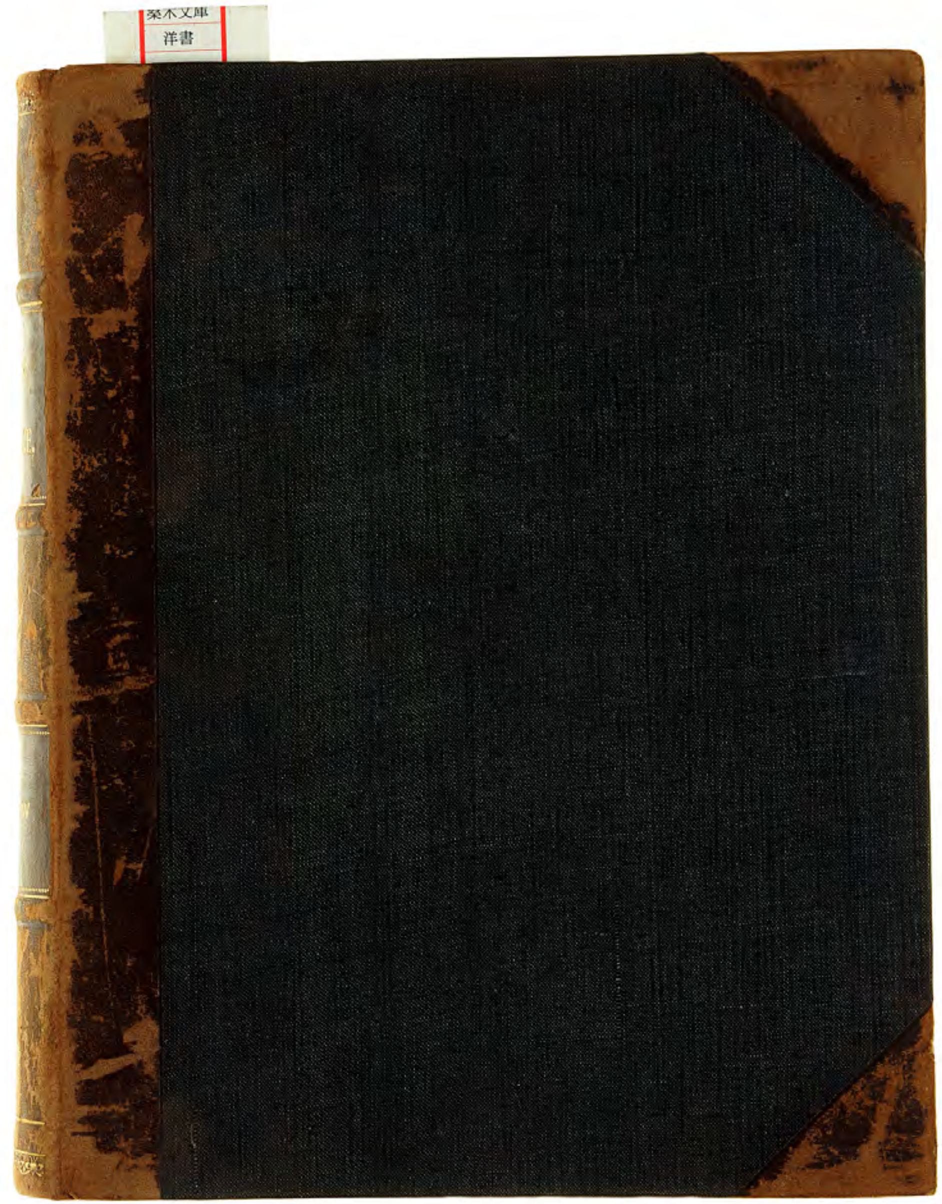
桑木文庫
洋書

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
34184 Quai des Augustins, 55.

ŒUVRES
COMPLÈTES
DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME QUATORZIÈME.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

MCMXII

MÉMOIRES DIVERS.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE QUATORZIÈME VOLUME.

MÉMOIRES

EXTRAITS DU

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR LA DÉTERMINATION D'UN PLAN

QUI RESTE TOUJOURS PARALLÈLE A LUI-MÊME,

DANS LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS AGISSANT D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE LES UNS SUR LES AUTRES ET LIBRES DE TOUTE ACTION ÉTRANGÈRE.

