



桑木文庫
洋書
0001

ERNST ABBE
GESAMMELTE
ABHANDLUNGEN
ZWEITER BAND



JENA, VERLAG VON
GUSTAV FISCHER.
1906.

MARKET KADOSSHIGAIWA
BOOKS
BENKIN-4, SHIMONOSEKI
KURUMI, OKAYAMA KYOTO
社会式株嘉九

物理
08
A
1.2

九州帝國大學理學部
8153
物理學教室

桑木文庫
洋書
0001

理学部 洋 週及
022232002000025

九州大学蔵書



Gesammelte Abhandlungen

von

ERNST ABBE.



Zweiter Band.

Wissenschaftliche Abhandlungen aus
verschiedenen Gebieten.

Patentschriften.

Gedächtnisreden.

Mit 7 Tafeln und 16 Figuren im Text.



Verlag von Gustav Fischer in Jena.
1906.

圖書番号	800775
部門	
カード	



WAGLER
DEUTSCHE
LITERATUR
GESELLSCHAFT

物
0
1.3



Alle Rechte vorbehalten.



Vorwort.

Als vor zwei Jahren der erste Band dieser Sammlung ABBEScher Abhandlungen erschien, konnte S. CZAPSKI in der Vorrede noch die Hoffnung aussprechen, daß ABBE, der damals schwer leidend war, wieder die Kraft finden würde, um wichtige ältere Untersuchungen, theoretische und experimentelle, darzustellen und zu veröffentlichen. Diese Hoffnung hat sich nicht erfüllt. Jenes Leiden führte am 14. Januar 1905 zum Tode, und es besteht die traurige Gewißheit, daß mit ABBE manche wertvollen Resultate seiner Forschungen versunken sind, die in einer auch nur für seine Freunde zugänglichen Form zu fixieren er nie die Zeit gefunden hat.

Der vorliegende Band enthält zunächst, dem in der Vorrede zum ersten Band aufgestellten Plane gemäß, chronologisch geordnet die wissenschaftlichen Abhandlungen, die sich nicht speziell auf das Gebiet der Mikroskopie beziehen. Hier sollte möglichst alles wiedergegeben werden, was ABBE selbst seinerzeit der Veröffentlichung für wert gehalten hat. So sind z. B. auch zwei Referate über fremde Arbeiten (die Abhandlungen VI und IX) mit abgedruckt worden. Sie enthalten immerhin einiges von seinen eigenen Arbeiten und Ideen, das eine die Andeutung seiner auf das optische Glas gerichteten Untersuchungen, das andere den Hinweis auf die beschränkte Tragweite der GAUSSSchen Dioptrik und auf die Wichtigkeit des Studiums der Strahlenbegrenzung in optischen Systemen. — Der Unterzeichnete hält es für wahrscheinlich, daß ihm trotz langen Suchens doch noch hierher gehörige Veröffentlichungen entgangen sind, und bittet jeden Leser, der in der vorliegenden Sammlung eine Lücke findet, um freundliche Mitteilung.

In den zehn deutschen Patentschriften (Abhandl. XIX bis XXVIII) erscheint als Anmelderin die Firma CARL ZEISS in Jena; sie rühren aber nach Inhalt und Fassung von ABBE her. Da sie



in allen Fällen die einzige Publikation ABBES über den betreffenden Gegenstand bilden, so hielt sich der Unterzeichnete für verpflichtet, sie in die Sammlung mit aufzunehmen, wenn auch bei einigen die wissenschaftliche Bedeutung hinter die geschäftlich-technische zurücktritt.

Die Mehrzahl der Reden und Ansprachen ABBES wird in einem besonderen Bande gesammelt werden; die drei Gedächtnisreden, auf JOSEPH FRAUNHOFER, CARL ZEISS und HERMANN SCHÄFFER, sind bereits hier aufgenommen worden, da sie mehr dem Interesse der Leser dieses Bandes entsprechen, während die übrigen meist volkswirtschaftliche Fragen behandeln.

Bei der Arbeit der Herausgabe dieses Bandes waren dieselben Regeln maßgebend, nach denen sich H. AMBRONN bei der Herausgabe des ersten Bandes gerichtet hat: Der Abdruck der Abhandlungen ist genau nach dem Original erfolgt; nur offensichtliche Druckfehler sind korrigiert worden. Zusätze und Bemerkungen, die sich bei der Besorgung des Druckes nötig machten, sind in [] eingeschlossen.

Jena, den 27. Oktober 1905.

Dr. E. Wandersleb.

Inhalt.

Wissenschaftliche Abhandlungen aus verschiedenen Gebieten.

	Seite
I. Erfahrungsmässige Begründung des Satzes von der Äquivalenz zwischen Wärme und mechanischer Arbeit	1—32
II. Collimator-Mire auf dem Paulsthorne	33—40
III. Vorschlag zu einer veränderten Einrichtung der Meridian-Instrumente	41—54
IV. Ueber die Gesetzmässigkeit in der Vertheilung der Fehler bei Beobachtungsreihen	55—81
V. Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper. Mit Fig. 1—7 und Tafel I	82—164
VI. Referat: 1. Wilibald Schmidt, Die Brechung des Lichts in Gläsern, insbesondere die achromatische und aplantische Objectivlinse; 2. Derselbe, Die Lichtbrechung im Wasser, nach FRAUNHOFERS Beobachtungen	165—168
VII. Ueber die Bestimmung der Brechungs-Verhältnisse fester Körper mittelst des Refraktometers	169—179
VIII. Ueber die Bestimmung von Zeit und Polhöhe aus Beobachtungen in Höhenparallelen	180—189
IX. Referat: Galileo Ferraris, Die Fundamental-Eigenschaften der dioptrischen Instrumente	190—193
X. Productionsverzeichniss des glastechnischen Laboratoriums von Schott und Genossen in Jena	194—205
XI. Messapparate für Physiker. Mit Fig. 8—10	206—211
XII. Methode zur Ermittlung zeitlicher Variationen der Lothlinie	212—214
XIII. Apparat zur Bestimmung der Brennweite von Linsensystemen (Fokometer). Mit Fig. 11 u. 12	215—218
XIV. Ueber die Entstehung von Kometen und Meteoriten aus Planeten	219—229
XV. Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers bei der Bestimmung von Mittelwerthen durch Abzählen	230—235
XVI. Apparate zur Bestimmung des Brechungsexponenten und der Dispersion von Flüssigkeiten	236—238
XVII. Ueber einen mikrometrischen Apparat	239—242
XVIII. Ueber Folgerungen aus dem Interferenzprinzip	243—246



IV

Inhalt.

Seite

Patentschriften.

XIX. Doppelprisma für Refraktometer. Mit Fig. 13	249—252
XX. Fernrohrocular mit weit abliegendem Augenpunkt. Mit Fig. 14	253—256
XXI. Justirvorrichtung für Entfernungsmesser mit zwei Fernrohren. Mit Tafel II	257—261
XXII. Doppelfernrohr. Mit Tafel III	262—266
XXIII. Doppelfernrohr mit vergrössertem Objectivabstand. Mit Tafel IV	267—274
XXIV. Stereoskopischer Entfernungsmesser	275—282
XXV. Anamorphotisches Linsensystem. Mit Tafel V.	283—295
XXVI. Vorrichtung zur Betrachtung oder Wiedergabe eines Randtheiles von einem durch ein Linsensystem ent- worfenen Bilde. Mit Tafel VI	296—300
XXVII. Linsensystem mit Correction der Abweichungen schiefer Büschel. Mit Fig. 15 u. 16	301—310
XXVIII. Verfahren, sphäroidische Flächen zu prüfen und Ab- weichungen von der vorgeschriebenen Gestalt nach Lage und Grösse zu bestimmen. Mit Tafel VII.	311—316

Gedächtnisreden.

XXIX. Gedächtnissrede auf JOSEPH FRAUNHOFER	319—338
XXX. Nachruf auf Carl Zeiss.	339—341
XXXI. Gedächtnissrede auf HERMANN SCHÄFFER	342—346

Wissenschaftliche Abhandlungen
aus verschiedenen Gebieten.



I.
Erfahrungsmässige Begründung des Satzes
von der Aequivalenz zwischen Wärme und
mechanischer Arbeit.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
in Göttingen, 1861.

I. Vorbemerkung.

Unter den in der neueren Zeit ausgebildeten physikalischen Lehren findet sich seit ungefähr zwei Jahrzehnten eine auf die Wärmeerscheinungen gerichtete, welche unter dem Namen der mechanischen Wärmetheorie bekannt ist. — Ihren Gegenstand bilden ausschliesslich die Wirkungen der Wärme auf die ponderablen Körper, d. h. die Veränderungen, welche diese durch die Wärme erleiden. Ihr Ausgangspunkt ist, unmittelbar, der Satz der Aequivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit; in letzter Instanz basirt sie auf bestimmten Vorstellungen über das Wesen der Wärme, auf der Hypothese nämlich, dass deren physischer Grund in gewissen Bewegungszuständen materieller Theile beruhe. Sie steht also, was ihre Grundlage betrifft, auf gemeinschaftlichem Boden mit der Undulationstheorie; hinsichtlich ihres Gegenstandes und ihrer Aufgaben aber ergänzt sie letztere, indem sie die Wirkungen der Wärme in den Körpern aus den nämlichen Voraussetzungen zu erklären unternimmt, aus welchen die Undulationstheorie die an die Vorgänge der Wärmeverbreitung sich knüpfenden Erscheinungen ableitet.



Die Art und Weise, wie physikalische Theorien gebildet worden sind, zeigt einen mannigfach verschiedenen Charakter. Der einen geht eine umfassende Untersuchung der Erscheinungen auf dem Wege der Beobachtung und [4] Messung voraus, die, systematisch verfolgt, erst zu beschränkteren, dann zu allgemeineren Gesetzen führt und in ihnen sichere Stützpunkte darbietet, nach und nach immer bestimmtere Vorstellungen über den Zusammenhang der Erscheinungen zu begründen. Ein letzter abschliessender Schritt auf dieser Bahn lässt dann endlich eine vollendete Theorie hervortreten, die nun in dem Prozesse ihrer allmählichen Entstehung auch schon die Gründe ihrer Rechtfertigung vorfindet. In andern Fällen — und es ist die bei weitem grössere Zahl — verfolgt die Forschung den entgegengesetzten Weg. Der Erfahrung an einem schwachen Leitfaden vorausgehend, versetzt sie sich durch eine Hypothese gleich mitten in den unbekanntem Zusammenhang der Erscheinungen und deducirt aus ihm die Gesetze, welche, wenn er wirklich besteht, Folgen desselben sein müssen, um solche hernach mit den Ergebnissen der Beobachtung zu vergleichen und in der Uebereinstimmung zwischen beiden die Bestätigung der Hypothese zu finden. Die eigentliche Begründung der Theorie ist alsdann eine durchaus regressiv; sie geschieht im Herabsteigen von ihrem vorweggenommenen Principe zu den speciellen Folgerungen, die einer experimentellen Controlle fähig sind.

Bei der mechanischen Wärmetheorie liegt dieser letztere Fall vor. Der Satz der Aequivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit, von welchem sie ausgeht, ist notorisch nur aus wenigen vereinzelt Wahrnehmungen anticipirt, — wie z. B. aus der Rolle, welche die Wärme in den Dampfmaschinen spielt u. dgl., — ohne dass von diesen, in Ermangelung aller quantitativen Bestimmungen, irgend ein directer Beweis für seine Richtigkeit hergenommen werden konnte. Ihre Rechtfertigung beruht daher allein in der Entwicklung ihrer Consequenzen, mit dem nachträglichen Beweise der Uebereinstimmung dieser mit der Erfahrung, und ihre ganze Ausbildung ist denn auch vorzugsweise darauf gerichtet gewesen, aus dem Satze der Aequivalenz solche Folgerungen über das Verhalten der [5] Körper zu ziehen, die einer Prüfung durch Beobachtung und Messung zugänglich sind.

In Rücksicht auf dieses Ziel hat nun ein kleiner Kreis von sonst wenig beachteten Erscheinungen eine besondere Bedeutsamkeit gewonnen — das sind die Wärmewirkungen, welche bei den

Gasen durch Condensation oder Dilatation hervorgebracht werden. Abgesehen davon, dass die hier auftretenden Vorgänge ihrer Natur nach sich am unmittelbarsten unter den Gesichtspunkt der mechanischen Wärmetheorie stellen (indem mechanische Wirkungen direct mit Wärmeeffecten verbunden erscheinen), haben dieselben den Vorzug, dass die maassgebenden physischen Verhältnisse bei ihnen nicht nur genau erforscht, sondern überdies von sehr einfacher Art sind. Das MARIOTTE'sche und GAY-LUSSAC'sche Gesetz, welche den von den gasförmigen Stoffen annähernd erreichten Grenzzustand der Körper charakterisiren, in Verbindung mit den Bestimmungen über die Wärmecapacität, machen den Inbegriff dieser Verhältnisse aus; die genannte Erscheinungsreihe bietet somit die Garantie, dass die Wirklichkeit auch den Bedingungen entspricht, auf welchen die theoretische Vorausbestimmung fusst, also die Forderungen erfüllt sind, an welche überhaupt die Möglichkeit einer Vergleichung von Theorie und Erfahrung geknüpft ist. — Diese Erscheinungen haben daher in der That die erste entscheidende Prüfung, resp. Bestätigung der Theorie herbeigeführt.

Wenn man nun näher nachsieht, wie in diesem Falle die Ergebnisse der Beobachtung zur Controlle der Theorie verwandt worden sind, so tritt ein beachtenswerther Umstand hervor. — Im allgemeinen sind zwei Arten einer solchen Controlle denkbar. Einmal können die Ergebnisse einzelner Messungen unmittelbar mit den Resultaten der Theorie verglichen werden; es kann aber auch die experimentelle Untersuchung der Erscheinungen selbständig zu mehr oder minder umfassenden Gesetzen geführt haben, und dann sind es diese Gesetze, d. h. die Formen der hierdurch festgestellten quantitativen Abhängigkeit von [6] Bedingung und Erfolg, welche das Ziel der Vergleichung werden. — Das zweite ist hier der Fall. Soweit die genannten Vorgänge bei den Gasen in Betracht kommen, sind es nicht einzelne Messungsergebnisse, von welchen die mechanische Wärmetheorie den Beweis für die Richtigkeit ihrer Voraussetzungen hernimmt; es sind vielmehr (vorzugsweise wenigstens) gewisse allgemeine Relationen, auf deren Zusammentreffen mit den aus ihr abgeleiteten sie sich beruft, Relationen, die schon lange, bevor man an eine theoretische Begründung dachte, auf rein experimentellem Wege festgestellt waren (die Constanz des Verhältnisses der beiden Wärmecapacitäten der Luft, — das Gesetz, dass gleiche Volumina der verschiedenen Gase, um gleiche Bruchtheile comprimirt, dieselbe Wärmemenge entwickeln, u. a.).



Diese Betrachtung legt die Frage nahe, ob solche allgemeine Relationen, welche dadurch, dass sie sich ihrer Form nach als Consequenzen aus dem Principe der Theorie herausstellen, dessen Gültigkeit beweisen, nicht auch umgekehrt ausreichen, dieses Princip, von den Erscheinungen ausgehend, durch ihre Vermittelung wirklich abzuleiten; mit andern Worten, ob sie nicht auch eine genügende Grundlage zu einer progressiven Begründung der mechanischen Wärmetheorie, wenigstens für den Bereich der permanenten Gase, darbieten möchten. — Den Nachweis dieser Zulänglichkeit zu liefern, und die vorhandenen Beobachtungsergebnisse auf diesem Wege zu verwerthen, stelle ich mir hier zur Aufgabe; — nicht als ob ich meinte, dass die mechanische Wärmetheorie eines derartigen Nachweises zu ihrer völligen Bestätigung noch bedürfte, sondern nur in Absicht auf das formale oder methodische Interesse, welches jede directe, progressive Begründung eines allgemeinen und weitgreifenden Naturgesetzes schon insofern haben möchte, als der Beispiele so sehr wenige sind, wo eine solche möglich gewesen und wirklich ausgeführt worden ist.

Diese Aufgabe nun kommt offenbar darauf [7] zurück, den angegebenen Kreis von Erscheinungen, — die Temperaturveränderungen, welche die Gase durch Compression oder Dilatation erleiden — unabhängig von jeder theoretischen Voraussetzung zu erforschen, nämlich aus den Resultaten der Beobachtung und Messung die Gesetze abzuleiten, welche die fraglichen Vorgänge in ihrem quantitativen Verlaufe beherrschen. Lässt sich dies vollständig und in der erforderlichen Allgemeinheit ausführen — und der Erfolg wird es zeigen — so muss in diesen Gesetzen implicite schon das Theorem enthalten sein, welches die mechanische Wärmetheorie zum Ausgangspunkte ihrer Untersuchungen macht, und muss sich vermöge einer mathematischen Analyse daraus entwickeln lassen. Ich habe daher nur darzulegen, wie die zur Zeit vorliegenden Experimentaluntersuchungen dazu verwandt werden können, die gedachten Wärmeerscheinungen bei den Gasen auf rein erfahrungsmässigem Wege bis zur Aufstellung eines solchen allgemeinen Gesetzes zu verfolgen.

Der hierbei einzuschlagende Gang ist durch die Natur des Gegenstandes hinreichend vorgezeichnet. — Die Erscheinung, um die es sich handelt, liegt, so wie sie unmittelbar der Beobachtung sich darbietet, in den Temperaturveränderungen, welche die verschiedenen Gasarten zeigen, wenn sie ohne Wärmeaustausch mit

der Umgebung verdichtet oder verdünnt werden. Es wird sich also zuerst darum handeln, die Gesetze für das Verhalten der einzelnen Gase rücksichtlich dieses Vorganges zu entdecken, d. h. die Abhängigkeit festzustellen, welche zwischen den Aenderungen des Volums (oder der Dichte) und denen der Temperatur besteht, — oder auch statt dessen die Regel, nach welcher während der Volumveränderung die Temperatur selbst mit der Dichte variirt. Der nächste Schritt wird darauf gerichtet sein, diese partiellen Gesetze nach zwei Seiten hin zu erweitern — einmal, sie loszutrennen von der beschränkenden Bedingung (des verhinderten Wärmeaustausches), an die ihre Gültigkeit geknüpft ist; ferner aber, sie unter ein allgemeineres Gesetz zu [8] subsumiren, welches alle Gase gleichzeitig umfasst. Dieses letztere wird alsdann unmittelbar auf die Relation führen, die das Grundtheorem der mechanischen Wärmetheorie ausmacht.

Ich wende mich jetzt zum ersten Theile der Aufgabe, und zwar beginne ich damit, die experimentellen Daten nachzuweisen, welche, zunächst für die atmosphärische Luft, das Gesetz der Temperaturänderungen vollständig festzustellen erlauben.

II. Ableitung des Gesetzes der Temperaturänderungen bei den verschiedenen Gasen.

Es liegt meinem Zwecke fern, eine geschichtliche Darstellung der verschiedenen Experimentalarbeiten zu geben, welche die fraglichen Erscheinungen zum Gegenstande haben; es handelt sich nur um diejenigen darunter, die in ihren Resultaten eine genügende Grundlage zur Auffindung ihrer Gesetze darbieten. Ich wende mich daher sogleich zu derjenigen Experimentalarbeit, welche allein eine vollständige Reihe von Messungen geliefert hat — zu der von GAY-LUSSAC und WELTER im Jahre 1823 (auf LAPLACE'S Veranlassung, wie es scheint) unternommenen Versuchsreihe, deren Ergebniss sich in der *Méc. céleste* T. V. L. 12¹⁾ niedergelegt findet. Von dieser muss ich zunächst reden, um darzulegen, welcher Art die durch sie gewonnenen Bestimmungen sind, und wie sich dieselben für den angegebenen Zweck verwerthen lassen.

Für die Anlage dieser Experimentaluntersuchung ist ein besonderer Umstand wesentlich maassgebend gewesen. Es ist bekannt, dass LAPLACE zuerst die lange Zeit räthselhafte Abweichung

1) [Oeuvres DE LAPLACE, Tome 5^{me}. 4^o, V u. 540 pp. Paris 1846. pp. 143 ff.]



der nach der NEWTON'schen Formel berechneten Geschwindigkeit der Schallfortpflanzung von der durch Beobachtung gefundenen aus den Temperaturänderungen, die in den Schallwellen eintreten, erklärte, indem [9] er so für die Vermutung LAGRANGE's, dass die Luft bei rascher Veränderung ein anderes als das MARIOTTE'sche Gesetz befolge, den physischen Grund auffand. BRÖT und POISSON, welche zuerst diesen Wärmewirkungen in der mathematischen Theorie der Schallfortpflanzung Rechnung trugen, zeigten, dass unter Berücksichtigung derselben dem NEWTON'schen Ausdrücke für die Schallgeschwindigkeit

$$v^2 = g \cdot \frac{p}{\rho} = g k (1 + a t)^{-1}$$

noch ein Factor λ zugefügt werden müsse, den sie durch die Gleichung

$$\lambda = 1 + \frac{a}{1 + a t} \cdot \frac{\omega}{\delta} \dots \dots \dots (1)$$

definirten, wo ω die Temperaturänderung bedeutet, welche durch eine kleine Verdichtung δ hervorgebracht wird (unter letzterer verstanden die Dichtigkeitszunahme gemessen durch die anfängliche Dichte). Folglich verlangte die theoretische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit die vorherige experimentelle Ermittlung noch einer neuen Constanten, und zwar nicht nur für einen einzigen, sondern, wenn es auf eine vollständige Beherrschung aller Verhältnisse abgesehen war, für alle möglichen, nach Dichte und Temperatur verschiedenen Zustände der Luft, also die Ermittlung der Regel, nach welcher diese Constante von ρ und t abhängt.

Diese Vervollständigung der empirischen Daten zu [10] dem Zwecke, die Theorie der Schallfortpflanzung mit der Beobachtung in Einklang zu bringen, bezüglich die LAPLACE'sche Erklärung der Abweichung an der Erfahrung zu prüfen, scheint das einzige Ziel gewesen zu sein, welches GAY-LUSSAC und WELTER bei ihrer Untersuchung vor Augen hatten. Der hierbei einzuschlagende Weg war

1) Ich stelle hier die Zeichen für die im Folgenden immer wiederkehrenden Grössen zusammen; es bedeutet

ρ die (Gewichts-) Dichte, das Gewicht der Volumeneinheit des Gases;

p die Spannung, den Druck auf die Flächeneinheit;

t die Temperatur;

k den Quotienten $\frac{p}{\rho}$, d. h. die ideale Druckhöhe oder den Elasticitätsmodulus des Gases, für den Anfangspunkt der Temperaturskala;

g, a , wie gewöhnlich.

ihnen durch die angeführte Definition der zu bestimmenden Grösse an die Hand gegeben. Es kam darauf an, für möglichst viele nach Dichte und Temperatur verschiedene Zustände der Luft zusammengehörige Werthe einer kleinen Verdichtung (oder Verdünnung) und der bewirkten Temperaturänderung zu messen, um aus einem Systeme solcher Bestimmungen die entsprechenden Werthe der Constanten λ herzuleiten.

Die Beobachtungsmethode, deren sich die französischen Physiker bedienten, beruht ihrem Wesen nach darauf, durch das Verhalten der Luft selbst die Temperaturänderungen zu erkennen, welche sie infolge von Compression oder Expansion erfährt, also den Träger der zu messenden Wirkungen auch zugleich als Mittel der Messung, als Thermometer, zu verwenden. — Wenn frühere Physiker mit Hilfe eines besonderen Thermometers die Erwärmung oder Abkühlung eines Luftquantums bei plötzlicher Volumänderung bestimmen wollten, so hatten sie offenbar mit einem äusserst complicirten Vorgange zu thun. Es trat ein Wärmeaustausch mit den Gefässwänden und der Masse des Thermometers ein; was man an diesem beobachtete, war nur das schliessliche Resultat eines sehr verwickelten Mischungsprozesses, und Niemand konnte von diesem auf die unbekannte Anfangstemperatur der Luftmasse zurückschliessen. Wie man sieht, hat daher die Erfindung eines directen Verfahrens der Temperaturmessung die genauere experimentelle Untersuchung der vorliegenden Erscheinungen allererst möglich gemacht. Ein solches aber ist schon durch das Princip der Temperaturbestimmung selbst an die Hand gegeben. Die Skale der Temperatur (insofern man diese nach dem Luftthermometer [11] rechnet) ist bekanntlich in absoluten Maassen definirt durch die Werthe der Constanten, die im MARIOTTE'schen Gesetze auftritt, d. i. des Quotienten $\frac{p}{\rho}$ oder des Elasticitätsmodulus der Luft. Eine arithmetische Reihe der Werthe desselben stellt die Temperaturskala fest; und zwar ist die Gradeinheit durch einen unveränderlichen Bruchtheil ($a = \frac{1}{273}$) von derjenigen Grösse bestimmt, die ihm unter den Verhältnissen des schmelzenden Eises zukommt. Die Gleichung, welche man als das MARIOTTE-GAY-LUSSAC'sche Gesetz bezeichnet

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} (1 + a t) = k (1 + a t)$$

ist somit nichts anderes als die unmittelbare Definitionsgleichung



der Temperatur, und es folgt daraus von selbst, dass die directe Temperaturbestimmung in einem Luftquantum der Natur der Sache nach auf die Messung des Elasticitätsmoduls, d. i. auf die Messung von Druck und Dichte, zurückkömmt.

Nach diesen Grundsätzen¹⁾ haben GAY-LUSSAC und WELTER ihre Beobachtungen angestellt, indem sie sich zur praktischen Ausführung eines Verfahrens bedienten, das schon vor ihnen, in nur wenig anderer Gestalt von CLÉMENT u. DESORMES zu gleichem Zwecke angewandt worden war. In einem grossen Ballon comprimierten sie die Luft (vollkommen ausgetrocknet) um einen geringen Bruchtheil über den äussern Druck, führten sodann durch Oeffnen des Ballons eine plötzliche Ausgleichung der Spannung, d. h. Dilatation des eingeschlossenen Luftquantums herbei und schlossen hierauf jenen rasch wieder ab. Mit Hülfe von Quecksilberhöhen wurden die drei auf einander folgenden Werthe der Spannung gemessen, nämlich die anfängliche der comprimierten Luft, β , die Ausgleichungsspannung, [12] d. h. der Druck der äussern Atmosphäre, β' , endlich diejenige Spannung, welche die Luft zeigte, nachdem die eingetretene Temperaturerniedrigung wieder völlig verschwunden war, β'' . Diese bieten die hinreichenden Daten, sowohl die stattgehabte Ausdehnung δ , als auch die dadurch bewirkte Temperaturänderung ω zu berechnen; wie man leicht sieht, hat man

$$\delta = \frac{\beta'' - \beta}{\beta}$$

und, wenn t die Anfangstemperatur bezeichnet,

$$\omega = \frac{1 + at}{a} \cdot \frac{\beta' - \beta''}{\beta'}$$

woraus die Grösse des Coefficienten λ , auf dessen Ermittlung es ankam, ohne weiteres herzuleiten ist.

Eine derartige Bestimmung haben GAY-LUSSAC und WELTER bei sehr verschiedenen Zuständen der Luft ausgeführt; nach LAPLACE'S Angabe (a. a. O.)²⁾ umfassen ihre Versuche einen Spielraum, hinsichtlich der Temperatur von -20° bis $+40^\circ$ cent., hinsichtlich des Druckes von ca. 0,2 bis 2 Atmosphären; und das Resultat ihrer Untersuchung ist gewesen: dass der so bestimmte Coefficient λ von

1) Der erste, der von ihnen Gebrauch gemacht hat, ist DALTON, welcher sich freilich zur Ausführung nur sehr roher Hülfsmittel bediente. ([Versuche über Wärme und Kälte, die bei mechanischer Verdichtung und Verdünnung der Luft entstehen.] GILBERT'S Annalen, Bd. 14 [1803, pp. 101—111.])

2) [Vgl. die Anm. auf S. 5.]

Temperatur und Dichte ganz unabhängig ist, — eine Constante darstellt, deren numerischen Wert sie = 1,349 fanden.

Dieses Resultat bietet eine genügende Grundlage für die Feststellung des Gesetzes der fraglichen Erscheinung dar und ist auch in der That hierzu schon benutzt worden; jedoch lässt sich gegen die Art und Weise, in der solches geschehen, manches einwenden. — LAPLACE hat statt der ursprünglichen Definition der Grösse λ , auf welche sich ihre experimentelle Bestimmung gründet, eine andere mittelbare eingeführt, das Verhältniss der Wärmecapacität der Luft bei constantem Drucke zu der bei constantem Volum; und in Anschluss an diese Deutung von λ hat nun er selbst, sowie auch POISSON¹⁾, mit Hülfe noch anderer [13] Voraussetzungen, aus dem genannten Beobachtungsergebnisse verschiedene Consequenzen abgeleitet, welche zuletzt auf das Gesetz der Abhängigkeit zwischen Dichte und Temperatur (oder Spannung) in einer comprimierten Luftmasse hinführen. — Es muss zunächst schon auffallen, dass hierbei Begriffe herangezogen sind (wie der der Wärmemenge und Wärmecapacität), welche der Erscheinung an sich. — wenn man blos die Temperaturänderungen im Auge hat, — fern stehen; aber selbst abgesehen hiervon, haben sich (worauf ich hier nicht näher eingehen kann) die Hypothesen, auf welche LAPLACE und POISSON ihre Entwicklung gründen, als unzulässig erwiesen, wie denn auch andere von ihnen daraus abgeleitete Folgerungen als mit der Erfahrung im Widerspruch befunden worden sind.

Man kann jedoch ohne Schwierigkeit das Ergebniss der oben beschriebenen Versuche GAY-LUSSAC'S und WELTER'S unmittelbar und ohne die Hülfe neuer Hypothesen zur Begründung des Gesetzes der betrachteten Vorgänge verwenden, da es für sich allein schon alle hierzu erforderlichen Bestimmungen darbietet.

Aus der Natur der Aufgabe weiss man im Voraus, welcher Art das Gesetz ist, um dessen Auffindung es sich handelt. Man kennt es offenbar vollständig, wenn man die Regel kennt, nach welcher in einer comprimierten oder dilatirten Luftmasse die Temperatur (oder auch die Spannung) von der veränderlichen Dichte abhängt, d. h. wenn man t als Function von ρ ausgedrückt hat. Man braucht also nur zu fragen: in welcher Beziehung stehen die bei den beschriebenen Versuchen gemessenen Grössen zu dem gesuchten Abhängigkeitsgesetze? — welche Bedeutung kommt ihnen in Rücksicht auf die unbekannt Function zu?

1) Traité de Mécanique [2^{me} éd. Paris, Bachelier, 1833.] T. II., 633 [p. 637] ff.



Die französischen Physiker stellten ein Luftquantum von bestimmter Dichte und Temperatur dar und beobachteten den Temperaturzuwachs, welcher einer kleinen Aenderung der Dichte entspricht. Die anfänglichen Werthe von ϱ und t gaben die Verhältnisse, unter denen der Versuch [14] stattfand; er selbst diente nur zur Bestimmung des Quotienten $\frac{\omega}{\delta}$, auf dessen Bedeutung es daher allein ankommt. Bezieht man ω (welches unmittelbar die Temperaturzunahme Δt vorstellt) statt auf die relative Verdichtung δ auf die absolute Zunahme der Dichte, $\Delta \varrho$, so ist für $\frac{\omega}{\delta} \varrho \frac{\Delta t}{\Delta \varrho}$ zu setzen; da nun ϱ schon durch die Verhältnisse des Versuchs gegeben ist, so kann man die Ermittlung des Quotienten $\frac{\Delta t}{\Delta \varrho}$ als das eigentliche Ziel des letzteren bezeichnen. Dieser aber hat seine ganz bestimmte Bedeutung in der unbekanntem Function, welche den Zusammenhang zwischen Temperatur und Dichte ausdrücken soll; er giebt das Verhältniss zusammengehöriger Zunahmen von t und ϱ für die Anfangswerthe beider beim Versuche. Und nun leuchtet ein: da sich die Messungen nur auf sehr kleine Aenderungen beschränkten, so darf dieser empirisch bestimmte Differenzquotient als mit seinem Grenzwerthe für verschwindende Incremente zusammenfallend angesehen, er darf also für das wahre Wachstumsverhältniss von t und ϱ in einer verdichteten oder verdünnten Luftmasse oder für den Differentialquotienten der gesuchten Function genommen werden. Damit lässt sich dann das Resultat der beschriebenen Versuche folgendermassen aussprechen: GAY-LUSSAC und WELTER haben für eine Reihe verschiedener Zustände der Luft jedesmal den Differentialquotienten $\frac{dt}{d\varrho}$ gemessen, und aus dem erhaltenen Systeme solcher Bestimmungen, auf der einen Seite dieses Differentialquotienten, auf der andern der Werthe von t und ϱ , für welche er gilt, haben sie die Relation hergeleitet

$$\frac{a\varrho}{1+at} \cdot \frac{dt}{d\varrho} = \text{Const.} = \lambda - 1 \dots \dots \dots (2)$$

Hiermit ist aber die Aufgabe im Wesentlichen schon gelöst. Die vorstehende, aus den Beobachtungen begründete Gleichung ist die Differentialgleichung des gesuchten Abhängigkeitsgesetzes zwischen t und ϱ , und es ist nur noch [15] eine rein mathematische Arbeit, daraus dieses selbst herzuleiten. Eine einfache Integration ergibt

$$\log. \text{ nat.} \left(\frac{1}{a} + t \right) = \lambda - 1 \log. \text{ nat.} \varrho + C,$$

und bestimmt man die Constante durch zusammengehörige Werthe von t und ϱ , die einem beliebigen Anfangszustande t_1, ϱ_1 entsprechen, so erhält man schliesslich

$$\frac{\frac{1}{a} + t}{\frac{1}{a} + t_1} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_1} \right)^{\lambda - 1} \dots \dots \dots (3)$$

als Ausdruck des gesuchten Gesetzes der Temperaturveränderung in einer comprimirten oder dilatirten Luftmasse. Führt man statt der Temperatur die Spannung ein, vermöge der bekannten Gleichung, welche beides auf Grund der Definition des Temperaturmaasses aufeinander reducirt, so wird die vorstehende Differentialgleichung:

$$\frac{\varrho}{p} \cdot \frac{dp}{d\varrho} = \lambda \dots \dots \dots (4)$$

(in welcher Form sie natürlich gleich Anfangs aus den Beobachtungen hätte abgeleitet werden können, indem diese unmittelbar grade die Spannungsänderungen bestimmen), und die Abhängigkeit von Spannung und Dichte selbst wird durch die Gleichung dargestellt:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_1} \right)^\lambda \dots \dots \dots (5)$$

Es sind dies die bekannten Gesetze, welche schon LAPLACE und POISSON auf ihrem, wie oben bemerkt, indirecten Wege gefunden haben.

Für die atmosphärische Luft ist somit diese erste Aufgabe erledigt. Es bleibt noch übrig, auch bei den andern permanenten Gasen die Gesetze ihres Verhaltens festzustellen.

Genau genommen ist nun die erfahrungsmässige Grundlage für diesen Zweck unzulänglich. Es liegt bis jetzt keine Versuchsreihe vor, welche für irgend ein anderes Gas das fragliche Gesetz mit derselben Sicherheit abzuleiten [16] erlaubte, wie es bei der Luft auf Grund der Beobachtungen von GAY-LUSSAC und WELTER geschehen konnte. Statt eines umfassenden Systemes von Messungen, wie es letztere darbieten, hat man für die übrigen Gase nur einzelne Bestimmungen dieser Art. Indess lässt sich durch eine sehr wahrscheinliche Annahme diese Lücke so weit ergänzen, dass selbst diese vereinzelt Daten schon eine genügende Basis darzubieten ver-



mögen; durch die Annahme nämlich, dass jenes Gesetz für alle verschiedenen Gase von derselben Art sei, d. h. durch einen mathematischen Zusammenhang von gleicher Form, wie der für den Fall der atmosphärischen Luft streng begründete, dargestellt werde. Und die Zulässigkeit dieser Hypothese wird kaum bezweifelt werden können, insofern man dabei nur die permanenten Gase im Auge hat, d. h. diejenigen, welche ohne merklichen Fehler als Repräsentanten des idealen Grenzzustandes der Körper betrachtet werden dürfen, der durch die Constanz des Elasticitätsmoduls und des Ausdehnungscoefficienten charakterisirt ist.

Diese Voraussetzung nun beschränkt die mögliche Verschiedenheit der individuellen Gesetze bei den einzelnen Gasen lediglich auf eine Verschiedenheit in den Werthen der darin auftretenden Constanten λ , welche demnach auch für alle durch die nämliche Differentialgleichung, wie bei der atmosphärischen Luft, definirt bleibt. (Gleich. (2) und (4).)

Mithin bestimmt sich der Werth dieser Constanten für sämtliche Gasarten in gleicher Weise aus einer Gruppe zusammengehöriger Werthe der drei Grössen $\frac{dt}{d\varrho}$, ϱ , t oder $\frac{dp}{d\varrho}$, ϱ , p , und es genügt also zu ihrer numerischen Berechnung, nur für je einen einzigen Zustand letztere experimentell ermittelt zu haben. — DULONG hat diese Daten in seiner bekannten Arbeit über die Wärmecapacität der Gase¹⁾ geliefert; er hat in der That für eine Reihe von [17] cent. Temp. zusammengehörige Werthe der drei Bestimmungsstücke ϱ , p , $\frac{dp}{d\varrho}$ gemessen, wie GAY-LUSSAC und WELTER für die verschiedenen Zustände der Luft gethan haben. Die Methode indess, nach welcher DULONG den Werth von $\frac{dp}{d\varrho}$ ermittelte, ist von der erstgenannten Physiker wesentlich verschieden. Während diese das Wachstumsverhältniss von p u. ϱ durch wirkliche empirische Messung correspondirender Zunahmen näherungsweise bestimmten, gelangt DULONG direct dazu, indem er einen physischen Vorgang zu Hülfe nimmt, bei welchem der Differentialquotient $\frac{dp}{d\varrho}$ als solcher als maassgebendes Bestimmungsstück auftritt, so dass umgekehrt der beobachtete Erfolg auf ihn zurückschliessen lässt. Es ist der Vor-

1) [Untersuchungen über die spezifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten.] POGGENDORFF's Annalen, Bd. 16. [1829. pp. 438—479.]

gang der Schallfortpflanzung, welcher in diesem Sinne Verwendung findet, und zwar ist es die Geschwindigkeit, mit welcher dieselbe in den verschiedenen elastischen Medien vor sich geht, welche die Bestimmungen vermittelt. Die Grundlage der Methode muss sonach wesentlich in dem theoretischen Nachweise des Zusammenhangs gesucht werden, welcher zwischen obigem Vorgange und dem Abhängigkeitsgesetze von Spannung und Dichte in den elastischen Flüssigkeiten besteht. LAPLACE und POISSON haben nun die Theorie der Schallfortpflanzung nach dieser Richtung hin vollständig entwickelt, und oben ist auch schon beiläufig das Resultat, zu welchem diese Entwicklung geführt hat, angegeben worden — dass nämlich, unter Berücksichtigung der Temperaturveränderungen, die mit der Dichtigkeitsänderung in den Schallwellen verbunden sind, die Schallgeschwindigkeit in einem Gase statt durch den NEWTON'schen Ausdruck durch die Gleichung

$$v^2 = g \cdot \lambda \cdot \frac{p}{\varrho}$$

bestimmt sei. Sie gelangen zu dieser Formel, indem sie die Wärmewirkungen unmittelbar in Form einer Correction zum MARIOTTE'schen Gesetze in Rechnung bringen¹⁾, [18] und so ergibt sich als Correctionsfactor der ursprüngliche Ausdruck

$$1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha t} \cdot \frac{\omega}{\delta}$$

für die mit λ bezeichnete Grösse.

Genau genommen stehen indess diese Wärmewirkungen, obzwar der physische Grund der Spannungsänderungen, insoweit diese vom MARIOTTE'schen Gesetze abweichen, ganz ausserhalb der mathematischen Theorie der Schallfortpflanzung. Der Natur des Problems gemäss können dabei, wofern man das Physikalische vom Dynamischen getrennt hält, direct offenbar nur die Aenderungen des Druckes und der Dichte in dem elastischen Medium und das Abhängigkeitsgesetz zwischen beiden in Betracht kommen, während deren Ursachen ganz ausser Spiel bleiben; und in der That lässt sich auch, wie es durch Prof. RIEMANN kürzlich geschehen²⁾, die Grundgleichung für die Schallfortpflanzung ganz allgemein entwickeln, ohne über jenes Gesetz irgend eine bestimmte Annahme zu machen.

1) POISSON, Traité de Mécanique [2^{me} éd. Paris, Bachelier, 1833.] T. II. 656 [p. 693] ff.

2) Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen [von endlicher Schwingungsw. Götting. Nachr., 1859, pp. 192—197.]



Es zeigt sich dann, dass die Schallgeschwindigkeit allein bedingt ist durch den Werth des Wachstumsverhältnisses $\frac{dp}{dQ}$ zwischen Druck und Dichte, welcher dem Gase unter den betreffenden Verhältnissen zukommt, indem nämlich ihr Ausdruck wird

$$v^2 = g \frac{dp}{dQ}$$

Mithin kann auch umgekehrt aus der beobachteten Größe der v unmittelbar auf nichts anderes zurückgeschlossen werden, als auf dieses Wachstumsverhältniss, wie es während der rasch erfolgenden Compressionen und Dilatationen in den Schallwellen besteht. — In diesem Sinne ist es gemeint, wenn ich oben sagte, DULONG habe [19] für jedes Gas zusammengehörige Werthe der drei Grössen $\rho, p, \frac{dp}{dQ}$ gemessen, und daraus den Werth von λ vermöge der Relation (4) abgeleitet; es wird hierin im Wesentlichen dadurch nichts geändert, dass man diese Relation mit in den Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit aufnimmt, indem man ihn in der Form

$$v^2 = g \lambda \frac{p}{Q}$$

schreibt, und nun λ direct aus v^2 berechnet.

Auf die Methode, deren sich DULONG zur indirecten Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen bedient hat, brauche ich hier nicht näher einzugehen, und ebenso wenig würde es einen Zweck haben, die für λ gefundenen Zahlen hier zusammenzustellen, da ich weiter unten noch einmal auf die Resultate dieser nach mehr als einer Seite hin interessanten Experimentalarbeit zurückkommen werde.

III. Ableitung des Gesetzes für die Integralwerthe der Compressionswirkung.

Durch das Bisherige sind für eine Reihe verschiedener Gase die Gesetze festgestellt, welche die Erscheinung, die den Gegenstand der Untersuchung bildet, beherrschen; und es sind die vollständigen Gesetze, wenn man die Erscheinung unter der bis jetzt festgehaltenen Beschränkung betrachtet: dass während der Volumänderung jeder Wärmeaustausch mit der Umgebung ausgeschlossen ist.

Wiewohl nun letzteres die Bedingung ist, an welche sich das ungestörte Zustandekommen der Erscheinung geknüpft erweist,

so bemerkt man doch, dass die fraglichen Wirkungen an sich keineswegs an diese Beschränkung gebunden sind. Die thermometrischen Wirkungen der Dichtigkeitsänderung in den Gasen bleiben offenbar auch bestehen, [20] wenn jene Voraussetzung nicht erfüllt ist, nur dass sie alsdann nicht den früheren Erfolg hervorbringen, indem letzterer durch die hinzutretenden äussern Einflüsse mehr oder minder modificirt wird. — Es entsteht daher nun die weitere Forderung: ein allgemeines Gesetz anzugeben, nach welchem die von den Dichtigkeitsänderungen herrührenden Temperaturänderungen unter allen Verhältnissen, auch da, wo sie sich mit andern Wirkungen combiniren, bestimmt werden können.

Man denke sich ein Gasquantum condensirt oder expandirt, aber so, dass während dessen seine factische Temperatur (durch Wärmezuführung oder -entziehung) willkürlich modificirt wird. — Die Aenderung der Dichte bringt für sich nach einer bestimmten Regel eine Aenderung der Temperatur hervor. Wenn die factische Temperatur nicht dieser gemäss verläuft, so kann dies nur dadurch geschehen, dass sich noch eine zweite Temperaturveränderung mit jener combinirt. Man muss also während des Compressionsvorganges zwei verschiedene Temperaturänderungen gleichzeitig neben einander hergehend denken; die eine entspringt aus der thermometrischen Wirkung der Compression, die andere aus den fremdartigen Wärmeeinflüssen; und der factische Temperaturverlauf muss als die Resultante aus beiden angesehen werden. — Die Frage ist: wie setzt sich diese Resultante aus den Einzelwirkungen zusammen; und wie kann der Gesamterfolg wieder in seine Bestandtheile zerlegt werden?

Die Gasmasse sei durch die Compression oder Dilatation bei einem bestimmten Zustande, ρ, ϑ angekommen (indem ich jetzt die wirklich eintretenden Temperaturen durch ϑ bezeichne). Der weitere Verlauf hängt davon ab, wie von diesem Momente an die Temperatur mit der Dichte wächst vermöge der äusseren Einwirkung und wie vermöge der blossen Dichtigkeitsänderung. Das erste Wachstum werde durch $\frac{d\tau}{dQ}$, das zweite durch $\frac{dt}{dQ}$ bezeichnet; [21] dann ist dasjenige der factischen Temperatur ϑ offenbar die algebraische Summe dieser, also

$$\frac{d\vartheta}{dQ} = \frac{d\tau}{dQ} + \frac{dt}{dQ} \dots \dots \dots (6)$$

welche Gleichung mithin die Grundgleichung für das Fortschreiten



der Temperaturänderung in jedem Augenblicke darstellt. — Es muss nun $\frac{d\tau}{d\varrho}$ als eine gegebene Function von ϱ angesehen werden, insofern dadurch erst die Art der äussern Einwirkung festgestellt ist; es bleibt also nur $\frac{dt}{d\varrho}$ zu bestimmen übrig.

Wie die Temperatur in einem beliebigen Augenblicke mit der Dichte wachsen würde, wenn das Gas nicht gleichzeitig von aussen einer Temperaturänderung unterworfen wäre, ist oben schon festgestellt; die durch die Beobachtungen von GAY-LUSSAC und WELTER begründete Gleichung (2), aus welcher

$$\frac{dt}{d\varrho} = \frac{1}{\lambda-1} \cdot \frac{a+t}{\varrho}$$

folgt, liefert diese Bestimmung. Man übersieht nun aber: Das Gesetz, nach welchem die Temperatur in jenem Falle wachsen würde, ist zugleich dasjenige, nach welchem sie unter allen Verhältnissen vermöge der Verdichtung wächst, sofern man nur die sehr nahe liegende Annahme machen darf, dass eine gleichzeitig nebenhergehende äussere Einwirkung den Effect der Dichtigkeitsänderung nicht in seinem continuirlichen Entstehen, sondern nur in seinem Erfolge modificirt, — in anderen Worten, wenn man sich das Zusammenwirken der innern und der äussern Temperaturänderungen im Gase als eine blosse Superposition, bei der keine wechselseitige Störung stattfindet, vorstellen darf. Diese Voraussetzung macht die aus GAY-LUSSAC's und WELTER's Versuchen gezogene Relation unabhängig von der beschränkenden Bedingung, die ihr ursprünglich anhaftet, sie macht daraus ein Gesetz, dessen Gültigkeit sich auf alle Verhältnisse erstreckt, welches mithin als das eigentliche [22] Grundgesetz der fraglichen Vorgänge anzusehen ist. — Und nun kann die Aufgabe leicht zu Ende geführt werden.

Das Wachstum der durch die Dichtigkeitsänderung allein bedingten Temperaturzunahme ist diesem Gesetze zu Folge in jedem Augenblicke vollständig bestimmt durch die eben vorhandene Dichte ϱ und Temp. ϑ , vermöge der Gleichung nämlich

$$\frac{dt}{d\varrho} = \frac{1}{\lambda-1} \cdot \frac{a+\vartheta}{\varrho} \dots \dots \dots (7)$$

und die Grundgleichung für das Zusammenwirken des innern und des äussern Temperatureffectes wird also

$$\frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{d\tau}{d\varrho} + \frac{1}{\lambda-1} \cdot \frac{a+\vartheta}{\varrho} \dots \dots \dots (8)$$

Der Uebergang von diesem Gesetze des Wachsens zu dem der wachsenden Grössen selbst ist jetzt eine rein mathematische Aufgabe. Denkt man zunächst die Regel bestimmt, nach welcher während der Compression die Temperatur des Gases von aussen modificirt wird, d. h. denkt man $\frac{d\tau}{d\varrho}$ als Function von ϱ gegeben, so führt die Integration zu dem Gesetze, nach welchem die factische Temperatur mit der Dichte variirt. — Der Factor $\varrho^{-(\lambda-1)}$ ergänzt die beiden Glieder mit ϑ zu einem vollständigen Differential, und die Integration ergibt dann

$$\frac{1}{\varrho^{\lambda-1}} \cdot \frac{a+\vartheta}{\varrho} = \int \frac{1}{\varrho^{\lambda-1}} \frac{d\tau}{d\varrho} d\varrho + \text{Const.}$$

und indem man die Constante durch die in einem beliebigen Anfangszustande zusammengehörigen Werthe von ϱ und ϑ ausdrückt, erhält man schliesslich

$$\frac{1}{\varrho^{\lambda-1}} \cdot \frac{a+\vartheta}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1^{\lambda-1}} \cdot \frac{a+\vartheta_1}{\varrho_1} + \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{1}{\varrho^{\lambda-1}} \frac{d\tau}{d\varrho} d\varrho \dots \dots \dots (9)$$

[23] Diese Gleichung stellt das allgemeine Gesetz der Compressionsvorgänge dar, indem sie den Verlauf der Temperatur in einer Gasmasse, wenn diese in irgend welcher Weise von aussen Temperaturänderungen erleidet, bestimmen lässt.

Das früher gefundene specielle Gesetz ist darin, wie man sieht, als besonderer Fall enthalten. Es ergibt sich unmittelbar, sowie man $\frac{d\tau}{d\varrho} = 0$ setzt, so dass das Integral wegfällt; und ebenso kann die obige Gleichung für jeden andern bestimmten Fall specialisirt werden, indem man nur für $\frac{d\tau}{d\varrho}$ jedesmal die Function von ϱ setzt, welche der Art der äussern Einwirkung entspricht.

Da $\frac{d\tau}{d\varrho}$ denjenigen Theil des Temperaturwachstums in jedem Augenblicke darstellt, der in dem Wärmeaustausch mit der Um-



gebung seinen Grund hat, so würde man unter τ selbst die Function von ϱ zu denken haben, welche den Integralwerth aller aus dieser Quelle stammenden Temperaturincremente zwischen dem Anfangs- und dem Endzustande, noch um eine beliebige Constante vermehrt, ausdrückt. Diese Constante kann man nun auch so wählen, dass die dergestalt bestimmte Function τ für den Anfangszustand ϱ_1 mit dem Werthe der factischen Temperatur zusammenfällt, also $\tau_1 = \vartheta_1$ wird, und dann repräsentirt offenbar τ den Temperaturverlauf, wie er unter alleiniger Wirksamkeit der äussern Ursachen — wenn also die Dichtigkeitsänderung für sich wirkungslos wäre — eintreten würde. Unter dieser Annahme kann man in der Gleichung (9) partiell integriren, und erhält dann, wenn man $\frac{1}{a} + \tau$ einführt,

$$\frac{\frac{1}{a} + \vartheta}{\varrho^{\lambda-1}} = \frac{\frac{1}{a} + \tau}{\varrho^{\lambda-1}} + \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{\lambda-1}{\varrho^{\lambda}} \left(\frac{1}{a} + \tau \right) d\varrho.$$

woraus folgt

$$[24] \quad \vartheta - \tau = \varrho^{\lambda-1} \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{\lambda-1}{\varrho^{\lambda}} \left(\frac{1}{a} + \tau \right) d\varrho \dots \dots \dots (10)$$

welche Gleichung also den Ueberschuss der factischen Temperatur über den von aussen bedingten Werth, mithin, auf Grund des angenommenen Principis der Superposition, den Integralwerth der zwischen ϱ_1 und ϱ durch die Dichtigkeitsänderungen bewirkten Temperaturzunahmen darstellt.

Dieser Integralwerth der Compressionswirkung erscheint hier als abhängig von dem von aussen herrührenden Theile des Temperaturverlaufs. Es leuchtet aber ein: unmittelbar ist derselbe nicht durch diesen, sondern vielmehr durch den factischen Temperaturverlauf bedingt, indem der Werth von $\frac{dt}{d\varrho}$ in jedem Momente der Veränderung durch die eben vorhandenen Werthe von ϱ und ϑ bestimmt wird. Man erhält ihn aber leicht auch in dieser Form ausgedrückt, indem man nur die Elementargleichung (8) so integrirt, dass man ϑ als Function von ϱ gegeben denkt. Denn dann ergibt sich unmittelbar

$$A\vartheta = A\tau + \lambda-1 \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{1}{a} + \vartheta \frac{d\varrho}{\varrho} \dots \dots \dots (11)$$

(wenn $\vartheta - \vartheta_1 = A\vartheta$; $\tau - \tau_1 = A\tau$ gesetzt wird). Und diese Gleichung giebt die Regel, nach welcher unter allen Verhältnissen ein beliebiger Zuwachs der wirklichen Temperatur in seine beiden Bestandtheile zerlegt werden kann, wofern der Verlauf der ersteren während der Veränderung gegeben ist. Der aus der Compressionswirkung entspringende Theil, der Integralwerth der inneren Temperaturzunahme, ergibt sich

$$A\tau = \lambda-1 \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{1}{a} + \vartheta \frac{d\varrho}{\varrho} \dots \dots \dots (12)$$

der von aussen herrührende Theil

$$[25] \quad A\tau = A\vartheta - \lambda-1 \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{1}{a} + \vartheta \frac{d\varrho}{\varrho} \dots \dots \dots (13)$$

Ich will die eben entwickelten Gesetze beispielsweise auf einen speciellen Fall anwenden, der ein experimentelles Interesse hat, auf denjenigen nämlich, der bei Bestimmung der Wärmecapacität der Gase vorliegt. Eine Gasmasse werde unter constantem Drucke p_1 von einer anfänglichen Temp. ϑ_1 auf eine beliebige andere ϑ erwärmt; welches ist die Summe der von aussen zu bewirkenden Temperaturveränderungen?

Durch die Bedingung des constant bleibenden Druckes ist der Verlauf der factischen Temperatur während des Vorganges völlig bestimmt; denn aus der MARIOTTE-GAY-LUSSAC'schen Gleichung folgt

$$\frac{1}{a} + \vartheta = \frac{p_1}{ak\varrho}$$

Mithin ist

$$A\tau = \frac{\lambda-1 \cdot p_1}{ak} \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \frac{\lambda-1 \cdot p_1}{ak} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho} \right)$$

wofür, wenn man statt ϱ das Volum der Gewichtseinheit, $\frac{1}{\varrho} = v$, einführt,



$$\Delta l = \frac{\lambda-1}{ak} \cdot p_1 (v_1 - v)$$

geschrieben werden kann. Die Aenderung der wirklichen Temperatur ist nun

$$\Delta \vartheta = \frac{p_1}{ak} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right) = \frac{p_1}{ak} (v - v_1)$$

also die von aussen herrührende Temperaturzunahme

$$\Delta \tau = \lambda \frac{p_1}{ak} (v - v_1)$$

Man ersieht hieraus: die von aussen zu bewirkende Temperaturänderung ist im Verhältniss von $\lambda:1$ grösser als die wirklich eintretende Zunahme, indem der Theil [26] $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ von ersterer zur Ausgleichung der Compressionswirkung aufgewendet wird.

Ebenso führen die oben entwickelten Gesetze in jedem andern Falle zu einer Analyse der eintretenden Veränderung des Wärmezustandes. Die Grundlage derselben beruht in der Gleichung (12), die die Regel enthält, nach welcher der Gesamteffect der Dichtigkeitsänderung bis zu irgend einem Punkte durch den Weg bedingt ist, welchen der Zustand der Gasmasse bis dahin thatsächlich durchlaufen hat. Es ist nun interessant, zu bemerken, dass das hierbei maassgebende Bestimmungsstück durch einen Ausdruck wiedergegeben werden kann, dem eine einfache und unmittelbar definirbare Bedeutung zukommt. Führt man nämlich statt der veränderlichen Temperatur ϑ , vermöge der Gleichung

$$p = k \varrho (1 + a\vartheta)$$

die Spannung p ein, so wird aus Gleich. (12)

$$\Delta l = \frac{\lambda-1}{ak} \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{p}{\varrho^2} d\varrho$$

Es ist aber hier

$$\frac{1}{\varrho^2} = - \frac{d \left(\frac{1}{\varrho} \right)}{d\varrho} = - \frac{dv}{d\varrho}$$

wenn wie oben durch v das Volum der Gewichtseinheit des Gases bezeichnet wird, und man erhält daher mit v als neuer Variabeln

$$\Delta l = - \frac{\lambda-1}{ak} \int_{v_1}^v p dv \dots \dots \dots (14)$$

Das Integral hat nun eine bestimmte physische Bedeutung; es ist die mechanische Arbeit, welche während der Volumveränderung an der Begrenzungsfläche der Gasmasse geleistet wird; und mithin lässt sich das schliessliche Resultat der obigen Entwicklungen in den Worten aussprechen: Der Integralwerth der aus der Dichtigkeitsänderung entspringenden Temperaturänderungen ist unter allen Verhältnissen proportional der von dem Gase nach aussen geleisteten [27] Arbeit, und zwar für jede Gasart proportional vermöge des Factors $-\frac{\lambda-1}{a}$ (wobei den verschiedenen möglichen Fällen natürlich durch die Vorzeichen Rechnung getragen wird, was keiner weiteren Erörterung bedarf).

