie vor erfüllt, da dasselbst alles unverändert bleiben soll. An der Berührungsfläche



von A und B müssen die beiden Grenzbedingungen 2 und 3 des vorigen Paragraphen erfüllt sein, nämlich:

$$k_a \frac{du_a}{dn_a} + k_b \frac{du_b}{dn_b} = 0,$$

$$u_a - u_b = U,$$

wo u_a , n_a , k_a die Werthe der betreffenden Grössen in A , und u_b , n_b , k_b dieselben in B bezeichnen. Berücksichtigen wir nun, dass u_b , also auch du_b/dn_b , überall gleich Null sein soll, dass du_a/dn_a ebenfalls gleich Null sein muss, weil der betreffende Theil der Oberfläche von A vorher zu der freien äusseren Oberfläche gehörte, und dass U nach der Definition der negativ wirksamen Oberfläche gleich u_a sein muss, so werden beide Gleichungen identisch, und es sind also in der That unter den angegebenen Umständen alle Bedingungen der Stromvertheilung erfüllt. Die negativ wirksame Oberfläche verhindert vollständig, dass die Ströme, welche im Innern des Leiters A erregt sind, und die zugehörige elektrische Spannung auf andere Leiter übergehen.

Nach dem Principe der Superposition können wir aber die Spannungen und Stromcomponenten im Innern von B (deren Grösse, wie eben bewiesen, überall gleich Null ist) ansehen, als die algebraische Summe derjenigen Spannungen und Stromcomponenten, welche einmal die inneren Kräfte von A für sich allein und dann die negativ wirksame Oberfläche für sich allein hervorbringen würde. Da nun jene Summe im Innern von B überall gleich Null sein soll, so müssen ihre beiden Summanden dort überall gleiche absolute Grösse und entgegengesetztes Zeichen haben. Es bringt also die negativ wirksame Oberfläche für sich allein genau die entgegengesetzten Spannungen und Strömungen hervor, wie die inneren Kräfte von A . Kehren wir nun das Zeichen der elektromotorischen Kräfte in der Oberfläche um, so geschieht dasselbe mit den von ihnen abhängigen Spannungen und Strömungen in A und B . Daraus folgt, dass die positiv wirksame Oberfläche für sich allein genau dieselben Spannungen und Strömungen in B hervorbringt, wie die inneren Kräfte von A , was zu beweisen war.

2) Die Spannungen und Stromcomponenten im Innern des abgeleiteten Leiters A während der Ableitung sind gleich der Summe der ohne Ableitung in ihm stattfindenden Spannungen und Stromcomponenten, und derer, welche die positiv wirksame Oberfläche hervorbringt.

Es trete in dem durch die Coordinaten x , y , z im Innern von A gegebenen Punkte die Spannung W_0 ein, wenn die inneren Kräfte von A in diesem Leiter allein ohne Ableitung Ströme erregen, W_1 , wenn sie es in dem verbundenen Leitersystem $A+B$ thun, ferner $+P$, wenn die positiv wirksame Oberfläche, $-P$, wenn die negative Ströme in dem verbundenen Leitersystem erregt. In der vorangegangenen Beweisführung ist gezeigt worden, dass die negativ wirksame Oberfläche und die inneren Kräfte von A gleichzeitig wirkend, den inneren Zustand von A bestehen lassen, welcher vor der Ableitung bestand, also seine Spannungen gleich W_0 machen. Betrachten wir diese nun nach dem Princip der Superposition als die Summe derer, welche die inneren Kräfte von A für sich, und die negativ wirksame Oberfläche für sich in dem System $A+B$ hervorbringt, so haben wir:

$$W_0 = W_1 - P,$$

was sich sogleich umschreiben lässt in:

$$W_1 = W_0 + P.$$

Diese Gleichung ist aber gerade das, was der obige Satz für die Spannungen aussagt. Differenziren wir sie nacheinander nach den drei Coordinatax, so erhalten wir die entsprechenden Gleichungen für die Stromcomponenten.

3) Verschiedene Vertheilungsweisen elektromotorischer Kräfte in der Oberfläche des Leiters A , welche dieselben abgeleiteten Ströme wie seine inneren Kräfte geben sollen, können sich nur um eine, in allen Punkten der Oberfläche denselben constanten Werth habende Differenz unterscheiden.

Die Strömungen im Innern eines Leitersystems bleiben bekanntlich unverändert, wenn man die Spannungen in allen Punkten um eine constante Grösse C grösser oder kleiner



macht. Führt man dies in dem Leiter A aus vor der Anlegung des Leiters B , und bestimmt dann nach der oben gegebenen Regel die Intensität der elektromotorischen Oberfläche, so findet man auch für diese, welche den oberflächlichen Spannungen gleich sein soll, überall einen um C grösseren oder kleineren Werth. Die Grösse der elektromotorischen Kraft in den einzelnen Punkten der Oberfläche, welche die Wirkung der inneren Ströme nach aussen ersetzen soll, ist also auszudrücken durch eine gewisse Function der Coordinaten, welcher eine willkürliche Constante hinzuaddirt ist. Es lässt sich aber auch leicht einsehen, dass es weiter keine Vertheilung elektromotorischer Kräfte an der Oberfläche giebt, welche dasselbe leisten könnte. Gäbe es nämlich zwei verschiedene Vertheilungsarten, welche in dem angelegten Leiter B dieselben Ströme hervorbrächten, so könnte man nach Entfernung der inneren Kräfte von A die eine positiv, die andere negativ anbringen; dann würde jeder Punkt von B von gleichen und entgegengesetzten Strömen durchflossen werden, d. h. in B würde gar keine Strömung stattfinden. Daraus folgt weiter, dass auch in A keine stattfinden kann. Denn jede Stromcurve muss durch eine elektromotorische Fläche hindurchgehen, hier wäre aber die einzige solche die Berührungsfläche von A und B . Wenn aber weder in A noch in B eine Strömung stattfindet, muss die Spannung innerhalb jedes dieser Leiter constant sein, und da die elektromotorische Kraft der Grenzflächen gleich dem Spannungsunterschiede ihrer beiden Seiten ist, so muss diese Kraft, welche in diesem Falle die Differenz der beiden verglichenen Vertheilungsarten ist, in allen Punkten der Oberfläche dieselbe sein. Es unterscheiden sich also die beiden Vertheilungsarten wieder nur durch eine willkürliche Constante.

Dagegen kann ein und dieselbe elektromotorische Oberfläche unendlich viele Vertheilungsarten elektromotorischer Kräfte im Innern des Leiters entsprechen, welche nur das Gemeinsame haben, dass sie in den Punkten der Oberfläche dieselben Spannungen hervorbringen.

Ich bemerke noch, dass man den Leiter A auch in verschiedene Theile A_1, A_2 u. s. w. zerlegt, jeden dieser Theile

isolirt und für seine inneren Kräfte nach der oben gegebenen Regel eine elektromotorische Oberfläche gesetzt denken kann. Es werden dann die elektromotorischen Oberflächen der Theile zusammen genommen dieselben Ströme in B hervorbringen, wie die inneren Kräfte. Denn wir können nach der gegebenen Beweisführung die inneren Kräfte jedes einzelnen Theiles durch die ihn umschliessende elektromotorische Fläche ersetzen, wenn wir uns die Kräfte aller anderen Theile wegdenken, und können nachher nach dem Principe der Superposition die Wirkung des ganzen Leiters A als die Summe der Wirkungen seiner einzelnen Theile ansehen.

4. Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass mit Hilfe unseres Theorems folgender Satz ohne Einschränkung bewiesen werden kann:

Wenn ein körperlicher Leiter mit constanten ²²² elektromotorischen Kräften in zwei bestimmten Punkten seiner Oberfläche mit beliebigen linearen Leitern verbunden wird, so kann man an seiner Stelle immer einen linearen Leiter von bestimmter elektromotorischer Kraft und bestimmtem Widerstande substituiren, welcher in allen angelegten linearen Leitern genau dieselben Ströme erregen würde, wie jener körperliche.

G. Kirchhoff hat diesen Satz nur für den Fall erwiesen, dass wie in den hydroelektrischen Batterien jede elektromotorisch wirksame Trennungsfläche zweier Stücke von verschiedenem Material auch den ganzen körperlichen Leiter in zwei vollkommen gesonderte Stücke trennt, so dass in seinem Innern nirgends vollständig geschlossene Stromescurven vorkommen, sondern diese Curven alle auch den linearen Leiter durchlaufen. Ersetzen wir aber die inneren Kräfte des körperlichen Leiters durch solche seiner Oberfläche, wobei hier nur die beiden Punkte derselben zu berücksichtigen sind, welche mit dem linearen in Verbindung stehen, so führen wir den allgemeinen Fall auf den von Kirchhoff behandelten zurück, und der Beweis des speciellen Falles wird dadurch auch für den allgemeinen gültig. Der Widerstand des zu substituirenden linearen Leiters ist gleich dem des Körpers, wenn ein Strom von



den beiden Eintrittspunkten der linearen Leitung aus durch ihn hindurchgeleitet wird.

Was für jeden körperlichen Leiter gilt, gilt auch für den speciellen Fall eines verzweigten linearen Stromsystems. Auch ein solches, wenn zwei bestimmte Punkte desselben mit beliebigen anderen linearen Leitern verbunden werden, verhält sich diesen gegenüber wie ein linearer Leiter von bestimmtem Widerstande, dessen Grösse man nach den bekannten Regeln für verzweigte Leitungen findet, und von bestimmter elektromotorischer Kraft, welche durch den Spannungsunterschied der abgeleiteten Punkte, wie er vor der Ableitung bestand, gegeben wird. An Beispielen bestätigt es sich sehr leicht, dass man nach dieser Regel die von verzweigten Leitungen abgeleiteten Ströme ebenso gross findet, wie nach den früher bekannten Regeln. Wählen wir das einfachste dieser Beispiele. Ein einfacher Stromkreis werde durch zwei beliebig angenommene Punkte a und b , in denen später noch andere lineare Leitungen mit ihm verbunden werden sollen, in zwei Theile getheilt gedacht, deren einer den Widerstand w_0 , der andere den Widerstand w_1 habe, jener enthalte auch die elektromotorische Kraft A , deren Grösse dem Spannungsunterschiede an der erregenden Stelle gleich ist. Nach Ohm's Spannungsprincipien nimmt die Spannung von der positiven Seite der erregenden Stelle längs dem Leitungsdrahte auf Stücken von gleichem Widerstande um ein Gleiches ab bis zur negativen Seite der erregenden Stelle. Der Spannungsunterschied s der Punkte a und b , welche um ein Stück von dem Widerstande w_1 von einander entfernt sind, ergibt sich danach:

$$s = \frac{A w_1}{w_1 + w_0}.$$

Diese Grösse s ist die elektromotorische Kraft des zu substituierenden linearen Leiters. Dessen Widerstand muss dem Widerstande der beiden Stücke w_0 und w_1 gleich sein, wenn sie nebeneinander von a nach b durchströmt werden; also:

$$W = \frac{w_0 w_1}{w_0 + w_1}.$$

Verbinden wir also die bestehende Leitung in den Punkten a und b mit einem dritten linearen Leiter vom Widerstande w_2 , und nennen die Intensitäten, von a nach b gerechnet, in den drei Leiterstücken w_0 , w_1 und w_2 , beziehlich i_0 , i_1 , i_2 , so ist nach unserem Theorem:

$$i_2 = \frac{s}{W + w_2} = \frac{A w_1}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}.$$

Die Intensitäten i_0 und i_1 finden sich nach dem zweiten Satze dieses Abschnittes:

$$i_0 = -\frac{A}{w_0 + w_1} - \frac{s w_1}{w_0 w_2 + w_0 w_1 + w_1 w_2} \\ = -\frac{A (w_1 + w_2)}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}$$

$$\text{und: } i_1 = \frac{A}{w_0 + w_1} - \frac{s w_0}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2} \\ = \frac{A w_2}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}.$$

Genau so, wie es aus der Elimination der gewöhnlich gebrauchten Gleichungen:

$$i_0 + i_1 + i_2 = 0 \\ i_1 w_1 = i_2 w_2 = i_0 w_0 + A$$

gefunden wird.