Journal de l'École Polytechnique, Tome II, Ve Cahier; 1798.

Soient m, m', m'', ... les masses des différents corps du système considérés comme des points, et dont le nombre est infini dans les solides et les fluides. Soient x, y, z les coordonnées orthogonales de m, et marquons d'un trait, de deux traits, etc., ces coordonnées relatives à m', m'', ... Soit dt l'élément du temps, et formons tous les produits possibles de la forme

$$mm'(x'-x)\frac{dy'-dy}{dt},\quad mm''(x''-x)\frac{dy''-dy}{dt},$$

$$m'm''(x''-x')\frac{dy''-dy'}{dt},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

désignons par $\sum mm'(x'-x)\frac{dy'-dy}{dt}$ la somme de tous ces produits, la caractéristique $\sum$ étant celle des intégrales finies. Cela posé, le principe connu de la conservation des aires, combiné avec celui de la conservation du mouvement du centre de gravité, donnera l'équation suivante :

$$c=\sum mm'\frac{(x'-x)(dy'-dy)-(y'-y)(dx'-dx)}{dt}.$$

La constante c est la même pour tous les plans des x et des y, parallèles entre eux; elle est indépendante de la position et de l'origine des coordonnées sur ces plans. On peut observer encore que la fonction

$$(x'-x)(dy'-dy)-(y'-y)(dx'-dx)$$

est le double de l'aire élémentaire décrite par l'un quelconque des deux corps m et m' autour de l'autre et projetée sur le plan des x et des y.

On aura pareillement

$$c'=\sum mm'\frac{(x'-x)(dz'-dz)-(z'-z)(dx'-dx)}{dt},$$

$$c''=\sum mm'\frac{(y'-y)(dz'-dz)-(z'-z)(dy'-dy)}{dt},$$

c' et c'' étant deux constantes arbitraires.

Rapportons maintenant les coordonnées x, y, z à trois autres axes perpendiculaires entre eux, comme les premiers, et ayant la même origine. Soient X, Y, Z les coordonnées de m, rapportées à ces axes. Nommons θ l'inclinaison du plan des x et des y sur celui des X et des Y; ψ l'angle que l'intersection de ces deux plans forme avec l'axe des x, et φ l'angle que l'axe des X forme avec cette même intersection; on aura

$$\begin{aligned}
X = {} & x(\cos\theta\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi) \\
& +y(\cos\theta\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi)-z\sin\theta\sin\varphi, \\
Y = {} & x(\cos\theta\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi) \\
& +y(\cos\theta\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi)-z\sin\theta\cos\varphi, \\
Z = {} & x\sin\theta\sin\psi+y\sin\theta\cos\psi+z\cos\theta.
\end{aligned}$$

De là il est facile de conclure

$$\sum mm'\frac{(X'-X)(dY'-dY)-(Y'-Y)(dX'-dX)}{dt}$$
$$=c\cos\theta-c'\sin\theta\cos\psi+c''\sin\theta\sin\psi,$$

$$\sum mm'\frac{(X'-X)(dZ'-dZ)-(Z'-Z)(dX'-dX)}{dt}$$
$$=c\sin\theta\cos\varphi+c'(\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\psi\cos\varphi)$$
$$+c''(\cos\psi\sin\varphi-\cos\theta\sin\psi\cos\varphi)$$

et

$$\sum mm'\frac{(Y'-Y)(dZ'-dZ)-(Z'-Z)(dY'-dY)}{dt}$$
$$=-c\sin\theta\sin\varphi+c'(\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\cos\psi\sin\varphi)$$
$$+c''(\cos\psi\cos\varphi+\cos\theta\sin\psi\sin\varphi).$$

