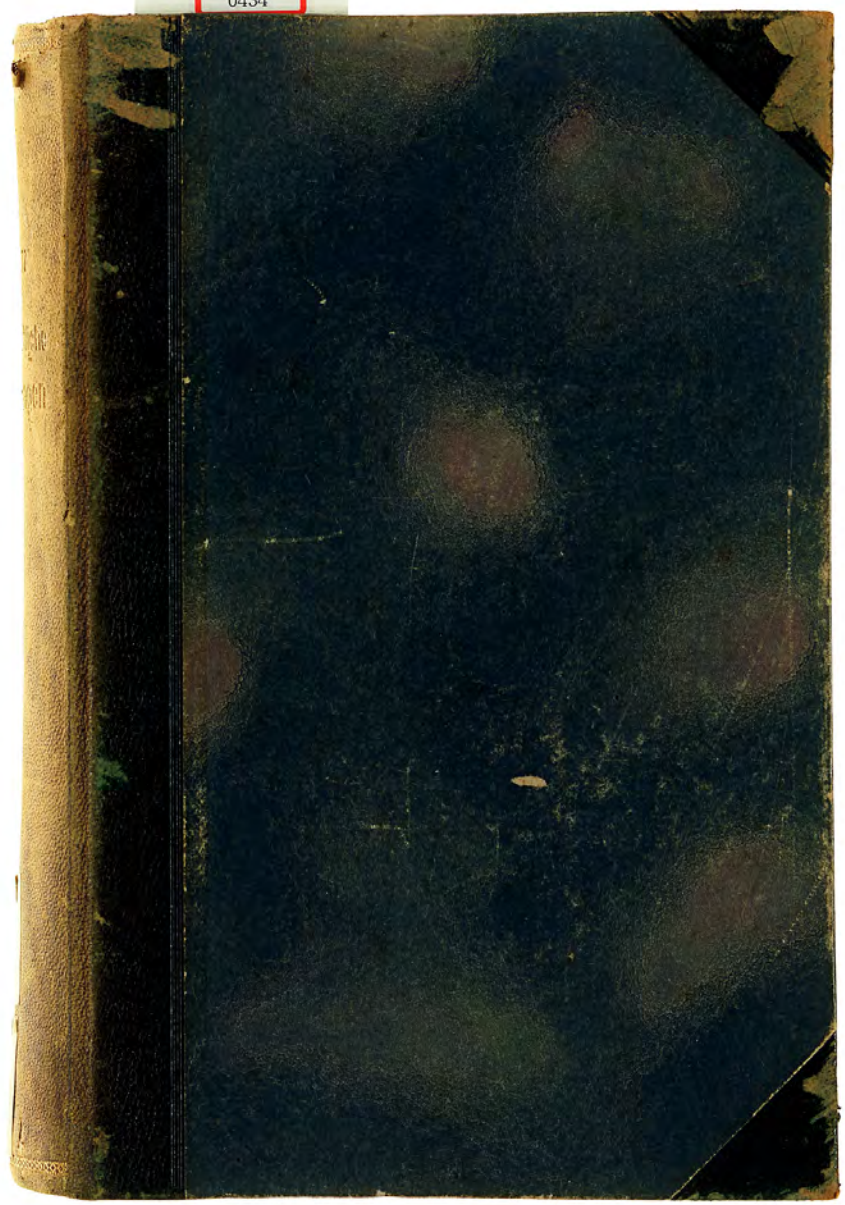



桑木文庫
洋書
0434

桑木文庫
洋書
0434

物理
08
H
8.1

九州帝國大學理學部
8336
物理學教室

桑木文庫
洋書
0434

圖書番號 800784
部　門
カード

HELMHOLTZ

WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN.

理学部　洋　遡及
022232002006587
九州大学蔵書



H. Helmholtz

WISSENSCHAFTLICHE

ABHANDLUNGEN

VON

HERMANN HELMHOLTZ

ORD. PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT, MITGLIED D. AKADEMIE D. WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

ERSTER BAND.

MIT PORTRAIT UND DREI LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1882.



WISSENSCHAFTLICHE

ABHANDLUNGEN

VON

HERMANN HELMHOLTZ

ORD. PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT, MITGLIED D. AKADEMIE D. WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

ERSTER BAND.

MIT PORTRAIT UND DREI LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1882.

Alle Rechte vorbehalten.

130637

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorrede zum ersten Bande.

Der Aufforderung des Herrn Verlegers, meine in verschiedenen Zeitschriften zerstreuten kleineren wissenschaftlichen Aufsätze zu sammeln und wieder abdrucken zu lassen, habe ich nachgeben zu müssen geglaubt, da mir schon oft Beschwerden meiner Freunde und Schüler darüber zu Ohren gekommen waren, dass sie es schwer gefunden hätten, manche meiner älteren Abhandlungen sich zu verschaffen. Ich verhehle mir nicht, dass manche dieser älteren Aufsätze, die zum Theil vierzig Jahre zurückliegen, den gegenwärtigen Anforderungen wissenschaftlicher Methodik nicht mehr ganz entsprechen, und ich muss für sie die Nachsicht des Lesers in Anspruch nehmen. Geändert sind ohne Bemerkung im Texte nur Druckfehler und Mängel der Stilisirung; wo solche in den mathematischen Formeln oder in den Zahlen vorkamen, sind sie in Anmerkungen, die durch die Jahreszahl (1881) als neu charakterisirt sind, bezeichnet. Ebenso sind alle, den Sinn des Textes verändernden Bemerkungen und Zusätze in Anmerkungen oder Anhänge zu den Aufsätzen verwiesen und mit derselben Jahreszahl versehen.

Da der Herr Verleger wünschte, die für die Raumersparniss sehr förderliche Bezeichnung der Brüche a/b, wie sie unter andern auch in Wiedemann's Annalen der Physik schon eingeführt ist, und in vielen neueren englischen Büchern gebraucht wird, z. B. von Herrn G. G. Stokes in dem Wiederabdruck seiner „Mathematical and Physical Papers“: so habe ich dabei folgende Regeln beachtet:

1) Factoren, die hinter dem Zeichen / folgen, sind als Factoren des Nenners zu betrachten, wenn nicht der ganze Bruch

in eine Parenthese eingeschlossen ist. Also a/bc ist a/(bc), dagegen (a/b)c ist gleich (ac)/b.

2) Das Summenzeichen dagegen fügt den neuen Summanden zum Werthe des Bruchs nicht zum Nenner des Bruchs, wenn nicht der dem Nenner entsprechende Ausdruck eingeklammert ist. Also a/b + c ist gleich c + (a/b); dagegen in a/(b + c) ist (b + c) der Nenner und in (c + a)/b ist (c + a) der Zähler des Bruchs.

Herr Stokes bemerkt mit Recht, dass in Exponentialfunctionen mit gebrochenem Exponenten das Zeichen sehr zweckmässig anzuwenden sei; das ist in dem vorliegenden Bande noch wenig geschehen.

Dieser erste Band enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Dynamik, Hydrodynamik, Lehre vom Schall, von der Elektricität und dem Magnetismus. Die optischen und physiologischen sollen einen zweiten Band bilden. Ausgeschlossen bleiben die beiden grösseren Werke, das Handbuch der Physiologischen Optik und die Lehre von den Tonempfindungen, sowie die Populären wissenschaftlichen Vorträge und die Akademischen Reden.

Einige Berichte aus den von der Berliner Physikalischen Gesellschaft herausgegebenen Fortschritten der Physik und einige von mir verfasste Berichte über Arbeiten meiner Schüler im hiesigen Laboratorium sind aufgenommen, insofern sie eigene Meinungsäusserungen oder Auseinandersetzungen über wissenschaftliche Fragen enthalten. Auch habe ich vorläufige Berichte später erschienener längerer Abhandlungen wieder abdrucken lassen, weil sie dem Leser die Orientirung über den Inhalt der letztern erleichtern können.

Um die auf die Originalaufsätze bezüglichen Citate in diesem Abdruck auffinden zu können, sind am Rande der Seiten desselben die Seitenzahlen der Originalarbeit angegeben. Wo mehrere Abdrücke vorliegen, sind dazu die Seitenzahlen des ersten in der Ueberschrift citirten benutzt.

Berlin, Weihnachten 1881.

H. Helmholtz.

Inhaltsübersicht

des ersten Bandes.

Zur Lehre von der Energie.

Seite.

I. Bericht über die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen für 1845. 3
II. Ueber die Erhaltung der Kraft. Eine physikalische Abhandlung. 1847 12
III. Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius. 1854 76
IV. Ueber Eigenschaften des Eises. 1865 94

Hydrodynamik.

V. Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. 1858 101
VI. Sur le mouvement le plus général d'un fluide. Reponse à une communication précédente de M. S. Bertrand. 1868 . 135
VII. Sur le mouvement des fluides. Deuxième réponse à M. S. Bertrand. 1868 140
VIII. Réponse à la Note de M. S. Bertrand du 19. Octobre 1868 145
IX. Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. 1868 . . 146
X. Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. 1873 158
XI. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. 1860. Mit Herrn G. v. Piotrowski 172
XII. Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten. 1869 223

Schallbewegung.

XIII. Bericht über die theoretische Akustik betreffenden Arbeiten vom Jahre 1848 und 1849 233
XIV. Ueber Combinationstöne. 1856 256
XV. Ueber Combinationstöne 263
XVI. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. 1859 303
XVII. Ueber den Einfluss der Reibung in der Luft auf die Schallbewegung. 1863 383
XVIII. Zur Theorie der Zungenpfeifen. 1861 388
XIX. Ueber die Vocale. 1857 395
XX. Ueber die Klangfarbe der Vocale 1859 397
XXI. Ueber Klangfarben. 1860 408
XXII. Ueber die Bewegung der Violinsaiten. 1860 410
XXIII. Ueber musikalische Temperatur. 1860 420
XXIV. Ueber die persisch-arabische Tonleiter. 1862 424

Elektrodynamik.

Seite

XXV. Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten elektrischen Ströme. 1851 . 429
XXVI. Telephon und Klangfarbe. 1878 463
XXVII. Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche. 1853 475
XXVIII. Ueber eine allgemeine Transformationsmethode der Probleme über elektrische Vertheilung. 1862 520
XXIX. Ueber die physiologische Wirkung kurzdauernder elektrischer Schläge im Innern von ausgedehnten leitenden Massen. 1869 526
XXX. Ueber elektrische Oscillationen. 1869 531
XXXI. Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern. 1870 537
XXXII. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Erste Abhandlung: Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. 1870 545
XXXIII. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Wirkungen. 1871 629
XXXIV. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Vorläufiger Bericht. 1872 636
XXXV. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Zweite Abhandlung. Kritisches. 1873 647
XXXVI. Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte. 1873 688
XXXVII. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Dritte Abhandlung: Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern. 1874 702
XXXVIII. Kritisches zur Elektrodynamik. 1874 763
XXXIX. Versuche über die im ungeschlossenen Kreise durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte. 1875 . . 774
XL. Bericht betreffend Versuche über die elektromagnetische Wirkung elektrischer Convection, ausgeführt von Hrn. Henry A. Rowland. 1876 791
XLI. Ueber die auf das Innere magnetisch oder diëlektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte. 1881 798

Galvanismus.

XLII. Ueber galvanische Polarisation in gasfreien Flüssigkeiten. 1873 823
XLIII. Bericht über Versuche des Hrn. Dr. E. Root aus Boston, die Durchdringung des Platins mit elektrolytischen Gasen betreffend. 1876 835
XLIV. Ueber galvanische Ströme, verursacht durch Concentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie. 1877 840
XLV. Studien über elektrische Grenzschichten. 1879 855
XLVI. Ueber Bewegungsströme am polarisirten Platina. 1880 899
XLVII. Eine elektrodynamische Wage. 1881 922
XLVIII. Ueber galvanische Polarisation des Quecksilbers und darauf bezügliche Versuche des Hrn. Arthur König. 1881 925

Zur Lehre von der Energie.

臺灣大學圖書館藏

I.

Bericht über die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen für 1845.

(Aus: „Die Fortschritte der Physik im Jahre 1845“. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. I. Jahrgang; erschienen 1847. S. 346—355.

Ueber die Wärmeverhältnisse der Thiere sind in diesem Jahre zwei Arbeiten erschienen. Die eine von Hrn. J. Davy[1]), eine achtmonatliche Reihe von Beobachtungen der Temperatur 347
seiner Zunge enthaltend, angestellt, um die täglichen und monatlichen Schwankungen derselben und den Einfluss körperlicher und geistiger Anstrengung zu ermitteln, ist mehr von physiologischen als physikalischen Interesse. Hrn. Davy's Hauptresultate sind, dass die Zungentemperatur während des Schlafes am niedrigsten ist (36°,4 C.), im Laufe des Vormittags steigt bis gegen 4 Uhr (auf 37°,17 C.), nach dem Mittagessen, was erst um 6 Uhr stattfand und wonach Schläfrigkeit eintrat, fällt (bis 36°,5 C.) und nach dem Thee um $7^1/_2$ Uhr zum zweiten Male etwas steigt, um endlich zur Nacht wieder auf ihr Minimum zu sinken. Zwei deutsche Beobachter, Gierse und Hallmann, hatten schon früher entsprechende Resultate gefunden, nur fielen ihre Maxima auf andere Tageszeiten, 11 Uhr früh und 6 Uhr Abends, weil sie gegen 2 Uhr zu Mittag speisten; auch ist bei ihnen die zweite Erhebung bedeutender als bei Hrn. Davy. Die jährlichen Schwankungen sind sehr gering, wenn man die Tem-

1) J. Davy, on the temperatur of man. Phil. Trans. f. 1845; Ann. chim. ph. XIII. 174.

peratur der Zunge unter Umständen misst, wo der Körper vor einer unangenehmen Einwirkung der Temperaturextreme geschützt ist. Die grösste Differenz der Mittel aus den Beobachtungen der einzelnen Monate beträgt 0°,18 C. auf einen Unterschied der mittleren Zimmertemperatur von 8°,4 C. Dagegen erniedrigt sich die Zungenwärme auffallend (bis 35° C.), sobald durch äussere Kälte das Gefühl von Frieren und von Schläfrigkeit erregt wird. Körperliche und geistige Anstrengung erhöhen dieselbe um etwa 0°,4 C. Hrn. Davy's Arbeit ist in so fern wichtig, als er zuerst die Methode der Beobachtungsreihen in grösserem Massstabe angewendet hat, um bei Bestimmung der Veränderungen, welche die menschliche Temperatur unter verschiedenen Bedingungen erleidet, die störenden Variationen anderer Art zu eliminiren, und so zu sichereren Resultaten zu kommen, als es bisher durch vereinzelte Beobachtungen möglich war.

Die zweite Arbeit von Hrn. Liebig[1]) bezieht sich auf die Frage nach dem Ursprung der thierischen Wärme, und bietet mehr von physikalischem Interesse dar, insofern es sich darum handelt zu entscheiden, ob die thierische Wärme aus den bekannten Erwärmungsquellen der unorganischen Natur herrühre,
348 oder ob sie in dem lebenden Körper auf eine besondere und abweichende Art erzeugt werde. Der gegenwärtige Stand dieser Frage ist folgender: Man ist ursprünglich, ausgehend von der materiellen Ansicht der Wärmeerscheinungen, für die Erklärung der organischen Wärme genöthigt gewesen zu der Annahme, dieselbe rühre von dem mit den Ingestis, den Nahrungsmitteln und dem eingeathmeten Sauerstoffe, frei und latent eingebrachten Wärmestoffe her, weil man nicht annehmen konnte, dass dieser Stoff im Organismus erzeugt werde; man hat deshalb von Lavoisier an dieselbe aus der Verbrennung des Kohlenstoffs und Wasserstoffs des Bluts in den Lungen erklären wollen. Dagegen zeigte Brodie experimentell, dass bei geköpften oder durch Gifte und Kopfverletzungen betäubten Thieren, bei welchen man durch Lufteinblasen noch längere Zeit die Blut-

1) J. Liebig, Ueber die thierische Wärme. Ann. d. Ch. u. Ph. L., Quesnev. rev. sc. XX. 392.

bewegung, die chemischen Veränderungen der Ausathmungsluft, die Reizbarkeit der Muskeln erhalten kann, die Wärme schnell verloren gehe. Er schloss daraus, dass nicht die Respiration, sondern die Nerventhätigkeit unter Leitung des Gehirns die Wärme erzeuge. Das angegebene Resultat ist von allen bestätigt worden, welche diese Versuche wiederholt haben; nur in Betreff der Geschwindigkeit der Abkühlung sind die Stimmen nicht einig. Brodie hatte nämlich gefunden, dass die Thiere bei künstlicher Respiration schneller abgekühlt werden als ohne dieselbe und schloss daraus, dass die Respiration ein Abkühlungsmittel sei; Chaussat fand keinen Unterschied, Hales und Legallois dagegen eine Verzögerung des Erkaltens durch die künstliche Respiration; endlich zeigten Wilson Philip und William, dass die Abkühlung bei langsamem Einblasen langsamer sei, bei geschwindem schneller als ohne dasselbe, und dass durch starkes Lufteinblasen die Temperatur auch eines unverletzten Thieres vermindert werden könne. Jedenfalls folgt aus diesen Versuchen so viel mit Sicherheit, dass die Respiration unmittelbar, d. h. durch die sogleich im Blute eintretenden Verbindungen des Sauerstoffs und die Ausscheidung der Kohlensäure, nicht die einzige Quelle der thierischen Wärme sei; ein Theil der Physiologen aber liess sich dadurch verleiten, weiter zu schliessen, dass die Wärme ganz oder theilweise nicht von aussen her, d. h. aus den Ingestis, ihren Ursprung nehme, son- 349
dern von der unbekannten, alles regelnden Thätigkeit der Nerven erzeugt werde. Hierzu kamen nun noch die Versuche von Dulong[1]) und Despretz[2]), welche die von verschiedenen warmblütigen Thieren während einer gewissen Zeit abgegebene Wärme mit dem Wassercalorimeter quantitativ bestimmten. Die Thiere befanden sich dabei in einem kupfernen, mit Weidengeflechten ausgelegten Kasten, durch welchen Luft aus einem Gasometer in gleichmässigem Strome hindurchgeleitet und in einem zweiten Apparat so aufgefangen wurde, dass ihre Menge und Zusammensetzung genau bestimmt werden konnten. Es wurde dann berechnet, wieviel Kohlenstoff und Wasserstoff während der Dauer

1) Ann. de chim. et de ph. I.
2) Ebend. XXVI.

des Versuchs sich mit dem verzehrten Sauerstoff verbunden habe, und wieviel Wärme dabei erzeugt worden sei. Sie fanden beide in einer grossen Reihe von Versuchen, dass die berechnete Verbrennungswärme nur 0,75—0,90 von der in den Thieren erzeugten betrug.

Liebig hat in seiner Thierchemie die Herleitung der ganzen thierischen Wärme aus dem Verbrennungsprocess der Blutbestandtheile mit dem eingeathmeten Sauerstoff entschieden vertheidigt. Er widerlegt die Schlüsse, die man aus den Versuchen von Brodie an geköpften und betäubten Thieren gezogen hat, und stellt die theoretische Forderung auf, dass der Ursprung der Wärme, als eines Princips, welches einem gewissen Kraftäquivalent entspreche, nicht aus nichts, sondern nur aus andern Kräften hergeleitet werden dürfe. Daraus aber schliesst er weiter, dass die Wärme nur von der Verbrennung des Kohlenstoffs und Wasserstoffs mit Sauerstoff herrühre, und sucht die Quantität derselben hiernach für den menschlichen Körper zu berechnen.

Wir befinden uns hier mit der Frage über die thierische Wärme auf einem eigenen Felde. Das Princip von der Constanz des Kraftäquivalents bei Erregung einer Naturkraft durch eine andere, obschon logisch vollkommen gerechtfertigt, und
350 auch schon benutzt als Grundlage mathematischer Theorien (z. B. von Carnot und Clapeyron zur Bestimmung der Arbeit, welche eine gewisse Wärmequantität leisten kann, von Neumann in der Theorie der Inductionsströme durch Bewegung von Magneten oder Strömen) ist weder theoretisch bisher vollständig ausgesprochen und anerkannt, noch empirisch durchgeführt, wenn ihm auch die bisher gemachten Versuche vollständig entsprechen. So lange ein Wärmestoff als Ursache der Erscheinungen festgehalten wurde, war es undenkbar, dass dieser Stoff im Körper erschaffen würde.

Nun ist aber gegenwärtig die materielle Theorie der Wärme nicht mehr zu halten, sondern dafür eine Bewegungstheorie zu substituiren, weil wir Wärme aus mechanischen Kräften ihren Ursprung nehmen sehen, sowohl unmittelbar, z. B. bei der Reibung, sowohl fester gegen feste Körper wie flüssiger gegen feste, als auch mittelbar durch elektrische Ströme bei der Bewegung von Magneten und durch die Reibungselektricität, wo an ein Freiwerden latenten Wärmestoffs nicht zu denken ist. Fassen wir die Wärme als Bewegung, so ist zuvörderst vorauszusetzen, dass mechanische, elektrische und chemische Kräfte nur immer ein bestimmtes Aequivalent derselben erzeugen können, wie complicirt auch die Art des Ueberganges der einen Kraft in die andere sein mag. Was darüber empirisch bekannt ist, reicht nicht weit. Für die mechanischen Kräfte bestehen noch keine Versuche, die in Betracht kommen könnten; die Arbeiten von Carnot, Clapeyron und Holtzmann beziehen sich nicht auf die Erzeugung, sondern nur auf die Ausbreitung der Wärme. In Bezug auf die chemischen Kräfte sind die Wärmeäquivalente (die latente Wärme) einer Reihe von chemischen Processen bestimmt worden, und das Gesetz von der Constanz der Wärmeerzeugung, in welchen Zwischenstufen auch die Verbindung erfolge, hat sich in den untersuchten Fällen bewährt. Für die constanten hydroelektrischen Ströme folgt aus den Gesetzen von Ohm und Lenz, wenn wir das letztere auch, wie es von Becquerel[1]) empirisch geschehen ist, auf die Flüssigkeiten ausdehnen, dass die entwickelte Wärme bei jeder Ein- 351
richtung der Kette der Grösse der elektro-chemischen Umsetzung proportional sei. Es ist nach Lenz in einem bestimmten Theile der Kette, dessen Widerstand $= w$, bei der Intensität des Stromes J für die Zeit t die entwickelte Wärme $\vartheta = J^2 wt$, also die Wärmemenge in der ganzen Kette $\Theta = J^2 Wt$, wenn W den Widerstand der ganzen Kette bezeichnet. Nun ist aber $J = nA/W$, wo A die elektrische Differenz der wirkenden Metalle und n die Zahl der Zellen bezeichnet, also $\Theta = nJAt$. Die Menge der Atome C, welche in der Zeit t von dem einen Metall oxydirt, von dem andern reducirt sind, ist nach Faraday's elektrolytischem Gesetze in einer Zelle $= Jt$, in n Zellen $= nJt$, also $\Theta = AC$, also gleich der Quantität der verbrauchten Metalle, multiplicirt mit ihrem elektrischen (chemischen?) Gegensatz, gänzlich unabhängig von der Form, Länge etc. der Kette. Für die statische Elektricität folgt, wenn wir die Gesetze von Riess als allgemein gültig voraussetzen dürfen, $\Theta = QD$, wo Q

1) Comptes rendus, T. XVI. 1843.

die Quantität und D die Dichtigkeit der angehäuften Elektricität ist.[1])

Bezeichnen wir nach wie vor mit latenter Wärme der chemischen Verbindungen das Wärmeäquivalent, was sie bei weiteren Verbindungen erzeugen können, so folgt aus den hingestellten theoretischen Forderungen für die organischen Körper, dass bei constanter Grösse und Zusammensetzung derselben die als frei abgegebene Wärme und die latente der Egesta zusammen gleich sein müssen der latenten der Ingesta, gleichviel in welchen Zwischenstufen auch die Umwandlung der letzteren in erstere vor sich gegangen sein mag. Die Egesta sind nun Kohlensäure, Wasser, kohlensaures Ammoniak, Harnstoff, Reste der Nahrungsmittel und eine verhältnissmässig geringe Menge quaternärer Verbindungen, wie Gallenreste, Schleim, Extraktivstoffe, Harnsäure etc. Lassen wir die letzteren aus dem Spiel, weil bei ihrer Bildung eben nicht viel Wärme frei geworden sein kann, und rechnen wir dafür den Harnstoff mit der entsprechenden Menge von Wasseratomen gleich als kohlensaures
352 Ammoniak an, bei welcher Umsetzung keine bemerkbare Quantität Wärme entsteht: so muss die im Körper erzeugte Menge derselben ungefähr gleich sein derjenigen, welche der entsprechende Theil der Nahrungsmittel, verbrannt mit Sauerstoff zu Kohlensäure, Wasser und Ammoniak geben würde. Es handelt sich also nicht um die Verbrennungswärme von Kohlenstoff und Wasserstoff, sondern um die der Nahrungsmittel. Da nun über die letzteren noch gar keine empirischen Bestimmungen gemacht sind, so ist eine Berechnung von Versuchen, wie sie von Dulong und Despretz angestellt sind, noch gar nicht möglich. Die Ansicht von Lavoisier, wonach in den Lungen ein Kohlenwasserstoff ausgeschieden werden sollte, würde die Berechnungsart, wie sie Dulong, Despretz und Liebig angewendet haben, rechtfertigen, aber sie ist längst als falsch erwiesen worden. Herr Liebig hilft sich durch die Annahme, dass der Kohlenstoff und Wasserstoff der organischen Verbindungen eben so viel Wärme erzeugen müssen, als wenn sie frei verbrennen. Das können wir ihm ungefähr zugeben,

1) Pogg. Ann. XLXIII. 320, und LXIII. 505.

denn wahrscheinlich sind die Hauptbestandtheile des thierischen und pflanzlichen Körpers, die Proteïnverbindungen, die zucker- und mehlartigen Stoffe, die Fette, solche, die den grössten Theil der latenten Wärme ihrer Elemente noch enthalten. Was wird aber aus dem Sauerstoff, der in den Substanzen schon vorhanden ist und der, verbunden mit Wasserstoff und Kohlenstoff, sich unter den Verbrennungsprodukten befindet. Hrn. Liebig's Rechnung ist nur dann gerechtfertigt, wenn wir annehmen, dass dieser Sauerstoff sich nur mit Wasserstoff verbinde, und dabei keine Wärme mehr erzeuge, also gleichsam schon als Wasser in der Substanz vorhanden sei. Dass ist aber eine Annahme, die theoretisch unwahrscheinlich ist, und durch die neueren Untersuchungen auch empirisch widerlegt wird. Nach den Versuchen von Favre und Silbermann ist beim Alkohol die Verbrennungswärme ungefähr gleich, bei den einfachen und zusammengesetzten Aetherarten, dem Holzgeist grösser, bei einigen Säuren von sehr hohem Atomgewichte und geringem Sauerstoffgehalte geringer als sie nach Hrn. Liebig's Rechnungsweise sein müsste. Von den Nahrungsmitteln sind keine untersucht, doch lässt sich aus der Angabe für die Stearinsäure, die ein wenig 353
hinter der Verbrennungswärme der freien Kohlen- und Wasserstoffatome zurückbleibt, wohl annehmen, dass sich die meisten Fette eben so verhalten werden. Dagegen folgt für die sämmtlichen Pflanzenstoffe von der Formel $C_n H_{2n} O_n$, welche in Traubenzucker und dann mit bedeutender Wärmeentwickelung in Alkohol werwandelt werden können, dass ihre latente Wärme viel grösser sei als die der 12 At. Kohlenstoff. Es geben nämlich 12 At. Kohlenstoff = 901,44 grm (wenn $O = 100$ grm) bei der Verbrennung 7283600 Calories. Bei der weinigen Gährung gehen 4 At. als Kohlensäure fort, die übrigen 8 bleiben zurück, verbunden mit $H_{24} O_4$ zu 1150,72 grm Alkohol, welche bei der Verbrennung 8265600 geben. Verbrennen wir Traubenzucker unmittelbar, so kommt noch die bei der weinigen Gährung entwickelte Wärme hinzu. Für die von stickstoffhaltigen Verbindungen erzeugte Wärme haben wir bisher gar keine Anhaltspunkte.

Wenn also die Versuche von Dulong und Despretz keine vollständige Uebereinstimmung zwischen der abgegebenen Wärme

und der nach den Athmungsprodukten berechenbaren ergeben, so wiederspricht dies Resultat der chemischen Theorie der organischen Wärme nicht im mindesten.

Hr. Liebig sucht nun auf zweierlei Weise das Ergebniss dieser Versuche mit seinen theoretischen Ansichten zu vereinigen. Einmal bezweifelt er (Thierchemie S. 34), dass die Thiere in der niedrigen Temperatur des Kastens bei gezwungen ruhiger Stellung ihren eigenen Wärmegrad beibehalten haben. Bei Despretz ist zwar die Temperatur von 7—8° C. nicht so tief, dass die meisten einheimischen Thiere sie nicht ohne Beschwerde in ruhiger Lage ertragen sollten, besonders da sie nicht unmittelbar mit dem Kupfer des Kastens in Berührung, sondern durch Weidengeflechte davon getrennt waren; doch muss Hrn. Liebig's Einwand deshalb als möglich zugegeben werden, weil die Zuleitung der frischen Luft nicht immer schnell genug geschah, so dass die hindurchgetretene bis doppelt so viel Kohlensäure enthielt als die normale Athmungsluft, wodurch erfahrungsmässig die Temperatur der Thiere erniedrigt werden kann. Dagegen kann ein solcher Einwurf die Versuche von Dulong,
354 welche bei mittlerer Zimmertemperatur angestellt sind, und wo das Sauerstoffgas in hinreichender Menge zugeleitet wurde, nicht treffen. Zweitens macht Hr. Liebig in dem hier zu besprechenden Aufsatze darauf aufmerksam, dass die Versuche mit zu niedrigen Zahlen für die Verbrennungswärme des Kohlenstoffs und Wasserstoffs berechnet seien, nämlich von Despretz mit den selbst gefundenen Zahlen für 1 grm *C.* 7912, für 1 grm *H.* 23460, und von Dulong mit denen Lavoisier's *C.* 7226, *H.* 23400, während doch nach den genaueren Bestimmungen von Hess die Verbrennungswärme des Wasserstoffs 34792 sei. Dann stellt er eine theoretische Verbrennungswärme des Kohlenstoffs auf, welche er aus den von Despretz für das Aetheringas, den Alkohol und Aether, und von Hess für den Wasserstoff gefundenen ohne Berücksichtigung der verschiedenen Aggregatzustände nach eben der theoretischen Annahme über die Verbrennung organischer Verbindungen berechnet, welche wir oben widerlegt haben. Er findet im Mittel 8558, und zieht diese den empirischen Bestimmungen vor, weil er die vollständige Verbrennung der angewendeten Kohle und ihre Freiheit

von Wasserstoff bezweifelt. Nun findet er bei der Berechnung der Versuche von Despretz mit *C* 7912 und *H* 34792 das Verhältniss der Verbrennungswärme zu der von den Thieren abgegebenen zwischen 82 : 100 und 102 : 100, Mittel 95,25 : 100; mit *C* 8558 dagegen zwischen 88,5 und 107,5 : 100, Mittel 96,9 : 100; mit der letzteren Zahl in Dulong's Versuchen zwischen 83,6 und 104,7 : 100, Mittel 95,8 : 100.

Jedenfalls müssen wir die theoretisch gefundene Zahl für den Kohlenstoff zurückweisen, weil sie aus eben der unrichtigen Annahme hergeleitet ist, die damit gestützt werden soll. Ob bei Despretz's Versuchen die neuere Zahl für den Wasserstoff gesetzt werden darf, ist zweifelhaft, da derselbe mit denselben oder ganz ähnlichen Apparaten und Methoden diese bestimmt hat, mit denen er die Versuche an Thieren anstellte; an beiden also dieselben Fehlerquellen haften. Bei Dulong, der fremde Zahlen benutzt hat, wäre diese Rücksicht nicht zu nehmen. Auffallend, und die Genauigkeit der Resultate verbürgend, ist übrigens die nahe Uebereinstimmung der Mittel beider Versuchsreihen bei gleichmässiger Berechnung, und als wahrschein- 355
lichstes Resultat möchte hinzustellen sein, dass die von den Thieren erzeugte und abgegebene Wärme um $^1/_{20}$ bis $^1/_{10}$ grösser sei als die aus den Respirationsprodukten zu berechnende.

Eine ausführlichere Erörterung der hier besprochenen Verhältnisse und namentlich auch des physiologischen Theils ist von mir im Artikel „Wärme" des „Encyclopädischen Wörterbuchs der medicinischen Wissenschaften", herausgegeben von Mitgliedern der Berliner medicinischen Facultät, erschienen und wird in Bd. II dieser Sammlung abgedruckt werden.

II.

Ueber die Erhaltung der Kraft.

Eine physikalische Abhandlung.

Vorgetragen in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 23. Juli 1847; erschien zu Berlin bei G. Reimer 1847.

Einleitung.

1 Vorliegende Abhandlung musste ihrem Hauptinhalte nach hauptsächlich für Physiker bestimmt werden, ich habe es daher vorgezogen, die Grundlagen derselben unabhängig von einer philosophischen Begründung rein in der Form einer physikalischen Voraussetzung hinzustellen, deren Folgerungen zu entwickeln und dieselben in den verschiedenen Zweigen der Physik mit den erfahrungsmässigen Gesetzen der Naturerscheinungen zu vergleichen. Die Herleitung der aufgestellten Sätze kann von zwei Ausgangspunkten angegriffen werden, entweder von dem Satze, dass es nicht möglich sein könne, durch die Wirkungen irgend einer Combination von Naturkörpern auf einander in das Unbegrenzte Arbeitskraft zu gewinnen, oder von der Annahme, dass alle Wirkungen in der Natur zurückzuführen seien auf anziehende und abstossende Kräfte, deren Intensität nur von der Entfernung der auf einander wirkenden Punkte abhängt. Dass beide Sätze identisch sind, ist im Anfange der Abhandlung selbst gezeigt worden. Indessen haben dieselben noch eine wesentlichere Bedeutung für den letzten
2 und eigentlichen Zweck der physikalischen Naturwissenschaften überhaupt, welchen ich in dieser abgesonderten Einleitung darzulegen versuchen werde.

Aufgabe der genannten Wissenschaften ist es einmal die Gesetze zu suchen, durch welche die einzelnen Vorgänge in der Natur auf allgemeine Regeln zurückgeleitet und aus den letzteren wieder bestimmt werden können. Diese Regeln, z. B. das Gesetz der Brechung oder Zurückwerfung des Lichts, das von Mariotte und Gay Lussac für das Volum der Gasarten, sind offenbar nichts als allgemeine Gattungsbegriffe, durch welche sämmtliche dahin gehörige Erscheinungen umfasst werden. Die Aufsuchung derselben ist das Geschäft des experimentellen Theils unserer Wissenschaften. Der theoretische Theil derselben sucht dagegen, die unbekannten Ursachen der Vorgänge aus ihren sichtbaren Wirkungen zu finden; er sucht dieselben zu begreifen nach dem Gesetze der Causalität.[1]) Wir werden genöthigt und berechtigt zu diesem Geschäfte durch den Grundsatz, dass jede Veränderung in der Natur eine zureichende Ursache haben müsse. Die nächsten Ursachen, welche wir den Naturerscheinungen unterlegen, können selbst unveränderlich sein oder veränderlich; im letzteren Falle nöthigt uns derselbe Grundsatz nach anderen Ursachen wiederum dieser Veränderung zu suchen, und so fort, bis wir zuletzt zu letzten Ursachen gekommen sind, welche nach einem unveränderlichen Gesetz wirken, welche folglich zu jeder Zeit unter denselben äusseren Verhältnissen dieselbe Wirkung hervorbringen. Das endliche Ziel der theoretischen Naturwissenschaften ist also, die letzten unveränderlichen Ursachen der Vorgänge in der Natur aufzufinden. Ob nun wirklich alle Vorgänge auf solche zurückzuführen seien, ob also die Natur vollständig begreiflich 3
sein müsse, oder ob es Veränderungen in ihr gebe, die sich dem Gesetze einer nothwendigen Causalität entziehen, die also in das Gebiet einer Spontaneität, Freiheit, fallen, ist hier nicht der Ort zu entscheiden; jedenfalls ist es klar, dass die Wissenschaft, deren Zweck es ist, die Natur zu begreifen, von der Voraussetzung ihrer Begreiflichkeit ausgehen müsse, und dieser Voraussetzung gemäss schliessen und untersuchen, bis sie vielleicht durch unwiderlegliche Facta zur Anerkenntniss ihrer Schranken genöthigt sein sollte.

1) Siehe Zusatz 1.

Die Wissenschaft betrachtet die Gegenstände der Aussenwelt nach zweierlei Abstractionen: einmal ihrem blossen Dasein nach, abgesehen von ihren Wirkungen auf andere Gegenstände oder unsere Sinnesorgane; als solche bezeichnet sie dieselben als Materie. Das Dasein der Materie an sich ist uns also ein ruhiges, wirkungsloses; wir unterscheiden an ihr die räumliche Vertheilung und die Quantität (Masse), welche als ewig unveränderlich gesetzt wird. Qualitative Unterschiede dürfen wir der Materie an sich nicht zuschreiben, denn wenn wir von verschiedenartigen Materien sprechen, so setzen wir ihre Verschiedenheit immer nur in die Verschiedenheit ihrer Wirkungen d. h. in ihre Kräfte. Die Materie an sich kann deshalb auch keine andere Veränderung eingehen, als eine räumliche, d. h. Bewegung. Die Gegenstände der Natur sind aber nicht wirkungslos, ja wir kommen überhaupt zu ihrer Kenntniss nur durch die Wirkungen, welche von ihnen aus auf unsere Sinnesorgane erfolgen, indem wir aus diesen Wirkungen auf ein Wirkendes schliessen. Wenn wir also den Begriff der Materie in der Wirklichkeit anwenden wollen, so dürfen wir dies nur, indem wir durch eine zweite Abstraction demselben wiederum
4 hinzufügen, wovon wir vorher abstrahiren wollten, nämlich das Vermögen Wirkungen auszuüben, d. h. indem wir derselben Kräfte zuertheilen. Es ist einleuchtend, dass die Begriffe von Materie und Kraft in der Anwendung auf die Natur nie getrennt werden dürfen. Eine reine Materie wäre für die übrige Natur gleichgültig, weil sie nie eine Veränderung in dieser oder in unseren Sinnesorganen bedingen könnte; eine reine Kraft wäre etwas, was dasein sollte und doch wieder nicht dasein, weil wir das Daseiende Materie nennen. Ebenso fehlerhaft ist es, die Materie für etwas Wirkliches, die Kraft für einen blossen Begriff erklären zu wollen, dem nichts Wirkliches entspräche; beides sind vielmehr Abstractionen von dem Wirklichen, in ganz gleicher Art gebildet; wir können ja die Materie eben nur durch ihre Kräfte, nie an sich selbst, wahrnehmen.

Wir haben oben gesehen, dass die Naturerscheinungen auf unveränderliche letzte Ursachen zurückgeführt werden sollen; diese Forderung gestaltet sich nun so, dass als letzte Ursachen der Zeit nach unveränderliche Kräfte gefunden werden sollen.

Materien mit unveränderlichen Kräften (unvertilgbaren Qualitäten) haben wir in der Wissenschaft (chemische) Elemente genannt. Denken wir uns aber das Weltall zerlegt in Elemente mit unveränderlichen Qualitäten, so sind die einzigen noch möglichen Aenderungen in einem solchen System räumliche, d. h. Bewegungen, und die äusseren Verhältnisse, durch welche die Wirkung der Kräfte modificirt wird, können nur noch räumliche sein, also die Kräfte nur Bewegungskräfte, abhängig in ihrer Wirkung nur von den räumlichen Verhältnissen.

Also näher bestimmt: Die Naturerscheinungen sollen zurückgeführt werden auf Bewegungen von Materien mit unver- 5
änderlichen Bewegungskräften, welche nur von den räumlichen Verhältnissen abhängig sind.

Bewegung ist Aenderung der räumlichen Verhältnisse. Räumliche Verhältnisse sind nur möglich gegen abgegrenzte Raumgrössen, nicht gegen den unterschiedslosen leeren Raum. Bewegung kann deshalb in der Erfahrung nur vorkommen als Aenderung der räumlichen Verhältnisse wenigstens zweier materieller Körper gegen einander; Bewegungskraft, als ihre Ursache, also auch immer nur erschlossen werden für das Verhältniss mindestens zweier Körper gegen einander, sie ist also zu definiren als das Bestreben zweier Massen, ihre gegenseitige Lage zu wechseln. Die Kraft aber, welche zwei ganze Massen gegen einander ausüben, muss aufgelöst werden in die Kräfte aller ihrer Theile gegen einander; die Mechanik geht deshalb zurück auf die Kräfte der materiellen Punkte, d. h. der Punkte des mit Materie gefüllten Raumes.[1]) Punkte haben aber keine räumliche Beziehung gegen einander als ihre Entfernung, denn die Richtung ihrer Verbindungslinie kann nur im Verhältniss gegen mindestens noch zwei andere Punkte bestimmt werden. Eine Bewegungskraft, welche sie gegen einander ausüben, kann deshalb auch nur Ursache zur Aenderung ihrer Entfernung sein, d. h. eine anziehende oder abstossende. Dies folgt auch sogleich aus dem Satze vom zureichenden Grunde. Die Kräfte, welche zwei Massen auf einander ausüben, müssen nothwendig ihrer Grösse und Richtung nach bestimmt sein,

1) Siehe Zusatz 2.

sobald die Lage der Massen vollständig gegeben ist. Durch zwei Punkte ist aber nur eine einzige Richtung vollständig gegeben, nämlich die ihrer Verbindungslinie; folglich müssen die Kräfte, welche sie gegen einander ausüben, nach dieser Linie gerichtet sein, und ihre Intensität kann nur von der Entfernung abhängen.

6 Es bestimmt sich also endlich die Aufgabe der physikalischen Naturwissenschaften dahin, die Naturerscheinungen zurückzuführen auf unveränderliche, anziehende und abstossende Kräfte, deren Intensität von der Entfernung abhängt. Die Lösbarkeit dieser Aufgabe ist zugleich die Bedingung der vollständigen Begreiflichkeit der Natur. Die rechnende Mechanik hat bis jetzt diese Beschränkung für den Begriff der Bewegungskraft nicht angenommen, einmal weil sie sich über den Ursprung ihrer Grundsätze nicht klar war, und dann, weil es ihr darauf ankommt, auch den Erfolg zusammengesetzter Bewegungskräfte berechnen zu können in solchen Fällen, wo die Auflösung derselben in einfache noch nicht gelungen ist. Doch gilt ein grosser Theil ihrer allgemeinen Principien der Bewegung zusammengesetzter Systeme von Massen nur für den Fall[1]), dass dieselben durch unveränderliche anziehende oder abstossende Kräfte auf einander wirken; nämlich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, das von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, von der Erhaltung der Hauptrotationsebene und des Moments der Rotation freier Systeme, das von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Für irdische Verhältnisse finden von diesen Principien hauptsächlich nur das erste und letzte Anwendung, weil sich die anderen nur auf vollkommen freie Systeme beziehen, das erste ist wieder, wie wir zeigen werden, ein specieller Fall des letzteren, welches deshalb als die allgemeinste und wichtigste Folgerung der gemachten Herleitung erscheint.

Die theoretische Naturwissenschaft wird daher, wenn sie nicht auf halbem Wege des Begreifens stehen bleiben will, ihre Ansichten mit der aufgestellten Forderung über die Natur
7 der einfachen Kräfte und deren Folgerungen in Einklang setzen

1) Besser: „ist zu beweisen nur für den Fall“ (1881).

müssen. Ihr Geschäft wird vollendet sein, wenn einmal die Zurückleitung der Erscheinungen auf einfache Kräfte vollendet ist, und zugleich nachgewiesen werden kann, dass die gegebene die einzig mögliche Zurückleitung sei, welche die Erscheinungen zulassen. Dann wäre dieselbe als die nothwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen; es würde derselben alsdann also auch objective Wahrheit zuzuschreiben sein.

I. Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Wir gehen aus von der Annahme, dass es unmöglich sei durch irgend eine Combination von Naturkörpern bewegende Kraft fortdauernd aus nichts zu erschaffen. Aus diesem Satze haben schon Carnot und Clapeyron[1]) eine Reihe theils bekannter, theils noch nicht experimentell nachgewiesener Gesetze über die specifische und latente Wärme der verschiedensten Naturkörper theoretisch hergeleitet. Zweck der vorliegenden Abhandlung ist es ganz in derselben Weise das genannte Princip in allen Zweigen der Physik durchzuführen, theils um die Anwendbarkeit desselben nachzuweisen in allen denjenigen Fällen, wo die Gesetze der Erscheinungen schon hinreichend erforscht sind, theils um mit seiner Hülfe, unterstützt durch die vielfältige Analogie der bekannteren Fälle auf die Gesetze der bisher nicht vollständig untersuchten weiterzuschliessen, und da- 8
durch dem Experiment einen Leitfaden an die Hand zu geben.

Das erwähnte Princip kann folgendermassen dargestellt werden: Denken wir uns ein System von Naturkörpern, welche in gewissen räumlichen Verhältnissen zu einander stehen, und unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Kräfte in Bewegung gerathen, bis sie in bestimmte andere Lagen gekommen sind: so können wir ihre gewonnenen Geschwindigkeiten als eine gewisse mechanische Arbeit betrachten und in solche verwandeln. Wollen wir nun dieselben Kräfte zum zweiten Male wirksam werden lassen, um dieselbe Arbeit noch einmal zu gewinnen, so müssen wir die Körper auf irgend eine Weise in die an-

1) Poggendorff's Annalen LIX 446. 566.

fänglichen Bedingungen durch Anwendung anderer uns zu Gebote stehender Kräfte zurückversetzen; wir werden dazu also eine gewisse Arbeitsgrösse der letzteren wieder verbrauchen. In diesem Falle fordert nun unser Princip, dass die Arbeitsgrösse, welche gewonnen wird, wenn die Körper des Systems aus der Anfangslage in die zweite, und verloren wird, wenn sie aus der zweiten in die erste übergehen, stets dieselbe sei, welches auch die Art, der Weg oder die Geschwindigkeit dieses Uebergangs sein mögen. Denn wäre dieselbe auf irgend einem Wege grösser als auf dem anderen, so würden wir den ersteren zur Gewinnung der Arbeit benutzen können, den zweiten zur Zurückführung, zu welcher wir einen Theil der so eben gewonnenen Arbeit anwenden könnten, und würden so ins Unbestimmte mechanische Kraft gewinnen, ein perpetuum mobile gebaut haben, welches nicht nur sich selbst in Bewegung erhielte, sondern auch noch im Stande wäre nach aussen Kraft abzugeben.

Suchen wir nach dem mathematischen Ausdrucke dieses
9 Princips, so finden wir ihn in dem bekannten Gesetze von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Die Arbeitsgrösse, welche gewonnen und verbraucht wird, kann bekanntlich ausgedrückt werden als ein auf eine bestimmte Höhe h gehobenes Gewicht m; sie ist dann mgh, wo g die Intensität der Schwerkraft. Um senkrecht frei in die Höhe h emporzusteigen braucht der Körper m die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$; und erlangt dieselbe wieder beim Herabfallen. Es ist also $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$; folglich kann die Hälfte des Produktes mv^2, welches in der Mechanik bekanntlich „die Quantität der lebendigen Kraft des Körpers m“ genannt wird, auch an die Stelle des Maasses der Arbeitsgrösse gesetzt werden. Der besseren Uebereinstimmung wegen mit der jetzt gebräuchlichen Art die Intensität der Kräfte zu messen, schlage ich vor, gleich die Grösse $\frac{1}{2}mv^2$ als Quantität der lebendigen Kraft zu bezeichnen, wodurch sie identisch wird mit dem Maasse der Arbeitsgrösse. Für die bisherige Anwendung des Begriffes der lebendigen Kraft, der nur auf das besprochene Princip beschränkt war, ist diese Abänderung ohne Bedeutung, während sie uns im Folgenden wesentliche Vortheile gewähren wird. Das Princip von der Erhaltung der

lebendigen Kraft sagt nun bekanntlich aus: Wenn sich eine beliebige Zahl beweglicher Massenpunkte nur unter dem Einflusse solcher Kräfte bewegt, welche sie selbst gegen einander ausüben, oder welche gegen feste Centren gerichtet sind: so ist die Summe der lebendigen Kräfte aller zusammen genommen zu allen Zeitpunkten dieselbe, in welchen alle Punkte dieselben relativen Lagen gegen einander und gegen die etwa vorhandenen festen Centren einnehmen, wie auch ihre Bahnen und Geschwindigkeiten in der Zwischenzeit gewesen sein mögen. Denken wir die lebendigen Kräfte angewendet, um die Theile des Systems 10
oder ihnen äquivalente Massen auf gewisse Höhen zu heben, so folgt aus dem, was wir eben gezeigt haben, dass auch die so dargestellten Arbeitsgrössen unter den genannten Bedingungen gleich sein müssen. Dieses Princip gilt aber nicht für alle möglichen Arten von Kräften; es wird in der Mechanik gewöhnlich angeknüpft an das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, und dies kann nur für materielle Punkte mit anziehenden und abstossenden Kräften bewiesen werden. Wir wollen hier zunächst zeigen, dass das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte ganz allein da gilt, wo die wirkenden Kräfte[1]) sich auflösen lassen in Kräfte materieller Punkte, welche in der Richtung der Verbindungslinie wirken, und deren Intensität nur von der Entfernung abhängt; in der Mechanik sind solche Kräfte gewöhnlich Centralkräfte genannt worden. Es folgt daraus wiederum auch rückwärts, dass bei allen Wirkungen von Naturkörpern aufeinander, wo das besprochene Princip ganz allgemein auch auf alle kleinsten Theilchen dieser Körper angewendet werden kann, als einfachste Grundkräfte solche Centralkräfte anzunehmen seien.

Betrachten wir zunächst einen materiellen Punkt von der Masse m, der sich bewegt unter dem Einfluss der Kräfte von mehreren zu einem festen System A verbundenen Körpern, so zeigt uns die Mechanik die Mittel an für jeden einzelnen Zeitpunkt die Lage und Geschwindigkeit dieses Punktes bestimmen zu können. Wir würden also die Zeit t als die Urvariable betrachten, und von ihr abhängen lassen die Ordinaten x, y, z

1) D. h. „ihre Auflösbarkeit in Punktkräfte vorausgesetzt“ (1881).

von m in Beziehung auf ein gegen das System A festbestimmtes Coordinatensystem, seine Tangentialgeschwindigkeit q, die den
11 Axen parallelen Componenten derselben $u = dx/dt$, $v = dy/dt$, $w = dz/dt$, und endlich die Componenten der wirkenden Kräfte:

$$X = m\frac{du}{dt}, \quad Y = m\frac{dv}{dt}, \quad Z = m\frac{dw}{dt}.$$

Unser Princip fordert nun, dass $\frac{1}{2}mq^2$, also auch q^2, stets dasselbe sei, wenn m dieselbe Lage gegen A hat, also nicht allein als Function der Urvariablen t, sondern auch als blosse Function der Coordinaten x, y, z hingestellt werden könne, d. h. dass:

$$d(q^2) = \frac{d(q^2)}{dx}dx + \frac{d(q^2)}{dy}dy + \frac{d(q^2)}{dz}dz. \qquad (1)$$

Da $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, so ist $d(q^2) = 2udu + 2vdv + 2wdw$. Wird statt u hier dx/dt, statt du aber Xdt/m aus den oben hingestellten Werthen gesetzt, eben so für v und w die analogen Werthe, so erhalten wir:

$$d(q^2) = \frac{2X}{m}dx + \frac{2Y}{m}dy + \frac{2Z}{m}dz. \qquad (2)$$

Da die Gleichungen 1 und 2 für jedes beliebige dx, dy, dz zusammen stattfinden müssen, so folgt, dass auch einzeln:

$$\frac{d(q^2)}{dx} = \frac{2X}{m}, \quad \frac{dq^2}{dy} = \frac{2Y}{m} \text{ und } \frac{dq^2}{dz} = \frac{2Z}{m}.^{1})$$

Ist aber q^2 blosse Function von x, y, z, so folgt hieraus, dass auch X, Y und Z, d. h. Richtung und Grösse der wirkenden Kraft nur Functionen der Lage von m gegen A seien.

Denken wir uns nun auch statt des Systems A einen ein-
12 zelnen materiellen Punkt a, so folgt aus dem oben bewiesenen, dass die Richtung und Grösse der Kraft, welche von a auf m einwirke, nur bestimmt werde durch die relative Lage von m gegen a. Da nun die Lage von m durch seine Beziehung zu dem einzelnen Punkt a nur noch der Entfernung ma nach bestimmt ist, so würde in diesem Falle das Gesetz dahin zu modificiren sein, dass Richtung und Grösse der Kraft Functionen dieser Entfernung r sein müssen. Denken wir uns die Coordinaten auf irgend ein beliebiges Axensystem bezogen, dessen Anfangspunkt in a liegt, so muss hiernach:

$$md(q^2) = 2Xdx + 2Ydy + 2Zdz = 0 \qquad (3)$$

sein, so oft:

$$d(r^2) = 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$$

ist, d. h. so oft:

$$dz = -\frac{xdx + ydy}{z}.$$

Dieser Werth in Gleichung 3 gesetzt, giebt:

$$\left(X - \frac{x}{z}Z\right)dx + \left(Y - \frac{y}{z}Z\right)dy = 0$$

für jedes beliebige dx und dy, also auch einzeln:

$$X = \frac{x}{z}Z \text{ und } Y = \frac{y}{z}Z,$$

d. h. die Resultante muss nach dem Anfangspunkte der Coordinaten, nach dem wirkenden Punkte a, gerichtet sein.

Es müssen folglich in Systemen, welche ganz allgemein dem Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft[1]) Folge leisten, die einfachen Kräfte der materiellen Punkte Centralkräfte sein.

II. Das Princip von der Erhaltung der Kraft. 13

Wir wollen dem besprochenen Gesetze für die Fälle, wo Centralkräfte wirken, nun noch einen allgemeineren Ausdruck geben.

Ist φ die Intensität der Kraft, welche in der Richtung von r wirkt, wenn sie anzieht, als positiv, wenn sie abstösst, als negativ gesetzt, also:

$$X = -\frac{x}{r}\varphi; \quad Y = -\frac{y}{r}\varphi; \quad Z = -\frac{z}{r}\varphi \qquad (1)$$

so ist gemäss der Gleichung 2 des vorigen Abschnittes:

$$md(q^2) = -2\frac{\varphi}{r}(xdx + ydy + zdz); \qquad \text{also:}$$

$$\tfrac{1}{2}md(q^2) = -\varphi dr.$$

1) Dieser Schluss erfordert eine Beschränkung (1881). S. Zusatz 3.

1) Und der Gleichheit der Action und Reaction (1881).

Oder wenn Q und R, q und r zusammengehörige Tangentialgeschwindigkeiten und Entfernungen vorstellen:

$$\tfrac{1}{2}mQ^2 - \tfrac{1}{2}mq^2 = -\int_r^R \varphi\, dr. \qquad (2)$$

Betrachten wir diese Gleichung näher, so finden wir auf der linken Seite den Unterschied der lebendigen Kräfte, welche m bei zwei verschiedenen Entfernungen hat. Um die Bedeutung der Grösse $\int_r^R \varphi\, dr$ zu finden, denken wir uns die Intensitäten von

φ, welche zu verschiedenen Punkten der Verbindungslinie von m und a gehören, durch rechtwinkelig aufgesetzte Ordinaten dargestellt: so würde die genannte Grösse den Flächeninhalt
14 bezeichnen, den die Curve zwischen den zu R und r gehörigen Ordinaten mit der Abscissenaxe einschliesst. Wie man sich nun diesen Flächenraum als die Summe aller der unendlich vielen in ihm liegenden Abscissen vorstellen kann, so ist jene Grösse der Inbegriff aller Kraftintensitäten, welche in den zwischen R und r liegenden Entfernungen wirken. Nennen wir nun die Kräfte, welche den Punkt m zu bewegen streben, so lange sie eben noch nicht Bewegung bewirkt haben, Spannkräfte, im Gegensatz zu dem, was die Mechanik lebendige Kraft nennt, so würden wir die Grösse $\int_r^R \varphi\, dr$ als die Summe der Spannkräfte zwischen den Entfernungen R und r bezeichnen können, und das obige Gesetz würde auszusprechen sein: Die Zunahme der lebendigen Kraft eines Massenpunktes bei seiner Bewegung unter dem Einfluss einer Centralkraft ist gleich der Summe der zu der betreffenden Aenderung seiner Entfernung gehörigen Spannkräfte.

Denken wir uns zwei Punkte unter der Wirkung einer anziehenden Kraft stehend in einer bestimmten Entfernung R, so werden sie durch Wirkung der Kraft selbst nach den kleineren Entfernungen r hingetrieben, und dabei wird ihre Geschwindigkeit, ihre lebendige Kraft, zunehmen; sollen sie aber nach grösseren Entfernungen r gelangen, so muss ihre lebendige Kraft abnehmen und endlich ganz verbraucht wer-

den; wir können deshalb bei anziehenden Kräften die Summe der Spannkräfte für die Entfernungen zwischen $r = 0$ und $r = R$ $\int_0^R \varphi\, dr$, als die noch vorhandenen, die aber zwischen $r = R$, und $r = \infty$ als die verbrauchten bezeichnen; die ersteren können unmittelbar, die letzteren erst nach einem 15
äquivalenten Verlust an lebendiger Kraft in Wirsamkeit treten. Umgekehrt ist es bei abstossenden Kräften. Befinden sich die Punkte in der Entfernung R, so werden sie bei ihrer Entfernung lebendige Kraft gewinnen, und als die vorhandenen Spannkräfte werden die zu bezeichnen sein zwischen $r = R$ und $r = \infty$, als die verlorenen, die zwischen $r = 0$ und $r = R$.

Um nun unser Gesetz ganz allgemein durchzuführen, denken wir uns eine beliebige Anzahl materieller Punkte von den Massen m_1, m_2, m_3 u. s. w. allgemein bezeichnet mit m_a, deren Coordinaten x_a, y_a, z_a; die den Axen parallelen Componenten der darauf wirkenden Kräfte seien X_a, Y_a, Z_a, die nach den Axen zerlegten Geschwindigkeiten u_a, v_a, w_a, die Tangentialgeschwindigkeiten q_a; die Entfernung zwischen m_a und m_b sei r_{ab}, die Centralkraft zwischen beiden φ_{ab}. Es ist nun für einen einzelnen Punkt m_n analog der Gleichung 1.

$$X_n = \Sigma\left[(x_a - x_n)\frac{\varphi_{an}}{r_{an}}\right] = m_n\frac{du_n}{dt}$$

$$Y_n = \Sigma\left[(y_a - y_n)\frac{\varphi_{an}}{r_{an}}\right] = m_n\frac{dv_n}{dt}$$

$$Z_n = \Sigma\left[(z_a - z_n)\frac{\varphi_{an}}{r_{an}}\right] = m_n\frac{dw_n}{dt}$$

wo das Summationszeichen Σ sich auf alle die Glieder bezieht, welche entstehen, wenn man nach einander für den Index a alle einzelnen Indices 1, 2, 3 etc. mit Ausnahme von n setzt.

Multipliciren wir die erste Gleichung mit $dx_n = u_n dt$, die zweite mit $dy_n = v_n dt$, die dritte mit $dz_n = w_n dt$, und denken wir uns die drei dann entstehenden Gleichungen für alle ein- 16
zelnen Punkte m_b aufgestellt, wie es hier für m_n geschehen ist, und alle addirt, so erhalten wir:

$$\Sigma\left[(x_a - x_b)\,dx_b\,\frac{\varphi_{ab}}{r_{ab}}\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2}m_a\,d\,(u_a^2)\right]$$

$$\Sigma\left[(y_a - y_b)\,dy_b\,\frac{\varphi_{ab}}{r_{ab}}\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2}m_a\,d\,(v_a^2)\right]$$

$$\Sigma\left[(z_a - z_b)\,dz_b\,\frac{\varphi_{ab}}{r_{ab}}\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2}m_a\,d\,(w_a^2)\right].$$

Die Glieder der Reihe links werden erhalten, wenn man erst statt a alle einzelnen Indices 1, 2, 3 u. s. w. setzt, und bei jedem einzelnen auch für b alle grösseren und alle kleineren Werthe, als a schon hat. Die Summen zerfallen also in zwei Theile, in deren einem a stets grösser ist als b, im andern stets kleiner, und es ist klar, dass für jedes Glied des einen Theils:

$$(x_p - x_q)\,dx_q\,\frac{\varphi_{pq}}{r_{pq}}$$

in dem anderen eines vorkommen muss:

$$(x_q - x_p)\,dx_p\,\frac{\varphi_{pq}}{r_{pq}}$$

beide addirt geben:

$$-(x_p - x_q)\,(dx_p - dx_q)\,\frac{\varphi_{pq}}{r_{pq}}.$$

Machen wir diese Zusammenziehung in den Summen, addiren sie alle drei und setzen:

$$\tfrac{1}{2}d\left[(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2\right] = r_{ab}\,dr_{ab},$$

so erhalten wir:

$$-\Sigma[\varphi_{ab}\,dr_{ab}] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2}m_a\,d\,(q_a^2)\right] \qquad (3)$$

oder:

17
$$-\Sigma\left[\int_{r_{ab}}^{R_{ab}} \varphi_{ab}\,dr_{ab}\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2}m_a\,Q_a^2\right] - \Sigma\left[\tfrac{1}{2}m_a\,q_a^2\right] \qquad (4)$$

wenn R und Q sowie r und q zusammengehörige Werthe bezeichnen.

Wir haben hier links wieder die Summe der verbrauchten Spannkräfte, rechts die der lebendigen Kräfte des ganzen Systems, und wir können das Gesetz jetzt so aussprechen: In

allen Fällen der Bewegung freier materieller Punkte unter dem Einfluss ihrer anziehenden und abstossenden Kräfte, deren Intensitäten nur von der Entfernung abhängig sind, ist der Verlust an Quantität der Spannkraft stets gleich dem Gewinn an lebendiger Kraft, und der Gewinn der ersteren dem Verlust der letzteren. Es ist also stets die Summe der vorhandenen lebendigen und Spannkräfte constant. In dieser allgemeinsten Form können wir unser Gesetz als das Princip von der Erhaltung der Kraft bezeichnen.

In der gegebenen Ableitung des Gesetzes ändert sich nichts, wenn ein Theil der Punkte, welche wir mit dem durchlaufenden Buchstaben b bezeichnen wollen, fest gedacht wird, so dass q_b constant $= 0$; es ist dann die Form des Gesetzes:

$$\Sigma[\varphi_{ab}\,dr_{ab}] + \Sigma[\varphi_{ab}\,dr_{ab}] = -\Sigma\left[\tfrac{1}{2}m_b\,d\,(q_b^2)\right]. \qquad (5)$$

Es bleibt noch übrig zu bemerken, in welchem Verhältniss das Princip von der Erhaltung der Kraft zu dem allgemeinsten Gesetze der Statik, dem sogenannten Princip der virtuellen Geschwindigkeiten steht. Dieses folgt nämlich unmittelbar aus unseren Gleichungen 3 und 5. Soll Gleichgewicht stattfinden bei einer bestimmten Lagerung der Punkte m_a, d. h. soll für den Fall, dass diese Punkte ruhen, also 18
$q_a = 0$, dieser Zustand der Ruhe auch bestehen bleiben, also alle $dq_a = 0$, so folgt aus der Gleichung 3:

$$\Sigma[\varphi_{ab}\,dr_{ab}] = 0, \qquad (6)$$

oder wenn auch Kräfte von Punkten m_b ausserhalb des Systems einwirken, aus Gleichung 5:

$$\Sigma[\varphi_{ab}\,dr_{ab}] + \Sigma[\varphi_{ab}\,dr_{ab}] = 0. \qquad (7)$$

In diesen Gleichungen sind unter dr Aenderungen der Entfernung zu verstehen, welche bei beliebigen, durch die anderweitigen Bedingungen des Systems zugelassenen, kleinen Verschiebungen der Punkte m_a eintreten. Wir haben in den früheren Deduktionen gesehen, dass eine Vermehrung der lebendigen Kraft, also auch ein Uebergang aus Ruhe in Bewegung, nur durch einen Verbrauch von Spannkraft erzeugt werden kann; die letzten Gleichungen sagen dem entsprechend aus, dass unter solchen Bedingungen, wo durch keine einzige

der möglichen Bewegungsrichtungen in dem ersten Augenblicke Spannkraft verbraucht wird, das System, wenn es einmal in Ruhe ist, auch in Ruhe bleiben muss.

Dass aus den hingestellten Gleichungen sämmtliche Gesetze der Statik hergeleitet werden können, ist bekannt. Die für die Natur der wirkenden Kräfte wichtigste Folgerung ist diese: Denken wir uns statt der beliebigen kleinen Verschiebungen der Punkte m solche gesetzt, wie sie stattfinden könnten, wenn das System in sich fest verbunden wäre, so dass in Gleichung 7 alle $dr_{ab} = 0$, so folgt einzeln:

$$\Sigma[\varphi_{ab}\, dr_{ab}] = 0 \qquad \text{und}$$
$$\Sigma[\varphi_{ab}\, dr_{ab}] = 0.$$

Dann müssen also sowohl die äusseren, wie die inneren Kräfte für sich der Gleichgewichtsbedingung genügen. Wird demnach
19 ein beliebiges System von Naturkörpern durch äussere Kräfte in eine bestimmte Gleichgewichtslage gebracht, so wird das Gleichgewicht nicht aufgehoben, 1) wenn wir die einzelnen Punkte des Systems in ihrer jetzigen Lage unter sich fest verbunden denken, und 2) wenn wir dann die Kräfte wegnehmen, welche dieselben gegen einander ausüben. Daraus folgt nun aber weiter: Werden die Kräfte, welche zwei Massenpunkte aufeinander ausüben, durch zwei an dieselben angebrachte äussere Kräfte in Gleichgewicht gesetzt, so müssen sich diese auch das Gleichgewicht halten, wenn statt der Kräfte der Punkte gegeneinander eine feste Verbindung derselben substituirt wird. Kräfte, welche zwei Punkte einer festen geraden Linie angreifen, halten sich aber nur im Gleichgewicht, wenn sie in dieser Linie selbst liegen, gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Es folgt also auch für die Kräfte der Punkte selbst, welche den äusseren gleich und entgegengesetzt sind, dass dieselben in der Richtung der verbindenden Linie liegen, also anziehende oder abstossende sein müssen.

Wir können die aufgestellten Sätze folgendermaassen zusammenfassen:

1) So oft Naturkörper vermöge anziehender oder abstossender Kräfte, welche von der Zeit und Geschwindigkeit

unabhängig sind, auf einander einwirken, muss die Summe ihrer lebendigen und Spannkräfte eine constante sein; das Maximum der zu gewinnenden Arbeitsgrösse also ein bestimmtes, endliches.

2) Kommen dagegen in den Naturkörpern auch Kräfte vor, welche von der Zeit und Geschwindigkeit abhängen, oder nach anderen Richtungen wirken als der Verbindungslinie je zweier wirksamer materieller Punkte, also z. B. rotirende, so würden Zusammenstellungen solcher Körper möglich sein, in 20
denen entweder in das Unendliche Kraft verloren geht, oder gewonnen wird.[1])

3) Beim Gleichgewicht eines Körpersystems unter der Wirkung von Centralkräften müssen sich die inneren und die äusseren Kräfte für sich im Gleichgewicht halten, sobald wir die Körper des Systems unter sich unverrückbar verbunden denken, und nur das ganze System gegen ausser ihm liegende Körper beweglich. Ein festes System solcher Körper wird deshalb nie durch die Wirkung seiner inneren Kräfte in Bewegung gesetzt werden können, sondern nur durch Einwirkung äusserer Kräfte. Gäbe es dagegen andere als Centralkräfte, so würden sich feste Verbindungen von Naturkörpern herstellen lassen, welche sich von selbst bewegten, ohne einer Beziehung zu anderen Körpern zu bedürfen.

III. Die Anwendung des Princips in den mechanischen Theoremen.

Wir gehen jetzt zu den speciellen Anwendungen des Gesetzes von der Constanz der Kraft über. Zuerst haben wir diejenigen Fälle kurz zu erwähnen, in denen das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft bisher schon benutzt und anerkannt ist.

1) Alle Bewegungen, welche unter dem Einflusse der allgemeinen Gravitationskraft vor sich gehen, also die der himmlischen und der schweren irdischen Körper. Bei jenen spricht sich das Gesetz aus in der Zunahme ihrer

1) S. Zusatz 4.

Geschwindigkeit, sobald sie sich in ihrer Bahn dem Central-
21 körper nähern, in der Unveränderlichkeit ihrer grossen Bahnaxen, ihrer Umlaufs- und Rotationszeit; bei diesen in dem bekannten Gesetze, dass die Endgeschwindigkeit des Falles nur von der Fallhöhe, nicht von der Richtung und Form der durchlaufenen Bahn abhängt, und das diese Geschwindigkeit, wenn sie nicht durch Reibung oder unelastischen Stoss vernichtet wird, gerade hinreicht, die gefallenen Körper wieder zu derselben Höhe emporzutreiben, aus der sie herabgefallen sind. Dass die Fallhöhe eines bestimmten Gewichtes als Maass der Arbeitsgrössen unserer Maschinen benutzt wird, ist schon erwähnt worden.

2) Die Uebertragung der Bewegungen durch die incompressibeln festen und flüssigen Körper, sobald nicht Reibung oder Stoss unelastischer Stoffe stattfindet. Unser allgemeines Princip wird für diese Fälle gewöhnlich als die Regel ausgesprochen, dass eine durch mechanische Potenzen fortgepflanzte und abgeänderte Bewegung stets in demselben Verhältniss an Kraftintensität abnimmt, als sie an Geschwindigkeit zunimmt. Denken wir uns also durch eine Maschine, in welcher durch irgend einen Vorgang gleichmässig Arbeitskraft erzeugt wird, das Gewicht m mit der Geschwindigkeit c gehoben, so wird durch eine andere mechanische Einrichtung das Gewicht nm gehoben werden können, aber nur mit der Geschwindigkeit c/n, so dass in beiden Fällen die Quantität der von der Maschine in der Zeiteinheit erzeugten Spannkraft durch mgc darzustellen ist, wo g die Intensität der Schwerkraft darstellt.