III. Ich muss hier zunächst die Beziehungen erörtern, in welchen die aufgestellten Sätze zu gewissen anderen aus der Theorie der statischen Elektrizität und des Magnetismus stehen.

In einer früheren Abhandlung¹⁾ habe ich schon die Thatsache, dass elektromotorisch differente Körper, welche sich berühren, eine constante Spannungsdifferenz zeigen, mathematisch so ausgesprochen, dass die Potentialfunction aller freien Elektrizität in ihnen um eine constante Differenz verschieden sein müsse, unabhängig von der Gestalt und Grösse der beiden Leiter. Zwar ist in der angeführten Stelle nicht das Wort „Potentialfunction“, sondern „freie Spannung“ gebraucht, aber auf Seite 41 und 42 derselben Schrift findet sich die Definition des Begriffes der freien Spannung, welche identisch

1) Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847, S. 47 (oben S. 48).



ist mit dem, was Gauss Potential, Green Potentialfunction genannt hat.¹⁾

²²⁵ Später hat Kirchhoff dasselbe auf die elektromotorisch differenten Körper in geschlossenen galvanischen Kreisen ausgedehnt, und nachgewiesen, dass dasjenige, was man bisher als verschiedene Spannung oder Dichtigkeit der Elektrizität in durchströmten Körpern bezeichnet hatte, der verschiedene Werth der Potentialfunction sei, und dass in constant durchströmten homogenen Leitern diese Function nur solcher freier Elektrizität angehören könne, welche auf der Oberfläche und ausserhalb der Leiter vertheilt sei.

1) Ich benutzte diese Gelegenheit, auf einige von Clausius besprochene Punkte der erwähnten Schrift folgendes zu erwidern. Die Abweichung, welche er in diesen Annalen Bd. LXXXVI, S. 343, Anm. 2 berührt, beruht nur auf einem Unterschiede des Namens, nicht der Sache. Definirt man das Potential zweier Massen aufeinander als die Summe der Potentiale aller Massenelemente der einen auf alle der andern, so kann man bei der Bildung des Potentials einer Masse auf sich selbst, entweder die Potentiale aller Combinationen oder aller Variationen je zweier Elemente summiren. Im letzteren Falle wird die Summe doppelt so gross als im ersten. Da ich bei der Abfassung jener Schrift in der mir zu Gebote stehenden Literatur nichts über einen etwa schon feststehenden Gebrauch dieses Begriffes ermitteln konnte, zog ich es vor in der Consequenz der von mir vorausgeschickten Definitionen zu bleiben, welche den Variationen den Vorzug gab. Uebrigens gebe ich es gern zu, dass die andere Definition von dem Begriffe des Potentials einer Masse auf sich selbst, welche bei der Summierung nur die Combinationen wählt, für die übrigen Beziehungen des Potentialbegriffes angemessener ist, so wie sie denn auch allein der Definition dieses Begriffes von Neumann entspricht. Meine Formeln sind also streng richtig, wenn man meine Definition zu Grunde legt, und lassen sich in die von Clausius unmittelbar übertragen, wenn man jedem Potential einer Masse auf sich selbst den Factor 2 hinzusetzt. — Zu S. 362 Anm. bemerke ich, dass der Begriff „Ableitungsgrösse“ für Leidener Flaschen schon von anderen Physikern gebraucht ist, und da es an einer mathematischen Definition fehlte, ich als solche die Gleichung $CS = Q$ auf Seite 43 meiner Schrift hingesetzt habe. — Wenn Herr Clausius auf S. 343 Anm. 1 einige Stellen jener Schrift „ungenau“ erscheinen, so werden sie hoffentlich von diesem Vorwurfe nur in dem Sinne getroffen werden, in welchem jede Anwendung eines mathematischen Gesetzes auf die Wirklichkeit ungenau ist, weil stets eine Reihe von Nebeneinflüssen unberücksichtigt bleibt. (Fortsetzung dieser Discussion oben Nr. III.)

Gauss hat gezeigt¹⁾, dass, wenn Elektrizität, (oder Magnetismus) in einer Fläche verbreitet ist, und zwar die Menge h auf der Flächeneinheit, die Potentialfunction auf beiden Seiten einer solchen Fläche keine verschiedenen Werthe habe, wohl aber ihr Differentialquotient, in der Richtung senkrecht gegen die Fläche genommen. Nennen wir diesen du/dn_1 auf der einen, und du/dn_2 auf der anderen Seite der Fläche, wobei vorausgesetzt wird, dass die Normalen der Fläche von ihrem Fusspunkte in dieser nach entgegengesetzten Richtungen hin gemessen werden, so ist nach Gauss:

$$\frac{du}{dn_1} + \frac{du}{dn_2} = -4\pi h. \quad (1)$$

Ein solcher Fall kommt gemäss Kirchhoff's zweiter Bedingung für das dynamische Gleichgewicht der Elektrizität in durchströmten Leitersystemen an den Berührungsflächen zweier Leiter von verschiedenem Widerstande und gleicher elektromotorischer Kraft vor. Hier ist die Potentialfunction auf beiden Seiten der Fläche von gleichem Werthe, aber ihr Differentialquotient verschieden.

Denken wir uns dagegen eine Fläche auf einer Seite mit positiver Elektrizität, auf der anderen mit einer gleichen Quantität negativer belegt, beide Schichten in verschwindend kleiner Entfernung von einander, so werden, der Gleichung (1) entsprechend, die Differentialquotienten der Potentialfunction auf beiden Seiten der belegten Fläche gleich, die Werthe dieser Function selbst aber verschieden sein. Nehmen wir an, um die Grösse ihres Unterschiedes zu bestimmen, dass zunächst nur eine solche Schicht da sei, welche in der Fläche Ω selbst liege. Ihre Potentialfunction in einem Punkte der Oberfläche von der Dichtigkeit x sei u , deren Differentialquotienten nach der einen Seite du/dn_1 , nach der anderen du/dn_2 . Verlegen wir nun die elektrische Schicht in die verschwindend kleine Entfernung ε von der Fläche Ω nach der Seite der Normale n_1 hin, so entsteht dadurch eine verschwindend kleine Variation der Potentialfunction. Der Werth dieser Function in der elektrischen

1) Result. d. magnet. Vereins, 1839, S. 27.



Schicht selbst wird also nun $u + \varepsilon \delta u$, und in einer unendlich kleinen Entfernung Δn , von der Fläche Ω (oder $\Delta n_1 - \varepsilon$ von der elektrischen Schicht):

$$227 \quad U_1 = u + \varepsilon \delta u + \frac{du}{dn_1} (\Delta n_1 - \varepsilon) + \frac{d\delta u}{dn_1} \varepsilon (\Delta n_1 - \varepsilon) \\ + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dn_1^2} (\Delta n_1 - \varepsilon)^2 + \text{etc.},$$

in der unendlich kleinen Entfernung Δn_2 nach der anderen Seite von Ω dagegen:

$$U_2 = u + \varepsilon \delta u + \frac{du}{dn_2} (\Delta n_2 + \varepsilon) + \frac{d\delta u}{dn_2} \varepsilon (\Delta n_2 + \varepsilon) \\ + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dn_2^2} (\Delta n_2 + \varepsilon)^2 + \text{etc.}$$

Nehmen wir nun die gleichzeitige Existenz von zwei Schichten an, eine von der Dichtigkeit $+x$ in der Entfernung $+\varepsilon$, die andere von der Dichtigkeit $-x$ in der Entfernung $-\varepsilon$ von der Fläche Ω , so wird mit Weglassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung:

$$U_1 = 2\varepsilon \delta u - 2\varepsilon \frac{du}{dn_1} \\ U_2 = 2\varepsilon \delta u - 2\varepsilon \frac{du}{dn_2},$$

also:

$$U_1 - U_2 = -2\varepsilon \left(\frac{du}{dn_1} + \frac{du}{dn_2} \right) = 8\pi x \varepsilon,$$

und wenn wir nach Analogie der Magneten die Grösse $2\varepsilon x = m$ das elektrische Moment der Flächeneinheit nennen, wird:

$$U_1 - U_2 = 4\pi m. \quad (2)$$

Ist also der Unterschied der Potentialfunctionen gegeben, so ist dadurch auch das elektrische Moment des betreffenden Theiles der Fläche gegeben.

Ein entsprechender Fall tritt in durchströmten Leitungssystemen an solchen Flächen ein, wo sich Leiter von gleichem Widerstande und verschiedener elektromotorischer Kraft berühren. Hier hat die Potentialfunction nach Kirchhoff's dritter Bedingungsgleichung auf beiden Seiten verschiedene Werthe, und die Grösse ihres Unterschiedes ist gleich der

elektromotorischen Kraft der betreffenden Stelle. Diese letztere muss also gleich $4\pi m$ sein. Dagegen ist der Differentialquotient der Spannung, nach beliebiger Richtung genommen, auf beiden Seiten gleich.

Wo sich Leiter von ungleicher elektromotorischer Kraft und ungleichem Leitungsvermögen berühren, müssen dagegen sowohl die ganze Function als ihr Differentialquotient auf beiden Seiten der Fläche verschiedene Werthe haben, was sich erreichen lässt, wenn an die entgegengesetzten Seiten der Fläche Schichten von entgegengesetzten Elektricitäten und ungleicher Dichtigkeit angelagert werden.

Ich werde im Folgenden unter einer elektrischen Doppelschicht stets nur solche zwei Schichten verstehen, welche an den entgegengesetzten Seiten einer Fläche in unendlich kleiner Entfernung vor ihr liegen, und deren eine ebenso viel positive Elektricität enthält, als die andere negative.

In durchströmten zusammengesetzten Leitersystemen sind also alle Grenzflächen zwischen Theilen von verschiedenem Widerstande und alle zwischen ihnen und dem äusseren nicht leitenden Raume mit einer einfachen Schicht Elektricität, ausserdem alle elektromotorischen Flächen mit einer Doppelschicht belegt. Hat man die Aufgabe zu lösen, die Stromvertheilung zu finden, wenn die elektromotorischen Kräfte P gegeben sind, so giebt die Gleichung:

$$P = 4\pi m$$

sogleich das Moment m der Doppelschichten, welche den elektromotorischen Flächen entsprechen, und die Aufgabe reducirt sich darauf, zu diesen Doppelschichten die einfachen zu finden, sodass die Potentialfunctionen von ihnen allen zusammengekommen den Bedingungsgleichungen Kirchhoff's genügen.

Betrifft die Aufgabe Verbindungen von linearen körperlichen Leitern, so kann man für die Aufsuchung der Potentialfunctionen die Einströmungspunkte der Elektricität in den körperlichen Leiter als einfache elektrische Massenpunkte betrachten; man erhält bei dieser Substitution rings um sie her dieselbe Gestalt der Potentialfunction, wie sie Smaasen in seiner Untersuchung über die Stromvertheilung im Raume



229 gefunden hat. Es sei A die elektrische Masse eines solchen Punktes, r seine Entfernung von dem Punkte, dessen Potentialfunction zu bestimmen ist, V der Theil der Potentialfunction, welcher von anderen entfernten Massen eben daselbst hervorgebracht wird, so ist die ganze Potentialfunction:

$$\frac{A}{r} + V.$$

Ist nun $d\omega$ ein Element einer beliebigen Oberfläche, welche den Punkt A , ausser ihm aber keinen anderen elektrischen Massenpunkt einschliesst, und n die nach innen gekehrte Normale von $d\omega$, so ist nach einem Satze von Gauss:¹⁾

$$\int \frac{d}{dn} \left[V + \frac{A}{r} \right] d\omega = 4\pi A,$$

wo das Integral über die ganze Fläche auszudehnen ist. Bezeichnen wir die Leitungsfähigkeit des körperlichen Leiters mit k , so ist die gegen $d\omega$ normale Stromcomponente gleich:

$$-k \frac{d}{dn} \left[V + \frac{A}{r} \right],$$

folglich die ganze durch die geschlossene Oberfläche von innen nach aussen strömende Elektricität:

$$+ 4\pi Ak.$$

Da diese Elektricitätsmenge der aus dem linearen Leiter einströmenden gleich sein muss, bezeichnet sie zugleich die Stromintensität in dem letzteren. Dadurch bestimmt sich die Grösse der hypothetischen elektrischen Masse A .