IV. Feststellung des Gesetzes für die erzeugten oder verbrauchten Wärmemengen.

So weit sind die Erscheinungen, auf welche die Untersuchung gerichtet ist, auf vollständige und allgemeine Gesetze zurückgeführt, und zwar beziehen sich diese auf solche Bestimmungsstücke (Temperatur und Dichte oder Volum), die unmittelbar empirisch gegeben sind und vermöge welcher jene Gegenstand der Beobachtung werden.

Ein weiterer Fortschritt eröffnet sich der Untersuchung durch Einführung desjenigen Begriffes, durch dessen Vermittelung der Grund der Temperaturerscheinungen überhaupt in den Körpern, als ihren Trägern, vorstellig gemacht wird. Das ist die Vorstellung von in den Körpern enthaltenen Wärmemengen, deren Zu- oder Abnahme man die Veränderungen zuschreibt, auf welche man sich unter dem Namen der Temperatur bezieht.

Es ist leicht zu übersehen, wie sich jene im vorliegenden Falle als Bestimmungsstück einführen. Ein Gasquantum zeigt eine Erhöhung der Temperatur, wenn es verdichtet, eine Erniedrigung derselben, wenn es verdünnt wird. Das erste setzt eine Vermehrung, das andere eine Verminderung der in ihm enthaltenen (freien) Wärme voraus; die Compression also erzeugt oder entbindet eine



bestimmte Wärmemenge, infolge der Dilatation dagegen verschwindet eine solche. Der Gegenstand der betrachteten Erscheinungen fällt sonach in die Veränderungen, welche die in den Gasen enthaltene Wärmemenge erfährt, insofern diese als [28] der primäre Grund der Temperaturveränderungen angesehen werden können; und es entsteht also die Frage: nach welchen Gesetzen bestimmen sich diese erzeugten oder verbrauchten Wärmemengen?

Der Uebergang von den Temperaturänderungen zu denen der Wärmemenge wird im allgemeinen durch einen besonderen Begriff, die Wärmecapacität, vermittelt, welcher in Bezug auf den Zusammenhang zwischen jenen beiden der specifischen Natur der Körper Rechnung trägt. Die Wärmecapacität ist definirt als diejenige Wärmemenge (in dem gebräuchlichen Maasse gemessen), die der Gewichtseinheit des betreffenden Stoffes eine Temperaturänderung = 1 ertheilt, und muss also, insofern man eine Abhängigkeit dieser Grösse von den Verhältnissen offen lässt, durch den Grenzwert zu sammentgehöriger Zunahmen der Wärmemenge (Q) und Temperatur (θ) ausgedrückt gedacht werden:

$$c = \frac{dQ}{d\theta}$$

Damit lassen sich nun die oben entwickelten allgemeinen Gesetze ohne weiteres auf die Wärmemengen übertragen, indem man darin nur auf die Elemente zurückgeht. Man erhält offenbar, für die Gewichtseinheit gerechnet, die Wärmemenge, die der factischen Temperaturänderung entspricht, welche also die Zunahme der im Gase wirklich enthaltenen freien Wärme vorstellt

$$Q_{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta} c \cdot d\theta;$$

ferner diejenige Grösse, die den von aussen bewirkten Temperaturänderungen entspricht, und die mithin als dem Gase von aussen zugeführt zu betrachten ist

$$Q_r = \int_{r_1}^r c \cdot dr$$

[29] und endlich die durch die Compressionswirkung erzeugte (oder, je nach dem Vorzeichen, verbrauchte) Wärmemenge

$$Q_r = \int_{r_1}^r c \cdot dr = \lambda - 1 \int_{r_1}^r c \left(\frac{1}{a} + \theta \right) dQ \dots \dots (15)$$

$$= - \frac{\lambda - 1}{ak} \int_{v_1}^v c p dv$$

wobei natürlich zwischen diesen drei Werthen die Relation besteht:

$$Q_{\theta} = Q_r + Q_l$$

Wie man sieht, tritt auf diese Weise die Wärmecapacität als bestimmendes Stück in die Ausdrücke ein, und es entsteht daher die Frage, nach welchem Gesetze dieselbe von den ursprünglichen Variablen abhängt. Es muss die Möglichkeit offen bleiben, dass ihr Werth bei ein und demselben Gase für verschiedene Zustände verschieden ist; und da alle mögliche Verschiedenheit hierin zuletzt auf Verschiedenheit der Werthe von Dichte und Temperatur beruht, so muss c im allgemeinen als eine Function dieser beiden betrachtet werden, um deren nähere Bestimmung es sich also zunächst handelt.

Die Experimentirkunst hat keine Mittel gefunden, die Wärmecapacität eines Gases direct zu messen. Was man unmittelbar bestimmt hat, ist nur die Wärmemenge, welche ein Gasquantum aufnimmt, wenn es unter constantem Drucke seine Temperatur um eine gewisse Grösse ändert; und seit man die Wärmewirkungen der Volumveränderung kennt, versteht es sich von selbst, dass diese Bestimmung, für sich genommen, das Gesuchte nicht geben kann. Zuvor muss vielmehr festgestellt sein, welcher Theil der so aufgenommenen Wärme zur Ausgleichung der Compressionswirkung dient, oder, umgekehrt, welches die Temperaturzunahme Δr ist, zu deren Hervorbringung jene in Wirklichkeit gedient hat. So kommen also schon bei der Bestimmung dieses Fundamentaldatums die Gesetze der Compressionserscheinungen in Anwendung. LAPLACE hat nun, wie bekannt, diese Anwendung zuerst gemacht, und hat [30] nachgewiesen, indem er von der ursprünglichen Definition der Grösse λ bei den GAY-LUSSAC'schen Versuchen ausging, dass die wahre Wärmecapacität eines Gases, c , aus der direct beobachteten scheinbaren Grösse C (der sog. Wärmecapacität bei constantem Druck) vermöge



der Gleichung $\frac{C}{c} = \lambda$ herzuleiten sei. — Oben ist beispielsweise die Analyse des fraglichen Vorganges von der gewonnenen allgemeinen Grundlage aus durchgeführt worden, und es ergab sich, dass die Temperaturzunahmen Δt und $\Delta \theta$ sich wie $\lambda:1$ verhalten, dass mithin der Quotient $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = c$ der λ te Theil von $\frac{\Delta Q}{\Delta \theta} = C$ ist.

Auf Grund dieser Bestimmungen hat nun auch die Frage nach der Abhängigkeit der Wärmecapacität von Dichte und Temperatur ihre (und zwar wohl endgültige) Erledigung gefunden, wie wohl erst in neuerer Zeit durch die umfassenden Arbeiten REGNAULT's. Aus seinen Messungen¹⁾ geht hervor, dass für je ein Gas die Wärmemenge, die zu einer gleichen Temperaturerhöhung unter constantem Drucke erfordert wird, unter allen Verhältnissen dieselbe ist (innerhalb der weiten Grenzen, zwischen welchen seine Messungen, bei der Luft wenigstens, sich bewegen); und hieraus folgt, da der Coefficient λ constant ist, dass auch die Wärmecapacität c eine constante sein muss.

Diesem gemäss nimmt nun der Ausdruck für die durch die Dichtigkeitsänderung erzeugte oder verbrauchte Wärmemenge die Form an:

$$Q_t = \lambda - 1 \cdot c \int_{v_1}^v \frac{1 + \theta}{a} dQ = - \frac{\lambda - 1 \cdot c}{ak} \int_{v_1}^v p dv \dots (16)$$

und ferner erhält man

$$Q_t = c \Delta \theta + \frac{\lambda - 1 \cdot c}{ak} \int_{v_1}^v p dv \dots (17)$$

[31] als Ausdruck für die Wärmemenge, die zu einer beliebigen Veränderung eines Gasquantums (nach Temperatur und Dichte) erfordert wird.

Es bleibt jetzt noch ein letzter Schritt zu thun übrig. — Die Wärmemenge, welche durch die Dichtigkeitsänderung verbraucht wird, ist, den obigen Gesetzen zu Folge, bei jedem Gase der dabei geleisteten mechanischen Arbeit proportional; der Factor aber,

1) [Untersuchungen über die spezifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten.] POGGENDORF's Annalen. Bd. 89. [1855. pp. 335—348.]

der beide auf einander bezieht, hängt von den besonderen Werthen ab, welche den Grössen c , k , λ zukommen, muss also für jede Gasart einzeln berechnet werden. c und k sind nur ursprüngliche, das Gas charakterisirende Bestimmungsstücke; λ ist der Coefficient, welcher allein auf das thermometrische Verhalten des Gases bei der Dichtigkeitsänderung sich bezieht und vermöge Gleichung (12) dieses Verhalten auch vollständig bestimmt. Man übersieht, welches Interesse es haben muss, dass es möglich ist, diesen Coefficienten selbst wieder auf die übrigen Bestimmungsstücke zurückzuführen, d. h. eine Regel anzugeben, nach welcher sein Werth schon aus den Werthen der letzteren abgeleitet werden kann. Dadurch verliert er den Charakter eines neuen selbständigen Elements zur Bestimmung des Verhaltens der Gase; er ist hiernach schon in den übrigen Elementen eingeschlossen, und mithin jenes Verhalten, auch hinsichtlich der neuen Erscheinung, durch letztere allein schon völlig charakterisirt. — DULONG hat diese Zurückführung der Constanten λ in der That ausgeführt; sie ist enthalten in dem bekannten Resultate, welches er aus seinen, oben angeführten Versuchen gezogen hat: dass nämlich gleiche Volumina aller Gase unter gleichem Druck bei gleicher Compression oder Dilatation dieselbe Wärmemenge entbinden oder absorbiren, während die dadurch bewirkten Temperaturänderungen den Wärmecapacitäten für gleiche Volumina umgekehrt proportional sind. Die Analyse der Schlussfolgerung, durch die DULONG diesen Satz hergeleitet hat, zeigt, dass er im Wesentlichen nur ein Gesetz ausspricht, nach welchem der Werth des λ für die [32] verschiedenen Gase aus den Grössen c und k sich bestimmt. Er geht davon aus, dass $\lambda - 1$ die Temperaturänderung vorstellt, welche eine plötzliche Compression oder Dilatation um den Bruchtheil a hervorbringt, — was er aus der Deutung von λ als Verhältniss der beiden Wärmecapacitäten schliesst, was aber auch unmittelbar aus der Definition folgt, welche oben auf Grund der GAY-LUSSAC'schen Versuche für diesen Coefficienten aufgestellt wurde. Die Temperaturänderung bei gleicher Compression (wegen der Gleichheit des Ausdehnungscoefficienten a) besagt also nichts anderes als den Werth von $\lambda - 1$ bei den verschiedenen Gasen. Indem er nun aus den Bestimmungen von DE LA ROCHE und BÉRAUD über die Wärmecapacitäten bei constantem Druck mit Hilfe der von ihm gefundenen Werthe des λ die bei constantem Volum, d. h. die wirklichen spezifischen Wärmen der einzelnen Gasarten, und zwar auf gleiche Volumina bezogen, ableitet, ergiebt sich der Werth des $\lambda - 1$ als diesen letzteren um-



gekehrt proportional, eine Relation, welche auch durch die neueren genaueren Daten der oben¹⁾ erwähnten REGNAULT'schen Arbeit wenigstens für die dem Condensationspunkte ferner stehenden Gase so weit bestätigt wird, als die Schwierigkeit der zu Grunde liegenden Messungen nur irgend erwarten lässt.

Es besteht also die Gleichung

$$\lambda - 1 = \frac{\text{Const.}}{\gamma}$$

wenn unter γ die auf die Volumeneinheit bezogene Wärmecapacität verstanden wird. Um auf die Gewichtseinheit zurückzugehen, hat man nun

$$\gamma = c \cdot \rho \quad 2)$$

zu setzen; und da die Dichte unter gleichem Drucke und gleicher Temperatur der specifischen Elasticität k umgekehrt proportional ist, so lässt sich obige Relation offenbar durch

$$\lambda - 1 = \text{Const.} \frac{k}{c}$$

[33] identisch ersetzen. Folglich hat — und dies ist das bedeutungsvolle Ergebniss der DULONG'schen Untersuchung — der Quotient

$$\frac{\lambda - 1 \cdot c}{k}$$

für alle Gase ein und denselben Werth. Letzterer ist aber, wie man sieht, bis auf den ebenfalls constanten Divisor a , zugleich der Coefficient, welcher in den zuletzt entwickelten Gesetzen die bei der Dichtigkeitsänderung verbrauchte Wärme der geleisteten Arbeit proportional macht. Man hat also auch

$$\frac{\lambda - 1 \cdot c}{ak} = \text{Const.} = A \quad \dots \quad (18)$$

und die Gleichung (17) nimmt daher schliesslich die Form an:

$$Q_1 = Q_0 + A \int_{v_0}^{v_1} p \cdot dv \quad \dots \quad (19)$$

Die Wärmemenge, welche ein Gasquantum während irgend welcher Veränderung aufnimmt, ist gleich dem Zuwachse seiner freien Wärme ($Q_0 = c \cdot A\theta$) vermehrt um die in Folge der Dichtigkeitsänderung verbrauchte Wärme; und diese ist bei allen Gasen

¹⁾ [p. 24.]

²⁾ [Im Original steht, offenbar infolge eines Schreibfehlers, $\frac{c}{\rho}$ statt $c \cdot \rho$.]

vermöge ein und desselben unveränderlichen Factors der geleisteten äussern Arbeit proportional.

V. Die Aequivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit.

Ich bin im Vorstehenden von der Aufgabe ausgegangen, einen bestimmt abgegrenzten Kreis von Erscheinungen nach erfahrungsmässiger Methode auf ihre Gesetze zurückzuführen, und die zu Gebote stehenden experimentellen Bestimmungen haben genügende Grundlagen dargeboten, diese Aufgabe Schritt für Schritt bis zu ihrer allgemeinen und vollständigen Lösung zu verfolgen. Die letztentwickelte Relation ist das schliessliche Resultat dieser [34] Untersuchung; es kommt ihr daher von jenem Standpunkte aus unmittelbar keine andere Bedeutung zu als die, das Fundamentalgesetz der fraglichen Erscheinungen in seiner allgemeinsten Gestalt auszusprechen.

Als solches leistet sie, was jedes Gesetz der Art in seinem Bereiche leistet. Sie bietet die Mittel, die Erscheinungen, wenn die äussern Umstände gegeben sind, vollständig vorzubestimmen, auch für solche Verhältnisse, die ausserhalb des Gebietes ihrer Begründung stehen. Diese Anwendung liegt, bis ins Einzelne ausgeführt, in den Entwicklungen der mechanischen Wärmetheorie vor, die von der entgegengesetzten Seite, indem sie das Princip der Aequivalenz für die Bedingungen des Gaszustandes specialisirt, grade die obige Gleichung zum Ausgangspunkte erhält.

Jene Beherrschung der Erscheinungen in ihrem Erfolge, ist aber nicht das Einzige, was den auf erfahrungsmässigem Wege begründeten Naturgesetzen Bedeutung verleiht, eine weiter reichende gewinnen sie hinsichtlich des Endzieles physikalischer Forschung dadurch, dass sie einen Leitfaden darbieten, an die Erscheinungen solche Vorstellungen zu knüpfen, vermöge welcher sich der Grund der ersteren in der Natur der Körper nachweisen lässt.

Man beachte die Art und Weise, wie die verschiedenen Gasarten darin umfasst werden. In dem letzten Ausdrucke sind alle die einzelnen Gase betreffenden Bestimmungsstücke weggefallen. Der quantitative Verlauf, insofern er durch die Wärmemengen verfolgt wird, ist also gänzlich losgetrennt von der specifischen Beschaffenheit seiner Träger, das aufgestellte Gesetz gilt unabhängig von dieser, und ist nur an die Bedingung gewisser normaler Verhältnisse geknüpft, derjenigen nämlich, welche den Gaszustand



charakterisiren; es erstreckt sich auf alle Körper, wofern sich dieselben dem idealen Grenzstande asymptotisch genähert haben, in welchem der Elasticitätsmodul eines jeden, rücksichtlich der Dichte, einen constanten Werth erreicht hat und nur den Zunahmen der Wärmemenge [35] proportional sich ändert (MARIOTTE'sches und GAY-LUSSAC'sches Gesetz). Es muss also auch der Grund der Erscheinungen von der specifischen Natur der einzelnen Stoffe unabhängig sein, und kann mithin nur in demjenigen gesucht werden, was allen gemeinsam ist, d. i. in der Natur der Wärme und in den Verhältnissen des elastisch-flüssigen Aggregatzustandes. — Nachdem so zunächst das Gebiet begrenzt ist, führt die Art der Abhängigkeit, wie sie das obige Gesetz feststellt, zur näheren Bestimmung. Die verschwundenen oder erzeugten Wärmemengen sind unter allen Verhältnissen der vom Gase geleisteten Arbeit proportional; beides, Veränderung der Wärmemenge und mechanische Arbeit, treten stets in demselben Verhältniss mit einander auf. Was sich aber in der Erfahrung durchgängig zusammen zeigt, halten wir uns berechtigt, auch als seiner Natur nach nothwendig zusammengehörig zu betrachten und in Form von Ursache und Wirkung verknüpft zu denken. So wird, was ursprünglich nur ein mathematischer Zusammenhang war, als ein physischer Zusammenhang vorgestellt, wonach es denn heisst: die Wärme wird erzeugt oder verschwindet durch die mechanische Arbeit.

Und nun entsteht die Frage: mit welchen Vorstellungen über das Wesen der Wärme lässt diese Thatsache sich vereinigen? Die Antwort ist: die Wärme muss in mechanische Arbeit und diese in Wärme verwandelt werden können, — Wärme und mechanische Arbeit müssen äquivalent sein, — die erstere muss ihren innern Grund in der Bewegung von Massen haben und muss selbst durch Dasjenige, was in der Bewegung der Arbeit gleichwerthig, d. i. durch die lebendige Kraft, gemessen sein.

Auf solche Weise werden die betrachteten Vorgänge erklärt, indem zugleich bestimmte Voraussetzungen über die Wärme gebildet werden. Beide Schritte bedingen sich wechselseitig, so dass der eine Grund und Rechtfertigung des andern enthält. Ihr gemeinsames Resultat ist, dass das experimentell gewonnene Gesetz der Proportionalität [36] von Wärme und mechanischer Arbeit als Gesetz der Aequivalenz beider ausgesprochen wird.

Dies ist das Ziel, welches ich oben der Untersuchung gesteckt habe.

Zum Schlusse will ich noch einige Folgerungen hervorheben, zu welchen, im Sinne der eingehaltenen Betrachtungsweise, die gewonnenen Ergebnisse Veranlassung bieten.

In dem Ausdrücke für die erzeugte oder verschwundene Wärmemenge stellt, wie auch ausdrücklich bemerkt, $\int_{v_1}^{v_2} p dv$, dieje-

nige Arbeitsgrösse vor, welche während der Volumänderung des Gases in seiner Begrenzungsfläche geleistet wird, und es ist also auch nur diese äussere Arbeit, durch welche jene Wärmemengen bedingt erscheinen. Diese nähere Bestimmung hat nun, durch einen schon früher von GAY-LUSSAC, neuerdings von JOULE angestellten interessanten Gegenversuch eine unmittelbare Bestätigung erhalten; es hat sich herausgestellt, dass in der That eine Luftmasse Volumänderungen erleiden kann, ohne dass eine Aenderung der Wärmemenge zu erfolgen braucht, wenn nämlich jene so bewirkt werden, dass dabei keine äussere Arbeit geleistet wird — wie es (das Luftquantum im Ganzen genommen) der Fall ist, wenn eine Ausdehnung in einen leeren Raum hinein erfolgt. Mithin muss angenommen werden, dass bei der Compression oder Dilatation eines Gases nur die an der Oberfläche geleistete Arbeit in Wärme, sowie umgekehrt Wärme nur in äussere Arbeit umgesetzt wird; welche Bemerkung nun zu der Alternative führt: entweder es liegt in der Natur der Gase, d. h. in den Verhältnissen ihres Aggregatzustandes, dass bei der Volumänderung überhaupt keine andere als äussere Arbeit entstehen kann, oder es liegt in der Natur der Wärme, d. h. in der Art ihres Vorhandenseins in den Gasen, dass sie nur in der Begrenzungsfläche des betreffenden Mediums in mechanische Arbeit, und diese in jene, umgesetzt werden kann. Das erste würde die Folgerung nach sich ziehen, [37] dass das Potential der Gastheile auf einander oder einer Gasmasse auf sich selbst Null ist, d. h. keine unmittelbare Wechselwirkung zwischen Gaselementen besteht. Das zweite würde auf die Annahme führen, die Bewegung, in der die Wärme ihren Grund haben soll, in den Gasen wenigstens als eine fortschreitende (eine Wurfbewegung) zu betrachten, welche nur durch Vermittlung bewegter Wände einer Vermehrung oder Verminderung und dabei einer Umwandlung in mechanische Arbeit fähig ist. — Man übersieht, wie die Fortführung dieser Betrachtung zu der



sinnreichen, von KRÖNIG¹⁾ begündeten, von CLAUSIUS²⁾ und Andern weiter entwickelten Theorie der Gase hinleitet, welche das ganze Verhalten dieser, so wohl hinsichtlich der mechanischen, als auch der Wärmevergänge, aus ein und demselben Principe zu erklären unternimmt.

Endlich will ich auf eine Anwendung hinweisen, welche von den Resultaten der früheren Entwicklungen, unabhängig von ihrer theoretischen Verwerthung, für die Zwecke der experimentellen Untersuchung der Wärmeerscheinungen gemacht werden kann.

Alle fundamentalen Aufgaben der letzteren drehen sich um die Messung von Wärmemengen, und es ist daher die Feststellung einer bestimmten Maasseinheit für diese die wesentliche Grundlage aller hier einschlagenden Arbeiten. Das allgemein gebräuchliche Maass, — die Wärmemenge, welche die Gewichtseinheit Wasser um 1° erwärmt — ist nun offenbar ein willkürlich festgestelltes, also ein in der Physik besonders eingeführtes Grundmaass. Nun liegt allerdings von Seiten der practischen Beobachtung keinerlei Bedürfniss vor, von diesem — etwa im Interesse sicherer Vergleichbarkeit der Messungen — auf ein absolutes Maass zurückzugehen, wie es auf andern Gebieten [38] wohl der Fall ist; immerhin aber bleibt es interessant, die Mittel zu übersehen, durch welche das System absoluter Maassbestimmung, wie man es in allen Theilen der Physik zur Geltung zu bringen sucht, auch auf den Bereich der Wärmeerscheinungen ausgedehnt werden könnte. — Hierzu würde nichts weiter erfordert werden, als eine in absoluten Maassen bestimmbare Wirkung der Wärme und zugleich das Gesetz aufzufinden, nach welchem dieselbe ein für alle mal durch die messbaren Verhältnisse bedingt ist; es würde alsdann die absolute Einheit unmittelbar durch diejenige Wärmemenge festgestellt sein, welche unter näher anzugebenden normalen Verhältnissen die Einheit jener Wirkung hervorbringt. Dieser Forderung ist aber durch das oben begründete Gesetz der Compressionsvorgänge bei den Gasen schon vollständig Genüge geleistet. Es ist vermöge desselben in der That eine in absoluten Maassen bestimmbare Wirkung der Wärme festgestellt, nämlich in der mechanischen Arbeit, welche sie in den

1) [Grundzüge einer Theorie der Gase.] POGGENDORF'S Annalen. Bd. 99. [1856. pp. 315—322.]

2) [Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen.] Ebend. Bd. 100. [1857. pp. 353—380.]

Gasen hervorbringt, — was zwar eine Wirkung, welche, unabhängig von jeder stofflichen Verschiedenheit der Körper, in ihrem Hervortreten nur an gewisse, als normal zu bezeichnende Verhältnisse, an die des Gaszustandes, geknüpft erscheint. Es liegt auf der Hand, wie dieses Ergebniss zu einer absoluten Maassbestimmung der Wärmemengen führt; die Einheit ist diejenige Wärmemenge, die unter Vermittelung irgend eines gasförmigen Körpers die Einheit der mechanischen Arbeit zu leisten vermag. Sie ist also direct auf die mechanischen Grundmaasse zurückgeführt; und zwar ist diese Zurückführung unabhängig von den theoretischen Vorstellungen, die man mit jener Arbeitsleistung verbinden mag, nur dass, was so eine Definition der Wärmemenge nur aus ihren Wirkungen, mit letzteren zugleich die Bedeutung einer solchen aus ihren Ursachen erhält.

Es ergibt sich hiernach die Bedeutung, welche dem Buchstaben A in der Gleichung für Q , von dieser Seite betrachtet, zukommt. Im Sinne der mechanischen [39] Wärmetheorie ist es die Wärmemenge, die der Arbeitseinheit äquivalent ist; hier stellt sie die Zahl vor, welche das absolute Maass in Einheiten des früheren Grundmaasses, und ihr reciproker Werth $\frac{1}{A} = \frac{ak}{\lambda - 1 \cdot c}$ (das sog. mechanische Wärmeäquivalent) die Zahl, welche umgekehrt das Grundmaass in absoluten Einheiten ausdrückt.

Hiermit nun bestimmt sich sehr einfach die Wärmemenge Q , welche in einem beliebigen Gasquantum bei beliebigen Werthen von ϑ und ϱ enthalten ist; es ist dieselbe, in absolutem Maasse gemessen, unmittelbar gegeben durch die Grösse der in ihm aufgespeicherten mechanischen Arbeit, d. h. derjenigen Arbeit, welche dasselbe leisten würde, indem es sich ins Unendliche ausdehnt, ohne dass dabei Wärme zugeführt oder ihm entzogen wird. Es ist also

$$Q = \int_{v_1}^v p dv$$

wobei der Verlauf von p durch die Gleichung

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^\lambda = \left(\frac{v_1}{v}\right)^\lambda$$

bestimmt zu denken ist. — Mithin ist das Maass der in einer Gas-



masse enthaltenen Wärme der Werth derjenigen Function, deren Aenderung die geleistete äussere Arbeit giebt und die man daher, nach Analogie, das Potential der Gasmasse nennen könnte; und damit darf also die absolute Einheit der Wärmemenge als diejenige bezeichnet werden, welche einem ganz beliebigen Gasquantum die Einheit dieses Potentials ertheilt.

Die Ausführung der Integration im Obigen ergibt

$$Q = p_1 v_1^\lambda \int_{v_1}^{\infty} \frac{dv}{v^\lambda} = \lambda - 1 \cdot p_1 v_1$$

wofür auch, unter Beziehung auf die Gewichtseinheit, $\lambda - 1 \cdot k(1 + a\theta_1)$ gesetzt werden kann. Die Grösse $p_1 v_1$ oder $k(1 + a\theta_1)$ ist nun nichts weiter als der Elasticitätsmodul [40] des Gases in dem betreffenden Zustande. Folglich enthalten gleiche Mengen verschiedener Gase unter solchen Verhältnissen, da ihnen derselbe Elasticitätsmodul zukommt, Wärmemengen, die den Werthen von $\lambda - 1$ proportional sind; und ferner: $\lambda - 1$ stellt die Wärmemenge (in absol. Maasse) vor, welche der Gewichtseinheit jedes Gases die Einheit des Elasticitätsmoduls ertheilt, oder diesen um die Einheit ändert), sowie $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ die Aenderung des letzteren, welchen die Wärmeeinheit hervorbringt.

Es zeigen diese Bemerkungen, welches Interesse eine möglichst genaue Bestimmung der Constanten λ für die Kenntniss der Gase haben würde, indem in ihr ein die spezifische Natur der Stoffe charakterisirendes Element gegeben ist.

II.

Collimator-Mire auf dem Paulsthorne.

Jahr.-Ber. des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. 1861—1862. pp. 21—28.

Die Benutzung eines entfernten Meridianzeichens zur Orientirung des Instruments, worauf das Observatorium auf dem Paulsthorne bisher ausschliesslich angewiesen war, führte den erheblichen Nachtheil mit sich, dass sich alle Beobachtungen auf die Zeit beschränken mussten, während welcher dieses Zeichen deutlich gesehen werden kann, weil die Construction und der Standort des Instruments eine Erneuerung — oder wenigstens eine Prüfung — seiner Einstellung bei jeder Beobachtung nöthig macht. Die Stunden der Dämmerung und der Nacht, also gerade die für solche Zwecke günstigste Zeit, ging demnach für seine Benutzung verloren, und selbst am Tage kam es nicht selten vor, dass Nebel in den untersten Luftschichten bei sonst hellem Himmel am Beobachten hinderte. Es musste daher der Wunsch entstehen, für ein so wesentliches Geschäft, wie die Orientirung des Instruments gegen den Meridian, ein Mittel zu besitzen, dessen Gebrauch nicht in solchem Grade von Umständen abhängt, die ausser dem Bereiche des Beobachters liegen, welches vielmehr jeder Zeit bequem und sicher zu benutzen sei. Dank dem bereitwilligen Entgegenkommen löbl. Bauamtes ist diesem Bedürfnisse jetzt Genüge geleistet durch eine Einrichtung, wie sie unter dem Namen der Collimator-Mire auf grösseren Sternwarten schon seit einigen Jahrzehnten im Gebrauche ist. — Es wird nicht unangemessen sein, an dieser Stelle des Princip, auf dem diese Vorrichtung beruht, sowie die Art, wie sie hier in Ausführung gebracht ist, in der Kürze anzuführen.



Wenn das Einstellen des Fernrohrs an einem astronomischen Instrumente in eine bestimmte Richtung, z. B. den Meridian durch [22] directes Einvisiren einer Marke (eines Meridianzeichens) bewirkt werden soll, so nöthigen zwei Bedingungen, letztere in grosser Entfernung vom Instrumente anzubringen: einmal nämlich muss dieses Zeichen gleichzeitig mit dem Fadenkreuz des Fernrohrs, als dem festen Visirpunkte, deutlich gesehen werden können, ohne dass man das Fadenkreuz von der Stelle zu entfernen braucht, die es bei Beobachtung der Gestirne einnehmen muss; sodann aber darf auch eine kleine Ortsänderung des Fernrohrs, wie z. B. durch seitliche Verschiebung in seinen Axenlagern, keine merkliche Aenderung der Sehrichtung zur Folge haben. — Die erste Bedingung verlangt eine beträchtliche Entfernung der Mire deshalb, weil die von ihr zum Fernrohre gelangenden Lichtstrahlen keine wahrnehmbare Abweichung vom Parallelismus zeigen dürfen, wenn das Objectivglas sie in seinem Brennpunkte vereinigen soll wie die von den fernen Gestirnen ausgehenden Strahlen; die zweite führt auf die nämliche Forderung deshalb, weil nur bei grossem Abstände der parallaktische Winkel, der einer, wenn auch geringen Ortsänderung des Instruments in Bezug auf das Zeichenobject entspricht, als verschwindend klein angesehen werden kann.

Wenn solches nun die Gründe sind, welche für ein unmittelbar zu beobachtendes Meridianzeichen eine beträchtliche Distanz (selbst bei kleineren Instrumenten mindestens einige Tausend Fusse) vorschreiben, und in deren Folge eben die Uebelstände eintreten, deren oben gedacht wurde, so leuchtet andererseits aus ihnen doch auch ein, daß die Verwendung eines beliebig nahen Objects zu demselben Zwecke nicht absolut ausgeschlossen ist, sondern immerhin offen bleibt, sofern es nur gelingt, auf irgend welche Weise durch künstliche Mittel das zu bewirken, was auf dem gewöhnlichen Wege durch die grosse Entfernung von selbst erreicht wird, sofern es also gelingt, auch einen beliebig nahen Gegenstand für ein auf astronomischen Gebrauch berechnetes Fernrohr ohne Weiteres sichtbar und zugleich die Visirlinie nach demselben von Ortsveränderungen des letzteren unabhängig zu machen. Das ist es denn, worauf die Einrichtung der sogenannten Collimator-Mire abzielt und was durch sie auch wirklich geleistet wird.

Die erstgenannte Bedingung, die Sichtbarkeit betreffend, führt offenbar auf die Forderung, die von je einem Punkte der nahen Marke ausgehenden divergenten Lichtstrahlen, bevor sie in das

Fernrohr gelangen, zu einem Bündel unter sich paralleler Strahlen umzuwandeln, damit sie sich für das Objectiv gerade so verhalten, [23] als ob sie von einem sehr entfernten Punkte herkämen; — es ist ganz dieselbe Forderung, wie sie entsteht, wenn einem weit-sichtigen Auge ein naher Gegenstand zum deutlichen Sehen gebracht werden soll, und es ist ihr daher auch mit denselben Mitteln zu genügen. Es wird nur darauf ankommen, das Fernrohr so zu sagen mit einer Convexbrille zeitweilig zu bewaffnen, d. h. zwischen das zu beobachtende Object, hier das nahestehende Meridianzeichen, und das Objectiv des Fernrohrs eine Sammellinse einzuschalten, und zwar so, dass die Marke gerade mit deren Brennpunkt zusammenfällt. Dann werden, nach bekannten Regeln der Optik, die von einem Punkte jener divergent ausgehenden Strahlen nach dem Durchgange durch die Linse genau parallel sein und es wird, wenn sie nun das Objectiv des Fernrohrs treffen, dieses ein Bild der Marke in seinem Brennpunkt entwerfen und sie so wie einen unendlich fernen Gegenstand sichtbar machen. — Handelte es sich nun um nichts weiter, als um diese Sichtbarkeit, so würde es gleichgiltig sein, in welcher Weise man die Sammellinse zwischen Mire und Fernrohr anbringen wollte; man könnte sie z. B. beim Gebrauche jedes Mal vor das Objectiv aufstecken, um sie nachher wieder zu entfernen, gerade so, wie ein Weitsichtiger seine Brille aufsetzt, so lange er in die Nähe sehen will. Soll aber zugleich auch der zweiten Bedingung Genüge geschehen, nämlich die Richtung der Visirlinie nach der Marke vom Instrumente unabhängig sein, so muss man, wie leicht ersichtlich, auch die Sammellinse unabhängig vom Fernrohre erhalten, man muss sie also in dem ihrer Brennweite entsprechenden Abstände vom Sehzeichen in gerader Linie zwischen diesem und dem Instrumente unveränderlich befestigen, dergestalt, dass durch sie hindurch bei geeigneter Richtung des Fernrohrs das Zeichen mit demselben gesehen werden kann. Aus den Grundsätzen der Dioptrik lässt sich ohne Weiteres ableiten, dass alsdann durch Einstellung des Fernrohrs auf die Marke seine optische Axe immer in die nämliche absolute Richtung gebracht wird, welches auch die Stellung des Instruments sein möge, vorausgesetzt natürlich, dass von dem aus der Sammellinse austretenden Strahlenbündel noch ein hinreichender Theil in das Fernrohr gelangt, um überhaupt ein erkennbares Bild zu geben. Die Verbindungslinie zwischen dem Visirpunkte der Mire und dem sog. optischen Mittelpunkte der gedachten Linse stellt jetzt eine





festen Richtung dar, welcher die von jener kommenden Lichtstrahlen nach ihrem Durchgange parallel sind, [24] und dieser wird auch die optische Axe des Fernrohrs durch das Einvisiren parallel gemacht. Man hat mithin einen derartigen — Collimator genannten — Apparat nur so aufzustellen, dass seine optische Axe genau in den Meridian zu liegen kommt und dabei die Einrichtungen so zu treffen, dass sie hinreichende Garantie für die Unveränderlichkeit dieser Aufstellung bieten, um darin für die Dauer eine Meridian-Mire in unmittelbarer Nähe beim Instrumente zu gewinnen.

Auf den Sternwarten findet man solche Collimatoren in der Art ausgeführt, dass man ein metallenes Rohr hat, welches an einem Ende eine (achromatische) Sammellinse und am andern Ende, in deren Brennpunkte, ein Kreuz aus Spinnfäden, wie in einem Fernrohre, trägt, daher denn das Ganze, wenn noch ein Ocular hinzukommt, nichts anderes als ein gewöhnliches astronomisches Fernrohr vorstellt. Mittelst eines geeigneten Stativs wird dasselbe auf einem besondern Steinpfeiler, möglichst geschützt gegen alle Veränderungen, neben dem betreffenden Passageninstrumente oder Meridiankreise im Beobachtungsraume aufgestellt, so dass mit dem Fernrohre des Instruments von vorne hereingesehen werden kann, während die Verbindungslinie des Fadenkreuzes mit der Linse in den Meridian gerichtet ist. — Das Fadenkreuz stellt jetzt die feste Marke dar, auf welche das Fernrohr einzuvisiren ist; trifft man die nöthigen Vorkehrungen, dasselbe von hinten nach Bedürfniss beleuchten zu können, so liefert ein solcher Apparat ein jederzeit bereites und bequem zu benutzendes Meridianzeichen, welches bei geeigneter Aufstellung die nämliche Sicherheit, wie ein solches der gewöhnlichen Art bietet, ohne in Bezug auf den Gebrauch an dessen Mängeln zu leiden.

In unserm Falle musste, des Kostenaufwandes wegen, auf Herstellung eines Collimators in dieser Form und auf die Vorteile, die mit ihr verbunden sind, verzichtet und die Einrichtung in möglichst einfacher Gestalt ausgeführt werden. Um auch mit geringen Unkosten jedenfalls der Hauptforderung, der der Unveränderlichkeit, zu genügen, ist von einem äusserlich ein Ganzes bildenden Apparate Abstand genommen und sind statt dessen die beiden Bestandtheile, Marke und Collectivlinse, einzeln in geeigneter Weise am Mauerwerk des Thurmes angebracht worden. Die Plattform des letztern, ausserhalb des Raumes, in dem sich das Instrument befindet, ist mit grossen Steinplatten gedeckt, die un-

mittelbar auf dem Gewölbe aufrufen. Auf die äusserste dieser Platten, deren eine auch den Pfeiler für das Instrument [25] trägt, ca. 6 Met. von diesem nach Süden hin ist ein niedriger Steinblock, nur 2 Decim. hoch, aufgesetzt, der in einer eingehauenen Vertiefung mit geneigter Sohle einen Messingrahmen (mit Mennig aufgeklebt) trägt, dazu bestimmt, die Mire aufzunehmen. Diese selbst besteht in einem Kreuz aus zwei feinen Strichen, eingeritzt in eine Tuschschrift, mit welcher die eine Fläche einer rechteckigen Glasplatte überzogen ist¹⁾. Diese passt in die Oeffnung des metallnen Rahmens und kann darin mittelst einer Schraube und einer auf der andern Seite entgegenwirkenden Feder im Spielraume von ca. 3 Millim. längs eines Falzes verschoben werden, so dass sich der Ort des Kreuzes innerhalb dieser Grenzen in aller Schärfe reguliren lässt. — Im Abstände von etwa 12 Decm. von dieser Mire, aber noch auf der nämlichen Fussplatte, befindet sich das zweite Stück, die Sammellinse, in gleicher Weise wie der Markenträger, aber völlig unbeweglich, mittelst einer starken Messingfassung auf einem zweiten, 6 Decm. hohen Steinpfeiler aufgesetzt, der Art, dass das Kreuz auf der Glasplatte gerade ihren Brennpunkt einnimmt²⁾. Beim Aufstellen der Steinpfeiler und Befestigen der Metallstücke wurde Sorge getragen, die optische Axe des Systems soweit annähernd in den Meridian zu bringen, dass für die genaue Einstellung der Spielraum der Platte im Rahmen ausreichte, während die Höhen der beiden Stücke über dem Boden schon zum Voraus so bestimmt waren, dass das aus der Linse austretende Strahlenbündel in das Fernrohr gelangen kann, wenn dieses im Meridian etwa 20° unter die Horizontale geneigt wird³⁾. Die schliessliche genaue Regulirung des Collimators geschah sodann durch Einvisiren des Kreuzes mit dem alten Meridianzeichen unter Zuhilfenahme der Schraube zur Bewegung der Glasplatte —

1) Gelegentlich soll die Platte mit Tuschüberzug durch eine solche mit einer galvanisch niedergeschlagenen Silberschicht ersetzt werden, der man eine grössere Haltbarkeit wird zutrauen dürfen.

2) Die im Vergleich mit den Dimensionen des Fernrohrs unverhältnissmässig grosse Brennweite wurde gewählt, um durch eine einfache Linse an Stelle eines kostspieligen achromatischen Glases ein hinreichend scharfes Bild zu erhalten. Ein gut geschliffenes Brillenglas von 30 Millim. Durchmesser hat sich unter solchen Umständen als völlig genügend erwiesen.

3) Diese für den Gebrauch keineswegs vortheilhafte Neigung der Visirlinie war nicht zu vermeiden, sollten nicht allzugrosse und schwere Pfeiler, so hoch wie der des Instruments, nöthig werden.



[26] wobei selbstverständlich das Fernrohr sowohl in seiner Drehungsaxe wie in seiner Visirlinie sorgfältig berichtigt war.

Die beiden Steinpfeiler, welche die Bestandtheile des Collimators tragen, sind zu deren Schutze gegen Staub, Regen und Sonnenstrahlung in ihrer oberen Hälfte mit Blechhüten überdeckt und der kleinere von ihnen wird überdiess noch durch einen übergestürzten Holzkasten gegen etwaiges Einschneien im Winter geschützt. Die Blechhüte bleiben auch während der Beobachtung an ihrem Orte, indem alsdann Schieber, die an den geeigneten Stellen angebracht sind, dem Lichte Durchgang gestatten. — Die Benutzung des ganzen Apparates verlangt nichts weiter als eine Beleuchtung der Glasplatte von hinten, so dass die in den Tuschüberzug eingeritzten Striche als helle Linien auf dunklem Grunde hervortreten, auf deren Kreuzungspunkt der Meridianfaden des Fernrohrs mit grösster Schärfe eingestellt werden kann. Bei Tage reicht hierzu das von einer weissen Papierfläche diffus zurückgestrahlte Licht völlig aus; zur Nachtzeit hingegen dient zu dem Zwecke eine kleine Laterne mit mattgeschliffenem Glase, die hinter der Mire in eine dazu bestimmte Nische des Steins eingesetzt wird.

Während der Zeit, seit diese Einrichtung getroffen, hat sie ihrem Zwecke vollständig entsprochen und die bis jetzt gemachten Erfahrungen berechtigen wohl dazu, sie als bewährt zu betrachten. Die definitive Regulirung des Collimators geschah am 30. August. Trotzdem nun die unter freiem Himmel stehenden Bestandtheile allen Einflüssen des Temperaturwechsels und der Feuchtigkeit und überdiess noch den nicht unbeträchtlichen Erschütterungen des Thurmes, die in Folge des Läutens eintreten, ausgesetzt sind, so haben doch die von Zeit zu Zeit wiederholten sorgfältigen Prüfungen bis jetzt nicht die geringste Abweichung der künstlichen Mire aus dem Azimuth des alten Meridianzeichens, in das sie eingestellt ist, wahrnehmen lassen; auch der zu Anfang December mehrere Tage anhaltende, allerdings nicht starke Frost hat — eigentlich wider Erwarten — keinen Einfluss in dieser Hinsicht gehabt; — gewiss ein günstiges Zeugniß für die Festigkeit des Thurmes wie für die Sicherheit der angewandten Constructionsweise, wenn man erwägt, dass das Fernrohr Richtungsänderungen von 2 Bogensekunden noch deutlich erkennen lässt und mithin, bei der oben angegebenen Brennweite des Collimators, eine seitliche Verschiebung seiner beiden Bestandtheile relativ zu

einander hätte wahrgenommen werden [27] müssen, wenn eine solche auch nur den kleinen Betrag von 0,01 Millim. erreicht hätte.

Diese Unveränderlichkeit berechtigt denn nun dazu, den Collimator unabhängig vom früheren Meridianzeichen ganz wie dieses selbst zu benutzen. Vor Allem also steht von jetzt ab auch nächtlichen Beobachtungen kein Hinderniss mehr im Wege, da er hierbei das Meridianzeichen vertreten kann. Aber auch in Verbindung mit letzterem während des Tages lässt er eine vortheilhafte Verwendung zu, in Hinsicht auf welche ihm absichtlich sein Standort südlich vom Instrumente angewiesen worden ist, während das alte Zeichen im Norden liegt. Beide zusammen können zur bequemen Berichtigung der Visirlinie des Fernrohrs in ihrer Lage gegen die Drehungsaxe benutzt werden und leisten in dieser Hinsicht bis zu gewissem Grade dasselbe, was auf den Sternwarten gewöhnlich durch zwei gegen einander gerichtete Collimatoren zu beiden Seiten der Instrumente erreicht wird. Sofern nämlich beide Miren sichtbar sind und zugleich als in demselben Azimuth liegend angenommen werden dürfen, lässt sich die Abweichung der optischen Axe des Fernrohrs von ihrer normalen Stellung zur Drehungsaxe, der sog. Collimationsfehler, ohne Weiteres dadurch erkennen und berichtigen, dass man das Rohr, nach Nivellirung der Drehungsaxe, nach einander auf beide einstellt, während ausserdem diese Berichtigung nur durch die subtilen und umständlichen Operationen des Umlegens in den Axenlagern bewirkt werden kann.

Unter Benutzung der hier beschriebenen neuen Einrichtung sind die während der letzten Jahre von Dr. LOREY regelmässig vorgenommenen Beobachtungen zur Bestimmung des Azimuths des alten Meridianzeichens (jetzt der beiden) auch im letzten Sommer fortgesetzt und dies Mal, da die Beschränkung auf die Tagesstunden wegfiel, auf eine grössere Anzahl von Gestirnen ausgedehnt worden. Diese Beobachtungen, die theils von Dr. LOREY, theils vom Verfasser während der Monate Juni und September ausgeführt wurden, haben nach der bekannten Methode der Combination eines dem Pole nahen Sternes mit einem Aequatorialstern für die fragliche Grösse ergeben:

a Ursae min. mit a Virgin:

— 4",9

— 7",1 im Mittel: — 6",0.



[28] δ Urs. min. mit α Ophiuchi:

— 13,4

— 7,2

— 10,0 im Mittel: — 10",2.

δ Urs. min. mit α Lyrae:

— 11,9

— 7,5

— 5,7

— 9,3

— 6,2

— 9,2 im Mittel: — 8",3.

δ Urs. min. mit α Aquilae:

— 12,0

— 9,2 im Mittel: — 10",6.

Als Mittel aus den 13 Bestimmungen, alle als von gleichem Gewicht vorausgesetzt, folgt für das Azimuth der beiden Miren — 8",72 (d. h. im Süden westliche Abweichung).

Als wahrscheinlichen Fehler dieses Resultats ergibt die Discussion nach der Methode der kleinsten Quadrate

$\pm 0",46$

und als wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Bestimmung:

$\pm 1",68$.

III.

Vorschlag zu einer veränderten Einrichtung der Meridian-Instrumente.

Jahr.-Ber. des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. 1861—1862. pp. 29—42.

Vor einer Reihe von Jahren hat STEINHEIL eine Einrichtung des Meridiankreises beschrieben, die, gegenüber der bisher üblichen Constructionsweise, seiner Ansicht nach mannichfache Vortheile in Aussicht stellt. Sein Vorschlag (Astron. Nachr. Bd. 29)¹⁾ geht dahin, ein Fernrohr mittelst cylindrischer Ringe in der Nähe von Objectiv und Ocular, von Ost nach West gerichtet, in ein horizontales Lager zu legen, in welchem es sich um seine optische Axe drehen lässt, dabei aber durch einen unter 45° Neigung gegen diese vor dem Objective befestigten Planspiegel — in Form eines Reflexionsprisma — die Visirlinie um 90° zu brechen, so dass eine Drehung des Rohrs um seine Axe successive alle Punkte des Meridians ins Gesichtsfeld führt und an dem Fadennetz im Brennpunkt die Durchgänge der Sterne sowie auch ihre Zenithdistanzen (wenn mit dem Rohr ein getheilter Kreis verbunden ist) beobachtet werden können. Es ist mir nicht bekannt, welche Aufnahme dieser Vorschlag bei den Astronomen gefunden hat, ob er schon zur praktischen Ausführung gelangt oder bisher nur Project geblieben ist; da indess noch neuerdings sein Urheber in den Astron. Nachrichten auf denselben zurückkömmt, — wie sich denn auch im Preisverzeichniss seiner astronomischen Werkstätte Passageninstrumente nach diesem Principe in zwei verschiedenen Formen aufgeführt finden, — so nehme ich keinen Anstand, auf die Autorität des berühmten Erfinders mich stützend, hier eine Modification der von ihm angegebenen Constructionsweise darzulegen, von der ich mir, gegen-

1) [Ueber einen neuen Meridiankreis nach der Idee des Herrn Professors VON STEINHEIL. Astr. Nachr. 29, No. 685, 1849, col. 177—186 mit 1 Fig.-Tafel].



über sowohl der jetzt gebräuchlichen Einrichtung als auch der STEINHEIL's, manche Vortheile verspreche. Den praktischen Astronomen bleibt es natürlich überlassen, zu beurtheilen, in wie weit diese Vorzüge von Belang sind und ob sie so leicht erreichbar sein werden, wie ich mir vorstelle.

[30] Bei den zu Messungen bestimmten astronomischen Instrumenten, wie sie jetzt im Gebrauch sind, macht das Fernrohr, ausser dass es als Hilfsmittel für das Auge dient, auch einen wesentlichen Bestandtheil des Messapparates aus. Denn alle astronomischen Beobachtungen, soweit sie den Charakter von Messungen tragen, sind an die Verwirklichung einer Reihe von mathematischen Abstractionen geknüpft, als da sind: eine gerade Linie, eine Ebene, die nach bestimmten Richtungen im Raum orientirt ist, etc., und hierbei fällt dem Beobachtungsrohr — seiner Collimationslinie nämlich — eine wesentliche Mitwirkung zu. Auch von Instrumenten nach STEINHEIL's Idee würde dies noch gelten. Im Gegensatz hierzu zielt die Einrichtung, die ich im Sinne habe, der Hauptsache nach darauf ab, das Fernrohr gänzlich loszutrennen vom eigentlichen Messapparat, so dass ihm bei der Beobachtung lediglich die Rolle einer Waffe für das Auge zur Auffassung der Gesichtswahrnehmungen übrig bleibt, während sein bisheriger Antheil an der Realisirung der geometrischen Constructe, auf welchen die Messung beruht, anderweitigen Hilfsmitteln übertragen ist. — Die Einrichtung des STEINHEIL'schen Meridiankreises weist auf die Art und Weise hin, wie, meiner Ansicht nach, eine solche Idee leicht verwirklicht werden kann. Man bemerkt sogleich, dass das Fernrohr dort, indem es die Drehungsaxe des ganzen Instruments abgibt, nur insofern an der Bewegung wesentlich Theil nimmt, als das Fadennetz im Brennpunkte, an welchem die Beobachtung geschieht, der Reflexionsebene des Spiegels bei ihrer Drehung folgt; für das Linsensystem, das einen vollkommenen Rotationskörper darstellt, ist die Bewegung so gut wie nicht vorhanden. Sieht man daher für den Augenblick ab von der Nöthigung, das Fadennetz mit dem Spiegel zu bewegen, so könnte das Rohr ebenso gut völlig in Ruhe bleiben, man brauchte nur den Spiegel vor dem Objectiv um eine horizontale von Ost nach West liegende Axe, mit der er den erforderlichen Winkel bildet, drehbar zu machen. Es würde alsdann ebenso gut jeder Punkt des Meridians in die Visirlinie des fest aufgestellten Fernrohrs zu bringen und auch die Zenithdistanz zu messen sein, wenn mit der Drehungsaxe ein Theilkreis

verbunden wäre. Nur müsste die übliche Beobachtungsweise in Hinsicht auf die Durchgangszeit und die Einstellung in der Höhe ihren Boden verlieren, indem das Fadennetz in dem ruhenden Rohr nicht mehr bei jeder Lage des Spiegels Elemente der Meridiane und Parallelkreise im [31] Gesichtsfeld darstellen würde. Man müsste, um dieser Schwierigkeit abzuhelfen, entweder abgehen von der Art der Beobachtung, wie sie jetzt bei Meridianinstrumenten in Gebrauch ist und z. B. ein Kreismikrometer an die Stelle des Fadennetzes setzen — vielleicht in Form einer Glasplatte mit eingerissenen concentrischen Kreisen, nach Art der vielfach angewandten Glasmikrometer — oder man müsste im Brennpunkte des Rohrs neben einem festen Kreuz zur Fixirung der optischen Axe noch ein drehbares Fadennetz von der gewöhnlichen Form anbringen, welches für jede einzelne Beobachtung mit Hilfe eines Positionskreises nach dem Höhenwinkel zu orientiren wäre.

Ein vor einiger Zeit veröffentlichter Vorschlag von Dr. MAURITIUS, (Bestimmung der Polhöhe von Marburg; Inaugural-Dissertation; Marburg 1862) der sich ebenfalls an die ursprüngliche STEINHEIL'sche Einrichtung des Mittagsrohrs anschliesst, indem er zu dieser einen sinnreichen Hilfsapparat hinzufügt, hat mir einen Weg nahe gelegt, auf welchem, wie mir scheint, die letztgedachte Anforderung in ungleich vollkommenerer Weise zu befriedigen sein wird. Der Genannte schlägt vor, den Objectivspiegel am STEINHEIL'schen Instrument in der Mitte an einer kleinen Stelle zu durchbrechen — resp. das ihn vertretende Prisma auf bekannte Art hier durchsichtig zu machen — und dahinter in der Richtung der Fernrohraxe einen Collimator aufzustellen, so dass dessen Fadenkreuz bei allen Lagen des Instruments gleichzeitig mit dem des Fernrohrs im Gesichtsfeld erscheint. Der Verfasser zeigt, wie hierdurch eine Universalmire hergestellt wird, die jeden Augenblick eine Controlle, sowohl des Azimuths, als auch der Neigung, als auch der aus der Gestalt der Zapfen entspringenden Veränderungen des Beobachtungsrohrs möglich machen würde¹⁾. — woran er noch den Vorschlag reiht, auch die Einstellung der Gestirne selbst unmittelbar an der Mire des Collimators auszuführen und zu dem Zweck als solche ein System concentrischer lichter Kreise in Anwendung zu bringen. — Von einem

1) Seitdem hat auch STEINHEIL selbst — Astron. Nachr. Bd. 57 [1862. col. 351 u. 352: „Schreiben des Herrn Ministerial-Rath VON STEINHEIL an den Herausgeber“] — einen Collimator im ersten Vertical als Ergänzung zu seinem früheren Vorschlag hinzugefügt.



solchen Collimator im ersten Vertical ist nur ein kurzer Schritt bis zu der Einrichtung, die ich im Sinne habe: die oben angeführte Modification des STEINHEIL'schen Instruments, nämlich den um eine Axe in der Ost-Westrichtung [32] drehbaren Spiegel vor dem festliegenden Fernrohr, als hergestellt vorausgesetzt, denke man den Collimator in jene Axe selbst gelegt, indem man dieselbe der Länge nach durchbohrt und an ihrem einen dem Fernrohr zugekehrten Ende eine Sammellinse, am andern Ende hingegen, in deren Brennpunkt, eine geeignete Mire anbringt. Ist der Spiegel in der Verlängerung der Drehungsaxe durchbrochen, so sendet jene Mire gleichzeitig mit dem Spiegel ein Bündel paralleler Strahlen in das Objectiv des Fernrohrs, in dessen Brennpunkt daher ein optisches Bild von ihr entworfen wird, das nun, völlig unabhängig vom Fernrohr selbst, im Gesichtsfeld der Drehung des Spiegels genau folgt. Wählt man zur Mire ein System von aufeinander rechtwinkligen Linien, z. B. ein gewöhnliches Fadennetz, so hat man — wofür dasselbe gegen die Reflexionsebene des Spiegels gehörig orientirt ist und auch die übrigen Bestandtheile des Apparates als berichtigt vorausgesetzt werden — bei jeder Stellung die Bilder der Fäden als Elemente der Meridiane und Parallelkreise im Gesichtsfeld, an denen man mithin die Antritte der Sterne und ihre Zenithdistanzen ganz auf die gewöhnliche Art bestimmen kann; aber die Beobachtung hängt jetzt nicht mehr vom Fernrohr ab: letzteres leiht nur sein Sehfeld zur gleichzeitigen Wahrnehmung der vom Spiegel reflectirten und der vom Fadennetz kommenden Strahlen, gehört jedoch im Wesentlichen nicht mehr zum Instrument, sondern lediglich zum Auge des Beobachters.