Si l'on détermine ψ et θ de manière que l'on ait

$$\sin\theta\sin\psi=\frac{c''}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}},$$

$$\sin\theta\cos\psi=\frac{-c'}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}},$$

ce qui donne

$$\cos\theta=\frac{c}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}},$$

on aura

$$\sum mm'\frac{(X'-X)(dY'-dY)-(Y'-Y)(dX'-dX)}{dt}=\sqrt{c^2+c'^2+c''^2},$$

$$\sum mm'\frac{(X'-X)(dZ'-dZ)-(Z'-Z)(dX'-dX)}{dt}=0,$$

$$\sum mm'\frac{(Y'-Y)(dZ'-dZ)-(Z'-Z)(dY'-dY)}{dt}=0.$$

Les valeurs de c' et de c'' sont donc nulles relativement au plan des X et des Y, déterminé de cette manière. Il n'existe qu'un seul plan passant par l'origine des coordonnées, qui jouisse de cette propriété; car, en supposant qu'il soit celui des x et des y, on aura

$$\sum mm'\frac{(X'-X)(dZ'-dZ)-(Z'-Z)(dX'-dX)}{dt}=c\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\sum mm'\frac{(Y'-Y)(dZ'-dZ)-(Z'-Z)(dY'-dY)}{dt}=-c\sin\theta\sin\varphi.$$

En égalant ces deux fonctions à zéro, on aura $\sin\theta=0$, c'est-à-dire que le plan des X et des Y coïncide avec celui des x et des y.

La fonction $\sum mm'\frac{(X'-X)(dY'-dY)-(Y'-Y)(dX'-dX)}{dt}$ étant égale à $\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}$, quel que soit le plan des x et des y, il en résulte que $c^2+c'^2+c''^2$ est le même, quel que soit ce plan, et que le plan déterminé par ce qui précède est celui relativement auquel la fonction intégrale précédente est la plus grande. Le plan dont il s'agit jouit donc de ces propriétés remarquables, savoir : 1° que la somme des aires que les droites qui joignent les corps projetés sur ce plan tracent dans un temps donné autour de ces corps, et multipliées respectivement par les produits des masses qu'elles joignent, est la plus grande qu'il est possible; 2° que la même somme, relativement à un plan quelconque qui lui est perpendiculaire, est nulle. Tous les plans parallèles à ce plan jouissent des mêmes propriétés, en sorte que l'on peut faire passer ce plan par un point quelconque, et même par le centre de l'un des corps; et en déterminant, au moyen de ces propriétés, sa position à deux instants éloignés d'un intervalle quelconque, on sera sûr que les deux plans ainsi déterminés sont parallèles.

Appliquons ces résultats au système solaire. Nous supposerons que m est le Soleil, et que m', m'', m''', ... sont les planètes et les comètes, en désignant par le mot *planète* le système d'une planète et de ses satellites, réunis à leur centre commun de gravité. m étant incomparablement plus grand que m', m'', ..., nous négligerons les quantités qui restent toujours de l'ordre $m'm''$; nous aurons ainsi

$$c = m\sum m'\frac{x'_1\,dy'_1 - y'_1\,dx'_1}{dt},$$

$$c' = m\sum m'\frac{x'_1\,dz'_1 - z'_1\,dx'_1}{dt},$$

$$c'' = m\sum m'\frac{y'_1\,dz'_1 - z'_1\,dy'_1}{dt},$$

x'_1, y'_1, z'_1; x''_1, y''_1, z''_1, ... étant les coordonnées de m', m'', rapportées au centre de m ou du Soleil. Nous pouvons ici considérer les orbites de m', m'', ... comme des ellipses variables en vertu des variations séculaires de leurs éléments. Soient a' le demi-grand axe de l'ellipse de m', $a'e'$ son excentricité, λ' son inclinaison sur l'écliptique à une époque donnée, et γ' la longitude de son nœud ascendant; en nommant π la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, et prenant le plan de cette écliptique pour celui des x'_1 et des y'_1, et la ligne des équi-

noxes à la même époque pour l'axe des x'_1 et pour l'origine des longitudes, on aura

$$\frac{x'_1\,dy'_1 - y'_1\,dx'_1}{dt} = \frac{2\pi}{k}\cos\lambda'\sqrt{a'(1-e'^2)}\ \text{([1])},$$

$$\frac{x'_1\,dz'_1 - z'_1\,dx'_1}{dt} = \frac{2\pi}{k}\sin\lambda'\cos\gamma'\sqrt{a'(1-e'^2)},$$