Durch diese Umformung der Aufgaben über Stromvertheilung erlangt man den grossen Vortheil, ihre Lösungen auf die Betrachtung von Functionen zu reduciren, welche schon mannigfach bearbeitet und in Reihen entwickelt sind, nämlich auf die Potentialfunctionen elektrischer Körper und Flächen. Ebenso kann man auch wiederum rückwärts aus jedem Theorem über Stromvertheilung entsprechende und zum Theil neue
230 Theoreme über die Potentialfunctionen der Elektricität und

1) l. c. § 6.

des Magnetismus herleiten, doch würde uns das hier zu weit von unserem Wege abführen.

In Verbindung mit diesen Betrachtungen eröffnet der Satz von der elektromotorischen Oberfläche uns einen neuen Weg zur Lösung der Aufgabe, die Stromvertheilung in einem begrenzten Leiter A von constantem Widerstande zu finden. Statt der elektromotorischen Kräfte in A substituiren wir nach den angegebenen Regeln elektrische Massen, und nehmen dann an, dass A mit einem ableitenden Leiter verbunden werde, und zwar sei B der unendliche äussere Raum mit derselben leitenden Masse wie A gefüllt. Da nun das zusammengesetzte System $A + B$ nirgend freie Oberflächen, oder Begrenzungsflächen von Theilen verschiedenen Widerstandes darbietet, können die elektrischen Massen, von denen die Potentialfunction der es durchströmenden Elektricität abhängt, nur die inneren von A sein. Daher ist die Spannung in dem zusammengesetzten Systeme $A + B$ gleich der Potentialfunction der inneren Massen von A , und somit gegeben. Nun soll auch die elektromotorische Oberfläche von A allein in B dieselben Spannungen hervorbringen, wie die inneren Kräfte von A ; es muss also ihre elektrische Potentialfunction (wenn sie als Doppelschicht betrachtet wird) im äusseren Raume B der der inneren Massen von A gleich sein. Kennen wir die elektromotorische Oberfläche von A , so kennen wir in diesem Falle also auch die Spannungen und Ströme, welche sie in dem Systeme $A + B$ hervorbringt. Nun sind aber nach dem Satze II. 2) die Ströme, welche in dem Leiter A ohne Ableitung kreisen, gleich der Differenz derjenigen, welche einmal die inneren Kräfte von A , dann die elektromotorische Oberfläche in dem abgeleiteten System $A + B$ hervorbringen würden. Daher reducirt sich die Aufgabe, in dem Leiter von constantem Widerstande A die Vertheilung der Ströme zu finden, auf die andere: diejenige elektrische Doppelschicht an seiner Oberfläche zu finden, welche nach aussen dieselbe Potentialfunction giebt, welche seine inneren elektrischen Massen geben. Diese Umformung der Aufgabe ist wesentlich verschieden von der, welche aus Kirchhoff's Theoremen herfließt. Nach der letzteren würden wir eine
231



einfache elektrische Schicht zu suchen haben, welche an der Grenze des Körpers denselben Differentialquotienten der Potentialfunction, senkrecht gegen die Oberfläche genommen, gäbe wie die inneren elektrischen Massen. Jene Umformung leitete mich in der That in einigen Fällen zur vollständigen Lösung, wo ich diese aus Kirchhoff's Theoremen nicht herzuleiten wusste. Als Beispiel will ich hier die Stromvertheilung in einer gleichmässig leitenden Kugel behandeln.

Wir wenden Polarcoordinaten an, die sich auf den Mittelpunkt der Kugel beziehen, und setzen:

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \omega \sin \varphi,$$

bezeichnen den Radius der Kugel mit R , und setzen $R/\rho = u$ und $\rho/R = v$. Alsdann findet bekanntlich folgende Beziehung zwischen der Potentialfunction V_a einer auf der Kugeloberfläche verbreiteten elektrischen Schicht für die Punkte des äusseren Raumes genommen, und der anderen V_i für den inneren Raum der Kugel statt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{wenn } V_a = \frac{1}{\rho} F_{(\omega, \varphi, u)} \\ \text{so ist } V_i = \frac{1}{R} F_{(\omega, \varphi, v)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Um nun den allgemeinen Ausdruck für die inneren und äusseren Potentialfunctionen einer elektrischen Doppelschicht zu finden, nehmen wir an, auf einer Kugeloberfläche vom Radius $R + AR$ befinde sich die eine als positiv betrachtete Schicht, und auf einer mit der ersten concentrischen vom Radius $R - AR$ die negative. AR wird natürlich als eine verschwindend kleine Grösse angesehen. Die äussere Potentialfunction der ersten Schicht ist dann $V_a + (dV_a/dR) AR$, die der zweiten $V_a - (dV_a/dR) AR$; folglich ist die äussere Potentialfunction der elektrischen Doppelschicht:

$$P_a = 2 \frac{dV_a}{dR} AR = \frac{2}{\rho^2} F_{(u)} AR, \quad (4)$$

und ähnlich die innere Potentialfunction:

$$P_i = 2 \frac{dV_i}{dR} AR = -2 \left[F_{(v)} + \frac{\rho}{R} F'_{(v)} \right] \frac{AR}{R^2}. \quad (5)$$

Das Zeichen $F'_{(u)}$ ist hier für $dF_{(u)}/du$ gesetzt.

Ist uns nun die Aufgabe gestellt eine bestimmte Doppelschicht zu suchen, welche die gewissen in der Kugel verbreiteten elektromotorischen Kräften entsprechende elektromotorische Fläche darstellt, so setzen wir zunächst die diesen Kräften entsprechenden elektrischen Massen hin, und bestimmen deren Potentialfunction W . Ausserhalb der Kugel muss sein:

$$W = P_a = \frac{2AR}{\rho^2} F_{(u)}, \quad \text{also:}$$

$$F'_{(u)} = \frac{\rho^2}{2AR} W$$

$$F'_{(u)} = \frac{1}{2AR} \int \rho^2 W du + C. \quad (6)$$

Bei der Integration ist zu bemerken, dass ρ eine Function von u ist, nämlich gleich R/u . Die Constante C ist ganz beliebig. Nachdem man $F_{(u)}$ gefunden hat, ergiebt sich sogleich aus Gleichung (5) die Function P_i , und endlich die elektrische Spannung S in der durchströmten Kugel:

$$S = W - P_i, \quad \text{oder:}$$

$$S = 2 \left[\frac{1}{R^2} F_{(v)} + \frac{1}{\rho^2} F'_{(u)} + \frac{\rho}{R^3} F_{(v)} \right] AR. \quad (7)$$

Somit ist das Problem ganz allgemein auf Quadraturen zurückgeführt.

Als besonderen Fall will ich den behandeln, wo die Elektrizität durch Punkte der Oberfläche in die Kugel einströmt. Der eine von der elektrischen Masse $+A$ habe die Winkel-²³³coordinaten $\omega = \alpha_1$ und $\varphi = o$, der andere von der Masse $-A$ dagegen $\omega = \alpha_2$ und $\varphi = o$. Die Entfernungen r_1 und r_2 dieser beiden Punkte von demjenigen, dessen Coordinaten ρ, ω und φ sind, finden sich aus den Gleichungen:

$$r_1^2 = (\rho \cos \omega - R \cos \alpha_1)^2 + (\rho \sin \omega \cos \varphi - R \sin \alpha_1)^2 + \rho^2 \sin^2 \omega \sin^2 \varphi$$

$$= \rho^2 + R^2 - 2R\rho (\cos \omega \cos \alpha_1 + \sin \omega \sin \alpha_1 \cos \varphi)$$

$$r_2^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho (\cos \omega \cos \alpha_2 + \sin \omega \sin \alpha_2 \cos \varphi).$$

Setzen wir:

$$\gamma_1 = \cos \omega \cos \alpha_1 + \sin \omega \sin \alpha_1 \cos \varphi$$

$$\gamma_2 = \cos \omega \cos \alpha_2 + \sin \omega \sin \alpha_2 \cos \varphi,$$



so ist:

$$W = \frac{A}{\sqrt{q^2 + R^2 - 2\gamma_1 R q}} - \frac{A}{\sqrt{q^2 + R^2 - 2\gamma_2 R q}},$$

daher nach Gleichung (6):

$$F_{(u)} = \frac{1}{2AR} \int q^2 W du + C,$$

oder wenn man q durch u ausdrückt:

$$F_{(u)} = \frac{AR}{2AR} \int \left[\frac{1}{u\sqrt{1+u^2-2\gamma_1 u}} - \frac{1}{u\sqrt{1+u^2-2\gamma_2 u}} \right] du + C$$

$$F_{(u)} = \frac{AR}{2AR} \log. \text{nat.} \left\{ \frac{1-\gamma_2 u + \sqrt{1+u^2-2\gamma_2 u}}{1-\gamma_1 u + \sqrt{1+u^2-2\gamma_1 u}} \right\} + C.$$

Substituiert man die hier gefundene Function $F_{(u)}$ in die Gleichung (7), so giebt sie:

$$S = \frac{A}{R} \log. \text{nat.} \left\{ \frac{R - \gamma_2 q + \sqrt{R^2 + q^2 - 2\gamma_2 R q}}{R - \gamma_1 q + \sqrt{R^2 + q^2 - 2\gamma_1 R q}} \right\} + \frac{2A}{\sqrt{R^2 + q^2 - 2\gamma_1 R q}} - \frac{2A}{\sqrt{R^2 + q^2 - 2\gamma_2 R q}} + C.$$

Diese Gleichung ist zugleich auch die der Spannungsflächen, deren Gesetz hiernach ein ziemlich verwickeltes ist. Dasselbe ist für die Strömungscuren der Fall, sodass es zu weitläufig sein würde, es hier weiter auszuführen.

353 IV. Theorem von der gleichen gegenseitigen Wirkung zweier elektromotorischen Flächenelemente.

Wählt man im Innern eines zusammengesetzten, aber nicht elektromotorisch wirksamen Leitersystems zwei beliebig gelegene Flächenelemente a und b , und ertheilt erst dem a , später dem b eine gleiche elektromotorische Kraft, so fließt im ersten Falle durch b so viel Elektrizität, wie im zweiten durch a .

Zum Beweise dieses Theorems gebrauche ich einen Satz, den Green¹⁾ gefunden, und zum Beweise eines ähnlichen

1) On the Theories of Electr. and Magnetism. Art. 3. Gleichung (2), abgedruckt in Crelle's Journal Bd. 44.

Theorems für statische Elektrizität angewendet hat, und dem man leicht eine etwas andere Form geben kann. Sind nämlich U und V zwei continuirliche Functionen der Coordinaten x, y, z , deren erste Differentialcoefficienten im Innern eines geschlossenen Raumes S nirgends unendlich werden, und ist $d\omega$ ein Element der Oberfläche dieses Raumes, n die nach Innen gerichtete Normale desselben, so ist:

$$\iiint U \left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right) dx dy dz + \int U \frac{dV}{dn} d\omega = \iiint V \left(\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \right) dx dy dz + \int V \frac{dU}{dn} d\omega, \quad (1)$$

wo die dreifachen Integrale über den ganzen Raum S und die zweifachen über seine ganze Oberfläche auszudehnen sind.