Nach dem hier Gesagten würde mithin ein Meridianrohr, dieser Idee gemäss construiert, etwa folgende — von der jetzt gewohnten freilich ziemlich abweichende — Gestalt annehmen: der erste Bestandtheil wäre eine hohle Metallröhre, cylindrisch oder conisch in einem Stück gefertigt, hinreichend massiv und von einer den Dimensionen der übrigen Theile entsprechenden Länge, in der Nähe beider Enden genau cylindrisch abgedreht oder mit cylindrischen Ringen versehen, mit denen es in corrigirbaren Lagern ruht. Am einen Ende dieses Rohrs ist ein kleines achromatisches Objectiv eingesetzt, dessen Brennweite nahezu der Länge des ersteren gleich kömmt, und zugleich unmittelbar hinter dem Zapfen eine geeignete Fassung für den Planspiegel angeschraubt, die so eingerichtet sein muss, dass sie, unter Garantie möglichster Unwandelbarkeit, eine

scharfe Einstellung des Spiegels auf die Neigung von 45° gegen die Drehungsaxe zulässt. Letzterer — natürlich ein Glassilber-
spiegel, wie man solche gegenwärtig [33] in hoher Vollkommenheit darzustellen vermag, vorausgesetzt — ist von elliptischem Umfang, so dass seine Projection auf die zur Rohraxe senkrechte Ebene einen Kreis gibt, und in seiner Mitte, gegenüber dem kleinen Objective, mit einer cylindrischen Durchbohrung versehen. Am andern Ende der hohlen Axe, im Brennpunkte der vordern Sammellinse, wäre nun das Object anzubringen, welches das Fadennetz des Fernrohrs bei der jetzt üblichen Einrichtung ersetzen soll; es müsste von einer passend eingerichteten Fassung getragen werden, die neben einer möglichst soliden Befestigung zugleich eine Drehung um die Axe des Rohrs und eine Centrirung gegen dieselbe gestattet. — Zu jenem Objecte könnte man ein Fadennetz der gewöhnlichen Art verwenden; es würde nicht die geringste Schwierigkeit haben, Einrichtung zu treffen, dass man ihm nach Belieben und ohne jede Veränderung am Apparate selbst bald einen hellen Hintergrund geben, bald die Fäden von vorne mehr oder minder stark beleuchten kann, je nachdem an dunkeln oder lichten Linien beobachtet werden soll. Unter Umständen indess könnte es vielleicht noch vorthellhafter sein, eine Glasplatte mit undurchsichtigem Ueberzug zu benutzen, in welchen ein Liniensystem eingerissen ist, wie es schon STAMPFER und LITROW, von einer früheren Idee STEINHEIL's ausgehend, am Meridiankreise neben dem gewöhnlichen Fadenkreuz angewandt haben (Sitzungsbericht der Wiener Academie, Bd. 20, pag. 253)¹⁾. Bei Herstellung eines derartigen Liniengitters mittelst der Theilmachine wird es leicht sein, den Linien mindestens paarweise genau gleichen Abstand von der Mittellinie zu geben, was wohl im Interesse einer leichteren Reduction der Beobachtungen nicht ganz ohne Belang sein dürfte. Als Material für die Ausführung wird sich alsdann, meiner Meinung nach, ein dünner Silberniederschlag auf Glas, wie er zur Anfertigung der Spiegel dient, vorzugsweise eignen, sowohl desshalb, weil sich in einem solchen, wenn er nur hinreichend dünn ist, Risse von unbegrenzter Feinheit und Schärfe ziehen lassen, als auch desshalb — und das habe ich besonders im Auge — weil bei dieser Wahl des Ueberzugs ein solches Liniengitter nicht allein hell auf dunklem Grunde, sondern auch, wie ein Fadennetz, durch alleinige

1) [K. L. VON LITROW: Ueber lichte Fäden im dunklen Felde bei Meridianinstrumenten. Wien, Sitz.-Ber. 20. 1856. pp. 253—260.]



Aenderung der Beleuchtung im hellen Felde wird wahrgenommen werden können. Einige Versuche, die ich angestellt habe, lassen mich erwarten, dass bei geeigneter seitlicher Beleuchtung der matt glänzenden Silberfläche, die man ohnedies auf jeden Fall nach Innen kehren würde, die vom Silber entblösten [34] Stellen der Glasoberfläche, auch bei grosser Feinheit der Risse, als dunkle Linien hervortreten werden.

Soweit würde der beschriebene Apparat, ein in der Richtung seiner Axe aufgestelltes Fernrohr und etwa noch einen Aufsuchungskreis hinzugedacht, ein Passageninstrument vorstellen, wenn abgesehen wird von allen das rein Technische betreffenden Zugaben, als Vorrichtungen zur Balancirung, zur Drehung und Einstellung etc. Soll es zu Winkelmessungen eingerichtet werden, so wird Nichts weiter erforderlich sein, als die Drehungsaxe mit einem getheilten Kreise zu versehen, der entweder in der Mitte zwischen den beiden Lagern oder ausserhalb der letztern unmittelbar hinter dem Träger des Spiegels seinen Platz finden kann. Wofern diese zweite Befestigungsweise nicht die Balancirung zu sehr erschwert, würde sie sich dadurch empfehlen, dass dabei einerseits das ganze Instrument auf einem einzigen massiven Pfeiler aufgestellt werden kann, über dessen Fläche Kreis und Spiegel herausragen, andererseits aber durch diese Anordnung der Einfluss einer etwaigen Torsion der Axe auf die Ablesung am Kreise beseitigt wird. — In Bezug auf das zur Beobachtung dienende Fernrohr endlich hat man völlig freie Wahl, sowohl was seine optische Einrichtung und seine Grösse, als auch was die Art der Aufstellung betrifft. Wenn es darauf ankäme, würde man — das Instrument als berichtigt angenommen — selbst mit einem Opernglase aus freier Hand beobachten können, wofern sein Objectiv nur gross genug ist, um gleichzeitig vom Spiegel und aus dem Collimator Licht aufzunehmen. Um allen Anforderungen zu genügen, ist nur vorauszusetzen, dass die Oeffnung des Beobachtungsrohrs der des Spiegels entspreche, und zum Zwecke der Berichtigung des Apparats, dass es vorübergehend eine unveränderliche Aufstellung zulasse für den kurzen Zeitraum, den je eine der hierzu erforderlichen Operationen beansprucht; wie auch lediglich für diesen Zweck ein einfaches Fadenkreuz — oder besser ein Filarmikrometer — in seinem Gesichtsfelde zu beanspruchen ist. Man wird daher — welcher Umstand für kleinere Observatorien mit beschränkten Mitteln vielleicht nicht ganz gleichgiltig ist — gar keines besondern Fernrohrs für ein solches

Meridianinstrument bedürfen, sondern zur Noth jeden vorhandenen transportablen Refractor, der irgendwie montirt sein darf, verwenden können, wofern er nur zeitweilig vor dem Apparate eine solche Aufstellung zulässt, dass das Rohr bei horizontaler Lage in [35] gleiche Höhe mit dem Spiegel kommt. Ist indess ein ausschliesslich für das Instrument zu benutzendes Fernrohr zur Verfügung, so dürfte es leicht sein, durch möglichst solide Aufstellung desselben noch einen besondern nicht unwesentlichen Vortheil zu erreichen. Wenn man nämlich, anstatt Objectiv und Ocular vom Rohre tragen zu lassen, beide getrennt auf einem festen Pfeiler anbringt, indem man ein Blendrohr bloss dazwischen legt, so ist wohl zu erwarten, dass die durch das Fadenkreuz im Brennpunkt bestimmte Visirlinie eine sehr grosse Stabilität besitzen werde, so dass dieselbe, einmal in Neigung und Azimuth scharf orientirt, für längere Zeiträume als eine sehr bequeme Universalmire zur Einstellung der Drehungsaxe sich wird benutzen lassen. — Uebrigens würde sich zum Beobachtungsrohr, wie mir scheint, auch ein Telescop (etwa mit seitlich angebrachtem Ocular) recht wohl eignen, wofern die Räumlichkeit gestattet, die sphärische Abweichung des Spiegels durch eine verhältnissmässig grosse Brennweite beliebig zu vermindern; es würde dabei der Vortheil bestehen, dass selbst bei einem grossen Instrumente der Beobachter ganz in der Nähe des Messapparates bleiben kann und die Manipulationen daran in Folge dessen weniger unbequem werden.

Was die Anforderungen anlangt, denen ein Meridiankreis nach dieser Construction genügen muss, um zum Gebrauche bereit zu sein, so wie die Methoden, jene Anforderungen zu erfüllen, so bedarf es darüber nur weniger Bemerkungen. Der Hauptsache nach sind es die nämlichen wie für ein Instrument nach der ursprünglichen STEINHEIL'schen Einrichtung, daher denn dessen Angaben darüber (Astron. Nachr. Bd. 29)¹⁾ fast ungeändert auch hier Anwendung finden. — Eine vollständige Berichtigung des beschriebenen Apparates für Beobachtungen im Meridian wird voraussetzen:

- 1) dass die optische Axe des Collimators, die durch den Mittelpunkt des Fadennetzes oder Liniengitters bestimmt ist, der Drehungsaxe parallel sei, und zugleich die Meridianfäden auf der Neigungsebene der Axe gegen den Spiegel senkrecht stehen;
- 2) dass in der gedachten Neigungsebene der Winkel zwischen der Drehungsaxe und der Ebene des Spiegels genau 45° betrage;

1) [Vgl. die Anm. auf S. 41.]



- 3) dass die Drehungsaxe horizontal und endlich
- 4) rechtwinklig zur Mittagslinie gerichtet sei.

Die Operationen zur Erfüllung dieser Bedingungen, bezüglich [36] zur Ermittlung der übrig gebliebenen kleinen Correctionen, werden dem entsprechend in Folgendem bestehen:

1) Jede Abweichung der optischen Axe des Collimators von der geometrischen wird sich dadurch kenntlich machen, dass bei Drehung des Instruments der Mittelpunkt des Liniensystems im Gesichtsfeld des Beobachtungsrohrs einen Kreis beschreibt. Mit Hilfe eines Fadenkreuzes im Fernrohr und der Centrivorrichtung am Collimator wird sich dieser Kreis auf einen Punkt reduciren lassen, wofern die Zapfen die erforderliche Gestalt in aller Schärfe besitzen. — Die etwa übrig bleibenden kleinen Abweichungen sind mikrometrisch zu messen, damit man bei Reduction der Beobachtungen den Fehlern der Zapfen, so weit sie Richtungsveränderungen der Drehungsaxe zur Folge haben, bei allen Zenithdistanzen Rechnung tragen könne. — Die Orientirung des Liniensystems gegen den Spiegel wird dabei auf die gewöhnliche Art mit Hilfe von Sterndurchgängen zu bewirken sein.

2) Die richtige Neigung des Spiegels gegen die Axe seines Trägers, (von welcher jetzt der Collimationsfehler abhängt) muss hier, da von einem Umlegen des Instruments nicht die Rede sein kann, zwischen zwei im Süden und Norden passend aufgestellten und gegeneinander gerichteten Collimatoren hergestellt werden, wie es gegenwärtig schon auf den meisten Sternwarten üblich ist. Man wird hierbei die Einstellung natürlich nicht am Faden des Beobachtungsrohrs, sondern direct an der Mittellinie des — als schon centrirt vorausgesetzten — Liniensystems in der Drehungsaxe bewirken.

3) Ist die Collimation des Instruments auf die angegebene Weise berichtigt, so kann die Neigung der Axe mit Hilfe eines Quecksilberhorizonts auf die bekannte Weise corrigirt werden, indem man unter Benutzung der Correctionsschraube des einen Axenlagers das Fadenkreuz im Beobachtungsrohr mit seinem Spiegelbilde aus dem Horizonte zur Deckung bringt. Bei dieser Operation bestimmt sich natürlich zugleich der Zenithpunkt des Theilkreises.

4) Die Orientirung des Instruments gegen die Meridianebene endlich muss selbstverständlich auf die gewöhnliche Art durch Beobachtungen erreicht und geprüft werden, soweit man sich nicht auf die Unwandelbarkeit entweder eines der Hilfspollimatoren oder der Visirlinie des Beobachtungsrohrs verlassen kann. Die letztere

wird offenbar mit der Berichtigung der Neigung von selbst der Mittellinie des Axencollimators parallel gemacht und kann sodann mit dieser in die [37] Richtung des ersten Verticals gebracht werden. Ist daher die Aufstellung des Fernrohrs der Art, dass sie für längere Zeiträume eine unveränderte Lage jener Visirlinie garantirt, so wird man an ihr jeden Augenblick, ohne alle weiteren Operationen, gleichzeitig Neigung und Azimuth der Drehungsaxe controlliren können, wie oben bereits angedeutet wurde.

Ich kann mir nicht denken, dass der Ausführung eines Meridianinstruments diesem Projecte gemäss irgend welche ernstliche technische Schwierigkeiten entgegenstehen sollten. Die ganze Einrichtung scheint mir erheblich einfacher gegenüber sowohl der jetzt gebräuchlichen Construction als auch der von STEINHEIL angegebenen. Durch die Trennung des Fernrohrs vom Hauptapparate sind die beweglichen Theile um ein Beträchtliches vermindert; grade dasjenige Stück ist entfernt, welches vermöge seiner ansehnlichen Masse und seiner unvortheilhaften Dimensionen, mindestens bei grösseren Instrumenten, sich am wenigsten leicht den Anforderungen fügt, welche in Bezug auf seine Verbindung mit den übrigen Theilen gestellt werden müssen. Der einzige Umstand, der dem Anschein nach die hier vorgeschlagene Einrichtung gegenüber der gewöhnlichen in Nachtheil setzt, ist das Bedürfniss eines der Oeffnung des Fernrohrs entsprechenden Spiegels. So lange man einen solchen in der erforderlichen Vollkommenheit nicht gut anders als durch ein Prisma zu totaler Reflexion herstellen konnte, möchte jenes Erforderniss wohl ein erheblicher Einwand gewesen sein. Seit man aber mittelst Versilberung geschliffener und polirter Glasflächen Planspiegel von grosser Vollendung auch in bedeutenden Dimensionen anzufertigen im Stande ist, welche die Schärfe der Bilder nicht beeinträchtigen und nur einen sehr geringen Lichtverlust herbeiführen, — nach STEINHEIL's Angabe nicht mehr als $\frac{1}{11}$, bei der hier in Frage kommenden Reflexionsrichtung — dürfte wohl der Ausführung der beschriebenen Combination von dieser Seite kein ernstliches Hinderniss mehr im Wege stehen.

Die Hauptfrage wird freilich immer die sein: ob der dabei zu erwartende Gewinn als erheblich genug befunden wird, um ein Abgehen von gewohnten und in langjährigem Gebrauch bewährten Einrichtungen zu rechtfertigen. Das zu entscheiden ist nun ausschliesslich Sache eines auf praktischen Erfahrungen fussenden Urtheils; es muss Denjenigen überlassen bleiben, die mit den gegen-



wärtigen Bedürfnissen der beobachtenden [38] Astronomie im Einzelnen vollkommen vertraut sind, und ich erlaube mir über diesen Punkt nur wenige Bemerkungen.

Zunächst darf ich wohl, auf STEINHEIL's Autorität hin, das als Vortheil auch für meinen Vorschlag in Anspruch nehmen, was dieser zu Gunsten der von ihm beschriebenen Einrichtung auführt: die Möglichkeit eines fast vollständigen Verschlusses des ganzen Messapparates zum Schutz gegen Temperaturwechsel und andere schädliche Einflüsse; die Beseitigung der schwer zu controllirenden Fehler, die für die Winkelmessung bei der gewöhnlichen Constructionsweise aus der veränderlichen Durchbiegung des Fernrohrs entspringen; endlich die ungleich grössere Bequemlichkeit der Beobachtung in Folge des unverrückten Standorts, den das Auge dabei einnimmt; welchem Vorzuge auch dann kein erheblicher Abbruch geschehen wird, wenn wegen der bei meiner Einrichtung vielleicht grösseren Entfernung des Beobachters vom Hauptapparat die Schlüssel zur Einstellung einige Fuss länger werden und, falls auch das Aufsuchen vom Platze aus geschehen soll, ein kleines Fernrohr zu Hilfe genommen werden muss. Nächstdem aber scheint mir ein nicht unwesentlicher Gewinn, der dieser Combination eigenthümlich ist, darin zu liegen, dass das messende Liniennetz der Natur der Sache nach hier ausserhalb des Beobachtungsrohrs liegt, was bei den andern Einrichtungen nur durch besondere immerhin etwas künstliche Hilfsmittel erreichbar ist; in Folge dessen die Leichtigkeit, mit welcher je nach Bedürfniss dieselben Linien als helle oder dunkle in das Gesichtsfeld gebracht werden können, durch blosser Aenderung der Beleuchtung. Dem gegenüber wird der geringe Lichtverlust, welchen die Durchbrechung des Spiegels nach sich zieht, durchaus irrelevant sein; er kann ohne Zweifel, besonders bei grösseren Instrumenten, auf einen sehr kleinen Bruchtheil zurückgeführt werden, da man es ja innerhalb weiter Grenzen in der Gewalt hat, durch hinreichend intensive Beleuchtung dem Collimatorbild die nöthige Helle zu geben.

Endlich hebe ich noch einen Vortheil hervor, der aus der völligen Lostrennung des Beobachtungsrohrs vom Messapparat entspringt. — Auf den schon oben erwähnten Umstand, dass ein solches Meridianinstrument kein ausschliesslich zu ihm gehöriges Fernrohr beansprucht, ist vielleicht wenig Gewicht zu legen; nicht so gleichgiltig aber scheint mir, was damit Hand in Hand geht: dass nun auch der Vergrösserung der Dimensionen und der op-

tischen Kraft des Fernrohrs weniger enge [39] Grenzen gesetzt sein werden. Seit REICHENBACH sind die Meridianinstrumente ziemlich bei gleichem Caliber geblieben; man hat — aus guten Gründen wohl — nicht versucht, ihnen erheblich stärkere optische Hilfsmittel zu geben. Doch aber scheint schon längst das Bedürfniss einer derartigen Neuerung hervorgetreten und der Punkt erreicht zu sein, wo eine Erweiterung des Arbeitsfeldes für diese Instrumente nur durch Steigerung der Leistungsfähigkeit ihrer Fernröhre herbeizuführen ist. (M. s. z. B. LITTKOW, Sitzungsber. der Wiener Akad., Bd. 20, p. 253¹⁾). Zur Befriedigung von Anforderungen nach dieser Seite hin bietet die hier dargelegte Einrichtung vielleicht vorzugsweise einen günstigen Boden dar. Denn eine bedeutende Vergrösserung der Fernrohrdimensionen zieht nur eine unverhältnissmässig geringe Vermehrung der beweglichen Theile des Instruments nach sich; und wenn sich also die fragliche Construction überhaupt mit Vortheil ausführen lässt, so wird es nicht wesentlich schwieriger sein mit einem sechs- oder siebenzölligen Spiegel als mit einem solchen von nur drei Zoll Oeffnung, der vielleicht ein Pfund weniger wiegt. Sollte ein Teleskop als Beobachtungsrohr brauchbar befunden werden, so dürfte sogar ein solches Instrument auch in grossen Dimensionen mit vergleichsweise geringem Kostenaufwand herzustellen sein.

Zum Schluss füge ich noch ein paar Bemerkungen hinzu, welche, an den Inhalt des Obigen sich anschliessend, einige andere Einrichtungen nach ähnlichen Grundsätzen betreffen.

Wenn die Verwendung eines Planspiegels zur Richtungsänderung der einfallenden Lichtstrahlen als unbedenklich zugestanden wird, so lässt sich noch auf andere Weise von einem solchen Gebrauch machen, um alle Punkte eines grössten Kreises am Himmel, also z. B. des Meridians oder des ersten Verticals, in das Gesichtsfeld eines ruhenden Fernrohrs zu führen. Während nach der vorhin beschriebenen Combination, wo die Normallinie zum grössten Kreise als Beobachtungsrichtung dient, eine Drehung der Reflexionsebene des Spiegels bei constantem Reflexionswinkel die Einstellung bewirkt, lässt sich das Nämliche auch erreichen durch Veränderung des Reflexionswinkels bei gleichbleibender Einfallsebene, wofür nur eine Richtung in der Ebene der Beobachtung als Visirlinie gewählt wird. Man denke sich also einen Spiegel

1) [Vgl. die Anm. auf S. 45.]





an einem geeigneten Metallstück mit cylindrischen Zapfen so befestigt, dass seine Ebene der Drehungsaxe des ersteren parallel ist, und denke sich diese Axe horizontal und in der Ost-West-richtung [40] in corrigirbare Lager gelegt. Stellt man dem Spiegel gegenüber in der Ebene des Meridians ein Fernrohr etwa horizontal auf, so führt eine Drehung des Spiegels im Spielraum von 90° alle Punkte des Meridians bis nahe an den Horizont successive in das Gesichtsfeld. Ein gewöhnliches Fadennetz im Brennpunkt des völlig fest liegenden Rohrs, die Antrittsfäden senkrecht gestellt, wird offenbar in jeder Zenithdistanz die richtige Orientirung behalten, da das vom Spiegel reflectirt gedachte Bild des Meridians bei allen Lagen desselben im Gesichtsfeld senkrecht erscheint. — Um die Mittagslinie bequem festzulegen, kann man eine Collimatormire einrichten, indem man ein kleines Hilfsfernrohr dem Beobachtungsrohr gegenüber auf der andern Seite des Apparats möglichst stabil aufstellt, so dass es bei passender Stellung des Spiegels über diesen hinweg gesehen werden kann. Sofern es aber wünschenswerth erscheint, von der Stellung des Beobachtungsrohrs während der Beobachtung unabhängig zu sein, so wie das messende Liniennetz ausserhalb desselben zu haben, bedarf es natürlich auch hier nur einer Durchbrechung des Spiegels, damit das vom Collimator entworfene Bild fortwährend im Gesichtsfeld bleibe. — Zur Verbindung mit einem getheilten Kreis wird sich diese Anordnung wohl weniger eignen, weil die Messung der Winkelunterschiede wie beim Sextant durch Drehungen erfolgen würde, die nur dem halben Betrage jener entsprechen. Als Passageninstrument im Meridian oder ersten Vertical aber könnte sie vielleicht mit Vortheil Verwendung finden wegen der grossen Einfachheit der Construction und der Bequemlichkeit der Handhabung. Die erforderlichen Correctionen sind hier sehr leicht und sicher auszuführen und auch die Reductionsformeln zur Berücksichtigung der übrigbleibenden Abweichungen, die sich ohne Schwierigkeit entwickeln lassen, gestalten sich nicht wesentlich complicirter, wie für Instrumente der üblichen Art. Die zu erfüllenden Anforderungen betreffen den Parallelismus der Spiegelebene mit der Drehungsaxe, die Horizontalität der letztern und ihre richtige Orientirung im Azimuth und die zu ihr senkrechte Lage der Visirlinie. Die erste Bedingung ist — da ein Umlegen des Instruments bei seiner handlichen Form und seinem geringen Gewicht hier gar keine Schwierigkeiten hat — unabhängig von

den übrigen dadurch zu erfüllen, dass man in beiden Lagen des Spiegels das von ihm direct reflectirte Bild des Fadenkreuzes im Fernrohr beobachtet. Orientirt man dieses sodann mit Hilfe des Collimators — diesen [41] als berichtigt vorausgesetzt — gegen den Meridian, so kann man zunächst auf dieselbe Weise die Drehungsaxe in das richtige Azimuth bringen und sie endlich noch mittelst eines unter den Spiegel gestellten Quecksilberniveau's horizontal machen. Will man jedoch für letztern Zweck eine Libelle benutzen, so lässt sich selbst das Umlegen vermeiden, indem alsdann der Collimationsfehler durch blosse Reflexionsbeobachtungen beseitigt werden kann.

Nachdem ich in diesen Erörterungen so weit gegangen bin, möge es gestattet sein, sie auch noch einen kleinen Schritt weiter zu verfolgen. Es liegt nämlich der Gedanke nahe, die beiden Combinationen, die im Vorstehenden betrachtet wurden, in einem einzigen Apparat mit einander zu verbinden, um ein Instrument zu erhalten, das Einstellungen und Messungen nach zweien Coordinaten gleichzeitig gestattet. Wie eine solche Verbindung zu bewerkstelligen wäre, bedarf keiner Auseinandersetzung, denn sie findet sich thatsächlich schon vor in einem längst bekannten Apparate. Man denke sich einen Heliostat in grossem Massstab ausgeführt, seine Längsaxe nach dem Pole gerichtet und vor dem Spiegel in der Richtung jener ein beliebiges Fernrohr aufgestellt: so hat man darin ein parallaktisches Instrument, welches sich ganz so gebrauchen lässt, wie ein solches der gewöhnlichen Art. Um für den Zweck der Messung auch hier vom Beobachtungsrohr ganz unabhängig zu werden, könnte man, wie bei dem oben betrachteten Meridiankreis, einen Collimator in die hohle Stundenaxe legen und diesen mit einem Liniengitter versehen, das durch eine passende Oeffnung im Spiegel fortwährend die Meridiane und Parallelkreise im Gesichtsfeld erscheinen lässt; wie es auch keine Schwierigkeiten haben würde, auf ähnliche Weise ein Kreismikrometer — mit leuchtenden Linien z. B. — in das Sehfeld zu bringen. Wie bei einer derartigen Einrichtung die Correctionen auszuführen wären, wenn es als Aequatorial zu absoluten Bestimmungen benutzt werden sollte, bedarf keiner weitem Erläuterung, da Alles, was bei der Berichtigung der Theile in ihrer gegenseitigen Lage in Frage kommt, schon in früher Gesagtem mit enthalten ist, die Orientirung gegen den Himmel aber ganz nach den gewöhnlichen Methoden erfolgen könnte.



Wegen der verhältnissmässigen Compendiosität und Handlichkeit möchte eine Einrichtung dieser Art als Ersatz für die parallaktische Aufstellung der Fernröhre selbst, besonders bei grösseren, wohl manche [42] Vortheile bieten. Es haftet ihr indess der nicht zur vermeidende Uebelstand an, dass dabei die Gegend zunächst um den Pol, je nach der Anordnungsweise bis zu einer engeren oder weiteren Grenze, der Beobachtung sich entzieht, wie denn auch andererseits bei grossen Instrumenten die Unentbehrlichkeit eines entsprechend grossen Planspiegels von der erforderlichen Güte immerhin ein erheblicher Nachtheil sein wird — wenn schon man jenen zur Noth aus zwei oder selbst aus mehreren einzeln zu regulirenden Stücken zusammensetzen könnte. — Doch wäre es vielleicht möglich, dass für den einen oder den andern besondern Zweck die Vortheile, die aus der beschriebenen Combination entspringen, die damit verbundenen Uebelstände überwiegen. Wenn es sich z. B. um die Herstellung eines Instruments handelt, das, bei mässiger optischer Kraft, als Aequatorial für directe Rectascensions- und Declinationsbestimmungen, einigermassen mit den Meridianinstrumenten concurriren könne, so lassen sich vielleicht die grossen mechanischen Hindernisse, welche bei der üblichen Constructionsweise eintreten, nach einem Plane, wie der genannte, leichter und vollständiger überwinden. Bei der verhältnissmässig geringen Grösse der zu bewegenden Massen und ihrer ungleich günstigeren Gestalt werden mindestens die Anforderungen, die sich auf vollkommene Balancirung, Stabilität der Aufstellung etc. beziehen, ohne Zweifel leichter zu erfüllen sein, als es bisher möglich gewesen zu sein scheint.

IV.

Ueber die Gesetzmässigkeit in der Vertheilung
der Fehler bei Beobachtungsreihen.

Dissertation zur Erlangung der Venia Docendi bei der philosophischen Fakultät
in Jena 1863.

Die von GAUSS entwickelten Grundsätze und Regeln zur Ausgleichung der Beobachtungsfehler, die unter dem Namen der Methode der kleinsten Quadrate bekannt sind, bezwecken die Ermittlung derjenigen Werthe der Constanten in einem seiner Form nach gegebenen Abhängigkeitsgesetze, mit welchen sich dieses einer Reihe vorgelegter Beobachtungen möglichst vollkommen anschliesst. Diese Regeln, für sich betrachtet, können überall da Anwendung finden, wo irgend ein messbares Bestimmungsstück in einer Erscheinung, aus was für Gründen immer, als eine bis auf gewisse Constanten bestimmte Function anderer Grössen gesetzt ist, unter welche Function einzelne durch directe Messung erhaltene Werthensysteme jener — in grösserer Anzahl als die der verfügbaren Constanten beträgt — subsumirt werden sollen. Die Bedeutung der Resultate jedoch, zu welchen die Methode der kleinsten Quadrate führt, hängt stets von einer Voraussetzung ab, deren Nothwendigkeit sogleich einleuchtet, wenn man sich die Grundlage ihres Verfahrens vergegenwärtigt; von der Voraussetzung nämlich: dass einerseits die angenommene mathematische Function das wahre Abhängigkeitsgesetz für die in Frage kommenden Bestimmungsstücke darstelle (d. h. die Möglichkeit einer vollständigen Uebereinstimmung mit absolut fehlerfreien Messungen darbiete) und andererseits die empirisch gegebenen Einzelwerthe mit keinen



ändern als zufälligen Beobachtungsfehlern behaftet seien; was, beides zusammengefasst, auf die Eine Forderung zurückkommt: dass die nach geeigneter Wahl der Constanten noch übrig bleibenden Differenzen ausschliesslich in zufälligen Fehlern der Messung ihren Ursprung haben. Denn wäre in einem Falle diese Bedingung nicht erfüllt, so würde zwar immer noch ein Constantensystem so zu bestimmen sein, dass für die eben vorliegende Beobachtungsreihe die Summe der Differenzenquadrate ein Minimum ist, dieses System aber würde alsdann trotzdem nicht vor allen übrigen den Vorzug haben, das wahrscheinlichste zu sein, weil eben keines unter allen möglichen das richtige sein kann; und nächst dem müsste ein Absehen von jener Forderung die Methode der kleinsten Quadrate mit ihren eigenen Prämissen in Widerspruch bringen, insofern die Betrachtungen, aus welchen sich ihr Verfahren rechtfertigt, die ausgleichenden Fehler ausdrücklich als solche annehmen, deren Eintreffen nur nach Gründen der Wahrscheinlichkeit vorauszubestimmen, also durch das Spiel des Zufalls bedingt ist.

Demnach verlangt die Anwendung der GAUSS'schen Methode, wenn man derjenigen Bedeutung ihrer Resultate, die nach dem Sinne des Ausgleichungsverfahrens ihnen zukommt, versichert sein will, in jedem einzelnen Falle streng genommen eine besondere nachträgliche Untersuchung darüber, ob die gedachte Voraussetzung wirklich erfüllt ist und nicht vielmehr die Abweichungen auf eine Unrichtigkeit des angenommenen Gesetzes oder das Vorhandensein regelmässig wirkender Fehlerquellen bei der Beobachtung hinweisen; welche Untersuchung — da hier natürlich von einer positiven Gewissheit nicht die Rede sein kann — hinauslaufen wird auf eine Beurtheilung der Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Gesamtheit der übrig bleibenden Differenzen als von zufälligem Ursprunge anzusehen ist. — In der That pflegen die Astronomen und [4] Physiker eine hierauf gerichtete nachträgliche Discussion der bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate schliesslich sich darbietenden Abweichungen, wenn sonst der Gegenstand Interesse genug besitzt und die Entscheidung nicht aus anderweitigen Gründen unzweifelhaft ist, nicht zu unterlassen. Man stützt sich dabei zum Theil auf die Summe der Fehlerquadrate oder den daraus abgeleiteten mittleren Fehler, indem man diesen mit der Genauigkeit der betreffenden Beobachtungen, wie sie von anderer Seite bekannt ist, zusammenhält; zum Theil auch berück-

sichtigt man die Art, wie die Fehler sich vertheilt zeigen. Findet sich der mittlere Fehler erheblich grösser, als die Beobachtungsweise erwarten lässt, oder verrathen die Differenzen einen merklichen Gang, so erscheint ein zufälliger Ursprung derselben als wenig wahrscheinlich und man wird alsdann auch ohne genauere Schätzung dieser Wahrscheinlichkeit auf eine thatsächliche Unrichtigkeit der angenommenen Funktion oder auf das Dasein constanten Fehlerquellen mit um so grösserer Zuversicht schliessen, je grösser die Zahl der verglichenen Beobachtungen ist.

Wird nun auch in der Praxis ein solcher Ueberschlag meistens ausreichen, so sind doch immerhin Fälle denkbar, wo eine subtilere Discussion der auftretenden Fehler erforderlich oder wenigstens nutzbringend werden kann; und in Hinblick auf diese ist es vielleicht nicht ganz ohne Interesse, einmal nach Anhaltspunkten für eine schärfere Beurtheilung der gedachten Frage zu suchen, d. h. nach Regeln, auf Grund welcher, wenn irgend ein System von Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Werthen einer Grösse vorgelegt ist, wirklich in Zahlen die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden kann, welche dafür besteht, dass diese Differenzen nur aus zufälligen Beobachtungsfehlern entspringen. — Hierzu soll im Folgenden der Versuch gemacht werden.

1.

Um die Voraussetzungen für die nachstehenden Erörterungen vollständig zu präcisiren, werde angenommen, es handle sich um irgend einen Vorgang, in welchem eine messbare Grösse B in ihrem Werthe mit einer andern A variirt (wie z. B. in einer Dampfmasse die Spannung mit der Temperatur od. dergl.). Es seien alsdann einerseits für eine Reihe einzelner Werthe des Bestimmungsstückes A , $\dots a_1, a_2, \dots a_n$ die zugehörigen des andern B , $\dots b_1, b_2, \dots b_n$ durch directe Messung ermittelt, und andererseits sei — irgend woher — eine theoretische Formel als Ausdruck der zwischen beiden stattfindenden Abhängigkeit vorgelegt, $B = F(A)$, vermöge welcher den Werthen $a_1, \dots a_n$ die berechneten Werthe $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ entsprechen¹⁾. Die Frage ist nun: welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, dass die n Differenzen

1) Auf dieses einfache Schema werden sich die in der Praxis vorkommenden Aufgaben, auch dann, wenn gleichzeitig mehr als zwei Veränderliche vorliegen, in den meisten Fällen zurückführen lassen.



$$\beta_1 - b_1 = x_1 \cdots \beta_n - b_n = x_n$$

ausschliesslich von zufälligen Beobachtungsfehlern herrühren?

Es liegt auf der Hand, dass die Beantwortung dieser Frage von einer bestimmten Annahme über die relative Häufigkeit zufälliger Fehler von verschiedener Grösse bei der betreffenden Beobachtungsweise ausgehen muss. Hier soll nun ausschliesslich diejenige Regel zu Grunde gelegt werden, welche Gauss aus einfachen Betrachtungen abgeleitet hat und welche durch vielfache Vergleichung mit umfassenden Beobachtungsreihen als eine der Wirklichkeit stets sehr nahe kommende bewährt ist. Dieser zufolge ist die Wahrscheinlichkeit w für das Eintreffen eines Fehlers, dessen Grösse zwischen x und $x + dx$ liegt (dx als Differential in dem üblichen Sinne genommen), bestimmt durch die Formel

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx, \quad (1)$$

[5] in welcher die Constante h — das Maass für die Genauigkeit der betreffenden Beobachtungsweise — durch die Gleichung

$$h\varrho = 0.4769 \dots$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler ϱ einer Beobachtung verknüpft ist.

Dies vorausgesetzt, lässt sich die obige Frage dahin formuliren: Wenn die Genauigkeit der Beobachtungen durch den ihnen entsprechenden Werth von h (oder ϱ) bekannt ist, mit welchem Grade von Wahrscheinlichkeit ist alsdann das zufällige Eintreffen eines Fehlersystems wie das gegebene x_1, x_2, \dots, x_n zu erwarten? Denn die hierfür bestehende Wahrscheinlichkeit giebt zugleich das Maass für diejenige, mit welcher das Fehlersystem, nachdem es eingetroffen ist, als durch Zufall entstanden angesehen werden darf.

Wovon wird nun die Wahrscheinlichkeit d. h. die relative Häufigkeit des Vorkommens eines Fehlersystems abhängen? — Es liegt auf der Hand, dass hierbei gleichzeitig zwei verschiedene Momente maassgebend sein müssen, nämlich die absolute Grösse der einzelnen Fehler und die Art ihrer Aufeinanderfolge oder Vertheilung (dabei natürlich die Beobachtungen nach den Werthen desjenigen Arguments geordnet gedacht, welches in der Function die Rolle der unabhängigen Veränderlichen spielt). Ein grosser Fehler — bezogen auf den Werth von h oder ϱ — kommt, nach Maassgabe der Gleichung (1), seltener vor als ein kleiner und deshalb kann

auch ein System von überwiegend grossen Differenzen nur relativ selten eintreffen. Andererseits aber wird auch eine Fehlergruppe, deren Glieder vorwaltend nach einer Seite liegen oder eine gewisse Regelmässigkeit der Anordnung zeigen, nur mit geringer Wahrscheinlichkeit zu erwarten sein.

Man kann nun versuchen, diesen beiden Rücksichten bei der Beurtheilung getrennt Rechnung zu tragen, was allerdings nur mit einer gewissen Willkür auszuführen sein wird, doch aber so geschehen kann, dass das Maassgebende im Grossen und Ganzen zur Geltung kommt. — Es sollen zu diesem Zwecke zwei Functionen der n Grössen x_1, x_2, \dots, x_n herbeigezogen werden, von welchen die eine so gebildet ist, dass ihr Werth nur von den absoluten Werthen jener abhängt, während der der zweiten umgekehrt von der Grösse der Elemente selbst unabhängig ist, sich aber mit der unter ihnen bestehenden Werthverschiedenheit und ihrer Anordnung ändert. Denkt man sich zwei Functionen diesen Anforderungen gemäss gebildet, so werden dieselben geeignet sein, vermöge der Werthe, die beide für jedes vorgelegte Fehlersystem annehmen, verschiedene Systeme von einander zu unterscheiden; und zwar in der Art, dass jedenfalls solche auseinander gehalten werden, denen nach dem unmittelbaren Urtheil in erheblichem Grade ungleiche Wahrscheinlichkeit zukommt.

Den für die erste Function gestellten Bedingungen genügt offenbar in einfachster Weise die Summe der Quadrate der n Fehler

$$\Sigma x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = d,$$

deren Benutzung zu dem gedachten Zwecke sich um so mehr empfiehlt, als sie bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate von selbst sich darbietet. — Zur Bildung der andern Function, welche nun die Art und Weise charakterisiren soll, wie sich der Betrag von Σx^2 unter die n Glieder vertheilt, gewinnt man einen Leitfaden in einer nahe liegenden Ueberlegung.

Wenn man, wie immer geschieht, ein Vorwiegen der nach einer Seite liegenden Fehler und einen merklichen Gang derselben als Kennzeichen für das Vorhandensein gesetzmässig wirkender Ursachen der Abweichungen ansieht, so setzt man damit umgekehrt als natürliches Merkmal eines zufälligen Ursprungs die möglichste Unregelmässigkeit in ihren Grössenverhältnissen und ihrer Anordnungsweise. Es ist aber leicht, für die grössere oder geringere Unregelmässigkeit einer Fehlervertheilung einen exacten Ausdruck



festzusetzen, der ihren Grad mathematisch bestimmen lässt. Auf den ersten Blick sieht man, dass z. B. die Summe aller Differenzen zwischen je zwei einander folgenden Fehlern, wenn alle als positiv in Rechnung gebracht werden, einen um so geringeren Werth erhält, je mehr sich die Verteilung der n Grössen einer besonderen [6] Regelmässigkeit nähert, und umgekehrt; und nimmt man, um die Verschiedenheit der Vorzeichen arithmetisch zu beseitigen, die Summe der Quadrate jener Differenzen, also den Ausdruck

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2,$$

so gilt das Nämliche auch von diesem.

Man hat darin eine Function der n Elemente x , welche 1) von den absoluten Grössen unabhängig ist, insofern eine gleichzeitige Aenderung aller um einen beliebigen Betrag ihren Werth nicht modificirt; welche 2) einen um so kleineren — grösseren — Werth erlangt, je weniger — mehr — die n Elemente (abgesehen von der Anordnung) unter einander verschieden sind; und welche endlich 3) bei gegebenen Grössen von einem Minimum zu einem Maximum übergeht, wenn die Elemente von einer ihren Werthen folgenden Anordnung zu einer solchen übergeführt werden, bei der je zwei benachbarte möglichst verschieden sind; und zwar so, dass mit jeder Aenderung der Aufeinanderfolge (eine einfache Umkehrung abgerechnet) im Allgemeinen, d. h. wenn nicht besondere Relationen unter ihnen bestehen, eine Werthänderung der Function verbunden ist. — Fügt man endlich — was zur Vereinfachung der folgenden Entwicklungen geschehen soll — dem obigen Ausdrucke noch ein n tes Glied, nämlich das Quadrat der Differenz zwischen dem letzten und ersten x hinzu, so dass er vollständig lautet:

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 = \theta.$$

so behält das eben Gesagte auch jetzt Geltung bis auf die, offenbar unwesentliche Modification, dass nun jede cyklische Vertauschung der n Fehler keine Werthänderung herbeiführt. — Die so gebildete Summe der Differenzquadrate, θ , trägt demnach allen Umständen Rechnung, die nach dem unmittelbaren Urtheil für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlersystems, so weit die Verteilungsweise in Betracht kommt, bestimmend sind. — Wird sie in Verbindung mit der Summe A der Fehlerquadrate zur Unterscheidung verschiedener Fehlersysteme benutzt, so lässt sich nun die oben bezeichnete Aufgabe in folgender Form aussprechen: Welches ist

bei einer beliebigen Anzahl von Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit a priori für das Eintreffen eines Fehlersystems, für welches die Function A einen bestimmten (oder zwischen bestimmten Grenzen liegenden) Werth und gleichzeitig die Function θ einen ebenfalls bestimmten (oder zwischen bestimmten Grenzen liegenden) andern Werth erlangt? — Auf Grund der Lösung dieser Aufgabe wird alsdann die Beurtheilung der Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ursprungs eines gegebenen Fehlersystems keine weitere Schwierigkeit haben.

2.

Die Erledigung der hier vorliegenden analytischen Aufgabe soll damit begonnen werden, die Wahrscheinlichkeit auszudrücken, dass bei einer Reihe von n Beobachtungen die Grösse A bei unbestimmtem gelassenem θ zwischen gegebene Grenzen falle.

Wenn die relative Häufigkeit eines Beobachtungsfehlers nach Gleichung (1) von seiner Grösse abhängt, so ist den Grundsätzen der Combinatorik zufolge die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen von n einzeln bestimmten Fehlern x_1, \dots, x_n , für welche der Reihe nach der Spielraum $dx_1 \dots dx_n$ statuirt ist,

$$dx_1 dx_2 \dots dx_n \frac{h^n}{\pi^2} e^{-h^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$$

und demnach die Wahrscheinlichkeit eines Fehlersystems, bei welchem die Summe der Fehlerquadrate zwischen den Grenzen 0 und A enthalten ist, die n fache Summe

$$\Phi(A) = \frac{h^n}{\pi^2} \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n e^{-h^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \quad (2)$$

[7] wobei die Integration über alle Werthensysteme der n Veränderlichen zu erstrecken ist, welche der Bedingung genügen

$$0 < x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < A.$$

Das vorstehende Integral ist schon auf mehr als eine Weise berechnet worden; doch mag seine Werthbestimmung hier nochmals ausgeführt werden mit denjenigen Hilfsmitteln, welche des Folgenden wegen doch sogleich bereit gelegt werden müssten und welche in diesem Falle besonders leicht und einfach zum Ziele führen.

Es soll hier die bekannte DIRICHLET'sche Methode des discontinuirlichen Factors in Anwendung gebracht, als solcher jedoch nicht das von DIRICHLET benutzte Integral gebraucht werden, son-

1) Es geschieht der Allgemeinheit offenbar kein Eintrag, wenn für die eine Grenze ohne Weiteres Null gesetzt wird.



dern ein anderes, welches für den jetzigen Zweck dadurch wesentliche Vortheile bietet, dass seine Einführung niemals ein Unendlichwerden einzelner Elemente veranlasst und keine Hinzufügung imaginärer Theile, die im Endresultat wieder ausgeschieden werden müssen, nöthig macht.

Man betrachte das durch reelle Werthe erstreckte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sigma q i}}{a + q i} dq; \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Mit Hilfe der von CAUCHY begründeten Sätze über die Integration durch complexe Werthe der Variablen überzeugt man sich leicht, dass der Werth desselben, wofen a als eine von Null verschiedene,

positive Constante vorausgesetzt wird, $2\pi e^{-\sigma a}$ ist, so lange σ positiv, und Null, wenn σ negativ. Die zu integrierende Function ist nämlich für alle complexen q einwerthig und wird nur für $q = ai$ unendlich. Zugleich aber giebt das Integral Null, wenn es von $-\infty$ bis $+\infty$ durch complexe Werthe mit unendlichem Modul, deren imaginärer Bestandtheil mit σ gleiches Vorzeichen hat, erstreckt wird, wie man sogleich erkennt, wenn man

$$q = r \cos \varphi + r \sin \varphi i$$

einsetzt und r unendlich werden lässt. Da aber das durch reelle Werthe genommene Integral von dem letzteren nur um die Residuüm-Integrale für die zwischen beiden Integrationswegen liegenden Unstetigkeitsstellen verschieden ist, so ergibt sich leicht, dass

jenes = 0 sein muss, wenn σ negativ, und = $2\pi e^{-\sigma a}$, wenn σ positiv ist. Durch Division mit letzterem Werthe erhält man daher

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sigma (a + q i)}}{(a + q i)^n} dq = 1, \text{ wenn } \sigma > 0; = 0, \text{ wenn } \sigma < 0, \quad (3)$$

und damit ein Integral, welches ohne Weiteres als Discontinuitätsfactor für die Integration in (2) benutzt werden kann¹⁾. — Setzt man

¹⁾ Die Verwendung eines dem obigen ähnlichen Integrals als Discontinuitätsfactor ist mir aus den Vorlesungen des Hrn. Prof. RIEMANN in Göttingen bekannt.

$$\sigma = A - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

und multiplicirt in (2) mit obigem Integrale, so kann jetzt nach jeder der n Veränderlichen von $-\infty$ bis ∞ integrirt werden, da der hinzugefügte Factor alle Elemente wieder ausscheidet, für welche die Bedingung $x_1^2 + \dots + x_n^2 < A$ nicht erfüllt ist. — Nach Umkehrung der Integrationsordnung in Bezug auf q , für welche offenbar alle erforderlichen Bedingungen vorliegen, und nach Trennung der einzelnen Variablen x erhält man jetzt

$$[\delta] \quad \Phi(A) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h^n}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{A(a + q i)}}{a + q i} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{-(h^2 + a + q i)x_1^2} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-(h^2 + a + q i)x_n^2}.$$

Es ist aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_k e^{-(h^2 + a + q i)x_k^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h^2 + a + q i}}$$

mithin

$$\Phi(A) = \frac{h^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{A(a + q i)}}{(a + q i)(h^2 + a + q i)^{\frac{n}{2}}} \quad (4)$$

Dieses Integral lässt sich nun weiter reduciren, wenn darin

$$\frac{1}{(h^2 + a + q i)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} dy e^{-(h^2 + a + q i)y} y^{\frac{n}{2} - 1}$$

eingeführt wird, wodurch man nach Umkehrung der Integrationsfolge erhält:

$$\Phi(A) = \frac{h^n}{2\pi \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} dy e^{-h^2 y} y^{\frac{n}{2} - 1} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{A(a + q i)}}{a + q i}$$

Hierin ist aber das Integral nach q , welches dem Elemente des vorangehenden Integrals als Factor zugefügt erscheint, wenn man $\frac{1}{2\pi}$ hinzugenommen denkt, nichts Anderes als der ursprüngliche Discontinuitätsfactor (3) mit der Bestimmung $\sigma = (A - y)$. Es ist mithin = 1, so lange $y < A$, und = 0, wenn $y > A$. Demzufolge reducirt sich der Ausdruck schliesslich auf



$$\Phi(A) = \frac{h^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^A e^{-h^2 y} y^{\frac{n}{2}-1} dy \quad (5)$$

wie auch nach andern Methoden gefunden wird. — Auf Grund dieser Formel lässt sich sogleich die Wahrscheinlichkeit eines Fehlersystems angeben, für welches die Summe der Fehlerquadrate zwischen zwei beliebigen Grenzen A_1 und A_2 enthalten ist. Im Besondern folgt daraus die Wahrscheinlichkeit, dass diese Summe zwischen A und $A + dA$ falle, wenn diese zur Unterscheidung mit $\varphi(A)$ bezeichnet wird,

$$\varphi(A) = \frac{h^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot e^{-h^2 A} A^{\frac{n}{2}-1} dA \quad (6)$$

welche Gleichung nun die relative Häufigkeit einer Fehlergruppe in ähnlicher Weise als Function von A darstellt, wie Gl. (1) die eines einzelnen Fehlers als Function seiner Grösse. — Führt man in ihr an Stelle von A den sog. mittleren Fehler ein, indem man

$$A = n\delta^2; \quad dA = 2n\delta d\delta$$

setzt, so wird der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlersystems, dessen mittlerer Fehler zwischen δ und $\delta + d\delta$ liegt

$$\varphi(\delta) = \frac{2n^{\frac{n}{2}} h^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-nh^2 \delta^2} \delta^{n-1} d\delta \quad (7)$$

wofür, wenn n eine grosse Zahl ist, nach einer bekannten Näherungsformel für den Werth der Function Γ ,

$$\Gamma(\mu) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} \cdot \left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu$$

näherungsweise gesetzt werden kann:

$$\varphi(\delta) = \sqrt{\frac{n(2e)^n}{\pi}} \cdot h^n e^{-nh^2 \delta^2} \delta^{n-1} d\delta. \quad (8)$$

3.

Es soll jetzt ferner die Wahrscheinlichkeit eines Fehlersystems bestimmt werden, bei welchem die Quadratsumme der Fehlerdifferenzen, also die Function Θ , zwischen gegebene Grenzen fällt, während A unbestimmt bleibt.

Nach einigen weiteren Vorbereitungen lässt diese Aufgabe mit den oben angewandten Hilfsmitteln der Integration eine ähn-

liche Behandlung zu wie die bis jetzt betrachtete. Wird, wie oben, Null als die eine Grenze genommen und ein beliebiger Werth Θ als die andere, so ist der Ausdruck für jene Wahrscheinlichkeit

$$\Psi(\Theta) = \frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \int dx_1 \dots \int dx_n e^{-h^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)},$$

wo jetzt die Integration über alle diejenigen Werthensysteme der Variablen $x_1 \dots x_n$ auszudehnen ist, welche der Bedingung Genüge leisten

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 < \Theta.$$

Multiplicirt man das Element des Integrals mit dem in Gl. (3) gegebenen Discontinuitätsfactor, darin

$$\sigma = \Theta - [(x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_n - x_1)^2]$$

gesetzt, so erhält man wieder ein $(n+1)$ faches Integral mit den constanten Grenzen $-\infty$ und ∞ , welches sich nach Umkehrung der Integrationsfolge in der Form darstellt

$$\Psi(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{a + \varphi^2} e^{\Theta(\sigma + \varphi^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-h^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2) - (a + \varphi^2) [(x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_n - x_1)^2]} \quad (9)$$

Hier lassen sich die Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ nicht mehr unmittelbar trennen; denn es ist

$$(x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_n - x_1)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1) \quad (10)$$

und im zweiten Theile dieses Ausdrucks, der in obigem Integrale als Exponent auftritt, greifen die Grössen x von einem Gliede in das folgende über. Diese Trennung aber lässt sich ausführen nach einer Transformation des Integrals durch Einführung neuer Variablen.

Es ist ein bekannter Satz aus der Theorie der homogenen quadratischen Functionen — unter welchen der Ausdruck in (10) offenbar enthalten ist — dass eine jede solche von n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ durch eine lineare Substitution

$$x_k = \beta_{k,1} \xi_1 + \beta_{k,2} \xi_2 + \dots + \beta_{k,n} \xi_n \quad (11)$$

in eine andere von der Form

$$a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + \dots + a_n \xi_n^2$$

übergeführt werden kann und zwar immer durch eine sog. orthogonale Substitution, so dass zugleich



$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$$

wird. Demnach ist nichts weiter erforderlich, um die Trennung der Variablen in obigem Integrale zu ermöglichen, als n neue Veränderliche ξ_1, \dots, ξ_n , einzuführen, welche mit den ursprünglichen durch n Gleichungen von der Form (11) verknüpft sind, und in diesen den n^2 Coefficienten $\beta_{1,1}, \dots, \beta_{n,n}$ solche Werthe beizulegen, dass den eben angeführten — immer vereinbaren — Bedingungen Genüge geschieht. Alsdann geht

$$[10] \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 \text{ über in } \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2;$$

$$(x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_n - x_1)^2 \text{ in } a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + \dots + a_n \xi_n^2$$

wodurch die zu integrierende Function in (9) die Form

$$e^{-h^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)} - (a + \varphi i)(a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + \dots + a_n \xi_n^2)$$

$$= e^{-[h^2 + a_1(a + \varphi i)]\xi_1^2} \cdot e^{-[h^2 + a_2(a + \varphi i)]\xi_2^2} \dots e^{-[h^2 + a_n(a + \varphi i)]\xi_n^2}$$

annimmt, wo nun die Coefficienten a_1, \dots, a_n noch näher zu bestimmen bleiben.

Bekanntem Regeln zufolge ist ferner bei Einführung neuer Variablen in ein vielfaches Integral das Element desselben zu multipliciren mit der Functionaldeterminante der n Functionen, welche an die Stelle der ursprünglichen Veränderlichen eingesetzt werden. Da diese Functionen hier linear sind, so reducirt sich ihre Functionaldeterminante auf die Determinante des Systems der Coefficienten $\beta_{1,1}, \dots, \beta_{n,n}$, und ist mithin identisch = 1, wenn die lineare Substitution als eine orthogonale vorausgesetzt wird. Das Element des Integrals erfährt also keine weitere Veränderung; es tritt einfach $d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$ an die Stelle von $dx_1 dx_2 \dots dx_n$. — Die Grenzen für die neue Integration endlich bleiben gleichfalls die früheren. Denn da umgekehrt auch jede der neuen Variablen als eine lineare Function der anfänglichen sich darstellt, so muss ihr Werth das ganze Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, wenn die letzteren sämtlich in diesem Bereiche variiren. Der Ausdruck für $\mathcal{Y}(\theta)$ nimmt demnach jetzt die Form an:

$$\mathcal{Y}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h^n}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{a + \varphi i} e^{\Theta(a + \varphi i)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 e^{-[h^2 + a_1(a + \varphi i)]\xi_1^2} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n e^{-[h^2 + a_n(a + \varphi i)]\xi_n^2}$$

Die Integrationen nach ξ_1, \dots, ξ_n lassen sich nun mittelst der früher schon gebrauchten Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Hx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{H}}$$

ausführen, da zu deren Giltigkeit nur vorausgesetzt ist, dass der reelle Theil des Factors H positiv sei; welche Bedingung hier offenbar selbst dann erfüllt ist, wenn die Coefficienten a_1, \dots, a_n negative Werthe erhalten sollten, weil in diesem Falle die völlig willkürliche Constante a (welche bloss als von Null verschieden angenommen werden muss, damit die Function nicht auf dem Wege der Integration unendlich wird) so klein gewählt werden kann, dass immer

$$h^2 + a_k a > 0$$

bleibt. — Man erhält demnach

$$\mathcal{Y}(\theta) = \frac{h^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{(a + \varphi i)} \frac{e^{\Theta(a + \varphi i)}}{\sqrt{(h^2 + a_1(a + \varphi i))} \sqrt{(h^2 + a_2(a + \varphi i))} \dots \sqrt{(h^2 + a_n(a + \varphi i))}} \quad (12)$$

Zum Zwecke der weiteren Entwicklung dieses Integrals sollen zunächst die Werthe bestimmt werden, welche den n Coefficienten a_1, \dots, a_n zukommen. Dies kann leicht geschehen mit Hilfe des folgenden, von CAUCHY, JACOBI u. A. bewiesenen Theorems: Wenn eine ganze homogene Function zweiten Grades von n Variablen x_1, \dots, x_n , deren allgemeine Form

$$\sum_{k,m}^{k,m} b_{k,m} x_k x_m \text{ — wo } b_{k,m} = b_{m,k}$$

durch eine orthogonale Substitution in

$$a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + \dots + a_n \xi_n^2$$

transformirt wird, so sind die Coefficienten a_1, \dots, a_n gegeben durch die stets sämtlich reellen Wurzeln der Gleichung n ten Grades

$$[11] \quad F(\zeta) = 0$$

wenn $F(\zeta)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} - \zeta & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} - \zeta & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} - \zeta \end{vmatrix}$$

vorstellt. — Im vorliegenden Falle ist nun die transformirte Function

1) S. BALTZER, Theorie der Determ., [mit Beziehung auf die Originalquellen dargestellt. Leipzig, S. Hirzel, 1857. hoch 4^o. V. u. 129 S.] § 15, 10.