3) Die Bewegungen vollkommen elastischer fester und flüssiger Körper. Als Bedingung der voll-
22 kommenen Elasticität müssen wir nur der gewöhnlich hingestellten, dass der in seiner Form oder seinem Volumen veränderte Körper dieselben vollständig wiedererlange, auch noch hinzufügen, dass in seinem Innern keine Reibung der Theilchen stattfinde. Bei den Gesetzen dieser Bewegungen ist unser Princip am frühesten erkannt, und am häufigsten benutzt worden. Als die gewöhnlichsten Fälle der Anwendung bei den festen Körpern sind zu erwähnen der elastische Stoss, dessen

Gesetze sich leicht aus unserem Princip und dem von der Erhaltung des Schwerpunktes herleiten lassen, und die mannigfaltigen elastischen Vibrationen, welche fortdauern auch ohne neuen Anstoss, bis sie durch die Reibung im Innern und die Abgabe der Bewegung an äussere Medien vernichtet sind. Bei den flüssigen Körpern, sowohl tropfbaren (offenbar auch elastisch, nur mit sehr hohem Elasticitätsmodulus und mit einer Gleichgewichtslage der Theilchen versehen) als auch gasigen (mit niedrigem Elasticitätsmodulus und ohne Gleichgewichtslage) setzen sich im Allgemeinen alle Bewegungen bei ihrer Ausbreitung in Wellenform um. Dazu gehören die Wellen der Oberfläche tropfbarer Flüssigkeiten, die Bewegung des Schalls, und wahrscheinlich die des Lichts und der strahlenden Wärme.

Die lebendige Kraft eines einzelnen Theilchens Δm in einem von einem Wellenzuge durchzogenen Medium ist offenbar zu bestimmen durch die Geschwindigkeit, welche dasselbe in der Gleichgewichtslage hat. Die allgemeine Wellengleichung bestimmt die Geschwindigkeit u bekanntlich, wenn a^2 die Intensität, λ die Wellenlänge, α die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, x die Abscisse und t die Zeit ist, folgendermaassen:

$$u = a \cdot cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \alpha t)\right].$$

Für die Gleichgewichtslage ist $u = a$, folglich die lebendige 23
Kraft des Theilchens Δm während der Wellenbewegung $\frac{1}{2}\Delta m a^2$, proportional der Intensität. Breiten sich Wellen von einem Centrum kugelförmig aus, so setzen sie immer grössere Massen in Bewegung, folglich muss die Intensität abnehmen, wenn die lebendige Kraft dieselbe bleiben soll, Da nun die von der Welle umfassten Massen zunehmen wie die Quadrate der Entfernung, so folgt das bekannte Gesetz, dass die Intensitäten im umgekehrten Verhältnisse abnehmen[1]).

1) Hier wäre zu erwähnen, dass bei fortschreitenden ebenen Wellen die Quantität der Spannkraft des comprimirten oder verschobenen elastischen Medium einen zweiten, eben so grossen Theil der Energie bildet, wie die lebendige Kraft (1881).

Die Gesetze der Zurückwerfung, Brechung und Polarisation des Lichtes an der Grenze zweier Medien von verschiedener Wellengeschwindigkeit sind bekanntlish schon von Fresnel hergeleitet worden aus der Annahme, dass die Bewegung der Grenztheilchen in beiden Mitteln dieselbe sei, und aus der Erhaltung der lebendigen Kraft. Bei der Interferenz zweier Wellenzüge findet keine Vernichtung der lebendigen Kraft statt, sondern nur eine andere Vertheilung. Zwei Wellenzüge von den Intensitäten a^2 und b^2, welche nicht interferiren, geben allen getroffenen Punkten die Intensität $a^2 + b^2$; interferiren sie, so haben die Maxima $(a + b)^2$, um $2ab$ grösser, die Minima $(a - b)^2$, um eben so viel kleiner als $a^2 + b^2$.

Vernichtet wird die lebendige Kraft der elastischen Wellen erst bei denjenigen Vorgängen, welche wir als Absorption derselben bezeichnen. Die Absorption der Schallwellen finden wir hauptsächlich durch das Gegenstossen gegen nachgiebige unelastische Körper, z. B. Vorhänge, Decken befördert, dürfen sie also wohl hauptsächlich für einen Uebergang der Bewegung an die getroffenen Körper und Vernichtung in diesen durch Reibung halten; ob die Bewegung auch durch Reibung der
24 Lufttheilchen gegen einander vernichtet werden könne, möchte noch nicht zu entscheiden sein.[1]) Die Absorption der Wärmestrahlen wird von einer proportionalen Wärmeentwickelung begleitet; in wiefern die letztere einem gewissen Kraftäquivalente entspreche, werden wir im nächsten Abschnitt behandeln. Die Erhaltung der Kraft würde stattfinden, wenn so viel Wärme, als in dem ausstrahlenden Körper verschwindet, in dem bestrahlten wiedererscheint, vorausgesetzt, dass keine Ableitung stattfinde, und kein Theil der Strahlung anderswohin gelangt. Das Theorem ist bei den Versuchen über Wärmestrahlung bisher wohl vorausgesetzt worden, doch sind mir keine Versuche zu seiner Begründung bekannt. Bei der Absorption der Lichtstrahlen durch die unvollkommen oder gar nicht durchsichtigen Körper kennen wir dreierlei Vorgänge. Zuerst nehmen die phosphorescirenden Körper das Licht in solcher Weise in sich auf, dass sie es nachher wieder als Licht entlassen können. Zweitens scheinen die meisten, vielleicht alle Lichtstrahlen Wärme zu erregen. Der Annahme von der Identität der wärmenden, leuchtenden und chemischen Strahlen des Spectrum sind in der neueren Zeit die scheinbaren Hindernisse immer mehr aus dem Wege geräumt[1]), nur scheint das Wärmeäquivalent der chemischen und leuchtenden Strahlen ein höchst geringes zu sein im Vergleich zu ihrer intensiven Wirkung auf das Auge. Sollte sich die Gleichartigkeit dieser verschieden wirkenden Strahlungen aber nicht bestätigen, so 25
würden wir allerdings das Ende der Lichtbewegung für ein unbekanntes erkären müssen. In vielen Fällen drittens erzeugt das absorbirte Licht chemische Wirkungen. In Bezug auf die Kraftverhältnisse werden hier zweierlei Arten solcher Wirkungen unterschieden werden müssen, einmal diejenigen, wo es nur den Anstoss zur Thätigkeit der chemischen Verwandtschaft giebt, ähnlich den katalytisch wirkenden Körpern, z. B. die Wirkung auf ein Gemenge von Chlor und Wasserstoff; und zweitens diejenigen, wo es den chemischen Verwandtschaften entgegenwirkt, z. B. bei der Zersetzung der Silbersalze, bei der Einwirkung auf grüne Pflanzentheile. Bei den meisten dieser Vorgänge sind aber die Resultate der Lichteinwirkung noch so wenig gekannt, dass wir über die Grösse der dabei auftretenden Kräfte noch gar nicht urtheilen können; bedeutend durch ihre Quantität und Intensität scheinen dieselben nur bei der Einwirkung auf die grünen Pflanzentheile zu sein.

1) Ist jetzt freilich nachgewiesen (1881).

IV. Das Kraftäquivalent der Wärme.

Diejenigen mechanischen Vorgänge, bei welchen man bisher einen absoluten Verlust von Kraft angenommen hat, sind:

1) Der Stoss unelastischer Körper. Derselbe ist meist mit einer Formveränderung und Verdichtung der gestossenen Körper verbunden, also mit Vermehrung der Spannkräfte; dann finden wir bei oft wiederholten Stössen der Art eine beträchtliche Wärmeentwickelung, z. B. beim Hämmern eines Metall-

1) S. Melloni in Pogg. Ann. Bd. LVII. S. 300. Brücke in Ann. Bd. LXV. 593.

stückes; endlich wird ein Theil der Bewegung als Schall an die anstossenden festen und luftförmigen Körper abgegeben.

26 2) Die Reibung, sowohl an den Oberflächen zweier sich über einander hinbewegender Körper, als im Innern derselben bei Formveränderungen, durch die Verschiebung der kleineren Theilchen aneinander hervorgebracht. Auch bei der Reibung finden meistens geringe Veränderungen in der moleculären Constitution der Körper, namentlich im Anfang ihres Aneinanderreibens, statt; späterhin pflegen sich die Oberflächen einander so zu accomodiren, dass diese Veränderungen bei fernerer Bewegung als verschwindend klein zu setzen sein möchten. In manchen Fällen fehlen dieselben wohl ganz, z. B. wenn Flüssigkeiten sich an festen Körpern oder unter einander reiben. Ausserdem finden aber stets auch thermische und electrische Aenderungen statt.

Man pflegt in der Mechanik die Reibung als eine Kraft darzustellen, welche der vorhandenen Bewegung entgegenwirkt, und deren Intensität eine Function der Geschwindigkeit ist. Offenbar ist diese Auffassung nur ein zum Behuf der Rechnungen gemachter, höchst unvollständiger Ausdruck des complicirten Vorganges, bei welchem die verschiedensten Molecularkräfte in Wechselwirkung treten. Aus jener Auffassung folgte, dass bei der Reibung lebendige Kraft absolut verloren ginge, ebenso nahm man es beim elastischen Stosse an. Dabei ist aber nicht berücksichtigt worden, dass abgesehen von der Vermehrung der Spannkräfte durch die Compression der reibenden oder gestossenen Körper, uns sowohl die gewonnene Wärme eine Kraft repräsentirt, durch welche wir mechanische Wirkungen erzeugen können, als auch die meistentheils erzeugte Electricität entweder direct durch ihre anziehenden und abstossenden Kräfte, oder indirect dadurch, dass sie Wärme ent-
27 wickelt. Es bliebe also zu fragen übrig, ob die Summe dieser Kräfte immer der verlorenen mechanischen Kraft entspricht. In den Fällen, wo die molecularen Aenderungen und die Electricitätsentwickelung möglichst vermieden sind, würde sich diese Frage so stellen, ob für einen gewissen Verlust an mechanischer Kraft jedesmal eine bestimmte Quantität Wärme entsteht, und inwiefern eine Wärmequantität einem Aequivalent mechanischer

Kraft entsprechen kann. Zur Lösung der ersteren Frage sind erst wenige Versuche angestellt. Joule[1]) hat die Wärmemengen untersucht, welche bei der Reibung des Wassers in engen Röhren und in einem Gefässe entwickelt werden, wo es durch ein nach Art einer Turbine construirtes Rad in Bewegung gesetzt wurde; er hat im ersteren Falle gefunden, dass die Wärme, welche 1 kgr Wasser um 1° C. erwärmt, 452 kgr um ein Meter hebt, im zweiten 521 kgr. Indessen entsprechen seine Messungsmethoden zu wenig der Schwierigkeit der Untersuchung, als dass diese Resultate irgendwie auf Genauigkeit Anspruch machen könnten[2]); wahrscheinlich sind diese Zahlen zu hoch, weil bei seinem Verfahren wohl leicht Wärme für die Beobachtung verloren werden konnte, dagegen der nothwendige Verlust der mechanischen Kraft in den übrigen Maschinentheilen von dieser nicht in Abrechnung gebracht ist.

Wenden wir uns nun zu der ferneren Frage, in wie weit Wärme einem Kraftäquivalent entsprechen könne. Die materielle Theorie der Wärme muss nothwendig die Quantität des Wärmestoffs als constant ansehen; mechanische Kraft kann 28
er nach ihr nur durch sein Streben sich auszudehnen erzeugen. Für sie kann das Kraftäquivalent der Wärme also auch nur in der Arbeit bestehen, welche dieselbe bei ihrem Uebergang aus einer höheren in eine niedere Temperatur leistet; in diesem Sinne haben Carnot und Clapeyron die Aufgabe bearbeitet, und alle Folgerungen aus der Annahme eines solchen Aequivalents wenigstens für Gase und Dämpfe bestätigt gefunden.

Um die Reibungswärme zu erklären, muss die materielle Theorie entweder annehmen, dass dieselbe von aussen zugeleitet sei, nach W. Henry,[3]) oder dass dieselbe nach Berthollet[4]) durch Compression der Oberflächen und der abgeriebenen

1) J. P. Joule. On the existence of an equivalent relation between heat and the ordinary forms of mechanical power. Phil. mag. XXVII. 205.

2) Dieses Urtheil bezieht sich nur auf die allerersten damals bekannt gewordenen Versuche Joule's. Die späteren mit vollendeter Sachkenntniss und eiserner Energie durchgeführten Versuche desselben Forschers verdienen die höchste Bewunderung; diese ergeben 425 kgr (1881).

3) Mem. of the Society of Manchester. T. V. p. 2. London 1802.

4) Statique chimique. T. I. p. 247.

Theile entstehe. Der ersteren Annahme fehlt bisher noch jede Erfahrung, dass in der Umgegend geriebener Theile eine der oft gewaltigen Wärmemenge entsprechende Kälte entwickelt werde; die zweite, abgesehen davon, dass sie eine ganz unwahrscheinlich grosse Wirkung der durch die hydrostatische Wage meist nicht wahrnehmbaren Verdichtung annehmen muss, scheitert ganz bei der Reibung von Flüssigkeiten und bei den Versuchen, wo Eisenkeile durch Hämmern glühend und weich gemacht, Eisstücke durch Reibung geschmolzen werden,[1]) da doch das weichgewordene Eisen und das durch Schmelzung entstandene Wasser nicht in dem comprimirten Zustande geblieben sein können. Ausserdem beweist uns aber auch die Erzeugung von Wärme durch electrische Bewegungen, dass
29 die Quantität der Wärme in der That absolut vermehrt werden könne. Wenn wir auch die Reibungselectricität und die voltaische übergehen, weil man annehmen könnte, durch irgend eine Verbindung und Beziehung der Electricitäten zum Wärmestoff, werde in diesen Fällen derselbe nur von der Ursprungsstelle fortgeführt und in dem erwärmten Leitungsdraht abgesetzt: so bleiben uns noch zwei Wege übrig electrische Spannungen auf rein mechanischem Wege hervorzubringen, wobei nirgends Wärme vorhanden ist, welche fortgeführt werden könnte, nämlich durch Vertheilung und durch Bewegung von Magneten. Haben wir einen positiv electrischen vollkommen isolirten Körper, der seine Electricität nicht verlieren kann, so wird ein angenäherter isolirter Leiter $+E$ zeigen, wir werden diese auf die Innenseite einer Batterie entladen können, den Leiter entfernen, worauf er freie $-E$ enthält, welche in die Aussenseite der ersten oder in eine zweite Batterie entladen wird. Wir werden durch Wiederholung dieses Verfahrens offenbar eine beliebig grosse Batterie beliebig oft laden und durch ihre Entladung Wärme erzeugen können, ohne dass dieselbe irgendwo verschwindet. Dagegen werden wir eine gewisse mechanische Kraftgrösse verbraucht haben, weil bei jeder Entfernung des negativ geladenen Leiters von dem positiven ver-

1) Humphrey Davy, Essay on heat, light and the combinations of light.

theilenden Körper die Anziehung zwischen beiden überwunden werden muss. Im Wesentlichen wird dieses Verfahren offenbar ausgeführt bei dem Gebrauche des Electrophors zur Ladung einer Leydner Flasche. Derselbe Fall findet bei den magnetelectrischen Maschinen statt; so lange Magnet und Anker gegeneinander bewegt werden, entstehen electrische Ströme, welche im Schliessungsdraht Wärme erzeugen, und indem sie der Bewegung des Ankers gegen den Magneten fortdauernd entgegen- 30
wirken, dafür einen gewissen Theil der mechanischen Kraft zerstören. Es kann hier offenbar aus den die Maschine constituirenden Körpern in das Unendliche Wärme entwickelt werden, ohne dass dieselbe irgendwo verschwände. Dass der magnetelectrische Strom auch in dem direct unter dem Einfluss des Magneten stehenden Theil der Spirale Wärme, und nicht Kälte, erzeugt, hat direct durch das Experiment Joule[1]) zu beweisen gesucht. Aus diesen Thatsachen folgt nun, dass die Quantität der Wärme absolut vermehrt werden könne durch mechanische Kräfte, dass deshalb die Wärmeerscheinungen nicht hergeleitet werden können von einem Stoffe, welcher durch sein blosses Vorhandensein dieselben bedinge, sondern dass sie abzuleiten seien von Veränderungen, von Bewegungen, sei es eines eigenthümlichen Stoffes, sei es der schon sonst bekannten ponderablen und imponderablen Körper, z. B. der Electricitäten oder des Lichtäthers. Das, was bisher Quantität der Wärme genannt worden ist, würde hiernach der Ausdruck sein erstens für die Quantität der lebendigen Kraft der Wärmebewegung, und zweitens für die Quantität derjenigen Spannkräfte in den Atomen, welche bei einer Veränderung ihrer Anordnung eine solche Bewegung hervorbringen können; der erstere Theil würde dem entsprechen, was bisher freie, der zweite dem, was latente Wärme genannt ist. Wenn es erlaubt ist einen Versuch zu machen den Begriff dieser Bewegung noch bestimmter zu fassen, so scheint im Allgemeinen eine der Ansicht von Ampère sich anschliessende Hypothese dem jetzigen Zustand der Wissen-
schaft am besten zu entsprechen. Denken wir uns die Körper 31
aus Atomen gebildet, welche selbst aus differenten Theilchen

1) Philos. Magazine. 1844.

bestehen (chemischen Elementen, Electricitäten etc.), so können an einem solchen Atom dreierlei Arten von Bewegungen unterschieden werden, nämlich 1) Verschiebung des Schwerpunktes, 2) Drehung um den Schwerpunkt, 3) Verschiebungen der Theilchen des Atoms gegeneinander. Die beiden ersteren würden durch die Kräfte der Nachbaratome ausgeglichen werden und sich deshalb auf diese in Wellenform fortpflanzen, eine Fortpflanzungsart, welche wohl der Strahlung, nicht aber der Leitung der Wärme entspricht. Bewegungen der einzelnen Theile des Atoms gegeneinander würden sich durch die innerhalb des Atoms befindlichen Kräfte ausgleichen und die Nachbaratome nur langsam in Mitbewegung setzen können, wie eine schwingende Saite die andere, dafür aber selbst eine gleiche Quantität Bewegung verlieren; diese Art der Fortpflanzung scheint der der geleiteten Wärme ähnlich zu sein. Auch ist im Allgemeinen klar, dass solche Bewegungen in den Atomen Aenderungen in den Molekularkräften, also Ausdehnung und Aenderung des Aggregatzustandes, hervorbringen können; welcher Art aber diese Bewegungen seien, zu bestimmen, dazu fehlen uns alle Anhaltspunkte; auch ist für unseren Zweck die Einsicht der Möglichkeit hinreichend, dass die Wärmeerscheinungen als Bewegungen gefasst werden können. Die Erhaltung der Kraft würde bei dieser Bewegung so weit stattfinden, als bisher die Erhaltung der Quantität des Wärmestoffes erkannt ist, nämlich bei allen Erscheinungen der Leitung und Strahlung aus einem Körper zu dem andern, bei der Bindung und Entbindung von Wärme durch Aenderung des Aggregatzustandes.

32 Von den verschiedenen Entstehungsweisen der Wärme haben wir die durch Einstrahlung und durch mechanische Kräfte besprochen, die durch Electricität werden wir unten durchgehen. Es bleibt die Wärmeentwickelung durch chemische Processe. Man hat dieselbe bisher für ein Freiwerden von Wärmestoff erklärt, welcher in den sich verbindenden Körpern latent vorhanden sei. Da man hiernach jedem einfachen Körper und jeder chemischen Verbindung, die noch weitere Verbindungen höherer Ordnung eingehen kann, eine bestimmte Quantität latenter Wärme beilegen musste, welche nothwendig mit zu ihrer chemischen Constitution gehörte: so folgte hieraus das Gesetz,

welches man auch theilweise in der Erfahrung bewahrheitet hat, dass nämlich bei der chemischen Verbindung mehrerer Stoffe zu gleichen Producten stets gleich viel Wärme hervorgebracht werde, in welcher Ordnung und in welchen Zwischenstufen auch die Verbindung vor sich gehen möge.[1]) Nach unserer Vorstellungsweise würde die bei chemischen Processen entstehende Wärme die Quantität der lebendigen Kraft sein, welche durch die bestimmte Quantität der chemischen Anziehungskräfte hervorgebracht werden kann, und das obige Gesetz würde der Ausdruck für das Princip von der Erhaltung der Kraft in diesem Falle werden.

Ebensowenig, als man die Bedingungen und Gesetze der Erzeugung von Wärme untersucht hat, obgleich eine solche unzweifelhaft stattfindet, ist dies für das Verschwinden derselben geschehen. Bisher kennt man nur die Fälle, wo chemische Verbindungen aufgehoben wurden, oder dünnere Aggregatzustände eintraten und dadurch Wärme latent wurde. Ob bei 33
der Erzeugung mechanischer Kraft Wärme verschwinde, was ein nothwendiges Postulat der Erhaltung der Kraft sein würde, ist noch niemals gefragt worden. Ich kann dafür nur einen Versuch von Joule[2]) anführen, der ziemlich zuverlässig zu sein scheint. Derselbe fand nämlich, dass die Luft bei dem Ausströmen aus einem Behälter von 136,5 Cubikzollen, in welchem sie unter 22 Atmosphären Druck stand, das umgebende Wasser um $4^{\circ},085$ *F.* erkältete, sobald sie in die Atmosphäre ausströmte, also deren Widerstand zu überwinden hatte. Dagegen trat keine Temperaturveränderung ein, wenn dieselbe in ein luftleeres, ebenso grosses Gefäss überströmte, welches in demselben Wassergefäss stand, wo sie also keinen Widerstand zu überwinden hatte und keine mechanische Kraft ausübte.

Wir haben jetzt noch zu untersuchen, in welchem Verhältniss die Versuche von Clapeyron[3]) und Holtzmann[4]), das Kraftäquivalent der Wärme herzuleiten, zu dem unsrigen

1) Hess in Pogg. Ann. L 392. LVI 598.
2) Philos. Magaz. XXVI 369.
3) Pogg. Ann. Bd. LIX 446. 566. (1843).
4) Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe. Mannheim, 1845. Ein Auszug davon in Pogg. Ann. Ergänzungsbd. II.

stehen. Clapeyron geht aus von der Betrachtung, dass die Wärme nur durch ihre Verbreitung aus einem wärmeren Körper in einen anderen kälteren als Mittel zur Erzeugung mechanischer Kraft benutzt werden könne, und dass das Maximum der letzteren gewonnen werden müsse, wenn die Ueberleitung der Wärme nur zwischen Körpern gleicher Temperatur stattfinde, die Temperaturänderungen aber durch Compression und Dilatation der erwärmten Körper bewirkt würden. Dieses
34 Maximum müsse aber für alle Naturkörper, welche durch Erwärmung und Erkältung eine mechanische Arbeit leisten könnten, dasselbe sein; denn wäre es verschieden, so würde man den einen Körper, in welchem ein gewisses Wärmequantum die grössere Wirkung giebt, zur Gewinnung von mechanischer Arbeit benutzen können und einen Theil dieser letzteren dann, um mit dem anderen Körper rückwärts die Wärme wieder aus der kälteren in die wärmere Quelle zurückzubringen, und man würde so in das Unendliche mechanische Kraft gewinnen, wobei aber stillschweigend vorausgesetzt wird, dass die Quantität der Wärme dadurch nicht verändert werde. Analytisch stellt er dies Gesetz in folgendem allgemeinen Ausdrucke dar:

$$\frac{dq}{dv}\cdot\frac{dt}{dp}-\frac{dq}{dp}\cdot\frac{dt}{dv}=C,$$

worin q die Quantität der Wärme, welche ein Körper enthält, t seine Temperatur, beide ausgedrückt als Functionen von v dem Volumen und p dem Druck. $1/C$ ist die mechanische Arbeit, welche die Einheit der Wärme (die 1 kgr Wasser um 1^0 C. erwärmt) leistet, wenn sie in eine um 1^0 niedrigere Temperatur übergeht. Dieselbe soll für alle Naturkörper identisch sein, aber nach der Temperatur veränderlich. Für Gase wird diese Formel:

$$C=v\frac{dq}{dv}-p\frac{dq}{dp}.$$

Clapeyron's Folgerungen aus der Allgemeingültigkeit dieser Formel haben wenigstens für Gase eine grosse Zahl von erfahrungsmässigen Analogien für sich. Seine Ableitung des Gesetzes kann nur zugegeben werden, wenn die absolute Quan-

tität der Wärme als unveränderlich betrachtet wird;[1]) übrigens 35
folgt seine speciellere Formel für Gase, welche allein durch Vergleichung mit der Erfahrung unterstützt ist, auch aus der Formel von Holtzmann, wie wir sogleich zeigen werden. Von der allgemeinen Formel hat er nur zu zeigen gesucht, dass das daraus folgende Gesetz der Erfahrung wenigstens nicht widerspricht. Dieses Gesetz ist, dass wenn der Druck auf verschiedene Körper, genommen bei gleicher Temperatur, um eine kleine Grösse erhöht wird, Wärmemengen entwickelt werden, die proportional sind ihrer Ausdehnbarkeit durch die Wärme. Nur auf eine mindestens sehr unwahrscheinliche Folgerung dieses Gesetzes will ich aufmerksam machen. Compression des Wassers bei dem Wendepunkte seiner Dichtigkeit würde nämlich keine Wärme, zwischen diesem und dem Gefrierpunkt aber Kälte erzeugen.

Holtzmann geht aus von der Betrachtung, dass eine gewisse Wärmemenge, welche in ein Gas eintritt, darin entweder eine Temperaturerhöhung oder eine Ausdehnung ohne Temperaturerhöhung erzeugen kann. Die durch diese Ausdehnung zu leistende Arbeit nahm er als das mechanische Aequivalent der Wärme und berechnete aus den Schallversuchen von Dulong über das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen der Gase für die Wärme, welche 1 kgr Wasser um 1^0 C. erwärmt, 374 kgr gehoben um 1 m. Diese Art der Berechnung ist von unseren Betrachtungen aus nur zulässig, wenn die ganze lebendige Kraft der hinzugetretenen Wärme wirklich als Arbeitskraft abgegeben ist, also die Summe der lebendigen und Spannkräfte, d. h. die Quantität der freien und latenten Wärme in dem stärker ausgedehnten Gase ganz dieselbe ist, wie in dem dichteren von derselben Temperatur. Danach müsste ein Gas, welches ohne Leistung einer Arbeit 36
sich ausdehnt, seine Temperatur nicht ändern, wie es aus dem oben erwähnten Experiment von Joule wirklich hervorzugehen scheint, und die Temperaturerhöhung und Erniedrigung bei der Compression und Dilatation unter den gewöhnlichen Umständen

1) Bekanntlich hat Hr. Clausius später (1850) diesen Punkt der Carnot'schen Theorie verbessert (1881).

würde von einer Erzeugung von Wärme durch mechanische Kraft und umgekehrt herrühren. Für die Richtigkeit des Gesetzes von Holtzmann spricht die grosse Menge der mit der Erfahrung übereinstimmend gezogenen Folgerungen, namentlich die Herleitung der Formel für die Elasticität des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen.

Joule bestimmt aus seinen eigenen Versuchen das Kraftäquivalent, welches Holtzmann aus fremden zu 374 berechnet hat, zu 481, 464, 479, während er durch Reibung für das Kraftäquivalent der Wärmeeinheit 452 und 521 gefunden hatte.

Die Formel von Holtzmann ist übereinstimmend mit der von Clapeyron für Gase, nur ist darin auch die unbestimmte Function der Temperatur C gefunden, und dadurch wird die vollständige Bestimmung des Integrals möglich. Die erstere lautet nämlich:

$$\frac{pv}{a} = v\frac{dq}{dv} - p\frac{dq}{dp},$$

wo a das Kraftäquivalent der Wärmeeinheit; die von Clapeyron:

$$C = v\frac{dq}{dv} - p\frac{dq}{dp}.$$

Beide sind also übereinstimmend, wenn $C = pv/a$ oder da
37 $p = k/v(1 + \alpha t)$, wo α der Ausdehnungscoëfficient, k eine Constante ist, wenn:

$$\frac{1}{C} = \frac{a}{k(1 + \alpha t)}.$$

Die von Clapeyron berechneten Werthe von $1/C$ stimmen nun wirklich ziemlich mit dieser Formel, wie aus der nachstehenden Zusammenstellung hervorgeht.

Temperatur	Von Clapeyron berechnet			Nach der Formel
	a	b	c	
0°	1,410		1,586	1,544
35,5		1,365	1,292	1,366
78,8		1,208	1,142	1,198
100		1,115	1,102	1,129
156,8		1,076	1,072	0,904

Die Zahl unter a ist aus der Schallgeschwindigkeit in der Luft berechnet, die Reihe b aus den latenten Wärmen des Dampfes

von Aether, Alkohol, Wasser, Terpentinöl, c aus der Expansivkraft des Wasserdunstes für verschiedene Temperaturen. Clapeyron's Formel für Gase ist hiernach identisch mit der von Holtzmann; ihre Anwendbarkeit auf feste und tropfbar flüssige Körper bleibt vorläufig zweifelhaft.[1])

V. Das Kraftäquivalent der electrischen Vorgänge.

Statische Electricität. Die Maschinenelectricität kann uns auf zweierlei Weise Ursache von Krafterzeugung werden, einmal indem sie sich mit ihren Trägern bewegt, durch ihre anziehende und abstossende Kraft, dann indem sie sich in den 38
Trägern bewegt, durch Wärmeentwickelung. Die ersteren mechanischen Erscheinungen hat man bekanntlich aus den im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden, anziehenden und abstossenden Kräften zweier electrischer Fluida hergeleitet, und die Erfahrungen, soweit dieselben mit der Theorie verglichen werden konnten, mit der Rechnung übereinstimmend gefunden. Gemäss unserer anfänglichen Herleitung, muss die Erhaltung der Kraft für solche Kräfte stattfinden. Wir wollen deshalb auf die specielleren Gesetze der mechanischen Wirkungen der Electricität nur so weit eingehen, als es uns für die Ableitung des Gesetzes der electrischen Wärmeentwickelung nöthig ist.

Sind $e_,$ und $e_{,,}$ zwei electrische Massenelemente, deren Einheit diejenige ist, welche eine ihr gleiche in der Entfernung $= 1$ mit der Kraft $= 1$ abstösst, werden die entgegengesetzten Electricitäten durch entgegengesetzte Vorzeichen der Massen bezeichnet, und ist r die Entfernung zwischen $e_,$ und $e_{,,}$ so ist die Intensität ihrer Centralkraft:

$$\varphi = -\frac{e_, e_{,,}}{r^2}.$$

Der Gewinn an lebendiger Kraft, indem sie aus der Entfernung R in die r übergehen, ist:

$$-\int_R^r \varphi\, dr = \frac{e_, e_{,,}}{R} - \frac{e_, e_{,,}}{r}.$$

1) S. Zusatz 5 betreffs der Arbeiten von R. Mayer.

Wenn sie aus der Entfernung ∞ in die r übergehen, ist derselbe $-e_1e_{11}/r$. Bezeichnen wir diese letztere Grösse, die Summe der bei der Bewegung von ∞ bis r verbrauchten Spannkräfte
39 und gewonnenen lebendigen Kräfte, gemäss der Bezeichnung, welche Gauss bei den Magnetismen angewendet hat, mit dem Namen Potential der beiden elektrischen Elemente für die Entfernung r, so ist die Zunahme an lebendiger Kraft bei irgend einer Bewegung gleich zu setzen dem Ueberschuss des Potentials am Ende des Weges über das am Anfange.

Bezeichnen wir ebenso die Summe der Potentiale eines electrischen Elementes gegen sämmtliche Elemente eines electrisirten Körpers als das Potential des Elementes gegen den Körper, und die Summe der Potentiale aller Elemente eines electrischen Körpers gegen alle eines andern als das Potential der beiden Körper: so wird uns wieder der Gewinn an lebendiger Kraft durch den Unterschied der Potentiale gegeben, vorausgesetzt, dass die Vertheilung der Electricität in den Körpern nicht geändert werde, dass dieselben also idioelectrische sind. Aendert sich die Vertheilung, so ändert sich auch die Quantität der electrischen Spannkräfte in den Körpern selbst, die gewonnene lebendige Kraft muss also dann eine andere sein.

Durch alle Methoden des Electrisirens werden gleiche Quantitäten positiver und negativer Electricität erzeugt; bei der Ausgleichung der Electricitäten zwischen zwei Körpern, deren einer A eben so viel positive Electricität enthält, als der andere B negative, geht die Hälfte positiver Electricität von A nach B, dagegen die Hälfte negativer von B nach A. Nennen wir die Potentiale der Körper auf sich selbst W_a und W_b, das Potential derselben gegen einander V, so finden wir[1]) die ganze gewonnene lebendige Kraft, wenn wir das Potential der übergehenden electrischen Massen vor der Bewegung gegen jede der anderen Massen und auf sich selbst abziehen von
40 denselben Potentialen nach der Bewegung. Dabei ist zu bemerken, dass das Potential zweier Massen sein Zeichen wechselt, wenn eine der Massen dasselbe wechselt. Es kommen also in Betracht folgende Potentiale:

1) des bewegten $+\frac{1}{2}E$ aus A
   gegen sich selbst $\frac{1}{4}(W_b - W_a)$
   gegen das bewegte $-\frac{1}{2}E$ $\frac{1}{4}(V - V)$
   gegen das ruhende $+\frac{1}{2}E$ $\frac{1}{4}(-V - W_a)$
   gegen das ruhende $-\frac{1}{2}E$ $\frac{1}{4}(-W_b - V)$
2) des bewegten $-\frac{1}{2}E$ aus B
   gegen sich selbst $\frac{1}{4}(W_a - W_b)$
   gegen das bewegte $+\frac{1}{2}E$ $\frac{1}{4}(V - V)$
   gegen das ruhende $-\frac{1}{2}E$ $\frac{1}{4}(-V - W_b)$
   gegen das ruhende $+\frac{1}{2}E$ $\frac{1}{4}(-W_a - V)$

$$\text{Summe} - \left(V + \frac{W_a + W_b}{2}\right).$$

Diese Grösse giebt uns also das Maximum der zu erzeugenden lebendigen Kraft und die Quantität der Spannkraft an, welche durch das Electrisiren gewonnen wird.

Um nun statt dieser Potentiale geläufigere Begriffe in die Rechnung einzuführen, brauchen wir folgende Betrachtung. Denken wir uns Flächen construirt, für welche das Potential eines in ihnen liegenden electrischen Elementes in Bezug auf einen oder mehrere vorhandene electrische Körper gleiche Werthe hat, und nennen diese Gleichgewichtsoberflächen, so muss die Bewegung eines electrischen Theilchens von irgend einem Punkte der einen zu irgend einem Punkte einer bestimmten anderen stets die lebendige Kraft um eine gleiche Grösse vermehren, dagegen wird eine Bewegung in der Fläche selbst die Geschwindigkeit des Theilchens nicht verändern. Es wird also die Resultante sämmtlicher electrischer Anziehungs- 41
kräfte für jeden einzelnen Punkt des Raumes auf der durch ihn gehenden Gleichgewichtsoberfläche senkrecht stehen müssen, und jede Fläche, auf der diese Resultanten senkrecht stehen, wird eine Gleichgewichtsoberfläche sein müssen.

Das electrische Gleichgewicht in einem Leiter wird nun nicht eher bestehen, als bis die Resultanten sämmtlicher Anziehungskräfte seiner eigenen Electricitäten und etwa noch

1) Nämlich: „unter den hier gemachten Annahmen". S. Zusatz 6. (1881).

vorhandener anderer electrisirter Körper senkrecht auf seiner Oberfläche stehen, weil durch dieselben sonst die electrischen Theilchen längs der Oberfläche verschoben werden müssten. Folglich wird die Oberfläche eines electrisirten Leiters selbst eine Gleichgewichtsoberfläche sein, und die lebendige Kraft, welche ein verschwindend kleines electrisches Theilchen bei seinem Uebergange von der Oberfläche eines Leiters zu der eines andern gewinnt, eine Constante. Bezeichnet C_a die lebendige Kraft, welche die Einheit der positiven Electricität gewinnt bei ihrem Uebergange von der Oberfläche des Leiters A in unendliche Entfernung, so dass C_a für positiv electrische Ladungen positiv ist, A_a das Potential derselben Electricitätsmenge, wenn sie sich in einem bestimmten Punkte der Oberfläche von A befindet gegen A, A_b dasselbe gegen B, W_a das Potential von A auf sich selbst, W_b dasselbe von B, V das von A auf B, und Q_a die Quantität der Electricität in A, Q_b in B: so ist die lebendige Kraft, welche das electrische Theilchen e bei seinem Uebergange aus unendlicher Entfernung auf die Oberfläche von A gewinnt:

$$-eC_a = e(A_a + A_b).$$

Setzt man statt e nach einander alle electrischen Theilchen der
42 Oberfläche von A, und für A_a und A_b die zugehörigen Potentiale, und addirt alle, so erhält man:

$$-Q_aC_a = V + W_a.$$

Ebenso für den Leiter B:

$$-Q_bC_b = V + W_b.$$

Die Constante C muss nun nicht nur für die ganze Oberfläche eines und desselben Leiters gleich sein, sondern auch für getrennte Leiter, wenn dieselben bei Herstellung einer Verbindung, durch welche die Vertheilung ihrer Electricitäten nicht merklich geändert wird, keine Electricität mit einander austauschen, d. h. sie muss gleich sein für alle Leiter von gleicher freier Spannung. Wir können als Maass der freien Spannung eines electrischen Körpers diejenige Quantität von Electricität gebrauchen, welche ausserhalb der Vertheilungsweite in einer Kugel vom Radius = 1 angehäuft, mit jenem Körper im electrischen Gleichgewicht steht. Ist die Electricität gleichmässig

über die Kugel verbreitet, so wirkt sie bekanntlich nach aussen, als wäre sie ganz im Mittelpunkt derselben zusammengedrängt. Bezeichnen wir die Masse der Electricität mit E, den Radius der Kugel mit $R = 1$, so ist für diese Kugel die Constante:

$$C = \frac{R}{E} = E.$$

Also die Constante C ist unmittelbar gleich der freien Spannung.

Danach findet sich die Quantität von Spannkräften zweier Leiter, welche gleiche Quantitäten Q von positiver und negativer Electricität enthalten:

$$-\left(V + \frac{W_a + W_b}{2}\right) = Q\left(\frac{C_a - C_b}{2}\right).$$

Da C_b negativ ist, so ist die algebraische Differenz $C_a - C_b$ gleich ihrer absoluten Summe. Ist die Ableitungsgrösse des 43
Leiters B sehr gross, also nahehin $C_b = 0$, so ist die Quantität der Spannkräfte $\frac{1}{2}QC_a = \frac{1}{2}(-V + W_a)$; ist auch die Entfernung beider Leiter sehr gross, so ist dieselbe $-\frac{1}{2}W_a$.

Die lebendige Kraft, welche bei der Bewegung zweier electrischer Massen entsteht, haben wir gefunden gleich der Abnahme der Summe $\frac{1}{2}(Q_aC_a + Q_bC_b)$. Diese lebendige Kraft gewinnen wir als mechanische, wenn die Geschwindigkeit, womit sich die Elektricität in den Körpern bewegt, verschwindend klein ist gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der electrischen Bewegung; wir müssen sie als Wärme empfangen, wenn dies nicht der Fall ist. Die bei der Entladung gleicher Quantitäten Q entgegengesetzter Electricität erzeugte Wärme Θ findet sich demnach:

$$\Theta = \frac{1}{2a}Q(C_a - C_b),$$

wo a das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit bezeichnet, oder wenn $C_b = 0$, wie in Batterien, deren äussere Belegung nicht isolirt ist, deren Ableitungsgrösse S ist, so dass $CS = Q$:

$$\Theta = \frac{1}{2a}QC = \frac{1}{2a}\frac{Q^2}{S}.$$

Riess[1]) hat durch Experimente bewiesen, dass bei verschiedenen Ladungen und verschiedener Anzahl gleich construirter Flaschen die in jedem einzelnen Theile desselben Schliessungsdrahtes entwickelte Wärme proportional sei der
44 Grösse Q^2/S. Nur bezeichnet er mit S die Oberfläche der Belegung der Flaschen. Bei gleich construirten Flaschen muss diese aber der Ableitungsgrösse proportional sein. Aus seinen Versuchen hat ferner Vorsselmann de Heer[2]) gefolgert, so wie Knochenhauer[3]) aus den eigenen, dass die Wärmeentwickelung bei derselben Ladung derselben Batterie dieselbe bleibe, wie auch der Schliessungsdrath abgeändert werden möge. Der Letztere hat dieses Gesetz auch bei Verzweigung der Schliessungsdrähte und bei Nebenströmen durchgeführt. Ueber die Grösse der Constante a liegen bis jetzt noch keine Beobachtungen vor.

Zu erklären ist dieses Gesetz leicht, sobald wir uns die Entladung einer Batterie nicht als eine einfache Bewegung der Electricität in einer Richtung vorstellen, sondern als ein Hin- und Herschwanken derselben zwischen den beiden Belegungen in Oscillationen, welche immer kleiner werden, bis die ganze lebendige Kraft derselben durch die Summe der Widerstände vernichtet ist. Dafür, dass der Entladungsstrom aus abwechselnd entgegengerichteten Strömen besteht, spricht erstens die abwechselnd entgegengesetzte magnetisirende Wirkung desselben, zweitens die Erscheinung, welche Wollaston bei dem Versuch Wasser durch electrische Schläge zu zersetzen, wahrnahm, dass sich nämlich beide Gasarten an beiden Electroden entwickeln. Zugleich erklärt diese Annahme, warum bei diesem Versuch die Electroden möglichst geringe Oberfläche haben müssen.

45 Galvanismus. Wir haben in Beziehung auf die galvanischen Erscheinungen zwei Klassen von Leitern zu unterscheiden: 1) diejenigen, welche nach Art der Metalle leiten, und dem Gesetze der galvanischen Spannungsreihe folgen;

1) Pogg. Ann. XLIII 47.

2) Pogg. Ann. XLVIII. 292. Dazu die Bemerkung von Riess ebendas. S. 320.

3) Ann. LXII. 364. LXIV 64.

2) diejenigen, welche diesem Gesetze nicht folgen. Alle diese letzteren sind zusammengesetzte Flüssigkeiten, und erleiden durch jede Leitung eine der Quantität der geleiteten Electricität proportionale Zersetzung.

Wir können danach die experimentellen Thatsachen eintheilen: 1) in solche, welche nur zwischen Leitern der ersten Klasse stattfinden, die Ladung verschiedener sich berührender Metalle mit ungleichen Electricitäten, und 2) in solche zwischen Leitern beider Klassen, die electrischen Spannungsunterschiede der offenen und die electrischen Ströme der geschlossenen Ketten. Durch eine beliebige Combination von Leitern erster Klasse können niemals electrische Ströme hervorgebracht werden, sondern nur electrische Spannungen. Diese Spannungen sind aber nicht äquivalent einer gewissen Kraftgrösse, wie die bisher betrachteten, welche eine Störung des electrischen Gleichgewichts bezeichneten; die galvanischen Spannungen sind vielmehr entstanden durch die Herstellung des electrischen Gleichgewichts, durch sie kann keine Bewegung der Electricität hervorgerufen werden ausser bei Lagenveränderungen der Leiter selbst durch die geänderte Vertheilung der gebundenen Electricität. Denken wir uns alle Metalle der Erde mit einander in Berührung gebracht, und die entsprechende Vertheilung der Electricität erfolgt, so kann durch keine andere Verbindung derselben irgend eines eine Aenderung seiner electrischen freien Spannung erleiden, ehe nicht eine Berührung mit einem Leiter zweiter Klasse erfolgt ist. Den Be- 46
griff der Contactkraft, der Kraft, welche an der Berührungsstelle zweier verschiedenen Metalle thätig ist, und ihre verschiedenen electrischen Spannungen erzeugt und unterhält, hat man bisher nicht näher bestimmt als eben so, weil man mit demselben auch die Erscheinungen der Berührung von Leitern erster und zweiter Klasse zu umfassen suchte zu einer Zeit, wo man den constanten und wesentlichen Unterschied beider Erscheinungen, den chemischen Process, noch nicht als solchen kannte. In dieser dadurch nothwendig gemachten Unbestimmtheit der Begriffsfassung erscheint nun allerdings die Contactkraft als eine solche, welche in das Unendliche Quantitäten freier Electricität und somit mechanische Kräfte,

Wärme und Licht erzeugen könnte, wenn es einen einzigen Leiter zweiter Klasse gäbe, welcher nicht durch die Leitung electrolysirt würde. Gerade dieser Umstand ist es auch wohl, welcher der Contacttheorie trotz ihrer einfachen und präcisen Erklärung der Erscheinungen ein so entschiedenes Widerstreben entgegengesetzt hat[1]). Dem von uns hier durchzuführenden Princip widerspricht der bisherige Begriff dieser Kraft also direct, wenn nicht die Nothwendigkeit der chemischen Processe mit in denselben aufgenommen wird. Geschieht dies aber, nehmen wir an, dass die Leiter zweiter Klasse der galvanischen Spannungsreihe eben deshalb nicht folgen, weil sie nur durch Electrolyse leiten, so lässt sich der Begriff der Contactkraft sogleich wesentlich vereinfachen und auf an-
47 ziehende und abstossende Kräfte zurückführen. Es lassen sich nämlich offenbar alle Erscheinungen in Leitern erster Klasse herleiten aus der Annahme, dass die verschiedenen chemischen Stoffe verschiedene Anziehungskräfte haben gegen die beiden Electricitäten, und dass diese Anziehungskräfte nur in unmessbar kleinen Entfernungen wirken, während die Electricitäten auf einander es auch in grösseren thun. Die Contactkraft würde danach in der Differenz der Anziehungskräfte bestehen, welche die der Berührungsstelle zunächst liegenden Metalltheilchen auf die Electricitäten dieser Stelle ausüben, und das electrische Gleichgewicht eintreten, wenn ein electrisches Theilchen, welches von dem einen zum anderen übergeht, nichts mehr an lebendiger Kraft verliert oder gewinnt. Sind $c_,$ und $c_{,,}$ die freien Spannungen der beiden Metalle, $a_,e$ und $a_{,,}e$ die lebendigen Kräfte, welche das electrische Theilchen e bei seinem Uebergange auf das eine oder das andere nicht geladene Metall gewinnt, so ist die Kraft, welche es beim Uebergange von dem einen geladenen Metall zum anderen gewinnt:

$$e(a_, - a_{,,}) - e(c_, - c_{,,}).$$

Beim Gleichgewicht muss diese $= 0$ sein, also:

$$a_, - a_{,,} = c_, - c_{,,}$$

1) S. Faraday, Experimentaluntersuchungen über Electricität. 17. Reihe. Philos. Transact. 1840. p. I. No. 2071. und Pogg. Ann. LIII 568.

d. h. die Spannungsdifferenz muss bei verschiedenen Stücken derselben Metalle constant sein, und bei verschiedenen Metallen dem Gesetze der galvanischen Spannungsreihe folgen.

Bei den galvanischen Strömen haben wir in Bezug auf die Erhaltung der Kraft hauptsächlich folgende Wirkungen zu betrachten: Wärmeentwickelung, chemische Processe und Polarisation. Die electrodynamischen Wirkungen werden wir beim Magnetismus durchnehmen. Die Wärmeentwickelung ist allen 48 Strömen gemein; nach den beiden anderen Wirkungen können wir sie für unseren Zweck unterscheiden in solche, welche blos chemische Zersetzungen, in solche, welche blos Polarisation, und in solche, welche beides hervorbringen.

Zuerst wollen wir die Bedingungen der Erhaltung der Kraft untersuchen an solchen Ketten, bei welchen die Polarisation aufgehoben ist, weil diese die einzigen sind, für welche wir bis jetzt bestimmte durch Messungen bewährte Gesetze haben. Die Intensität des Stromes J einer Kette von n Elementen wird gegeben durch das Ohm'sche Gesetz:

$$J = \frac{nA}{W},$$

wo die Constante A die electromotorische Kraft des einzelnen Elementes und W der Widerstand der Kette genannt wird; A und W sind in diesen Ketten unabhängig von der Intensität. Da während eines gewissen Zeitraumes der Wirkung einer solchen Kette nichts in ihr geändert wird als die chemischen Verhältnisse und die Wärmemenge, so würde das Gesetz von der Erhaltung der Kraft fordern, dass die durch die vorgegangenen chemischen Processe zu gewinnende Wärme gleich sei der wirklich gewonnenen. In einem einfachen Stück einer metallischen Leitung vom Widerstand w ist nach Lenz[1]) die während der Zeit t entwickelte Wärme:

$$\vartheta = J^2 w t,$$

wenn man als Einheit von w die Drahtlänge nimmt, in welcher die Einheit des Stromes in der Zeiteinheit die Wärmeeinheit 49 entwickelt. Für verzweigte Schliessungsdrähte, wo die Wider-

1) S. Pogg. Ann. LIX. S. 203 u. 407 aus den Bull. de l'acad. d. scienc. de St. Petersbourg. 1843.

stände der einzelnen Zweige mit w_a bezeichnet werden, ist der Gesammtwiderstand w gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{1}{w} = \Sigma\left[\frac{1}{w_a}\right],$$

die Intensität J_n im Zweige w_n durch:

$$J_n = \frac{Jw}{w_n},$$

also die Wärme ϑ^n in demselben Zweige:

$$\vartheta_n = J^2 w^2 . \frac{1}{w_n} t,$$

und die in der ganzen verzweigten Leitung entwickelte Wärme:

$$\vartheta = \Sigma\,[\vartheta_a] = J^2 w^2 \Sigma\left[\frac{1}{w_a}\right] t = J^2 w\,.\,t.$$

Folglich ist die in einer mit beliebigen Verzweigungen der Leitung versehenen Kette entwickelte Gesammtwärme, wenn das Gesetz von Lenz auch auf flüssige Leiter passt, wie es Joule gefunden hat:

$$\Theta = J^2 W t = n A J t.$$

Wir haben zweierlei Arten von constanten Ketten, die nach dem Schema der Daniell'schen und die nach dem der Grove'schen construirten. Bei den ersteren besteht der chemische Vorgang darin, dass sich das positive Metall in einer Säure auflöst, und aus einer Lösung in derselben Säure das negative sich niederschlägt. Nehmen wir als Einheit der Stromintensität diejenige, welche in der Zeiteinheit ein Aequi-
50 valent Wasser zersetzt (etwa O = 1 gr. genommen), so werden in der Zeit t gelöst nJt Aequivalente des positiven Metalls, und eben so viele des negativen niedergeschlagen. Ist nun die Wärme, welche ein Aequivalent des positiven Metalls bei seiner Oxydation und Lösung des Oxyds in der betreffenden Säure entwickelt, a_z, und die gleiche für das negative a_c, so würde die chemisch zu entwickelnde Wärme sein:

$$= nJt(a_z - a_c).$$

Die chemische würde also der electrischen gleich sein, wenn:

$$A = a_z - a_c,$$

d. h. wenn die electromotorischen Kräfte zweier so combi-

nirten Metalle dem Unterschied der bei ihrer Verbrennung und Verbindung mit Säuren zu entwickelnden Wärme proportional wären.

In den nach Art der Grove'schen Kette gebauten Elementen wird die Polarisation dadurch aufgehoben, dass der auszuscheidende Wasserstoff sogleich zur Reduction der sauerstoffreichen Bestandtheile der Flüssigkeit verbraucht wird, welche das negative Metall umgiebt. Es sind dahin zu rechnen die Grove'schen und die Bunsen'schen Elemente: amalgamirtes Zink, verdünnte Schwefelsäure, rauchende Salpetersäure, Platin oder Kohle; ferner die mit Chromsäure gebauten constanten Ketten, unter denen genaueren Messungen unterworfen sind: amalgamirtes Zink, verdünnte Schwefelsäure, Lösung von saurem chromsaurem Kali mit Schwefelsäure, Kupfer oder Platin. Die chemischen Processe sind in den beiden mit Salpetersäure gebauten Ketten gleich, ebenso die in den beiden genannten mit Chromsäure; daraus würde gemäss der eben gemachten Deduction folgen, dass auch die elektromotorischen Kräfte gleich seien, und das ist in der 51
That nach den Messungen von Poggendorf[1]) sehr genau der Fall. Die mit Kohle gebaute Chromsäure-Kette ist sehr inconstant, und hat eine beträchtlich höhere electromotorische Kraft, wenigstens im Anfang; dieselbe ist deshalb hier nicht herzurechnen, sondern zu den Ketten mit Polarisation. Bei diesen constanten Ketten ist also die electromotorische Kraft unabhängig von dem negativen Metall; wir können sie uns auf den Typus der Daniell'schen Kette zurückbringen, wenn wir als den letzten die Flüssigkeit unmittelbar berührenden Leiter erster Klasse die dem Platin zunächst liegenden Theilchen von salpetriger Säure und Chromoxyd ansehen, so dass wir die Grove'schen und Bunsen'schen Elemente als Ketten zwischen Zink und salpetriger Säure, die mit Chromsäure gebauten als Zink-Chromoxydketten erklären würden.

Unter den Ketten mit Polarisation können wir solche unterscheiden, welche blos Polarisation und keine chemische Zersetzung hervorbringen, und solche welche beides bewirken.

1) Pogg. Ann. LIV. 429 und LVII. 104.

Zu den ersteren, welche einen inconstanten meist bald verschwindenden Strom geben, gehören unter den einfachen Ketten die von Faraday[1]) mit Lösung von Aetzkali, Schwefelkalium, salpetriger Säure gebildeten Combinationen, ferner die der stärker negativen Metalle in den gewöhnlichen Säuren, wenn das positivere derselben die Säure nicht mehr zu zersetzen vermag, z. B. Kupfer mit Silber, Gold, Platin, Kohle in Schwefelsäure u. s. w.; von den zusammengesetzten alle mit
52 eingeschalteten Zersetzungszellen, deren Polarisation die electromotorische Kraft der anderen Elemente überwiegt. Scharfe messende Versuche haben über die Intensitäten dieser Ketten bis jetzt wegen der grossen Veränderlichkeit des Stromes nicht gemacht werden können. Im Allgemeinen scheint die Intensität ihrer Ströme von der Natur der eingetauchten Metalle abzuhängen, ihre Dauer wächst mit der Grösse der Oberflächen und mit der Abschwächung der Stromintensität; aufgefrischt können sie werden, auch wenn sie fast ganz verschwunden sind, durch Bewegungen der Platten in der Flüssigkeit und durch Berührung derselben mit der Luft, wodurch die Polarisation der Wasserstoffplatte aufgehoben wird. Von solchen Einwirkungen mag auch wohl der geringe, nicht aufhörende Rest des Stromes herrühren, den feinere galvanometrische Instrumente immer anzugeben pflegen. Der ganze Vorgang ist also eine Herstellung des electrischen Gleichgewichts der Flüssigkeitstheilchen mit den Metallen; dabei scheinen sich einmal die Flüssigkeitstheilchen anders zu ordnen, und dann, wenigstens in vielen Fällen[2]), auch chemische Umänderungen der oberflächlichen Metallschichten zu entstehen. Bei den zusammengesetzten Ketten, wo die Polarisation ursprünglich gleicher Platten die Wirkung des Stromes anderer Elemente ist, können wir die dabei verlorene Kraft des ursprünglichen Stromes als secundären Strom wiedergewinnen, nachdem wir die erregenden Elemente entfernt, und die Metalle der polarisirten Zelle unter sich geschlossen haben. Um das Princip von der Erhaltung der

1) Experimentaluntersuchungen über Electricität. 16. Reihe. Philos. Transact. 1840 p. I. und Pogg. Ann. LII. S. 163 u. 547.
2) S. Ohm in Pogg. Ann. LXIII. 389.

Kraft hier näher anzuwenden, fehlen uns bis jetzt noch alle speciellen Thatsachen.

Den verwickeltesten Fall bilden diejenigen Ketten, in 53
welchen Polarisation und chemische Zersetzung neben einander vor sich gehen; dazu gehören die Ketten mit Gasentwickelung. Der Strom derselben ist, wie der der blossen Polarisationsketten, zu Anfang am stärksten und sinkt schneller oder langsamer auf eine ziemlich constant bleibende Grösse. Bei einzelnen Elementen dieser Art, oder Ketten, welche nur aus solchen zusammengesetzt sind, hört der Polarisationsstrom nur äusserst langsam auf; leichter gelingt es dagegen, schnell constante Ströme zu erhalten, bei Combination von constanten Ketten mit einzelnen inconstanten, namentlich, wenn die Platten der letzteren verhältnissmässig klein sind. Bisher sind aber an solchen Zusammenstellungen nur wenige Messungsreihen gemacht worden; aus den wenigen, welche ich aufgefunden habe, von Lenz[1]) und Poggendorf[2]), geht hervor, dass die Intensitäten solcher Ketten bei verschiedenen Drahtwiderständen nicht durch die einfache Ohm'sche Formel gegeben werden können, sondern wenn man die Constanten derselben bei geringen Intensitäten berechnet, werden die Ergebnisse der Rechnung für höhere Intensitäten zu gross. Man muss deshalb den Zähler oder den Nenner derselben, oder beide als Functionen der Intensität betrachten; die bisher bekannten Thatsachen liefern uns keine Entscheidung dafür, welcher von diesen Fällen eigentlich stattfinde.

Suchen wir das Princip von der Erhaltung der Kraft auf diese Ströme anzuwenden, so müssen wir dieselben in zwei Theile theilen, in den inconstanten oder Polarisationsstrom, 54
über den dasselbe gilt, was wir über die reinen Polarisationsströme gesagt haben, und in den constanten oder Zersetzungsstrom. Auf den letzteren ist dieselbe Betrachtungsweise anwendbar, wie für die constanten Ströme ohne Gasentwickelung. Die durch den Strom erzeugte Wärme muss gleich sein der durch den chemischen Process zu erzeugenden. Ist z. B. in

1) Pogg. Ann. LIX. 229.
2) Ann. LXVII. 531.

einer Combination von Zink und einem negativen Metalle in verdünnter Schwefelsäure die Wärmeentbindung eines Atomes Zink bei seiner Auflösung und der Austreibung des Wasserstoffes $a_z - a_h$, so ist die in der Zeit dt zu erzeugende Wärme:

$$J(a_z - a_h)dt.$$

Wäre nun die Wärmeentwickelung in allen Theilen einer solchen Kette proportional dem Quadrate der Intensität, also J^2Wdt, so hätten wir wie oben:

$$J = \frac{a_z - a_h}{W},$$

also die einfache Ohm'sche Formel. Da diese aber ihre Anwendung hier nicht findet, so folgt, dass es Querschnitte in der Kette giebt, in denen die Wärmeentwickelung einem anderen Gesetze folgt, deren Widerstand also nicht als constant zu setzen ist. Ist z. B. die Entbindung von Wärme in irgend einem Querschnitte direct proportional der Intensität, wie es unter anderen die durch Aenderung der Aggregatzustände gebundene Wärme sein muss, also $\vartheta = \mu J dt$, so ist:

$$J(a_z - a_h) = J^2 w + J\mu$$

$$J = \frac{a_z - a_h - \mu}{w}.$$

Die Grösse μ würde also mit in dem Zähler der Ohm'schen
55 Formel erscheinen. Der Widerstand eines solchen Querschnittes würde sein $w = \vartheta/J^2 = \mu/J$. Ist nun aber die Wärmeentwickelung desselben nicht genau proportional der Intensität, also die Grösse μ nicht ganz constant, sondern mit der Intensität steigend, so erhalten wir den Fall, welcher den Beobachtungen von Lenz und Poggendorf entspricht.

Als electromotorische Kraft einer solchen Kette würde nach Analogie der constanten Ketten, sobald der Polarisationsstrom aufgehört hat, die zwischen Zink und Wasserstoff zu bezeichnen sein. In der Ausdrucksweise der Contacttheorie wäre es die zwischen Zink und dem negativen Metall, vermindert um die Polarisation des letzteren in Wasserstoff. Wir müssen dann nur dieses Maximum der Polarisation für unabhängig von der Intensität des Stromes ansehen, und für verschiedene Metalle um eben so viel verschieden, als

es die electromotorischen Kräfte dieser Metalle sind. Der Zähler der Ohm'schen Formel, berechnet aus Intensitätsmessungen bei verschiedenen Widerständen, kann aber ausser der electromotorischen Kraft einen Summanden enthalten, welcher von dem Uebergangswiderstande herrührt, und welcher bei verschiedenen Metallen vielleicht verschieden ist. Dass ein Uebergangswiderstand existire, folgt nach dem Princip von der Erhaltung der Kraft aus der Thatsache, dass die Intensitäten, dieser Ketten nicht nach dem Ohm'schen Gesetz zu berechnen sind, da doch die chemischen Processe dieselben bleiben.[1]) Dafür, dass in Ketten, wo die Polarisationsströme aufgehört haben, der Zähler der Ohm'schen Formel von der Natur des negativen Metalls abhänge, habe ich noch keine sicheren Beobachtungen auffinden können. Um die Polarisationsströme 56
schnell zu beseitigen ist es hierbei nöthig, die Dichtigkeit des Stromes an der polarisirten Platte möglichst zu erhöhen, theils durch Einfügung von Zellen mit constanter electromotorischer Kraft, theils durch Verkleinerung der Oberfläche dieser Platte. In den hierher gehörenden Versuchen von Lenz und Saweljew[2]) ist nach ihrer eigenen Angabe die Constanz der Ströme nicht erreicht worden, die von ihnen berechneten electromotonischen Kräfte enthalten demnach noch die der Polarisationsströme. Sie fanden für Zink Kupfer in Schwefelsäure 0,51, für Zink Eisen 0,76, für Zink Quecksilber 0,90.

Schliesslich bemerke ich noch, dass ein Versuch, die Gleichheit der auf chemischem und electrischem Wege entwickelten Wärme experimentell nachzuweisen gemacht ist von Joule[3]). Doch ist gegen seine Messungsmethoden mancherlei einzuwenden. Er setzt z. B. für die Tangentenbussole das Gesetz der Tangenten als richtig voraus bis in die höchsten Grade hinein, hat keine constanten Ströme, sondern berechnet deren Intensität nur nach dem Mittel der Anfangs- und Endablenkung, setzt electromotorische Kraft und Widerstand von Zellen mit

1) Die Occlusion des Wasserstoffes in den Metallen war noch nicht bekannt (1881).

2) Bull. de la classe phys. math. de l'acad. d. scienc. de St. Petersbourg. T. V. p. 1. und Pogg. Ann. LVII. 497.

3) Philos. Magaz. 1841. vol. XIX. S. 275. und 1843. XX. S. 204.

Gasentwickelung als constant voraus. Auf die Abweichung seiner quantitativen Wärmebestimmungen von anderweitig gefundenen Zahlen hat Hess schon aufmerksam gemacht. Dasselbe Gesetz will E. Becquerel empirisch bestätigt gefunden haben nach einer Anzeige desselben in den Comptes rendus (1843. No. 16).

57 Wir haben oben uns genöthigt gesehen den Begriff der Contactkraft zurückzuführen auf einfache Anziehungs- und Abstossungskräfte, um denselben mit unserem Princip in Uebereinstimmung zu bringen. Versuchen wir nun auch, die electrischen Bewegungen zwischen Metallen und Flüssigkeiten darauf zurückführen. Denken wir uns die Theile des zusammengesetzten Atomes einer Flüssigkeit mit verschiedenen Anziehungskräften gegen die Electricitäten begabt, und demgemäss verschieden electrisch. Scheiden diese Atomtheile an den metallischen Elektroden aus, so giebt jedes Atom nach dem electrolytischen Gesetz eine von seinen electromotorischen Kräften unabhängige Menge $\pm E$ an dieselben ab. Wir können uns deshalb vorstellen, dass auch in der chemischen Verbindung schon die Atome mit Aequivalenten $\pm E$ verbunden sind, welche für alle ebenso gleich sind, wie die stöchiometrischen Aequivalente der wägbaren Stoffe in verschiedenen Verbindungen. Tauchen nun zwei verschieden electrische Metalle in eine Flüssigkeit ein, ohne dass ein chemischer Process stattfindet, so werden die positiven Bestandtheile derselben von dem negativen Metall, die negativen vom positiven angezogen. Der Erfolg wird also eine veränderte Richtung und Vertheilung der verschieden electrischen Flüssigkeitstheilchen sein, deren Eintreten wir als Polarisationsstrom wahrnehmen. Die bewegende Kraft dieses Stromes würde die electrische Differenz der Metalle sein, ihr müsste deshalb auch seine anfängliche Intensität proportional sein; seine Dauer muss bei gleicher Intensität der Menge der an den Platten anzulagernden Atome, also ihrer Oberfläche proportional sein. Bei den mit chemischer Zersetzung verbundenen Strömen kommt es dagegen
58 nicht zu einem dauernden Gleichgewicht der Flüssigkeitstheilchen mit den Metallen, weil die positiv geladene Oberfläche des positiven Metalls fortdauernd entfernt wird, dadurch dass

sie selbst zum Bestandtheil der Flüssigkeit wird, also eine stete Erneuerung der Ladung hinter ihr stattfinden muss. Durch jedes Atom des positiven Metalls, welches mit einem Aequivalent positiver Electricität vereinigt in die Lösung eintritt, wofür ein Atom des negativen Bestandtheiles neutral electrisch ausscheidet, wird eine Beschleunigung der einmal begonnenen Bewegung hervorgerufen, sobald die Quantität der Anziehungskraft des ersteren Atomes zur $+E$, bezeichnet durch a_z, grösser ist als die des letzteren a_c. Die Bewegung würde dadurch in das Unbegrenzte an Geschwindigkeit zunehmen, wenn nicht auch zugleich der Verlust an lebendiger Kraft durch Wärmeentwickelung wüchse. Sie wird deshalb nur wachsen bis dieser Verlust, $J^2 W dt$, gleich ist dem Verbrauch an Spannkraft $J(a_z - a_c)dt$ oder bis:

$$J = \frac{a_z - a_c}{W}.$$

Ich glaube, dass in dieser Unterscheidung der galvanischen Ströme in solche, welche Polarisation, und in solche, welche Zersetzung hervorbringen, wie sie durch das Princip von der Erhaltung der Kraft bedingt wird, der einzige Ausweg zu finden sein möchte, um gleichzeitig die Schwierigkeiten der chemischen und der Contacttheorie zu umgehen.

Thermoelectrische Ströme. Bei diesen Strömen müssen wir die Quelle der Kraft in den von Peltier gefundenen Wirkungen auf die Löthstellen suchen, welche einen dem gegebenen Strom entgegengesetzten erzeugen würden.

Denken wir uns einen hydroelectrischen constanten Strom, 59
in dessen Leitungsdraht ein Stück eines anderen Metalls eingelöthet ist, dessen Löthstellen die Temperaturen t' und t'' haben, so wird der electrische Strom während des Zeittheilchens dt in der ganzen Leitung die Wärme $J^2 W dt$ erzeugen, ausserdem in der einen Löthstelle $q_{,} dt$ entwickeln, in der anderen $q_{,,} dt$ verschlucken. Ist A die electromotorische Kraft der hydroelectrischen Kette, also $AJdt$ die chemisch zu erzeugende Wärme, so folgt aus dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft:

$$AJ = J^2 W + q_{,} - q_{,,}. \qquad (1)$$

Ist B_t die electromotorische Kraft der Thermokette, wenn eine der Löthstellen die Temperatur t und die andere irgend eine constante Temperatur z. B. 0° hat, so ist für die ganze Kette:

$$J = \frac{A - B_{t'} + B_{t''}}{W}.$$

Für $t_{,} = t_{,,}$ wird:

$$J = \frac{A}{W}.$$

Dies in die Gleichung (1) gesetzt giebt:

$$q_{,} = q_{,,},$$

d. h. bei gleicher Temperatur der Löthstellen derselben Metalle und gleicher Intensität des Stromes müssen die entwickelten und verschluckten Wärmemengen gleich sein, unabhängig vom Querschnitte. Dürfen wir annehmen, dass dieser Vorgang in jedem Punkte des Querschnittes derselbe ist, so folgt, dass die in gleichen Flächenräumen verschiedener Querschnitte durch denselben Strom entwickelten Wärmemengen sich wie die
60 Dichtigkeiten des Stromes verhalten, und daraus wieder, dass die durch verschiedene Ströme in den ganzen Querschnitten entwickelten sich direct wie die Intensitäten der Ströme verhalten.

Sind die Löthstellen von verschiedener Temperatur, so folgt aus den Gleichungen (1) und (2):

$$(B_{t'} - B_{t''})\, J = q_{,} - q_{,,},$$

dass also bei gleichen Stromintensitäten die Wärme entwickelnde und bindende Kraft in demselben Maasse mit der Temperatur steigt, als die electromotorische.

Für beide Folgerungen sind mir bis jetzt noch keine messenden Versuche bekannt.

VI. Kraftäquivalent des Magnetismus und Electromagnetismus.

Magnetismus. Ein Magnet ist vermöge seiner anziehenden und abstossenden Kräfte gegen andere Magnete und unmagnetisches Eisen fähig, eine gewisse lebendige Kraft zu erzeugen. Da die Anziehungserscheinungen von Magneten vollständig herzuleiten sind aus der Annahme zweier Fluida, welche sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernung anziehen und abstossen, so folgt hieraus allein schon nach der im Anfang unserer Abhandlung gegebenen Herleitung, dass die Erhaltung der Kraft bei der Bewegung magnetischer Körper gegen einander stattfinden müsse. Der folgenden Theorie der Induction wegen müssen wir auf die Gesetze dieser Bewegungen etwas näher eingehen.[1])

1) Sind $m_{,}$ und $m_{,,}$ zwei magnetische Massenelemente, 61
deren Einheit diejenige ist, welche eine gleiche in der Entfernung = 1 mit der Kraft = 1 abstösst, werden entgegengesetzte Magnetismen mit entgegengesetzten Vorzeichen der Massen bezeichnet, und ist r die Entfernung zwischen $m_{,}$ und $m_{,,}$, so ist die Intensität ihrer Centralkraft:

$$\varphi = -\frac{m_{,} m_{,,}}{r^2}.$$

Der Gewinn an lebendiger Kraft beim Uebergange aus unendlicher Entfernung in die r ist $-\frac{m_{,} m_{,,}}{r}$.