Nun sei die Function U die Potentialfunction einer Masse, die theils mit der veränderlichen Dichtigkeit μ im Innern von S , theils ausserhalb verbreitet ist, dann ist nach einem bekannten Satze von Gauss und Green:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = -4\pi\mu.$$

Und ebenso sei V die Potentialfunction einer Masse, die mit der veränderlichen Dichtigkeit ν theils in S , theils ausserhalb verbreitet ist, so dass:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi\nu.$$

Die Gleichung (1) verwandelt sich dann in folgende¹⁾:

$$\int U \frac{dV}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \nu U dx dy dz = \int V \frac{dU}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \mu V dx dy dz. \quad (2)$$

Um mit Hilfe dieser Gleichung das oben ausgesprochene Theorem zu beweisen, unterscheiden wir folgende Fälle:

1) Aus dieser Gleichung folgt als ein besonderer Fall die Nr. (3) in der angeführten Stelle von Green, welche entsteht, wenn ein endlicher Theil der Masse μ in einen Punkt vereinigt wird, in welchem dann auch die Differentialcoefficienten, ebenso wie die Dichtigkeit der Masse unendlich werden.



1) wenn der Leiter S in allen seinen Theilen dieselbe Leitungsfähigkeit k besitzt.

Wir machen in diesem Falle das U der Gleichung (2) gleich der Potentialfunction der Elektrizität, welche entsteht, wenn das Flächenelement a elektromotorisch wirkt, V gleich der anderen, welche entsteht, wenn b wirksam ist. Dann ist μ überall gleich Null, ausser in der elektrischen Doppelschicht des Flächenelements a , und ν überall gleich Null, ausser in der Doppelschicht von b . Bezeichnen wir mit U_b und V_a den Werth dieser Functionen in den betreffenden Orten b und a , den Abstand der elektrischen Schichten von den Flächenelementen mit ε , und die Normale auf a nach Seite der positiven Belegung positiv gerechnet mit α , ebenso die auf b mit β , so ist der Werth von U innerhalb der positiv elektrischen Belegung von b gleich:

$$U_b + \varepsilon \frac{dU}{d\beta},$$

innerhalb der negativen:

$$U_b - \varepsilon \frac{dU}{d\beta},$$

der Werth von V innerhalb der positiven Belegung von a gleich:

$$V_a + \varepsilon \frac{dV}{d\alpha},$$

innerhalb der negativen:

$$V_a - \varepsilon \frac{dV}{d\alpha}.$$

Ist die Dichtigkeit der positiv elektrischen Belegung auf a wie auf b gleich $+A$, die der negativen gleich $-A$, und bezeichnen wir in den folgenden Gleichungen mit a und b die Grösse der Flächenelemente, so reduciren sich die dreifachen Integrale der Gleichung (2) respectiv auf:

$$2A\varepsilon b \frac{dU}{d\beta}$$

und:

$$2A\varepsilon a \frac{dV}{d\alpha}.$$

Die Oberflächen-Integrale jener Gleichung werden gleich Null, weil nach Kirchhoff's zweiter Bedingung für die Stromver-

theilung an der freien Oberfläche die Werthe von dU/dn und dV/dn überall gleich Null sein müssen. Die Gleichung (2) reducirt sich also in diesem Falle auf:

$$-8\pi A\varepsilon b \frac{dU}{d\beta} = -8\pi A\varepsilon a \frac{dV}{d\alpha}.$$

$$\text{Daher ist auch: } -kb \frac{dU}{d\beta} = -ka \frac{dV}{d\alpha}.$$

Diese beiden Grössen sind aber die durch a und b in der Zeiteinheit fliessenden Elektrizitätsmengen, deren Gleichheit bewiesen werden sollte.

2) Wenn der Leiter aus zwei Theilen S und S_1 besteht, deren einer die Leitungsfähigkeit k , der andere k_1 hat, und beide Flächenelemente a und b in S liegen.

U und V behalten ihre Bedeutung wie im vorigen Falle für das Leiterstück S , die entsprechenden Potentialfunctionen in S_1 bezeichnen wir mit u und v . Wie im vorigen Falle reduciren sich die dreifachen Integrale der Gleichung (2) innerhalb S auf:

$$2A\varepsilon b \frac{dU}{d\beta}$$

und:

$$2A\varepsilon a \frac{dV}{d\alpha}.$$

Innerhalb S_1 , welches gar keine elektromotorischen Kräfte, also auch keine elektrischen Massen enthält, werden sie gleich Null. Die einfachen Integrale jener Gleichung werden aber nicht mehr gleich Null, da an dem Theile der Grenzoberflächen, wo sich S und S_1 berühren, die Grössen dU/dn , dV/dn , du/dn_1 und dv/dn_1 nicht mehr gleich Null werden, wie an der freien Oberfläche der Fall ist. Zwischen diesen Grössen bestehen aber in sämtlichen Punkten der Grenzfläche folgende Beziehungen:

$$k \frac{dU}{dn} + k_1 \frac{du}{dn_1} = 0,$$

$$k \frac{dV}{dn} + k_1 \frac{dv}{dn_1} = 0,$$

$$U = u \text{ und}$$

$$V = v.$$



Daraus folgt, dass auch:

$$\left. \begin{aligned} k, \int V \frac{dU}{dn} d\omega, &= -k, \int v \frac{du}{dn} d\omega, \\ k, \int U \frac{dV}{dn} d\omega, &= -k, \int u \frac{dv}{dn} d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wobei die Integrale über die ganze Grenzfläche, oder, was 357 damit einerlei ist, über die ganze Oberfläche der betreffenden Leiterstücke S und S_1 , auszudehnen sind.

Die Gleichung (2) verwandelt sich demgemäss für S und S_1 beziehlich in:

$$\left. \begin{aligned} \int U \frac{dV}{dn} d\omega, - 8\pi A \varepsilon b \frac{dU}{d\beta} &= \int V \frac{dU}{dn} d\omega, - 8\pi A \varepsilon a \frac{dV}{d\alpha} \\ \int u \frac{dv}{dn} d\omega, &= \int v \frac{du}{dn} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Multipliziert man die erstere dieser Gleichungen mit k , die zweite mit k_1 , addirt sie und berücksichtigt dabei die Gleichungen (3), so erhält man wieder:

$$-k, b \frac{dU}{d\beta} = -k, a \frac{dV}{d\alpha}.$$

d. h. die beziehlich durch a und b fliessenden Elektricitätsmengen sind sich gleich, was zu beweisen war.

3) Wenn der Leiter aus zwei Stücken S und S_1 von verschiedener Leitungsfähigkeit k , und k_1 besteht, und das Flächenelement a in S , b in S_1 liegt.

In diesem Falle ist die Grösse μ der Gleichung (2) überall gleich Null, ausser in der Belegung von a im Leiter S , die Grösse ν überall gleich Null, ausser in der Belegung von b im Leiter S_1 . Von den dreifachen Integralen bleibt also im Leiter S , nur eins bestehen mit dem Werthe:

$$2A \varepsilon a \frac{dV}{d\alpha},$$

im Leiter S_1 , auch eins mit dem Werthe:

$$2A \varepsilon b \frac{dU}{d\beta}.$$

Die Gleichungen (3) des vorigen Falles bestehen auch in diesem unverändert.

Die Gleichung (2) für S und S_1 reducirt sich betreffend auf:

$$\left. \begin{aligned} \int U \frac{dV}{dn} d\omega, &= \int V \frac{dU}{dn} d\omega, - 8\pi A \varepsilon a \frac{dV}{d\alpha} \\ \int u \frac{dv}{dn} d\omega, - 8\pi A \varepsilon b \frac{dU}{d\beta} &= \int v \frac{du}{dn} d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Multipliziert man die erstere dieser Gleichungen mit k , die zweite mit k_1 , und addirt sie mit Berücksichtigung der Gleichungen (3), so erhält man:

$$-k, b \frac{dU}{d\beta} = -k, a \frac{dV}{d\alpha}.$$

Die beiden letzteren Grössen sind wieder die durch b und a fliessenden Elektricitätsmengen.

Man sieht leicht ein, dass dieselbe Art des Beweises auf drei oder mehr Stücke von verschiedener Leitungsfähigkeit anzuwenden sein würde, so dass das oben hingestellte Theorem als allgemein gültig betrachtet werden kann.

Seine hauptsächlichste Anwendung erhält dieses Theorem bei solchen Aufgaben, wo das körperlich ausgedehnte Leitesystem mit einem Galvanometer in Verbindung gesetzt ist, in dessen linearer Leitung man die Stromstärke bestimmen will. Ist man nämlich im Stande zu bestimmen, in welcher Weise ein im Galvanometerdraht erregter Strom sich in dem körperlichen Leiter vertheilt, so kann man mit Hülfe unseres Satzes auch die Stärke des Galvanometerstromes bestimmen, welcher durch jede beliebige Vertheilung von elektromotorischen Kräften im körperlichen Leiter hervorgebracht wird, ohne dass man nöthig hat, die Vertheilung der Ströme in dem letzteren zu kennen. Jedes einzelne Element a einer elektromotorischen Fläche lässt so viel Elektricität durch den Galvanometerdraht fliessen, als durch es selbst fliessen würde, wenn seine elektromotorische Kraft in diesem Drahte angebracht wäre. Summirt man die Wirkungen sämtlicher elektromotorischen Flächenelemente, deren jede einzelne in der angegebenen Weise zu finden ist, so bekommt man den ganzen Strom im Galvanometer.

Das besprochene Theorem ergänzt die Anwendbarkeit des Princips von der elektromotorischen Oberfläche. Bei der Ver-



bindung eines elektromotorisch wirksamen körperlichen, und eines linearen Leiters können wir uns die den ersteren durchkreisenden Ströme zusammengesetzt denken aus einem System *A*, wie es die elektromotorischen Kräfte vor Anlegung des Galvanometerdrahtes erregen, und aus einem System *B*, welches der Vertheilung eines den Draht durchkreisenden Stromes entspricht. Mittels des Princip's von der elektromotorischen Oberfläche können wir die elektromotorische Kraft des Galvanometerstromes ermitteln, wenn wir *A*, aber nicht *B* kennen, und mittels des zuletzt bewiesenen Satzes die Intensität des Galvanometerstromes, wenn wir *B* kennen, aber nicht *A*.

V. Experimentelle Prüfung.

Die bisher theoretisch abgeleiteten Sätze lassen sich in so weit durch Versuche bestätigen, als dabei nur Stromstärken in linearen Leitern zu messen sind. Als körperlichen Leiter wählte ich für diese Versuche einen soliden Cylinder von Bunsen'scher Kohle, $3\frac{1}{4}$ Zoll lang und 2 Zoll dick, von nicht ganz regelmässiger Form und, wie die Versuche ergaben, von sehr ungleichmässigem Widerstande in verschiedenen Theilen. Derselbe wurde horizontal auf einem Brettchen befestigt, und auf dem nach oben gekehrten Theile seiner cylindrischen Fläche kittete ich vier kleine Pappringe fest, so dass dadurch vier Näpfchen zur Aufnahme von Quecksilber gebildet wurden, deren Boden aus Kohle, und deren Seitenwände aus Pappe bestanden. Die Näpfchen standen nahe hin in einer geraden Linie, und in gleichen Abständen von einander, sie sind im Folgenden der Reihe nach mit Buchstaben *a*, *b*, *c* und *d* bezeichnet. Durch sie geschah die Zuleitung und Ableitung der Ströme. Der Versuch, Kupfervitriollösung in Glasgefässen mit kupfernen Elektroden als körperlichen Leiter zu benutzen, missglückte, weil die Polarisation der Elektroden, die zwar gering genug ist, um bei anderen Versuchen vernachlässigt zu werden, bei den hier vorkommenden schwachen abgeleiteten Strömen sehr störend sich bemerklich machte. Metallstücke, welche nach drei Dimensionen beträchtliche Ausdehnungen haben, leiten wiederum zu gut im Vergleich mit den Drahtleitungen der Batterie und des Galvanometers, so dass die Unterschiede

der elektrischen Spannungen in ihnen, und demgemäss auch die abgeleiteten Ströme, zu schwach werden. Die Bunsen'sche Kohle war von beiden Uebelständen frei.