$2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1)$,
folglich die Coefficienten, mit welchen die Determinante zu bilden ist,

$b_{1,1} = b_{2,2} = \dots = b_{n,n} = 2$;
 $b_{1,2} = b_{2,1} = -1$; $b_{2,3} = b_{3,2} = -1$; \dots $b_{n-1,n} = b_{n,n-1} = -1$; $b_{n,1} = b_{1,n} = -1$;
während alle übrigen = 0 sind. Mithin erscheinen die Constanten $a_1 \dots a_n$ als die n Wurzeln der Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\zeta & -1 & 0 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & 2-\zeta & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2-\zeta & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-\zeta \end{vmatrix}$$

Vermöge dieser Bestimmung lassen sich ihre Werthe unschwer ermitteln. Die Form der vorstehenden Determinante ist offenbar dadurch charakterisirt, dass jede Reihe und jede Colonne aus der ersten durch cyclische Vertauschung der nämlichen n Elemente

$$2-\zeta \quad -1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -1$$

erhalten wird. Eine Determinante von solcher Beschaffenheit aber lässt sich nach einem von SPURISWOOD²⁾ gegebenen Satze stets durch ein Produkt aus n Factoren darstellen, nämlich, wenn

$$k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n$$

die Elemente der ersten Reihe sind, durch das Produkt

$$\begin{aligned} & (k_1 + \mu \quad k_2 + \mu^2 \quad k_3 + \dots + \mu^{n-1} \quad k_n) \\ & \times (k_1 + \mu^2 \quad k_2 + \mu^4 \quad k_3 + \dots + \mu^{2(n-1)} \quad k_n) \\ & \times (k_1 + \mu^4 \quad k_2 + \mu^8 \quad k_3 + \dots + \mu^{4(n-1)} \quad k_n) \\ & \times \dots \\ & \times (k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n) \end{aligned}$$

wo μ eine beliebige complexe Wurzel der Gleichung $\mu^n = 1$ vorstellt¹⁾.

Im vorliegenden Falle, wo

$$k_1 = 2-\zeta; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = k_4 = \dots = k_{n-1} = 0; \quad k_n = -1$$

zu setzen ist, geht dieses Produkt über in

$$(2 - (\mu + \mu^{n-1}) - \zeta) (2 - (\mu^2 + \mu^{2(n-1)}) - \zeta) \dots (2 - (\mu^n + \mu^{n(n-1)}) - \zeta)$$

und demnach sind die n Wurzeln der Gleichung in ζ , welche entsteht, wenn dasselbe = 0 gesetzt wird, d. h. die n Coefficienten $a_1 \dots a_n$, unter der Form enthalten

$$a_k = 2 - (\mu^k + \mu^{k(n-1)}) = 2 - (\mu^k + \mu^{-k}).$$

²⁾ Ein Beweis dieses Satzes findet sich Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. VII [1862], p. 440. [G. ZEHFUSS: Anwendungen einer besonderen Determinante a. a. O. pp. 439-445].

Setzt man endlich für μ , seiner Bedeutung gemäss, eine von den n ten Wurzeln der Einheit, z. B.

$$\mu = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

so wird

$$[12] \quad \mu^k + \mu^{-k} = 2 \cos k \frac{2\pi}{n},$$

also schliesslich

$$a_k = 2 \left(1 - \cos k \frac{2\pi}{n} \right) = 4 \sin^2 k \frac{\pi}{n}. \quad (13)$$

Auf Grund der Beziehungen, welche dieser Formel zufolge unter den n Coefficienten $a_1 \dots a_n$ bestehen, lässt sich das Integral in (12) entweder vollständig ausführen oder doch auf eine wesentlich einfachere Form reduciren. Es ist für jedes n

$$a_n = 0; \quad a_{n-1} = a_1; \quad a_{n-2} = a_2; \quad \dots$$

Mithin reducirt sich in der Wurzelgrösse in Gl. (12) stets einer der Factoren auf h^2 , und unter den übrigen werden entweder je zwei einander gleich, wofern n eine ungerade Zahl = $2\nu + 1$, oder je zwei mit Ausnahme eines, wenn n eine gerade Zahl = $2\nu + 2$, in welchem letzteren Falle das Glied mit

$$a_\nu = 2(1 - \cos \pi) = 4$$

nur einmal vorkommt. Folglich erhält man

1) wenn $n = 2\nu + 1$

$$\Psi(\theta) = \frac{h^{n-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \frac{e^{\theta(a+\varphi i)}}{(a+\varphi i) (h^2+a_1 (a+\varphi i)) \dots (h^2+a_\nu (a+\varphi i))} \quad (14^a)$$

$$= \frac{h^{n-1}}{2\pi \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_\nu} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \frac{e^{\theta(a+\varphi i)}}{(a+\varphi i) \left(\frac{h^2}{a_1} + a + \varphi i \right) \dots \left(\frac{h^2}{a_\nu} + a + \varphi i \right)}$$

2) wenn $n = 2\nu + 2$

$$\Psi(\theta) = \frac{h^{n-1}}{2\pi \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_\nu} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \frac{e^{\theta(a+\varphi i)}}{(a+\varphi i) \left(\frac{h^2}{a_1} + a + \varphi i \right) \dots \left(\frac{h^2}{a_\nu} + a + \varphi i \right) \sqrt{h^2+4(a+\varphi i)}} \quad (14^b)$$



wo in beiden Fällen

$$a_1 = 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right); \dots \dots a_r = 2 \left(1 - \cos r \frac{2\pi}{n}\right).$$

aber $r = \frac{n-1}{2}$, wenn n ungerade, dagegen $r = \frac{n-2}{2}$, wenn n gerade.

Im ersten Falle lässt sich das Integral vollständig auswerten mit Hilfe der schon oben in Anwendung gebrachten Theoreme über die Integration einwerthiger Functionen durch complexe Werthe der Variablen. — Die zu integrierende Function in (14^a) ist einwerthig und bleibt immer endlich mit Ausnahme derjenigen Werthe von φ , für welche $(a + \varphi i) = 0, -\frac{h^2}{a_1}, -\frac{h^2}{a_2}, \dots, -\frac{h^2}{a_r}$ oder $\varphi = ai, \left(a + \frac{h^2}{a_1}\right) i, \dots, \left(a + \frac{h^2}{a_r}\right) i$ wird. Ferner ist ersichtlich, dass sie verschwindet für complexe Werthe von φ mit unendlich grossem Modul, deren imaginärer Bestandtheil positiv ist; denn setzt man

$$\varphi = r \cos \psi + r \sin \psi i,$$

so wird

$$e^{\Theta(a + \varphi i)} = e^{\Theta a} \cdot e^{\Theta r \cos \psi i} \cdot e^{-\Theta r \sin \psi},$$

welches Produkt, da Θ immer positiv bleibt, mit wachsendem r ohne Grenze abnimmt, wofern $\sin \psi$ oder der imaginäre Theil von φ positiv ist. — Demnach ist auch das Integral der in (14^a) vorliegenden Function, [13] von $-\infty$ bis ∞ durch complexe Werthe von φ mit unendlichem Modul und positiv imaginärem Bestandtheil erstreckt, = Null. Dieses letztere Integral aber hat mit dem durch reelle Werthe erstreckten, welches den Ausdruck für $\Psi(\theta)$ bildet, Ausgangspunkt und Endpunkt der Integration gemein; die Differenz beider (jenes von diesem subtrahirt) muss also gleich sein der Summe aller um die zwischen den Integrationswegen enthaltenen Unstetigkeitsstellen ausgedehnten Integrale — gleich der Summe der auf die einzelnen Unstetigkeitsstellen bezüglichen Residuüm-Integrale —; und da nun der Subtrahend in jener Differenz, dem eben Gesagten zufolge, hinwegfällt, so muss das in (14^a) vorkommende Integral selbst diese Summe zum Werthe haben.

Als Unstetigkeitsstellen der Function zwischen den Integrationswegen erscheinen hier sämmtliche Werthe von φ , durch welche sich einer der Factoren im Nenner annullirt, da diese ohne Ausnahme positiv imaginär sind; also die Werthe

$$\varphi = ai; \varphi = \left(a + \frac{h^2}{a_1}\right) i; \dots \dots \varphi = \left(a + \frac{h^2}{a_r}\right) i,$$

und das auf je eine derselben sich beziehende Residuüm-Integral ergibt sich im vorliegenden Falle durch Anwendung bekannter Schlussweisen

$$= 2\pi \cdot R,$$

wenn R das Produkt aller an dieser Stelle endlich bleibenden Factoren in der Function für den betreffenden Werth von φ bezeichnet. Für die erste Unstetigkeitsstelle, $\varphi = ai$, folgt demnach

$$2\pi \cdot R = \frac{2\pi}{h^2 \cdot \frac{h^2}{a_1} \cdot \frac{h^2}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{h^2}{a_r}} = 2\pi \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r}{h^{r-1}}$$

und für irgend eine der r andern, für welche $\varphi = \left(\frac{h^2}{a_k} + a\right) i$ sein mag,

$$2\pi \cdot R_k = \frac{2\pi \cdot e^{-\frac{\Theta^2}{a_k}}}{\frac{h^2}{a_k} \left(\frac{h^2}{a_1} - \frac{h^2}{a_k}\right) \dots \dots \left(\frac{h^2}{a_{k-1}} - \frac{h^2}{a_k}\right) \left(\frac{h^2}{a_{k+1}} - \frac{h^2}{a_k}\right) \dots \dots \left(\frac{h^2}{a_r} - \frac{h^2}{a_k}\right)}$$

$$= -2\pi \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r \cdot a_k^{r-1}}{h^{r-1} \cdot e^{-\frac{\Theta^2}{a_k}} (a_k - a_1) \dots (a_k - a_{k-1}) (a_k - a_{k+1}) \dots (a_k - a_r)}$$

Unter Berücksichtigung des in (14^a) vorkommenden constanten Factors erhält man somit

$$\Psi(\theta) = 1 - \sum_{k=1}^r \frac{a_k^{r-1} e^{-\frac{\Theta^2}{a_k}}}{(a_k - a_1) \dots (a_k - a_r)} \quad (15^a)$$

wo die Summation über alle k von 1 bis $r = \frac{n-1}{2}$ auszu-dehnen ist.

Was den andern Fall, n eine gerade Zahl = $2r + 2$, anlangt, so lässt sich auch hier der Ausdruck für $\Psi(\theta)$ mit Hilfe ähnlicher Betrachtungen reduciren, wenn zuvor der irrationale Factor in dem Integrale beseitigt wird. Dies kann dadurch leicht geschehen, dass man denselben in Form eines bestimmten Integrals darstellt, indem man nämlich nach einer bekannten Formel



$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{h^2}{4} + a + qi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{h^2}{4} + a + qi\right)u} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

[14] einführt. Die Umkehrung der Integrationsordnung — die hier offenbar keiner weiteren Rechtfertigung bedarf — ergibt alsdann:

$$\Psi(\theta) = \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{h^2}{4}u} \frac{du}{\sqrt{u}} \left\{ \frac{h^{n-2}}{2\pi a_1 \dots a_p} \int_0^{\infty} dq \frac{e^{(\theta-u)(a+qi)}}{(a+qi)(\frac{h^2}{a_1} + a + qi) \dots (\frac{h^2}{a_p} + a + qi)} \right\}$$

Der in Klammern stehende Ausdruck ist nun (in Anbetracht, dass jetzt $v = \frac{n-2}{2}$) von der nämlichen Form wie der für $\Psi(\theta)$ selbst in dem zuerst erörterten Fall, nur dass $\theta - u$ an Stelle von θ getreten ist. So lange $\theta - u$ positiv, also $u < \theta$ ist, haben demnach die früheren Betrachtungen ungeändert auch hier Geltung und der Ausdruck kann alsdann durch eine Summe von der Form (15^a) ersetzt werden. Wird aber $u > \theta$, so dass $(\theta - u)$ einen negativen Werth erlangt, so ist durch eine einfache Ueberlegung zu erkennen, dass das nach q genommene Integral identisch verschwinden muss. Denn ist in der Exponentialgrösse qi mit einem negativen Factor multiplicirt, so wird diese — und damit die ganze Function unter dem Integralzeichen — Null für complexe Werthe von q mit unendlichem Modul, deren imaginärer Theil negativ ist. Hiernach hat ein von $-\infty$ bis $+\infty$ durch solche complexe Werthe erstrecktes Integral offenbar den Werth Null. Das in obigem Ausdrucke auftretende Integral muss aber mit jenem identisch, also ebenfalls Null sein, weil Ausgangs- und Endpunkt der Integration beiden gemeinsam sind und zwischen den Integrationswegen jetzt keine Unstetigkeitsstellen der Function vorkommen, indem solche ausschliesslich positiv imaginären Werthen von q entsprechen. — Demnach reducirt sich der Ausdruck für $\Psi(\theta)$, wenn $u = 2v + 2$, schliesslich auf das Integral

$$\Psi(\theta) = \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} e^{-\left(\frac{h}{2}\right)^2 u} \frac{du}{\sqrt{u}} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^k \frac{a_k^{v-1} e^{-(\theta-u)\frac{h^2}{a_k}}}{i, v (a_k - a_1) \dots (a_k - a_p)} \right\} \quad (15^b)$$

Die in diesen Gleichungen auftretende Summe lässt sich auf mehrere Weisen in andern Formen darstellen. Beispielsweise sei bemerkt, dass sie allgemein durch Quotienten zweier Determinanten ausgedrückt werden kann. Denkt man nämlich sämtliche Glieder auf gemeinschaftlichen Nenner reducirt, so wird dieser das Produkt aller Differenzen, welche entstehen, wenn man in der Reihe der v Grössen $a_1 \dots a_p$ von jeder alle nachfolgenden subtrahirt, welches Produkt aber nach einem bekannten Satze identisch ist mit der Determinante

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{v-2} & a_1^{v-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{v-2} & a_2^{v-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_p & a_p^2 & \dots & a_p^{v-2} & a_p^{v-1} \end{vmatrix}$$

Die Factoren, welche alsdann zu den einzelnen Zählern hinzutreten, sind nun nichts anderes als die Coefficienten in der Entwicklung von Q nach den Elementen der letzten Column, woraus unmittelbar folgt, dass der Gesamtzähler zusammenfällt mit der andern Determinante

$$P = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{v-2} f(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{v-2} f(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_p & a_p^2 & \dots & a_p^{v-2} f(a_p) \end{vmatrix}$$

[15] wenn

$$a_k^{v-1} e^{-\frac{h^2}{a_k} \theta} \quad \text{resp.} \quad a_k^{v-1} e^{-\frac{h^2}{a_k} (\theta - u)}$$

mit $f(a_k)$ bezeichnet wird. Mithin ist

$$\Sigma = \frac{P}{Q}$$

woraus u. a. für jedes System von Coefficienten $a_1 \dots a_p$ sich ergibt, was für das hier vorliegende specielle System vermöge der Bedeutung von $\Psi(\theta)$ gefordert werden muss: dass die Summen $= 1$ werden, wenn $f(a_k)$ in a_k^{v-1} übergeht, d. h. wenn θ , resp. $(\theta - u)$, $= 0$ ist.

Um die Ausdrücke (15^a) und (15^b) für die Bedingungen der Aufgabe zu specialisiren, hat man zu setzen

$$a_k = 2 \left(1 - \cos k \frac{2\pi}{4} \right) = 4 \sin^2 k \frac{\pi}{n}; \quad a_k^{v-1} = 2^{2v-2} \cdot \sin^{2v-2} k \frac{\pi}{n};$$



$$(-1)^{r-1} \cdot 2^{r-1} \left(\cos k \frac{2\pi}{n} - \cos \frac{2\pi}{n} \right) \left(\cos k \frac{2\pi}{n} - \cos 2 \frac{2\pi}{n} \right) \dots \left(\cos k \frac{2\pi}{n} - \cos r \frac{2\pi}{n} \right)$$

Indem man das goniometrische Produkt in der Form

$$\lim_{x = k \frac{\pi}{n}} \frac{\left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{n} \right) \dots \left(\cos 2x - \cos k \frac{2\pi}{n} \right) \dots \left(\cos 2x - \cos r \frac{2\pi}{n} \right)}{\left(\cos 2x - \cos k \frac{2\pi}{n} \right)}$$

darstellt, findet sich unter Anwendung einer bekannten Formel¹⁾

$$(a_k - a_1) \dots (a_k - a_r) = (-1)^{r+k} \frac{n}{2^n \cdot \sin^2 k \frac{\pi}{n} \cdot \cos k \frac{\pi}{n}}; \text{ wenn } n = 2v + 1$$

$$= (-1)^{r+k} \frac{n}{2^v \sin^2 k \frac{\pi}{n} \cos^2 k \frac{\pi}{n}}; \text{ wenn } n = 2v + 2$$

und damit folgt schliesslich

$$n = 2v + 1: \Psi(\theta) = 1 - \frac{2^n}{n} \sum_{k=1}^v (-1)^{r+k} e^{-\frac{h^2 \theta}{4 \sin^2 k \frac{\pi}{n} \sin^{n-1} k \frac{\pi}{n} \cos k \frac{\pi}{n}}} \quad (16a)$$

$$n = 2v + 2: \Psi(\theta) = \frac{h}{2 \sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-\frac{h^2}{4} u} \frac{du}{\sqrt{u}} \left\{ 1 - \frac{2^n}{n} \sum_{k=1}^v (-1)^{r+k} e^{-\frac{h^2 (\theta - u)}{4 \sin^2 k \frac{\pi}{n} \sin^{n-2} k \frac{\pi}{n} \cos^2 k \frac{\pi}{n}}} \right\} \quad (16b)$$

Durch Differentiation nach θ ergeben sich aus diesen Formeln die Ausdrücke, welche die relative Häufigkeit verschiedener Fehlersysteme als Function des Werthes θ der ihnen zukommenden Summe der Differenzenquadrate darstellen.

4.

In Anschluss an die beiden bis jetzt behandelten Aufgaben soll nun noch untersucht werden, in welcher Weise die relative Häufigkeit eines Fehlersystems von dem Verhältniss abhängt, welches unter den Werthen der beiden Functionen Δ und θ besteht. Zu diesem Zwecke werde die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Fehlersystems ausgedrückt, bei welchem

¹⁾ M. A. STERN, Lehrb. d. algebr. Analysis [Leipzig, C. F. Winter, 1860, gr. 8°, X u. 486 S.], pag. 385.

$$[16] \quad \theta \leq u \Delta.$$

Hierzu ist das n -fache Integral

$$\frac{h^n}{\pi^n} \int dx_1 \dots \int dx_n e^{-h^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

über alle diejenigen Werthensysteme der n Variablen zu erstrecken, welche der angeführten Ungleichheit Genüge leisten. -- Mit Bezugnahme auf die unter der vorigen No. ausgeführte Transformation der Function θ durch Einführung eines neuen Systems von Variablen $\xi_1 \dots \xi_n$, kann man die obige Bedingungsgleichung so gleich in die Form setzen

$$\mu (\xi_1^2 \dots + \xi_n^2) - (a_1 \xi_1^2 \dots + a_n \xi_n^2) = (\mu - a_1) \xi_1^2 \dots + (\mu - a_n) \xi_n^2 > 0$$

und die Integrale sodann auf die constanten Grenzen $-\infty$ und ∞ reduciren, indem man das Integral (3), mit der Bestimmung

$$\sigma = (\mu - a_1) \xi_1^2 \dots + (\mu - a_n) \xi_n^2$$

als Discontinuitätsfactor einführt. Es wird demnach der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines jener Bedingung genügenden Fehlersystems, diese mit $X(\mu)$ bezeichnet,

$$X(\mu) = \frac{1}{2\pi} \frac{h^n}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{a + \varphi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 e^{-(h^2 - (\mu - a_1)(a + \varphi i)) \xi_1^2} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n e^{-(h^2 - (\mu - a_n)(a + \varphi i)) \xi_n^2}$$

Da man nun die Constante a , auch unter der Voraussetzung eines von Null verschiedenen positiven Werthes, stets so bestimmt denken kann, dass $(h^2 - (\mu - a_k)a)$ immer positiv bleibt, so lassen sich die Integrationen nach den Variablen $\xi_1 \dots \xi_n$ mittelst der schon früher gebrauchten Formel ausführen, und man erhält

$$X(\mu) = \frac{h^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{(a + \varphi i) \sqrt{(h^2 - (\mu - a_1)(a + \varphi i)) \dots (h^2 - (\mu - a_n)(a + \varphi i))}} \quad (17)$$

In Berücksichtigung, dass $a_n = 0$ und $a_k = a_{n-k}$, dass also $(\mu - a_n)$ sich auf μ reducirt und die übrigen Factoren unter dem Wurzelzeichen entweder sämmtlich oder bis auf einen paarweise vorkommen, je nachdem $n = 2v + 1$ oder $= 2v + 2$, und dass in letzterem Falle der nur einmal auftretende Coefficient $a_{v+1} = 4$ ist, lässt sich der vorstehende Ausdruck in die Form setzen:



$$X(\mu) = \frac{h^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{h^2 - \mu(a + \varphi i)(a + \varphi i)(h^2 + (a_1 - \mu)(a + \varphi i)) \dots (h^2 + (a_{\nu-1} - \mu)(a + \varphi i))} \sqrt{h^2 + (4 - \mu)(a + \varphi i)}$$

wobei der letzte Factor im Nenner, $\sqrt{h^2 + (4 - \mu)(a + \varphi i)}$, fortfällt, wenn $n = 2\nu + 1$, dagegen bleibt, wenn $n = 2\nu + 2$.

Das vorstehende Integral lässt sich nach der auf Gl. (14) angewandten Methode auswerthen, wenn man die irrationalen Factoren wieder durch die entsprechenden EULERSCHEN Integrale ersetzt, indem alsdann nach Vertauschung der Integrationsfolge für die Integration nach φ eine einwerthige Function resultirt. Für den ersten Fall, $n = 2\nu + 1$, erhält man hierdurch, wenn die Variablen getrennt werden:

$$X(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2 u} \frac{du}{\sqrt{u}} \frac{h^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{a\varphi i} d\varphi}{(a + \varphi i)(h^2 + (a_1 - \mu)(a + \varphi i)) \dots (h^2 + (a_{\nu-1} - \mu)(a + \varphi i))}$$

Da hierin (μu) eine wesentlich positive Grösse vorstellt, so finden in Bezug auf das nach φ genommene Integral diejenigen Betrachtungen ungeändert Anwendung, welche zur Werthbestimmung von $\Psi(\theta)$ in Gl. (14^a) führten. Diesen zufolge reducirt sich dasselbe auf die Summe der Residuüm-Integrale für sämtliche Unstetigkeitsstellen [17] der Function, welchen ein Werth von φ mit positiv imaginärem Bestandtheile entspricht. Die Werthe der Veränderlichen, durch welche die zu integrierende Function unstetig (d. h. unendlich) wird, sind aber $\varphi = ai$; $\varphi = \left(\frac{h^2}{a_1 - \mu} + a\right)i$; $\varphi =$

$\left(\frac{h^2}{a_{\nu} - \mu} + a\right)i$; und da die Constante a so gewählt sein muss, dass $(h^2 + (a_k - \mu)a)$ für jedes k positiv bleibt, also $\left(\frac{h^2}{a_k - \mu} + a\right)$ gleiches

Vorzeichen mit $(a_k - \mu)$ erhält, so sind unter den eben angeführten Werthen von φ diejenigen positiv imaginär, bei welchen $a_k > \mu$. — Die Gesamtsumme der Residuüm-Integrale im vorliegenden Falle lässt sich nun ohne Weiteres ableiten aus dem Ausdrucke (15^a), welcher dieselbe für das ganz ähnliche Integral in (14^a) darstellt; man braucht darin nur überall an Stelle von a ($a - \mu$) und im Exponenten für θ μu einzuführen, sowie den dort weggefallenen

nen Factor $\frac{1}{h^{n-1}}$ zuzufügen. Damit erhält man

$$\frac{1}{h^{n-1}} \left(1 - \sum \frac{k (a_k - \mu)^{\nu-1} e^{-\mu u} \frac{h^2}{a_k - \mu}}{(a_k - a_1) \dots (a_k - a_{\nu})} \right)$$

von welcher Summe hier nun alle diejenigen Glieder fortzulassen sind, für die $a_k < \mu$ ist. — Setzt man vorstehenden Ausdruck für das obige Integral (den Factor $\frac{1}{2\pi}$ hinzugerechnet) ein, so lässt sich die weitere Integration nach u an den einzelnen Gliedern ausführen und es folgt

$$X(\mu) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2 u} \frac{du}{\sqrt{u}} - \sum \frac{(a_k - \mu)^{\nu-1}}{(a_k - a_1) \dots (a_k - a_{\nu})} \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2 \left(1 + \frac{\mu}{a_k - \mu}\right) u} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ = 1 - \sum \frac{k (a_k - \mu)^{\nu-1} \sqrt{1 - \frac{\mu}{a_k}}}{(a_k - a_1) \dots (a_k - a_{\nu})} \quad (18^a)$$

wobei die Summation auf diejenigen Glieder zu beschränken ist, für welche $a_k > \mu$ ist; so dass mithin $X(\mu)$ als der reelle Theil des rechts stehenden Ausdrucks erscheint.

Die ursprüngliche Definition der Function θ , wie sie unter No. 1 gegeben ist, lässt schon erkennen, dass ihr Werth in keinem Falle das Vierfache der gleichzeitig bestehenden Quadratsumme Δ überschreiten kann; aus der unter No. 3 entwickelten transformirten Form bestimmt sich sodann die obere Grenze von θ näher als $= 4\Delta$, wenn n gerade, dagegen als $= 2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right) \Delta$, wenn n ungerade ist. Demgemäss reducirt sich der obige Ausdruck für $X(\mu)$ durch den Wegfall sämtlicher Glieder der Summe auf die Einheit, so wie $\mu \geq 2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right)$, wie er andererseits, einer früheren Bemerkung zufolge, Null giebt, wenn $\mu = 0$ gesetzt wird. Setzt man jetzt für die Coefficienten $a_1 \dots a_{\nu}$ die ihnen zukommenden Werthe ein, indem man zugleich die Grösse μ in der jenen parallelen Form $2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)$ darstellt — darin π als von 0 bis ν stetig variirbar vorausgesetzt — so erhält man für die Wahrschein-



lichkeit, dass bei ungeradem n $\Theta \leq \mu A$, d. h. der Quotient $\frac{\Theta}{A} \leq \mu$ sei.

$$X(\mu) = 1 - \frac{2n}{n} \sum_{k=1}^k (-1)^{k+1} \sin k \frac{\pi}{n} \cos k \frac{\pi}{n} \left(\sin(k+\alpha) \frac{\pi}{n} - \sin(k-\alpha) \frac{\pi}{n} \right)^{r-\frac{1}{2}} \quad (19^a)$$

[18] wo nun wiederum die Summation auf die reell bleibenden Glieder, d. h. auf diejenigen, für welche $k > \alpha$, zu beschränken ist.

Für den Fall $n = 2r + 2$ lässt sich, wenn die beiden jetzt auftretenden irrationalen Factoren in (17) durch bestimmte Integrale ersetzt werden, die Entwicklung ähnlich führen wie in dem entsprechenden Falle unter No. 3, und man erhält alsdann für $X(\mu)$ zwei analog (18^a) gebildete Summen, an deren reellen Theilen noch eine Integration wie in (15^b) auszuführen bleibt — was hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Die hier betrachtete Function $X(\mu)$ besitzt die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass ihr Werth, von welcher Form die Zahl n sein mag, von der Grösse h , d. h. von dem Genauigkeitsmaasse der betreffenden Beobachtungsweise, völlig unabhängig ist. Für den Fall eines ungeraden n ist dies aus den Gleichungen (18^a) und (19^a) unmittelbar ersichtlich; es lässt sich aber aus Gleichung (17) auch allgemein erweisen. Denn führt man in dieser an Stelle von $\varphi \frac{\varphi}{h^2}$ als neue Variable ein, wodurch die Grenzen der Integration keine Veränderung erleiden, und berücksichtigt, dass die Constante a , ihrem Ursprung zufolge, auf den Werth des Integrals keinen Einfluss haben kann, daher auch durch $h^2 a$ ersetzt werden darf, so verschwindet h vollständig, indem der Ausdruck, wenn die neue Veränderliche wieder mit φ bezeichnet wird, übergeht in

$$X(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{(a+\varphi i) \sqrt{(1-(\mu-a_1)(a+\varphi i)) \dots (1-(\mu-a_n)(a+\varphi i))}} \quad (20)$$

Hieraus ist unmittelbar zu schliessen, dass überhaupt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Fehlersystems, bei welchem der Quotient $\frac{\Theta}{A}$ zwischen zwei beliebigen Grenzen μ_1 und μ_0 eingeschlossen ist, da ihr Werth sich durch die Differenz $X(\mu_1) - X(\mu_0)$ bestimmt, immer die nämliche bleibt, aus welcher Art von Beobachtungen die Reihe der Fehler auch entsprungen sein mag, wofür dabei nur die GAUSSISCHE Regel für die relative Häufigkeit

verschieden grosser Abweichungen als gültig vorausgesetzt werden darf; und man hat mithin umgekehrt in jenem Quotienten μ ein Datum, mittelst dessen die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ursprungs eines gegebenen Fehlersystems im concreten Falle unabhängig von einer näheren Kenntnis der betreffenden Beobachtungsweise beurtheilt werden kann. — Der Verlauf der Function $X(\mu)$ mit dem Werthe des Arguments lässt sich durch eine einfache Betrachtung im Allgemeinen übersehen. — Durch Differentiation der letzten Formel nach μ erhält man diejenige Function, welche die relative Häufigkeit eines Fehlersystems als Function des Werthes von $\frac{\Theta}{A}$ darstellt; diese mit $\chi(\mu)$ bezeichnet, ist also

$$\chi(\mu) = \frac{d}{d\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{(1-(\mu-a_1)(a+\varphi i)) \dots (1-(\mu-a_n)(a+\varphi i))} \left\{ \frac{1}{1-(\mu-a_1)(a+\varphi i)} + \frac{1}{1-(\mu-a_n)(a+\varphi i)} \right\}$$

Da das vorstehende Integral, so lange a positiv bleibt, von dem Werthe dieser Constanten unabhängig ist, die sämtlichen Elemente desselben aber jetzt, nach dem Wegfall des Factors $(a+\varphi i)$ im Nenner, auch für verschwindendes a immer noch endlich bleiben, so leuchtet ein, dass man darin auch $a=0$ setzen darf, und also den einfacheren Ausdruck erhält:

$$\chi(\mu) = \frac{d}{d\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{(1-(\mu-a_1)\varphi i) \dots (1-(\mu-a_n)\varphi i)} \left\{ \frac{1}{1-(\mu-a_1)\varphi i} + \frac{1}{1-(\mu-a_n)\varphi i} \right\}$$

In dieser Form erkennt man, wenn für α_k sein Werth

$$2 \left(1 - \cos k \frac{2\pi}{n} \right)$$

substituirt gedacht wird, durch [19] eine einfache Ueberlegung, dass die Function $\chi(\mu)$ für jedes beliebige gerade n den nämlichen Werth erlangt für zwei Werthe des μ , von welchen der eine um denselben Betrag kleiner ist als 2, um welchen der andere grösser als 2 ist. Denn setzt man darin $\mu = 2 + \lambda$, so ist unmittelbar ersichtlich, dass die Vertauschung von λ mit $-\lambda$ nichts weiter als eine Vertauschung der Elemente des Integrals unter einander zur Folge hat. Es ist mithin bei beliebigem geradzahligem n die Function $\chi(\mu)$ symmetrisch in Bezug auf den Werth $\mu = 2$; und man überzeugt sich leicht, dass auch für ungerade n das Nämliche



wenigstens näherungsweise Geltung hat, um so vollständiger, je grösser die Zahl n ist. Die nähere Discussion des Integrals in Bezug auf seinen numerischen Werth für verschiedene Grössen des Arguments stellt nun ferner heraus — was hier ohne weiteren Nachweis angeführt werden soll. — dass die Function $\chi(\mu)$ für den Werth $\mu=2$ ein absolutes Maximum erreicht (in aller Strenge bei jedem geradzahligem n , mit grosser Annäherung bei ungeradem n) und von dieser Stelle ab nach beiden Seiten hin sehr rasch bis Null abnimmt, wofern die Zahl n einigermaassen beträchtlich ist. Aus diesen Eigenschaften ist nun der Schluss zu ziehen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Fehlersystems, bei welchem der Quotient μ unter einer bestimmten Grenze $(2-\lambda)$ bleibt, gleich ist der Wahrscheinlichkeit, dass μ den Werth $(2+\lambda)$ überschreitet (indem erstere durch $X(2-\lambda)$, letztere durch $1-X(2+\lambda)$ ausgedrückt ist) und dass der gemeinschaftliche Betrag beider für zunehmenden Werth von λ um so rascher der Null sich nähert, je beträchtlicher die Anzahl der Elemente des Fehlersystems ist. Die Wahrscheinlichkeit eines Quotienten μ , dessen Unterschied von 2, absolut genommen, den Betrag λ überschreitet, — welche offenbar durch den Ausdruck

$$1 - (X(2+\lambda) - X(2-\lambda))$$

darzustellen ist, — nimmt mithin für wachsendes n rasch ab, wenn λ merklich von Null verschieden gesetzt wird.

Insofern nun der Werth, welchen der Quotient

$$\mu = \frac{\theta}{A}$$

in jedem einzelnen Falle erlangt, vermöge der ursprünglichen Definition der Function θ wesentlich durch die Art und Weise der Vertheilung der Fehler bedingt ist, enthält das Vorstehende — zunächst in allgemeinen Umrissen — den Ausdruck einer bestimmten Gesetzmässigkeit, welche diese Vertheilung regelt, sofern die Abweichungen aus unregelmässig wirkenden Ursachen entspringen. — Diese Gesetzmässigkeit lässt sich offenbar dahin aussprechen: Bei Fehlern zufälligen Ursprungs treten diejenigen Systeme relativ am häufigsten auf, für welche das Verhältniss der Summe der Differenzenquadrate zur Summe der Fehlerquadrate = 2, und relativ sehr selten solche, bei denen jenes Verhältniss erheblich von 2 verschieden ist und den Grenzen 0 und 4 nahe kömmt; — oder, da

$$\theta = 2A - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1)$$

folglich

$$\lambda = \pm(\mu - 2) = \frac{2(x_1 x_2 + x_2 x_3 \dots + x_n x_1)}{A}$$

diejenige Vertheilungsweise der Fehler tritt mit überwiegender Häufigkeit auf, bei welcher die algebraische Summe der Produkte je zwei einander folgender Null ist.

Aus dem zuletzt Angeführten entspringt ein einfaches Kriterium für die Beurtheilung irgend eines vorgelegten Fehlersystems in Bezug auf seinen Ursprung aus unregelmässig wirkenden Fehlerquellen. Eine solche wird sich zu gründen haben auf die Untersuchung des Werthes, welchen der Quotient $\frac{\theta}{A} = \mu$, oder [20] der

analoge $2 \frac{\theta}{A} = \lambda$ (wenn die Produktsomme aus den benachbarten Elementen kurz mit θ bezeichnet wird) für das gegebene Fehlersystem annimmt. Die absolute Grösse der Differenz $(\mu - 2)$ oder der absolute Werth von λ wird das maassgebende Bestimmungsstück sein, von welchem die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ursprungs abhängt. Findet sich jener Werth merklich von Null verschieden, so wird letztere um so geringer, je mehr Elemente das vorgelegte Fehlersystem enthält, je umfassender also die zu Grunde liegende Beobachtungsreihe ist; und es muss daher in einem solchen Falle mit um so höherer Wahrscheinlichkeit auf die Mitwirkung gesetzmässig mitwirkender Fehlerquellen bei der Beobachtung oder auf eine thatsächliche Abweichung der angenommenen theoretischen Formel geschlossen werden.

Die numerische Bestimmung des Wahrscheinlichkeitsgrades für das Eine oder das Andere hängt natürlich von der Berechnung der Function $X(\mu)$ für beliebige Werthe des Arguments ab und verlangt mithin eine Darstellung derselben in einer Form, bei welcher die numerische Auswerthung bequem ausführbar wird. Eine solche kann, wenigstens unter Voraussetzung einer grossen Zahl für n — welcher Fall in der Praxis allein Interesse hat — ohne Schwierigkeit auf mehreren Wegen gegeben werden, sowohl in unmittelbarem Anschluss an das bestimmte Integral in Gleichung (20) als auch durch geeignete Transformation der Summenausdrücke, auf welche sich dieses reduciren lässt; doch muss die Ausführung an dieser Stelle unterbleiben, da die hierzu noch erforderlichen Vorbereitungen den Raum dieser Abhandlung zu weit überschreiten würden.



V.
Neue Apparate zur Bestimmung des
Brechungs- und Zerstreuungsvermögens
fester und flüssiger Körper.

Mit 1 Tafel und 7 Figuren im Text.
Jena, Mauke's Verlag 1874. 8°, III u. 79 S.

Aus der Jenaischen Zeitschrift für Naturwissenschaft [Bd. 8. 1874. pp. 96—174]
besonders abgedruckt.

Vorbemerkung.

Seit mehreren Jahren mit Arbeiten beschäftigt, welche sehr zahlreiche Bestimmungen der dioptrischen Constanten sowohl an festen Körpern — an Glasproben — wie auch an Flüssigkeiten und halbflüssigen Substanzen nöthig machten, habe ich nicht nur reichliche Veranlassung gehabt, mich um die Vereinfachung der Methoden und die Verbesserung der Instrumente für derartige Beobachtungen zu bemühen, sondern auch Gelegenheit genug, die für diesen Zweck versuchten Neuerungen gründlich auf die Probe zu stellen. — Im Folgenden beschreibe ich die neuen Verfahrungsweisen und Apparate, die sich mir bei jenen Arbeiten ergeben und in längerem Gebrauche bewährt haben; in der Meinung, dass die Ausführung genauer dioptrischer Messungen durch dieselben ausserordentlich erleichtert und damit das hauptsächlichste Hinderniss beseitigt werde, welches bisher einer ausgiebigen Verwerthung solcher Maassbestimmungen für viele wissenschaftliche und technische Zwecke im Wege gestanden hat.

Die von FRAUNHOFER zuerst gelehrt Methode, nach welcher die Minimalablenkung der Strahlen je einer bestimmten Farbe in

einem Prisma von gemessenem Winkel beobachtet wird, genügt, was die erreichbare Sicherheit und Präcision der Resultate anlangt, ohne Zweifel allen Ansprüchen, die für irgend einen Zweck gestellt werden mögen; und für den Physiker von Fach stehen auch ihrer Ausübung keinerlei ernstliche Schwierigkeiten entgegen, seit der all zu schwerfällige Apparat FRAUNHOFER's durch zweckmässig eingerichtete Instrumente — Spectrometer — wie MEYERSTEIN, STEINHEIL u. A. construiert haben, ersetzt ist. Dagegen ist nicht zu verkennen, dass auch mit diesen Instrumenten die Ausführung der in Rede stehenden Messungen immer noch ein umständliches [2] und sehr subtiles Geschäft bleibt, welchem nur ein geschickter Beobachter recht gewachsen ist. Die Construction dieser Spectrometer ist an sich schon ziemlich verwickelt; die richtige Justirung der einzelnen Stücke, welche theilweise bei jeder Messung von Neuem ausgeführt werden muss, erfordert Manipulationen, die auch für einen Geübten lästig und zeitraubend bleiben. Die Messung selbst, d. i. die Ermittlung des brechenden Winkels und der Minimalablenkung, setzt sich aus mehreren ungleichartigen Operationen zusammen, welche bei einigen Constructionen sogar unter wesentlich veränderter Zusammenstellung des Apparates auszuführen sind. Zu dem Allen kommt noch der Umstand, dass schon die gewöhnlichsten Bedürfnisse der Praxis, wenn das praktisch so wichtige Element, die Farbenzerstreuung, in einer nur mässigen relativen Genauigkeit erhalten werden soll, eine sehr feine Kreisheilung nöthig machen, welche wegen der dadurch bedingten feineren Construction anderer Theile die Handhabung solcher Instrumente viel zu difficil macht, als dass sie allen Denen zu gute kommen könnten, für welche die Ausführung genauer optischer Maassbestimmungen von Nutzen sein würde. In der That hat denn auch die FRAUNHOFER'sche Methode ausserhalb der physikalischen Laboratorien eine ausserordentlich geringe Verbreitung gefunden. Die ausübenden Optiker namentlich behelfen sich in der Mehrzahl nach wie vor mit viel einfacheren, aber auch höchst mangelhaften Verfahrungsweisen; und eine für die Optik sehr wichtige Hilfsindustrie, die Glasschmelzekunst, — an deren Fortschritten mittelbar mehrere Wissenschaften lebhaft interessirt sind — ist, wie es scheinen muss, von dem Beispiel FRAUNHOFER's so gut wie unberührt geblieben¹⁾.

1) Die Fabrikanten optischer Gläser charakterisiren bis heute ihre Erzeugnisse, wie wenn sie zu Schiffsballast bestimmt wären, durch das specifische Gewicht. Da



[3] Noch für mehrere andere technische und wissenschaftliche Interessen ist die Möglichkeit genauer Bestimmung der dioptrischen Constanten wohl nur wegen der Beschwerlichkeit ihrer Ausführung beinahe unfruchtbar geblieben. So ist es keinem Zweifel unterworfen, dass Brechungsexponent und Dispersion für viele Aufgaben der Technik, für Unterscheidung und Prüfung mancher Substanzen u. dergl. recht wohl verwerthbar sein würden. Desgleichen ist durch zahlreiche Untersuchungen — von LANDOLT u. A. — hinlänglich dargethan, dass diese optischen Constanten vermöge ihrer Abhängigkeit von der chemischen Zusammensetzung der Körper für die Chemie eine ähnliche Bedeutung haben wie die anderen physikalischen Merkmale, Siedepunkt, Dampfdichte, spezifische Wärme u. dergl. Solchen Anwendungen gegenüber kommen vorwiegend die Hilfsmittel zur Untersuchung flüssiger Körper in Betracht; und man darf hoffen, dass eine wesentliche Erleichterung dieser Untersuchung für diese angeführten Gebiete nicht ohne Folgen bleiben wird.

Im Nachstehenden wird zunächst über die Messung des Brechungsexponenten und der Farbenzerstreuung mittelst Prismen gehandelt werden. — Für die Combination der darzulegenden Beobachtungsmethode und des zu beschreibenden Spectrometers sind folgende Rücksichten maassgebend gewesen:

- 1) möglichste Vereinfachung des Instruments durch Beseitigung aller irgend entbehrlichen Theile;
- 2) Leichtigkeit und Sicherheit der Justirung, mit dem Anspruch, dass alle dem Instrument dauernd zugehörigen Theile, einmal regulirt, ihre richtige Lage unverändert beibehalten, die zu untersuchenden Prismen aber, was auch ihre Gestalt und Grösse

hierbei die entscheidenden optischen Merkmale der Glasarten in ihren feineren Abstufungen völlig verhüllt bleiben, so gibt es darauf hin weder eine sichere Verständigung zwischen dem praktischen Optiker und dem Glasfabrikanten, noch hat dieser selbst in jenen Bestimmungen eine sichere Controle über die Qualität und die Gleichförmigkeit seiner Produkte. Vollends aber ist jede Hoffnung ausgeschlossen, dass die Glasschmelzkunst — so lange kein rationelleres Verfahren Eingang gefunden hat — über blos hergebrachte Ziele hinausgehen und selbständig versuchen werde, dem Bedürfniss der praktischen Optik nach neuen Glasarten entgegenzukommen. Wie die Theorie auf das Bestimmteste nachweist, hängt die weitere Vervollkommnung der meisten optischen Instrumente durchaus nicht ab von der Erzeugung immer schwererer Flintgläser, sondern vielmehr von der Herstellung solcher Glasflüsse, bei welchen der mittlere Brechungsindex und die Dispersion andere Verhältnisse haben als bei den gangbaren Arten von Crown und Flint. Wie sollte aber ein Fortschritt in dieser Richtung möglich sein, wenn die Betheiligten sich nicht in den Stand setzen, die optischen Merkmale im Einzelnen studiren zu können?

sein mag, durch wenige Handgriffe in die verlangte Stellung gebracht werden können;

3) Ermittlung aller zu einer vollständigen Messung erforderlichen Data ohne jede Veränderung des Instruments;

4) Ermittlung der zur Dispersionsbestimmung erforderlichen Data unabhängig von der Winkelmessung am Theilkreise, durch eine einfache und leicht zu handhabende Mikrometervorrichtung, [4] damit die Kreistheilung nicht feiner, die Construction und der Gebrauch des Instruments nicht subtiler zu sein braucht, als die für die absoluten Werthe des Brechungsindex verlangte Genauigkeit fordert; endlich

5) bequeme Benutzung des Sonnenlichtes ohne die Hilfe eines selbstthätigen Heliostaten.

Die Grundlage des Beobachtungsverfahrens ist die von O. LITTRON¹⁾ erdachte Methode: die in das Prisma gelangten Strahlen an der hinteren Prismenfläche im Innern der brechenden Substanz so reflectiren zu lassen, dass die Richtung des Austritts mit der des Eintritts zusammenfällt. Auf Grund einer solchen Combination wird es möglich, die sonst erforderlichen beiden Stücke, Collimator und Beobachtungsrohr, gänzlich zu verschmelzen, indem man den lichtgebenden Spalt im Ocularfelde des Beobachtungsrohrs selbst anbringt und die eine Hälfte desselben, an Stelle eines Fadekreuzes, zur Einstellung der Bilder verwendet. Diese Einrichtung, in Verbindung mit einer bequemen Mechanik zur Application und Justirung der Prismen und mit einem Mikrometerapparat zur Messung kleiner Winkelunterschiede, erlaubt den oben geltend gemachten Anforderungen in vollem Umfang zu genügen.

Im zweiten Theile dieser Abhandlung wird ferner eine Methode entwickelt, welche den Brechungsexponenten und die Dispersion von Flüssigkeiten ohne die Messung prismatischer Ablenkung und demnach ohne Hilfe eines Spectrometers zu bestimmen gestattet, und zwar in einer Genauigkeit, welche der mittelst des Hohlprisma's zu erreichenden nicht wesentlich nachzustehen braucht. — Wenn schon die Vereinfachung, welche das hier beschriebene Spectrometer für dioptrische Messungen herbeiführt, auch der Messung an einem Hohlprisma ungeschmälert zu gute kommt, so

¹⁾ Sitzungsber. der math.-phys. Cl. d. Wiener Akad. XLVII, Abth. 2, [1863, pp. 26—32; O. VON LITTRON, Ueber eine neue Einrichtung des Spectralapparates.] Vergl. STEINHEIL, [C. A. VON: Ueber Verbesserungen in der Construction der Spectral-Apparate.] Sitzungsber. d. Münchener Akad. I, 1863, pp. 47—51.



ist dadurch doch noch keineswegs diejenige Erleichterung erzielt, die man im Hinblick auf die oben erwähnten Anwendungen wünschen müsste. Die Verwerthung dioptrischer Maassbestimmungen für technische Zwecke und als Hilfsmittel der chemischen Untersuchung wird nicht erheblich gefördert sein, so lange sie angewiesen bleibt auf den Gebrauch eines wenig handlichen Instruments und so lange jede einzelne Messung wenigstens drei Einstellungen und drei Theilkreis-Ablesungen mit einer nachfolgenden, wenn [5] auch leichten Rechnung nöthig macht; gar nicht zu denken der Hindernisse, welche viele flüssige und halbflüssige Substanzen der Beobachtung in einem Hohlprisma entgegen setzen. — Sehr viel weiter gehenden Ansprüchen an die Vereinfachung des Apparates und an die Abkürzung der erforderlichen Operationen kann aber in der That bei Flüssigkeiten genügt werden, wenn die ganze Messung gegründet wird auf Beobachtung der Totalreflexion, welche die betreffende Flüssigkeit, in sehr dünner Schicht zwischen Prismen aus stärker brechender Substanz eingeschlossen, an durchfallenden Strahlen ergibt. Ich habe diese Methode — welche mittlerweile übrigens, in anderer Art angewandt, auch von CHRISTIANSEN¹⁾ angegeben worden ist — seit dem Jahre 1869, zuerst zur Bestimmung von Balsamen und Harzen, benutzt und zu ihrer bequemen Anwendung besondere Apparate — Refractometer — construirt, durch welche es möglich gemacht wird, bei jeder flüssigen oder halbflüssigen Substanz den Brechungsexponenten und, wenn nöthig, auch die Dispersion durch die allereinfachsten Manipulationen zu bestimmen. Dabei genügt ein einziger Tropfen der betreffenden Flüssigkeit, die in dickeren Schichten beliebig undurchsichtig sein kann. Die ganze Beobachtung besteht in einer einzigen kunstlosen Einstellung und in der nachfolgenden Ablesung an einem Grädbogen oder an einer Mikrometerscala, welche Ablesung den gesuchten Brechungsexponenten unmittelbar, d. h. ohne jede Rechnung ergibt.

Im Folgenden gebe ich die ausführliche Beschreibung dieses Refractometers in drei von einander abweichenden, verschiedenen Zwecken angepassten Formen²⁾.

1) [C. CHRISTIANSEN: Ueber das Brechungsverhältniss des Fuchsin.] POGGENDORFF's Annalen, Bd. CXLIII, pp. 250—259 (1871).

2) Eine kurze Mittheilung über diese Instrumente hat schon auf der 45. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in Leipzig statt gehabt und ist aus deren Sectionsberichten in einige Zeitschriften übergegangen. [Vgl. das Referat im: Tageblatt der 45. Versammlung Deutscher Naturforscher u. Aerzte in Leipzig, 1872. S. 53 u. 54.]

Schliesslich sei noch bemerkt, dass alle in diesem Aufsatz beschriebenen Apparate in der optischen Werkstatt des Herrn C. Zeiss in Jena zu wiederholten Malen ausgeführt und die meisten davon auch schon seit einigen Jahren, sowohl von mir wie von Anderen, im wirklichen Gebrauch erprobt worden sind.

[6]

Die Bestimmung der dioptrischen Constanten mittelst Prismen.

1. Das Princip der Beobachtungs-Methode.

Die Grundidee, auf welcher die darzulegende Beobachtungsmethode beruht, und welche in dem zu beschreibenden Instrumente realisirt ist, erläutert sich durch folgende Betrachtung.

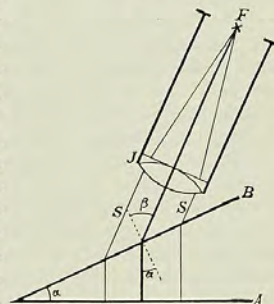
Sei AB (Fig. 1) ein Prisma mit einem brechenden Winkel a und stelle S ein Bündel paralleler Strahlen von einerlei Brechbarkeit vor, welches in der Ebene eines Hauptschnittes verlaufend, mit der brechenden Fläche B einen solchen Einfallswinkel β bildet, dass die gebrochenen und in das Prisma eintretenden Strahlen die zweite (hintere) Fläche A gerade senkrecht treffen. — Soll diese Forderung erfüllt sein, so muss der Winkel, den die gebrochenen Strahlen im Innern mit dem Einfallslothe bilden, dem brechenden Winkel a gleich sein und demnach, wenn n den Brechungsindex vorstellt, der Einfallswinkel β der Bedingung genügen

$$\sin \beta = n \cdot \sin a$$

— was so lange immer möglich ist, als $n \cdot \sin a < 1$, d. h. so lange a kleiner als der Grenzwinkel der totalen Reflexion für das betreffende Medium genommen wird.

Diese Verhältnisse als hergestellt angenommen, wird das in das Innere des Prisma's eingetretene Bündel paralleler Strahlen an der hintern Fläche A in der Richtung der Normalen reflectirt und tritt nach wiederholter Brechung an der Fläche B wieder aus — offenbar in genau derselben durch den Winkel β fixirten Richtung

Fig. 1.





rückwärts verlaufend, in welcher die Strahlen vor der ersten Brechung anlangten. Ist nun, wie in der Figur angedeutet, das Strahlenbündel erhalten durch Vermittelung eines Fernrohrobjectivs J , in dessen Hauptbrennpunkt F ein leuchtender Punkt angebracht, [7] und dessen Axe im Hauptschnitt nach dem Winkel β orientirt ist, so werden die rückkehrenden Strahlen, wie keiner weitem Erläuterung bedarf, sich im Focus F wieder vereinigen und demnach ein mit dem Lichtpunkte selbst genau zusammenfallendes Bild desselben erzeugen. Ganz das Nämliche wird auch eintreten, wenn die Axe des Fernrohrs und damit die Richtung des aus dem Objectiv austretenden Strahlenbündels zu einer der Prismenflächen senkrecht gerichtet wird, indem alsdann die einfache Spiegelung an dieser Fläche unmittelbar bewirkt, was in dem vorher betrachteten Falle die Spiegelung in Verbindung mit den beiden Brechungen that.

Diese Coincidenz von Object und Bild in der Focalebene jenes Fernrohrobjectivs kann nun umgekehrt als Kriterium dafür benutzt werden, dass die Axe des Fernrohrs eine der beiden Lagen gegen das Prisma einnimmt: entweder, entsprechend der ersten Voraussetzung, mit der Normalen der vorderen Prismenfläche den Winkel β bildet, welcher der Gleichung

$$\sin \beta = n \cdot \sin \alpha$$

genügt, oder entsprechend der zweiten Annahme, zu einer der Prismenflächen normal gerichtet ist. — Vorausgesetzt also, dass diese Coincidenz eines im Focus eines Fernrohrobjectivs angebrachten Lichtpunktes mit seinem durch die rückkehrenden Strahlen erzeugten Bilde in geeigneter Art wahrnehmbar gemacht werden kann, so wird ihre Beobachtung unter den angenommenen Verhältnissen das Mittel bieten ¹⁾ zur Bestimmung des Winkels α zwischen den Normalen der beiden Flächen A und B ; indem man die Drehung misst, welche bei unverändert bleibender Richtung der Fernrohraxe von der Coincidenz des Spiegelbildes der einen Fläche zu der des Spiegelbildes der andern führt; und ²⁾ zur Ermittlung des Winkels β , der in Verbindung mit dem eben gemessenen auf den Brechungsindex n führt; indem man die weitere Drehung bestimmt, welche von der Coincidenz des von B gelieferten Spiegelbildes hinführt zur Coincidenz desjenigen Bildes, das durch innere Spiegelung an der Fläche A , unter Vermittelung der beiden Brechungen zu Stande kommt.

Um zu übersehen, wie diese Methode praktisch zu realisiren ist, d. h. wie die in Frage kommenden Coincidenzen zur Wahrnehmung zu bringen sind, betrachte man — immer noch unter Voraussetzung homogenen Lichtes — an Stelle des vorher in F angenommenen Lichtpunktes eine leuchtende Linie, senkrecht stehend [8] zur Fernrohraxe und zur Ebene des diese enthaltenden Hauptschnittes¹⁾.

Fasst man nun zwei Punkte dieser Linie in's Auge, von denen der eine um eben so viel unter, wie der andere über der Fernrohraxe (oder über der Ebene des sie enthaltenden Hauptschnittes) liegt, so ist unmittelbar ersichtlich, dass beide wie der vorher betrachtete auf der Axe liegende Punkt durch das Objectiv dem Prisma je ein Bündel paralleler Strahlen zusenden, welche beide Strahlensysteme jedoch zur Ebene des Hauptschnittes nach entgegengesetzten Seiten um gleichen Winkel geneigt sind. Wenn daher das Prisma dem Objectiv entweder mit einer zur Fernrohraxe normal gerichteten, oder mit einer gegen diese unter dem Winkel β orientirten Fläche gegenübersteht, so muss jedes der beiden Strahlenbündel eine Reflexion erfahren, — entweder direkt, oder nach vorheriger Brechung, an der hintern Fläche des Prismas. Demnach muss jedes der beiden Bündel in derjenigen Richtung zurückkehren, in welcher das andere anlangte, so dass also die Richtungen beider nach der Reflexion unter einander vertauscht erscheinen. Indem nun das Objectiv diese zurückkehrenden Strahlen wieder in seiner Focalebene in Punkten vereinigt, welche die Bilder der vorher betrachteten Punkte der Focalebene darstellen, fällt das Bild des unter der Axe liegenden Punktes auf den über derselben liegenden und umgekehrt. Wendet man diese Betrachtung auf alle Punkte der oben vorausgesetzten Lichtlinie an, so ergibt sich, dass in jeder der beiden charakteristischen Stellungen des Prisma's die zurückkehrenden Strahlen von jener Lichtlinie in der Focalebene des Fernrohrs ein mit ihr selbst zusammenfallendes aber umgekehrtes Bild entwerfen. Demnach liegt das Bild des untern Theils der Lichtlinie von der Axe nach oben, so dass es als die Fortsetzung jenes untern Theils erscheint; und umgekehrt.

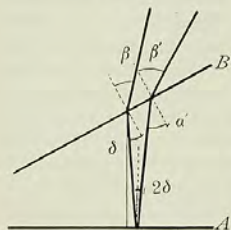
Diese Bemerkung führt direct auf die Einrichtung hin, durch welche die fraglichen Coincidenzen, die zur Ermittlung der Winkel

¹⁾ Sie muss also in Fig. 1 im Punkte F zur Ebene des Papiers senkrecht stehend gedacht werden.