2) Bezeichnen wir diese Grösse als Potential der beiden Elemente, und übertragen wir die Benennung Potential auf magnetische Körper wie bei den Electricitäten, so erhalten wir den Gewinn an lebendiger Kraft bei der Bewegung zweier Körper, deren Magnetismus sich nicht ändert, also von Stahlmagneten, wenn wir von dem Werth des Potentials am Ende der Bewegung den zu Anfang der Bewegung abziehen. Dagegen wird wie bei den Elektricitäten der Gewinn an lebendiger Kraft bei der Bewegung magnetischer Körper, deren Vertheilung sich ändert, gemessen durch die Veränderungen der Summe:

$$V + \tfrac{1}{2}(W_a + W_b),$$

wo V das Potential der Körper gegen einander, W_a und W_b das derselben auf sich selbst ist. Ist der Körper B ein unveränderlicher Stahlmagnet, so erzeugt die Annäherung eines

1) Verbesserungen hierzu im folgenden Aufsatz (1881).

Körpers von veränderlichem Magnetismus eine lebendige Kraft, gleich der Zunahme der Summe $V + \frac{1}{2} W_a$.

3) Es ist bekannt, dass die Wirkungen eines Magneten nach aussen stets durch eine gewisse Vertheilung der magne-
62 tischen Fluida an seiner Oberfläche ersetzt werden können. Wir können also statt der Potentiale der Magneten die Potentiale solcher Oberflächen setzen. Dann finden wir wie bei den leitenden electrischen Oberflächen für ein vollkommen weiches Eisen A, welches durch Vertheilung von einem Magneten B magnetisirt ist, den Gewinn C an lebendiger Kraft für die Einheit der Quantität des als positiv bezeichneten Magnetismus bei dem Uebergange von der Oberfläche des Eisens in unendliche Entfernung gegeben durch die Gleichung:

$$-QC = V + W_a.$$

Da nun jeder Magnet so viel nördlichen wie südlichen Magnetismus enthält, also Q in jedem gleich 0 ist, so folgt für ein solches Eisenstück oder für ein Stahlstück von derselben Form, Lage und Vertheilung des Magnetismus, dessen Magnetismus also vollständig durch den Magneten B gebunden ist, dass:

$$V = -W_a.$$

4) V ist aber die lebendige Kraft, welche der Stahlmagnet bei seiner Annäherung bis zur Bindung seiner Magnetismen erzeugt; sie muss nach dieser Gleichung dieselbe sein, an welchen Magneten er sich auch annähern möge, sobald es nur bis zur vollständigen Bindung kommt, weil W_a immer dasselbe bleibt. Dagegen ist die lebendige Kraft eines gleichen Eisenstückes, welches bis zu derselben Vertheilung des Magnetismus genähert wird, wie oben gezeigt ist:

$$V + \tfrac{1}{2} W = -\tfrac{1}{2} W,$$

also nur halb so gross als die des schon magnetisirten Stückes; zu bedenken ist, dass W an sich negativ ist, also $-\frac{1}{2} W$ stets positiv.

63 Wird ein Stahlstück dem vertheilenden Magneten unmagnetisch genähert, und behält es beim Entfernen den erlangten Magnetismus, so wird dabei $-\frac{1}{2} W$ an mechanischer Arbeit verloren, dafür ist der nunmehrige Magnet auch im

Stande $-\frac{1}{2} W$ Arbeit mehr zu leisten, als es das Stahlstück vorher konnte.

Electromagnetismus. Die electrodynamischen Erscheinungen sind zurückgeführt worden von Ampère auf anziehende und abstossende Kräfte der Stromelemente, deren Intensität von der Geschwindigkeit und Richtung der Ströme abhängt. Seine Herleitung umfasst aber die Inductionserscheinungen nicht. Letztere sind dagegen zugleich mit den electrodynamischen von W. Weber zurückgeführt worden auf anziehende und abstossende Kräfte der electrischen Fluida selbst, deren Intensität abhängt von der Näherungs- oder Entfernungsgeschwindigkeit und der Zunahme derselben. Für jetzt ist noch keine Hypothese aufgefunden worden, vermöge deren man diese Erscheinungen auf constante Centralkräfte zurückführen könnte. Die Gesetze der inducirten Ströme sind von Neumann[1]) entwickelt worden, indem er die experimentell für ganze Ströme gefundenen Gesetze von Lenz auf die kleinsten Theilchen derselben übertrug, und dieselben stimmen bei geschlossenen Strömen mit den Entwickelungen von Weber überein. Ebenso stimmen die Gesetze von Ampère und Weber für die electrodynamischen Wirkungen geschlossener Ströme mit der Herleitung derselben aus Rotationskräften von Grassmann.[2]) Weiter giebt uns auch die Erfahrung keine Aufschlüsse, weil bis jetzt nur mit geschlossenen oder beinahe 64
geschlossenen Strömen experimentirt worden ist. Wir wollen deshalb auch unser Princip nur auf geschlossene Ströme anwenden, und zeigen, dass daraus dieselben Gesetze herfolgen.

Es ist schon von Ampère gezeigt worden, dass die electrodynamischen Wirkungen eines geschlossenen Stromes stets ersetzt werden können durch eine gewisse Vertheilung der magnetischen Fluida an einer beliebigen von dem Strom begrenzten Fläche. Neumann hat daher den Begriff des Potentials auf die geschlossenen Ströme übertragen, indem er dafür das Potential einer solchen Fläche setzt.

Bewegt sich ein Magnet unter dem Einfluss eines Stromes,

1) Pogg. Ann. LXVII. 31.
2) Ann. LXIV. 1.

so muss die lebendige Kraft, die er dabei gewinnt, geliefert werden aus den Spannkräften, welche in dem Strome verbraucht werden. Diese sind während des Zeittheilchens dt nach der schon oben gebrauchten Bezeichnungsweise $AJdt$ in Wärmeeinheiten, oder $aAJdt$ in mechanischen, wenn a das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit ist. Die in der Strombahn erzeugte lebendige Kraft ist aJ^2Wdt, die vom Magneten gewonnene JdV/dt, wo V sein Potential gegen den von der Stromeinheit durchlaufenen Leiter ist. Also:

$$aAJdt = aJ^2Wdt + J\frac{dV}{dt}dt,$$

folglich:

$$J = \frac{A - \frac{1}{a}\frac{dV}{dt}}{W}.$$

Wir können die Grösse $(1/a).(dV/dt)$ als eine neue electromo-
65 torische Kraft bezeichnen, als die des Inductionsstromes. Sie wirkt stets der entgegen, welche den Magneten in der Richtung, die er hat, bewegen oder seine Geschwindigkeit vermehren würde. Da diese Kraft unabhängig ist von der Intensität des Stromes, muss sie auch dieselbe bleiben, wenn vor der Bewegung des Magneten gar kein Strom vorhanden war.

Ist die Intensität wechselnd, so ist der ganze während einer gewissen Zeit inducirte Strom:

$$\int Jdt = -\frac{1}{aW}\int\frac{dV}{dt}dt = \frac{1}{a}\frac{(V_, - V_{,,})}{W},$$

wo $V_,$ das Potential zu Anfang und $V_{,,}$ zu Ende der Bewegung bedeutet. Kommt der Magnet aus sehr grosser Entfernung, so ist:

$$\int Jdt = -\frac{\frac{1}{a}V_{,,}}{W},$$

unabhängig von dem Wege und der Geschwindigkeit des Magneten.

Wir können das Gesetz so aussprechen: Die gesammte electromotorische Kraft des Inductionsstromes, den eine Lagenänderung eines Magneten gegen einen geschlossenen Stromleiter hervorbringt, ist gleich der Veränderung, die dabei in

dem Potentiale des Magneten gegen den Leiter vor sich geht, wenn letzterer von dem Strome $-1/a$ durchflossen gedacht wird. Einheit der electromotorischen Kraft ist dabei die, durch welche die willkürliche Stromeinheit in der Widerstandseinheit hervorgebracht wird. Letztere aber diejenige, in welcher jene Stromeinheit in der Zeiteinheit die Wärmeeinheit entwickelt. Dasselbe Gesetz bei Neumann l. c. § 9, nur hat 66
er statt $1/a$ eine unbestimmte Constante ε.

6) Bewegt sich ein Magnet unter dem Einflusse eines Leiters, gegen den sein Potential bei der Stromeinheit φ sei, und eines durch diesen Leiter magnetisirten Eisenstückes, gegen welches sein Potential für den durch die Stromeinheit erregten Magnetismus χ sei, so ist wie vorher:

$$aAJ = aJ^2W + J\frac{d\varphi}{dt} + J\frac{d\chi}{dt},$$

also:

$$J = \frac{A - \frac{1}{a}\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right)}{W}.$$

Die electromotorische Kraft des Inductionsstromes, welcher von der Anwesenheit des Eisenstückes herrührt, ist also:

$$-\frac{1}{a}\frac{d\chi}{dt}.$$

Wird in dem Electromagneten durch den Strom n dieselbe Vertheilung des Magnetismus hervorgerufen, wie durch den genäherten Magneten, so muss nach dem in Nr. 4 gesagten das Potential desselben gegen den Magneten, $n\chi$, gleich sein seinem Potential gegen den Leitungsdraht nV, wenn V dasselbe für die Stromeinheit bedeutet. Es ist also $\chi = V$. Wird also ein Inductionsstrom hervorgerufen dadurch, dass das Eisenstück durch Vertheilung von dem Magneten magnetisirt wird, so ist die electromotorische Kraft $-(1/a).(d\chi/dt) = -(1/a).(dV/dt)$, und wie in Nr. 7 der Gesammtstrom:

$$\int Jdt = \frac{\frac{1}{a}(V_, - V_{,,})}{W}, \qquad 67$$

wo $V_,$ und $V_{,,}$ die Potentiale des magnetisirten Eisens gegen den Leitungsdraht vor und nach der Magnetisirung sind. —

Neumann folgert dies Gesetz aus der Analogie mit dem vorigen Falle.

7) Wird ein Elektromagnet unter dem Einflusse eines Stromes magnetisch, so geht durch den Inductionsstrom Wärme verloren; ist das Eisenstück weich, so wird bei der Oeffnung derselbe Inductionsstrom in entgegengesetzter Richtung gehen, und die Wärme wieder gewonnen. Ist es ein Stahlstück, welches seinen Magnetismus behält, so bleibt jene Wärme verloren, und an ihrer Stelle gewinnen wir magnetische Arbeitskraft, gleich dem halben Potential jenes Magneten bei vollständiger Bindung, wie in No. 4 gezeigt ist. Aus der Analogie der vorigen Fälle möchte es indessen nicht unwahrscheinlich sein, dass die electromotorische Kraft seinem ganzen Potential entspricht, wie Neumann den gleichen Schluss macht, und dass ein Theil der Bewegung der magnetischen Fluida wegen der Schnelligkeit derselben als Wärme verloren geht, welche hierbei in dem Magneten gewonnen wird.

8) Werden zwei geschlossene Stromleiter gegen einander bewegt, so kann die Intensität des Stromes in beiden verändert werden. Ist V ihr Potential für die Stromeinheit gegen einander, so muss wie in den vorigen Fällen und aus denselben Gründen sein:

$$A_{,}J_{,} + A_{,,}J_{,,} = J_{,}^{2}W_{,} + J_{,,}^{2}W_{,,} + \frac{1}{a}J_{,}J_{,,}\frac{dV}{dt}.$$

68 Ist nun die Stromintensität in dem einen Leiter $W_{,,}$ sehr viel geringer als in dem anderen $W_{,}$, so dass die electromotorische Inductionskraft, welche von $W_{,,}$ in $W_{,}$ erregt wird, gegen die Kraft $A_{,}$ verschwindet, und wir $J = A_{,}/W_{,}$ setzen können, so erhalten wir aus der Gleichung:

$$J_{,,} = \frac{A_{,,} - \frac{1}{a}J_{,}\frac{dV}{dt}}{W_{,,}}.$$

Die electromotorische Inductionskraft ist also dieselbe, welche ein Magnet erzeugen würde, der dieselbe electrodynamische Kraft hat als der inducirende Strom. Dieses Gesetz hat W. Weber[1]) experimentell erwiesen.

1) Elektrodynamische Maassbestimmungen. S. 71—75.

Ist dagegen die Intensität in $W_{,}$ verschwindend klein gegen die in $W_{,,}$ so findet sich:

$$J_{,} = \frac{A_{,} - \frac{1}{a}J_{,,}\frac{dV}{dt}}{W_{,}}.$$

Die electromotorischen Kräfte der Leiter aufeinander sind sich also gleich, wenn die Stromintensitäten gleich sind, wie auch die Form der Leiter sein mag.

Die gesammte Inductionskraft, welche während einer gewissen Bewegung der Leiter gegen einander ein Strom liefert, der selbst durch die Induction nicht verändert wird, ist hiernach wieder gleich der Aenderung in dem Potentiale desselben gegen den anderen von $-1/a$ durchflossenen Leiter. In dieser Form erschliesst Neumann das Gesetz aus der Analogie der magnetischen und electrodynamischen Kräfte l. c. § 10, und dehnt es auch auf den Fall aus, wo die Induction in ruhenden 69
Leitern durch Verstärkung oder Schwächung der Ströme hervorgebracht wird. W. Weber zeigt die Uebereinstimmung seiner Annahme für die electrodynamischen Kräfte mit diesen Theoremen l. c. S. 147—153. Aus dem Gesetze von der Erhaltung der Kräfte ist für diesen Fall keine Bestimmung zu entnehmen; nur muss durch Rückwirkung des inducirten Stromes auf den inducirenden eine Schwächung des letzteren eintreten, welche einem ebenso grossen Wärmeverlust entspricht, als in dem inducirten Strome gewonnen wird. Dasselbe Verhältniss muss bei der Wirkung des Stromes auf sich selbst zwischen der anfänglichen Schwächung und dem Extracurrent stattfinden. Indessen lassen sich hieraus keine weiteren Folgerungen ziehen, weil die Form des Ansteigens der Ströme nicht bekannt ist, und ausserdem das Ohm'sche Gesetz nicht unmittelbar anwendbar ist, da diese Ströme wohl nicht gleichzeitig die ganze Ausdehnung der Leitung einnehmen möchten.

Es bleiben uns von den bekannten Naturprocessen noch die der organischen Wesen übrig. In den Pflanzen sind die Vorgänge hauptsächlich chemische, und ausserdem findet, wenigstens in einzelnen, eine geringe Wärmeentwickelung

statt. Vornehmlich wird in ihnen eine mächtige Quantität chemischer Spannkräfte deponirt, deren Aequivalent uns als Wärme bei der Verbrennung der Pflanzensubstanzen geliefert wird. Die einzige lebendige Kraft, welche dafür nach unseren bisherigen Kenntnissen während des Wachsthums der Pflanzen absorbirt wird, sind die chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. Es fehlen uns indessen noch alle Angaben zur näheren Ver-
70 gleichung der Kraftäquivalente, welche hierbei verloren gehen und gewonnen werden. Für die Thiere haben wir schon einige, nähere Anhaltpunkte. Dieselben nehmen die complicirten oxydablen Verbindungen, welche von den Pflanzen erzeugt werden, und Sauerstoff in sich auf, geben dieselben theils verbrannt als Kohlensäure und Wasser, theils auf einfachere Verbindungen reducirt wieder von sich, verbrauchen also eine gewisse Quantität chemischer Spannkräfte und erzeugen dafür Wärme und mechanische Kräfte. Da die letzteren eine verhältnissmässig geringe Arbeitsgrösse darstellen gegen die Quantität der Wärme, so reducirt sich die Frage nach der Erhaltung der Kraft ungefähr auf die, ob die Verbrennung und Umsetzung der zur Nahrung dienenden Stoffe eine gleiche Wärmequantität erzeuge, als die Thiere abgeben. Diese Frage kann nach den Versuchen von Dulong und Despretz wenigstens annähernd bejaht werden.[1])

Schliesslich muss ich noch einiger Bemerkungen von Matteucci gegen die hier durchgeführte Betrachtungsweise erwähnen, welche sich in der Biblioth. univ. de Genève Suppl. No. 16. 1847. 15. Mai. S. 375 finden. Derselbe geht aus von dem Satze, dass nach derselben ein chemischer Process nicht so viel Wärme erzeugen könne, wenn er Electricität, Magnetismus oder Licht zugleich entwickelt, als wenn dies nicht der Fall sei. Er führt dagegen an, dass, wie er durch eine Reihe von Messungen zu zeigen sich bemüht, Zink bei seiner Auf-
71 lösung in Schwefelsäure ebenso viel Wärme erzeugt, wenn die-

1) Näher eingegangen bin ich auf diese Frage in dem Encycl. Wörterbuch der medicinischen Wissenschaften. Art. „Wärme", (diese Sammlung Bd. II) und in den Fortschritten der Physik im Jahre 1845, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. S. 346 (diese Sammlung Bd. I Nr. 1).

selbe unmittelbar durch die chemische Verwandtschaft geschieht, als wenn es mit Platin eine Kette bildet, und dass ein electrischer Strom, der einen Magneten in Ablenkung erhält, ebenso viel chemische und thermische Wirkungen erzeuge als ohne diese Ablenkung. Dass Matteucci diese Thatsachen als Einwürfe betrachtet, rührt von einem vollständigen Missverstehen der Ansicht her, welche er widerlegen will, wie sich aus einem Vergleiche mit unserer Darstellung dieser Verhältnisse sogleich ergiebt. Dann führt er zwei calorimetrische Versuche an über die Wärme, welche bei der Verbindung von Aetzbaryt mit concentrirter oder verdünnter Schwefelsäure sich entwickelt, und über die, welche in einem Drathe in Gasen von verschiedenem Abkühlungsvermögen durch denselben electrischen Strom erzeugt wird, wobei jene Masse und der Drath bald glühend werden, bald nicht. Er findet diese Wärmemengen im ersteren Falle nicht kleiner als im letzteren. Wenn man aber die Unvollkommenheit unserer calorimetrischen Vorrichtungen bedenkt, so kann es nicht auffallen, dass Unterschiede der Abkühlung durch Strahlung nicht bemerkt werden, welche davon herrühren könnten, dass diese Strahlung je nach der leuchtenden oder nicht leuchtenden Natur derselben die umgebenden diathermanen Mittel leichter oder schwerer durchdringt. In dem ersteren Versuche von Matteucci geschieht die Vereinigung des Baryts mit der Schwefelsäure noch dazu in einem nicht diathermanen Gefässe von Blei, wo die leuchtenden Strahlen gar nicht einmal herausdringen können. Die Unvollkommenheiten von Matteucci's Methoden bei diesen Messungen können wir daher wohl unerwähnt lassen.

Ich glaube durch das Angeführte bewiesen zu haben, dass 72
das besprochene Gesetz keiner der bisher bekannten Thatsachen der Naturwissenschaften widerspricht, von einer grossen Zahl derselben aber in einer auffallenden Weise bestätigt wird. Ich habe mich bemüht die Folgerungen möglichst vollständig aufzustellen, welche aus der Combination desselben mit den bisher bekannten Gesetzen der Naturerscheinungen sich ergeben, und welche ihre Bestätigung durch das Experiment noch erwarten müssen. Der Zweck dieser Untersuchung, der mich zugleich wegen der hypothetischen Theile derselben entschuldigen

mag, war, den Physikern in möglichster Vollständigkeit die theoretische, practische und heuristische Wichtigkeit dieses Gesetzes darzulegen, dessen vollständige Bestätigung wohl als eine der Hauptaufgaben der nächsten Zukunft der Physik betrachtet werden muss.

Zusätze (1881).

1) Zu Seite 13. Die philosophischen Erörterungen der Einleitung sind durch Kant's erkenntnisstheoretische Ansichten stärker beeinflusst, als ich jetzt noch als richtig anerkennen möchte. Ich habe mir erst später klar gemacht, dass das Princip der Causalität in der That nichts Anderes ist als die Voraussetzung der Gesetzlichkeit aller Naturerscheinungen. Das Gesetz als objective Macht anerkannt, nennen wir Kraft. Ursache ist seiner ursprünglichen Wortbedeutung nach das hinter dem Wechsel der Erscheinungen unveränderlich Bleibende oder Seiende, nämlich der Stoff und das Gesetz seines Wirkens, die Kraft. Die auf Seite 14 berührte Unmöglichkeit beide isolirt zu denken, ergiebt sich also einfach daraus, dass das Gesetz einer Wirkung Bedingungen voraussetzt, unter denen es zur Wirksamkeit kommt. Eine von der Materie losgelöste Kraft wäre die Objectivirung eines Gesetzes, dem Bedingungen seiner Wirksamkeit fehlen.

2) Zu Seite 15. Die Nothwendigkeit der Auflösung der Kräfte in solche, die sich auf Punkte beziehen, kann aus dem Princip der vollständigen Begreifbarkeit der Natur hergeleitet werden für die Massen, auf welche die Kräfte wirken, insofern vollständige Kenntniss der Bewegung fehlt, wenn nicht die Bewegung jedes einzelnen materiellen Punktes angegeben werden kann. Aber die gleiche Nothwendigkeit scheint mir nicht zu bestehen für die Massen, von denen die Kräfte ausgehen. Ich habe dies schon zum Theil im folgenden Aufsatze besprochen. Die Erörterungen in I und II des Textes sind zum Theil nur zulässig, wenn diese Auflösbarkeit in Punktkräfte als von vorn herein feststehend beibehalten wird. Dass die Bewegungskräfte, wie sie durch Newton definirt sind, die nach dem Gesetz des Parallelogramms construirten Resultanten aller Einzelkräfte sind, die von sämmtlichen einzelnen vorhandenen Massenelementen ausgehen, kann ich nur noch als ein durch Erfahrung gefundenes Naturgesetz anerkennen. Es sagt eine Thatsache aus: Die Beschleunigung, welche ein Massenpunkt erfährt, wenn mehrere Ursachen zusammenwirken, ist die Resultante (geometrische Summe) derjenigen Beschleunigungen, welche die einzelnen Ursachen einzeln herbeigeführt haben würden. Nun kommt freilich der Fall empirisch vor, dass zwei Körper, z. B. zwei Magnete, die gleichzeitig auf einen dritten wirken, eine Kraft ausüben, die nicht einfach die Resultante der Kräfte ist, die jeder allein genommen ausüben würde. Wir kommen in diesem Falle mit der Annahme aus, dass jeder einzelne Magnet in dem anderen die Anordnung einer unsichtbaren imponderablen Substanz verändert. Aber ich kann das Princip der Begreiflichkeit nicht mehr als zureichend für die Folgerung anerkennen, dass die durch das Zusammenwirken zweier oder mehrerer Bewegungsursachen entstehende Wirkung nothwendig durch (geometrische) Summirung aus denen der einzelnen gefunden werden müsse.

Sowohl dieser thatsächliche Inhalt von Newton's zweitem Axiom, wie das weiter unten ausgesprochene Princip, dass die Kräfte, welche zwei Massen aufeinander ausüben, nothwendig bestimmt sein müssen, wenn die Lage der Massen vollständig gegeben ist, sind verlassen worden in denjenigen electrodynamischen Theorien, welche die Kraft zwischen electrischen Quantis von deren Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängig machen. Die in dieser Richtung gemachten Versuche haben bisher noch immer in Widersprüche gegen die innerhalb des Bereichs unserer bisherigen Erfahrung ausnahmslos bewährten mechanischen Principien von der Gleichheit der Action und Reaction und von der Constanz der Energie geführt, worüber später in den electrodynamischen Abhandlungen dieses Bandes mehr die Rede sein wird. Wenn für Electricität in Leitern nur labiles Gleichgewicht existirte, so wäre damit auch die Eindeutigkeit und Bestimmtheit der Lösungen electrischer Probleme verloren gegangen, und wenn eine Kraft abhängig gemacht wird von der absoluten Bewegung, d. h. von einer veränderten Beziehung einer Masse zu etwas, was nie Gegenstand einer möglichen Wahrnehmung werden kann, nämlich zum unterschiedslosen leeren Raum, so erscheint

mir dies als eine Annahme, die die Aussicht auf vollständige Lösung der naturwissenschaftlichen Aufgaben aufgiebt, was meiner Meinung nach erst geschehen dürfte, wenn alle anderen theoretischen Möglichkeiten erschöpft wären.

3) Zu Seite 20. Dieser viel gebrauchte Beweis ist ungenügend für den Fall, dass die Kräfte von den Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen abhängen sollten, worauf mich Hr. Lipschitz aufmerksam machte. Denn man kann auch setzen:

$$X = \frac{dU}{dx} + Q\cdot\frac{dz}{dt} - R\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$Y = \frac{dU}{dy} + R\cdot\frac{dx}{dt} - P\cdot\frac{dz}{dt}$$
$$Z = \frac{dU}{dz} + P\cdot\frac{dy}{dt} - Q\cdot\frac{dx}{dt},$$

worin U eine Function der Coordinaten, P, Q, R dagegen beliebige Functionen der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten seien, so ist:

$$X\cdot\frac{dx}{dt} + Y\cdot\frac{dy}{dt} + Z\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mq^2\right],$$

also die lebendige Kraft eine Function der Coordinaten. Die mit den Factoren P, Q, R versehenen Zusätze zu den Werthen der Kraftcomponenten repräsentiren eine resultirende Kraft, welche senkrecht zu der resultirenden Geschwindigkeit des bewegten Punktes ist. Eine solche Kraft würde ersichtlich die Krümmung der Bahn verändern aber nicht die lebendige Kraft.

Wenn man die Giltigkeit des Gesetzes von der Action und Reaction festhält und die Auflösbarkeit in Punktkräfte, so bleibt der im Text aufgestellte allgemeine Satz aber richtig. Denn das genannte Gesetz lässt für ein Punktpaar nur Kräfte zu, welche in Richtung der Verbindungslinie gleiche Intensität und entgegengesetzte Richtung haben. Die zu den Geschwindigkeiten senkrechten Kräfte würden daher nur in den Momenten eintreten können, wo beide Geschwindigkeiten senkrecht zur Verbindungslinie wären.

Der Schlusssatz des Abschnittes muss also den in der Anmerkung gemachten Zusatz erhalten.

4) Zu Seite 27. Auch dieser Satz ist zu weit gefasst, da wir die vorausgehenden allgemeinen Sätze auf die Fälle beschränken müssen, wo Gleichheit der Action und Reaction allgemein gilt. Wenn wir die letztere fallen lassen, so zeigt das neuerdings von Hrn. Clausius aufgestellte electrodynamische Grundgesetz einen Fall, wo Kräfte, die von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abhängen, doch nicht ins Unendliche Triebkraft erzeugen können.

5) Zu Seite 41. Zur Geschichte der Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft wäre hier noch nachzutragen, dass R. Mayer 1842 seinen Aufsatz „Ueber die Kräfte der unbelebten Natur“[1]), veröffentlicht hatte, und 1845 die Abhandlung über „Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel“. Heilbronn. Schon in dem ersten Aufsatze ist die Ueberzeugung von der Aequivalenz der Wärme und Arbeit ausgesprochen und das Aequivalent der Wärme auf demselben Wege, der im Texte als der von Holtzmann angegeben ist, auf 365 m.kg berechnet. Der zweite Aufsatz ist seinem allgemeinen Ziele nach im wesentlichen zusammenfallend mit dem meinigen. Ich habe beide Aufsätze erst später kennen gelernt, und seitdem ich sie kannte, nie unterlassen, wo ich öffentlich von der Aufstellung des hier besprochenen Gesetzes zu reden hatte[2]), R. Mayer in erster Linie zu nennen, auch habe ich seine Ansprüche, so weit ich sie vertreten konnte, gegen die Freunde Joule's, welche dieselben gänzlich zu leugnen geneigt waren, in Schutz genommen. Ein von mir in diesem Sinne an Hrn. P. G. Tait geschriebener Brief ist von diesem in der Vorrede zu seinem Buche: „Sketch of Thermodynamics“ (Edinburgh, 1868) abgedruckt. Ich lasse ihn hier folgen:

„Ich muss sagen, dass mir die Entdeckungen von Kirchhoff auf diesem Felde (Radiation and Absorption) als einer

1) Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler und Liebig. Bd. XLII p. 233. — Beide Aufsätze wieder abgedruckt in „Die Mechanik der Wärme“ in gesammelten Schriften von J. R. Mayer. Stuttgart. Cotta 1867.

2) S. meine „Populären wissenschaftlichen Vorträge. Heft II S. 112 aus dem Jahre 1854. Ebenda S. 141 (1862). Ebenda S. 194 (1869).

der lehrreichsten Fälle in der Geschichte der Wissenschaft erscheinen, eben auch deshalb weil viele andere Forscher vorher schon dicht am Rande derselben Entdeckung gewesen waren. Kirchhoff's Vorgänger verhalten sich zu ihm in diesem Felde ungefähr so, wie in Bezug auf die Erhaltung der Kraft Rob. Mayer, Colding und Séguin zu Joule und W. Thomson."

„Was nun Robert Mayer betrifft, so kann ich allerdings den Standpunkt begreifen, den Sie ihm gegenüber eingenommen haben, kann aber doch diese Gelegenheit nicht hingehen lassen, ohne auszusprechen, dass ich nicht ganz derselben Meinung bin. Der Fortschritt der Naturwissenschaften hängt davon ab, dass aus den vorhandenen Thatsachen immer neue Inductionen gebildet werden, und dass dann die Folgerungen dieser Inductionen, so weit sie sich auf neue Thatsachen beziehen, mit der Wirklichkeit durch das Experiment verglichen werden. Ueber die Nothwendigkeit dieses zweiten Geschäftes kann kein Zweifel sein. Es wird auch oft dieser zweite Theil einen grossen Aufwand von Arbeit und Scharfsinn kosten und dem, der ihn gut durchführt, zum höchsten Verdienste gerechnet werden. Aber der Ruhm der Erfindung haftet doch an dem, der die neue Idee gefunden hat; die experimentelle Prüfung ist nachher eine viel mechanischere Art der Leistung. Auch kann man nicht unbedingt verlangen, dass der Erfinder der Idee verpflichtet sei auch den zweiten Theil der Arbeit auszuführen. Damit würden wir den grössten Theil der Arbeiten aller mathematischen Physiker verwerfen. Auch W. Thomson hat eine Reihe theoretischer Arbeiten über Carnot's Gesetz und dessen Consequenzen gemacht, ehe er ein einziges Experiment darüber anstellte, und Keinem von uns wird einfallen, deshalb jene Arbeiten gering schätzen zu wollen."

„Robert Mayer war nicht in der Lage Versuche anstellen zu können; er wurde von den ihm bekannten Physikern zurückgewiesen (noch mehrere Jahre später ging es mir ebenso); er konnte nur schwer Raum für die Veröffentlichung seiner ersten zusammengedrängten Darstellung gewinnen. Sie werden wissen, dass er in Folge dieser Zurückweisung zuletzt geisteskrank wurde. Es ist jetzt schwer sich in den Gedankenkreis jener Zeit zurückzuversetzen und sich klar zu machen, wie absolut

neu damals die Sache erschien. Mir scheint, dass auch Joule lange um Anerkennung seiner Entdeckung kämpfen musste."

„Obgleich also Niemand leugnen wird, dass Joule viel mehr gethan hat als Mayer, und dass in den ersten Abhandlungen des Letzteren viele Einzelheiten unklar sind, so glaube ich doch, man muss Mayer als einen Mann betrachten, der unabhängig und selbständig diesen Gedanken gefunden hat, der den grössten neueren Fortschritt der Naturwissenschaft bedingte: und sein Verdienst wird dadurch nicht geringer, dass gleichzeitig ein Anderer in einem anderen Lande und anderem Wirkungskreise dieselbe Entdeckung gemacht, und sie freilich nachher besser durchgeführt hat als er."

In neuester Zeit haben die Anhänger metaphysischer Speculation versucht das Gesetz von der Erhaltung der Kraft zu einem a priori gültigen zu stempeln, und feiern deshalb R. Mayer als einen Heros im Felde des reinen Gedankens. Was sie als den Gipfel von Mayer's Leistungen ansehen, nämlich die metaphysisch formulirten Scheinbeweise für die a priorische Nothwendigkeit dieses Gesetzes, wird jedem an strenge wissenschaftliche Methodik gewöhnten Naturforscher gerade als die schwächste Seite seiner Auseinandersetzungen erscheinen und ist unverkennbar der Grund gewesen, warum Mayer's Arbeiten in naturwissenschaftlichen Kreisen so lange unbekannt geblieben sind. Erst als von anderer Seite her, namentlich durch Hrn. Joule's meisterhafte Arbeiten, die Ueberzeugung von der Richtigkeit des Gesetzes sich Bahn gebrochen hatte, ist man auf Mayer's Schriften aufmerksam geworden.

Uebrigens ist dieses Gesetz, wie alle Kenntniss von Vorgängen der wirklichen Welt, auf inductivem Wege gefunden worden. Dass man kein Perpetuum mobile bauen, d. h. Triebkraft ohne Ende nicht ohne entsprechenden Verbrauch gewinnen könne, war eine durch viele vergebliche Versuche, es zu leisten, allmählig gewonnene Induction.

Schon längst hatte die französische Akademie das Perpetuum mobile in dieselbe Kategorie wie die Quadratur des Zirkels gestellt, und beschlossen keine angeblichen Lösungen dieses Problems mehr anzunehmen. Das muss doch als der Ausdruck einer unter den Sachverständigen weit verbreiteten

Ueberzeugung angesehen werden. Ich selbst habe diese Ueberzeugung schon während meiner Schulzeit oft genug aussprechen und die Unvollständigkeit der dafür zu erbringenden Beweise erörtern hören. Die Frage nach dem Ursprung der thierischen Wärme forderte eine sorgfältigere und vollständige Erörterung aller Thatsachen, die darauf Bezug hatten. Als ich an diese Arbeit ging, habe ich sie immer nur als eine kritische betrachtet, durchaus nicht als eine originale Entdeckung, um deren Priorität es einen Streit geben könnte. Ich war nachher einigermassen erstaunt über den Widerstand, dem ich in den Kreisen der Sachverständigen begegnete; die Aufnahme meiner Arbeit in Poggendorff's Annalen wurde mir verweigert, und unter den Mitgliedern der Berliner Akademie war es nur C. G. J. Jacobi, der Mathematiker, der sich meiner annahm. Ruhm und äussere Förderung war in jenen Zeiten mit der neuen Ueberzeugung noch nicht zu gewinnen; eher das Gegentheil. Dass ich selbst auch bei Abfassung der Schrift in keiner Weise nach einer mir nicht zukommenden Priorität getrachtet habe, wie mir meine Gegner metaphysischer Richtung anzudichten streben, ist, meine ich, vollständig dadurch klargestellt, dass ich die andern Forscher, die in dieser Richtung gearbeitet hatten, so weit ich sie kannte, angeführt habe. Und schon neben diesen von mir angeführten Arbeiten, namentlich denen von Joule, konnte damals von einem Prioritätsanspruch für mich nicht mehr die Rede sein, so weit überhaupt in Bezug auf das allgemeine Princip von einem solchen die Rede sein konnte.

Wenn meine Litteraturkenntniss zu jener Zeit 1847 noch unvollständig war, so bitte ich dies damit zu entschuldigen, dass ich die vorliegende Abhandlung in der Stadt Potsdam ausgearbeitet habe, wo sich meine litterarischen Hülfsmittel auf die der dortigen Gymnasialbibliothek beschränkten, und dass damals die „Fortschritte der Physik" der Berliner physikalischen Gesellschaft und andere Hülfsmittel noch fehlten, mit denen es jetzt allerdings sehr leicht geworden ist, sich in der physikalischen Litteratur zu orientiren.

6) Zu Seite 42. Der Begriff des Potentials eines Körpers, beziehlich einer electrischen Ladung auf sich

selbst ist hier in etwas anderer Bedeutung genommen, als dies später in der wissenschaftlichen Literatur gewöhnlich geschehen ist. Ich konnte in der sehr spärlichen, mir damals zugänglichen Literatur keinen Vorgänger für den Gebrauch dieses Begriffs finden, und habe mich deshalb bei seiner Bildung durch die Analogie des Potentials zweier verschiedener Ladungen gegen einander (V im Texte) leiten lassen. Wenn man sich deren Träger als congruent und entsprechende Flächenstücke als gleich stark geladen vorstellt, so lässt sich das Potential V der beiden bilden. Nun kann man sich die beiden Körper in congruente Lage übergeführt denken; dann wird V das, was ich hier mit W bezeichnet habe. Darin kommt jede Combination je zweier electrischer Theilchen e und ε zweimal in Rechnung. Das so gebildete W ist nicht der Werth der Arbeit, wie auch im Texte festgestellt wird, sondern der letztere ist $\frac{1}{2} W$ (S. 43).[1]) In meinen späteren Arbeiten habe ich mich dem zweckmässigeren Gebrauche anderer Autoren angeschlossen und $\frac{1}{2} W$ als das Potential des Körpers auf sich selbst bezeichnet. S. darüber auch den folgenden Aufsatz.

1) Die betreffende Stelle war im Original am Schluss als Berichtigung eingeführt.

III.

Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius.

Poggendorff's Annalen Bd. 91. S. 241—260 (1854).

241 Hr. Clausius greift in diesen Annalen Bd. LXXXIX, S. 568 einige Stellen meiner Schrift über die Erhaltung der Kraft an. Bei dem ersten Punkte, den er behandelt, die Ableitung des Gesetzes der Wärmeentwickelung bei electrischen Entladungen aus dem Principe von der Erhaltung der Kraft betreffend, ist seine Polemik durch ein vollständiges Missverständniss dessen, was ich gemeint und ausgesprochen habe, bedingt.

Ich soll nämlich von der irrigen Ansicht ausgegangen sein, das, was ich Potential einer Masse auf sich selbst genannt habe, sei gleich der gethanen Arbeit, während es doch in Wahrheit doppelt so gross ist, und als Beleg dafür citirt Clausius auf S. 569 seines Aufsatzes eine Stelle aus S. 39 meiner Schrift so, als hätte ich diese Stelle allgemeingültig hingestellt, während ich ihr vielmehr besondere Annahmen vorausgeschickt habe, welche Bedingungen ihrer Gültigkeit sind. Wenn aber auch meine Worte in jener Stelle vielleicht einen Zweifel erregen konnten, so habe ich doch auf der folgenden Seite den auch von Clausius citirten mathematischen Ausdruck für die durch zwei electrisirte Körper repräsentirte Arbeit gegeben, aus der meine Ansicht über diesen Punkt jedenfalls ganz unzweideutig zu entnehmen war. Man braucht nur den einen der beiden Körper als unendlich gross und unendlich entfernt anzunehmen, so erhält man die Arbeit, welche der electrischen Vertheilung in dem anderen Körper entspricht, gleich dem halben Potentiale

seiner Electricität auf sich selbst, also übereinstimmend mit Clausius gleich dem, was dieser ganzes Potential genannt hat. Ich habe diese Folgerung an jener Stelle nicht ausdrücklich ausgesprochen, weil wir es, streng genommen, nie mit einem electrischen Körper allein zu thun haben, sondern stets mindestens mit zweien, von denen der zweite die Erde sein kann. 242
Doch findet sich die genannte Folgerung für ganz analoge Verhältnisse bei Magneten auf S. 63 meiner Schrift, wo ausdrücklich das halbe Potential eines Magneten auf sich selbst als Maass der Arbeit anerkannt wird.[1])

Meine Beweisführung geht nicht von einer falschen Annahme über das Arbeitsäquivalent des genannten Potentiales aus, sondern hat im Gegentheile den Zweck dies Arbeits-Aequivalent erst zu finden. Bei einer Bewegung zweier electrisirten Körper ohne Aenderung der Vertheilung ist, wie ich unmittelbar vorher gezeigt habe, der Gewinn an Arbeit der Differenz des Potentials der electrischen Massen aufeinander gleich. Jetzt musste auch der Arbeitsgewinn bei Aenderung der Vertheilung gefunden werden. Dies geschah durch die Betrachtung eines Falles von Entladung, wobei ich die wirkende Electricität so in vier electrische Massen eintheilte, dass die Arbeit, welche bei der Entladung durch Vertheilungsänderungen dieser vier Massen entstand, gleich Null war, indem nämlich zwei von diesen vier Massen ihren Platz und ihre Vertheilung behielten, zwei andere von gleicher Grösse und entgegengesetztem Zeichen beides vertauschten, wodurch offenbar keine Arbeit gewonnen oder verloren wird. Es wurde dadurch also ein Fall von Bewegung mit Vertheilungsänderung auf einen ohne Vertheilungsänderung zurückgeführt, und es konnte deshalb die gewonnene Arbeit gleich der Differenz der Potentialsumme gesetzt werden. Allerdings habe ich den Grund, warum letzteres geschehen konnte, dem Leser zu ergänzen überlassen. Wenn Hr. Clausius meinen Beweis in diesem Sinne ansieht, wird er ihn, denke ich, richtig finden.

Zweitens nimmt Clausius Anstoss daran, dass ich eine von Vorsselman de Heer aus den Versuchen von Riess

1) Siehe auch S. 45 und Zusatz 6 zur vorigen Abhandlung.

gezogene Folgerung aufgenommen habe, welche eine unerlaubte Verallgemeinerung der durch die Versuche gewonnenen Resultate enthalte. Er hat nicht bemerkt, dass ich dabei selbst auf
243 den Aufsatz von Riess verwiesen habe, welcher die Bedenken gegen eine solche Verallgemeinerung enthält. Ich habe also nichts Unsicheres als sicher, und nichts Lückenhaftes als vollständig ausgeben wollen. In seiner eigenen Untersuchung der Sache gelangt Clausius zu dem Ergebnisse, dass die Schlussweise von Vorsselman de Heer, die ich, indem ich sie citirte, mindestens als berücksichtigenswerth bezeichnet hatte, für den vorliegenden Zweck vorläufig ganz unbrauchbar sei. Es könnte also scheinen, als sei ich ganz unberechtigt gewesen, auf jene Folgerungen hinzuweisen. Indessen bitte ich zu bemerken, dass Clausius zu dieser vollständigen Verwerfung nur dadurch kommt, dass er schliesslich auch das von Riess aus seinen Versuchen abgeleitete Gesetz als unsicher verwirft. Hebt man die thatsächliche Grundlage auf, so fallen natürlich auch alle Folgerungen daraus zusammen. Wir wollen zunächst also festzustellen suchen, was von den Schlüssen von Vorsselman de Heer stehen bleibe und für unseren Zweck brauchbar sei, wenn wir die Gesetze von Riess so weit als gültig betrachten, wie dieser es selbst als erlaubt ansieht, und ausserdem nur dieselbe Annahme als wahrscheinlich beibehalten, welche Clausius selbst anwendet, wo er aus dem theoretischen Principe zu folgern sucht, dass die Wärmeentwickelung in den einzelnen Theilen des Schliessungsdrahtes dem Producte aus Quantität und Dichtigkeit der Electricität in der Batterie proportional sein müsse, die Annahme nämlich, dass bei Schliessungsbögen von grosser reducirter Länge gegen die in den continuirlichen Theilen des Schliessungsbogens entwickelte Wärmemenge die Arbeits-Aequivalente der übrigen Entladungsvorgänge verschwinden. Diese Annahme ist in der That deshalb höchst wahrscheinlich richtig, weil die im ganzen continuirlichen Theile des Schliessungsbogens entwickelte Wärme bei wachsender Länge desselben nach den Gesetzen von Riess fortdauernd wächst, und alle übrigen bekannten Entladungswirkungen dagegen fortdauernd abzunehmen scheinen. Unter diesen Umständen können wir folgern, dass mindestens bei

Schliessungsbögen von sehr grosser reducirter Länge und einer 244
beschränkten Anzahl von Verbindungsstellen verschiedener Metalle, die bei der Entladung entwickelte Wärme bis auf verschwindend kleine Theile von der Länge, Verzweigung und Zusammensetzung des Bogens unabhängig sei. Ist w die reducirte Länge des continuirlichen Theiles des verzweigten oder unverzweigten Leitungsdrahtes, ϑ die in diesem Theile entwickelte Wärme, q die Quantität der Electricität in der Batterie, und s die Zahl der gleich construirten Leydener Flaschen, so ist nach Riess:

$$\vartheta = \frac{a w}{b + w} \cdot \frac{q^2}{s}$$

wo a und b Constanten sind. Wird nun bei wachsender Grösse von w nicht gleichzeitig die Zahl der Verbindungsstellen verschiedener Metalle vermehrt, so wird sich nach den obigen Voraussetzungen eine Grösse von w erreichen lassen, wo die Wärmeentwickelung in den Verbindungsstellen, im Funken, in den Belegen der Flaschen und andere Arbeits-Aequivalente gegen ϑ verschwinden, ϑ also bis auf unmerklich kleine Quantitäten die ganze entwickelte Wärme repräsentirt. Ferner wird sich w auch so gross machen lassen, dass b dagegen verschwindet, dann wird:

$$\vartheta = a \frac{q^2}{s}$$

wie es das theoretische Gesetz verlangt.

Dagegen will ich Clausius gern zugeben, dass wir nicht durch thatsächliche Beweise entscheiden können, ob bei den Versuchen von Riess die gemachten Voraussetzungen erfüllt waren, weder ob die Theile der Arbeit verschwanden, welche nicht dem Gesetze der Wärmeentwickelung in linearen Leitern von constantem Widerstande folgen, noch auch ob die Grösse b wirklich, wenn von ihr die reducirten Längen der constanten Theile des Schliessungsbogens ab und zu w hinzugerechnet wurden, gegen w verschwindend klein war. Setzen wir das theoretische Gesetz, das aus der Aequivalenz von Wärme und mechanischer Kraft hergeleitet ist, als richtig voraus, so folgt daraus allerdings, dass, soweit die Versuche von Riess sich 245
der von ihm daraus abgeleiteten Formel fügen, die gesammte

Arbeitsleistung in den nicht untersuchten Theilen der Leitung äquivalent sein musste der Wärme, welche durch die Entladung in der reducirten Länge b zu entwickeln war. Denn die ganze zu leistende Arbeit ist:

$$a \cdot \frac{q^2}{s},$$

die in den linearen Leitungen vom Widerstande w entwickelte:

$$\frac{aw}{b+w} \cdot \frac{q^2}{s},$$

also die Differenz beider:

$$\frac{ab}{b+w} \cdot \frac{q^2}{s},$$

d. h. gleich der Wärme, welche in der reducirten Länge b zu entwickeln wäre. Während also durch das aus den Versuchen hergeleitete Gesetz, wenigstens theilweise, für grosse Werthe von w, wo die etwa vorhandenen störenden Umstände verschwinden mussten, das allgemeine Princip bestätigt wird, macht letzteres wieder wahrscheinlich, dass unter den Bedingungen, wo jene Versuche angestellt sind, entweder keine unbekannten Umstände einen merklichen Einfluss hatten, oder dass sie, wenn sie wirksam waren, auch mit unter jenes empirische Gesetz fielen.

Clausius deutet in seinem Aufsatze an, dass eine solche Schlussfolgerung, wie ich sie eben gezogen habe, möglich sei; doch lässt er sich nicht darauf ein sie zu ziehen, weil ihm die Richtigkeit der empirischen Formel von Riess zweifelhaft erscheint. Er macht darauf aufmerksam, dass die allerdings kleinen Abweichungen zwischen der Formel und den Beobachtungen ein constantes Gesetz zu befolgen scheinen. Indessen ist dies fast allgemein bei den Beobachtungsreihen von Riess mit dem electrischen Thermometer der Fall. Die stärkeren Erwärmungen sind fast immer kleiner gefunden, als sie nach der Rechnung sein sollten, was davon herrühren mag, dass der
246 Wärmeverlust im Thermometer bei höheren Temperaturunterschieden verhältnissmässig stärker war. Indessen sind die Abweichungen überall so gering, dass wir bei der grossen Schwierigkeit dieser Versuche deshalb wohl noch keinen Verdacht gegen die Gesetze zu schöpfen brauchen. Mindestens sehe ich keinen Grund den einen Factor der Formel, welcher vom

Widerstande abhängig ist, mehr zu bezweifeln, als den von der Ladung abhängigen, welchen Clausius für seine Folgerungen benutzt. Indessen wenn er geneigt ist die Uebereinstimmung der Versuche mit jenem ersten Theile des Gesetzes für einen blossen Zufall zu halten, so lässt sich darüber natürlich nicht weiter mit ihm rechten. Ich bin gern geneigt jeden Zweifel, der uns dazu führen kann die Thatsachen genauer festzustellen, zu ehren; aber wir müssen uns dadurch nicht verhindern lassen uns die Consequenzen solcher Gesetze klar zu machen, die durch eine lange Reihe von Thatsachen so weit erwiesen sind, als es zur Zeit möglich erscheint.

Clausius neigt sich in dieser Sache zu der Annahme, dass die bisher nicht untersuchten Theile der Arbeit einen beträchtlichen Theil der Gesammtwirkung bilden. Mir schien aus der Uebereinstimmung des theoretischen und empirischen Gesetzes das Gegentheil wahrscheinlicher. Indessen da es an factischen Entscheidungsmitteln ganz fehlt, ist es unnütz über die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit der einen oder der anderen Annahme zu streiten. Ich kann es deshalb wohl unterlassen, gegen die Wahrscheinlichkeitsgründe, welche Clausius vorgebracht hat Einwendungen zu machen und andere dagegen zu stellen, besonders da eine Entscheidung der Hauptpunkte durch Versuche nicht eben allzu schwer erscheint.

Der dritte Punkt, den Clausius angegriffen hat, betrifft den Beweis des folgenden allgemeinen Satzes: das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt nur da, wo die wirkenden Kräfte sich auflösen lassen in Kräfte materieller Punkte, welche in der Richtung der Verbindungslinie wirken, und deren Intensität nur von der Entfernung abhängt. Wir wollen auf 247
solche Kräfte allein den besonderen Namen Centralkräfte anwenden, wie es in meiner Schrift schon geschehen ist.

Ich gebe in meiner Schrift zuerst die bekannte analytische Folgerung, dass in einem solchen Falle Richtung und Grösse der auf einen der materiellen Punkte wirkenden Gesammtkraft nur Function von Raumgrössen (Coordinaten), nicht von Zeit, Geschwindigkeit u. s. w. sein können. Dieser Theil des Beweises lässt sich ausführen, ohne die auf den betrachteten Punkt wirkende Gesammtkraft in ihre einzelnen Theile aufzulösen, die den

einzelnen wirkenden Punkten angehören. Der Grund, warum es nicht ganz unwichtig erscheint die Theile der Folgerungen besonders hinzustellen, welche eine solche Auflösung nicht erfordern, wird weiter unten erhellen. (Siehe vorher S. 70. Nr. 3.)

Um die Kräfte zu finden, mit denen zwei einzelne materielle Punkte gegeneinander wirken, muss ich natürlich das System aufgelöst denken, und zwei solche Punkte allein betrachten. Dieser Theil des Beweises kann übrigens von dem ersten ganz unabhängig gemacht werden, und auf ihn beziehen sich die Einwürfe von Clausius. Er behauptet nämlich, ich hätte ausser der Annahme, dass die Erhaltung der lebendigen Kraft stattfinde, noch eine zweite Annahme gemacht, die nämlich, dass die Grösse der Kraft Function der Entfernung sei, und daraus erst geschlossen, dass die Richtung der Kraft die der Verbindungslinie sei. Ich habe aber in der betreffenden Stelle die Behauptung über die Grösse der Kraft nicht als Annahme, sondern als Folgerung aus dem vorhergehenden Theile des Beweises hingestellt, und wenn ich ein neues Princip angewendet habe, so war es nur das Princip, wenn man es so nennen will, dass Stärke und Richtung reell vorhandener Naturkräfte nicht von der Lage bloss vorgestellter Coordinatsysteme, sondern nur von der Lage reell vorhandener physischer Objecte abhängig gemacht werden können.

Da dieser Theil des Beweises übrigens in meiner Schrift
248 durch die Verbindung mit dem ersten Theile schwerfälliger geworden ist, als nöthig war, und wie ich sehe auch in Beziehung der Gedankenverbindung schärfer sein könnte, so möge es mir wegen der Wichtigkeit des bestrittenen Punktes erlaubt sein ihn hier abgetrennt von dem ersten Theile und mit specieller Angabe aller seiner Vordersätze wieder anzuführen, damit man die Grundlagen, auf denen er ruht, klar übersehe. Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft ist gemäss der Formulirung auf S. 9 meiner Schrift, wenn wir es nur auf bewegliche Massenpunkte beziehen, folgendes: „Wenn in beliebiger Zahl bewegliche Massenpunkte sich nur unter dem Einflusse solcher Kräfte bewegen, die sie selbst gegeneinander ausüben, so ist die Summe der lebendigen Kräfte aller zusammengenommen zu allen Zeitpunkten dieselbe, in welchen alle Punkte

dieselben relativen Lagen gegeneinander einnehmen, wie auch ihre Bahnen und Geschwindigkeiten in der Zwischenzeit gewesen sein mögen.“ Ich muss hier besonders auf den Begriff der relativen Lage aufmerksam machen, der vielleicht nicht von allen Mechanikern in diesem Principe angewendet worden ist, der aber offenbar für die physikalische Anwendung des Principes durchaus wesentlich ist. Ich denke, es wird gegen folgende Definition dieses Begriffes nichts einzuwenden sein: „Gleiche relative Lage zu einander haben bewegliche Punkte, so oft ein Coordinatensystem zu construiren ist, in welchem alle ihre Coordinaten beziehungsweise dieselben Werthe wiederbekommen.“

Aus dieser Definition folgt unmittelbar für zwei Punkte, dass sie dieselbe relative Lage zueinander haben, so oft sie sich in gleicher Entfernung von einander befinden; denn so oft dies der Fall ist, lässt sich nicht bloss ein, sondern es lassen sich durch Drehung dieses einen um die Verbindungslinie der Punkte unzählig viele Coordinatensysteme finden, in denen die Coordinaten beider Punkte beziehungsweise dieselben Werthe annehmen. Die Summe der lebendigen Kräfte soll nach der Annahme gleich sein bei gleicher relativer Lage der Punkte. Die relative Lage ist gleich bei gleicher Entfernung, folglich wird durch unsere Annahme auch bedingt, dass für zwei Punkte 249
die lebendige Kraft gleich sei bei gleicher Entfernung, also ihrer Grösse nach abhängig sei nur von der Entfernung. Hiervon geht der zweite Theil meines Beweises aus, der sich auf zwei einzelne Punkte bezieht. Nennen wir die ganze lebendige Kraft des Systemes L, welche Grösse also nach dem eben Gesagten Function der Entfernung r ist. Die Coordinaten der beiden beweglichen Punkte seien beziehlich x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2, die Componenten der Kraft, welche auf den ersten Punkt ausgeübt wird, X, Y, Z, und ihre Resultante R, so ist nach bekannten analytischen Sätzen:

$$X = \frac{dL}{dx_2} \text{ oder:}$$
$$= \frac{dL}{dr}\frac{dr}{dx_1} \text{ oder:}$$
$$X = \frac{dL}{dr}\frac{x_2 - x_1}{r} \text{ und ebenso:} \qquad (1)$$

$$Y = \frac{dL}{dr}\,\frac{y_2 - y_1}{r} \tag{2}$$

$$Z = \frac{dL}{dr}\,\frac{z_2 - z_1}{r} \tag{3}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{dL}{dr}. \tag{4}$$

Die Gleichungen 1, 2 und 3 sagen aus, dass die Kraft nach der Richtung der Verbindungslinie wirke, die Gleichung 4, dass ihre Grösse Function der Entfernung r sei; *q. e. d.*

Clausius stellt meinen Sätzen die Möglichkeit entgegen, dass bei den Bewegungen eines beweglichen Punktes b um einen festen a die lebendige Kraft eine beliebige Function der Coordinaten sei. Eine solche Annahme würde zunächst der oben gegebenen Formulirung des Principes von der Erhaltung der Kraft nicht gemäss sein; sie würde also rein logisch genommen kein Gewicht gegen die Folgerung enthalten, die ich daraus gezogen habe. Aber es ist dagegen auch zu erinnern, dass wenn diese Annahme auch zuweilen bei mathematischen
250 Untersuchungen auf dem Papiere, wo man sich die Coordinataxen hinzeichnen kann, eine erlaubte und nützliche Vereinfachung der Vorstellung sein kann, sie sich doch nicht auf die physikalische Wirklichkeit übertragen lässt, so lange wir dem Grundsatze treu bleiben wollen, für reelle Wirkungen den vollständigen Grund auch nur in den Beziehungen reeller Dinge zueinander zu suchen. Denn wenn der feste Punkt a irgendwo im Raume gegeben wäre, müssten doch auch unmittelbar dadurch, dass er gegeben ist, diejenigen Richtungen gegeben sein, in denen die lebendige Kraft um ihn herum die grösste oder die kleinste ist, und diese Richtungen können ersichtlich durch die blosse Lage des Punktes nicht gegeben sein. Wir müssen hier scharf zwischen einem Punkte und einem körperlichen Elemente unterscheiden. Ein körperliches Element hat drei Dimensionen und durch seine Lage sind deshalb auch Richtungen bestimmt. Sobald uns z. B. die Lage eines körperlichen Elementes eines Krystalles vollständig gegeben ist, sind uns auch die Richtungen der Krystallaxen gegeben. Demgemäss liegt auch kein Widerspruch darin, dass ein solches Element nach verschiedenen Richtungen verschiedene Kräfte

ausübe, wie es z. B. die Elemente eines magnetisirten Körpers thun. Aber innerhalb eines solchen Elementes können wir uns auch eine unendliche Verschiedenheit von wirkenden Punkten denken. Körperliche Elemente sind deshalb noch nicht das letzte gleichartigste, bei dem unsere Analyse der Kräfte aufhören müsste.

Wenn also die Mechaniker in einem beweglichen Systeme von Massenpunkten die lebendige Kraft als Function der Coordinaten der Punkte betrachten, so dürfen sie hier statt der Punkte nicht körperliche Elemente substituiren, denn dann würde die lebendige Kraft auch noch von den Richtungen dreier fester Axen in jedem Elemente abhängen. Dem entsprechend müssen wir auch in dem Beispiele von Clausius statt des festen Punktes a ein körperliches Element setzen. Wenn nun die lebendige Kraft des bewegten Punktes b eine beliebige Function der Coordinaten φ ist, so kann gefragt 251
werden, ob in jedem Falle eine Anordnung von wirkenden Punkten mit Centralkräften innerhalb des Volumenelementes a möglich sei, welche die lebendige Kraft φ hervorbringen könnte.

Es lässt sich nun einsehen, dass dies für Entfernungen, gegen welche die Grösse des Elementes verschwindet, stets möglich sei, und auch, dass sogar jedesmal unendlich viele verschiedene Anordnungen dieser Art existiren werden. Unter ihnen ist für den zu führenden Beweis diejenige die bequemste, wo wir uns die wirkenden Punkte auf der Oberfläche einer unendlich kleinen Kugel vom Radius ϱ vertheilt denken. Die Function ϱ sei nach den Kugelfunctionen von Laplace entwickelt. Wenn φ, wie wir hier annehmen müssen, continuirlich ist, so giebt diese Entwickelung bekanntlich stets eine convergirende Reihe, und indem wir eine gewisse endliche Anzahl ihrer Glieder benutzen, können wir dadurch die Function φ mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit darstellen. Der Mittelpunkt des Coordinatensystems sei im Mittelpunkte der Kugel. Die Coordinaten eines äusseren Punktes seien:

$$x = r\cos\omega,$$
$$y = r\sin\omega\sin\vartheta,$$
$$z = r\sin\omega\cos\vartheta.$$

Die eines Punktes auf der Kugel seien:

$$a = \varrho \cos\alpha,$$
$$b = \varrho \sin\alpha \sin\beta,$$
$$c = \varrho \sin\alpha \cos\beta.$$

Wir betrachten ϱ als verschwindend klein gegen r, und nennen den reciproken Werth der letzteren Grösse e, den der Entfernung der beiden Punkte $x\,y\,z$ und $a\,b\,c$ dagegen ε, sodass also:

$$e = \frac{1}{r}$$
$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Wir setzen ferner:

$$\varepsilon - e = \Delta e.$$

252 Bekannt ist die Entwickelung von ε nach Kugelfunctionen, deren Glieder die Form haben:

$$b_{(n,\,m)}\,\varrho^n\,e^{n+1}\,\frac{d^m P_n(\omega)}{d(\cos\omega)^m}\cdot\frac{d^m P_n(\alpha)}{d(\cos\alpha)^m}\,\sin^m\omega\,.\,\sin^m\alpha\,\cos\left[m\,(\vartheta-\beta)\right],$$

wo $b_{(n,\,m)}$ ein Zahlencoëfficient und $P_n(\omega)$ eine ganze Function des $n$ten Grades von $\cos\omega$ ist, welche entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen dieser Grösse enthält. Die Entwickelung von Δe ergiebt sich daraus sogleich, wenn man das erste Glied der Reihe für ε, welches e ist, wegnimmt. Die Entwickelung der Function φ liefert dagegen eine Summe von Gliedern der Form:

$$\psi_{(e)}\,\frac{d^m P_n(\omega)}{d(\cos\omega)^m}\,\sin^m\omega\,\cos(m\vartheta) \qquad \text{oder:}$$

$$\psi_{(e)}\,\frac{d^m P_n(\omega)}{d(\cos\omega)^m}\,\sin^m\omega\,\sin(m\vartheta),$$

wo ψ eine Function von e ist, die jede mögliche Form haben kann. Wir wollen die Reihe abschliessen mit den Gliedern, für welche $n = \nu$ ist.

Die Aufgabe ist also: für die Punkte der Kugeloberfläche eine Function U von ε, α und β so zu bestimmen, dass wir haben:

$$q = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U\varrho^2 \sin\alpha\,d\alpha\,d\beta.$$

Wir können nun U in eine Summe von Theilen zerlegen, welche einzelnen Gliedern oder Gliedergruppen der Reihe für φ entsprechen. Nehmen wir aus dieser Reihe alle Glieder heraus, für welche m einen constanten Werth μ, n dagegen die Werthe ν, $\nu-2$, $\nu-4$ u. s. w. bis μ oder $\mu+1$ hin hat, und welche $\cos(m\vartheta)$ als Factor enthalten, und bezeichnen wir die Summe dieser Glieder mit $\varphi_{\nu\mu}$, den dazu gehörigen Theil von U mit $U_{\nu\mu}$, so lässt sich zeigen, dass der Gleichung:

$$\varphi_{\nu\mu} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U_{\nu\mu}\,\varrho^2 \sin\alpha\,d\alpha\,d\beta \qquad (1)$$

Genüge geschieht, wenn wir für $U_{\nu\mu}$ eine ähnliche Summe 253
setzen, wie $\varphi_{\nu\mu}$ ist, deren Glieder die Form haben:

$$u_{\nu\mu}\,\frac{d^\mu P_n(\alpha)}{d(\cos\alpha)^\mu}\,\sin^\mu\alpha\,\cos(\mu\beta),$$

wo ebenfalls n die Werthe ν, $\nu-2$, $\nu-4$ u. s. w. bis μ oder $\mu+1$ annimmt, und u eine Function von ε allein ist.

Setzt man nun für $U_{\nu\mu}$ in die Gleichung (1) diese Summe, entwickelt jedes u nach dem Taylor'schen Satze:

$$u_\varepsilon = u_e + \frac{d_e u}{de}\,\Delta e + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{d_e^2 u}{de^2}\,\Delta e^2 + \text{etc.},$$

setzt auch für Δe seine Entwickelung nach Kugelfunctionen, so kann man schliesslich alle vorhandenen Grössen als constante Factoren vor das Integralzeichen setzen, mit Ausnahme der Kugelfunctionen und trigonometrischen Functionen von α und β, und die Integration dann ausführen. Wenn man weiter berücksichtigt, dass:

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\beta)\cos\left[q\,(\vartheta-\beta)\right]d\beta = 0,$$

so oft nicht p gleich q ist, dass ferner:

$$\int_0^{\pi} \frac{d^m P_n(\alpha)}{d(\cos\alpha)^m}\,\cos^p\alpha\,\sin^{2m+1}\alpha\,d\alpha = 0,$$

so oft p kleiner als $n-m$ ist, und behält man ferner von den Gliedern, welche als Factor dieselbe Function $u_{\nu\mu}$ oder einen ihrer Differentialquotienten enthalten, nur diejenigen bei, welche mit den niedrigsten Potenzen von ϱ multiplicirt sind, da ϱ so

klein gemacht werden kann als man will, so reducirt sich schliesslich die Gleichung (1) auf ein System linearer, partieller Differentialgleichungen:

254
$$\frac{1}{\varrho^{\nu}}\psi_{\nu\mu} = a_1 e^{\nu+1}\frac{d u_{\nu\mu}}{de} + a_2 e^{\nu+2}\frac{d^2 u_{\nu\mu}}{de^2} + \text{etc.} + a_{(\nu-\mu)} e^{2\nu-\mu}\frac{d^{\nu-\mu} u_{\nu\mu}}{de},$$

$$\frac{1}{\varrho^{\nu-2}}\psi_{(\nu-2)\mu} = b_1 e^{\nu-1}\frac{d u_{\nu-2,\mu}}{de} + b_2 e^{\nu}\frac{d^2 u_{\nu-2,\mu}}{de^2} + \text{etc.} + b_{\nu-2-\mu} e^{2\nu-4-\mu}\frac{d^{\nu-2-\mu} u_{\nu-2,\mu}}{de^{\nu-2-\mu}} + \varrho^2 c_2 e^{\nu+2}\frac{d^2 u_{\nu\mu}}{de^2} + \text{etc.} + \varrho^2 c_{(\nu-\mu)} e^{2\nu-\mu}\frac{d^{\nu-\mu} u_{\nu\mu}}{de^{\nu-\mu}}.$$

u. s. w.

Die Grössen a, b, c u. s. w. sind Zahlencoëfficienten. Aus der ersten dieser Gleichungen kann man nach bekannten Integrationsregeln $u_{(\nu,\mu)}$, aus der zweiten dann $u_{(\nu-2,\mu)}$ finden u. s. w. Aus dem Verfahren, welches man bei der Integration zu befolgen hat, geht auch hervor, dass wenn die Functionen ψ für endliche Werthe von e endlich sind, auch die Grössen $\varrho^{\nu} u_{\nu\mu}$ und deren Ableitungen nach e, so weit sie in unseren Reihenentwickelungen vorkommen, für endliche Werthe von e und r stets endlich sind. Sowie somit die Theile von $U_{\nu\mu}$ gefunden sind, lassen sich die für jedes andere ähnliche Aggregat von Gliedern von φ finden, und somit lässt sich die gestellte Aufgabe jedenfalls bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit lösen.

Von einer anderen Seite hätte ich vielleicht Einwendungen gegen meinen Satz erwarten können. Ich habe nämlich ein Princip angewendet, welches allerdings in der mathematischen Mechanik ganz allgemein gebraucht wird, nach dessen Berechtigung aber vielleicht gefragt werden könnte. Ich habe nämlich vorausgesetzt, dass die Kraft, welche ein Punkt a auf einen anderen b ausübt, unabhängig von der Anwesenheit jedes dritten Punktes c sei, so dass also die Kraft welche a und c gleichzeitig auf b ausüben, die Summe derjenigen ist, welche sie einzeln genommen ausüben würden. Nur unter dieser Voraussetzung bin ich berechtigt anzunehmen, wie es in dem vor-
255 ausgegangenen Beweise geschehen musste, dass das, was für

die Kräfte der beiden bewegten Punkte a und b, wenn sie sich allein befinden gilt, auch noch gelte, wenn sie sich verbunden mit einem grösseren Systeme materieller Punkte bewegen. Wenn wir die Richtigkeit dieses Principes anerkennen, wie es bisher in der Mechanik immer geschehen ist, so folgt daraus, dass die lebendige Kraft nicht eine ganz beliebige Function der Coordinaten des Systemes sein könne, sondern eine Function, welche gewisse particuläre Differentialgleichungen erfüllen müsse. Nennen wir L die lebendige Kraft, a, b, c, d u. s. w. die einzelnen materiellen Punkte, x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b u. s. w. ihre Coordinaten, X_{ab} die der x-Axe parallele Componente der Kraft, welche der Punkt b auf den Punkt a ausübt, so ist nach bekannten Sätzen:

$$\frac{dL}{dx_a} = X_{ab} + X_{ac} + X_{ad} + \text{etc.}$$

Die Kraft X_{ab} würde nach dem eben ausgesprochenen Principe unabhängig sein von der Anwesenheit oder Lage sämmtlicher anderen materiellen Punkte mit Ausnahme von a und b, würde also auch nur Function von den Coordinaten dieser Punkte sein können, ebenso X_{ac} nur Function der Coordinaten von a und von c. Daraus folgt, wenn wir nach y_b differenziren, dass:

$$\frac{d^2 L}{dx_a, dy_b} = \frac{dX_{ab}}{dy_b}.$$

Da der Ausdruck der rechten Seite nur noch Function der Coordinaten von a und b ist, kann auch der der linken nur eine eben solche Function sein. Es müssen also alle Differentialquotienten von der Form:

$$\frac{d^3 L}{dx_a, dy_b, dz_c} \text{ oder } \frac{d^3 L}{dx_a, dx_b, dy_c} \text{ oder } \frac{d^3 L}{dx_a, dx_b, dx_c}$$

gleich Null sein.

Verbinden wir hiermit, was ich eben aus dem Begriffe der relativen Lage für die physikalische Anwendbarkeit hergeleitet habe, so folgt, dass die Function L eine Summe von Functionen sein muss, deren jede nur abhängig von der Entfernung zweier 256
einzelnen Punkte ist, so wie ich sie in meiner Abhandlung hingestellt habe.

Was endlich den vierten Punkt betrifft, der glücklicherweise nicht in wesentlicher Verbindung mit dem Hauptthema meines Buches steht, nämlich das, was ich über die Schrift von Holtzmann gesagt habe, so muss ich hier allerdings einen Irrthum eingestehen. Holtzmann spricht im Anfange sein Princip so aus, dass es wie eine Anerkennung der Aequivalenz von Wärme und Arbeit klingt, und der bei weitem grösste Theil der mathematischen Folgerungen, die er zieht, so weit sie ohne Integration zu erhalten sind, entsprechen dem auch. Die Integration ist aber, wie Clausius nachgewiesen hat, nicht in der Weise auszuführen, wie es Holtzmann gethan hat, wenn das Princip der Aequivalenz festgehalten werden soll.

