SUR

# L'ATTRACTION ET LA RÉPULSION APPARENTE

## DES PETITS CORPS

### QUI NAGENT A LA SURFACE DES FLUIDES (1).

*Journal de Physique*, t. LXIII; 1806.

Dans la théorie que j'ai donnée de l'action capillaire, j'ai soumis à l'analyse l'attraction de deux plans verticaux et parallèles, très proches l'un de l'autre et plongeant par leurs extrémités inférieures dans un fluide. J'ai fait voir que, s'ils sont de même matière, cette action tend à les rapprocher, soit que ces plans élèvent près d'eux le fluide, comme des plans d'ivoire plongeant dans l'eau, soit qu'ils l'abaissent, comme des plans de talc laminaire dans lequel le toucher indique une sorte d'onctuosité qui l'empêche de se mouiller. Chaque plan éprouve alors, vers l'autre plan, une pression égale au poids d'un parallélépipède du même fluide, dont la hauteur serait la demi-somme des élévations au-dessus du niveau, ou des abaissements au-dessous, des points extrêmes de contact des surfaces intérieure et extérieure du fluide avec le plan, et dont la base serait la partie du plan comprise entre les deux lignes horizontales menées par ces points. Ce théorème renferme la vraie cause de l'attraction apparente des corps qui nagent sur un fluide, lorsqu'il s'élève ou s'abaisse près d'eux. Mais l'expérience fait connaître que les corps se repoussent lorsque le fluide s'élève vers

(1) Extrait d'un Mémoire, lu à la séance de la première Classe de l'Institut, du 29 septembre 1806, par M. Laplace.



l'un d'eux, tandis qu'il s'abaisse vers l'autre. Ayant appliqué mon analyse à ces répulsions, elle m'a conduit aux résultats suivants que j'ai cru pouvoir intéresser les physiciens géomètres et qui complètent la théorie de l'action capillaire.

Si l'on suppose toujours que les corps sont des plans verticaux et parallèles, la section de la surface du fluide compris entre eux, par un plan vertical et perpendiculaire à ces plans, a un point d'inflexion, lorsque les deux plans sont à quelques centimètres de distance l'un de l'autre. En les rapprochant, le point d'inflexion se rapproche du plan près duquel le fluide s'abaisse, si l'abaissement du fluide en contact à l'extérieur de ce plan est moindre que l'élévation du fluide en contact à l'extérieur de l'autre plan. Dans le cas contraire, le point d'inflexion se rapproche de ce dernier plan. Ce point est toujours au niveau du fluide du vase dans lequel les plans sont plongés. L'élévation et l'abaissement du fluide en contact avec ces plans sont moindres à l'intérieur qu'à l'extérieur. Dans cet état, les deux plans se repoussent. En continuant de les rapprocher, la répulsion a toujours lieu, tant qu'il y a un point d'inflexion. Ce point finit par coïncider avec l'un des plans. La répulsion subsiste encore au delà de ce terme; mais en continuant de rapprocher les plans, cette répulsion devient nulle et se change en attraction. A cet instant, le fluide est également élevé à l'intérieur et à l'extérieur du plan susceptible de se mouiller : il est autant élevé au-dessus du niveau, à l'intérieur de l'autre plan, qu'il est abaissé au-dessous à l'extérieur. Ainsi la répulsion se change en attraction au même moment pour l'un et l'autre plan. En les rapprochant encore, ils s'attirent et vont se réunir par un mouvement accéléré. Ces plans offrent ainsi le phénomène remarquable d'une attraction à de très petites distances, qui se change en répulsion, au delà d'une certaine limite : phénomène que la nature nous présente dans l'inflexion de la lumière près de la surface des corps et dans les attractions électriques et magnétiques. Il y a cependant un cas dans lequel les plans se repoussent, quelque petite que soit leur distance mutuelle : c'est le cas où le fluide s'abaisse près de l'un d'eux, autant qu'il s'élève près de l'autre. Alors la surface du fluide a constamment une inflexion au milieu de l'intervalle qui les sépare.

L'intégration de l'équation différentielle de cette surface dépend, en général, de la rectification des sections coniques et, par conséquent, il est impossible de l'obtenir en termes finis. Mais elle devient possible lorsque les plans sont à la distance où la répulsion se change en attraction : alors on peut déterminer cette distance, en fonction de l'élévation et de l'abaissement du fluide à l'extérieur des plans. On trouve ainsi qu'elle est infinie, si le fluide ne s'abaisse qu'infiniment peu, à l'extérieur du plan qui n'est pas susceptible de se mouiller; d'où il suit qu'alors les deux plans ne se repoussent jamais. Cela peut encore avoir lieu dans le cas même où le fluide s'abaisse sensiblement à l'extérieur de ce dernier plan; il suffit pour cela que le frottement maintienne le fluide un peu plus élevé, à l'intérieur du plan, qu'il ne devrait l'être si cette cause n'existait pas : effet analogue à celui que l'on observe journellement dans le baromètre, lorsqu'il descend. On trouve encore par cette analyse que, si la surface du plan susceptible d'être mouillé vient à s'humecter, les deux plans commenceront à s'attirer à une distance très sensible et plus grande que celle à laquelle ils commençaient à s'attirer auparavant. Il n'est donc pas vrai de dire qu'en général deux plans, l'un susceptible et l'autre non susceptible de se mouiller, se repoussent toujours. Il arrive ici la même chose que relativement à deux globes qui ont une électricité du même genre et qui cependant s'attirent, lorsqu'on fait varier convenablement les intensités respectives de leurs électricités et leurs distances.

On peut, au moyen des deux théorèmes suivants, évaluer la tendance des plans l'un vers l'autre, ou leur répulsion mutuelle :

*Quelles que soient les substances dont les plans sont formés, la tendance de chacun d'eux vers l'autre est égale au poids d'un parallélépipède fluide dont la hauteur est l'élévation au-dessus du niveau des points extrêmes de contact du fluide avec le plan à l'intérieur, moins cette élévation à l'extérieur, dont la profondeur est la demi-somme de ces élévations et dont la largeur est celle du plan, dans le sens horizontal. On doit supposer l'élévation négative, lorsqu'elle se change en abaissement au-dessous du niveau. Si le produit des trois dimensions précédentes est négatif, la tendance devient répulsion.*



*Lorsque les plans sont très rapprochés, l'élévation du fluide entre eux est en raison inverse de leur distance mutuelle, et elle est égale à la demi-somme des élévations qui auraient lieu, si l'on supposait d'abord le premier plan de la même matière que le second, et ensuite le second, de la même matière que le premier. On doit encore observer de supposer l'élévation négative, lorsqu'elle se change en abaissement.*

On voit par ces théorèmes que, en général, la force répulsive est beaucoup plus faible que la force attractive qui se développe lorsque les plans sont très rapprochés, et qui doit alors les porter l'un vers l'autre d'un mouvement accéléré. Dans ce cas l'élévation du fluide entre les plans est très grande relativement à son élévation près des mêmes plans à leur extérieur. En négligeant donc le carré de cette dernière élévation, par rapport au carré de la première, le parallélépipède fluide dont le poids exprime la tendance d'un des plans vers l'autre, en vertu du premier des deux théorèmes précédents, sera égal au produit du carré de l'élévation du fluide intérieur par la demi-largeur du plan dans le sens horizontal. Cette élévation étant, par le second de ces théorèmes, réciproque à la distance mutuelle des plans, le parallélépipède sera proportionnel à la largeur horizontale du plan, divisée par le carré de cette distance. La tendance des deux plans l'un vers l'autre suivra donc la loi de l'attraction universelle, c'est-à-dire qu'elle sera en raison inverse du carré de leur distance.

Désirant connaître jusqu'à quel point ces résultats de ma théorie étaient conformes à la nature, j'ai prié M. Haüy de faire quelques expériences sur un point de Physique aussi délicat et aussi curieux. Il a bien voulu s'en occuper et il a trouvé l'analyse entièrement d'accord avec l'expérience. Il a surtout bien constaté le phénomène singulier d'une attraction qui se change en répulsion, par l'accroissement de la distance, comme on le voit par la Note suivante qu'il m'a communiquée :

« On a suspendu, à un fil très délié, une petite feuille carrée de talc laminaire, de manière qu'elle fût plongée dans l'eau par le bas. On a plongé dans la même eau, à la distance de quelques centimètres, la partie inférieure d'un parallélépipède d'ivoire, en sorte qu'une de ses faces fût parallèle à la feuille de talc; ensuite on a fait avancer très lentement ce parallélépipède vers la feuille de talc, en le maintenant toujours dans une situation parallèle à cette feuille et en l'arrêtant par intervalles, afin d'être assuré que l'effet du mouvement qu'il pouvait imprimer au fluide était insensible dans l'expérience. Alors cette feuille s'est éloignée du parallélépipède, et lorsqu'en continuant de faire mouvoir celui-ci, toujours avec une extrême lenteur, il n'y a plus eu qu'une très petite distance entre les deux corps, la feuille de talc s'est approchée tout à coup du parallélépipède et s'est mise en contact avec lui. En séparant alors les deux corps, on a trouvé le parallélépipède mouillé jusqu'à une certaine hauteur au-dessus du niveau de l'eau; en recommençant l'expérience avant de l'avoir essuyé, l'attraction a commencé plus tôt, et quelquefois elle a eu lieu dès le premier instant, sans être précédée d'une répulsion sensible. Ces expériences, répétées plusieurs fois et avec soin, ont toujours donné les mêmes résultats. »

# SUR L'ACTION CAPILLAIRE [1].

*Journal de Physique*, t. LXIII; 1806.

En considérant sous un nouveau point de vue la théorie de l'action capillaire, je suis parvenu non seulement à la simplifier mais encore à généraliser les résultats auxquels j'avais été précédemment conduit par l'analyse. Je n'avais déterminé l'élévation ou la dépression des fluides que dans les espaces capillaires de révolution et entre des plans; je vais la déterminer ici, quels que soient ces espaces et la nature des parois qui les renferment, en supposant même dans ces espaces un nombre quelconque de fluides placés les uns au-dessus des autres, et j'en conclurai l'accroissement et la diminution de poids que les corps plongés dans les fluides éprouvent par l'action capillaire. La combinaison de ces résultats avec ceux que j'ai trouvés par l'analyse m'a donné l'expression exacte des affinités des différents corps avec les fluides, au moyen des expériences faites sur la résistance que les disques des diverses substances, appliqués à la surface des fluides, opposent à leur séparation. J'ose croire que cela pourra répandre un grand jour sur la théorie des affinités; car ce que j'avance est fondé sur des raisonnements géométriques, et non sur des considérations vagues et précaires qu'il faut bannir sévèrement de la philosophie naturelle, à moins qu'on ne les présente, ainsi que Newton l'a fait dans son *Optique*, comme de simples conjectures propres à guider dans des recherches

(1) M. le professeur de Physique de l'École Polytechnique fait dans son Cours toutes les expériences sur l'action capillaire, qu'il est indispensable de connaître pour entendre la théorie exposée par M. Laplace, et montre l'accord de cette théorie avec tous les faits qui ont été observés jusqu'à présent.

ultérieures, mais qui laissent presque en entier le mérite de la découverte à celui qui les établit solidement par l'observation ou par l'analyse. Je me propose de publier incessamment, dans un supplément à ma théorie de l'action capillaire, les démonstrations analytiques des théorèmes que je n'ai fait qu'énoncer. J'exposerai en même temps un nouveau moyen de parvenir aux équations fondamentales de cette théorie. Je déduirai de ces équations les théorèmes généraux que je vais présenter ici, en les démontrant par la considération directe de toutes les forces qui concourent à la production des effets capillaires. Ces démonstrations réunissent, à l'avantage d'une extrême simplicité, celui d'éclairer la cause et le mécanisme de ces effets. On verra que les forces dont ils dépendent ne s'arrêtent point à la superficie des fluides, mais qu'elles s'étendent dans tout leur intérieur et jusqu'aux extrémités des corps qui y sont plongés; ce qui établit l'entière identité de ces forces avec les affinités.

*Si l'on conçoit un tube quelconque prismatique droit, vertical et plongeant par son extrémité inférieure dans un fluide indéfini, le volume du fluide intérieur, élevé au-dessus du niveau de l'action capillaire, est égal au contour de la base intérieure du prisme multiplié par une constante qui est la même pour tous les tubes prismatiques de la même matière, plongeant dans le même fluide.*

Pour démontrer ce théorème, imaginons à l'extrémité inférieure du tube un second tube dont les parois infiniment minces soient le prolongement de la surface intérieure du premier tube et qui, n'ayant aucune action sur le fluide, n'empêchent point l'attraction réciproque des molécules du premier tube et du fluide. Supposons que ce second tube soit d'abord vertical, qu'ensuite il se recourbe horizontalement et qu'enfin il reprenne sa direction verticale, en conservant dans toute son étendue la même figure et la même largeur; il est visible que, dans l'état d'équilibre du fluide, la pression doit être la même dans les deux branches verticales du canal composé du premier et du second tube. Mais comme il y a plus de fluide dans la première branche verticale, formée du premier tube et d'une partie du second, que dans l'autre branche verticale, il faut que l'excès de pression qui en résulte soit détruit par les attractions du prisme et du fluide sur le fluide contenu dans cette première branche. Analysons avec soin ces attractions diverses, considérons d'abord celles qui ont lieu vers la partie inférieure du premier tube.



Concevons pour cela que la base de ce tube soit horizontale : le fluide contenu dans le second tube sera attiré verticalement vers le bas : 1° par lui-même; 2° par le fluide environnant ce second tube. Mais ces deux attractions sont détruites par les attractions semblables qu'éprouve le fluide contenu dans la seconde branche verticale du canal, près de la surface du niveau du fluide : on peut donc en faire abstraction ici. Le fluide de la première branche verticale du second tube sera encore attiré verticalement en haut par le fluide du premier tube; mais cette attraction sera détruite par l'attraction qu'il exerce sur ce dernier fluide; on peut donc encore ici faire abstraction de ces deux attractions réciproques. Enfin, le fluide du second tube sera attiré verticalement en haut par le premier tube, et il en résultera dans ce fluide une force verticale que nous désignerons par Q et qui contribuera à détruire l'excès de pression dû à l'élévation du fluide dans le premier tube.

Examinons présentement les forces dont le fluide du premier tube est animé. Il éprouve, dans sa partie inférieure, les attractions suivantes : 1° il est attiré par lui-même; mais les attractions réciproques des molécules d'un corps ne lui impriment aucun mouvement, s'il est solide et l'on peut, sans troubler l'équilibre, concevoir le fluide du premier tube, consolidé; 2° ce fluide est attiré par le fluide intérieur du second tube; mais on vient de voir que les attractions réciproques de ces deux fluides se détruisent et qu'il n'en faut point tenir compte; 3° il est attiré par le fluide extérieur qui environne le second tube et, de cette attraction, il résulte une force verticale dirigée par le bas et que nous désignerons par $-Q'$. Nous lui donnons le signe $-$ pour indiquer que sa direction est contraire à celle de la force Q. Nous observerons ici que si les lois d'attractions relatives à la distance sont les mêmes pour les molécules du premier tube et pour celles du fluide, en sorte qu'elles ne diffèrent que par leur intensité, en nommant $\rho$ et $\rho'$ ces intensités à volume égal, les forces Q et Q' sont proportionnelles à $\rho$ et à $\rho'$; car la surface intérieure du fluide qui environne le second tube est la même que la surface intérieure du premier tube : les deux masses ne diffèrent donc que par leur épaisseur. Mais l'attraction des masses devenant insensible à des distances sensibles, la différence de leurs épaisseurs n'en produit aucune dans leurs attractions, pourvu que ces épaisseurs soient sensibles; 4° enfin, le fluide du premier tube est attiré verticalement par ce tube. En effet, concevons ce fluide partagé dans une infinité de petites colonnes verticales; si par l'extrémité supérieure d'une de ces colonnes on mène un plan horizontal, la partie du tube inférieure à ce plan ne produira aucune force verticale dans la colonne. Il n'y aura donc de force verticale produite que celle qui sera due à la partie du tube supérieure au plan, et il est visible que l'attraction verticale de cette partie du tube sur la colonne sera la même que celle du tube entier sur une colonne égale et semblablement placée dans le second tube. La force verticale entière, produite par l'attraction du premier tube sur le fluide qu'il renferme, sera donc égale à celle que produit l'attraction de ce tube sur le fluide renfermé dans le second tube : cette force sera donc égale à Q.

En réunissant toutes les attractions verticales qu'éprouve le fluide renfermé dans la première branche verticale du canal, on aura une force verticale dirigée de bas en haut et égale à $2Q - Q'$. Cette force doit balancer l'excès de pression dû au poids du fluide élevé au-dessus du niveau. Soient

V son volume,
D sa densité,
$g$ la pesanteur,
$g$DV sera son poids.

On aura donc
$$gDV = 2Q - Q'.$$



Maintenant, l'attraction n'étant sensible qu'à des distances imperceptibles, le premier tube n'agit sensiblement que sur des colonnes extrêmement voisines de ses parois; on peut donc faire abstraction de la courbure de ces parois et les considérer comme étant développées sur une surface plane. La force Q sera proportionnelle à la largeur de cette surface, ou, ce qui revient au même, au contour de la base de la surface intérieure du parallélépipède. Ainsi, en nommant $c$ ce contour, on aura
$$Q = \rho c,$$
$\rho$ étant une constante proportionnelle à l'intensité de l'attraction de la matière du premier tube sur le fluide. On aura pareillement
$$Q' = \rho' c,$$
$\rho'$ étant proportionnel à l'intensité de l'attraction du fluide sur lui-même; donc
$$V = \frac{(2\rho - \rho')c}{g\,D},$$
ce qui est l'expression algébrique du théorème qu'il s'agissait de démontrer.

On déterminera la constante $\frac{2\rho - \rho'}{gD}$ au moyen de l'élévation observée du fluide dans un tube cylindrique très étroit. Soient $q$ la hauteur à laquelle le fluide s'élève dans ce tube et $l$ le rayon du creux du tube; en nommant $\pi$ la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, on aura, à très peu près,
$$V = \pi l^2 q, \qquad c = 2l\pi;$$
l'équation précédente donnera donc
$$\frac{2\rho - \rho'}{gD} = \frac{lq}{2}$$
et, par conséquent, on aura
$$V = \frac{lq}{2}c.$$

Si $\rho'$ surpasse $2\rho$, $q$ sera négatif et, par conséquent, l'élévation du fluide se changeant en dépression, V sera négatif.

Nommons $h$ la hauteur moyenne de toutes les colonnes fluides qui composent le volume V et $b$ la base intérieure du parallélépipède, on aura

$$V = hb$$

et, par conséquent,

$$h = \frac{lqc}{2b}.$$

Lorsque les bases des différents parallélépipèdes sont des figures semblables, elles sont proportionnelles aux carrés de leurs lignes homologues, et leurs contours sont proportionnels à ces lignes; les hauteurs $h$ sont donc alors réciproques à ces mêmes lignes.

Si les bases sont des polygones réguliers, elles seront égales au produit de leurs contours par la moitié des rayons des cercles inscrits; les hauteurs $h$ sont donc réciproques à ces rayons. En désignant par $r$ ces rayons, on aura

$$h = \frac{lq}{r}.$$

Ainsi, en supposant deux bases égales, dont l'une soit un carré et dont l'autre soit un triangle équilatéral, les valeurs de $h$ seront entre elles comme $2 : 3^{\frac{3}{4}}$, ou, à fort peu près, comme $7 : 8$.

M. Gellert a fait quelques expériences sur l'élévation de l'eau dans des tubes de verre prismatiques, rectangulaires et triangulaires [1]. Elles confirment la loi suivant laquelle les hauteurs sont réciproques aux lignes homologues des bases semblables. Ce savant conclut encore de ses expériences que, dans des prismes rectangulaires et triangulaires dont les bases sont égales, les élévations du fluide sont les mêmes; mais il convient que cela n'est pas aussi certain que la loi des hauteurs réciproques aux lignes homologues des bases semblables. En effet, on vient de voir qu'il y a $\frac{1}{8}$ de différence entre les élévations

(1) *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg*, t. XII.



du fluide dans deux prismes rectangulaires et triangulaires dont les bases sont égales, et dont l'une est un carré et l'autre un triangle équilatéral. Les expériences rapportées par M. Gellert n'offrent point de données suffisantes pour en comparer exactement les résultats à la théorie précédente.

Si la base du parallélépipède est un rectangle dont le grand côté soit égal à $a$ et dont l'autre côté, supposé très petit, soit égal à $l$, on aura

$$b = al \quad \text{et} \quad c = 2a + 2l,$$

donc

$$h = \frac{lq(2a+2l)}{2al} = q\left(1 + \frac{l}{a}\right).$$

En négligeant $\frac{l}{a}$, eu égard à l'unité, on aura

$$h = q,$$

conformément à l'expérience.

*Si le vase indéfini, dans lequel le parallélépipède est plongé, renferme un nombre quelconque de fluides placés horizontalement les uns au-dessus des autres, l'excès du poids des fluides contenus dans le tube sur le poids des fluides qu'il eût renfermés sans l'action capillaire est le même que le poids du fluide qui s'élèverait au-dessus du niveau, dans le cas où il n'y aurait dans le vase que le fluide dans lequel plonge l'extrémité inférieure du parallélépipède.*

En effet, l'action du prisme et de ce fluide sur le même fluide renfermé dans le tube est évidemment la même que dans ce dernier cas. Les autres fluides contenus dans le prisme étant élevés sensiblement au-dessus de sa base inférieure, le prisme n'a aucune action sur chacun d'eux pour les élever ou pour les abaisser. Quant à l'action réciproque de ces fluides les uns sur les autres, elle se détruirait évidemment s'ils formaient ensemble une masse solide, ce que l'on peut supposer sans troubler l'équilibre.

*Si le vase ne renferme que deux fluides dans lesquels le prisme soit entièrement plongé, de manière qu'il plonge dans l'un par sa partie supé-*

*rieure et dans l'autre par sa partie inférieure, le poids du fluide inférieur élevé dans le prisme par l'action capillaire, au-dessus de son niveau dans le vase, sera égal au poids d'un pareil volume du fluide supérieur, plus au poids du fluide inférieur qui s'élèverait dans le prisme au-dessus du niveau, s'il n'y avait que ce fluide dans le vase, moins au poids du fluide supérieur qui s'élèverait dans le même prisme, au-dessus du niveau, si ce fluide existait seul dans le vase.*

Pour le démontrer, on observera que l'action du prisme sur la partie du fluide inférieur qu'il contient est la même que si ce fluide existait seul dans le vase; ce fluide est donc, dans ces deux cas, sollicité verticalement de bas en haut de la même manière, soit par l'attraction du prisme, soit par l'attraction du fluide qui environne la partie inférieure du prisme; et la réunion de ces attractions équivaut au poids du volume de ce fluide qui s'élèverait dans le prisme, au-dessus du niveau, s'il existait seul dans le vase. Pareillement, le fluide supérieur contenu dans la partie supérieure du prisme est sollicité verticalement de haut en bas par l'action du prisme et du fluide qui environnent cette partie, comme il serait sollicité de bas en haut par les mêmes actions, si le vase ne renfermait que le fluide supérieur; et la réunion de ces actions équivaut au poids du fluide supérieur qui s'élèverait alors dans le prisme au-dessus de son niveau dans le vase. Enfin, la colonne des fluides intérieurs au prisme, qui est au-dessus du niveau du fluide inférieur dans le vase, est sollicitée verticalement du haut en bas par son propre poids, et du bas en haut par le poids d'une colonne semblable du fluide supérieur. En réunissant toutes ces forces qui doivent se faire équilibre, on aura le théorème que nous venons d'énoncer. On déterminera, par les mêmes principes, ce qui doit avoir lieu lorsqu'un prisme creux est entièrement plongé dans un vase rempli d'un nombre quelconque de fluides.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, la base inférieure du prisme horizontale; mais si elle était inclinée à l'horizon, l'action verticale du prisme sur le fluide serait toujours la même, car un plan



d'une épaisseur sensible, qui plonge dans un fluide par sa partie inférieure dont la surface est terminée par une ligne droite inclinée à l'horizon, attire ce fluide parallèlement à sa surface, et perpendiculairement à la droite qui la termine, proportionnellement à la longueur de cette ligne; mais cette attraction, décomposée verticalement, est proportionnelle à la largeur horizontale du plan. De là il est facile de conclure généralement que, quelle que soit la forme de la base inférieure du prisme, son attraction verticale et celle du fluide extérieur sur le fluide qu'il renferme sont les mêmes que si la base était horizontale. Ainsi, le premier théorème aura généralement lieu, si l'on entend par le contour de la base intérieure celui de la section intérieure perpendiculaire aux côtés du prisme.

*Si le prisme qui, par sa partie inférieure, plonge dans le fluide d'un vase indéfini, est oblique à l'horizon, le volume de fluide élevé dans le prisme au-dessus du niveau du fluide du vase, multiplié par le sinus de l'inclinaison des côtés du prisme à l'horizon, est constamment le même, quelle que soit cette inclinaison.*

En effet, ce produit exprime le poids du volume du fluide élevé au-dessus du niveau, et décomposé parallèlement aux côtés du prisme : ce poids, ainsi décomposé, doit balancer l'attraction du prisme et du fluide extérieur sur le fluide qu'il renferme; attraction qui est évidemment la même, quelle que soit l'inclinaison du prisme : la hauteur verticale moyenne du fluide au-dessus du niveau est donc constamment la même.

*Si l'on place verticalement un parallélépipède dans un autre parallélépipède vertical de la même matière, et que l'on plonge dans un fluide leurs extrémités inférieures; en nommant* V *le volume du fluide élevé au-dessus du niveau, dans l'espace compris entre ces deux parallélépipèdes, on aura*

$$V = \frac{(2\rho - \rho')}{gD}(c + c') = \frac{lq}{2}(c + c'),$$

*$c$ étant le contour de la base intérieure du plus grand parallélépipède, et $c'$ étant le contour de la base extérieure du plus petit.*

Ce théorème se démontre de la même manière que le premier. Si les bases des deux parallélépipèdes sont des polygones semblables, dont les côtés homologues soient parallèles et placés à la même distance; en nommant $l$ cette distance, la base de l'espace que les deux parallélépipèdes laissent entre eux sera $\frac{l(c+c')}{2}$; ainsi $h$ étant la hauteur moyenne du fluide soulevé, on aura

$$V = hl\frac{(c+c')}{2}$$

et, par conséquent,

$$h = q.$$

On peut déterminer encore, par les principes précédents, ce qui doit avoir lieu dans le cas où les prismes sont plongés, en tout ou en partie, dans un vase rempli d'un nombre quelconque de fluides, et dans le cas où ces prismes sont inclinés à l'horizon.

*Les mêmes choses étant posées comme dans le théorème précédent, si les deux parallélépipèdes sont de différentes matières, en nommant $\rho$ pour le plus grand, et $\rho_1$ pour le plus petit, ce que nous avons précédemment désigné par $\rho$, on aura*

$$V = \frac{(2\rho - \rho')}{gD}c + \frac{(2\rho_1 - \rho')}{gD}c',$$

*en sorte que si l'on nomme $q$ et $q_1$ les élévations du fluide, dans deux tubes cylindriques très étroits du même rayon intérieur $l$, formés respectivement de ces matières, on aura*

$$V = \frac{1}{2}l(qc + q_1c').$$

Ce théorème se démontre encore de la même manière que le premier théorème. On voit facilement que l'on obtiendra, par les mêmes principes, le volume de fluide élevé au-dessus du niveau, dans un espace renfermé par un nombre quelconque de plans verticaux de différentes matières.



Il résulte du théorème précédent que le volume V du fluide élevé, par l'action capillaire, à l'extérieur d'un prisme plongeant dans un fluide par son extrémité inférieure, est

$$V = \frac{2\rho - \rho'}{gD}c = \frac{1}{2}lqc,$$

$c$ étant le contour extérieur du prisme. L'augmentation du poids du prisme, due à l'action capillaire, est égale au poids de ce volume de fluide. Elle se change en diminution, si $q$ est négatif, et alors le prisme est soulevé par l'action capillaire. Si ce prisme a pour base un rectangle très étroit dont $a$ soit le grand côté et $l$ le petit, en nommant $i$ sa hauteur, sa solidité sera $ail$, et son contour $c$ sera $2a + 2l$; le volume V du fluide déprimé par l'action capillaire sera $aql\left(1 + \frac{l}{a}\right)$. En nommant donc $k$ le rapport de la pesanteur spécifique du prisme à celle du fluide, le poids du prisme sera au poids du volume de fluide déprimé comme $ik : q\left(1 + \frac{a}{l}\right)$; en diminuant donc $i$ convenablement, on pourra rendre ces deux poids égaux et maintenir ainsi le prisme à la surface du fluide. On pourra déterminer encore, par les principes précédents, la diminution du poids d'un corps entièrement plongé dans un vase rempli de plusieurs fluides.

Si l'on plonge verticalement le bout d'un tube très étroit dans un fluide, en nommant $l$ le rayon du creux du tube et $q$ la hauteur à laquelle le fluide y est élevé au-dessus du niveau, on aura, par ma *Théorie de l'action capillaire* [1] :

$$lq = \frac{\cos\varpi}{\alpha},$$

$\varpi$ étant l'angle que la surface du fluide intérieur forme avec la partie

[1] *Œuvres de Laplace*, t. IV, p. 432 et suiv.

de la surface intérieure du tube, qui est en contact avec le fluide. Lorsque le fluide est déprimé au-dessous du niveau, cet angle surpasse un angle droit, et alors son cosinus devient négatif ainsi que $q$; $\alpha$ est une constante qui ne dépend que de la pesanteur et de l'action du fluide sur lui-même. On a, par ce qui précède,

$$\frac{2\rho-\rho'}{g\mathrm{D}}=\frac{lq}{2};$$

on aura donc

$$\cos\varpi=\frac{2\alpha(2\rho-\rho')}{g\mathrm{D}}. \tag{1}$$

Mais on a vu dans la théorie citée que, $\rho$ étant nul, $\varpi$ est égal à deux angles droits; ce que l'on peut conclure encore de l'analyse que j'exposerai dans un supplément à cette théorie, sur la résistance qu'un disque circulaire fort large, appliqué à la surface d'un fluide, oppose à sa séparation de ce fluide. Il résulte de cette analyse que, $i$ étant le rayon du disque supposé de la même matière que le tube précédent, cette résistance est égale à

$$\frac{g\mathrm{D}\pi i^2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\varpi}{\sqrt{\alpha}};$$

or, il est clair qu'elle doit être nulle, lorsque $\rho$ est nul, ou lorsque le disque n'a aucune action sur le fluide; on a donc alors $\cos\frac{1}{2}\varpi$ nul, ce qui donne

$$\varpi=\pi$$

et, par conséquent,

$$\cos\varpi=-1;$$

l'équation (1) donnera ainsi

$$\rho'=\frac{g\mathrm{D}}{2\alpha}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\rho}{\rho'}=\cos^2\frac{1}{2}\varpi;$$

l'expression précédente de la résistance que le disque oppose à sa séparation du fluide, ou, ce qui revient au même, du poids nécessaire



pour l'enlever, devient ainsi $2\pi i^2\sqrt{g\mathrm{D}\rho}$. *Donc, pour des disques de même diamètre et de matières différentes, les carrés de ces poids, divisés par les densités spécifiques des fluides, sont proportionnels aux valeurs de* $\rho$. On peut donc, par des expériences très précises sur les résistances que les disques opposent à leur séparation de la surface des fluides, déterminer leurs attractions respectives sur ces fluides.

On doit faire ici deux observations importantes : la première est que $\rho$ exprime l'action d'un plan d'une épaisseur sensible sur un plan fluide d'une épaisseur sensible, et dont la largeur est prise pour une unité, qui lui est parallèle et qui le touche par la droite qui termine une de ses extrémités, quelles que soient d'ailleurs les lois d'attraction des molécules du fluide sur celles du plan et sur ses propres molécules, dans le cas même où ces lois ne seraient pas exprimées par une même fonction de la distance. Mais si cette fonction est la même, alors les valeurs de $\rho$ et de $\rho'$ sont proportionnelles aux intensités respectives des attractions, ou, ce qui revient au même, aux coefficients constants qui multiplient la fonction commune de la distance par laquelle la loi de ces attractions est représentée; mais ces valeurs sont relatives à des volumes égaux. Pour le faire voir, concevons deux tubes capillaires de même diamètre et de substances différentes, mais dans lesquels un fluide s'élève à la même hauteur. Il est clair que si l'on prend dans ces tubes deux volumes égaux et infiniment petits, semblablement placés relativement au fluide intérieur, leur action sur ce fluide sera la même, et l'on pourra substituer l'un au lieu de l'autre; or, pour avoir leurs attractions à égalité de masses, il faut diviser les attractions des volumes égaux par les densités respectives; il faut donc diviser les valeurs de $\rho$ et de $\rho'$ par les densités respectives des différents corps.

La seconde observation est que les résultats précédents supposent $\rho$ moindre que $\rho'$; car si $\rho$ surpassait $\rho'$, le fluide s'unirait intimement au disque qu'il touche et formerait ainsi un nouveau disque dont la surface en contact avec le fluide serait le fluide lui-même. Mais comme on peut, par la formule précédente, déterminer la résistance qu'un pareil disque opposerait à sa séparation, on sera sûr que $\rho$ est moindre que $\rho'$ si la résistance qu'un disque oppose est plus petite que la résistance ainsi calculée.

# DE L'ADHÉSION
## DES
# CORPS A LA SURFACE DES FLUIDES (¹).

*Journal de Physique*, t. LXIII; 1806.

On a fait un grand nombre d'expériences sur l'adhésion des corps à la surface des fluides, mais sans se douter que cette adhésion était un effet de l'action capillaire. M. Thomas Young me paraît être le premier qui en ait fait l'ingénieuse remarque (²). En appliquant mon analyse à ces expériences, j'ai trouvé qu'elle les représente aussi bien qu'on doit l'attendre d'expériences très délicates, et qui ne s'accordent pas toujours entre elles. Les phénomènes dus à l'action capillaire étant aujourd'hui ramenés à une théorie mathématique, il ne manque plus, à cette branche intéressante de la Physique, qu'une suite d'expériences exactes dans lesquelles on isole avec soin tout ce qui peut altérer les effets de cette action. Le besoin d'expériences très précises se fait sentir à mesure que les sciences se perfectionnent. C'est au concours des grandes découvertes en Mécanique et en Analyse, avec celles du télescope et du pendule, que l'Astronomie doit ses immenses progrès. On ne peut donc trop inviter les physiciens à donner la plus grande précision à leurs résultats; comme on ne peut assez encourager l'habile artiste qui se voue à la perfection des instruments des sciences. Une expérience mal faite a été souvent la cause de beaucoup d'erreurs;

(¹) Extrait d'un Mémoire, lu dans la séance de la première Classe de l'Institut, du 24 novembre 1806.

(²) *Transactions philosophiques*, année 1805.

au lieu qu'une expérience bien faite subsiste toujours et devient quelquefois une source de découvertes : on s'appuie sur elle avec confiance; mais le physicien circonspect se croit obligé de vérifier les résultats des observateurs qui n'ont point acquis une juste réputation d'exactitude.

Lorsqu'on applique un disque de verre sur la surface de l'eau stagnante dans un vase d'une grande étendue, on éprouve pour l'en détacher une résistance d'autant plus considérable que la surface du disque est plus grande. En élevant le disque, on soulève en même temps, au-dessus du niveau du fluide renfermé dans le vase, une colonne de ce fluide, dont la figure ressemble à celle d'une gorge de poulie. Sa base inférieure s'étend indéfiniment sur la surface de niveau : à mesure que la colonne s'élève, elle se rétrécit jusqu'aux sept dixièmes environ de sa hauteur; ensuite, elle s'élargit et couvre la surface du disque par sa base supérieure. Pour déterminer son volume concevons, dans le plan de sa plus petite largeur, un canal intérieur, d'abord horizontal, se recourbant ensuite verticalement jusqu'à la surface de niveau du fluide et reprenant, à ce point, sa direction horizontale. Il est facile de voir que, dans le cas de la colonne en équilibre, la force due à la capillarité de sa surface doit balancer le poids du fluide renfermé dans la branche verticale du canal. En élevant le disque davantage, ce poids l'emporte sur la force capillaire, et la colonne se détache du disque. Le poids de la colonne d'eau soulevée dans cet état d'équilibre est donc la mesure de la résistance que l'on éprouve à détacher le disque. Si la largeur du disque est considérable on trouve, par l'analyse, que ce poids est égal à celui d'un cylindre d'eau, dont la base serait celle du disque, et dont la hauteur serait le produit de $1^{mm}$ par la racine carrée du nombre de millimètres contenus dans la hauteur à laquelle l'eau s'élève dans un tube de verre de $1^{mm}$ de diamètre. La surface de l'eau est tangente à celle du disque; mais si ces deux surfaces se coupaient, il faudrait alors multiplier le résultat précédent par le cosinus de la moitié de l'angle aigu qu'elles forment entre elles, et le diviser par la racine carrée du cosinus de l'angle entier.