$$\frac{y'_1\,dz'_1 - z'_1\,dy'_1}{dt} = \frac{2\pi}{k}\sin\lambda'\sin\gamma'\sqrt{a'(1-e'^2)};$$

on aura donc

$$c = \frac{2\pi}{k}m\sum m'\cos\lambda'\sqrt{a'(1-e'^2)},$$

$$c' = \frac{2\pi}{k}m\sum m'\sin\lambda'\cos\gamma'\sqrt{a'(1-e'^2)},$$

$$c'' = \frac{2\pi}{k}m\sum m'\sin\lambda'\sin\gamma'\sqrt{a'(1-e'^2)}.$$

D'ailleurs θ est l'inclinaison à l'écliptique fixe du plan qui, passant par le centre du Soleil, reste toujours parallèle à lui-même et que nous nommons, pour cette raison, *plan invariable*; $\pi - \psi$ est la longitude de son nœud ascendant. Soit ε cette longitude : on aura donc, par ce qui précède,

$$\sin\theta\sin\varepsilon = \frac{\sum m'\sin\lambda'\sin\gamma'\sqrt{a'(1-e'^2)}}{F},$$

$$\sin\theta\cos\varepsilon = \frac{\sum m'\sin\lambda'\cos\gamma'\sqrt{a'(1-e'^2)}}{F},$$

$$\cos\theta = \frac{\sum m'\cos\lambda'\sqrt{a'(1-e'^2)}}{F},$$

F^2 étant égal à la somme des carrés des numérateurs des seconds membres de ces équations; d'où il est facile de conclure la règle que j'ai donnée pour la détermination de ce plan, dans le Chapitre II du quatrième Livre de l'Ouvrage intitulé *Exposition du Système du Monde* ([2]).

([1]) *Œuvres de Laplace*, T. I, p. 129.
([2]) *Ibid.*, T. VI, p. 218.

SUR LA MÉCANIQUE.

Journal de l'École Polytechnique, Tome II, VIe Cahier; 1799.

Il est facile de conclure, de l'analyse que j'ai donnée dans le cinquième Cahier de ce Journal, que relativement à un système de corps réagissant d'une manière quelconque les uns sur les autres, et de plus attirés vers un point fixe : 1° on peut toujours faire passer par ce point un plan invariable sur lequel la somme des projections des aires décrites à chaque instant par les corps, multipliée respectivement par leurs masses, est un maximum ; 2° la même somme est nulle par rapport à tout plan perpendiculaire à celui du maximum et passant par le point fixe ; 3° les carrés des trois sommes semblables par rapport à trois plans passant par le même point et se coupant à angles droits sont égaux au carré de la somme qui est un maximum, et chacune de ces sommes est constante. S'il n'y a pas de point fixe vers lequel les corps du système soient attirés, les trois théorèmes précédents ont lieu relativement à un point quelconque fixe dans l'espace, ou mû d'un mouvement rectiligne et uniforme, et relativement au centre commun de gravité des corps du système ; seulement le plan du maximum, au lieu d'être invariable, sera mû en conservant toujours une situation parallèle à sa position primitive.

La force finie dont un corps est animé est le produit de sa masse par sa vitesse, et le moment de cette force pour faire tourner le système autour d'un axe passant par le point fixe, et perpendiculaire au plan de projection, est proportionnel à la projection de l'aire décrite pendant un instant par le corps et multipliée par sa masse ; le principe des aires revient donc à ce que la somme des moments des forces finies du système pour le faire tourner autour d'un axe invariable passant par le

point fixe, somme qui doit être nulle dans l'état d'équilibre, est constante dans l'état de mouvement.

Toutes les forces d'un système peuvent se réduire à deux : l'une située dans un plan et l'autre perpendiculaire à ce plan. On peut toujours faire passer par un point fixe donné un plan relativement auquel cette force perpendiculaire est nulle ou passe par ce point ; son moment est donc nul par rapport à tout axe passant par le même point, et le moment des forces du système se réduit alors au moment de la force située dans ce plan.