In der Theorie des Galvanismus muss ich die Einwürfe von Clausius erwarten. Das Kapitel der Electrodynamik dagegen ist in meiner Schrift nur unter einer sehr beschränkenden Voraussetzung durchgeführt, weil ich damals von aller mathematisch physikalischen Literatur entblösst, fast auf das beschränkt war, was ich selbst zu erfinden wusste. Ich habe deshalb den Magnetismus des Eisens nur unter der Voraussetzung behandeln können, dass dasselbe vollkommen weich sei; d. h. der magnetischen Vertheilung gar kein Hinderniss entgegensetze, sodass diese Vertheilung genau dieselbe würde, wie die der Electricität an electrisirten Leitern. Unter der allgemeineren Voraussetzung jedoch, welche Poisson seinen Theoremen zu Grunde gelegt hat, dass die Stärke der Magnetisirung der magnetisirenden Kraft proportional sei, was für geringe Stärke der Magnetisirung jedenfalls mit der Erfahrung stimmt, mit Benutzung ferner der seit jener Zeit in Deutschland bekannt gewordenen Theoreme von Green und meiner eigenen Untersuchungen über den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten Ströme, lässt sich das genannte Kapitel jetzt vollständiger und genügender als irgend ein anderes
257 behandeln, und namentlich lässt sich das allgemeine Gesetz von Neumann für die inducirten Ströme jetzt viel vollständiger aus dem Principe von der Erhaltung der Kraft herleiten.

Da Clausius eine Arbeit über dies Kapitel ankündigt, will ich ihm nicht vorgreifen durch eine Veröffentlichung

meiner eigenen weiteren Arbeiten hierüber. Ich kann es nur für einen Gewinn halten, wenn die Ideenverbindungen, welche ich in meiner Schrift damals zu einer Zeit, wo sie noch wenig Anklang unter den Physikern fanden, darzulegen suchte, jetzt von einem Andern in anderer Form wieder aufgenommen, und in so vollständiger und kritischer Weise durchgearbeitet werden, wie es bisher bei anderen Kapiteln der Theorie von der Erhaltung der Kraft durch Hrn. Clausius geschehen ist. Nur sei es mir vergönnt die Resultate, wie ich sie mit erweiterten Hülfsmitteln später gewonnen habe, hier kurz zusammenzustellen, damit ich mit meiner älteren Darstellung nicht in zu ungünstigem Lichte neben Hrn. Clausius stehen bleibe.

Die Voraussetzung ist demnach, dass das magnetische Moment eines jeden körperlichen Elementes innerhalb eines durch Vertheilung magnetisirten Körpers A der magnetischen Richtkraft an dieser Stelle proportional sei und dieselbe Richtung habe. Das Potential des vertheilten Körpers A gegen den vertheilenden Magneten B sei V, das von A auf sich selbst (nach Clausius Definition) sei W, so lassen sich folgende Sätze ableiten:

1) Wenn der vertheilende Magnet aus unendlicher Entfernung dem vertheilten Körper A genähert wird, so wird dabei mechanische Arbeit gewonnen gleich dem Werthe von $\frac{1}{2} V$ am Ende des Weges. Dies ist ein, so viel ich weiss, neuer Satz in der mathematischen Theorie des Magnetismus. Wird der in A erzeugte Magnetismus nun fixirt und der Magnet in unendliche Entfernung gebracht, so wird dabei die mechanische Arbeit V aufgebraucht. Die erzeugte Magnetisirung von A hat also die mechanische Arbeit $\frac{1}{2} V$ erfordert. Nur wenn 258
die magnetische Vertheilung im Eisen ganz unbehindert ist, wird entsprechend den electrisirten Körpern, wie ich es in meiner Schrift angenommen habe, die durch die Magnetisirung repräsentirte Arbeit gleich $-W$, d. h. gleich der Arbeit, welche durch die Anziehungskräfte der freigewordenen magnetischen Fluida verrichtet werden kann. Der Unterschied $\frac{1}{2} V - (-W)$ repräsentirt also die Grösse der Moleculararbeit innerhalb des magnetisirten Körpers.

2) Aus meinen Untersuchungen über die durch Stromesschwankungen inducirten Ströme[1]) ergiebt sich, dass die Ansteigung eines galvanischen Stromes gegeben wird durch eine Gleichung von folgender Form:

$$i = \frac{A}{w}\left(1 - e^{-wt/p}\right),$$

wo A die electromotorische Kraft, w der Widerstand, t die Zeit und p eine Constante ist, welche nur von der Form der Leitung abhängt (nach Neumann das doppelte Potential der Leitung auf sich selbst bei der Stromeseinheit, dividirt durch die Inductionsconstante). Der durch das Ansteigen des Stromes inducirte Integralstrom ist dann:

$$\frac{p}{w} J,$$

wo J den grössten Werth, welchen i erreicht, bezeichnet. Dabei wird durch den inducirten Strom die Wärmemenge:

$$\frac{1}{2} p J^2$$

vernichtet, wenn die Einheit von w diejenige ist, in der die willkürliche Einheit der Stromintensität in der Zeiteinheit die Wärmeeinheit entwickelt. Wird der Strom so unterbrochen, dass der dabei inducirte Extracurrent eine Leitung findet, so wird dieselbe Wärmemenge wieder erzeugt, ohne dass dafür ein anderer Arbeitsverbrauch stattfände. Der galvanische
259 Strom J repräsentirt uns also, so lange er besteht, eine geleistete Arbeit, äquivalent der Wärmemenge:

$$\frac{1}{2} p J^2.$$

3) Wenn demnach ein Stromleiter von unveränderlicher Form mit unveränderlichen Stahlmagneten und Eisenmassen in Wechselwirkung tritt, welche letzteren theils durch ihn selbst, theils durch die Magnete magnetisirt werden, so muss in jedem Augenblicke durch den inducirten Strom so viel Wärme in der Stromleitung entwickelt oder vernichtet werden, als an Arbeit bei den stattfindenden Bewegungen, bei der Magnetisirung der Eisenmassen und Veränderung der Stromintensität verloren oder gewonnen wird. Daraus lässt sich

1) Diese Annalen Bd. LXXXIII, S. 505.

jetzt für die Induction durch Magnete ganz allgemein das Gesetz von Neumann ableiten, dass die inducirte electromotorische Kraft gleich ist den Veränderungen des Potentials der vorhandenen Magnete auf die von der Stromeinheit durchflossene Stromleitung, multiplicirt mit einer Constanten, und ferner, dass diese Constante bei der angegebenen Einheit des Widerstandes gleich dem reciproken Werthe des mechanischen Aequivalents der Wärmeeinheit ist. Diese Ableitung konnte ich in meiner früheren Schrift vollständig nur durchführen für die Induction durch Bewegung eines unveränderlichen Magneten.

4) W. Weber[1]) hat die Induction bei der Bewegung eines Stromleiters gegen einen anderen experimentell verglichen mit der bei Bewegung des Stromleiters gegen einen Magneten, und gefunden, dass beide gleich sind, unter Umständen wo die Veränderungen des Potentials auf den von der Stromeinheit durchflossenen Leiter gleich sind. Wenn also das Inductionsgesetz von Neumann für Magnetinduction vollständig gilt, erscheint es gerechtfertigt, dasselbe auch auf Induction durch Bewegung von Stromleitern zu übertragen. Dann lässt sich weiter aus dem Principe von der Erhaltung der Kraft folgern, dass auch in dem einen Leiter durch Stromesschwankungen des anderen inducirten Ströme demselben Gesetze folgen. Für 260
einen einzelnen Stromeskreis ist es mir noch nicht gelungen zu beweisen, dass die oben mit p bezeichnete Constante gleich dem doppelten Potentiale sein müsse, so wahrscheinlich dies auch nach der Analogie der übrigen Fälle sein mag.

Die in meiner früheren Schrift gegebene Gleichung für die Induction zweier bewegten Stromleiter aufeinander, ist nur für den Fall richtig, wo der eine Strom gegen den anderen verschwindend klein ist, weil ich damals noch nicht den Einfluss der Induction bei Unterbrechungen der Stromleitungen zu berücksichtigen wusste.

Eine zweite Erwiderung von Hrn. Clausius ist hierauf erfolgt in Poggendorff's Annalen Bd. 91. S. 601—604.

1) Electrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig, 1846, S. 171.

IV.

Ueber Eigenschaften des Eises.

Vorgetragen im naturhistorisch-medicinischen Verein zu Heidelberg am 24. Februar 1865. Das Manuscript eingereicht am 10. März. Abgedruckt in den Verhandlungen des Vereins Bd. III S. 194—196. Dasselbe Thema in seinen Beziehungen zur Gletschertheorie ist besprochen in meinen Populären wissenschaftlichen Vorträgen. Heft I S. 93—134.

194 Das Phänomen der Regelation des Eises von Null Grad, wonach zwei Eisstücke beim Aneinanderpressen zusammenfrieren und sich fest vereinigen, ist von Faraday entdeckt und von James Thomson erklärt worden aus der Erniedrigung des Gefrierpunktes, die bei gesteigertem Drucke eintritt. Dagegen wurden von Faraday Versuche angeführt, bei denen der Druck sehr klein ist, und doch die Eisstücke im Laufe einiger Stunden zusammenfroren.

Der Vortragende hat einige Versuche angestellt, welche dazu dienen können, die gegen J. Thomson's Theorie gemachten Einwände zu heben. Man muss hierbei wesentlich die Zeit berücksichtigen. Unter starkem Drucke haften zwei Eisstücke augenblicklich zusammen, unter Umständen so stark, dass man sie nicht wieder von einander lösen kann. Je schwächer der Druck ist, desto länger muss man warten und desto leichter sind die Stücke nachher wieder von einander zu lösen.

Presst man zwei Eisstücke an einander, so nehmen sie eine Temperatur niedriger als der Gefrierpunkt an, für je eine Atmosphäre Druck 0,0075 eines Centesimalgrades. Die zwischen ihnen zurückbleibende Wasserschicht aber kann entweichen und wird nicht gepresst, deren Gefrierpunkt wird also

auch nicht vermindert, und sie wird gefrieren müssen, da sie mit Eis von weniger als 0° in Berührung ist. Je kleiner der Druck, desto kleiner die Temperaturdifferenz, desto langsamer die Ableitung der Wärme vom Wasser zum Eise, desto langsamer das Gefrieren.

Der Vortragende erhielt einen durch Auskochen luftleer gemachten und zugeschmolzenen Glaskolben, der Wasser und Eis enthielt, in einem Gemisch von Eis und Wasser. Im Innern des Kolbens musste der Gefrierpunkt höher sein als ausserhalb. Deshalb gefror langsam das innere Wasser. Im Laufe einiger Stunden haftete das innen schwimmende Eis immer wieder an der Glaswand des Kolbens, und im Laufe einiger Tage entstanden gut ausgebildete Eiskrystalle über den ganzen Boden des Kolbens. Durch die Glaswand des Kolbens musste natürlich der Process sehr viel langsamer vor sich gehen, als in einer mikroskopisch dünnen Wasserschicht zwischen zwei Eisflächen.

Durch Berücksichtigung dieser Umstände scheinen die gegen die Theorie von Thomson aufgestellten Bedenken beseitigt zu werden. Faraday nimmt an, dass Wassertheilchen in enger Nachbarschaft von Eis durch eine Art von Contactwirkung leichter gefrieren. Dabei wird aber dem Wasser latente Wärme entzogen, und es ist nicht abzusehen, wo die hin kommen soll, oder welche Arbeit sie leisten soll. J. Thomson hat dagegen wohl mit Recht eingewendet, dass Contact- 195
wirkungen in solchen Fällen wohl Hindernisse wegräumen können, welche der Wirksamkeit derjenigen Kräfte entgegenstehen, die Veränderung hervorzubringen streben, aber sie nicht selbst hervorbringen können. Es würde dies ein Widerspruch gegen das Gesetz von der Erhaltung der Kraft sein.

Die Plasticität des Eises zeigt sich nach den Versuchen des Vortragenden am ausgezeichnetsten in Eis, welches durch hohen Druck (50 Atmosphären) aus Schnee zusammengepresst ist. Cylinder aus solchem Eise konnten zwischen zwei Platten in Richtung ihrer Axe zusammengedrückt werden, so dass sie platte Scheiben wurden, und erst gegen das Ende der Pressung bildeten sich offene Spalten an einzelnen Stellen der cylindrischen Oberfläche.

Regelmässig krystallinisches Eis dagegen von der Oberfläche eines gefrorenen Flusses, spaltet beim Druck zwischen zwei Platten in grosse Bruchstücke auseinander, die zwar durch Regelation wieder vereinigt werden, aber dann doch deutlich ein Haufwerk unregelmässiger Stücke bilden.

Körniges Eis dagegen, sei es nun feinkörnig, wie das aus Schnee gepresste Eis, oder grobkörnig, wie krystallinisches Eis, welches in einer geschlossenen eisernen Form zerbrochen und in eine neue Gestalt gepresst worden ist, bildet beim Druck nur kleine Risse, welche den Zusammenhang der Eismasse nicht vollständig trennen.

Ein Cylinder solchen körnigen Eises konnte selbst durch eine Oeffnung, deren Durchmesser nur halb so gross war, als der des Cylinders, hindurchgepresst werden, ohne seinen Zusammenhang zu verlieren. Doch spaltet der engere ausgepresste Cylinder gewöhnlich der Länge nach auf, ähnlich einem Gletscher, der durch eine enge Felsschlucht in ein weites Thal hinein bricht. Es erklärt sich dieses Aufspalten dadurch, dass das Eis durch die Mitte der Oeffnung schneller vordringt, als an deren Rändern.

Bei diesen Versuchen, wobei das Eis einem bis zu 50 Atmosphären gesteigerten Drucke ausgesetzt wird, und seine Temperatur deshalb auf etwa $-0°{,}5$ fällt, gefriert oft das Wasser, welches sich in den Spalten der aus mehreren Stücken zusammengesetzten eisernen Form ansammelt.

Das Eis, welches man künstlich aus Schnee zusammenpresst, ist von weisslichem Aussehen und undurchsichtig wegen der Menge kleiner Luftblasen, die es einschliesst. Wenn man es mit der Presse umknetet, wird es immer klarer, indem die Luftblasen durch die sich bildenden kleinen Sprünge ausgetrieben werden. Presst man einen Cylinder solchen Eises zwischen ebenen Platten, so sieht man fortwährend eine Menge kleiner Luftbläschen durch seine nasse Oberfläche entweichen. Dass das Gletschereis schliesslich ganz klar wird, erklärt sich also wohl durch das fortdauernde Umkneten desselben, welches in den Gletschern stattfindet.

Aber auch klares krystallinisches Eis wird trübe, wenn es

unter der Presse in eine andere Form gebracht wird. Ich habe 196
eine geschlossene cylindrische Form aus Gusseisen, in die ein Stempel eingetrieben werden konnte, mit klaren Eisstücken und Wasser gefüllt, so dass alle Luft ausgeschlossen war, und dann das Eis zusammengepresst, während das Wasser durch die Spalten der Form entwich. Der dadurch erzeugte Eisblock war weisslich durchscheinend. Mit der Lupe erkannte man eine grosse Menge sehr feiner und dicht aneinander stehender, das Licht schwach reflectirender Flächen in seinem Innern; wahrscheinlich Spalten von einer Weite, die kleiner als Viertellichtwellenlängen war, die ein Vacuum enthielten. Dass solche spaltförmige unvollständig mit Wasser gefüllte Vacua im Gletschereise vorkommen, hat Tyndall gezeigt. Solche können beim Pressen entstehen, wenn sich die Wände der gebildeten Sprünge mit einer kleinen Verschiebung wieder aneinander legen, wo sie dann nicht genau aufeinander passen.

Wenn ein solcher weisslicher Block gepressten Eises einige Stunden im Eiswasser lag, so wurde er ganz durchsichtig, wie Gletschereis. Mit der Lupe aber erkannte man in seinem Innern eine grosse Zahl von Linien, welche sich durch andere Lichtbrechung auszeichneten, und wie die aneinanderstossenden Kanten einer grossen Zahl kleiner Zellen erschienen. Brach man mit dem Daumennagel einige Theile von der Kante des Blockes los, so erschienen diese als ein Haufwerk kleiner polyedrischer Körner von Stecknadelkopf- bis Erbsengrösse. Jenes zellige Ansehen des Blockes rührte offenbar davon her, dass er durch und durch aus solchen polyedrischen Körnern bestand, zwischen denen sich Wasserschichten befanden. Mittels polarisirten Lichtes liess sich an gepressten Eisplatten von etwa 4 mm Dicke dieselbe Zusammensetzung aus einem Haufwerk von Körnern ebenfalls leicht erkennen, auch sogar unmittelbar nach der Pressung, ehe noch das Schmelzen angefangen hatte. Genau dieselbe Zusammensetzung zeigt bekanntlich schmelzendes Gletschereis, nur dass dieses meist grössere und mehr ineinander verschränkte Körner hat.

Die Entstehung dieser Körner scheint sich dadurch zu erklären, dass die unregelmässigen Bruchstücke, aus denen der zusammengepresste Block besteht und welche durch Regelation

vereinigt sind, bei der allmäligen Erwärmung des Blockes auf Null Grad gerade an den Stellen abschmelzen, die noch gepresst sind, dass die luftleeren Spalten sich mit diesem Wasser füllen, und so schliesslich eine Masse von aneinander liegenden Körnern entsteht, die durch ihre gegenseitige Verschränkung noch aneinander haften.

Hydrodynamik.

V.

Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.

(Aus dem „Journal für die reine und angewandte Mathematik." Bd. 55. S. 25—55. (1858.)

Es sind bisher Integrale der hydrodynamischen Gleichungen fast nur unter der Voraussetzung gesucht worden, dass die rechtwinkeligen Componenten der Geschwindigkeit jedes Wassertheilchens gleich gesetzt werden können den nach den entsprechenden Richtungen genommenen Differentialquotienten einer bestimmten Function, welche wir das Geschwindigkeitspotential nennen wollen. Allerdings hat schon Lagrange[1]) nachgewiesen, dass diese Voraussetzung zulässig ist, so oft die Bewegung der Wassermasse unter dem Einflusse von Kräften entstanden ist und fortgesetzt wird, welche selbst als Differentialquotienten eines Kräftepotentials dargestellt werden können, und dass auch der Einfluss bewegter fester Körper, welche mit der Flüssigkeit in Berührung kommen, die Gültigkeit jener Voraussetzung nicht abändert. Da nun die meisten mathematisch gut definirbaren Naturkräfte als die Differentialquotienten eines Kräftepotentials dargestellt werden können, so fallen auch bei weitem die meisten mathematisch zu behandelnden Fälle von Flüssigkeitsbewegung in die Zahl derer, bei denen ein Geschwindigkeitspotential existirt.

Indessen hat schon Euler[2]) darauf aufmerksam gemacht,

1) Mécanique analytique. Paris 1815. T. II, p. 304.
2) Histoire de l'Acad. des Sciences de Berlin. An. 1755, p. 292.

dass es doch auch Fälle von Flüssigkeitsbewegung giebt, in denen kein Geschwindigkeitspotential existirt, z. B. die Drehung einer Flüssigkeit um eine Axe mit gleicher Winkelgeschwindigkeit aller Theilchen. Zu den Kräften, welche solche Arten von Bewegungen hervorbringen können, gehören magnetische Kräfte, welche auf eine von elektrischen Strömen durchlaufene Flüssigkeit wirken, und namentlich die Reibung der Flüssigkeitstheilchen aneinander und an festen Körpern. Der Einfluss der Reibung auf Flüssigkeiten konnte bisher noch nicht mathematisch definirt werden, und doch ist derselbe in allen Fällen, wo es sich nicht um unendlich kleine Schwingungen handelt,
26 sehr gross, und bringt die bedeutendsten Abweichungen zwischen der Theorie und der Wirklichkeit hervor. Die Schwierigkeit diesen Einfluss zu definiren und Methoden zu seiner Messung zu finden, beruhte zum grossen Theile wohl auch darin, dass man keine Anschauung von den Formen der Bewegung hatte, welche die Reibung in der Flüssigkeit hervorbringt. In dieser Beziehung schien mir daher eine Untersuchung der Bewegungsformen, bei denen kein Geschwindigkeitspotential existirt, von Wichtigkeit zu sein.

Die folgende Untersuchung wird nun lehren, dass in den Fällen, wo ein Geschwindigkeitspotential existirt, die kleinsten Wassertheilchen keine Rotationsbewegungen haben, wohl aber ist wenigstens ein Theil der Wassertheilchen in Rotation begriffen in solchen Fällen, wo kein Geschwindigkeitspotential existirt.

Wirbellinien nenne ich Linien, welche durch die Flüssigkeitsmasse so gezogen sind, dass ihre Richtung überall mit der Richtung der augenblicklichen Rotationsaxe der in ihnen liegenden Wassertheilchen zusammentrifft.

Wirbelfäden nenne ich Theile der Wassermasse, welche man dadurch aus ihr herausschneidet, dass man durch alle Punkte des Umfanges eines unendlich kleinen Flächenelementes die entsprechenden Wirbellinien construirt.

Die Untersuchung ergiebt nun, dass wenn für alle Kräfte, welche auf die Flüssigkeit wirken, ein Kräftepotential existirt:

1) kein Wassertheilchen in Rotation kommt, welches nicht von Anfang an in Rotation begriffen ist.

2) Die Wassertheilchen, welche zu irgend einer Zeit derselben Wirbellinie angehören, auch indem sie sich fortbewegen, immer zu derselben Wirbellinie gehörig bleiben.
3) Dass das Product aus dem Querschnitte und der Rotationsgeschwindigkeit eines unendlich dünnen Wirbelfadens längs der ganzen Länge des Fadens constant ist, und auch bei der Fortbewegung des Fadens denselben Werth behält. Die Wirbelfäden müssen deshalb innerhalb der Flüssigkeit in sich zurücklaufen, oder können nur an ihren Grenzen endigen.

Dieser letztere Satz macht es möglich die Rotationsgeschwindigkeiten zu bestimmen, wenn die Form der betreffenden Wirbelfäden zu verschiedenen Zeiten gegeben ist. Ferner wird die Aufgabe gelöst, die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen für einen gewissen Zeitpunkt zu bestimmen, wenn für diesen Zeitpunkt die Rotationsgeschwindigkeiten gegeben sind; nur bleibt dabei eine willkürllche Function unbestimmt, 27
welche zur Erfüllung der Grenzbedingungen verwendet werden muss.

Diese letztere Aufgabe führt zu einer merkwürdigen Analogie der Wirbelbewegungen des Wassers mit den elektromagnetischen Wirkungen elektrischer Ströme. Wenn nämlich in einem einfach zusammenhängenden[1]), mit bewegter Flüssigkeit gefüllten Raume ein Geschwindigkeitspotential existirt, sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich und gleichgerichtet den Kräften, welche eine gewisse Vertheilung magnetischer Massen an der Oberfläche des Raumes auf ein magnetisches Theilchen im Innern ausüben würde. Wenn dagegen in einem solchen Raume Wirbelfäden existiren, so sind

1) Ich nehme diesen Ausdruck in demselben Sinne, in welchem Riemann (dieses Journal Bd. LIV, S. 108) von einfach und mehrfach zusammenhängenden Flächen spricht. Ein n fach zusammenhängender Raum ist danach ein solcher, durch den $n-1$, aber nicht mehrere Schnittflächen gelegt werden können, ohne den Raum in zwei vollständig getrennte Theile zu trennen. Ein Ring ist also in diesem Sinne ein zweifach zusammenhängender Raum. Die Schnittflächen müssen ringsum durch die Linie, in der sie die Oberfläche des Raumes schneiden, vollständig begrenzt sein.

die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich zu setzen den auf ein magnetisches Theilchen ausgeübten Kräften geschlossener elektrischer Ströme, welche theils durch die Wirbelfäden im Innern der Masse, theils in ihrer Oberfläche fliessen, und deren Intensität dem Product aus dem Querschnitt der Wirbelfäden und ihrer Rotationsgeschwindigkeit proportional ist.

Ich werde mir deshalb im Folgenden öfter erlauben, die Anwesenheit von magnetischen Massen oder elektrischen Strömen zu fingiren, blos um dadurch für die Natur von Functionen einen kürzeren und anschaulicheren Ausdruck zu gewinnen, die eben solche Functionen der Coordinaten sind, wie die Potentialfunctionen oder Anziehungskräfte, welche jenen Massen oder Strömen für ein magnetisches Theilchen zukommen.

Durch diese Sätze wird die Reihe der Bewegungsformen, welche in der nicht behandelten Klasse der Integrale der hydrodynamischen Gleichungen verborgen sind, wenigstens für die Vorstellung zugänglich, wenn auch die vollständige Ausführung der Integration nur in wenigen einfachsten Fällen möglich ist, wo nur ein oder zwei geradlinige oder kreisförmige Wirbelfäden vorhanden sind in unbegrenzten oder durch eine unendliche Ebene theilweis begrenzten Wassermassen.

Es lässt sich nachweisen, dass geradlinige parallele Wirbelfäden in einer Wassermasse, die nur durch senkrecht gegen
28 die Fäden gestellte Ebenen begrenzt ist, um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt rotiren, wenn man zur Bestimmung dieses Punktes die Rotationsgeschwindigkeit gleich der Dichtigkeit einer Masse betrachtet. Die Lage des Schwerpunkts bleibt unverändert. Bei kreisförmigen Wirbelfäden dagegen, die alle auf einer gemeinsamen Axe senkrecht stehen, bewegt sich der Schwerpunkt ihres Querschnitts parallel der Axe fort.

§ 1. Definition der Rotation.

Es sei innerhalb einer tropfbaren Flüssigkeit in dem Punkte, der durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, zur Zeit t der Druck gleich p, die den drei Coordinataxen parallelen Componenten der Geschwindigkeit u, v, w, die Componenten der auf die Einheit der flüssigen

Masse wirkenden äusseren Kräfte X, Y und Z, und die Dichtigkeit, deren Aenderungen als verschwindend klein angesehen werden, gleich h, so sind die bekannten Bewegungsgleichungen für die inneren Punkte der Flüssigkeit:

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}\\ Y-\frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}\\ Z-\frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}\\ 0 &= \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Man hat bisher fast ausschliesslich nur solche Fälle behandelt, wo nicht nur die Kräfte X, Y und Z ein Potential V haben, also auf die Form gebracht werden können:

$$X=\frac{dV}{dx},\quad Y=\frac{dV}{dy},\quad Z=\frac{dV}{dz}, \quad (1\text{ a})$$

sondern auch ausserdem ein Geschwindigkeitspotential φ gefunden werden kann, so dass:

$$u=\frac{d\varphi}{dx},\quad v=\frac{d\varphi}{dy},\quad w=\frac{d\varphi}{dz}. \quad (1\text{ b})$$

Dadurch vereinfacht sich die Aufgabe ausserordentlich, indem die drei ersten der Gleichungen (1) eine gemeinsame Integralgleichung geben, aus der p zu finden ist, nachdem man φ der vierten Gleichung gemäss bestimmt hat, welche in diesem Falle die Gestalt annimmt:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0,$$

also mit der bekannten Differentialgleichung für das Potential 29
magnetischer Massen übereinstimmt, welche ausserhalb des Raumes liegen, für den diese Gleichung gelten soll. Auch ist bekannt, dass jede Function φ, welche die obige Differentialgleichung innerhalb eines einfach zusammenhängenden[1]) Rau-

1) In mehrfach zusammenhängenden Räumen kann φ mehrdeutig werden, und für mehrdeutige Functionen, die der obigen Differentialgleichung Genüge thun, gilt der Fundamentalsatz von Green's Theorie der Elektricität (dieses Journal Bd. XLIV, S. 360) nicht, und demgemäss auch ein grosser Theil der aus ihm herfliessenden Sätze nicht, welche Gauss und Green für die magnetischen Potentialfunctionen aufgestellt haben, die ihrer Natur nach immer eindeutig sind.

mes erfüllt, als das Potential einer bestimmten Vertheilung magnetischer Massen an der Oberfläche des Raumes ausgedrückt werden kann, wie ich schon in der Einleitung angeführt habe.

Damit die in der Gleichung (1 b.) verlangte Substitution gemacht werden könne, muss sein:

$$\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dx} - \frac{dv}{dz} = 0, \qquad (1\,c)$$

Um die mechanische Bedeutung dieser letzteren drei Bedingungen zu verstehen, können wir uns die Veränderung, welche irgend ein unendlich kleines Wasservolum in dem Zeittheilchen dt erleidet, zusammengesetzt denken aus drei verschiedenen Bewegungen: 1) einer Fortführung des Wassertheilchens durch den Raum hin, 2) einer Ausdehnung oder Zusammenziehung des Theilchens nach drei Hauptdilatationsrichtungen, wobei ein jedes aus Wasser gebildete rechtwinklige Parallelepipedon, dessen Seiten den Hauptdilatationsrichtungen parallel sind, rechtwinklig bleibt, während seine Seiten zwar ihre Länge ändern, aber ihren früheren Richtungen parallel bleiben, 3) einer Drehung um eine beliebig gerichtete temporäre Rotationsaxe, welche Drehung nach einem bekannten Satze immer als Resultante dreier Drehungen um die Coordinataxen angesehen werden kann.

Sind in dem Punkte, dessen Coordinaten ξ, η und ζ sind, die unter (1 c) aufgestellten Bedingungen erfüllt, so wollen wir die Werthe von u, v, w und ihren Differentialquotienten in jenem Punkte folgendermassen bezeichnen:

$$u = A, \quad \frac{du}{dx} = a, \quad \frac{dw}{dy} = \frac{dv}{dz} = \alpha,$$
$$v = B, \quad \frac{dv}{dy} = b, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx} = \beta,$$
$$w = C, \quad \frac{dw}{dz} = c, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy} = \gamma,$$

und erhalten dann für Punkte, deren Coordinaten x, y, z unendlich wenig von ξ, η, ζ verschieden sind:

$$u = A + a(x-\xi) + \gamma(y-\eta) + \beta(z-\zeta),$$
$$v = B + \gamma(x-\xi) + b(y-\eta) + \alpha(z-\zeta),$$
$$w = C + \beta(x-\xi) + \alpha(y-\eta) + c(z-\zeta),$$

oder wenn wir setzen:

$$\varphi = A(x-\xi) + B(y-\eta) + C(z-\zeta) + \tfrac{1}{2}a(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{2}b(y-\eta)^2 + \tfrac{1}{2}c(z-\zeta)^2 + \alpha(y-\eta)(z-\zeta) + \beta(x-\xi)(z-\zeta) + \gamma(x-\xi)(y-\eta),$$

so ist:

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Es ist bekannt, dass man durch eine geeignete Wahl anders gerichteter rechtwinkliger Coordinaten x_1, y_1, z_1, deren Mittelpunkt im Punkte ξ, η, ζ liegt, den Ausdruck für φ auf die Form bringen kann:

$$\varphi = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 + \tfrac{1}{2}a_1 x_1^2 + \tfrac{1}{2}b_1 y_1^2 + \tfrac{1}{2}c_1 z_1^2,$$

wo dann die nach diesen neuen Coordinataxen zerlegten Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 die Werthe erhalten:

$$u_1 = A_1 + a_1 x_1, \quad v_1 = B_1 + b_1 y_1, \quad w_1 = C_1 + c_1 z_1.$$

Die der x_1-Axe parallele Geschwindigkeit u_1 ist also gleich für alle Wassertheilchen für welche x_1 denselben Werth hat, oder Wassertheilchen, welche zu Anfang des Zeittheilchens dt in einer den $y_1 z_1$ parallelen Ebene liegen, sind auch am Schlusse des Zeittheilchens dt in einer solchen. Dasselbe gilt für die $x_1 y_1$ und $x_1 z_1$ Ebene. Wenn wir also ein Parallelepipedon durch drei den letztgenannten Coordinatebenen parallele und ihnen unendlich nahe Ebenen begrenzt denken, so bilden die darin eingeschlossenen Wassertheilchen auch nach Ablauf des Zeitheilchens dt ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Flächen denselben Coordinatebenen parallel sind. Die ganze Bewegung eines solchen unendlich kleinen Parallelepipedon ist also unter der in (1 c) ausgesprochenen Voraussetzung zusammengesetzt nur aus einer Translationsbewegung im Raume, und einer Ausdehnung oder Zusammenziehung seiner Kanten, und es ist keine Drehung desselben vorhanden.

Kehren wir zurück zu dem ersten Coordinatsystem der x, y, z und denken wir nun zu den bisher vorhandenen Bewegungen der den Punkt $\xi\eta\zeta$ umgebenden unendlich kleinen Wassermasse noch Rotationsbewegungen um Axen, die denen der x, y und z parallel sind, und durch den Punkt $\xi\eta\zeta$ gehen, hinzugefügt, deren Winkelgeschwindigkeiten beziehlich sein mögen ξ, η, ζ, so sind die davon herrührenden Geschwindig-

keitscomponenten parallel den Coordinataxen der x, y, z beziehlich:

$$\begin{matrix} 0, & (z-\mathfrak{z})\,\xi, & -(y-\mathfrak{y})\,\xi, \\ -(z-\mathfrak{z})\,\eta, & 0, & (x-\mathfrak{x})\,\eta \\ (y-\mathfrak{y})\,\zeta, & -(x-\mathfrak{x})\,\zeta, & 0. \end{matrix}$$

Die Geschwindigkeiten des Theilchens, dessen Coordinaten x, y, z sind, werden nun also:

$$u = A + \alpha(x-\mathfrak{x}) + (\gamma+\zeta)(y-\mathfrak{y}) + (\beta-\eta)(z-\mathfrak{z}),$$
$$v = B + (\gamma-\zeta)(x-\mathfrak{x}) + b(\mathfrak{y}-y) + (\alpha+\xi)(z-\mathfrak{z}),$$
$$w = C + (\beta+\eta)(x-\mathfrak{x}) + (\alpha-\xi)(y-\mathfrak{y}) + c(z-\mathfrak{z}).$$

Daraus folgt durch Differenziren:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} &= 2\xi, \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= 2\eta, \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} &= 2\zeta. \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Die Grössen der linken Seite also, welche nach den Gleichungen (1 c.) gleich Null sein müssen, wenn ein Geschwindigkeitspotential existiren soll, sind gleich den doppelten Rotationsgeschwindigkeiten der betreffenden Wassertheilchen um die drei Coordinataxen. Die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials schliesst die Existenz von Rotationsbewegungen der Wassertheilchen aus.

Als eine weitere charakteristische Eigenthümlichkeit der Flüssigkeitsbewegung mit einem Geschwindigkeitspotential soll hier ferner noch angeführt werden, dass in einem ganz von festen Wänden eingeschlossenen, ganz mit Flüssigkeit gefüllten und einfach zusammenhängenden Raume S keine solche Bewegung vorkommen kann. Denn wenn wir mit n die nach innen gerichtete Normale der Oberfläche eines solchen Raumes bezeichnen, muss die zur Wand senkrecht gerichtete Geschwindigkeitscomponente $d\varphi/dn$ überall gleich Null sein. Dann ist nach einem bekannten Satze[1]) von Green:

32
$$\iiint\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = -\int \varphi \frac{d\varphi}{dn}\,d\omega,$$

1) Der vorher schon angeführte Satz in Journ. f. r. u. a. Math. Bd. LIV. S. 108, welcher nicht für mehrfach zusammenhängende Räume gilt.

wo links die Integration über den ganzen Raum S, rechts über die ganze Oberfläche von S, deren Flächenelement mit $d\omega$ bezeichnet ist, ausgedehnt werden muss. Ist nun $d\varphi/dn$ an der ganzen Oberfläche gleich Null, so muss auch das Integral links gleich Null sein, was nur der Fall sein kann, wenn im ganzen Raume S:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

also gar keine Bewegung des Wassers stattfindet. Jede Bewegung einer begrenzten Flüssigkeitsmasse in einem einfach zusammenhängenden Raume, die ein Geschwindigkeitspotential hat, ist also nothwendig mit einer Bewegung der Oberfläche der Flüssigkeit verbunden. Ist diese Bewegung der Oberfläche, d. h. $d\varphi/dn$ vollständig gegeben, so ist dadurch auch die ganze Bewegung der eingeschlossenen Flüssigkeitsmasse eindeutig bestimmt. Denn gäbe es zwei Funktionen $\varphi_,$ und $\varphi_{,,}$, welche gleichzeitig im Inneren des Raumes S der Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

genügten und an der Oberfläche die Bedingung:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \psi$$

erfüllten, wo ψ die durch die gegebene Bewegung der Oberfläche bedingten Werthe von $d\varphi/dn$ bezeichnet, so würde auch die Function $(\varphi_, - \varphi_{,,})$ die erstere Bedingung im Innern von S erfüllen, an der Oberfläche aber:

$$\frac{d(\varphi_, - \varphi_{,,})}{dn} = 0$$

sein, woraus wie eben gezeigt ist, auch für das ganze Innere von S folgen würde:

$$\frac{d(\varphi_, - \varphi_{,,})}{dx} = \frac{d(\varphi_, - \varphi_{,,})}{dy} = \frac{d(\varphi_, - \varphi_{,,})}{dz} = 0.$$

Beiden Functionen würden also genau dieselben Geschwindigkeiten auch im ganzen Innern von S entsprechen.

Also nur in dem Falle, wo kein Geschwindigkeitspotential existirt, können Drehungen der Wassertheilchen, und in sich zurücklaufende Bewegungen innerhalb einfach zusammenhängender ganz geschlossener Räume vorkommen. Wir können daher 33

die Bewegungen, denen ein Geschwindigkeitspotential nicht zukommt, im Allgemeinen als Wirbelbewegungen charakterisiren.

§ 2. Constanz der Wirbelbewegung.

Wir wollen zunächst die Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeiten ξ, η und ζ während der Bewegung bestimmen, wenn nur Kräfte wirken, denen ein Kräftepotential zukommt. Ich bemerke zunächst im allgemeinen, dass wenn ψ eine Function von x, y, z, t ist, und um $\partial\psi$ wächst, während die letzteren vier Grössen um ∂x, ∂y, ∂z und ∂t wachsen, wir haben:

$$\partial\psi = \frac{d\psi}{dt}\partial t + \frac{d\psi}{dx}\partial x + \frac{d\psi}{dy}\partial y + \frac{d\psi}{dz}\partial z.$$

Soll nun die Aenderung von ψ während des Zeittheilchens ∂t für ein constant bleibendes Wassertheilchen bestimmt werden, so müssen wir den Grössen ∂x, ∂y und ∂z dieselben Werthe geben, welche sie für das bewegte Wassertheilchen haben, nämlich:

$$\partial x = u\partial t, \quad \partial y = v\partial t, \quad \partial z = w\partial t,$$

und erhalten:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{d\psi}{dt} + u\frac{d\psi}{dx} + v\frac{d\psi}{dy} + w\frac{d\psi}{dz}.$$

Das Zeichen $\partial\psi/\partial t$ werde ich im Folgenden immer nur in dem Sinne gebrauchen, dass $(\partial\psi/\partial t)\,dt$ die Aenderung von ψ während der Zeit dt für dasselbe Wassertheilchen bezeichnet, dessen Coordinaten zu Anfang der Zeit dt x, y und z waren.

Indem wir aus den ersten der Gleichungen (1) mit Hülfe von Differentiationen die Grösse p eliminiren, und dabei die Bezeichnungen der Gleichungen (2) einführen, und für die Kräfte X, Y, Z die Gleichungen (1a) als erfüllbar betrachten, erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \xi\frac{du}{dx} + \eta\frac{du}{dy} + \zeta\frac{du}{dz},\\ \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \xi\frac{dv}{dx} + \eta\frac{dv}{dy} + \zeta\frac{dv}{dz},\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \zeta\frac{dw}{dz},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

oder auch: 34

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \xi\frac{du}{dx} + \eta\frac{dv}{dx} + \zeta\frac{dw}{dx},\\ \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \xi\frac{du}{dy} + \eta\frac{dv}{dy} + \zeta\frac{dw}{dy},\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \xi\frac{du}{dz} + \eta\frac{dv}{dz} + \zeta\frac{dw}{dz}.\end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Wenn in einem Wassertheilchen ξ, η und ζ gleichzeitig gleich Null sind, sind auch:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0.$$

Diejenigen Wassertheilchen also, welche nicht schon Rotationsbewegungen haben, bekommen auch im Verlaufe der Zeit keine Rotationsbewegungen.

Bekanntlich kann man Rotationen nach der Methode des Parallelogramms der Kräfte zusammensetzen. Sind ξ, η, ζ die Rotationsgeschwindigkeiten um die Coordinataxen, so ist die Rotationsgeschwindigkeit q um die augenblickliche Axe der Rotation:

$$q = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

und die Cosinus der Winkel, welche diese Axe mit den Coordinaten bildet, sind beziehlich ξ/q, η/q und ζ/q.

Wenn wir nun in Richtung dieser augenblicklichen Drehungsaxe, das unendlich kleine Stück $q\varepsilon$ abschneiden, so sind die Projectionen dieses Stückes auf die drei Coordinataxen beziehlich $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$ und $\varepsilon\zeta$. Während im Punkte x, y, z die Componenten der Geschwindigkeit u, v und w sind, sind sie am anderen Endpunkte von $q\varepsilon$ beziehlich:

$$u_1 = u + \varepsilon\xi\frac{du}{dx} + \varepsilon\eta\frac{du}{dy} + \varepsilon\zeta\frac{du}{dz},$$

$$v_1 = v + \varepsilon\xi\frac{dv}{dx} + \varepsilon\eta\frac{dv}{dy} + \varepsilon\zeta\frac{dv}{dz},$$

$$w_1 = w + \varepsilon\xi\frac{dw}{dx} + \varepsilon\eta\frac{dw}{ny} + \varepsilon\zeta\frac{dw}{dz}.$$

Nach Verlauf der Zeit dt haben also die Projectionen der Entfernung der beiden Wassertheilchen, welche zu Anfang von dt das Stück $q\varepsilon$ begrenzten, einen Werth erlangt, welchen man mit Berücksichtigung der Gleichungen (3) folgendermassen schreiben kann:

35
$$\varepsilon\xi + (u_1 - u)\,dt = \varepsilon\left(\xi + \frac{\partial\xi}{\partial t}dt\right),$$
$$\varepsilon\eta + (v_1 - v)\,dt = \varepsilon\left(\eta + \frac{\partial\eta}{\partial t}dt\right),$$
$$\varepsilon\zeta + (w_1 - w)\,dt = \varepsilon\left(\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial t}dt\right).$$

Links stehen hier die Projectionen der neuen Lage der Verbindungslinie $q\varepsilon$, rechts die mit dem constanten Factor ε multiplicirten Projectionen der neuen Rotationsgeschwindigkeit; es folgt aus diesen Gleichungen, dass die Verbindungslinie der beiden Wassertheilchen, welche zu Anfang der Zeit dt das Stück $q\varepsilon$ der augenblicklichen Rotationsaxe begrenzten, auch nach Ablauf der Zeit dt noch mit der jetzt geänderten Rotationsaxe zusammenfällt.

Wenn wir eine Linie, deren Richtung überall mit der Richtung der augenblicklichen Rotationsaxe der dort befindlichen Wassertheilchen zusammentrifft, wie oben festgesetzt ist, eine Wirbellinie nennen, so können wir den eben gefundenen Satz so aussprechen: Eine jede Wirbellinie bleibt fortdauernd aus denselben Wassertheilchen zusammengesetzt, während sie mit diesen Wassertheilchen in der Flüssigkeit fortschwimmt.

Die rechtwinkligen Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nehmen in demselben Verhältnisse zu, wie die Projectionen des Stückes εq der Rotationsaxe; daraus folgt, dass die Grösse der resultirenden Rotationsgeschwindigkeit in einem bestimmten Wassertheilchen in demselben Verhältnisse sich verändert, wie der Abstand dieses Wassertheilchens von seinen Nachbarn in der Rotationsaxe

Denken wir uns durch alle Punkte des Umfanges einer unendlich kleinen Fläche Wirbellinien gelegt, so wird dadurch aus der Flüssigkeit ein Faden von unendlich kleinem Querschnitt herausgetheilt, der Wirbelfaden genannt werden soll. Das Volumen eines zwischen zwei bestimmten Wassertheilchen gelegenen Stückes eines solchen Fadens, welches nach den eben bewiesenen Sätzen immer von denselben Wassertheilchen angefüllt bleibt, muss bei der Fortbewegung constant bleiben, sein Querschnitt sich also im umgekehrten Verhältnisse als die

Länge ändern. Danach kann man den eben hingestellten Satz auch so aussprechen: Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitte in einem aus denselben Wassertheilchen bestehenden Stücke eines Wirbelfadens bleibt bei der Fortbewegung desselben constant.

Aus den Gleichungen (2) folgt unmittelbar, dass: 36
$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$
Daraus weiter, dass:
$$\iiint\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right)dx\,dy\,dz = 0,$$
wobei die Integration über einen ganz beliebigen Theil S der Wassermasse ausgedehnt werden kann. Wenn wir partiell integriren, folgt daraus:
$$\iint\xi\,dy\,dz + \iint\eta\,dx\,dz + \iint\zeta\,dx\,dy = 0,$$
wobei die Integrationen über die ganze Oberfläche des Raumes S auszudehnen sind. Nennen wir $d\omega$ ein Flächenelement dieser Oberfläche und α, β, γ die drei Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale von $d\omega$ mit den Coordinataxen bildet, so ist:
$$dy\,dz = \cos\alpha\,d\omega, \quad dx\,dz = \cos\beta\,d\omega, \quad dx\,dy = \cos\gamma\,d\omega,$$
also:
$$\iint(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)\,d\omega = 0,$$
oder wenn man σ die resultirende Rotationsgeschwindigkeit nennt, und ϑ den Winkel zwischen ihr und der Normale,
$$\iint\sigma\cos\vartheta\,.\,d\omega = 0,$$
die Integration über die ganze Oberfläche von S ausgedehnt.

Nun sei S ein Stück eines Wirbelfadens, begrenzt durch zwei unendlich kleine senkrecht gegen die Axe des Fadens gelegte Ebenen $\omega_,$ und $\omega_{,,}$, so ist $\cos\vartheta$ an einer dieser Ebenen gleich 1, an der andern -1, an der ganzen übrigen Oberfläche des Fadens gleich 0, folglich wenn $\sigma_,$ und $\sigma_{,,}$ die Rotationsgeschwindigkeiten in $\omega_,$ und $\omega_{,,}$ sind, reducirt sich die letzte Gleichung auf:
$$\sigma_,\omega_, = \sigma_{,,}\omega_{,,},$$
woraus folgt: Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitte ist in der ganzen Länge

desselben Wirbelfadens constant. Dass es sich auch bei der Fortbewegung des Fadens nicht ändert, ist vorher schon bewiesen worden.

Es folgt hieraus auch, dass ein Wirbelfaden nirgends innerhalb der Flüssigkeit aufhören dürfe, sondern entweder ringförmig innerhalb der Flüssigkeit in sich zurücklaufen, oder
37 bis an die Grenzen der Flüssigkeit reichen müsse. Denn wenn ein Wirbelfaden innerhalb der Flüssigkeit irgend wo endete, würde sich eine geschlossene Fläche construiren lassen, für welche das Integral $\int \sigma \cos\vartheta \, . \, d\omega$ nicht den Werth Null hätte.

§ 3. Integration nach dem Raume.

Wenn man die Bewegung der in der Flüssigkeit vorhandenen Wirbelfäden bestimmen kann, so werden durch die hingestellten Sätze auch die Grössen ξ, η und ζ vollständig zu bestimmen sein. Wir wollen jetzt an die Aufgabe gehen, aus den Grössen ξ, η und ζ die Geschwindigkeiten u, v und w zu finden.

Es seien also innerhalb einer Wassermasse, die den Raum S einnimmt, die Werthe von ξ, η und ζ gegeben, welche drei Grössen der Bedingung genügen, dass:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0. \tag{2a}$$

Es sollen gefunden werden u, v und w, so dass sie innerhalb des ganzen Raumes S den Bedingungen genügen, dass:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0, \tag{1}_4$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} &= 2\xi, \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= 2\eta, \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} &= 2\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dazu kommen noch die durch die jedesmalige Natur der Aufgabe für die Grenze des Raumes S geforderten Bedingungen.

Bei der gegebenen Vertheilung von ξ, η, ζ können nun theils Wirbellinien vorkommen, welche innerhalb des Raumes S geschlossen in sich zurücklaufen, theils solche, welche die Grenze von S erreichen und hier abbrechen. Wenn letzteres

der Fall ist, so kann man jedenfalls entweder auf der Oberfläche von S oder ausserhalb S diese Wirbellinien fortsetzen und in sich zurücklaufend schliessen, so dass dann ein grösserer Raum S_1 existirt, welcher nur geschlossene Wirbellinien enthält, und an dessen ganzer Oberfläche ξ, η, ζ und ihre Resultante σ selbst gleich Null sind, oder wenigstens:

$$\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma = \sigma\cos\vartheta = 0. \tag{2b}$$

Wie vorher bedeuten hier α, β, γ die Winkel zwischen der 38
Normale des betreffenden Theiles der Oberfläche von S_1 und den Coordinataxen, ϑ den Winkel zwischen der Normale und der resultirenden Rotationsaxe.

Werthe von u, v, w, welche den Gleichungen $(1)_4$ und (2) genügen, erhalten wir nun, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dP}{dx} + \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, \\ v &= \frac{dP}{dy} + \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, \\ w &= \frac{dP}{dz} + \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und die Grössen L, M, N, P durch die Bedingungen bestimmen, dass innerhalb des Raumes S_1:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2L}{dx^2} + \frac{d^2L}{dy^2} + \frac{d^2L}{dz^2} &= 2\xi, \\ \frac{d^2M}{dx^2} + \frac{d^2M}{dy^2} + \frac{d^2M}{dz^2} &= 2\eta, \\ \frac{d^2N}{dx^2} + \frac{d^2N}{dy^2} + \frac{d^2N}{dz^2} &= 2\zeta, \\ \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} + \frac{d^2P}{dz^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wie diese letzteren Gleichungen integrirt werden, ist bekannt. L, M, N sind die Potentialfunctionen fingirter magnetischer Massen, die mit der Dichtigkeit $-\xi/2\pi$, $-\eta/2\pi$, und $-\zeta/2\pi$ durch den Raum S_1 verbreitet sind, P die Potentialfunction von Massen, die ausserhalb des Raumes S liegen. Bezeichnen wir die Entfernung eines Punktes, dessen Coordinaten a, b, c sind, von dem Punkte x, y, z mit r, und mit ξ_a, η_a, ζ_a die Werthe von ξ, η, ζ in dem Punkte a, b, c, so ist also:

$$\left.\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi_a}{r}\, da\, db\, dc \\ M &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\eta_a}{r}\, da\, db\, dc \\ N &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\zeta_a}{r}\, da\, db\, dc, \end{aligned}\right\} \qquad (5\,a)$$

die Integration über den Raum S_1 ausgedehnt, und:

$$P = \iiint \frac{k}{r}\, da\, db\, dc,$$

39 wo k eine willkührliche Function von a, b, c ist, und die Integration über den äusseren, S umschliessenden Raum auszudehnen ist. Die willkührliche Function k muss so bestimmt werden, dass die Grenzbedingungen erfüllt werden, eine Aufgabe, deren Schwierigkeit ähnlich denen über electrische und magnetische Vertheilung ist.

Dass die in (4) gegebenen Werthe von u, v und w die Bedingung $(1)_4$ erfüllen, ergiebt sich gleich durch Differentiation mit Berücksichtigung der vierten der Gleichungen (5).

Ferner findet man durch Differentiation der Gleichungen (4) mit Berücksichtigung der ersten drei von (5), dass:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} &= 2\xi - \frac{d}{dx}\left[\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz}\right] \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= 2\eta - \frac{d}{dy}\left[\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz}\right] \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} &= 2\zeta - \frac{d}{dz}\left[\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz}\right]. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) sind also ebenfalls erfüllt, wenn nachgewiesen werden kann, dass im ganzen Raume S_1:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0. \qquad (5\,b)$$

Dass dies der Fall sei, ergiebt sich aus den Gleichungen (5a):

$$\frac{dL}{dx} = +\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi_a (x-a)}{r^3}\, da\, db\, dc,$$

oder nach partieller Integration:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\xi_a}{r}\, db\, dc - \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{1}{r}\cdot\frac{d\xi_a}{da}\, da\, db\, dc,$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\eta_a}{r}\, da\, dc - \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{1}{r}\cdot\frac{d\eta_a}{db}\, da\, db\, dc,$$

$$\frac{dN}{dz} = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\zeta_a}{r}\, da\, db - \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{1}{r}\cdot\frac{d\zeta_a}{dc}\, da\, db\, dc.$$

Addiren wir diese drei Gleichungen und nennen das Flächenelement der Oberfläche von S wieder $d\omega$, so erhalten wir:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = \frac{1}{2\pi}\int (\xi_a \cos\alpha + \eta_a \cos\beta + \zeta_a \cos\gamma)\,\frac{1}{r}\, d\omega - \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{1}{r}\left(\frac{d\xi_a}{da} + \frac{d\eta_a}{db} + \frac{d\zeta_a}{dc}\right) da\, db\, dc.$$

Da aber im ganzen Innern des Raumes: 40

$$\frac{d\xi_a}{da} + \frac{d\eta_a}{db} + \frac{d\zeta_a}{dc} = 0, \qquad (2\,a)$$

und auf seiner ganzen Oberfläche:

$$\xi_a \cos\alpha + \eta_a \cos\beta + \zeta_a \cos\gamma = 0, \qquad (2\,b)$$

so sind beide Integrale gleich 0 und die Gleichung (5b) wie die Gleichungen (2) erfüllt. Die Gleichungen (4) und (5) oder (5a) sind somit wirklich Integrale der Gleichungen $(1)_4$ und (2).

Die in der Einleitung erwähnte Analogie zwischen den Fernwirkungen der Wirbelfäden und den electromagnetischen Fernwirkungen stromleitender Drähte, welche ein sehr gutes Mittel abgiebt, um die Form der Wirbelbewegungen anschaulich zu machen, ergiebt sich aus diesen Sätzen.

Wenn wir die Werthe von L, M, N aus den Gleichungen (5a) in die Gleichung (4) setzen, und diejenigen unendlich kleinen Theile von u, v und w, welche in den Integralen von dem Körperelemente da, db, dc herrühren, mit Δu, Δv, Δw bezeichnen, ihre Resultante mit Δp, so ist:

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi}\frac{(y-b)\,\zeta_a - (z-c)\,\eta_a}{r^3}\, da\, db\, dc,$$

$$\Delta v = \frac{1}{2\pi}\frac{(z-c)\,\xi_a - (x-a)\,\zeta_a}{r^3}\, da\, db\, dc,$$

$$\Delta w = \frac{1}{2\pi}\frac{(x-a)\,\eta_a - (y-b)\,\xi_a}{r^3}\, da\, db\, dc.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass:

$$\Delta u\,(x-a) + \Delta v\,(y-b) + \Delta w\,(z-c) = 0,$$

d. h. die Resultante Δp von Δu, Δv und Δw macht mit r einen rechten Winkel. Ferner:

$$\xi_a \Delta u + \eta_a \Delta v + \zeta_a \Delta w = 0,$$

d. h. dieselbe Resultante Δp macht auch mit der resultirenden Rotationsaxe in a, b, c einen rechten Winkel. Endlich:

$$\Delta p = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2} = \frac{da\,db\,dc}{2\pi r^2}\,\sigma \sin \nu,$$

wo σ die Resultante von ξ_a, η_a, ζ_a und ν der Winkel zwischen ihr und r ist, welcher durch die Gleichung bestimmt wird:

$$\sigma r \cos \nu = (x-a)\,\xi_a + (y-b)\,\eta_a + (z-c)\,\zeta_a.$$

41 Jedes rotirende Wassertheilchen a bedingt also in jedem anderen Theilchen b derselben Wassermasse eine Geschwindigkeit, welche senkrecht gegen die durch die Rotationsaxe von a und das Theilchen b gelegte Ebene steht. Die Grösse dieser Geschwindigkeit ist direct proportional dem Volumen von a, seiner Rotationsgeschwindigkeit und dem Sinus des Winkels zwischen der Linie ab und der Rotationsaxe, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung beider Theilchen.

Genau demselben Gesetze folgt die Kraft, welche eine in a befindliche electrische, der Rotationsaxe parallele Strömung auf ein in b befindliches magnetisches Theilchen ausüben würde.

Die mathematische Verwandtschaft beider Klassen von Naturerscheinungen beruht darin, dass bei den Wasserwirbeln in denjenigen Theilen des Wassermasse, welche keine Rotation haben, ein Geschwindigkeitspotential φ existirt, welches der Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

Genüge thut, welche Gleichung nur innerhalb der Wirbelfäden nicht gilt. Wenn wir uns die Wirbelfäden aber immer als geschlossen denken entweder innerhalb oder ausserhalb der Wassermasse, so ist der Raum, in welchem die Differentialgleichung für φ gilt, ein mehrfach zusammenhängender, denn er bleibt noch zusammenhängend, wenn man Schnittflächen durch ihn gelegt denkt, deren jede durch einen Wirbelfaden vollständig begrenzt wird. In solchen mehrfach zusammenhängenden Räumen kann nun eine Function φ, welche der obigen Differentialgleichung genügt, mehrdeutig werden, und

sie muss mehrdeutig werden, wenn sie in sich selbst zurücklaufende Strömungen darstellen soll; denn da die Geschwindigkeiten der Wassermasse ausserhalb der Wirbelfäden den Differentialquotienten von φ proportional sind, so muss man der Bewegung des Wassers folgend zu immer grösseren Werthen von φ fortschreiten. Ist die Strömung also in sich zurücklaufend, und kommt man ihr folgend schliesslich an den Ort zurück, wo man schon früher war, so findet man für diesen einen zweiten höheren Werth von φ. Da man dasselbe unendlich oft ausführen kann, so muss es unendlich viel verschiedene Werthe von φ für jeden Punkt eines solchen mehrfach zusammenhängenden Raumes geben, welche um gleiche Differenzen von einander verschieden sind, wie die verschiedenen Werthe von Arc tang (x/y), welches eine solche mehrdeutige Function ist, die der obigen Differentialgleichung genügt.

Ebenso verhält es sich mit den electromagnetischen Wir- 42
kungen eines geschlossenen electrischen Stromes. Derselbe wirkt in die Ferne, wie eine gewisse Vertheilung magnetischer Massen auf einer von dem Stromleiter begrenzten Fläche. Ausserhalb des Stromes können deshalb die Kräfte, die er auf ein magnetisches Theilchen ausübt, als die Differentialquotienten einer Potentialfunction V betrachtet werden, welche der Gleichung genügt:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

Auch hier ist aber der Raum, welcher den geschlossenen Stromleiter umgiebt, und in dem diese Gleichung gilt, mehrfach zusammenhängend, und V vieldeutig.

Bei den Wirbelbewegungen des Wassers also, wie bei den electromagnetischen Wirkungen, hängen Geschwindigkeiten oder Kräfte ausserhalb des von Wirbelfäden oder electrischen Strömen durchzogenen Raumes von mehrdeutigen Potentialfunctionen ab, welche übrigens der allgemeinen Differentialgleichung der magnetischen Potentialfunctionen Genüge thun, während innerhalb des von Wirbelfäden oder electrischen Strömen durchzogenen Raumes statt der Potentialfunctionen, die hier nicht existiren, andere gemeinsame Functionen auftreten, wie sie in den Gleichungen (4), (5) und (5 a) hingestellt sind. Bei den

einfach fortströmenden Wasserbewegungen und den magnetischen Kräften dagegen haben wir es mit eindeutigen Potentialfunctionen zu thun, ebenso wie bei der Gravitation, den electrischen Anziehungskräften, den constant gewordenen electrischen und thermischen Strömungen.

Diejenigen Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, in denen ein eindeutiges Geschwindigkeitspotential existirt, können wir Integrale erster Klasse nennen. Diejenigen dagegen, bei welchen Rotationen eines Theils der Wassertheilchen und demgemäss in den nicht rotirenden Wassertheilchen ein mehrdeutiges Geschwindigkeitspotential vorkommt, Integrale zweiter Klasse. Es kann vorkommen, dass im letzteren Falle nur solche Theile des Raumes in der Aufgabe zu berücksichtigen sind, welche keine rotirenden Wassertheile enthalten, z. B. bei Bewegungen des Wassers in ringförmigen Gefässen, wobei ein Wirbelfaden durch die Axe des Gefässes gehend gedacht werden kann, und wo also die Aufgabe doch noch zu denen gehört, die mittels der Annahme eines Geschwindigkeitspotentials gelöst werden können.

In den hydrodynamischen Integralen erster Klasse sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich gerichtet und proportional den Kräften, welche eine gewisse ausserhalb
43 der Flüssigkeit befindliche Vertheilung magnetischer Massen auf ein am Orte des Wassertheilchens befindliches magnetisches Theilchen hervorbringen würde.

In den hydrodynamischen Integralen zweiter Klasse sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich gerichtet und proportional den auf ein magnetisches Theilchen wirkenden Kräften, welche geschlossene electrische, durch die Wirbelfäden fliessende Ströme, deren Dichtigkeit der Rotationsgeschwindigkeit dieser Fäden proportional wäre, vereint mit ausserhalb der Flüssigkeit befindlichen magnetischen Massen hervorbringen würden. Die electrischen Ströme innerhalb der Flüssigkeit würden mit dem betreffenden Wirbelfaden fortfliessen und constante Intensität behalten müssen. Die angenommene Vertheilung magnetischer Massen ausserhalb der Flüssigkeit oder auf ihrer Oberfläche muss so bestimmt werden, dass den Grenzbedingungen Genüge geschieht. Jede

magnetische Masse kann bekanntlich auch durch electrische Strömungen ersetzt werden. Statt also in den Werthen für u, v und w noch die Potentialfunction P einer ausserhalb liegenden Masse k hinzuzufügen, erhält man eine ebenso allgemeine Lösung, wenn man den Grössen ξ, η und ζ ausserhalb oder selbst nur an der Oberfläche der Flüssigkeit beliebige Werthe ertheilt, aber so, dass nur geschlossene Stromfäden entstehen, und dann die Integration in den Gleichungen (5 a) über den ganzen Raum ausdehnt, in welchem ξ, η und ζ von 0 verschieden sind.

§ 4. Wirbelflächen und Energie der Wirbelfäden.

In den hydrodynamischen Integralen erster Art genügt es, wie ich oben gezeigt habe, die Bewegung der Oberfläche zu kennen. Dadurch ist die Bewegung im Innern der Flüssigkeit ganz bestimmt. Bei den Integralen zweiter Art ist dagegen noch die Bewegung der innerhalb der Flüssigkeit befindlichen Wirbelfäden unter ihrem gegenseitigen Einflusse und mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen zu bestimmen, wodurch die Aufgabe viel verwickelter wird. Indessen lässt sich für gewisse einfache Fälle auch diese Aufgabe lösen, namentlich für solche, wo Rotation der Wassertheilchen nur in gewissen Flächen oder Linien vorkommt, und die Gestalt dieser Flächen und Linien bei der Fortbewegung unverändert bleibt.

Die Eigenschaften von Flächen, welchen eine unendlich dünne Schicht rotirender Wassertheilchen anliegt, ergeben sich leicht aus den Gleichungen (5 a). Wenn ξ, η und ζ nur in einer unendlich dünnen Schicht von 0 verschieden sind, so werden ihre Potentialfunctionen L, M und N nach bekannten Sätzen auf beiden Seiten der Schicht gleiche Werthe haben, aber ihre Differentialquotienten, in Richtung der Normale der 44
Schicht genommen, werden verschieden sein. Denken wir uns die Coordinataxen so gelegt, dass an der von uns betrachteten Stelle der Wirbelfläche die z-Axe der Normale der Fläche, die x-Axe der Rotationsaxe der Wassertheilchen in der Fläche entspricht, so dass an dieser Stelle $\eta = \zeta = 0$, so werden die Potentiale M und N, so wie ihre Differentialquotienten auf beiden Seiten der Schicht dieselben Werthe haben, ebenso L

und dL/dx und dL/dy, dagegen wird dL/dz zwei verschiedene Werthe haben, deren Unterschied gleich $2\xi\varepsilon$ ist, wenn ε die Dicke der Schicht bezeichnet. Demgemäss ergeben die Gleichungen (4), dass u und w auf beiden Seiten der Wirbelfläche gleiche Werthe haben, v aber Werthe, die um $2\xi\varepsilon$ von einander verschieden sind. Es ist also auf beiden Seiten einer Wirbelfläche diejenige Componente der Geschwindigkeit, welche senkrecht gegen die Wirbellinie stehend die Fläche tangirt, von verschiedenem Werthe. Innerhalb der Schicht rotirender Wassertheilchen muss man sich die betreffende Componente der Geschwindigkeit gleichmässig zunehmend denken von demjenigen Werthe der an der einen Seite der Fläche stattfindet, zu dem der anderen Seite. Denn wenn ξ durch die ganze Dicke der Schicht hier constant ist, und α einen ächten Bruch bezeichnet, v' den Werth von v auf der einen, v_1 auf der anderen Seite, v_α in der Schicht selbst um $\alpha\varepsilon$ von der ersten Seite entfernt, so sahen wir, dass $v' - v_1 = 2\xi\varepsilon$, weil zwischen beiden eine Schicht von der Dicke ε und der Rotationsintensität ξ liegt. Aus demselben Grunde muss $v' - v_\alpha = 2\xi\varepsilon\alpha = \alpha.(v' - v_1)$ sein, worin der hingestellte Satz liegt. Da wir uns die rotirenden Wassertheilchen selbst als bewegt denken müssen, und die Aenderung der Vertheilung auf der Fläche von ihrer Bewegung abhängt, so müssen wir ihnen als mittlere Geschwindigkeit ihres Fortfliessens längs der Fläche für die ganze Dicke der Schicht eine solche zuertheilen, welche dem arithmetischen Mittel der an beiden Seiten der Schicht stattfindenden Geschwindigkeiten entspricht.

Eine solche Wirbelfläche würde z. B. entstehen, wenn zwei vorher getrennte und bewegte Flüssigkeitsmassen in Berührung miteinander kommen. An der Berührungsfläche würden sich die gegen diese senkrechten Geschwindigkeiten nothwendig ausgleichen müssen. Die sie tangirenden Geschwindigkeiten werden aber im Allgemeinen in den beiden Flüssigkeitsmassen verschieden sein. Die Berührungsfläche würde also die Eigenschaften einer Wirbelfläche haben.

Dagegen darf man sich im Allgemeinen vereinzelte Wirbelfäden nicht als unendlich dünn denken, weil sonst die Geschwindigkeiten an entgegengesetzten Seiten des Fadens unendlich

grosse und entgegengesetzte Werthe erhalten, und die eigene Geschwindigkeit des Fadens deshalb unbestimmt wird. Um nun doch gewisse allgemeine Schlüsse für die Bewegung sehr dünner Fäden von beliebigem Querschnitt ziehen zu können, wird uns das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft dienen.

Ehe wir also zu einzelnen Beispielen übergehen, wollen wir noch die Gleichung für die lebendige Kraft K der bewegten Wassermasse bilden:

$$K = \tfrac{1}{2} h \iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz. \qquad (6)$$

Indem ich in dem Integral nach den Gleichungen (4) setze:

$$u^2 = u\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right),$$
$$v^2 = v\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right),$$
$$w^2 = w\left(\frac{dP}{dz} + \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}\right)$$

und partiell integrire, dann mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und $\cos\vartheta$ die Winkel bezeichne, welche die nach innen gerichtete Normale des Elements $d\omega$ der Wassermasse mit den Coordinataxen und der resultirenden Geschwindigkeit q bildet, erhalte ich mit Berücksichtigung der Gleichungen (2) und $(1)_4$:

$$K = -\frac{h}{2}\int d\omega\,[Pq\cos\vartheta + L(v\cos\gamma - w\cos\beta) \qquad (6\,a)$$
$$+ M(w\cos\alpha - u\cos\gamma) + N(u\cos\beta - v\cos\alpha)]$$
$$- h\iiint (L\xi + M\eta + N\zeta)\, dx\, dy\, dz.$$

Den Werth von dK/dt erhält man aus den Gleichungen (1), indem man die erste mit u, die zweite mit v, die dritte mit w multiplicirt und addirt:

$$h\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right) = -\left(u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz}\right)$$
$$+ h\left(u\frac{dV}{dx} + v\frac{dV}{dy} + w\frac{dV}{dz}\right) - \frac{h}{2}\left(u\frac{d(q^2)}{dx} + v\frac{d(q^2)}{dy} + w\frac{d(q^2)}{dz}\right).$$

Wenn man beide Seiten mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirt, dann über die ganze Ausdehnung der Wassermasse integrirt, und berücksichtigt, dass wegen $(1)_4$:

$$\iiint\left(u\frac{d\psi}{dx} + v\frac{d\psi}{dy} + w\frac{d\psi}{dz}\right) dx\, dy\, dz = -\int \psi q\cos\vartheta\, d\omega,$$

wenn ψ im Innern der Wassermasse eine stetige und eindeutige
46 Function bezeichnet, so erhält man:

$$\frac{dK}{dt} = \int d\omega\,(p - hU + \tfrac{1}{2}hq^2)\,q\cos\vartheta. \qquad (6\,b)$$

Wenn die Wassermasse ganz in festen Wänden eingeschlossen ist, muss $q\cos\vartheta$ an allen Punkten der Oberfläche gleich 0 sein, dann wird also auch $dK/dt = 0$, d. h. K constant.

Denkt man sich diese feste Wand in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten und alle vorhandenen Wirbelfäden in endlicher Entfernung, so werden die Potentialfunctionen L, M, N, deren Massen ξ, η, ζ jede in Summa gleich Null sind, in der unendlichen Entfernung $\mathfrak{R}$ wie $\mathfrak{R}^{-2}$ abnehmen, und die Geschwindigkeiten, ihre Differentialquotienten, wie $\mathfrak{R}^{-3}$, das Flächenelement $d\omega$ aber, wenn es immer dem gleichen Kegelwinkel im Nullpunkte der Coordinaten entsprechen soll, wie $\mathfrak{R}^2$ zunehmen. Das erste Integral in dem Ausdrucke für K (Gleichung (6 a)), welches über die Oberfläche der Wassermasse ausgedehnt ist, wird wie $\mathfrak{R}^{-3}$ abnehmen, für ein unendliches $\mathfrak{R}$ also gleich Null werden. Dann reducirt sich der Werth von K auf:

$$K = -h\iiint (L\xi + M\eta + N\zeta)\,dx\,dy\,dz \qquad (6\,c)$$

und diese Grösse wird während der Bewegung nicht geändert

§ 5. Geradlinige parallele Wirbelfäden.