Lorsque le fluide, au lieu de s'élever, s'abaisse dans un tube capillaire de la matière du disque, comme le mercure dans un tube de verre; la colonne soulevée par le disque n'est plus celle d'une gorge de poulie : sa base inférieure s'étend indéfiniment sur la surface du disque; mais la colonne se rétrécit continuellement depuis cette base jusqu'aux points de son contact avec le disque. Le poids de cette colonne, dans l'état d'équilibre, est égal à celui d'un cylindre fluide, dont la base serait celle du disque, et dont la hauteur serait le produit de $1^{mm}$ par le nombre de millimètres dont le fluide s'abaisse dans un tube de la matière du disque, dont le diamètre serait de $1^{mm}$, ce produit étant multiplié par le sinus de la moitié de l'angle aigu que la surface du fluide forme avec le disque et, de plus, étant divisé par la racine carrée du cosinus de l'angle total.

Tous ces résultats ont besoin d'une légère correction relative à la supposition d'une grande largeur du disque. Je donne cette correction qui peut être négligée, sans erreur sensible, pour les disques dont le diamètre est de $30^{mm}$, ou au-dessus.

Pour comparer les résultats précédents à l'expérience, considérons un disque de verre de $100^{mm}$ de diamètre. M. Haüy a observé que dans un tube de verre de $1^{mm}$ de diamètre l'eau s'élève, au-dessus du niveau, à la hauteur de $13^{mm},569$; d'où il est facile de conclure, au moyen du théorème énoncé ci-dessus, que la force nécessaire pour détacher le disque, de la surface de l'eau, équivaut à un poids de $28^{g},931$. Suivant les expériences de M. Achard, cette force est de $29^{g},319$, ce qui diffère très peu du résultat précédent. On a fait quelques expériences sur la résistance qu'oppose un disque de verre appliqué à la surface du mercure. Mais pour les comparer à la théorie, il faudrait connaître l'angle que forme la surface de ce fluide, en contact avec le verre. Une expérience de ce genre, faite avec précision, est très propre à déterminer cet angle qui paraît s'élever à 30° ou 40°.

Si l'on place, horizontalement l'un sur l'autre, deux disques de verre, en laissant entre eux une couche d'eau très mince, ces deux disques adhèrent avec une force considérable. Pour la déterminer, on observera que le fluide interposé prend alors la forme d'une poulie, et que le plus petit rayon de courbure de sa surface est à très peu près égal à la moitié de l'épaisseur de la couche. En négligeant donc ici, comme on peut le faire lorsque les disques sont fort larges, le plus grand rayon de courbure, on trouve la résistance que les deux disques opposent à leur séparation, égale au poids d'un cylindre d'eau qui aurait pour base la surface du disque et pour hauteur l'élévation de l'eau entre deux plans de verre parallèles et distants, l'un de l'autre, de l'intervalle qui sépare les disques. M. Guyton de Morveau a fait une semblable expérience avec deux disques de verre dont le diamètre était de $81^{mm},21$, et il a trouvé la résistance à leur séparation, égale à $250^{g},6$. Suivant le théorème précédent, cette résistance n'est que de $155^{g},78$. La différence d'environ un tiers, entre ces deux résultats, tient sans doute, soit à l'évaluation de l'intervalle qui sépare les disques, évaluation très délicate, lorsqu'il s'agit d'aussi petits intervalles, soit aux inégalités des surfaces des disques, qu'il est difficile de rendre exactement planes.

La suspension des petits corps à la surface des fluides dépend de ce principe général : *La diminution du poids d'un corps plongeant dans un fluide qui s'abaisse près de lui par l'action capillaire, est égale au poids d'un volume de fluide, pareil à celui de la partie du corps située au-dessous du niveau, plus au poids du volume de fluide que le corps écarte par l'action capillaire. Si cette action élève le fluide au-dessus du niveau, la diminution du poids du corps est alors égale au poids d'un volume de fluide, pareil à la partie du corps située au-dessous du niveau, moins le poids du fluide soulevé par l'action capillaire.*

Ce principe embrasse le principe connu d'hydrostatique sur la diminution du poids d'un corps plongeant dans un fluide; il suffit d'en supprimer ce qui est relatif à l'action capillaire qui disparait totalement, lorsque le corps est entièrement plongé dans le fluide, au-dessous du niveau.

Pour démontrer le principe que nous venons d'énoncer, considérons un canal vertical assez large pour embrasser le corps et tout le volume sensible de fluide qu'il soulève, ou de l'espace qu'il laisse vide par l'action capillaire. Concevons que ce canal, après avoir pénétré dans le fluide, se recourbe horizontalement et qu'ensuite il se relève verticalement, en conservant dans toute son étendue la même largeur. Il est clair que, dans le cas de l'équilibre, les poids contenus dans les deux branches verticales de ce canal doivent être égaux. Il faut donc que le corps par son poids compense le vide qu'il produit par l'action capillaire; ou s'il soulève par cette action le fluide, il faut que par sa légèreté spécifique il compense le poids du fluide élevé. Dans le premier cas, cette action soulève le corps qui peut être par là maintenu à la surface, quoique plus pesant spécifiquement que le fluide; dans le second cas, elle tend à faire plonger le corps dans le fluide. C'est ainsi qu'un cylindre d'acier, très délié, dont le contact avec l'eau est empêché soit par un vernis, soit par une petite couche d'air qui l'enveloppe, est soutenu à la surface de ce fluide. Si l'on place ainsi deux cylindres égaux et parallèles, qui se touchent de manière qu'ils se dépassent mutuellement, on observe qu'à l'instant ils glissent l'un sur l'autre, pour se mettre de niveau par leurs extrémités. La raison de ce phénomène est visible. Le fluide est plus déprimé par l'action capillaire des deux cylindres, à l'extrémité de chacun d'eux, qui est en contact avec l'autre cylindre, qu'à l'extrémité opposée. La base de cette dernière extrémité est donc plus pressée que l'autre base, puisque le fluide y est plus élevé. Chaque cylindre tend, en conséquence, à se réunir de plus en plus avec l'autre; et comme les forces accélératrices portent toujours un système de corps, dérangé de l'état d'équilibre, au delà de cette situation, les deux cylindres doivent se dépasser alternativement en faisant des oscillations qui, diminuant sans cesse par les résistances qu'elles éprouvent, finissent par être anéanties. Ces cylindres, alors parvenus à l'état de repos, sont de niveau par leurs extrémités. On pourrait déterminer ces oscillations par l'analyse, et comparer sur ce point la théorie de l'action capillaire avec l'expérience. Ces comparaisons sont la vraie pierre de touche des théories qui ne laissent plus rien à désirer, lorsqu'on peut à leur moyen, non seulement prévoir tous les effets qui doivent résulter de circonstances données, mais encore en déterminer exactement les quantités.

Si l'on considère l'ensemble des phénomènes capillaires et leur dépendance du seul principe d'une attraction entre les molécules des corps, décroissante avec une extrême rapidité, il est impossible de révoquer ce principe en doute. Cette attraction est la cause des affinités chimiques : elle ne s'arrête point à la surface des corps; mais pénétrant dans leur intérieur, à des profondeurs qui, quoique imperceptibles à nos sens, sont très sensibles dans le jeu des affinités, elle produit cette influence des masses, dont M. Berthollet a développé les effets d'une manière si neuve et si heureuse. Combinée avec la figure des espaces capillaires, elle donne naissance à une variété presque infinie de phénomènes qui rentrent maintenant, comme les phénomènes célestes, dans le domaine de l'Analyse. Leur théorie est le point de contact le plus intime de la Physique avec la Chimie, deux sciences qui se touchent aujourd'hui par tant de côtés, que l'on ne peut cultiver l'une avec un grand succès, sans avoir approfondi l'autre. La ressemblance de la figure des fluides élevés, déprimés ou arrondis par l'action capillaire, avec les surfaces engendrées par les courbes connues sous les noms de *chaînette*, de *linéaire* et d'*élastique*, dont les géomètres s'occupèrent à l'origine du Calcul infinitésimal, donna lieu de penser à quelques physiciens que les surfaces des fluides étaient uniformément tendues, comme les surfaces élastiques. Segner, qui paraît avoir eu le premier cette idée ([1]), sentit bien qu'elle ne pouvait être qu'une fiction propre à représenter les effets d'une attraction entre les molécules, décroissante très rapidement. Cet habile géomètre essaya de démontrer que cette attraction devait avoir les mêmes résultats; mais, en suivant son raisonnement, il est facile d'en reconnaître l'inexactitude, et l'on peut juger, par la note qui termine ses recherches, qu'il semble n'en avoir pas été satisfait lui-même. D'autres physiciens, en reprenant l'idée d'une tension uniforme des surfaces fluides, l'ont

([1]) *Mémoires de la Société royale de Göttingue*, t. I.



appliquée à divers phénomènes capillaires. Mais ils n'ont pas été plus heureux que Segner, dans l'explication de cette force, et les plus sages se sont contentés de l'envisager comme un moyen de représenter les phénomènes. En se livrant à toutes les conjectures que leur première vue fait naître, on peut rencontrer quelques vérités; mais elles sont presque toujours mêlées avec beaucoup d'erreurs, et leur découverte n'appartient qu'à celui qui, les séparant de ce mélange, parvient à les établir solidement par l'observation ou par le calcul.

SUR LA LOI

DE LA

# RÉFRACTION EXTRAORDINAIRE DE LA LUMIÈRE

## DANS LES CRISTAUX DIAPHANES [1].

*Journal de Physique*, t. LXVIII; 1809.

La vraie loi de la réfraction extraordinaire dans le cristal d'Islande a été découverte par Huygens. M. Malus, qui vient de la comparer à un très grand nombre d'expériences faites avec une extrême précision, sur les faces naturelles et artificielles de ce cristal, a reconnu qu'elle y satisfait exactement, en sorte qu'on doit la mettre au rang des plus certains comme des plus beaux résultats de la Physique. Huygens l'avait déduite d'une manière ingénieuse, de son hypothèse sur la propagation de la lumière qu'il concevait formée par les ondulations d'un fluide éthéré. Ce grand géomètre supposait, dans les milieux diaphanes ordinaires, la vitesse de ces ondulations, plus petite que dans le vide et la même dans tous les sens. Il imaginait, dans le cristal d'Islande, deux espèces d'ondulations : dans l'une, la vitesse est la même suivant toutes les directions; dans l'autre, cette vitesse est variable et représentée par les rayons d'un ellipsoïde de révolution, dont le centre est au point d'incidence du rayon lumineux sur la face du cristal, et dont l'axe est parallèle à l'axe du cristal, c'est-à-dire à la droite qui joint les deux angles solides obtus du rhomboïde. Huygens n'assigne point la cause de cette variété d'ondulations; et les singu-

[1] Lu à la première Classe de l'Institut, dans sa séance du 30 janvier 1809.



liers phénomènes qu'offre la lumière, en passant d'un cristal dans un autre, sont inexplicables dans son hypothèse. Cela, joint aux grandes difficultés que présente la théorie des ondes de lumière, a fait rejeter par la plupart des physiciens la loi de réfraction qu'il y avait attachée. Mais l'expérience ayant prouvé l'exactitude de cette loi remarquable, on doit la séparer entièrement des hypothèses qui l'ont fait découvrir. Il serait bien intéressant de la rapporter, ainsi que Newton l'a fait à l'égard de la réfraction ordinaire, à des forces attractives ou répulsives, dont l'action n'est sensible qu'à des distances imperceptibles; il est, en effet, très vraisemblable qu'elle en dépend, et je m'en suis assuré par les considérations suivantes :

On sait que le principe de la moindre action a généralement lieu dans le mouvement d'un point soumis à ce genre de forces. En appliquant ce principe à la lumière, on peut faire abstraction de la courbe insensible qu'elle décrit dans son passage du vide dans un milieu diaphane, et supposer sa vitesse constante, lorsqu'elle y a pénétré d'une quantité sensible. Le principe de la moindre action se réduit donc alors à ce que la lumière parvient d'un point pris au dehors, à un point pris dans l'intérieur du cristal, de manière que si l'on ajoute le produit de la droite qu'elle décrit au dehors, par sa vitesse primitive, au produit de la droite qu'elle décrit au dedans, par la vitesse correspondante, la somme soit un *minimum*. Ce principe donne toujours la vitesse de la lumière dans un milieu diaphane, lorsque la loi de la réfraction est connue; et réciproquement il donne cette loi, quand on connaît la vitesse. Mais une condition à remplir dans le cas de la réfraction extraordinaire est que la vitesse du rayon lumineux, dans le milieu, soit indépendante de la manière dont il y est entré et ne dépende que de sa position par rapport à l'axe du cristal, c'est-à-dire de l'angle que ce rayon forme avec une ligne parallèle à cet axe. En effet, si l'on imagine une face artificielle perpendiculaire à l'axe, tous les rayons intérieurs également inclinés à cet axe le seront également à la face et seront évidemment soumis aux mêmes forces au sortir du cristal; tous reprendront leur vitesse primitive dans le vide :

la vitesse dans l'intérieur est donc pour tous la même. J'ai reconnu que la loi de la réfraction extraordinaire donnée par Huygens satisfait à cette condition, en même temps qu'au principe de la moindre action; ce qui ne laisse aucun lieu de douter qu'elle est due à des forces attractives et répulsives, dont l'action n'est sensible qu'à des distances insensibles. Une donnée précieuse, pour découvrir leur nature, est l'expression de la vitesse à laquelle l'analyse m'a conduit, et qui est égale à une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le rayon de l'ellipsoïde suivant lequel la lumière se dirige, la vitesse dans le vide étant prise pour unité. La vitesse du rayon *ordinaire*, dans le cristal, est l'unité divisée par l'axe de révolution de l'ellipsoïde; elle est, par conséquent, plus grande que celle du rayon *extraordinaire* : la différence des carrés des deux vitesses étant proportionnelle au carré du sinus de l'angle que ce dernier rayon forme avec l'axe. Cette différence représente celle des actions du cristal, sur les deux espèces de rayons. Suivant Huygens, la vitesse du rayon extraordinaire, dans le cristal, est exprimée par le rayon même de l'ellipsoïde; son hypothèse ne satisfait donc point au principe de la moindre action. Mais il est remarquable qu'elle satisfasse au principe de Fermat, qui consiste en ce que la lumière parvient d'un point donné au dehors du cristal à un point pris dans son intérieur, dans le moins de temps possible, car il est facile de voir que ce principe revient à celui de la moindre action, en y renversant l'expression de la vitesse. Ainsi l'un et l'autre de ces principes conduisent à la loi de la réfraction extraordinaire, découverte par Huygens, pourvu que dans le principe de Fermat on prenne, avec Huygens, le rayon de l'ellipsoïde pour représenter la vitesse et que, dans le principe de la moindre action, ce rayon représente le temps employé par la lumière à parcourir un espace déterminé pris pour unité. Si les axes de l'ellipsoïde sont égaux entre eux, l'ellipsoïde devient une sphère, et la réfraction se change en réfraction ordinaire; ainsi dans ces phénomènes la nature, en allant du simple au composé, fait succéder les formes elliptiques à la forme circulaire, comme dans les mouvements et la figure des corps célestes.



Descartes est le premier qui ait publié la vraie loi de la réfraction ordinaire, que Képler et d'autres physiciens avaient inutilement cherchée. Huygens affirme, dans sa *Dioptrique*, qu'il l'a vue présentée sous une autre forme, dans un manuscrit de Snellius, qu'on lui a dit avoir été communiqué à Descartes, et d'où peut-être, ajoute-t-il, ce dernier a tiré le rapport constant des sinus de réfraction et d'incidence. Mais cette réclamation tardive d'Huygens en faveur de son compatriote ne me paraît pas suffisante pour enlever à Descartes le mérite d'une découverte que personne ne lui a contestée de son vivant. Ce grand géomètre l'a déduite des deux propositions suivantes : l'une, que la vitesse de la lumière parallèle à la surface d'incidence n'est altérée ni par la réflexion, ni par la réfraction; l'autre, que la vitesse est différente dans les milieux divers, et plus grande dans ceux qui réfractent plus la lumière. Descartes en a conclu que si, dans le passage d'un milieu dans un autre moins réfringent, l'inclinaison du rayon lumineux est telle que l'expression du sinus de réfraction soit égale ou plus grande que le rayon, alors la réfraction se change en réflexion, les deux angles de réflexion et d'incidence étant égaux. Tous ces résultats sont conformes à la nature, comme Newton l'a fait voir par la théorie des forces attractives; mais les preuves que Descartes en a données sont inexactes et il est assez remarquable que Huygens et lui soient parvenus, au moyen de théories incertaines ou fausses, aux véritables lois de la réfraction de la lumière. Descartes eut à ce sujet, avec Fermat, une longue querelle, que les Cartésiens prolongèrent après sa mort et qui fournit à Fermat l'occasion heureuse d'appliquer sa belle méthode *de maximis et minimis*, aux expressions radicales. En considérant cette matière sous un point de vue métaphysique, il chercha la loi de la réfraction, par le principe que nous avons exposé précédemment, et il fut très surpris d'arriver à celle de Descartes. Mais ayant trouvé que, pour satisfaire à son principe, la vitesse de la lumière devait être plus petite dans les milieux diaphanes que dans le vide, tandis que Descartes la supposait plus grande, il se confirma dans la pensée que les démonstrations de ce grand géomètre étaient fautives. Maupertuis, convaincu par les raisonnements de Newton de la vérité des suppositions de Descartes, reconnut que la fonction qui, dans le mouvement de la lumière, est un *minimum* n'est pas, comme Fermat le suppose, la somme des quotients, mais celle des produits des espaces décrits par les vitesses correspondantes. Ce résultat, étendu à l'intégrale du produit de l'élément de l'espace par la vitesse dans les mouvements variables, a conduit Euler au principe de la moindre action, que M. de Lagrange ensuite a dérivé des lois primordiales du mouvement. L'usage que je fais de ce principe, soit pour reconnaître si la loi de réfraction extraordinaire donnée par Huygens dépend de forces attractives ou répulsives, et pour l'élever ainsi au rang des lois rigoureuses, soit pour déduire réciproquement l'une de l'autre les lois de la réfraction et de la vitesse de la lumière dans les milieux diaphanes, m'a paru mériter l'attention des physiciens et des géomètres.

# CONSIDÉRATIONS

SUR LA

# THÉORIE DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES.

*Journal de Physique*, t. LXXXIX; 1819.

J'ai donné, dans deux suppléments au dixième Livre de la *Mécanique céleste* (¹), une théorie de ces phénomènes, fondée sur l'hypothèse d'attractions entre les molécules des corps qui cessent d'être sensibles à des distances sensibles. Déjà Newton, dans la question très étendue qui termine son *Optique*, avait attribué à ce genre d'attraction les phénomènes capillaires et tous les phénomènes chimiques. Il avait ainsi posé les vrais fondements de la Chimie; mais ses idées, justes et profondes, ne furent pas alors mieux comprises que sa théorie du système du monde; elles ont même été adoptées plus tard que cette théorie. A la vérité, ce géomètre n'ayant pas soumis au calcul, comme il l'avait fait pour les lois de Képler, la loi principale des phénomènes capillaires, savoir : l'élévation ou la dépression des liquides dans un tube capillaire et cylindrique, en raison inverse de son diamètre, on pourrait élever des doutes sur la cause à laquelle il attribuait ce phénomène général; car il ne suffit pas, pour expliquer les effets de la nature, de les faire dépendre vaguement d'un principe, il faut prouver par le calcul que ces effets en sont une suite nécessaire. Personne ne sentait mieux que Newton la nécessité de cette règle; mais il a sans doute été arrêté par les difficultés du problème comme à l'égard de plusieurs points du système du monde, qu'il s'était contenté d'attri-

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. IV.

buer, sans preuve, à l'attraction universelle, et que l'analyse perfectionnée a fait dériver de ce principe. Clairaut est le premier qui ait entrepris d'appliquer l'analyse aux phénomènes capillaires, dans son bel Ouvrage sur la figure de la Terre; il suppose que les molécules du verre et de l'eau s'attirent réciproquement suivant une loi quelconque et, après avoir analysé toutes les forces qui en résultent pour soulever l'eau dans un tube de verre, capillaire et cylindrique, il se contente d'observer, sans le prouver, *qu'il y a une telle loi à donner à l'attraction, qu'il en résulte que l'élévation de l'eau dans le tube sera en raison renversée du diamètre, ainsi que l'expérience le donne*. Mais la difficulté du problème consiste à faire voir l'existence de cette loi, et à la déterminer. C'est l'objet que j'ai rempli dans ma théorie de l'action capillaire. D'après cette théorie, l'élévation et la dépression des liquides dans les tubes capillaires, en raison inverse du diamètre de ces tubes, exigent que l'attraction moléculaire soit insensible à des distances sensibles; toute loi de ce genre satisfait à ce phénomène. L'analyse qui m'a conduit à ce résultat m'a donné pareillement l'explication des phénomènes nombreux et variés que présentent les liquides dans les espaces capillaires; j'ai multiplié le plus qu'il m'a été possible ces phénomènes, et j'ai trouvé constamment les résultats du calcul d'accord avec l'expérience; aussi ai-je eu la satisfaction de voir ma théorie adoptée par tous les géomètres qui l'ont approfondie. Mes savants confrères Haüy et Biot l'ont exposée avec autant de clarté que d'élégance dans leurs traités de Physique, et un jeune physicien bien connu de l'Académie, M. Petit, en a fait le sujet d'une dissertation intéressante. Il faut donc exclure toutes les lois d'attraction, sensibles à des distances sensibles et différentes de la gravitation universelle. Hawskbée avait déjà reconnu, par l'expérience, que l'épaisseur plus ou moins grande des parois d'un tube capillaire n'a aucune influence sur l'élévation du liquide, et il en avait conclu que l'attraction du tube est insensible à une distance sensible; mais l'élévation du liquide, à raison inverse du diamètre du tube, le prouve d'une manière beaucoup plus précise.



Une remarque importante est que la même attraction moléculaire agit d'une manière très différente dans les phénomènes chimiques et dans les phénomènes capillaires. Dans les premiers, elle exerce toute son énergie; elle est très faible dans les seconds et dépend de la courbure des espaces capillaires qui renferment les liquides. L'effet chimique de l'attraction est exprimé par l'intégrale de la différentielle de la distance, multipliée par une fonction qui dépend de cette attraction, et qui diminue avec une extrême rapidité quand la distance augmente. L'intégrale du produit de la même différentielle par la distance, divisée par le rayon de courbure de l'espace, exprime l'effet capillaire. Il est facile d'en conclure que cet effet est d'un ordre très inférieur à celui de l'effet chimique, quand la distance à laquelle l'attraction devient insensible est très petite relativement au rayon de courbure.

Dans la nature, les molécules des corps sont animées de deux forces contraires : leur attraction mutuelle et la force répulsive de la chaleur. Quand les liquides sont placés dans le vide, ces deux forces se font à très peu près équilibre; si elles suivaient la même loi de variation relativement à la distance, l'intégrale qui exprime l'effet capillaire serait insensible; mais si les lois de leur variation sont différentes, et si, comme cela est nécessaire pour la stabilité de l'équilibre, la force répulsive de la chaleur décroît plus rapidement que la force attractive, alors l'expression intégrale des effets capillaires est sensible, dans le cas même où l'expression intégrale des effets chimiques devient nulle, et les phénomènes capillaires ont lieu dans le vide comme dans l'air, conformément à l'expérience : la théorie que j'ai donnée de ces phénomènes embrasse l'action des deux forces dont je viens de parler, en prenant pour l'expression intégrale de l'effet capillaire la différence des deux intégrales relatives à l'attraction moléculaire et à la force répulsive de la chaleur, ce qui répond à l'objection du savant physicien M. Young, qui reproche à cette théorie de ne point considérer cette dernière force.

Comment ces forces attractives et répulsives dont l'action est si différente dans les phénomènes chimiques et dans les phénomènes capillaires agissent-elles dans le mouvement des liquides? C'est une question que les vrais géomètres jugeront très difficile. Une longue suite d'expériences précises et variées, l'emploi de toutes les ressources de l'analyse, et probablement encore la création de nouvelles méthodes, seront nécessaires pour cet objet. Après avoir reconnu l'influence de la courbure des surfaces dans les espaces capillaires, j'essayai d'appliquer mon analyse au mouvement d'oscillation des liquides dans les tubes recourbés très étroits. On conçoit, en effet, que dans ce mouvement la courbure de la surface du liquide change sans cesse, ce qui produit une force variable qui tend à élever ou à déprimer le liquide, suivant que la surface est concave ou convexe. Cette force a sur le mouvement du liquide une influence sensible lorsque le tube est fort étroit et quand les oscillations ont peu d'étendue. Quelques expériences me paraissent l'indiquer; mais le frottement du liquide contre les parois du tube et la viscosité des molécules liquides, ou la difficulté plus ou moins grande qu'elles éprouvent à glisser les unes sur les autres, deux causes qu'il est presque impossible de soumettre au calcul et de combiner avec le changement de sa surface, me firent abandonner cette recherche. L'effet de ces causes est remarquable, même dans les phénomènes capillaires, et l'on doit user de précautions pour s'en garantir. On l'éprouve journellement dans les observations du baromètre, qu'il faut légèrement agiter pour avoir la hauteur du mercure due à la seule pression de l'atmosphère. Cet effet s'observe encore lorsque l'eau s'élève dans un tube de verre capillaire. Newton, Hawskbée et M. Haüy n'ont trouvé, par leurs expériences, que la moitié de la hauteur observée par M. Gay-Lussac. Les premiers employaient des tubes secs, dont les parois opposaient par leur frottement et par l'air adhérent à leur surface une résistance sensible à l'ascension de l'eau; le second, pour anéantir cette résistance, humectait ces parois; il obtenait ainsi une hauteur toujours la même et double à peu près de la précédente.

Le frottement et la viscosité des liquides doivent être principalement



sensibles dans leur écoulement par des canaux étroits; ce phénomène composé ne peut donc pas nous conduire aux lois de l'attraction moléculaire. Quand on veut remonter à un principe général, la méthode philosophique prescrit d'en considérer les effets les plus simples. Ce fut par les lois simples du mouvement elliptique que Newton découvrit le principe de la pesanteur universelle, qu'il eût difficilement reconnu dans les inégalités nombreuses et compliquées du mouvement lunaire. On doit pareillement rechercher les lois des attractions moléculaires, en considérant leurs effets dans les phénomènes de la statique chimique et dans ceux que présente l'équilibre des liquides contenus dans les espaces capillaires. Ces phénomènes ne laissent aucun lieu de douter que ces attractions soient insensibles à des distances sensibles; ils prouvent encore qu'elles s'étendent au delà du contact; autrement l'expression intégrale des effets capillaires serait nulle, ainsi que l'influence de la masse dans les affinités chimiques, influence dont M. Berthollet a si bien développé les effets et à laquelle la théorie capillaire prête l'appui du calcul. Mais s'il est indispensable d'admettre, entre les molécules des substances pondérables, des forces qui s'étendent à une petite distance des surfaces, il serait contraire à tous les phénomènes de supposer cette distance appréciable. De pareilles forces seraient sensibles dans les observations astronomiques et dans les expériences du pendule; surtout elles se seraient manifestées dans la belle expérience de Cavendish, pour déterminer la densité de la Terre. Dans toutes ces observations très précises, on n'a reconnu que les effets de la pesanteur universelle. Quelques physiciens, pour expliquer les phénomènes du magnétisme, avaient introduit des forces attractives et répulsives, décroissantes comme le cube de la distance; mais Coulomb, qui joignait, à l'art de faire avec précision les expériences, l'esprit d'investigation qui sait les diriger vers un but intéressant, reconnut que les forces de l'électricité et du magnétisme suivent la même loi que l'attraction universelle. Ces forces présentent quelquefois, par leur décomposition, des résultantes qui décroissent en raison du cube de la distance, comme il arrive aux attractions du

Soleil et de la Lune dans le flux et le reflux de la mer. Mais si les phénomènes composés qui sont les effets de ces résultantes ne conviennent pas pour faire découvrir les lois primordiales, ils sont très propres à vérifier ces lois, quand on peut les soumettre au calcul. Le savant dont je viens de parler avait fait, dans cette vue, un grand nombre d'expériences délicates touchant la manière dont l'électricité est répandue sur la surface de divers globes électrisés, en contact ou en présence les uns des autres; mais les explications qu'il en a données, quoique ingénieuses, étaient imparfaites et ne pouvaient acquérir l'exactitude désirable qu'au moyen d'une analyse plus profonde que celle dont il a fait usage. Cet objet a été complètement rempli par M. Poisson, dans deux beaux Mémoires insérés parmi ceux de l'Institut. L'accord de ses calculs avec les expériences de Coulomb est une vérification importante de la loi des forces électriques. Ces applications de la haute analyse ont le double avantage de perfectionner ce puissant instrument de l'esprit humain, et de nous faire pénétrer profondément dans la nature dont les phénomènes sont les résultats mathématiques d'un petit nombre de lois générales.

# MÉMOIRES

EXTRAITS DU

# BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE.

## MÉMOIRE SUR LE MOUVEMENT
D'UN
# CORPS QUI TOMBE D'UNE GRANDE HAUTEUR.

*Bulletin de la Société philomathique*, t. III; 1803.

Un corps qui tombe d'une hauteur considérable s'éloigne un peu de la verticale, en vertu du mouvement de rotation de la Terre; cet écart bien observé est donc propre à manifester ce mouvement. Quoique la rotation de la Terre soit maintenant établie avec toute la certitude que les Sciences physiques comportent, cependant une preuve directe de ce phénomène doit intéresser les géomètres et les astronomes. Ils ont fait, en conséquence, plusieurs expériences sur la chute des corps qui tombent d'une grande hauteur et ils ont en même temps donné la théorie de ce mouvement; mais leurs résultats présentent de grandes différences. Tous conviennent que le corps doit dévier vers l'est de la verticale, plusieurs pensent qu'il doit à la fois dévier vers l'équateur; d'autres, enfin, prétendent que cette dernière déviation n'aurait point lieu dans le vide, mais qu'elle doit être produite par la résistance de l'air. Au milieu de ces incertitudes, j'ai cru qu'une analyse exacte de ce problème serait utile à ceux qui voudront comparer sur ce point la théorie aux observations. C'est l'objet de ce Mémoire dans lequel je donne la véritable expression de la déviation du corps, en ayant égard à la résistance de l'air et je fais voir que, quelles que soient cette résistance et la figure de la Terre, il ne doit point y avoir de déviation vers l'équateur.

L'Observatoire national offre un puits d'environ $54^m$ de profondeur, depuis la plate-forme du sommet jusqu'au fond des caves, et qui est très propre à ce genre d'expériences, auquel il fut primitivement destiné. En choisissant le moment où l'atmosphère est calme et en fermant exactement l'Observatoire, on évitera l'influence du mouvement de l'air dont on se garantirait plus sûrement encore et très facilement, au moyen de quatre tambours adaptés verticalement aux quatre voûtes que le puits traverse. La déviation du corps vers l'est serait d'environ $6^{mm}$, suivant la théorie. Cette quantité, quoique très petite, peut être reconnue par des expériences très précises et répétées plusieurs fois.

Nommons $x$, $y$, $z$ les trois coordonnées rectangles du corps, l'origine de ces coordonnées étant au centre de la Terre et l'axe des $x$ étant l'axe de rotation de cette planète. Soient

$r$ le rayon mené de ce centre au sommet de la tour d'où le corps tombe;

$\theta$ l'angle que $r$ forme avec l'axe de rotation;

$\omega$ l'angle que le plan passant par $r$ et par l'axe de la Terre forme avec le plan passant par le même axe et par l'un des axes principaux de la Terre, situés dans le plan de son équateur;

$nt$ le mouvement angulaire de rotation de la Terre.

En nommant X, Y, Z les coordonnées du sommet de la tour, on aura

$$\mathrm{X} = r\cos\theta,$$
$$\mathrm{Y} = r\sin\theta\cos(nt+\omega),$$
$$\mathrm{Z} = r\sin\theta\sin(nt+\omega);$$

$nt+\omega$ étant l'angle que le plan passant par $r$ et par l'axe de la Terre forme avec le plan des $x$ et des $y$.

Supposons ensuite que, relativement au corps dans sa chute, $r$ se change en $r-\alpha s$, $\theta$ dans $\theta+\alpha u$ et $\omega$ dans $\omega+\alpha v$; on aura

$$x = (r-\alpha s)\cos(\theta+\alpha u),$$
$$y = (r-\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\cos(nt+\omega+\alpha v),$$
$$z = (r-\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\sin(nt+\omega+\alpha v).$$



Nommons V la somme de toutes les molécules du sphéroïde terrestre, divisées par leurs distances au corps attiré. Les forces dont ce corps est animé par l'attraction de ces molécules sont, parallèlement aux axes des $x$, des $y$ et des $z$, $\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)$ et $\left(\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right)$, comme il résulte du n° 11 du second Livre de ma *Mécanique céleste* (¹). Pour avoir égard à la résistance de l'air, nous pouvons représenter par $\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)$ l'expression de cette résistance; car la vitesse du corps, relative à l'air considéré comme immobile, étant considérablement plus grande dans le sens de $r$ que dans le sens perpendiculaire à $r$, ainsi qu'on le verra bientôt, l'expression de cette vitesse relative est à très peu près $\alpha\frac{ds}{dt}$. Si l'on fait, pour plus de simplicité, $r=1$, la vitesse relative du corps dans le sens de $\theta$ est $\alpha\frac{du}{dt}$ et dans le sens de $\omega$ elle est égale à $\alpha\frac{dv}{dt}\sin\theta$; la résistance de l'air sera donc

$$\frac{\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}\alpha\frac{ds}{dt},$$

dans le sens de $r$;

$$\frac{-\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}\alpha\frac{du}{dt},$$

dans le sens de $\theta$;

$$\frac{-\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}\alpha\frac{dv}{dt}\sin\theta,$$

dans le sens de $\omega$.

Nommons K le facteur $\dfrac{\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}$; on aura, par le principe des vi-

(¹) *Œuvres de Laplace*, t. I.

tesses virtuelles,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta x \frac{d^2x}{dt^2} + \delta y \frac{d^2y}{dt^2} + \delta z \frac{d^2z}{dt^2}, \\ &- \delta x \left(\frac{dV}{dx}\right) - \delta y \left(\frac{dV}{dy}\right) - \delta z \left(\frac{dV}{dz}\right), \\ &- K\,\delta r\,\alpha \frac{ds}{dt} + K\,\delta\theta\,\alpha \frac{du}{dt} + K\,\delta\omega \sin^2\theta\,\alpha \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

la caractéristique différentielle $\delta$ se rapportant aux coordonnées $r$, $\theta$ et $\omega$, dont $x$, $y$, $z$ sont fonctions. En substituant pour $x$, $y$, $z$, leurs valeurs précédentes, on a, en négligeant les termes de l'ordre $\alpha^2$,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = \delta r &\left(-\alpha \frac{d^2s}{dt^2} - 2\alpha n r \frac{dv}{dt}\sin^2\theta - \alpha K \frac{ds}{dt}\right) \\ &+ r^2\,\delta\theta \left(\alpha \frac{d^2u}{dt^2} - 2\alpha n \frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta + \alpha K \frac{du}{dt}\right) \\ &+ r^2\,\delta\omega \sin\theta \left(\alpha \frac{d^2v}{dt^2}\sin\theta + 2\alpha n \frac{du}{dt}\cos\theta - 2\alpha n \frac{ds}{dt}\frac{\sin\theta}{r} + \alpha K \frac{dv}{dt}\sin\theta\right) \\ &- \delta V - \frac{n^2}{2}\delta[(r-\alpha s)^2 \sin^2(\theta + \alpha u)] + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Par la nature de l'équilibre de la couche d'air dans laquelle le corps se trouve, on a

$$(2)\qquad 0 = \delta V + \frac{n^2}{2}\delta[(r-\alpha s)^2 \sin^2(\theta + \alpha u)] \ldots \text{ (}^1\text{)},$$

pourvu que la valeur de $\delta r$ soit assujettie à la surface de niveau de la couche. Soit, à cette surface,

$$r = a + y,$$

$y$ étant une fonction de $\theta$, de $\omega$ et de $a$, $a$ étant constant pour la même couche; l'équation (2) donne ainsi

$$0 = \left(\frac{dQ}{dr}\right)\left[\left(\frac{dy}{d\theta}\right)\delta\theta + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)\delta\omega\right] + \left(\frac{dQ}{d\theta}\right)\delta\theta + \left(\frac{dQ}{d\omega}\right)\delta\omega,$$

Q étant supposé égal à $V + \frac{n^2}{2}[(r-\alpha s)^2 \sin^2(\theta + \alpha u)]$ et en retran-

(1) *Œuvres de Laplace*, t. I, p. 110.



chant cette équation de l'équation (1), on aura

$$\begin{aligned} 0 = \delta r &\left(-\alpha \frac{d^2s}{dt^2} - 2\alpha n r \frac{dv}{dt}\sin^2\theta - \alpha K \frac{ds}{dt}\right) \\ &+ r^2\,\delta\theta \left(\alpha \frac{d^2u}{dt^2} - 2\alpha n \frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta + \alpha K \frac{du}{dt}\right) \\ &+ r^2\,\delta\omega \sin\theta \left(\alpha \frac{d^2v}{dt^2}\sin\theta + 2\alpha n \frac{du}{dt}\cos\theta - 2\alpha n \frac{ds}{dt}\frac{\sin\theta}{r} + \alpha K \frac{dv}{dt}\sin\theta\right) \\ &- \left(\frac{dQ}{dr}\right)\left[\delta r - \left(\frac{dy}{d\theta}\right)\delta\theta - \left(\frac{dy}{d\omega}\right)\delta\omega\right]. \end{aligned}$$

Si l'on égale à zéro les coefficients des trois variations $\delta r$, $\delta\theta$ et $\delta\omega$, et si l'on observe que $-\left(\frac{dQ}{dr}\right)$ représente la pesanteur que nous désignerons par $g$ (1), on aura, en prenant pour l'unité le rayon $r$, ce qu'on peut faire ici sans erreur sensible, les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \frac{d^2s}{dt^2} + 2\alpha n \frac{dv}{dt}\sin^2\theta + \alpha K \frac{ds}{dt} - g, \\ 0 &= \alpha \frac{d^2u}{dt^2} - 2\alpha n \frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta + \alpha K \frac{du}{dt} - g\left(\frac{dy}{d\theta}\right), \\ 0 &= \alpha \frac{d^2v}{dt^2}\sin\theta + 2\alpha n \frac{du}{dt}\cos\theta - 2\alpha n \frac{ds}{dt}\sin\theta + \alpha K \frac{dv}{dt}\sin\theta - \frac{g}{\sin\theta}\left(\frac{dy}{d\omega}\right). \end{aligned}$$

Si l'on prend la seconde décimale, ou la cent-millième partie du jour moyen, pour unité de temps, $n$ est le petit angle décrit dans une seconde par la rotation de la Terre. Cet angle est extrêmement petit; et comme $\alpha u$ et $\alpha v$ sont de très petites quantités par rapport à $\alpha s$, on peut négliger, dans la première de ces trois équations, le terme $2\alpha n \frac{dv}{dt}\sin^2\theta$; dans la deuxième, le terme $-2\alpha n \frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta$ et, dans la troisième, le terme $2\alpha n \frac{du}{dt}\cos\theta$; ce qui réduit ces trois équations

(1) *Œuvres de Laplace*, t. II, p. 75.

aux suivantes

$$\begin{aligned}
o &= \alpha\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha K\frac{ds}{dt} - g,\\
o &= \alpha\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha K\frac{du}{dt} - g\frac{dy}{d\theta},\\
o &= \alpha\frac{d^2v}{dt^2}\sin\theta - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\sin\theta + \alpha K\frac{dv}{dt}\sin\theta - \frac{g}{\sin\theta}\left(\frac{dy}{d\omega}\right),
\end{aligned}$$

K étant une fonction de $\alpha s$ et de $\alpha\frac{ds}{dt}$, la première de ces équations donne $\alpha s$ en fonction du temps $t$. Si l'on fait $\alpha u = \alpha s\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$, on satisfera à la deuxième de ces équations; parce que $g$ et $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$ peuvent être supposés constants pendant la durée du mouvement, vu la petitesse de la hauteur d'où le corps tombe, relativement au rayon terrestre. Cette manière de satisfaire à la seconde équation est la seule qui convienne à la question présente, dans laquelle $u$, $\frac{du}{dt}$ sont nuls ainsi que $s$ et $\frac{ds}{dt}$ à l'origine du mouvement. Maintenant, si l'on imagine un fil à plomb de la longueur $\alpha s$, suspendu au point d'où le corps tombe, il s'écartera, au midi du rayon $r$, de la quantité $\alpha s\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$ et, par conséquent, de la quantité $\alpha u$; le corps en tombant est donc toujours sur les parallèles des points de la verticale qui sont à la même hauteur que lui, il n'éprouve ainsi aucune déviation vers le midi de cette ligne.