Die Messung der Stromintensitäten im Galvanometerdrahte geschah mit Hilfe eines magnetisirten Stahlspiegels, wie es W. Weber vorgeschlagen hat. Dasselbe hing innerhalb eines dicken kupfernen Gehäuses, so dass seine Schwingungen sehr stark gedämpft wurden, und seine Ablenkungen wurden in bekannter Weise durch Beobachtung der scheinbaren Bewegung des Spiegelbildes einer 2,4 m entfernten Scale gemessen. Die Ablenkungen überstiegen nicht vier Winkelgrade, so dass ihre Tangenten den Stromintensitäten proportional zu setzen waren.

Die erste Beobachtungsreihe ist bestimmt das Theorem Abschnitt II. Nr. 4 zu prüfen, wonach ein körperlicher zusammengesetzter Leiter, der in zwei bestimmten Punkten seiner Oberfläche abgeleitet wird, bei verschiedenem Widerstande des Ableitungskreises genau ebenso starke abgeleitete Ströme giebt, als ein linearer Leiter von einem gewissen constanten Widerstande und einer constanten elektromotorischen Kraft geben würde.

Die Pole eines Daniell'schen Elementes von grosser Oberfläche wurden mit den Quecksilbernäpfen *a* und *d* der Kohle verbunden, und in diesen Kreis ein mässiger Drahtwiderstand eingeschaltet, um zu verhindern, dass der Zustand des galvanischen Elementes unter dem Einflusse sehr starker Ströme sich zu schnell ändere. Diese Verbindung des Daniell'schen Elementes mit der Kohle stellte den abgeleiteten und elektromotorisch wirksamen Leiter *A* der obigen Theoreme dar. Die Leitung des abgeleiteten Kreises bestand aus einem bleibenden Drahtstücke *m* und drei einzuschaltenden Stücken, die wir *p*, *q* und *r* nennen wollen. In den folgenden Versuchen wird *p* als die willkürliche Einheit des Widerstandes gebraucht werden. Der sehr lange und feine Galvanometerdraht war als Nebenleitung des Stückes *m* eingefügt. Die Enden des abgeleiteten Kreises wurden in dieser Versuchsreihe stets mit den Näpfen *b* und *d* verbunden, in welchen letzteren Napf auch der eine Zuleitungsdraht der Batterie



tauchte. Das in b tauchende Ende des abgeleiteten Kreises empfing dagegen die Strömungen nur aus dem Kohlen-cylinder.

Die hier folgende Tafel enthält die Beobachtungen der Stromstärke im abgeleiteten Kreise, welche bei verschiedenen Einschaltungen gemacht wurden. Die letzteren sind in der zweiten Columne bezeichnet; o bedeutet, dass keine Einschaltung vorhanden war, der abgeleitete Kreis also nur aus dem Stücke m mit dem als Nebenleitung eingeschalteten Galvanometerdrahte bestand; $p+q$ bezeichnet, dass die beiden Stücke hinter einander eingeschaltet waren, so dass sie der Strom nach einander durchlief, $p \sim q$, dass sie neben einander sich befanden, und der Strom sich zwischen sie theilte. Die Stromintensitäten sind durch die der Ablenkung des Magneten entsprechenden Scalentheile angegeben. Die Correctionen, welche nöthig sind, um die abgelesenen Tangenten des doppelten Ablenkungswinkels in die doppelten Tangenten des einfachen Winkels zu verwandeln, sind angebracht.

Beobachtungsreihe I.

Nr.	Einschal- tung des ab- geleiteten Kreises	Stromstärke	Elektro- motorische Kraft A	Wesent- licher Wider- stand W	Be- rechnete Strom- stärke J	Differenz
1	o	300,26	341,49	1,1367		
	p	159,82				
	o	300,56				
2	q	240,49			240,50	- 0,01
3	o	298,48	341,82	1,1474		
	p	159,18				
	o	297,35				
4	$p+q$	139,78			139,98	- 0,20
5	o	294,78	337,85	1,1508		
	p	157,08				
	o	292,40				
6	$p \sim q$	245,30			245,59	- 0,29
7	o	292,01	332,09	1,1413		
	p	155,09				
	o	289,93				

Nr.	Einschal- tung des ab- geleiteten Kreises	Stromstärke	Elektro- motorische Kraft A	Wesent- licher Wider- stand W	Be- rechnete Strom- stärke J	Differenz
8	r	74,18			74,02	+ 0,16
9	o	288,90	321,07	1,1214		
	p	151,35				
	o	283,75				
10	$p \sim r$	169,59			169,69	- 0,10
11	o	282,66	323,62	1,1453		
	p	150,85				
	o	282,47				
12	$p+r$	59,49			59,37	+ 0,12
13	o	280,54	320,40	1,1423		
	p	149,56				
	o	280,44				

Die Rechnung ist in folgender Weise ausgeführt worden. Der abgeleitete Kreis wurde unserem Theorem gemäss betrachtet, als wäre er aus lauter linearen Leitern mit einer constanten elektromotorischen Kraft gebildet. Letztere nennen wir A , den Widerstand des supponirten linearen Kreises ohne Einschaltung W . Die mit o bezeichneten Beobachtungen geben den Werth von A/W , die mit p bezeichneten von $A/(W+p)$. Aus je drei solcher Beobachtungen, welche unter einer Nummer vereinigt sind, wurden die in der vierten und fünften Columne obiger Tafel stehenden Werthe von A und W berechnet. Aus den beiden mit o bezeichneten Beobachtungen wurde zu diesem Zwecke das Mittel genommen. Die gewonnenen Werthe von A und W dienten nun dazu, die Stromstärke bei Einschaltungen anderer Widerstände zu berechnen. So ist zum Beispiel in Versuch 2 obiger Tafel bei der Einschaltung q die Stromstärke $A/(W+q)$. Für A und W wurden die Mittel der Werthe genommen, welche aus den Versuchen Nr. 1 und Nr. 3 berechnet waren, und so der als berechnete Stromstärke aufgeführte Werth in der sechsten Columne gewonnen. Die Werthe von q und r waren durch andere Beobachtungen bestimmt worden:

$$q = 0,2786p$$
$$r = 3,2801p.$$



Daraus ergibt sich nach bekannten Regeln:

$$p \sim q = 0,2179 p$$

$$p \sim r = 0,7663 p.$$

Die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung sind überall kleiner als $\frac{1}{100}$ der gemessenen Grösse, und kleiner als $\frac{1}{10}$ eines Scalentheiles, eine Uebereinstimmung, die wohl nicht grösser erwartet werden kann.

Bisher waren die Enden des abgeleiteten Kreises stets mit denselben zwei Näpfen b und d verbunden. Die nun folgende zweite Beobachtungsreihe hat zum Zwecke, die elektromotorischen Kräfte zu vergleichen, welche bei der Ableitung verschiedener Punkte der äusseren Oberfläche des körperlichen Leiters auf den ableitenden Bogen wirken. Das Princip von der elektromotorischen Oberfläche verlangt, dass die abgeleiteten Ströme solche seien, wie sie durch constante auf der Oberfläche der Kohle verbreitete elektromotorische Kräfte entstehen würden, und zwar können wir an einem beliebigen Punkte, z. B. im Napfe a , die Kraft der elektromotorischen Oberfläche (sowie die elektrische Spannung) gleich Null setzen. In einem durch die Näpfe a und b abgeleiteten Strome wirkt dann nur die elektromotorische Kraft von b , die wir mit s_b bezeichnen wollen und in ähnlicher Weise bestimmen können, wie es in der ersten Beobachtungsreihe geschehen ist. Ebenso ist die Grösse dieser Kraft im Punkte c und d , d. h. s_c und s_d zu bestimmen. Nennen wir nun A_{bc} die elektromotorische Kraft im abgeleiteten Kreise, wenn dessen Enden mit den Näpfen b und c verbunden sind, und die Intensität eines von b durch den Bogen nach c gehenden Stromes positiv gerechnet wird, A_{bd} und A_{cd} die entsprechenden elektromotorischen

³⁶⁴ Kräfte bei Verbindung von b mit d und von c mit d , so ist nach dem Princip von der elektromotorischen Oberfläche:

$$A_{cd} = s_c - s_d$$

$$A_{bd} = s_b - s_d$$

$$A_{bc} = s_b - s_c$$

also:

$$A_{bc} + A_{cd} = A_{bd}.$$

Diese Form des Theorems lässt sich durch den Versuch bestätigen. Die Zusammensetzung des Kreises der Batterie und des abgeleiteten Kreises blieb dieselbe wie in der ersten Versuchsreihe, und es wurden die Stromstärken theils ohne Einschaltung (bezeichnet mit o), theils mit Einschaltung des Stückes p beobachtet. In der zweiten Columne der folgenden Tafel sind die Quecksilbernäpfe bezeichnet, mit denen die Enden des ableitenden Kreises in Verbindung gesetzt waren. Aus je drei unter einer Nummer zusammengestellten Beobachtungen wurde wieder die entsprechende elektromotorische Kraft berechnet, indem ich aus den beiden mit o bezeichneten Beobachtungen das Mittel nahm, ganz wie bei der vorigen Versuchsreihe. Die gefundenen Werthe der elektromotorischen Kraft sind in der letzten Columne der Tafel verzeichnet.

Beobachtungsreihe II.

Nr.	Quecksilbernäpfe	Einschaltung	Stromstärke	Elektromotorische Kraft
1	$b d$	o	297,94	340,86
		p	158,88	
		o	297,25	
2	$c d$	o	207,01	236,51
		p	110,24	
		o	203,97	
3	$b d$	o	296,16	338,46
		p	157,98	
		o	296,36	
4	$b c$	o	89,81	102,97
		p	48,00	
		o	90,01	
5	$b d$	o	296,01	339,74
		p	158,08	
		o	295,27	
6	$c d$	o	204,98	233,62
		p	109,09	
		o	204,33	
7	$b d$	o	294,68	335,78
		p	156,88	
		o	294,23	



Die Reihe ist so geordnet, dass man nur das Mittel der entsprechenden Beobachtungen zu nehmen hat, um sie alle auf einen Zeitpunkt gleicher Stromstärke zu reduciren. Die Mittel für die Werthe der elektromotorischen Kräfte sind:

$$A_{bd} = 338,71$$

$$A_{cd} = 235,06;$$

addirt man zu der letzteren Grösse den Werth von:

$$A_{bc} = 102,97,$$

so erhält man:

$$A_{bc} + A_{cd} = 338,03,$$

fast genau übereinstimmend mit dem Werthe von A_{bd} , wie es das Theorem verlangt.

Ist bei diesen Versuchen der ableitende lineare Zweig von einem so grossen Widerstande, dass dagegen der des körperlichen Leiters verschwindet, so kann man die Beobachtungsmethode sehr vereinfachen. Da sich dann nämlich bei der Anlegung an verschiedenen Stellen der Widerstand des ableitenden Bogens nicht merklich ändert, so ist seine Stromstärke direct proportional der gesuchten elektromotorischen Kraft, mit welcher der körperliche Leiter auf ihn wirkt. Ändert sich der Zustand der Batterie, so kann sich wohl der absolute Werth der gesuchten elektromotorischen Kräfte ändern, muss dabei aber stets der Intensität des Batteriestromes proportional bleiben. Sucht man also das Verhältniss je zweier solcher elektromotorischen Kräfte, so muss dies eine constante, von den Veränderungen der Batterie unabhängige Zahl sein.

Ich stellte deshalb noch eine Beobachtungsreihe nach folgender Methode an. Die Widerstände des ableitenden Drahtes und des Batteriezweiges wurden noch grösser gemacht als in der vorigen Reihe, obgleich schon dort die Unterschiede des Widerstandes im ableitenden Kreise bei verschiedenen Verbindungen desselben verschwinden. Aus den Zahlen der zweiten Tafel berechnet sich derselbe nämlich im Mittel:

$$\text{für die Verbindung } bd = 1,1443$$

$$\text{" " " } cd = 1,1434$$

$$\text{" " " } bc = 1,1453.$$

Die Poldrähte des Daniell'schen Elementes wurden mit den Näpfen a und d in Verbindung gebracht, und der Spannungsunterschied oder die elektromotorische Kraft dieser beiden Punkte gleich 100 gesetzt, die übrigen elektromotorischen Kräfte mussten sich zu dieser dann wie die entsprechenden Stromstärken verhalten.