Wir wollen zuerst den Fall untersuchen, wo nur geradlinige, der Axe der z parallele Wirbelfäden existiren, entweder in einer unendlich ausgedehnten Wassermasse, oder in einer solchen Masse, die durch zwei gegen die Wirbelfäden senkrechte unendliche Ebenen begrenzt ist, was auf dasselbe herauskommt. Alle Bewegungen geschehen dann in Ebenen, die zur Axe der z senkrecht sind, und sind in allen diesen Ebenen genau dieselben.

Wir setzen also:

$$w = \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = \frac{dp}{dz} = \frac{dV}{dz} = 0.$$

Dann reduciren sich die Gleichungen (2) auf:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad 2\zeta = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx},$$

die Gleichungen (3) auf:

$$\frac{\delta\zeta}{\partial t} = 0.$$

Die Wirbelfäden behalten also constante Rotationsge- 47
schwindigkeit, so wie sie auch constanten Querschnitt behalten.

Die Gleichungen (4.) reduciren sich auf:

$$u = \frac{dN}{dy}, \qquad v = -\frac{dN}{dx}, \qquad \frac{d^2N}{dx^2} + \frac{d^2N}{dy^2} = 2\zeta.$$

Ich habe hier nach der am Ende des § 3 gemachten Bemerkung $P = 0$ gesetzt. Die Gleichung der Strömungslinien ist also $N = \text{Const.}$

N ist in diesem Falle die Potentialfunction unendlich langer Linien; diese selbst ist unendlich gross, aber ihre Differentialquotienten sind endlich. Sind a und b die Coordinaten eines Wirbelfadens, dessen Querschnitt $da\,db$ ist, so ist:

$$-v = \frac{dN}{dx} = \frac{\zeta\,da\,db}{\pi}\cdot\frac{x-a}{r^2}, \qquad u = \frac{dN}{dy} = \frac{\zeta\,da\,db}{\pi}\cdot\frac{y-b}{r^2}.$$

Es folgt hieraus, dass die resultirende Geschwindigkeit q senkrecht gegen r, das auf den Wirbelfaden gefällte Loth steht, und dass:

$$q = \frac{\zeta\,da\,db}{\pi r}.$$

Haben wir in einer in Richtung der x und y unendlich ausgedehnten Wassermasse mehrere Wirbelfäden, deren Coordinaten beziehlich x_1, y_1, x_2, y_2 u. s. w. sind, während das Product aus Rotationsgeschwindigkeit und Querschnitt eines jeden derselben mit m_1, m_2 etc. bezeichnet wird, und bilden wir die Summen:

$$U = m_1u_1 + m_2u_2 + m_3u_3 \text{ etc.},$$
$$V = m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 \text{ etc.},$$

so werden dieselben gleich 0, weil der Antheil an der Summe V, der aus der Wirkung des zweiten Wirbelfadens auf den ersten entsteht, aufgehoben wird durch den vom ersten Wirbelfaden auf den zweiten. Beide sind nämlich:

$$m_1\cdot\frac{m_2}{\pi}\frac{x_1-x_2}{r^2} \text{ und } m_2\cdot\frac{m_1}{\pi}\frac{x_2-x_1}{r^2}$$

und so bei allen andern in beiden Summen. Nun ist U die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Massen m_1, m_2 u. s. w. in Richtung der x, multiplicirt mit der Summe dieser Massen, ebenso V parallel den y genommen. Beide Geschwindigkeiten sind also gleich Null, wenn nicht die Summe der Massen gleich Null, wo es überhaupt keinen Schwerpunkt giebt. Der
48 Schwerpunkt der Wirbelfäden bleibt also bei ihrer Bewegung umeinander unverändert, und da dieser Satz für jede beliebige Vertheilung der Wirbelfäden gilt, so dürfen wir ihn auch auf einzelne Wirbelfäden von unendlich kleinem Querschnitt anwenden.

Daraus ergeben sich nun nachstehende Folgerungen:

1) Haben wir einen einzelnen geradlinigen Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitt, in einer nach allen gegen den Wirbelfaden senkrechten Richtungen unendlich ausgedehnten Wassermasse, so hängt die Bewegung der Wassertheilchen in endlicher Entfernung von ihm nur ab von dem Product $\zeta\, da\, db = m$ aus der Rotationsgeschwindigkeit und der Grösse seines Querschnitts, nicht von der Form seines Querschnitts. Die Theilchen der Wassermasse rotiren um ihn mit der Tangentialgeschwindigkeit $m/\pi r$, wo r die Entfernung vom Schwerpunkte des Wirbelfadens bezeichnet. Die Lage des Schwerpunktes selbst, die Rotationsgeschwindigkeit, die Grösse des Querschnitts, also auch die Grösse m bleiben unverändert, wenn auch die Form des unendlich kleinen Querschnitts sich ändern kann.

2) Haben wir zwei geradlinige Wirbelfäden von unendlich kleinem Querschnitt in einer unbegrenzten Wassermasse, so wird jeder den anderen in einer Richtung forttreiben, welche senkrecht gegen ihre Verbindungslinie steht. Die Länge der Verbindungslinie wird dadurch nicht geändert. Es werden sich also beide um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in gleich bleibendem Abstande drehen. Ist die Rotationsgeschwindigkeit in beiden Wirbelfäden gleich gerichtet, also von gleichem Vorzeichen, so muss ihr Schwerpunkt zwischen ihnen liegen. Ist sie entgegengesetzt gerichtet, also von ungleichem Vorzeichen, so liegt ihr Schwerpunkt in der Verlängerung ihrer Verbindungslinie. Und ist das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und

dem Querschnitte bei beiden gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen, wobei der Schwerpunkt in unendlicher Entfernung liegen würde, so schreiten sie beide mit gleicher Geschwindigkeit und senkrecht gegen ihre Verbindungslinie in gleicher Richtung fort.

Auf den letzteren Fall kann man auch den zurückführen, wo ein Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitte sich neben einer ihm parallelen unendlich ausgedehnten Ebene befindet. Die Grenzbedingung für die Bewegung des Wassers an der Ebene, dass sie der Ebene parallel sein müsse, erfüllt man, indem man jenseits der Ebene noch einen zweiten Wirbelfaden, das Spiegelbild des ersten, hinzugefügt denkt. Daraus folgt denn, dass der 49
in der Wassermasse befindliche Wirbelfaden parallel der Ebene fortschreitet in der Richtung, in welcher sich die Wassertheilchen zwischen ihm und der Ebene bewegen, und mit $\frac{1}{4}$ der Geschwindigkeit, welche die Wassertheilchen im Fusspunkt eines von dem Wirbelfaden auf die Ebene gefällten Lothes haben.

Bei geradlinigen Wirbelfäden führt die Annahme eines unendlich kleinen Querschnittes auf keine unzulässige Folgerung, weil jeder einzelne Faden auf sich selbst keine forttreibende Kraft ausübt, sondern nur durch den Einfluss der anderen vorhandenen Fäden fortgetrieben wird. Anders ist es bei gekrümmten Fäden.

§ 6. Kreisförmige Wirbelfäden.

In einer unendlich ausgedehnten Wassermasse seien nur kreisförmige Wirbelfäden vorhanden, deren Ebenen zur z-Axe senkrecht sind und deren Mittelpunkte in dieser Axe liegen, sodass rings um sie herum alles symmetrisch ist. Man ändere die Coordinaten, indem man setzt:

$$x = \chi \cos \varepsilon, \qquad a = g \cos e,$$
$$y = \chi \sin \varepsilon, \qquad b = g \sin e,$$
$$z = z, \qquad c = c.$$

Die Rotationsgeschwindigkeit σ ist nach der Annahme nur eine Function von χ und z oder von g und c, und die Rotationsaxe steht überall senkrecht auf χ (oder g) und der z-Axe. Es sind also die rechtwinkeligen Componenten der Rotation in dem Punkte, dessen Coordinaten g, e und c sind:

$$\xi = -\sigma \sin e, \quad \eta = \sigma \cos e, \quad \zeta = 0.$$

In den Gleichungen (5a) wird:

$$r^2 = (z-c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2\chi g \cos(\varepsilon - e),$$
$$L = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma \sin e}{r}\, g\, dg\, de\, dc,$$
$$M = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma \cos e}{r}\, g\, dg\, de\, dc,$$
$$N = 0.$$

Indem man mit $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ multiplicirt und addirt, erhält man aus den Gleichungen für L und M:

$$L\sin\varepsilon - M\cos\varepsilon = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma\cos(\varepsilon - e)}{r}\, g\, dg\, d(\varepsilon - e)\, dc,$$

$$L\cos\varepsilon + M\sin\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma\sin(\varepsilon - e)}{r}\, g\, dg\, d(\varepsilon - e)\, dc.$$

50 In beiden Integralen kommen die Winkel e und ε nur noch in der Verbindung $(\varepsilon - e)$ vor, und diese Grösse kann deshalb als die Variable unter dem Integral betrachtet werden. In dem zweiten Integrale heben sich die Theile, in denen $(\varepsilon - e) = \mathfrak{e}$ ist, gegen die auf, in denen $(\varepsilon - e) = 2\pi - \mathfrak{e}$, es wird also gleich Null. Setzen wir:

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma\cos e\, .\, g\, dg\, de\, dc}{\sqrt{(z-c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2g\chi\cos e}}, \qquad (7)$$

so wird also:

$$M\cos\varepsilon - L\sin\varepsilon = \psi,$$
$$M\sin\varepsilon + L\cos\varepsilon = 0,$$

oder:

$$L = -\psi\sin\varepsilon, \qquad M = \psi\cos\varepsilon. \qquad (7)$$

Nennen wir τ die Geschwindigkeit in Richtung des Radius χ, und berücksichtigen, dass in Richtung der Kreisperipherie wegen der symmetrischen Lage der Wirbelringe zur Axe die Geschwindigkeit gleich Null sein muss, so haben wir:

$$u = \tau\cos\varepsilon, \qquad v = \tau\sin\varepsilon,$$

und nach den Gleichungen (4):

$$u = \frac{dM}{dz}, \qquad v = \frac{dL}{dz}, \qquad w = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}.$$

Daraus folgt:

$$\tau = -\frac{d\psi}{dz}, \qquad w = \frac{d\psi}{d\chi} + \frac{\psi}{\chi},$$

oder:

$$\tau\chi = -\frac{d(\psi\chi)}{dz}, \qquad w\chi = \frac{d(\psi\chi)}{d\chi}. \qquad (7b)$$

Die Gleichung der Strömungslinien ist also:

$$\psi\chi = \text{Const.}$$

Wenn wir die im Werthe von ψ angezeigte Integration zunächst für einen Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitte ausführen, dabei setzen $\sigma\, dg\, dc = m_1$, und den davon herrührenden Theil von ψ mit ψ_{m_1} bezeichnen, so ist:

$$\psi_{m_1} = \frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\chi}}\left\{\frac{2}{\varkappa}(F - E) - \varkappa F\right\},$$

$$\varkappa^2 = \frac{4g\chi}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2},$$

worin F und E die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul $\varkappa$ bedeuten.

Setzen wir der Kürze wegen: 51

$$U = \frac{2}{\varkappa}(F - E) - \varkappa F,$$

wo also U eine Function von $\varkappa$ ist, so ist:

$$\tau\chi = \frac{m_1}{\pi}\sqrt{g\chi}\,\frac{dU}{d\varkappa}\cdot\varkappa\cdot\frac{z-c}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2}.$$

Befindet sich nun in dem durch χ und z bestimmten Punkte ein zweiter Wirbelfaden m, und nennen wir τ_1 die Geschwindigkeit in Richtung von g, welche er dem Wirbelfaden m_1 mittheilt, so erhalten wir diese, indem wir in dem Ausdrucke für τ:

statt $\quad \tau\ \chi\ g\ z\ c\ m_1$
setzen $\tau_1\ g\ \chi\ c\ z\ m.$

Dabei bleiben $\varkappa$ und U unverändert, und es wird:

$$m\tau\chi + m_1\tau_1 g = 0. \qquad (8)$$

Bestimmen wir nun den Werth der der Axe parallelen Geschwindigkeit w, welchen der Wirbelfaden m_1 hervorbringt, dessen Coordinaten g und c sind, so finden wir:

$$w\chi = \frac{1}{2}\frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\chi}}\,U + \frac{m_1}{\pi}\sqrt{g\chi}\,\frac{dU}{d\varkappa}\cdot\frac{\varkappa}{2\chi}\cdot\frac{(z-c)^2 + g^2 - \chi^2}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2}.$$

Nennt man nun w_1 die der z-Axe parallele Geschwindigkeit, welche der Wirbelring m, dessen Coordinaten z und χ sind, am Orte von m_1 hervorbringt, so braucht man dazu nur wie-

der die vorher schon angezeigte Vertauschung der betreffenden Coordinaten und Massen vorzunehmen. So findet man, dass:

$$2mw\chi^2 + 2m_1w_1g^2 - m\tau\chi z - m_1\tau_1 gc = \frac{2mm_1}{\pi}\sqrt{g\chi}\,U. \quad (8a)$$

Aehnliche Summen wie (8) und (8a) lassen sich für eine beliebig grosse Anzahl von Wirbelringen bilden. Ich bezeichne für den n^{ten} derselben das Product $\sigma\,dg\,dc$ mit m_n, die Componenten der Geschwindigkeit, welche ihm von den übrigen Wirbelringen mitgetheilt werden, mit τ_n und w_n, wobei aber vorläufig abgesehen wird von den Geschwindigkeiten, die jeder Wirbelring sich selbst mittheilen kann. Ich nenne ferner den Radius des Ringes ϱ_n und die Entfernung von einer gegen die Axe senkrechten Fläche λ, welche beiden letzteren Grössen zwar der Richtung nach mit χ und z übereinstimmen, aber als zu dem bestimmten Wirbelringe gehörig Functionen der Zeit, und nicht unabhängige Variable sind, wie χ und z. Schliesslich
52 sei der Werth von ψ, so weit dieser von den anderen Wirbelringen herrührt ψ_n. Es ergiebt sich aus (8) und (8a), indem man die entsprechenden Gleichungen für jedes einzelne Paar von Wirbelringen aufstellt und alle addirt:

$$\Sigma[m_n\varrho_n\tau_n] = 0,$$
$$\Sigma[2m_nw_n\varrho_n^2 - m_n\tau_n\varrho_n\lambda_n] = \Sigma[m_n\varrho_n\psi_n].$$

So lange man in diesen Summen noch eine endliche Zahl getrennter und unendlich dünner Wirbelringe hat, darf man unter w, τ und ψ nur diejenigen Theile dieser Grössen verstehen, welche von der Anwesenheit der anderen Ringe herrühren. Wenn man aber eine unendlich grosse Anzahl solcher Ringe den Raum continuirlich ausfüllend denkt, ist ψ die Potentialfunction einer continuirlichen Masse, w und τ sind Differentialquotienten dieser Potentialfunction, und es ist bekannt, dass sowohl in einer solchen Function wie in ihren Differentialquotienten die Theile der Function, welche von der Anwesenheit von Masse in einem unendlich kleinen den betreffenden Punkt, für den die Function bestimmt ist, umgebenden Raum herrühren, unendlich klein sind gegen die von endlichen Massen in endlicher Entfernung herrührenden.[1])

1) S. Gauss in Resultate des magnetischen Vereins im Jahre 1839, S. 7.

Verwandeln wir also die Summen in Integrale, so können wir unter w, τ und ψ die ganzen in dem betreffenden Punkte geltenden Werthe dieser Grössen verstehen, und:

$$w = \frac{d\lambda}{dt}, \qquad \tau = \frac{d\varrho}{dt}$$

setzen. Die Grösse m ersetzen wir zu diesem Zwecke durch das Product $\sigma\,d\varrho\,d\lambda$.

$$\iint \sigma\varrho\frac{d\varrho}{dt}\,d\varrho\,d\lambda = 0, \quad (9)$$

$$2\iint \sigma\varrho^2\frac{d\lambda}{dt}\,d\varrho\,d\lambda - \iint \sigma\varrho\lambda\frac{d\varrho}{dt}\,d\varrho\,d\lambda = \iint \sigma\varrho\psi\,d\varrho\,d\lambda. \quad (9a)$$

Da das Product $\sigma\,d\varrho\,d\lambda$ gemäss § 2 nach der Zeit constant ist, so kann die Gleichung (9) nach t integrirt werden, und wir erhalten:

$$\tfrac{1}{2}\iint \sigma\varrho^2\,d\varrho\,d\lambda = \text{Const.}$$

Denkt man den Raum durch eine Ebene getheilt, die durch die z-Axe geht und daher alle vorhandenen Wirbelringe schneidet, betrachten wir dann σ als die Dichtigkeit einer Massenschicht, und nennen $\mathfrak{M}$ die ganze in dieser Schicht der Ebene anliegende Masse, also: 53

$$\mathfrak{M} = \iint \sigma\,d\varrho\,d\lambda,$$

und R^2 den mittleren Werth von ϱ^2 für sämmtliche Massenelemente genommen, so ist:

$$\iint \sigma\varrho\,.\,\varrho\,d\varrho\,d\lambda = \mathfrak{M}R^2,$$

und da dieses Integral und der Werth von $\mathfrak{M}$ der Zeit nach constant sind, so folgt, dass auch R bei der Fortbewegung unverändert bleibt.

Existirt also in der unbegrenzten Flüssigkeitsmasse nur ein kreisförmiger Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitte, so bleibt dessen Radius unverändert.

Die Grösse der lebendigen Kraft ist nach Gleichung (6c) in unserem Falle:

$$K = -h\iiint (L\xi + M\eta)\,da\,db\,dc$$
$$= -h\iiint \psi\sigma\,.\,\varrho\,d\varrho\,d\lambda\,d\varepsilon$$
$$= -2\pi h\iint \psi\sigma\,.\,\varrho\,d\varrho\,d\lambda.$$

Sie ist ebenfalls der Zeit nach constant.

Indem wir ferner bemerken, dass, weil $\sigma\, d\varrho\, d\lambda$ nach der Zeit constant ist:

$$\frac{d}{dt}\iint \sigma \varrho^2 \lambda\, d\varrho\, d\lambda = 2\iint \sigma \varrho \lambda \frac{d\varrho}{dt} d\varrho\, d\lambda + \iint \sigma \varrho^2 \frac{d\lambda}{dt} d\lambda\, d\varrho,$$

so wird die Gleichung (9a), wenn wir mit l den Werth von λ für den Schwerpunkt des Querschnittes des Wirbelfadens bezeichnen, damit (9) multipliciren und addiren:

$$2\frac{d}{dt}\iint \sigma \varrho^2 \lambda\, d\varrho\, d\lambda + 5\iint \sigma \varrho (l-\lambda) \frac{d\varrho}{dt} d\varrho\, d\lambda = -\frac{K}{2\pi h}. \quad (9b)$$

Wenn der Querschnitt des Wirbelfadens unendlich klein ist, und ε eine unendlich kleine Grösse derselben Ordnung wie $l-\lambda$ und die übrigen Lineardimensionen des Querschnittes, $\sigma\, d\varrho\, d\gamma$ aber endlich ist, so ist ψ und auch K von derselben Ordnung unendlich grosser Quantitäten, wie $\log \varepsilon$. Für sehr kleine Werthe des Abstandes v vom Wirbelringe wird nämlich:

$$v = \sqrt{(g-\chi)^2 + (z-c)^2},$$

$$\varkappa^2 = 1 - \frac{v^2}{4g^2},$$

$$\psi_{m_1} = \frac{m_1}{\pi} \log\left(\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{4}\right) = \frac{m_1}{\pi} \log \frac{v}{8g}.$$

54 In dem Werthe von K wird ψ noch mit ϱ oder g multiplicirt. Ist g endlich und v von der gleichen Ordnung mit ε, so ist K von der Ordnung $\log \varepsilon$. Nur wenn g unendlich gross von der Ordnung $1/\varepsilon$ ist, wird K unendlich gross, wie $(1/\varepsilon) \log \varepsilon$. Dann geht der Kreis in eine gerade Linie über. Dagegen wird $d\varrho/dt$, welches gleich $d\psi/dz$ ist, von der Ordnung $1/\varepsilon$, das zweite Integral also endlich und bei endlichem ϱ verschwindend klein gegen K. In diesem Falle können wir im ersten Integrale das constante l statt λ setzen, und erhalten:

$$2\frac{d(\mathfrak{M} R^2 l)}{dt} = -\frac{K}{2\pi h} \qquad \text{oder:}$$

$$2\mathfrak{M} R^2 l = C - \frac{K}{2\pi h} t.$$

Da $\mathfrak{M}$ und R constant sind, kann sich nur l proportional der Zeit ändern. Wenn $\mathfrak{M}$ positiv ist, ist die Bewegung der Wassertheilchen auf der äusseren Seite des Ringes nach der Seite der positiven z, auf der inneren nach der negativen z gerichtet; K, h und R sind ihrer Natur nach immer positiv.

Daraus folgt also, dass bei einem kreisförmigen Wirbelfaden von sehr kleinem Querschnitt in einer unendlich ausgedehnten Wassermasse der Schwerpunkt des Querschnittes eine der Axe des Wirbelringes parallele Bewegung hat von annähernd constanter und sehr grosser Geschwindigkeit, die nach derselben Seite hin gerichtet ist, nach welcher das Wasser durch den Ring strömt. Unendlich dünne Wirbelfäden von endlichem Radius würden unendlich grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhalten. Ist aber der Radius des Wirbelringes unendlich gross von der Ordnung $1/\varepsilon$, so wird R^2 unendlich gross gegen K, und l wird constant. Der Wirbelfaden, welcher sich nun in eine gerade Linie verwandelt hat, wird stationär, wie wir für geradlinige Wirbelfäden schon früher gefunden haben.

Es lässt sich nun auch im allgemeinen übersehen, wie sich zwei ringförmige Wirbelfäden, deren Axe dieselbe ist, gegeneinander verhalten werden, da jeder, abgesehen von seiner eigenen Fortbewegung, auch der Bewegung der Wassertheilchen folgt, die der andere hervorbringt. Haben sie gleiche Rotationsrichtung, so schreiten sie beide in gleichem Sinne fort, und es wird der vorangehende sich erweitern, dann langsamer fortschreiten, der nachfolgende sich verengern und schneller fortschreiten, schliesslich bei nicht zu differenten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den anderen einholen, durch ihn hindurch- 55
gehen. Dann wird sich dasselbe Spiel mit dem anderen wiederholen, sodass die Ringe abwechselnd einer durch den anderen hindurchgehen.

Haben die Wirbelfäden gleiche Radien, gleiche und entgegengesetzte Rotationsgeschwindigkeiten, so werden sie sich einander nähern und sich gegenseitig erweitern, sodass schliesslich, wenn sie sich sehr nah gekommen sind, ihre Bewegung gegeneinander immer schwächer wird, die Erweiterung dagegen mit wachsender Geschwindigkeit geschieht. Sind die beiden Wirbelfäden ganz symmetrisch, so ist in der Mitte zwischen beiden die der Axe parallele Geschwindigkeit der Wassertheilchen gleich Null. Man kann sich hier also eine feste Wand angebracht denken, ohne die Bewegung zu stören, und erhält so den Fall eines Wirbelringes, der gegen eine feste Wand anläuft.

Ich bemerke noch, dass man diese Bewegungen der kreisförmigen Wirbelringe in der Natur leicht studiren kann, indem man eine halb eingetauchte Kreisscheibe, oder die ungefähr halbkreisförmig begrenzte Spitze eines Löffels schnell eine kurze Strecke längs der Oberfläche der Flüssigkeit hinführt, und dann schnell herauszieht. Es bleiben dann halbe Wirbelringe in der Flüssigkeit zurück, deren Axe in der freien Oberfläche liegt. Die freie Oberfläche bildet also eine durch die Axe gelegte Begrenzungsebene der Wassermasse, wodurch an den Bewegungen nichts wesentliches geändert wird. Die Wirbelringe schreiten fort, erweitern sich, wenn sie gegen eine Wand laufen, und werden durch andere Wirbelringe erweitert oder verengert, ganz wie wir es aus der Theorie abgeleitet haben.

VI.

Sur le mouvement le plus général d'un fluide.

Réponse à une communication précédente de ***M. S. Bertrand.***

Comtes rendus de l'Académie des sciences de Paris. T. 67. p. 221—225. (1868.)

Dans la séance du 22 juin, M. S. Bertrand a communiqué à l'Académie un théorème très-intéressant, concernant le mouvement infiniment petit le plus général, qu'un volume infiniment petit d'un fluide puisse prendre. Il finit sa Note en disant que le résultat auquel il est arrivé est en désaccord avec les vues sur lesquelles j'ai établi mes théorèmes, concernant le mouvement tournant des fluides; c'est pourquoi M. Bertrand révoque en doute aussi toutes les conséquences que j'ai fait sortir de ces prémisses.

Je ne puis m'expliquer les objections de l'illustre géomètre, qu'en supposant qu'il s'est trompé sur le sens de mes théorèmes, ayant lu peut-être une traduction défectueuse de mon Mémoire. Car, autant que je puis en juger moi-même, les résultats de M. Bertrand sont dans l'accord le plus parfait avec ceux de mon Mémoire, et il est facile de les faire dériver tous de l'expression que j'ai donnée pour représenter le mouvement le plus général d'un particule fluide.

On sait que, dans la mécanique analytique, il est permis de décomposer un mouvement compliqué, en plusieurs partiels plus simples. La règle d'après laquelle on le décompose est arbitraire, jusqu'à un certain point; on est libre de choisir la manière qui convient le mieux à la solution du problème, pourvu

qu'elle soit assez générale et parfaitement déterminée. La question soulevée par M. Bertrand, si j'ai bien compris le sens de sa critique, se rapporte à la généralité de la méthode que j'aie choisie dans mon Mémoire. Il croit avoir trouvé une espèce de mouvement possible, qui n'est pas compris dans les termes que j'ai employés.

J'ai représenté le mouvement d'un élément de volume du fluide comme la somme de cinq mouvements simples, c'est-à-dire:

1° D'un mouvement du centre de gravité;

2°, 3°, 4° De trois mouvements de dilatation (ou contraction), dirigés parallèlement à trois axes orthogonaux.

5° D'un mouvement rotatoire autour d'un axe de rotation temporaire.

La direction des trois axes de dilatation et de l'axe de rotation est déterminée, pour chaque point du fluide et pour chaque instant, par les valeurs des différentielles partielles des vitesses, prises par rapport aux coordonnées.

Nous pouvous laisser ici de côté la première espèce de mouvement, le mouvement du centre de gravité. La deuxième espèce de mouvement, que je nomme *mouvement à dilatations orthogonales*, prise isolément, fait en sorte qu'un parallélipipède rectangle et infiniment petit, dont les arêtes ont une certaine direction, se transforme en un autre parallélipipède dont les arêtes ont la même direction que celles du premier, mais une longueur différente.

Par la méthode de décomposition choisie par moi, j'ai aussi fixé, comme on voit, le sens dans lequel il faut prendre le terme *rotation* dans mon Mémoire.

Nommous u, v, w les composantes de la vitesse parallèles aux axes des coordonnées x, y, z. Alors le résultat de mon analyse préliminaire, qui semble être l'objet de la critique de M. Bertrand, est celui-ci.

Si l'expression $(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ est une différentielle exacte, il n'y a pas de rotation dans la partie du fluide correspondant. Si cette expression n'est pas une différentielle exacte, il y a rotation.

M. Bertrand, au contraire, a démontré que, dans un nombre très-considérable de cas, on peut construire des parallélipipèdes obliques ayant une direction déterminée pour leurs arêtes, qui se transforment en d'autres parallélipipèdes dont les arêtes restent parallèles à celles des premiers; et l'illustre géomètre suppose que j'ai omis ce cas dans mon analyse, parce que je n'ai parlé que des parallélipipèdes rectangles.

Mais on peut voir aisément que le mouvement défini par M. Bertrand peut être représenté aussi comme la combinaison d'une rotation avec trois dilatations rectangulaires. Il me suffira de donner ici un exemple des plus simples pour rendre clair le sens de cette assertion.

Limitons l'analyse au cas où l'une des composantes de la vitesse est égale à zéro, $w = 0$; alors le plan xy remplira la condition que M. Bertrand lui-même a posée en formant les équations qui sont contenues dans la seconde moitié de la page 1228 et à la page 1229 de sa Note. Nommons, comme lui, P le point (x, y, z) et Q le point $(x + dx, y + dy, z)$; enfin soit θ l'inclinaison de la droite PQ sur l'axe des x. Alors la rotation $d\theta/dt$ de cette droite sera, d'après les formules de M. Bertrand:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{dx}\cos^2\theta + \left(\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dx}\right)\sin\theta\cos\theta - \frac{du}{dy}\sin^2\theta.$$

Regardons maintenant les vitesses u et v comme composées de deux parties, en posant:

$$u = u_0 - py, \qquad v = v_0 + px.$$

Soient les quantités u_0 et v_0 des fonctions des coordonnées, et soit p une constante, dont la valeur est donnée par l'équation:

$$2p = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy},$$

qui sera satisfaite au point P. On a alors, pour ce même point:

$$\frac{du_0}{dy} - \frac{dv_0}{dx} = 0.$$

Introduisons ces valeurs du u et v dans la première équation, nous trouverons:

$$2\frac{d\theta}{dt} = p + \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{du_0}{dy}\right)\cos(2\theta) + \left(\frac{dv_0}{dy} - \frac{du_0}{dx}\right)\sin(2\theta).$$

On voit ici que les membres qui contiennent le facteur p dans nos expressions représentent une rotation à vitesse constante p, qui restera seule quand u_0 et v_0 s'évanouissent. Introduisons maintenant, pour simplifier les expressions, deux nouvelles quantités A et θ_0, qui sont définies par les équations suivantes:

$$A\cos(2\theta_0) = \frac{dv_0}{dx} + \frac{du_0}{dy},$$
$$A\sin(2\theta_0) = \frac{dv_0}{dy} - \frac{du_0}{dx}.$$

Alors nous aurons:

$$2\frac{d\theta}{dt} = p + A\cos 2(\theta - \theta_0).$$

Il faut que $d\theta/dt$ soit égale à zéro pour les lignes qui ne changent pas de direction, c'est-à-dire:

$$\cos 2(\theta - \theta_0) = -\frac{p}{A}.$$

Si θ_1 est une des valeurs qui remplissent cette condition, une autre valeur sera $(2\theta_0 - \theta_1)$. La différence entre les deux est égale à $2(\theta_0 - \theta_1)$. Or cette différence ne peut être un angle droit que sous la condition $p = 0$.

On voit donc que le mouvement représenté par les quantités u_0 et v_0 est un mouvement à dilatations orthogonales, pendant que le mouvement dont les termes ont p comme facteur est une simple rotation. Ces deux mouvements combinés donnent un mouvement à dilatations obliques, comme il a été défini par M. Bertrand.

On pourra toujours trouver des valeurs réelles pour p, u_0, v_0, A et θ_0; mais on ne trouvera une valeur réelle pour θ, que sous la condition $p < A$. Si la vitesse de rotation devient trop grande, $p > A$, il n'y a plus de lignes dans le plan xy, qui ne changent pas de direction. C'est le cas où l'équation caractéristique de M. Bertrand donne deux racines imaginaires.

Il n'est pas difficile d'ailleurs d'étendre cette démonstration au cas général d'un mouvement à trois dimensions.

On voit par là que le mouvement à dilatations obliques de M. Bertrand est compris dans mon Mémoire parmi les mouvements rotatoires. J'avoue qu'au premier aspect l'emploi

du terme *rotation* pourrait paraître hardi dans ce cas, mais je crois qu'il est amplement justifié dans le langage scientifique; car, quand on détermine le moment de rotation d'une petite sphère fluide, contenue dans une masse d'eau en mouvement, on trouve que le moment d'une telle sphère est égal à zéro dans un mouvement à dilatations rectangulaires, mais qu'il est différent de zéro dans un mouvement à dilatations obliques. On trouve ainsi, pour mesurer la rotation du fluide, exactement les expressions que j'ai employées dans mon Mémoire.

Du reste, mon savant critique, en regardant les valeurs que j'ai données à la page 31 de mon Mémoire comme l'expression la plus générale des vitesses u, v, w, décomposées d'après la règle que j'avais fixée, reconnaîtra aisément que ces valeurs contiennent le même nombre de quantités indépendantes que celles qu'il a employées lui-même dans son analyse, et que ces deux systèmes ont le même degré de généralité. Je n'ai pas donné, dans mon Mémoire, de démonstration explicite de la généralité de cette décomposition du mouvement que j'ai employée, parce que cette méthode n'était pas nouvelle; elle avait déjà été employée auparavant dans la théorie des solides élastiques, entre autres par M. Kirchhoff[1]), dans son Mémoire sur les plaques élastiques vibrantes.

1) Journal de Crelle, t. XL; 1850.

VII.

Sur le mouvement des fluides.

Deuxième réponse à ***M. S. Bertrand.***

Comtes rendus de l'Académie des sciences de Paris. T. 67. p. 754—757. (1868.)

Je n'ai eu connaissance des deux nouvelles Notes, par lesquelles M. Bertrand à répondu à ma communication du 27 juillet, qu'à mon retour d'un voyage, il y a peu de jours. Je m'empresse de lui faire les observations suivantes.

Quant à la première de ses réponses, je crois pouvoir me dispenser d'entrer dans de plus amples détails, car il est évident que M. Bertrand l'a rédigée, sans avoir sous les yeux ma réplique. C'est comme cela du moins que je m'explique comment M. Bertrand substitue au terme de *dilatation* partout où j'en avais fait usage, celui de *translation*, qui ne se trouve pas une seule fois dans ma communication. Il a rendu parfaitement absurdes des théorèmes, d'ailleurs évidents, pour les présenter ensuite, ainsi défigurés, comme étant de ma façon.

Dans sa deuxième réponse du 24 août, M. Bertrand tombe enfin d'accord qu'il ne s'agit ici que d'une dénomination différente. Mais il s'attache à soutenir que j'ai donné à l'énoncé de mes théorèmes une élégance apparente, en altérant arbitrairement le sens du mot *rotation*. Est-il réellement nécessaire de répéter que le mouvement rotatoire (Rotations-Bewegung), attribué par moi aux molécules liquides, n'a jamais été défini dans mes Mémoires autrement que comme une rotation ordinaire, combinée avec d'autres formes de mouvement [dilatation et translation]?[1]) Aussi cette composante du mouvement que j'ai appelée *rotation* se réduit-elle, prise isolément, à une rotation pure et simple, dans le sens généralement accepté de ce mot.

Du reste, cet emploi du terme de rotation n'est pas une innovation de ma part. Cinq ans avant la publication de mon Mémoire, M. Stokes[2]) a dit, en parlant des quantités qui, dans la théorie des solides élastiques, correspondent aux quantités ξ, η, ζ de mon Mémoire: „Ces quantités expriment „les rotations de l'élément du moyen .... autour des axes „qui sont respectivement parallèles aux trois axes des coordonnées."

M. Bertrand dit que j'attache une importance qu'il ne peut comprendre à l'orthogonalité des faces du parallélipipède de dilatation. Je réponds que, mécaniquement parlant, cette orthogonalité est d'une importance de premier ordre; car dans le cas d'un mouvement à dilatations orthogonales, le moment des quantités de mouvement d'une petite masse sphérique par rapport aux axes passant par son centre est égal et reste égal à zéro, tandis que, dans le cas de dilatations obliques, il est différent et reste différent de zéro pendant toute la durée du mouvement. C'est bien pour cette raison que, dans les savantes recherches sur la théorie des corps élastiques de M. Kirchhoff[3]), et de MM. Thomson et Tait[4]), les dilatations orthogonales jouent un rôle également prépondérant, encore que ces deux derniers savants aient très-bien connu et publié, avant M. Bertrand, les théorèmes qu'il a communiqués dans la séance du 22 juin, et qui lui ont servi de point de départ pour les attaques qu'il a dirigées contre mon Mémoire.

1) L'exemple sur lequel M. Bertrand s'appuie dans sa réponse du 3 août, et qu'il trouve si décisif, à déjà été soumis à l'analyse par la rédaction du journal *les Mondes*, t. XVII, p. 621; je puis donc me dispenser de revenir là-dessus.

2) On the dynamical theory of diffraction (Transactions of the Cambridge Philos. Soc., 1850; vol. IX, p. I. § 10).

3) Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque élastique (Journal de Crelle, t. XL, p. 59; 1850).

4) Treatise on natural Philosophy. Oxford, 1867; vol. I, p. 108—115.

Enfin, si en France ou préfère adopter le terme de *rotation moyenne*, proposé par A. Cauchy pour avertir le lecteur qu'il ne s'agit pas du mouvement d'un corps solide, mais de celui d'une masse à forme variable, je n'ai aucune raison pour m'y opposer.

Examinons maintenant la seconde objection que M. Bertrand m'a faite, dans sa communication du 24 août, objection qui concerne un passage de mon Mémoire, textuellement cité par lui. Il n'est pas difficile de se convaincre que la place occupée par le passage en question dans la suite de mes raisonnements lui donne un sens très-différent de celui que mon savant adversaire croit y avoir trouvé. Je n'y donne pas une règle pour déterminer les intégrales des équations différentielles; mais après avoir, dans ce qui précède, effectué les intégrations, ou du moins les avoir supposées effectuées, j'interprète dans le passage cité le sens mécanique des expressions analytiques obtenues par ces intégrations.

Dans ces expressions, les vitesses des molécules du liquide sont représentées comme la somme d'un nombre infini d'effets élémentaires, dérivant en partie des points situés à l'intérieur du liquide, en partie des points de la surface ou de l'extérieur. Dans le passage cité par M. Bertrand, il n'est question que des effets dérivant directement des points situés à l'intérieur du liquide, et jamais je n'ai songé à y faire entrer autre chose. Si M. Bertrand veut porter son attention sur la solution du problème que j'ai donnée, dans quelques cas spéciaux, aux pages 49 et 55 de mon Mémoire, il comprendra que ce n'est pas moi qu'il faut accuser d'avoir mis au jour l'absurdité, qu'il a bien voulu me suggérer, savoir: de supposer la quantité k, qui détermine l'effet des points situés en dehors du liquide, indépendante des quantités ξ, η, ζ.

M. Bertrand résume sa deuxième objection, en avançant que mon théorème „n'apprent absolument rien, en ne donnant „qu'une partie d'une somme, dont l'autre partie reste inconnue." Dans un grand nombre de cas spéciaux cette autre partie reste en effet inconnue jusqu'à un certain point. Du moins, il n'est guère probable qu'ou puisse jamais trouver pour cette seconde

partie explicitement une expression analytique générale qui convienne à tous les cas speciaux.

Mais j'invite mon savant critique à se rappeler que cette deuxième partie de la somme, qu'il dit être inconnue, est censée correspondre à un mouvement non rotatoire du liquide, et que par conséquent, elle possède toutes ces propriétés si remarquables des fonctions qui satisfont à l'équation différentielle:

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2P}{dy^2}+\frac{d^2P}{dz^2}=0,$$

et qui ont été l'objet de tant de recherches profondes, recherches qui non seulement nous mettent en état de trouver l'intégrale de cette équation pour un nombre très-considérable de conditions données aux limites, mais, ce qui est plus utile encore, nous permettent, dans la plupart des cas où l'expression analytique de l'intégrale reste inconnue, d'en assigner les propriétés les plus importantes, dont la connaissance peut souvent tenir lieu de l'intégrale elle-même.

M. Bertrand aurait pu trouver, aux pages 29 et 43 de mon Mémoire, un résumé de cette partie de mon travail. Je finirai en reproduisant les résultats généraux de mes recherches, tout en évitant d'employer les dénominations nouvelles que j'ai introduites dans le texte allemand de mon Mémoire. Je ne conserverai que les lettres ξ, η, ζ avec leur signification:

$$\xi=\tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right),\quad \eta=\tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right),\quad \zeta=\tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right).$$

Je suppose en outre, que les forces agissant sur les points situés à l'intérieur du liquide puissent être exprimées par les dérivées partielles d'une fonction des coordonnées du point sollicité. Cela posé, on a les théorèmes suivants:

On peut toujours imaginer l'existence d'un système de courants galvaniques fermés, distribués dans l'intérieur et à la surface du liquide de telle manière, qu'ils exerceraient sur le pôle d'un aimant, situé en un point du liquide, des forces égales aux vitesses qui animent la molècule liquide passant par ce point. Les composantes de ces courants, prises parallèlement aux axes des coordonnées, sont, en chaque point de l'intérieur du liquide, proportionnelles aux quantités ξ, η, ζ.

Si l'on se représente la masse du liquide composée de fils conducteurs qui contiennent chacun un de ces courants galvaniques du système susdit, dans chaque fil conducteur l'intensité du courant restera constante pendant toute la durée du mouvement, et le fil restera composé des mêmes molécules du liquide. L'intensité des courants superficiels, au contraire, pourra être variable.

M. Bertrand reconnaîtra aisément que ces résultats ne sont nullement infirmés par ses remarques, et peut-être ne les trouvera-t-il pas moins intéressants dans leur énoncé légitime que sous la forme peu exacte qu'il leur a donnée.

VIII.

Réponse à la Note de M. S. Bertrand du 19 octobre.

Comtes rendus de l'Acad. de sciences de Paris. T. 67. p. 1034—1035. (1868.)

„Dans sa dernière Note, M. Bertrand ne conteste plus l'exactitude de mes théorèmes sur l'hydrodynamique, mais il se borne à en blâmer l'énoncé, qui, selon lui, ne serait pas conforme à l'usage, où conduirait le lecteur à croire la solution plus complète qu'elle ne l'est. Puisque nous sommes parvenus à ce point, il me semble qu'une discussion ultérieure sur l'objet en litige ne saurait présenter qu'un intérêt personel, de sorte que, de mon côté, je la terminerai par cette dernière réponse.

„Du reste, je n'ai jamais voulu exprimer le moindre doute touchant la sincérité de mon savant adversaire, ni dans mes Notes insérées aux *Comptes rendus*, ni dans la Lettre que j'ai écrite à M. le rédacteur du journal *les Mondes*, en réponse à une question concernant la traduction de mon Mémoire. Dans le seul passage de ma dernière Note qui puisse avoir donné lieu à une telle interprétation, j'ai dit expressément que je ne supposais qu'une erreur de la part de M. Bertrand, et je regrette sincèrement que les expressions que j'ai employées aient pu donner lieu à une interprétation différente.

IX.

Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen.

Aus dem „Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften“ zu Berlin vom 23. April 1868. S. 215—228.

215 Die hydrodynamischen Gleichungen ergeben bekanntlich für das Innere einer incompressiblen Flüssigkeit, die der Reibung nicht unterworfen ist, und derenTheilchen keine Rotations-Bewegung besitzen, genau dieselbe partielle Differentialgleichung, welche für stationäre Ströme von Elektricität oder Wärme in Leitern von gleichmässigem Leitungsvermögen besteht. Man 216 könnte also erwarten, dass bei gleicher Form des durchströmten Raumes und gleichen Grenzbedingungen die Strömungsform der tropfbaren Flüssigkeiten, der Elektricität und Wärme bis auf kleine von Nebenbedingungen abhängige Unterschiede die gleiche sein sollte. In Wirklichkeit aber bestehen in vielen Fällen leicht erkennbare und sehr eingreifende Unterschiede zwischen der Stromvertheilung einer tropfbaren Flüssigkeit und der der genannten Imponderabilien.

Solche Unterschiede zeigen sich namentlich auffallend, wenn die Strömung durch eine Oeffnung mit scharfen Rändern in einen weiteren Raum eintritt. In solchen Fällen strahlen die Stromlinien der Elektricität von der Oeffnung aus sogleich nach allen Richtungen auseinander, während eine strömende Flüssigkeit, Wasser sowohl wie Luft, sich von der Oeffnung aus anfänglich in einem compacten Strahle vorwärts bewegt, der sich dann in geringerer oder grösserer Entfernung in Wirbel aufzulösen pflegt. Die der Oeffnung benachbarten, ausserhalb des Strahles liegenden Theile der Flüssigkeit des grösseren

Behälters können dagegen fast vollständig in Ruhe bleiben. Jedermann kennt diese Art der Bewegung, wie sie namentlich ein mit Rauch imprägnirter Luftstrom sehr anschaulich zeigt. In der That kommt die Zusammendrückbarkeit der Luft bei diesen Vorgängen nicht wesentlich in Betracht, und Luft zeigt hierbei mit geringen Abweichungen dieselben Bewegungsformen, wie Wasser.

Bei so grossen Abweichungen zwischen der Wirklichkeit und den Ergebnissen der bisherigen theoretischen Analyse mussten die hydrodynamischen Gleichungen den Physikern als eine praktisch sehr unvollkommene Annäherung an die Wirklichkeit erscheinen. Die Ursache davon mochte man in der inneren Reibung der Flüssigkeit vermuthen, obgleich allerlei seltsame und sprungweise eintretende Unregelmässigkeiten, mit denen wohl Jeder zu kämpfen hatte, der Beobachtungen über Flüssigkeits-Bewegungen anstellte, nicht einmal durch die jedenfalls stetig und gleichmässig wirkende Reibung erklärt werden konnten.

Die Untersuchung der Fälle, wo periodische Bewegungen durch einen continuirlichen Luftstrom erregt werden, wie zum Beispiel in den Orgelpfeifen, liess mich erkennen, dass eine 217 solche Wirkung nur durch eine discontinuirliche, oder wenigstens einer solchen nahe kommende Art der Luftbewegung hervorgebracht werden könne, und das führte mich zur Auffindung einer Bedingung, die bei der Integration der hydrodynamischen Gleichungen berücksichtigt werden muss, und bisher, so viel ich weiss, übersehen worden ist; bei deren Berücksichtigung dagegen in solchen Fällen, wo die Rechnung durchgeführt werden kann, sich in der That Bewegungsformen ergeben, wie wir sie in Wirklichkeit beobachten. Es ist dies folgender Umstand.

In den hydrodynamischen Gleichungen werden die Geschwindigkeiten und der Druck der strömenden Theilchen als continuirliche Functionen der Coordinaten behandelt. Andererseits liegt in der Natur einer tropfbaren Flüssigkeit, wenn wir sie als vollkommen flüssig, also der Reibung nicht unterworfen betrachten, kein Grund, dass nicht zwei dicht aneinander grenzende Flüssigkeitsschichten mit endlicher Geschwindigkeit

aneinander vorbeigleiten könnten. Wenigstens diejenigen Eigenschaften der Flüssigkeiten, welche in den hydrodynamischen Gleichungen berücksichtigt werden, nämlich die Constanz der Masse in jedem Raumelement und die Gleichheit des Druckes nach allen Richtungen hin, bilden offenbar kein Hinderniss dafür, dass nicht auf beiden Seiten einer durch das Innere gelegten Fläche tangentielle Geschwindigkeiten von endlichem Grössenunterschiede stattfinden könnten. Die senkrecht zur Fläche gerichteten Componenten der Geschwindigkeit und der Druck müssen dagegen natürlich an beiden Seiten einer solchen Fläche gleich sein. Ich habe schon in meiner Arbeit über die Wirbelbewegungen[1]) darauf aufmerksam gemacht, dass ein solcher Fall eintreten müsse, wenn zwei vorher getrennte und verschieden bewegte Wassermassen mit ihren Oberflächen in Berührung kommen. In jener Arbeit wurde ich auf den Begriff einer solchen Trennungsfläche oder Wirbelfläche, wie ich sie dort nannte, dadurch geführt, dass ich Wirbelfäden
218 längs einer Fläche continuirlich angeordnet dachte, deren Masse verschwindend klein werden kann, ohne dass ihr Drehungsmoment verschwindet.

Nun wird in einer zu Anfang ruhenden oder continuirlich bewegten Flüssigkeit eine endliche Verschiedenheit der Bewegung unmittelbar benachbarter Flüssigkeitstheilchen nur durch discontinuirlich wirkende bewegende Kräfte hervorgebracht werden können. Unter den äusseren Kräften kommt hierbei nur der Stoss in Betracht.

Aber es ist auch im Innern der Flüssigkeiten eine Ursache vorhanden, welche Discontinuität der Bewegung erzeugen kann. Der Druck nämlich kann zwar jeden beliebigen positiven Werth annehmen, und die Dichtigkeit der Flüssigkeit wird sich mit ihm immer continuirlich ändern. Aber so wie der Druck den Werth Null überschreiten und negativ werden sollte, wird eine discontinuirliche Veränderung der Dichtigkeit eintreten; die Flüssigkeit wird auseinander reissen.

Nun hängt die Grösse des Druckes in einer bewegten Flüssigkeit von der Geschwindigkeit ab, und zwar ist in in-

1) Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. LX. (S. oben Nr. V.)

compressibeln Flüssigkeiten die Verminderung des Druckes unter übrigens gleichen Umständen der lebendigen Kraft der bewegten Wassertheilchen direct proportional. Uebersteigt also die letztere eine gewisse Grösse, so muss in der That der Druck negativ werden und die Flüssigkeit zerreissen. An einer solchen Stelle wird die beschleunigende Kraft, welche dem Differential-Quotienten des Druckes proportional ist, offenbar discontinuirlich und dadurch die Bedingung erfüllt, welche nöthig ist um eine discontinuirliche Bewegung der Flüssigkeit hervorzubringen. Die Bewegung der Flüssigkeit an einer solchen Stelle vorüber kann nun nur so geschehen, dass sich von dort ab eine Trennungsfläche bildet.

Die Geschwindigkeit, welche das Zerreissen der Flüssigkeit herbeiführen muss, ist diejenige, welche die Flüssigkeit annehmen würde, wenn sie unter dem Drucke, den die Flüssigkeit am gleichen Orte im ruhenden Zustande haben würde, in den leeren Raum ausflösse. Dies ist allerdings eine verhältnissmässig bedeutende Geschwindigkeit; aber es ist wohl zu bemerken, dass, wenn die tropfbaren Flüssigkeiten continuirlich wie Elektricität fliessen sollten, die Geschwindigkeit an jeder 219
scharfen Kante, um welche der Strom herumbiegt, unendlich gross werden müsste.[1]) Daraus folgt, dass jede geometrisch vollkommen scharf gebildete Kante, an welcher Flüssigkeit vorbeifliesst, selbst bei der mässigsten Geschwindigkeit der übrigen Flüssigkeit, dieselbe zerreissen und eine Trennungsfläche herstellen muss. An unvollkommen ausgebildeten, abgerundeten Kanten dagegen wird dasselbe erst bei gewissen grösseren Geschwindigkeiten stattfinden. Spitzige Hervorragungen an der Wand des Strömungscanales werden ähnlich wirken müssen.

Was die Gase betrifft, so tritt bei ihnen derselbe Umstand wie bei den Flüssigkeiten ein, nur dass die lebendige Kraft der Bewegung eines Theilchens nicht direct der Verminderung des Druckes p, sondern mit Berücksichtigung der Abkühlung der

1) In der sehr kleinen Entfernung ϱ von einer scharfen Kante, deren Flächen unter dem Winkel α zusammenstossen, werden die Geschwindigkeiten unendlich wie ϱ^{-m}, wo $m = (\pi - \alpha)/(2\pi - \alpha)$.

Luft bei ihrer Ausdehnung der Abnahme von p^m proportional ist, wo $m = 1 - 1/\gamma$, und γ das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Druck zu der bei constantem Volumen bezeichnet. Für atmosphärische Luft hat der Exponent m den Werth 0,291. Da er positiv und reel ist, so kann p^m, wie p, bei hohen Werthen der Geschwindigkeit nur bis Null abnehmen, und nicht negativ werden. Anders wäre es, wenn die Gasarten einfach dem Mariotte'schen Gesetze folgten und keine Temperaturveränderungen erlitten. Dann würde statt p^m die Grösse $\log p$ eintreten, welche negativ unendlich werden kann, ohne dass p negativ wird. Unter dieser Bedingung wäre ein Zerreissen der Luftmasse nicht nöthig.

Es gelingt sich von dem thatsächlichen Bestehen solcher Discontinuitäten zu überzeugen, wenn man einen Strahl mit Rauch imprägnirter Luft aus einer runden Oeffnung oder einem cylindrischen Rohre mit mässiger Geschwindigkeit, so dass kein Zischen entsteht, hervortreten lässt. Unter günstigen Umständen
220 kann man dünne Strahlen der Art von einer Linie Durchmesser in einer Länge von mehreren Fussen erhalten. Innerhalb der cylindrischen Oberfläche ist die Luft dann in Bewegung mit constanter Geschwindigkeit, ausserhalb dagegen selbst in allernächster Nähe des Strahles gar nicht oder kaum bewegt. Sehr deutlich sieht man diese scharfe Trennung auch, wenn man einen ruhig fliessenden cylindrischen Luftstrahl durch die Spitze einer Flamme leitet, aus der er dann ein genau abgegrenztes Stück herausschneidet, während der Rest der Flamme ganz ungestört bleibt, und höchstens eine sehr dünne Lamelle, die den durch Reibung beeinflussten Grenzschichten entspricht, ein wenig mitgenommen wird.

Was die mathematische Theorie dieser Bewegungen betrifft, so habe ich die Grenzbedingungen für eine innere Trennungsfläche der Flüssigkeit schon angegeben. Sie bestehen darin, dass der Druck auf beiden Seiten der Fläche gleich sein muss, und ebenso die normal gegen die Trennungsfläche gerichtete Componente der Geschwindigkeit. Da nun die Bewegung im ganzen Innern einer incompressiblen Flüssigkeit, deren Theilchen keine Rotationsbewegung haben, vollständig bestimmt ist, wenn die Bewegung ihrer ganzen Oberfläche und ihre inneren Discontinuitäten gegeben sind, so handelt es sich bei äusserer fester Begrenzung der Flüssigkeit der Regel nach nur darum, die Bewegung der Trennungsfläche und die Veränderungen der Discontinuität an derselben kennen zu lernen.

Es kann nun eine solche Trennungsfläche mathematisch gerade so behandelt werden, als wäre sie eine Wirbelfläche, das heisst, als wäre sie mit Wirbelfäden von unendlich geringer Masse, aber endlichem Drehungsmoment continuirlich belegt. In jedem Flächenelement einer solchen wird es eine Richtung geben, nach welcher genommen die Componenten der tangentiellen Geschwindigkeiten gleich sind. Diese giebt zugleich die Richtung der Wirbelfäden an der entsprechenden Stelle. Das Moment dieser Fäden ist proportional zu setzen dem Unterschiede, welchen die dazu senkrechten Componenten der tangentiellen Geschwindigkeit an beiden Seiten der Fläche zeigen.

Die Existenz solcher Wirbelfäden ist für eine ideale nicht reibende Flüssigkeit eine mathematische Fiction, welche die Integration erleichtert. In einer wirklichen der Reibung unter- 221
worfenen Flüssigkeit wird jene Fiction schnell eine Wirklichkeit, indem durch die Reibung die Grenztheilchen in Rotation versetzt werden, und somit dort Wirbelfäden von endlicher, allmählig wachsender Masse entstehen, während die Discontinuität der Bewegung dadurch gleichzeitig ausgeglichen wird.

Die Bewegung einer Wirbelfläche und der in ihr liegenden Wirbelfäden ist nach den in meiner Arbeit über die Wirbelbewegungen festgestellten Regeln zu bestimmen. Die mathematischen Schwierigkeiten dieser Aufgabe lassen sich freilich erst in wenigen der einfacheren Fälle überwinden. In vielen andern Fällen kann man dagegen aus der angegebenen Betrachtungsweise Schlüsse wenigstens auf die Richtung der eintretenden Veränderungen ziehen.

Namentlich ist zu erwähnen, dass gemäss dem für Wirbelbewegungen erwiesenen Gesetze, die Fäden und mit ihnen die Wirbelfläche im Innern einer nicht reibenden Flüssigkeit nicht entstehen und nicht verschwinden können, vielmehr jeder Wirbelfaden constant das gleiche Rotationsmoment behalten muss; ferner, dass die Wirbelfäden längs einer Wirbelfläche selbst fortschwimmen mit einer Geschwindigkeit, welche das Mittel

aus den an beiden Seiten der Fläche bestehenden Geschwindigkeiten ist. Daraus folgt, dass eine Trennungfläche sich immer nur nach der Richtung hin verlängern kann, nach welcher der stärkere von den beiden in ihr sich berührenden Strömen gerichtet ist.

Ich habe zunächst gesucht, Beispiele von unverändert bestehenden Trennungsflächen in stationären Strömungen zu finden, bei denen die Integration ausführbar ist, um daran zu prüfen, ob die Theorie Stromesformen ergiebt, die der Erfahrung besser entsprechen, als wenn man die Discontinuität der Bewegung unberücksichtigt lässt. Wenn eine Trennungsfläche, die ruhendes und bewegtes Wasser voneinander scheidet, stationär bleiben soll, so muss längs derselben der Druck in der bewegten Schicht derselben sein, wie in der ruhenden, woraus folgt, dass die tangentielle Geschwindigkeit der Wassertheilchen in ganzer Ausdehnung der Fläche constant sein muss; ebenso die Dichtigkeit der fingirten Wirbelfäden. Anfang und
222 Ende einer solchen Fläche können nur an der Wand des Gefässes oder in der Unendlichkeit liegen. Wo ersteres der Fall ist, müssen sie die Wand des Gefässes tangiren, vorausgesetzt, dass diese hier stetig gekrümmt ist, weil die zur Gefässwand normale Geschwindigkeitscomponente gleich Null sein muss.

Die stationären Formen der Trennungsflächen zeichnen sich übrigens, wie Versuch und Theorie übereinstimmend erkennen lassen, durch einen auffallend hohen Grad von Veränderlichkeit bei den unbedeutendsten Störungen aus, so dass sie sich Körpern, die in labilem Gleichgewicht befindlich sind, einigermassen ähnlich verhalten. Die erstaunliche Empfindlichkeit eines mit Rauch imprägnirten cylindrischen Luftstrahls gegen Schall ist von Hrn. Tyndall schon beschrieben worden; ich habe dieselbe bestätigt gefunden. Es ist dies offenbar eine Eigenschaft der Trennungsflächen die für das Anblasen der Pfeifen von grösster Wichtigkeit ist.

Die Theorie lässt erkennen, dass überall, wo eine Unregelmässigkeit an der Oberfläche eines übrigens stationären Strahls gebildet wird, diese zu einer fortschreitenden spiraligen Aufrollung des betreffenden (übrigens am Strahle fortgleitenden) Theils der Fläche führen muss. Dies Streben nach spiraliger

Aufrollung bei jeder Störung ist übrigens an den beobachteten Strahlen leicht zu bemerken. Der Theorie nach könnte ein prismatischer oder cylindrischer Strahl unendlich lang sein. Thatsächlich lässt sich ein solcher nicht herstellen, weil in einem so leicht beweglichen Elemente, wie die Luft ist, kleine Störungen nie ganz zu beseitigen sind.

Dass ein solcher unendlich langer cylindrischer Strahl, der aus einer Röhre von entsprechendem Querschnitt in ruhende äussere Flüssigkeit austritt, und überall mit gleichmässiger Geschwindigkeit seiner Axe parallel bewegte Flüssigkeit enthält, den Bedingungen des stationären Zustandes entspricht, ist leicht einzusehen.

Ich will hier nur noch die mathematische Behandlung eines Falles entgegengesetzter Art, wo der Strom aus einem weitem Raum in einen engen Canal übergeht, skizziren, um daran auch gleichzeitig ein Beispiel zu geben für eine Methode, durch welche einige Probleme der Lehre von den Potential- 223
functionen gelösst werden können, die bisher Schwierigkeiten machten.

Ich beschränke mich auf den Fall, wo die Bewegung stationär ist und nur von zwei rechtwinkligen Coordinaten x, y abhängig, wo ferner von Anfang an in der reibungsfreien Flüssigkeit keine rotirenden Theilchen vorhanden sind, und sich also auch keine solchen bilden können. Bezeichnen wir für das im Punkte (x, y) befindliche Flüssigkeitstheilchen die den x parallele Geschwindigkeitscomponente mit u, die den y parallele mit v, so lassen sich bekanntlich zwei Functionen von x und y in der Weise finden, dass:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} \ldots\ldots \\ v &= \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{d\psi}{dx} \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Durch diese Gleichungen wird auch unmittelbar im Innern der Flüssigkeit die Bedingung erfüllt, dass die Masse in jedem Raumelement constant bleibe, nämlich:

$$\left.\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0 \ldots\ldots\right\} \qquad (1a)$$

Der Druck im Innern wird bei der constanten Dichtigkeit h,

und wenn das Potential der äusseren Kräfte mit V bezeichnet wird, gegeben durch die Gleichung:

$$V - \frac{p}{h} + C = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2\right] \cdots \} \quad (1b)$$

Die Curven:

$$\psi = \text{Const.}$$

sind die Strömungslinien der Flüssigkeit, und die Curven:

$$\varphi = \text{Const.}$$

sind orthogonal zu ihnen. Letztere sind die Curven gleichen Potentials, wenn Elektricität, oder gleicher Temperatur, wenn
224 Wärme in Leitern von constantem Leitungsvermögen in stationärem Strome fliesst.

Aus den Gleichungen (1) folgt als Integralgleichung, dass die Grösse $\varphi + \psi i$ eine Function sei von $x + y i$ (wo $i = \sqrt{-1}$). Die bisher gefundenen Lösungen drücken in der Regel φ und ψ als eine Summe von Gliedern aus, die selbst Functionen von x und y sind. Aber auch umgekehrt kann man $x + y i$ als Function von $\varphi + \psi i$ betrachten und entwickeln. Bei den Aufgaben über Strömung zwischen zwei festen Wänden ist ψ längs der Grenzen constant, und stellt man also φ und ψ als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene dar, so hat man in einem von zwei parallelen graden Linien $\psi = c_0$ und $\psi = c_1$ begrenzten Streifen dieser Ebene die Function $x + y i$ so zu suchen, dass sie am Rande der Gleichung der Wand entspricht, im Innern gegebene Unstetigkeit annimmt.

Ein Fall dieser Art ist, wenn wir setzen:

$$x + y i = A\{\varphi + \psi i + e^{\varphi + \psi i}\} \cdots \} \quad (2)$$

oder:

$$x = A\varphi + Ae^{\varphi}\cos\psi$$
$$y = A\psi + Ae^{\varphi}\sin\psi.$$

Für den Werth $\psi = \pm\pi$ wird y constant und

$$x = A\varphi - Ae^{\varphi}.$$

Wenn φ von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, geht x gleichzeitig von $-\infty$ bis $-A$ und dann wieder zurück zu $-\infty$. Die Stromcurven $\psi = \pm\pi$ entsprechen also der Strömung längs zweier gerader Wände für die $y = \pm A\pi$ und x zwischen $-\infty$ und $-A$ läuft.

Die Gleichung (2) entspricht also, wenn wir ψ als Ausdruck der Stromescurven betrachten, der Strömung aus einem durch zwei parallele Ebenen begrenzten Canal in den unendlichen Raum hinein. Am Rande des Canals aber, wo $x = -A$ und $y = \pm A\pi$ wo ferner:

$$\varphi = o \text{ und } \psi = \pm\pi$$

ist, wird:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 0, \quad 225$$

also:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = \infty$$

Elektricität und Wärme können so strömen; tropfbare Flüssigkeit muss aber zerreissen.

Sollen vom Rande des Canales stationäre Trennungslinien ausgehen, welche natürlich Fortsetzungen der längs der Wand verlaufenden Strömungslinien $\psi = \pm\pi$ werden, und soll ausserhalb dieser Trennungslinien, die die strömende Flüssigkeit begrenzen, Ruhe stattfinden, so muss der Druck auf beiden Seiten der Trennungslinien gleich sein. Das heisst, es muss längs derjenigen Theile der Linien $\psi = \pm\pi$, welche den freien Trennungslinien entsprechen, gemäss 1*b* sein:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = \text{Const.} \cdots \} \quad (3)$$

Um nun die Grundzüge der in Gleichung (2) gegebenen Bewegung beizubehalten, setzen wir zu obigem Ausdrucke von $x + y i$ noch ein Glied $\sigma + \tau i$ hinzu, welches ebenfalls eine Function von $\varphi + \psi i$ ist.

Wir haben dann:

$$x = A\varphi + Ae^{\varphi}\cos\psi + \sigma \cdots \}$$
$$y = A\psi + Ae^{\varphi}\sin\psi + \tau \cdots \} \quad (3a)$$

und müssen $\sigma + \tau i$ so bestimmen, dass längs des freien Theiles der Trennungsflächen wo $\psi = \pm\pi$, werde:

$$\left(A - Ae^{\varphi} + \frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = \text{Const.}$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn wir eben daselbst machen, dass:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 \text{ oder } \sigma = \text{Const.} \cdots \} \quad (3b)$$

226 und:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \pm A\sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}} \ldots\ldots \Big\} \qquad (3c)$$

Da ψ längs der Wand constant ist, können wir die letzte Gleichung nach φ integriren, und das Integral in eine Function von $\varphi + \psi i$ verwandeln, indem wir statt φ überall setzen $\varphi + i(\psi + \pi)$. So erhalten wir bei passender Bestimmung der Integrationsconstante:

$$\sigma + \tau i = Ai\left\{\sqrt{-2e^{\varphi+\psi i} - e^{2\varphi+2\psi i}} + 2\arcsin\left[\frac{i}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\varphi+\psi i)}\right]\right\}\ldots\Big\} \qquad (3d)$$

Die Verzweigungspunkte dieses Ausdruckes liegen, wo $e^{\varphi+\psi i} = -2$, das heisst, wo $\psi = \pm(2a+1)\pi$ und $\varphi = \log 2$ ist. Also liegt keiner im Innern des Intervalles von $\psi = +\pi$ bis $\psi = -\pi$. Die Function $\sigma + \tau i$ ist hier continuirlich.

Längs der Wand wird:

$$\sigma + \tau i = \pm Ai\left\{\sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}} - 2\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}\varphi}\right]\right\}.$$

Wenn $\varphi < \log 2$, so ist dieser ganze Werth rein imaginär, also $\sigma = o$, während $d\tau/d\varphi$ den oben in 3^c vorgeschriebenen Werth erhält. Dieser Theil der Linien $\psi = \pm\pi$ entspricht also dem freien Theile des Strahles.

Wenn $\varphi > \log 2$ wird der ganze Ausdruck bis auf den Summanden $\pm Ai\pi$ reell, welcher letztere sich zum Werthe von τi, beziehlich yi hinzufügt.

Die Gleichungen 3^a und 3^d entsprechen also der Ausströmung aus einem unbegrenzten Becken in einen durch zwei Ebenen begrenzten Canal, dessen Breite $4A\pi$ ist, dessen Wände von $x = -\infty$ bis $x = -A(2 - \log 2)$ reichen. Die freie Trennungslinie der strömenden Flüssigkeit krümmt sich von der Kante der Oeffnung zunächst noch ein wenig gegen die Seite
227 der positiven x hin, wo sie für $\varphi = o$, $x = -A$ und für $y = \pm A.(\frac{3}{2}\pi + 1)$ ihre grössten x-Werthe erreicht, um sich dann in das Innere des Canales hineinzuwenden, und zuletzt asymptotisch den beiden Linien $y = \pm A\pi$ zu nähern, sodass schliesslich die Breite des ausfliessenden Strahles nur der halben Breite des Canales gleich wird.

Die Geschwindigkeit längs der Trennungsfläche und im

geraden Ende des ausfliessenden Strahles ist $1/A$. Längs der festen Wand und im Innern der Flüssigkeit ist sie überall kleiner als $1/A$, sodass diese Bewegungsform bei jeder Grösse der Ausflussgeschwindigkeit stattfinden kann.

Ich hebe an diesem Beispiele namentlich hervor, wie es zeigt, dass die Form des Flüssigkeitsstromes in einer Röhre auf sehr lange Strecken hin durch die Form des Anfangsstückes bestimmt sein kann.

Zusatz, elektrische Vertheilung betreffend. Wenn man in der Gleichung (2) die Grösse ψ als das Potential von Elektricität betrachtet, so ergiebt sich hier die Vertheilung der Elektricität in der Nähe des Randes zweier ebener und sehr naher Scheiben, vorausgesetzt, dass ihr Abstand als verschwindend klein gegen den Krümmungshalbmesser ihrer Randcurven betrachtet werden kann. Es ist das eine sehr einfache Lösung der Aufgabe, welche Hr. Clausius[1]) behandelt hat. Sie ergiebt übrigens dieselbe Vertheilung der Electricität, wie er sie gefunden hat, wenigstens soweit dieselbe von der Krümmung des Randes unabhängig ist.

Ich will noch hinzufügen, dass dieselbe Methode genügt, um auch auf zwei parallelen unendlich langen ebenen Streifen, deren vier Kanten im Querschnitte die Ecken eines Rechteckes bilden, die Vertheilung der Elektricität zu finden. Die Potentialfunction ψ derselben wird gegeben durch eine Gleichung von der Form:

$$x + yi = A(\varphi + \psi i) + B\frac{1}{H(\varphi + \psi i)} \ldots\ldots \Big\} \qquad (4)$$ 228

wo $H(u)$ die von Jacobi in den Fundamenta nova p. 172 als Zähler von *sin am u* entwickelte Function bezeichnet. Die belegten Streifen entsprechen nach dortiger Bezeichnung dem Werthe $\varphi = \pm 2K$, wobei $x = \pm 2AK$ den halben Abstand der Streifen ergiebt, während vom Verhältniss der Constanten A und B die Breite der Streifen abhängt.

Die Form der Gleichungen 2 und 4 lässt erkennen, dass φ und ψ als Functionen von x und y nur durch äusserst complicirte Reihenentwickelungen auszudrücken sein können.

---

1) Poggendorff's Annalen Bd. LXXXVI.

X.

Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken.

„Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin" vom 26. Juni 1873. S. 501—514.