Pour intégrer la troisième équation, nous ferons

$$\alpha v\sin\theta = \frac{\alpha s}{\sin\theta}\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \alpha v'$$

et nous aurons

$$o = \alpha\frac{d^2v'}{dt^2} + \alpha K\frac{dv'}{dt} - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\sin\theta.$$

Le corps s'écarte, à l'est du rayon $r$, de la quantité $\alpha v\sin\theta$ ou $\frac{\alpha s}{\sin\theta}\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \alpha v'$, mais le fil à plomb s'écarte, à l'est de ce rayon, de la



quantité $\frac{\alpha s}{\sin\theta}\left(\frac{dy}{d\omega}\right)$; $\alpha v'$ est donc l'écart du corps à l'est de la verticale.

Supposons maintenant la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, en sorte que $k = m\alpha\frac{ds}{dt}$, $m$ étant un coefficient qui dépend de la figure du corps et de la densité de l'air, densité variable à raison de l'élévation du corps, mais qui peut être ici supposée constante sans erreur sensible. On aura

$$o = \alpha\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha^2 m\frac{ds^2}{dt^2} - g.$$

Pour intégrer cette équation, nous ferons

$$\alpha s = \frac{1}{m}\log s',$$

et nous aurons

$$o = \frac{d^2s'}{dt^2} - mgs',$$

ce qui donne en intégrant

$$s' = Ae^{t\sqrt{mg}} + Be^{-t\sqrt{mg}},$$

$e$ étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité et A et B étant deux arbitraires. Pour les déterminer nous observerons que $\alpha s$ doit être nul lorsque $t = o$, ce qui donne alors

$$s' = 1$$

et, par conséquent,

$$A + B = 1;$$

de plus, $\alpha\frac{ds}{dt}$ doit être nul avec $t$ et, par conséquent, aussi $\frac{ds'}{dt}$, ce qui donne

$$A - B = o.$$

On a donc

$$A = B = \frac{1}{2}$$

et, par conséquent,

$$\alpha s = \frac{1}{m}\log\left(\frac{1}{2}e^{t\sqrt{mg}} + \frac{1}{2}e^{-t\sqrt{mg}}\right),$$

et en réduisant en séries

$$\alpha s = \frac{gt^2}{2} - \frac{mg^2t^4}{12} + \frac{m^2g^3t^6}{45} - \dots$$

Pour déterminer $\alpha v'$, nous observerons que l'on a

$$\alpha \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}\frac{ds'}{s'\,dt},$$

et qu'ainsi l'équation différentielle en $\alpha v'$ devient

$$0 = \alpha s' \frac{d^2v'}{dt^2} + \alpha \frac{ds'}{dt}\frac{dv'}{dt} - \frac{2n}{m}\frac{ds'}{dt}\sin\theta,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\alpha s' \frac{dv'}{dt} = \frac{2n}{m}\sin\theta s' + C,$$

C étant une constante arbitraire. Pour la déterminer, nous observerons que $t$ étant nul, $\frac{dv'}{dt} = 0$ et qu'alors $s' = 1$, ce qui donne

$$C = -\frac{2n}{m}\sin\theta,$$

$$\alpha \frac{dv'}{dt} = \frac{2n}{m}\left(1 - \frac{1}{s'}\right)\sin\theta = \frac{2n}{m}\left(1 - \frac{2}{e^{t\sqrt{mg}} + e^{-t\sqrt{mg}}}\right)\sin\theta.$$

En intégrant de manière que $\alpha v'$ soit nul avec $t$, on aura

$$\alpha v' = \frac{2n\sin\theta}{m}t - \frac{4n\sin\theta}{m\sqrt{mg}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{e^{\frac{t}{2}\sqrt{mg}} - e^{-\frac{t}{2}\sqrt{mg}}}{e^{\frac{t}{2}\sqrt{mg}} + e^{-\frac{t}{2}\sqrt{mg}}}\right),$$

et en réduisant en séries, on aura

$$\alpha v' = \frac{ngt^3\sin\theta}{3}\left(1 - \frac{mgt^2}{4} + \frac{61}{840}m^2g^2t^4 - \dots\right).$$

On doit observer, dans ces expressions de $\alpha s$ et de $\alpha v'$, que $t$ exprimant un nombre d'unités de temps, $g$ est le double de l'espace que la pesanteur fait décrire dans la première unité de temps; $nt$ est l'angle de rotation de la Terre pendant le nombre $t$ d'unités et $mg$ est un nombre dépendant de la résistance que l'air oppose au mouvement du corps.



Pour avoir le temps de la chute et l'écart vers l'est, en fonction de la hauteur d'où le corps est tombé, nommons $h$ cette hauteur. On aura par ce qui précède

$$2e^{mh} = e^{t\sqrt{mg}} + e^{-t\sqrt{mg}},$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{1}{\sqrt{mg}}\log\frac{1}{2}\left(\sqrt{e^{mh}+1} + \sqrt{e^{mh}-1}\right)^2;$$

et ensuite

$$\alpha v' = \frac{2n}{m\sqrt{mg}}\left[\log\frac{1}{2}\left(\sqrt{e^{mh}+1} + \sqrt{e^{mh}-1}\right)^2 - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{e^{mh}-1}}{\sqrt{e^{mh}+1}}\right)\right]\sin\theta.$$

La hauteur $h$ étant donnée, l'observation du temps $t$ donnera la valeur de $m$ et l'on en conclura $\alpha v'$ ou la déviation du corps vers l'est de la verticale. L'accord de ce résultat avec l'expérience manifestera le mouvement de rotation de la Terre. On pourra encore déterminer $nt$ par la figure et la densité du corps et par les expériences déjà faites sur la résistance de l'air.

Dans le vide ou, ce qui revient au même, dans le cas de $m$ infiniment petit, on a

$$\alpha v' = \frac{2nh}{3}\sin\theta\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

$\theta$ est à fort peu près le complément de la latitude du lieu et, pour Paris, on peut supposer $\theta = 41°9'46''$, $n$ est l'angle de rotation de la Terre pendant une unité de temps. Si l'on prend pour cette unité la cent-millième partie du jour, on aura

$$n = \frac{1\,296\,000}{99\,727},$$

parce que la durée de la rotation de la Terre est $0^{\text{jour}},99727$; on a ensuite à Paris

$$\frac{1}{2}g = 3^{\text{m}},66107.$$

En supposant donc $h = 54^{m}$, on trouve

$$\alpha v' = 5^{mm},7337 \text{ (}^1\text{)}.$$

*Additions du Rédacteur.*

M. Guglielmini parait être le premier qui ait éveillé sur ces objets l'attention des astronomes et des géomètres, par des expériences qu'il fit en 1791, et dont le C. Lalande a rendu compte dans le *Magasin encyclopédique*. En faisant tomber des corps d'une hauteur de 241 pieds, il trouva à l'est de la verticale une déviation de 8 lignes et une de 5 lignes vers le sud, et ces résultats furent conformes à la théorie qu'il s'était faite. Ces expériences ont été répétées l'année dernière à Hambourg, par M. Henzenberg, qui a communiqué ses résultats au C. Laplace.

M. Henzenberg, faisant tomber des corps d'une hauteur de 235 pieds de Paris, trouva que leur déviation à l'est était de 4 lignes, et il en observa aussi une au sud, mais de 1,5 ligne seulement. Cette dernière, que la théorie du C. Laplace n'explique pas, tient peut-être à des circonstances météorologiques.

La latitude de Hambourg étant de 53°36′, on a

$$\theta = 36°24',$$

puis

$$h = 235 = 76^{m},337.$$

Avec ces données on trouve, par la formule du C. Laplace, en ne tenant pas compte de la résistance de l'air, une déviation à l'est de

(1) Pour effectuer ce calcul, il faut observer que le numérateur de $u$ est la circonférence du cercle, exprimée en secondes sexagésimales, et doit être converti en parties du rayon, en le divisant par l'arc égal au rayon, arc dont le logarithme est 5,3144251.

Le C. Laplace n'a pas tenu compte ici de la résistance de l'air, parce que son influence sur les balles de plomb d'un petit diamètre, avec lesquelles on fait les expériences, est très petite. (*Note du R.*)



$8^{mm},79$ ou environ 3,9 lignes du pied de Paris, résultat qui s'accorde à $\frac{1}{10}$ de ligne avec l'observation de M. Henzenberg.

M. Guglielmini a écrit au C. Lalande, en 1797, qu'il avait reconnu qu'il ne devait point y avoir de déviation au sud, et il a fait, en conséquence, de nouvelles expériences, mais dont les résultats ne nous sont pas parvenus. L. C.

MÉMOIRE

SUR

# LA DOUBLE RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE

## DANS LES CRISTAUX DIAPHANES [1].

*Bulletin de la Société philomathique*, t. I; 1808.

La lumière, en passant de l'air dans un milieu diaphane non cristallisé, se réfracte de manière que les sinus de réfraction et d'incidence sont constamment dans le même rapport; mais lorsqu'elle traverse la plupart des cristaux diaphanes, elle présente un singulier phénomène, qui fut d'abord observé dans le cristal d'Islande, où il est très sensible.

Un rayon lumineux, qui tombe perpendiculairement sur une des faces naturelles de ce cristal, se divise en deux parties : l'une traverse le cristal sans changer de direction; l'autre s'en écarte dans un plan parallèle au plan mené perpendiculairement à la face, par l'axe du cristal, c'est-à-dire par la ligne qui joint les sommets de ses deux angles solides obtus. Cette division du rayon a généralement lieu relativement à une face quelconque naturelle ou artificielle, et quel que soit l'angle d'incidence : une partie suit la loi de la réfraction ordinaire; l'autre partie suit une loi de réfraction extraordinaire reconnue par Huygens et qui, considérée comme un résultat de l'expérience, peut être mise au rang des plus belles découvertes de ce rare génie.

[1] *Voir* le développement de ce Mémoire dans les *Œuvres de Laplace*, T. XII, p. 267.



Il y fut conduit par la manière dont il envisageait la propagation de la lumière qu'il supposait formée par les ondulations d'un fluide éthéré. Dans les milieux diaphanes ordinaires, la vitesse de ces ondes était, suivant lui, plus petite que dans le vide et la même dans tous les sens. Mais il imaginait dans le cristal d'Islande deux espèces d'ondulations : dans l'une, la vitesse était la même suivant toutes les directions, comme dans les milieux ordinaires; dans l'autre, cette vitesse était variable et représentée par les rayons d'un ellipsoïde de révolution aplati, dont le centre serait au point d'incidence du rayon lumineux sur la face du cristal, et dont l'axe serait parallèle à l'axe du cristal. Huygens avait encore reconnu que, pour satisfaire à l'expérience, il fallait représenter la vitesse des ondulations relatives à la réfraction *ordinaire*, par le demi-petit axe de l'ellipsoïde; ce qui lie d'une manière très remarquable les deux réfractions, *ordinaire* et *extraordinaire*. Ce grand géomètre n'assignait point la cause de cette variété d'ondulations; et le singulier phénomène qu'offre la lumière en passant d'un cristal dans un autre, et dont nous parlerons à la fin de ce Mémoire, est inexplicable dans son hypothèse. Cela, joint aux grandes difficultés que présente la théorie des ondes de lumière, a fait rejeter, par Newton et la plupart des physiciens qui l'ont suivi, la loi de réfraction qu'Huygens y avait attachée. Mais M. Malus ayant prouvé, par un grand nombre d'expériences très précises, l'exactitude de cette loi, on doit la séparer entièrement des hypothèses qui l'ont fait découvrir. Il serait bien intéressant de la rapporter, ainsi que Newton l'a fait à l'égard de la réfraction ordinaire, à des forces attractives ou répulsives, dont l'action n'est sensible qu'à des distances insensibles. Il est, en effet, très vraisemblable qu'elle en dépend, et je m'en suis assuré par les considérations suivantes :

Le principe de la moindre action a généralement lieu dans le mouvement d'un point soumis à ce genre de forces. En appliquant ce principe à la lumière, on peut faire abstraction de la courbe insensible qu'elle décrit dans son passage du vide dans un milieu diaphane, et supposer sa vitesse constante, lorsqu'elle y a pénétré d'une quantité sensible. Le principe de la moindre action se réduit donc alors à ce que la lumière parvient, d'un point pris au dehors, à un point pris dans l'intérieur du cristal, de manière que si l'on ajoute le produit de la droite qu'elle décrit au dehors, par sa vitesse primitive, au produit de la droite qu'elle décrit au dedans, par sa vitesse correspondante, la somme soit un minimum. Ce principe donne toujours la vitesse de la lumière dans un milieu diaphane, lorsque la loi de la réfraction est connue; et réciproquement il donne cette loi, quand on connaît la vitesse. Mais une condition à remplir dans le cas de la réfraction extraordinaire est que la vitesse du rayon lumineux dans le cristal soit indépendante de la manière dont il y est entré et ne dépende que de sa position par rapport à l'axe du cristal, c'est-à-dire de l'angle que ce rayon forme avec une ligne parallèle à l'axe. En effet, si l'on imagine une face artificielle perpendiculaire à l'axe, tous les rayons intérieurs *extraordinaires*, également inclinés à cet axe, le seront également à la face et seront évidemment soumis aux mêmes forces au sortir du cristal : tous reprendront leur vitesse primitive dans le vide; la vitesse dans l'intérieur est donc pour tous la même. J'ai reconnu que la loi de réfraction extraordinaire donnée par Huygens satisfait à cette condition ainsi qu'au principe de la moindre action; ce qui ne laisse aucun lieu de douter qu'elle est due à des forces attractives et répulsives, dont l'action n'est sensible qu'à des distances insensibles. Jusqu'alors on ne pouvait la considérer que comme étant approchée dans des limites moindres que les erreurs inévitables de l'expérience; maintenant, on doit la considérer comme une loi rigoureuse.

Une donnée précieuse, pour découvrir la nature des forces qui la produisent, est l'expression de la vitesse à laquelle l'analyse m'a conduit et que je trouve égale à une fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est le rayon de l'ellipsoïde précédent, suivant lequel la lumière se dirige, la vitesse dans le vide étant prise pour unité. Je fais voir que la vitesse du rayon ordinaire est l'unité divisée par le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde et, par ce moyen, la liaison très remarquable qu'Huygens avait trouvée par l'expérience, entre



les deux réfractions *ordinaire* et *extraordinaire* dans le cristal, est démontrée *a priori*, comme un résultat nécessaire de la loi de la réfraction extraordinaire. La vitesse du rayon *ordinaire* dans le cristal est donc toujours plus grande que celle du rayon *extraordinaire*, la différence des carrés des deux vitesses étant proportionnelle au carré du sinus de l'angle que l'axe forme avec ce dernier rayon. Suivant Huygens, la vitesse du rayon extraordinaire dans le cristal est exprimée par le rayon même de l'ellipsoïde; son hypothèse ne satisfait donc point au principe de la moindre action; mais il est remarquable qu'elle satisfasse au principe de Fermat, qui consiste en ce que la lumière parvient, d'un point donné au dehors du cristal, à un point pris dans son intérieur, dans le moins de temps possible; car il est facile de voir que ce principe revient à celui de la moindre action, en y renversant l'expression de la vitesse. Ainsi l'on peut déduire également de ces deux principes la loi de réfraction donnée par Huygens. Au reste, cette identité des lois de réfraction, déduites de la manière dont Huygens envisageait la réfraction de la lumière, avec celles que donne le principe de la moindre action, a lieu généralement quel que soit le sphéroïde dont les rayons, suivant lui, expriment la vitesse de la lumière dans l'intérieur du cristal; ce que je démontre très simplement de la manière suivante :

Huygens considère un rayon RC [1], tombant sur une face naturelle ou artificielle AFEK du cristal d'Islande. En menant un plan CO perpendiculairement à ce rayon et prenant OK parallèle à CR pour représenter la vitesse de la lumière dans le vide, il suppose que tous les points $Coo'O$ de l'onde lumineuse parviennent, en même temps et suivant des directions parallèles, au plan $Ki'iI$ qu'il détermine de cette manière. AFED est un ellipsoïde de révolution dont C est le centre et CD le demi-axe de révolution et dont les rayons représentent, suivant Huygens, les vitesses respectives de la lumière qui suit leurs directions. Il mène par le rayon RC un plan perpendiculaire

[1] *Œuvres de Laplace*, T. XII, p. 281.

à la face et qui la coupe suivant la droite BCK et, par le point K, il mène, dans le plan de la face, KT perpendiculairement à KC. Enfin, par KT, il mène un plan KI qui touche l'ellipsoïde en I. CI est, suivant lui, la direction du rayon réfracté. En effet, il est aisé de voir que, dans cette construction, un point quelconque $o$ de l'onde lumineuse parvient en $i$, suivant la ligne brisée $oci$, dans le même temps que O parvient en K. CI représentant la vitesse du rayon réfracté, la droite CI est parcourue dans le même temps que la droite OK. Nous prendrons ce temps pour unité de temps et OK pour unité d'espace. Le point $o$ parvient en $c$ dans un temps proportionnel à $oc$ et, par conséquent, égal à $\frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{KC}}$. Il parvient de $c$ en $i$ dans l'intérieur du cristal, dans un temps égal au temps que la lumière emploie à parvenir de C en I, multiplié par $\frac{\mathrm{K}c}{\mathrm{CK}}$ et, par conséquent, égal à $\frac{\mathrm{K}c}{\mathrm{KC}}$, $ci$ étant parallèle à CI. En ajoutant ce temps à $\frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{KC}}$ on aura l'unité pour le temps que le point $o$ met à parvenir en $i$.

Prenons $o'c'$ infiniment près de $oc$ et parallèle à cette ligne; le point $o'$ parviendra en $i'$ dans une unité de temps. Tirons les droites $c'o$ et $c'i$, et supposons que le point $o$ parvienne en $i$, suivant la ligne brisée $oc'i$; $c'o'$ étant perpendiculaire à CO, la droite $c'o$ peut être supposée égale à $c'o'$ et les temps employés à les parcourir peuvent être supposés égaux. De plus, le temps employé à parcourir $c'i$ peut être supposé égal au temps employé à parcourir $c'i'$, parce que le plan KI touchant en $i$ le sphéroïde semblable au sphéroïde AFED, dont le centre est en $c'$ et dont les dimensions sont diminuées dans la raison de K$c'$ à KC, les deux points $i$ et $i'$ peuvent être supposés à la surface de ce sphéroïde. Selon Huygens, les vitesses suivant $c'i$ et $c'i'$ sont proportionnelles à ces lignes; les temps employés à les parcourir sont donc égaux. Ainsi le temps de la transmission de la lumière, suivant la ligne brisée $oc'i$, est égal à l'unité comme suivant la ligne brisée $oci$: la différentielle de ces deux temps est donc nulle; ce qui est le principe de Fermat.



Il est clair que ce raisonnement a généralement lieu quelles que soient la nature du sphéroïde et la position des points $c$ et $c'$ sur la face du cristal, et quand même ils ne seraient pas sur la droite CK, pourvu qu'ils en soient infiniment près.

En renversant l'expression de la vitesse le principe de Fermat donne celui de la moindre action. Les lois de réfraction qui résultent des hypothèses d'Huygens sont donc généralement conformes à ce dernier principe et c'est la raison pour laquelle ces hypothèses, quoique fautives, représentent la nature.

Si l'on nomme

$b$ le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde d'Huygens;
$a$ son demi-grand axe;
$v$ la vitesse d'un rayon de lumière dans l'intérieur du cristal;
V l'angle que fait sa direction avec l'axe,

le rayon de l'ellipsoïde sera

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\mathrm{V}}}.$$

Ainsi la vitesse $v$ devant être, par le principe de la moindre action, égale à l'unité divisée par ce rayon, on aura

$$v^2=\frac{1}{b^2}-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\sin^2\mathrm{V}.$$

Cette vitesse est la plus petite lorsque le rayon de lumière est perpendiculaire à l'axe du cristal et alors elle devient $\frac{1}{a}$. Elle est la plus grande lorsqu'elle est parallèle à cet axe et alors elle est égale à $\frac{1}{b}$.

Huygens a reconnu, par l'expérience, que $b$ est le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence dans la réfraction ordinaire du cristal d'Islande. Ce résultat, très remarquable, qui lie entre elles les deux réfractions *ordinaire* et *extraordinaire* est une suite nécessaire de ce que les modifications qui distinguent le rayon ordinaire du rayon extraordinaire ne sont point absolues, mais qu'elles sont uniquement relatives à la position du rayon par rapport à l'axe du cristal. Pour le faire voir, rappelons le singulier phénomène que la lumière présente après son passage à travers un cristal.

En passant dans un cristal, la lumière se divise en deux faisceaux, l'un ordinaire et l'autre extraordinaire, et chacun d'eux sort du cristal sans se diviser. Si l'on conçoit un second cristal placé au-dessous du premier, dans une situation entièrement semblable, alors le rayon ordinaire sera rompu ordinairement en passant dans le second cristal, et le rayon extraordinaire sera rompu extraordinairement. Cela aura lieu généralement si les sections principales des deux faces opposées sont parallèles. On nomme *section principale* d'une face la section du cristal par un plan perpendiculaire à cette face et passant par l'axe du cristal. Mais si les sections principales sont perpendiculaires entre elles, alors le rayon ordinaire sera rompu extraordinairement en passant dans le second cristal, et le rayon extraordinaire sera rompu ordinairement. Dans les positions intermédiaires, chaque rayon se partagera en deux autres à son entrée dans le second cristal.

Concevons maintenant que l'on présente un rayon rompu ordinairement par un premier cristal, perpendiculairement à un second cristal coupé par un plan perpendiculaire à son axe; il est clair qu'une inclinaison infiniment petite de l'axe sur la face d'incidence suffit pour changer ce rayon en rayon extraordinaire. Or cette inclinaison ne peut qu'altérer infiniment peu l'action du cristal et, par conséquent, la vitesse du rayon dans son intérieur; cette vitesse est donc alors celle du rayon extraordinaire et, par conséquent, elle est égale à $\frac{1}{b}$, ce qui revient au résultat d'Huygens; car on sait que la vitesse de la lumière dans les milieux diaphanes ordinaires exprime le rapport des sinus d'incidence et de réfraction, sa vitesse dans le vide étant prise pour unité.

Le principe de la moindre action peut servir encore à déterminer les lois de la réflexion de la lumière; car, quoique la nature de la force



qui fait rejaillir la lumière à la surface des corps soit inconnue, cependant, on peut la considérer comme une force répulsive qui rend, en sens contraire à la lumière, la vitesse qu'elle lui fait perdre, de même que l'élasticité restitue aux corps, en sens contraire, la vitesse qu'elle détruit. Or on sait que, dans ce cas, le principe de la moindre action subsiste toujours. A l'égard d'un rayon lumineux, soit ordinaire, soit extraordinaire, réfléchi par la surface extérieure d'un corps, ce principe se réduit à ce que la lumière parvient d'un point à un autre par le chemin le plus court de tous ceux qui rencontrent la surface. En effet, la vitesse de la lumière réfléchie est la même que celle de la lumière directe et l'on peut établir en principe général que, lorsqu'un rayon lumineux, après avoir éprouvé l'action de tant de forces que l'on voudra, revient dans le vide, il y reprend sa vitesse primitive. La condition du chemin le plus court donne l'égalité des angles de réflexion et d'incidence, dans un plan perpendiculaire à la surface, ainsi que Ptolémée l'avait déjà remarqué. C'est la loi générale de la réflexion à la surface extérieure des corps.

Mais lorsque la lumière, en entrant dans un cristal, s'est divisée en rayons ordinaire et extraordinaire; une partie de ces rayons est réfléchie par la surface intérieure à leur sortie du cristal. En se réfléchissant, chaque rayon, soit ordinaire, soit extraordinaire, se divise en deux autres; en sorte qu'un rayon solaire, en pénétrant dans le cristal, forme par sa réflexion partielle, à la surface de sortie, quatre faisceaux distincts dont nous allons déterminer la direction.

Supposons d'abord les surfaces d'entrée et de sortie, que nous nommerons *première* et *seconde* face, parallèles; donnons au cristal une épaisseur insensible, et cependant plus grande que la somme des rayons des sphères d'activité des deux faces. Dans ce cas on prouvera, par le raisonnement qui précède, que les quatre faisceaux réfléchis n'en formeront sensiblement qu'un seul, situé dans le plan d'incidence du rayon générateur et formant, avec la première face, l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Restituons maintenant au cristal son épaisseur; il est clair que, dans ce cas, les faisceaux réfléchis après leur sortie par la première face prendront des directions parallèles à celles qu'ils avaient prises dans le premier cas : ces faisceaux seront donc parallèles entre eux et au plan d'incidence du rayon générateur; seulement, au lieu d'être sensiblement confondus, comme dans le premier cas, ils seront séparés par des distances d'autant plus grandes que le cristal aura plus d'épaisseur.

Maintenant, si l'on considère un rayon quelconque intérieur sortant en partie par la seconde face et en partie réfléchi par elle en deux faisceaux, le rayon sorti sera parallèle au rayon générateur; car la lumière, en sortant du cristal, doit prendre une direction parallèle à celle qu'elle avait en y entrant, puisque les deux faces d'entrée et de sortie étant supposées parallèles, elle éprouve en sortant l'action des mêmes forces qu'elle avait éprouvées en entrant, mais en sens contraire. Concevons, par la direction du rayon sorti, un plan perpendiculaire à la seconde face et, dans ce plan, imaginons au dehors du cristal une droite passant par le point de sortie et formant avec la perpendiculaire à la face, mais du côté opposé à la direction du rayon sorti, le même angle que cette direction; enfin, concevons un rayon solaire entrant suivant cette droite dans le cristal. Ce rayon se partagera, à son entrée, en deux autres qui, au sortir du cristal par la première face, prendront des directions parallèles au rayon solaire avant son entrée par la seconde face; elles seront visiblement parallèles aux directions des deux faisceaux réfléchis : ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les deux rayons dans lesquels se divise le rayon solaire, en entrant par la seconde face, se confondent respectivement dans l'intérieur du cristal avec les directions des deux faisceaux réfléchis. Or, la loi d'Huygens donne les directions des rayons dans lesquels le rayon solaire se divise; elle donnera donc aussi celles des deux faisceaux réfléchis dans l'intérieur du cristal.

Si les deux faces du cristal ne sont pas parallèles, on aura par la même loi les directions des deux rayons dans lesquels le rayon générateur se divise en pénétrant par la première face; on aura ensuite, par cette loi, les directions de chacun de ces rayons à leur sortie par la seconde face; ensuite, la construction précédente donnera les directions, dans l'intérieur, des quatre faisceaux réfléchis par cette face; enfin, par la loi d'Huygens, on conclura leurs directions au sortir du cristal par la première face. On aura donc ainsi tous les phénomènes de la réflexion de la lumière par les surfaces des cristaux diaphanes. M. Malus a le premier reconnu ces lois de réflexion de la lumière, et il les a confirmées par un grand nombre d'expériences. Leur accord avec le résultat du principe de la moindre action achève de démontrer que tous ces phénomènes sont dus à l'action de forces attractives et répulsives.

SUR

# LA TRANSMISSION DU SON

## A TRAVERS LES CORPS SOLIDES.

*Bulletin de la Société philomathique*, t. V; 1816.

Ce Mémoire n'est pas écrit par Laplace. Il donne les formules analytiques du théorème sur la vitesse du son dans les corps solides énoncé par Laplace au Mémoire : *Sur l'action réciproque des pendules et sur la vitesse du son dans les diverses substances*. (*Annales de Chimie et de Physique*, t. III, 1816. — *Œuvres*, t. XIV, p. 291.)

# MÉMOIRES

EXTRAITS DES

# ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE.

SUR

# L'ACTION RÉCIPROQUE DES PENDULES

ET SUR LA

## VITESSE DU SON DANS LES DIVERSES SUBSTANCES (¹).

*Annales de Chimie et de Physique*, t. III; 1816.

La remarque que j'ai lue, il y a peu de temps, à l'Académie, sur la mesure du pendule à secondes par Borda m'a conduit à examiner particulièrement les diverses circonstances qui peuvent influer sur ce genre d'expériences et les précautions à prendre pour assurer l'exactitude des résultats, précautions qui doivent être extrêmes, lorsqu'on veut obtenir la longueur du pendule à un centième près de millimètre. L'une d'elles, la plus importante, consiste à fixer l'appareil de la manière la plus solide, en l'attachant à un corps très massif tel qu'un mur très épais et dont les molécules ne soient pas susceptibles de faire entre elles des vibrations étendues. Daniel Bernoulli rapporte, dans les *Mémoires de Pétersbourg* pour l'année 1777, une observation de Ferdinand Berthoud qui, ayant fermement attaché une excellente pendule astronomique, peu fixe auparavant, trouva que, par ce changement seul, elle retardait de 5 minutes en un jour : ce que Bernoulli explique d'une manière ingénieuse et juste. Des horloges fixées sur une même barre lui impriment un léger mouvement, font vibrer ses molécules et, par la réunion de ces causes, agissent les unes sur les autres et modifient réciproquement leurs oscillations. Huygens, dans son Ouvrage *De horologio oscillatorio*, rapporte qu'ayant ainsi fixé

(¹) Lu à l'Académie des Sciences le 25 novembre 1816.

deux horloges dont la marche était égale, il les vit avec surprise osciller en sens contraire, les oscillations de l'une d'elles commençant toujours au même instant où les oscillations de l'autre finissaient. Mais il est bien plus remarquable encore que cela ait lieu dans le cas même où il existe une légère différence dans la marche des deux horloges isolées. Ellicot a fait sur cet objet des expériences curieuses qu'il a consignées dans les *Transactions philosophiques* de l'année 1741; et M. Bréguet a obtenu des résultats semblables sur deux chronomètres placés très près l'un de l'autre. Je fais voir ici que ces phénomènes sont produits par le mouvement que les horloges impriment à la masse qui les soutient et par les vibrations qu'elles excitent dans ses molécules. Déjà les physiciens ont observé plusieurs effets très curieux de ces vibrations, parmi lesquels on doit surtout distinguer les phénomènes observés par M. Chladni sur les plaques et les verges sonores. Ce savant physicien en a déduit une méthode ingénieuse pour déterminer la vitesse du son dans les divers corps solides. Les recherches précédentes m'ont conduit au théorème suivant pour avoir cette vitesse dans les substances solides, liquides et aériformes.

Je suppose que l'on ait déterminé par l'expérience l'allongement qu'un mètre solide, placé horizontalement et fixe à l'une de ses extrémités, reçoit par l'action d'un poids égal au sien et qui agit à son autre extrémité : si la substance est fluide, je suppose que l'on ait déterminé le raccourcissement d'une colonne horizontale de ce fluide, de la longueur de $1^{m}$ et comprimée par un poids égal au sien. Cela posé, si l'on divise, par cet allongement ou ce raccourcissement, le double des mètres dont la pesanteur fait tomber les corps dans une seconde sexagésimale, la racine carrée de ce quotient sera le nombre de mètres que le son parcourt dans cette substance pendant le même intervalle.

Ainsi, Borda ayant observé qu'une règle de cuivre jaune, longue de 11 pieds et demi et pesant 37 onces, s'allonge, par l'action d'un poids de 24 livres, de cinq parties trois quarts, chaque partie étant un cent-millième de la toise; il en résulte qu'une règle de $1^{m}$ s'allonge de $0^{m},00000077379$ par l'action d'un poids égal au sien. En divisant par cette fraction l'espace $9^{m},8088$, double de celui que la pesanteur fait décrire à Paris dans la première seconde, la racine carrée 3560,4 du quotient sera le nombre de mètres que le son parcourt en une seconde dans le cuivre jaune.



On sait que la vitesse du son dans l'air est accrue d'un sixième environ par la chaleur que développe le rapprochement des molécules vibrantes. La même cause doit sans doute altérer cette vitesse dans tous les corps; mais il est difficile d'en déterminer l'influence. On peut cependant y parvenir en comparant la vitesse déduite du théorème précédent avec celle que donne la méthode de M. Chladni; car cette méthode, fondée sur le son produit par les vibrations longitudinales des verges sonores, donnant la vitesse réelle du son, l'excès de cette vitesse sur la précédente sera l'effet de la température alternativement élevée et abaissée dans les vibrations. La vitesse du son, conclue des expériences de M. Chladni sur une verge de cuivre jaune, est de $3596^{m},58$ par seconde, ce qui ne surpasse la précédente que d'environ un centième. L'influence de la cause dont j'ai parlé est donc ici beaucoup moindre que pour l'air; mais les petites erreurs des expériences laissent encore sur cet objet quelque incertitude.

Pour appliquer ce résultat aux fluides, je prendrai l'eau pour exemple. Suivant les expériences de Canton, rapportées dans les Volumes LII et LIV des *Transactions philosophiques*, lorsque la hauteur du baromètre est $0^{m},76$, le thermomètre centigrade marquant 10°, la pression de l'atmosphère diminue le volume de l'eau de 42,5 millionièmes. La diminution linéaire est trois fois moindre; ainsi, une colonne d'eau de $1^{m}$ de longueur est diminuée de 14,2 millionièmes par une pression équivalente à celle d'une colonne verticale du même fluide haute de $10^{m},325$. Le raccourcissement de la première colonne, comprimée par un poids égal au sien, est donc $0^{m},0000014044$. En divisant $9^{m},8088$ par cette fraction, 2642,8, racine carrée du quotient, sera le nombre de mètres que le son parcourt dans l'eau pendant une seconde; sa vitesse dans ce fluide est donc à peu près huit fois plus grande que dans l'air.

Les expériences de Canton sur l'eau de mer, dont la pesanteur spécifique est 1,028, donnent 37,5 millionièmes pour la diminution de son volume par la pression de l'atmosphère; d'où il suit que le son y parcourt $2807^m,4$ dans une seconde. Ces deux vitesses, relatives à une température de $10°$, varient très sensiblement avec elle. Les expériences propres à déterminer ainsi la vitesse du son dans les diverses substances me paraissent dignes de fixer l'attention des physiciens.