Ich lasse hier zunächst die Bestimmung eines einzelnen solchen Verhältnisses folgen, um die Anordnung des Versuches daran zu zeigen; von den übrigen werde ich nur die Resultate hersetzen.

Beobachtungsreihe III.

Ruhestand des Magneten	501,1
Strom ad	871,1
Ruhestand	501,1
Strom ab	752,9
Ruhestand	500,5
Strom ad	870,5
Ruhestand	500,0

Daraus finden wir die erste Ablenkung:

durch den Strom ad gleich 370,0, corrigirt 367,80

die zweite gleich 370,25, corrigirt 369,05

Mittel 367,92.

Ablenkung durch den Strom ab 252,1, corrigirt 251,41.

Also die elektromotorische Kraft für ab gleich:

$$\frac{251,41}{367,92} \cdot 100 = 68,335.$$

Ganz in derselben Weise sind die elektromotorischen Kräfte verschiedener Verbindungsstellen bestimmt worden, welche ich hier folgen lasse.

Nr.	Quecksilber-näpfe	Elektromotorische Kraft, beobachtet	Mittel	Elektromotorische Kraft, berechnet	Differenz
1		78,61			
9	a, c	78,36	78,59	78,87	- 0,28
10		78,81			
4		20,98			
5	c, d	21,00	20,89	21,13	- 0,24
12		20,70			



Nr.	Quecksilber- näpfe	Elektromo- torische Kraft beobachtet	Mittel	Elektromo- torische Kraft berechnet	Differenz
2 8	<i>a, b</i>	68,33 68,42	68,37	68,29	+ 0,08
7 11	<i>b, d</i>	31,73 31,75	31,77	31,71	+ 0,04
3 6 13	<i>b, c</i>	10,59 10,75 10,51	10,61	10,58	+ 0,03

Die Ziffern der ersten Columne bezeichnen die Reihenfolge, in welcher die Versuche angestellt worden sind. In der zweiten sind die Quecksilbernäpfe bezeichnet, mit denen die Enden des ableitenden Zweiges verbunden waren. Die dritte Columne enthält unter der Bezeichnung von beobachteten elektromotorischen Kräften diejenigen, welche unmittelbar aus den Versuchen in der oben ausgeführten Weise berechnet waren, die vierte deren Mittel. Der fünften liegt folgende Rechnung zum Grunde. Die fünf gemessenen Grössen müssen folgende Gleichungen erfüllen:

$$A_{ab} + A_{bc} + A_{cd} = 100$$

$$A_{ab} + A_{bc} = A_{ac}$$

$$A_{bc} + A_{cd} = A_{bd}$$

Sind also beliebige zwei von ihnen bekannt, so sind dadurch auch die anderen drei zu berechnen. Die Mittel der Beobachtungen erfüllen diese Gleichungen fast, aber nicht vollkommen genau, denn substituirt man sie in denselben, so geben sie:

368 in der ersten links: 99,87, rechts: 100
in der zweiten links: 78,98, rechts: 78,59
in der dritten links: 31,50, rechts: 31,75.

Doch sind die Unterschiede so klein, dass sie Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können. Ich habe nun nach der Methode der kleinsten Quadrate diejenigen Werthe der fünf Grössen bestimmt, welche jene drei Gleichungen streng erfüllen, und sich am nächsten an die Beobachtungen anschliessen, und diese als die berechneten Werthe der elektromotorischen Kraft

in die Tafel aufgenommen. Man sieht, dass ihre Abweichungen von den Mittelwerthen gering sind.

Somit ist der Satz von der elektromotorischen Oberfläche, wenigstens für angelegte lineare Leiter, auch durch die Versuche bestätigt worden. Ich schliesse endlich noch eine Beobachtungsreihe an zur Prüfung des Theorems von der gleichen gegenseitigen Wirkung elektromotorischer Flächenelemente.

Um das Problem zu prüfen, müssen wir die Stromstärke in beiden Elementen bestimmen können, und dies ist nur möglich, wenn beide in linearen Leitern liegen. Wir werden also den Fall untersuchen, wo an einen körperlichen Leiter zwei lineare *B* und *C* angelegt sind. Nach dem aufgestellten Theorem muss eine elektromotorische Kraft, welche in *B* angebracht wird, in *C* dieselbe Stromstärke hervorbringen, welche in *B* eintreten würde, wenn jene Kraft in *C* angebracht wäre. Um die beiden Stromstärken vergleichen zu können, muss man also einmal die Batterie in *B* und das Galvanometer in *C*, dann wieder erstere in *C*, letzteres in *B* anbringen, und da sich dabei der Widerstand der betreffenden Stromeszeige nicht ändern darf, so müssten Batterie und Galvanometer denselben Widerstand haben. Diese Bedingung würde wegen des wechselnden Zustandes der Batterie ziemlich schwer zu erfüllen sein. Glücklicherweise können wir uns ihrer Erfüllung ungestraft entziehen, wenn wir den Widerstand beider zu vertauschenden Leitungen so gross machen, dass die Widerstände des übrigen Theiles der Leitung dagegen verschwinden. Während nämlich im Allgemeinen der obige Satz nur gilt, wenn die beiden vertauschten Zweige denselben Widerstand *W* haben, so bleibt er bei sehr grossen Widerständen der beiden Zweige doch auch bestehen, wenn der des Galvanometers geändert, und gleich *w* gemacht wird. Dabei ändert sich bei verschiedenen Verbindungsweisen des Galvanometerzweiges mit dem körperlichen Leiter seine Stromintensität stets in demselben Verhältnisse *W/w*, und hatte sie also beim Widerstande *W* gleiche Werthe, so wird sie solche auch noch beim Widerstande *w* haben.

Als körperlicher Leiter diene wieder der bisher gebrauchte Kohlenzylinder. Der Galvanometerzweig bestand nur aus dem



sehr langen und feinen Galvanometerdrahte, der Batteriezweig aus vier Daniell'schen Elementen, säulenartig verbunden, mit Einschaltung einer Drahtspirale, deren Widerstand den des in der dritten Beobachtungsreihe gebrauchten ableitenden Zweiges noch übertraf, so dass jedenfalls die Widerstände der Kohle gegen die der Zweige verschwindend klein waren.

Die folgenden Beobachtungen beweisen, dass die Stromstärke im Galvanometer unverändert bleibt, wenn seine Verbindungsstellen und die des Batteriezweiges mit der Kohle wechselt werden. In der zweiten Columne der Tafel sind die Quecksilbernäpfe bezeichnet, in welche die Enden der Batteriedrähte, in der dritten die, in welche die Enden des Galvanometerdrahtes tauchten. In der fünften bedeutet die Bezeichnung $B_{ab} G_{cd}$, dass die Batterie mit den Näpfen a und b , das Galvanometer mit denen c und d verbunden war. Es sind nicht alle Combinationen erschöpft, welche sich herstellen liessen, doch glaube ich genug beobachtet zu haben, um die Richtigkeit des zu prüfenden Satzes ausser Zweifel zu stellen.

370

Beobachtungsmethode IV.

Nr.	Batterie	Galvano- meter	Stromstärke	Mittel
1	$a d$	$b c$	90,25	$B_{ad} G_{bc} = 90,44$ $B_{bc} G_{ad} = 90,28$
	$b c$	$a d$	90,45	
	$a d$	$b c$	90,9	
	$b c$	$a d$	90,5	
	$a d$	$b c$	90,5	
	$b c$	$a d$	90,05	
	$a d$	$b c$	90,1	
	$b c$	$a d$	90,1	
2	$a c$	$b d$	83,15	$B_{ac} G_{bd} = 83,10$ $B_{bd} G_{ac} = 83,17$
	$b d$	$a c$	83,0	
	$a c$	$b d$	83,05	
	$b d$	$a c$	83,35	
3	$c d$	$a b$	7,1	$B_{cd} G_{ab} = 7,1$ $B_{ab} G_{cd} = 6,93$
	$a b$	$c d$	6,4	
	$c d$	$a b$	7,1	
	$a b$	$c d$	7,75	
	$a b$	$c d$	7,7	
4	$a d$	$b d$	102,8	$B_{ad} G_{bd} = 103,15$ $B_{bd} G_{ad} = 103,20$
	$b d$	$a d$	102,9	
	$a d$	$b d$	103,5	
	$b d$	$a d$	103,5	

Nr.	Batterie	Galvano- meter	Stromstärke	Mittel
5	$c d$	$a d$	73,0	$B_{cd} G_{ad} = 73,05$ $B_{ad} G_{cd} = 72,67$
	$a d$	$c d$	72,7	
	$c d$	$a d$	73,1	
	$a d$	$c d$	72,65	
6	$c d$	$b d$	75,45	$B_{cd} G_{bd} = 75,67$ $B_{bd} G_{cd} = 75,70$
	$b d$	$c d$	75,4	
	$c d$	$b d$	75,9	
	$b d$	$c d$	76,0	
7	$b c$	$a c$	93,45	$B_{bc} G_{ac} = 93,47$ $B_{ac} G_{bc} = 93,37$
	$a c$	$b c$	93,25	
	$b c$	$a c$	93,5	
	$a c$	$b c$	93,5	
8	$d c$	$a c$	65,1	$B_{dc} G_{ac} = 65,12$ $B_{ac} G_{dc} = 65,27$
	$a c$	$d c$	65,5	
	$d c$	$a c$	65,15	
	$a c$	$d c$	65,05	
9	$b c$	$d c$	62,55	$B_{bc} G_{dc} = 62,55$ $B_{dc} G_{bc} = 62,9$
	$d c$	$b c$	62,9	

VI. Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche. 371

Die thierischen Theile, Muskeln und Nerven, stellen körperlich ausgedehnte Leiter dar, in deren Innerem überall elektromotorische Kräfte verbreitet sind; denn jeder kleinste noch reizbare Theil eines Muskels ist nach den Untersuchungen von E. du Bois-Reymond fähig, elektrische Ströme hervorzubringen. Bei den darüber anzustellenden Versuchen werden die thierischen Theile in geeigneter Weise mit einem Galvanometer verbunden, und der in den Draht dieses Instrumentes abgeleitete Stromzweig ist vorläufig der einzige Theil jener elektrischen Wirkungen, welcher der directen Beobachtung und Messung zugänglich ist. Mit den empirisch gefundenen Gesetzen seiner Erscheinung müssen die Folgerungen aus den theoretischen Vorstellungen verglichen werden, welche wir uns über die Anordnung elektromotorischer Theile im Innern des Muskels oder Nerven gebildet haben. Dafür waren die bisherigen theoretischen Kenntnisse der Stromvertheilung in Körpern nicht ausreichend, daher du Bois-Reymond in seinem ausgezeichneten Werke über thierische Elektrizität in den Abschnitten, welche die hypothetischen Vertheilungsweisen elektro-



motorischer Kräfte im Innern der Muskeln behandeln, sich vielfältig mit scharfsinnig combinirten Analogien und Wahrscheinlichkeitsgründen begnügen musste, um zum Ziele zu gelangen. Unsere Theoreme setzen uns jetzt in den Stand, strengere und kürzere Ableitungen für die Hauptpunkte seiner theoretischen Betrachtungen zu geben, welche in allen wesentlicheren Punkten mit den von ihm aufgestellten Sätzen übereinstimmen. Dass in einigen weniger wesentlichen Punkten Abweichungen vorkommen, ist unter diesen Umständen nicht zu verwundern, und kann dem Lobe, welches du Bois' Scharfsinn gebührt, keinen Abbruch thun, um so weniger als diese Punkte solche sind, in denen die Versuche an den Kupferzinkschematen seine Schlüsse zu bestätigen schienen.