α und β dienen sollen, in aller Leichtigkeit und Schärfe beobachtbar werden. Man denke sich jene Lichtlinie zunächst durch ein Paar S'GRAVESAND'sche Schneiden dargestellt, welche, wie bei den gewöhnlichen Spectralapparaten, von der Axe des Rohrs nach oben und unten gleichweit sich erstrecken, und denke nun die eine, [9] z. B. die obere Hälfte hinweggenommen, so dass auf dieser Seite der Axe die Focalebene frei wird. Es muss alsdann das Bild der unteren, stehen gebliebenen Hälfte, wenn diese in geeigneter Weise von hinten erleuchtet wird, in dem frei gelegten Theile der Focalebene zum Vorschein kommen und hier wie jedes Fernrohrbild beobachtet werden können, wenn hinter der Focalebene eine Lupe in Form eines RAMSDEN'schen Oculars angebracht wird. — Um dabei die Coincidenz erkennen, d. h. prüfen zu können, ob das oben erscheinende Bild genau in der Fortsetzung der untern Spalzhälfte liegt, reicht es aus, diese Fortsetzung direct sichtbar zu machen, indem man die Backen des Spaltes in der Nähe der Schneiden um ein wenig über die Axe des Rohrs hinaus in die freigelegte Hälfte der Focalebene hereinragen lässt, so dass ihre Kanten gleichzeitig mit dem zu beobachtenden Bilde im Schilde des Oculars erscheinen. — Die Beleuchtung der wirksam bleibenden Spalzhälfte muss natürlich durch seitlich einfallendes Licht bewirkt werden, indem man dieses durch ein hinter dem Spalt zwischen Ocular und Focalebene angebrachtes Reflexionsprisma in die Axe des Rohrs führt.

Fig. 2.



Die Anwendung weissen Lichtes modificirt selbstverständlich nur die Erscheinung desjenigen Bildes, welches durch Vermittelung der beiden Brechungen und der Reflexion an der hinteren Fläche des Prisma's zu Stande kommt. Denkt man, um den Erfolg in diesem Falle zu übersehen, die vordere Prismenfläche (Fig. 2) unter einem solchen Winkel β gegen die Axe eingestellt, dass Licht von einem bestimmten Brechungsindex n den vorher betrachteten Verlauf nimmt, also die zweite Prismenfläche senkrecht trifft, so wird ein Strahl von abweichender Brechbarkeit, dessen Index $n+dn$ gesetzt wird, im Innern des brechenden Mediums mit der Normalen der ersten Fläche einen Winkel $\alpha-\delta$ bilden, und es wird

$$\delta = \frac{1}{n^2} \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \cdot dn = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{dn}{n}$$

Dieser Strahl trifft nun die zweite Prismenfläche unter diesem [10] Winkel δ und kehrt daher nach der Reflexion zurück zur Fläche B unter einem Einfallswinkel

$$\alpha' = \alpha + \delta.$$

Da nun der Austrittswinkel $\beta' = \beta + d\beta$ durch die Bedingung

$$\sin \beta' = (n + dn) \sin \alpha'$$

bestimmt ist, so folgt, unter Berücksichtigung der vorausgehenden Gleichungen und unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung, schliesslich

$$d\beta = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \cdot dn.$$

Das so bestimmte $d\beta$ ist aber der Winkel, den die nach der Reflexion aus dem Prisma austretenden Strahlen der betreffenden Farbe mit der Axe des Collimators bilden, welcher Winkel demnach, wenn er für die dem Werthe n entsprechende Farbe Null ist, für die stärker brechbaren Strahlen nach der einen, für die schwächer brechbaren nach der andern Richtung hin in dem Maasse stetig wächst, als die Abweichung in dem einen oder dem andern Sinne zunimmt. Das Dispersionsphänomen tritt daher bei der hier betrachteten Combination ganz in der gewohnten Form auf. Das Objectiv des Fernrohrs, indem es die Strahlen von verschiedener Richtung in verschiedenen Punkten der Focalebene vereinigt, entwirft eine Reihe neben einander liegender farbiger Bilder des lichtgebenden Spaltes, welche ein dem Hauptschnitte des Prisma's parallel sich erstreckendes, je nach den Umständen continuirliches oder discontinuirliches Spectrum bilden. Von diesem Spectrum fällt auf die Fortsetzung des lichtgebenden Spaltes stets diejenige Stelle, deren Strahlen die zweite Prismenfläche im Innern des Prisma's genau senkrecht treffen, deren Brechungsindex also durch den Werth

$$n = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

bestimmt ist.

Durch das Vorstehende ist das Verfahren zur Bestimmung des Brechungsexponenten für Strahlen einer bestimmten Farbe in der Hauptsache hinreichend bezeichnet.



Wird das zu untersuchende Prisma auf einem um eine verticale Axe drehbaren Theilkreis so angebracht, dass die brechende Kante dieser Drehungaxe genau parallel steht, und das Collimator-Fernrohr von der oben betrachteten Einrichtung in unverrückbarer Lage mit dem festen Theil des Stativs excentrisch verbunden, in der Art, dass seine optische Axe senkrecht zur Drehungsaxe des [11] Theilkreises steht, so wird eine Drehung des Kreises das Prisma successive in die oben in's Auge gefassten Lagen bringen. Es werden bei einer solchen Drehung der Reihe nach zwei Spiegelbilder des Spaltes und ebenso zwei Spectra durch das Gesichtsfeld des Oculars hindurch passiren. Zur Kenntniss des Winkels α und des einer bestimmten Farbe entsprechenden Werthes von β wird man demnach gelangen, indem man der Reihe nach die beiden Spiegelbilder und die betreffende Farbe eines der beiden Spectra genau auf die im Sehfeld sichtbare Fortsetzung des Spaltes einstellt, wobei man natürlich die FRAUNHOFER'schen Linien oder die hellen Linien eines Metall- oder Gasspectrums zur Fixirung bestimmter Farben benutzen wird.

Die Ablesung des Theilkreises für jede der drei Stellungen ergibt nun ohne Weiteres die gesuchten Winkel α und β , mit deren Hilfe der Brechungsindex für die fragliche Farbe durch die einfache Rechnung

$$n = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

gefunden wird. — Das Vorbeiführen des Spectrums vor den Spaltschneiden durch allmähiges Weiterdrehen und das successive Einstellen auf zwei oder mehrere Stellen gibt in unmittelbarem Anschluss an eine derartige Bestimmung auch die Data für die Dispersion, d. h. für die Differenz der Brechungsexponenten zweier bestimmten Farben; wobei es gleichgültig bleibt, in welcher Weise diese Angaben erhalten und zur Berechnung jener Differenz verwandt werden mögen.

Die Vergleichung der vorstehend entwickelten Beobachtungsweise mit der von FRAUNHOFER erfundenen lässt sogleich erkennen, dass alle maassgebenden Bedingungen bei beiden übereinstimmend werden, wenn statt des Prismas mit senkrecht reflectirtem Strahl ein solches von doppelt so grossem Winkel mit durchgehendem Strahl in der Stellung der Minimalablenkung gesetzt wird. Beide Combinationen stellen Gleichheit des Eintritts- und des Austrittswinkels her und unter der gemachten Annahme ist

auch die Grösse dieses Winkels bei beiden dieselbe. Während aber bei der FRAUNHOFER'schen Anordnung die Gleichheit beider Winkel nur indirect, nämlich durch das Kriterium der Minimalablenkung herbeigeführt werden kann, wird dieselbe hier direct durch die Coincidenz des rückkehrenden Strahls mit dem eintretenden erhalten. — Dass auch die Winkelausbreitung des Spectrums bei beiden Combinationen gleiche Grösse hat, wenn dem hier betrachteten Prisma mit [12] dem Winkel α ein solches mit dem Winkel 2α für durchgehende Strahlen substituirt wird, kann eben so leicht nachgewiesen werden.

2. Beschreibung des Spectrometers.

Das Vorstehende gibt das Schema, nach welchem die wesentlichen Theile des Apparates sich anordnen, und zugleich die Grundzüge des Beobachtungsverfahrens. Zu erörtern bleibt, ausser den Einzelheiten der technischen Ausführung, Einrichtung und Gebrauch etlicher Hilfsapparate, welche theils zur sichern und bequemen Orientirung der verschiedenen Theile, namentlich des Prismas nöthig sind, theils zur Erreichung grösserer Schärfe, zumal für die Dispensionsmessung, dienen. Alles dies verbindet sich am Einfachsten mit der Beschreibung eines wirklich ausgeführten Instruments, welche denn unter Beihilfe der nach einer Photographie gezeichneten Abbildung (auf der Tafel) hier zunächst folgen mag.

Ein gusseiserner Dreifuss A trägt, wie bei jedem Theodolith, die Büchse, in welcher der Verticalzapfen eines (scheibenförmigen) Theilkreises B sich dreht und, mit dieser Büchse verbunden, ein T-förmiges Metallstück C , auf dessen beiden einander gegenüberstehenden Armen die Nonien f befestigt sind, während an das Ende des dritten ein nach oben gabelförmiger Träger D senkrecht angeschraubt ist. In diesem hängt zwischen zwei starken Schraubenspitzen, e , die durch Gegenmutter festgestellt werden können, das Collimator-Fernrohr J . Es wird in horizontaler Lage gehalten durch einen nach unten gehenden Arm K , dessen Ende mittelst einer Regulirschraube d gegen die Vorderfläche des Trägers D sich stützt. Der geränderte Kopf der Regulirschraube steht, der Hand des Beobachters leicht zugänglich, frei vor und macht es bequem, während des Durchsehens die Neigung des Rohrs zu verändern, während eine Zugschraube e die Stellung nach vollbrachter Regulirung auch vollständig zu fixiren erlaubt. Diese Befestigungs-



weise hat sich als ebenso sicher wie bequem erwiesen. Selbst wenn das Rohr zum Zwecke leichterer Verpackung des Instruments nach dem Gebrauch abgenommen und später wieder eingehängt wird, stellt sich die richtige Lage der Axe so genau, als für die Messungen überhaupt nöthig ist, von selbst wieder her, wenn man die Vorsicht gebraucht, die Regulirschraube inzwischen nicht zu verstellen.

Was das Collimator-Fernrohr anlangt, so ist bei Ausführung der oben im Allgemeinen erörterten Einrichtung darauf Bedacht genommen, das Gesichtsfeld des Oculars möglichst frei zu halten, [13] damit das Auffinden der Bilder vor der vollkommenen Regulierung von Beobachtungsrohr und Prisma nicht erschwert werde. Es ist deshalb das Diaphragma im Focus des Objectivs wie bei einem gewöhnlichen Fernrohr kreisförmig ausgeschnitten (Tafel, Fig. 2) und die Backen des Spaltes sind durch ziemlich schmale Stahlstreifen *k* dargestellt, welche von beiden Seiten in diese kreisförmige Oeffnung hineinragen und, in der Mitte mit genau gerichteten Schneiden zusammenstossend, den Spalt bilden. Die eine Backe ist fest, die andere zwischen Coullissen verschiebbar in die Diaphragmaplatte eingelassen, so dass die eine Schneide mittelst Schraube (*b*) und Feder (*l*) der andern beliebig genähert werden kann. — Dabei ist der Spalt so justirt, dass der vom Prisma beleuchtete und dadurch dem Ocular verdeckte Theil, der als Lichtquelle wirksam wird, möglichst genau in der Mitte des Diaphragma's, also in der Axe des Rohrs endet; die Schneiden aber sind über die Mitte hinaus verlängert und bilden oberhalb einer kleinen kreisförmigen Ausbohrung — wie die Zeichnung erkennen lässt — einen ganz kurzen, im Ocular sichtbaren Spalt, welcher zur Einstellung des Bildes dient. Er soll die genaue Fortsetzung der unteren Schneiden repräsentiren, was bei einiger Sorgfalt in aller Schärfe ausführbar ist. Bei dieser Einrichtung bleibt nicht nur die obere Hälfte der Focalebene, sondern auch der grössere Theil der unteren der Beobachtung frei zugänglich; nur ein schmaler horizontaler Streifen unterhalb der Mitte wird durch die Backen des Spaltes verdeckt. Um aber bei den Operationen zur Orientierung des Instruments ein Bild auch dann nicht zu verfehlen, wenn es gerade in der Höhe dieses Streifens in das Gesichtsfeld treten sollte, so ist in der beweglichen Backe eine kreisförmige Durchbohrung angebracht, durch welche hindurch es wenigstens im Vorbeipassiren bemerkt werden muss. — Um die Beleuchtung des

unter der Axe liegenden Spaltes zu bewirken, ohne störendes Licht in das Sehfeld einzulassen, ist das hinter den Spalt gestellte niedrige Reflexionsprisma *m* durch ein parallelepipedisches Glasstück, mit dem es ein Ganzes ausmacht, verlängert, wodurch die Kathetenfläche, durch welche die seitlich einfallenden Lichtstrahlen eintreten sollen, ganz an den Rand der Diaphragmaplatte rückt. Auf diese Weise verschliesst sie die ihr dicht gegenüber in der Wand der Ocularhülse angebrachte Oeffnung; und wenn die übrigen Seitenflächen des Glasstücks mit schwarzem Lack überzogen sind, die Hypotenusenfläche aber durch ein Metallplättchen verdeckt ist, bleibt das Sehfeld selbst vollkommen dunkel.

[14] Die Diaphragmaplatte bildet, um ihr den zur Befestigung der S'GRAVESAND'schen Schneiden erforderlichen Durchmesser geben zu können, den Deckel einer flachen Trommel, auf deren cylindrisch abgedrehten Rand die das Ocular tragende Messinghülse aufgeschoben wird. Die Schraube *b* zur Regulierung des Spaltes bleibt ausserhalb derselben der Hand des Beobachters zugänglich. Das Ganze, Trommel mit Spalt und Ocular, bildet den Kopf eines Auszugs am Collimatorrohr, durch dessen Verschiebung die Einstellung des Spaltes in den Brennpunkt des Objectivs bewirkt werden kann.

Mit dem Theilkreis des Instruments ist an dem hier beschriebenen, für genauere Messungen bestimmten Exemplar ein kleinerer Hilfskreis *E* ohne Theilung, zur Repetition der Winkel, verbunden. Zu dem Zwecke trägt die stählerne Drehungsaxe des Theilkreises einen zweiten kürzeren Conus über der Fläche des Kreises hervorstehend. Auf ihm ist der Kreis *E* mittelst conischer Büchse aufgesteckt, so dass er sich unabhängig vom Hauptkreis um die gemeinsame Axe drehen, aber auch nach Bedürfniss durch eine Klemme mit Feinschraube fest mit jenem verbinden lässt¹⁾.

Auf diesen Hilfskreis ist hier — in derselben Weise, wie es bei kleineren Instrumenten unter Wegfall der Repetitionsvorrichtung unmittelbar auf dem Hauptkreis geschehen könnte — die Vorrichtung aufgesetzt, welche zur Aufnahme und zur Regulierung der Prismen dient. — Ihre Construction weicht wesentlich ab von dem sonst üblichen Tischchen mit Schraubenfüssen. In geringer Höhe über der ebenen Fläche des Kreises liegt zunächst, dieser parallel, eine Metallplatte *F* in Form eines gleichseitigen Dreiecks,

1) Die Klemmvorrichtung ist der Deutlichkeit wegen in der Zeichnung fortgelassen.



deren eine Seite zwischen zwei Schraubenspitzen a wie in einem Charnier sich dreht, während in der Nähe der gegenüberstehenden Ecke eine Schraube b mit gerändertem Kopfe einen stellbaren Fuss bildet. Durch eine federnde Platte — unter dem Kopf einer durch das Dreieck hindurchgeführten Zugschraube — wird dieser Fuss fest gegen die Kreisfläche angedrückt, wobei für die Bewegung der Fusschraube noch hinreichender Spielraum bleibt. Auf dieser dreieckigen Platte erhebt sich nahezu über der Mitte des Theilkreises ein senkrechter Ständer G und trägt in einer cylindrischen Hülse von ca. 6 Cm. Weite eine ringförmige Scheibe H von ca. 10 Cm. äusserem Durchmesser, welche sich unter mässiger [15] Reibung, aber ohne Spielraum in jener Hülse rund umdrehen lässt. Die äussere ebene Fläche dieses Ringes liegt parallel dem Charnier der Grundplatte und sehr nahe in der Axe des Theilkreises, während die Visirlinie des Beobachtungsrohrs durch seinen Mittelpunkt geht.

Der bequemen Drehung wegen ist der äussere Umfang des Ringes H gerändert, seine Fläche aber trägt nahe am Rand zwei Klemmfedern, so wie solche beim Mikroskop zum Festhalten der Objecte im Gebrauch sind, mit deren Hilfe das zu untersuchende Prisma, angekittet an eine geschwärzte runde Messingscheibe von 2—3 Mm. Dicke und etwa 9 Cm. Durchmesser, auf dem Ring befestigt wird. Die an der Messingscheibe anliegende Fläche des Prisma's bleibt dabei durch eine centrale Oeffnung von passender Grösse in jener Scheibe zugänglich.

Als letzter Bestandtheil des Instruments bleibt noch die einfache Mikrometervorrichtung zu beschreiben, welche dazu dienen soll, kleine Winkeldifferenzen unabhängig vom Theilkreis, und zwar genauer zu messen, als es die Ablesung der Kreistheilung erlauben würde. Um eine solche herzustellen, ohne dem Instrument Theile zufügen zu müssen, die ausserdem entbehrlich wären, ist die auf alle Fälle erforderliche Vorrichtung zur Feststellung und feinen Bewegung des Kreises in einer Form ausgeführt, welche erlaubt, die Schraube zur feinen Bewegung zugleich zur Messung dieser Bewegung zu verwenden. Zu dem Ende ist die Drehungsaxe unmittelbar unter der Scheibe des Theilkreises auf die Länge von 10—15 Mm. cylindrisch abgedreht und zwischen Kreis und Büchse ein massiver Ring eingelegt, der mittelst eines in seine Wand eingefügten Keiles und einer diesen bewegenden Druckschraube fest an die Axe angeklemt werden kann. Von diesem Ring geht,

von der Scheibe des Theilkreises bedeckt, ein hinreichend steifer Arm h in radialer Richtung ab und tritt mit sammt der unter ihm hinlaufenden verlängerten Spindel jener Druckschraube durch einen Ausschnitt im Träger D hindurch, vor dessen vorderer Wand er endet, während der geränderte Kopf g der Schraube einige Cm. weiter vorsteht.

Eine sorgfältig geschnittene Mikrometerschraube i , deren Mutter an dem Träger D seitlich vom Ausschnitt befestigt ist, schiebt einen stählernen Anschlag am Ende des Armes h vor sich her, während dieser durch eine kräftige Feder ihr entgegengedrückt wird. — Die Bewegung, welche die Mikrometerschraube dem Theilkreis mittheilt, wenn der Arm h durch Anziehen des Schraubenkopfes [16] g an die Axe angeklemt ist, wird in der bekannten Weise mittelst einer getheilten Trommel gemessen, deren scharfer Rand zugleich zum Abzählen der ganzen Umdrehungen an einer kleinen auf dem feststehenden Index angebrachten Theilung dient.

3. Justirung des Spectrometers.

Was den Gebrauch des im Vorstehenden beschriebenen Instrumentes anlangt, so mögen zunächst die Operationen betrachtet werden, welche zur Vorbereitung der eigentlichen Messungen erforderlich sind. Als solche kommen ausschliesslich in Frage:

- 1) die Justirung des Collimator-Fernrohrs, in Hinsicht auf die Stellung des Spaltes und die Richtung der Axe;
- 2) die Orientirung des Prisma's; und — wenn man die, ein für alle mal auszuführende Ermittlung einer constanten Reductionszahl zu diesen Operationen rechnen will,
- 3) die Bestimmung des Winkelwerthes eines Umgangs der Mikrometerschraube.

Was die Justirung des Rohrs anlangt, so wird der erste Schritt darauf zu richten sein, die S'GRAVESAND'schen Schneiden in dem Diaphragma des Ocularauszugs genau in den Focus des Objectivs zu bringen. Dies geschieht am zweckmässigsten, indem man irgend eine gut geschliffene Planfläche (etwa an einem Prisma) auf das Instrument bringt und das von ihr entworfene Bild des Spaltes aufsucht. Da eine Abweichung der Lichtquelle vom Brennpunkt des Objectivs eine gleich grosse des Bildes in entgegengesetzter Richtung nach sich zieht, die Längenabweichung zwischen Spalt und Bild also doppelt so gross wird, so gibt das Erscheinen



eines scharf begrenzten Bildes, welches zwischen die Schneiden eingestellt, keine Parallaxe zeigt, ein sehr empfindliches Kennzeichen für den richtigen Ort des Spaltes. — Natürlich wird man bei dieser Operation letztern hinreichend intensiv beleuchten, aber zugleich auch darauf Bedacht nehmen, dass das ganze Objectiv wirksam ist. Deshalb eignet sich hierzu directes Sonnenlicht nicht, weil bei dem geringen Winkeldurchmesser der Sonne nur sehr enge Strahlenkegel vom Spalt zum Objectiv gelangen, wohl aber eine helle Wolke oder eine, nahe am Instrument stehende Lichtflamme.

Den Auszug des Fernrohrs beim Befestigen von Zahn und Trieb so zu reguliren, dass der Spalt senkrecht zur Ebene des Theilkreises zu stehen kommt, ist füglich Sache des Mechanikers [17] und hat für diesen auch keinerlei Schwierigkeit. Aus nahe liegenden Gründen braucht diese Anforderung nur annähernd erfüllt zu sein.

Die Einstellung der Axe des Collimator-Fernrohrs senkrecht zur Drehungsaxe des Instruments wird sehr einfach mittelst einer planparallelen Platte ausgeführt, die man auf den Ring *H* des Prismenträgers aufbringt. Angenommen zunächst, die Platte sei schon der Drehungsaxe parallel oder zum Theilkreis senkrecht, so würden die Bilder, welche beide Flächen bei Umdrehung des Kreises um 180° geben, jedenfalls in derselben Höhe durch das Gesichtsfeld passiren, wofür das Rohr nur so steht, dass sie überhaupt innerhalb desselben auftreten. Man brauchte alsdann nur durch Drehung der Schraube *d* das Rohr so weit zu neigen, dass jene Bilder, wenn sie in die Mitte des Gesichtsfeldes gebracht werden, gerade die Fortsetzung des verdeckten Theils vom Spalt bilden, ihr unteres Ende also innerhalb der kreisförmigen Oeffnung knapp den Rand dieser berührt. Steht aber — wie in diesem Stadium der Regulirung anzunehmen — die Planplatte der Drehungsaxe nicht parallel, so bilden die von der einen Fläche reflectirten Strahlen mit den von der andern reflectirten einen Winkel, der gleich dem doppelten Betrag jener Neigung ist; und es erscheinen demnach die von beiden Flächen entworfenen Spiegelbilder in ungleicher Höhe im Gesichtsfeld des Oculars. Man wird nun zunächst die Platte justiren, indem man durch Drehen der Fusschraube *b* das eine Bild dem andern um den halben Abstand entgegenführt; wonach dann das Fernrohr wie angegeben berichtigt wird. — Selbst bei einem vollständig derangirten In-

strument wird es nach einigen Versuchen gelingen, zunächst ein Bild in das Gesichtsfeld zu bringen, um dann durch weiteres Probiren mittelst der beiden Schrauben auch das von der andern Seite der Platte zu erhalten; sind aber beide erst sichtbar, so ist das Weitere Sache weniger Handgriffe, die schnell und sicher sich ausführen lassen.

Die hierbei gemachte Voraussetzung einer parallellöchigen Platte braucht in Wirklichkeit keineswegs erfüllt zu sein. Vielmehr kann jedes beliebige Stück Spiegelglas dieselben Dienste thun, selbst wenn es nur unvollkommene Bilder gewährt. Denn die kleine Abweichung beider Flächen vom Parallelismus, die immer nur wenige Minuten beträgt, kann unschädlich gemacht werden, wenn man die Kante des Keiles, den eine solche Platte repräsentirt, zur Ebene des Theilkreises senkrecht stellt. Dazu aber [18] bietet die Beobachtung selbst die Hand. Denn jede Seite der Platte gibt in diesem Falle zwei Bilder des Spaltes — das eine durch directe Spiegelung an der vorderen Fläche, ein anderes durch Reflexion der in das Glas eingetretenen Strahlen an der Hinterfläche, letzteres ganz dem Spectralbild eines Prisma's entsprechend. In Folge des kleinen brechenden Winkels treten beide gleichzeitig im Gesichtsfeld auf, meistens sehr nahe neben oder übereinander, je nach der Stellung des Keiles. Dreht man nun, ein solches Doppelbild im Auge behaltend, den Ring des Prismenträgers, bis beide Bilder gleich hoch neben einander stehen, so hat der Keil die verlangte Lage, und man kann nun diese Doppelbilder genau so wie die einfachen einer Parallelplatte zur Regulirung verwenden.

Die Justirung eines Prisma's fordert den Parallelismus seiner beiden Flächen mit der Drehungsaxe des Kreises, damit der Hauptschnitt des Prisma's der Ebene der Kreistheilung parallel sei und die Visirlinie des Collimator-Fernrohrs in sich enthalte. Sofern man immer die letztere als schon berichtigt, d. h. zur Drehungsaxe senkrecht gestellt annimmt, wird das Kennzeichen für die richtige Orientirung des Prisma's, dass durch Drehung des Kreises beide Flächen nach einander senkrecht auf die Visirlinie sich stellen lassen und dass also die von ihnen entworfenen Spiegelbilder, wenn sie in die Mitte des Sehfeldes kommen, genau die Fortsetzung des Spaltes bilden. — Die oben beschriebene Einrichtung des Prismenträgers gewährt nun nicht nur den Vortheil, Prismen jeder Grösse und Form, Krystalle, Bruchstücke von unregelmässiger Gestalt,



ohne alle Vorbereitungen am Apparat anbringen zu können, da man sie nur mit etwas weichem Wachs oder dergl. an eine Scheibe mit passendem centralen Ausschnitt anzudrücken und diese Scheibe an den drehbaren Ring anzuklemmen hat, sondern sie macht auch die in Rede stehende Regulirung sehr viel leichter ausführbar, als es mit dem sonst üblichen Tischchen zumal dann der Fall ist, wenn nicht eine gut justirte Grundfläche die Stellung des Prisma's von Anfang an nahezu richtig macht. Wird nämlich das zu untersuchende Stück mit einer der wirksamen Flächen auf die ausgeschnittene Scheibe und sammt dieser auf den Ring des Prismenträgers gebracht, so kann die in der Ringebene liegende Fläche ausschliesslich durch Bewegung der Fusseschraube δ die richtige Stellung erhalten. — Wie nun auch die zweite Fläche dabei stehen mag, jedenfalls reicht jetzt die Drehung des Ringes hin, auch sie zu reguliren, ohne die erste wieder zu verändern, da ja deren Normale mit der Axe des Ringes zusammenfällt. Man wird, von [19] einer nach Augenmaass gewählten Stellung ausgehend, den Ring mit der einen Hand langsam und stetig fort-drehen, während das Auge durch das Fernrohr sieht und die andere Hand den Theilkreis oder den Hilfskreis hin und her bewegt, bis das Spiegelbild im Gesichtsfeld aufblitzt. Jetzt wird man den Theilkreis stehen lassen und, das Spiegelbild im Auge behaltend, durch eine letzte kleine Drehung des Ringes die Justirung rasch und sicher vollenden. — Auf diese Art erhält man die richtige Stellung des Prisma's durch zwei von einander unabhängige Schritte, von denen jeder einen Theil der Regulirung sogleich definitiv vollzieht; und jeder macht zu dem nur einen einzigen Handgriff nöthig, der während der Beobachtung der Bilder am Fernrohr in aller Bequemlichkeit ausführbar ist.

Für gewöhnlich indess, d. h. beim wiederholten Gebrauch eines schon regulirten Instruments, wird jenes Geschäft noch weiter vereinfacht, wenn man beim Befestigen des Prisma's an einer der ausgeschnittenen runden Scheiben auf ein gleichmässiges Anliegen der befestigten Fläche Bedacht nimmt. Ist alsdann die Ringebene einmal der Drehungsaxe des Kreises parallel gerichtet, so wird die an sie angelegte Fläche des Prisma's immer von selbst regulirt sein, höchstens einer ganz geringen Nachhilfe noch bedürfen. Die ganze Vorbereitung, die nach dem Aufbringen des Prisma's nöthig ist, reducirt sich also auf die Drehung des geränderten Ringes.

Uebrigens ist, in Hinsicht auf diese verschiedenen Berichtigungen im Allgemeinen, zu bemerken, dass für ihre Ausführung auch bei den höchsten Ansprüchen an die Genauigkeit der Messungen nur eine vergleichsweise geringe Schärfe beansprucht wird. Denn die Fehler, welche durch Abweichungen der Visirlinie oder der Prismenflächen in die am Theilkreis gemessenen Winkel gebracht werden, sind, wie man sich leicht überzeugt, sämmtlich von der Ordnung des Quadrats jener Abweichungen. Betrüge der Fehler der Visirlinie oder die Neigung des Hauptschnittes selbst einen halben Grad, so würde der daraus entspringende Fehler im ungünstigsten Falle doch nur wenige Bogensekunden ausmachen, also selbst bei einem fein getheilten Kreise kaum aus den Grenzen der Ablesungsfehler heraustreten. In Anbetracht dieser geringen Empfindlichkeit erscheint es nicht nur ganz unverfänglich, dass bei der hier angegebenen Construction des Collimator-Fernrohrs die optische Axe der Höhe nach nicht sehr scharf im Gesichtsfeld markirt ist, sondern man wird sich sogar der vollständigen Ausgleichung kleiner Höhenabweichungen ganz entschlagen dürfen. [20] Wenn — wie bei dieser Einrichtung der Fall — die ganze Höhe des Spaltbildes oder die ganze Breite des Spectrums, wegen der geringen Länge des Spaltes, kaum $\frac{1}{2}^\circ$ beträgt, so wird die Regulirung hinreichend genau sein, wenn die verschiedenen Bilder überhaupt nur zwischen die sichtbaren Schneiden treten, so dass ihre Einstellung möglich wird, auch wenn dabei das eine etwas höher, das andere etwas tiefer liegt.

Grösseres Gewicht dagegen ist auf die genaue Justirung des Focus zu legen, weil schon eine kleine Abweichung der Spaltenebene von ihm, abgesehen von der geringeren Deutlichkeit der Bilder, Anlass zu parallaktischen Fehlern gibt, zumal dann, wenn in Folge zufälliger Aenderungen in der Beleuchtung abwechselnd andere Theile der Objectivöffnung in Wirksamkeit treten.

Die Ermittlung der Reductionsconstante für die mikrometrischen Bestimmungen setzt Nichts weiter voraus, als dass man irgend einen Winkel, dessen Grösse anderweitig genau bekannt ist und in den Grenzen des Mikrometers liegt, mittelst der Schraube ausmisst und aus der Vergleichung beider Aufgaben den Winkelwerth eines Trommelumgangs ableitet.

Die Data für eine solche Vergleichung können selbstverständlich ohne Weiteres durch den Theilkreis selbst erlangt werden, wenn man an diesem unmittelbar den Winkel abliest, um welchen



der Kreis durch eine gewisse Anzahl Umdrehungen der Schraube fortbewegt wird. Wiederholt man diesen Versuch, den ganzen Spielraum der Mikrometerschraube benutzend, hinreichend oft, so wird das Mittel die Reductionsconstante schon so genau ergeben, dass die Unsicherheit der Mikrometermessung bei kleineren Winkeln, die nur einen Bruchtheil des ganzen Spielraums betragen, auf einen geringen Theil von der Unsicherheit der Kreisablesung reducirt ist. Auf bequemere Weise und mit noch grösserer Sicherheit lässt sich die fragliche Bestimmung indess ausführen, wenn das Instrument eine Vorrichtung zur Repetition der Winkel besitzt. Man befestigt alsdann zwei kleine Stücke gut geschliffenen Spiegelglases, deren eine Seite mit schwarzem Lack überzogen ist, mit Hilfe eines haltbaren Kittes dicht neben einander auf einer Glasplatte in der Art, dass die spiegelnden Flächen einen kleinen Winkel, etwa dem Umfang der Mikrometerschraube entsprechend, unter einander einschliessen. Diesen Winkel misst man nach demselben Verfahren wie den Winkel eines Prismas, aber unter vielmaliger Repetition, mittelst des Theilkreises aus, so dass man seinen Werth bis auf einen kleinen Bruchtheil des Ablesungsfehlers [21] sicher erhält. Hierauf wiederholt man die Messung mehrere Male mit der Mikrometerschraube. Die Vergleichung beider Resultate gibt den Werth des Schraubenumganges in jeder nur irgend wünschenswerthen Genauigkeit, abgesehen natürlich von etwaigen Fehlern der Schraube und von denjenigen Differenzen, die bei grösseren Winkeln aus dem Mangel vollständiger Proportionalität zwischen Winkel und Schraubenbewegung entspringen¹⁾.

4. Das Verfahren bei der Messung.

In Bezug auf die Ausführung der Messungen bleibt, sofern zunächst nur die Beobachtungen an festen Prismen in Rede stehen, kaum etwas Weiteres zu erörtern übrig als einige Vorsichtsmaassregeln und einige zur Erleichterung der Arbeit nützliche Handgriffe.

1) Eine kleine Erleichterung bei der Reduction der Mikrometerangaben erzielt man, wenn der Schraubenumgang nahezu eine ganze Anzahl Minuten beträgt, etwa 6 oder 10; was sich ohne alle Schwierigkeit ausführen lässt. Die Theilung der Trommel wird dann so eingerichtet, dass die Ablesung unmittelbar auf Minuten und Secunden lautet, die unvermeidliche kleine Abweichung aber wird durch eine Correction an den abgelesenen Zahlen berücksichtigt.

Wenn das Collimator-Fernrohr und das Prisma nach dem beschriebenen Verfahren regulirt sind, so werden bei Drehung des Theilkreises nicht nur die Spiegelbilder von beiden Flächen, sondern auch zwei Spectra in der richtigen Höhe durch das Gesichtsfeld des Oculars hindurch passiren. Zu einer vollständigen Bestimmung des Brechungsexponenten gehört aber ausser der Einstellung auf die Spiegelbilder nur die auf eines der Spectra; und es würde für die Messung durchaus gleichgiltig sein, welches man wählt, sofern das Prisma sehr vollkommen plane Flächen besitzt. Wenn dies aber nicht der Fall sein sollte — und man wird immer wohl thun in dieser Beziehung nicht zu viel voraus zu setzen — kann ein merklicher Fehler daraus entspringen, dass bei den verschiedenen Stellungen, in welche das Prisma durch die Drehung geführt wird, andere Punkte seiner Flächen in die Verlängerung der Fernrohraxe fallen und daher für das Zustandekommen des Spectralbildes nicht genau diejenigen Flächentheile wirksam sind, an welchen der brechende Winkel gemessen wird. Diese Fehlerquelle, deren Vorhandensein sich auch bei sonst ganz brauchbaren Prismen oft genug constatiren lässt, und welche bei anderen Spectrometern nur schwer ausgeschlossen werden kann, ist mit dem hier angewandten Beobachtungsverfahren ohne Weiteres beseitigt, [22] wenn eine Fläche des Prismas nahehin in die Drehungsaxe gebracht und nur das Spectralbild von der Seite dieser centrirten Fläche benutzt wird. Denn eine einfache Ueberlegung zeigt, dass dann — und auch nur dann — die Fernrohraxe, also die Mittellinie des wirksamen Strahlenbündels, bei der Einstellung der zwei Spiegelbilder die Prismenflächen in denselben Punkten trifft, welche bei der Einstellung auf das bezeichnete Spectralbild die Mitten der wirksamen Flächentheile bilden.

Bei der oben beschriebenen Construction des Prismenträgers ist diese Maassregel darin vorgesehen, dass die Ebene des Ringes in die Drehungsaxe des Kreises gelegt ist. Es wird dabei vorausgesetzt, dass man das Prisma dem Innern des Ringes zugekehrt aufbringt, der Art also, dass die in die Ringebene fallende Fläche nach der Seite der Fusschraube b hin frei liegt, weil nur in diesem Falle auch bei grösserem Brechungswinkel und dadurch bedingter sehr schiefer Incidenz die Beobachtung doch nie durch die dicke Wand des Ringes behindert sein wird.

Die eben erwähnte Vorsichtsmaassregel, welche nie ausser Acht bleiben darf, wenn es sich um grosse Genauigkeit der Mes-



sungen handelt, lässt bei Beobachtungen mit directem Sonnenlicht noch eine kleine Ergänzung zu, um zu verhindern, dass nach einander andere Theile des Fernrohrobjectivs in Wirksamkeit treten und dadurch die erwähnte Fehlerquelle, freilich in sehr viel geringerem Spielraum, wieder eröffnet werde. Führt man nämlich dem Spalt durch Vermittelung des Reflexionsprisma's und irgend anderer ebener Spiegel Sonnenlicht zu, so geht von jedem Punkte des Spaltes ein Strahlenkegel von nur $1\frac{1}{2}^\circ$ Winkelöffnung aus. Da aber das Fernrohrobjectiv doch immer 4—5 Grad Oeffnungswinkel haben wird, so nimmt dieser Strahlenkegel nur einen kleinen Theil der Objectivöffnung, und damit auch nur einen kleinen Theil des ihr entsprechenden Umfangs der Prismenflächen in Anspruch; und zwar immer andere Theile, wenn die Einfallsrichtung der Strahlen um ein Weniges wechselt. Einen solchen Wechsel, der sich direct kaum verhindern oder auch nur controliren lässt, auszuschliessen oder doch auf beliebig enge Grenzen einzuschränken, genügt das einfache Mittel, ein für alle mal einen bestimmten Theil der Objectivöffnung durch eine Blendung abzugrenzen; und man erreicht hierdurch, wenn man diese Begrenzung nicht aussen vor dem Objectiv, sondern durch ein geschwärztes Diaphragma im Innern des Rohrs bewirkt, noch den weitern Gewinn, störende Reflexe von den Flächen des Objectivs verhindern zu können, welche sonst [23] beim Arbeiten mit Sonnenlicht die Beobachtung der lichtschwachen Theile eines Spectrums leicht beeinträchtigen. Die für Sonnenlicht freibleibende Oeffnung kann in dieser Art ohne irgend eine Verminderung der Lichtstärke recht wohl auf weniger als den vierten Theil des Durchmessers reducirt werden, da ja unter allen Umständen doch nur ein noch kleinerer Theil des Objectivs thatsächlich wirksam ist; nur wird es natürlich etwas schwieriger, die volle Beleuchtung fest zu halten, wenn sich die Einfallsrichtung der Strahlen ändert. Unter Beobachtung dieser Cautelen reicht selbst zu genauen Messungen schon ein kleines Prisma von geringer Vollkommenheit aus, sofern sich an ihm nur einander correspondirende hinreichend plane Stellen von $\frac{1}{2}$ bis 1 Quadratcentimeter Fläche finden.

Für die Beobachtung ist in den meisten Fällen eine weitere Zurichtung der Prismen nicht erforderlich. Nur wenn es darauf ankommt, die Untersuchung der Dispersion auch auf die lichtschwachen Theile des Sonnenspectrums oder auf die feineren und schwieriger erkennbaren FRAUNHOFER'schen Linien auszudehnen,

wird es nöthig, die Reflexion an der hintern Fläche durch eine Metallbelegung zu unterstützen, die sich mittelst Zinnfolie und Quecksilber leicht herstellen lässt¹⁾. Man kann diese Belegung vor der Messung des brechenden Winkels schon bewirken, muss in diesem Falle aber — um nicht die Beobachtung des einen Spiegelbildes unmöglich zu machen — einen Theil der Glasfläche frei lassen.

Für die Beleuchtung des Spaltes genügt bei allen Beobachtungen, die nicht der scharfen Fixirung einzelner Farben bedürfen, das Licht einer seitlich vom Ocular aufgestellten Lichtflamme oder das diffuse Tageslicht, welches man von einer weissen Fläche, oder mittelst eines Spiegels vom Wolkenhimmel auf den Spalt leitet. — Wie aber zum Zweck der übrigen Messungen BUNSEN'sche Flammen²⁾, der Inductionsfunke oder das Sonnenlicht zu verwenden [24] sind, braucht hier nicht erörtert zu werden, da die Verfahrungsweisen hier die nämlichen bleiben, wie bei der Benutzung jedes andern Spectralapparates. Nur darauf sei hingewiesen, dass die Regulirung und die Controle der Beleuchtung in allen Fällen am sichersten und einfachsten bewirkt wird, indem man durch das Objectiv des Collimator-Fernrohrs nach dem Spalte hinsieht und darauf achtet, dass er im ganzen Umfang der Objectivöffnung hell erleuchtet erscheine. In Bezug auf die Benutzung des Sonnenlichtes aber sei noch bemerkt, dass das Zusammenfallen von Collimator und Beobachtungsrohr bei dem beschriebenen Instrument einen selbstthätigen Heliostat leicht entbehrlich macht. Ein kleiner, in zwei Richtungen drehbarer Planspiegel, so wie er an Mikroskopen benutzt wird, auf einem passenden Stativ seitlich vom Ocular aufgestellt, so dass er der Hand des Beobachters zu steter Nachhilfe während der Beobachtung bequem zugänglich ist, reicht unter allen Umständen vollkommen aus, die Beleuchtung hinreichend constant zu erhalten, namentlich wenn man zur Unterstüzung an der gegenüberliegenden Wand die Stelle markirt, auf welche

1) Man führt diese Manipulation jeder Zeit in wenigen Augenblicken aus, indem man ein Streifen Stanniol auf einer ebenen Unterlage glatt streicht, ein paar Tropfen Quecksilber darüber giesst und nachdem das Oxydhäutchen abgestrichen ist, die gereinigte Gasfläche vom Rande aus langsam aufschiebt. Drückt man das Prisma dann mit dem Finger fest auf und streicht das anhängende Stanniol rund herum ab, so ist die Belegung fertig und zu augenblicklichem Gebrauch bereit.

2) Zur Messung des Brechungscoefficienten der dem FRAUNHOFER'schen *D* entsprechenden Strahlen reicht übrigens schon die mit Kochsalz gefärbte Spiritusflamme vollkommen aus.



der Schatten der Ocularhülse beim richtigen Einfall treffen muss. — Selbstverständlich wird man bei derartigen Beobachtungen nicht nur das Auge, sondern auch das Instrument durch geeignete Schirme gegen directes Licht schützen. — den Prismenträger am besten mit einer auf den Kreis gestellten cylindrischen Hülse aus geschwärzter Pappe, welche nur in der Höhe des Objectivs einen passenden Ausschnitt hat.

Wenn es sich darum handelt, die Messungen am Instrument zu vervielfältigen, um den Einfluss sowohl des Ablesungs- wie des Einstellungsfehlers zu vermindern, so bleibt ausser der einfachen Wiederholung der nämlichen Reihe von Einstellungen noch die Wiederholung in umgekehrter Lage des Prisma's zur Verfügung. Man dreht zu dem Zweck den Ring mit dem Prisma um 180° , wobei die in der Ringebeine liegende Fläche von selbst justirt bleibt, während die andere durch Einstellung des Spiegelbildes oder des Spectrums neu regulirt wird. Besitzt das Instrument indess den bei der Beschreibung erwähnten Hilfskreis, so wird die Vervielfältigung der Messungen am zweckmässigsten durch Repetition der Winkel α und β nach dem bei Theodolithen üblichen Repetitionsverfahren bewirkt, indem man nach Durchlaufen des betreffenden Winkels auf dem Hauptkreis diesen feststellt und das Prisma mittelst des Hilfskreises auf die anfängliche Stellung zurückführt, um hierauf dieselbe Drehung von Neuem mit dem Hauptkreise [25] wiederholen zu können. — Dasselbe Verfahren kann natürlich auch bei der mikrometrischen Messung verwandt werden, wenn der zu bestimmende Winkel so klein ist, dass ein Vielfaches von ihm in den Grenzen des Mikrometers bleibt.

5. Die Untersuchung von Flüssigkeiten im Hohlprisma.

Bei der Beobachtung einer Flüssigkeit, die in einem Hohlprisma eingeschlossen ist, bleibt das Verfahren in allen wesentlichen Stücken das nämliche wie bei Beobachtung fester Prismen. Zu erörtern ist daher nur die Einrichtung des zu verwendenden Hohlprisma's und die Ausführung einiger Hilfsmessungen, welche in diesem Falle, der unter Umständen erforderlichen Correctionen wegen, nöthig werden können.

Was das erste anlangt, so scheinen mir die Ansprüche, welche in Bezug auf Leichtigkeit der Füllung und des Verschlusses, Sparsamkeit im Substanzverbrauch, Bequemlichkeit der Reinigung und

Einfachheit der Application zu stellen sind, durch die folgende Einrichtung mit verhältnissmässig geringen Mitteln erfüllt. — Der Körper des Hohlprisma's ist ein keilförmiger Abschnitt von einer dickwandigen Glasröhre, die ca. 12 Mm. inneren und ca. 22 Mm. äusseren Durchmesser besitzt. Von den beiden gut plan geschliffenen und polirten Schnittflächen steht die eine senkrecht zur Axe der Röhre, während die andere gegen sie unter dem Winkel geneigt ist, den das Prisma haben soll ($24-27^\circ$). In die cylindrische Wand des Röhrenabschnittes sind an zwei gegenüberliegenden Stellen schmale Rinnen, parallel mit der zur Axe geneigten Grundfläche, eingeschliffen. Der Verschluss erfolgt durch zwei runde, 3—4 Mm. dicke und beiderseits vollkommen plane Crownglasplatten von ca. 30 Mm. Durchmesser. Von diesen ist die eine fest in eine geschwärzte Messingscheibe gefasst, wie zur Application der gewöhnlichen Prismen gebraucht wird. Auf die eine Fläche der anderen Platte werden an gegenüberliegenden Stellen nahe am Rande zwei schmale Glasleistchen aufge kittet, so dass die kreisförmige Basis des Prismenkörpers zwischen ihnen gerade Platz hat; ihre zweite Fläche wird mit einem 8—10 Mm. breiten Streifen Folie belegt.

Beim Zusammenfügen wird der keilförmige Körper des Prisma's mit seiner elliptischen Fläche auf die in der Metallscheibe befestigte Glasplatte aufgelegt und durch eine gabelförmige federnde Klammer, welche in die vorher erwähnten Rinnen in der äusseren [26] Wand eingreift und mittelst einer kleinen Schraube gegen die Messingscheibe angezogen werden kann, mit mässigem Druck angepresst. Hierauf füllt man den Hohlraum, während seine obere Oeffnung horizontal gehalten wird, mit der betreffenden Flüssigkeit so weit, bis ein flacher Meniscus übersteht, und schiebt endlich die zweite Planplatte vom dickeren Theile des Prisma's her vorsichtig auf. — Einer Befestigung dieser Deckplatte bedarf es nicht; bei gut geschliffenen und sorgfältig gereinigten Flächen bewirkt die Adhäsion einen vollkommen sichern Schluss, wofern nur das Herabgleiten der Platte — durch die ange kitteten Glasleistchen — verhindert ist.

Mit Hilfe der runden Scheibe wird das so hergerichtete Hohlprisma, dessen Zusammensetzung in Fig. 3 der Tafel skizzirt ist, genau in derselben Weise, wie für gewöhnliche Prismen beschrieben, am Spectrometer befestigt, so dass die folierte Deckplatte nach dem Innern des Ringes am Prismenträger zu liegen kommt. Auch die



Justirung der beiden äusseren Flächen so wie die Einstellung auf die Spiegelbilder des Spaltes und auf das Spectrum kehrt in derselben Form wieder. Nur für den Fall, dass die beiden Planplatten nicht vollkommen parallelförmig sind, bedarf es noch einiger Hilfsbestimmungen, um die wegen dieser Abweichung erforderlichen Correctionen ausführen zu können.

Unter der Voraussetzung, dass die Abweichung vom Parallelismus bei beiden Platten nur einige Bogenminuten beträgt, reicht es für jenen Zweck vollkommen aus, wenn nach Justirung der beiden äusseren Prismenflächen noch die Winkel bestimmt werden, welche die Normalen der beiden inneren Flächen, in der Projection auf die Ebene des Theilkreises, mit den Normalen jener äusseren Flächen einschliessen, weil alle Ablenkungen, welche in der Richtung senkrecht zur Ebene des Hauptschnittes eintreten, so lange dieselben klein sind, auf die Messung keinen Einfluss gewinnen. Die verlangten Winkel lassen sich bei der Beobachtung der Spiegelbilder der äusseren Flächen sehr leicht mit bestimmen, indem man auf die zwar lichtschwachen aber doch immer sichtbaren ¹⁾ Nebenbilder des Spaltes, welche die Reflexion an den Grenzflächen zwischen Glas und Flüssigkeit ergibt, beiläufig mit einstellt. Misst man mittelst des Mikrometers am Instrument den [27] Winkel v , um welchen je eines dieser Nebenbilder von dem ihm benachbarten Reflexbilde der äusseren Prismenfläche abliegt, so steht der gefundene Betrag zu dem gesuchten Winkel u , den die betreffende Platte vermöge ihrer Keilform in die Ebene des Theilkreises einführt, in der Beziehung

$$\sin v = v \sin u$$

wo v den Brechungsindex des angewandten Glases bedeutet. — Wegen der Kleinheit von u und v wird man aber ohne wahrnehmbaren Fehler, wofern Crownnglas vorliegt, $v = 1,5$ setzen und statt der Sinus die Winkel selbst verwenden dürfen, so dass also einfach

$$u = \frac{2}{3} \cdot v$$

das gesuchte Datum ergibt. — Nach welcher Seite aber die innere Fläche einer Platte gegen die äussere geneigt ist, ergibt sich so gleich, indem man auf die gegenseitige Lage der beiden zusammen-

¹⁾ Sollte aber der Brechungsindex der Flüssigkeit dem des Crownnglases so nahe liegen, dass diese Nebenbilder unsichtbar bleiben, so würde auch jede Correction unnötig sein.

gehörigen Spaltbilder im Gesichtsfelde des Beobachtungsrohrs achtet; und zwar gilt dabei die leicht abzuleitende kurze Regel: der dickere Rand der Platte liegt nach derjenigen Seite, nach welcher im Fernrohr das Nebenbild des Spaltes erscheint.

In dieser Weise sind die zur vollständigen Berechnung der Messungen erforderlichen Data jederzeit während der Messung selbst zu gewinnen. Da es indess keinerlei Schwierigkeiten findet, Platten von den hier in Rede stehenden Dimensionen bis auf wenige Bogensekunden genau parallelförmig herzustellen, so werden bei einem gut gearbeiteten Apparat derartige Hilfsbestimmungen überhaupt nicht vorkommen. Wo jedoch die Abweichungen nicht zu vernachlässigen sind, lässt sich die Ermittlung der Correctionsdata noch erheblich vereinfachen, wenn man die Winkel der Platten vor der Zusammensetzung des Hohlprisma's ein für alle mal bestimmt und Vorkehrungen trifft, dass die Abweichungen vom Parallelismus immer in derselben Weise zur Geltung kommen. Zu dem Zweck ist nichts weiter erforderlich, als dass an dem Körper des Prisma's und an jeder Platte derjenige Durchmesser, in welchem der Winkel liegt, sichtbar markirt werde, damit beim Zusammensetzen die Hauptschnitte der drei keilförmigen Stücke stets nahehin parallel gerichtet werden können. Wegen der immer voraussetzenden Kleinheit der Platten-Winkel ist alsdann jeder von ihnen stets mit seinem vollen Betrag als wirksam anzunehmen, selbst wenn die Hauptschnitte der Platten in Wirklichkeit um mehrere Grade von dem des Prisma's abweichen sollten.

[28] Die Neigung der Flächen einer keilförmigen Platte und die Lage des Keiles wird man natürlich am Spectrometer bestimmen. Man bringt die betreffende Platte ganz wie ein Glasprisma auf den Prismenträger, stellt auf das Reflexbild der vordern Fläche ein und dreht den Ring so weit, bis das daneben auftretende durch Reflexion an der hintern Fläche entstandene Spaltbild (welches bei grösserem brechenden Winkel offenbar als das Spectrum erscheinen würde) genau in gleicher Höhe im Gesichtsfeld auftritt. Derjenige Durchmesser der Platte, welcher jetzt der Ebene des Theilkreises parallel steht, entspricht der Richtung des Keiles. Der Neigungswinkel aber wird auch in diesem Falle wieder am leichtesten und genauesten erhalten, indem man den Winkel zwischen den beiden nebeneinander auftretenden Spaltbildern mikrometrisch misst und seinen Betrag durch den Brechungsindex des Crownnglases dividirt



Die hier beschriebene Construction des Hohlprisma's ist gegenüber den sonst gebräuchlichen Formen, was die Leichtigkeit der Herstellung und die Bequemlichkeit der Handhabung anlangt, entschieden im Vortheil, dagegen darin im Nachtheil, dass bei ihr die Temperatur der Flüssigkeit nicht durch ein in das Prisma selbst eingelassenes Thermometer bestimmt werden kann. Indess ist hierbei zu bedenken, dass genaue Temperaturmessung doch nur möglich ist, wenn die Temperatur an dem betreffenden Object stationär, also auch mit derjenigen der nächsten Umgebung gleich geworden ist. Alsdann aber braucht man auch keinen merklichen Fehler zu befürchten, wenn das Gefäss des Thermometers dicht neben dem Prisma innerhalb eines den ganzen Prismenträger überdeckenden Behälters — am besten aus Metall — angebracht wird.

Beiläufig sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass für Untersuchungen an Flüssigkeiten die hier zu Grund gelegte Beobachtungsweise noch andere Combinationen zulässt, welche in Hinsicht auf manche specielle Aufgaben erhebliche Vortheile darbieten würden. — Wenn es sich z. B. darum handelt, die Veränderung des Brechungsexponenten einer Flüssigkeit bei wechselnder Temperatur genau zu bestimmen, so würde es offenbar von grossem Nutzen sein, wenn alle zur Berechnung dieser Veränderung nöthigen Data, also sowohl der brechende Winkel des Prisma's wie auch die Ablenkung der Strahlen, in ihren Differenzen von einer Beobachtung zur andern, selbständig durch mikrometrische Messung erhalten werden könnten. In der That ist dies möglich, [29] wenn man ein Hohlprisma mit reflectirender hinterer Fläche so construirt, dass die gebrochenen und an der letzten Fläche reflectirten Strahlen nach ihrem Austritt nahehin in der Richtung der Normalen zur vordersten Fläche verlaufen, und wenn ausserdem eine andere spiegelnde Fläche, die dem Beobachtungsrohr gleichzeitig mit der Vorderfläche zugänglich ist und deren Normale ebenfalls jene Richtung hat, in unveränderliche Verbindung mit der Hinterfläche gebracht wird. Beiden Anforderungen kann offenbar genügt werden, wenn man die betreffende Flüssigkeit zwischen einer Planplatte und einem festen Prisma von angemessenem Winkel einschliesst, der Art, das letzteres dem Collimator-Fernrohr zugewandt ist, die äussere Fläche der Platte dagegen die spiegelnde Rückwand bildet. Auf dieser Platte aber müsste an der dem Fernrohr zugewandten Seite ein zweites Prisma, fest aufge kittet, so angebracht werden, dass seine freie Fläche

der Vorderfläche des andern nahehin parallel steht und neben ihr von einem Theile des Fernrohrobjectivs Strahlen empfängt. Es würden alsdann, nach gehöriger Justirung, in geringem Winkelabstand von einander drei Spaltbilder, zwei durch einfache Reflexion, das dritte durch Brechung und Reflexion erzeugt, sichtbar werden. Die mikrometrische Messung der Winkel zwischen ihnen würde die Veränderungen sowohl des brechenden Winkels der Flüssigkeit wie auch der an der Trennungsfäche von Glas und Flüssigkeit eintretenden Brechung ergeben, wenn durch vorausgehende Beobachtungen der Winkel zwischen der freien Fläche des Hilfsprisma's und der Rückwand der Platte so wie der Winkel des wirksamen Prisma's ein für alle mal bestimmt worden ist.

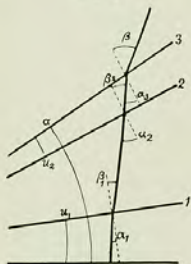
Ein derartig zusammengesetztes Flüssigkeitsprisma — dessen Herstellung keinerlei Schwierigkeiten bieten würde — könnte allerdings nicht ohne Weiteres in der oben beschriebenen Weise an dem Spectrometer angebracht werden. Indess würde auch gar kein Grund vorliegen, es mit einem Theilkreise zu verbinden, da die erforderlichen mikrometrischen Messungen in diesem Falle viel zweckmässiger mit einem beweglichen Fadenkreuz neben dem lichtgebenden Spalt im Collimator-Fernrohr auszuführen wären. Ein nach diesem Princip zu construirtes Variations- oder Differential-Spectrometer würde daher nur ein einfaches festes Gestell für die Prismencombination und ein davon unabhängig aufzustellendes Collimator-Fernrohr mit Ocular-Schraubenmikrometer nöthig machen. — Nach derselben Methode könnte übrigens auch die Temperaturvariation im Brechungsexponenten eines Glasprisma's [30] in grosser Genauigkeit ermittelt werden, wenn man auf die dem Fernrohr zugewandte Prismenfläche ein zweites kleineres Prisma von solchem Winkel befestigt, dass das von ihm herrührende Spiegelbild sich auf das gleichzeitig im Gesichtsfeld erscheinende Spectrum projicirt.