501 Die Bewegungsgesetze der tropfbaren und gasigen Flüssigkeiten sind hinreichend gut bekannt in Form von Differentialgleichungen, welche nicht blos den Einfluss aus der Ferne wirkender äusserer Kräfte, so wie den des Druckes der Flüssigkeit, sondern auch den Einfluss der Reibung berücksichtigen. Wenn man bei der Anwendung dieser Gleichungen beachtet, dass unter Umständen, — nämlich da, wo eine continuirliche Bewegung negativen Druck geben würde, — sich Trennungsflächen mit discontinuirlicher Bewegung an beiden Seiten ausbilden müssen, wie ich dies in einer früheren Correspondenz[1]) der Akademie zu erweisen gesucht habe: so fallen auch die Widersprüche fort, welche bei Nichtberücksichtigung dieses Umstandes zwischen vielen scheinbaren Folgerungen der hydrodynamischen Gleichungen einerseits und der Wirklichkeit andererseits bis-
502 her zu bestehen schienen. Es liegt in der That, so weit ich sehe, zur Zeit kein Grund vor, die hydrodynamischen Gleichungen nicht für den genauen Ausdruck der wirklich die Bewegungen der Flüssigkeiten regierenden Gesetze zu halten.

Leider sind wir nur für verhältnissmässig wenige und be-

1) Monatsberichte der Akademie, 23. April 1868 (vorausgehende Aufsatz). — S. auch Kirchhoff in Borchardt's Journal für Mathematik, Bd. 70.

sonders einfache Fälle des Experiments im Stande aus diesen Differentialgleichungen die entsprechenden, den Bedingungen des gegebenen besonderen Falles angepassten Integrale herzuleiten, namentlich wenn der Natur des Problems nach die innere Reibung der Flüssigkeit und die Bildung von Trennungsflächen nicht unberücksichtigt bleiben dürfen. Die Trennungsflächen sind äusserst veränderlich, da sie eine Art labilen Gleichgewichtes besitzen und sich bei jeder Störung in Wirbel aufzurollen streben; dieser Umstand macht die theoretische Behandlung derselben sehr schwierig. So sind wir, wo wir es praktisch mit Flüssigkeitsbewegungen zu thun haben, fast ganz auf herumtastende Versuche angewiesen, und können oft nur Weniges und dies nur in unsicherer Weise über den Erfolg neuer Modificationen unserer hydraulischen Maschinen, Leitungen oder Fortbewegungs-Apparate aus der Theorie voraussagen.

Bei dieser Lage der Sache wollte ich auf eine Verwendung der hydrodynamischen Gleichungen aufmerksam machen, welche erlaubt Beobachtungsresultate, die an einer Flüssigkeit und an Apparaten von gewisser Grösse und Geschwindigkeit gewonnen worden sind, zu übertragen auf eine geometrisch ähnliche Masse einer anderen Flüssigkeit und Apparate von anderer Grösse und anderer Bewegungsgeschwindigkeit.

Ich bezeichne zu dem Ende mit u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit der ersten Flüssigkeit, genommen nach den Richtungen der rechtwinkeligen Coordinataxen x, y, z, mit t die Zeit, mit p den Druck, mit ε die Dichtigkeit, mit k deren Reibungsconstante. Dann sind die Bewegungsgleichungen in Euler'scher Form, mit Einführung der Reibungskräfte nach Stokes, falls keine äusseren Kräfte auf die Flüssigkeit wirken, von folgender Form:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d(u.\varepsilon)}{dx} + \frac{d(v.\varepsilon)}{dy} + \frac{d(w.\varepsilon)}{dz} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \Big\} \qquad (1)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - k\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right\} \quad 503$$

$$-\frac{k}{3}\frac{d}{dx}\left\{\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \Big\} \qquad (1a)$$

Dazu kommen noch die zwei Gleichungen, welche aus der letzteren durch Vertauschung der x und u, beziehlich mit y und v oder mit z und w entstehen.

Wenn nun für eine andere Flüssigkeit die Geschwindigkeiten mit U, V, W, der Druck mit P, die Coordinaten mit X, Y, Z, die Zeit mit T, die Dichtigkeit mit E, die Reibungsconstante mit K bezeichnet wird, mit q, r, n, dagegen drei Constanten und wir setzen:

$$K = qk \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$E = r\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

$$U = nu \qquad X = \frac{q}{n}x,$$

$$V = nv \qquad Y = \frac{q}{n}y,$$

$$W = nw \qquad Z = \frac{q}{n}z,$$

$$P = n^2rp + \text{Const.} \qquad T = \frac{q}{n^2}t,$$

so erfüllen auch diese mit grossen Buchstaben bezeichneten Grössen die obigen Differentialgleichungen. Setzt man sie nämlich in jene Gleichungen ein, so erscheinen sämmtliche Glieder von 1 mit dem Factor rn^2/q und sämmtliche Glieder von 2 mit dem Factor n^3/q multiplicirt. Von den Constanten q, r, n sind zwei durch die Gleichungen 2 und 2a aus der Natur der Flüssigkeit bestimmt, die dritte n aber ist willkürlich, soweit die bis hierher berücksichtigten Bedingungen in Betracht kommen.

Ist die Flüssigkeit incompressibel, so ist ε als Constante zu behandeln, $d\varepsilon/dt = 0$ zu setzen, und die obigen Gleichungen genügen dann, die Bewegung im Innern zu bestimmen. Ist die Flüssigkeit compressibel, so können wir setzen:

504

$$p = a^2\varepsilon - c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$p = A^2E - C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

worin c und C dem Drucke hinzuzufügende Constanten bedeuten, welche auf die Gleichungen 1a keinen Einfluss haben. Für Gase sind c und C gleich Null zu setzen, wenn die Bewegung unter solchen Umständen geschieht, dass die Temperatur constant bleibt. Für schnelle Dichtigkeitsveränderungen von Gasen ohne Ausgleichung der Temperatur würden allerdings die Gleichungen (3) und (3a) nur für die Fälle geringer Dichtigkeitsschwankungen anwendbar sein.

Durch die oben angegebenen Werthe für P und E ist die Gleichung (3a) nur erfüllbar, wenn:

$$A^2 = a^2n^2.$$

Dadurch wäre also auch die dritte Constante n fest bestimmt. Die Grössen a und A sind hier die Schallgeschwindigkeiten in den betreffenden Flüssigkeiten. Diese müssen sich in demselben Verhältnisse ändern wie die anderen Geschwindigkeiten.

Wenn die Grenzen der Flüssigkeit zum Theil unendlich entfernt, zum Theil durch bewegte oder ruhende, vollkommen benetzte feste Körper gegeben sind, und die Coordinaten und Geschwindigkeits-Componenten dieser begrenzenden festen Körper von dem einen auf den anderen Fall in derselben Weise übertragen werden, wie es eben für die Flüssigkeitstheilchen geschehen ist, so sind die Grenzbedingungen für die U, V, W erfüllt, wenn sie für die u, v, w erfüllt sind. Ich setze dabei voraus, dass an vollständig benetzten Körpern die oberflächlichen Schichten der Flüssigkeit vollkommen festhaften, also die Geschwindigkeits-Componenten der Oberfläche des festen Körpers und der anhaftenden Flüssigkeit die gleichen seien.

Für unvollkommen benetzte Körper wird der Regel nach angenommen, dass eine relative Bewegung der oberflächlichen Flüssigkeitsschichten gegen die Oberfläche des festen Körpers stattfinde. In diesem Falle würde zur Anwendung unserer Sätze ein gewisses Verhältniss zwischen den Coëfficienten der gleitenden oberflächlichen Reibung der Flüssigkeit an den betreffenden festen Körpern und der inneren Reibung der ersteren angenommen werden müssen.

Die Grenzbedingungen an der freien Oberfläche einer tropfbaren Flüssigkeit, über der der Druck constant ist, würden ebenfalls erfüllt sein, falls keine aus der Ferne wirkenden 505
Kräfte, wie die Schwere, dabei Einfluss gewinnen. Da dieser Fall aber nur bei tropfbaren Flüssigkeiten vorkommt, welche als incompressibel betrachtet werden können, so braucht man die Gleichungen (3) und (3a) nicht zu erfüllen. Dann bleibt

die Constante n frei, und wenn man für diesen Fall die letztere so bestimmt, dass $n^3/q = 1$ wird, so kann in der Gleichung (1a) auch noch die Intensität der Schwere $-g$ auf der linken Seite als Summand hinzugesetzt werden.

An Trennungsflächen ist die Grenzbedingung, dass der Druck an beiden Seiten einer solchen Fläche gleich sei, was für P ebenfalls erfüllt ist, wenn es für p gilt.

Was die Reaction der Flüssigkeit gegen einen in ihr bewegten festen Körper betrifft, so wächst der Druck gegen die Flächeneinheit der Oberfläche wie $n^2 r$. In demselben Verhältniss wachsen die Reibungskräfte, welche proportional sind dem Product aus $k\varepsilon$ mit Differentialquotienten, wie du/dx, und ähnlichen. Für entsprechende ähnliche Flächenstücke der begrenzenden Körper aber wachsen Druck und Reibungskräfte wie:

$$\frac{q^2}{n^2} . n^2 . r = q^2 r.$$

Die Arbeit, die zur Ueberwindung dieser Widerstände gebraucht wird von Seiten des eingetauchten Körpers, für gleiche Zeiträume genommen, wächst demnach wie $nq^2 r$.

Im allgemeinen sind also die drei Constanten n, q, r für compressible Flüssigkeiten und für schwere tropfbare Flüssigkeiten mit freier Oberfläche bei vollständig genauer Uebertragung der Bewegung durch die Natur der beiden Flüssigkeiten bestimmt. Nur für incompressible Flüssigkeiten ohne freie Oberfläche bleibt eine Constante willkürlich.

Nun giebt es aber eine grosse Reihe von Fällen, wo die Zusammendrückbarkeit nicht blos bei tropfbaren, sondern auch bei gasigen Flüssigkeiten nur einen verschwindend kleinen Einfluss hat. Es lassen sich darüber folgende Betrachtungen anstellen. Lässt man die Constante n kleiner werden, während r und q unverändert bleiben, so heisst dies, dass in der zweiten Flüssigkeit die Schallgeschwindigkeit proportional mit n ab-
506 nimmt, ebenso die Geschwindigkeiten der materiellen bewegten Theile, während die Lineardimensionen dem n umgekehrt proportional zunehmen. Abnahme der Schallgeschwindigkeit entspricht bei gleichbleibendem r, das heisst bei gleichbleibender Dichtigkeit der zweiten Flüssigkeit, einer vermehrten Compressibilität derselben. Bei vermehrter Compressibilität also bleiben

sich die Bewegungen ähnlich. Daraus folgt, dass wenn wir das n verkleinern, während wir die Compressibilität der Flüssigkeit unverändert lassen, die Bewegungen derselben sich ändern und denen ähnlicher werden, welche im engeren Raume eine incompressiblere Flüssigkeit ausführen würde. Bei geringen Geschwindigkeiten also wird auch in weiten Räumen die Compressibilität ihren Einfluss verlieren; unter solchen Bedingungen werden sich auch Gase wie tropfbare incompressible Flüssigkeiten bewegen, wie das praktisch aus vielen Beispielen bekannt ist.

Sind die Geschwindigkeiten der materiellen Theile hierbei überhaupt sehr klein, wie bei den verschwindend kleinen Oscillationen, so dass der Ablauf der Bewegung bei gleichmässiger Steigerung derselben merklich unverändert bleibt, so ist es nur die Schallgeschwindigkeit, die sich hierbei ändert, und unser Satz würde dann die Form bekommen: Schallschwingungen einer compressiblen Flüssigkeit werden in weiteren Räumen mechanisch ähnlich verlaufen können, wie schnellere Oscillationen einer weniger compressiblen Flüssigkeit in engeren Räumen. Ein Beispiel für die Benutzung der besprochenen Aehnlichkeit findet sich in meinen Untersuchungen über die Schallbewegung an den Enden offener Orgelpfeiffen[1]). Bei dieser Aufgabe hing die Möglichkeit, die analytischen Bedingungen der Luftbewegung durch die einfacheren der Wasserbewegung zu ersetzen, davon ab, dass die Dimensionen des betreffenden Raumes sehr klein sein mussten im Vergleich zu den Wellenlängen der vorkommenden Schallschwingungen.

Andererseits zeigt sich auch die Reibung weniger einflussreich bei Bewegungen von Flüssigkeiten in weiten Räumen. Man behält dasselbe Verhältniss zwischen den Reibungskräften und den Druckkräften, wenn man n unverändert lässt, während q wächst. Das heisst, wenn man die Dimensionen vergrössert und die Reibungsconstante in demselben Verhältnisse, so kann die Bewegung in dem vergrösserten Systeme ähnlich bleiben, 50 während sich die Geschwindigkeiten nicht ändern. Daraus folgt, dass in einem so vergrösserten Modell, wenn man die Reibungsconstante nicht in demselben Verhältniss vergrössert,

1) Borchardt's Journal für Mathematik, Bd. 57.

sondern unverändert lässt, die Reibung bei gleichbleibender Geschwindigkeit an Einfluss verliert. Was bei unveränderten Geschwindigkeiten für grössere Dimensionen gilt, gilt auch für vermehrte Geschwindigkeiten bei unveränderten Dimensionen. Denn man kann auch gleichzeitig n proportional q wachsen lassen.

In der That macht sich auch bei den meisten praktischen Versuchen in ausgedehnten flüssigen Massen derjenige Widerstand überwiegend geltend, welcher von den Beschleunigungen der Flüssigkeit herrührt, und namentlich in Folge der Bildung von Trennungsflächen entsteht. Dessen Grösse wächst dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, während der von der eigentlichen Reibung herrührende Widerstand, der der Geschwindigkeit einfach proportional wachsen sollte, nur bei Versuchen in ganz engen Röhren und Gefässen rein heraustritt.

Sieht man von der Reibung ab, das heisst, setzt man in den obigen Gleichungen die Constanten:

$$k = K = 0,$$

so wird auch die Constante q frei verfügbar, und man kann Dimensionen und Geschwindigkeiten in beliebigem Verhältnisse ändern.

Kommt aber die Schwere mit in Betracht, wie bei den Wellen an der freien Wasseroberfläche, so muss nach der früher gemachten Bemerkung n^3/q unverändert bleiben, also $q = n^3$ gesetzt werden. Dann wird:

$$X = n^2 x$$
$$Y = n^2 y \qquad\qquad T = nt.$$
$$Z = n^2 z$$

Also wenn die Wellenlänge im Verhältnisse von n^2 wächst, so wächst die Oscillationsdauer nur im Verhältnisse von n, was dem bekannten Gesetze der Fortpflanzungs-Geschwindigkeit für die Oberflächenwellen des Wassers entspricht, die wie die Wurzel der Wellenlänge wächst. So ergiebt sich dieses 508 Resultat sehr einfach und für alle Wellenformen, ohne dass man ein Integral der Wellenbewegung zu kennen braucht.

Dasselbe ist anwendbar auf die Widerstände, welche Schiffe von n^2fachen Dimensionen und $n$facher Geschwindigkeit mit Berücksichtigung der Wellen, die sie an der Oberfläche des Wassers erregen, erleiden. Der gesammte Widerstand wächst in diesem Falle wir $q^2 r$, und da bei gleichbleibender Flüssigkeit $r = 1$, so wächst der Widerstand, wie n^6, und die Arbeit, die zu dessen Ueberwindung gebraucht wird, wie n^7, also in etwas stärkerem Verhältnisse als das Volumen des Schiffes, während der Vorrath an Brennmaterial und der Dampfkessel, welche die Arbeit liefern müssen, nur in demselben Verhältniss wie das Volumen des Schiffes, nämlich wie n^6, wachsen können. So lange also nicht leichtere Maschinen angewendet werden können (die Kohlenvorräthe eingerechnet), wird die Geschwindigkeit eines so vergrösserten Schiffes über eine gewisse Grenze hinaus auch nur in einem geringeren Verhältniss wachsen können, als das der Quadratwurzel aus der Vergrösserung der Lineardimensionen ist.

Aehnlich stellt sich die Rechnung für das Modell des Vogels in der Luft. Wenn wir einen Vogel linear vergrössern, und die Reibung berücksichtigen wollen, so müssen wir q und r gleich Eins setzen, weil das Medium, die Luft, ungeändert bleibt. Setzen wir n gleich einem ächten Bruch, so werden die Geschwindigkeiten in gleichem Maasse reducirt, wie das Volumen wächst, und der Druck gegen die gesammte Fläche des Vogels würde nur den gleichen Werth erreichen, wie bei dem kleineren Vogel, also das Gewicht des grösseren nicht zu tragen vermögen.

Erlauben wir uns die Reibung zu vernachlässigen, was wir nach den obigen Bemerkungen um so mehr thun können, je mehr wir die Dimensionen wachsen lassen, oder bei ungeänderten Dimensionen die Geschwindigkeiten vergrössern, so ist q verfügbar und es muss dann die Veränderung der Dimensionen und Geschwindigkeiten so geschehen, dass der gesammte Flächendruck wie das Gewicht des Körpers steigt, oder es muss sein $q^2 = q^3/n^3$ oder $q = n^3$. Um die entsprechenden Bewegungen auszuführen, wäre nöthig die Arbeit:

$$q^2 n = n^7 = \left(\frac{q}{n}\right)^{\frac{7}{3}}.$$

Das Volumen des Körpers und der arbeitenden Muskeln steigt 509 aber nur im Verhältniss von $(q/n)^3$.

Daraus geht hervor, dass die Grösse der Vögel eine Grenze hat, wenn nicht die Muskeln in der Richtung weiter ausgebildet werden können, dass sie bei derselben Masse noch mehr Arbeit leisten können als jetzt. Gerade unter den grossen Vögeln, welche grosser Leistungen im Fliegen fähig sind, finden wir nur Fleisch- und Fischfresser, also Thiere, welche concentrirte Nahrung zu sich nehmen und keiner ausgedehnten Verdauungsorgane bedürfen. Unter den kleineren sind auch viele Körnerfresser, wie Tauben und die kleinen Singvögel, gute Flieger. Es erscheint deshalb wahrscheinlich, dass im Modell der grossen Geier die Natur schon die Grenze erreicht hat, welche mit Muskeln, als arbeitsleistenden Organen, und bei möglichst günstigen Bedingungen der Ernährung für die Grösse eines Geschöpfes erreicht werden kann, welches sich durch Flügel selbst heben und längere Zeit in der Höhe erhalten soll.

Unter diesen Umständen ist es kaum als wahrscheinlich zu betrachten, dass der Mensch auch durch den allergeschicktesten flügelähnlichen Mechanismus, den er durch seine eigene Muskelkraft zu bewegen hätte, in den Stand gesetzt werden würde, sein eigenes Gewicht in die Höhe zu heben und dort zu erhalten.

Was die Frage über die Möglichkeit, Luftballons relativ zu der sie umgebenden Luft vorwärts zu treiben, betrifft, so erlauben uns unsere Sätze diese Aufgabe zu vergleichen mit der praktisch in vielfachen Formen durchgeführten anderen Aufgabe, ein Schiff mittels ruderähnlicher oder schraubenförmiger Bewegungsorgane im Wasser vorwärts zu treiben. Wir müssen dabei freilich von der Bewegung an der Oberfläche absehen, vielmehr uns ein unter der Oberfläche fortgetriebenes Schiff vorstellen. Doch wird ein solches, welches etwa nach oben und unten eine Fläche kehrte, die der eingetauchten Fläche eines gewöhnlichen Schiffes congruent ist, sich in seiner Bewegungsfähigkeit kaum wesentlich von einem gewöhnlichen Schiffe unterscheiden.

Beziehen wir nun die kleinen Buchstaben der beiden obigen Systeme hydrodynamischer Gleichungen auf Wasser,

die grossen auf Luft, so ist für 0° und 760 mm Barometerstand:

$$\frac{1}{r} = 773.$$

Nach den Bestimmungen von O. E. Meyer und Cl. Maxwell ist: 510

$$q = 0{,}8082.$$

Die Schallgeschwindigkeit ergiebt für n den Werth:

$$n = 0{,}2314.$$

Daraus ergiebt sich die Vergrösserung der Lineardimensionen:

$$\frac{q}{n} = 3{,}4928,$$

die des Volumens:

$$\left(\frac{q}{n}\right)^3 = 42{,}61.$$

Die Arbeit wird hierbei sehr gering, nämlich:

$$q^2 nr = \frac{1}{5114{,}3}.$$

Das Schiff incl. Besatzung und Belastung muss so viel Gewicht haben, als das von ihm verdrängte Wasservolumen. Der Ballon, mit Wasserstoff gefüllt, müsste um ein gleiches Gewicht zu tragen 837mal grösseres Volumen haben, als das Schiff. Wird er mit Leuchtgas vom specifischen Gewichte 0,65 (bezogen auf Luft) gefüllt, so muss er 2208,5mal grösseres Volumen haben als das Schiff. Dadurch bestimmt sich nun auch das Gewicht, welches der Ballon bei den angegebenen Dimensionen haben müsste. Das des Wasserstoffballons würde sein $42{,}6/837 = 1/19{,}6$, das des Leuchtgasballons $42{,}6/2208{,}5$ von dem des Schiffs.

Die Arbeit, welche zur Fortbewegung des Ballons unter solchen Umständen nöthig wäre, würde indessen, wie die obige Angabe über den Werth von q^2nr zeigt, für die angenommene geringe Geschwindigkeit in viel höherem Maasse reducirt sein, als das Gewicht des Ballons gegen das des Schiffes, so dass die hier verlangte Arbeit, bei den gegebenen Gewichtsverhältnissen, in dem Ballon leicht zu leisten wäre. Denn selbst, wenn wir das Schiff so wählten, dass seine übrige Belastung gegen die der Kraftmaschine (beziehlich die als solche fungirenden Menschen) ganz verschwände, würde das Gewicht des 511

Leuchtgasballons nur $\frac{1}{52}$ desjenigen von dieser Kraftmaschine sein dürfen, aber die von ihm getragene Kraftmaschine würde auch nur $\frac{1}{5114}$ von der Arbeit der Schiffsmaschine zu leisten haben, würde also auch ungefähr in diesem letzteren Verhältnisse geringeres Gewicht haben dürfen. Namentlich würde dies letztere der Fall sein, wenn wir Menschen als Kraftmaschinen anwenden, deren Arbeit und Gewicht beide ihrer Anzahl proportional wachsen.

Soweit können wir also die Uebertragung vom Schiff auf den Ballon mit voller Berücksichtigung der in Betracht kommenden abweichenden Eigenschaften von Luft und Wasser anstellen. Als Maxima der Geschwindigkeit für schnelle Schiffe (grössere Kriegsdampfer) werden in dem Ingenieurtaschenbuche des Vereins „Die Hütte“ angegeben 18 Fuss in der Secunde (2,7 deutsche Meilen oder 21 Kilometer in der Stunde). Etwa ein Viertel dieser Geschwindigkeit würden analog gebaute Ballons mit relativ sehr schwach wirksamen oder kleinen Kraftmaschinen erreichen können.

Schiffe von vorgeschriebener Grösse finden die Grenze ihrer Leistungsfähigkeit gezogen durch die Grenzen der Kraft der Maschine (einschliesslich Brennmaterial), welche sie tragen können. Indessen erlauben uns die bisher gemachten praktischen Erfahrungen für grosse schnelle Schiffe den Einfluss der Reibung zu vernachlässigen, und somit über die Constante q willkürlich zu verfügen, ebenso auch über n, wenn wir die Bewegungen an der Oberfläche vernachlässigen dürfen. Lassen wir q proportional n wachsen, so bleiben die Dimensionen ungeändert, die Geschwindigkeiten wachsen wie n, der Widerstand wie n^2, die Arbeit wie n^3. Wären wir also im Stande, eine Schiffsmaschine von demselben Gewichte aber grösserer Arbeitsleistung zu bauen als die bisherigen, so würden wir auch grössere Geschwindigkeiten erreichen können.

Mit einem solchen, bisher freilich noch nicht construirten Schiffe müssten wir den Ballon vergleichen, um eine hinreichende Ausnutzung der ihm mitgegebenen Kraftmaschine zu erreichen. Auch bei ihm würde bei unveränderter Grösse, wenn die Geschwindigkeit wie n wächst, die Arbeit wie n^3 wachsen müssen.

Nun wird das Verhältniss zwischen Gewicht und Arbeitsgrösse für Menschen, die von einem Ballon fortgetragen werden, nur bei sehr riesigen Dimensionen des Ballons sich vielleicht günstiger stellen können, als für einen Kriegsdampfer und seine Maschine. Für den letzteren berechne ich aus den technischen 512
Angaben, dass er für die Geschwindigkeit von 18 Fuss eine Pferdekraft braucht auf 4636,1 kg Gewicht.[1]) Dagegen ein Mensch, der unter günstigen Umständen bei 200 Pfund Gewicht 8 Stunden täglich 75 Fusspfund Arbeit per Secunde leisten kann, giebt im Durchschnitt des Tages auf 1920 kg eine Pferdekraft. Wenn also der Ballon etwa anderthalbmal so viel wiegt, als die arbeitenden Menschen, die er trägt, so ist das Verhältniss dasselbe, wie bei dem Schiffe. Herr Dupuy de Lôme hat unter einem weniger günstigen Verhältnisse seine Versuche ausgeführt; im Ballon waren 14 Mann Besatzung, deren Gewicht ein Viertel des Ganzen betrug, von denen aber nur acht arbeiteten. Danach wird es schon eine verhältnissmässig günstige Annahme sein, wenn wir beim Ballon das Verhältniss zwischen Gewicht und Arbeit dem der Kriegsdampfer gleich setzen. Wir können demnach für den Leuchtgasballon das Verhältniss zwischen Arbeit und Gewicht $51{,}831/5114\ n^3$ so steigern durch Vergrösserung von n, dass es gleich 1 wird, das heisst, gleich dem des Schiffes. Dann muss werden:

$$n = 4{,}6208.$$

Da nun die Geschwindigkeit U des Ballons, die wir oben unter Voraussetzung voller geometrischer Aehnlichkeit der Bewegungen berechnet haben, nur 0,2314 von der Geschwindigkeit u des Schiffes war, so ergiebt sich nun:

$$U = 0{,}2314\ .\ nu = 1{,}06925\,u.$$

1) Die speciellen Angaben, auf denen die Rechnung beruht, sind folgende:

L Länge des Linienschiffes 230 Fuss preussisch.
B Breite „ „ 54 „ „
H Ganze Höhe des „ 24 „ „
T Tiefe unter Wasser $= H - \frac{1}{3} B$.
V Verdrängtes Wasservolumen $= 0{,}46\ L.\ B.\ T.$
1 Kubikfuss Seewasser wiegt: 63,343 Pfund.
A Fläche des eingetauchten Hauptspants, 1000 Quadratfuss.
Arbeit $= \zeta A v^3$, worin $\zeta = 0{,}46$.

Für den Wasserstoffballon könnte die Geschwindigkeit unter denselben Voraussetzungen etwas grösser werden, da hier:

513 $$\frac{19{,}6}{5114}\,n^3 = 1$$

zu setzen wäre. Also:

$$n = 6{,}390$$
$$U = 0{,}2314\,.\,nu = 1{,}4786\,u,$$

was beinahe das anderthalbfache von der bisher erreichten Geschwindigkeit des Kriegsdampfers wäre. Die letzte Geschwindigkeit eines Wasserstoffballons würde schon ausreichen, um langsam gegen eine „frische Briese“ vorwärts zu gehen.

Aber es ist wohl zu bemerken, dass diese Rechnungen sich auf colossale Ballons beziehen, deren lineare Dimensionen etwa 3½mal grösser sind als die des untergetauchten Theils eines grossen Linienschiffes, und dass der Leuchtgasballon 60220 kg wiegen würde, während der von Herrn Dupuy de Lôme nur 3799 kg wog. Um zu Dimensionen zurückzukehren, die sich eher in der Ausführung erreichen lassen, muss man q und n so verkleinern, dass das Verhältniss der Arbeit zum Gewichte unverändert bleibt, also:

$$q^2 n : \left(\frac{q}{n}\right)^3 = 1,$$

das heisst: $$q = n^4.$$

Dabei würde sich die Geschwindigkeit n wie die dritte Wurzel aus den Lineardimensionen, oder wie die neunte Wurzel aus dem Volumen oder dem Gewicht vermindern. Diese Reduction ist verhältnissmässig unbedeutend. Gehen wir zum Beispiel von unserem idealen Ballon auf einen von dem Gewichte des Herrn Dupuy zurück, so ergiebt sich eine Reduction der Geschwindigkeit im Verhältniss von 1,36 : 1; dies gäbe eine Geschwindigkeit von 14,15 Fuss für die Secunde, oder 16,5 km für die Stunde. Die Lineardimensionen des Ballons würden dabei im Verhältniss 1,4 : 1 die des mit ihm verglichenen Schiffes übertreffen.

Die Verhältnisse zwischen Arbeit und Belastung haben in Hrn. Dupuy's Versuch den oben vorausgesetzten nahehin entsprochen. Die acht Männer, welche bei ihm arbeiteten, sind allerdings nach unserem obigen Anschlage mit 800 kg anzu-

setzen, was etwas mehr als ein Fünftel des Gesammtgewichts ist. Da aber der Versuch nur kurze Zeit dauerte, konnten diese die ganze Zeit hindurch mit ganzer Energie arbeiten, 514 während oben nur der Durchschnittswerth achtstündiger Arbeit für den ganzen Tag berechnet ist. Also sind diese acht Männer gleich 24 dauernd arbeitenden zu setzen, wodurch die Differenz mehr als ausgeglichen wird. Herr Dupuy giebt an, für die Dauer 8 km in der Stunde und bei angestrengterer Arbeit 10¼ km unabhängig vom Winde erreicht zu haben. Er ist also nicht allzuweit hinter der Grenze zurückgeblieben, welche meine Berechnungen, als die mit einem Ballon solcher Grösse erreichbaren, anzeigen.

In der vorstehenden Berechnung haben wir aber allein Rücksicht genommen auf das Verhältniss zwischen Arbeitskraft und Gewicht, und vorausgesetzt die Form eines solchen Ballons und seines Motors lasse sich mit den uns gegebenen Materialien herstellen. Hier scheint mir aber eine Hauptschwierigkeit der praktischen Ausführung zu liegen. Denn die aus festen Körpern bestehenden Maschinentheile behalten bei geometrisch ähnlicher Vergrösserung ihrer Lineardimensionen nicht die nöthige Festigkeit; sie müssen dicker und deshalb schwerer gemacht werden. Will man aber dieselbe Wirkung mit kleineren Motoren von grösserer Geschwindigkeit erreichen, so verschwendet man Arbeit. Der Druck gegen die ganze Fläche eines Motors (Schiffsschraube, Ruder) wächst wie $q^2 r$. Soll dieser Druck, welcher die forttreibende Kraft giebt, unverändert bleiben, so kann man die Dimensionen nur verkleinern, indem man n, also auch die Geschwindigkeiten, wachsen lässt; dann wächst aber auch die Arbeit, wie $q^2 n r$, also proportional n. Man kann also sparsam nur arbeiten mit verhältnissmässig langsam bewegten grossflächigen Motoren. Und diese in den nöthigen Dimensionen ohne zu grosse Belastung des Ballons herzustellen, wird eine der grössten praktischen Schwierigkeiten sein.

XI.

Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten.

Von

H. Helmholtz und **G. v. Piotrowski.**

Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Bd. XL. S. 607. Sitzung vom 12. April 1860. (2 Tafeln.)

607 In den meisten Fällen von Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten, welche bei physiologischen Untersuchungen oder technischen Aufgaben vorkommen, hat die Reibung der Flüssigkeitstheilchen untereinander und an den Wänden des Gefässes einen so bedeutenden Einfluss auf die Form der Bewegung, dass wenn man in den theoretischen Untersuchungen solcher Fälle die Reibung vernachlässigen wollte, sich die allergröbsten Differenzen zwischen Theorie und Experiment ergeben würden. Nun sind die Bewegungsgleichungen für eine Flüssigkeit, die der Reibung unterworfen ist, allerdings schon vor längerer Zeit aufgestellt worden von Poisson[1]), von Navier[2]) und Stokes[3]), und zwar sind alle drei Mathematiker, indem sie von ganz verschiedenen zu Grunde gelegten Hypothesen ausgingen, zu denselben Bewegungsgleichungen für tropfbare Flüssigkeiten gelangt, während für gasförmige allerdings eine Differenz zwischen Navier und den beiden anderen besteht. Indessen ist bisher nur eine einzige Form des Experimentes gefunden worden, für

1) Journal de l'école Polytechnique. Cahier XX.
2) Mémoires de l'Institut de France T. VI.
3) Cambridge Philosophical Transactions T. VIII, p. 287.

welche die vollständige Theorie aus jenen Bewegungsgleichungen hergeleitet werden kann, es ist das die Bewegung einer Flüssigkeit in sehr engen und sehr langen Röhren. Ueber diese hat bekanntlich Poiseuille[1]) genaue und eingehende Untersuchungen gemacht, deren Resultate mit der mathematischen Theorie in guter Uebereinstimmung sind. Dabei hat sich aber gleichzeitig 608 gezeigt, dass wenn man von sehr engen Röhren zu weiteren übergehen will, die Länge der Röhren in viel grösserem Verhältnisse zunehmen muss, als ihr Durchmesser, wenn dieselbe einfache Theorie gültig bleiben soll. Auch ergeben die erwähnten hydrodynamischen Gleichungen, dass wenn man Länge und Durchmesser der Röhre auf das $n$fache vergrössert, die Geschwindigkeiten auf $1/n$ verringert werden müssen, der Druck auf $1/n^2$, wenn die Bewegung der früheren ähnlich bleiben soll. Es wird also die Länge der Röhre etwa wie n^3 wachsen müssen, wenn man gleiche Drucke anwenden will, ohne die Störungen der linearen Bewegung einen grösseren Einfluss auf das Resultat gewinnen zu lassen. Dadurch wird es unausführbar, ähnliche mit der Theorie vergleichbare Versuche an anderen als capillaren Röhren anzustellen. Dazu kommt noch, dass jede Ungleichförmigkeit an der Röhrenwand, namentlich jede Oeffnung, die zur Einsetzung eines Druckmessers dient, bedeutende Störungen der Bewegung hervorbringt[2]), sodass man die unter solchen Bedingungen gewonnenen Ergebnisse zwar zur Ableitung praktischer Approximationsformeln, aber nicht zur Vergleichung mit der mathematischen Theorie gebrauchen kann.

Da es nun übrigens in dem verwirrenden Labyrinth von Erscheinungen, welche bei den Flüssigkeitsbewegungen vorkommen, von der grössten Wichtigkeit wäre, eine durchgreifende und strenge Theorie als Leitfaden zu haben, welche wenigstens erkennen liesse, welcher Theil der Erscheinungen erklärbar, welcher vor der Hand noch zu verwickelt sei: so beschlossen wir einen zweiten Fall von Flüssigkeitsbewegung zu untersuchen, dessen Theorie vollständig aus den hydrodynamischen

1) Memoires des Savants étrangers IX, 433.
2) S. Ludwig und Stefan, Sitzungsberichte der kais. Akademie zu Wien, Bd. XXXII, 1858, 29. April.

Gleichungen für reibende Flüssigkeiten hergeleitet werden kann, namentlich um zu sehen, ob die daraus gewonnenen Werthe der Reibungsconstanten für das Wasser übereinstimmten mit denen, die aus Poiseuille's Versuchen berechnet werden können. Ein solcher Fall ist die Bewegung des Wassers in einer Hohlkugel, und zwar liessen wir das kugelförmige Gefäss drehende Schwingungen um einen seiner Durchmesser machen. Es konnte aus diesen Beobachtungen die Kraft experimentell
609 bestimmt werden, welche die in dem Gefässe enthaltene Flüssigkeit auf die Wände des Gefässes ausübt, und konnte mit der aus der mathematischen Theorie der Flüssigkeitsbewegung hergeleiteten Kraft verglichen werden.

Leider zeigte der Erfolg, dass die gewöhnlich gemachte Annahme, welche durch Poiseuille's Versuche bestätigt zu sein schien, wonach die oberflächlichste Schicht der Flüssigkeit den Wänden des Gefässes fest anhaftet, für die wässerigen Flüssigkeiten in Metallgefässen mit polirter und vergoldeter Oberfläche, wie sie von uns, um die Unveränderlichkeit der Oberfläche zu sichern, angewendet waren, nicht zutrifft, während sie andererseits für Alkohol und Aether auch in solchen Metallgefässen nahehin zutrifft. Der Einfluss der Oberfläche wurde durch Versuche mit einem Glasgefässe, welches erst mit natürlicher, dann mit versilberter Oberfläche zu den Schwingungsversuchen diente, direct erwiesen. Dadurch entstand eine grössere Complication des Erfolges als vorher erwartet wurde, und es reichte die unter den obwaltenden Umständen erreichbare Genauigkeit der Messungen nicht aus, um die strenge Uebereinstimmung der aus unserem Verfahren abgeleiteten Werthe der Reibungsconstanten mit denen von Poiseuille ganz festzustellen. Es liegt nämlich im Wesen der angewendeten Methode, dass sie genaue Bestimmungen des inneren Reibungscoëfficienten der eingeschlossenen Flüssigkeiten hauptsächlich dann ergiebt, wenn die oberflächliche Schicht der Flüssigkeit gar keine oder nur eine kleine Gleitung längs der Metallfläche ausführt. Sollen dagegen diese Bestimmungen im Falle grösserer Gleitung mit ähnlicher Genauigkeit ausgeführt werden, so ist eine sehr genaue Bestimmung der Schwingungsdauer bis mindestens zu den Hunderttheilen einer Secunde nöthig. Diese

ist in dem vielfachen Erschütterungen und Temperaturwechseln ausgesetzten Locale, wo die Versuche angestellt werden mussten, nicht immer erreicht worden. Leider hat dieser Umstand gerade beim reinen Wasser, wo die Vergleichung mit den früheren Versuchen von Poiseuille möglich war, grossen Einfluss gehabt, sodass der Werth der Reibungsconstante, der aus den Versuchen des letzteren Beobachters folgt, zu dem aus den vorliegenden Versuchen berechneten sich wie 4 : 5 verhält. Es erscheint immerhin schon als ein Resultat von einigem Interesse, dass sich mittels der Theorie eine solche Uebereinstimmung herstellt zwischen Zahlen, die von zwei so durchaus verschiedenen Versuchsmethoden geliefert worden sind, und 610
die übrigens der Natur der Sache nach jeden beliebigen Werth zwischen Null und Unendlich annehmen könnten.

A. Experimenteller Theil.

Von **Dr. G. v. Piotrowski.**

Auf Vorschlag des Hrn. Prof. Helmholtz unternahm ich es, die Reibung der tropfbaren Flüssigkeiten an starren Gefässwänden zu studiren, und zwar durch Beobachtung der Schwingungen eines mit Flüssigkeit vollgefüllten Gefässes.

Vor Allem lag es mir daran zu ermitteln, ob die Annahme, dass die Reibung im Inneren der bewegten Flüssigkeiten und an einer starren Gefässwand der Geschwindigkeit dieser Bewegung direct proportional sei, eine gerechtfertigte wäre.

Dies zu ermitteln hing ich ein Fläschchen, wie solche zur Aufbewahrung von chemischen Reagentien üblich sind, bifilar an dünnen übersilberten Kupferdrähten auf, in der Weise, dass ich um den Hals des Fläschchens eine dicke Stahlnadel schlang, die Enden dieser Nadel nach aufwärts, dann nach einwärts und endlich nach abwärts bog, und so das Fläschchen mittelst der Enden der Nadel, die spitz zugeschliffen waren, auf einer Kupferplatte balanciren liess; in Einkerbungen dieser Kupferplatte und einer ähnlichen an der Zimmerdecke liefen die Drähte.

Vorne am Fläschchen befestigte ich einen plan-parallelen Spiegel, an dem Boden des Fläschchens in der Richtung seines, dem magnetischen Meridiane parallelen Durchmessers einen kleinen Magnetstab, und umgab das Ganze mit einem Gehäuse von Pappe, das dem Spiegel gegenüber eine mit einem plan-parallelen Glase verschlossene Oeffnung besass. Indem ich nun einen galvanischen Strom durch Drahtspiralen, welche möglichst nahe an dem Magnete passend angebracht waren, leitete, konnte ich den Magnet und mit ihm das Fläschchen aus ihrer Ruhelage ablenken; unterbrach ich nun den Strom, so schwang das Fläschchen um seine verticale Hauptaxe. Die Weite dieser Schwingungen beobachtete ich mittels Scale und Fernrohr.

611 Abgesehen von der Reibung der Flüssigkeit mussten die Weiten der Schwingungsbögen in geometrischer Progression abnehmen, d. h. die logarithmischen Decremente derselben mussten constant sein[1]); ist die Reibung der Flüssigkeit an der Gefässwand der Geschwindigkeit der Bewegung proportional, so darf durch sie die Abnahme der Schwingungsbögen in geometrischer Progression nicht gestört werden (s. theoretischen Theil). Den fraglichen Satz zu beantworten brauchte ich also blos die aufeinander folgenden Elongationen des schwingenden Fläschchens zu beobachten, und aus den so gewonnenen Daten die logarithmischen Decremente zu berechnen. Diese erwiesen sich als constant.

Beifolgende Tabelle mag dies näher darthun. Die Scale war 1175 mm von der Umdrehungsaxe entfernt, der Spiegel 22 mm. Die Scalentheile sind Millimeter; die Ruhelage vor dem Versuche war 500,00.

1) S. Gauss, Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel, in den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereines im Jahre 1837.

612

A	B	C	D	E	F	G	H
25,0							
954,0	497,25	913,50	456,75	434,92	2,638 409 4	0,013 292 5	
56,0	497,65	883,30	441,65	421,81	2,625 116 9	0,013 521 0	
924,6	497,72	853,75	426,87	408,88	2,611 595 9	0,013 079 0	
85,7	498,80	826,20	413,10	396,75	2,598 516 9	0,012 650 3	
899,2	498,87	800,65	400,32	385,36	2,585 866 6	0,012 855 7	0,013 039 7
111,4	499,20	775,60	387,80	374,12	2,573 010 9	0,013 156 4	
874,8	499,30	751,00	375,50	363,04	2,559 954 5	0,013 103 5	
136,2	499,30	727,20	363,60	352,25	2,546 851 0	0,012 951 9	
852,0	499,25	704,50	352,25	341,90	2,533 899 1	0,012 813 3	
158,8	500,22	682,85	341,42	331,96	2,521 085 8	0,012 973 7	
831,3	500,47	661,65	330,82	322,19	2,508 112 1	0,013 150 9	
180,5	500,95	640,90	320,45	312,58	2,494 961 2	0,013 017 2	
811,5	500,97	621,05	310,52	303,35	2,481 944 0	0,013 139 0	
200,4	501,25	601,70	300,85	294,31	2,468 805 0	0,013 153 3	
792,7	501,20	583,00	291,50	285,53	2,455 651 7	0,013 015 2	
219,0	501,55	565,10	282,55	277,10	5,442 636 5	0,012 932 7	0,013 058 7
775,5	501,55	547,90	273,95	268,97	2,429 703 8	0,013 013 4	
236,2	501,72	531,15	265,57	261,03	2,416 690 4	0,012 969 5	
759,2	501,70	515,00	257,50	253,35	2,403 720 9	0,0 3 033 0	
252,2	501,85	499,30	249,65	245,86	2,390 687 9	0,013 163 1	
743,8	501,82	483,95	241,97	238,52	2,377 524 8	0,012 898 8	
267,5	502,20	469,40	234,70	231,54	2,364 626 0	0,012 849 0	
730,0	502,32	455,35	227,67	224,79	2,351 777 0	0,013 081 5	
281,8	502,55	441,50	220,75	218,12	2,338 695 5	0,012 995 2	
716,6	502,50	428,20	214,10	211,69	2,325 700 3	0,012 994 2	0,013 014 1
295,0	502,65	415,30	207,65	205,45	2,312 706 1	0,013 068 1	
704,0	502,62	402,75	201,37	199,36	2,299 638 0	0,013 136 6	
307,5	502,75	390,50	195,25	193,42	2,286 501 4	0,013 152 8	
692,0	502,67	378,65	189,32	187,65	2,273 348 6	0,012 967 1	
319,2	502,85	367,30	183,65	182,13	2,260 381 5	0,012 997 5	
681,0	502,85	356,30	178,15	176,76	2,247 384 0	0,012 993 3	
330,2	503,02	345,65	172,82	171,55	2,234 390 7	0,013 080 8	
670,7	503,07	335,25	167,62	166,46	2,221 309 9	0,013 245 0	
340,7	503,22	325,05	162,52	161,46	2,208 064 9	0,013 051 3	
660,8	503,15	315,30	157,65	156,68	2,195 013 6	0,012 684 6	0,013 045 0
350,5	503,35	306,10	153,05	152,17	2,182 329 0	0,012 625 2	
652,0	503,37	297,25	148,62	147,81	2,169 703 8	0,012 973 0	
359,2	503,40	288,40	144,20	143,46	2,156 730 8	0,013 341 2	
643,2	503,40	279,60	139,80	139,12	2,143 389 6	0,012 798 5	
368,0	503,70	271,40	135,70	135,08	2,130 591 1	0,012 657 3	
635,6	503,82	263,55	131,77	131,20	2,117 933 8	0,013 310 1	
376,1	503,87	255,55	127,77	127,24	2,104 623 7	0,013 097 4	
627,7	503,75	247,90	123,95	123,46	2,091 526 3	0,012 924 5	
383,5	503,77	240,55	120,27	119,84	2,078 601 8	0,013 320 9	
620,4	503,77	233,25	116,62	116,22	2,065 280 9	0,013 588 3	0,013 142 4
390,8	503,80	226,00	113,00	112,64	2,051 692 6	0,013 271 2	
613,2	503,62	219,15	109,57	109,25	2,038 421 4	0,012 501 4	
397,3	503,75	212,90	106,45	106,15	2,025 920 0	0,012 872 0	
607,2	503,87	206,65	103,32	103,05	2,013 048 0	0,013 395 6	
403,8	503,97	200,35	100,17	99,92	1,999 652 4		

613 Die Columne A enthält die unmittelbar abgelesenen Scalentheile, die Columne B enthält die aus den Elongationen berechneten Ruhelagen; die Zahlen sind aus A berechnet nach der Formel $\frac{1}{4}(a + 2b + c)$, wenn a, b, c drei aufeinander folgende Zahlen der Columne A bedeuten. Die Zahlen der Columne C sind aus A berechnet nach der Formel $\pm\frac{1}{2}(a - 2b + c)$, wenn a, b, c dieselbe Bedeutung wie vorhin haben; sie stellen die doppelten Tangenten der Schwingungsbögen dar. D enthält die einfachen Tangenten der Schwingungsbögen, E die Schwingungsbögen selbst, nach einer eigens zu diesem Zwecke berechneten Tabelle gefunden. F enthält die (gemeinen) Logarithmen von E, G die Unterschiede der aufeinander folgenden Zahlen in F, also das logarithmische Decrement für die halbe Schwingung in gemeinen Logarithmen ausgedrückt. H endlich die Mittel aus je 10 aufeinander folgenden logarithmischen Decrementen.

Die Zahlen der Columne H lassen keinen Zweifel über die Constanz des logarithmischen Decrementes; die geringen Schwankungen in der Columne G erklären sich leicht daraus, dass nur noch die Zehntel-Millimeter berücksichtigt sind, und auch diese nicht direct abgelesen, sondern geschätzt wurden; diese Fehlerquelle muss sich um so mehr geltend machen, je kleiner die Schwingungsbögen werden.

Alle übrigen Versuchsreihen sind der angeführten ähnlich.

Nachdem ich mich so überzeugt habe, dass die Reibung, wenigstens des Wassers, an starren Gefässwänden bei einer Bewegung beider gegeneinander der Geschwindigkeit dieser Bewegung wirklich direct proportional sei, suchte ich zu ermitteln, ob die Natur der Gefässwand auf die Grösse dieser Reibung von merklichem Einfluss ist, oder nicht.

Ein Fläschchen, für welches ich fand:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement
23,933 3	0,062 218 2
23,933 3	0,062 846 7
Mittel 23,933 3	0,062 532 5

wenn ich den eben beschriebenen Versuchen ähnliche damit anstellte, versilberte ich inwendig nach der Liebig'schen Methode; der Silberüberzug, wiewohl er die Innenfläche des Fläschchens ganz gleichmässig bedeckte, war doch so dünn, dass ein Unterschied zwischen der Wassermenge (143 590 mg) 614 die das Fläschchen vor und nach dem Versuche fasste, mittels einer Wage, die noch 5 mg ausschlug, nicht zu entdecken war. Bei dem versilberten Fläschchen fand ich:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement
24,008 8	0,060 030 5
24,007 6	0,059 962 2
Mittel 24,008 2	0,059 996 4

folglich wäre das Verhältniss der Reibung am Glase zur Reibung am Silber wie:

$$1 : 0{,}956\,45,$$

d. h. die Reibungsconstante um 4,355 % kleiner beim Silber, wenn wir die beobachteten Unterschiede nicht jenen unbekannten Einflüssen zuschreiben wollen, welche, wie wir im Verfolge sehen werden, sowohl die Schwingungsdauer als das logarithmische Decrement selbst bei ganz gleichen und unmittelbar aufeinander folgenden Versuchen nicht ganz constant erscheinen lassen. Nun ging ich an die Aufgabe, die Constanten dieser Reibung für ein Gefäss von regelmässiger Begrenzung zu bestimmen.

Der Apparat, den ich zu diesem Behufe anwandte, war von Herrn Mechaniker Fessel in Cöln angefertigt.

Das Gefäss zur Aufnahme der Flüssigkeit war eine Hohlkugel (Fig. I, A in der Seitenansicht, B im Durchschnitte) oder vielmehr zwei hohle Halbkugeln, die mittels breiter Leisten (a), welche wieder ineinander griffen, sehr genau aneinander gelegt, und dann mittels sechs Schrauben (b) aneinander geschraubt werden konnten; die Schrauben so wie die Schraubengänge waren mit Zahlen bezeichnet, um die Genauigkeit des Verschlusses zu sichern.

Die eine, beim Versuche untere Halbkugel hatte am Scheitel eine Eingussöffnung, die mittels eines genau eingepassten kegelförmigen Zapfens (c) verschliessbar war, die innere Fläche des Zapfens bildete einen integrirenden Bestandtheil der inneren hohlkugelförmigen Fläche.

Die andere Halbkugel trug an ihrem Scheitel eine Schraube (*d*), mittels deren sie an den Rahmen des darüber befindlichen Spiegels angeschraubt werden konnte.

615 Die Innenfläche der Kugel war im Feuer vergoldet.

Der Spiegel (Fig. 2 stellt denselben sammt der später beschriebenen Stange mit den Laufgewichten dar) war in einem Rahmen von Messing (*a*) enthalten, und hing mit diesem blos oben durch eine Schraube (*b*) zusammen, so dass er um seine verticale Axe mit Reibung beweglich war.

Der Rahmen hatte unten eine Oeffnung (*c*) zur Aufnahme der Schraube der Kugel, die daran mittels einer Schraubenmutter (*d*) befestigt werden konnte, und oben zwei senkrechte Balken, durch einen Querbalken verbunden (*e*); zwischen diesen senkrechten Balken lief auf zwei Spitzen ein Cylinder (*f*) frei beweglich um seine horizontale Hauptaxe. Der Cylinder hatte in seiner Mitte eine Einkerbung zur Aufnahme des Aufhängungsdrahtes. Der Durchmesser des Cylinders an der Einkerbung betrug 5,20 mm.

Der Aufhängungsdraht, ein übersilberter Kupferdraht, war um diesen Cylinder geschlungen, und lief von da auf beiden Seiten des obersten kleinen Querbalkens, ohne jedoch diesen zu berühren, nach aufwärts.

Die Enden des Drahtes liefen in Einschnitten keilförmiger Aufsätze (Fig. 3 *a*), (*A* Seitenansicht, *B* Durchschnitt), dann in einer Rinne schief nach oben und aussen, wo sie um einen Zapfen (*b*) geschlungen waren; durch Drehen dieser Zapfen konnte der Spiegel nach Belieben gesenkt oder gehoben werden. Die letzten Enden des Drahtes waren endlich mittels Schrauben festgeklemmt.

Die keilförmigen Aufsätze und die Zapfen sammt den Schranben waren an einer Platte (*c*) befestigt, welche in beschränktem Maasse um eine verticale Axe, die gerade die Mitte zwischen den Drähten hielt, an einer darüber befindlichen grösseren Platte (*d*) beweglich war. Um die Platte nach Belieben drehen zu können, war dieselbe mit zwei Armen versehen; an dem einen (*e*) war eine Schnur befestigt, durch deren Anziehung die Drehung erfolgte; die Weite dieser Bewegung konnte mittelst Schrauben (*f*) verändert werden. An dem

anderen Arme (*g*) war eine federnde Drahtspirale (*h*) angebracht, welche beim Nachlassen des Zuges an der Schnur die Platte in ihre frühere Lage wieder zurückbrachte.

Diese ganze Vorrichtung diente dazu die aufgehängten festen Theile des Apparates in eine rotirende Bewegung um ihre verticale Hauptaxe zu versetzen, ohne der Beihilfe eines Magneten zu bedürfen, wie dies bei den Vorversuchen der Fall 616
war, und wodurch die Versuche nothwendig unrein werden müssen.

Die grössere Platte war an einem dicken Brette, und dieses wieder an der Decke des Zimmers befestigt. Die vorhin erwähnte Schnur lief über eine Rolle an der Zimmerdecke zu dem Platze, wo das Fernrohr stand.

Dass beim Versuche die Bewegung eine rein rotirende war, also kein Pendeln des Apparates den Versuch trübte, überzeugte ich mich durch Beobachtung des Zapfens, der die Eingussöffnung der Kugel verschloss; beobachtete ich nämlich diesen mittels des Fernrohres, so schien er in Ruhe zu sein.

Schwieriger war es die Innenfläche der Kugel genau auf ihre Gestalt zu prüfen; ich begnügte mich da vorerst einen Stearinabguss zu machen, welcher mir zeigte, dass die Zusammensetzung aus zwei Halbkugeln die Gestalt nicht beeinträchtige; dann legte ich eine planparallele Glasplatte, an deren untere Fläche ich einen schwarzen Punkt anbrachte, auf die Halbkugeln, verschob diese so lange, bis der Punkt die Pupille des Spiegelbildes meines beobachtenden Auges verdeckte (dabei musste der Punkt im Centrum der Kugel sich befinden), und sah zu, ob bei allen Bewegungen der Halbkugel sammt der Glasplatte die Pupille verdeckt blieb. So entdeckte ich eine sehr geringe und begrenzte Abweichung von der Kugelgestalt an der oberen Kugelschale; die übrigen Theile der Kugel schienen ganz genau gearbeitet; für die Genauigkeit der Kugelgestalt spricht endlich noch der Umstand, dass der Durchmesser der Kugel aus dem Wassergewichte, welches dieselbe fasst, berechnet 49,272 mm betragen müsste, und die directe Messung wirklich 49,3 mm ergiebt.

Selbstverständlich waren Kugel und Spiegel beim Versuche in einem Kasten, ähnlich dem bei den Vorversuchen,

eingeschlossen, um den störenden Einfluss der Luftströmungen zu vermindern.

Bevor ich mit Flüssigkeiten zu experimentiren beginnen konnte, musste ich das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung, das Torsionsmoment des Drahtes, endlich das Trägheitsmoment der aufgehängten Theile kennen.

Diese Bestimmungen machte ich nach einer Methode die von Neumann herrührt[1]); sie besteht darin, dass man zwei
617 Gewichte, für die man die Lage des Schwerpunktes kennt, nach und nach in verschiedenen Entfernungen von der Umdrehungsaxe anbringt, und die gesuchten Grössen aus den beobachteten Schwingungsdauern berechnet.

Statt der Kugel befestige ich also an den Spiegel eine eiserne Stange, oder vielmehr ein Schraubengewinde von Eisen (Fig. 2 g), an diesem liefen vier cylindrische Gewichte von Messing (h), möglichst gleich gearbeitet, je zwei dieser Gewichte an einer Seite von der Umdrehungsaxe, und fest aneinander geschraubt: der Spalt zwischen diesen Gewichten gab die Lage des Schwerpunktes der Belastung an; die Entfernung des Spaltes von der Umdrehungsaxe konnte leicht mittels eines Zirkels gemessen werden.

Diesen Apparat versetzte ich nach der vorhin erwähnten Methode in Schwingungen; die Differentialgleichung dieser Bewegung ist:

$$M\frac{d^2w}{dt^2} = -\left(aG + \frac{2b}{L}\right)w,$$

wenn w den Ablenkungswinkel (von der Ruhelage), t die Zeit, a das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung, G das Gewicht der aufgehängten festen Theile, b das Torsionsmoment des Drahtes für die Längeneinheit, L die Länge jedes der beiden Aufhängungsdrähte, oder vielmehr die Länge des Stückes des Aufhängungsdrahtes zwischen dem Cylinder am Spiegelrahmen und dem keilförmigen Aufsatze, M das Trägheitsmoment der schwingenden festen Theile bedeutet.

1) Ich verdanke sie einer mündlichen Mittheilung des Hrn. Prof. Helmholtz.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$w = A\sin t\sqrt{\frac{aG + \frac{2b}{L}}{M}} + B.\cos t\sqrt{\frac{aG + \frac{2b}{L}}{M}},$$

wo A und B die beiden willkürlichen Constanten sind.

Fangen wir die Zeit zu zählen an von dem Augenblicke, wo der Apparat die Ruhelage passirt, wo dann t und w zugleich verschwinden müssen, so wird die Constante $B = o$ und es ist:

$$w = A\sin t\sqrt{\frac{aG + \frac{2b}{L}}{M}}.$$

Stellt uns T die ganze Schwingungsdauer vor, so ergiebt sich daraus:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{aG + \frac{2b}{L}}}, \qquad (1)$$ 618

wo π in der gewöhnlichen Bedeutung gebraucht ist.

Nennen wir nun M das Trägheitsmoment, welches der Apparat hätte, wenn die Schwerpunkte beider (Doppel-)Gewichte in der Umdrehungsaxe lägen, und entfernen wir eines dieser Gewichte so weit, dass sein Schwerpunkt jetzt um R von der Umdrehungsaxe absteht, so wird jetzt $M + mR^2$ das Trägheitsmoment sein, wenn m die Masse dieses Gewichtes bezeichnet, und $M + 2mR^2$, wenn wir beide Gewichte (natürlich nach der entgegengesetzten Seite, um die Gleichgewichtslage nicht zu verändern) um R von der Umdrehungsaxe entfernen, und ebenso $M + 2mr^2$, wenn wir ein andermal die Schwerpunkte beider Doppelgewichte um r von der Umdrehungsaxe entfernt haben.

Die entsprechenden Schwingungsdauern T'' und T' werden dann sein:

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{M + 2mR^2}{aG + \frac{2b}{L}}},$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{M + 2mr^2}{aG + \frac{2b}{L}}},$$

woraus sich ergiebt:

$$aG + \frac{2b}{L} = 4\pi^2\frac{2m(R^2 - r^2)}{T''^2 - T'^2},$$

Habe ich daher m, T'', T', R und r durch Versuche gefunden, so lässt sich daraus leicht die complicirte Grösse $aG + 2b/L$ berechnen.

Bei den Versuchen, die ich anstellte, waren die einzelnen Gewichte:

1. 32 520,5 mg
2. 32 520,0 „
3. 32 514,8 „
4. 32 510,0 „

Ich nahm die beiden ersten Gewichte zu dem einen, die beiden letzteren zu dem anderen Doppelgewichte zusammen
619 und werde unter Anordnung A diejenige verstehen, wo das 1. und 4., unter Anordnung B diejenige, wo das 2. und 3. Gewicht von der Umdrehungsaxe entfernter waren.

Ferner hatte ich:

$$2m = 13{,}259\,84\ ^{1}).$$

Die Resultate der angestellten Versuche sind:

Nr. des Versuches	Anordnung der Gewichte	Entfernung der Schwerpunkte der Gewichte von der Umdrehungsaxe	Beobachtete Schwingungsdauer[2])
I.	*A.*	24,69	24,270 0
II.	*A.*	55,21	40,731 6
III.	*A.*	41,67	32,889 6
IV.	*B.*	24,61	24,301 8
V.	*B.*	56,67	41,792 4
VI.	*B.*	39,10	31,487 8

Daraus ergiebt sich:

$$aG + \frac{2b}{L} = 1\,192{,}98 \quad \text{aus II. und I.}$$
$$= 1\,189{,}38 \quad \text{„ II. „ III.}$$
$$= 1\,197{,}20 \quad \text{„ III. „ I.}$$
$$= 1\,179{,}99 \quad \text{„ V. „ IV.}$$
$$= 1\,166{,}49 \quad \text{„ V. „ VI.}$$
$$= 1\,205{,}40 \quad \text{„ VI. „ IV.}^{3}),$$

1) Die Gravitationsconstante zu 9 808,96 angenommen.

2) Die Schwingungsdauern sind alle nach Gauss' Methode, l. c. bestimmt, und selbstverständlich auf unendlich kleine Schwingungen reducirt. Zur Bestimmung selbst wandte ich ein genau gehendes Chronometer an, welches 0,″4 schlägt. Die Zahlen bedeuten Millimeter und Secunden.

3) Vergleichbar sind nur die Versuche bei der nämlichen Anordnung. Worin die Schwankungen ihre Begründung finden, war ich nicht im

im Mittel ist also:

$$aG + \frac{2b}{L} = 1\,188{,}57. \qquad (2)$$

Die Constanten a und b bestimmte ich nun einzeln in der 620
Weise, dass ich die Stange sammt den Gewichten ganz ebenso bei unifilarer Aufhängung schwingen liess.

Die Gleichung der Bewegung ist hier:

$$M\frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{b}{l}w,$$

wo l die Länge des Drahtes bei unifilarer Aufhängung bedeutet.

Die Bedeutung der übrigen Buchstaben ist dieselbe wie früher.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$w = A\sin t\sqrt{\frac{b}{lM}} + B\cos t\sqrt{\frac{b}{lM}},$$

wo A und B die willkürlichen Constanten sind, und der zweite Theil wieder verschwindet, wenn wir die Zeit von dem Zeitpunkte zu zählen beginnen, wo der Apparat die Ruhelage passirt.

Es bleibt somit:

$$w = A\sin t\sqrt{\frac{b}{lM}},$$

und wenn $\mathfrak{T}$ die Schwingungsdauer bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{T} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{lM}}, \qquad (3)$$

woraus wir für zwei verschiedene Entfernungen der Schwerpunkte der Gewichte von der Umdrehungsaxe, genau so wie vorhin, finden:

$$b = 4\pi^2 . 2ml\,\frac{R^2 - r^2}{\mathfrak{T}''^2 - \mathfrak{T}'^2}.$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist an sich klar.

Stande zu ermitteln; dass eine nicht allzugrosse Verschiedenheit des Abstandes der Schwerpunkte beider Gewichte die Schwingungsdauer nicht wesentlich ändert, davon überzeugte ich mich in der Art, dass ich nach dem Versuche absichtlich die Gewichte derart verschob, dass das eine der Umdrehungsaxe um 0,5 mm näher stand als das andere, ohne dass sich der Abstand der Gewichte von einander geändert hätte.

Bei den Versuchen war:

$$l = 978{,}0 \text{ mm}$$

ferner:

Nr. des Versuches	Anordnung der Gewichte	Entfernung der Schwerpunkte der Gewichte von der Umdrehungsaxe	Beobachtete Schwingungsdauer
I.	*B.*	39,10	61,762 6
II.	*B.*	24,69	46,969 4

621 Daraus folgt:

$$b = 292\,572{,}8.$$

Diesen Werth für B in die Gleichung (2) substituirt, finden wir:

$$a = 0{,}003\,161\,97,$$

da:

$$L = 2143{,}2 \text{ mm},$$
$$G = 289\,549{,}2 \text{ mg}$$

waren.

Eine andere Methode A und B einzeln zu bestimmen, ist die Vergleichung des Versuches I bei unifilarer Aufhängung mit dem correspondirenden Versuch VI bei bifilarer Aufhängung, sowie mit dem Resultate der ganzen Versuchsreihe bei bifilarer Aufhängung; denn dividiren wir die Gleichung (1) durch die Gleichung (3) und substituiren für $\mathfrak{T}$ und T die Werthe aus den genannten Versuchen, bei welchen beiden das Trägheitsmoment denselben Werth hat, so fällt M weg und es bleibt:

$$\frac{T}{\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{\frac{b}{l}}{aG + \frac{2b}{L}}},$$

woraus folgt:

$$b = \frac{T^2}{\mathfrak{T}^2} \cdot l \left(aG + \frac{2b}{L}\right),$$

wobei wir den Werth der Grösse $aG + 2b/L$ schon kennen.

In Zahlen ergiebt sich:

$$b = 302\,132{,}2$$

und somit:

$$a = 0{,}003\,131\,26.$$

Als Mittel aus beiden Bestimmungen ergiebt sich:

$$a = 0{,}003\,146\,62$$
$$b = 297\,352{,}5.$$

Diese Zahlen werde ich den künftigen Rechnungen zu 622
Grunde legen.

Nachdem ich so das Torsionsmoment der Drähte, und das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung bestimmt hatte, suchte ich den Werth des Trägheitsmomentes meiner Kugel zu finden. Zu diesem Zwecke vertauschte ich nun die Stange gegen meine Kugel, und bestimmte die Schwingungsdauer, so wie das logarithmische Decrement, welches wir in der Folge werden kennen müssen, der leer schwingenden Kugel.

Hier gilt noch immer die Formel (1):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{aG + \frac{2b}{L}}}$$

woraus sich ergiebt:

$$M = \frac{\left(aG + \frac{2b}{L}\right) T^2}{4\pi^2}$$

G hatte jetzt den Werth 355 629,7 mg; L hatte seinen vorigen Werth.

Die Versuche ergaben:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement[1])
	24,5458	0,006 754 0
	24,5338	0,006 531 8
	24,5550	0,006 597 4
	24,4010	0,005 984 4
Mittel:	24,5089	0,006 466 9.

Darnach ergiebt sich:

$$M = 21\,248{,}9.$$

Ich will jetzt die Versuche folgen lassen, die ich mit einer Reihe verschiedenartiger Flüssigkeiten angestellt habe. In dem theoretischen Theile ist entwickelt, wie man aus der Abnahme der Schwingungen und aus der Aenderung der Schwingungsdauer die Kraft P berechnen könne, welche von

1) Für die ganze Schwingungsdauer in natürlichen Logarithmen ausgedrückt.

der reibenden Flüssigkeit auf die Wand des Gefässes ausgeübt wird. Die Kraft P ist dort gesetzt:

623 $$P = -Ke^{-\beta t}\cos[\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1]$$

und die Winkelgeschwindigkeit der schwingenden Kugel:

$$\psi = Be^{-\beta t}\cos[\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + \eta],$$

so dass der Bruch K/B, welchen wir im folgenden mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen wollen, das Verhältniss des Maximum der Reibungskraft zum Maximum der Drehungsgeschwindigkeit angiebt, und der Winkel $\varepsilon + \delta_1 - \delta - \eta$, den wir mit ϑ bezeichnen wollen, den Phasenunterschied misst zwischen der Geschwindigkeit und der Kraft.

Diese beiden Grössen können aus den Beobachtungen unmittelbar abgeleitet werden ohne Beziehung auf irgend eine Theorie der Wasserreibung, und sie finden sich im Folgenden bei den einzelnen Versuchsreihen berechnet. Die Kraft $\mathfrak{K}$ wird im Allgemeinen um so grösser, je grösser die innere Reibung ist, wird aber durch stattfindende Gleitung an der Oberfläche vermindert. Der Winkel ϑ beträgt bei den am schwächsten reibenden und nicht gleitenden Flüssigkeiten 45°, und wächst bis 90° bei den stark reibenden. Er wird ebenfalls kleiner, wenn Gleitung stattfindet. Werthe unter 45° können nur im Falle der Gleitung vorkommen, während keine erhebliche Gleitung da sein kann, wenn dieser Winkel nahe an 90° beträgt[1]).

Es ist ausserdem die Grösse $\mathfrak{K}\cos\vartheta$ angegeben, weil diese der am genauesten zu messende Theil der Kraft $\mathfrak{K}$ ist.

Versuche stellte ich an vorerst mit gewöhnlichem Brunnenwasser, welches jedoch nur ganz geringe Spuren fester Substanzen gelöst enthielt. Die Resultate dieser Versuche waren:

1) Ich verfertigte mir Kügelchen aus Kork und Siegellack von nahezu dem specifischen Gewichte des Wassers, und liess sie suspendirt in einem schwingenden mit Wasser gefüllten Gefässe; die Korkkügelchen machten nur kleine Excursionen im Sinne der Bewegung des Gefässes; hatte ich dabei vor der Bewegung mehrere Kügelchen in einer Geraden, die durch die Schwingungsaxe ging, so bildeten sie auch während des Schwingens fortwährend eine Gerade, zum Beweise, dass der Phasenunterschied in den tieferen Theilen nicht merklich variire.

Zahl des Versuches	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur in ° C.
I.	23,059 4	0,054 533 6	25,4
II.	23,060 0	0,054 654 0	25,5
III.	23,030 4	0,054 069 0	25,9
IV.	23,042 4	0,054 017 0	24,0
V.	23,044 2	0,053 142 4	25,6
VI.	23,043 2	0,054 062 0	23,6
VII.	23,015 6	0,053 232 6	25,0
VIII.	23,033 4	0,053 267 2	24,4
IX.	23,034 2	0,054 089 6	23,0
X.	23,033 4	0,053 863 2	22,4
Mittel:	23,039 2	0,053 892 1	24,48.

Aus diesen Daten berechnen sich nach den im theore- 624
tischen Theile angegebenen Regeln:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 88{,}190 \qquad \mathfrak{K} = 99{,}860 \qquad \vartheta = 27^\circ 58' 37''.$$

Eine zweite Versuchsreihe stellte ich mit ausgekochtem Wasser an, welches ich nach dem Auskochen vor Luftzutritt möglichst geschützt hatte. Die Resultate waren:

Zahl des Versuches	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur in ° C.
I.	22,960 1	0,052 821 4	22,0
II.	22,969 8	0,053 331 6	21,8
III.	22,978 8	0,053 738 0	21,8
IV.	22,970 8	0,055 189 8	21,6
V.	22,981 8	0,054 892 6	22,0
VI.	22,977 2	0,055 503 4	21,1
VII.	22,981 8	0,055 746 2	21,7
VIII.	22,975 6	0,056 117 8	21,8
Mittel:	22,974 5	0,054 667 6	21,72.