Die Versuche ergeben unmittelbar, dass jedes Stück einer ³⁷² einzelnen Muskelfaser in einem angelegten unwirksamen leitenden Bogen Ströme erregt, welche von ihrer prismatischen oder cylindrischen Oberfläche (ihrem Längsschnitte) zu ihren Endflächen (Querschnitten) hingehen. Denken wir uns also die elektromotorische Oberfläche eines solchen Faserstückes an die Stelle seiner inneren Kräfte gesetzt, so muss diese am Längsschnitt nach aussen positiv, an den Querschnitten negativ sein. Mit einer kleinen Erweiterung der von du Bois angewendeten Bezeichnungsweise wollen wir eine solche Anordnung elektromotorischer Kräfte, welche eine elektromotorische Oberfläche giebt, an der zwei unter sich gleichartige Pole der Aequatorialgegend entgegengesetzt sind, die peripolare nennen. Die Muskelprimitivfasern sind nun allerdings die kleinsten Theile des Muskels, welche wir mechanisch abtrennen, und allenfalls noch auf ihr elektromotorisches Verhalten untersuchen können, auch zeigt selbst das Mikroskop keine weiteren Unterabtheilungen im Innern von frischen Fasern¹⁾; indessen machen doch andere elektrische Erscheinungen, namentlich die ungeheure Schnelligkeit, mit der in der negativen Stromesschwankung und im elektrotonischen Zustande die elektromotorischen Kräfte der Muskeln und Nerven ihre Stärke und Richtung wechseln können, es wahrscheinlich, dass die kleinsten elektro-

1) Diese sind später gefunden worden. (1881.)

motorischen Elemente noch viel kleiner als der Durchmesser der Muskel- und Nervenfasern sind, und eine grosse Beweglichkeit besitzen. Deshalb führt du Bois die elektrischen Wirkungen der thierischen Theile auf peripolar elektromotorische Molekeln von verschwindend kleiner Grösse zurück, welche, umgeben von einer indifferenten leitenden Substanz, im Inhalt der Fasern in gleichen Abständen regelmässig vertheilt sind, so dass ihre Axe der Axe der Faser parallel ist. Mögen wir nun bis auf die Primitiv-Fasern oder bis auf die hypothetischen elektromotorischen Molekeln zurückgehen, jedenfalls müssen wir uns den ganzen Muskel aus unzähligen, sehr kleinen, regelmässig geordneten Theilen zusammengesetzt denken, deren ³⁷³ innere elektromotorische Kräfte wir für unseren Zweck durch eine elektromotorische Fläche mit peripolarer Anordnung, positivem Aequator und negativen Polen ersetzen können. Die elektrischen Ströme, welche der ganze Muskel erregt, sind nun aus den Wirkungen dieser elektromotorischen Flächen herzuleiten.

Legen wir zwei gleiche peripolare Elemente mit zweien ihrer Polflächen aneinander, so stossen daselbst zwei gleich starke elektromotorische Flächen, aber in entgegengesetzter Richtung, die negative Seite an die negative, zusammen, und heben deshalb ihre Wirkungen gegenseitig auf. Legen wir zwei solche Elemente mit ihrem Längsschnitt aneinander, so stossen wieder gleich starke Theile der elektromotorischen Oberflächen, und wieder in entgegengesetzter Richtung, dieses Mal aber mit den positiven Seiten zusammen, und heben wiederum ihre Wirkungen gegenseitig auf. Setzen wir also einen ganzen Muskel oder Nerven regelmässig aus solchen Elementen zusammen, indem wir immer Querschnitt an Querschnitt, und Längsschnitt an Längsschnitt fügen, so heben sich im Innern des Ganzen alle elektromotorischen Flächen gegenseitig auf, und es bleiben nur diejenigen bestehen, welche der Aussenfläche des Ganzen angehören. Wir bekommen also dadurch unmittelbar die elektromotorische Oberfläche des Ganzen, welche nach aussen hin alle Kräfte der inneren Theile ersetzt. Sie ist überall, wo nur Querschnitte der Fasern zu Tage liegen (am natürlichen und künstlichen Querschnitte des Ganzen) aus den negativen Polarflächen der Elemente, im natürlichen oder



künstlichen Längsschnitt des Ganzen dagegen aus den positiven Aequatorialflächen der Elemente zusammengesetzt. Deshalb muss, wie der Versuch bestätigt, jede Stelle des Längsschnittes, durch einen angelegten Bogen mit einer des Querschnittes verbunden, im Bogen einen Strom geben, der von jener zu dieser geht.

So ergibt sich also sehr einfach die Erklärung der Ströme zwischen Längsschnitt und Querschnitt. Anders ist es mit denjenigen, welche du Bois zwischen verschiedenen Punkten des Querschnittes, und ebenso zwischen verschiedenen Punkten des Längsschnittes gefunden hat; sie erklären sich nicht aus den bisher angenommenen theoretischen Grundlagen. Diese Ströme haben dieselbe Richtung wie die bisher besprochenen, d. h. sie sind im ableitenden Bogen von der Mitte des Längsschnittes zu seinem Rande und vom Rande des Querschnittes zu seiner Mitte gerichtet, sind aber sehr viel schwächer als die zwischen Längsschnitt und Querschnitt. Wir wollen für unsere Erörterung annehmen, ein cylindrisches Bündel paralleler Fasern habe durch zwei senkrecht gegen seine Axe geführte Schnitte zwei reine Querschnitte erhalten, in denen nur die negativen Polarflächen der Elemente zu Tage liegen, ebenso wie der Cylindermantel ganz aus den positiven Aequatorialflächen zusammengesetzt ist. Jede Polarfläche eines einzelnen Elementes kann nun zwar Flächenelemente von verschieden intensiver elektromotorischer Kraft darbieten, muss aber in jeder Beziehung jeder anderen gleich sein, so dass die mittlere elektromotorische Kraft des Gesamtquerschnittes an allen Stellen dieselbe sein muss. Ebenso verhält es sich mit dem Längsschnitt des Ganzen. Innerhalb der elementaren Aequatorialflächen können wohl verschiedene Grössen der elektromotorischen Kraft vorkommen, die mittlere Grösse derselben muss aber überall dieselbe sein. Ist nun die Breite der an den Muskel gelegten Endflächen des leitenden Bogens so gross, dass sie eine sehr grosse Menge von elementaren Abtheilungen des Muskels gleichzeitig berühren, und werden sie beide entweder an reinen Querschnitt oder an reinen Längsschnitt angelegt, so kann kein Strom entstehen, weil die mittlere elektromotorische Kraft jeder Berührungsfläche gleich gross ist, und

beide entgegengesetzte Ströme im Bogen hervorzurufen streben, sich also gegenseitig vollständig im Gleichgewicht halten müssen.

Es könnte hierbei zweifelhaft erscheinen, ob es erlaubt sei, die mittlere elektromotorische Kraft für die verschiedenen Grössen dieser Kraft zu substituieren, welche sich in jeder einzelnen Elementarabtheilung der Begrenzungsfläche vorfinden, selbst wenn diese Elementarabtheilungen gegen die Grösse des ganzen Muskels verschwindend klein sind. Deshalb lasse ich noch eine zweite Ableitung desselben Resultates folgen, welche aus dem Theorem von der gleichen gegenseitigen Wirkung elektromotorischer Flächenelemente hergenommen ist, und jenem Einwurfe nicht unterliegt. Man denke sich wiederum die elektromotorische Oberfläche des ganzen Faserbündels construirt. A und B mögen die Berührungsflächen der Galvanometerleitung mit zwei verschiedenen Stellen des Längsschnittes sein. Wir denken uns diese Flächen so breit, wie sie es in der That bei den Versuchen sind, dass sie unzählbar viele von den Aequatorialfeldern der Elementarabtheilungen des Muskels umfassen. Die Begrenzungsfläche eines jeden Elementes sei in zwei Abtheilungen getheilt, deren eine alle diejenigen Punkte dieser kleinen Fläche in sich begreift, deren elektromotorische Kraft stärker als eine gewisse bestimmte Grösse ist, die andere alle anderen Punkte, in denen das Gegentheil stattfindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich gewählter Punkt der Fläche A in eine der Abtheilungen von stärkerer elektromotorischer Kraft falle, ist dann offenbar überall in der ganzen Fläche A , auch an deren Rändern, dieselbe, und genau ebenso gross wie dieselbe Wahrscheinlichkeit in der Fläche B . Nehmen wir nun die Wirkungen der elektromotorischen Kräfte des Muskels suspendirt an, und dafür in dem Galvanometerdrahte eine solche Kraft angebracht, welche einen durch den Muskel sich vertheilenden Strom erregt, so folgt aus dem Theorem des Abschnittes IV, dass, wenn hierbei mehr Elektrizität durch die Abtheilungen stärkerer Kraft in der Fläche A , als durch dieselben der Fläche B fliesst, der Muskel im Galvanometer einen Strom von A nach B geben muss, im umgekehrten Falle umgekehrt. Nun hat aber jeder Stromesfaden, durch welche Stelle der Fläche A er auch in den Muskel eintreten, und durch welche von B er



auch austreten mag, in der einen die gleiche Wahrscheinlichkeit eine Abtheilung stärkerer Kraft zu treffen, wie in der anderen. Daraus folgt, dass durch die Abtheilungen stärkerer Kraft in *A* so viel Elektrizität fließen muss, wie in *B*, und daraus wieder, dass der Muskel im Galvanometerdrahte keinen Strom erregen kann.

Eine Ausnahme würde nur dann eintreten, wenn in einer der Flächen *A* oder *B* die Grenze des Längsschnittes läge, weil unmittelbar an dieser auch nur Grenztheile der Elementarfelder, d. h. Abtheilungen geringerer Kraft liegen würden, und daher die Wahrscheinlichkeit, in ein Feld stärkerer Kraft zu fallen, für die Punkte der Grenze gleich Null wird. Unter diesen Umständen muss, gemäss der eben gemachten Auseinandersetzung der Muskel im Galvanometer einen Strom erregen, welcher nach dem die Grösse des Längsschnittes berührenden Ende hingeht, ähnlich als wenn dieses schon den Querschnitt zu berühren anfänge.

Da diese Folgerungen mit den Versuchen an den Muskeln selbst in Widerspruch stehen, so ist daraus zu schliessen, dass noch Einflüsse hier in Betracht kommen, welche bisher nicht beachtet sind. Zwei Fragen, welche sich in dieser Hinsicht zunächst aufdrängen, sind folgende: Erstens ob die oberflächlichen Theile der thierischen Gebilde, welche der Eintrocknung, der Berührung der Luft und fremdartiger Flüssigkeiten ausgesetzt sind, ihre elektromotorischen Kräfte wohl ungeschwächt erhalten. Zweitens beziehen sich alle in dieser Abhandlung aufgestellten Theoreme nur auf solche elektromotorische Kräfte, welche von der Stromstärke unabhängig sind. Es fragt sich, ob dies bei denen der Muskeln der Fall ist. Natürlich können erst für diesen Zweck besonders angestellte Versuche entscheiden, ob eine und welche von diesen Möglichkeiten stattfindet. Ich bemerke noch, dass auch die aus Kupfer und Zink in Schwefelsäure zusammengesetzten schematischen Nachahmungen der Muskeln, welche du Bois-Reymond untersucht hat, ähnliche Abweichungen von der Theorie zeigten, wie die Muskeln. Aber diese haben inconstante elektromotorische Kräfte, und entsprechen deshalb nicht den Voraussetzungen unserer Theoreme.

Andere Abweichungen finden sich bei der Vergleichung³⁷⁷ der Stromeswirkungen von verschieden langen und dicken Muskeln. Die Kraft der elektromotorischen Oberfläche hängt ihrer Grösse nach nicht ab von der Zahl der vereinigten Elementarabtheilungen; der Theorie nach muss sie deshalb an grossen und kleinen Muskeln immer dieselbe sein. Beim Versuche hat du Bois-Reymond dagegen an längeren und an dickeren Muskeln eine grössere elektromotorische Kraft gefunden, was wahrscheinlich durch dieselben Umstände bedingt sein wird, welche die schwachen Ströme des Längsschnittes für sich, und des Querschnittes für sich hervorbringen.