6. Die Berechnung der Messungsergebnisse.

Die Ableitung des Brechungsindex irgend einer Farbe aus den an einem festen Prisma gemessenen Stücken, den beiden Winkeln α und β , ist nach dem Früheren von selbst erledigt. Dagegen bedarf die Reduction der Beobachtungen an einem Hohlprisma mit keilförmigen Schlussplatten noch einer näheren Erörterung. —

Sei a wieder der Winkel zwischen den beiden äussern Flächen des Hohlprismas und β , wie früher, der Winkel, den die Axe des Collimators bei der Einstellung auf irgend eine Stelle des Spectrums mit der Normalen der vordersten Fläche bildet; u_1 und u_2 seien die kleinen Winkel, welche die Platten im Hauptschnitt des Prisma's ergeben, positiv gerechnet, wenn der betreffende Keil ebenso liegt wie der Körper des Prisma's; v endlich bezeichne den bekannten Brechungsindex des angewandten Glases, n denjenigen der Flüssigkeit für die eingestellte Farbe. — Die drei brechenden Flächen im Prisma seien, von der hintersten ausgehend, durch die Zahlen 1, 2, 3 unterschieden und die Winkel, welche der Strahl mit der Normalen zu jeder von ihnen bildet, seien $\alpha_1, \beta_1 - \alpha_2, \beta_2 - \alpha_3, \beta_3 -$ in derjenigen Reihenfolge, in welcher sie nach der Reflexion an der Rückwand auftreten. — Alsdann ergibt sich der Verlauf eines Strahles durch folgende Rechnung.

Fig. 3.



Erstens folgt aus der Bedingung, dass der eingestellte Strahl die Rückwand des Prisma's senkrecht treffen muss,

$$1) \alpha_1 = u_1.$$

Weiter ist

$$2) \sin \beta_1 = \frac{v}{n} \sin \alpha_1;$$

$$3) \alpha_2 = a - (u_1 + u_2) + \beta_1$$

und

$$4) \sin \beta_2 = \frac{n}{v} \sin \alpha_2.$$

Unter der Voraussetzung, dass die beiden [31] Winkel u_1 und u_2 klein genug seien, um ihre Cosinus ohne Fehler durch die

Einheit und ihre Sinus durch die Bogen ersetzen zu können, folgt hieraus

$$\alpha_2 = a - u_1 - u_2 + \frac{v}{n} u_1 = a - \left(1 - \frac{v}{n}\right) u_1 - u_2$$

und weiter

$$\sin \beta_2 = \frac{n}{v} \sin a - \frac{n}{v} \cos a \cdot \left(1 - \frac{v}{n}\right) u_1 + u_2.$$

Aus dem beobachteten Austrittswinkel $\beta_3 = \beta$ folgt andererseits

$$5) \sin \alpha_3 = \frac{1}{v} \sin \beta$$

und

$$6) \beta_2 = \alpha_3 - u_2.$$

Beides verbunden ergibt

$$\begin{aligned} \sin \beta_2 &= \frac{1}{v} \sin \beta - \cos \alpha_3 \cdot u_2 \\ &= \frac{1}{v} \sin \beta - \sqrt{1 - \frac{1}{v^2} \sin^2 \beta} \cdot u_2. \end{aligned}$$

Setzt man beide für $\sin \beta_2$ erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so folgt nach einigen leichten Umformungen

$$n = \frac{\sin \beta}{\sin a} + (n-v) \cdot \cot a \cdot u_1 + \frac{n \cos a - \sqrt{v^2 - n^2 \sin^2 a}}{\sin a} u_2.$$

In diesem Ausdrucke stellt das erste Glied offenbar denjenigen Werth für n dar, der sich ergeben würde, wenn die Platten des Prisma's genau parallelflächig wären; die zwei andern Glieder aber bestimmen die den Winkeln u_1 und u_2 proportionalen Correctionen. Den zu ihrer Berechnung erforderlichen Werth des n hat man natürlich in dem Näherungswerthe, welchen das erste Glied für sich ergibt.

Die Berechnung der Beobachtungen nach obenstehender Regel wird übrigens dadurch sehr erleichtert, dass bei einem gegebenen Apparat, unter Voraussetzung gleichförmiger Zusammensetzung der Theile, die Grössen v, a, u_1 und u_2 stets dieselben Werthe behalten. Man kann daher die ganze Correction ein für alle mal für eine Reihe von Werthen des n — etwa für die Zahlen 1.30, 1.35, 1.40, 1.45, . . . — zum Voraus ausrechnen und in Form einer kleinen Tafel zusammenstellen. Aus dieser wird sich alsdann der Betrag der Correction für den einzelnen Fall durch eine leichte Interpolation mit dem durch das erste Glied der Formel erhaltenen Näherungswerth des n entnehmen lassen.

In wie weit die Correction ins Gewicht fällt und unter welchen [32] Umständen sie überhaupt Berücksichtigung verdient, lässt sich auf Grund obiger Formel leicht beurtheilen, wenn man den Betrag für den ungünstigsten Fall, der etwa vorkommen kann, ausrechnet. Setzt man z. B. $a=24^\circ$ und nimmt $v=1.5$, für n aber einen Werth, der unter den bei Flüssigkeiten möglicher Weise vorkommenden von jenem am weitesten abliegt — etwa 1.3 oder 1.65 —, so geben beide Correctionsglieder zusammen doch höchstens 3 Einheiten der vierten Decimalstelle für je eine Bogenminute Ab-



weichung der Verschlussplatten ($n=0.00020$); wobei überdies angenommen ist, dass beide Keile gleiche Lage haben. Man erkennt hiernach, dass Abweichungen, die unter einer halben Minute bleiben, zumal wenn bei der Zusammensetzung des Prisma's auf entgegengesetzte Lage der Platten Bedacht genommen wird, fast bei allen Untersuchungen völlig vernachlässigt werden dürfen. Aber auch bei viel grösseren Winkeln der Verschlussplatten wird man wenigstens von der Veränderung absehen können, welche die Correction für verschiedene Stellen des Spectrums erfährt; und man wird demnach die zur Dispersionsbestimmung dienenden Unterschiede im Winkel β ganz so verrechnen, wie wenn dieselben an einem einfachen Prisma beobachtet worden wären.

Die Ermittlung der Dispersion würde nur in einer mehrfachen Wiederholung dieser Rechnung bestehen, wenn man die den verschiedenen Farbstrahlen entsprechenden Werthe des W , β einzeln messen, oder auch mit Hilfe der mikrometrischen Hilfsmessung aus einem Werte des β ableiten wollte. Es ist aber — aus naheliegenden Gründen — zweckmässiger, die Differenz der Werthe des n für verschiedene Farben unmittelbar zu berechnen aus den mikrometrisch gemessenen Winkeldifferenzen, die zwischen ihren Einstellungen liegen; wozu sich folgendes Verfahren ergibt: Bezeichnen n_1 und n_2 die Brechungsindices zweier Farben und β_1 , β_2 die ihnen correspondirenden Einstellungen, während $n_2 - n_1 = \Delta n$ und $\beta_2 - \beta_1 = \Delta \beta$ gesetzt wird, so ist

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{\sin \beta_2 - \sin \beta_1}{\sin \alpha} \\ &= \frac{2 \cos \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot \sin \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}}{\sin \alpha} \\ &= \frac{2 \cos [\beta] \sin \frac{1}{2} \Delta \beta}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Weil die Winkeldifferenz $\Delta \beta$ in der Praxis immer nur sehr klein [33] sein wird, kann $2 \sin \frac{1}{2} \Delta \beta$ durch $\sin \Delta \beta$ oder $\Delta \beta$ ohne jeden Fehler ersetzt werden. Es wird daher schliesslich

$$\Delta n = \frac{\cos [\beta]}{\sin \alpha} \Delta \beta.$$

wobei

$$\frac{\beta_2 + \beta_1}{2} \text{ mit } [\beta]$$

bezeichnet ist und offenbar den Mittelwerth beider Einstellungen oder den Einstellungswinkel für die Mitte des Intervalls zwischen beiden Farben bedeutet.

7. Die Genauigkeitsgrenzen bei der beschriebenen Beobachtungsmethode.

Wenn es sich darum handelt, ein Urtheil zu gewinnen über den Grad der Sicherheit, mit welcher die dargelegte Beobachtungsweise die gesuchten Grössen zu bestimmen erlaubt, so ist in Erwägung zu ziehen einerseits die den einzelnen Bestimmungen gesetzte Genauigkeitsgrenze, andererseits der Einfluss, welchen Fehler in den einzelnen Messungsdaten auf das schliessliche Resultat üben. Die Betrachtung muss sich also sowohl auf die aus der Construction des Apparates und aus der Art seines Gebrauchs fliessenden Fehlerquellen richten, wie auch auf das Princip, nach welchem die Herleitung der gesuchten Werthe aus den Daten der Beobachtung erfolgt.

Die hier in Rede stehende Methode unterscheidet sich, wenn man zunächst nur auf die Auffassung der optischen Phänomene im Gesichtsfeld des Beobachtungsrohrs achtet, von den sonst zu ähnlichen Zwecken üblichen Verfahrungsweisen kaum anders als darin, dass zur Fixirung einer bestimmten Visirrichtung an Stelle des üblichen Fadenkreuzes ein Paar kurzer Schneiden verwandt wird. Nach den Erfahrungen des Verfassers an den in der Werkstatt des Herrn C. Zeiss ausgeführten Instrumenten steht diese Vorrichtung in Hinsicht auf Sicherheit und Schärfe der gewöhnlichen nicht im Geringsten nach. Bei der Beobachtung eines Spiegelbildes oder eines discontinuirlichen Spectrums, welches sich aus einer Reihe monochromatischer Spaltbilder zusammensetzt, erscheint, unter Voraussetzung genauer Regulirung des Auszugs und vollkommener Form der spiegelnden und brechenden Flächen, das Bild des Spaltes genau von gleicher Breite mit dem Abstand der sichtbaren Schneiden, so dass diese jenes Bild grade zwischen [34] sich fassen; wobei offenbar die Bedingungen für eine scharfe Einstellung so günstig wie nur immer möglich sein müssen. Handelt



es sich andererseits um ein continuirliches Spectrum mit FRAUNHOFER'schen Linien, so hebt sich selbst in den lichtschwachen Theilen der vollkommen dunkle Körper des Spaltes sehr deutlich auf dem farbigen Hintergrunde ab, und es ist leicht, eine der FRAUNHOFER'schen Linien genau in die Mitte zwischen die sichtbaren Schneiden zu bringen, zumal diese bei derartigen Beobachtungen immer ziemlich eng gestellt sein werden. Die Schärfe der Einstellung wird dabei — was namentlich der mikrometrischen Messung zwischen den einzelnen Theilen des Spectrums zu Statten kommt — sehr unterstützt durch die Leichtigkeit, mit welcher die Stellschraube am Ocular während der Beobachtung selbst die Spaltweite der Helligkeit und den sonstigen Umständen anzupassen erlaubt. Dem entsprechend geht bei gut begrenzten Bildern, wenn das Beobachtungsrohr etwa 8–12fache Vergrößerung gibt, der Einstellungsfehler nie über den Betrag von 2–3", wie man mittelst der Mikrometerschraube leicht controliren kann. — Nur gegenüber den Ursachen, welche die Reinheit des Spectrums beeinträchtigen können, ist die vorliegende Beobachtungsweise etwas empfindlicher und in sofern ungünstiger, als die FRAUNHOFER'sche Methode, weil alle Abweichungen sowohl in der Substanz des Prisma's, wie namentlich in der Form der Flächen hier, verglichen mit ihrem Einfluss auf ein hindurch tretendes Strahlenbündel, verdoppelt zur Wirkung kommen.

Neben der Schärfe der Einstellung ist für die Genauigkeit der Messungsdata noch maassgebend: erstens die correcte Wirkung der beiden goniometrischen Apparate, Theilkreis und Mikrometer, und zweitens die Sicherheit, mit welcher die Construction des Instrumentes unregelmässige wie constante Fehlerquellen ausschliesst. — In Betreff des Theilkreises ist hier Nichts zu erörtern, da Construction und Handhabung in keinem Punkte sich von dem Gewohnten und Bewährten entfernen. Ueber die Mikrometervorrichtung jedoch mögen, da die hier beschriebene Einrichtung sich nicht in demselben Falle befindet, einige Erläuterungen hier noch Platz finden.

Den Umfang der Messungen bei einem Mikrometer dieser Art bestimmen einerseits die technischen Hindernisse, welche der genauen Ausführung längerer Schrauben entgegenstehen, andererseits auch die Rücksicht auf Sicherheit und Bequemlichkeit des Gebrauchs, die beide jedenfalls wesentlich beeinträchtigt würden, [35] wenn die Messung über die Grenze hinaus führen sollte, bis

zu welcher einfache Proportionalität zwischen der Bewegung der Schraube und der Grösse der bewirkten Drehung angenommen werden kann. Beide Umstände lassen es gerathen erscheinen, den Spielraum für die Anwendung der Schraube auf ca. 5 Grad zu beschränken — um so mehr, als bei dem hier beabsichtigten Gebrauch kaum das Bedürfniss eines weiteren Umfangs eintritt. Innerhalb dieser Grenzen kann einerseits, wie die Untersuchung ausgeführter Instrumente dem Verfasser gezeigt hat, der Apparat einen solchen Grad technischer Vollkommenheit erhalten, dass die Fehler der Messung vollständig durch die unvermeidlichen Einstellungsfehler verdeckt bleiben, wie andererseits auch die Abweichung von der Proportionalität ausser Acht gelassen werden darf. Denn bedenkt man, dass die Fortbewegung der Schraube der Tangente der Drehung proportional ist, und zwar von derjenigen Stellung aus gerechnet, bei welcher die Axe der Schraubenspindel zu dem Radius des Contactpunktes senkrecht steht, so wird die Differenz für einen Winkel von 4° ca. $6''$, für einen Winkel von 5° ca. $12''$ betragen, wenn die Messung so erfolgt, dass die Mitte des Intervalls, wenigstens nahezu, auf die Normalstellung trifft. Das Maximum des Fehlers, der aus diesen Differenzen entspringt, reducirt sich aber von selbst auf den vierten Theil der angegebenen Grössen, wenn man die Werthe des Schraubenumgangs, den man der Reduction zu Grunde legt, aus der Messung eines Winkels von der Grösse des ganzen Intervalls ableitet. Legt man also der Ermittlung der Reductionsconstante etwa einen Winkel von 4° zu Grunde, so werden alle Mikrometerangaben, bei welchen die Schraube nicht um mehr als 2° aus ihrer Normalstellung entfernt wird, also bis zum Umfang von 4° , höchstens um $1\frac{1}{2}''$ fehlerhaft sein; und diese Fehlergrenze wird auch für diejenigen Messungen noch nicht überschritten, bei welchen die Abweichung der Schraube um $\frac{1}{2}^{\circ}$ weiter geht. Man sieht, dass für einen Gesammtumfang der Mikrometermessungen bis etwa 5° die Reductionsfehler unbedenklich ausser Acht gelassen werden dürfen, wenn bei der Construction darauf Bedacht genommen ist, die Stellung der Schraubenspindel so zu reguliren, dass sie in der Mitte des Spielraums ihrer Bewegung nahehin senkrecht zum Hebelarm der Drehung steht. Dieses Verlangen stösst so wenig auf ernstliche Hindernisse, wie die anderweitigen Ansprüche, welche neben der Forderung gleichförmiger Ganghöhe an die technische Ausführung zu stellen sind. Denn



die Vorrichtung verlangt zur correcten [36] Functionirung sonst Nichts, als dass die Contactfläche am Ende der Armes hinreichend glatt und in der Richtung nach dem Mittelpunkt des Kreises hin gut geebnet sei, und dass die Schraubenspindel in einer Wölbung von starker Krümmung endige, die während der Drehung keine merkliche Seitenbewegung erfährt, — was bei sorgfältiger Ausführung recht wohl in aller Vollkommenheit zu erreichen ist.

Zur Prüfung des Mikrometers in Bezug auf die letzterwähnten Ansprüche eignet sich die auf Seite 20¹⁾ erwähnte Hilfsvorrichtung zur Ermittlung des Reductionsfactors, nur dass man in diesem Falle den Winkel zwischen den beiden spiegelnden Flächen auf einen Betrag von $1-2^\circ$ vermindern muss, damit er innerhalb des Umfangs der Schraube mehrmals durchmessen werden kann. Auch das Doppelbild, welches ein schwach keilförmiges Stück gut polirten Spiegelglases gewährt, kann für diesen Zweck benutzt werden.

Der tote Gang der Schraube wird hinreichend durch den Druck der auf den Arm wirkenden Feder aufgehoben; und wenn man — was allerdings nöthig — beim Gebrauch die Vorsicht übt, zusammengehörige Einstellungen stets mit derselben Drehungsrichtung auszuführen, um dadurch den Einfluss einer wechselnden Spannung der Theile auszuschliessen²⁾, so gewährt diese einfache Construction der Mikrometers die Präcision, welche nöthig und ausreichend ist, um die Genauigkeit der Wahrnehmungen für die Messung vollständig auszunützen. Seine Verwendung ersetzt also, wenigstens für einen wichtigen Theil der Beobachtungen, eine Vollkommenheit des Theilkreises, die bei Instrumenten von mässigen Dimensionen überhaupt nicht möglich ist, und die, soweit sie zu erreichen wäre, nicht nur den Apparat sehr viel kostspieliger, sondern auch seinen Gebrauch schwieriger und umständlicher machen müsste.

Eben so wesentlich wie die Correctheit des Messapparates ist ferner die Ausschliessung von constanten oder unregelmässigen Fehlerquellen, welche die strenge Identität der wirklich gemessenen Grössen mit den nach dem Princip der Methode zu messenden aufheben. Die Beseitigung derartiger Abweichungen deckt sich aber offenbar mit der vollkommenen Erfüllung der verschiedenen

1) [S. 102 dieses Bandes.]

2) Man wird also, falls beim Einstellen der richtige Punkt überschritten ist, die Schraube erst wieder um einen kleinen Weg hinter das Ziel zurückdrehen, um es zum zweiten Mal in der früheren Richtung zu erreichen.

Postulate, auf welche die Theorie des Beobachtungsverfahrens [37] sich gründet; und sie wird daher um so grösserer Sicherheit fähig sein, je weniger solche Postulate vorliegen und je besser die einzelnen durch die Construction des Instrumentes gewährleistet sind.

Im vorliegenden Falle kommen nun keine Voraussetzungen in Frage ausser den folgenden.

1) dass die Visirlinie des Collimatorrohrs während je einer Reihe zusammengehöriger Einstellungen eine unveränderliche Lage gegen die festen Nullpunkte der Winkelmessung behalte;

2) dass sie gleichzeitig mit dem Hauptschnitt des Prisma's zur Drehungsaxe des Theilkreises senkrecht stehe; und

3) dass diejenigen Theile der Prismenflächen, welche bei den zusammengehörigen Einstellungen abwechselnd spiegelnd und brechend wirken, in unveränderter Lage zum Theilkreis bleiben. Die Anforderungen unter Punkt 2 und 3 kehren ganz in derselben Weise bei allen anderen Beobachtungsmethoden wieder; und aus der oben gegebenen Beschreibung des Justirungsverfahrens ist ohne Weiteres ersichtlich, dass sie in jeder nur wünschenswerthen Genauigkeit und Sicherheit erfüllt werden können. In Bezug auf Punkt 1 dagegen gibt die hier betrachtete Einrichtung selbstverständlich günstigere Bedingungen als die bisher in Gebrauch befindlichen Instrumente, insofern das vollkommene Zusammenfallen von Collimator und Beobachtungsrohr die Anforderungen in dieser Richtung vereinfacht und zudem ihre mechanische Erfüllung dadurch erleichtert, dass die Visirlinie unbeweglich mit dem festen Theile des Instrumentes verbunden ist. Ausserdem aber bildet einen wesentlichen Vorzug der Methode das Hinwegfallen jeder besonderen Bedingung für den Verlauf der Strahlen im Prisma, wie sie beim FRAUNHOFER'Schen Verfahren in der Forderung der Minimalablenkung gegeben ist, und wie solche in anderer Form bei allen Verfahrungsweisen wiederkehren muss, bei welchen Eintritt und Austritt der Strahlen in zwei von einander unabhängigen Richtungen erfolgen. — Hier wo die Construction des Apparates beide Richtungen absolut identisch macht, ist mit der Einstellung des Spectrums die der Minimalablenkung durchgehender Strahlen entsprechende Bedingung, nämlich die Gleichheit des Incidenzwinkels beim Eintritt und Austritt, für die jeweilig eingestellte Farbe eo ipso erfüllt.



[38] 8. Der Einfluss der Beobachtungsfehler auf die Resultate der Messung.

Zum Schluss bleibt noch der Einfluss zu betrachten, welchen die Fehler der einzelnen Messungsdata vermöge ihrer mathematischen Verknüpfung auf das schliessliche Resultat ausüben. Untersucht man darauf hin zunächst die Bestimmung des Brechungsexponenten, so folgt aus der Regel für dessen Berechnung

$$n = \frac{\sin \beta}{\sin a}$$

sogleich der Ausdruck für die Aenderung dn seines Werthes durch beliebige (kleine) Abweichungen da und $d\beta$ in den Werthen der Winkel a und β ; nämlich

$$\begin{aligned} dn &= \frac{\cos \beta}{\sin a} \cdot d\beta - \frac{\sin \beta \cdot \cos a}{\sin^2 a} \cdot da \\ &= n (\cotg \beta \cdot d\beta - \cotg a \cdot da). \end{aligned}$$

Dieser Formel zufolge gewinnen die möglichen Fehler beider Winkel, welche durch da und $d\beta$ repräsentirt sind, ungleiches Gewicht gegenüber dem zu bestimmenden Werthe. Denn $\cotg \beta$ ist nothwendig immer kleiner als $\cotg a$, und nähert sich mit wachsender Schiefe der Incidenz der Grenze Null, während der Verminderung von $\cotg a$ dadurch eine untere Grenze gesetzt ist, dass a jedenfalls kleiner als der Grenzwinkel der Totalreflexion für das betreffende Material bleiben muss. — Man sieht also auf der einen Seite, dass die Bedingungen für die Genauigkeit des Resultates unter sonst gleichen Umständen immer günstiger werden, je näher der brechende Winkel des Prisma's dem möglichen Maximum gebracht wird; andererseits aber, dass unter allen Umständen und namentlich mit der Annäherung an diese Grenze, die auf die Messungen verwandte Sorgfalt (z. B. wiederholte Messung oder Repetition) beim Winkel a dem Resultate mehr als beim Winkel β zu Gute kommen wird.

Was ferner die Bestimmung der Dispersion nach dem oben erörterten Verfahren betrifft, so gibt die auf Seite 33¹⁾ aufgestellte Gleichung für ihre Berechnung aus dem Werthe von $\Delta\beta$ für zwei beliebige Farben, die Aenderung des Δn durch kleine Abweichungen der Messungsdata

$$d(\Delta n) = \frac{\cos [\beta]}{\sin a} \cdot d(\Delta\beta)$$

1) [S. 114 dieses Bandes.]

wenn man die übrigen Glieder, die wegen der Kleinheit von $\Delta\beta$ von zweiter Ordnung sind, vernachlässigt.

Dieser Ausdruck lässt erkennen, dass ein Fehler in der Bestimmung [39] der Winkeldifferenz $\Delta\beta$ auf den Werth von Δn ganz in der nämlichen Art einwirkt, wie bei der Ermittlung des Brechungsexponenten ein Fehler in β auf dessen Werth. Zugleich aber ist ersichtlich, dass etwaige Fehler in a und im absoluten Werthe von β oder $[\beta]$ auf den Werth der Dispersion keinen merklichen Einfluss gewinnen — es sei denn, dass ihre Grösse dem Betrag von $(\Delta\beta)$ selbst nahe kommen sollte. In Anbetracht des geringen praktischen Interesses, welches eine allgemein durchgeführte theoretische Discussion der fraglichen Beziehungen haben würde, mag die quantitative Bestimmung des Fehlereinflusses an specielle numerische Annahmen, wie sie den gewöhnlichen Vorkommnissen entsprechen, geknüpft werden. — Wird z. B. ein Crown-glasprisma von 30° vorausgesetzt, so ergibt sich, den Werth von n zu 1,5 angenommen,

$$dn = 1,32 d\beta - 2,60 da$$

$$d(\Delta n) = 1,32 d(\Delta\beta)$$

Für schweres Flintglas von 1,7 mittlerem Brechungsindex und dem nämlichen Winkel würde dagegen werden

$$dn = 1,05 d\beta - 2,95 da$$

$$d(\Delta n) = 1,05 d(\Delta\beta)$$

Würde aber bei beiden Materialien der Winkel a dem Grenzwinkel der Totalreflexion soweit nahe gebracht, dass der mittlere Einfallswinkel $[\beta]$ etwa 75° erreicht — was indess nur bei sehr vollkommener Form der Prismenflächen zulässig ist — so geben die Formeln für das Crown-glas ($a = 40^\circ 5'$)

$$dn = 0,40 d\beta - 1,78 da$$

$$d(\Delta n) = 0,40 d(\Delta\beta)$$

und für das Flintglas ($a = 34^\circ 40'$)

$$dn = 0,45 d\beta - 2,45 da$$

$$d(\Delta n) = 0,45 d(\Delta\beta)$$

Nimmt man nun z. B. an, dass der mögliche Fehler bei der Messung der Winkel a und β — abgesehen von groben Versehen — je eine Minute erreichen könne, so wird im ungünstigsten Falle, wenn nämlich Abweichungen entgegengesetzten Sinnes zusammen-treffen, der Fehler in n im ersten Falle bei beiden Glasarten ca. 0,0012, im zweiten Falle beim Crown ca. 0,0006, beim Flint 0,0009 betragen.



Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, dass bei der angenommenen Genauigkeit der Winkelmessungen die einmalige Beobachtung, auch im Fall des kleineren Winkels für α , den Werth von n schon bis auf ungefähr eine Einheit der 3. Decimalstelle sicher ergeben [40] muss, und dass ein paar Wiederholungen der Messung, zumal des Winkels α , die mögliche Unsicherheit gewiss auf die Hälfte der 3. Decimale reduciren werden; während die Anwendung eines feiner getheilten Kreises, der eine Genauigkeit bis auf ca. $15''$ gibt — wie in dem oben speciell beschriebenen Instrumente — unter Benutzung der Repetitionseinrichtung, die Fehlergrenze leicht auf ein paar Einheiten der fünften Decimale einzuschränken erlauben wird. Schon die unter der ersten Annahme erhaltenen Resultate geben eine für die gewöhnlichen Bedürfnisse — namentlich für fast alle praktischen Anwendungen — mehr als ausreichende Genauigkeit, in Anbetracht dessen, dass sie den alle optischen Wirkungen bestimmenden Werth von $(n-1)$ schon auf ca. $\frac{1}{500}$ resp. $\frac{1}{1000}$ des ganzen Betrages sicher stellen. Wollte man aber unter den gleichen Bedingungen auch die Dispersionsbestimmung bewirken, wie es geschieht, wenn die den verschiedenen Farben zugehörigen Werthe des Winkels β einzeln am Theilkreise gemessen werden, so würde die zu erreichende Genauigkeit sehr wenig befriedigen und selbst für die gewöhnlichsten Bedürfnisse der Praxis ganz unzulänglich sein. Denn da der Vortheil des kleineren Factors, mit welchem der Fehler in $(A\beta)$ sich multiplicirt, zum grösseren Theil wieder dadurch ausgeglichen wird, dass die mögliche Unsicherheit in den Winkeldifferenzen doppelt so gross wird wie die in den absoluten Winkeln, so würden die Werthe der Dispersion eine nur wenig engere Fehlergrenze besitzen wie die Brechungsexponenten selbst. Bei der Kleinheit der Farbenzerstreuung in den meisten Substanzen würde aber ein Fehler von 0,001 und selbst von der Hälfte dieses Betrages einen sehr ansehnlichen Theil der ganzen zu messenden Grösse (die z. B. bei gewöhnlichem Crown Glas für das Intervall von $C-F$ nur 0,008—0,009 beträgt) ausmachen; und selbst die Anwendung eines ziemlich fein getheilten Kreises und mehrmalige Repetition der Winkel wird nur mühsam diejenige relative Genauigkeit in der Bestimmung von An erreichen lassen, welche für den Werth von $(n-1)$ mit viel einfacheren Hilfsmitteln und ohne alle Umstände erlangt wird.

Die vorstehenden Bemerkungen zeigen, welchen Vortheil eine selbständige mikrometrische Messung der Winkeldifferenzen darbietet, indem sie die Nöthigung beseitigt, allein der Ermittlung der Dispersion wegen die Bestimmung des Brechungsexponenten, und zwar für mehrere Farben, in einer Schärfe auszuführen, welche fast für alle praktischen wie wissenschaftlichen Anwendungen vollkommen [41] nutzlos bleibt. — In den vorhin gebrachten Beispielen berechnet sich, wenn man den möglichen Fehler einer einzelnen Mikrometermessung auch auf $5''$ (d. i. ca. 0,000025 in Bogenmaass) annehmen will, die grösste zu befürchtende Abweichung im Werthe des An bei Prismen von 30° auf 0,00002 bis 0,00003. In Anbetracht der geringen Mühe aber, welche selbst eine öftere Wiederholung der Mikrometermessungen macht, wird auch unter viel ungünstigeren Verhältnissen die Ermittlung der Dispersionswerthe auf dem bezeichneten Wege leicht in einer viel weiter gehenden Genauigkeit ausgeführt werden können.

Nach der Meinung des Verfassers darf nun als das Ergebnis dieser Discussion, das im Einzelnen Erörterte zusammenfassend, hingestellt werden: erstens, dass die beschriebenen Einrichtungen und die angegebenen Verfahrungsweisen zur Bestimmung der Constanten für Brechung und Dispersion allen für den subtileren wissenschaftlichen Gebrauch zu stellenden Anforderungen Genüge leisten, wenn der Apparat in den Dimensionen ausgeführt wird, wie sie bei Instrumenten für jene Zwecke gewöhnlich sind, d. h. mit Theilkreis von 15—20 Cm. Durchmesser, Fernrohr von etwa 25 Cm. Brennweite, Repetitionseinrichtung u. s. w.; zweitens aber, dass den gewöhnlichen Bedürfnissen, namentlich der praktischen Optik schon hinreichend entsprochen werden kann durch ein nach denselben Grundsätzen construirtes Instrument von viel kleineren Dimensionen ohne Repetitionseinrichtung, dessen Theilkreis nur ganze Minuten ablesen und dessen Mikrometerapparat die Winkeldifferenzen auf 8—10 Bogensekunden genau messen lässt.



Die Bestimmung der dioptrischen Constanten flüssiger Körper mittelst der Totalreflexion.

9. Das Princip der Methode.

Nach dem Grundgesetz der Brechung erfolgt an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsexponenten n und ν totale Reflexion, sobald der Einfallswinkel eines Strahles gegen diese Grenzfläche im stärker brechenden Medium ν gleich wird dem durch die Relation

$$\frac{n}{\nu} = \sin \gamma$$

[42] bestimmten Winkel. Auf Grund dieser Gleichung wird daher der Brechungsexponent des einen Mediums, z. B. n , zu ermitteln sein, wenn derjenige des anderen, ν , bekannt ist und der Winkel γ , bei welchem zuerst totale Reflexion eintritt, beobachtet wird.

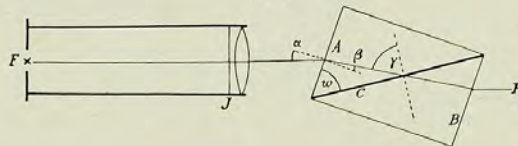
Diese Beobachtung kann auf zweierlei Art ausgeführt werden. Man kann die betreffende Stellung der Trennungsfäche entweder dadurch aufsuchen, dass man den Eintritt der maximalen Intensität des reflectirten Strahls oder dadurch, dass man die minimale Intensität, d. h. das vollständige Verschwinden des durchgehenden Strahls beobachtet. Das erstere Verfahren ist schon vor langer Zeit von WOLLASTON u. A. zur Untersuchung flüssiger oder wenigstens schmelzbarer Körper angewandt worden. Es leidet an dem Nachtheil, dass die Erkennung der gesuchten Lage auf das unsichere Urtheil über den Eintritt eines Maximums der Helligkeit basirt wird und deshalb nur geringer Schärfe fähig ist — wie die mangelhafte Uebereinstimmung der auf diesem Wege erlangten Resultate bekundet. Aber auch wenn dies nicht der Fall wäre, würde der leichten Ausführung solcher Beobachtungen doch immer der Umstand hinderlich sein, dass der zu beobachtende Strahl fortwährendem Richtungswechsel unterworfen ist.

Viel günstiger stehen die Bedingungen beim zweiten Verfahren. — Das Verschwinden des durchgehenden Strahles lässt viel schärfere Beobachtung zu, weil gegenüber dem Zustande vollkommenen Lichtmangels auch kleine Lichtmengen leicht wahrgenommen werden. Vor allen Dingen aber bietet es die Möglichkeit sehr viel einfacherer Ausführung, weil der durchgehende Strahl in ganz constanter Richtung erhalten werden kann. — Man braucht zu dem Zweck nur das zu untersuchende Medium als dünne Schicht

zwischen stärker brechenden Körpern so einzuschliessen, dass das Ganze eine planparallele Platte darstellt, die in allen Stellungen das einfallende Licht ohne Ablenkung austreten lässt.

Sei, um diese Beobachtungsweise näher zu entwickeln, in Fig. 4 J ein Fernrohrobjectiv, in dessen Brennpunkt F eine kurze zur

Fig. 4.



[43] Ebene der Zeichnung senkrecht zu denkende leuchtende Linie (ein von hinten beleuchteter Spalt) angebracht ist. A und B seien zwei rechtwinkelige Glasprismen von gleicher Grösse und gleichen Winkeln, mit den Hypotenusenflächen so an einander gelegt, dass sie zusammen eine dicke planparallele Platte bilden, die vor dem Objectiv J um eine zur Ebene der Zeichnung senkrecht stehende Axe stetig gedreht werden kann. Die zu untersuchende (flüssige oder leicht schmelzbare) Substanz, deren Brechungsindex kleiner als derjenige der Glasprismen vorausgesetzt wird, sei als sehr dünne Schicht zwischen den beiden Prismen eingeschlossen.

Kennt man ein für alle mal den Brechungsindex des Glasprisma's A für jede Farbe und den Winkel w an der dem Objectiv zugewandten Kathetenfläche und hat man ferner die Mittel, bei jeder Stellung der Platte den Winkel zwischen der Axe des Collimators FJ und der Normalen der Fläche A zu beobachten, so kann darauf hin offenbar berechnet werden, unter welchem Winkel im Innern des Glases die Trennungsfäche von demjenigen parallelstrahligen Strahlenbüschel, welcher in der Richtung der Axe aus dem Collimator austritt, bei je einer Stellung getroffen wird. So lange dieser Winkel für alle Farben noch unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion liegt, treten die Strahlen ungehindert durch die Zwischenschicht hindurch und aus der Fläche B mit etwas verminderter Intensität parallel der Axe des Rohrs wieder aus; und da für die zur Ebene des Hauptschnittes wenig geneigten Strahlenbüschel, die von den übrigen Punkten des Spaltes neben der Axe herrühren, offenbar dieselben Bedingungen gelten, so wird



von P aus der Spalt, in unendlicher Entfernung stehend, gerade so sichtbar sein, wie wenn die flüssige Schicht nicht vorhanden wäre. Sobald aber durch Drehung des Doppelprisma's im Sinne des wachsenden Einfallswinkels γ für irgend eine bestimmte Farbe nach Maassgabe des Brechungsindex der flüssigen Schicht der Grenzwinkel erreicht ist, wird letztere für Strahlen dieser Farbe vollkommen undurchsichtig. Leuchtet die Lichtquelle nun blos mit solchen, so muss demnach in diesem Moment das Bild des Spaltes, von P aus gesehen, verschwinden. Leuchtet sie dagegen mit weissem Licht, so wird — im Allgemeinen — bei normaler Dispersion der Flüssigkeit entweder für alle Farben, die stärker oder für alle, die schwächer brechbar sind als jene bestimmte Farbe, die Grenze schon überschritten, für die andern aber noch nicht erreicht sein. Es ist demnach die Platte in diesem Falle für den einen Theil des Spectrums durchsichtig, für den [44] andern undurchsichtig und der vorher weisse Spalt erscheint jetzt gefärbt, — und zwar im letzten Stadium vor dem völligen Verschwinden entweder dunkelroth oder violett¹⁾.

Handelt es sich nun darum, diejenige Stellung des Prismenpaares zu finden, für welche eine bestimmte Farbe im durchfallenden Licht gerade ausgelöscht wird, so bedarf es blos noch eines Hilfsmittels, um, wenn das Bild des Spaltes bei fortgesetzter Drehung sich zu färben beginnt, zu erkennen, welche Farben in ihm noch vorhanden, welche schon verschwunden sind. Dazu führt aber die Ausbreitung dieses Spaltbildes in ein Spectrum durch ein vor das beobachtende Auge gehaltenes Prisma. Durch ein solches gesehen wird der Spalt, so lange noch alle Strahlen die Flüssigkeitsschicht durchdringen können, ein vollständiges Spectrum ergeben; sobald aber die Stellung beginnender Totalreflexion erreicht ist, wird bei fortgesetzter Drehung ein immer grösserer Theil dieses Spectrums, entweder vom rothen oder vom blauen Ende her, ausgelöscht werden. Man wird also die Data zur Bestimmung des Grenzwinkels γ für irgend eine bestimmte Farbe erhalten, indem man diejenige Stellung des Prismenpaares aufsucht, bei welcher die Auslöschung gerade bis zu dieser Farbe fortgeschritten ist. (Erste Methode.)

1) Mit den einfachsten Mitteln ausgeführt — mit einer entfernt stehenden Lichtflamme, einem Paar in freier Hand gehaltener rechtwinkliger Crownglasprismen und einem Tropfen Wasser als Zwischenschicht — ist das Experiment ein ganz instructiver Vorlesungsversuch.

Die Ermittlung des Brechungscoefficienten n der Flüssigkeit kann nun leicht geschehen. Ist a der Winkel, welchen bei der gefundenen Stellung die Collimatoraxe mit der Normalen zur Fläche A bildet (positiv gerechnet, im Sinne zunehmender Neigung der Trennungsfläche gegen die Collimatoraxe), so ergibt sich zunächst der Winkel β aus dem als bekannt angenommenen Brechungsindex ν des Prisma's A für die betreffende Farbe nach der Formel

$$1) \sin \beta = \frac{1}{\nu} \sin a.$$

Der Grenzwinkel der Totalreflexion folgt darauf hin:

$$2) \dots \gamma = \beta + w$$

und demnach der gesuchte Brechungsindex n der Flüssigkeit für die betreffende Farbe

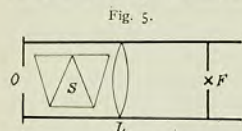
$$3) \dots n = \nu \sin \gamma.$$

[45] Die hier im Princip festgestellte Beobachtungsweise lässt eine wesentliche Modification zu, welche der Vereinfachung des erforderlichen Apparates sehr zu Statten kommt. Sie gründet sich auf folgende Ueberlegung:

Wenn bei einer bestimmten Stellung des Prismenpaares die Totalreflexion eben beginnt für diejenigen Strahlen einer bestimmten Farbe, welche vom Punkte F ausgehend, der Axe parallel aus dem Objectiv austreten, so muss dasselbe auch gelten für solche Strahlen, welche in entgegengesetzter Richtung die Prismen passiren, parallel zur Axe in das Objectiv eintreten und von diesem im Brennpunkt F vereinigt werden. Wegen des Fortbestehens derselben geometrischen Bedingungen für alle zur Ebene des Hauptschnittes wenig geneigten Strahlensysteme gilt das nämliche aber auch für solche parallelstrahlige Büschel, welche vom Objectiv in den ausser der Axe liegenden Punkten des Spaltes vereinigt werden. Da nun zu keinem Punkt des Spaltes durch das Objectiv hindurch andere Strahlen gelangen können, ausser solchen, welche vor dem Objectiv in den genannten parallelstrahligen Büscheln verlaufen, so folgt, dass in der vorausgesetzten Stellung überhaupt keine Strahlen der betreffenden Farbe die Prismen in solcher Richtung passiren können, dass sie durch das Objectiv zu dem in seiner Focalebene befindlichen Spalt gelangten.

Steht daher vor den Prismen eine beliebig ausgedehnte Lichtquelle, welche in den verschiedensten Richtungen durch jene hin-

durch Strahlen in das Objectiv J sendet, so dass, so lange die Trennungsfäche C vollkommen durchgänglich ist, der Spalt und die ganze Focalebene bei F Licht empfängt, so wird der Spalt für ein hinter F stehendes Auge in dem Augenblick dunkel werden, in welchem die der Axe des Collimators parallel verlaufenden Strahlen an der Flüssigkeitsschicht total reflectirt werden. Da aber die vorher betrachteten Verschiedenheiten im Verhalten der verschiedenen Farben hier in der nämlichen Form wiederkehren, so muss, wenn die vor P aufgestellte Lichtquelle weisses Licht liefert, die beginnende Totalreflexion zuerst partielle Verdunkelung, d. h. Färbung, des vorher weiss erscheinenden Spaltes herbeiführen. Man wird demnach auch bei dieser Beobachtungsweise den Eintritt der totalen Reflexion für die einzelnen Farben erkennen, indem man hinter F zunächst ein zerstreues Prisma einschaltet — etwa ein [46] solches à vision directe, in Verbindung mit einer schwachen Lupe, wie Fig. 5 zeigt — und durch dieses hindurch den in ein Spectrum verwandelten Spalt betrachtet. (Zweite Methode.)



Das hier benutzte Princip der Umkehrung des Strahlenganges macht indess noch eine andere Art der Beobachtung des in Rede stehenden Phänomens möglich. — Man denke zunächst vor dem Prismenpaar eine gleichförmig helle monochromatische Lichtquelle (etwa eine Natronflamme) angebracht und diejenige Stellung der Flüssigkeitsschicht herbeigeführt, bei welcher der Spalt in F eben keine Strahlen mehr empfängt. Dann wird die ganze in Fig. 4 unterhalb der Axe liegende Hälfte der Focalebene gleichfalls vollkommen verdunkelt sein. Denn zu keinem Punkte dieser untern Hälfte können durch das Objectiv J hindurch andere Strahlen gelangen als solche, die vor demselben als parallelstrahlige zur Axe nach oben geneigte Büschel verlaufen. Solche aber bilden mit der Trennungsfäche C offenbar grössere Winkel als die der Axe parallel verlaufenden, können also die Grenzfläche zwischen Glas und Flüssigkeit keinesfalls passirt haben. Umgekehrt aber muss, wenn sonst die Lichtquelle hinreichend ausgedehnt ist, die ganze in der Figur oberhalb F liegende Hälfte der Focalebene gleichförmig erhellt sein, weil in deren Punkten diejenigen Strahlen durch das Objectiv gesammelt werden, welche vor demselben nach unten hin gegen die Axe geneigt verlaufen, an der Trennungs-

fläche also sämtlich geringere Incidenzwinkel ergeben. — Denkt man nun die Focalebene des Objectivs in der Umgebung der Axe vollkommen frei gelegt und durch ein dahinter angebrachtes gewöhnliches Ocular beobachtet, so muss demnach das Sehfeld des so entstehenden Fernrohrs eine helle und eine dunkle Hälfte darbieten, welche sich in einer durch die Axe gehenden und der brechenden Kante des Prisma's A parallelen Linie gegen einander abgrenzen. Die Markirung der Axe durch ein gewöhnliches Fadenzkreuz wird es möglich machen, das Zusammenfallen der Schattengrenze mit der Axe genau zu beobachten und also auch auf diese neue Weise diejenige Stellung der Trennungsfäche wieder zu erkennen, in welcher die der Axe parallelen Strahlen der Totalreflexion eben unterliegen. (Drittes Verfahren.)

Man kann endlich von hier aus noch einen Schritt weiter gehen. Statt die Totalreflexion durch Drehung des Prismenpaares für die Axe des Rohres herzustellen, kann man das Prismenpaar in unveränderter Lage halten und dafür diejenige Stelle der Focalebene aufsuchen, deren correspondirende parallelstrahlige Strahlengruppe [47] der Auslöschung zuerst unterliegt. Nach der bekannten Wirkungsart der Sammellinsen wird in jedem Punkt Q der Focalebene F (Fig. 6) ein vor dem Objectiv parallelstrahliges Bündel gesammelt, dessen Richtung gegen die Axe um so stärker geneigt ist, je weiter der betrachtete Punkt der Focalebene von der Axe abliegt. Nach Maassgabe des Brechungsindex der flüssigen Schicht wird die Totalreflexion für eine Strahlengruppe von bestimmter Neigung beginnen und dann alle Strahlen auslöschen, welche zur Axe (im Sinne wachsender Grösse des Winkels γ) stärker geneigt sind. Ist der Vereinigungspunkt der betreffenden Strahlengruppe der Punkt Q in der Focalebene, so wird letztere von dieser Stelle an nach der einen Seite hin vollkommen verdunkelt, nach der andern hin erleuchtet sein. Beobachtet man nun unter Benutzung eines passenden Oculars die Lage der Grenzlinie zwischen Hell und Dunkel an einer in der Focalebene angebrachten mikrometrischen Scala, so gibt der gefundene Abstand





von der Axe bei bekannter Brennweite des Objectivs die vollständige Bestimmung des Winkels, den das der Grenze entsprechende parallelstrahlige Büschel vor dem Objectiv mit der Axe des Fernrohrs bildet und darauf hin, wenn die constante Lage der Vorderfläche des Prisma's A gegen die Axe gegeben ist, den Winkel γ , mit dessen Hilfe der gesuchte Brechungsindex der Flüssigkeit nach der auf Seite 44¹⁾ ausgeführten Rechnung erfahren wird. (Viertes Verfahren.)

Wollte man die beiden zuletzt entwickelten Verfahrensweisen ohne Weiteres mit weissem Licht in Anwendung bringen, so würde der Umstand hindernd in den Weg treten, dass die Totalreflexion im Allgemeinen nicht für alle Farben bei derselben Stellung der Trennungfläche oder mit demselben Neigungswinkel der Strahlen gegen die Fernrohraxe beginnt. Nur bei ganz bestimmten Verhältnissen zwischen der Farbenzerstreuung des Glasprisma's A und derjenigen der Flüssigkeit könnten alle Strahlen ein und desselben parallelstrahligen Büschels gleichzeitig ausgelöscht werden und [48] nur in diesem Falle würde in der Focalebene des Objectivs wieder eine scharfe Grenzlinie zwischen Hell und Dunkel sich herstellen. Im Allgemeinen aber wird die flüssige Schicht für die violetten Strahlen einer bestimmten Richtung schon undurchsichtig sein, während sie für die rothen derselben Richtung noch durchgänglich ist — oder umgekehrt; und es wird demnach die Grenze zwischen dem hellen und dem dunklen Theile des Sehfeldes im ersten Falle als ein rother, im andern Falle als ein blauer Saum von grösserer oder geringerer Breite erscheinen. — Wie dieser Umstand nicht nur für die Anwendung der beiden letzten Methoden zu genauen Beobachtungen unschädlich gemacht, sondern sogar als Hilfsmittel der Dispersionsbestimmung vortheilhaft verwertet werden kann, wird im Folgenden noch erörtert werden.

10. Die Bestimmung der Farbenzerstreuung.

Um näher festzustellen, in welcher Weise die Dispersion bei den vorher betrachteten Phänomenen zur Geltung kommt und wie sich an ihnen die Data zur quantitativen Bestimmung derselben gewinnen lassen, ist zunächst zu untersuchen, wie der In-

1) [S. 127 dieses Bandes.]

cidenzwinkel α der total reflectirten Strahlen an der vordersten Fläche des Doppelpisma's mit der Veränderung des Brechungsindex variirt.

Seien die Brechungsexponenten des Glasprisma's und der Flüssigkeit für eine Farbe v und n , für eine andere Farbe $v + \delta v$ und $n + \delta n$, wobei δv und δn , die Maasse der Dispersion für das betreffende Farbenintervall, als so klein vorausgesetzt werden können, dass ihre höheren Potenzen ausser Acht bleiben dürfen. — Dann folgt aus der Gleichung des Grenzwinkels

$$\sin \gamma = \frac{n}{v}$$

für die Aenderung des Grenzwinkels γ der Totalreflexion beim Uebergang von der ersten zur zweiten Farbe:

$$1) \cos \gamma \delta \gamma = \frac{\delta n}{v} - \frac{n}{v^2} \cdot \delta v = \sin \gamma \left(\frac{\delta n}{n} - \frac{\delta v}{v} \right).$$

Da nun der Winkel β , unter welchem der total reflectirte Strahl im Innern des Glases zur Fläche A gelangt, stets $= \gamma - w$ ist, so bleibt

$$2) \delta \beta = \delta \gamma = \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{\delta n}{n} - \frac{\delta v}{v} \right)$$

Endlich aber ergibt die Gleichung

$$\sin \alpha = v \cdot \sin \beta$$

[49] die Veränderung $\delta \alpha$ des Incidenzwinkels desselben Strahles an der äussern Seite der Fläche A

$$3) \cos \alpha \cdot \delta \alpha = v \cdot \cos \beta \delta \beta + \sin \beta \cdot \delta v,$$

woraus unter Berücksichtigung der vorausgehenden Bestimmungen nach einigen nahe liegenden Abkürzungen schliesslich folgt

$$4) \delta \alpha = \frac{\cos \beta \cdot \delta n - \sin w \cdot \delta v}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma}.$$

Diese Gleichung liefert im Hinblick auf die zwei ersten Methoden unmittelbar die in Bogenmaass ausgedrückte Drehung, welche das Prismenpaar erfahren muss, wenn die Strahlen beider Farben in ein und derselben Austrittsrichtung, nämlich in der Axe der Collimators, der totalen Reflexion nach einander unterliegen sollen. Es ergibt sich aus ihr im Besondern, dass gleichzeitige Totalreflexion dann eintritt, wenn



$$\frac{\delta n}{\delta v} = \frac{\sin w}{\cos \beta},$$

in welchem Falle daher, bei den zwei ersten Methoden, das Spectrum des Spaltes momentan verschwindet, bei den zwei andern die Grenzlinie farblos bleibt — beides in soweit das Verhältniss der Dispersionen für andere Theile des Spectrums nicht merklich abweicht von demjenigen, welches für das der Berechnung zu Grunde gelegte Intervall besteht. — In welchem Verhältniss die Dispersion der Flüssigkeit zu der des Glasprisma's stehen muss, damit die Totalreflexion in solcher Weise achromatisch sei, hängt hiernach übrigens vom absoluten Brechungsindex ab, da der Werth von $\cos \beta$ ausser durch w und v , auch durch die Grösse von n bedingt ist. Aus der Gleichung 4) folgt

$$5) \delta n = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\cos \beta} \cdot \delta \alpha + \frac{\sin w}{\cos \beta} \cdot \delta v;$$

wonach denn aus der beobachteten Drehung $\delta \alpha$, welche die Auslöschung von einer Stelle des Spectrums zur andern führt, die Dispersion der Flüssigkeit zu berechnen ist, wenn die auf das Glasprisma bezüglichen Daten w , v und δv bekannt sind und ausserdem für die zum Ausgangspunkt gewählte Farbe der Winkel α (aus welchem sich β und γ dann ableiten) gemessen ist.

Die hier mit $\delta \alpha$ bezeichnete Grösse gibt aber zugleich die Richtungsdifferenz an, welche nach Maassgabe der Werthe von δn , δv , n , v und w die Strahlen zweier bestimmten Farben ausserhalb der Fläche A besitzen müssen, wenn sie gleichzeitig, d. h. bei derselben Stellung der Prismen, der totalen Reflexion unterliegen sollen; und diese Bemerkung führt noch auf einen [50] zweiten Weg zur experimentellen Bestimmung der Dispersion, der namentlich der letzten beiden Methoden wegen ein Interesse gewinnt, weil er zugleich das Mittel ergibt, die Totalreflexion auch bei vielfarbigem Licht achromatisch zu erhalten.

Man betrachte zunächst wieder ein Bündel der Axe paralleler Strahlen, welche von einem im Punkte F — Fig. 4 auf Seite 42¹⁾ — befindlichen leuchtenden Spalt ausgehend, aus dem Objectiv J austreten und nehme an, dass unter ihnen die zwei Farben, für welche die Dispersion in Frage ist, vertreten seien. Denkt man nun die Strahlen der einen Farbe, auf welche sich die Werthe n und v beziehen, nach wie vor in der Richtung der Axe

1) [S. 125 dieses Bandes.]

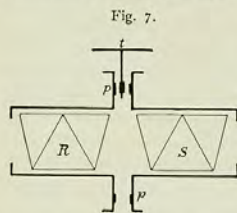
die Fläche A treffend, die der andern Farbe aber, für welche $n + \delta n$ und $v + \delta v$ gelten, auf ihrem Wege zwischen dem Objectiv und dem Prisma auf irgend eine Weise gerade um den durch Gleichung 4) bestimmten Betrag $\delta \alpha$ in der Ebene des Hauptschnittes abgelenkt, so wird jetzt die Totalreflexion für beide Farben gleichzeitig, d. h. bei der nämlichen Stellung der Prismen, erfolgen; und wenn die Strahlen der übrigen Farben, mit denen der Spalt leuchtet, ähnliche Ablenkungen erfahren, proportional den ihnen entsprechenden Werthen von δn und δv , so wird jetzt das Bild des Spaltes, von P aus angesehen, momentan verschwinden müssen.

Auch diesem Verhalten gegenüber lässt sich die Umkehrbarkeit des Strahlenganges geltend machen. Wenn alle von einem Punkt der Focalebene ausgehenden Strahlen verschiedener Farbe gleichzeitige Totalreflexion erfahren, dann — und auch nur dann — geschieht das Gleiche mit allen Strahlen, welche, in der entgegengesetzten Richtung verlaufend, in jenem Punkte der Focalebene zusammentreffen. Die eben betrachtete Ablenkung der einzelnen Farbstrahlen zwischen Objectiv und Prismen vorausgesetzt, wird demnach bei dem Versuch nach der dritten und vierten Methode die Auslöschungsgrenze im Ocularfeld auch mit weissem Licht achromatisch bleiben; und umgekehrt wird der Eintritt einer farblosen Grenzlinie zwischen Hell und Dunkel das Kriterium dafür sein, dass verschiedenfarbige Strahlen zwischen Prisma und Objectiv solche der Gleichung 4) conforme Richtungsänderungen erlitten haben.

Es hat nun keine Schwierigkeiten, das hier Vorausgesetzte experimentell in aller Vollkommenheit zu verwirklichen. Richtungsdifferenzen zwischen den farbigen Bestandtheilen eines parallelstrahligen Bündels, und zwar solche, welche den Abstufungen [51] des Brechungsexponenten proportional gehen, liefert die Dispersion jedes beliebigen Prisma's. Der daneben gestellten Bedingung, dass der Strahl einer bestimmten Farbe dabei ohne Ablenkung bleibe, genügt ein zusammengesetztes geradsichtiges Prisma von der Art, wie solche für spectroskopische Zwecke vielfach im Gebrauch sind. Das dritte Verlangen aber, dass die Grösse der einzuführenden Zerstreuung willkürlich regulirt und für jede Flüssigkeit den durch Gleichung 4) bestimmten Winkelunterschieden der total reflectirten Strahlen angepasst werden könne, ist leicht zu erfüllen durch eine Combination von zwei solchen geradsichtigen Prismen, die, hinter-



einander angebracht, um eine gemeinsame Axe nach entgegengesetzten Richtungen drehbar sind.



Es seien — um dies weiter zu erläutern — in Fig. 7 *R* und *S* zwei genau gleiche Amici'sche Prismen, in hintereinander liegende cylindrische Hülsen eingesetzt und mit diesen um deren gemeinsame Axe drehbar. Diese Prismen seien so construirt, dass Strahlen einer bestimmten Farbe *D* ohne Ablenkung durch jedes hindurchtreten, Strahlen einer andern Farbe *F* aber in jedem Prisma gegen erstere um einen Winkel k in der Richtung des betreffenden Hauptschnittes abgelenkt werden. Durch einen geeigneten Mechanismus¹⁾ sei die Drehung der Prismen so regulirt, dass von der in der Figur dargestellten Anfangslage aus — bei welcher beide Hauptschnitte parallel und die brechenden Kanten nach derselben Seite gelegen sind — stets gleiche Winkel nach entgegengesetzter Seite durchlaufen werden, so dass also die zwei Hauptschnitte stets symmetrisch zur Anfangsebene geneigt bleiben. Dann werden die Hauptschnitte wiederum zusammenfallen nach einer Drehung um je 90° , 180° u. s. f., mit dem Unterschiede jedoch, dass nach der ersten Drehung die brechenden Kanten gegeneinander gerichtet sind, nach der zweiten Drehung aber diese brechenden Kanten, [52] wieder gleich gerichtet, gerade entgegengesetzt zur Anfangslage liegen u. s. f.