*Note du rédacteur.* — Les expériences d'Ellicot dont M. de Laplace parle dans son Mémoire étant peu connues, nous allons en rapporter la substance.

Deux horloges, contenues dans des boîtes séparées qui fermaient parfaitement, furent placées l'une à côté de l'autre et de manière qu'elles reposaient sur une même tringle en bois. Les pendules pesaient chacun 23 livres; dans l'état de repos, ils étaient distants l'un de l'autre de 2 pieds; un poids de 3 livres suffisait pour leur faire décrire des arcs de 3°. Dans cet état, l'on faisait osciller le pendule d'une des deux horloges que, pour abréger, j'appellerai n° 1; après un intervalle de temps de 16 minutes, ce pendule avait communiqué une telle quantité de mouvement au pendule du n° 2, qui d'abord était en repos, que celui-ci décrivait des arcs de 2° et avait mis en jeu tous les rouages de l'horloge; 30 minutes après le commencement de l'expérience, l'horloge n° 1 était arrêtée, tandis que le pendule du n° 2 parcourait des arcs de 5°.

Les effets étaient différents lorsqu'on faisait d'abord osciller le pendule du n° 2; celui-ci n'exerçait jamais une assez grande influence sur le pendule voisin pour faire engrener les rouages de l'horloge et communiquer le mouvement aux aiguilles. Ces variétés tenaient, suivant l'auteur, à l'inégalité de longueur qui existait entre les deux pendules.

Pour découvrir par quelles pièces de l'appareil les deux pendules influaient l'un sur l'autre, M. Ellicot plaça derrière la boîte de l'horloge n° 2 un appui qui l'éloignait de la tringle de bois, et dès lors il



ne put pas remarquer, même après un temps très long, qu'elle fût influencée, soit dans l'état de repos, soit dans celui du mouvement, par l'horloge voisine, qui était toujours dans la première situation. Un coin convenablement placé éloigna ensuite de même l'horloge n° 1 de la tringle. Après avoir ainsi isolé les deux boîtes, M. Ellicot plaça dans l'intervalle qui les séparait une pièce de bois qui se soutenait d'elle-même par un léger frottement; l'influence des deux pendules était tellement augmentée par cette disposition, qu'il suffisait de *six minutes* pour que l'horloge n° 1 mît en mouvement sa voisine et, après un nouvel intervalle de même durée, la première était déjà en repos. Cette influence parut diminuer, sans cependant être jamais détruite, à mesure que le sol sur lequel les boîtes des pendules reposaient devenait plus solide.

Si de là nous passons aux phénomènes que présentaient les deux pendules lorsqu'on les mettait simultanément en mouvement avec une amplitude d'environ 4°, nous trouvons que les arcs décrits par le n° 1 augmentaient d'étendue, pendant que ceux du n° 2 diminuaient; en sorte qu'après un certain temps les rouages et les aiguilles que celui-ci conduisait ne marchaient plus. A peine cependant quelques minutes s'étaient-elles écoulées, que les oscillations de ce second pendule se ranimaient; mais elles n'atteignaient jamais la valeur qu'elles avaient eue à l'origine du mouvement; c'est à 2° d'amplitude qu'elles déterminaient la marche des aiguilles. Pendant que les oscillations du pendule n° 2 allaient ainsi toujours en augmentant, celles du n° 1 diminuaient et, lorsque les arcs n'étaient plus que de 1°30′, cette horloge s'arrêtait à son tour. Ces arcs s'agrandissaient bientôt; ceux du n° 2 diminuaient alors de nouveau; l'horloge s'arrêtait encore et, après un certain nombre de minutes, recouvrait une seconde fois son premier mouvement. Dès lors, le n° 1 commençait à décliner et bientôt après l'horloge était arrêtée; mais son pendule, qui ne se mouvait presque plus, ne décrivait jamais, dans la suite de l'expérience, des arcs assez grands pour faire engrener les rouages; le n° 2 continuait à se mouvoir indéfiniment avec une amplitude d'environ 4°.

Pour étudier de plus près cette influence *mutuelle* et *alternative* des deux horloges, M. Ellicot imagina de mettre une seconde fois les deux pendules en mouvement, mais en leur faisant décrire de très grands arcs. Durant cette expérience, comme dans l'autre, chacun des pendules paraissait faire à son tour les oscillations les plus étendues; mais les horloges ne s'arrêtèrent pas; elles allèrent au contraire pendant plusieurs jours consécutifs, sans jamais s'écarter l'une de l'autre *d'une seule seconde*, quoique leurs marches, déterminées séparément, différassent d'*une minute et trente-six secondes* en 24 heures. L'horloge n° 1 avança, dans ce cas, relativement à son état ordinaire, de 1 minute 17 secondes, tandis que le n° 2 retarda de 19 secondes.

En changeant la longueur des pendules, on altérait la durée de la période pendant laquelle leurs mouvements augmentaient et diminuaient : plus les pendules approchaient d'être égaux et plus la période était longue.

Une circonstance importante de ces expériences, dont M. Ellicot ne parle pas et qui n'avait point échappé à l'auteur anonyme d'une lettre insérée dans le *Journal des Savants*, du 6 mars 1665, c'est que, lorsque deux horloges voisines marchent d'accord, les pendules ne sont pas parallèles dans leurs vibrations, mais qu'ils s'approchent et s'écartent par des mouvements contraires. Si on les fait battre par des coups entremêlés, ils se mettent toujours en consonance après un certain temps et y restent ensuite indéfiniment. Les deux horloges dont se servait cet observateur différaient l'une de l'autre de 5 secondes par jour lorsqu'elles marchaient séparément; la communication de mouvement avait lieu par une tringle de bois. Dans le double chronomètre de M. Bréguet, les deux systèmes ne pouvaient agir l'un sur l'autre que par l'entremise des pièces de cuivre sur lesquelles ils étaient fixés : l'air du moins n'y entrait pour rien; car leur accord n'était pas altéré, comme je m'en suis assuré, lorsqu'on les plaçait dans le vide, quoique alors leur marche s'accélérât de plus de 20 secondes par jour.

---

SUR LA

# VITESSE DU SON DANS L'AIR ET DANS L'EAU [1].

*Annales de Chimie et de Physique*, t. III; 1816.

Newton a donné, dans le second Livre des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, l'expression de la vitesse du son : la manière dont il y parvient est un des traits les plus remarquables de son génie. La vitesse conclue de cette expression est plus petite d'environ un sixième que celle qui résulte des expériences faites avec un grand soin, en 1738, par les membres de cette Académie. Newton, qui avait déjà reconnu cette différence par les expériences faites de son temps, a essayé de l'expliquer; mais les découvertes modernes sur la nature de l'air atmosphérique ont détruit cette explication et toutes celles que divers géomètres avaient proposées. Heureusement ces découvertes nous présentent un phénomène qui m'a paru être la vraie cause de l'excès de la vitesse observée du son sur sa vitesse calculée : ce que la plupart des physiciens géomètres ont ensuite adopté. Ce phénomène est la chaleur que l'air développe par sa compression. Lorsqu'on élève sa température, sa pression restant la même, une partie seulement du calorique qu'il reçoit est employée à produire cet effet; l'autre partie, qui devient latente, sert à dilater son volume. C'est elle qui se développe quand on réduit par la compression l'air ainsi dilaté à son volume primitif. La chaleur dégagée par le rapprochement de deux molécules voisines d'une fibre aérienne vibrante élève donc leur température et se répand de proche en proche sur l'air et les corps envi-

(1) Lu à l'Académie des Sciences, le 23 décembre 1816.

ronnants; mais, cette diffusion et l'irradiation se faisant avec une extrême lenteur relativement à la vitesse des vibrations, on peut supposer sans erreur sensible que, pendant la durée d'une vibration, la quantité de chaleur reste la même entre deux molécules voisines. Ainsi ces molécules, en se rapprochant, se repoussent davantage, d'abord parce que, leur température étant supposée constante, leur répulsion mutuelle augmente en raison inverse de leur distance; ensuite parce que le calorique latent qui se développe élève leur température. Newton n'a eu égard qu'à la première de ces deux causes de répulsion; mais il est visible que la seconde cause doit accroître la vitesse du son, puisqu'elle augmente le ressort de l'air. En la faisant entrer dans le calcul, je parviens au théorème suivant :

*La vitesse réelle du son est égale au produit de la vitesse que donne la formule newtonienne par la racine carrée du rapport de la chaleur spécifique de l'air, soumis à la pression constante de l'atmosphère et à diverses températures, à sa chaleur spécifique lorsque son volume reste constant* [1].

Si l'on suppose, avec plusieurs physiciens, que la chaleur contenue dans une masse d'air soumise à une pression constante et à des températures diverses est proportionnelle à son volume (ce qui doit s'écarter peu de la vérité), la racine carrée précédente devient celle du rapport de la différence de deux pressions à la différence des quantités de chaleur que développent deux volumes égaux d'air atmosphérique soumis respectivement à ces pressions, en passant d'une température donnée à une même température inférieure, la plus petite de ces quantités de chaleur et la plus petite de ces pressions étant prises pour unités.

Désireux de comparer ce théorème à l'expérience, j'ai heureusement trouvé les données d'observation qu'il suppose, parmi les nombreux résultats du travail intéressant de MM. La Roche et Bérard sur la cha-

(1) *OEuvres de Laplace*, T. V, Liv. XII, p. 109, 137, 157.



leur spécifique des gaz [1]. Ces habiles physiciens ont mesuré les quantités de chaleur que dégagent, par un abaissement de température d'environ 80°, deux volumes égaux d'air atmosphérique : l'un comprimé par le poids de l'atmosphère, l'autre comprimé par ce même poids augmenté de trente-six centièmes. Ils ont trouvé que la chaleur dégagée, relative à la plus grande pression, était 1,24; la chaleur relative à la plus petite pression étant l'unité. Il faut donc, suivant le théorème précédent, pour avoir la vitesse réelle du son, multiplier la vitesse déduite de la formule de Newton par la racine carrée du rapport de trente-six centièmes à vingt-quatre centièmes ou par la racine de $\frac{3}{2}$. A la température de 6° cette formule donne $282^{m},42$ pour l'espace que le son doit parcourir dans une seconde sexagésimale. En la multipliant par $\sqrt{\frac{3}{2}}$, cet espace devient égal à $345^{m},9$. Les académiciens français l'ont observé de $337^{m},18$. La différence de ces deux résultats peut tenir à l'incertitude des expériences; mais la petitesse de cette différence établit d'une manière incontestable que l'excès de la vitesse observée du son sur sa vitesse calculée par la formule newtonienne est dû à la chaleur latente que la compression de l'air développe.

Il résulte de ce qui précède que la pression étant constante, si l'on augmente un volume donné d'air en élevant sa température et qu'ensuite on le réduise par la compression à son volume primitif, il dégagera par cette compression un tiers de la chaleur employée. Il est à désirer que les physiciens déterminent, par des expériences directes, le rapport des chaleurs spécifiques de l'air à pression constante et de l'air à volume constant, rapport que nous venons de trouver égal à 1,5. La vitesse du son, observée par les académiciens français, donne 1,4254 pour ce rapport; peut-être, vu la difficulté des expériences directes, cette vitesse est le moyen le plus précis de l'obtenir.

J'ai conclu [p. 166, Cahier d'octobre [2]] les vitesses du son dans

(1) *Œuvres de Laplace*, T. V, Liv. XII, p. 143.
(2) *Id.*, T. XIV, p. 293.

l'eau de pluie et dans l'eau de mer égales à 2642$^{m}$,8 et 2807$^{m}$,4 par seconde sexagésimale, en partant des expériences de Canton sur la compression de ces liquides et en n'ayant égard qu'à la diminution linéaire des dimensions du volume comprimé. J'ai reconnu qu'il faut considérer la diminution totale de ce volume, et qu'ainsi les nombres précédents doivent être divisés par $\sqrt{3}$, ce qui les réduit à 1525$^{m}$,8 et 1620$^{m}$,9; en sorte que la vitesse du son dans l'eau douce est quatre fois et demie plus grande que dans l'air.

---

MÉMOIRE [1] SUR L'APPLICATION

DU

# CALCUL DES PROBABILITÉS AUX OBSERVATIONS

ET SPÉCIALEMENT

## AUX OPÉRATIONS DU NIVELLEMENT [2].

*Annales de Chimie et de Physique*, t. XII; 1819.

Dans les grandes triangulations que l'on a exécutées pour la mesure de la Terre, on a observé avec soin les distances zénithales des signaux, soit pour réduire les angles à l'horizon, soit pour déterminer les hauteurs respectives des stations diverses. La réfraction terrestre a sur ces hauteurs une grande influence, et sa variabilité les rend fort incertaines. Je me propose ici d'apprécier la probabilité des erreurs dont elles sont susceptibles.

La théorie des réfractions nous montre que, dans une atmosphère constante, la réfraction terrestre est un aliquote de l'arc céleste compris entre les zéniths de l'observateur et du signal observé; en sorte que, pour l'obtenir, il suffit de multiplier cet arc par un facteur qui serait constant si l'atmosphère était toujours la même, mais qui varie sans cesse, à raison des changements continuels de la température et de la densité de l'air. Un grand nombre d'observations peut donner la valeur moyenne de ce facteur et la loi de probabilité de ses variations. J'ai conclu l'une et l'autre des observations de M. Delambre, publiées

(1) Lu à l'Académie des Sciences, le 20 décembre 1819.
(2) *Voir*, pour les développements analytiques, *Œuvres de Laplace*, T. VII, 3$^{e}$ Suppl., p. 581 et suiv.

dans le second Volume de son Ouvrage intitulé : *Base du Système métrique*. En partant de ces données, j'ai déterminé la probabilité des erreurs de la hauteur de Paris au-dessus de la mer, dans l'hypothèse d'une chaîne de vingt-cinq triangles équilatéraux qui unirait Dunkerque et Paris, ce qui suppose environ $20000^m$ de longueur à chacun de leurs côtés. On peut obtenir cette hauteur par divers procédés; mais celui dans lequel la loi de probabilité des erreurs est le plus rapidement décroissante doit être préféré comme étant le plus avantageux. Sa recherche est un corollaire facile de l'analyse que j'ai donnée ailleurs pour tous ces objets, et il en résulte qu'il y a neuf à parier contre un que l'erreur sur la hauteur de Paris au-dessus de la mer n'excéderait pas alors $8^m$. Le procédé que M. Delambre a suivi, pour conclure cette hauteur d'un nombre à peu près égal de triangles, est un peu moins exact que le précédent; mais c'est principalement la grandeur des côtés de plusieurs de ses triangles qui répand sur son résultat de l'incertitude et qui ne permet pas de répondre, avec une probabilité suffisante, qu'il n'est pas en erreur de $16^m$ ou $18^m$; ce qui en forme une partie considérable.

Les erreurs également probables diminuent beaucoup quand on rapproche les stations, et il est indispensable de le faire lorsqu'on veut obtenir un nivellement exact. Les grands triangles, très propres à la mesure des degrés terrestres, ne conviennent point à la mesure des hauteurs, et il est nécessaire de séparer ces deux espèces de mesures. Mais, en multipliant les stations, l'erreur qui tient à l'observation des angles zénithaux augmente par leur nombre et devient comparable à l'erreur qui dépend de la variabilité de la réfraction terrestre. Cela m'a donné lieu de rechercher la loi de probabilité des erreurs des résultats lorsqu'il y a plusieurs sources d'erreur. Tels sont la plupart des résultats astronomiques; car on observe les astres au moyen de deux instruments, la lunette méridienne et le cercle, tous deux susceptibles d'erreurs dont la loi de probabilité ne doit pas être supposée la même. L'analyse que j'ai donnée dans la théorie analytique des probabilités s'applique facilement à ce cas, quel que soit le nombre des



sources d'erreur. Elle détermine les résultats les plus avantageux et les lois de probabilité des erreurs dont ils sont susceptibles. Pour l'appliquer aux opérations de nivellement, il faut connaître la loi de probabilité des erreurs dues aux réfractions astronomiques; et l'on vient de voir qu'elle résulte des grandes triangulations de la méridienne. Il faut de plus connaître la loi de probabilité des erreurs des angles zénithaux. Nous manquons d'observations à cet égard; mais on s'écartera peu de la vérité en supposant cette loi la même que pour les angles horizontaux, et qui se déduit des erreurs observées dans la somme des trois angles de chaque triangle de la méridienne. En partant de ces lois, je trouve que, si l'on partage la distance de Paris à Dunkerque en stations équidistantes d'un intervalle de $1200^m$, il y a mille à parier contre un que l'erreur dans la hauteur de Paris au-dessus de la mer n'excédera pas quatre dixièmes de mètre. On diminuerait cette erreur en rapprochant les stations; mais la précision que l'on obtiendrait par ce rapprochement ne compenserait pas la longueur des opérations qu'il exige.

Les équations de condition que l'on forme pour avoir les éléments astronomiques renferment implicitement les erreurs des deux instruments qui servent à déterminer la position des astres. Ces erreurs sont affectées de coefficients différents dans chaque équation. Alors le système le plus avantageux des facteurs par lesquels on doit multiplier respectivement ces équations pour obtenir, par la réunion des produits, autant d'équations finales qu'il y a d'éléments à déterminer; ce système, dis-je, n'est plus celui des coefficients des éléments dans chaque équation de condition. L'analyse m'a conduit à l'expression générale de ce système de facteurs et de là aux résultats pour lesquels la même erreur à craindre est moins probable que dans tout autre système. La même analyse donne les lois de probabilité des erreurs de ces résultats. Ces formules renferment autant de constantes qu'il y a de sources d'erreurs et qui dépendent des lois de probabilité de ces erreurs. Dans le cas d'une source unique, j'ai donné, dans ma théorie des probabilités, le moyen d'éliminer la constante, en formant la somme des carrés des restes de chaque équation de condition, lorsqu'on y a substitué les valeurs trouvées pour les éléments. Un procédé semblable donne généralement les valeurs de ces constantes, quel que soit leur nombre : ce qui complète l'application du calcul des probabilités aux résultats des observations.

Je finirai par une remarque qui me paraît importante. La petite incertitude que les observations, quand elles ne sont pas très multipliées, laissent sur les valeurs des constantes dont je viens de parler, rend un peu incertaines ces probabilités déterminées par l'analyse; mais il suffit presque toujours de connaître si la probabilité que les erreurs des résultats obtenus sont renfermées dans d'étroites limites approche extrêmement de l'unité, et, quand cela n'est pas, il suffit de savoir jusqu'à quel point il faut multiplier les observations pour acquérir une probabilité telle qu'il ne reste sur la bonté des résultats aucun doute raisonnable. Les formules analytiques des probabilités remplissent parfaitement cet objet, et, sous ce point de vue, elles peuvent être envisagées comme le complément nécessaire de la méthode des sciences, fondée sur l'ensemble d'un grand nombre d'observations susceptibles d'erreurs. Ainsi, quand on réduirait à $15^{m}$ l'erreur de $18^{m}$ que l'on peut craindre dans la hauteur de Paris au-dessus de la mer, conclue des grands triangles de la méridienne, il n'en serait pas moins vrai que cette hauteur est incertaine et qu'il faut la déterminer par des moyens plus précis. Pareillement, les formules analytiques, appliquées aux triangles de la méridienne depuis la base mesurée près de Perpignan jusqu'à Formentera, donnent environ dix-sept cent mille à parier contre un que l'erreur de l'arc correspondant du méridien, dont la longueur surpasse $460000^{m}$, n'est pas de $60^{m}$ en erreur. Cela doit dissiper les craintes d'inexactitude que l'omission d'une base de vérification sur la côte d'Espagne pouvait inspirer. On serait encore rassuré à cet égard quand même la probabilité d'une erreur égale, ou plus grande que $60^{m}$, surpasserait la fraction donnée par les formules et s'élèverait à un millionième.

# ÉCLAIRCISSEMENTS
DE
# LA THÉORIE DES FLUIDES ÉLASTIQUES.

*Annales de Chimie et de Physique*, t. XVIII; 1821.

La théorie que j'ai donnée de ces fluides consiste à regarder chacune de leurs molécules comme un petit corps en équilibre dans l'espace, en vertu de toutes les forces qui le sollicitent. Ces forces sont : 1° l'action répulsive de la chaleur des molécules environnant une molécule A, sur la chaleur propre que cette molécule retient par son attraction; 2° l'attraction de cette dernière chaleur par les mêmes molécules; 3° l'attraction qu'elles exercent sur la molécule A. Je suppose que ces forces répulsives et attractives ne sont sensibles qu'à des distances imperceptibles et qu'à raison de la rareté du fluide la troisième de ces forces est insensible. Cela posé, je trouve, par les lois de l'équilibre des fluides, qu'en désignant par P la pression que le fluide exerce contre les parois qui le contiennent, on a

$$\text{(1)} \qquad P = kn^2(c^2 - ic);$$

$k$ est une constante dépendant de la force répulsive de la chaleur et qu'il paraît naturel de supposer la même pour tous les gaz; $n$ est le nombre des molécules du fluide contenues dans un espace pris pour unité et que je supposerai être $1^{\text{litre}}$; $c$ est le calorique contenu dans chaque molécule, et $i$ est une constante dépendant de l'attraction de la chaleur par les molécules fluides.

J'obtiens une seconde équation par les considérations suivantes. Je conçois le litre comme un espace vide ayant une température quelconque. En y plaçant un ou plusieurs corps, ils rayonneront du calorique les uns sur les autres et sur les parois du litre qui rayonneront pareillement du calorique sur eux et sur elles-mêmes; il y aura équilibre de température lorsque chaque molécule rayonnera autant de calorique qu'elle en absorbe. L'espace vide du litre sera traversé dans tous les sens par les rayons caloriques qui formeront ainsi un fluide discret d'une densité très petite et dont la quantité sera insensible relativement à la quantité de chaleur contenue dans les corps. Il est clair que la densité de ce fluide discret augmente avec la chaleur des corps; elle peut ainsi servir de mesure à leur température et en donner une définition précise. Elle croît proportionnellement aux dilatations du thermomètre d'air à pression constante et qui, par cette raison, me paraît être le vrai thermomètre de la nature.

J'imagine présentement que le système des corps contenus dans le litre soit un gaz. Chaque molécule, dans l'état d'équilibre, rayonnera autant de calorique qu'elle en absorbe. Or il est évident que cette absorption est proportionnelle à la densité du fluide discret que je viens de considérer ou à la température que je désignerai par $u$. Pour avoir l'expression du rayonnement de la molécule, il faut remonter à sa cause. On ne peut pas l'attribuer à la molécule même, qui est supposée n'agir que par attraction sur le calorique. Il paraît donc naturel de le faire dépendre de la force répulsive du calorique contenu, soit dans la molécule même, soit dans les molécules environnantes. Le calorique de la molécule n'étant qu'un infiniment petit de l'ensemble du calorique de toutes les autres molécules, on peut n'avoir égard qu'à la force répulsive de cet ensemble. Sans chercher à expliquer comment cette force détache une partie du calorique de la molécule A et la fait rayonner, je considère que l'action du calorique d'une molécule B pour cet objet est proportionnelle à ce calorique ou à $c$. Mais cette action est diminuée par l'attraction de la molécule B sur le calorique de A; cette action est donc proportionnelle à $c - i'$, $i'$ étant une constante dépendant de l'attraction des molécules du gaz sur le calorique, et, comme cette action s'exerce sur la chaleur entière $c$ de la molécule A, je la fais proportionnelle au produit $c(c-i')$. Le rayonnement de la molécule A est donc proportionnel à ce produit, puisqu'il est facteur commun de l'action de toutes les molécules environnant la molécule A. En l'égalant à l'absorption du calorique, on a

$$nc(c-i') = qu, \tag{2}$$

$q$ étant une constante dépendant de la nature du gaz. Quoique $i$ et $i'$, dans les équations (1) et (2), dépendent l'un et l'autre de l'attraction du calorique par les molécules du gaz, cependant ils ne peuvent être supposés égaux que dans le cas où la loi de la force attractive des molécules du gaz sur le calorique est, relativement à la distance, la même que la loi de la force répulsive mutuelle des molécules de la chaleur. On peut voir, dans la *Connaissance des Temps* de 1824 (¹), l'analyse sur laquelle ces résultats son fondés. En supposant $i = i'$, les équations (1) et (2) donnent

$$P = qknu;$$

$n$ est évidemment proportionnel à la densité du gaz; l'équation précédente donne ainsi la loi de Mariotte.

Pour un autre gaz, on aura

$$P = q'kn'u,$$

$q'$ et $n'$ étant ce que deviennent $q$ et $n$ relativement à ce nouveau gaz; on aura donc, quels que soient P et $u$,

$$\frac{n'}{n} = \frac{q}{q'}.$$

Ainsi, le rapport des densités de deux gaz reste le même, quelles que soient les variations de P et de $u$; ce qui est la loi de M. Gay-Lussac.

L'équation (1) donne

$$c = i + c\frac{P}{kn^2c^2}.$$

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. XIII, p. 285 et suiv.

Pour avoir, par aperçu, la valeur de la fraction

$$\frac{P}{kn^2c^2},$$

relative à la vapeur aqueuse, je considère un gaz pour lequel $n$, $c$ et $i$ sont $n_1$, $c_1$ et $i_1$. On a, relativement à ce gaz,

$$n_1^2c_1^2\left(1-\frac{i_1}{c_1}\right)=\frac{P}{k}.$$

Ainsi, le gaz, relativement auquel le facteur $1-\frac{i}{c}$ est un *minimum*, est celui dont 1^litre, sous une pression et une température données, contient le moins de chaleur exprimée par $n_1c_1$. Le gaz hydrogène est, de tous les gaz dont on a déterminé les chaleurs spécifiques, celui qui jouit de cette propriété. Si l'on suppose $i$ nul relativement à ce gaz, on a

$$n_1^2c_1^2=\frac{P}{k},$$

et la fraction

$$\frac{P}{kn^2c^2}$$

devient

$$\frac{n_1^2c_1^2}{n^2c^2}.$$

La chaleur contenue dans $1^g$ de gaz hydrogène à 100° de température et à la pression $0^m,76$ du baromètre peut, d'après les expériences, élever de 1° la température d'un nombre de grammes d'eau égal au produit de $366\frac{2}{3}$ par la chaleur spécifique du gaz hydrogène, celle de l'eau étant prise pour unité, et cette chaleur spécifique a été trouvée égale à 3,2936; la quantité de chaleur que contient, à cette température, 1^litre de gaz hydrogène est donc le produit de 366,67.3,2936 par le nombre de grammes que pèse 1^litre de gaz hydrogène, à cette pression et à cette température; c'est l'expression de $n_1c_1$.

Pour avoir l'expression de $nc$, j'observe que $1^g$ de vapeur aqueuse, à 100° de température et à la pression de $0^m,76$, contient d'abord une chaleur latente capable d'élever de 1° la température de $560^g$ d'eau. Il



contient, de plus, la chaleur propre de $1^g$ à 100°. En nommant donc $a$ la chaleur propre de $1^g$ d'eau à 0° de température, on aura la chaleur de $1^g$ de vapeur, à 100° de température et à la pression $0^m,76$, égale à

$$a+660.$$

De là il suit qu'en désignant par $\varepsilon$ le rapport de la densité du gaz hydrogène à la densité de la vapeur aqueuse, on aura

$$\frac{n_1c_1}{nc}$$

égal à

$$\frac{\varepsilon 366,67.3,2936}{a+660}$$

et l'on a $\varepsilon$ égal à 0,1282.

La valeur de $a$ est inconnue. On l'a évaluée d'après l'expérience de la chaleur absorbée par $1^g$ de glace à 0° pour être converti en liquide à 0° de température, et l'expérience que nous avons faite, M. de Lavoisier et moi, nous a donné cette chaleur égale à 75, c'est-à-dire capable d'élever de 1° la température de $75^g$ d'eau. En faisant donc la chaleur spécifique de la glace égale à $\frac{9}{10}$, conformément à l'expérience de Kirvan, et supposant les quantités de chaleur contenues dans la glace et dans l'eau proportionnelles aux chaleurs spécifiques de ces substances, on aura

$$c=750.$$

La fraction précédente, élevée au carré et multipliée par $c$, devient ainsi à peu près égale à 15; ce serait, dans toutes ces suppositions, la valeur de la fraction

$$\frac{cP}{kn^2c^2}.$$

Mais cette fraction deviendrait presque insensible si $a$ était quatre ou cinq fois plus grand. Je la désignerai par $a$, en observant qu'elle diminue proportionnellement au carré de la densité divisé par la pression.

Ainsi, la chaleur de $1^g$ de vapeur aqueuse est

$$a + 660 + a' - a,$$

$a'$ étant la valeur de $a$ relative à une pression P'. Elle diminue quand P' surpasse la pression P de l'atmosphère, et les limites de $a$ peuvent être supposées o et 15; on voit donc que cette chaleur reste à très peu près constante, quel que soit l'accroissement de la pression P': ce qui est un phénomène remarquable dont la théorie précédente donne une explication fort simple.

$a'$ étant moindre que $a$ lorsque la pression augmente, la chaleur de 1 molécule de vapeur est alors un peu diminuée. Cependant quelques physiciens, et spécialement M. Southern, ont trouvé un petit accroissement dans leurs expériences. Si cela était bien avéré, l'action des molécules de vapeurs sur la chaleur augmenterait un peu avec leur température; l'action des corps diaphanes sur la lumière offre, d'après M. Arago, de tels accroissements. Mais, pour les admettre dans la théorie de la chaleur, il faut y être conduit par des expériences certaines, que j'engage d'autant plus les physiciens à faire, avec un soin particulier, que plusieurs observateurs ont cru remarquer une diminution de chaleur pour une augmentation de pression. Ce genre d'expériences est très délicat, et l'on peut en juger par les différences que présentent les résultats des physiciens sur la chaleur latente de la vapeur aqueuse formée sous la pression de $0^m,76$. M. de Rumford la trouve égale à 567 ou capable d'élever de 1° la température de $567^g$ d'eau, tandis que M. Southern et d'autres physiciens ne l'ont trouvée que de 532 à peu près.

J'observerai, en finissant, que la supposition précédente, et qui me paraît très naturelle, que l'action du calorique d'une molécule B de gaz sur le calorique d'une molécule A de gaz et sur cette molécule A n'est point modifiée par la nature de ces molécules, simplifie les formules que j'ai publiées dans la *Connaissance des Temps* de 1824 (1).

(1) *Œuvres de Laplace*, T. XIII.



Elle diminue le nombre des constantes à déterminer par l'expérience. Je donnerai, dans la *Connaissance des Temps* de 1825 (1), de nouveaux développements de ces formules et leur comparaison avec les expériences déjà faites et avec celles que plusieurs physiciens préparent sur cet objet.

(1) *Œuvres de Laplace*, T. XIII.

SUR LA

# RÉDUCTION DE LA LONGUEUR DU PENDULE,

## AU NIVEAU DE LA MER.

*Annales de Chimie et de Physique*, t. XXX; 1825.

Définissons d'abord le niveau de la mer relatif à un point quelconque des continents. Pour m'en former une idée juste j'ai imaginé, dans le Livre XI de la *Mécanique céleste* ([1]), un fluide extrêmement rare, répandu autour de la Terre, très peu élevé au-dessus de la surface, mais assez élevé pour en embrasser les plus hautes montagnes : telle serait l'atmosphère terrestre réduite à sa moyenne densité. Je le nommerai, par cette raison, *atmosphère*. J'ai fait voir, dans le Livre cité, que les points de cette atmosphère sont tous à la même hauteur au-dessus de la surface de la mer. Je conçois donc cette surface prolongée dans l'intérieur du continent, de manière à remplir la même condition, celle d'avoir tous ses points également abaissés au-dessous de la surface de l'atmosphère; elle sera ce que je nomme *surface de niveau de la mer;* la distance verticale d'un point du continent à cette surface est ce que j'entends par sa hauteur au-dessus du niveau de la mer.

Cette hauteur peut être déterminée de deux manières. Si l'on imagine dans un plan quelconque, à partir d'un point du continent jusqu'à

([1]) *Œuvres de Laplace*, T. V, p. 62.



la mer, une suite de verticales très rapprochées, que l'on joigne le pied de chaque verticale à la verticale voisine par une ligne horizontale, la somme des parties de ces verticales, comprises entre les lignes horizontales et la surface de la Terre, sera la hauteur du point au-dessus du niveau de la mer que donne une suite de nivellements. Cette somme est la différence des deux verticales extrêmes prolongées jusqu'à la surface de l'atmosphère. En effet, il est facile de prouver que la direction de la pesanteur est, aux quantités près du second ordre, la même au pied de chaque verticale et au point où son prolongement coupe la surface de l'atmosphère à laquelle elle est perpendiculaire par la condition de l'équilibre. Je nomme *quantité du premier ordre* le rapport de la hauteur de l'atmosphère au rayon terrestre. La ligne horizontale qui joint le pied d'une verticale à la verticale voisine est donc parallèle à la ligne qui joint les points où ces verticales coupent la surface de l'atmosphère; d'où il est facile de conclure que la différence des deux verticales extrêmes est égale à la hauteur du point au-dessus du niveau de la mer, déterminée par le nivellement. Le baromètre fait connaître cette différence et donne ainsi un second moyen d'obtenir la hauteur du point au-dessus du niveau de la mer, hauteur évidemment égale à la distance verticale de ce point à la surface du niveau de la mer telle que nous l'avons définie.

De là il suit qu'en diminuant la longueur du pendule à secondes, observée à un point du continent, du double de son produit par la distance verticale du point à la surface de l'atmosphère, le rayon terrestre étant pris pour unité, on aura cette longueur telle qu'on l'observerait au point correspondant de cette surface. En augmentant la même longueur du double de son produit par la hauteur du point au-dessus du niveau de la mer, on aura cette longueur réduite à ce niveau.

Imaginons, par exemple, que la Terre soit une sphère recouverte en partie par la mer dont nous supposons la densité très petite par rapport à la moyenne densité de la Terre. Un calcul fort simple fait voir que, dans ce cas, la mer recouvrira l'équateur et qu'elle s'étendra également vers chaque pôle dont elle approchera d'autant plus que son volume sera plus considérable. Les surfaces de la mer et de l'atmosphère seront elliptiques et semblables, et leur aplatissement sera la moitié du rapport de la force centrifuge à la pesanteur, à l'équateur. Les accroissements de la longueur du pendule à secondes sur ces deux surfaces, en allant de l'équateur aux pôles, seront égaux au double du produit de cette longueur par ce rapport et par le carré du sinus de la latitude.

Si l'on conçoit la surface elliptique de la mer prolongée dans l'intérieur des continents, la distance d'un point à cette surface sera la hauteur de ce point au-dessus du niveau de la mer. A mesure qu'on s'avancera sur les continents vers les pôles, on montera sans s'éloigner du centre de la Terre. La longueur du pendule à secondes croîtra sans cesse, mais la moitié moins qu'à la surface de l'atmosphère; en sorte que, pour réduire la longueur du pendule observée sur un point du continent à la longueur qu'on observerait sur le point correspondant de cette surface, il faut la diminuer de son produit par le double de la distance mutuelle de ces deux points, le rayon terrestre étant pris pour unité. Les deux surfaces de la mer et de l'atmosphère étant partout à la même distance, on réduira au niveau de la mer la longueur du pendule observée sur le continent en l'augmentant de son produit par le double de la hauteur du point d'observation au-dessus de ce niveau. Ce n'est que par une réduction semblable que l'ellipticité conclue de la mesure des degrés terrestres, ajoutée à l'accroissement de la longueur du pendule sous le pôle, divisée par cette longueur, forme une somme égale à $\frac{5}{2}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur, à l'équateur.

La règle précédente de réduction est générale, quelles que soient la densité de la mer et la figure du sphéroïde terrestre dans le cas même où cette figure serait discontinue. On ne doit point, dans la réduction de la longueur du pendule à secondes au niveau de la mer, tenir compte de l'attraction des parties des continents qui s'élèvent au-dessus de ce niveau, pourvu que leurs pentes soient très petites et du



même ordre que l'ellipticité du sphéroïde terrestre. Tel est le cas de la longueur du pendule observée à Paris. La hauteur du lieu de l'observation au-dessus du niveau de la mer étant à peu près $\frac{1}{100000}$ du rayon terrestre, pour rapporter à ce niveau la longueur du pendule à secondes sexagésimales, il faut diminuer cette longueur de $\frac{2}{100}$ de millimètre. Dans tous les cas semblables, lorsque les dimensions des continents sont considérables par rapport à la hauteur de l'atmosphère, l'attraction des parties des continents qui s'élèvent au-dessus du niveau de la mer augmente à peu près de la même quantité la pesanteur aux points correspondants des surfaces des continents et de l'atmosphère. Si la pente est rapide, par exemple quand on s'élève sur une montagne, il devient nécessaire de considérer l'attraction de la montagne; mais le calcul de cette attraction présente de grandes difficultés pour la solution desquelles on ne peut prescrire de règles générales. Il convient donc de ne point faire usage des observations faites dans de pareilles circonstances pour avoir la figure de l'atmosphère, que l'on peut considérer comme la vraie figure de la Terre, puisque c'est elle que déterminent les mesures des degrés des méridiens et des longueurs du pendule réduites, comme nous venons de le prescrire, au niveau de la mer.