XXVIII.

Ueber eine allgemeine Transformationsmethode der Probleme über elektrische Vertheilung.

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg.
Bd. II. S. 183–188 vom 8. December 1861 und S. 217 vom 30. Mai 1862.

Bei den Untersuchungen, welche sich auf die Vertheilung der Elektrizität, elektrischen Ströme, Wärmeströmung, des ¹⁸⁶ Magnetismus u. s. w. in und auf Kugeln beziehen, spielt eine besondere Beziehung je zweier Punkte zur Kugeloberfläche eine besondere Rolle. Man denke sich den Mittelpunkt einer Kugel vom Radius R im Mittelpunkte der Coordinaten gelegen, x, y, z seien diejenigen für einen beliebigen Punkt des Raumes, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dessen Entfernung vom Mittelpunkte. Man bestimme einen zweiten Punkt ξ, v, ζ so, dass er mit dem Punkte x, y, z und dem Kugelmittelpunkte in einer geraden Linie liege, und dass sei:

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + v^2 + \zeta^2} = \frac{R^2}{r},$$

also:

$$\xi = x \frac{R^2}{r^3}, v = y \frac{R^2}{r^3}, \zeta = z \frac{R^2}{r^3} \} \dots \dots (1)$$

Dann sind bekanntlich die Entfernungen irgend eines beliebigen Punktes auf der Kugeloberfläche von den beiden Punkten x, y, z und ξ, v, ζ im constanten Verhältnisse wie $R:\varrho$ oder wie $r:R$, und wenn im Punkte x, y, z die elektrische Masse M sich befindet, und auf der Kugel eine solche Vertheilung der Elektrizität eintritt, dass längs der ganzen Oberfläche ihr Po-

tential gleich dem der Masse M wird, so wirkt die elektrische Vertheilung auf der Kugelschale nach dem inneren und äusseren Raume hin so, als wäre alle Elektrizität einmal im Punkte x, y, z , das andere Mal im Punkte ξ, v, ζ concentrirt. Man hat deshalb auch den einen dieser Punkte als das elektrische Abbild des anderen in Bezug auf die Kugelschale bezeichnet.

Diese Beziehung beider Punkte erlaubt aber noch eine weitere Verallgemeinerung. Es sei $F_{x, y, z}$ eine beliebige Function der Coordinaten x, y, z , man setze in dieser Function statt jedes Punktes sein elektrisches Abbild, sodass man eine neue Function $\Phi_{\xi, v, \zeta}$ von ξ, v und ζ gewinne, und:

$$F_{x, y, z} = \Phi_{\xi, v, \zeta}$$

sei, so oft die Gleichungen (1) erfüllt sind, so zeigt sich, dass:

$$\frac{R^2}{r^5} \left[\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} \right] = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{R}{\varrho} \Phi \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{R}{\varrho} \Phi \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{R}{\varrho} \Phi \right).$$

So weit also die Function F die linke Seite dieser Gleichung gleich Null macht, soweit thut es für die entsprechenden Punkte ξ, v, ζ auch die Function $(R/\varrho) \Phi$. Jedem Theile des Raumes aber, wo es durch die Function F nicht geschieht, entspricht ein anderer Theil des Raumes, wo es durch die Function $(R/\varrho) \Phi$ nicht geschieht. Ist also F eine Potentialfunction elektrischer Massen, so ist $(R/\varrho) \Phi$ eine Potentialfunction anderer elektrischer Massen, welche die Abbilder der vorigen in Bezug auf die Kugel sind.

Die neue Function $(R/\varrho) \Phi$ wird discontinuirlich 1) im ¹⁸⁷ Punkte $\varrho = 0$, wenn nicht $\Phi_0 = F_\infty = 0$ ist; 2) in allen solchen Punkten, die die Abbilder discontinuirlicher Punkte von F sind. — Ebenso verhält es sich mit den ersten Differentialquotienten, denn es ist:

$$\left(\frac{dF}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 = \frac{R^4}{\varrho^4} \left[\left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dv} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{d\zeta} \right)^2 \right].$$

Die Function F ist discontinuirlich in Punkten und Linien, welche elektrische Massen enthalten, ihr Differentialquotient ist discontinuirlich in Flächen, welche mit einer Schicht Elektrizität bedeckt sind.

Ist also F die Potentialfunction von elektrischen Massen,



die in begrenzten Räumen, in Flächen, Linien, Punkten verbreitet sind, so ist $(R/\rho) \Phi$ die Potentialfunction von elektrischen Massen, welche in den Abbildern dieser Räume, Flächen, Linien, Punkte verbreitet sind, und einer Masse im Punkte $\rho = 0$.

Ist in einem Theile des Raumes oder auf einer Fläche $F = 0$, so ist in dem entsprechenden Abbilde dieses Raumes oder dieser Fläche $\Phi = 0$. Wenn also die Vertheilung der Elektrizität im Gleichgewichte auf einer Fläche gefunden ist, unter dem Einflusse gewisser anderer Massen, so giebt uns unsere Transformation die Lösung eines anderen Problems für das elektrische Gleichgewicht auf dem Abbilde jener Fläche.

Die Vertheilung der Elektrizität auf einer gewissen Fläche A kann gefunden werden für alle beliebig vertheilten elektrischen Massen, wenn die Vertheilung gefunden werden kann, welche unter dem Einflusse eines jeden beliebig gelegenen elektrischen Massenpunktes das Potential F längs der Fläche A gleich Null macht. Dann ist $F_\infty = 0$.

Ist diese allgemeine Aufgabe gelöst für die Fläche A , so kann sie vermöge unseres Problems auch für die Abbilder der Fläche A in Bezug auf eine beliebig gelegene Kugel stets gelöst werden.

Ist die allgemeine Aufgabe nur gelöst für einen Punkt, der im inneren Raume der geschlossenen Fläche A liegt, so giebt die Transformation die Lösung für den äusseren Raum des Abbildes, falls der Mittelpunkt der Kugel, auf die sich die Abbildungen beziehen, in das Innere von A verlegt ist, und umgekehrt.

Die allgemeine Aufgabe der Vertheilung ist gelöst:

1) Für unbegrenzte Kugelflächen und Ebenen, diese geben bei der Transformation wieder unbegrenzte Kugelflächen und Ebenen, also nichts Neues.

2) Für Ellipsoide und andere Flächen zweiten Grades. Diese geben bei der Transformation eine besondere Art von Flächen vierten Grades, und zwar drei Systeme von solchen, welche zu einander orthogonal sind, wie die drei Systeme der Flächen zweiten Grades, welche die bekannten elliptischen Coordinaten bilden.

3) Für kreisförmig begrenzte Ebenen und Kugelstücke.¹⁸⁸ Die einen werden durch unsere Transformation in die anderen übergeführt.

4) Dem Vortragenden ist es gelungen, das Problem zu lösen für Kanten, in denen zwei unendliche Ebenen unter beliebigem Winkel zusammenstossen; diese geben bei der Transformation linsenförmige Körper, von zwei sich schneidenden Kugelflächen begrenzt.

5) Das Problem ist gelöst für den inneren Raum rechtwinkliger Parallelepipeda, regelmässiger Tetraëder und Octaëder; diese verwandeln sich bei der Transformation in Räume, welche von sich schneidenden Kugelflächen begrenzt sind, und an denen es entweder für den inneren oder äusseren Raum gelöst werden kann.

Die wesentlichen Resultate dieses Aufsatzes waren schon 1845 durch Sir W. Thomson gefunden und in zwei Briefen an Herrn Lionville (S. dessen Journal de Mathématiques. 1845 und 1847) veröffentlicht. Ich habe dies bald nach Veröffentlichung des vorhergehenden Aufsatzes gefunden und in der zweiten oben citirten Stelle der Heidelberger Verhandlungen vom 30. Mai 1862 anerkannt.

Zusatz (1881, noch nicht veröffentlicht).

Ich erlaube mir hier noch auf eine andere, sehr fruchtbare und bequeme Transformationsmethode aufmerksam zu machen, die ich in meinen Vorlesungen oft anzuwenden pflege.

Wenn q eine Function von x, y, z ist, die mit Ausnahme gewisser Punkte oder Linien der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{d^2 q}{dy^2} + \frac{d^2 q}{dz^2} + k^2 q = 0$$

identisch genügt, so wird derselben Differentialgleichung auch der reelle und imaginäre Theil einer anderen Function ψ genügen, die man aus q erhält, indem man $(\xi + ai)$ statt x setzt. Dabei ist:

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = \frac{d^2 q}{dx^2}.$$



Man kann also für Ψ die Differentialgleichung auch schreiben:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + h^2 \Psi = 0.$$

Wenn φ in einem Punkte unendlich wird, zum Beispiel in demjenigen, wo $x=y=z=0$, so wird der Werth von r , der gegeben ist durch die Gleichung:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

nach der Transformation:

$$r^2 = \xi^2 + y^2 + z^2 - a^2 + 2\xi ai,$$

und setzen wir also:

$$r = \alpha + \beta i,$$

so wird zu setzen sein:

$$\xi^2 + y^2 + z^2 - a^2 = \alpha^2 - \beta^2 \text{ und } a\xi = \alpha\beta,$$

woraus folgt:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 + a^2} = 1, \text{ und } -\frac{\xi^2}{\beta^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 - \beta^2} = 1.$$

Es hat also α in der Oberfläche eines Systems von abgeplatteten Rotationsellipsoiden von gleichem Brennpunkte constante Werthe, und ist gleich der halben kleinen Axe jedes dieser Ellipsoide, während β die imaginäre Axe eines Systems confocaler Rotations-Hyperboloide darstellt, die auch mit jenen Ellipsoiden confocal sind. Der Radius des focalen Kreises ist die Constante a ; und die grosse Halb-Axe der Ellipsoide, sowie die reelle der Hyperboloide sind beziehlich:

$$\sqrt{a^2 + \alpha^2} \text{ und } \sqrt{a^2 - \beta^2}.$$

Es sind also α und β die bekannten elliptischen Coordinaten.

Die Bedingung $r=0$ zerfällt hier in:

$$\alpha = 0 \text{ und } \beta = 0.$$

Beide zusammen sind nur erfüllt in dem Focalkreise. Wenn also φ im Punkte $r=0$ unendlich wird, wird Ψ in dem Focalkreise unendlich werden. Führen wir im Meridianschnitt Polarcordinaten σ, ϑ ein, die vom Focalkreise als Anfangspunkte aus gerechnet sind, d. h. setzen wir:

$$x = \sigma \sin \vartheta \text{ und } y = \sqrt{y^2 + z^2} = a + \sigma \cos \vartheta,$$

so werden für sehr kleine Werthe von σ bei Vernachlässigung

der Quadrate dieser Grösse die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel ergeben:

$$r = \alpha + \beta i = \sqrt{2a\sigma} \cdot e^{\pm i\vartheta/2}.$$

Wird also φ im Punkte r unendlich wie r^{-n} , so wird Ψ am focalen Kreise unendlich wie $\sigma^{-n/2}$.

Die Function dagegen:

$$\varphi = \log \left(\frac{r+x}{r-x} \right),$$

welche das Potential einer auf der positiven x -Axe in gleichmässiger Dichtigkeit verbreiteten positiven, auf der negativen Axenhälfte negativen Masse darstellt, verwandelt sich in:

$$\Psi = \log \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right) + 2i \operatorname{artg} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Der imaginäre Theil dieser Function ist längs der Kreistfläche constant $= \frac{1}{2}\pi$, und in unendlicher Entfernung, wo α sehr klein ist, gleich a/α . Dieser imaginäre Theil stellt also die Potentialfunction einer auf der Kreisscheibe im Gleichgewicht verbreiteten elektrischen Masse a dar.