Es ist durch eine einfache Ueberlegung einzusehen, dass unter den gemachten Voraussetzungen

- 1) Strahlen der Farbe *D* diese Prismencombination in jeder Stellung ohne Ablenkung passiren;
- 2) dass alle übrigen Farben stets nur innerhalb derjenigen Ebene Dispersion erleiden, in welcher die beiden Prismen unter sich gleichgerichtet zusammentreffen und welche oben als Anfangslage angenommen wurde;
- 3) dass während der Drehung die Grösse und der Sinn der Dispersion innerhalb jener Ebene für irgend zwei Farben so variiert

¹⁾ Es seien z. B., wie Fig. 7 schematisch andeutet, die einander zugekehrten Ränder *p* der beiden Hülsen mit übereinstimmender Verzahnung ausgestattet und zwischen beide Zahnkränze ein Trieb *t* eingefügt, durch welchen die Hülsen stets gleichzeitig und um je gleiche Winkel nach entgegengesetzten Seiten bewegt werden.

wie die Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten der Dispersion k der einzelnen Prismen proportional und mit der jeweiligen Richtung der Hauptschnitte übereinstimmend construirt werden.

Demnach verhält sich die beschriebene Prismencombination in allen Stücken wie ein einziges, für die Farbe *D* geradsichtiges Prisma, mit constantem Hauptschnitt, aber variabler Dispersion innerhalb desselben; und zwar ist für jede Stellung, welche durch eine beiderseits gleiche Drehung um den Winkel z herbeigeführt ist, der Betrag der wirksamen Dispersion für das angenommene Farbenintervall (und für alle andern Intervalle proportional)

$$\kappa = 2k \cdot \cos z,$$

wonach also dieser Betrag alle Werthe zwischen $-2k$ und $+2k$ annehmen kann. — Sieht man durch eine derartige Prismencombination nach einer zur Mittelebene der Hauptschnitte senkrecht stehenden Lichtlinie hin, so dehnt sich diese während der Drehung der Prismen in ein immer länger werdendes Spectrum aus, welches sich bei fortgesetzter Drehung wieder zu einem farblosen Bild zusammenzieht, um von da aus in ein wachsendes Spectrum mit entgegengesetzter Farbenfolge überzugehen u. s. f.

Die Verwendung der eben beschriebenen Vorrichtung als Compensator der Farbenzerstreuung für den vorher bezeichneten Zweck bedarf keiner weiteren Erklärungen. Wird er in irgend eine der früher betrachteten Combinationen in solcher Art zwischen Objectiv und Doppelprisma eingeschaltet, dass die Axe der Amici'schen Prismen mit der Axe des Objectivs zusammenfällt und zugleich die constante Mittelebene der drehbaren Prismen mit dem Hauptschnitt des Prisma's *A* parallel liegt, so muss sich stets [53] eine Stellung des Compensators finden lassen, bei welcher die von ihm herbeigeführte Dispersion zwischen den zwei Farben *D* und *F* gerade der Richtungsdifferenz gleich ist, welche Gleichung 4) für gleichzeitige Totalreflexion dieser beiden Farben erfordert. Soweit nun die Dispersion des Compensators auch für die übrigen Farben derjenigen des Prisma's *A* und derjenigen der Flüssigkeit proportional geht, d. h. abgesehen von den — meist kleinen — Abweichungen, welche der ungleichförmige Gang der Farbenzerstreuung in verschiedenen Substanzen herbeiführt, werden jetzt alle Strahlen gleichzeitiger Totalreflexion unterliegen, welche in ein und derselben Stelle der Focalebene des Objectivs ihren Sammelpunkt haben.



Durch die so ausführbare Achromatisirung der Totalreflexion wird es einestheils möglich, die beiden letzten Methoden zur Ermittlung des Brechungsexponenten mit weissem Licht genau in derselben Weise in Ausführung zu bringen, wie vorher für einfarbiges Licht beschrieben wurde — nur mit der Einschränkung, dass die Beobachtung allein diejenige Farbe betrifft, für deren Strahlen der Compensator genau geradseitig ist; andernteils aber gewährt dieses Verfahren zugleich ein neues Hilfsmittel zur Bestimmung der Farbenzerstreuung. Denn beobachtet man die Drehung z des Compensators, durch welche die Achromatisirung der Totalreflexion herbeigeführt wird, so gibt, wenn die Dispersion k der AMIC'schen Prismen für ein bestimmtes Farbenintervall bekannt ist, der Ausdruck

$$\kappa = 2 \cdot k \cdot \cos z$$

die zur Berechnung der Gleichung 5) erforderliche Winkeldifferenz δa für dieses Intervall; und es kann daraufhin die Dispersion δn der untersuchten Flüssigkeit nach der Formel

$$6) \delta n = 2 \cdot k \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \cos z}{\cos \beta} + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \cdot \delta \gamma$$

direct berechnet werden.

Sollte übrigens die Achromatisirung mit sehr kleiner Dispersion ausführbar sein, so kann der Compensator ohne Nachtheil auch mit einem einzigen geradseitigen Prisma hergestellt werden. Wenn dessen Hauptschnitt mit demjenigen des Prisma's A einen Winkel z bildet, so ist die im letzteren Hauptschnitt wirksame Dispersion

$$\kappa = k \cdot \cos z.$$

Hierbei tritt zwar gleichzeitig eine dem Sinus von z proportionale Dispersion in der Richtung der brechenden Kante von A [54] auf, welche die der Axe parallel verlaufenden farbigen Strahlen seitlich ablenkt; so lange aber k klein ist, diese Ablenkung also für die verschiedenen Farben in engen Grenzen bleibt, entspringt daraus kein merklicher Fehler in denjenigen Bestimmungen, welche zur Ableitung der Werthe von n und δn dienen.

11. Die Genauigkeit der Methode und der Einfluss der Beobachtungsfehler auf die Resultate.

Ehe dazu übergegangen wird, die experimentelle Ausführung der oben schematisch entwickelten Beobachtungsmethoden und die

Einrichtung der dazu dienenden Apparate zu beschreiben, sollen zunächst die Chancen, welche diese Methoden für die Erlangung exacter Maassbestimmungen bieten, einer Discussion unterzogen werden, weil deren Ergebnisse, abgesehen von ihrem unmittelbaren Interesse, zugleich die Richtschnur für die zweckmässige Wahl der instrumentellen Hilfsmittel enthalten.

Hierbei bleibt in Betracht zu ziehen, einestheils, welche Grenzen für die Genauigkeit der unmittelbaren Beobachtung durch die Natur der zu beobachtenden Erscheinungen gesetzt sind; andernteils, welchen Einfluss die unvermeidlichen Beobachtungsfehler vermöge des theoretischen Zusammenhangs unter den sämtlichen Bestimmungsstücken auf die Resultate gewinnen.

Was zunächst die Bestimmung des absoluten Brechungsexponenten anlangt, so kommt bei allen Verfahrungsweisen der Einfluss derjenigen Grössen, welche das angewandte Glasprisma A charakterisiren, in ganz gleicher Weise zur Geltung. — Wie etwaige Fehler bei der Bestimmung dieser Constanten w und v wirken, ergibt die folgende Entwicklung, bei welcher die auf Seite 44¹⁾ eingeführten Zeichen wieder benutzt und ausserdem da , dv und dn zur Bezeichnung der angenommenen Fehler verwandt sind.

Aus den Gleichungen 3) und 2) auf Seite 44¹⁾ folgt zuerst

$$dn = \sin \gamma \cdot dv + v \cos \gamma \cdot (dw + d\beta).$$

Gleichung 1) aber ergibt

$$\cos \beta \cdot d\beta = -\frac{1}{v^2} \sin \alpha \cdot dv = -\sin \beta \cdot \frac{dv}{v}.$$

Demnach wird der Ausdruck für den Fehler im Werthe des gesuchten Brechungsindex

$$dn = \left(\frac{n}{v} - \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \gamma \right) \cdot dv + v \cdot \cos \gamma \cdot dw.$$

Kraft des Princip's der Methode ist $\frac{n}{v}$ stets ein ächter Bruch, [55] und da, wie das Folgende zeigen wird, bei ihrer Anwendung der Winkel β niemals den Betrag von $12-15^\circ$ überschreitet, so ist der Coefficient des dv auch im ungünstigsten Fall nur wenig grösser als die Einheit. Ein Fehler im Brechungsexponenten des Glasprisma's A zieht also niemals einen andern als einen beiläufig gleich grossen Fehler in dem Brechungsindex der Flüssig-

1) [Seite 127 dieses Bandes.]



keit nach sich. — Der Werth von γ ferner geht bei Ausführung der in Rede stehenden Beobachtungen niemals unter 45° herab, daher denn selbst bei hohem Werthe des ν der Coefficient von dw in obigem Ausdruck gleichfalls die Einheit nicht merklich überschreiten kann. Ein Fehler im Winkel w tritt also ebenfalls nur mit einem seiner Grösse (im Bogenmaass) nahehin gleichem Betrag in das schliessliche Resultat ein — was für einen Fehler von einer ganzen Minute nur ca. 3 Einheiten der vierten Decimalstelle ausstragen würde.

In Anbetracht der grossen Sicherheit, mit welcher an einem Glasprisma die Werthe von w und ν bestimmt werden können, dürfen demzufolge die Fehler dieser Constanten für den vorliegenden Zweck als völlig unschädlich angesehen werden. — Ausserdem ist aber noch ausdrücklich hervorzuheben, dass die Beschaffenheit des zweiten Prisma's, welches die flüssige Schicht nach der andern Seite hin begrenzt, für die Messung durchaus ohne Einfluss bleibt. Denn die Ableitung des gesuchten Brechungsindex gründet sich ausschliesslich auf das Verhalten der Strahlen an der dem Objectiv zugewandten Trennungsfäche zwischen Glas und Flüssigkeit; wie das Licht jenseits dieser Fläche verlaufen möge, tangirt weder die Beobachtung der Totalreflexion noch die zu bestimmende Stellung jener Grenzfläche gegen die Fernrohraxe — wofern nur keine Ablendung der nicht reflectirten Strahlen eintritt. Dass beide Prismen zusammen eine planparallele Platte ohne Ablenkung bilden, ist ausschliesslich im Interesse bequemerer Beobachtung, weil andernfalls bei jeder andern Stellung des Prismenpaares entweder die eintretenden oder die austretenden Strahlen eine andere Richtung verfolgen würden. Diesem Zweck ist aber vollständig genügt, wenn der Brechungsindex und der brechende Winkel des zweiten Prisma's den entsprechenden Grössen beim ersten auch nur annähernd gleich sind¹⁾.

[56] Zweitens steht in Frage, wenn es sich um die Feststellung der Genauigkeitsbedingungen handelt, welchen Einfluss ein Fehler in der Bestimmung des Incidenzwinkels a , d. h. der Stellung des Prisma's A zur Fernrohraxe, gewinnt. Um diesen Einfluss zu

1) Bei demjenigen Verfahren, bei welchem ein Spalt im Brennpunkt des Objectivs durch das Prisma hindurch zu beobachten ist, muss natürlich vorausgesetzt werden, dass das zweite Prisma die Schärfe des Bildes nicht beeinträchtigt. Bei den andern Methoden, wo in der Focalebene des Objectivs beobachtet wird, fällt sogar dieser Anspruch hinweg.

beurtheilen, ist der Zusammenhang zwischen dn und da , unter Voraussetzung unveränderlicher Werthe für alle übrigen Bestimmungsstücke, aufzustellen. — Nun ergeben die auf Seite 44¹⁾ aufgestellten Gleichungen

$$\begin{aligned} dn &= \nu \cdot \cos \gamma \cdot d\gamma, \\ d\gamma &= d\beta, \\ \cos \beta \, d\beta &= \frac{1}{\nu} \cos a \cdot da, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$dn = \frac{\cos a \cdot \cos \gamma}{\cos \beta} \cdot da.$$

Da der äussere Incidenzwinkel a nothwendig immer grösser sein muss als derjenige im Innern des Glases, so ist stets

$$\frac{\cos a}{\cos \beta} < 1$$

und nur im Falle senkrechter Incidenz gleich der Einheit. Setzt man nun, da in der That bei den später zu beschreibenden Apparaten die Incidenz an der ersten Prismenfläche stets mit kleinen Winkeln erfolgt, diesen ersten Theil des oben auftretenden Coefficienten schlechthin gleich Eins, so bleibt das Verhältniss zwischen dn und da nur noch von $\cos \gamma$ abhängig. Es ist aber

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{\nu}\right)^2},$$

wonach man dieses Verhältniss für die vorkommenden Fälle leicht berechnen kann. — Gäbe man z. B. dem Glasprisma den sehr hohen Brechungsindex $\nu = 1,70$, so würde für den niedrigsten bei Flüssigkeiten vorkommenden Werth von n , 1,33, obiger Ausdruck 0,6 ergeben; unter der Voraussetzung eines Crownglasprisma's ($\nu = 1,51$) würde aber bei $n = 1,33$ nur 0,47 folgen. Der niedrigste Werth von n entspricht aber dem ungünstigsten Fall; liegt die Flüssigkeit dem angewandten Glase näher, so ergeben sich merklich kleinere Zahlen.

Hiernach lässt sich die Empfindlichkeit der Methode ermes sen. Sehr kleinen Unterschieden im Brechungsindex entsprechen relativ grosse Unterschiede in der Stellung der Prismen oder im [57] äusseren Incidenzwinkel der Strahlen. In den beiden ungünstigsten Fällen würde, wenn $da = 1$ Bogenminute, d. h. $= 0,0003$ ca. gesetzt wird, die zugehörige Differenz dn in dem einen 18, im andern

1) [Seite 127 dieses Bandes.]



nur 14 Einheiten der fünften Decimale ausmachen, demnach umgekehrt ein Unterschied gleich der Einheit der dritten Decimale beiläufig $5\frac{1}{2}$, bezüglich 7 Bogenminuten Unterschied in dem zu messenden Winkel herbeiführen. Die hinreichend genaue Beobachtung der Einstellungswinkel, sei es an einer Kreistheilung, sei es — wie das vierte Verfahren voraussetzt — an einer mikrometrischen Scala im Sehfeld des Fernrohrs, kann also niemals die geringsten Schwierigkeiten finden. Im Gegentheil werden für die Ausübung der in Rede stehenden Methode sehr viel größere Theilungen und viel rohere Einstellungs- und Ablesungsvorrichtungen wie bei der Untersuchung von Prismen ausreichend sein; was der Herstellung einfacher und handlicher Apparate für jenen Zweck besonders zu Statten kommt.

Das Vorstehende gibt zugleich Gewähr dafür, dass sowohl diejenigen kleinen Richtungsdivergenzen, welche bei den zwei ersten Beobachtungsweisen durch die Breite des erforderlichen Spaltes eingeführt werden, wie auch kleine unregelmässige Ablenkungen, welche die Strahlen erleiden möchten, die Genauigkeit der Messungen nicht beeinträchtigen werden. Solche unregelmässige Ablenkungen treten ein, wenn z. B. das Objectiv nicht vollkommen frei von sphärischer und chromatischer Aberration ist und namentlich, wenn die Beobachtung — sei es mit Spalt oder mit freiem Sehfeld — nicht genau in der Focalebene des Objectivs erfolgt. Beide Fehler bewirken, dass diejenigen Strahlen, die ein und demselben Punkt der Einstellungsebene entsprechen, vor dem Objectiv nicht vollkommen parallel verlaufen und daher kleine Unterschiede im Incidenzwinkel haben. Bei nur einigermaassen richtiger Construction und Orientirung dürfen solche Fehler als vollkommen unschädlich angesehen werden. — Gleiches gilt von denjenigen Abweichungen, zu welchen bei den zwei letztbeschriebenen Verfahrungsweisen die Compensator-Prismen Anlass geben, wenn dieselben nicht beide für die bestimmte Farbe, für welche der absolute Brechungsindex der Flüssigkeiten bestimmt werden soll, ganz genau geradsichtig sind. Selbstverständlich ist diese Anforderung nicht in aller Strenge zu erfüllen. Bei kunstgerechter Anfertigung solcher AMICI'scher Prismen lässt sich indess die Ablenkung einer vorgeschriebenen Farbe, z. B. des Natronlichtes, in der Richtung des Hauptschnittes mit Sicherheit unter einer Bogenminute halten; und da der Verfertiger [58] leicht darauf Bedacht nehmen kann, nicht Prismen mit Fehlern gleichen Sinnes zu verbinden, so braucht die im Hauptschnitt wirk-

same Ablenkung auch für die ganze Combination niemals den Betrag von einer Minute, der hieraus zu befürchtende Fehler im Brechungsindex also auch im ungünstigsten Falle niemals zwei Einheiten der vierten Stelle zu erreichen. — Wichtig ist aber für die Verwendung dieser Vorrichtung, dass der bei der Construction zusammengesetzter Prismen viel schwieriger zu vermeidende Pyramidalfehler, durch welchen Ablenkung in der Richtung der brechenden Kanten entsteht, bei den Beobachtungen vollständig eliminirt werden kann. Denn jede Grösse der Dispersion, die zur Achromatisirung der Totalreflexion erfordert wird, kann mit dem auf Seite 51¹⁾ beschriebenen Compensator bei zwei Stellungen, denen entgegengesetztes Vorzeichen der Drehung α entspricht, herbeigeführt werden. Man überzeugt sich leicht, dass die in die Richtung der resultirenden Dispersion fallenden Componenten der etwaigen Seitenablenkung bei diesen zwei Stellungen in entgegengesetztem Sinne wirken, daher denn bei der einen Einstellung der Incidenzwinkel der Strahlen an der Fläche A um ebenso viel vergrössert wie er bei der andern verkleinert wird. Beobachtet man also in beiden Stellungen, so ist das Mittel aus den erhaltenen Ablesungen vom Einfluss des Pyramidalfehlers frei.

Drittens endlich ist bei Beurtheilung der in Rede stehenden Methoden maassgebend, welcher Schärfe die Beobachtung der beginnenden Totalreflexion fähig ist. Hierbei kommt einestheils die Möglichkeit constanter Fehler, andernteils die grössere oder geringere Sicherheit in der Auffassung der zu beobachtenden Erscheinung in Betracht.

Constante Fehler anlangend, so ist bei der Einfachheit und Unaufechtbarkeit der theoretischen Grundlage, auf welcher die Ableitung des Brechungsexponenten aus der Totalreflexion beruht, kaum eine andere Gefahr vorhanden als die, dass bei Ausführung des Experiments gewisse Bedingungen nicht gehörig erfüllt sein könnten, welche das Princip der Methode fordert. Solcher sind aber nur zwei; eine geometrische: dass solche Strahlen, die überhaupt bei der Beobachtung in Betracht kommen, durch kein anderes Hinderniss ausser der totalen Reflexion der Flüssigkeit am freien Durchtritt durch das Doppelprisma verhindert seien; und eine physikalische: dass die optischen Eigenschaften der untersuchten Substanz durch das Einbringen derselben zwischen die Glasprismen keine Veränderung erleiden.

1) [Seite 134 dieses Bandes.]



[59] Es ist nicht überflüssig, die in Rede stehenden Combinationen auf beide Punkte hin genauer anzusehen, weil beide in der That zu Bedenken Anlass geben könnten.

Da die flüssige Schicht zwischen den Prismen doch jedenfalls eine gewisse, wenn auch sehr geringe Dicke haben muss und in ihrer Flächenausdehnung nicht unbegrenzt gross sein kann, die der totalen Reflexion nahen Strahlen in diese Schicht aber mit sehr grossem Incidenzwinkel — beinahe streifend — eintreten, so ist in der That eine Ablendung vor der wirklichen Totalreflexion, durch die Begrenzung der flüssigen Schicht, unvermeidlich; und es bedarf einer besonderen Untersuchung, um den Einfluss dieser Nebenwirkung festzustellen. — Zu diesem Zwecke werde angenommen, dass, während der wirklichen Totalreflexion ein Incidenzwinkel $= 90^\circ$ innerhalb der Flüssigkeit entspricht, ein Incidenzwinkel von $90^\circ - \xi$ den Durchtritt eines Strahles durch die Schicht schon unmöglich mache, indem dabei der betreffende Strahl deren äussere Begrenzung früher als die gegenüberliegende Prismenfläche erreiche. Alsdann ist — unter Beibehaltung der früher gebrauchten Zeichen — der zugehörige Incidenzwinkel desselben Strahls im Glase, dem Brechungsgesetz nach, durch die Gleichung gegeben:

$$\sin \gamma' = \frac{n}{v} \cdot \sin (90^\circ - \xi) = \frac{n}{v} \cdot \cos \xi.$$

Wird nun dieser Strahl für total reflectirt genommen und demnach der Winkel γ' statt des wahren Grenzwinkels γ der Berechnung des Brechungsindex der Flüssigkeit zu Grunde gelegt, so erhält man, wie leicht zu sehen, an Stelle des wahren Werthes n den Werth

$$n' = n \cos \xi$$

oder annähernd

$$n' = n - \frac{1}{2} n \cdot \xi^2,$$

wonach also der einem Ablendungswinkel ξ entsprechende Fehler im Brechungsindex

$$dn = -\frac{1}{2} n \xi^2$$

beträgt.

Würde nun für ξ z. B. 1° angenommen, also vorausgesetzt, dass die flüssige Schicht undurchgängig sei für alle Strahlen, die

stärker als um 89° gegen die Normale geneigt in ihr verlaufen, so ergäbe sich eine scheinbare Verminderung des Brechungsexponenten um $0,00015 \cdot n$, was auch bei den grössten für n vorkommenden Werthen [60] nur wenig über zwei Einheiten der vierten Stelle austragen würde. — Sollte aber auch die Dicke der Schicht auf 0,1 Mm. steigen, so würde der Ablendungswinkel die angenommene Grösse doch erst dann erreichen können, wenn der von der Einfallsstelle des Strahles bis zum Rand der Schicht frei bleibende Weg weniger als 6 Mm. betrüge. Es ist aus diesem Beispiel zu entnehmen, wie leicht die Gefahr einer schädlichen Ablendung der Strahlen innerhalb des Doppelprisma's beseitigt werden kann.

Auch der zweite Punkt, die Möglichkeit einer Veränderung des Brechungsvermögens einer Substanz durch das Einbringen derselben zwischen Glasprismen, erledigt sich leicht. Denn obwohl es kaum zweifelhaft sein kann, dass die Flüssigkeit in unmittelbarer Nähe an den Glasflächen in ihrer molecularen Beschaffenheit mehr oder minder verändert sein wird, so ist doch a priori weder wahrscheinlich, dass die verändernde Einwirkung der Glasmasse bis zu einem merklichen Abstand von der Berührungsfläche reichen, noch viel weniger aber, dass sie in einer Erniedrigung des Brechungsvermögens der Flüssigkeit sich äussern werde. Der Grenzwinkel der totalen Reflexion bestimmt sich aber offenbar stets nach dem niedrigsten Brechungsexponenten, der innerhalb der flüssigen Schicht vorkommt, und kann daher einen andern Werth als der normalen Beschaffenheit der Flüssigkeit entspricht, nur dann gewinnen, wenn entweder die moleculare Veränderung die flüssige Schicht durch ihre ganze Tiefe trifft, oder wenn unmittelbar an der Glasfläche eine Verminderung des Brechungsexponenten eintritt. Demnach ist zu erwarten, dass die in Rede stehende Einwirkung unschädlich bleiben wird, so bald die Schicht dick genug ist, um in der Mitte derselben die moleculare Veränderung als unmerklich annehmen zu dürfen. Welche Dicke dieser Bedingung genügen wird, ist allerdings nicht theoretisch zu bestimmen. Die Versuche aber, die ich mit den verschiedenartigsten Flüssigkeiten angestellt habe, lehren, dass der Grenzwinkel der totalen Reflexion stets dem im Hohlprisma bestimmten Brechungsindex genau entspricht, sobald überhaupt eine genaue Beobachtung der totalen Reflexion nach der hier betrachteten Methode möglich ist; was



— später zu erwähnender Hindernisse wegen — erst bei einer Dicke von 0,03—0,05 Mm. eintritt.

Was ferner die Sicherheit anlangt, mit welcher der Eintritt der Totalreflexion zu beobachten ist — worüber natürlich nur die Erfahrung Auskunft geben kann — so lehren Experimente mit den noch näher zu beschreibenden Apparaten, dass bei Berücksichtigung [61] einiger im Folgenden noch zur Sprache kommenden Vorsichtsmaassregeln die Auffassung der Erscheinung jeder nur irgend wünschenswerthen Schärfe fähig ist. Bei den zwei ersten Beobachtungsweisen erscheint die Auslöschungsgrenze in dem beobachteten Spectrum bei Anwendung eines ganz correcten Prisma's und eines hinreichend engen Spaltes als eine vollkommen scharfe Linie, welche den noch sichtbaren Theil des Spectrums gegen den verdunkelten deutlich abgrenzt, deren Fortschreiten bei allmählicher Drehung des Doppelprisma's in den feinsten Abstufungen verfolgt werden kann. Verwaschen und undeutlich wird die Trennungslinie nur in dem Falle, in welchem auch die Genauigkeit der Messung von der Schärfe der Einstellung auf eine bestimmte Farbe unabhängig ist, wenn nämlich die Dispersion der Flüssigkeit mit derjenigen des Doppelprisma's fast übereinstimmt und das ganze Spectrum beinahe gleichzeitiger Auslöschung unterliegt. — Erscheint nun das Spectrum des Spaltes in hinreichender Ausdehnung und mit gut sichtbaren FRAUNHOFER'schen Linien, so kann wenigstens in den helleren Theilen die Auslöschungsgrenze fast mit derselben Sicherheit wie bei den Messungen am Spectrometer der Spalt oder das Fadenkreuz, auf eine bestimmte Farbe eingestellt werden.

Diese Beschaffenheit des Spectrums lässt sich allerdings nur bei Anwendung directen Sonnenlichtes erreichen, weil andernfalls die Lichtstärke weder genügende Verengerung des Spaltes noch genügende Vergrösserung erlauben würde. Wo indess die Genauigkeit der Messungen nicht erheblich über die Einheit der dritten Decimale hinauszugehen braucht, reicht ein ganz kurzes Spectrum ohne FRAUNHOFER'sche Linien, so wie es mit diffusum Tageslicht oder mit einer Lichtflamme unter Anwendung eines breiteren Spaltes leicht erzielt wird, vollkommen aus, wenn man die Einstellung stets für den Uebergang zwischen Orange und Grün ausführt. Bei der raschen Veränderung des Farbtones in dieser Gegend des Spectrums ist es nach einiger Uebung sehr leicht, auf die blossen Farbenwahrnehmung hin immer dieselbe Stelle zu treffen;

und zwar gerade die FRAUNHOFER'sche Linie *D*, deren Licht, weil es nahezu das Maximum der Helligkeit im Spectrum bezeichnet und ausserdem experimentell so leicht darstellbar ist, unter allen Farben am meisten sich eignet, der Bestimmung der absoluten Brechungsexponenten zu Grunde gelegt zu werden.

Wird ferner nach den zwei andern Methoden unter Benutzung des Compensators in freiem Sehfeld beobachtet, so hängt die Schärfe [62] der Einstellung bei Anwendung weissen Lichtes wesentlich von dem Gange der Dispersion in der zu untersuchenden Flüssigkeit ab. Ist dieser naheliegender übereinstimmend mit demjenigen im Doppelprisma und in den Compensator-Prismen, so erhält man eine vollkommen farblose und scharfe Grenzlinie zwischen dem hellen und dem dunkeln Theile des Sehfeldes, welche sowohl an einem Fadenkreuz wie auch an einer Scala sehr genau eingestellt werden kann. Bei der grossen Mehrzahl der vorkommenden Flüssigkeiten von normaler Dispersion ist obige Bedingung in genügendem Maasse erfüllt, selbst wenn zur Construction der Apparate ziemlich schweres Flintglas verwandt wird. Nur bei einigen sehr stark brechenden Substanzen, wie bei Schwefelkohlenstoff und einigen ätherischen Oelen, macht sich die in den höheren Farben stark wachsende Dispersion durch eine weniger scharfe, violett umsäumte Grenzlinie bemerklich. Indess ist auch hier (da sich in diesen Fällen die Anwendung eines anderen als eines sehr stark brechenden Glases von selbst ausschliesst), die Unsicherheit der Einstellung nicht so gross, als dass der absolute Brechungsindex nicht auch ohne monochromatisches Licht noch auf 4—5 Einheiten der vierten Decimalstelle genau erhalten werden könnte.

Substanzen mit anomaler Dispersion hingegen können nach dieser letzteren Methode nur untersucht werden, wenn die Beobachtung ohne Compensator mit monochromatischen Lichtquellen von verschiedener Farbe ausgeführt wird.

Was schliesslich die Genauigkeitsbedingungen für die Messung der Farbenzerstreuung anbetrifft, so ist, so weit es sich dabei um diejenigen Combinationen handelt, bei welchen ein Spectrum beobachtet wird, dem Vorstehenden wenig mehr hinzuzufügen. Vorausgesetzt, dass die Differenzen des Brechungsindex für den maassgebenden Theil des Doppelprisma's genau bekannt sind, fordert die Bestimmung der entsprechenden Differenzen für die zu untersuchende Substanz nach der auf Seite 49¹⁾ aufgestellten Gleichung 5)

1) [Seite 132 dieses Bandes.]



nichts weiter als die Kenntniss der Drehung δa , welche die Grenzlinie der Totalreflexion von einer Farbe auf die andere führt. Nachdem Dasjenige, was auf die Genauigkeit der Einstellung auf bestimmte Farben Bezug hat, schon zur Sprache gekommen ist, bleiben nur noch die Ansprüche zu erwägen, welche an die Ausmessung der betreffenden Winkeldifferenzen zu stellen sind. Was hierzu gehört, ist aber bei Gelegenheit einer andern Erörterung auf Seite 56¹⁾ schon dargelegt. Dort ist gezeigt, dass der Factor, mit welchem in der Gleichung für δn der Wert von δa multiplicirt [63] ist, den Betrag von 0.6 in keinem Falle erreichen kann; woraus denn folgt, dass eine Unsicherheit von $\frac{1}{4}$ Bogenminute bei der Messung der Winkeldifferenzen den Werth von δn erst in der fünften Decimalstelle um höchstens 4–5 Einheiten beeinflusst. — Diese Messung stellt also in keinem Falle höhere Anforderungen, als mit den gewöhnlichen Winkelmessinstrumenten auch ohne die Hilfe mikrometrischer Vorrichtungen leicht befriedigt werden können.

Die Bestimmung der Farbenzerstreuung mittelst des Compensators bleibt, wenn die Dispersionsgrösse k der Compensatorprismen ein für alle mal ermittelt ist, — was natürlich mit grosser Genauigkeit geschehen kann, — kaum andern Fehlern unterworfen als denen, die aus ungenauer Einstellung entspringen. Denn diejenigen Mängel der AMICI'schen Prismen, welche die Messung des absoluten Brechungsindex möglicher Weise beeinträchtigen könnten, bleiben für die Differenzen ohne merklichen Einfluss; eine Abweichung der Mittelebene beider Prismen (d. h. derjenigen Ebene, in welcher die Hauptschnitte beider zusammenfallen) vom Hauptschnitt des Doppelprisma's ändert die wirksame Dispersion nur im Verhältniss des Cosinus dieser Abweichung zur Einheit, ist also erst bei ganz grobem Constructionsfehler schädlich; und eine falsche Bestimmung des Nullpunktes für die Messung der Drehungswinkel z eliminirt sich vollständig in dem Mittel aus zwei entgegengesetzten Drehungen. Es bleibt also nur noch in Frage, welcher Sicherheit die Einstellung selbst fähig ist. — In dieser Hinsicht würden die Bedingungen jedenfalls die möglichst günstigen werden, wenn man successive Einstellungen bei monochromatischer Beleuchtung in verschiedenen Farben ausführen und dabei jedesmal diejenige Stellung des Compensators aufsuchen wollte,

1) [Seite 139 dieses Bandes.]

welche die Grenzlinie auf das Fadenkreuz führt, wenn vorher das Doppelprisma für die Normalfarbe des Compensators eingestellt ist. In diesem Falle wie auch wenn mit einer doppelfarbigem Lichtquelle beobachtet und die Auslöschungsgrenzen beider Farben durch den Compensator zur Coincidenz gebracht würden, bliebe die Schärfe der Einstellung und auch die Maassbestimmung der Dispersion von der Gleichförmigkeit oder Ungleichförmigkeit der letzteren völlig unabhängig; und wenn man hinreichend intensive Lichtquellen verwenden wollte, würde — wie das Verhalten einer gut leuchtenden Natronflamme beurtheilen lässt — eine sehr grosse Genauigkeit erreicht werden können. Handelt es sich dagegen um die bequemere und einfachere Anwendung des [64] Verfahrens mit weissem Licht, so kann in den meisten Fällen weder die Bestimmung der Compensatorrotation noch die Auswerthung derselben die nämliche Sicherheit wie bei Messungen mit isolirten Farben gewinnen; die erstere nicht, weil die grössere oder geringere Verschiedenheit im Gange der Dispersionen von Compensator, Doppelprisma und Flüssigkeit immer sogen. secundäre Farbensäume an der Auslöschungsgrenze übrig lässt, die das Auge nicht immer in gleicher Weise auffasst; das andere, die Maassbestimmung, nicht, weil es ungewiss bleibt, welche Farben bei irgend einer bestimmten Einstellung wirklich zur Deckung gebracht worden sind. Das Resultat kann also die Dispersion der Flüssigkeit nur in einem Mittelwerthe angeben, der sich thatsächlich auf diejenigen Farben beziehen wird, deren Zusammenfallen den Eindruck der Achromasie am meisten begünstigt. Welche Farben im einzelnen Falle diese Rolle spielen, wird nicht nur von der subjectiven Auffassung der Farbeneindrücke, sondern auch vom Gange der Dispersion in der beobachteten Substanz abhängen. Wie aber a priori anzunehmen ist, dass in dieser Beziehung immer der hellere Theil des Spectrums dominirend sein wird, so zeigt die Erfahrung, dass man den anderweitig gemessenen wahren Werthen der Farbenzerstreuung bei diesen Beobachtungen durchschnittlich am nächsten kommt, wenn man die Einstellung des Compensators auf möglichst farblose Grenzen als eine Vereinigung der Strahlen der FRAUNHOFER'schen Linien C und F' interpretirt und demgemäss bei der Berechnung der Ablesungen die Dispersion des Compensators für dasselbe Intervall zu Grunde legt. — Nach meinen Beobachtungen wird auf solche Art der wirkliche Unterschied des Brechungsexponenten zwischen den genannten Strahlen immer bis auf 1,5, höchstens 2



Procent des ganzen Betrages getroffen — was für die meisten Bedürfnisse eine völlig ausreichende Genauigkeit sein möchte.

12. Die Anwendung der Methode beim Gebrauch des Spectrometers.

Nachdem im Voranstehenden die Methoden in ihren wesentlichen Stücken entwickelt und zugleich alle die Umstände in Betracht gezogen worden sind, von welchen bei der Anwendung die Genauigkeit der Resultate abhängt, bleibt nur noch die Einrichtung der äussern Hilfsmittel und das Detail des Beobachtungsverfahrens anzugeben.

[65] Den nächstliegenden und für genaue Messungen vorteilhaftesten Weg zur Ausübung der fraglichen Methoden bietet die Anwendung eines Spectrometers von der früher beschriebenen Construction dar, indem dieses alle Hilfsmittel zur Ausführung der einzelnen Operationen in der vollkommensten Form zur Disposition stellt. Es wird dabei nichts weiter erfordert als ein Doppelprisma mit solcher Fassung, dass es leicht und sicher auf den Prismenträger des Spectrometers aufgebracht werden kann. Ich benutze für diesen Zweck eine eben solche runde Scheibe mit centralem Ausschnitt wie zur Application gewöhnlicher Prismen; nur ist an ihr der Ausschnitt grösser und ist in demselben eine kleinere ebene Platte rechtwinklig zur Fläche der grossen Scheibe befestigt, so dass, wenn das Ganze an den Ring des Spectrometers angeklemt wird, ein ebenes Tischchen entsteht, welches durch die Regulirvorrichtung des Prismenträgers parallel zum Theilkreis gerichtet werden kann (Fig. 4 auf der Tafel). Die Prismen sind einzeln in geschwärzte Messingfassungen eingekittet, so dass von jedem nur die wirksamen beiden Flächen freiliegen. Dabei steht, wie Fig. 5 auf der Tafel erkennen lässt, die Hypotenusenfläche des einen *A* um ca. 1 Mm. über den Rand der Fassung vor, während die des andern *B* um nicht ganz denselben Betrag zurückliegt. Beim Zusammenlegen beider Prismen haben daher die vorstehenden Messingränder der Fassung von *B* am Prisma *A* selbst Führung, so dass eine an der Rückwand von *B* befestigte Feder, die in einen kleinen Ausschnitt der Fassung von *A* eingreift, genügt, um beide Prismen in richtiger Lage zusammenzuhalten. — Die Fassung von *A* (welche stets dem Fernrohr zugekehrt wird) trägt an ihrer unteren gut geebneten Aussenfläche ein kurzes Zäpfchen, welches in ein Loch

der Tischplatte einpasst, während die eine Kante der Fassung an eine Leiste sich anlegt und die Kathetenfläche des Prisma's der Ringe ebene parallel stellt.

Die Vorbereitung der Messung besteht, wenn man von der Bestimmung der Constanten absieht, blos darin, dass zuerst das Prisma *A* allein auf das Tischchen gesetzt und in seinen beiden Flächen auf die im ersten Theile beschriebene Weise mit Hilfe der Spiegelbilder des Spaltes justirt wird. Hierauf wird es wieder abgenommen, ein Tropfen der zu untersuchenden Flüssigkeit auf die gereinigte Hypotenusenfläche gebracht, das zweite Prisma darüber geschoben, so dass die Schlussfeder einspringt, und nun das Ganze wiederum aufgesetzt, wobei allein darauf Bedacht zu nehmen bleibt, dass die vorher bewirkte Justirung nicht durch eine [66] Drehung des Ringes beim Wiederaufsetzen gestört werde. Hiermit ist Alles zur Ausführung der Beobachtung bereit.

Beim Einbringen der Flüssigkeit bleibt indess eine Vorsichtsmaassregel zu beachten, welche hier wie auch bei allen anderen im Folgenden noch zu beschreibenden Formen der Beobachtung für die Sicherheit der Messung von entscheidendem Belang ist. Wenn nämlich die Glasflächen unmittelbar auf einander gelegt werden, so wird auch bei noch so vollkommener Ausführung der Prismen an einigen Stellen wirkliche Berührung eintreten und die Trennungsschicht an diesen Stellen für alle Richtungen durchsichtig sein. Aber auch hiervon abgesehen fordert die Beseitigung der auf Seite 60¹⁾ erwähnten principiellen Bedenken, dass die Dicke der Schicht nicht auf moleculare Dimensionen herabgehe; und endlich ist auch eine genaue Beobachtung der beginnenden Totalreflexion nur möglich, wenn die Flüssigkeit zwischen den Prismen eine gewisse gleichförmige Dicke hat, weil andernfalls durch Interferenz zwischen den einfach durchgehenden und den an den beiden Trennungsflächen wiederholt reflectirten Strahlen so starke Säume in der Nähe der Auslöschungsgrenze auftreten, dass deren Lage nicht mehr genau zu bestimmen ist; zumal dabei die geringsten sonst völlig unschädlichen Unebenheiten der Glasflächen sehr störende Unregelmässigkeiten bewirken. Alle diese Hindernisse aber fallen sogleich hinweg, sobald man vor dem Aufstecken des zweiten Prisma's zwei schmale Streifen von dünnem Briefpapier oder Stanniol auf die Enden der Hypotenusenfläche, an

1) [Seite 143 dieses Bandes.]



deren kurzen Seiten, auflegt, so dass der Abstand der Prismen auf einer wahrnehmbaren Grösse — etwa $\frac{1}{20} - \frac{1}{10}$ Mm. — erhalten wird; was nach dem auf Seite 60¹⁾ über die mögliche Gefahr einer Ablendung Gesagten nicht dem geringsten Bedenken unterliegen kann.

Die Einstellung des Doppelprisma's auf die beginnende Totalreflexion kann beim Gebrauch des Spectrometers auf zweierlei Weise erfolgen.

Erstens kann man durch die Prismen hindurch den Spalt des Collimatorfernrohrs beobachten, indem man diesen auf die gewöhnliche Art durch seitlich einfallendes Licht beleuchtet, das Ocular aber zudeckt, damit die Umgebung des Spaltes dunkel bleibe. Um dabei das Bild der Lichtlinie in ein Spectrum von hinreichender Ausdehnung zu verwandeln, bediene ich mich eines kleinen Fernrohrs von etwa 6facher Vergrösserung, vor dessen Objectiv ein gutes Amici'sches Prisma von etwa 15 Mm. freier [67] Oeffnung fest aufgesteckt ist. Dieses Fernrohr wird auf einem ganz einfachen Stativ neben dem Spectrometer aufgestellt und so gerichtet, dass das Spectrum in seinem Gesichtsfeld erscheint. Die Einstellung der Auslöschungsgrenze auf die einzelnen FRAUNHOFER'schen Linien kann dann in aller Sicherheit bewirkt werden, indem man, durch dieses Fernrohr sehend, den Theilkreis des Spectrometers mit freier Hand langsam fort dreht; wobei es die richtige Einstellung erleichtert, wenn man ein Fadenkreuz im Oculare durch leichte Drehung des Beobachtungsrohrs auf die betreffende dunkle Linie vor ihrem völligen Verschwinden einstellt, um sodann die Auslöschungsgrenze auf dieses Fadenkreuz zu führen. Wenn die beiden Theile des Doppelprisma's aus dem nämlichen Glase gefertigt sind und nahehin gleiche Winkel haben und wenn das Stativ des Hilfsfernrohrs einigermaassen sichern Stand hat, ist durch die kleine Drehung zwischen beiden Einstellungen eine Veränderung nicht zu befürchten.

Zweitens kann die Beobachtung auch nach der dritten Methode im Sehfelde des Collimatorfernrohrs ausgeführt werden, wenn man eine Lichtquelle zur Verfügung hat, welches einfarbiges Licht oder doch nur Strahlen von wenigen discreten Farben liefert. Der Spalt des Collimatorfernrohrs bleibt dabei ganz ausser Gebrauch; nur die den Spalt verlängern den kurzen Schneiden werden anstatt

1) [Seite 143 dieses Bandes].

eines Fadenkreuzes zur Einstellung benutzt. Die Lichtquelle wird dicht neben dem Instrument, in der Richtung der Fernrohraxe, so aufgestellt, dass vor Beginn der Totalreflexion das ganze Sehfeld gleichmässig erhellt erscheint. — Eine gut leuchtende Natronflamme in dieser Weise benutzt, gewährt eine sehr deutliche Auslöschungsgrenze, welche mit grosser Sicherheit in die Mitte der Schneiden gebracht werden kann, wenn man durch passend angebrachte Schirme das Sehfeld von anderen Strahlen frei hält.

Die Data zur Berechnung der Brechungsindices, nämlich die Werthe des Winkels α , erhält man natürlich bei beiden Verfahrensweisen dadurch, dass naeinander der Theilkreis abgelesen wird für diejenige Stellung des Doppelprisma's, bei welcher die Totalreflexion eintritt, und für diejenige, bei der die vordere, d. h. die dem Objectiv zugewandte Prismenfläche normal zur Fernrohraxe gerichtet ist.

Die Construction der Prismen anlangend, so wird man den Winkel ω am zweckmässigsten so bestimmen, dass für die beiden äussersten Werthe der Brechungsexponenten, die dem Doppelprisma noch zugänglich sein sollen, die Incidenz an der vorderen [68] Glasfläche nahehin um gleich viel nach beiden Seiten von der Senkrechten abweicht; die Wahl der Glasart aber wird sich zu richten haben nach dem Spielraum im Brechungsexponenten, für welchen der Apparat brauchbar sein soll. — Wird verlangt, dass alle Flüssigkeiten vom Wasser bis zum Schwefelkohlenstoff mit ein und demselben Prismenpaar zu beobachten seien, so muss sehr schweres Flintglas in Anwendung kommen; braucht dagegen der Apparat z. B. nur bis zum Brechungsexponenten 1,55 zu reichen, so genügt ein mittleres Flint von etwa 1,61 bis 1,62 für Natronlicht; und Crownglas reicht aus, wenn nicht höhere Brechungsexponenten als etwa 1,45 in Frage stehen. Wegen der leichteren Herstellung und der grösseren Dauerhaftigkeit wird man aber immer bei Glasarten von geringerem Brechungsvermögen stehen bleiben, wenn nicht der besondere Zweck, dem der Apparat dienen soll, andere nöthig macht.

Berechnet man nun unter Voraussetzung eines schweren Flintglases von 1,68 die Grenzwinkel der Totalreflexion einerseits für $n=1,30$, andererseits für 1,63, so ergibt sich, dass bei einem Prismenwinkel von $63-64^\circ$ die extremen Einfallswinkel nach beiden Seiten hin etwa gleiche Grösse erhalten; und da auch für die andern namhaft gemachten Fälle bis auf geringe Unterschiede



derselbe Werth kommt, so wird bei allen derartigen Prismencombinationen die Hypotenusenfläche mit der kurzen Kathete einen Winkel von p. p. 64° zu bilden haben; was auf ganz bequeme Formen führt.

Was zuletzt die Bestimmung der Constanten des wirksamen Prisma's anbetrifft, so ist der Winkel ω natürlich jederzeit auf dem gewöhnlichen Wege zu messen. Soll aber auch der Brechungsexponent und die Farbenzerstreuung an diesem nämlichen Prisma mittelst des Spectrometers beobachtet werden, so bleibt nichts weiter übrig, als auch die lange Kathetenfläche poliren zu lassen und vor dem Einkitten des Prismas in die Fassung die betreffende Messung an dem kleineren brechenden Winkel dieser langen Seite auszuführen.

Wenn schon die hier beschriebene Methode nicht ganz dieselbe Genauigkeit gewährt, die man unter günstigen Umständen mit sehr guten Apparaten und bei sehr sorgfältiger Ausführung der Messung mittelst des Hohlprisma's zu erreichen vermag, so sind dagegen solche Bestimmungen, von denen keine grössere Genauigkeit als auf zwei bis drei Einheiten der 4. Decimalstelle verlangt wird, mit ihrer Hilfe nicht nur durch ein viel weniger vollkommenes [69] Instrument, sondern auch mit erheblich einfacheren Operationen zu erhalten; und sie bietet, abgesehen von dem geringen Substanzverbrauch, ausserdem noch den Vortheil, auf Substanzen anwendbar zu sein, die sich, sei es wegen ungenügender Reinheit, sei es wegen starker Färbung, im Hohlprisma gar nicht oder nur sehr schwierig untersuchen lassen.

Für einige besondere Zwecke mag auch noch der Vorzug zu Statten kommen, dass man bei dieser Beobachtungsmethode grosse Temperaturdifferenzen der zu untersuchenden Substanz ohne alle Umstände mit voller Sicherheit in der Gewalt hat. Man braucht offenbar nur das Doppelprisma mit sammt der Flüssigkeit hinreichend lange in einem Bad von genau bestimmter Temperatur zu erwärmen, um der Temperatur der Flüssigkeit während der Messung sicher zu sein, da in den paar Augenblicken, die nach vorheriger Justirung zwischen dem Aufbringen und der Einstellung verstreichen, eine Abkühlung oder Erwärmung der eingeschlossenen Schicht vollkommen unmöglich ist.

13. Selbständige Apparate (Refractometer) zur optischen Bestimmung von Flüssigkeiten.

Die günstigen Bedingungen, welche das Princip der Totalreflexion in Bezug auf leichte und bequeme Ausführung dioptrischer Maassbestimmungen an Flüssigkeiten gewährt, legen den Gedanken nahe, im Interesse der mancherlei wissenschaftlichen und praktischen Aufgaben, die von solchen Maassbestimmungen Nutzen ziehen könnten, compendiöse und leicht zu gebrauchende Instrumente für die Ausübung jener Methode zu construiren, um diese Ausübung unabhängig vom Gebrauch eines Spectrometers zu machen. Die Möglichkeit dessen ist gegeben durch die geringe Zahl wesentlicher Theile, die, den vorangehenden Entwicklungen zufolge, den erforderlichen Apparat ausmachen und durch die geringen Ansprüche, welche die Methode an die Genauigkeit der Winkelmessungen stellt.

Als wesentliche Bestandtheile eines vollständigen Instruments figuriren bei den drei zuletzt beschriebenen Verfahrensweisen, ausser einer Vorrichtung zur Winkelmessung, nur noch ein Fernrohr, das Doppelprisma und eventuell der Compensator. Die Dimensionen, in denen diese Stücke ihrem Zweck genügen und die Art von Verbindung, in welcher sie untereinander zu stehen haben, sind beide der Construction eines zum Handgebrauch geeigneten [70] Instruments durchaus günstig; namentlich aber kommt diesem Zweck die auffällige Unempfindlichkeit der Methode gegen Fehler der Winkelmessung zu Statten. Denn wenn, wie auf Seite 57¹⁾ dargethan, ein Fehler von 5–6 Bogenminuten in ungünstigsten Fall erst eine Differenz von 0,001 im Brechungsexponenten nach sich zieht, so wird für alle Messungen, bei welchen man die Hälfte dieses Betrages als Fehlergrenze zugibt, nicht nur ein verhältnissmässig kleiner Gradbogen zur Winkelmessung ausreichen, sondern man wird dabei auch auf die Elimination der Excentricität und auf alle Hilfsmittel feinerer Ablesung, Nonien und dergl. verzichten können. Damit ist aber die Möglichkeit gegeben, Ablesung der Winkel und Berechnung des Resultats in einen Act zu vereinigen, indem man an Stelle der gewöhnlichen gleichförmigen Kreistheilung eine für das betreffende Doppelprisma entworfene empirische Theilung setzt, deren Intervalle die Zunahmen des

1) [Seite 140 dieses Bandes.]



äusseren Incidenzwinkels für gleiche Zunahmen des Brechungsexponenten darstellen, und welche daher unmittelbar nach bewirkter Einstellung den gesuchten Brechungsindex abzulesen erlaubt; wodurch nicht nur jede Rechnung, sondern zugleich auch die Einstellung auf die Normale der äusseren Prismenfläche erspart wird.

Die Herstellung einer solchen nach gleichen Zunahmen des Brechungsindex fortschreitenden Theilung, sei es an einem Gradbogen oder an einer Ocular-Scala, unterliegt offenbar nicht der geringsten Schwierigkeit. Der Verfertiger braucht nur den Brechungsexponenten des angewandten Glases und den brechenden Winkel des Prisma's genau zu bestimmen, darauf hin den Grenzwinkel der Totalreflexion für alle bei Flüssigkeiten vorkommenden Werthe des n , etwa von Hundertel zu Hundertel oder in noch kleineren Abstufungen fortschreitend, zu berechnen und schliesslich die diesen Grenzwinkeln zugehörigen Austrittswinkel abzuleiten. Nach Auftragen der entsprechenden Theilung und richtiger Bezifferung muss zuletzt der Index so regulirt werden, dass für irgend eine Substanz von anderweitig bekanntem Brechungsexponenten die Einstellung diesen an der Theilung ergibt; alsdann stimmen von selbst alle Theilstriche mit den Einstellungen für die ihnen entsprechenden Werthe des n . — In derselben Weise wird man, falls das Prisma fest mit dem Fernrohr verbunden ist, eine Scala im Ocularfelde der letzteren, die gleichfalls unmittelbar den Brechungsexponenten angibt, entwerfen; nur dass in diesem Falle zur Uebersetzung der Winkel auf die Längentheilung die Aequivalent-Brennweite des Fernrohr-Objectivs bestimmt sein muss.

[71] Es ist bei dieser Combination natürlich unvermeidlich — aber auch gar kein Nachtheil — dass alle Messungen auf die eine bestimmte Farbe, welche der Berechnung der Theilung zu Grunde gelegt wurde, beschränkt bleiben. Nach dem auf Seite 61¹⁾ Angeführten wird man hierzu stets das Licht der Natronflamme oder der FRAUNHOFER'schen Linie D wählen.

Nach der angegebenen Richtschnur habe ich solche Refractometer in drei verschiedenen Formen, welche in den Figg. 6, 7 und 8 auf der Taf. dargestellt sind, ausführen lassen. Die beiden ersten Formen sind zur Untersuchung aller Flüssigkeiten geeignet, indem sie das Intervall von $n=1,30$ bis $n=1,63$ umfassen; sie unterscheiden sich nur dadurch, dass das eine Instrument, zum Gebrauch

1) [Seite 145 dieses Bandes.]

in freier Hand eingerichtet, blos die Bestimmung des absoluten Brechungsexponenten gewährt, während das andere grössere, auf Stativ, mit Compensator zur gleichzeitigen Messung der mittleren Dispersion versehen ist. — Das Refractometer der dritten Form gibt die Ablesung an einer Scala im Ocular, während jene beiden die Theilung an einem Gradbogen tragen. Diese Modification beschränkt jedoch den Umfang der Anwendung auf das kleinere Intervall von $n=1,30$ bis $n=1,43$, so dass diese Form nur für Flüssigkeiten von geringem Brechungsvermögen brauchbar ist.

Die Beschreibung der mechanischen Einrichtung der drei Apparate kann sehr kurz gegeben werden, nachdem im Voranstehenden alle maassgebenden Rücksichten schon Erörterung gefunden haben.

Die erste Form ist auf diejenige Beobachtungsweise berechnet, die Seite 45¹⁾ als zweite Methode beschrieben worden ist. Demgemäss stellt in Fig. 6 auf der Taf. $f F$ ein kleines Fernrohr von 2–3 maliger Vergrösserung dar, dessen Bestandtheile den in den Figg. 4 u. 5 des Textes²⁾ schematisch skizzirten Stücken entsprechen. f bezeichnet die Stelle des Objectivs; in dessen Focus bei F befindet sich ein justirbares Diaphragma, welches einen kurzen Spalt von angemessener Weite trägt. Hinter diesem Spalte steht, mit O bezeichnet, in einer verschiebbaren Hülse das in Fig. 5 auf Seite 45¹⁾ dargestellte Spectralocular, eine einfache Convexlinie in Verbindung mit einem AMOY'schen Prisma, mittelst dessen das Bild des Spaltes bei richtiger Stellung des Oculars in ein scharfes Spectrum verwandelt wird. — Das ganze Fernrohr ist mittelst eines kleinen Ständers D am Objectivende auf einen Sector A aufgeschraubt, der bei K den Drehungszapfen einer das Doppelprisma C tragenden kreisförmigen Platte enthält. Das eine von beiden Prismen [72] ist durch Vermittelung dieser Platte fest mit dem Drehungszapfen verbunden, so dass seine brechende Kante senkrecht zur Ebene des Sectors und zur Fernrohraxe gerichtet ist, das andere wird durch die in Fig. 5 der Tafel dargestellte und auf Seite 65³⁾ schon beschriebene Einrichtung der Fassung bei Ausführung der Beobachtung aufgesteckt. Mit dem Drehungszapfen in fester Verbindung steht ausserdem eine Alhidade B mit justirbarem Index. Die Theilung an der Peripherie des Sectors gibt unmittelbar

1) [Seite 128 dieses Bandes.]

2) [Seite 125 u. 128 dieses Bandes.]

3) [Seite 148 dieses Bandes.]



Unterschiede des Brechungsexponenten von 5 zu 5 Tausendeln an; die Intervalle aber sind auch da, wo die Striche am engsten stehen, noch gross genug, um mit freiem Auge eine Ablesung, die bis auf halbe Tausendtel sicher ist, zu ermöglichen.

Soll mit dem Instrument beobachtet werden, so wird zuerst das bewegliche Prisma abgenommen und auf die freiliegende Fläche des festen, nach vorheriger Reinigung¹⁾ und nach Auflegen schmalen Streifchen von dünnem Briefpapier an den kurzen Seiten, ein Tropfen der zu untersuchenden Substanz aufgebracht, wobei man das Ganze aus freier Hand so vor sich hält, dass die betreffende Fläche horizontale Lage gewinnt. Hierauf wird das zweite Prisma aufgesteckt und, während der Index auf kleinen Zahlen steht, das Fernrohr mit der Hand auf eine beliebige Lichtquelle, auf den hellen Himmel, den Milchglasschirm einer Lampe oder, wenn man intensives Licht gebraucht, auf eine offene Gas- oder Petroleumflamme, gerichtet. Man stellt das verschiebbare Ocular auf das jetzt sichtbare Spectrum ein und dreht schliesslich die Alhidade langsam und stetig nach den wachsenden Zahlen hin, bis die Auslöschungsgrenze auf die Gegend der Linie *D*, d. h. auf die Stelle des Uebergangs von Orange zu Grün vorgerückt ist. Die Ablesung der Theilung gibt jetzt unmittelbar den Brechungsindex der betreffenden Substanz für die FRAUNHOFER'sche Linie *D*.