Rendons les résultats précédents sensibles par un exemple. En soumettant au calcul les effets de l'attraction d'un paraboloïde élevé entre deux mers au-dessus de leur niveau, on trouve que si le rayon osculateur au sommet de ce paraboloïde est fort grand par rapport à l'élévation de ce point, et même à la hauteur de l'atmosphère, les pesanteurs à ce sommet et au point correspondant de l'atmosphère seront, par l'attraction du paraboloïde, augmentées d'une même quantité égale à $\frac{3}{2}$ de la pesanteur terrestre, multipliée par la densité du paraboloïde et par sa hauteur, le rayon et la densité moyenne de la Terre étant pris pour unités. Il ne faut donc, pour réduire la longueur du pendule à secondes observée à ce sommet à celle que l'on observerait au point correspondant de l'atmosphère, que diminuer la première de ces longueurs de son produit par le double de la distance de ces deux points, et, pour la réduire au niveau de la mer, il suffit de l'augmenter de son produit par le double de la hauteur du paraboloïde.

Il peut paraître singulier de ne point avoir égard, dans cette réduction, à l'attraction du paraboloïde; de ne considérer, par exemple, que l'élévation de Quito au-dessus du niveau de la mer pour réduire à ce niveau la longueur du pendule à secondes observée dans cette ville. On fera disparaître ce que cette réduction semble offrir de paradoxal en imaginant dans l'intérieur de la Terre, et très près de sa surface, un second paraboloïde pareil à celui que nous venons de considérer, mais creux dans son intérieur. Cette cavité diminuera la longueur du pendule à secondes observée au point de la surface terrestre correspondant au sommet de ce second parabaloïde, de la même quantité dont elle est augmentée au sommet du premier paraboloïde, par l'attraction de ce corps supposé de même densité que la partie de la Terre remplacée par le second paraboloïde. Si ce point de la surface terrestre est au niveau de la mer, on ne fait aucune réduction à la longueur du pendule à secondes que l'on y observe; on n'a point égard à l'attraction, si je puis ainsi dire, négative de la cavité formée par le second paraboloïde; on en conclut seulement l'existence d'une cause locale qui diminue la pesanteur terrestre, et dont on peut déterminer l'intensité en comparant la longueur du pendule observée à ce point avec celle qui résulte de l'ensemble des observations de ce genre faites sur un grand nombre de points de la Terre. On doit ainsi considérer les parties vastes et élevées des continents, et les immenses cavités de l'intérieur de la Terre, comme autant de causes locales qui produisent des irrégularités dans les degrés terrestres et dans la pesanteur réduits au niveau de la mer ou de l'atmosphère. Avoir égard aux effets de ces causes est une opération différente de la réduction au niveau de la mer : c'est corriger les irrégularités de la surface de ce niveau et de la pesanteur à cette surface.

On peut déterminer par le calcul les changements que produirait à la surface de la Terre une cavité souterraine dont la surface serait celle d'un solide pour lequel la loi d'attraction sur un point quelconque



extérieur serait connue; telle est une cavité elliptique. Mais ce cas est purement mathématique et, dans la nature, ces cavités ont une forme irrégulière. Lorsqu'elles sont trop profondes pour qu'on puisse y pénétrer, les irrégularités que l'on observe, soit dans les distances zénithales des astres, soit dans la longueur du pendule à secondes, peuvent les faire reconnaître. Par là, ce genre d'observation devient utile à la Géologie.

# MÉMOIRE

EXTRAIT DU

# JOURNAL DES MINES.

# RAPPORT

SUR

# UN MÉMOIRE DE M. MALUS [1].

*Journal des Mines*, t. XXIV; 1808.

La Classe nous ayant chargés, M. Haüy et moi, d'examiner un Mémoire de M. Malus sur divers phénomènes de la double réfraction de la lumière, nous allons lui en rendre compte. En passant de l'air dans un milieu transparent non cristallisé les rayons de lumière se réfractent, de manière que les sinus de réfraction et d'incidence sont constamment dans le même rapport; mais, lorsqu'ils traversent la plupart des cristaux diaphanes, ils présentent un singulier phénomène, qui fut d'abord observé dans le cristal d'Islande, où il est très sensible.

Un rayon tombant perpendiculairement sur une des faces naturelles de ce cristal est divisé en deux parties : l'une traverse le cristal sans changer sa direction, l'autre s'en écarte dans un plan parallèle au plan perpendiculaire à la face et passant par l'axe du cristal, c'est-à-dire par la ligne qui joint les sommets de ses deux angles solides obtus. Nous nommerons *section principale* d'une face naturelle ou artificielle tout plan mené d'une manière semblable. Cette division du rayon lumineux a généralement lieu, relativement à une face quelconque et quel que soit l'angle d'incidence. Une partie suit la loi de la réfraction

(1) Fait à la première Classe de l'Institut.

ordinaire; l'autre partie suit une loi de réfraction extraordinaire, reconnue par Huygens et qui, considérée comme un résultat de l'expérience, peut être mise au rang des plus belles découvertes de ce rare génie. Il y fut conduit par la manière dont il envisageait la propagation de la lumière qu'il supposait formée par les ondulations d'un fluide éthéré. Cette hypothèse, sujette à de grandes difficultés, est sans doute la cause pour laquelle Newton et la plupart des physiciens qui l'ont suivi ne paraissent pas avoir justement apprécié la loi que Huygens y avait attachée. Ainsi cette loi a éprouvé le même sort que les belles lois de Kepler, qui furent pendant longtemps méconnues pour avoir été associées à des idées systématiques dont malheureusement ce grand homme a rempli tous ses Ouvrages. Huygens avait représenté par une construction géométrique la réfraction extraordinaire de la lumière dans le cristal d'Islande; M. Malus a traduit cette construction en analyse. La formule très simple à laquelle il est parvenu renferme deux constantes indéterminées, dont une est le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence dans la réfraction ordinaire du cristal, en sorte que sa double réfraction ne dépend que de deux constantes comme la réfraction simple ne dépend que d'une seule, et, pour rendre l'analogie plus frappante, nous observerons que, si l'on fait passer par l'axe du cristal une face artificielle et si l'on conçoit un plan perpendiculaire à cet axe, tous les rayons incidents sur la surface et situés dans ce plan se diviseront en deux autres qui seront réfractés suivant la loi ordinaire; mais le rapport des sinus de réfraction et d'incidence sera différent pour chaque espèce de rayons; ces deux rapports sont les constantes dont nous venons de parler. M. Malus les a déterminées plus exactement que ne l'avait fait Huygens; en substituant ensuite leurs valeurs dans la formule et comparant ses résultats à ceux d'un grand nombre d'expériences très précises et relatives aux faces naturelles et artificielles du cristal, il a trouvé entre eux un accord parfait et qui ne laisse aucun doute sur la vérité de la loi découverte par Huygens. Nous devons à l'excellent physicien, M. Wollaston, la justice d'observer qu'ayant fait, par un



moyen fort ingénieux, diverses expériences sur la double réfraction du cristal d'Islande, il les a trouvées conformes à cette loi remarquable. L'analogie et des expériences directes sur le cristal de roche ont fait voir à M. Malus qu'elle s'étend encore à ce cristal, et il est extrêmement vraisemblable qu'elle a lieu pour tous les cristaux qui réfractent doublement la lumière; seulement, les constantes dont cette loi dépend varient suivant la nature du cristal.

Voici maintenant un phénomène que présente la lumière après avoir subi une double réfraction. Si l'on place à une distance quelconque, au-dessous d'un cristal d'Islande, un second cristal de la même substance et disposé de manière que les sections principales des deux cristaux soient parallèles, le rayon réfracté, soit ordinairement, soit extraordinairement par le premier, le sera de la même manière par le second; mais, si l'on fait tourner l'un des cristaux de manière que leurs sections principales soient perpendiculaires entre elles, alors le rayon réfracté ordinairement par le premier cristal le sera extraordinairement par le second et réciproquement; dans les positions intermédiaires, chaque rayon émergent du premier cristal se divise en deux autres à son entrée dans le second cristal. Lorsqu'on eut fait remarquer ce phénomène à Huygens il convint, avec la candeur qui caractérise un ami sincère de la vérité, qu'il était inexplicable par ses hypothèses : ce qui montre combien il est essentiel de les séparer, comme nous l'avons fait, de la loi de la réfraction extraordinaire que ce grand géomètre en avait déduite. Ce phénomène indique avec évidence que la lumière, en traversant le cristal d'Islande, reçoit deux modifications diverses en vertu desquelles une partie est réfractée ordinairement et l'autre partie est réfractée extraordinairement; mais ces modifications ne sont point absolues, elles sont relatives à la position des rayons par rapport au cristal, puisqu'un rayon rompu ordinairement par un cristal est rompu extraordinairement par un autre si leurs sections principales sont perpendiculaires entre elles. On peut se former une idée assez juste de ces modifications en supposant, avec Newton, dans chaque rayon de lumière, deux côtés opposés originairement doués d'une propriété qui le rend *extraordinaire* lorsqu'il est tourné de manière que leurs plans soient perpendiculaires à l'axe du cristal, et qui le rend *ordinaire* lorsque ces plans sont parallèles au même axe. A son entrée dans le cristal d'Islande, un trait de lumière est divisé, par l'action du cristal, en deux rayons qui prennent respectivement les deux positions précédentes, et chaque rayon, à son émergence, prend, sans se diviser, la direction qui convient à la position de ses côtés. Voilà ce qu'on peut imaginer de plus satisfaisant pour se représenter ces phénomènes, jusqu'à ce que leur comparaison ait fait découvrir la loi des forces dont ils dépendent.

Quoi qu'il en soit de ces modifications singulières, imprimées aux rayons de lumière par le cristal d'Islande, M. Malus a reconnu qu'elles sont non seulement analogues dans les cristaux divers, mais encore parfaitement identiques. Ainsi, en substituant à l'un des deux cristaux d'Islande, dont nous avons parlé ci-dessus, un cristal de roche ayant comme lui sa section principale parallèle à celle de l'autre cristal, le rayon réfracté d'une manière par le premier cristal le sera encore de la même manière par le second, et l'expérience a fait voir à M. Malus que cela est généralement vrai pour deux cristaux quelconques de nature différente qui réfractent doublement la lumière. Le moyen le plus simple de s'en assurer est d'observer la lumière d'une bougie à travers deux prismes formés de ces cristaux; si l'on fait tourner les prismes l'un sur l'autre, on voit les quatre images qu'ils formaient d'abord se réduire à deux quand les sections principales des deux faces qui se touchent sont parallèles.

A ce fait remarquable M. Malus ajoute un autre fait plus remarquable encore et qui consiste en ce que, sous un certain angle, la lumière réfléchie par la surface d'un corps diaphane est exactement modifiée, comme si elle était rompue ordinairement par un cristal dont l'axe serait dans le plan d'incidence et de réflexion. Il est facile de s'en convaincre en regardant, à travers un prisme de cristal d'Islande, l'image d'une bougie ou du Soleil réfléchie par l'eau sous un angle d'environ 53°. On aperçoit d'abord deux images qui conservent



à peu près la même intensité lorsqu'on fait tourner le prisme; mais, au delà d'une certaine limite, une des images s'affaiblit très sensiblement et finit par s'éteindre quand, par ce mouvement du prisme, le rayon réfléchi se trouve dans la section principale de la face prismatique qui le reçoit. L'angle de réflexion, nécessaire pour la disparition de l'image, varie avec la nature de la substance réfléchissante. M. Malus l'a mesuré avec soin pour diverses substances; il l'a trouvé de 52°45′ pour l'eau et de 54°35′ pour le verre. Mais il est fort singulier que ce phénomène n'ait point lieu, du moins sensiblement, dans la réflexion des images par les miroirs métalliques. M. Malus a observé que cette réflexion et la réfraction des substances non cristallisées ne modifient point, d'une manière sensible, la lumière et n'altèrent point les modifications qu'elle a reçues. Pour analyser plus particulièrement le phénomène que nous venons d'exposer, M. Malus a voulu connaître directement ce que devient un rayon *extraordinaire* lorsqu'il tombe sur la surface d'un corps diaphane sous l'angle qui convient à la production du phénomène. Il était naturel de penser qu'aucune partie de ce rayon n'est alors réfléchie, mais qu'il est entièrement absorbé par le corps, puisque, sous cet angle, la surface ne réfléchit que les rayons *ordinaires*. L'expérience a confirmé ce résultat. M. Malus a disposé la section principale d'un cristal d'Islande dans le plan vertical d'incidence d'un rayon de lumière; ensuite, après avoir divisé ce rayon à l'aide de la double réfraction, il a reçu les deux faisceaux partiels sur la surface de l'eau et sous l'angle de 52°45′; une partie du rayon *ordinaire* a été réfléchie, mais aucune partie du rayon *extraordinaire* ne l'a été, tout le rayon a pénétré dans le liquide. En disposant ensuite la section principale du cristal dans un plan perpendiculaire à celui d'incidence, une partie du rayon *extraordinaire* a été réfléchie, tandis que le rayon *ordinaire* a été totalement absorbé (1).

(1) Depuis la lecture de ce Rapport, M. Malus a reconnu, par l'expérience, le fait suivant qu'on peut facilement ramener à la théorie des forces attractives et répulsives à des distances insensibles et qui montre que les phénomènes de la double réfraction dépendent de semblables forces. Une partie d'un rayon lumineux qui a pénétré dans un milieu diaphane est réfléchie à la surface par laquelle il sort; et cette réflexion, sous un

Nous avons répété plusieurs des expériences par lesquelles M. Malus établit tout ce qu'il avance, et nous pouvons en garantir l'exactitude. Son Mémoire nous paraît donc mériter l'approbation de la Classe, soit par l'intérêt que présente son objet, l'un des plus délicats et des plus curieux de la Physique, soit par la nouveauté des faits, soit par la précision des expériences, soit enfin par l'excellente méthode qui guide son auteur, et nous concluons à ce que ce Mémoire soit imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers*.

certain angle, le change en rayon *ordinaire*, comme la réflexion à la surface d'entrée sous l'angle convenable pour cet objet; le sinus du premier angle est à celui du second dans le rapport des sinus de réfraction et d'incidence dans ce milieu. Ainsi, en supposant les surfaces d'entrée et de sortie parallèles et l'angle d'incidence à la première surface tel que le rayon réfléchi devienne un rayon *ordinaire*, le rayon réfléchi par la seconde surface sera pareillement un rayon *ordinaire*. On doit observer que les angles d'incidence, de réfraction et de réflexion sont ceux que le rayon forme avec la perpendiculaire à la surface. (*Note de M. Laplace.*)

# MÉMOIRES DIVERS.

EXTRAIT

DE

# L'ESSAI DE STATIQUE CHIMIQUE,

PAR C.-L. BERTHOLLET.

... Lors donc qu'on comprime l'air, il en sort une quantité de calorique qui est proportionnelle à la diminution du volume.

On peut opposer que, lorsque l'air éprouve une compression, l'augmentation de son ressort fait voir qu'il tient une quantité de calorique qui, étant lui-même dans un état de compression, est la cause de cet effort; ce qui prouve que c'est la même quantité de calorique qui produit l'équilibre de température dans les deux circonstances, c'est que, si après avoir comprimé l'air on le remet en liberté, il se produit un refroidissement qui correspond à la chaleur qui avait été dégagée. S'il eût retenu dans la compression une plus grande quantité de calorique que celle qui convenait à la réduction de son volume dans la température donnée, il ne reprendrait pas les dimensions qu'il doit avoir sous la nouvelle compression; il s'arrêterait au terme où le calorique comprimé se trouverait en équilibre avec l'action des corps voisins, et il n'y aurait pas de refroidissement dans ces corps; ce n'est donc point par l'effet du calorique plus comprimé qu'il tend à reprendre son premier état. Je ne puis que confirmer plus solidement cette théorie par l'opinion de Laplace, qui a bien voulu me remettre la Note ci-jointe (Note V).

## NOTE V.

On sait depuis longtemps que, à la même température, le ressort d'une même quantité d'air est à très peu près réciproque à son volume. Cette propriété est commune à tous les gaz et même à tous les fluides

(1) Paris, Firmin Didot, 1re Partie, an XI-1803, p. 164.

dans l'état de vapeurs. Il en résulte que, à températures égales, deux molécules d'air plus ou moins rapprochées se repoussent toujours avec la même force; en sorte que si l'on représente leur force répulsive par l'action d'un ressort tendu entre elles, la tension de ce ressort est la même, quel que soit leur écartement naturel. Concevons, en effet, une masse de gaz ou de vapeurs renfermée dans une vessie qui communique avec un tube recourbé, en partie rempli de mercure, et supposons que son ressort élève une colonne de $0^m,75$ de hauteur; concevons ensuite qu'en comprimant la vessie on réduise le gaz à la moitié de son volume; il est visible que, dans ce nouvel état, la couche de gaz contiguë à la surface du mercure aura une densité deux fois plus grande que dans son premier état et qu'il y aura, par conséquent, deux fois plus de ressorts appuyés sur cette surface; ainsi, puisque suivant l'expérience, la hauteur de la colonne de mercure devient double, il faut que la tension de ces ressorts soit la même; cette tension ne change donc point par le rapprochement des molécules du gaz; elle ne fait que multiplier le nombre des ressorts appliqués sur une même surface.

De là il suit que les molécules d'un gaz n'obéissent sensiblement qu'à la force répulsive de la chaleur et que leur action d'affinité les unes sur les autres est très petite relativement à cette force. Ainsi, leur ressort ne dépend que de la température, et la quantité de chaleur libre qui existe dans une masse de gaz ou de vapeurs est, à température égale, proportionnelle à son volume; car, s'il y en avait plus sous le même volume dans l'état de condensation que dans celui de dilatation, la force répulsive de deux molécules voisines en serait augmentée.

En diminuant donc d'un tiers ou de moitié le volume d'un gaz, il doit s'en dégager un tiers ou une moitié de la chaleur libre qui existe dans ses molécules. Si l'on pouvait mesurer exactement cette chaleur dégagée, on en conclurait la quantité de chaleur libre contenue dans un volume donné de ce gaz; mais cette mesure est très difficile à obtenir au moyen du thermomètre, soit parce qu'une partie de la chaleur dégagée se répand sur les corps environnants ou se développe en



chaleur rayonnante, soit parce que la masse du thermomètre, quelque petit qu'il soit, est fort grande relativement à celle du gaz qu'on condense. Des expériences faites avec le calorimètre la donneraient d'une manière très précise. L'effet de la chaleur ainsi dégagée est sensible sur la vitesse du son; elle produit l'excès de cette vitesse sur celle que donne la théorie ordinaire, comme je m'en suis assuré par le calcul.

Il suit encore de ce qui précède que, si l'on conçoit des volumes égaux de deux différents gaz renfermés dans deux enveloppes de même capacité et inextensibles, si l'on suppose qu'à une température donnée le ressort de ces deux gaz soit le même en augmentant de la même manière leur température, l'accroissement de leur ressort sera le même, puisqu'il ne dépend que de la température. Concevons maintenant que les enveloppes qui les contiennent cessent d'être inextensibles; les deux gaz se dilateront jusqu'à ce que leurs ressorts soient égaux à la pression de l'atmosphère qui environne ces enveloppes, et comme, pour chaque gaz, le volume est en raison inverse du ressort, les deux gaz prendront le même volume et se dilateront également. C'est, en effet, ce que le citoyen Gay-Lussac a constaté par un grand nombre d'expériences. On voit, par ce que nous venons de dire, que ce fait intéressant est lié à celui de l'accroissement du ressort des gaz en raison inverse de leur volume et, par conséquent, à ce principe général que la force répulsive des molécules des gaz est indépendante de leur écartement mutuel et ne dépend que de la température.

## NOTE XVIII.

Laplace, que j'avais consulté sur les changements que l'élasticité des gaz éprouve dans leur compression, me remit la Note V que je fis imprimer aussitôt; après un examen plus attentif, il me donna celle que je joins ici; il en résulte qu'il faut modifier ce que j'ai exposé : que les quantités de calorique qui sont contenues dans un gaz ne suivent pas les rapports des volumes, indépendamment des effets de la compression, et que les gaz ne diffèrent pas des liquides et des solides relativement au calorique qu'ils peuvent abandonner dans une circonstance et à celui qui est retenu dans un plus grand état de condensation.

La Note V de la page 245 [1] ayant été écrite à la hâte, j'ai reconnu depuis son impression qu'elle doit être modifiée : il n'est point exact de dire que la force répulsive de deux molécules voisines d'un gaz est toujours la même, à température égale, quelle que soit sa condensation. Cette force est proportionnelle à la température et réciproque à la distance mutuelle de ces molécules ou, ce qui revient au même, à la racine cubique du volume du gaz dans ses divers états de condensation ou de raréfaction. Pour le démontrer, considérons un volume de gaz réduit par la compression à sa huitième partie; il y aura, dans ce nouvel état, quatre fois plus de molécules et, par conséquent, quatre fois plus de ressorts appliqués à une surface donnée; ainsi, puisque la pression est huit fois plus grande, il est nécessaire que la tension de chacun de ses ressorts soit deux fois plus considérable; elle est donc réciproque à la distance mutuelle des molécules voisines qui, dans cet état, est deux fois moindre. Le raisonnement qui termine la Note citée lie cette propriété générale à celle d'une dilatation égale pour tous les gaz par des accroissements égaux de température. Il paraît encore que, dans le gaz condensé, il y a plus de chaleur à volume égal, puisque le ressort des molécules voisines est alors augmenté; par conséquent, si le volume est réduit par la compression à la moitié, il s'en dégage moins que la moitié de la chaleur qu'il contenait dans son premier état, ce qui est conforme à l'expérience et à la vitesse observée du son.

[1] *Voir* plus haut, p. 329.

---

# RAPPORT

SUR

L'OUVRAGE DE DU SÉJOUR INTITULÉ :

## ESSAI SUR LES PHÉNOMÈNES

RELATIFS AUX

## DISPARITIONS PÉRIODIQUES DE L'ANNEAU DE SATURNE [1].

Nous Commissaires nommés par l'Académie, MM. d'Alembert, Borda, Bézout, Vandermonde et moi, avons examiné un Ouvrage de M. du Séjour qui a pour titre : *Essai sur les phénomènes relatifs aux disparitions périodiques de l'anneau de Saturne*. Pour donner une idée juste de cet Ouvrage, il ne sera pas inutile d'exposer, en peu de mots, ce qu'on avait déjà fait et ce qu'on pouvait désirer sur cet objet intéressant.

L'anneau de Saturne fut, pour la première fois, aperçu par Galilée au commencement du dernier siècle. Cet astronome, ayant perfectionné les lunettes qu'un heureux hasard venait de faire découvrir, observa, aux extrémités de Saturne, deux points lumineux qu'il prit pour des satellites adhérents à la planète; mais il fut très surpris, 2 ans après, de ne les plus retrouver. Un phénomène aussi remarquable fixa l'attention des astronomes et les étonna par les variétés singulières qu'ils y aperçurent et par la bizarrerie des formes sous lesquelles Saturne s'offrait à leurs regards. La figure, la grandeur et la vivacité de la lumière des deux anses dont cette planète leur semblait accompagnée, assujetties à des changements considérables, ne laissaient entrevoir aucune loi qui pût servir à faire connaître la nature de ces corps;

[1] Extrait des registres de l'Académie royale des Sciences, du 6 septembre 1775.

quelquefois même ces anses disparaissaient entièrement et Saturne était vu rond comme les autres planètes. Ces apparences étaient d'autant moins explicables qu'aux inégalités qui tiennent à la nature du phénomène se joignaient encore les irrégularités qui venaient de l'imperfection des lunettes dont ces premiers observateurs faisaient usage; aussi voyons-nous qu'ils se tourmentèrent inutilement pendant plus de 40 ans pour en deviner la cause jusqu'au moment où le célèbre Huygens, ayant porté l'art des télescopes à un degré de perfection inconnu avant lui, suivit ces apparences avec plus d'exactitude et démontra qu'elles étaient produites par un anneau fort mince dont Saturne est environné. Le sentiment d'Huygens, d'abord combattu et depuis confirmé par toutes les observations, est aujourd'hui généralement adopté; en sorte qu'il ne reste plus qu'à déterminer avec toute la précision possible, au moyen des phénomènes déjà observés, les éléments de cet anneau pour en conclure les phénomènes qui doivent avoir lieu dans les siècles à venir. Les astronomes ont imaginé pour cela différentes méthodes, mais elles sont indirectes et ne peuvent servir, tout au plus, qu'à déterminer les apparences à un instant donné. D'ailleurs, ce qui importe le plus dans ces recherches est de fixer l'attention des observateurs sur les phases de l'anneau les plus propres à en constater les éléments; car on sait, et M. du Séjour a eu plus d'une fois occasion de le remarquer dans son Ouvrage, que les astronomes ont souvent négligé des observations utiles pour n'en avoir pas connu l'importance; or il est visible que les méthodes trigonométriques, limitées par leur nature à des cas particuliers, ne peuvent rien apprendre sur cela. La loi générale de ces phénomènes ne peut donc être que le résultat d'une analyse très délicate et c'est l'objet du travail de M. du Séjour dont nous allons rendre compte à l'Académie.

Son Ouvrage est divisé en dix-neuf Sections que nous allons parcourir successivement. Dans la première il expose, en peu de mots, les différentes causes qui font disparaître l'anneau de Saturne et les problèmes qu'on peut se proposer relativement à ses disparitions. Deux circonstances doivent le rendre invisible : la première lorsque,



passant par le centre du Soleil, il ne reçoit de lumière que par son épaisseur; la seconde lorsque l'œil de l'observateur est au-dessous de sa surface éclairée. Les mouvements de Saturne et de la Terre et la position de l'anneau dans l'espace sont, par conséquent, les seuls éléments dont dépendent ses apparences; mais comme on a des moyens incomparablement plus exacts que l'observation de ces phénomènes, pour déterminer les mouvements de la Terre et de Saturne, on peut ici les supposer connus et ne regarder comme indéterminée que la position de l'anneau. Toutes les questions qu'on peut faire sur cet objet sont ainsi renfermées dans les deux suivantes :

*Étant données les phases observées à une certaine époque, quels étaient alors les éléments de l'anneau?*

*Étant donnés les éléments de l'anneau, quelles seront à l'avenir ses apparences?*

De quelque manière qu'on envisage ces problèmes, toutes les équations auxquelles on parvient doivent toujours se réduire à deux : l'une relative au passage du plan de l'anneau par le centre du Soleil et l'autre relative à son passage par le centre de la Terre, puisque c'est uniquement dans ces deux circonstances que l'anneau peut commencer à disparaître ou à reparaître. Il n'est pas difficile de trouver ces deux équations avec toute la rigueur possible; mais il le serait extrêmement d'en tirer, sous cette forme, des résultats simples et qui puissent faire connaître l'ensemble des phénomènes. Heureusement le peu d'excentricité de l'orbite terrestre et l'inégalité presque insensible du mouvement de Saturne, tandis que le plan de l'anneau traverse cette orbite, permettent de n'y avoir aucun égard au moins dans une première approximation. Les équations deviennent, par ces négligences, d'une grande simplicité sans perdre beaucoup de leur exactitude, et c'est dans cet état que M. du Séjour les considère. Il commence par donner, dans la deuxième Section, le moyen le plus facile pour y parvenir en faisant voir que le problème se réduit à déterminer les instants où deux corps mus uniformément avec des vitesses quelconques, l'un sur le diamètre d'un cercle et l'autre sur sa circonférence, se trouvent à la fois dans la même ordonnée et l'instant où le corps mû sur le diamètre parvient au centre. De là naissent deux équations dont la première est transcendante et renferme un arc de cercle avec son cosinus; la seconde est algébrique et du premier degré. La discussion de celle-ci n'a, comme on voit, aucune difficulté, mais la première donne lieu à l'auteur de faire, sur le nombre des racines réelles dont elle est susceptible, des remarques très fines et d'autant plus importantes que les phases de l'anneau dépendent de ces racines. Cette savante analyse est l'objet de la deuxième et de la troisième Section. Il nous est impossible d'en donner une idée, même imparfaite, sans figure et sans calcul; ainsi nous nous contenterons d'observer qu'elle peut être regardée comme une des applications les plus délicates et les plus heureuses qu'on ait encore faites de l'Algèbre à l'Astronomie.

Dans la quatrième Section, M. du Séjour applique son analyse aux six planètes principales en observant cependant de la modifier, par rapport à Jupiter, à cause de la grandeur de son orbite. Ensuite, il examine, dans la cinquième Section, la légitimité des suppositions précédentes relativement à la Terre et il y démontre : 1° que l'inégalité du mouvement de l'anneau produit, sur l'instant précis des phases, une différence inappréciable et qui ne va pas aux deux septièmes d'un jour; 2° que la différence qui vient de l'ellipticité de l'orbite de la Terre ne peut excéder 4 jours dans les cas les plus défavorables. Or ces quantités étant au-dessous des erreurs que comportent les observations, il semble qu'on peut se dispenser d'y avoir égard, mais comme il est toujours à craindre que les erreurs du calcul, en s'ajoutant avec celles des observations, ne conduisent à des résultats éloignés de la vérité, le géomètre ne doit, autant qu'il est possible, laisser dans ses calculs d'autre incertitude que celle des phénomènes. L'auteur donne conséquemment, dans la sixième Section, une méthode pour rectifier l'inexactitude résultante de l'égalité supposée du mouvement de la Terre dans son orbite considérée comme circulaire. Reprenant ensuite



cette première hypothèse, il discute avec étendue, dans les Sections suivantes, les phénomènes qui ont lieu dans les nœuds boréal et austral de l'anneau. Il y donne : 1° les symptômes auxquels on peut connaître le nombre des disparitions par l'inspection seule du lieu de la Terre au moment où le plan de l'anneau est tangent à son orbite; 2° les équations pour déterminer l'instant précis des phases; et comme l'épaisseur de l'anneau de Saturne n'est pas connue, que d'ailleurs l'observateur peut cesser de le voir quelque temps avant son passage par le centre de la Terre ou par celui du Soleil, M. du Séjour observe avec raison que, dans un calcul rigoureux, on doit tenir compte de cette épaisseur en partie réelle et en partie hypothétique, et, d'après cette remarque, il donne les équations relatives aux deux surfaces antérieure et postérieure de l'anneau et à un plan mené par son centre parallèlement à ces surfaces.

Dans les neuvième et dixième Sections l'auteur développe le calcul des apparitions et des réapparitions de l'anneau de Saturne depuis 1600 jusqu'en 1900. Non seulement il y compare les observations déjà faites avec les solutions, mais il examine encore avec le plus grand détail toutes les circonstances qui peuvent accompagner ces phénomènes. Une des plus remarquables est celle où l'anneau tend à disparaître, quoiqu'il ne puisse y avoir de disparition réelle, et cela doit arriver toutes les fois que le plan de l'anneau approche très près de la Terre sans l'atteindre. M. Heinsius est le premier qui ait observé cette tendance en 1744, mais ce qu'il en dit se réduit à fort peu de chose et la véritable théorie de ces maxima d'approximation était entièrement inconnue avant les recherches de M. du Séjour dont elle n'est qu'un corollaire extrêmement simple. Cette partie de son Ouvrage, une des plus précieuses pour les astronomes, est terminée par l'examen d'une période de 59 ans qu'on a cru ramener dans le même ordre, les apparences de l'anneau de Saturne. Cette période, que l'inspection seule du rapport des révolutions de Saturne et de la Terre suffit pour détruire, est encore démontrée fausse par les résultats du calcul, puisque, dans les années 1612 et 1671, séparées l'une de l'autre par un intervalle de 59 ans, les apparences n'ont pas été les mêmes, l'anneau n'ayant disparu qu'une fois dans la première année et deux fois dans la seconde.

Les recherches dont nous venons de présenter l'analyse sont fondées sur la circularité de l'orbite de la Terre et sur l'égalité du mouvement de l'anneau durant le temps des phénomènes : deux suppositions qui, comme nous l'avons observé, s'éloignent fort peu de la vérité. Dans les Sections suivantes l'auteur donne les équations rigoureuses du problème, et il s'en sert pour déterminer, soit par l'élimination, soit par des méthodes différentielles, les éléments de l'anneau proprement dits, c'est-à-dire son inclinaison sur l'écliptique, son épaisseur et la position de ses nœuds. Comparant ensuite les observations de 1715 et de 1774, les seules sur l'exactitude desquelles on puisse compter jusqu'à présent, il donne les différents systèmes d'éléments qui résultent de cette comparaison. Cette matière est discutée avec le soin et les détails qu'exige son importance. M. du Séjour n'a rien négligé de ce qui peut avoir influé sur les phénomènes. Une des considérations qu'il est le plus essentiel de ne pas négliger est celle relative à l'élévation plus ou moins grande du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, car il est évident que nous devons le perdre plus tôt et le revoir plus tard lorsqu'il nous réfléchit moins de lumière. Or la hauteur du Soleil au-dessus de ce plan étant toujours fort petite à l'instant des phénomènes, la lumière que l'anneau reçoit est à très peu près proportionnelle à cette hauteur. En faisant entrer cet élément dans les calculs, M. du Séjour trouve que les observations sont plus cohérentes entre elles. Ces recherches lui ont donné lieu de faire une remarque intéressante et qui nous paraît mériter l'attention des astronomes. Les observations les plus exactes du mois d'octobre 1774 laissent, sur l'instant précis de la disparition, une incertitude de 5 ou 6 jours, incertitude qui n'a point lieu pour les autres phénomènes. Cette circonstance a fait soupçonner à M. du Séjour qu'une des surfaces de l'anneau est peut-être moins propre que l'autre surface à réfléchir la lumière. Ce qui donne à cette conjecture beaucoup de vraisemblance c'est que, en 1714, dans les mêmes circonstances, on retrouve la même incertitude entre les observations. Cet accord très remarquable ne suffit pas, à la vérité, pour décider un point aussi délicat de la théorie de l'anneau de Saturne, mais il doit rendre les astronomes attentifs aux moyens de le vérifier. Le plus simple est la comparaison d'un grand nombre d'observations faites dans le nœud boréal et dans le nœud austral de l'anneau, car, si les observations diffèrent constamment plus entre elles dans une circonférence que dans l'autre, on pourra conclure avec certitude que les deux surfaces de l'anneau sont inégalement propres à réfléchir la lumière.



L'Ouvrage est terminé par différentes remarques sur l'anneau de Saturne, sur une méthode pour déterminer son inclinaison sur l'écliptique et sur quelques autres circonstances qui précèdent ses disparitions ou qui suivent ses réapparitions. L'auteur expose, en peu de mots, les opinions des philosophes sur la formation primitive d'un phénomène aussi extraordinaire et ce qu'on sait de plus probable sur la manière dont l'anneau peut se soutenir en équilibre autour de sa planète.

Tels sont les objets que M. du Séjour a traités dans son Ouvrage et l'on voit qu'il n'a rien laissé à désirer sur la théorie des phases de l'anneau de Saturne. L'élégance, la finesse et la simplicité des méthodes dont il a fait usage rendent cet Ouvrage très intéressant pour les géomètres, et la discussion des phénomènes, depuis 1600 jusqu'en 1900, le rend nécessaire aux astronomes qui voudront, dans la suite, observer avec précision ces apparences; ainsi nous croyons qu'il mérite d'être imprimé avec l'approbation et le privilège de l'Académie.

*Signé :*

d'Alembert, le Chevalier Borda, Bezout, Vandermonde, Laplace.

# LETTRES INÉDITES

## DE LAPLACE

PUBLIÉES AVEC UNE PREMIÈRE RÉDACTION DE SA

## MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES ORBITES DES COMÈTES

ET UNE

## NOTICE SUR LES MANUSCRITS DE PINGRÉ,

PAR CHARLES HENRY (1).

Les écrits de Laplace qu'on va lire ont une double origine.

Les six premiers documents sont conservés à la Bibliothèque de l'Institut dans les papiers de Condorcet et de d'Alembert (Ms. M. 623*), manuscrits que nous avons étudiés dans de précédents travaux (2).

Il y est question de la méthode de l'auteur pour l'intégration des équations différentielles aux différences infiniment petites et aux différences finies qui admettent une solution générale, du problème de l'équilibre des sphéroïdes homogènes, du problème des cordes vibrantes, les trois sujets désormais classiques, qui ont le plus vivement attiré l'attention des géomètres vers la fin du XVIII$^{e}$ siècle : c'est assez préciser le degré de leur intérêt qui, d'ailleurs, sera toujours actuel, en ce qu'ils touchent à la métaphysique de la Science.

La Lettre de Laplace à d'Alembert du 15 novembre 1777 est piquante; sans doute que le vieux géomètre s'était alarmé de cette déclaration du jeune auteur au sujet du problème des oscillations d'un fluide de peu de profondeur sur une planète immobile : « On trouvera dans ces Recherches la solu-
» tion rigoureuse de ce même problème quelle que soit la densité du fluide

(1) *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, T. XIX, avril 1886.

(2) *Ibid.*, T. XVI, mai 1883; T. XVIII, septembre-décembre 1885; T. XIX, mars 1886.



» et le mouvement de l'astre attirant. » Laplace lui envoie une addition flatteuse à l'adresse des *Réflexions sur la cause des vents*.

Les quatre pièces suivantes sont conservées à la Bibliothèque Sainte-Geneviève dans les manuscrits de Pingré.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Le manuscrit dont nous extrayons les écrits de Laplace est un in-4° oblong de 11 feuillets : il y a 2 feuillets de garde avant et après, 1 feuillet de garde entre le Mémoire et les Lettres.