Jetzt ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 89{,}906\,4 \qquad \mathfrak{K} = 90{,}708\,7 \qquad \vartheta = 7^\circ 38' 26''\,^{1}).$$

Was die Schwankungen der Zahlwerthe bei den einzelnen Versuchen anlangt, so sind dieselben unmöglich den Temperaturunterschieden zuzuschreiben. Die Temperaturangaben beziehen

1) Nur die Versuche mit ungekochtem Wasser, mit Aether, Alkohol und Schwefelkohlenstoff sind genau nach den im zweiten Theile entwickelten Regeln berechnet; doch sind die Resultate der übrigen Versuche nur äusserst wenig von diesen verschieden, die wir durch die angeführte Berechnungsweise erhalten hatten.

sich zwar nicht auf die Flüssigkeit selbst; denn ein Thermometer innerhalb der Kugel anzubringen war weder thunlich, noch wäre dies zweckentsprechend gewesen, da sich ja die Versuche auf ein Gefäss von regelmässiger Form beziehen sollten; ich musste mich daher begnügen die Temperatur zu messen, die innerhalb des Kastens, in dem die Kugel eingeschlossen
525 war, herrschte. Es konnte daher die Temperatur des Wassers eine etwas verschiedene von der angegebenen sein; aber es konnte die Temperatur des Wassers nicht steigen, während die der Umgebung sank, wie dies bei den Versuchen IX und X mit lufthaltigem Wasser z. B. der Fall hätte sein müssen; diese Versuche liegen $^1/_2$ Stunde etwa auseinander, während welcher Zeit die Temperatur der Umgebungen 0,6° C. abnahm — (eine Temperaturerhöhung wie sie die Reibung hervorbringen kann, hatte sich während dieser halben Stunde wohl ausgleichen müssen) — denn Erhöhung der Temperatur bringt Abnahme des logarithmischen Decrementes mit sich — davon überzeugten mich meine Vorversuche.

Ich goss ein Fläschchen, wie ich diese bei den Versuchen gebrauchte, voll mit siedendem Wasser, und machte in unmittelbarer Aufeinanderfolge (innerhalb $^3/_4$ Stunden) drei Bestimmungen des logarithmischen Decrementes; ich fand dasselbe:

0,054 837 9
0,058 186 5
0,061 728 4.

Nach Beendigung des Versuches hatte das Wasser noch 45,6° C.; bei 12,1° C. war das logarithmische Decrement bei demselben Fläschen 0,069 077 6.

Die beobachteten Schwankungen glaube ich dem räthselhaften Einflusse der meteorologischen Verhältnisse, deren schon Gauss[1]) erwähnt, zuschreiben zu müssen.

Ferner untersuchte ich den Einfluss, den ein grösserer oder geringerer Gehalt des Wassers an gelösten festen Theilen ausübt; ich stellte mir eine gesättigte Kochsalzlösung dar, und nahm sie zu meinen Versuchen:

1) L. c. p. 70.

I. Die gesättigte Kochsalzlösung.

Specifisches Gewicht: 1,192 23.[1])

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
22,946 4	0,077 656 8	24,2
22,964 4	0,073 329 2	24,6
22,957 6	0,076 693 2	24,7
Mittel: 22,956 1	0,075 893 1.	

Darnach ergiebt sich: 626

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 129{,}285 \quad \mathfrak{K} = 184{,}89 \quad \vartheta = 45^\circ 38' 0''.$$

II. Drei Theile gesättigter Kochsalzlösung und ein Theil Wasser.

Specifisches Gewicht: 1,131 47.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
22,961 0	0,068 631 8	24,7
22,983 2	0,062 933 6	24,6
22,952 4	0,064 430 6	24,6
Mittel: 22,965 5	0,065 332 0.	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 113{,}934 \quad \mathfrak{K} = 150{,}61 \quad \vartheta = 40^\circ 50' 33''.$$

III. Einen Theil gesättigter Kochsalzlösung und einen Theil Wasser.

Specifisches Gewicht: 1,097 01.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,015 4	0,062 669 2	23,0
23,000 4	0,063 161 8	23,2
22,997 8	0,064 141 4	23,4
Mittel: 23,004 5	0,063 324 1.	

1) Die Bestimmungen des specifischen Gewichtes sind nicht genau gemacht; die Zahlen, welche ich für dasselbe anführe, sind die Quotienten aus dem Gewichte des Wassers in das Gewicht der anderen untersuchten Flüssigkeiten, welche die Kugel fasste. Die Füllung geschah fast immer bei derselben Temperatur, doch war die Wage, deren ich mich bediente wegen des grossen Gewichtes der Kugel, keine chemische.

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 105{,}769 \quad \mathfrak{K} = 138{,}93 \quad \vartheta = 40^0\,25'\,12''.$$

IV. Einen Theil gesättigter Kochsalzlösung und drei Theile Wasser.

Specifisches Gewicht: 1,051 29.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,010 2	0,056 548 8	23,4
23,000 7	0,056 541 1	23,5
23,010 4	0,058 667 8	23,6
Mittel: 23,007 1	0,057 252 6.	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 94{,}541 \quad \mathfrak{K} = 112{,}35 \quad \vartheta = 32^0\,42'\,8''.$$

627 Wir sehen also mit zunehmendem Salzgehalte die Schwingungsdauer sich vermindern, das logarithmische Decrement wachsen; Folgen davon sind Wachsen der Grösse $\mathfrak{K}\cos\vartheta$, ebenso Wachsen des Phasenunterschiedes, sowie von $\mathfrak{K}$; alles Erscheinungen, die a priori zu vermuthen waren.

Die angewandten Salzlösungen waren mit Luft in Berührung gelassen; die Resultate sind daher mit jenen, welche die Versuche mit nicht ausgekochtem Wasser ergaben, vergleichbar.

Ausser den Salzlösungen untersuchte ich noch sehr leicht bewegliche Flüssigkeiten und zwar reinen und wasserfreien:

Schwefelkohlenstoff.

Specifisches Gewicht: 1,262 70.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
22,689 6	0,040 927 6	21,8
22,651 0	0,041 379 8	21,9
Mittel: 22,670 3	0,041 153 7.	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 65{,}747 \quad \mathfrak{K} = 80{,}242 \quad \vartheta = 34^0\,58'\,43''.$$

Ferner reinen wasserfreien

Aether.

Specifisches Gewicht: 0,715 372.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,450 0	0,029 301 4	21,5
23,443 0	0,030 405 2	21,7
Mittel: 23,446 5	0,029 353 3	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 42{,}696 \quad \mathfrak{K} = 60{,}284 \quad \vartheta = 44^0\,54'\,26''.$$

Endlich wenn nicht wasserfreien, so doch jedenfalls sehr concentrirten

Alkohol.

Specifisches Gewicht: 0,830 919.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,439 2	0,058 025 4	24,2
23,448 0	0,057 104 2	23,9
Mittel: 23,443 6	0,057 564 8.	

Darnach ergiebt sich: 628

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 93{,}968 \quad \mathfrak{K} = 156{,}39 \quad \vartheta = 53^0\,4'\,4''.$$

Die Erhöhung der Schwingungsdauer, und beim Schwefelkohlenstoff die Erniedrigung des logarithmischen Decrementes sowie des Reibungscoëfficienten, lassen sich leicht begreifen.

Ferner untersuchte ich sehr schwer bewegliche Flüssigkeiten, und zwar:

Glycerin.

Specifisches Gewicht: 1,210 69.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,469 8	0,036 662 2	24,8
23,444 6	0,030 863 4	24,8
Mittel: 23,4572	0,033 762 8.	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 49{,}955\,3 \quad \mathfrak{K} = 339{,}17 \quad \vartheta = 81^0\,31'\,49''.$$

Olivenöl.

Specifisches Gewicht: 0,907 258.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,905 2	0,022 443 8	23,1.

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 27{,}631\,6 \quad \mathfrak{K} = 313{,}58 \quad \vartheta = 84^\circ 56' 41''$$

Ferner einen überaus zähflüssigen

Zuckersyrup.

Specifisches Gewicht: 1,381 93.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,460 4	0,007 641 0	23,7.

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 2{,}627\,98 \quad \mathfrak{K} = 102{,}17 \quad \vartheta = 88^\circ 31' 34''.$$

629 Die Resultate, welche uns die dickflüssigen Substanzen liefern, sind sehr leicht zu begreifen; sie bewegen sich fast ganz mit dem Gefässe; daher ist der Reibungscoëfficient und das logarithmische Decrement klein: denn wenn auch die Reibung an derselben Fläche grösser sein muss, als bei den leichtflüssigen Substanzen, so ist die Fläche, an der sich die Flüssigkeit reibt, nur eine sehr kleine.

Ueberdies untersuchte ich den Einfluss, den feste in einer Flüssigkeit suspendirte Theilchen auf die Reibung üben; zu diesem Zwecke verdünnte ich Hühnereiweiss mit Wasser, filtrirte die Flüssigkeit und setzte Kalilösung hinzu. Ich fand für diese

Eiweisslösung.

Specifisches Gewicht: 1,016 24.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,218 2	0,073 728 4	23,0
23,148 6	0,073 682 8	21,0
Mittel: 23,183 4	0,073 705 6.	

Woraus sich ergiebt:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 123{,}891 \quad \mathfrak{K} = 137{,}51 \quad \vartheta = 44^\circ 18' 17''.$$

Hierauf emulgirte ich Oel in dieser Eiweislösung, und fand nun für die so erhaltene

Emulsion.

Specifisches Gewicht (dieselbe als Ganzes betrachtet): 1,005 04.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,305 0	0,080 643 6	21,5
23,309 4	0,076 971 2	21,6
23,303 6	0,078 452 8	21,8
Mittel: 23,306 0	0,078 689 2.	

Darnach ist:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 132{,}270 \quad \mathfrak{K} = 216{,}03 \quad \vartheta = 52^\circ 14' 48''.$$

Wir sehen also, das durch die suspendirten festen Theilchen (Oeltröpfchen mit Haptogenmembranen), die Reibung vergrössert wurde.

Endlich untersuchte ich noch einige für den Physiologen 630 wichtige Substanzen. Ich will mich begnügen diese Untersuchungen einfach anzuführen.

Blutserum (vom Rind).

Specifisches Gewicht: 1,026 00.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,141 8	0,067 080 4	23,5
23,155 6	0,071 388 0	23,6
23,145 0	0,069 077 6	23,5
Mittel: 23,147 5	0,069 182 0.	

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 115{,}802 \quad \mathfrak{K} = 159{,}83 \quad \vartheta = 43^\circ 34' 18''$$

Defibrinirtes Blut vom Rind.

Specifisches Gewicht: 1,052 89.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,288 0	0,101 780 8	24,0
23,233 2	0,092 244 4	24,0
Mittel: 23,260 6	0,097 012 6.	

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 166{,}031 \quad \mathfrak{K} = 248{,}86 \quad \vartheta = 48^\circ 9' 10''.$$

Milch.

Specifisches Gewicht: 1,026 56.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,174 2	0,070 988 6	24,0
23 145 8	0,064 940 0	24,0
Mittel: 23,160 0	0,067 964 3.	

$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 113{,}499 \quad \mathfrak{K} = 162{,}35 \quad \vartheta = 45^\circ 38' 48''.$

Die gefundenen Constanten sind nur für mein kugelförmiges Gefäss, für Wandungen von Gold und mittlere Sommertemperatur gültig.

631

B. Theoretischer Theil.

Von **H. Helmholtz.**

§ 1. Die Bewegung im Innern einer schwingenden Kugel.

Die Bewegungsgleichungen für das Innere einer tropfbar flüssigen Masse, welche der Reibung unterworfen ist, wie sie von Poisson, Navier und Stokes gleichlautend aufgestellt worden sind, sind folgende:

Es seien x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes im Innern der bewegten Wassermasse, t die Zeit, u, v, w die den Coordinataxen parallelen Componenten der Geschwindigkeit des im Punkte x, y, z zur Zeit t befindlichen Wassers, p der Druck und h die constante Dichtigkeit, ferner dP/dx, dP/dy und dP/dz die den drei Coordinataxen parallelen Componenten der äusseren Kräfte, welche auf das Innere der Wassermasse wirken, wobei u, v, w, p und P als Functionen der unabhängigen Variablen x, y, z und t dargestellt sein, so ist:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP}{dx} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - k^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{du}{dz^2}\right] \\
\frac{dP}{dy} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} - k^2\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right] \\
\frac{dP}{dz} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} - k^2\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$0 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Die Grösse k^2 ist die Reibungsconstante für das Innere der Flüssigkeit, ihr Werth also nach der Natur der Flüssigkeit und ihrer Temperatur verschieden.

In unserem Falle der schwingenden Kugel können wir nun die Schwingungen so klein machen, dass die Glieder, welche die zweiten Dimensionen der Geschwindigkeit enthalten, gegen die erste Dimension verschwinden. Von äusseren Kräften wirkt auf das Innere unserer Wassermasse nur die Schwere, deren Richtung der z-Axe parallel sein mag, im Sinne der negativen z, so dass wir setzen:

$$\frac{dP}{dz} = -g, \qquad \frac{dP}{dy} = \frac{dP}{dx} = 0. \qquad 632$$

Die Gleichungen (1) erhalten nun folgende vereinfachte Form:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{h}\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} - k^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] \cdots\cdots\cdots \\
-\frac{1}{h}\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} - k^2\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right] \cdots\cdots\cdots \\
-g - \frac{1}{h}\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} - k^2\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right] \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (1b).$$

Es sei ϱ die Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten, also:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und ψ eine Function von ϱ und t, welche der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{1}{k^2}\frac{d\psi}{dt} = \frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dann lässt sich zeigen, dass nach Elimination von p aus den Gleichungen (1b), die hieraus resultirenden Gleichungen und (1a) erfüllt werden durch folgende particuläre Integralgleichungen:

$$u = -y\psi, \quad v = x\psi, \quad w = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2a).$$

Die Form der Bewegung, welche diesen Integralgleichungen entspricht, ist so zu beschreiben, wie sich aus den Gleichungen (2a) leicht ergiebt, dass die Wassermasse in concentrische Kugelschalen zerfällt, deren jede gleichsam wie eine feste Kugelschale drehende Bewegungen um die Z-Axe ausführt; ψ ist die Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung.

Aus (2a) folgt, dass:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{yx}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}$$
$$\frac{dv}{dy} = \frac{yx}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}$$
$$\frac{dw}{dz} = 0.$$

633 Daraus ergiebt sich, dass die Gleichung (1a) durch die Annahmen (2a) erfüllt ist.

Aus den Gleichungen (1b) eliminiren wir p, indem wir die erste nach y, die zweite nach x differentiiren, und die zweite von der ersten abziehen. Das giebt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dy}\left[\frac{du}{dt} - k^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}\right)\right] - \\ &\frac{d}{dx}\left[\frac{dv}{dt} - k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{dv^2}{dz^2}\right)\right] = 0 \ldots .\end{aligned}\right\} \quad (2b)$$

und ebenso eliminiren wir p aus der ersten und dritten der Gleichungen (1b), wobei wir aber gleich bemerken wollen, dass w in (2a) gleich Null gesetzt ist, also erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\left[\frac{du}{dt} - k^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)\right] = 0 \ldots .\\ &\frac{d}{dz}\left[\frac{dv}{dt} - k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)\right] = 0 \ldots .\end{aligned}\right\} \quad (2c).$$

Setzt man nun die Werthe von u und v aus (2a) in (2b), so erhält man zunächst, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = \zeta = 2\psi + \frac{x^2+y^2}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}$$
$$\frac{d\zeta}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\frac{d^2\zeta}{dy^2}+\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right) = 0,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}&2\left[\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2}+\frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right)\right] + \\ &\frac{x^2+y^2}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2}+\frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right)\right] = 0 \ldots .\end{aligned}\right\} \quad (2e).$$

Die Gleichungen (2c) geben aber beide gemeinsam die Gleichung:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2}+\frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right)\right] = 0,$$

oder weil die hier zu differentiirende Function unmittelbar nur

von ϱ abhängt und $d\psi/dz = (z/\varrho).(d\psi/d\varrho)$ ist, folgt, indem man den Factor z/ϱ weglässt:

$$\left.\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2}+\frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right)\right] = 0 \ldots .\right\} \quad (2f)$$ 634

Mit Berücksichtigung von (2f) aber verwandelt sich die Gleichung (2e) in die Gleichung (2), nämlich:

$$\left.\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2}+\frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right) = 0 \ldots .\right\} \quad (2)$$

und wenn diese erfüllt ist, ist wie man sieht, auch (2f) erfüllt, so dass also in der That die Gleichungen (2) und (2a) sich als Integralgleichungen der Gleichungen (1a) und (1b) erweisen.

Setzen wir $\psi = \varphi e^{at}$, wobei wir unter φ eine Function von ϱ allein verstehen, die von t unabhängig ist, so liefert die Gleichung (2) für φ folgende Differentialgleichung:

$$\left.a\varphi - k^2\left(\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2}+\frac{4}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right) = 0 \ldots .\right\} \quad (3)$$

Die Gleichung (3) können wir durch zwei Reihen, die nach ganzen Potenzen von ϱ fortschreiten, nach den gewöhnlichen Regeln integriren:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = A_0\Big\{&1 + \frac{a\varrho^2}{k^2}\cdot\frac{1}{2.5} + \left(\frac{a\varrho^2}{k^2}\right)^2\frac{1}{2.4.5.7} \\ &+ \left(\frac{a\varrho^2}{k^2}\right)^3\frac{1}{2.4.6.5.7.9}\text{ etc.} + \frac{B_0}{\varrho^3}\Big\{1 + \frac{a\varrho^2}{k^2}\cdot\frac{1}{(-1).2} \\ &+ \left(\frac{a\varrho^2}{k^2}\right)^2\frac{1}{(-1)(+1).2.4} + \left(\frac{a\varrho^2}{k^2}\right)^3\frac{1}{(-1)1.3.2.4.6}\text{ etc.}\Big\}\end{aligned}\right\} \quad (3a)$$

Diese Reihen sind bequem, wenn φ für kleine Werthe der Grösse $a\varrho^2/k^2$ berechnet werden soll, für grössere Werthe derselben ist es vortheilhafter φ in folgender geschlossener Form auszudrücken. Man setze nämlich:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi = \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{e^{n\varrho}}{\varrho}\right) \\ \text{oder:}\quad &\varphi = \left(\frac{n}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^3}\right)e^{n\varrho}\end{aligned}\right\} \quad (3b)$$

so ist:

$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = \left(\frac{n^2}{\varrho^2} - \frac{3n}{\varrho^3} + \frac{3}{\varrho^4}\right)e^{n\varrho}$$ 635
$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} = \left(\frac{n^3}{\varrho^2} - \frac{5n^2}{\varrho^3} + \frac{12n}{\varrho^4} - \frac{12}{\varrho^5}\right)e^{n\varrho},$$

also:

$$a\varphi - k^2\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} - \frac{4k^2}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho} = \left[\frac{an - k^2n^3}{\varrho^2} - \frac{a - k^2n^2}{\varrho^3}\right]e^{n\varrho}.$$

Setzen wir also in dem Ausdrucke (3b):

$$n = \pm\frac{1}{k}\sqrt{a},$$

so ist die Differentialgleichung (3) durch (3b) erfüllt, und sie wird auch erfüllt durch einen Ausdruck von der Form:

$$\varphi = A\left(\frac{\sqrt{a}}{k\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^3}\right)e^{\frac{\sqrt{a}}{k}\varrho} + B\left(\frac{\sqrt{a}}{k\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^3}\right)e^{\frac{-\sqrt{a}}{k}\varrho}. \qquad (3c).$$

In unserem Falle der schwingenden Hohlkugel darf die Bewegung für $\varrho = 0$ nicht discontinuirlich werden. Dadurch bestimmt sich das Verhältniss der Constanten A und B zu einander in den beiden Ausdrücken für φ in (3a) und (3c). In (3a) wird nämlich die mit B_0 multiplicirte Reihe für $\varrho = 0$ unendlich, also muss $B_0 = 0$ sein, und der Ausdruck reducirt sich dann auf die erste Reihe. In (3c) müssen wir $B = +A$ setzen, wie man sieht, wenn man nach Potenzen von ϱ zu entwickeln anfängt, und wir haben also schliesslich für unseren Zweck folgende beiden einander gleichen Ausdrücke für φ:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{2n^3A}{3}\left\{1 + \frac{n^2\varrho^2}{2.5} + \frac{n^4\varrho^4}{2.4.5.7} + \frac{n^6\varrho^6}{2.4.6.5.7.9}\text{ etc.}\right\} = \\ &= A\frac{n}{\varrho^2}\left(e^{n\varrho} + e^{-n\varrho}\right) - \frac{A}{\varrho^3}\left(e^{n\varrho} - e^{-n\varrho}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3d)$$

worin:

$$n = +\frac{1}{k}\sqrt{a}.$$

Der letztere Ausdruck führt unmittelbar zu folgendem Ausdrucke für ψ:

$$\psi = \varphi\, e^{\alpha t} = A\frac{n}{\varrho^2}\left(e^{n\varrho + \alpha t} + e^{-n\varrho + \alpha t}\right) - \frac{A}{\varrho^3}\left(e^{n\varrho + \alpha t} - e^{-n\varrho + \alpha t}\right) \qquad (4).$$

In den Fällen unserer Beobachtung ist nun ψ von der Form:

$$\psi = \varphi\, e^{-\beta t}\cos\gamma t,$$

wir müssen also der Grösse α in den bisherigen Ausdrücken den complexen Werth:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= -\beta + i\gamma \\ i &= \sqrt{-1}\end{aligned}\right\} \qquad (4a)$$

beilegen, oder wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}m &= \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \\ -\frac{\gamma}{\beta} &= \operatorname{tang} 2\varepsilon\end{aligned}\right\} \qquad (4b)$$

so ist:

$$a = m\cos 2\varepsilon + im\sin 2\varepsilon = me^{2\varepsilon i},$$

wobei zu bemerken ist, dass der Winkel 2ε, weil seine Tangente negativ ist, grösser als ein Rechter sein muss. Der Winkel ε liegt also zwischen 45^0 und 90^0.

Daraus folgt weiter:

$$n = \frac{1}{k}\sqrt{a} = \frac{\sqrt{m}}{k}e^{\varepsilon i} = \frac{\sqrt{m}}{k}\left(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon\right).$$

Setzen wir:

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{\sqrt{m}}{k}\sin\varepsilon \\ \tau &= \frac{\sqrt{m}}{k}\cos\varepsilon\end{aligned}\right\} \qquad (4c)$$

also:

$$n = \tau + \sigma i$$

und führen die in (4a), (4b), (4c) angezeigten Substitutionen in den Werth von ψ ein, so wird:

$$\begin{aligned}\psi = \frac{A\sqrt{m}}{k\varrho^2}e^{-\beta t}&\left[e^{\tau\varrho + i(\sigma\varrho + \gamma\tau + \varepsilon)} + e^{-\tau\varrho + i(\gamma\tau - \sigma\varrho + \varepsilon)}\right] \\ -\frac{A}{\varrho^3}e^{-\beta t}&\left[e^{\tau\varrho + i(\gamma\tau + \varrho\sigma)} - e^{-\tau\varrho + i(\gamma\tau - \sigma\varrho)}\right]\end{aligned}$$

ψ ist eine complexe Grösse; ihr reeller, wie ihr imaginärer Theil für sich genommen, müssen der Differentialgleichung (2) genügen. Wir brauchen für unseren Zweck nur einen von beiden hier anzuwenden, und wollen den reellen nehmen. So wird endlich:

$$\begin{aligned}\psi = \frac{A\sqrt{m}}{k\varrho^2}&\left[e^{\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\tau\varrho - \beta\tau}\cos(\sigma\varrho - \gamma t - \varepsilon)\right] \\ -\frac{A}{\varrho^3}&\left[e^{\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho + \gamma t) - e^{-\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho - \gamma t)\right] \qquad (4d).\end{aligned}$$

Da ψ die Winkelgeschwindigkeit der schwingenden Wassertheilchen bezeichnet, so wird ihre Tangentialgeschwindigkeit $\psi\varrho$. $\sin\omega$ sein, unter ω den Winkel zwischen ϱ und der Rotationsaxe verstanden. Die Glieder, welche $\cos(\sigma\varrho + \gamma t)$ enthalten,

entsprechen einem Zuge von Wellen, welche von der Peripherie der Kugel gegen ihren Mittelpunkt laufen, und zwar mit schnell abnehmender Intensität, weil sie mit $e^{\tau\varrho}$ multiplicirt sind. Uebrigens führen dabei die Wassertheilchen Schwingungen aus, die gegen ihre Fortpflanzungsrichtung transversal sind, wie die Lichtschwingungen. Die Glieder, welche $\cos(\sigma\varrho - \gamma t)$ enthalten, entsprechen dagegen Wellen, welche vom Mittelpunkte gegen die Peripherie laufen, auch mit abnehmender Intensität, weil sie mit $e^{\tau\varrho}$ multiplicirt sind. Im Mittelpunkte selbst, werden zwar diese Glieder scheinbar unendlich gross, weil sie mit negativen Potenzen von ϱ multiplicirt sind, in Wahrheit aber heben sich die unendlich werdenden Glieder hier gegenseitig auf, wie man sieht, wenn man sich die andere Form von φ in (3d), wo es nach ganzen Potenzen von ϱ entwickelt ist, in derselben Weise zurecht macht:

$$\psi = \frac{2m\sqrt{m}}{3k^3} A e^{-\beta t}\left\{\cos(3\varepsilon + \gamma t) + \frac{m\varrho^2}{k^2}\cdot\frac{\cos(5\varepsilon+\gamma t)}{2\,.\,5} + \frac{m^2\varrho^4}{k^4}\cdot\frac{\cos(7\varepsilon+\gamma t)}{2\,.\,4\,.\quad 5\,.\,7} + \text{etc.}\right\} \tag{4e}$$

638 Da wir vorausgesetzt haben, dass keine Kräfte ausser der Schwere auf das Innere der Wassermasse wirken, und in ihrem Innern alle Werthe der Geschwindigkeit endlich und continuirlich ausfallen, so können die Kräfte, welche sie in Bewegung setzen, nur auf die äusserste Schicht wirken. Diese ist bei unseren Versuchen in der That mit dem Gefässe in Berührung, und wird von diesem durch Reibung bewegt. Wir können uns also die ganze Bewegung so vorstellen, dass von dieser Oberfläche aus Rotationswellen nach innen laufen, aber mit schnell abnehmender Intensität, und im Mittelpunkte reflectirt wieder zurückkehren. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist gleich $\gamma/\sigma = 2\sqrt{m}\cos\varepsilon$, oder wenn wir die Schwingungen der Oberfläche constante Amplitude behalten lassen, also $\beta = 0$ setzen, und $T = 2\pi/\gamma = 2\pi/m$ die Schwingungsdauer nennen:

$$\frac{\chi}{\sigma} = k\sqrt{2m} = 2k\sqrt{\frac{\pi}{T}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also von der Schwingungsdauer abhängig. Die Wellenlänge ist $2k\sqrt{\pi T}$, also nicht

wie bei den Schall- und Lichtwellen der Schwingungsdauer selbst, sondern ihrer Quadratwurzel proportional. Während die Welle eine Wellenlänge durchläuft, wird ihre Amplitude von 1 auf $e^{-\pi}$, d. h. von 1 auf $\frac{1}{535}$ verkleinert. Beispielsweise beträgt sie in den Versuchen von Piotrowski mit Wasser etwa 16 mm bei einer Schwingungsdauer von 23 Secunden. Daraus geht hervor, wie schnell sich die Bewegung in kleiner Entfernung von der Oberfläche bis zum Verschwinden schwächt. Je grösser dagegen der Reibungscoëfficient ist, desto grösser ist die Wellenlänge, und auf desto grössere Strecken pflanzt sich daher auch die Bewegung in der Flüssigkeit merklich fort.

§ 2. Bedingungen für die Oberfläche der Flüssigkeit.

Aus den theoretischen Betrachtungen der genannten Mathematiker folgt, dass die Componenten X, Y, Z der Kraft, mit welcher die bewegte Flüssigkeit auf eine oberflächliche Schicht wirkt, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die nach der 639 Flüssigkeit hin gerichtete Normale der Oberfläche mit den positiven Coordinataxen bildet, folgende Werthe für die Einheit der Fläche haben:

$$\begin{aligned} X &= hk^2\left[2\frac{du}{dx}\cos\alpha + \left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\cos\beta + \left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\cos\gamma\right] \\ Y &= hk^2\left[\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\cos\alpha + 2\frac{dv}{dy}\cos\beta + \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\cos\gamma\right] \\ Z &= hk^2\left[\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\cos\alpha + \left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\cos\beta + 2\frac{dw}{dz}\cos\gamma\right] \end{aligned} \tag{5}$$

An der Kugeloberfläche ist:

$$\cos\alpha = \frac{-x}{\varrho}, \quad \cos\beta = \frac{-y}{\varrho}, \quad \cos\gamma = \frac{-z}{\varrho};$$

daraus ergiebt sich, wenn man die Werthe von u, v, w aus (2a) hier einsetzt:

$$\left.\begin{aligned} X &= hk^2 y\frac{d\psi}{d\varrho} \\ Y &= -hk^2 x\frac{d\psi}{d\varrho} \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Diese Kraft wirkt also in Richtung der Rotationsbewegung der Oberfläche mit der Intensität:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = -hk^2 \frac{d\psi}{d\varrho}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dieser Kraft, welche das bewegte Wasser auf seine äusserste Schicht ausübt, muss nun das Gleichgewicht gehalten werden durch die Kraft, welche die Gefässwand auf die äusserste Wasserschicht ausübt. Wenn wir die Componenten der Geschwindigkeit der Gefässwand mit U, V, W bezeichnen, so ist der theoretische Ausdruck für die Componenten der Kraft, welche von der Wand auf die äusserste Wasserschicht ausgeübt werden, und die mit $-X$, $-Y$ bezeichnet werden können, da sie den Kräften der Gleichungen (5) und (5a) das Gleichgewicht halten müssen:

640
$$\begin{aligned} -X &= \frac{hk^2}{\lambda}(U-u) \\ -Y &= \frac{hk^2}{\lambda}(V-v) \\ -Z &= \frac{hk^2}{\lambda}(W-w) \end{aligned} \qquad (5b)$$

worin λ eine von der Natur der Flüssigkeit und des Gefässes abhängige Constante bezeichnet.

Setzen wir die Rotationsgeschwindigkeit des Gefässes in unserem Falle gleich Ψ, und demgemäss:

$$U = -y\Psi, \quad V = x\Psi, \quad W = 0,$$

so wird:

$$\begin{aligned} X &= hk^2 y \frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{hk^2}{\lambda} y(\Psi - \psi), \\ -Y &= hk^2 x \frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{hk^2}{\lambda} x(\Psi - \psi), \\ Z &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass sein muss:

$$\lambda \frac{d\psi}{d\varrho} = (\Psi - \psi) \ldots\ldots\} \qquad (5d)$$

als Grenzbedingung für die Oberfläche der Flüssigkeit. Diese Gleichung bezeichnet zugleich den Sinn der Constante λ. Sie ist eine Länge, welche angiebt, in welcher Entfernung jenseits der Wand die Bewegung des Wassers der der Wand gleich

sein würde, wenn $d\psi/d\varrho$ constant bliebe, wie man sieht, wenn man schreibt:

$$\Psi = \psi + \lambda \frac{d\psi}{d\varrho}.$$

Eine zweite Grenzbedingung, die im allgemeinen aufgestellt werden muss, dass die Bewegung der oberflächlichsten Flüssigkeitstheile sich der Bewegung der Oberfläche anpasse, ist in unserem Falle jedenfalls erfüllt, da alle Theilchen der Flüssigkeit wie der Wand concentrische Kreisbahnen beschreiben.

Um die Gleichung (5d) zu erfüllen, berechnen wir den 641
Werth von $d\psi/d\varrho$, welcher ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varrho} &= \frac{Am}{k^2\varrho^2} e^{-\beta t}[e^{\varepsilon\varrho}\cos(\sigma\varrho + \gamma t + 2\varepsilon) - e^{-\varepsilon\varrho}\cos(\sigma\varrho - \gamma t - 2\varepsilon)] \\ &- \frac{3A\sqrt{m}}{k\varrho^3} e^{-\beta t}[e^{\varepsilon\varrho}\cos(\sigma\varrho + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\varepsilon\varrho}\cos(\sigma\varrho - \gamma t - \varepsilon)] \\ &+ \frac{3A}{\varrho^4} e^{-\beta t}[e^{\varepsilon\varrho}\cos(\sigma\varrho + \gamma t) - e^{-\varepsilon\varrho}\cos(\sigma\varrho - \gamma t)] \ldots\ldots\} \end{aligned} \qquad (6)$$

oder zur Berechnung für kleine Werthe von $\sigma\varrho$:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{2m^2}{15k^4} Ae^{-\beta t}\Big\{ &\frac{\sqrt{m}\varrho}{k}\cos(5\varepsilon + \gamma t) + \left(\frac{\sqrt{m}\varrho}{k}\right)^3 \frac{\cos(7\varepsilon + \gamma t)}{2.} \\ &+ \left(\frac{\sqrt{m}\varrho}{k}\right)^5 \frac{\cos(9\varepsilon + \gamma t)}{2.4.7.9} \text{ etc.} \ldots\ldots\} \end{aligned} \qquad (6a).$$

Der Kürze wegen wollen wir uns den Werth von ψ für die Oberfläche der Flüssigkeit aus (4d) genommen, geschrieben denken:

$$\psi = Ce^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) \ldots\ldots\} \qquad (6e)$$

und den von $d\psi/d\varrho$ in (6) und (6a):

$$\frac{d\psi}{d\varrho} = C_1 e^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1) \ldots\ldots\} \qquad (6f)$$

wo C, C_1, δ und δ_1 Functionen von R sind, welches der Werth von ϱ an der Oberfläche der Kugel sei.

Die Grenzbedingung (5d) erfordert also, dass die Rotationsgeschwindigkeit des Gefässes folgende sei:

$$\Psi = Ce^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) + \lambda C_1 e^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1),$$

oder:

$$\begin{aligned} e^{\beta t}\Psi = [C + \lambda C_1\cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta)]\cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) \\ - \lambda C_1 \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)\sin(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta_1) \ldots\ldots\} \end{aligned} \qquad (6b)$$

oder wenn wir setzen der Kürze wegen:

642
$$\left.\begin{aligned} B^2 &= C^2 + 2\lambda C C_1 \cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta) + \lambda^2 C_1^2 \\ \operatorname{tang}\eta &= \frac{\lambda C_1 \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{C + \lambda C_1 \cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} \end{aligned}\right\} \quad (6\,c)$$

woraus folgt:

$$B = \frac{C \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{\sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta - \eta)},$$

so wird:

$$\psi = B e^{-\beta t}(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + \eta)\} \quad (6\,d)$$

Hat also die Bewegung des Gefässes den letzteren Werth, so ist die Bewegung des Wassers in demselben durch die Gleichungen (2a) und (4d) vollständig gegeben, und es sind alle Bedingungen der Aufgabe, so weit sie die Bewegung des Wassers betreffen, erfüllt.

§ 3. Bewegung des Gefässes.

Wir müssen uns schliesslich überzeugen, ob die in der Gleichung (6d) vorgeschriebene Bewegung des Gefässes den Bedingungen von Piotrowski's Versuchen genügt.

Die Kräfte, welche auf das Gefäss wirken, sind erstens die durch seine Aufhängung bedingten richtenden Kräfte. Wenn wir den Ablenkungswinkel des Gefässes von der Gleichgewichtslage mit Ω bezeichnen, sei das Moment dieser Kräfte $-f^2\Omega$, wo also nach den oben von Piotrowski angewendeten Bezeichnungen:

$$f^2 = a(G + g) + \frac{2b}{L};$$

ausserdem wirkt die Kraft der Reibung, und zwar des Wassers, deren Drehungsmoment wir P nennen wollen, und die der Luft, welche P_1 sei.

Ist also M das Trägheitsmoment des Gefässes mit dem daran befestigten Spiegel und der mitschwingenden Luft zusammengenommen, so ist:

$$M\frac{d^2\Omega}{dt^2} = -f^2\Omega + P + P_1 \ldots .\} \quad (7)$$

643 Bestimmen wir jetzt das Drehungsmoment P der Wasserreibung.

Die Kräfte, welche vom Wasser auf das Gefäss wirken, sind gleich den oben gefundenen Werthen der Kräfte, welche die bewegte Wassermasse auf ihre äusserste Schicht ausübt (Gleichung 5c). Es ist also, wenn do das Element der Oberfläche bezeichnet:

$$P = -\int(Xy - Yx)\,do = -hk^2\int(x^2 + y^2)\frac{d\psi}{d\varrho}\,do.$$

Wenn wir ω den Winkel nennen, den ϱ mit der z-Axe bildet, ist:

$$x^2 + y^2 = R^2\sin^2\omega, \qquad do = 2\pi R^2 \sin\omega\, d\omega$$

$$P = -2\pi hk^2 R^4 \frac{d\psi}{d\varrho}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\omega d\omega = -\frac{8}{3}\pi hk^2 R^4\frac{d\psi}{d\varrho}\ldots.\} \quad (7\,a)$$

oder wenn gesetzt wird:

$$\frac{8}{3}\pi hk^2 R^4 C_1 = K,$$

$$P = -Ke^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1)\ldots.\} \quad (7\,b)$$

Was den Widerstand der Luft betrifft, so zerfällt er in zwei Theile. Der eine Theil, welcher von Bewegung der Luft herrührt, so weit sie auch ohne Reibung der Oberfläche des schwingenden Apparates eintreten würde, ist unabhängig von der Schwingungsdauer, und hat, wie Bessel gezeigt hat, nur denselben Einfluss, welchen eine Vermehrung des Trägheitsmomentes haben würde. Da übrigens in unseren Versuchen das Trägheitsmoment durch die Schwingungsdauer bestimmt ist, so enthält es schon das der mitschwingenden Luft in sich. Dann aber wirkt die Luft durch ihre Reibung an der äusseren Fläche des Apparates in derselben Weise, wie das Wasser an der inneren Fläche, und bringt dadurch einen zweiten Theil des Widerstandes hervor, der, wie Stokes für schwingende Pendel gezeigt hat, von der Schwingungsdauer abhängig ist, und ebenso in Form einer periodischen Kraft erscheint, wie 644
die Wasserreibung, sodass wir setzen können:

$$P_1 = K_1 e^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_{,,})\ldots.\} \quad (7\,c)$$

Die Grösse Ω endlich in der Gleichung 7 ist dadurch gegeben, dass:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Psi = Be^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + \eta)$$

ist, daraus folgt:

$$\Omega = \frac{1}{m} Be^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t - \varepsilon + \delta + \eta) \ldots . \Big\} \quad (7\,\mathrm{d})$$

und:

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} = m\,Be^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + 3\varepsilon + \delta + \eta) \ldots . \Big\} \quad (7\,\mathrm{e}).$$

Wenn man nun aus (7b), (7c), (7d) und (7e) die Werthe in (7) einträgt, und gleichzeitig die einzelnen Glieder zerlegt in solche, welche mit $\cos(\sigma\varrho + \gamma\tau - \varepsilon + \delta + \eta)$ multiplicirt sind, und solche, welche mit dem Sinus desselben Winkels multiplicirt sind, so hat man einzeln die mit dem Cosinus multiplicirten Glieder gleich Null zu setzen, und ebenso die mit dem Sinus multiplicirten, und erhält folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Mm\,B\cos 4\varepsilon + f^2\frac{1}{m}B &= -K\cos(3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) - \\ &\quad - K_{,}\cos(3\varepsilon + \delta_{,,} - \delta) \\ Mm\,B\sin 4\varepsilon &= -K\sin(3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) - \\ &\quad - K_{,}\sin(3\varepsilon + \delta_{,,} - \delta) \end{aligned}\right\} (8)$$

Durch diese beiden Gleichungen werden schliesslich die Werthe von m und ε, oder die davon abhängigen von β und γ (Gleichungen 4b) bestimmt. Von letzteren hängt die Grösse der Schwingungsabnahme und Schwingungsdauer ab. Uebrigens ist zu bemerken, dass die Gleichungen (8), wenn sie nach m und ε aufgelöst werden sollen, ausserordentlich verwickelt sind, da das Verhältniss $K_{,}/B$ und $K_{,,}/B$, ebenso die Winkel δ, $\delta_{,}$ $\delta_{,,}$ und η wieder von ε und m und zwar meist durch transcendente Gleichungen abhängen.

645 Damit ist denn vollständig erwiesen, dass das in den Gleichungen (2a) und (4d) hingestellte particuläre Integral der hydrodynamischen Gleichungen (1) und (1a) bei passender Bestimmung der constanten Grössen allen Bedingungen unserer Aufgabe genügt.

§ 4. Berechnung der Versuche.

Bei den Versuchen ist uns ausser dem Drehungsmomente f^2 das logarithmische Decrement des Schwingungsbogens Δ und die Schwingungsdauer T gegeben. Wenn Ω_0 und Ω_1 zwei aufeinander folgende Maxima der Ablenkung nach derselben Seite hin sind, so ist:

$$\Omega_1 = \Omega_0 e^{\beta T}$$

und wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$\Delta = \log.\mathrm{nat}.\,\Omega_0 - \log.\mathrm{nat}.\,\Omega_1 = \beta T,$$

also:

$$\beta = \frac{\Delta}{T} \ldots . \Big\} \quad (9).$$

Da in dem Ausdrucke für Ω unter dem Cosinuszeichen t mit γ multiplicirt ist, so ist:

$$\gamma = \frac{2\pi}{T} \ldots . \Big\} \quad (9a).$$

Dadurch ist weiter gegeben mittelst der Gleichungen (4b):

$$m = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$$

$$\tan 2\varepsilon = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Es ist 2ε ein Winkel zwischen 90° und 180°, weil seine Tangente negativ ist.

Aus diesen müssen nun mittels der Gleichungen (8) die Reibungsconstanten k und λ berechnet werden. Da die hierin vorkommende Grösse M selbst nur aus Schwingungsversuchen mit Luftreibung genommen ist, können wir zu ihrer Elimination noch zwei ähnliche Gleichungen hinzunehmen, die sich auf die 646 Versuche mit der leeren Kugel beziehen.

Diese Rechnung ist nun ziemlich complicirt wegen der transcendenten Gleichungen, welche den Werth von ψ und $d\psi/d\varrho$ ausdrücken.

Man bringe zunächst die Gleichungen (8), indem man die unter (6c) angegebenen Werthe von B berücksichtigt, und $K_{,} = K_{,,}B\sqrt{m}$ setzt, in folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{K\cos(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)}{C\sin(\varepsilon+\delta_1-\delta)} &= Mm\cos 4\varepsilon+\frac{1}{m}f^2 \\ &\quad + K_{,,}\sqrt{m}(\cos 3\varepsilon+\delta_{,,}-\delta) \\ -\frac{K\sin(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)}{C\sin(\varepsilon+\delta_1-\delta)} &= Mm\sin 4\varepsilon \\ &\quad + K_{,,}\sqrt{m}\sin(3\varepsilon+\delta_{,,}-\delta) \end{aligned}\right\} (9\text{b})$$

Auf der rechten Seite sind nun noch näher die von der Luftreibung herrührenden mit $K_{,,}$ multiplicirten Ausdrücke zu bestimmen. In solchen Räumen, gegen deren Dimensionen die Wellenlänge der vorhandenen Luftschwingungen sehr gross ist, unterscheiden sich die Bewegungen der Luft nicht von denen einer incompressiblen Flüssigkeit. Die Luftreibung wird also im Innern der Kugel auf die schwingende Kugel einen ganz ähnlichen Einfluss haben, wie die Bewegung der eingeschlossenen Flüssigkeiten. Da übrigens ihr Einfluss sehr klein ist, und nur eine Correction für die Werthe der Wasserreibung bildet, so wird es genügen, wenn wir das grösste Glied ihres Einflusses allein berücksichtigen, indem wir $1/\sigma\varrho$, welches für die beweglichen Flüssigkeiten eine kleine Grösse ist, auch für die Luftreibung als eine solche annehmen. Dann reducirt sich in den Versuchen mit leerer Kugel der Werth von ψ an der inneren Oberfläche auf:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{A\sqrt{m}}{kR^2}e^{-\beta t+\tau R}\cos(\sigma R+\gamma t+\varepsilon) \\ \frac{d\psi}{d\varrho} &= \frac{Am}{k^2R^2}e^{-\beta t+\tau R}\cos(\sigma R+\gamma t+\varepsilon) \end{aligned}\right\} (9\text{c})$$

Da wir nun weiter für diesen Fall gesetzt haben:

$$\psi = Ce^{-\beta t}\cos(\sigma R+\gamma t+\varepsilon+\delta)$$
$$\frac{d\psi}{d\varrho} = C_1e^{-\beta t}\cos(\sigma R+\gamma t+2\varepsilon+\delta_1)$$

647 so wird in diesem Falle $\delta = \delta_1 = 0$ und:

$$C_1 = \frac{\sqrt{m}}{k}C.$$

Für die Luftreibung ist nun weiter die Constante λ der Oberflächenreibung nach den Untersuchungen von Stokes über den Luftwiderstand bei Pendelschwingungen gleich Null zu

setzen. Wenn diese gleich Null ist, wird auch $\eta = 0$ und $B = C$ und man erhält aus (7a):

$$K_1 = \frac{8}{3}\pi hk\sqrt{m}R^4B.$$

Es findet sich also für diese Reibung das Verhältniss K_1/B der Grösse $\sqrt{m}$ proportional, und nicht proportional m, wie es sein würde, wenn man, wie gewöhnlich bisher geschehen ist, die Reibung einfach der Winkelgeschwindigkeit proportional setzen würde. Die Constante $K_{,,}$, welche wir gleich $K_1/B\sqrt{m}$ gesetzt haben, wird also unabhängig von der Schwingungsdauer. Dieselbe Annahme wird nun für die Luftreibung im allgemeinen zu machen sein, denn sie bestätigt sich sowohl, wenn man aus den Gleichungen (3b) sich das zweite Integral für die Reibung an der äusseren Fläche der Kugel herleitet, als auch in den von Stokes ausgeführten Untersuchungen über die Luftreibung an Pendeln, sobald wie in unserem Falle die Dimensionen des schwingenden Körpers und seines Gehäuses gross gegen die Wellenlänge der bei der Reibung entstehenden transversalen Wellen sind. Der von der Reibung der Luft unabhängige Theil des Luftwiderstandes erscheint, wie schon bemerkt wurde, nur als eine Vergrösserung des Trägheitsmomentes.

Die Constante $K_{,,}$ müssen wir aus den Schwingungsversuchen an der leeren Kugel bestimmen. Es werden für diese Versuche die Gleichungen (8), indem wir den Winkel $\delta_{,,}$, der dem $\delta_1 - \eta$ bei der Wasserreibung entspricht, gleich Null setzen:

$$\begin{aligned} Mm_0{}^2\cos(4\varepsilon_0)+f_0{}^2 &= -K_{,,}m_0\sqrt{m_0}\cos(3\varepsilon_0) \\ Mm_0\sin 4\varepsilon_0 &= -K_{,,}\sqrt{m_0}\sin(3\varepsilon_0). \end{aligned}$$

Es sind hier die Grössen, deren Werth bei den Schwingungen der gefüllten Kugel ein anderer ist, durch den Index o unterschieden. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} Mm_0{}^2\sin\varepsilon_0 &= f_0{}^2\sin(3\varepsilon_0) \\ K_{,,}m_0\sqrt{m_0}\sin\varepsilon_0 &= f_0{}^2\sin(4\varepsilon_0) \end{aligned}\right\} (9\text{d}).$$ 648

Aus diesen beiden Gleichungen sind die Grössen M und $K_{,,}$ zu finden, und ist in (9b) ebenfalls der Winkel $d_{,,}$ zu vernachlässigen.

Bezeichnen wir nun der Abkürzung wegen die bekannten auf der rechten Seite der Gleichung (9b) stehenden Grössen durch besondere Buchstaben, setzen also:

$$F_{,} = \frac{3}{8\pi h R^4}\left\{ Mm\cos 4\varepsilon + \frac{1}{m} f^2 + K_{,,}\sqrt{m}\cos 3\varepsilon \right\}$$

$$F_{,,} = \frac{3}{8\pi h R^4}\left\{ Mm\sin 4\varepsilon + K_{,,}\sqrt{m}\sin 3\varepsilon \right\},$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} -k^2\frac{C_1}{C}\frac{\cos(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)}{\sin(\varepsilon+\delta_1-\delta)} &= F_{,} \\ -k^2\frac{C_1}{C}\frac{\sin(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)}{\sin(\varepsilon+\delta_1-\delta)} &= F_{,,} \end{aligned}\right\} \quad (9\,\mathrm{c}).$$

Hierbei ist zu bemerken, dass der Werth von $F_{,,}$ aus den Versuchen mit ziemlicher Genauigkeit zu finden ist, da er hauptsächlich von m und ε, d. h. den ganzen Werthen der Schwingungsdauer und des logarithmischen Decrements abhängt, und beide sehr genau bestimmt werden konnten.

In dem Ausdrucke, welcher $F_{,,}$ gleichgesetzt ist in (9e), hat der Winkel η einen verhältnissmässig geringen Einfluss, weil 2ε nahehin gleich einem Rechten ist, und daher nahehin:

$$\sin(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta) = \frac{1}{2}\sin 2(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta).$$

Wenn nun aber die Winkel δ_1 δ und η klein sind, wie es bei beweglichen Flüssigkeiten mit den beiden ersten wenigstens der Fall ist, so ist der doppelte Winkel rechts nahehin gleich einem Rechten, und der Sinus eines solchen Winkels ist immer wenig von Eins unterschieden.

Somit verschwindet der Einfluss des Winkels η fast ganz aus dieser Gleichung, und man hat Gelegenheit aus ihr die innere Reibungsconstante ziemlich genau zu finden, selbst wenn der Werth η ungenau gefunden worden wäre, vorausgesetzt nur, dass η klein bleibe.

649 Dagegen hängt der Werth von $F_{,}$ ab von den ziemlich kleinen Unterschieden der Schwingungsdauer. Nämlich wenn man die Luftreibung vernachlässigt, und ε gleich 45^0 annimmt, ist:

$$F_1 = \frac{3}{8\pi h R^4}\frac{M}{m}\left\{\frac{f^2}{M} - m^2\right\}.$$

Nun ist aber f^2/M gleich dem Werthe von m^2, welcher ohne Wasserreibung eintreten würde, und der aus der Schwingungsdauer der leeren Kugel berechnet werden muss. Es haben hier Unterschiede in den Hunderttheilen der Secunde bei Bestimmung der beiden Schwingungsdauern schon einen sehr namhaften Einfluss auf die Grösse der Differenz, welche selbst nur wenige Zehntel beträgt, sodass $F_{,}$ und damit der Werth von η ziemlich unsicher wird.

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zur Auflösung der Gleichungen (9e). Wir finden zunächst:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta) &= \frac{F_{,,}}{F_{,}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{k^2 C_1}{C\sin(\varepsilon+\delta_1-\delta)} &= J \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (9\,\mathrm{f}),\ (10),$$

können daraus die Sinus und Cosinus desselben Winkels, und des um 2ε verminderten Winkels finden, und erhalten somit einen Werth J des Ausdruckes:

welche Gleichung nur noch k als Unbekannte enthält.

Wenn $\sigma R = (\sqrt{m}/k)\cdot\sin\varepsilon R$ sehr gross ist, ist, wie wir gesehen in (9c):

$$\delta_1 = \delta = 0, \qquad C_1 = \frac{\sqrt{m}}{k}C,$$

also:

$$k\sqrt{m} = J\sin\varepsilon,$$

woraus ein erster angenäherter Werth für k erhalten werden kann, der dann dazu dient, C'/C, δ' und δ zu berechnen, um dann durch Gleichung (10) einen neuen genaueren Werth von k zu erhalten, und so fort, bis eine genügende Uebereinstimmung erreicht ist. Zur logarithmischen Rechnung dient folgendes System von Formeln, wenn k' den ungenaueren, k'' den genaueren Werth von k bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\delta &= \frac{\frac{k_1}{\sqrt{m}}\sin\varepsilon}{1-\frac{k_1}{\sqrt{m}}\cos\varepsilon} \\ \operatorname{tang}(\varepsilon+\delta_1-\delta) &= \frac{(\operatorname{tang}\varepsilon-\delta)}{1-\frac{3\sin\delta\sin\varepsilon}{\cos(\varepsilon-\delta)\sin^2(\varepsilon+\delta)}} \\ k_{,,} &= J\frac{\sin\varepsilon\cdot\sin^2(\varepsilon+\delta_1-\delta)}{\sqrt{m}\sin(\varepsilon-\delta)\sin(\varepsilon+\delta)} \end{aligned}\right\} \quad (10\,\mathrm{a}).$$

650

Diese Formeln sind berechnet aus den Gleichungen (4d), (6) und (10) mit Berücksichtigung der in (6e) und (6f) eingeführten Bezeichnungen. Doch sind in (4d) und (6) die mit $e^{-\varepsilon R}$ multiplicirten Glieder weggelassen, da diese bei den beweglicheren Flüssigkeiten an der Peripherie der Kugel verschwindend klein werden. Hat man endlich einen Werth von k gefunden, der beim Durchrechnen der Gleichungen (10a) kein davon verschiedenes $k_{,,}$ mehr liefert, so erhält man λ, den Gleitungscoëfficienten, aus (6e):

$$\lambda = \frac{k^2 \sin \eta}{J \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta - \eta) \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} \cdots\cdots \Big\} \quad (10b).$$

Der Winkel η wird aus dem in (9f) bei der Berechnung von J gefundenen Winkel $(3\varepsilon + \delta' - \eta - \delta)$ hergeleitet.

Bei den beweglicheren Flüssigkeiten kommt man mit zwei- bis dreimaliger Durchrechnung der Gleichungen (10a) zum Ziele. Je grösser aber der Reibungscoëfficient k ist, desto weitläufiger wird die Rechnung. Für sehr steife Flüssigkeiten würde man auch nicht mehr die mit $e^{-\varepsilon\varrho}$ multiplicirten Glieder im Werthe von ψ und $d\psi/d\varrho$ vernachlässigen dürfen. Dann würde es vortheilhafter sein, die nach Potenzen von ϱ entwickelten Ausdrücke beider Grössen zu benutzen.

§ 5. Vergleichung mit älteren Versuchen.

Es ist von vielen Seiten die Ansicht aufgestellt worden, dass die äusserste Schicht der Flüssigkeit, welche zunächst die Gefässwand berührt, dieser fest und unbeweglich anhafte, d. h. dass unser Gleitungscoëfficient λ gleich Null zu setzen sei. Dass die Flüssigkeiten mit ziemlicher Kraft an benetzten festen Körpern haften und von ihnen angezogen werden, lehren die
651 Capillarerscheinungen und die Schwierigkeit, mit der sich die dünne benetzende Schicht von dem Körper trennt, dem sie anhaftet. Aber bei den Bewegungen innerhalb eines Gefässes ist der Fall doch insofern ein anderer, als die Wand fortdauernd gleichmässig mit Flüssigkeit benetzt bleibt, und durch die Bewegung die Flüssigkeit vom festen Körper nicht überhaupt getrennt wird, sondern stets neue Flüssigkeitstheile an die Stelle derer treten, welche sich von einem Flächenelemente

der Wand trennen. Die Anziehungskraft der Wand auf die berührenden Flüssigkeitsschichten kann diese nicht verhindern längs der Wand hinzufliessen, ebensowenig, als die Anziehungskraft der Erde das Wasser hindert ihrer Oberfläche parallel zu fliessen. Um das Haften der Wandschicht zu erklären, müsste man entweder annehmen, dass Flüssigkeitsatome sich oberflächlich zwischen die des festen Körpers einfügen, wie dies etwa bei Wänden aus aufquellenden thierischen Membranen der Fall sein könnte, oder dass die Reibung zwischen dem Wasser und den Wandtheilen unendlich gross sei, verglichen mit der im Innern der Flüssigkeit.

Schon ältere Versuche scheinen dafür zu sprechen, dass sowohl Fälle vorkommen, in denen λ gleich Null ist, als solche, wo es von Null verschieden ist. Unter den von Piotrowski ausgeführten Versuchen spricht direct dafür der mit der innen versilberten Glasflasche, welcher zeigte, dass nach der Versilberung der Einfluss der Reibung auf die Schwingungen geringer war als vorher, wonach λ für die Berührung von Wasser mit Silber einen grösseren Werth haben muss, als für die Berührung von Wasser mit Glas.

Dafür dass λ bei der Berührung von Wasser mit glatten und gereinigten Glasflächen gleich Null sei, sprechen namentlich die Versuche von Poiseuille an gläsernen Capillarröhren. Wenn die Röhren lang genug sind, dass in dem grössten Theile derselben das Wasser sich nur der Axe der Röhre parallel fortbewegt, welche selbst der x-Axe parallel sein mag, können wir $v = w = 0$ setzen. Dann folgt aus der Gleichung (1a), dass $du/dx = 0$, d. h. dass u nach x constant, und nur von y und z abhängig sei.

Wir nehmen ferner an, dass die Geschwindigkeit des Stromes der Zeit nach constant sei, also auch $du/dt = 0$.

Ferner wenn auf die Flüssigkeit im Innern der Röhre keine äusseren Kräfte wirken, also $P = 0$, folgt aus den zwei letzten der Gleichungen (1), dass $dp/dy = dp/dz = 0$, also p 652
nur von x abhängig sei, nicht aber von y oder z. Darnach reducirt sich die erste Gleichung auf:

$$-\frac{1}{h}\frac{dp}{dx} = -k^2\left[\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right]. \cdots\cdots \Big\} (11).$$

Ist die Röhre ein Cylinder von kreisförmigem Querschnitt, dessen Axe mit der der x zusammenfällt, so wird die Bewegung rings um die Axe symmetrisch sein müssen, und wir können daher, wenn wir $z^2 + y^2 = r^2$ setzen, u als eine Function von r allein betrachten, während p von r unabhängig ist. Es müssen also die Ausdrücke beider Seiten in Gleichung (11) sowohl von x als von r unabhängig sein, und wenn wir mit b eine Constante bezeichnen, können wir setzen:

$$\frac{1}{h}\frac{dp}{dx} = -bk^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \quad (11a),$$

so wird Gleichung (11):

$$-b = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr},$$

oder:

$$-br = r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = \frac{d}{dr}\left[r\frac{du}{dr}\right],$$

$$-\frac{1}{2}br^2 + c = r\frac{du}{dr},$$

$$-\frac{1}{2}br + \frac{c}{r} = \frac{du}{dr},$$

$$-\frac{1}{4}br^2 + c\log r + C = u.$$

In dieser Integralgleichung muss c offenbar gleich Null sein, weil sonst u für $r = 0$ unendlich gross wird. Es wird also:

$$u = C - \frac{1}{4}br^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \quad (11b).$$

Die Grenzbedingung für die oberflächlichste Wasserschicht wird nun, da die Geschwindigkeit U der Wand selbst gleich Null zu setzen ist, nach den Gleichungen (5) und (5b) an der Oberfläche:

653
$$X = -hk^2\frac{du}{dr} = h\frac{k^2}{\lambda}u,$$
$$Y = Z = 0,$$

also:

$$\lambda\frac{du}{dr} = -u,$$

$$\frac{1}{2}\lambda bR = C - \frac{1}{4}bR^2.$$

Wenn wir den Radius der Röhre mit R bezeichnen, und nun den hier gefundenen Werth von C in (11b) substituiren:

$$u = \frac{b}{4}\left[R^2 + 2\lambda R - r^2\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \quad (11c).$$

Wenn wir die Wassermasse Q bestimmen, welche in einer Secunde durch den Querschnitt der Röhre läuft, so ist:

$$Q = 2\pi h\int_0^R urdr = \frac{\pi bh}{8}\left[R^4 + 4\lambda R^3\right] \ldots\ldots \Big\} \quad (11d).$$

Aus der Gleichung (11a) folgt weiter, wenn wir sie integriren und die Länge der Röhre mit L, den Druck am Anfang mit p_o, den am Ende mit p_1 bezeichnen, dass:

$$\frac{1}{h}(p_0 - p_1) = bk^2L.$$

Indem wir hieraus den Werth von b nehmen und in (11d) substituiren, folgt:

$$Q = \frac{\pi(p^o - p_1)}{8k^2L}\left[R^4 + 4\lambda R^3\right] \ldots\ldots \Big\} \quad (12).$$

Poiseuille[1]) giebt folgende Formel für Q, in der wir die Intensität der Schwere (9808 mm) mit g und das specifische Gewicht des Wassers bei 10° mit h_0 bezeichnen:

$$Q = K\frac{(p_0 - p_1)\cdot R^4}{gh_0L} \ldots\ldots\ldots \Big\} \quad (12a).$$

worin der Coëfficient K als Function der Temperatur $\mathfrak{T}$, diese 654
in Centesimalgraden ausgedrückt, folgenden Werth hat:

$$K = 16{,}135\,282\,(1 + 0{,}033\,679\,3\,\mathfrak{T} + 0{,}000\,220\,993\,6\,\mathfrak{T}^2)\Big\} \quad (12b).$$

Der Druck P ist bei ihm durch eine Wassersäule von 10°, deren Länge in Millimetern gemessen ist, ausgedrückt, daher wir hier setzen mussten:

$$h_0 gP = (p_0 - p_1).$$

Wenn wir die theoretische Formel (12) mit der empirischen (12a) vergleichen, ergiebt sich, dass für Poiseuille's Versuche,

1) Mémoires des savants étrangers. IX. p. 532.

in denen sich Wasser und Glas berührten, $\lambda = 0$ gesetzt werden muss. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{8k^2} &= \frac{K}{gh_0}, \\ k^2 &= \frac{\pi g h_0}{8K} \cdot \cdots \end{aligned}\right\} \quad (12c)$$

wonach die Constante k^2 in Einheiten, welche Quadratmillimeter dividirt durch Secunden sind, für jede Temperatur des destillirten Wassers folgendermassen in Ziffern ausgedrückt werden kann:

$$\left.k^2 = \frac{1{,}7790}{1 + 0{,}033\,679\,3\,T + 0{,}000\,220\,993\,6\,T^2} \cdot \cdots\right\} \quad (12d).$$

Girard[1]) hat mit etwas weiteren Röhren von Kupfer Versuche angestellt.

Die weiteste Röhre, für die Poiseuille sein Gesetz bestätigt hat, war von 0,65 mm Durchmesser und 383,8 mm Länge. Die engste, welche Girard gebraucht hat, war von 1,83 mm Durchmesser und bis 1790 mm Länge. Die Ausflussgeschwindigkeit fand sich hier noch der Länge und dem Drucke proportional. Allerdings ist hier schon zu bezweifeln, ob Poiseuille's Gesetz an Glasröhren sich bis zu dieser Grenze streng erwiesen haben würde, aber gross würde die Abweichung immer noch nicht haben sein können, auch würde dieser Umstand die entgegengesetzte Abweichung haben herbeiführen müssen von der, die sich wirklich vorfindet.

655 Es findet sich nämlich in der Metallröhre die Geschwindigkeit merklich grösser, als sie nach Poiseuille's Formel in einer Glasröhre hätte sein sollen.

Unter den Versuchen von Girard mit Glasröhren findet sich einer, wo die Dimensionen denen des engeren Metallrohres ziemlich ähnlich sind. Das Glasrohr hatte einen Durchmesser von 0,767 mm, eine Länge von 939 mm. Bei dem Drucke einer Wassersäule von 182,4 mm und 0° Temperatur geschah die Entleerung von einem Viertel Litre in 1036 Secunden.

1) Mémoires de l'Institut 1813—1815. p. 249.

Nach Poiseuille's Formel wären unter den angegebenen Umständen 976 Secunden nöthig gewesen. Die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung kann leicht durch einen Fehler von $\frac{1}{100}$ mm in Messung des Durchmessers der Röhre, oder durch Ellipticität derselben entstanden sein, oder sie rührt daher, dass die Röhre schon zu weit war, um sich dem Gesetze der Capillarröhren streng zu fügen. Jedenfalls ist für die Glasröhre die Differenz noch eine kleine.

Dagegen brauchte $\frac{1}{4}$ Liter Wasser bei 0°,5, und einem Wasserdruck von 100 mm nur 624,5 Secunden Zeit, um durch eine kupferne Röhre von 1,83 mm Durchmesser und 1790 mm Länge zu fliessen, während Poiseuille's Formel hier mehr als das Vierfache der Zeit, nämlich 2 949,3 Secunden fordern würde.

Für dieselbe kupferne Röhre fand Girard in einer Reihe von Versuchen das Product:

$$\frac{g D H}{4 L u} = 2{,}8367,$$

(g die Intensität der Schwere, D der Durchmesser, H die Wasserdruckhöhe, L die Länge der Röhre, u die mittlere Geschwindigkeit, alles auf Millimeter reducirt). Wenn wir die Zahl 2,8367 mit e bezeichnen, wird in unseren Maassen ausgedrückt:

$$e = \frac{\pi R^3 (p_0 - p_1)}{2 L Q}.$$

Dies mit Gleichung (7) verglichen, zeigt dass

$$\lambda = \frac{k^2}{e} - \frac{1}{4} R.$$

Wenn wir aus Poiseuille's Versuchen den Werth von k^2 656 entnehmen, erhalten wir für die kupferne Röhre $\lambda = 0{,}3984$ mm.

Bei der weiteren kupfernen Röhre von Girard von 2,96 mm Durchmesser wird die Anwendung von Poiseuille's Formel schon sehr bedenklich; dieselbe Rechnung durchgeführt giebt hier einen viel kleineren Werth von λ, nämlich 0,111 mm. Diese Abweichung könnte davon herrühren, dass die Gesetze des linearen Fliessens hier nicht mehr passen. Dabei bürgt aber auch nichts für die gleiche Beschaffenheit der inneren

Oberfläche beider Röhren. Vermuthlich waren dieselben in ihrem Innern mit einer Oxydschicht bedeckt, da es nicht möglich sein möchte, das Innere so enger Röhren, welche häufig mit Wasser in Berührung kommen, metallisch polirt zu erhalten.

Aus Piotrowski's Versuchen mit ungekochtem Wasser habe ich die beiden Coëfficienten nach der angegebenen Methode berechnet und erhalten:

$$k = 1{,}1858$$
$$\lambda = 2{,}3534 \text{ mm},$$

während sich für die Temperatur von 24,5°, welche die mittlere der Versuche war, aus Poiseuille's Bestimmungen ergiebt:

$$k = 0{,}952\,06.$$

Das Verhältniss des zweiten zum ersten Werthe von k ist wie 0,804 56 : 1, also nahe wie 4 : 5. Dass die Constante λ an der polirten Goldfläche beträchtlich grösser ist, als an den vielleicht oxydirten Kupferflächen in Girard's Versuchen, erscheint nicht als unwahrscheinlich. Auch benetzt in der That das Wasser die Goldfläche nur schwer und unvollkommen. Die Phasendifferenz zwischen der Bewegung des Gefässes und der anliegenden Flüssigkeitsschicht beträgt bei diesen Versuchen 25° 15″ oder 1,616 Secunden. Um übrigens deutlich zu machen, einen wie grossen Einfluss kleine Schwankungen der beobachteten Schwingungsdauer auf die gefundenen Werthe der Constanten in solchen Fällen haben, wo λ verhältnissmässig gross ist, habe ich vorausgesetzt, dass die Schwingungsdauer der leeren Kugel T_0, deren Beobachtungswerthe unter den benutzten Elementen verhältnissmässig die grössten Schwankungen zeigen, unbekannt sei, bekannt aber ihr logarithmisches
657 Decrement, und habe dann den Werth von k aus Poiseuille's Versuchen entnommen, und damit die Formeln rückwärts durchgerechnet, indem ich λ und T_0 zu bestimmen suchte. Es fand sich $T_0 = 24{,}429$, während das Mittel der Beobachtungswerthe 24,509 beträgt, der kleinste unter den beobachteten Werthen aber 24,401 0 noch unter dem berechneten Werthe liegt. Dabei wird die Phasendifferenz zwischen dem Gefässe und der äussersten Wasserschicht 12° 42′ und $\lambda = 0{,}715\,45$.

Wenn dagegen η_i klein ist, haben seine Grösse und die Differenzen der Schwingungsdauer fast gar keinen Einfluss auf die Bestimmungen von k. Es ist schon vorher bemerkt, dass die in den Gleichungen (9e) vorkommende Constante F_i hauptsächlich abhängt von den Differenzen der Schwingungsdauer, die andere F_{ii} dagegen von den logarithmischen Decrementen. Nehmen wir F_i als unbekannt an, und bestimmen die Grösse I, welche zur Berechnung von k dient, aus F_{ii} so ist:

$$I = \frac{k^2 C_1}{C \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} = \frac{2 F_{ii}}{\cos[4\varepsilon + 2(\delta_1 - \eta - \delta)] - \cos 2\varepsilon}.$$

Nun ist in den Versuchen mit Wasser $[4\varepsilon + 2\delta_1 - 2\delta - 180°]$ $= 13° 41'$ und der Cosinus dieses Winkels ist ungefähr gleich $\frac{34}{35}$. Dagegen ist $\cos 2\varepsilon$ eine sehr kleine Grösse etwa $\frac{1}{117}$ und kann hier vernachlässigt werden. Wenn nun 2η von 0 bis 13° 41′ wächst, so steigt der erste Cosinus von $\frac{34}{35}$ auf 1, und wenn 2η weiter wächst bis zur doppelten Grösse von 13° 41′, so sinkt der Cosinus wieder bis auf $\frac{34}{35}$. Erst von da ab verändert sich nun mit steigendem η_i der Cosinus beträchtlicher, also wird auch in der Berechnung der Werth von I, und der diesem nahe proportionale von k keine grösseren Veränderungen erleiden, so lange η_i unter der Grösse von 13° 41 bleibt. Daraus geht hervor, dass die von Piotrowski ausgeführten Messungen für die leichter beweglichen Flüssigkeiten gute Werthe für k liefern werden, selbst wenn es nicht gelingen sollte, die Schwingungsdauer viel genauer festzustellen, als bisher geschehen ist, sobald man sie anwendet, wo die Flüssigkeiten an den Gefässen fester anhaften.