Wegen des von der freien Prismenfläche reflectirten Lichtes, welches in das Fernrohrobjectiv eindringt, verschwinden die der totalen Reflexion unterliegenden Theile des Spectrums meist nicht vollständig, sondern bleiben in sehr verminderter Helligkeit noch sichtbar. Man erblickt daher einen hellen Theil des Spectrums in einer scharfen Linie gegen einen ganz blassen Theil abgegrenzt. — Auf die richtige Erkennung der verlangten Farbe *D* übt man [73] das Auge leicht, indem man mit dem Instrument einigemal durch eine gut leuchtende Natronflamme hindurch auf eine weisse Lichtquelle hinsieht. Indem dabei das monochromatische Spaltbild des Natronlichtes im Spectrum hervortritt, erhält man die Stelle der Linie *D* sichtbar bezeichnet.

Die Justirung des Index wird am einfachsten durch eine Einstellung mit reinem Wasser bewirkt. Bei der mittleren Tempe-

1) Die in Bezug auf die Reinigung zu stellenden Ansprüche sind sehr gering. Es genügt in allen Fällen ein flüchtiges Abwischen der beiden Glasflächen mit Wasser oder Alkohol.

ratur von ca. 18° Cels. muss der Index, wenn er die richtige Lage hat, den Werth 1,333 angeben.

Das Refractometer der zweiten Form, welches auf der Tafel in Fig. 7 dargestellt ist, bringt die Seite 46¹⁾ beschriebene dritte Beobachtungsmethode zur Ausführung. Doppelprisma, Sector und Alhidade haben, abgesehen von grösseren Dimensionen, dieselbe Einrichtung wie bei dem eben beschriebenen Instrument, nur dass die feinere Theilung hier die Tausendtel des Brechungsindex unmittelbar angibt und bei Gebrauch einer Ablesungslupe 2—3 Einheiten der vierten Decimale noch zu schätzen erlaubt. Das Fernrohr dagegen hat hier ein offenes Ocularfeld und in demselben, bei *F*, im Brennpunkte des Objectivs *J* ein einfaches Fadenkreuz. Die Röhre des Fernrohrs ist vor dem Objectiv durch eine Hülse *T* verlängert und mit dieser in den auf den Sector aufgesetzten Ständer *D* eingeschraubt. Letzterer trägt zugleich den in Fig. 7²⁾ des Textes skizzirten Compensator, in der Art, dass die Fassung des einen AMICI'schen Prisma's innerhalb der Hülse *T* liegt, während die des anderen, *S*, ausserhalb des Ständers *D* zu Tage tritt. Die Drehung beider Compensatorprismen nach entgegengesetzten Seiten um je gleiche Winkel bewirkt der zwischen die Zahnkränze der Fassungen eingefügte Trieb, dessen Knopf, der Hand des Beobachters bequem zugänglich, bei *t* vorsteht. Eine auf die Fassung *S* aufgesteckte getheilte Trommel *c* lässt den Winkel, den die Hauptschnitte der Compensatorprismen bei irgend einer Stellung mit der Ebene des Sectors bilden, ablesen. Die Theilung der Trommel zeigt auf Null, wenn die Hauptschnitte beider Prismen diejenige Lage haben, bei welcher der Incidenzwinkel der austretenden Strahlen an der flüssigen Schicht von Rot zu Blau zunimmt; sie geht von hier aus beiderseits bis 60, so dass jedes Intervall einen Winkel von 3° ausdrückt und die Zahl 30 der senkrechten Stellung beider Prismen, mithin dem Nullwerthe der vom Compensator erzeugten Dispersion entspricht.

Der ganze Sector sammt den mit ihm verbundenen Theilen wird von einer Säule *G* auf schwerem Metallfuss getragen. Während [74] der Messung steht die Axe des Fernrohrs um ca. 60° gegen die Ebene des Tisches geneigt, so dass man wie an einem Mikroskop mit inclinirendem Tubus beobachtet. In der Richtung der Visirlinie ist am Fusse des Instruments ein kleiner um zwei

1) [Seite 128 dieses Bandes.]

2) [Seite 134 dieses Bandes.]



Axen drehbarer Hohlspiegel g angebracht, mittelst dessen das Sehfeld beleuchtet wird. Um aber das feste Prisma beim Reinigen und beim Aufbringen der Flüssigkeit bequem zugänglich zu haben, ist die Einrichtung getroffen, dass der ganze Sector um einen besonders, mit der Drehungsaxe der Alhidade concentrischen Zapfen im Kopfe K der Säule G nach der entgegengesetzten Seite umgelegt werden kann, so weit, dass die oberste Ecke e des Gradbogens die Tischfläche berührt. In dieser Stellung des Instruments ist das Doppelprisma dem Beobachter zugekehrt, und zwar in solcher Lage, dass nach Wegnahme des beweglichen Prisma's die Hypotenusenfläche des andern, nahehin horizontal gerichtet, frei liegt.

Bei Ausführung der Beobachtungen stellt man das Instrument so vor sich auf den Tisch, dass der Hohlspiegel dem Fenster oder der etwa zu verwendenden künstlichen Lichtquelle zugekehrt ist, legt den Sector um und bringt die zu untersuchende Substanz auf. Hierauf wird der Sector wieder aufgerichtet, die Alhidade an den Anfang des Gradbogens zurückgedreht und der Hohlspiegel im Fuss so eingestellt, dass das ganze Gesichtsfeld gleichmässig hell erscheint. Jetzt erst bewegt man die Alhidade nach der Seite der grösseren Zahlen hin vor, bis die Auslöschungsgrenze — meist mit breitem farbigen Saum — im Sehfeld zum Vorschein kommt. Man stellt nun durch Drehung des Triebes t mit der einen Hand die Achromasie her, während die andere Hand die jetzt scharf erscheinende Grenzlinie zwischen Hell und Dunkel mittelst der Alhidade vollends auf das Fadenkreuz führt. Schliesslich wiederholt man diese Einstellung nochmals mit der zweiten Stellung des Compensators, welche eine achromatische Auslöschungsgrenze erzeugt. Das Mittel aus den Ablesungen am Sector bei beiden Einstellungen ergibt ohne Weiteres den gesuchten Brechungsexponenten für die FRAUNHOFER'SCHE Linie D ; das Mittel aus den zugehörigen Trommelablesungen aber liefert den Winkel z , mit dessen Hilfe die Dispersion der Flüssigkeit nach der auf Seite 53¹⁾ aufgestellten Regel zu berechnen ist.

Die Ausführung dieser Berechnung setzt natürlich voraus, dass man den Brechungsexponenten n , die Dispersion δn und den brechenden Winkel w des Doppelprisma's sowie die Dispersion k je eines Compensatorprisma's kenne; sie kann aber sehr vereinfacht [75] werden, wenn man die in dem Ausdruck für δn vor-

1) [Seite 136 dieses Bandes.]

kommenden Factoren — oder besser gleich deren Logarithmen — mit den für das betreffende Instrument geltenden Constanten ein für allemal ausrechnet und in einer kleinen Tafel zusammenstellt. Für diesen Zweck sind offenbar die Werthe von nur drei Grössen getrennt aufzuführen; nämlich erstens die Werthe des Gliedes

$$\frac{\sin w}{\cos \beta} \cdot \delta n = A$$

für alle vorkommenden Beträge des n ; zweitens diejenigen von

$$2k \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\cos \beta} = B$$

ebenfalls für alle Abstufungen von n ; drittens der Werth von $\cos z = \sigma$ für die sämtlichen Zahlen der Trommelteilung. Auf Grund der im einzelnen Falle beobachteten Werthe von n und z (letzteres in Trommeltheilen ausgedrückt) wird man aus der Tafel diejenigen Beträge der drei Stücke entnehmen, welche nach Maassgabe der Gleichung

$$\delta n = B \cdot \sigma + A$$

vereinigt, die Dispersion der Flüssigkeit für dasjenige Farbenintervall ergeben, für welches der Werth der Constanten k gilt. Dabei reicht es für den Gebrauch in allen Fällen aus, wenn die Werthe A und B von Hundertel zu Hundertel des Brechungsexponenten aufgeführt, die feineren Abstufungen aber durch Interpolation bestimmt werden.

Das Refractometer der dritten Form, welches Fig. 8 der Tafel darstellt, realisirt das auf Seite 47¹⁾ entwickelte vierte Verfahren der Beobachtung. Demnach ist das Doppelprisma, oder wenigstens das eine Stück desselben, fest mit dem kleinen Fernrohr JO verbunden, in dessen Focalebene F aber ist eine Glasplatte mit bezifferter Mikrometerscala angebracht, welche die Einstellung der Auslöschungsgrenze von Tausendtel zu Tausendtel des Brechungsexponenten direct angibt. Um bei der Beobachtung nicht auf den Gebrauch einfarbigen Lichtes eingeschränkt zu sein, ist auch hier zwischen dem Objectiv J und dem Doppelprisma C ein Compensator eingeschaltet. Indess besteht derselbe, da der Umfang der Anwendung dieses dritten Refractometers doch nur kleine Dispersionsgrössen fordert, aus einem einzigen AMICI'SCHEN Prisma von geringer Farbenzerstreuung (ca. $0,6^\circ$ für das Intervall von C bis F), welches in einem cylindrischen Ring innerhalb der Hülse

1) [Seite 129 dieses Bandes.]



D drehbar ist. Die Drehung wird durch einen hervorstehenden Knopf d , der in einem Schlitz der Hülse D Führung hat, bewirkt. — [76] Die Verbindung der beiden Stücke des Doppelprisma's nach Aufbringen der zu untersuchenden Flüssigkeit wird hier durch eine um den Zapfen f drehbare Feder e bewirkt, welche das bewegliche Prisma an das feste andrückt. Wenn das vordere Prisma entfernt werden soll, hebt man die Feder mit dem Finger ab und dreht sie um den Zapfen f zurück, so dass die lange Prismenfläche für das Reinigen und Aufbringen der Flüssigkeit vollkommen zugänglich ist.

Bei der Beobachtung richtet man das kleine Instrument aus freier Hand gegen eine gleichmässig helle Fläche, den hellen Himmel, eine weisse Wand, einen Lampenschirm oder dergl., stellt das Compensatorprisma mittelst des Knopfes d so ein, dass die Auslöschungsgrenze möglichst farblos wird, und liest schliesslich den Ort derselben an der Ocularscala ab. — Die Justirung der Scala geschieht, wie bei den beiden andern Instrumenten durch eine Einstellung mit reinem Wasser; sie wird hier mittelst zweier Schrauben ausgeführt, die das Objectiv J in der Richtung des Prismen-Hauptschnittes zu verschieben erlauben.

Da das absolute Gesichtsfeld eines Fernrohrs ohne sehr complicirte Einrichtung von Objectiv und Ocular nicht wohl über 18° hinaus vergrössert werden kann, so bleibt bei dieser dritten Construction die Messung beschränkt auf Incidenzwinkel von ca. 9° zu beiden Seiten der Normalen zur äusseren Prismenfläche, was bei Anwendung von Crownglas den oben bezeichneten Umfang von 1,30 bis 1,43 im Brechungsindex ergibt. Der Apparat ist daher ausschliesslich für Substanzen innerhalb dieser Grenzen, also vorwiegend für wässrige Flüssigkeiten, Salzlösungen u. dergl. brauchbar. Für solche aber gewährt er eine grosse Genauigkeit, indem, wenn schon der absolute Werth des n auch hier nicht genauer als etwa auf 0,0005 zu erhalten ist, Unterschiede doch bis auf zwei Einheiten der 4. Stelle ganz sicher an der Scala abgelesen werden können, wie u. A. schon die Wahrnehmbarkeit des Einflusses sehr kleiner Temperaturdifferenzen bekundet. In Hinsicht auf mögliche Anwendungen für technische Zwecke gereicht dieser dritten Form des Refractometers ausserdem noch der Umstand zum Vortheil, dass sich neben oder statt der Theilung für den Brechungsindex ebenso leicht eine andere empirische Scala anbringen lässt, z. B. eine solche, an welcher der Concentrations-

grad irgend einer Mischung, auf Grund seines Einflusses auf den Brechungsindex, direct abgelesen werden kann.

Wenn die Vortheile, welche die Methode in Bezug auf Leichtigkeit [77] und Schnelligkeit bieten kann, im Gebrauch ungeschmälert zur Geltung kommen sollen, ist es bei den drei hier beschriebenen Instrumenten in gleichem Grade wesentlich, dass die mechanische Ausführung der Apparate allen theoretisch gemachten Voraussetzungen in hinreichendem Grade genüge, um von Correctionen und den zu ihrer Ermittlung nöthigen Nebenbestimmungen völlig absehen zu können. Namentlich ist also zu fordern: dass die optische Axe des Fernrohrs dem Hauptschnitt des Doppelprisma's und eventuell auch der Ebene des Sectors genügend parallel sei; dass die Theilung des Sectors oder der Scala innerhalb der Grenzen des Ablesungsfehlers dem Gange des Brechungsindex genau conform gehe; dass die Compensatorprismen für die der Theilung zu Grunde gelegte Farbe keine merkliche Ablenkung zeigen und ihre Mittelebene dem Hauptschnitt des Doppelprisma's genügend parallel sei; endlich, dass der Spalt oder das Fadenkreuz oder die Mikrometerscala im Ocular richtig in der Focalebene des Objectivs liege. Denn wenn es auch möglich ist, ein Deficit in irgend einem dieser Punkte, soweit es sich nicht nachträglich beseitigen lässt, durch Anbringung geeigneter Correctionen unschädlich zu machen, so würde doch einerseits die numerische Ermittlung der Fehler unverhältnissmässig mühsam sein und andererseits die Bequemlichkeit des Gebrauchs durch die Nothwendigkeit solcher Correctionen ganz erheblichen Abbruch erfahren. In Anbetracht nun, dass die Erfüllung der genannten Bedingungen für einen sachkundigen Optiker keinerlei Schwierigkeiten hat, wird man daher beanspruchen dürfen, dass die Regulirung der Theile bei diesen Instrumenten gleich bei ihrer Anfertigung definitiv und in unveränderlicher Weise erfolge, so dass dem Beobachter höchstens die Justirung des Index oder der Scala überlassen bleibt. Darauf hin erscheint es, denn müssig, die Untersuchung der Constructionfehler im Einzelnen zu erörtern. Es genügt, darauf hinzuweisen, dass die Correctheit eines solchen Refractometers sehr leicht durch einige Messungen an Stoffen von anderweitig bekanntem Brechungsindex und, soweit ein Compensator dabei mit in Frage ist, durch Controlle der Einstellung mit dem einfarbigen Licht der Natronflamme geprüft werden kann.



Durch die hier beschriebenen Instrumente wird die Bestimmung der optischen Constanten an flüssigen Stoffen so leicht und einfach wie kaum eine andere Art von Maassbestimmung. Wenige [78] kunstlose Handgriffe ergeben mit sehr geringer Mühe und fast verschwindendem Zeitaufwand die gesuchten Merkmale in einer für die meisten Bedürfnisse mehr als ausreichenden Genauigkeit, und zwar mit einem sehr compendiosen und handlichen Apparat, der jederzeit und überall ohne weitere Vorkehrungen gebrauchsbereit ist. Nach der Meinung des Verfassers können diese Vortheile mancherlei wissenschaftlichen und praktischen Interessen zu Gute kommen, wenn der Gebrauch der oben entwickelten Methoden in den beteiligten Kreisen heimisch wird. Abgesehen von anderen gelegentlich sich darbietenden Anwendungen auf wissenschaftlichem Felde¹⁾ wird die erleichterte Ausführung dioptrischer Maassbestimmungen namentlich chemischen Untersuchungen in der durch die Arbeiten von LANDOLT, SCHIRAF u. A. eröffneten Richtung ein weiteres Gebiet und eine ausgiebigere Verwerthung verschaffen können. Betreffs möglicher Anwendungen für technische Zwecke aber sei hier wenigstens zweierlei erwähnt: erstens, dass viele im Handel vorkommende flüssige oder halbflüssige Stoffe mittelst ihrer Brechungsexponenten sehr sicher unterschieden sowie auf ihre Reinheit geprüft werden können; und zweitens, dass bei Mischungen aus zwei Flüssigkeiten und bei Lösungen das Mischungs- oder das Concentrationsverhältniss in vielen Fällen durch den Brechungsindex mit grosser Schärfe bestimmbar ist.

Als Beispiel für eine Verwendung des Refractometers in der ersten Richtung kann die Untersuchung fetter und ätherischer Oele geltend gemacht werden. Wenn die Messung des Brechungsexponenten bis auf die dritte Decimale geht, wie mit dem in Fig. 6 der Tafel dargestellten Instrument, so sind viele Stoffe jener Kategorie im reinen Zustand durch den Brechungsindex allein schon ausreichend charakterisirt, und bei der Mehrzahl der übrigen kann derselbe die Bestimmung nach andern Merkmalen mindestens wesentlich unterstützen; Verfälschungen und Verunreinigungen aber

1) Ueber eine umfassende Versuchsreihe, welche die Genauigkeit der Methode gut illustriert, s. S. FLEISCHER, Neue Bestimmung der Brechungsexponenten der [durchsichtigen] flüssigen Medien des Auges. Jena 1872. (Inaugural-Dissertation). [gr. 8. 35 S.]

lassen sich in zahlreichen Fällen im Refractometer auf den ersten Blick erkennen¹⁾.

Als Beispiel für die Anwendung zu Concentrationsbestimmungen [79] führe ich die Ermittlung des Zuckergehaltes in Zuckerlösungen an. Bringt man bei einem Refractometer der dritten Form (Fig. 8 auf der Tafel) im Gesichtsfeld des Oculars statt oder neben der Scala für den Brechungsindex eine auf Grund geeigneter Messungen entworfene Procentscala für Zuckerlösung an, so lässt sich der Zuckergehalt einer solchen Lösung an einem Tropfen der Flüssigkeit mit Einem Blicke auf ca. 0,2 % (d. h. bis auf 0,2 Gramm pro 100 CCm. Lösung) sicher bestimmen, wie Versuche mit einem ausgeführten Instrument ergeben haben; und die Scala reicht bis zu einer Concentration von ca. 60 Gramm in 100 CCm. — Wahrscheinlich wird ein Refractometer dieser Art auch zur Werthbestimmung natürlicher Zuckersäfte an Stelle des Polarisations-Saccharimeters ganz gut brauchbar sein, wenn durch eine besondere Versuchsreihe der Beitrag ermittelt wird, den die, in den natürlichen Zuckersäften in ziemlicher Constanz auftretenden Salze zum Brechungsindex liefern. Es liesse sich dann leicht eine corrigirte Procentscala entwerfen, in deren Angaben der Einfluss der Nebenbestandtheile bis auf kleine Reste eliminiert wäre.

Nachtrag. In Betreff der Berechnung des Brechungsexponenten aus den Messungen an Prismen ist zu bemerken, dass die unter (1)²⁾ und (6)³⁾ aufgestellten Formeln den relativen Brechungsindex der betreffenden Substanz gegen Luft ergeben, aus welchem der absolute Brechungsexponent durch Multiplication mit 1,00030 abzuleiten ist.

1) Vorarbeiten für die hier betrachtete Anwendung — die allerdings noch bedeutend erweitert werden müssten, wenn dem praktischen Bedürfniss in vollem Umfang genügt sein sollte — liefern u. A. die Untersuchungen von J. H. GLADSTONE. S. Jahresber. über die Fortschritte d. Chemie [u. verwandter Theile anderer Wissenschaften. Hrsg. von WILL, für 1863, S. 545 [— 550. — Vgl. auch die Originalabhandlung von J. H. GLADSTONE: On essential oils. Part I. Chem. Soc. Journ. II, 1864, pp. 1—21.]

2) [Seite 87 bis 93 dieses Bandes.]

3) [Seite 111 bis 115 dieses Bandes.]



Inhalt.

	Seite
Vorbemerkung	[1] 82
Die Bestimmung der dioptrischen Constanten mittelst Prismen.	
1. Das Princip der Beobachtungsmethode	[6] 87
2. Beschreibung des Spectrometers	[12] 93
3. Justirung des Spectrometers	[16] 97
4. Das Verfahren bei der Messung	[21] 102
5. Die Untersuchung von Flüssigkeiten im Hohlprisma	[25] 106
6. Die Berechnung der Messungsergebnisse	[30] 111
7. Die Genauigkeitsgrenzen bei der beschriebenen Beobachtungsmethode	[33] 115
8. Der Einfluss der Beobachtungsfehler auf die Resultate der Messung	[38] 120
Die Bestimmung der dioptrischen Constanten flüssiger Körper mittelst der Totalreflexion.	
9. Das Princip der Methode	[41] 124
10. Die Bestimmung der Farbenzerstreuung	[48] 130
11. Die Genauigkeit der Methode und der Einfluss der Beobachtungsfehler auf die Resultate	[54] 136
12. Die Anwendung der Methode beim Gebrauch des Spectrometers	[64] 148
13. Selbständige Apparate (Refractometer) zur optischen Bestimmung von Flüssigkeiten	[69] 153

VI.

Referat:

1. **Wilibald Schmidt, die Brechung des Lichts in Gläsern**, insbesondere die achromatische und aplanatische Objectivlinse. Leipzig, B. G. Teubner 1874. 121 S. 8°. Preis: Mark 3,60.
2. **Derselbe, die Lichtbrechung im Wasser** nach FRAUNHOFER's Beobachtungen. [Aus dem Programm der Fürsten- und Landesschule zu Grimma]. Grimma, Gensel 1874. 24 S. 4°. Preis: Mark 1.

Jenaer Literaturzeitung 1874. Nr. 20. S. 295—296.

Die voranstehend aufgeführte Schrift geht in ihrem ersten Theile, welchem sich der Inhalt des Programmes als Ergänzung anschliesst, auf das Ziel aus, mit Hilfe der bekannten Angaben FRAUNHOFER's über die Lichtbrechung in einer Reihe von Glasarten und Flüssigkeiten den Brechungsexponenten als Function der Wellenlänge in Form eines Trinoms mit ganzzahligen Potenzen der reciproken Wellenlängen darzustellen. Alle Theorie bei Seite setzend, zeigt der Verf. durch rechnerisches Durchprobiren zahlreicher innerhalb jener Form enthaltenen Specialfälle, dass den Messungen FRAUNHOFER's bis an die Grenze ihrer Genauigkeit genügt wird durch einen Ausdruck, der neben einer Constanten ein der ersten und ein der vierten Potenz der reciproken Wellenlänge proportionales Glied enthält; welchen Ausdruck er denn als empirisch begründetes Dispersionsgesetz aufstellt. — Im zweiten Theile der Schrift entwickelt der Verf. sodann Formeln, nach welchen, unter Benutzung obiger Dispersionsregel, ein dreigliedriges Fernrohrobjectiv zu bestimmen ist, bei dem der Farbenfehler des Axenstrahls — in der



üblichen Redeweise — für drei Farben und die sphärische Aberration des Randstrahls für zwei Farben gehoben sein soll. Schliesslich führt er — als Beispiel — die Berechnung eines solchen Objectivs mit dreien von den FRAUNHOFER'schen Glasarten in allem Detail numerisch durch.

Die im ersten Theil gegebene Untersuchung erscheint als ein zweckmässiges und nützlichcs Unternehmen. Der Verf. führt es, innerhalb der angenommenen Beschränkung, mit unerhörtem Fleiss und äusserster Gründlichkeit durch; — nur dass er allerdings einen namhaften Theil der kolossalen rechnerischen Arbeit, die er aufwendet, ohne jede Beeinträchtigung des Zweckes hätte sparen können, wenn er statt der absoluten Werthe die Differenzen des Brechungsexponenten und der betreffenden Potenzen der Wellenlänge in Rechnung gesetzt hätte. Leider aber beschränkt sich der Verf. allzu einseitig auf die FRAUNHOFER'schen Messungen, die doch nur einen kleinen Theil derjenigen Substanzen betreffen, die heute für die Optik von Interesse sind. Er unterlässt jeden Versuch, den Grad der Annäherung zu bestimmen, den seine Formel bei andern, namentlich bei stärker zerstreuen den Körpern erreicht, wiewohl die Literatur in den Messungen von VAN DER WILLIGEN und von MASCART sehr brauchbares Material für eine solche Untersuchung darbietet. Der rein empirisch gewonnenen Dispersionsregel aber kann man — schon deshalb, weil die complicirteren Formen der (anormalen) Lichtbrechung ihr absolut unzugänglich sind — unmöglich eine andere Bedeutung als die einer in gewissen Grenzen brauchbaren Näherungsformel zugestehen. Durch den Mangel aller Nachweise über den Spielraum und die Schranken [296] ihrer Gültigkeit bleibt daher in der Arbeit selbst ihre Tragweite völlig problematisch.

Ref. hat, um sich über diesen Punkt zu orientiren, die in Rede stehende Dispersionsformel mit einigen Beobachtungen von MASCART und mit seinen eigenen Messungen an ätherischen Oelen und schweren (bis zu $n(E) = 1,83$ gehenden) Flintgläsern verglichen. Dabei zeigt sich allerdings eine deutliche Abweichung schon bei diesen letzteren Messungen, welche nur das Intervall von B bis G umfassen, jedoch in den Unterschieden noch die Einheit der fünften Decimale sicher stellen. Sie macht sich überall da bemerklich, wo die Grösse der Dispersion über die der FRAUNHOFER'schen Glasarten erheblich hinausgeht. Grössere Unterschiede noch treten hervor an solchen Beobachtungsreihen MASCART's, welche

das ultraviolette Spectrum mitbegreifen. Indess scheinen bei allen Substanzen mit regelmässiger Dispersion die Abweichungen in so engen Grenzen zu bleiben, dass dadurch der Werth der fraglichen Formel als eines allgemein brauchbaren Näherungsausdruckes durchaus nicht beeinträchtigt wird. Sie übertrifft offenbar alle anderweit aufgestellten Gleichungen mit nur drei Constanten und wird in der erreichbaren Genauigkeit, wie es scheint, allein von der viel complicirteren Dispersionsformel KETTELER's überboten.

Die praktische Optik namentlich hat ein unbestreitbares Interesse an der Sicherstellung einer einfachen analytischen Formel, welche es möglich macht, — sei es auch unter Verzichtleistung auf die höchste theoretische Allgemeinheit — auf Grund der Messung an wenigen (drei) passend gewählten Farben den Gang der Lichtbrechung im ganzen Umfang des optisch und chemisch wirksamen Spectrums mit einer für alle praktischen Bedürfnisse ausreichenden Genauigkeit zusammenzufassen. Denn der Fortschritt auf diesem Felde ist in Bezug auf viele wichtige Aufgaben wesentlich an die Bedingung geknüpft: bei der Herstellung und Verwendung der optischen Materialien eine grössere Herrschaft zu erlangen über die Modificationen der Lichtbrechung, welche einerseits in dem wechselnden Verhältniss zwischen dem mittleren Brechungsindex und der Dispersion, andererseits in dem ungleichartigen Gang der Farbenzerstreuung Ausdruck finden. Im Hinblick auf dieses Ziel, welchem man offenbar nicht näher kommen wird ausser durch ein methodisches Studium des Einflusses, den die chemische Zusammensetzung der Stoffe auf die einzelnen Merkmale der Lichtbrechung ausübt, erscheint die Begründung einer präcisen und einfach zu handhabenden Definition dieser Lichtbrechung als eine werthvolle — weil unentbehrliche — Vorarbeit. Hierin sieht Ref. den eigentlichen Gewinn, den die mühsame Untersuchung des Verf. bringt; während ihm die von letzterem selbst vorwiegend in's Auge gefasste rechnerische Verwendung seiner Dispersionsformel von ziemlich untergeordnetem Belang zu sein scheint.

Was die Bestimmung des dreigliederigen Fernrohrobjectivs im zweiten Theile der angeführten Schrift anlangt, so bringt der Verf. in der Formulirung des Problems einen durchaus richtigen Gesichtspunkt zur Geltung. Es ist unzweifelhaft, dass eine vollkommene Ausgleichung der Farbenzerstreuung, als die Optik bisher zu leisten pflegt, für viele optische Constructionen einen wesentlichen Fortschritt darstellen wird; und es ist andererseits auch sicher,



dass diejenige Verbesserung in dieser Richtung, die schon GAUSS unternommen hat, die Aufhebung der sphärischen Aberration für zwei Farben, nur dann einen erheblichen Gewinn bringen kann, wenn sie Hand in Hand geht mit einer Beseitigung des secundären Farbenfehlers in der Axe. Indem der Verf. beide Anforderungen combinirt, behandelt er eine zweckmässig gestellte Aufgabe. Gegen die Durchführung derselben indess ist Mehreres einzuwenden. Von den Bedenken gegen das Rechnungsverfahren absehend, sei hier nur darauf hingewiesen, dass der Verf. zwar die Wirkung der aufgestellten Linsencombination für die Axe in fast übertriebener Genauigkeit untersucht, die Wirkung ausser der Axe dagegen vollkommen ausser Betracht lässt, trotzdem ihm noch ein verfügbares Element, über welches er willkürlich disponirt, übrig bleibt. Für jedes Unternehmen dieser Art ist aber die sorgfältige Controle der Abbildungsfehler ausser der Axe ein unerlässliches Erforderniss, wenn nicht die praktische Brauchbarkeit der Construction auf den Zufall gestellt bleiben soll.

Uebrigens liegt noch ein ganz anderes Hinderniss vor, welches diesen Theil der Arbeit, für die Gegenwart wenigstens, unfruchtbar machen dürfte. Ref. kann nämlich constatiren, dass unter ca. 60 verschiedenen Nummern Crown- und Flintglas neueren Datums, die er in Bezug auf die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse genau gemessen hat und die so ziemlich Alles umfassen werden, was den Optikern zur Zeit allgemein zugänglich ist, nicht drei Glasarten zu finden sind, mit welchen die Combination des Verf. auch nur entfernt so günstig wie mit den FRAUNHOFER'schen Gläsern durchzuführen wäre. — Was aber das Hervorkehren dieses Umstandes dem Interesse an dem letzten Unternehmen des Verf. Abbruch thun möchte, das kommt dem ersten Theil seiner Arbeit reichlich wieder zu Gute. Denn diese Sachlage zeigt auf das Schlagendste, wie sehr eine gründlichere Orientirung über die Eigenschaften der optischen Materialien der praktischen Optik Noth thut, und wie dankenswerth deshalb jede Bemühung ist, die eine solche zu fördern vermag.

VII.

Ueber die Bestimmung der Brechungs-Verhältnisse fester Körper mittelst des Refractometers.

Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft, Jahrg. 1879, 35—44, Sitzung vom 21. Februar 1879.

Die Mittheilung betraf eine neuerdings bewirkte Verbesserung der vom Vortragenden vor mehreren Jahren beschriebenen Refractometer¹⁾, durch welche letztere auch zur optischen Untersuchung fester Körper geeignet werden.

Bei der ursprünglichen Einrichtung dieser Instrumente wird die Total-Reflexion, welche eine dünne Schicht einer durchsichtigen Substanz, zwischen zwei Flintglas-Prismen eingeschlossen, in durchfallendem Lichte zeigt, zur Ermittlung des Brechungs-Exponenten und der Farbenzerstreuung jener Substanz benutzt. Die Vortheile, welche diese Methode, gegenüber dem WOLLASTON'schen Verfahren, sowohl in Hinsicht auf die Leichtigkeit wie in Hinsicht auf die Genauigkeit der Beobachtungen darbietet, zur Geltung zu bringen, war die maassgebende Richtschnur bei der Construction der Refractometer; und da jene Methode der Regel nach auf flüssige Substanzen beschränkt ist, so lag es damals nahe, eine mögliche Anwendung derselben Apparate auf feste Körper, welche eine andere Beobachtungsweise nöthig gemacht hätte, ausser Betracht zu lassen.

1) Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper. Jena, 1874. [Seite 82—163 dieses Bandes].



Inzwischen hat Herr F. KOHLRAUSCH²⁾ auf die grosse Bedeutung hingewiesen, welche der Methode der Total-Reflexion namentlich für die Untersuchungen der Krystall-Optik zukommt, weil sie die genaue optische Bestimmung von Substanzen ermöglicht, welche keiner andern Beobachtungs-Methode zugänglich sind und weil sie zugleich für die Ermittlung der optischen Constanten doppelt-brechender Körper ausnehmend günstige Bedingungen herbeiführt. Herr KOHLRAUSCH hat gleichzeitig einen zweckmässigen Apparat construirt — Total-Reflectometer von ihm benannt [36] — welcher die experimentelle Handhabung der Methode der Total-Reflexion an festen Körpern in ähnlicher Weise vereinfacht, wie es durch die Refractometer in Bezug auf Flüssigkeiten geschehen ist. Sein Apparat gründet sich auf die Beobachtung des Grenzwinkels der totalen Reflexion an einer polirten planen Fläche des zu untersuchenden Körpers in Schwefel-Kohlenstoff.

Das Interesse, welches die Beobachtung der Totalreflexion an festen Substanzen durch jene verdienstliche Arbeit erlangt hat, hat es mir nahe gelegt, die Verwendbarkeit meines Refractometers für derartige Beobachtungen ins Auge zu fassen, um einerseits dessen Gebiet der Anwendung zu erweitern, andererseits aber auch, um die optische Bestimmung fester Körper, namentlich für krystallographische Zwecke, noch in grösserem Umfang zu ermöglichen, als der KOHLRAUSCH'sche Apparat dies gestattet.

Die Versuche, welche ich im Laufe des letzten Winters für diesen Zweck ausgeführt habe, ergaben nun das Resultat, dass für die Beobachtung der Total-Reflexion im reflectirten Licht die ursprüngliche WOLLASTON'sche Methode des Ankittens der zu untersuchenden Substanz an die Fläche eines Glas-Prismas mit Hülfe eines Flüssigkeitstropfens im Wesentlichen ganz dieselben Bedingungen darbietet wie das von KOHLRAUSCH angewandte Verfahren des Eintauchens in eine Flüssigkeit. In beiden Fällen bleibt die Beobachtung im Nachtheil gegenüber der Beobachtung der totalen Reflexion im durchfallenden Licht, weil es sich nicht, wie bei letzterer, um die Grenze zwischen einem vollkommen verdunkelten und einem hell bleibenden Feld, sondern nur um die Grenze zwischen Feldern von etwas verschiedener Helligkeit handelt. Ein genügend vollkommenes Glasprisma vorausgesetzt, macht

1) Ueber die Ermittlung von Lichtbrechungsverhältnissen durch Total-Reflexion. — Annalen d. Physik u. Chemie. Neue Folge Bd. IV, 1878, p. 1–33, mit einer Tafel.

es aber bei sonst gleicher Beschaffenheit des zu untersuchenden Körpers für die Schärfe der Wahrnehmung keinen sichtbaren Unterschied, ob die reflectirten Strahlen in der angrenzenden Flüssigkeit bleiben und durch eine Planplatte in den Luftraum übertreten, oder ob sie in einen prismatischen Glaskörper gelangen und von diesem aus beobachtet werden. Ein Unterschied besteht allein darin, dass im letzteren Falle andere Einrichtungen getroffen werden müssen, um die numerische Bestimmung des Grenzwinkels und der sonst zur Berechnung erforderlichen Data genügend sicher zu stellen. Diejenigen Einrichtungen aber, welche bei Beobachtung durchfallender Strahlen dieses zu leisten geeignet sind, müssen natürlich in ganz derselben Weise auch bei Benutzung reflectirten Lichtes Anwendung finden können.

[37] Darauf hin ist, um das grössere in der oben citirten Abhandlung unter Fig. 7¹⁾ abgebildete Refractometer zur Beobachtung fester Körper anwendbar zu machen, keine andere Veränderung nöthig gewesen als eine geringe Modification in der Fassung des auf der Alhidade sitzenden Flintglas-Prismas. Man braucht nur die Rückwand der Metallfassung an geeigneter Stelle zu durchbrechen, um ein Fenster für den Eintritt reflectirbarer Strahlen zu gewinnen, die dieser Rückwand anliegende, vorher unbenutzt bleibende Prismenfläche zu poliren und auf diese eine halbkugelige Glaslinse oder ein kleines Prisma aufzukitten, damit Strahlen in geringer Neigung gegen die freiliegende Prismenfläche eintreten können.

Mit dieser auch an den älteren Instrumenten leicht nachträglich anzubringenden Veränderung, welche die Beobachtung von Flüssigkeiten in durchfallendem Licht natürlich gar nicht beeinträchtigt, kann jeder durchsichtige oder undurchsichtige feste Körper, ein Krystall, eine Platte u. A., wenn er eine genügend ebene und leidlich polirte Fläche darbietet, ohne Weiteres untersucht werden, indem man auf die freie Fläche des Flintglas-Prismas einen Tropfen einer geeigneten stark brechenden Flüssigkeit bringt und das betreffende Stück mit der polirten Fläche aufdrückt. Kleine Objecte haften hierbei, namentlich wenn man nur wenig Flüssigkeit anwendet, durch Adhäsion fest genug, um in jeder Stellung des Prismas die richtige Lage zu behalten; grössere und schwerere Stücke kann man mittelst einer an der Prismenfassung angebrachten Klemmfeder genügend fixiren.

1) [Auf Tafel I dieses Bandes].



Alle übrigen Operationen, Einstellung, Ablesung etc. bleiben nun ganz dieselben wie bei Untersuchung von Flüssigkeiten; namentlich kann auch die Dispersion an festen Körpern mit Hilfe der Compensator-Prismen in ganz gleicher Art bestimmt werden.

Die Einstellung des Compensators auf eine farblose Grenzlinie ist allerdings im reflectirten Licht wegen des fehlenden Contrastes zwischen Hell und Dunkel etwas unsicherer, und die Dispersionsangabe deshalb etwas ungenauer als bei Beobachtung durchfallender Strahlen; im Uebrigen besteht kein Unterschied in Bezug auf die Genauigkeit der Messung. Die Grenzlinie der Total-Reflexion erscheint zwar sehr viel zarter, aber nicht weniger scharf markirt wie im durchfallenden Licht; nur das erste Auffinden derselben macht deshalb öfters einige Mühe, zumal wenn der Compensator nicht schon annähernd auf farblose Grenze eingestellt ist. Eine eigentliche Schwierigkeit tritt dabei aber nach meinen Erfahrungen niemals ein, auch wenn man mit gewöhnlichem weissen [38] Licht und ohne alle künstlichen Vorkehrungen beobachtet. Es genügt, bei Tage das Instrument in die Nähe eines Fensters mit freiem Himmel zu stellen und eventuell noch einen Spiegel vor dem Apparat auf den Tisch zu legen, um Strahlen bis zur horizontalen Richtung zu erhalten, Abends aber dicht vor dem Milchglasschirm einer hell brennenden Lampe zu beobachten. Zur Erleichterung des Auffindens der Reflexionsgrenze und zur Unterstützung der genauen Einstellung kann man noch einen kleinen Schirm aus dunklem Papier mit spaltförmigem Ausschnitt zu Hälfte nehmen, den man in freier Hand vor der Oeffnung in der Rückwand der Prismenfassung hin und her bewegt, um den Lichteinfall möglichst günstig zu erhalten.

Bei genügend durchsichtigen Objecten lässt sich übrigens meistens auch an durchfallenden Strahlen die Totalreflexion beobachten und auf diese Weise eine sehr erleichterte Untersuchung sowie eine genauere Bestimmung der Dispersion herbeiführen. Irgend eine, vielleicht ganz schmale und unregelmässige Facette oder Bruchfläche, welche an die zu untersuchende Planfläche anstösst (bei Platten z. B. eine schmale Seitenfläche), lässt, wenn sie dem einfallenden Licht zugekehrt wird, Strahlen genug durch den festen Körper eintreten, um nach Ablendung der von oben die Grenzfläche treffenden Strahlen ein genügend helles Sehfeld zu erhalten, in welchem die Grenze der Totalreflexion sehr markirt sichtbar wird, sobald die Drehung der Alhidade die betreffende

Stellung des Prismas herbeiführt. Man wird in diesem Falle das Fenster in der Rückwand der Prismenfassung verdecken und wieder den Beleuchtungsspiegel am Fuss des Refractometers benutzen.

Für die optische Bestimmung doppelt-brechender Körper ist es wesentlich, dass die zu beobachtende Planfläche in ihrer eigenen Ebene gedreht werden könne, um successive verschiedene Richtungen innerhalb dieser in die Ebene der Reflexion zu führen. Beim Refractometer lässt sich dieses auf die einfachste Weise und ohne alle weiteren Vorrichtungen erreichen, indem man während des Durchsehens durch das Fernrohr das Object mit freier Hand — eventuell mittelst eines ange kitteten Heftchens — auf seiner Auflagefläche dreht und dabei der Verschiebung der Reflexionsgrenzen, oder einer derselben, mit der Alhidade folgt. Sofern es sich aber, wie bei genaueren Untersuchungen der Krystall-Optik, um die Messung dieser Drehungen handelt, ist es leicht, mit der Prismenfassung eine besondere Vorrichtung zu verbinden, [39] welche gestattet, jene um eine unveränderliche Achse auszuführen und die durchlaufenen Winkel an einem kleinen Theilkreis abzulesen. Für solche Zwecke wird man natürlich auch das Ocular des Beobachtungsrohrs mit einem Nicot'schen Prisma und mit Theilkreis versehen, um zugleich die Polarisationsrichtung der Strahlen bei jeder Stellung des Objectes bestimmen zu können.

Dass die Verbindung des Präparates mit der Fläche des Flintglas-Prismas durch eine flüssige Schicht zu keiner Fehlerquelle Veranlassung gibt, kann durch einfache Versuche festgestellt werden. Alle hier in Betracht kommenden Flüssigkeiten breiten sich stets in einer so dünnen und gleichförmigen Schicht zwischen den auf einander gedrückten Planflächen aus, dass wiederholtes Anlegen unter verschiedener Manipulation nicht die geringste Differenz in den Einstellungen herbeiführt. Im Uebrigen hängt die Genauigkeit der Beobachtung bei der dem Refractometer gegebenen Einrichtung nur noch ab von der Zuverlässigkeit der empirischen Theilung, welche aus der Einstellung der Alhidade direct den Brechungs-Index ableitet. In diesem Punkte ist natürlich bei den hier betrachteten Apparaten der Beobachter in höherem Grade von der Sorgfalt des Verfertigers abhängig, als bei einem Instrument, welches die zur Berechnung der Beobachtungen erforderlichen Einzel-Data durch blosse Winkelmessung ergibt.



Nun liesse sich auch für die Beobachtung der Totalreflexion an einem prismatischen Glaskörper ohne alle Schwierigkeit Einrichtung treffen, um den Grenzwinkel der Reflexion in gewöhnlichem Winkelmaass zu erhalten und zugleich die Constanten des Prismas jederzeit bestimmen zu können; die unmittelbare Ablesung des Beobachtungsergebnisses unter Beseitigung jeder Rechnung muss aber als ein so grosser Vortheil für den praktischen Gebrauch der Methode angesehen werden, dass es sicher nicht angezeigt wäre, in Rücksicht auf die hier ins Auge gefassten Zwecke die bisherige Einrichtung des Messapparates zu verlassen. Auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen wird hierzu um so weniger eine Veranlassung eintreten, als gerade die Bestimmung fester Körper jedem Beobachter ein höchst einfaches Mittel an die Hand gibt, die vom Verfertiger auf Grund einer berechneten Tabelle ausgeführte Theilung eines Instruments auf ihre Richtigkeit zu prüfen und eventuell die Ablesungen zu corrigiren. Einige Mineralien von sehr constanter Beschaffenheit, wie Quarz und Kalkspath, und Probestückchen von spectrometrisch bestimmten Glasarten ermöglichen die directe Controle der Theilung an so vielen Punkten, [40] dass etwaige Fehler mit Hülfe einer leicht zu entwerfenden Correctionstafel genügend eliminirt werden können.

Bei den Dimensionen, welche dem getheilten Sector an dem Refractometer gegeben sind, hält die Genauigkeit der Ablesung, wenn eine Lupe benutzt wird, vollkommen Schritt mit der Genauigkeit der Einstellung. Es tritt deshalb kein Bedürfniss ein, zum Zweck möglichst scharfer Ermittlung der Differenz der Brechungsindices bei doppelt-brechenden Substanzen eine mikrometrische Ocular-Scala zu Hülfe zu nehmen, deren Gebrauch in diesem Falle, wegen der etwas complicirten Reduction, unbequem sein würde.

Um an einem Beispiel zu zeigen, wie weit bei sorgfältiger Ausführung der Theilung die Genauigkeit der directen, nicht corrigirten Ablesungen reicht, führe ich hier die Resultate an, welche das von mir benutzte, in der hiesigen Werkstatt von C. Zeiss angefertigte Refractometer an zwei senkrecht zur optischen Achse geschliffenen Plättchen von Quarz und Kalkspath ergeben hat, indem ich die RUDBERG'schen Zahlen daneben setze. Es fand sich bei Beobachtung mit weissem Licht, unter Benutzung des Compensators, der Brechungsindex für D und die aus der Compensatorstellung für das Intervall von D bis F berechnete Dispersion:

		ω	Δn	ε	Δn
Bergkrystall	Refractometer RUDBERG	1,5440	0,0054	1,5530	0,0055
		1,5442	0,0055	1,5533	0,0057
Kalkspath	Refractometer RUDBERG	1,6588	0,0097	1,4858	0,0043
		1,6585	0,0095	1,4864	0,0044

Der Index des Instruments ist bei diesen Beobachtungen nach einem Crown-Glas-Plättchen vom Index 1,5180 justirt worden. Die Differenz von einander nahe liegenden Brechungsexponenten, z. B. bei Substanzen von geringer Doppelbrechung, wird immer bis auf etwa zwei Einheiten der 4^{ten} Decimale richtig erhalten werden, wofern nur die Beschaffenheit der reflectirenden Fläche genügend scharfe Einstellungen zulässt. Denn in diesem Falle müssen sich nicht nur die Fehler der Theilung, sondern, bei annähernd übereinstimmenden Dispersionen, auch die aus etwaiger Ablenkung der Compensator-Prismen entspringenden Fehler so gut wie vollständig eliminiren.

[41] Die wichtigste Frage für die hier betrachteten Anwendungen des Refractometers betrifft indess die Flüssigkeiten, welche zur optischen Verbindung der Objecte mit dem Flintglas-Prisma geeignet sind. Da die verbindende Schicht höheren Brechungsindex besitzen muss als der zu untersuchende feste Körper, wenn die Totalreflexion an dessen Oberfläche und nicht an der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Prisma eintreten soll, so hängt der Umfang der möglichen Anwendung des Refractometers wesentlich von den für diesen Zweck disponiblen Flüssigkeiten ab.

Für die Mehrzahl der bei optischen Untersuchungen vorkommenden Körper bietet sich nun in dem Cassia-Oel eine in jeder Hinsicht bequeme Substanz dar. Sie reicht bis zum Index 1,58. Merklich weiter, bis zu 1,62 bei mittlerer Temperatur, gelangt man mit reinem Zimmt-Aldehyd, C^9H^8O , der in seinen sonstigen Eigenschaften dem Cassia-Oel völlig gleichkommt und deshalb für solche Verwendung vorzüglich geeignet ist¹⁾. Schwefel-Kohlenstoff führt zu demselben Punkte, ist indess wegen seiner Flüchtigkeit hier etwas unbequem. Ueber diese Grenze hinaus wird aber die Auswahl sehr beschränkt. Bei einer Durchmusterung der Präparaten-

¹⁾ Ich verdanke die Kenntniss dieses für mehrere optische Zwecke ausgezeichnet brauchbaren Materials freundlicher Mittheilung des Herrn Prof. A. WEINHOLD in Chemnitz.



Sammlung des hiesigen Universitäts-Laboratoriums, welche Herr Prof. GEÜTHER zu gestatten so freundlich war, haben sich zwar mehrere Substanzen gefunden, deren Brechungsindex denjenigen des Schwefel-Kohlenstoffs zum Theil bedeutend übertrifft¹⁾; mit einer einzigen Ausnahme sind aber alle wegen ihrer sonstigen Eigenschaften (Zersetzbarkeit, belästigende Dämpfe etc.) wenigstens für eine regelmässige Verwendung so gut wie unbrauchbar. Bis jetzt kenne ich nur Ein Präparat, Arsen-Bromür (AsBr_3), dessen Anwendung keinerlei Hinderniss finden wird. Es ist bei Temperaturen über 20° eine fast farblose Flüssigkeit von oliger Consistenz, nicht flüchtig, chemisch ziemlich indifferent wie es scheint, so dass die meisten Stoffe, wenigstens bei kurz dauernder Berührung, davon nicht verletzt werden (Kalkspath verliert allerdings nach längerer Benetzung die Politur). Sein Brechungsexponent [42] besitzt nach einer Bestimmung im Hohlprisma bei der Temperatur 24° den abnorm hohen Werth 1,781 (für Natronlicht), fast dem schwersten bis jetzt hergestellten Flintglase gleich, so dass also mit diesem Präparat die äusserste Grenze erreicht wird, welche der Mangel stärker brechender Glasarten der Anwendung des Refractometers auf alle Fälle setzt. Es hat nur den unerheblichen Uebelstand, dass es schon bei 20° Cels. krystallinisch erstarrt. Doch dürfte dies kaum eine nennenswerthe Erschwerung für den Gebrauch darstellen, selbst wenn es nicht — wie wahrscheinlich ist — gelingen sollte, durch Zusatz kleiner Mengen einer andern geeigneten Substanz den Gefrierpunkt auf eine geringere Temperatur zu bringen, ohne den Brechungsindex merklich zu erniedrigen. Man hätte dann nur beim Beobachten in einem Raume von niedriger Temperatur das Instrument um ein Weniges erwärmt zu halten, — was keinerlei Nachtheil mit sich bringt.

Soweit also nicht etwa in einzelnen Fällen chemische Reactionen im Wege stehen, wird dieses leicht herzustellende Präparat überall da den Gebrauch des Refractometers ermöglichen, wo Cassia-Oel oder Zimmt-Aldehyd den Dienst versagen. Man wird zu ihm seine Zuflucht aber erst dann zu nehmen brauchen, wenn die Beobachtung mit den zuvor genannten Substanzen keine Reflexions-

1) Bei einer Temperatur von ca. 20° ergab am Refractometer:

Schwefel-Chlorür (Cl_2S)	. . . 1,654
Selenyl-Chlorür (SeOCl_2)	. . . 1,653
Phenyl-Sulfid ($[\text{C}_6\text{H}_5]_2\text{S}$)	. . . 1,623
Phosphor-Bromür (PBr_3)	über 1,68

grenze vor derjenigen Stellung der Alhidade ergibt, welche die Totalreflexion dieser Flüssigkeiten anzeigt. Uebrigens ist es wahrscheinlich, dass bei weiterer Nachforschung auch noch andere stark lichtbrechende Verbindungen sich finden werden, die das Arsen-Bromür geeigneten Falles ersetzen können¹⁾.

Zu den bis jetzt in der hiesigen optischen Werkstatt ausgeführten Refractometern ist ein Flintglas vom Brechungsindex pp. 1,72 angewandt worden; die Theilung des Sectors geht dabei bis zu 1,65 oder 1,66. Der Besitz einer Flüssigkeit von dem oben angegebenen hohen Brechungsvermögen lässt es angezeigt erscheinen, in Rücksicht auf möglichst umfassende Untersuchung fester Körper das stärkste Flintglas zu verwenden, welches zur Zeit zu haben ist. Demnächst werde ich denn ein jetzt in Arbeit befindliches Refractometer vorlegen, welches mit allen für krystall-optische [43] Untersuchungen wünschenswerthen Apparaten versehen und in Bezug auf die mechanische Einrichtung diesem Zweck möglichst angepasst ist, dessen Prisma einen Index von nahezu 1,80 besitzt, so dass die Beobachtung mit ihm wenigstens bis zum Index 1,75 reichen wird. Mit dieser Modification wird das Refractometer eine genaue optische Bestimmung von Materialien ermöglichen, die bis heute noch niemals haben untersucht werden können; und es werden nur sehr wenige Objecte auf mineralogischem und chemischem Gebiet noch übrig bleiben, welche diese Beobachtungsmethode nicht erreicht.

Das Mitgetheilte wird zur Genüge zeigen, dass das Refractometer auch für die optische Bestimmung fester Körper vollständig geeignet ist, sobald nur Vorkehrung getroffen wird, um ebenso leicht mit reflectirtem wie mit durchfallendem Licht beobachten zu können. Im Vergleich mit dem von KOHLRAUSCH eingeschlagenen Weg wird aber die Anwendung des hier in Rede stehenden Apparates in mehreren Punkten wesentliche Vorzüge darbieten. — Die Annehmlichkeit, mit gewöhnlichem weissen Licht beobachten zu können, und der Vortheil, dabei zugleich eine ziemlich genaue Bestimmung der mittleren Dispersion zu erhalten, ist allerdings mittelst meines Compensator-Apparates bei jeder Beobachtungs-

1) Herren, denen grösseres Material an chemischen Präparaten oder reichere Erfahrung zu Gebote steht, werden mich zu grossem Dank verpflichten, wenn sie mich auf solche Verbindungen aufmerksam machen wollen, die nach ihrer Zusammensetzung oder nach ihrem Aussehen ein die Lichtbrechung des Schwefel-Kohlenstoffs überschreitendes Brechungsvermögen vermuthen lassen.



methode erreichbar. Dagegen hat schon die Anwendung einer vorausberechneten Theilung zur directen Ablesung der Brechungsexponenten, welche dem praktischen Gebrauch eine so grosse Erleichterung gewährt, ein Prisma aus fester Substanz zur Voraussetzung, wegen der Veränderlichkeit der Brechungsexponenten aller Flüssigkeiten. Wichtiger ist wohl noch der Unterschied, den es für die leichte und rasche Ausführung aller mit der Beobachtung verbundenen Manipulationen macht, je nachdem das Präparat unter einer Flüssigkeit oder auf einer freiliegenden Glasfläche zu behandeln ist. Von einigem Belang ist ferner der Wegfall aller Temperatur-Correctionen beim Refractometer. Der Brechungsindex des Flintglases, wie überhaupt wohl aller festen Körper, wird von der Temperatur so wenig beeinflusst, dass die Veränderung im Spielraum der gewöhnlichen Temperatur-Schwankungen völlig unmerklich bleibt. Beim Gebrauch einer Flüssigkeit dagegen ist mit hohem Brechungs-Vermögen auch stets eine starke Temperatur-Variation des die Grundlage der Messung bildenden Coefficienten verbunden, so dass schon ziemlich genaue Temperaturbestimmung erforderlich wird, wenn die von dieser Seite her möglichen Fehler die sonst erreichbare Genauigkeit nicht erheblich beeinträchtigen [44] sollen. Endlich bleibt dem Refractometer noch der beträchtliche Vorsprung in der Ausdehnung der Messung nach der Seite des hohen Brechungsexponenten, der so lange bestehen wird, als sich nicht etwa — wozu nur geringe Aussicht sein dürfte — eine Flüssigkeit von extrem hohem Index findet, welche auch in grösseren Mengen so handlich und so inagressiv wie der Schwefel-Kohlenstoff ist. Da beim Refractometer die betreffende Flüssigkeit nur in ganz minimalen Portionen zur Verwendung kommt und Verunreinigung, Zerstreuung u. dergl. bei einiger Vorsicht völlig zu vermeiden ist, so kann man hier unbedenklich Substanzen in Gebrauch nehmen, mit welchen man, wie z. B. mit Arsen-Bromür, aus nahe liegenden Gründen in grösseren Quantitäten nicht wird häufig manipuliren dürfen.

In Betreff des Verfahrens bei der optischen Untersuchung krystallisirter Substanzen nach der Methode der Totalreflexion verweise ich auf die oben citirte Abhandlung von F. KOHLRAUSCH¹⁾.

1) Vergl. auch W. KOHLRAUSCH: Ueber die experimentelle Bestimmung von Lichtgeschwindigkeiten in Krystallen. Annalen d. Phys. u. Ch. Bd. VI, 1879, pp. 86—115.

Was die Untersuchung flüssiger Stoffe anlangt, so wird man zwar, aus den oben erwähnten Gründen, der Regel nach bei solchen die Beobachtung der Totalreflexion in durchfallendem Licht vorziehen; jedoch kann auch hier die gelegentliche Benutzung reflectirter Strahlen gute Dienste leisten. Den Index der Alhidade wird man immer leichter und sicherer, statt nach dem Brechungsexponenten des Wassers, nach dem eines anderweitig bestimmten Glasplättchens oder nach dem Exponenten des ordentlichen Strahles eines Bergkrystallplättchens (1,5442) justiren, weil dabei die Berücksichtigung der Temperatur in Wegfall kommt. Ausserdem sind aber auch unter den flüssigen und halbfesten Stoffen, die man bis jetzt nach dem ursprünglichen Verfahren untersucht hat, viele, welche nur schwierig oder unvollkommen in eine genügend dünne und durchsichtige Schicht sich ausbreiten lassen. Solche Präparate — z. B. die festen Augenmedien, organische Gewebe etc. — wird man von nun an leichter und genauer beobachten können, indem man sie entweder direct oder unter Benutzung einer geeigneten Zwischenflüssigkeit auf die freiliegende Fläche des Prismas aufpresst und die Reflexionsgrenze mittelst auffallender Strahlen einstellt.