Ce Mémoire, qui traite de la méthode pour déterminer les orbites des comètes, a tout l'intérêt d'une première rédaction originale; on peut s'en convaincre en le comparant avec les pages imprimées dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences pour* 1780 (p. 51 à 66), avec le Chapitre de la *Cométographie* de Pingré (T. II, p. 324), où la méthode de Laplace est exposée, enfin avec l'édition définitive de la *Mécanique céleste* (1).

Nous le publions tel qu'il se trouve dans le manuscrit, les Lettres ultérieures ayant pour objet de le rectifier.

## I.

(Bibliothèque de l'Institut, Ms. M. 623*.)

### 1. LAPLACE A CONDORCET (2).

A l'École militaire, ce 3 décembre, 1771.

MONSIEUR,

En repassant sur les différents Mémoires que j'ai présentés jusqu'ici à l'Académie, j'en ai extrait les remarques suivantes qui sont relatives à un objet dont vous vous êtes occupé dans le troisième Volume des *Mémoires de Turin* (3), et je prends la liberté de les soumettre à votre examen.

(1) *Œuvres de Laplace*, T. I, 1878, p. 243-256. — *Consulter* ensuite le Tome X, p. 93 et suivantes.

(2) Folios 4 et 5. Sans adresse.

(3) Il s'agit, sans aucun doute, du Mémoire de Condorcet intitulé : *Solution générale*

Vous et M. de Lagrange avez démontré dans ces Mémoires d'une manière fort élégante que si l'on sait intégrer l'équation

$$(1)\qquad 0 = y + \mathrm{H}\frac{dy}{dx} + \mathrm{H}'\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \mathrm{H}^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n},$$

$dx$ étant constant et H, H′, … étant des fonctions de $x$, on pourra toujours intégrer celle-ci

$$(2)\qquad \mathrm{X} = y + \mathrm{H}\frac{dy}{dx} + \mathrm{H}'\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \mathrm{H}^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n},$$

X étant une fonction de $x$.

Je suis parvenu, par une méthode assez singulière, non seulement à démontrer ce théorème, mais encore à la règle suivante :

Soit

$$y = \mathrm{C}u + \mathrm{C}'u' + \mathrm{C}''u'' + \ldots + \mathrm{C}^{n-1}u^{n-1}$$

l'intégrale complète de l'équation (1), $u$, $u'$, $u''$, … étant des intégrales particulières de cette équation, et C, C′, C″, … étant des constantes arbitraires, on fera

$$\begin{array}{llll}
\bar{u} = \dfrac{u'\,du - u\,du'}{du}, & \bar{\bar{u}} = \dfrac{\bar{u}'\,d\bar{u} - \bar{u}\,d\bar{u}'}{d\bar{u}}, & \bar{\bar{\bar{u}}} = \dfrac{\bar{\bar{u}}'\,d\bar{\bar{u}} - \bar{\bar{u}}\,d\bar{\bar{u}}'}{d\bar{\bar{u}}}, & \ldots, \\
\bar{u}' = \dfrac{u''\,du - u\,du''}{du}, & \bar{\bar{u}}' = \dfrac{\bar{u}''\,d\bar{u} - \bar{u}\,d\bar{u}''}{d\bar{u}}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\
\bar{u}'' = \dfrac{u'''\,du - u\,du'''}{du}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots,
\end{array}$$

jusqu'à ce qu'on parvienne ainsi à former $\frac{1}{\bar{\bar{u}}}$; soit alors

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{\bar{\bar{u}}}}\right)}{dx} = z^{n-1}$$

*et analytique de ce problème :*

*Une équation différentielle aux différences infiniment petites et qui admet une solution générale étant donnée, trouver l'intégrale.*

(*Mélanges de Philosophie et de Mathématiques de la Société royale de Turin pour les années* 1766-1769, etc., p. 1-18.)



($n$ n'étant pas ici exposant, mais indiquant seulement le rang de $z$ dans la suite des $z$). Si, dans l'expression de $z^{n-1}$, on change $u^{n-1}$ en $u^{n-2}$, et réciproquement, on formera $z^{n-2}$; si, dans la même expression de $z^{n-1}$, on change $u^{n-1}$ en $u^{n-3}$, et réciproquement, on formera $z^{n-3}$, et ainsi de suite, on aura

$$\begin{aligned}
y = {} & u\left(\mathrm{C} + \int z\,\mathrm{X}\,dx\right) \\
& + u'\left(\mathrm{C}' + \int z'\,\mathrm{X}\,dx\right) \\
& + u''\left(\mathrm{C}'' + \int z''\,\mathrm{X}\,dx\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + u^{n-1}\left(\mathrm{C}^{n-1} + \int z^{n-1}\mathrm{X}\,dx\right)
\end{aligned}$$

pour l'intégrale complète de l'équation (2).

Il résulte encore de cette méthode que l'intégrale de l'équation (2) dépend toujours de l'intégration de deux autres du degré $n-1$, et dont il n'est même nécessaire que de trouver un nombre $n-2$ d'intégrales particulières.

La même méthode s'étend encore aux différences finies.

Soit l'équation *différentio-différentielle* aux différences finies

$$(3)\qquad \mathrm{X}^x = y^x + \mathrm{H}^x y^{x+1} + {}'\mathrm{H}^x y^{x+2} + \ldots + {}^{n-1}\mathrm{H}^x y^{x+n},$$

$\mathrm{X}^x$, $\mathrm{H}^x$, $'\mathrm{H}^x$, … étant des fonctions de $x$, et $\mathrm{X}^x$, $y^x$, $\mathrm{H}^x$, … ne désignant pas des puissances de X, $y$, H, …, mais le $x^{\text{ième}}$ terme de la série des X, des $y$, etc.; qu'on désigne par la caractéristique $\Delta$ les différences finies et par la caractéristique $\sum$ les intégrales finies; cela posé, soit

$$y^x = \mathrm{A}^u + {}'\mathrm{A}\,'u + {}''\mathrm{A}\,''u + \ldots + {}^{n-1}\mathrm{A}\,^{n-1}u$$

l'intégrale de

$$(4)\qquad 0 = y^x + \mathrm{H}^x y^{x+1} + \ldots + {}^{n-1}\mathrm{H}^x y^{x+n},$$

$u$, $'u$, $''u$, … étant des intégrales particulières de l'équation (4) et A,

$'A$, $''A$, ... étant des constantes arbitraires; qu'on fasse

$$\begin{array}{ll}
\bar{u} = u\Delta.\left(\dfrac{u'}{u}\right), & \bar{\bar{u}} = \bar{u}\Delta.\left(\dfrac{\bar{u}'}{\bar{\bar{u}}}\right), \\
\bar{u}' = u\Delta.\left(\dfrac{u''}{u}\right), & \bar{\bar{u}}' = \bar{u}\Delta.\left(\dfrac{\bar{u}''}{\bar{\bar{u}}}\right), \\
\bar{u}'' = u\Delta.\left(\dfrac{u'''}{u}\right), & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

jusqu'à ce qu'on parvienne à former $\dfrac{1}{\bar{\bar{u}}}$; qu'on fasse $\dfrac{1}{\bar{\bar{u}}} = {}^{n-1}z$; si dans cette expression on change ${}^{n-1}u$ en ${}^{n-2}u$, et réciproquement, on formera ${}^{n-2}z$, et ainsi de suite; l'intégrale de l'équation (3) sera

$$\begin{aligned}
y^x = {} & u\left(A \pm \sum \frac{X^x}{z}\right) \\
& + {}'u\left({}'A \pm \sum \frac{X^x}{'z}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + {}^{n-1}u\left({}^{n-1}A \pm \sum \frac{X^x}{{}^{n-1}z}\right),
\end{aligned}$$

le signe $+$ ayant lieu si $n$ est impair et le signe $-$, s'il est pair.

Je suis parvenu, par cette méthode, non seulement à sommer très directement les suites récurrentes. mais de plus une espèce de suites fort *générales*, dont celles-ci ne sont qu'un cas particulier.

Toutes ces choses sont développées dans un Mémoire que M. de Fouchy m'a promis de faire imprimer au plus tôt (1). J'aurais bien désiré que vos occupations vous eussent permis d'y jeter un coup

(1) Ce Mémoire a pour titre : *Recherches sur le calcul intégral aux différences infiniment petites et aux différences finies;* il a été inséré dans le Tome IV des *Mélanges de Turin :* l'illustre géomètre revient sur les énoncés de ces théorèmes à la fin de son Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la Théorie des hasards (2) (*Mémoires de Mathématique et de Physique*, présentés à l'Académie royale des Sciences par divers savants et lus dans les assemblées, T. VI, etc. MDCCLXXIV, p. 367-371).

(2) *Œuvres de Laplace*, T. VIII, p. 5 et 20 à 24.



d'œil; mais je sais le peu de temps qu'elles vous laissent. Je crains même d'avoir abusé, par cette Lettre, de votre complaisance, mais j'espère que vous me pardonnerez aisément cette importunité, que je vous prie d'imputer au désir que j'ai de mériter votre amitié.

Je suis avec estime et respect,

Monsieur,

Votre très humble et obéissant serviteur,

LAPLACE.

## 2. LAPLACE A CONDORCET (1).

J'ai reçu, Monsieur, la Note que vous avez eu la bonté de m'envoyer; elle me paraît très juste, et vous observez avec raison que toute fois que l'intégrale sera possible en termes finis, vous la trouverez par votre méthode, qui me paraît fort ingénieuse. Quand mon travail sera fini sur cet objet, je me propose de vous le communiquer. Du reste, on vous doit et je vous rendrai la justice d'observer que vous êtes le premier qui ayez donné une méthode générale sur ces intégrations, car il me semble qu'une des raisons pour lesquelles on n'a point avancé cette partie de l'Analyse autant qu'elle pouvait l'être, est qu'on s'est borné à des méthodes de transformations nécessairement limitées.

Je vous prie de me croire avec toute l'estime et toute l'amitié possible,

Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

LAPLACE.

(1) Folios 6 et 7. L'adresse est : A Monsieur, Monsieur le Marquis de Condorcet, Secrétaire de l'Académie des Sciences, rue Louis-le-Grand, à Paris.

## 3. LAPLACE A CONDORCET (1).

M. de Condorcet m'a remis le Mémoire de M. de Lagrange sur le mouvement des nœuds des planètes.

Ce 15 février 1775.

LAPLACE.

## 4. LAPLACE A D'ALEMBERT (2).

A Paris, ce samedi 15 novembre 1777.

MONSIEUR ET TRÈS ILLUSTRE CONFRÈRE,

Au lieu d'aller demain vous importuner, comme je me l'étais proposé, j'ai cru plus à propos de vous envoyer l'addition dont nous sommes convenus; d'ailleurs, je n'aurai plus demain mon Mémoire parce que je dois le remettre ce soir à l'Académie, à M. le Marquis de Condorcet (3). Après cette phrase : « C'est donc, à proprement » parler, à M. d'Alembert qu'il faut rapporter les premières recherches » exactes qui aient paru sur cet important objet. Cet illustre auteur » s'étant proposé, dans son excellent Ouvrage qui a pour titre : » *Réflexions sur la cause des vents*, de calculer les effets de l'action » du Soleil et de la Lune sur notre atmosphère, y détermine d'une » manière synthétique et fort belle les oscillations d'un fluide de peu » de profondeur qui recouvre une planète immobile au-dessus de » laquelle répond un astre immobile; il cherche ensuite à déterminer

(1) Folio 8.
(2) Folio 9.
(3) Il s'agit des *Recherches sur plusieurs points du système du Monde* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1772, p. 75 et suiv.) (a).

(a) *Œuvres de Laplace*, T. IX, p. 71.



» ces oscillations, dans le cas où la planète étant toujours supposée » immobile, l'astre se meut uniformément sur un parallèle à l'équateur, et il parvient par une analyse aussi savante qu'ingénieuse aux » véritables équations de ce problème, mais la difficulté de les intégrer le force de recourir à des suppositions qui en rendent la solution incertaine. On trouvera dans ces recherches la solution rigoureuse de ce même problème, quels que soient la densité du fluide et » le mouvement de l'astre attirant dans l'espace. »

J'ai ajouté ce qui suit (1) :

« Au reste, je dois à M. d'Alembert la justice d'observer que si j'ai » été assez heureux pour ajouter quelque chose à cet égard, à ses » excellentes *Réflexions sur la cause des vents*, j'en suis principalement » redevable à ces *Réflexions* elles-mêmes et aux belles découvertes » de ce grand géomètre sur la Théorie des fluides et sur le Calcul » intégral aux différences partielles dont on voit les premières traces » dans l'Ouvrage que je viens de citer. Si l'on considère combien » les premiers pas sont difficiles en tout genre, et surtout dans » une matière aussi compliquée; si l'on fait attention aux progrès » immenses de l'Analyse depuis l'impression de son Ouvrage, on ne » sera pas surpris qu'il nous ait laissé quelque chose à faire encore » et que, aidés par des théories que nous tenons de lui presque toutes » entières, nous soyons en état d'avancer plus loin dans une carrière » qu'il a le premier ouverte (2). »

J'espère, mon cher Confrère, que vous serez content de cette addition; je suis très enchanté d'avoir cette occasion de vous témoigner publiquement mon estime et ma reconnaissance : je vous devais d'ailleurs cette justice à tous égards, puisqu'il est vrai de dire que, sans votre travail et sans les belles recherches que vous avez publiées dans votre excellent *Essai sur la résistance des fluides* et que M. Euler

(1) Cette addition se trouve page 91 du Volume précité.
(2) *Œuvres de Laplace*, T. IX, p. 89 et 90.

a depuis présentées d'une manière fort simple et fort générale dans les *Mémoires de Berlin et de Pétersbourg*, je n'aurais jamais osé entreprendre de traiter la matière qui fait l'objet de mes recherches.

J'ai toujours cultivé les Mathématiques par goût plutôt que par le désir d'une vaine réputation, dont je ne fais aucun cas. Mon plus grand amusement est d'étudier la marche des inventeurs, de voir leur génie aux prises avec les obstacles qu'ils ont rencontrés et qu'ils ont su franchir; je me mets alors à leur place et je me demande comment je m'y serais pris pour surmonter ces mêmes obstacles, et quoique cette substitution n'ait, le plus souvent, rien que d'humiliant pour mon amour-propre, cependant le plaisir de jouir de leur succès me dédommage amplement de cette petite humiliation. Si je suis assez heureux pour ajouter quelque chose à leurs travaux, j'en attribue tout le mérite à leurs premiers efforts, bien persuadé que dans ma position ils auraient été beaucoup plus loin que moi. Vous voyez par là, mon cher Confrère, que personne ne lit vos Ouvrages avec plus d'attention et ne cherche mieux à en faire son profit que moi; aussi personne n'est plus disposé à vous rendre une justice plus entière, et je vous prie de me regarder comme un de ceux qui vous aiment et qui vous admirent le plus. C'est dans ces sentiments que j'ai l'honneur d'être, Monsieur et illustre Confrère,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

LAPLACE.

## 5. LAPLACE A D'ALEMBERT (¹).

1777.

Vous avez eu raison, mon très cher et très illustre Confrère, de soupçonner que le problème de l'équilibre des sphéroïdes homogènes n'est

(¹) Folio 10. Adresse : A Monsieur, Monsieur d'Alembert, de l'Académie des Sciences et Secrétaire perpétuel de l'Académie française, au Louvre.



susceptible que de deux solutions. En relisant vos belles remarques sur cet objet, je m'en suis assuré par la méthode suivante, qui est assez simple et qu'on peut employer avec avantage, pour déterminer le nombre des racines réelles des équations transcendantes : je considère d'abord l'équation $2\omega = \frac{(3k^2+9)\,\text{arc tang}\,k - 9k}{k^3}$, de la page 50 du Volume VI de vos *Opuscules* (¹); cette équation détermine, par le nombre des valeurs réelles et positives de $k$ qui peuvent y satisfaire, les différentes figures elliptiques qui conviennent à l'équilibre; mais il est assez difficile de reconnaitre le nombre de ces racines à cause de la fonction transcendante qu'elle renferme. Pour la faire disparaitre, je mets l'équation précédente sous cette forme

$$\frac{2\omega k^3 + 9k}{3k^2+9} - \text{arc tang}\,k = 0$$

et je nomme $\varphi$ la fonction (²)

$$\frac{2\omega k^3 + 9k}{3k^2+9} - \text{arc tang}\,k;$$

je différentie cette fonction et, toutes réductions faites, je trouve

$$\delta\varphi = \frac{6k^2\,\delta k.[\omega k^4 + (10\omega - 6)k^2 + 9\omega]}{(3k^2+9)^2(1+k^2)};$$

on aura donc

$$\varphi = \int 6k^2\,\delta k\,\frac{[\omega k^4 + (10\omega - 6)k^2 + 9\omega]}{(3k^2+9)^2(1+k^2)},$$

(¹) $\omega$ est un nombre connu qui dépend de la vitesse de rotation de la sphère homogène autour d'un de ses diamètres.

Si $a$ est le demi-axe de l'ellipse qui devient cette sphère en devenant fluide, $ma$ le rayon de l'équateur, l'attraction au pôle sera

$$P = \frac{2cm^2a}{(m^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{m^2-1} - \text{arc tang}\sqrt{m^2-1}\right)$$

ou, en faisant $k = \sqrt{m^2-1}$, on a

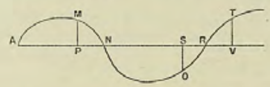
$$P = \frac{2ca(k^2+1)}{k^3}(k - \text{arc tang}\,k).$$

(²) *Œuvres de Laplace*, T. II, p. 59.

l'intégrale étant supposée commencer avec $k$; cela posé, je construis la courbe AMNORT de manière que, l'abscisse AP étant $k$, l'ordonnée PM soit

$$6k^2\frac{[\omega k^4+(10\omega-6)k^2+9\omega]}{(3k^2+9)^2(1+k^2)}.$$

Il est clair : 1° que les ordonnées commenceront et finiront par être positives; 2° que, si du côté des valeurs positives de $k$, les seules que




nous devions considérer ici, la courbe coupe l'axe des abscisses, elle le coupera en deux points N, R, tels que les abscisses AN et AR seront déterminées par les deux racines positives de l'équation

$$0=\omega k^4+(10\omega-6)k^2+9\omega;$$

cette équation donne

$$k^2=\frac{3}{\omega}-5\pm\sqrt{\left(\frac{3}{\omega}-5\right)^2-9};$$

pour que $k^2$ ait une valeur réelle et positive, il faut que $\left(\frac{3}{\omega}-5\right)^2$ soit plus grand que 9, et que $\frac{3}{\omega}-5$ soit positif; dans ce cas, les deux valeurs de $k^2$ seront réelles et positives, ce qui donnera pareillement pour $k$ deux valeurs réelles et positives; il suit de là que la courbe ne coupera point du tout son axe ou qu'elle le coupera en deux points N et R; il est bien clair qu'elle ne peut le couper qu'en ces deux points, du côté des abscisses positives.

Maintenant la fonction $\varphi$ représente l'aire de la courbe, et, pour que cette fonction puisse être nulle, il faut que la courbe coupe son axe et que l'aire négative NOR excède, ou au moins soit égale à l'aire positive AMN; il doit donc exister alors un point S tel que l'aire NOS soit égale à l'aire AMN; mais, puisque la fonction $\varphi$ finit par être positive,



il est clair qu'il existe un autre point V tel que l'aire RTV est égale à l'aire RSO, en sorte que l'aire $\varphi$ de la courbe est nulle aux deux points S et V, et de plus, il est visible qu'elle ne peut être nulle qu'à ces deux points.

Si l'aire AMN est égale à l'aire NOR, les deux points S et V se confondent avec le point R, et ce cas est celui où l'équation $\varphi=0$ cesse d'être possible.

## 6. LAPLACE A D'ALEMBERT ([1]).

Ce dimanche, 10 mars 1782.

Monsieur et très illustre Confrère,

Je suis très flatté que mes *Recherches sur les suites* ([2]) aient pu fixer quelques moments votre attention; j'aurais bien désiré que vos occupations vous eussent permis de suivre l'analyse que j'y donne du problème des cordes vibrantes, au moyen du Calcul intégral aux différences finies partielles, car il me paraît évident, par cette analyse, que toute figure initiale de la corde, dans laquelle deux côtés contigus ne forment point entre eux un angle fini, peut être admise. Voici en peu de mots à quoi se réduit mon raisonnement ([3]).

Si l'on nomme $y_{x,t}$ l'ordonnée d'une corde vibrante dont l'abscisse est $x$, $t$ désignant le temps, il est clair que la force accélératrice du point de la corde placé à l'extrémité de cette ordonnée sera proportionnelle à la différence seconde des trois ordonnées qui répondent

([1]) Folios 12 et 13. L'adresse est : A Monsieur, Monsieur d'Alembert, de l'Académie des Sciences et Secrétaire perpétuel de l'Académie française, au Louvre.

([2]) Il s'agit du Mémoire sur les suites publié dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour* 1779, p. 207-309; c'est le premier où Laplace ait considéré les *fonctions génératrices* ([a]).

([3]) Laplace traite la question avec plus de développements dans sa *Théorie des probabilités* (*Œuvres de Laplace*, T. VII, etc., p. 77 et suiv.).

([a]) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 1 et suiv.

à $x - dx$, $x$ et $x + dx$, c'est-à-dire proportionnelle à

$$y_{x-dx,t} - 2y_{x,t} + y_{x+dx,t};$$

de plus, cette force sera, par les principes de Dynamique, proportionnelle à

$$d^2 y_{x,t},$$

cette différence seconde étant prise en ne faisant varier que le temps $t$; en le mettant donc, comme cela se peut, sous cette forme

$$y_{x,t-dt} - 2y_{x,t} + y_{x,t+dt},$$

on aura pour déterminer le mouvement de la corde l'équation

$$y_{x,t+dt} - 2y_{x,t} + y_{x,t-dt} = a^2(y_{x+dx,t} - 2y_{x,t} + y_{x-dx,t}),$$

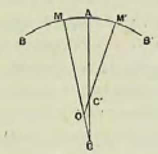
$a^2$ étant un coefficient constant. Cette équation convient incontestablement à tous les points de la corde, excepté aux deux extrêmes, dont le premier n'a point d'ordonnée antérieure et le second, d'ordonnée postérieure; mais ces deux points sont fixes par la condition du problème. J'observe cependant que, pour que l'équation précédente subsiste, il est nécessaire que deux côtés contigus ne forment point entre eux un angle fini, car au sommet de cet angle la force accélératrice, qui partout ailleurs est finie, serait infinie. La vitesse changerait donc brusquement à ce point, et l'on ne pourrait plus y supposer la force accélératrice égale à $\frac{d^2 y_{x,t}}{dt^2}$, comme cela est nécessaire pour que l'équation générale du problème des cordes vibrantes puisse avoir lieu.

Maintenant, au lieu d'intégrer l'équation précédente par la considération des infiniment petits, ce qui peut laisser des doutes sur la discontinuité des fonctions arbitraires auxquelles on parvient, je l'intègre comme une équation aux différences finies et dans laquelle, par conséquent, $dx$ et $dt$ sont des quantités finies. Il est visible que, rien n'étant négligé dans cette intégration, les résultats que je trouve conviennent également au cas de $dx$ et de $dt$, infiniment petits; et comme dans le cas général, la valeur de $y_{x,t}$ se construit en plaçant alternativement, au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, le polygone



qui représente la valeur de $y_{x,t}$ lorsque $t = 0$, on doit en conclure que cette même construction a lieu lorsque $dx$ et $dt$ sont infiniment petits, et qu'ainsi la construction que vous avez donnée dans votre Mémoire sur les cordes vibrantes, relativement aux fonctions analytiques, est générale, quelle que soit la figure initiale de la corde, pourvu qu'aucun de ses angles ne soit fini. Il ne me sera pas difficile, présentement, de répondre à la difficulté que vous me faisiez hier, à l'Académie, sur la force accélératrice qui a lieu au point de contact de deux positions de courbes qui se touchent.

Pour cela, je considère deux arcs de cercle BA et B'A qui se touchent au point A, et dont les centres sont C et C'. La force accélératrice au point A est en raison inverse du rayon osculateur à ce point, et comme




il appartient également aux deux arcs AB et AB', vous me demandiez lequel des deux rayons CA ou C'A on doit choisir pour représenter la force accélératrice du point A. Pour répondre à cette difficulté, j'observerai que, lorsqu'on suppose la force accélératrice inversement proportionnelle au rayon osculateur au point A, cela veut dire que si l'on prend deux points M et M', infiniment voisins et équidistants de A, et qu'on fasse passer un cercle par ces trois points, la force accélératrice au point A sera en raison inverse du rayon de ce cercle; cela posé, je dis que cette force ne sera inversement proportionnelle ni à CA, ni à C'A, parce qu'aucun de ces deux rayons ne sera celui du cercle qui passe par les trois points M, A, M'; mais, si l'on prolonge M'C' jusqu'à ce qu'il rencontre MC en O, O sera le centre de ce cercle et la force en A sera réciproque au rayon AO; or il est facile de prouver que AO est égal au produit des deux rayons CA et C'A, divisé par la moitié de leur somme. Il n'y a donc point d'ambiguïté relativement à la force accélératrice du point A qui sera toujours proportionnelle à la différence seconde des trois ordonnées qui passent par les points M, A et M'.

Telles sont, Monsieur, les réflexions que j'ai l'honneur de vous présenter sur une question très délicate, que vous avez tant de fois agitée, et sur laquelle l'opinion dépend de la manière dont on envisage le problème; il est naturel de transporter au résultat de la solution la continuité qu'exige la méthode dont on fait usage et qui souvent restreint la généralité de cette solution; aussi je ne suis point surpris que notre illustre ami, M. de Lagrange, qui a traité ce problème dans le Tome III des *Mémoires de Turin* par la méthode des suites infinies, ait cru la continuité nécessaire entre les différences quelconques des fonctions arbitraires; mais la méthode des différences finies dans laquelle on ne néglige rien est exemptée de ces inconvénients. Il m'a toujours semblé que M. Euler a été trop loin en n'assujettissant à aucune condition les fonctions arbitraires; mais je pense que vous avez été trop circonspect en les restreignant aux seules fonctions analytiques. Cette circonspection était bien naturelle dans l'inventeur d'un calcul qui offre des résultats aussi vastes et aussi inattendus, mais vous ne devez pas trouver mauvais qu'on vous prouve que votre calcul a beaucoup plus d'étendue que vous ne lui en aviez soupçonné d'abord; je vous prie de croire que personne ne sent mieux que moi l'importance et la beauté de cette précieuse découverte, et ne vous rend à cet égard une justice plus sincère, à laquelle je suis porté d'ailleurs par le sentiment de la reconnaissance pour vos premières bontés que je n'oublierai jamais.

J'ai l'honneur d'être avec toute l'estime et la considération possibles,

Monsieur et très illustre Confrère,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

LAPLACE.

---



# II.

(Bibliothèque Sainte-Geneviève, Ms. V., f. in-4° 746. Supplément.)

---

## 1. MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES ORBITES DES COMÈTES (1).

### I.

On choisira trois ou quatre, ou cinq, etc. observations d'une comète, également éloignées les unes des autres autant qu'il sera possible, et pour la commodité du calcul, on les réduira toutes à la même heure du jour, temps moyen, quoique cela ne soit pas absolument nécessaire. On pourra embrasser, avec quatre observations, un intervalle de 30°; avec cinq observations, un intervalle de 36° ou 40°, et ainsi du reste; mais il faudra toujours que l'intervalle compris entre les observations soit d'autant plus grand qu'elles sont en plus grand nombre, afin de diminuer l'influence de leurs erreurs. Cela posé, soient $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, $\beta'''$, ... les ascensions droites successives de la comète; $r$, $r'$, $r''$, $r'''$, ... les déclinaisons boréales correspondantes, les déclinaisons australes devant être supposées négatives; on divisera la différence $\beta'-\beta$ par le nombre des jours qui séparent la première de la deuxième observation; on divisera pareillement la différence $\beta''-\beta'$ par le nombre des jours qui séparent la troisième de la deuxième observation; on divisera encore la différence $\beta'''-\beta''$ par le nombre des jours qui séparent la quatrième de la troisième observation, et ainsi de suite. Soit $\delta\beta$, $\delta\beta'$, $\delta\beta''$, $\delta\beta'''$, ... la suite de ces quotients.

On divisera la différence $\delta\beta'-\delta\beta$ par le nombre des jours qui séparent la troisième de la première observation; on divisera pareil-

(1) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 127, et T. I, p. 243.

lement la différence $\delta\beta''' - \delta\beta'$ par le nombre des jours qui séparent la quatrième de la deuxième observation; on divisera encore la différence $\delta\beta'''' - \delta\beta''$ par le nombre des jours qui séparent la cinquième de la troisième observation, et ainsi du reste. Soit $\delta^2\beta'$, $\delta^2\beta''$, ... la suite de ces quotients.

On divisera la différence $\delta^2\beta' - \delta^2\beta$ par le nombre des jours qui séparent la quatrième de la première observation; on divisera pareillement la différence $\delta^2\beta'' - \delta^2\beta'$ par le nombre des jours qui séparent la cinquième de la deuxième observation, et ainsi du reste. Soit $\delta^3\beta$, $\delta^3\beta'$, $\delta^3\beta''$, ... la suite de ces quotients.

On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne à former $\delta^{n-1}\beta$, $n$ étant le nombre des observations employées. Cela fait :

On prendra une époque moyenne, ou à peu près moyenne, entre les instants des deux observations extrêmes, et, en nommant $i, i', i'', i''', \ldots$ les nombres de jours dont elle précède chaque observation, $i, i', i'', \ldots$ devant être supposés négatifs pour toutes les observations antérieures à cette époque, l'ascension droite de la comète, pour un nombre, $z$, de jours comptés depuis l'époque, sera exprimée par la formule

$$\begin{aligned}
&\beta - i\,\delta\beta + ii'\,\delta^2\beta - ii'i''\,\delta^3\beta + ii'i''i'''\,\delta^4\beta - \ldots\\
&\quad + z\,[\delta\beta - (i+i')\,\delta^2\beta + (ii' + ii'' + i'i'')\,\delta^3\beta\\
&\qquad - (ii'i'' + ii'i''' + ii''i''' + i'i''i''')\,\delta^4\beta + \ldots]\\
&\quad + z^2[\delta^2\beta - (i+i'+i'')\,\delta^3\beta\\
&\qquad + (ii' + ii'' + ii''' + i'i'' + i'i''' + i''i''')\,\delta^4\beta - \ldots].
\end{aligned}$$

Les coefficients de $-\delta\beta$, $+\delta^2\beta$, $-\delta^3\beta$, ..., dans la partie indépendante de $z$, sont : 1° le nombre $i$; 2° le produit des deux nombres $i$ et $i'$; 3° le produit des trois nombres $i, i', i''$; etc.

Les coefficients de $-\delta^2\beta$, $+\delta^3\beta$, $-\delta^4\beta$, ..., dans la partie multipliée par $z$, sont : 1° la somme des deux nombres $i$ et $i'$; 2° la somme des produits deux à deux des trois nombres $i, i', i''$; 3° la somme des produits trois à trois des quatre nombres $i, i', i'', i'''$; etc.

Les coefficients de $-\delta^3\beta$, $+\delta^4\beta$, $-\delta^5\beta$, ..., dans la partie multipliée par $z^2$, sont : 1° la somme des trois nombres $i, i', i''$; 2° la somme



des produits deux à deux des quatre nombres $i, i', i'', i'''$; 3° la somme des produits trois à trois des cinq nombres $i, i', i'', i''', i^{\text{iv}}$; etc.

En opérant de la même manière sur les déclinaisons de la comète, sa déclinaison après le nombre $z$ de jours, depuis l'époque, sera représentée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
&r - i\,\delta r + ii'\,\delta^2 r - ii'i''\,\delta^3 r + ii'i''i'''\,\delta^4 r - \ldots\\
&\quad + z\,[\delta r - (i+i')\,\delta^2 r + (ii' + ii'' + i'i'')\,\delta^3 r\\
&\qquad - (ii'i'' + ii'i''' + ii''i''' + i'i''i''')\,\delta^4 r - \ldots]\\
&\quad + z^2[\delta^2 r - (i+i'+i'')\,\delta^3 r\\
&\qquad + (ii' + ii'' + ii''' + i'i'' + i'i''' + i''i''')\,\delta^4 r - \ldots].
\end{aligned}$$

On supposera ensuite $z$ égal à un petit nombre de jours, de manière que les termes multipliés par $z^2$ ne montent qu'à un petit nombre de minutes, par exemple à 4 ou 5 minutes. Soit $q$ ce nombre de jours; on fera successivement $z = -q$, $z = 0$ et $z = q$; on aura ainsi trois ascensions droites et trois déclinaisons correspondantes de la comète, éloignées l'une de l'autre d'un même intervalle de temps. On pourra pour plus de simplicité fixer l'époque à l'instant de l'observation moyenne, si le nombre des observations employées est impair, ce qui donne

$$i = 0$$

et ce qui simplifie, par conséquent, les formules précédentes. Cela posé, au moyen des trois ascensions droites et des trois déclinaisons, on calculera les trois longitudes et les trois latitudes correspondantes, en ayant soin de porter la précision jusqu'aux secondes. Soient $\alpha_1$, $\alpha$, $\alpha'$ les trois longitudes et $\theta_1$, $\theta$, $\theta'$ les trois latitudes boréales, les latitudes australes devant être supposées négatives; on réduira en secondes la quantité $\frac{\alpha' - \alpha_1}{2q}$ et, du logarithme de ce nombre de secondes, on retranchera le logarithme 3,5500081 (¹); on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par $a$.

On réduira pareillement en secondes la quantité $\frac{\alpha' - 2\alpha + \alpha_1}{q^2}$ et,

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 103.

du logarithme de ce nombre de secondes, on retranchera le logarithme 1,7855911 (¹); on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par $b$.

En réduisant encore en secondes la quantité $\frac{\theta' - \theta_1}{2q}$ et, en retranchant du logarithme de ce nombre de secondes le logarithme 3,5500081, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par $h$.

Enfin, on réduira en secondes la quantité $\frac{\theta' - 2\theta + \theta_1}{q^2}$ et, en retranchant du logarithme de ce nombre de secondes le logarithme 1,7855911, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par $l$.

C'est de la précision des valeurs de $a$, $b$, $h$ et $l$ que dépend l'exactitude des résultats suivants, et, comme leur formation est très simple, il faut choisir et multiplier les observations, de manière à les obtenir avec autant de rigueur que les observations le comportent.

Pour éclaircir ce que nous venons de dire par un exemple, nous choisirons la comète de 1773, dont les observations, faites par M. Messier, sont consignées dans le Volume des *Mémoires de l'Académie* pour l'année 1774. En réduisant à $17^h$, temps moyen à Paris, les observations du 13 octobre, du 31 octobre, du 25 novembre et du 14 décembre 1773, on a :

| | Ascension droite de la comète. | Déclinaison boréale. |
|---|---|---|
| 13 octobre | 154°.21′.40″ | 7°. 2′.30″ |
| 31 octobre | 165.45.52 | 13.33.15 |
| 25 novembre | 180.33.51 | 25.47.45 |
| 14 décembre | 190.31.33 | 52.43.13 |

On conclura de ces observations :

$$\delta\beta = 2280'',7, \qquad \delta\beta' = 2131'',2, \qquad \delta\beta'' = 1887'',2;$$
$$\delta^2\beta = -3'',4767, \qquad \delta^2\beta' = -5'',5387;$$
$$\delta^3\beta = -0'',0326.$$

(¹) *Œuvres de Laplace*, t. X, p. 103.



En prenant ensuite pour époque le 13 novembre, à $17^h$, temps moyen, on aura

$$i = -31, \qquad i' = -13, \qquad i'' = 12, \qquad i''' = 31;$$

la formule qui exprime l'ascension droite après le nombre $z$ de jours comptés depuis l'époque sera donc

$$173°39'21'' + 2131'',9z - 4'',541z^2.$$

On trouvera pareillement que la déclinaison sera exprimée par la formule

$$18°41'11'' + 1477'',9z + 4'',4748z^2.$$

En faisant successivement dans ces formules $z = -6$, $z = 0$ et $z = 6$, on aura les trois ascensions droites et les trois déclinaisons suivantes :

| Ascension droite. | Déclinaison. |
|---|---|
| 170°. 3′.26″ | 16°.16′. 5″ |
| 173.39.21 | 18.41.11 |
| 177. 9.49 | 21.11.40 |

En calculant ensuite les trois longitudes et les trois latitudes correspondantes, on trouve

$$\alpha_1 = 164°25'24'', \qquad \theta_1 = 11°\ 0'34'',$$
$$\alpha = 166°38'26'', \qquad \theta = 14°36'32'',$$
$$\alpha' = 168°41'18'', \qquad \theta' = 18°15'23'';$$

d'où l'on tire

$$a = 0,360605, \qquad b = -0,277611,$$
$$h = 0,612729, \qquad l = \ \ 0,078732.$$

II.

On déterminera la longitude de la Terre vue du Soleil, à l'instant qu'on a choisi pour époque.

Soient :

A cette longitude;

R la distance correspondante de la Terre au Soleil;
R′ la distance qui répond à la longitude A + 90° de la Terre.