Unter den untersuchten Flüssigkeiten kommen zwei vor, für welche die Werthe von η_i und λ so klein sind, dass sie in die Beobachtungsfehler fallen, und wobei vielleicht ein vollständiges Haften der Flüssigkeit an der Metallfläche stattfindet. Diese sind Alkohol und Aether. Die berechneten Werthe sind:

	Alkohol	Aether	Schwefelkohlenstoff
Innerer Reibungscoëfficient k	1,3754	0,59213	0,53401
Oberflächlicher Gleitungscoëfficient λ .	0,1096	0,1243	0,4430
Phasenunterschied zwischen Oberfläche der Flüssigkeit und dem Gefässe . .	1°,37′	4°,7′	13°,39′10″
Temperatur	24°,05	21°,6	21°,85

658

Dass der Alkohol, namentlich der nicht ganz wasserfreie, schwerer fliesst als Wasser, also einen grösseren inneren Reibungscoëfficienten haben muss, ergiebt sich schon aus den Versuchen von Poiseuille. Der Aether und Schwefelkohlenstoff dagegen zeigen ihrer Leichtbeweglichkeit entsprechend einen viel kleineren Werth von k. Das Haften des Alkohols und Aethers an den Metallflächen zeigt sich entsprechend bei den gewöhnlichen Benetzungserscheinungen, sie verhalten sich darin anders als das Wasser, welches an der Goldfläche schwer haftet.

Bei den übrigen wässerigen Flüssigkeiten zeigt die Vergleichung der von Piotrowski berechneten Winkel ϑ, wenn man sie mit den Verhältnissen beim Wasser und Alkohol vergleicht, dass eine ziemlich bedeutende Gleitung stattfand. Ich habe es desshalb unterlassen, die ziemlich mühsame Rechnung für sie durchzuführen, weil den Resultaten doch keine grosse Genauigkeit beizulegen war.

So bestätigt sich durch die hier vorliegenden Versuche, dass die chemische Beschaffenheit der Wand auf die Bewegung der Flüssigkeiten nicht in allen Fällen einflusslos ist. Was den Zahlenwerth der Reibungsconstante betrifft, so widersprechen sie wenigstens nicht denen von Poiseuille, und es scheinen die Bedingungen gefunden zu sein, welche künftig erfüllt werden müssen, um auf dem eingeschlagenen Wege eine strenge Uebereinstimmung der Theorie mit den Thatsachen nachweisen zu können.

XII.

Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. S. 1—7; aus der Sitzung vom 30. October 1868. Das Manuscript wurde am 5. März 1869 eingereicht.

Hr. Alexis Schklarewsky, der im letzten Sommer im 1
hiesigen physiologischen Laboratorium eine Reihe von Versuchen über die Bewegungen und die Vertheilung feiner suspendirter fester Körperchen in Capillarröhren angestellt hat, hatte dabei gefunden, dass nicht nur in capillaren Röhren mikroskopisch kleine Körperchen immer gegen die Mitte des Stromes hinstreben, sondern dass dasselbe sich auch an viel weiteren Röhren von 1 bis 5 cm Durchmesser zeigt. Eine Kugel aus Wachs, wenig schwerer als Wasser, fällt in einer verticalen mit Wasser gefüllten Röhre der Art immer so, dass sie von den Wänden gleichsam abgestossen wird, und der Mitte des Cylinders zueilt.

Eine eben solche Kugel, welche durch einen schwachen aufwärts gehenden Wasserstrom am Sinken gehindert wird, stellt sich in die Mitte der Röhre ein, und wenn man durch Neigen und Schütteln der Röhre sie der Wand nähert, bewegt sie sich doch, sobald man damit aufhört, wieder zur Mitte der Röhre. Das erstere Phänomen steht in auffallendem Gegensatz zu einem Theorem von W. Thomson[1]), wonach ein Körper, der in einer nicht reibenden Flüssigkeit nahe einer senkrechten Wand fällt, von dieser angezogen wird, und zu ihr hineilt. Das Letztere geschieht nun auch wirklich im Wasser, wenn man

1) Natural Philosophy, Oxford. 1867. Vol. I. §. 332.

schwerere Kugeln, z. B. grobes Bleischrot, in einem verticalen Cylinder fallen lässt. Diese fallen schneller als die oben genannten Wachskugeln, und dadurch erhalten diejenigen Druckunterschiede, welche vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängen, grösseren Einfluss. Man hört in der That eine solche Kugel, die man in der Nähe der Wand eines mit Wasser gefüllten verticalen Cylinders fallen lässt, mehrmals an die Wand anschlagen, ehe sie den Boden erreicht.

Es war daher zu vermuthen, dass die bei geringeren Geschwindigkeiten beobachteten Abweichungen vom Einfluss der
2 Reibung herrühren möchten. Es schien sich auf die Erscheinungen die in engen Röhren und in weiten Röhren bei geringen Geschwindigkeiten beobachtet wurden, im allgemeinen die Regel anwenden zu lassen, dass die schwimmenden Körper sich definitiv nur an solchen Orten der Flüssigkeit hielten, wo ihre Anwesenheit die geringste Vermehrung der Reibung der Flüssigkeit hervorbrachte, und in diesem Sinne stellte ich deshalb eine theoretische Untersuchung an, indem ich hoffte, dass die Berücksichtigung nur der Glieder erster Dimension der als klein vorausgesetzten Geschwindigkeiten in den hydrodynamischen Gleichungen genügen würde, um die Erklärung der gedachten Erscheinungen zu geben.

Diese Untersuchung ergab nun allerdings insofern ein Resultat, als sich nachweisen liess, dass bei verschwindend kleinen Geschwindigkeiten und stationärem Strome die Strömungen in einer reibenden Flüssigkeit sich so vertheilen, dass der Verlust an lebendiger Kraft durch die Reibung ein Minimum wird, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten längs der Grenzen der Flüssigkeiten als fest gegeben betrachtet werden.

Auch liess sich für das Gleichgewicht schwimmender Körper in einer solchen Flüssigkeit eine Erweiterung dieses Theorems aufstellen. Nämlich: ein schwimmender Körper ist im Gleichgewicht in einer reibenden, in langsamem stationärem Strome fliessenden Flüssigkeit, wenn die Reibung im stationären Strome ein Minimum ist auch für den Fall, dass man längs der Oberfläche des schwimmenden Körpers die Werthe der Geschwindigkeiten der Wassertheilchen so variirt, wie sie verändert werden würden, wenn eine der verschiedenen möglichen Bewegungen des Körpers factisch einträte.

Dieser letzte Satz erlaubt nun leider keine directe Anwendung auf die von Hrn. Schklarewsky beobachteten Erscheinungen, wie ich gehofft hatte, vielmehr habe ich mich später überzeugt, dass dieselben ohne Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Geschwindigkeiten nicht zu erklären seien. Da jedoch die eben hingestellten Sätze an sich von Interesse sind, erlaube ich mir hier ihren Beweis zu veröffentlichen.

§ 1. Es seien die den rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z parallelen Componenten der Geschwindigkeit des im Punkte (x, y, z) befindlichen Flüssigkeitstheilchens beziehlich u, v, w, der Druck ebenda p, die Dichtigkeit h. Die Componenten der äusseren im Punkte (x, y, z) auf die Einheit der Flüssigkeitsmasse wirkenden Kräfte seien dV/dx, dV/dy, dV/dz.

Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit incompressibel sei, 3
und dass die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit und ihre Differentialquotienten hinreichend klein seien, um ihre Quadrate und Producte in den Bewegungsgleichungen vernachlässigen zu können. Die hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dV}{dx} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} - k^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] \\
\frac{dV}{dy} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} - k^2\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right] \\
\frac{dV}{dz} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} - k^2\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \ldots\ldots\right\} \quad (1a)$$

An der Oberfläche der Flüssigkeit wollen wir die Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale dieser Fläche mit den positiven Coordinataxen bildet, mit α, β, γ bezeichnen, und die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf das Flächenelement $d\omega$ ihrer Grenzfläche ausübt, beziehlich mit:

$$(p\cos\alpha + X)\,d\omega, \quad (p\cos\beta + Y)\,d\omega, \quad (p\cos\gamma + Z)\,d\omega.$$

Diese letzteren Grössen haben folgende Werthe:

$$X = -hk^2\left[2\frac{du}{dx}\cos\alpha + \left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\cos\beta + \left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\cos\gamma\right]$$
$$Y = -hk^2\left[\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\cos\alpha + 2\frac{dv}{dy}\cos\beta + \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\cos\gamma\right] \quad (1b)$$
$$Z = -hk^2\left[\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\cos\alpha + \left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\cos\beta + 2\frac{dw}{dz}\cos\gamma\right]$$

Wo die Flüssigkeit feste Körper berührt, die sie vollkommen benetzt, haftet sie an diesen fest, und die oberflächlichen Flüssigkeitstheilchen theilen dann die Bewegung dieser Körper. Wir wollen uns im folgenden auf die Betrachtung dieses Falles beschränken, weil er der gewöhnlichere und einfachere ist. Die Componenten der äusseren Kräfte, welche die festen Körper zu bewegen streben, seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und die unendlich kleinen Verschiebungen ihrer Angriffspunkte parallel den x, y, z, welche bei irgend einer möglichen Bewegung des Systems eintreten können, seien δu, δv, δw, die entsprechenden Verschiebungen der Oberflächenpunkte des Körpers δu δv, δw, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes für die den festen Körper berührenden Theile der Oberfläche:

$$\Sigma[\mathfrak{X}\delta u + \mathfrak{Y}\delta v + \mathfrak{Z}\delta w] + \int(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\,d\omega + \int p(\cos\alpha\,\delta u + \cos\beta\,\delta v + \cos\gamma\,\delta w)\,d\omega = 0 \quad (1c)$$

worin die Summe auf alle Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und das Integral auf die ganze Oberfläche des betreffenden Körpers zu beziehen ist.

Wenn die Grenzfläche irgend wo durch die Flüssigkeit selbst gezogen gedacht ist, sind unter $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ die Kräfte zu verstehen, welche die jenseits liegende Wassermasse auf die Grenzfläche ausübt.

An einer freien Oberfläche sind:

$$\mathfrak{X} = -\mathfrak{P}\cos\alpha, \qquad \mathfrak{Y} = -\mathfrak{P}\cos\beta, \qquad \mathfrak{Z} = -\mathfrak{P}\cos\gamma,$$

wo $\mathfrak{P}$ den ausserhalb der Flüssigkeit herrschenden Druck bezeichnet.

§ 2. Wir wollen zunächst den Verlust an lebendiger Kraft bestimmen, den die Reibung herbeiführt in einem von Flüssigkeit erfüllten Raume S. Zu dem Ende multipliciren wir die erste der drei Gleichungen (1) mit u, die zweite mit v, die dritte mit w, addiren sie alle drei, und addiren schliesslich zur Summe noch die Gleichung welche aus (1a) fliesst:

$$o = -k^2\left\{u\frac{d}{dx}\left[\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right] + v\frac{d}{dy}\left[\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right] + w\frac{d}{dz}\left[\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right]\right\}$$

Die so gewonnene Gleichung integriren wir über den Raum S nach den von Green und Gauss für solche Fälle angewendeten partiellen Integrationsmethoden und mit Berücksichtigung der Gleichungen (1b). Wir erhalten:

$$h\iiint\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}+w\frac{dw}{dt}\right)dx\,dy\,dz =$$
$$\int hV(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,d\omega - \int[(X+p\cos\alpha)u + (Y+p\cos\beta)v + (Z+p\cos\gamma)w]\,d\omega - Q\ldots.\} \quad (2)$$

worin Q folgendes über den Raum S ausgedehntes Integral bezeichnet:

$$Q = hk^2\iiint\left[2\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + 2\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)^2\right]dx\,dy\,dz \quad (2a)$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung (2) mit dt multiplicirt denkt, so bedeutet das Integral links vom Gleichheitszeichen die Zunahme der lebendigen Kraft in der den Raum S füllenden Flüssigkeitsmasse während des Zeittheilchens dt, das erste Integral rechts bezeichnet denjenigen Theil dieser Zunahme, welcher durch die Arbeit der äusseren Kräfte, die auf das Innere der Wassermasse wirken, geleistet worden ist. Das zweite Integral rechts, welches nach der Gleichung (1c) gleich dem Ausdrucke:

$$\Sigma[\mathfrak{X}u\,dt + \mathfrak{Y}v\,dt + \mathfrak{Z}w\,dt]$$

ist, wo u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten für die Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnen, misst die Arbeit, welche die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, die direct oder indirect auf die

Oberfläche der Flüssigkeit wirken, im Zeittheilchen dt geleistet haben. Daraus folgt, dass Q diejenige Menge lebendiger Kraft bezeichnet, welche durch die Reibung im Innern der Flüssigkeit vernichtet, das heisst in Wärme verwandelt worden ist.

Bezeichnen wir die lebendige Kraft der Flüssigkeit mit L, die Arbeit der äusseren Kräfte mit P, also:

$$P = h\int V(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,d\omega + \Sigma(\mathfrak{X}\mathfrak{u} + \mathfrak{Y}\mathfrak{v} + \mathfrak{Z}\mathfrak{w}),$$

so können wir die Gleichung (2) schreiben:

$$\frac{dL}{dt} = P - Q \ldots\ldots \} \tag{2b}$$

§ 3. Wir wollen jetzt nachweisen, dass bei stationärem Strome der Ausdruck:

$$P - \tfrac{1}{2}Q$$

ein Minimum wird. Wir beschränken uns dabei auf die gewöhnlich vorkommende Form der Grenzbedingung, dass nämlich, wo die Flüssigkeit einen festen Körper berührt, ihre oberflächlichen Theilchen fest an diesem haften. Wo also die Flüssigkeit eine feste Wand berührt, sei diese nun unbewegt, oder habe sie eine vorgeschriebene Bewegung, sind die Werthe von u, v, w gegeben, und ihre Variationen gleich Null. Dasselbe wird vorausgesetzt an denjenigen Theilen der Grenzfläche des Raumes S, wo die Flüssigkeit ein- und ausströmt. Dagegen können an der Oberfläche beweglicher schwimmender Körper und an einer freien Oberfläche Variationen von u, v, w und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ eintreten, welche den Bewegungsbedingungen der etwa berührenden festen Körper entsprechen.

Da die Flüssigkeit als incompressibel angenommen wird, muss ausserdem die Gleichung (1a) überall erfüllt sein. Die Bedingung des Minimum wird demnach:

$$o = \delta P - \tfrac{1}{2}\delta Q + \delta\iiint \lambda\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) dx,\, dy,\, dz \ldots\ldots \} \tag{3}$$

worin λ eine beliebige Function der Coordinaten bezeichnet.

Wenn man durch partielle Integration die Differentialquotienten von δu, δv, δw entfernt, erhält man:

1) Für das Innere:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dx} &= hk^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] \\ \frac{d\lambda}{dy} &= hk^2\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right] \\ \frac{d\lambda}{dz} &= hk^2\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

2) Für die Oberfläche mit Benutzung der in den Gleichungen (1b) gegebenen Definitionen von X, Y, Z:

$$\left.\begin{aligned} o = \int\{&[(hV+\lambda)\cos\alpha + X]\,\delta u \\ &+ [(hV+\lambda)\cos\beta + Y]\,\delta v + [(hV+\lambda)\cos\gamma + Z]\,\delta w\}\,d\omega \\ &+ \Sigma\{\mathfrak{X}\,\delta\mathfrak{u} + \mathfrak{Y}\,\delta\mathfrak{v} + \mathfrak{Z}\,\delta\mathfrak{w}\} \end{aligned}\right\} \tag{3b}$$

In dieser letzteren Gleichung sind die Variationen δu, δv, δw den vorgeschriebenen Bewegungsbedingungen der berührenden festen Körper unterworfen.

Wenn wir nun die neue Bezeichnung einführen:

$$\lambda = \mathfrak{p} - hV$$

so bekommen die Gleichungen (3a) und (3b) genau dieselbe Form, wie die Gleichung (1) und (1c) mit Berücksichtigung von (1b). Der einzige Unterschied der bestehen bleibt, ist der, dass in den letzteren die Grösse p in (3a) und (3b) dagegen statt dieser die Grösse $\mathfrak{p}$ vorkommt.

Jede Lösung der Gleichung 3 wird also Werthe von u, v, w, $\mathfrak{p}$ geben, die, statt u, v, w, p in die Gleichungen (1), (1a), (1b), (1c) gesetzt, diesen genügen.

Einen stationären Strom wird diese Art der Bewegung aber nur dann geben, wenn längs der freien und der verschiebliche Wände berührenden Theile der Oberfläche der Flüssigkeit überall:

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0,$$

d. h. wenn diese Theile der Oberfläche bei der Bewegung ihre Lage nicht ändern, sondern sich entweder gar nicht, oder nur in sich selbst verschieben.

Uebrigens folgt noch aus der Gleichung (2b) für den stationären Strom, wo u, v, w von der Zeit t unabhängig sind, dass

$$P = Q,$$

und da P gleich Null wird, wenn u, v, w rings an der Ober-

fläche gleich Null sind, Q aber eine Summe von lauter Quadraten
7 ist, welche nicht Null werden kann, ohne dass alle ihre einzelnen Summanden gleich Null werden: so müssen, wenn u, v, w längs der Oberfläche gleich Null sind, auch überall im Innern die folgenden Grössen gleich Null sein:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz} = 0$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = 0.$$

Deren Integralgleichungen sind:

$$u = a + fy - gz \qquad v = b + hz - fx \qquad w = c + gx - hy.$$

Die willkürlichen Constanten a, b, c, f, g, h dieser Gleichungen müssen alle gleich Null sein, wenn u, v, w längs der ganzen Oberfläche des Raumes S gleich Null sein sollen; folglich müssen diese Grössen auch in seinem Innern gleich Null sein.

Daraus folgt weiter, dass nicht zwei Systeme Grössen u_0, v_0, w_0, p_0 und u_1, v_1, w_1, p_1 existiren können, welche den Gleichungen (1) und (1a) genügen, und für welche überall an der Grenzfläche des Raumes S:

$$u_1 - u_0 = v_1 - v_0 = w_1 - w_0 = 0$$

wäre, ohne dass gleichzeitig überall im Innern:

$$u_1 - u_0 = v_1 - v_0 = w_1 - w_0 = 0$$
$$p_1 - p_0 = \text{Const.}$$

Diese letzteren Differenzen nämlich würden für u, v, w, p gesetzt unter den zuletzt betrachteten Fall kommen.

Ob bei beweglichen Wandungen verschiedene Lösungen der Aufgabe mit verschiedenen Bewegungen des beweglichen und in sich selbst verschieblichen Wandtheiles existiren können, hängt von der Natur der diesen bewegenden Kräfte ab.

Berücksichtigt man, dass nach Gleichung (2b) im stationären Strome $P = Q$ ist, welche Gleichung die der Erhaltung der Kraft ist, so ist die Grösse $P - \frac{1}{2}Q$, welche zum Minimum gemacht werden soll, unter Festhaltung jener Bedingung der Erhaltung der Kraft, auch gleich $\frac{1}{2}Q$ zu setzen. Vorausgesetzt also Incompressibilität der Flüssigkeit, ferner das Gesetz von der Erhaltung der Kraft, und vollständige Adhärenz der Flüssigkeit an die beweglichen Theile der Wandung, so kann dem Gesetze die im Anfang ausgesprochene Formulirung gegeben werden.

Schallbewegung.

XIII.

Bericht über die theoretische Akustik betreffenden Arbeiten vom Jahre 1848 und 1849.

Die Fortschritte der Physik, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Berlin. Bd. IV S. 101—118; S. 124—125. Bd. V S. 93—98.

J. Challis. Theoretical determination of the velocity of sound. Phil. mag. XXXII 276*. [101]

Airy. Remarks on Professor Challis's theoretical determination of the velocity of sound. ibd. 339*.

J. Challis. On the velocity of sound. ibd. 494*.

J. Challis. Additional analytical considerations respecting the velocity of sound. ibd. XXXIII 98*.

G. G. Stokes. On a difficulty in the theory of sound. ibd. 349*.

J. Challis. On the vibrations of an elastic fluid. ibd. 360*.

J. Challis. Further investigation of the nature of aërial vibrations. ibd. 462.*

R. Moon. On a difficulty suggested by Prof. Challis in the theory of sound. Proc. of the Cambridge Philos. Society 1848 Novb. — Philos. Mag. XXXIV 136*.

G. G. Stokes. On some points in the received theory of sound. ibd. 52*.

J. Challis. Continuation of researches in the mathematical theory of aërial vibrations. ibd. 88*.

Eli. W. Blake. A determination of the general law according to which pulses differing in intensity are propagated in elastic media with remarks on the received theory of the velocity of sound. Sill. Amer. Journal. vol. V. 372*.

G. Wertheim. Mémoire sur la vitesse du son dans les liquides C. R. XXVII 150*. — Ann. d. ch. et d. ph. XXIII 434*. — Inst. No. 762. p. 237*. Pogg. Ann. LXXVII 427* und 544*; Arch. d. sc. ph. et nat. IX. 52*.

Sc. Russel. On the effect of the rapid motion of the observer on sound.

Athen 1848 No. 108 b. p. 835*; Inst. No. 768 p. 288*; Arch. d. sc. ph. et nat. IX. 138*.

102 Robert-Lefebvre. Théorie mathématique des sons musicaux. C. R. XXVII 648*.

A. Seebeck. Ueber die Schwingungen gespannter und nicht gespannter Stäbe. Ber. d. Sächs. Ges. I. 159; Pogg. Ann. LXXIII 442*.

A. Seebeck. Versuche über die Töne steifer Saiten. Ber. d. Sächs. Ges. I. 365*.

Duhamel. Sur la résonnance multiple des corps. C. R. XXVII 457*. Inst. No. 775. 341. Ann. d. ch. et d. ph. XXV 45; Arch. d. sc. ph. et nat. X. 52*.

Der Unterschied der nach hydrodynamischen Principien berechneten Schallgeschwindigkeit 916,322 Fuss engl. und der beobachteten von 1089 Fuss ist bisher hergeleitet worden von der Erwärmung und Erkältung, welche die Luft bei ihrer Verdichtung und Verdünnung erleidet. Bei Berücksichtigung dieses Umstandes entspricht nämlich einer gleichen Dichtigkeitsänderung eine grössere Aenderung der Spannung, als es nach dem Mariotte'schen Gesetze der Fall sein würde, und demgemäss wird bekanntlich auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Wellen vergrössert. Nun ist die durch directe Versuche ermittelte Grösse der Erwärmung der Gase durch Compression allerdings nicht hinreichend, um den ganzen Unterschied zu erklären, indessen haben wir auch allen Grund anzunehmen, dass die gefundenen Zahlen durch die bei solchen Versuchen nicht zu vermeidenden Verluste von Wärme zu klein ausgefallen sind.

Hr. J. Challis hat in den vorn citirten Aufsätzen im „Phil. Mag." diese Erklärung als ungenügend darzustellen und eine ganz neue rein hydrodynamische Theorie der Schallbewegung zu entwickeln gesucht, aus welcher sich eine grössere Geschwindigkeit der Fortpflanzung ergeben sollte, als aus der bisherigen. Der erste Einwand Bd. XXXII S. 283, dass die elastische Kraft der Luft bei Verdichtung mit Temperaturänderung zwar grösser, bei Verdünnung aber kleiner sein müsse als ohne dieselbe, während eine grössere Schallgeschwindigkeit nur durch Vermehrung der elastischen Kraft in beiden Fällen

erzeugt werden könne, beruht auf einem Missverständniss, welches bei einem so fertigen Mathematiker überrascht. Derselbe ist 103 von Hrn. Airy ibd. 343 zurückgewiesen, indem er erinnert, dass es nicht auf die absolute Grösse der elastischen Kräfte ankomme, sondern auf ihren Unterschied von denen des Gleichgewichtszustandes, und dass dieser Unterschied in beiden Fällen vergrössert sei. In den weiteren Aufsätzen Bd. XXXII 498 und XXXIII sucht Hr. Challis dagegen aus den Gleichungen für die Schallbewegungen mit Berücksichtigung des Einflusses der Erwärmung nachzuweisen, dass dieser Einfluss nicht blos in einer Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestehen könne, sondern auch den Charakter der Bewegung ändere. Dagegen ist zu erinnern, dass alle unsere Theorien kleiner elastischer Schwingungen nur eine Art von Bewegung darstellen sollen, welcher sich wirklich stattfindende Bewegungen immer mehr nähern, je kleiner sie sind; deshalb sind wir berechtigt in den Gleichungen die Aenderungen der Dichtigkeit gegen die ganzeDichtigkeit, die Geschwindigkeiten der schwingenden Theile gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu vernachlässigen, wie es auch Hr. Moon in seiner oben citirten Antwort gegen Hrn. Challis thut, und dann reducirt sich der Einfluss der Temperaturänderung wirklich auf eine blosse Aenderung der Schallgeschwindigkeit, wie es auch aus den von letzterem selbst aufgestellten Gleichungen folgt.

Um eine neue Theorie des Schalles zu gründen, sucht Hr. Challis in seinem ersten Aufsatze ein particuläres Integral der hydrodynamischen Gleichungen, durch welches eine nach einer Richtung sich fortpflanzende Bewegung dargestellt wird. Wir haben bekanntlich zweierlei Systeme von hydrodynamischen Gleichungen eines für Bewegungen von endlicher Grösse, und ein zweites einfacheres für unendlich kleine Schwingungen. Nennen wir ϱ die Dichtigkeit, p den Druck, u die Geschwindigkeit in Richtung der x, v die in Richtung der y, w die in Richtung der z für den Punkt dessen Coordinaten x, y, z sind zur Zeit t, ferner a^2 die Constante, welche der Gleichung genügt $p = a^2\varrho$, und betrachten wir nur Fälle, in welchen sich eine Function φ von x, y, z und t so finden lässt, dass $u = d\varphi/dx$, $v = d\varphi/dy$, $w = d\varphi/dz$, so reducirt

104 sich bekanntlich das System der exacten Gleichungen für Bewegungen von Gasen, welche nicht dem Einflusse äusserer Kräfte ausgesetzt sind, auf folgende zwei:

$$\left.\begin{aligned} c - a^2 \ln. \varrho &= \frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] \\ -\frac{d.\ln.\varrho}{dt} &= \frac{d.\ln.\varrho}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d.\ln.\varrho}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d.\ln.\varrho}{dz}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ &\quad + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}. \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Die Gleichung für unendlich kleine Schwingungen erhält man hieraus, wenn man die höheren Dimensionen der Ableitung von φ weglässt, und ϱ eliminirt:

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2\varphi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \\ \text{Eine ganz ähnliche existirt für } \varrho: \\ o &= \frac{d^2\varrho}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varrho}{dx^2} + \frac{d^2\varrho}{dy^2} + \frac{d^2\varrho}{dz^2}\right). \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Hr. Challis benutzt zunächst nur die letzteren Gleichungen, und findet als ein seiner Forderung entsprechendes particuläres Integral:

$$\frac{d\varphi}{dz} = w = mf\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - at\sqrt{1 + \tfrac{e\lambda^2}{\pi^2}} + c)\right],$$

wo λ die Wellenlänge bezeichnet und f irgend eine Function von x und y, welche der Gleichung entspricht:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + 4ef = 0.$$

Dieses Integral zeigt also Vibrationen an, parallel der Axe der z, welche sich parallel dieser selben Axe mit der Geschwindigkeit $a\sqrt{1 + e\lambda^2/\pi^2}$ fortpflanzen; letztere ist, da e in der Untersuchung als Bezeichnung einer nothwendig positiven aber noch unbestimmten Grösse eingeführt ist, stets grösser als die sonst gefundene Fortpflanzungsgeschwindigkeit a. Die Function f, welche die Vertheilung der Gleichgewichtsstörungen in Ebenen darstellt, die auf der z-Axe senkrecht stehen, muss zwei willkürliche Functionen von x und y enthalten, da sie durch eine partielle Differenzialgleichung zweiten Grades gegeben ist.

Als einfachsten Fall betrachtet Hr. Challis den, wo die Stö- 105
rungen nach allen Richtungen senkrecht auf der Axe der z dieselben sind, also nur von der Entfernung von dieser Axe abhängen; er erhält so eine bestimmte Function für f, welche Verdichtungswellen bezeichnet von der Gestalt concentrischer Ringe, welche in der Richtung der z fortschreiten. Die Wellen nehmen bei wachsendem Durchmesser der Ringe an Intensität ab, die intensivste Welle aber schreitet längs der Axe dieser Ringe fort innerhalb einer cylindrischen Hülle; der Durchmesser dieser Hülle hängt von der Grösse e ab. Diese Art von Bewegung in einem cylindrischen Faden betrachtet Hr. Challis als die elementare, er nennt sie „nicht divergirende Wellen", und bemüht sich schliesslich nachzuweisen, dass die Grösse $e\lambda^2$, welche die grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedingt, nur von der Natur des Stoffes abhängig sei, aber dies ist die schwache Stelle seiner Untersuchung.

Hr. Airy hat darauf gezeigt, dass sich die von Hrn. Challis gefundenen Bewegungen zusammensetzen lassen aus ebenen Wellen, deren Normalen gleiche Winkel mit der Axe der z bilden, und je zwei in derselben Ebene mit dieser Axe liegen. Liegen z. B. diese Normalen in der Ebene der xz, und bilden mit ihr den Winkel α, so sind die Geschwindigkeitsgleichungen für die eine:

$$w_I = m\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x\sin\alpha + z\cos\alpha - at)\right\}$$

und für die andere:

$$w_{II} = m\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(-x\sin\alpha + z\cos\alpha - at)\right\},$$

ihre Summe:

$$w = 2m\cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\alpha\right\}\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(z\cos\alpha - at)\right\},$$

die letztere Gleichung kann geschrieben werden ganz übereinstimmend mit der von Hrn. Challis gefundenen:

$$w = mf\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda_1}(z - a_1t)\right\},$$

wo $\lambda_1 = \lambda/\cos\alpha$, $a_1 = a/\cos\alpha$ und $f = \cos\{2\pi x\sin\alpha/\lambda\}$. Bei einem solchen Zusammenwirken zweier ebenen Wellensysteme

laufen also die einzelnen Phasen nach der Halbirungslinie des
106 Winkels den ihre Normalen bilden mit einer grösseren Geschwindigkeit ab, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles beträgt; dieselbe hängt aber ab von der Grösse des Winkels α, und ist keine Unveränderliche. Durch Zusammensetzung verschiedener ähnlicher Paare von verschiedener Intensität, Wellenlänge und Lage, deren Normalen aber alle denselben Winkel mit der z-Axe bilden, kann man den allgemeineren von Hrn. Challis behandelten Fall darstellen, die Ringsysteme dagegen, wenn man alle diejenigen Wellensysteme zusammensetzt, welche gebildet werden, wenn man ein solches Paar um die z-Axe rotiren lässt.

Hr. Challis verwahrt sich in seinem zweiten Aufsatze gegen diese Zerlegung seiner nicht divergirenden Wellen in ebene Wellen, indem er den particulären Integralen der allgemeinen Bewegungsgleichungen, welche die Bewegung ebener und sphärischer Wellen darstellen, alle physikalische Bedeutung abspricht, weil, wie er nachzuweisen sucht, diese Gleichungen auf physikalische Vorstellungen angewendet in Widersprüche führen. Für ebene Wellen braucht er zu diesem Behufe die vollständigen Gleichungen (I). Setzt man voraus, dass die Bewegungen nur der Axe der z parallel seien, dass Druck und Geschwindigkeit in den auf z senkrechten Ebenen gleich seien, und eliminirt man ϱ aus den Gleichungen (I), so erhält man die exacte Gleichung für ebene Wellen:

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \left\{a^2 - \left(\frac{dq}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^2q}{dx^2} + 2\,\frac{dq}{dx}\,\frac{d^2q}{dx\,dt} = 0,$$

und ein entsprechendes Integral derselben ist:

$$w = \psi_{(x-(a+w)t)},$$

wo ψ eine willkürliche Function der in Parenthese beistehenden Grösse ist. Dieser Ausdruck bezeichnet eine Bewegung, bei welcher die Phasenpunkte ohne Bewegung mit der Geschwindigkeit a fortschreiten, diejenigen aber, in denen die Geschwindigkeit m ist, mit der $a + m$. Es lässt sich aus der Integralgleichung leicht der entsprechende Ausdruck für die Dichtigkeiten ableiten. Man findet:

$$\ln\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{a}\,w,$$

wo ϱ_0 die Dichtigkeit in der Gleichgewichtslage bezeichnet. Den positiven Werthen von w entsprechen demnach Werthe 107
von $\varrho > \varrho_0$, den negativen solche von $\varrho < \varrho_0$. Es schreiten also in den durch die obige Integralgleichung gegebenen Wellensystemen die Phasen der grösseren Dichtigkeit schneller fort, als die der geringeren, und die Wellen müssen im Fortschreiten ihre Gestalt ändern. Hr. Challis spricht nun der obigen Gleichung, von deren Richtigkeit man sich übrigens leicht durch Integriren überzeugen kann, alle physikalische Gültigkeit ab, weil bei diesem ungleichmässigen Fortschreiten verschiedener Phasen derselben Welle es endlich dazu kommen müsse, dass ein Punkt ohne Geschwindigkeit einen ihm voranliegenden der Verdünnungsphase einhole und überhole, und er zugleich eingeholt und überholt werde von einem der hinter ihm liegenden Verdichtungsphase, sodass nach jener Gleichung in demselben Punkte der z-Axe gleichzeitig Verdünnung, Verdichtung und normale Dichtigkeit, positive, negative und keine Geschwindigkeit vorhanden sein müsse, was in diesem Falle der physikalischen Anwendung Unsinn sei; deshalb könne diese Form des Integrals überhaupt nicht mögliche physikalische Verhältnisse aussprechen. Indessen kann dieses Princip nicht zugegeben werden. Wenn die Differenzialgleichungen alle Bedingungen der betrachteten Bewegungen enthalten, so muss auch jedes ihnen entsprechende reelle particuläre Integral einen möglichen Fall solcher Bewegung aussprechen. Führt dasselbe aber aus anwendbaren Werthen über zu nicht anwendbaren, so muss an der Grenze beider ein in den Differenzialgleichungen nicht berücksichtigtes Verhältniss vorkommen. Dieses ist in diesem Falle von Hrn. Stokes aufgefunden. Bei der Aufstellung der hydrodynamischen Gleichungen (I) muss man nämlich die Voraussetzung machen, dass die Dichtigkeits- und Geschwindigkeitsänderungen bei dem Uebergange von einem Theilchen auf die benachbarten continuirliche seien, also $d\varrho/dx$ und dw/dx endliche Grössen. Jene Gleichungen finden aber keine Anwendung mehr, sobald an irgend einer Stelle eins dieser Verhältnisse unendlich geworden ist. Das muss aber eintreten, sobald irgend ein Punkt der Verdichtungsphase irgend einen von geringerer Dichtigkeit erreicht. Nur bis zu diesem

108 Augenblicke ist die obige Gleichung gültig; was dann geschieht kann nicht mehr aus den Gleichungen (I) abgeleitet werden, sondern muss durch eine besondere Betrachtung ermittelt werden. Am passendsten scheint der Vergleich mit einer überschlagenden Wasserwelle zu sein. Jedenfalls müssen aber die eintretenden Aenderungen in der ganzen Ausdehnung der Welle gleichmässig eintreten, sodass doch wieder ebene Wellen anderer Form entstehen, und nach denselben Gesetzen fortschreiten wie vor der Aenderung.

Damit ist die principielle Schwierigkeit beseitigt. Uebrigens möchte in der Praxis die Formänderung ebener Schallwellen und ihre Brandung kaum von Wichtigkeit sein bei der ungemein geringen Amplitüde reiner musikalischer Töne. Ist w verschwindend klein gegen a, so verändert sich die obige exacte Formel in die bekannte:

$$w = \psi_{(z-at)}.$$

Uebrigens ist zu bemerken, dass wir in den Fällen, wo wir die exacte Formel anwenden müssen, nicht mehr Wellen verschiedener Richtung durch Addition zusammensetzen dürfen, weil die ungestörte Superposition der Schwingungen bei einer solchen Intensität derselben nicht mehr stattfindet. Es äussert sich dies in der Rechnung dadurch, dass eine Summe particulärer Integralgleichungen die Gleichungen I. nicht mehr erfüllt.

Ein gleicher zu beseitigender Einwand von Hrn. Challis gegen die gewöhnliche Theorie des Schalles bezieht sich auf die Kugelwellen. Das bekannte particuläre Integral der Gleichungen für kleine Schwingungen für diese Art der Bewegung ist:

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{\psi_{(at-r)}}{r}.$$

Nehmen wir an, es sei nur eine einzelne Welle vorhanden, deren Mitte den Radius R habe, deren Breite 2ε dagegen vernachlässigt werden könne, und die in einem gleichmässig mit ruhender Luft angefüllten Raume fortschreite, so ist der Ausdruck für die Quantität von Masse, welche in dem von der

Welle durchlaufenen Raume mehr vorhanden ist als im ruhigen Zustande:

$$= 4\pi R \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} \psi_{(at-r)} dr.$$

Sie wächst also mit der Zeit in demselben Verhältnisse 109
wie der Radius, wenn das Integral einen bestimmten positiven Werth hat, und da die unbestimmte Function darin nach Belieben geändert werden kann, so kann man dem Integral jeden beliebigen Ziffernwerth ertheilen. Nach Hrn. Challis würde also diese Integralgleichung die Folgerung zulassen, dass sich die Quantität der vorhandenen Materie entweder vermehren oder vermindern könne. Hr. Stokes weist Bd. XXXIV S. 54 dagegen nach, dass die Gleichung, welche man aus jener Integralgleichung der Dichtigkeit für die Geschwindigkeit der Lufttheilchen ableiten könne, ausser den Vibrationen, die der Wellenbewegung angehören, noch eine zum Centrum gerichtete oder von ihm ausgehende Geschwindigkeit angebe, wenn der Ausdruck $\int \psi_{(r-at)} dr$ einen positiven oder negativen Werth habe, und dass daher die Vermehrung oder Verminderung der Masse rühre. Die Antwort von Hrn. Challis dagegen ibd. S. 91 ist keine.

In dem grössten Theil seiner späteren Aufsätze bemüht sich Hr. Challis nachzuweisen, dass seine nicht divergirenden Wellen den Forderungen der exacten Bewegungsgleichungen Genüge leisten. Er findet für Wellenformen, welche ohne Veränderung der Gestalt parallel der Axe der z fortschreiten sollen, eine bestimmte Gestalt, ausgedrückt durch eine Consinusreihe von $z - a_1 t$, (Bd. XXXIII S. 363, Gleichung 1 und 2), während die Vertheilung rund um die Axe der z ausgedrückt bleibt durch eine partielle Differentialgleichung zweiten Grades nach x und y. Die mathematische Entwicklung erregt einige Bedenken, weil er mehrere Male Sätze, die aus den ungenaueren Gleichungen (II) geflossen waren, erst nachdem er sie eine Weile gebraucht hat, durch andere ersetzt, welche aus den exacten Gleichungen hergeleitet sind. Aber selbst wenn seine nicht divergirenden Wellen

unveränderlich fortschreiten, so beweist das noch nichts für die Nothwendigkeit, dass wir alle Schallwellen in solche zerlegen müssen, weil in allen Fällen, wo die exacteren Gleichungen gebraucht werden müssen, überhaupt keine einfache Zusammensetzung und Zerlegung der Wellen mehr stattfindet. In denjenigen Fällen aber, wo die nicht exacten Gleichungen anwendbar sind, ist es eine kühne Hoffnung, dass durch Zu-
110 sammensetzung seiner linearen Wellen zu ebenen und sphärischen eine andere Bewegung herauskommen soll, namentlich eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, als die der ebenen Wellen, in welche nachweislich jene linearen aufgelöst werden können.

Hr. Blake hat den Unterschied der aus dem Mariotte'schen Gesetz berechneten Schallgeschwindigkeit von der wirklichen noch auf eine andere Weise zu erklären versucht. Er sucht nämlich auf elementare Weise sich einen Ausdruck zu verschaffen für die Aenderung jener Geschwindigkeit durch Steigerung der Intensität des Schalls. Dieser Ausdruck ist aber falsch, weil er ihn herleitet aus der Annahme, dass alle Theile der Welle sich mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, was nach der oben hingestellten exacten Integralgleichung für ebene Wellen nicht der Fall ist. Er nimmt dann an, dass erst Schall von einer gewissen Intensität gehört werde, und dass die beobachtete Schallgeschwindigkeit eben deshalb grösser sei, als die für eine verschwindend kleine Intensität berechnete.

Hr. Wertheim hatte eine ausgedehnte Arbeit zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Flüssigkeiten ausgeführt. Er berechnet dieselben aus den Tönen von Orgelpfeifen, in welchen die betreffende Substanz in Longitudinalschwingungen versetzt wird. Der erste Theil seiner Arbeit besteht in einem Studium der Eigenthümlichkeiten dieser Bestimmungsweise an den Tönen, welche solche Pfeifen in der Luft geben. Bekanntlich sollten die Schwingungszahlen von Tönen verschiedener Pfeifen genau im umgekehrten Verhältniss der Pfeifenlänge stehn, wenn die Luftbewegung in denselben

rein longitudinal wäre. Da dieselbe aber an den beiden Oeffnungen der Pfeife beträchtlich von dieser Voraussetzung abweicht, so trifft dieses Gesetz nie genau zu, und zwar desto weniger, je weiter die Pfeife ist. Hr. Wertheim hat angenommen, diese Störung könne bei einer und derselben Pfeife, der man verschiedene Längen giebt, nach ihrer Wirkung gleichgesetzt werden einer bestimmten Verlängerung der Pfeife, 111
und hat diese letztere berechnet aus den Tönen, welche er bei drei verschiedenen Pfeifenlängen erhielt. Diese Annahme ist aber nur annähernd richtig, wie sich theils aus Experimenten Anderer[1]), theils aus den Wertheim'schen selbst ergiebt, da in allen Fällen, wo die Correctionen einen beträchtlichen Werth annehmen, die drei Werthe, welche man durch Combination je zweier von den drei Beobachtungen berechnen kann, merklich sich unterscheiden und zwar meist in demselben Sinne. Die Grösse dieser Correctionen ist veränderlich nach der Weite der Pfeife, nach der Gestalt der Mundöffnung, Stärke des Anblasens u. s. w.; sie ist in vielen der angeführten Versuche bis zu $\frac{2}{5}$ der kürzesten Pfeifenlänge. Eine zweite Schwierigkeit bei genauen Bestimmungen macht die Veränderlichkeit des Tons nach der Heftigkeit des Anblasens; je grösser die letztere, desto höher wird der Ton, daher auch der aus den Obertönen berechnete Grundton stets höher liegt als der direct beobachtete. Hr. Wertheim hat sich dieser Störung dadurch zu entziehen gesucht, dass er die drei zusammengehörigen Versuche bei gleicher Ausflussgeschwindigkeit, controlirt durch gleichen Druck des Manometers, anstellte, und wenn er Obertöne erhielt, aus diesen den zugehörigen Grundton berechnete. Er fand dabei, dass die Druckhöhen, welche die den einfachen Zahlen entsprechende Reihe der Obertöne hervorriefen, wuchsen im Verhältniss der Quadrate dieser Zahlen. Die so berechneten Schallgeschwindigkeiten stimmen ziemlich mit der direct beobachteten 332,3 Min.; meist sind sie etwas kleiner bis zu 2 Procent. Um die Pfeifen in tropfbaren Flüssigkeiten ertönen zu machen, muss die Mundöffnung schmaler und kürzer sein, als in der Luft; Hr. Wertheim hat viele Versuche anstellen

1) Siehe Liscovius in Pogg. Ann. LVIII. 95.

müssen, um die beste Stellung der Lippen der Pfeife zu finden, hat aber endlich an offenen Pfeifen ebenso klare und reine Töne erhalten, wie in der Luft; von anderen Nebentönen der Lippen oder des Metalls der Pfeife soll man dieselben leicht durch den Klang unterscheiden können; wesentlich für das Gelingen ist, dass die Flüssigkeiten von Staub und Luftblasen
112 rein sind. Die Correctionen und Unregelmässigkeiten sind im Wasser meist geringer als in der Luft. Das Mittel seiner Versuche für Wasser zwischen 10 und 20° C. ist 1173,4 m., wovon die einzelnen Versuche bis zu 3 Proc, abweichen. Mit dem Coëfficienten $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ multiplicirt, über dessen Bedeutung nachher, giebt dieselbe 1437,1 m., welche Grösse fast zusammenfällt mit der von Colladon und Sturm im Genfer-See bei 9° gefundenen 1435 m.

Es folgen noch Bestimmungen der Schallgeschwindigkeit vom Meerwasser in denselben, von verschiedenen anderen Flüssigkeiten in einem kleineren Apparate angestellt. Ich gebe in der folgenden Tabelle unter v die noch nicht mit $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ multiplicirte Schallgeschwindigkeit, unter c die cubische Zusammendrückung durch 100 Atmosphären.

		v	c
Seinewasser . . .	15°	1 173,4	0,004 91
— . . .	30°	1 250,9	0,004 33
— . . .	40°	1 324,8	0,003 88
— . . .	50°	1 349,0	0,003 75
— . . .	60°	1 408,2	0,003 46
Meerwasser		1 187,0	0,004 67
Kochsalzlösung		1 275,0	0,003 49
Alkohol von 36 Grad .		1 049,9	0,007 33
Absoluter Alkohol . .		947,0	0,009 47
Terpentinöl		989,8	0,008 00
Aether		946,3	0,010 02.

Die Werthe der Zusammendrückbarkeit sind berechnet unter der Voraussetzung, dass die Schallgeschwindigkeit im unbegrenzten Medium erhalten werde aus der in der Orgelpfeife bestimmten durch Multiplication mit $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Hr. Wertheim bemerkt, dass die bisher direct gemessenen Werthe derselben mit Ausnahme der des Aethers hinreichend übereinstimmen mit den berechneten, und dass die

Uebereinstimmung noch grösser sei mit den neuesten noch nicht veröffentlichten Versuchen von Grassi.[1])

Mit dem Factor $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ hat es folgende Bewandtniss. Denken 113
wir uns im Innern einer nach den Richtungen der Coordinaten verschieden stark gepressten festen elastischen Masse ein Massenelement abgegrenzt durch Ebenen, welche den Coordinatenebenen parallel sind, so wird der Druck X, den es in Richtung der x ausübt, eine lineare Function der verschiedenen Compressionen nach den drei Axen sein. Ist die Längeneinheit auf der Axe der x geworden $1 - \Delta x$, auf der der y, $1 - \Delta y$, auf der der z, $1 - \Delta z$, so wird sein:

$$X = a^2 \Delta x + b^2(\Delta y + \Delta z)$$
$$Y = a^2 \Delta y + b^2(\Delta x + \Delta z)$$
$$Z = a^2 \Delta z + b^2(\Delta x + \Delta y).$$

Entstehen nun in einer festen unbegrenzten elastischen Masse ebene Wellen normal auf der Axe der x, so werden die Massenelemente nur in der Richtung der x comprimirt und dilatirt, weil seitlich in Richtung der y und z ebenso comprimirte Theilchen danebenliegen, also werden Δy und Δz Null werden, und die Kräfte, welche die Forpflanzung der Wellen bestimmen, werden:

$$X = a^2 \Delta x.$$

Wenn s^2 die Dichtigkeit bezeichnet, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a/s. Entstehen aber in einem Stabe longitudinale Wellen, und kann sich in jedem Querschnitt nach den Seiten hin das Gleichgewicht herstellen, so dass der Druck nach den Seiten hin 0 wird, so erhalten wir aus unseren Gleichungen:

$$X = a^2 \Delta x + b^2(\Delta y + \Delta z)$$
$$0 = a^2 \Delta y + b^2(\Delta x + \Delta z)$$
$$0 = a^2 \Delta z + b^2(\Delta x + \Delta y),$$

woraus sich ergiebt:

$$X = \left(a^2 - \frac{2b^4}{a^2 + b^2}\right) \Delta x.$$

Poisson hatte aus theoretischen Betrachtungen hergeleitet,

1) Grassi. Note sur la compressibilité des liquides C. R. XXVII. 153*; Dingl. p. J. CX. 31*; Pol. Centrbl. 1848 p. 1335; Arch. d. sc. ph. et nat. IX. 58.

dass $a^2/b^2 = 3$ sei, Wertheim[1]) hat experimentell gefunden,
114 dass es $= 2$ sei; danach ergiebt sich in unseren letzten Ausdrucke:

$$X = \tfrac{2}{3} a^2 \Delta x$$

und die Schallgeschwindigkeit $\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, a/s$. Dieselbe ist also um $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ kleiner, wenn die Masse quer gegen die Fortpflanzungsrichtung des Schalls sich frei ausdehnen kann und dadurch einen Theil ihrer Spannung verliert, als wenn dies nicht der Fall ist. Da Wertheim das Verhältniss der Schallgeschwindigkeit in einem verhältnissmässig dünnen Wassercylinder zu der im unbegrenzten Raume ebenso gross gefunden hatte, wie das derselben in einem elastischen Stabe zu der in einer Masse von drei Dimensionen, so schliesst er, dass die Flüssigkeiten während der Schallschwingungen nicht Zeit hätten, die Gleichheit des Drucks nach allen Seiten herzustellen, und deshalb sich ebenso bewegten wie feste elastische Körper. Wir können indessen diese Erklärung der Versuche nicht annehmen, weil der Unterschied der Schallgeschwindigkeit im Stabe und im unbegrenzten Körper wesentlich davon abhängt, dass sich jener nach den Seiten ausdehnen kann, was bei der von der Pfeife aus Messing oder Glas eingeschlossenen Wassermasse in den besprochenen Versuchen nicht der Fall war. Nun ist allerdings eine Messingröhre einer comprimirten Wassermasse gegenüber nicht als so absolut fest zu setzen, wie es bei den Luftschwingungen ist. Schon bei den letzteren erniedrigt sich der Ton der Pfeife, wenn sie aus Holz gefertigt wird, und noch mehr, wenn ein Theil der Wand durch eine nachgiebigere Substanz, z. B. Pergament, ersetzt wird, und etwas Aehnliches muss bei Wasserschwingungen in Messingröhren vorkommen. Indessen kann dieser Einfluss nicht von der Art der Röhre unabhängig sein, er muss proportional sein ihrem Radius, umgekehrt proportional ihrer Wanddicke und ihrem Elasticitätscoëfficenten. Ob sich die Resultate der Wertheim'schen Versuche dadurch erklären lassen, muss künftigen Untersuchungen vorbehalten bleiben.

1) C. R. XXXVI. 206.

Hr. Seebeck hat eine Rechnungsmethode angegeben, um 115
für die Transversalschwingungen nicht gespannter Stäbe die Lage der Knoten, der Wendepunkte, der Punkte der stärksten Schwingung und Biegung nach einem gemeinsamen Verfahren für die verschiedenen Befestigungsarten der Enden bis zu beliebig genauen Näherungswerthen berechnen zu können. Die Tonhöhen waren schon aus den Untersuchungen von D. Bernoulli, Euler und Poisson bekannt, die Knoten für Stäbe mit zwei freien Enden durch ersteren, Riccati und Strehlke. Hr. Seebeck ermittelt aus der allgemeinen Gleichung für die Form eines schwingenden Stabes:

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C\sin\alpha x + D\cos\alpha x$$

mit Berücksichtigung der Bedingungen für die Enden zuerst die verschiedenen Werthe von α, verschiedenen Tönen entsprechend, und bringt dann, indem er $y = 0$ für die Knoten, $d^2y/dx^2 = 0$ für die Wendepunkte setzt, die Gleichung auf die Form:

$$\sin\left(\alpha x - \tfrac{\pi}{4}\right) = \delta\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

wo $\delta = e^{-\alpha x} \pm e^{-\alpha(l-x)} \pm e^{-\alpha l}(\sin\alpha x + \cos\alpha x)$ und für alle Töne mit Ausnahme des ersten eine sehr kleine Grösse ist. Man setzt es $= 0$, erhält dadurch einen ersten Näherungswerth von αx, mit diesem einen genaueren von δ und so fort. Für den ersten Ton ist der erste Näherungswerth $\alpha x = 1{,}04$. In dieser Form giebt die Gleichung die Entfernung der Knoten eines Stabes, dessen eines Ende eingeklemmt ist, das andere frei, vom freien Ende, die der Wendepunkte desselben vom festen Ende; die der Knoten eines an beiden Enden freien Stabes und die der Wendepunkte eines an beiden Enden eingeklemmten Stabes von einem beliebigen der beiden Enden. Setzt man dagegen:

$$\delta = -e^{-\alpha x} \pm e^{-\alpha(l-x)} \pm (\sin\alpha x + \cos\alpha x),$$

so giebt die Gleichung die Wendepunkte eines freien Stabes und die Knoten eines an beiden Enden eingeklemmten.

Ist der Stab an einem Ende angestemmt, am anderen eingeklemmt oder frei, so verhält sich sein angestemmtes Ende ganz so wie die Mitte eines an beiden Enden eingeklemmten

116 oder freien Stabes sich bei den geraden Tönen verhält, und man führt so diese Fälle auf die vorhergehenden zurück. Ist der Stab mit beiden Enden angestemmt, so theilt er sich ganz einfach in gleiche Theile ab. Hr. Seebeck giebt dann noch eine Tafel der so berechneten Werthe für die verschiedenen Fälle.

Um die Correction zu ermitteln, welche bei Berechnung der Töne gespannter Saiten durch deren Steifheit bedingt wird, hatten Savart und Duhamel die Regel aufgestellt, dass:

$$n^2 = n_{,}^2 + n_{,,}^2,$$

wo n die Schwingungszahl der steifen gespannten Saite, $n_{,}$ die derselben ungespannt, $n_{,,}$ die derselben gespannt und als nicht steif betrachtet. Hr. Seebeck zeigt, dass dies theoretisch nur gerechtfertigt sei, wenn beide Enden um Queraxen drehbar und nicht eingeklemmt seien. Um die Correction genauer zu ermitteln ist derselbe von der allgemeinen Bewegungsgleichung eines gespannten Stabes ausgegangen. Ist p das Gewicht der Längeneinheit des Stabes, P das spannende Gewicht, und $a\, d^2y/dx^2$ das elastische Moment, sodass bei einem cylindrischen Stabe vom Halbmesser r und dem Elasticitätsmodulus m, $a = mr^4\pi/4$ ist, so ist die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Pg}{p}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{ag}{p}\frac{d^4y}{dx^4}.$$

Ein besonderes Integral dieser Gleichung, welches einem einzelnen Tone von der Schwingungszahl n entspricht, ist:

$$y = A_{,}e^{\alpha x+nt} + B_{,}e^{-\alpha x+nt} + C_{,}\sin(\beta x + nt) + D_{,}\cos(\beta x + nt)$$
$$+ A_{,,}e^{\alpha x-nt} + B_{,,}e^{-\alpha x-nt} + C_{,,}\sin(\beta x - nt) + D_{,,}\cos(\beta x + nt)$$

wenn:

$$\alpha^2 = \frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2p}{ag}}$$

$$\beta^2 = -\frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2p}{ag}}.$$

Die Coëfficienten A, B, C, D bestimmen sich aus den Be-
117 dingungen, denen die Enden unterworfen sind. Sind beide Enden eingeklemmt, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\left\{1 + 2\,(e^{-2\alpha l} + e^{-4\alpha l} + \ldots.) - \frac{2}{\cos\beta l}(e^{\alpha l} + e^{-3\alpha l} + \ldots)\right\}$$

und kann daraus Näherungswerthe berechnen, indem man vorläufig setzt:

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{2n}{P}\sqrt{\frac{ap}{g}}$$

und aus dem oben angegebenen Werthe von β^2 findet:

$$n^2 = \frac{ag}{p}\beta^4 + \frac{Pg}{p}\beta^2.$$

Hr. Seebeck fand die Ergebnisse der Rechnung bei einem mit den nöthigen Vorsichtsmassregeln angestellten Versuche an einer starken und kurzen Stahlsaite vollkommen genau bestätigt. Für gewöhnliche Saiten von geringer Steifheit giebt Hr. Seebeck mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen von $\sqrt{a/Pl^2}$ folgende Formel:

$$n = n_{,,}\left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}\right)$$
$$= n_{,,}\left(1 + \frac{r^2}{l}\sqrt{\frac{m\pi}{P}}\right).$$

Die Correction beträgt ungefähr die Hälfte für Saiten, deren eines Ende an einen Steg nur angelehnt frei herunterhängt, also wie das angestemmte Ende eines Stabes sich bewegt.

Fehler der harmonischen Reinheit der Obertöne treten erst auf, wenn man die zweite Potenz von $\sqrt{a/Pl^2}$ berücksichtigen muss. Man erhält für die Schwingungsmenge des $i$ten Tones in der Zeit 2π:

$$n = iN(1 + i^2\delta),$$

wenn:

$$N = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Pg}{p}\left(1 + 4\sqrt{\frac{a}{Pl^2}} + 12\,\frac{a}{Pl^2}\right)}$$

und:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{a}{Pl^2}.$$

Bei den gewöhnlichen Monochordsaiten ist diese Abweichung 118
schon völlig unmerklich; sind die Saiten aber so stark, dass sie merklich wird, so klingt auch der Grundton unrein wegen der Beimischung unreiner Obertöne.

Die Arbeit von Hrn. Duhamel enthält Erörterungen über die Superposition der Schwingungen an tönenden festen Körpern; es ist darin nichts neues enthalten.

Hr. Scott Russel hat Gelegenheit gehabt, das von Doppler[1]) zuerst erschlossene, von Buys-Ballot beobachtete Phänomen der Veränderung eines Tones durch Bewegung des tönenden Körpers oder des Beobachters bei viel grösserer Geschwindigkeit dieser Bewegung zu prüfen. Der Beobachter befand sich auf einer Locomotive, welche sich 50 bis 60 engl. Meilen in der Stunde (22,2 bis 26,6 m. in der Secunde) fortbewegte, wobei die Veränderung des Tones einer feststehenden Locomotivenpfeife im Augenblick des Vorbeifahrens eine ganzen Ton beträgt. Um ebensoviel werden die von feststehenden Körpern zurückgeworfenen Geräusche des Eisenbahnzuges im Vergleich zu den direct vernommenen scheinbar verändert. Die dadurch bedingte Dissonanz ist nach dem Verfasser Grund, warum das Geräusch unter Brücken und in Tunnels so unangenehm wird. Gegen seine Erklärung des Phänomens, welche mit der von Doppler übereinstimmt, machte D. Brewster mündliche Einwendungen, indem er es physiologischen Ursachen zuschieben zu müssen meint, und es mit dem subjectiven Licht- und Farbenerscheinungen vergleicht, welche durchbrochene rotirende Schirme hervorbringen. Welcher Zusammenhang dazwischen sein soll, ist nicht angegeben.

Hr. Montigny bemerkt, dass er dasselbe Phänomen an dem Tone einer Kirchenglocke mehrere Jahre früher bemerkt, indem er sich durch möglichst schnelles Laufen gegen sie hin, oder von ihr fort bewegte, und sich auch dieselbe Erklärung davon gegeben habe. (Es muss, wie Hr. Crahay hinzufügt, schnelles Laufen dazu gehören, die Beobachtung in dieser Weise zu machen.)

Unter den günstigsten Umständen kann man, wie Referent beobachtet hat, die besprochene Erscheinung an den Geläuten von Schlitten wahrnehmen, welche möglichst schnell auf einer guten Bahn dahinfahren. Wenn der Beobachter dicht an der Bahn steht, hört er im Augenblicke, wo der Schlitten an ihm vorüberfährt, den Ton der Glocken meist um einen halben Ton sinken.

1) Berl. Ber. 1845, S. 154.

Stokes. On some points in the received theory of sound. Phil. Mag. XXXIV. 52*.
Challis. Continuation of researches in the mathematical theory of aërial vibrations. Phil. Mag. XXXIV. 38*.
Moon. On a difficulty suggested by professor Challis in the theory of sound. Phil. Mag. XXXIV. 136*.
Stokes. On the theory of sound. In reply to professor Challis. Phil. Mag. XXXIV. 203.
Challis. On the theoretical value of the velocity of sound, in reply to Mr. Stokes. Phil. Mag. XXXIV. 284*.
Challis. On the theory of sound. Phil. Mag. XXXIV. 348*.
Challis. Determination of the velocity of sound on the principles of hydrodynamics. Phil. Mag. XXXIV. 353*.
Airy. On the difficulty in the theory of sound. Phil. Mag. XXXIV. 401*.
Challis. On spherical waves in an elastic fluid. Phil. Mag. XXXIV. 449*.
Challis. On the views of the astronomer royal. Phil. Mag. XXXIV. 241.

Vorstehend ist die Literatur des Streites gegeben, den Herr Challis über die theoretische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit angeregt hatte. Es kommen in diesen Aufsätzen keine neuen Gründe und Gegengründe zur Sprache ausser denen, welche schon in dem vorjährigen Berichte über diesen Gegenstand besprochen worden sind. Der Streit wird auf eine unfruchtbare Weise nur dadurch verlängert, dass Prof. Challis streng die veralteten Regeln des Disputirens festhaltend, viele Weitläufigkeiten hervorruft, und dabei den Sinn von keinem einzigen Argumente seiner Gegner versteht. Ich halte es deshalb für unnöthig, weiter über den Verlauf des Streites zu berichten, den übrigens auch beide streitende Theile abgebrochen haben.

Zu erwähnen ist nur die numerische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit, welche Challis für seine Schallstrahlen (rayvibrations) giebt, und zwar an zwei Stellen, Phil. Mag. XXXIV. p. 98 und 364. Diese Art der Luftbewegung wird durch ein besonderes particuläres Integral der aërodynamischen Gleichungen ausgedrückt, und kann der Anschauung am besten zugänglich gemacht werden, wenn man ein System ebener Wellen um eine beliebig durch dasselbe gezogene gerade Linie als Axe gedreht denkt und alle die Wellensysteme, welche

durch die verschiedenen Lagen des gedrehten Systems gegeben sind, als gleichzeitig vorhanden annimmt. In der Axe findet dann eine Wellenbewegung statt, wobei sich die Lufttheilchen nur in der Richtung der Axe verschieben, und die einzelnen Wellenphasen sich mit grösserer Geschwindigkeit fortpflanzen als in ebenen Wellen, und zwar ist die Fortpflanzung desto schneller, je grösser der Winkel ist, den die Drehungsaxe mit den Normalen der elementaren ebenen Wellen bildet. Rings um die Axe findet nicht blos ihr parallel, sondern auch senkrecht gegen sie gerichtet eine Bewegung der Lufttheilchen statt, doch giebt es eine Anzahl von concentrischen Cylinderflächen, in denen, wie in der Axe, die Bewegung dieser nur parallel ist. Diese Cylinderflächen haben nicht überall gleiche Abstände von einander, wohl aber werden ihre Abstände in unendlich grosser Entfernung von der Axe einer Constanten gleich, welche Challis auf Seite 94 mit Δ bezeichnet. Nun stellt er die Behauptung auf, dass Δ der halben Wellenlänge längs der Hauptaxe gleich sei, ohne Gründe dafür anzuführen. Es entspricht dieser Fall der Annahme, dass die Drehungsaxe mit der Normale auf den elementaren ebenen Wellen einen Winkel von 32° 29′ bilde, und die Rechnung ergiebt dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu 1086 engl. Fuss, während die Beobachtungen 1089 ergeben, was allerdings sehr viel näher stimmt, als es die theoretisch berechnete Geschwindigkeit der ebenen Wellen thut, wenn man die Erwärmung der Luft durch Druck vernachlässigt. Die Betrachtung der besprochenen Be-
95 wegungsart, als eines Systemes ebener Wellen, gegen welche Challis allerdings protestirt, weil er überhaupt die Möglichkeit ebener Wellen nicht zugeben will, zeigt gleich, dass gar kein Grund vorhanden ist einen Winkel bei der Zusammensetzung besonders hervorzuheben, und dass dieselbe mit jedem beliebigen Winkel möglich sein muss. Ebensowenig ist dem Berichterstatter gelungen aus der Betrachtung der Differentialgleichungen, welche Challis zu Grunde legt, einen solchen einzelnen Werth der betreffenden Constanten herzuleiten, sondern dieser Werth bleibt vollkommen willkürlich. Daher ist jene Bestimmung der Schallgeschwindigkeit auch willkürlich und ihre Uebereinstimmung mit dem Versuch nur zufällig.

Challis hatte aus den exacten aërodynamischen Gleichungen nachgewiesen, dass wenn a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist und v die Geschwindigkeit, mit der sich die Lufttheilchen in einer bestimmten Wellenphase bewegen, die Wellenphase mit der Geschwindigkeit $a + v$ vorrückt. Daraus folgt, dass die Phasen mit negativem v einer Welle schliesslich von denen mit positivem v der nachfolgenden eingeholt und endlich überholt werden müssten. Weil an einem und demselben Orte in der Luft nicht gleichzeitig verschiedene Wellenphasen mit verschiedenem Druck und verschiedener Geschwindigkeit stattfinden können, schloss Challis weiter, dass ein solches Ueberholen der Wellen und also auch überhaupt ebene Wellen nicht möglich seien. (Siehe den vorjährigen Bericht.) Stokes erinnerte dagegen, dass die hydrodynamischen Gleichungen die Voraussetzung continuirlich ineinander übergehender Grössen des Drucks und der Geschwindigkeit machten, aber nicht mehr passten, wo plötzliche Sprünge dieser Grössen stattfänden; ein solcher Sprung trete aber ein, wo eine Wellenphase die andere einholte. Alle Integrale dieser Gleichungen hätten also auch nur Gültigkeit bis zu diesem Augenblicke und nicht weiter. Er verglich das Eintreten dieses Falls mit einer brandenden Wasserwelle. Letzteren Vergleich führt Airy in dem oben angeführten Aufsatze noch weiter durch, indem er auf die Aehnlichkeit der Gleichungen für die Luftbewegung mit denen aufmerksam macht, welche er für die Wellenbewegung in einem Canal von endlicher Tiefe in
der Encyclopaedia Metropolitana Art. „Tides and Waves“ ent- 96
wickelt hat. Auch die letzteren führen zu einem kritischen Zustande der Bewegung, auf den die hydrodynamischen Gleichungen nicht mehr anwendbar sind, und der sich in der Wirklichkeit durch das Branden der Wellen äussert. Ebensowenig, wie aus der analytischen Schwierigkeit folge, dass in einem Flusse nicht geradlinige Wogen vorkommen könnten, dürfe man aus ihr mit Challis die Unmöglichkeit ebener Luftwellen schliessen. Airy fügt noch die Meinung hinzu, dass diese Brandung der Luftwellen dem Klange des Zischens, oder des S, vielleicht auch des R entspräche. Er beruft sich darauf, dass das S nicht durch das Echo zurückgegeben werde, eben-

sowenig wie brandende Wasserwogen als solche von einer geraden Wand reflectirt würden, und zweitens darauf, dass zischende Geräusche sich längs der Oberfläche gebogener Mauern (whispering galleries) in auffallender Stärke fortpflanzten, was bei anderen regelmässig reflectirten Tönen nicht der Fall sei. Ebenso sehe man auch brandende Wellen weite Strecken an Mauern hinlaufen, unter Umständen, wo regelmässige Wellen reflectirt würden. In seiner Entgegnung auf diese Bemerkungen wiederholt Challis nur seine früheren Behauptungen über die Unmöglichkeit ebener Wellen, und führt als Gegengrund gegen die Veränderung in der Form der Schallwellen bei ihrer Fortpflanzung an, dass nach Biots Versuchen Worte durch Röhren von 3120 Fuss Länge deutlich gehört werden können. So lange wir indessen nichts Bestimmtes über die Grösse der Excursionen der Lufttheilchen bei den Schallschwingungen wissen, können wir auch nicht beurtheilen, ob die Aenderungen der Schallwellenform gross genug sind, um bemerkt zu werden.

In einer Note von R. Moon aus den Verhandlungen der Cambridge Philosophical Society werden die Einwürfe von Challis gegen die bekannte Art, den grösseren Werth der beobachteten Schallgeschwindigkeit im Vergleiche zur berechneten durch die Wärmeentwicklung zu erklären, beseitigt. In der aërodynamischen Gleichung, welche man mit Berücksichtigung der Temperaturänderung in der bekannten Weise erhält, kommt als Summand ein Glied vor, welches mit dieser Temperaturänderung multiplicirt ist; dessen übrige Factoren
97 aber von derselben Ordnung sind, wie die übrigen Summanden der Gleichung; an diesem Gliede hatte Challis Anstoss genommen, weil es in der gewöhnlichen Behandlung der Gleichung nicht berücksichtigt würde. Moon erinnert daran, dass bei verschwindend kleinen Schwingungen die Temperaturänderung selbst verschwindend klein sei, und also das besprochene Glied, so lange es sich nur um die erste Annäherung handele, gegen die übrigen zu vernachlässigen sei, wie es bisher schon immer geschehen ist.

Doppler. Ueber ein Mittel, die Brechung der Schallstrahlen experimentell nachzuweisen und numerisch zu bestimmen. Wien. Sitzungsb. 1840. Mai 322*.

Hr. Doppler schlägt vor, das Phänomen der Brechung an den Oberflächen verschiedener Media und die Grösse des Brechungsverhältnisses beim Schall durch Beobachtung der totalen Reflexion zu bestimmen. In der That kann man aus dem Einfallswinkel, wo die totale Reflexion anfängt, das Brechungsverhältniss berechnen. Abgesehen von den experimentellen Schwierigkeiten der vorgeschlagenen Methoden, scheint eine theoretische Verwechslung dabei stattzufinden. Hr Doppler setzt voraus totale Reflexion beim Uebergang aus Wasser oder festen Körpern in Luft zu finden, wie es beim Lichte der Fall ist. Bei diesem haben allerdings die dichteren Körper 98 das stärkere Brechungsverhältniss, aber nur deshalb, weil in ihnen die Geschwindigkeit des Lichts die geringere ist. Beim Schall ist es umgekehrt. Bei der wesentlichen Verknüpfung, welche zwischen dem Brechungsverhältniss und den respectiven Fortpflanzungsgeschwindigkeiten besteht, müssen wir totale Reflexion des Schalls vielmehr beim Uebergang aus Luft auf Wasser oder feste Körper erwarten. Hr. Doppler deutet gewisse Beobachtungen, die bei der Messung der Schallgeschwindigkeit im Genfer See gemacht wurden, als totale Reflexion, indessen sind hier so viele andere Erklärungen möglich, dass darauf kein Schluss zu gründen ist.