On formera les trois équations

$$r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta} + 2Rx\cos(A-\alpha) + R^2, \tag{1}$$

$$y = \frac{R\sin(A-\alpha)}{2a}\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{bx}{2a}, \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} 0 = {} & y^2 + a^2x^2 + \left(y\,\mathrm{tang}\,\theta + \frac{hx}{\cos^2\theta}\right)^2 \\ & + 2y\left[(R'-1)\cos(A-\alpha) - \frac{\sin(A-\alpha)}{R}\right] \\ & + 2ax\left[(R'-1)\sin(A-\alpha) + \frac{\cos(A-\alpha)}{R}\right] + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r}; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

pour tirer de ces équations les valeurs de trois inconnues $x$, $y$ et $z$. il sera beaucoup plus commode d'employer, au lieu des coefficients connus, leurs logarithmes. On fera une première supposition pour $x$: on le supposera, par exemple, égal à l'unité et l'on en tirera, au moyen des équations (1) et (2), les valeurs de $r$ et de $y$; on substituera ensuite ces valeurs dans l'équation (3) et, si le reste est nul, ce sera une preuve que la valeur de $x$ a été bien choisie; mais, si ce reste est négatif, on augmentera la valeur de $x$ et on la diminuera si le reste est positif. On aura ainsi, au moyen d'un petit nombre d'essais, les véritables valeurs de $x$, $y$ et $r$. Mais, comme ces inconnues peuvent être susceptibles de plusieurs valeurs, il faudra choisir celle qui satisfait exactement ou à peu près à l'équation

$$\left\{\begin{aligned} y = {} & -x\left(h\,\mathrm{tang}\,\theta + \frac{l}{2h} + \frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{2h}\right) \\ & + \frac{R\sin\theta\cos\theta}{2h}\cos(A-\alpha)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right); \end{aligned}\right. \tag{4}$$

il faudra même employer cette équation de préférence à l'équation (2). si l'on a $\frac{1}{a} > b$, et alors ce sera l'équation (2) qui servira de vérification. Ayant ainsi les valeurs de $x$, $y$ et $r$, on formera la quantité [1]



$$\begin{aligned} p = {} & \frac{x}{\cos^2\theta}(y + hx\,\mathrm{tang}\,\theta) + Ry\cos(A-\alpha) \\ & + x\left[(R'-1)\cos(A-\alpha) - \frac{\sin(A-\alpha)}{R}\right] + Rax\sin(A-\alpha) + R(R'-1); \end{aligned}$$

la distance périhélie D de la comète sera

$$D = r - \frac{1}{2}p^2,$$

le cosinus de l'anomalie $v$ de la comète sera

$$\cos v = \frac{2D}{r} - 1,$$

d'où l'on conclura, par la Table du mouvement des comètes, le temps employé à parcourir l'angle $v$; et, pour avoir l'instant de son passage par le périhélie, il faudra ajouter ce temps à l'époque, si $p$ est négatif, et le soustraire, si $p$ est positif, parce que, dans le second cas, la comète a déjà passé par son périhélie et que, dans le premier cas, elle s'en approche [2].

Relativement à la comète de 1773, l'époque étant fixée, comme ci-dessus, au 13 novembre, à $17^h$, temps moyen, on a

$$\begin{aligned} A &= 52^\circ 11' 7'', \\ R &= 0{,}98837, \\ R' &= 0{,}98816; \end{aligned}$$

les équations (1), (2) et (3) deviennent

$$\begin{aligned} r^2 &= 1{,}06794x^2 - 0{,}818337x + 0{,}976877, \\ y &= -1{,}29204 + 0{,}384923x + \frac{1{,}24749}{r^3}, \\ 0 &= y^2 + 0{,}130636x^2 + (0{,}260646y + 0{,}654355x)^2 \\ &\quad + 1{,}85179y - 0{,}294309x + 1{,}02367 - \frac{2}{r}; \end{aligned}$$

[1] Pingré a écrit ici :

$$\text{ou} \quad = \frac{xy}{\cos^2\theta} + \frac{x^2h\,\mathrm{tang}\,\theta}{\cos^2\theta} + R^2y, \quad \ldots$$

[2] Laplace avait écrit par erreur *second* au lieu de *premier* et *premier* au lieu de *second*.

je trouve avec peu d'essais

$$x = 1,60115,$$
$$y = -0,34113,$$
$$\log r = 0,1905079;$$

les valeurs satisfaisant, à très peu près, à l'équation (4), j'en conclus qu'elles doivent être adoptées; je forme donc à leur moyen la quantité $p$, et je trouve

$$p = 0,9448,$$

ce qui donne

$$D = 1,10434,$$
$$v = 64°53'19'';$$

le signe de $p$ étant positif, la comète a déjà passé par son périhélie, d'où je conclus que ce passage a eu lieu le 5 septembre à $21^h 14^m$, temps moyen à Paris.

### III.

On choisira trois observations éloignées de la comète; en partant ensuite de la distance périhélie et de l'instant du passage de la comète par ce point déterminés par ce qui précède, on calculera facilement les trois anomalies de la comète et les trois rayons vecteurs correspondant aux instants des trois observations. Soient $v$, $v'$, $v''$ ces anomalies; celles qui sont de côtés différents du périhélie doivent être supposées de signes contraires. Soient encore $r$, $r'$, $r''$ les rayons vecteurs correspondants de la comète; on aura les angles compris entre $r$ et $r'$, et entre $r$ et $r''$, en soustrayant l'une de l'autre les anomalies correspondantes. Soient U le premier de ces angles et U' le second. Nommons encore :

$\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ les trois longitudes géocentriques observées de la comète;
$\theta$, $\theta'$, $\theta''$ ses trois latitudes géocentriques;
C, C', C'' les trois longitudes correspondantes du Soleil;
R, R', R'' ses trois distances à la Terre;
$\epsilon$, $\epsilon'$, $\epsilon''$ les trois longitudes héliocentriques de la comète;
$\varpi$, $\varpi'$, $\varpi''$ ses trois latitudes héliocentriques.



Cela posé :

On imaginera la lettre S au centre du Soleil, la lettre T au centre de la Terre, la lettre C au centre de la comète, et la lettre C' à sa projection sur le plan de l'écliptique : on aura l'angle STC' en prenant la différence des longitudes géocentriques de la comète et du Soleil; en multipliant ensuite le cosinus de cet angle par celui de la latitude géocentrique $\theta$ de la comète, on aura le cosinus de l'angle STC. Dans le triangle rectiligne STC, on connaîtra donc l'angle STC, le côté ST ou R et le côté SC ou $r$; on aura ainsi, par les règles de la Trigonométrie rectiligne, l'angle CST; on aura ensuite la latitude héliocentrique $\varpi$, de la comète, au moyen de l'équation

$$\sin\varpi = \frac{\sin\theta \sin \mathrm{CST}}{\sin \mathrm{CTS}};$$

l'angle TSC' est le côté d'un triangle sphérique rectangle, dont l'hypoténuse est l'angle TSC et dont un des côtés est l'angle $\varpi$, d'où l'on tire aisément TSC' et, par conséquent, la longitude héliocentrique $\epsilon$ de la comète. On aura de la même manière $\varpi'$, $\epsilon'$, $\varpi''$ et $\epsilon''$, et les valeurs de $\epsilon$, $\epsilon'$ feront aisément juger si le mouvement de la comète est direct ou rétrograde.

En considérant les deux arcs de latitude $\varpi$ et $\varpi'$ réunis au pôle de l'écliptique, ils y formeront un angle égal à $\epsilon' - \epsilon$, et, dans le triangle sphérique formé par cet angle et par les côtés $90° - \varpi$ et $90° - \varpi'$, le côté opposé à l'angle $\epsilon' - \epsilon$ sera l'angle au Soleil compris entre les deux rayons vecteurs $r$ et $r'$. On déterminera facilement ce côté par les analogies connues de la Trigonométrie ou par la formule suivante,

$$\cos V = \cos(\epsilon' - \epsilon) \cos\varpi \cos\varpi' + \sin\varpi \sin\varpi',$$

dans laquelle V représente ce côté. En nommant pareillement V' l'angle formé par les deux rayons vecteurs $r$ et $r''$, on aura

$$\cos V' = \cos(\epsilon'' - \epsilon) \cos\varpi \cos\varpi'' + \sin\varpi \sin\varpi'';$$

maintenant, si la distance périhélie et l'instant du passage de la comète par ce point étaient exactement connus, on aurait

$$V = U \quad \text{et} \quad V' = U';$$

mais, comme cela n'arrivera presque jamais, on supposera

$$m = U - V, \qquad n = U' - V'.$$

On fera ensuite une seconde hypothèse dans laquelle, en conservant le même instant du passage par le périhélie, on fera varier la distance périhélie d'une petite quantité, par exemple de la cinquantième partie de sa valeur, et l'on cherchera dans cette hypothèse les valeurs de $U - V$ et de $U' - V'$; soient alors

$$m' = U - V, \qquad n' = U' - V'.$$

Enfin, on formera une troisième hypothèse dans laquelle, en conservant la même distance périhélie que dans la première, on fera varier d'un jour ou deux l'instant du passage par le périhélie; on cherchera dans cette nouvelle hypothèse les valeurs de $U - V$ et de $U' - V'$; soit dans ce cas

$$m'' = U - V, \qquad n'' = U' - V'.$$

Cela posé, si l'on nomme $u$ le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans la distance périhélie pour avoir la véritable, et $t$ le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans l'instant du passage par le périhélie pour avoir ce véritable instant, on aura les deux équations ([1])

$$u(m - m') + t(n - n') = m,$$
$$u(m - m'') + t(n - n'') = n;$$

([1])
$$t = \frac{m - u(m - m')}{m - m''} = \frac{n - u(n - n')}{n - n''},$$
$$m(n - n'') - n(m - m'') = u(m - m')(n - n'') - u(n - n')(m - m''),$$
$$u = \frac{m(n - n'') - n(m - m'')}{(m - m')(n - n'') - (m - m'')(n - n')}.$$

Ces équations sont de la main de Pingré. *Voir* ci-après sous le n° 4 la lettre corrective de Laplace, où les équations sont écrites exactement.



d'où l'on tire $u$ et $t$, par conséquent la distance périhélie et le véritable instant du passage de la comète par ce point.

Si l'on nomme $j$ la position du nœud qui serait ascendant si le mouvement de la comète était droit ([1]) et $\varphi$ l'inclinaison de l'orbite, on aura

$$\operatorname{tang} j = \frac{\operatorname{tang}\varpi' \sin 6 - \operatorname{tang}\varpi \sin 6'}{\operatorname{tang}\varpi' \cos 6 - \operatorname{tang}\varpi \cos 6'},$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\varpi'}{\sin(6' - j)},$$
$$\operatorname{tang} j = \frac{\operatorname{tang}\varpi'' \sin 6 - \operatorname{tang}\varpi \sin 6''}{\operatorname{tang}\varpi'' \cos 6 - \operatorname{tang}\varpi \cos 6''},$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\varpi''}{\sin(6'' - j)}.$$

Pour déterminer les angles $j$ et $\varphi$ d'après ces formules, supposons que l'on se serve des deux dernières; il est visible que la tangente de $j$ peut également appartenir aux deux angles I et $180° + I$, I étant le plus petit des angles positifs auxquels elle puisse appartenir. Pour déterminer lequel de ces deux angles il faut employer, on observera que $\varphi$ et $\operatorname{tang}\varphi$ doivent être positifs et qu'ainsi $\sin(6'' - j)$ doit être de même signe que $\operatorname{tang}\varpi''$. Cette condition déterminera l'angle $j$ et cet angle sera la position du nœud ascendant, si le mouvement de la comète est direct; mais, si ce mouvement est rétrograde, il faut ajouter $180°$ à la position précédente.

L'hypoténuse du triangle sphérique rectangle dont $6'' - j$ et $\varpi''$ sont les côtés est la distance de la comète au nœud dans la troisième observation, et la différence de cette hypoténuse à $U''$ est l'intervalle entre le nœud et le périhélie; on aura donc facilement la position du périhélie.

Appliquons cette méthode à la comète de 1773; pour cela nous choisirons les trois positions suivantes de la comète : savoir celle du 13 octobre, à $17^h$, temps moyen à Paris; celle du 30 décembre, à $18^h$, temps moyen, et celle du $1^{er}$ avril 1774, à midi, temps moyen.

([1]) Droit pour direct.

Les observations donnent pour ces instants :

$$\alpha = 153^\circ 40' 22'', \qquad \theta = - \ 3^\circ 21' 19'',$$
$$\alpha' = 176^\circ \ 6' 23'', \qquad \theta' = \ 43^\circ 45' 46'',$$
$$\alpha'' = 237^\circ 25' 32'', \qquad \theta'' = \ 61^\circ 45' 20'';$$

on a d'ailleurs

$$C = 6^s 21^\circ \ 7' 41'', \qquad \log R = 9{,}9983500,$$
$$C' = 9^s \ 9^\circ 59' \ 3'', \qquad \log R' = 9{,}9925630,$$
$$C'' = 0^s 11^\circ 48' 36'', \qquad \log R'' = 0{,}0002301;$$

on formera une première hypothèse dans laquelle la distance périhélie est, comme on l'a trouvée ci-dessus, égale à 1,10434, et l'instant du passage par ce point est le 3 septembre, à $21^h 14^m$, temps moyen à Paris ; on trouvera dans cette hypothèse :

$$u = 41^\circ 27' 0'', \qquad u' = 86^\circ 22' 39'', \qquad u'' = 106^\circ 57' 8'',$$
$$\log r = 0{,}1012104, \qquad \log r' = 0{,}3175270, \qquad \log r'' = 0{,}4938384;$$

partant

$$U + 44^\circ 55' 39'', \qquad U' = 65^\circ 30' 8'',$$
$$\varpi = - \ 4^\circ 31' \ 2'', \qquad \varpi' = \ 33^\circ 43' 47'', \qquad \varpi'' = \ 49^\circ 28' 15'',$$
$$\beta = \ 117^\circ 59' 51'', \qquad \beta' = 142^\circ 34' 39'', \qquad \beta'' = 161^\circ \ 5' 44'',$$

ce qui donne

$$V = 44^\circ 44' 2'', \qquad V' = 65^\circ 35' 47'';$$

partant

$$m = 11' 37'', \qquad n = - 5' 39'',$$

et, comme $\beta'$ est plus grand que $\beta$, le mouvement de la comète est direct.

On formera ensuite une seconde hypothèse dans laquelle on supposera la distance périhélie égale à 1,11634, et l'instant du passage par le périhélie, le même que ci-dessus, et l'on trouvera dans cette hypothèse

$$m' = 14' 6'', \qquad n' = 6' 11''.$$

Enfin, on formera une troisième hypothèse, dans laquelle, en conser-



vant la même distance périhélie que dans la première, on fera varier d'un jour l'instant du passage par le périhélie, en le fixant au 4 septembre, à $21^h 14^m$ ; on trouvera dans cette hypothèse

$$m'' = - 25' 39'', \qquad n'' = - 44' 18''.$$

Au moyen de ces valeurs de $m$, $m'$, ..., réduites en secondes, on formera les équations

$$2227 t - 149 u = \ 697,$$
$$2319 t - 710 u = - 339,$$

d'où l'on tire

$$t = 0{,}4414, \qquad u + 1{,}9190,$$

et, comme la variation supposée ci-dessus dans l'instant du passage par le périhélie est d'un jour, on aura le véritable instant en retranchant du 5 septembre, $21^h 14^m$, un jour multiplié par 0,4414, c'est-à-dire $10^h 35^m 37^s$ ; en sorte que le passage par le périhélie a eu lieu le 5 septembre, à $10^h 38^m 23^s$, temps moyen à Paris. Pareillement, la variation supposée dans la distance périhélie étant 0,012, en la multipliant par 1,919, on aura la véritable variation qui, ajoutée à la distance périhélie 1,10434, donnera 1,12737 pour la véritable distance périhélie.

Au moyen de ces données, on trouvera

$$\varpi = - \ 4^\circ 30' 39'', \qquad \varpi'' = \ 49^\circ 27' 47'',$$
$$\beta = \ 118^\circ 39' 44'', \qquad \beta'' = 161^\circ \ 6' 19'',$$
$$u'' = 106^\circ 2' 46'';$$

d'où il est facile de conclure le lieu du nœud ascendant dans $4^s 1^\circ 8' 44''$ et dans l'inclinaison de l'orbite de $61^\circ 13' 20''$. On aura la distance de la comète au nœud dans la dernière observation, en prenant l'hypoténuse du triangle rectangle dont $\varpi''$ et $\beta'' - j$ sont les côtés, et dans le cas présent $\beta'' - j = 39^\circ 57' 35''$ ; d'où l'on tire la distance de la comète au nœud, égale à $60^\circ 7' 15''$. Sa distance au périhélie étant de $106^\circ 2' 46''$, le périhélie est moins avancé sur l'orbite que le nœud de $45^\circ 55' 31''$ ; en retranchant donc cette quantité du lieu du nœud, on aura, pour le lieu du périhélie, $2^s 15^\circ 13' 13''$; on aura donc pour les véritables éléments de l'orbite de la comète :

| | |
|---|---|
| Lieu du nœud | $4^s.\ 1^\circ.\ 8'.44''$ |
| Inclinaison de l'orbite | 61.13.20 |
| Lieu du périhélie | 2.15.13.13 |

instant du passage par le périhélie le 5 septembre, à $10^h 38^m 23^s$, temps moyen à Paris :

| | |
|---|---|
| Distance périhélie | 1,12737 |
| Logarithme de cette distance | 0,0520665 |

Le sens du mouvement est direct.

## 2. LAPLACE A PINGRÉ.

Ce jeudi.

MONSIEUR ET CHER CONFRÈRE,

Puisque vous voulez bien appliquer à un exemple ma méthode pour déterminer les orbites des comètes, il est très naturel que je cherche à vous en faciliter l'usage. Dans l'exemple que vous avez choisi, vous employez cinq observations équidistantes et vous fixez l'époque à la troisième observation; ce cas étant beaucoup plus simple que le cas général, on peut parvenir plus aisément aux deux formules qui expriment l'ascension droite et la déclinaison de la comète après le petit nombre $z$ de jours; je vous envoie pour cela les deux formules suivantes, dont je vous prie de faire usage, de préférence aux formules générales qui se trouvent dans la méthode que je vous ai donnée.

Soient $\text{ϐ}, \text{ϐ}', \text{ϐ}'', \text{ϐ}''', \text{ϐ}^{\text{iv}}$ les cinq ascensions droites successives observées de la comète; $i$ le nombre des jours qui séparent chaque observation de sa voisine et qui, si je me le rappelle bien, dans votre exemple est 13; la formule qui exprimera l'ascension droite de la comète, après



le petit nombre $z$ de jours comptés depuis l'époque, sera

$$\text{ϐ}'' + z\left[\frac{\text{ϐ}''' - \text{ϐ}'}{2i} + \frac{(\text{ϐ} - 2\text{ϐ}' + 2\text{ϐ}''' - \text{ϐ}^{\text{iv}})}{12i}\right] + z^2\left[\frac{\text{ϐ}''' - 2\text{ϐ}'' + \text{ϐ}'}{2i^2} - \frac{(\text{ϐ}^{\text{iv}} - 4\text{ϐ}''' + 6\text{ϐ}'' - 4\text{ϐ}' + \text{ϐ})}{24i^2}\right];$$

pareillement, si l'on nomme $r, r', r'', r''', r^{\text{iv}}$ les cinq déclinaisons successives observées de la comète, son ascension droite, après le petit nombre $z$ de jours comptés depuis l'époque, sera

$$r'' + z\left[\frac{r''' - r'}{2i} + \frac{(r - 2r' + 2r''' - r^{\text{iv}})}{12i}\right] + z^2\left[\frac{r''' - 2r'' + r'}{2i^2} - \frac{(r^{\text{iv}} - 4r''' + 6r'' - 4r' + r)}{24i^2}\right];$$

je n'ai point donné ces formules dans l'extrait que j'ai eu l'honneur de vous communiquer, pour ne pas le rendre trop long, mais elles se trouvent dans le Mémoire même. Quand vous chercherez à corriger l'orbite, il faudra employer la première, la moyenne et la dernière de toutes les observations, mais je ne doute point que du premier abord vous ne trouviez à très peu près la véritable distance périhélie et le vrai moment du passage de la comète par ce point. J'ai retourné de toutes les manières possibles l'analyse de ce problème pour parvenir à la solution la plus simple et la plus exacte, et ce n'est qu'après un grand nombre de combinaisons que je me suis enfin arrêté à celle que je vous ai donnée. Je ne puis trop vous remercier de l'honneur que vous lui faites en voulant bien l'insérer dans votre bel Ouvrage.

J'ai l'honneur d'être, avec toute l'estime et la considération possibles,

Monsieur et cher Confrère,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

LAPLACE [1].

[1] Adresse : A Monsieur, Monsieur Pingré, chanoine régulier de la Congrégation de France, à Sainte-Geneviève.

## 3. LAPLACE A PINGRÉ.

Ce lundi, 18 novembre 1782.

M. de Laplace a l'honneur de faire mille compliments à son Confrère, Monsieur Pingré; l'équation (4) avait été mal écrite. La voici telle qu'elle doit être (¹) :

$$y = -z\left\{h \operatorname{tang}\theta + \frac{l}{2h} + \frac{a^2 \sin\theta\cos\theta}{2h}\right\} + \frac{R\sin\theta\cos\theta}{2h}\cos(A-\alpha)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right).$$

M. de Laplace ne doute point qu'en en faisant usage, Monsieur Pingré ne trouve à peu près la même valeur de $y$ que par l'équation (2).

Comme elle ne diffère que fort peu de l'équation que M. Pingré a déjà calculée, il lui sera facile de la vérifier et M. de Laplace lui sera obligé de sa complaisance, s'il veut bien lui en apporter le calcul mercredi prochain à l'Académie (²).

## 4. LAPLACE A PINGRÉ.

M. de Laplace a l'honneur de faire mille compliments à son Confrère, Monsieur Pingré. En examinant avec soin sa solution du problème des Comètes, pour la faire imprimer, il s'est aperçu que les deux équations qui déterminent $t$ et $u$ ont été mal écrites. Les véritables sont :

$$u(m - m') + t(m - m'') = m,$$
$$u(n - n') + t(n - n'') = n.$$

(¹) Cette équation (4) a été écrite exactement dans le Mémoire de Ch. Henry.
(²) Adresse : A Monsieur, Monsieur Pingré, chanoine régulier de Sainte-Geneviève et de l'Académie des Sciences, à Sainte-Geneviève.



M. de Laplace ne peut trop remercier Monsieur Pingré de la peine qu'il veut bien prendre d'appliquer sa solution et de l'honneur qu'il lui fait en l'insérant dans son bel Ouvrage (¹).

(¹) Adresse : A Monsieur, Monsieur Pingré, chanoine régulier de la Congrégation de France et de l'Académie des Sciences, à Sainte-Geneviève.

SUR

# L'EXÉCUTION DU CADASTRE.

*Archives parlementaires de 1787 à 1860, IIe série, t. XIX (1).*

Messieurs, les réflexions suivantes, étant relatives à l'exécution du cadastre, regardent spécialement le gouvernement; mais il m'a paru qu'une opération, dont la dépense doit s'élever à 100 millions, méritait de fixer, pendant quelques moments, l'attention de la Chambre; et j'ai pensé que les paroles proférées de cette tribune seraient mieux entendues.

Je n'examinerai point s'il était possible d'obtenir avec une précision suffisante, et plus promptement que par le cadastre, une égale répartition de l'impôt territorial. Le cadastre est bon en lui-même; il est trop avancé maintenant pour l'abandonner. Je ne veux ici qu'indiquer les mesures propres à l'améliorer.

Sa partie topographique est celle qui exige le plus de temps et de dépense. Lorsqu'on veut lever avec exactitude le plan d'un royaume, il n'y a qu'une méthode qui malheureusement n'a pas été suivie dans l'opération du cadastre. Elle consiste à tracer deux grandes lignes perpendiculaires entre elles et dirigées, l'une, du nord au sud, l'autre, de l'est à l'ouest. On couvre tout l'espace à mesurer d'un réseau de grands triangles qu'on rattache à ces lignes. En partageant ensuite chacun de ces triangles en triangles secondaires, on descend jusqu'à

(1) Chambre des Pairs, séance du 21 mars 1817. Discussion sur la loi de finances; budget de 1817.



l'arpentage des communes. Ainsi les mesures partielles sont restreintes dans leurs écarts par les triangles qui les circonscrivent; les négligences des arpenteurs sont reconnues et rectifiées. De là résulte un système d'opérations bon dans ses détails et parfait dans son ensemble.

La France a pour l'exécution de ce système tous les moyens qu'on peut désirer : les savants les plus capables de le diriger; un corps d'ingénieurs-géographes très instruits, qui ont fait ce qu'on a de mieux en ce genre, et auxquels on peut adjoindre des officiers d'artillerie et du génie. Le cadastre leur offre l'occasion la plus favorable de s'exercer aux opérations qu'ils doivent exécuter pendant la guerre. C'est ainsi que la Prusse continue au delà du Rhin les travaux topographiques de nos ingénieurs; elle ne peut pas suivre de meilleurs modèles.

Déjà l'une des lignes fondamentales dont je viens de parler traverse la France depuis Dunkerque jusqu'à Perpignan. Une perpendiculaire dirigée de Strasbourg à Brest est commencée. La première de ces lignes, tracée avec une précision extrême, a été prolongée au delà des Pyrénées, jusqu'à l'île de Formentera, dans la Méditerranée. Grâce aux soins éclairés du Ministre de l'Intérieur pour le progrès des sciences, cette ligne va s'étendre au nord jusqu'à Yarmouth. Le colonel Mudge qui, suivant la méthode que j'ai citée, lève avec autant d'habileté que de zèle les plans de l'Angleterre et de l'Écosse, doit se réunir aux savants français et concourir avec eux au prolongement de notre méridienne. L'étendue actuelle de ce grand arc comprend un septième environ de la distance du pôle à l'équateur. On a observé les latitudes de ses points extrêmes et de plusieurs points intermédiaires, et l'on a mesuré les longueurs correspondantes du pendule à secondes : ce qui répand une vive lumière sur la figure de la Terre et sur les inégalités de ses degrés et de la pesanteur. Cette opération, la plus belle de ce genre qu'on ait encore entreprise, est la base du système métrique et décimal des poids et mesures, dont l'adoption générale serait un grand bienfait des gouvernements. Complément heureux de notre système admirable de numération et, comme lui, convenant également à tous les peuples, il vient d'être admis dans le royaume des Pays-Bas. En France, peu secondé, quelquefois contrarié par les autorités, il lutte cependant avec succès contre les obstacles que la puissance des habitudes oppose à l'introduction des choses même les plus utiles. Espérons que bientôt il surmontera ces obstacles. Alors il sera maintenu par cette puissance qui, jointe à celle de la raison, assure aux institutions humaines une éternelle durée.

Je désire que les ministres veuillent bien prendre en considération le plan que je propose. Il est possible d'y adapter la partie du cadastre déjà faite et de l'exécuter sans retarder l'opération, sans en augmenter la dépense. Peut-être même, le grand nombre d'ingénieurs géographes que l'état de paix où nous sommes permet d'employer à ce travail, auquel on les voit avec peine étrangers, rendrait-il son exécution plus prompte et moins coûteuse. Mais une commission, choisie par le gouvernement pour l'éclairer sur cet objet, prendrait les renseignements nécessaires à sa détermination. Elle examinerait jusqu'à quel point sont fondés les reproches de négligence et d'incapacité faits à plusieurs agents du cadastre; elle indiquerait les moyens de l'accélérer et de le perfectionner.

Après avoir donné, dans la formation de la grande Carte de France, un exemple que les autres nations s'empressent de suivre, ne leur soyons pas inférieurs, ne rétrogradons point quand elles avancent. Conservons parmi nous la gloire des sciences et beaux-arts. Cette gloire douce et paisible a le précieux avantage de s'accroître sans diminuer la gloire étrangère et d'intéresser tous les peuples, en leur procurant de nouvelles jouissances.

SUR LA

# SUPPRESSION DE LA LOTERIE.

*Archives parlementaires de 1787 à 1860*, IIe série, t. XXV (1).

Messieurs, l'état des finances permet de diminuer les impôts. Le projet de loi qui nous est présenté applique cette diminution aux contributions directes et à la retenue sur les traitements. Cette disposition est-elle la plus avantageuse? J'ai l'honneur de soumettre à la Chambre les réflexions suivantes sur cet objet. Je n'examinerai point si la contribution directe, élément de notre système représentatif, étant mieux répartie, serait dans une trop forte proportion avec les autres impôts. J'observerai seulement qu'il est juste et conforme à ce système de diminuer les grandes différences qui existent dans les rapports des contributions directes aux revenus fonciers, et que le mode adopté pour cela dans le projet de loi serait, avec quelques changements nécessaires, le moins sujet aux réclamations. Mais je pense qu'on ferait une chose bien plus utile en supprimant l'impôt de la loterie.

Qu'on se rappelle ce qui a été dit mille fois contre l'immoralité de ce jeu et sur les maux qu'il occasionne. Il est de tous les jeux celui où, le banquier faisant les plus grands bénéfices, les joueurs ont, pour la plupart, le moins de fortune; en sorte que son désavantage, soit physique, soit moral, est très supérieur au désavantage que présentent

(1) Chambre des Pairs, séance du 16 juillet 1819. Discussion du budget des recettes de 1819.

les autres jeux publics qu'on ne tolère qu'avec peine et pour éviter un plus grand mal. Dans ceux-ci, le banquier ne prélève qu'un quarantième de la mise; au jeu de loterie, le gouvernement en prélève le tiers. 18$^{fr}$ placés sur un extrait sont par là réduits à 15$^{fr}$ : ils sont réduits aux deux tiers sur un ambe, à la moitié sur un terne, et fort au-dessous sur un quaterne : voilà le désavantage physique de ce jeu. Mais leur perte, insensible pour le riche, est très sensible pour le plus grand nombre de ceux qui mettent à la loterie : c'est là son désavantage moral. Le pauvre, excité par le désir d'un meilleur sort et séduit par des espérances dont il est hors d'état d'apprécier l'invraisemblance, expose à ce jeu son nécessaire. Il s'attache aux combinaisons qui lui promettent un grand bénéfice, et l'on vient de voir combien elles sont défavorables. Ainsi tout concourt à rendre ce jeu désavantageux, tout nous fait une loi de le proscrire. Nous applaudirions l'orateur qui, pour détourner de la loterie ses auditeurs, retracerait avec force les vols, la misère, les banqueroutes et les suicides qu'elle enfante. Hâtons-nous donc d'abolir un jeu aussi contraire à la morale, et tellement désavantageux aux joueurs que la police ne le souffrirait pas au nombre des jeux publics qu'elle se croit forcée de tolérer.

On dit que les billets des loteries étrangères s'introduiraient parmi nous. Mais la surveillance du gouvernement peut les arrêter, ou du moins les rendre si rares qu'ils ne parviendraient point au peuple dans l'intérieur du royaume; et l'on peut affirmer qu'avec un peu de vigilance les mises à ces loteries ne seraient pas un cinquantième des mises actuelles à la loterie de France. On dit encore que cet impôt est volontaire. Sans doute il est volontaire pour chaque individu; mais, pour l'ensemble des individus, il est nécessaire; comme les mariages, les naissances et tous les effets variables sont nécessaires, et les mêmes à peu près, chaque année, lorsqu'ils sont en grand nombre; en sorte que le revenu de la loterie est au moins aussi constant que les produits de l'agriculture.

Cet impôt est celui qui exige le plus de frais de perception. Il pèse beaucoup plus sur le peuple qu'il ne rapporte au gouvernement; car



ce qu'on rend sur les mises ne retourne pas au centième des joueurs et, par la publicité qu'on s'empresse de donner aux gains qui en résultent, il devient une nouvelle cause d'excitation à ce jeu funeste. Ainsi, quoique la loterie ne fasse entrer annuellement que 10 ou 12 millions dans le Trésor public, l'impôt qu'elle fait supporter à une partie considérable du peuple, et à la plus pauvre, s'élève à 40 ou 50 millions.

Que de faux raisonnements, que d'illusions et de préjugés la loterie fait éclore! Elle corrompt à la fois l'esprit et les mœurs du peuple. C'est cependant vers son éducation morale que le législateur doit porter principalement sa vue. Il doit sacrifier à ce grand objet les petites considérations fiscales. Mais je soutiens qu'il ne résulterait de ce sacrifice aucune diminution dans nos finances, car ici, comme en toutes choses, ce qui est bon en soi est en même temps profitable. Le peuple, devenu plus industrieux et plus à son aise, payerait plus facilement ses impôts, consommerait davantage; et le fisc recouvrerait, par les contributions indirectes, au delà de ce que la suppression de la loterie lui ferait perdre.

Grâces soient rendues au noble pair [1] fondateur de la Caisse d'épargne! Cet établissement, si favorable aux mœurs et à l'industrie, diminuera les bénéfices de la loterie et ce sera l'un de ses avantages. Que le gouvernement encourage les établissements semblables dans lesquels, par un léger sacrifice de son revenu, on assure son existence et celle de sa famille pour un temps où l'on ne pourra plus suffire à ses besoins. Autant le jeu de la loterie est immoral, autant ces établissements sont avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchants de la nature. Mais ils doivent être respectés dans les vicissitudes de la fortune publique; car, les espérances qu'ils présentent portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée. C'est un avantage que la forme heureuse de notre gouvernement leur assure. Qu'on encourage encore les

(1) M. le duc de La Rochefoucauld.

associations dont les membres se garantissent mutuellement leurs propriétés contre les accidents, en supportant proportionnellement les charges de cette garantie; à l'imitation de la société, qui peut être en effet envisagée comme une grande association d'assurances mutuelles. Mais que les établissements fondés sur les illusions de l'ignorance et de la cupidité soient sévèrement proscrits; nul bénéfice ne peut compenser les maux qu'ils produisent. On doit donc extrêmement regretter que la suppression de la loterie n'ait pas été placée à la tête du tableau de la diminution des impôts, comme un hommage rendu à la morale.

SUR LA

# MANIÈRE DONT SE FORME LA DÉCISION DU JURY.

*Archives parlementaires de 1787 à 1860*, IIe série, t. XXX (1).

Messieurs, la manière dont se forme la décision du jury est, sans aucun doute, l'élément le plus important de sa constitution. Le mode actuel offre un grand inconvénient qui, depuis son origine, a frappé tous les bons esprits. Quand sur douze jurés cinq déclarent le fait non constant, la loi élève avec raison un doute qu'elle cherche à dissiper par l'intervention des juges de la Cour d'assises; elle ne voit point de motifs suffisants pour condamner, dans la simple majorité de sept voix sur douze; elle cherche dans la décision des juges une confirmation de ces motifs. Cela est juste et conforme à la doctrine des probabilités, qui n'est au fond que le bon sens réduit au calcul dont il emprunte la puissance, pour arriver à des conséquences que de lui-même il n'eût pu tirer. Mais quand la décision des juges à la majorité de trois voix sur cinq, loin de confirmer les motifs de la condamnation, les infirme, n'est-il pas évident que, puisqu'ils étaient déjà jugés insuffisants, ils le deviennent encore plus par cette décision? et n'est-il pas contraire au bon sens et à l'humanité de condamner alors l'accusé?

Il y a plus : on voit quelquefois les jurés, incertains sur la culpabilité de l'accusé et voulant en remettre le jugement à la Cour d'assises, former arbitrairement entre eux une majorité de sept voix contre cinq :

(1) Chambre des Pairs, séance du 30 mars 1821. Discussion sur le projet de loi tendant à modifier l'article 351 du Code d'Instruction criminelle.

dans ce cas, la décision du jury est fictive et doit être regardée comme nulle. Les cinq juges de la Cour d'assises délibérant alors, et si trois étant favorables à l'accusé, deux lui sont contraires, il est condamné. Je ne sais si les annales judiciaires de tous les peuples offrent un autre exemple d'une condamnation prononcée à la minorité des voix. Il importe donc de faire promptement disparaître, d'une loi qui intéresse essentiellement la vie des hommes, des inconvénients aussi graves.

Mais, dit-on, le projet de loi qui vous est présenté pour cet objet dénature l'institution du jury en faisant prévaloir sur sa majorité celle de la Cour d'assises. Je réponds que cela n'arrive que dans l'intérêt de l'accusé, lorsqu'on cherche dans la décision des juges de nouveaux motifs à l'appui de la décision des jurés, que la loi juge insuffisante pour la condamnation; c'est cette insuffisance qui, dans le projet de loi, annule la décision du jury, non confirmée, et même infirmée par la Cour d'assises.

On dit encore que la division arbitraire de sept jurés contre cinq deviendra plus fréquente, lorsque les jurés ne seront point retenus par la crainte de voir l'accusé condamné à la minorité des juges de la Cour d'assises. Nous ignorons le rapport du nombre des cas où la simple majorité des jurés est de pure convention au nombre total des cas où la majorité simple existe. Nous manquons, à cet égard, d'observations sans lesquelles on exagère ou l'on diminue les nombres dans l'intérêt de la cause qu'on veut défendre. Nous savons encore moins quelle sera sur ce rapport l'influence du projet de loi. Mais ce que nous savons certainement, c'est qu'il est urgent de faire cesser l'un des plus grands abus possibles, celui d'un accusé condamné à la minorité des voix. Le législateur doit compter sur le sentiment du devoir dans les jurés, quand ils ont à prononcer sur la vie de leurs semblables. Plusieurs jurés m'ont dit que, dans des cas pareils, ils étaient facilement parvenus à ramener le jury à l'examen approfondi de la culpabilité de l'accusé. Dans le cas même où la loi ne ferait point intervenir la Cour d'assises, ne peut-on pas craindre que les jurés ne discutent point avec tout le soin nécessaire les questions soumises à leur décision? Pour les y contraindre, on exige chez plusieurs peuples que les jurés délibèrent jusqu'à ce qu'ils soient d'un avis unanime; mais alors de nouveaux inconvénients se présentent, on donne ainsi à l'obstination des jurés, à leur tempérament, à leurs habitudes et à mille autres causes étrangères au jugement, une influence quelquefois préjudiciable, au point de faire prévaloir l'opinion de la minorité des jurés.



Disons donc que tout, dans ce monde, a ses inconvénients et ses avantages. C'est dans leur juste appréciation que consiste la difficulté de bien choisir et de faire d'utiles innovations. Ne changeons nos lois qu'avec une circonspection extrême; mais adoptons avec empressement les améliorations évidemment indiquées par le bon sens et par l'humanité.

On objecte enfin que l'adoption du projet de loi consacrerait l'intervention des juges, qui paraît contraire à l'institution du jury. Mais, en améliorant une loi existante, le législateur ne s'est jamais interdit la faculté d'en revoir l'ensemble et d'y faire les changements que l'expérience et un examen approfondi auront fait juger avantageux. C'est surtout dans l'importante loi du jury que cet examen demande de longues et mûres réflexions. Il ne faut donc voir dans le projet de loi qui vous est présenté qu'une correction urgente d'un abus grave qui, chaque jour, peut compromettre l'innocence. C'est sous ce point de vue que j'ai proposé ce même projet il y a plus de 4 ans et que je m'empresse de l'adopter aujourd'hui.

SUR LA

# CONVERSION DE LA RENTE.

*Archives parlementaires de 1787 à 1860, IIe série, t. XLI* (1).

Messieurs, en soumettant au calcul les effets de l'amortissement sur le rachat des rentes, par un procédé fort simple dans lequel on fait entrer, jour par jour, l'intérêt composé, je parviens aux résultats suivants, que je crois devoir communiquer à la Chambre :

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

*Dette, 140 millions de rentes, l'intérêt annuel étant à 5 pour 100.*

| Durée du rachat de la dette. | Dotation annuelle de la Caisse d'amortissement. |
|---|---|
| 21 ans | 75 358 000 fr |
| 30 » | 40 220 000 |
| 40 » | 21 913 000 |

(1) Chambre des Pairs, séance du 1er juin 1824. Discussion sur le projet de conversion de la rente. Le projet était ainsi conçu :

Le Ministre des Finances est autorisé à substituer des rentes 3 pour 100 à celles déjà créées par l'État à 5 pour 100, soit qu'il opère par échange des 5 contre des 3 pour 100, soit qu'il rembourse les 5 au moyen de la négociation des 3 pour 100.

L'opération ne pourra être faite qu'autant :

1° Qu'elle aura conservé aux porteurs de 5 pour 100 la faculté d'opter entre le remboursement du capital nominal et la conversion en 3 pour 100 au taux de 75fr;

2° Qu'elle présentera pour résultats définitifs une diminution de $\frac{1}{5}$ sur les intérêts de la rente convertie et remboursée....

..........................................................................



SECONDE HYPOTHÈSE.

*Dette, 112 millions de rentes, l'intérêt étant à 3 $\frac{1}{2}$ pour 100.*

| Durée du rachat de la dette. | Dotation annuelle de la Caisse d'amortissement. |
|---|---|
| 21 ans | 103 178 000 fr |
| 30 » | 60 257 000 |
| 40 » | 36 659 000 |

Pour avoir l'avantage de la seconde hypothèse sur la première, on doit retrancher 28 millions de la dotation de la Caisse dans cette seconde hypothèse :

*Bénéfice en rentes de la seconde hypothèse relativement à la première.*

| | |
|---|---|
| 21 ans | 180 000 fr |
| 30 » | 7 963 000 |
| 40 » | 13 254 000 |

On voit par ces Tableaux que le rachat en 21 ans présente, dans la seconde hypothèse, peu de bénéfice; mais le bénéfice augmente à mesure que la durée du rachat devient plus grande. Il n'est donc pas exact de dire que ce bénéfice ne change point en ralentissant l'action de l'amortissement.

Généralement, l'effet de l'augmentation du capital est d'autant moins sensible que le remboursement de la rente est plus éloigné. La diminution de la dotation de la Caisse d'amortissement serait donc utile au projet de loi qui, d'après sa discussion, me paraît offrir beaucoup d'avantages.

SUR L'EMPLOI

DE

# L'EXPRESSION « CORDE MÉTRIQUE ».

*Archives parlementaires de 1787 à 1860*, II^e^ série, t. XLII (¹).

M. le marquis de Laplace déclare que, dans son opinion, le maintien du mot *corde* présente d'autant moins d'inconvénient que, par un usage autorisé à ce qu'il croit par un arrêté administratif, les mots de *corde métrique* sont assez généralement employés pour désigner le demi-décastère. Il pense donc qu'au moyen d'une explication donnée dans les instructions administratives, ainsi qu'on l'a demandé tout à l'heure, la rédaction actuelle du projet peut être maintenue sans aucune modification.

(¹) Chambre des Pairs, séance du 20 juillet 1824.
Discussion du projet de loi relatif aux droits à payer par le commerce pour chomage de moulins et dépôts de bois le long des rivières navigables et flottables.
Un pair avait proposé un amendement demandant la substitution du $\frac{1}{2}$ décastère à la corde dans les diverses dispositions du projet où cette dernière mesure était énoncée.

SUR LA

# CONVERSION DE LA RENTE.

*Archives parlementaires de 1787 à 1860*, II^e^ série, t. XLV (¹).

La réduction d'une rente de $5^{fr}$ à $4^{fr}$ de rente en 3 pour 100 accroit d'un tiers le capital de cette rente et le porte à $133^{fr}\frac{1}{3}$. Quelques personnes paraissent craindre que cet accroissement du capital de la dette publique ne l'emporte sur l'avantage de la diminution de la rente. L'objet de cette Note est de dissiper ces craintes et de répondre ainsi à l'objection la plus forte qu'on ait faite au projet de loi.

J'observerai d'abord que l'accroissement du capital ne doit être payé qu'au moment probablement éloigné où l'intérêt ne sera que de 3 pour 100, et que, réduit en capital actuel suivant les règles de l'intérêt composé, il est considérablement diminué. L'expérience vient à l'appui de cette observation. Il résulte du Tableau qui nous a été dis-

(¹) Chambre des Pairs, séance du 26 avril 1825. Discussion sur le projet de conversion de la rente; le projet présenté l'année précédente avait été repoussé. Le rapporteur expliquait en ces termes la différence entre les deux projets :

« L'objet du nouveau projet est, comme celui du projet de 1824, d'amener la conversion des rentes 5 pour 100 en rentes 3 pour 100 au taux de $75^{fr}$. Mais les moyens employés pour atteindre ce but sont différents.

» En 1824, c'est par l'offre du remboursement qu'on voulut l'obtenir; en 1825, c'est par les combinaisons de l'emploi du fonds de l'amortissement.

» En 1824, le propriétaire de rentes 5 pour 100 était forcé d'opter entre la conversion en 3 pour 100 ou son remboursement. En 1825, il peut demeurer provisoirement dans ses rentes 5 pour 100 ou même encore opter pour une reconstitution à $4\frac{1}{2}$ pour 100 avec garantie contre le remboursement pendant 10 ans en se soumettant aux effets des nouvelles combinaisons de l'amortissement. »

tribué du cours des effets publics en Angleterre, depuis le commencement de 1802, que dans les 20 années de ce Tableau, pendant lesquelles les rentes à 3 et à 5 pour 100 ont existé simultanément, le cours moyen des rentes à 3 pour 100 a été $65\frac{1}{2}$, ce qui porte à $109^{fr}\frac{1}{6}$ la vente de $5^{fr}$ de rente en 3 pour 100. La vente moyenne de $5^{fr}$ de rente a été dans le même intervalle de $97^{fr}\frac{1}{3}$. Elle a donc été plus petite que la précédente de $11^{fr}\frac{5}{6}$ ou d'environ $\frac{1}{8}$ de $97^{fr}\frac{1}{3}$. Le capital dû par l'État à la rente de $5^{fr}$ en 3 pour 100 est $166^{fr}\frac{2}{3}$, et celui de la rente de $5^{fr}$ est $100^{fr}$, plus petit que le précédent de $\frac{2}{3}$ de $100^{fr}$. Les ventes de ces deux rentes ont donc été loin d'être proportionnelles à leurs capitaux.

On peut se convaincre, par le raisonnement suivant, qu'il y a toujours avantage, pour l'État, dans la réduction des rentes, malgré l'accroissement du capital, s'il fait intervenir la puissance de l'intérêt composé.

Imaginons qu'à chaque réduction d'une rente de $5^{fr}$ à $4^{fr}$, l'État affecte une fraction de $1^{fr}$ de rente à une Caisse qu'il charge d'acquérir sans cesse de nouvelles rentes et d'en accroître son fonds. Concevons encore que la fraction de $1^{fr}$ de rente soit telle qu'au moment où l'intérêt sera réduit à 3 pour 100 elle devienne $1^{fr}$ par cet accroissement. La Caisse, vendant alors ce franc de rente, retirera de cette vente $\frac{1}{3}$ de $100^{fr}$ ou $33^{fr}\frac{1}{3}$, au moyen desquels l'État payera au porteur des $4^{fr}$ de rente l'accroissement de son capital. Par ce moyen, l'État aura réduit la rente de $5^{fr}$ en $4^{fr}$ de rente pour 100, mais il payera annuellement à sa Caisse une fraction de franc, qu'il doit continuer de payer au possesseur du franc de rente vendu par cette Caisse. La diminution de la rente due par l'État ne sera donc que $1^{fr}$; mais cette fraction de $1^{fr}$ de rente, fraction nécessairement plus petite que $1^{fr}$, est d'autant moindre que le moment où l'intérêt devient 3 pour 100 est plus éloigné.

Si l'intérêt supposé d'abord à 4 pour 100 diminue proportionnellement au temps et parvient à 3 en 20 années, la fraction de franc dont je viens de parler est la moitié de $1^{fr}$; car cette fraction, accrue par l'acquisition des rentes, deviendra $1^{fr}$ à ce terme. L'avantage de l'État



est donc alors la diminution de $0^{fr},50$ de rente pour chaque rente de $5^{fr}$ réduite. Si l'intérêt ne parvient de 4 à 3 pour 100 qu'en 32 ans, il suffira de donner à la Caisse $\frac{1}{3}$ de franc de rente pour chaque rente de $5^{fr}$ réduite, et alors l'avantage de l'État sera la diminution de $\frac{2}{3}$ de franc de rente; la limite de cette diminution est $1^{fr}$ de rente.

La Caisse d'amortissement remplacera celle que je viens d'imaginer, si l'on augmente sa dotation annuelle de $\frac{1}{3}$ de franc, destiné à payer l'accroissement du capital de la rente de $5^{fr}$, réduite à $4^{fr}$.

L'article 5 du projet de loi dispose autrement du franc de rente acquis par la réduction d'une rente de $5^{fr}$ à $4^{fr}$. Il l'emploie à diminuer les contributions foncière, personnelle, mobilière et des portes et fenêtres. Si l'on ne veut pas augmenter la dotation annuelle de la Caisse d'amortissement, on peut supposer qu'à chaque réduction de $5^{fr}$ de rente à $4^{fr}$, $\frac{1}{3}$ de franc de cette dotation est destiné à payer l'accroissement du capital au moment où la rente sera remboursée. Si le Gouvernement ne trouve pas alors un meilleur moyen de payer cet accroissement, la rente de $5^{fr}$ sera réduite ainsi à $4^{fr}$ de rente pour 100, et la contribution directe sera diminuée de $1^{fr}$. L'ensemble de ces dispositions me parait être avantageux à la chose publique.

# ÉLOGE DE LAPLACE

PAR

M. DE PASTORET.

*Archives parlementaires de* 1787 *à* 1860, IIᵉ série, t. L (¹).

M. le marquis de Pastoret obtient ensuite la parole pour honorer d'un juste hommage la mémoire de M. le marquis de Laplace, enlevé à la Chambre le 5 du mois dernier.

Le noble pair s'exprime en ces termes :

Messieurs, je viens, pour la seconde fois pendant le cours de cette session, remplir devant Vos Seigneuries un devoir triste et solennel, et rendre un dernier hommage à des pairs que la mort nous a enlevés.

Il y a 3 mois, je déplorais à cette tribune la perte d'un homme illustre dans nos dissensions politiques par un admirable courage et des vertus que n'altérèrent ni la prospérité, ni le malheur; je viens y parler aujourd'hui d'un homme célèbre dans toute l'Europe par un génie qui l'a placé à côté de ce que les sciences ont eu de plus grand.

On a déjà remarqué que l'année et le mois qui ont vu disparaître M. de Laplace étaient le même mois et la même année qui, dans le siècle précédent, avaient été témoins de la mort de Newton. Je n'hésite pas à rassembler ces deux noms, Messieurs; il y a longtemps que le monde savant les avait réunis, et ce n'est pas sans un secret sentiment d'orgueil national que je rappelle devant vous cette gloire.

(¹) Chambre des Pairs, séance du 2 avril 1827.



M. de Laplace était né à Beaumont-en-Auge, dans le département du Calvados, le 23 mars 1749. Un goût très vif, quelque chose de plus puissant que les goûts ordinaires, le porta de bonne heure vers l'étude des Mathématiques. Comme Pascal, il les parcourut plutôt qu'il ne les apprit, parce qu'il les devina comme lui, et qu'il ne chercha dans leurs combinaisons les plus abstraites que les formules ou les moyens de méditations d'un ordre plus élevé encore. A 22 ans, il vint à Paris : à 24, il était de l'Académie des Sciences; et pourtant il était arrivé seul, sans appui, presque sans recommandations. Mais il avait trouvé de bonne heure, au sein du Parlement, un ami que le goût des mêmes sciences rapprocha de lui, qui fut son premier guide, qui en fut récompensé par la dédicace de son premier Ouvrage : le président de Saron, un des membres les plus distingués de cette magistrature généreuse, où tout était conscience et devoir, et dont la France conservera longtemps le souvenir.

C'était alors un temps de paix et de repos; la France était heureuse à l'ombre du trône de ses rois. Mais ce bonheur devait avoir un terme. Bientôt la misère entoura les savants modestes, pour lesquels rien ne remplaçait la munificence des fils de Louis XIV, et le danger suivit de près la misère. Le vieil Anquetil fut réduit à venir arracher, pour se nourrir, l'herbe qui croissait dans les allées du bois de Boulogne; Lavoisier, plus malheureux encore, paya de sa tête l'irréparable tort de sa fortune; et le président de Saron expia, par le même supplice, 40 ans de bienfaits et de vertus. Lagrange, Laplace et un autre savant que je vois assis parmi vous, n'échappèrent à la mort que parce qu'on les mit en réquisition pour calculer la théorie des projectiles, pour diriger les procédés du tannage ou pour préparer la fabrication du salpêtre. Cette fois, du moins, la Science protégea ses disciples; mais les disciples ne furent pas ingrats à la Science qui les avait défendus.

Des jours plus calmes renaissaient à peine que M. de Laplace donna son *Exposition du système du Monde* et sa *Mécanique céleste* : grands, immenses Ouvrages, où l'homme, placé en face de tout ce qui l'environne, au-dessous de tout ce qui le menace et le protège, cherche quelles lois l'éternel auteur de toutes choses voulut imprimer à ce Monde, né de sa volonté. Suivez M. de Laplace lui-même dans l'*Exposition du système du Monde*. Il commence par y mettre l'homme comme en présence de la nature; il jette un regard d'admiration, je dirais presque de crainte, sur l'immensité de ce divin spectacle; et puis, son œil, fixé tour à tour sur chacun des astres qui l'éclairent, examine leur marche et suit leur mouvement. Sa raison calcule, entre tous ces mouvements, les rapports et les différences. Une loi générale en découle; cette loi est comme exposée, décrite dans ses applications diverses. Cette grande harmonie des corps célestes est expliquée quant à son existence matérielle. Là, peut-être, est l'œuvre du génie; là, l'auteur s'arrête. Savant, il rapporte à Newton la découverte première de ces grands phénomènes; homme, il reconnait sa faiblesse et son peu de puissance; et tout ce qu'il vient de révéler aux autres n'est pour lui qu'un témoignage de tout ce qui reste hors de l'intelligence humaine.

Dix années s'étaient passées au milieu de ces travaux, et ces dix années avaient amené la Révolution au point où elle devait se briser devant la puissance et la gloire que donnent les conquêtes. Le gouvernement directorial venait de céder la place au gouvernement consulaire. Les sciences reprirent alors tout leur éclat. Elles avaient sauvé M. de Laplace en des jours de danger; elles furent appelées à lui procurer un autre hommage. Chargé du soin si difficile alors de régénérer l'intérieur de nos provinces, il porta dans le Ministère la simplicité de ses mœurs, la douceur de sa vertu, un zèle que l'on connut trop mal. Mais bientôt il échangea ce pesant honneur contre un titre qui le rendait à la société des amis qu'il n'avait cessé d'aimer, à la culture des sciences qu'il regrettait sans cesse. Depuis lors, sa vie fut consacrée à de nobles soins. Il devint, pour les étrangers qui cherchaient à profiter de ce qu'il avait fait, pour les jeunes gens qui entraient dans la carrière, pour les savants et les hommes de lettres qui commençaient à se distinguer, un guide aussi constant qu'aimable. Tous ceux qui



s'adressaient à lui, lui durent et des encouragements et des lumières. Ce n'était pas seulement envers les sciences qu'il acquittait ainsi sa dette; c'était envers tout ce qui était utile aux lettres. Le portrait de Racine était dans son cabinet à côté de l'image de Newton. Rien de ce qui pouvait servir à éclairer, à unir, à civiliser les hommes ne lui restait indifférent. C'est ainsi que nous l'avons vu longtemps entouré de tout ce qu'il y avait d'illustre par le talent et le savoir, et présidant, en quelque sorte, à la marche de l'esprit humain pendant cette période d'années. Fontenelle remarquait, dans le siècle dernier, que Newton avait eu le rare bonheur de jouir de sa réputation pendant sa vie; M. de Laplace eut encore ce trait de ressemblance avec son illustre prédécesseur.

Ces occupations, si dignes d'un tel homme, ce respect dont il était entouré, ces grandes études qu'il suivait encore ne le détournèrent pourtant d'aucun des devoirs que lui imposaient ses fonctions dans l'ordre politique. Rapporteur, au Sénat, de quelques Commissions, il fut particulièrement l'organe de celle qui proposa d'abandonner le calendrier inventé par la Révolution, et auquel les auteurs avaient voulu, pour emprunter leurs expressions, imprimer le cachet moral et révolutionnaire qui le fît passer aux siècles à venir (1). Beaucoup de distinctions successives furent le prix de cette coopération à beaucoup de travaux; mais la plus grande des récompenses attendait M. de Laplace, en un autre temps, et l'époque arrivait où elle devait lui être accordée.

Cette époque, Messieurs, est celle de la Restauration. Le roi qui nous était rendu ne pouvait manquer d'honorer M. de Laplace, que toute l'Europe honorait. En 1814, il l'avait appelé à la Chambre des Pairs; plus tard, il lui donna le grand cordon de la Légion d'honneur. Louis XVIII, sous ce rapport, était plus heureux que son auguste aïeul; car Louis XIV, à l'époque de Turenne et de Luxembourg, allait chercher au dehors les disciples de Galilée, et le petit-fils de Louis XIV

(1) *Moniteur*, T. IX, p. 1186.

trouvait un homme digne de Newton, là même où tant d'autres hommes s'étaient montrés les dignes élèves de Luxembourg et de Turenne.

Plus d'une fois, Messieurs, vous avez entendu M. de Laplace à cette tribune; et, soit qu'il appliquât aux chiffres du budget la clarté de ses formules, soit qu'il attachât son raisonnement aux formes de l'instruction criminelle, soit enfin que l'exportation des grains ou la constitution de l'amortissement appelassent votre attention et ses avis, vous avez toujours été frappés de ce qu'une si grande richesse de lumières, une si grande profondeur de méditations répandaient tout d'un coup de clair et d'imprévu sur les questions qui vous étaient soumises. Votre bienveillance, votre estime étaient ce que M. de Laplace avait de plus cher : il en sentait vivement le prix, il les recevait avec une modeste reconnaissance. Les bontés du roi, plus particulièrement épanchées sur sa famille, récompensaient une fois de plus, dans son fils, l'illustration du père. Tout était honneur et repos pour M. de Laplace : c'était apparemment le repos qui précède le départ. M. de Laplace tomba malade et nous fut rapidement enlevé. Les dernières prières l'accompagnèrent; et cet homme, qui avait expliqué au monde le monde lui-même, disparut d'au milieu de nous.

Permettez à ceux qui l'avaient aimé depuis 50 ans, Messieurs, d'espérer que vous conserverez son souvenir. L'Europe lui décernera assez de renommée, la Science assez de reconnaissance; mais c'est ici qu'il faut désirer de laisser quelque mémoire. C'est à vous qu'il faut demander la bienveillance qu'on est si heureux d'obtenir pendant sa vie, le souvenir qu'on doit désirer après sa mort. Tout ce qui est et sera grand est réuni dans cette enceinte : vous y avez accueilli M. de Laplace; conservons à son nom ce qu'il méritait d'hommages, et que son illustration y soit accueillie aussi par tant d'anciennes, par tant d'éclatantes gloires.

FIN DU TOME QUATORZIÈME ET DERNIER.

# TABLES GÉNÉRALES

DES

# ŒUVRES DE LAPLACE.

---

1° TABLE SYNOPTIQUE.

2° TABLE ANALYTIQUE.

3° TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS CITÉS.

I.

# TABLE SYNOPTIQUE.

II.

# TABLE ANALYTIQUE.

Cette Table est dressée conformément aux règles générales du *Catalogue international de la Littérature scientifique* et contient les subdivisions suivantes :

A. Mathématiques.
B. Mécanique.
C. Physique.
D. Chimie.
E. Astronomie.
F. Météorologie.
J. Géographie.

Les sujets qui appartiennent à plusieurs Sections sont inscrits dans celle à laquelle ils semblent se rattacher le plus directement. On a indiqué les Sections secondaires en caractères gras, avec les numéros de classification correspondants. On a seulement rappelé les citations multiples en D, Chimie; F, Météorologie; J, Géographie, à cause de leur très petit nombre. Pour les autres subdivisions : A, Mathématiques; B, Mécanique; C, Physique; E, Astronomie, où les sujets sont très fréquemment associés les uns avec les autres, particulièrement en Astronomie, les multiples désignations ne sont pas réitérées explicitement. Il convient alors de consulter l'ensemble de la Table pour obtenir la liste complète des Mémoires ou Notes de Laplace, sur un sujet déterminé.

Dans la Section A, Mathématiques, quelques numéros de renvoi ont pour but d'accorder la classification avec les titres des Mémoires; dans les Sections suivantes, on a fait usage de ces numéros de renvoi pour éviter des répétitions.

## A. — MATHÉMATIQUES.

### GÉNÉRALITÉS. — PHILOSOPHIE. — HISTOIRE.

**0000-0040-1630.**

| N°. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 1. | De la probabilité. Principe de la raison suffisante. Expression de la probabilité | VII | VI-XI |

1630. E 1320-1330-5100.



LEÇONS DE MATHÉMATIQUES.

*Dixième séance.*

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| | Cordes vibrantes. **Équations de Laplace.** | | |
| | Sur l'emploi des fonctions discontinues. Sur l'application du calcul des fonctions génératrices à l'intégration des équations aux différences partielles en parties finies et en parties infiniment petites [6020]. | | |
| | Développement des fonctions à deux variables en séries | X | 1-89 |

3220-6020.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 156. | Expression du rapport de la circonférence au rayon donnée par Wallis, en produits infinis. La méthode remarquable de ce grand géomètre contient les germes des théories des interpolations et des intégrales définies | VII | 471-479 |

3250-3630-6020.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 157. | De l'approximation des différences infiniment petites et finies très élevées des fonctions. Cas d'une puissance d'un polynome, fonction trigonométrique, intégrales définies $\int x^s \varphi\,dx$, $\int c^{-sx} \varphi\,dx$. Fonctions $\Delta^n \frac{1}{s^i}$, $\Delta^n s^i$ | VII | 154-177 |
| 158. | De l'approximation des différences infiniment petites et finies très élevées des fonctions. Démonstration directe de l'expression $\Delta^n s^i$ par les passages du positif au négatif et du réel à l'imaginaire [n° 40, Livre I] | VII | 480-484 |

3250-3630.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 159. | Expression des différences finies des puissances lorsque l'on arrête cette expression au terme où la quantité élevée à la puissance devient négative. [Démonstration de la formule $p$ du n° 42 du Livre I, t. VII.] | VII | 485-493 |

3260.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 160. | *Mémoire sur les intégrales définies.* Sur les intégrales définies | XII | 363-370 |



3600-3630-6020.

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 161. | *Théorie des approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres* | VII | 89-180 |
| | Les matières de ce Chapitre sont réparties aux nos 145, 146, 149, 157, 185. | | |
| 162. | *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres* | X | 209-291 |
| | Première partie. (*Voir* n° 153.) | | |
| 163. | De l'intégration par approximation des équations linéaires aux différences finies et infiniment petites | X | 235-257 |
| 164. | Application de l'intégration des équations linéaires aux différences finies et infiniment petites à l'approximation des diverses fonctions de très grands nombres | X | 258-291 |
| 165. | *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres* (*suite*) | X | 295-338 |
| | Cette suite est appliquée à la théorie des hasards. (*Voir* nos 104, 105, 106.) | | |

3630-6020.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 166. | *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres.* (*Voir* n° 107) | XII | 301-345 |
| 167. | *Supplément au précédent Mémoire.* (*Voir* n° 108.) | XII | 349-353 |

4800-4820. E. 1250.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 168. | *Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes* | VIII | 325-366 |
| 169. | Étant donnée une équation différentielle d'un ordre quelconque, d'un nombre quelconque de variables et dont on ne connait point l'intégrale complète : | | |
| | 1° Déterminer si une équation d'un ordre inférieur, qui y satisfait, est comprise ou non dans son intégrale générale ; | | |

6010-6020.

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 189. | *Des fonctions génératrices à une variable.* De l'interpolation des suites à une variable et de l'intégration des équations différentielles linéaires. De la transformation des suites. Théorèmes sur le développement des fonctions ou de leurs différences en séries | VII | 7-48 |
| 190. | *Des fonctions génératrices à deux variables.* De l'interpolation des suites à deux variables et de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles. Théorèmes sur le développement en série des fonctions de plusieurs variables. Considérations sur le passage du fini à l'infiniment petit. Considérations générales sur les fonctions génératrices. [Équation des limites.] | VII | 49-88 |

*Supplément IV.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 191. | Remarques sur les fonctions génératrices | VII | 639-645 |

6020.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 192. | Intégration de l'équation différentielle aux différences finies du 1er ordre | VIII | 74-75 |
| 193. | Intégration de l'équation différentielle aux différences finies d'ordre $n$ | VIII | 75-102 |
| 194. | Des équations aux différences finies, lorsqu'on a plusieurs équations entre plusieurs variables | VIII | 109-110 |
| 195. | Équations différentielles rentrantes en elles-mêmes | VIII | 110-117 |
| 196. | Intégration des équations aux différences finies et partielles | VIII | 120-141 |
| 197. | Équation aux différences finies et partielles à quatre variables. Intégration | VIII | 141-144 |
| 198. | Sur l'intégration des équations aux différences finies, non linéaires | XIV | 203-207 |

6030.

199. Trouver une fonction de $x$ telle qu'en y faisant successivement

$$x = \varphi(x) \quad \text{et} \quad x = \psi(x),$$



| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| | on ait $f[\varphi(x)] = \mathrm{H}_x f[\psi(x)] + \mathrm{X}_n$ | VIII | 103-108 |

6430.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES.

*Huitième séance.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 200. | Sur l'application de l'algèbre à la géométrie. De la division des angles. Théorème de Côtes. Usage des Tables trigonométriques pour la résolution des équations. Applications de l'algèbre à la théorie des lignes et des surfaces | XIV | 101-132 |

6800-6830.

*Septième séance.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 201. | Sur la géométrie élémentaire; notions sur la limite; principes de la trigonométrie rectiligne et de la trigonométrie sphérique | XIV | 78-100 |

## B. — MÉCANIQUE.

### GÉNÉRALITÉS. — HISTOIRE.

0010-1220-2430.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 202. | De l'attraction et de la répulsion des sphères et des lois de l'équilibre et du mouvement des fluides élastiques. Notice historique des recherches des géomètres sur cet objet | V | 99-112 |

0010-2470. E. 0010-1600.

LETTRES INÉDITES.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 203. | 5. Laplace à d'Alembert | XIV | 348-351 |

0040-0120. E. 5050.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 204. | Sur l'emploi de l'expression « Corde métrique » | XIV | 384 |

### MESURES DES QUANTITÉS DYNAMIQUES.

0110 à 0140. E. 5050.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES.

*Neuvième séance.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 205. | Sur le nouveau Système des poids et mesures | XIV | 133-145 |

## C. — PHYSIQUE.

### GÉNÉRALITÉS.





### CONSTITUTION DE L'ÉTHER ET DE LA MATIÈRE.

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| | *les orbites des comètes et une Notice sur les manuscrits de Pingré, par Charles Henry* | XIV | 340-354 |
| 289. | 4. Laplace à d'Alembert | XIV | 346-348 |

**0010-0040.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 290. | Avertissement | I | I-III |
| 291. | Préface. Aperçu sur les mouvements planétaires et le perfectionnement des Tables astronomiques | III | IX-XIV |
| 292. | Précis de l'Histoire de l'Astronomie | VI | 393-394 |

**0010-0040-1000.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 293. | Préface. Sur la théorie des satellites et des comètes. De l'atmosphère et de la réfraction et sur différents points du Système du Monde | IV | VII-XXV |

**0010-0260-1710-3320.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 294. | Mouvements des corps célestes autour de leur centre de gravité. De la précession des équinoxes. Notice historique des travaux des géomètres et des astronomes sur cet objet. Formules générales du mouvement de l'équateur terrestre | V | 273-307 |

**0010-0260-1710-3320-9020.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 295. | Obliquité de l'écliptique déterminée par les astronomes chinois. Note I | VI | 487-489 |
| 296. | Obliquité de l'écliptique déterminée par les astronomes grecs. Note III | VI | 491 |
| 297. | Obliquité de l'écliptique depuis les astronomes chinois jusqu'en 1801. Note VI | VI | 497 |

**0010-1000-1790.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 298. | Notice historique des travaux des géomètres sur la mécanique céleste et nouvelles recherches sur le Système du Monde. Plan de l'Ouvrage | V | 5 |

**0010-1050.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 299. | De la découverte de la pesanteur universelle | VI | 454-473 |

**0010-1100-1130.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 300. | Du mouvement des planètes et des comètes. Notice historique des travaux des géomètres et des astronomes sur cet objet | V | 327-366 |



**0010-1100-9020.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 301. | Mouvements planétaires déterminés par les astronomes arabes. Note V | VI | 495-496 |

**0010-1120.**

*Lettres inédites. Première rédaction de sa méthode.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 302. | 2. Laplace à Pingré | XIV | 368-369 |
| 303. | 3. Laplace à Pingré | XIV | 370 |
| 304. | 4. Laplace à Pingré | XIV | 370-371 |

**0010-1400.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 305. | Théorie de la Lune. Exposé sommaire de cette théorie | III | 181-193 |
| 306. | Du mouvement de la Lune. Notice historique des travaux des géomètres et des astronomes sur cet objet | V | 389-408 |

**0010-1400-9020.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 307. | Mouvements de la Lune déterminés par les astronomes chaldéens. Note II | VI | 490 |
| 308. | Mouvements de la Lune déterminés par les astronomes grecs. Note IV | VI | 492-494 |

**0010-1460.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 309. | Des anneaux de Saturne. Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet | V | 319-323 |

**0010-1520.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 310. | Du mouvement des satellites de Jupiter. Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet | V | 453-460 |

**0010-1610-1710.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 311. | De la figure et de la rotation de la Terre. Notice historique des travaux des géomètres sur cet objet | V | 6-28 |

**0010-1610-1750 J. 95.**

312. Des oscillations des fluides qui recouvrent les planètes. Notice historique des travaux des géo-

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE.



ASTRONOMIE THÉORIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE.

**1600. B. 2470.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 518. | Sur la figure et la pesanteur à la surface d'un sphéroïde | IX | 273-280 |

**1610.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 519. | *Des oscillations de l'atmosphère.* Action du Soleil et de la Lune, susceptible d'être mesurée par les variations barométriques, entre les tropiques, mais insuffisante pour expliquer les vents alizés | II | 310-314 |
| 520. | De la figure de la Terre | V | 29-65 |
| 521. | Du flux et du reflux de l'atmosphère | V | 262-268 |
| 522. | Sur le flux et reflux lunaire atmosphérique | V | 489-505 |
| 523. | Sur la figure de la Terre | VIII | 302-313 |
| 524. | Sur la figure de la Terre | XI | 516-527 |
| 525. | *Mémoire sur la figure de la Terre.* 1° La densité des couches du sphéroïde terrestre croît de la surface au centre; 2° Ces couches sont, à très peu près, régulièrement disposées autour de son centre de gravité; 3° La surface de ce sphéroïde, dont la mer recouvre une partie, a une figure peu différente de celle qu'elle prendrait, en vertu des lois de l'équilibre, si, la mer cessant de la recouvrir, elle devenait fluide; 4° La profondeur de la mer est une petite fraction de la différence des deux axes de la terre; 5° Les irrégularités de la Terre et les causes qui troublent sa surface ont peu de profondeur; 6° Enfin, la Terre entière a été primitivement fluide | XII | 415-455 |
| 526. | De l'action de la Lune sur l'atmosphère | XIII | 306 |
| 527. | Mémoire sur le flux et le reflux lunaire atmosphérique | XIII | 342-358 |

**1610-1640-5100.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 528. | De la figure de la Terre et des planètes et de la loi de la pesanteur à leur surface | VI | 267-289 |

**1610-1710.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 529. | Sur la rotation de la Terre | XIII | 144-164 |

**1610-1750.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 530. | Sur la stabilité de la figure de la mer | XI | 527-539 |



**1610-3350-[0210].**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 531. | De l'atmosphère terrestre et des réfractions astronomiques | VI | 95-110 |

**1610-5050-5100.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 532. | De la figure de la Terre, de la variation de la pesanteur à sa surface et du Système décimal des poids et mesures | VI | 64-86 |

**1610-5100. J. 70.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 533. | *Comparaison de la théorie de la figure d'un sphéroïde très peu différent d'une sphère et recouvert d'une couche de fluide en équilibre.* Mesures d'un arc de méridien au Pérou, au Cap de Bonne-Espérance, en Laponie | II | 116-165 |

**1610-5100.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 534. | *Mémoire sur la figure de la Terre* | XI | 3-32 |
| 535. | *Addition au Mémoire sur la figure de la Terre.* Pesanteur, densité, figure et nutation | XII | 459-469 |
| 536. | Sur la figure de la Terre et la loi de la pesanteur à sa surface | XIII | 181-186 |
| 537. | Sur la figure de la Terre | XIII | 187 |

**1610-5100. J. 70.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 538. | Sur les degrés mesurés des méridiens et sur les longueurs observées du pendule | XI | 493-516 |

**1610-5400.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 539. | Des oscillations de l'atmosphère | VI | 319-324 |
| 540. | Sur les oscillations de l'atmosphère | IX | 283-301 |

**1660.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 541. | *De la figure de l'anneau de Saturne.* Stabilité de l'équilibre, durée de rotation | II | 166-177 |
| 542. | De la figure de l'anneau de Saturne | VI | 290-292 |

**1700.**

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 543. | Des mouvements des corps célestes autour de leurs propres centres de gravité. Terre, Lune, anneaux de Saturne | II | 315 |

ASTROMOMIE DESCRIPTIVE ET ASTRONOMIE ANCIENNE.



CHRONOLOGIE.

## F. — MÉTÉOROLOGIE.

### INSTRUMENTS.

0230.

» Baromètre. (*Voir* C. — Physique, nos 265-266.)

### PRESSION ATMOSPHÉRIQUE.

0730.

| Nos. | | Tomes. | Pages. |
|---|---|---|---|
| 593. | De la mesure des hauteurs par le baromètre........ | IV | 290-294 |

## J. — GÉOGRAPHIE.

### GÉOGRAPHIE MATHÉMATIQUE.

70.

» Sur l'exécution du cadastre. (E. — Astronomie, no 325.) Mesures d'un arc de méridien. (E. — Astronomie, nos 533 et 538.)

95.

» Marées. (E. — Astronomie, nos 312, 549 et de 555 à 579.)

III.

# TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS CITÉS.

FIN DES TABLES DU TOME QUATORZIÈME ET DERNIER.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
34554 Quai des Grands-Augustins, 55.

貴重

貴重