L'axe passant par le point fixe et par rapport auquel le moment des forces du système est un maximum est l'axe perpendiculaire au plan dont on vient de parler ; le moment de ces forces par rapport à un axe passant par le même point et formant un angle quelconque avec l'axe du plus grand moment est égal au produit du plus grand moment du système par le cosinus de cet angle ; en sorte qu'il est nul relativement à tout axe situé dans le plan auquel l'axe du plus grand moment est perpendiculaire. Les carrés des trois sommes de moments des forces, relativement à trois axes quelconques perpendiculaires entre eux et passant par le point fixe, sont égaux au carré du plus grand moment. De là résultent ces deux corollaires :

Si l'on conçoit un système de molécules solides et fluides, soumises à leur action mutuelle et animées primitivement par des forces quelconques ; si l'on suppose ensuite qu'en vertu de leur attraction et de leur adhésion elles se fixent, après un grand nombre d'oscillations, à un état permanent de rotation autour d'un axe invariable passant par leur centre commun de gravité (on peut conjecturer que ce cas est celui des corps célestes), alors l'axe de rotation est parallèle à celui qui, passant par le centre de gravité à l'origine, était l'axe du plus grand moment.

L'axe du plus grand moment du système solaire, passant par son centre de gravité, conserve toujours une situation parallèle, quel que soit dans l'espace le mouvement de ce système.

LEÇONS
DE
MATHÉMATIQUES
DONNÉES
A L'ÉCOLE NORMALE EN 1795.

Journal de l'École Polytechnique, VII^e et VIII^e Cahiers, juin 1812.

PREMIÈRE SÉANCE.

PROGRAMME.

SUR LA NUMÉRATION ET LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE.

La considération des grandeurs a fait découvrir des théorèmes et des méthodes, dont l'ensemble forme les Mathématiques. En observant ce que les résultats particuliers avaient de commun entre eux, on est successivement parvenu à des résultats fort étendus, et les sciences mathématiques sont à la fois devenues plus générales et plus simples. Leur domaine s'est considérablement accru par leur application aux phénomènes de la nature, phénomènes qui sont les résultats mathématiques d'un petit nombre de lois invariables. En même temps que cette application a perfectionné les sciences naturelles, elle a ouvert de nouvelles routes dans l'Analyse; c'est ainsi que les sciences, par leurs rapproche-

ments, se prêtent de mutuels secours. Présenter les plus importantes découvertes que l'on ait faites dans les sciences, en développer les principes, faire remarquer les idées fines et heureuses qui leur ont donné naissance, indiquer la voie la plus directe qui peut y conduire, les meilleures sources où l'on peut en puiser les détails, ce qui reste encore à faire, la marche qu'il faut suivre pour s'élever à de nouvelles découvertes : tel est l'objet de l'École Normale, et c'est sous ce point de vue que les Mathématiques y seront envisagées.

On exposera d'abord la manière ingénieuse par laquelle, au moyen d'un petit nombre de caractères, on peut facilement exprimer tous les nombres, et faire sur eux les opérations les plus usuelles de l'Arithmétique. On fera sentir l'avantage de la division de toutes les espèces d'unités en parties décimales. En traitant des progressions arithmétiques et géométriques, on insistera sur la combinaison heureuse que l'on a faite de ces deux progressions, pour former les logarithmes, l'une des inventions les plus belles et les plus utiles de l'esprit humain.

La considération des nombres, indépendamment de leur valeur et de tout système de numération, a fait naître l'Algèbre, que Newton a nommée, par cette raison, *Arithmétique universelle*. Son objet est la grandeur conçue de la manière la plus abstraite. On a d'abord considéré ainsi les quantités, ensuite leurs puissances, et généralement toutes leurs manières d'être. On les a désignées par des caractères fort simples, et ces notations, qui semblent être peu de chose en elles-mêmes, ont beaucoup influé sur les progrès de l'Analyse, en donnant au langage algébrique cette généralité et cette extrême concision d'où résulte la facilité de saisir et de combiner les rapports les plus compliqués des objets. Traduire en langue algébrique, c'est former des équations. L'art de mettre les problèmes en équations, et de choisir convenablement les inconnues pour arriver aux solutions les plus élégantes, dépend de l'adresse de l'analyste. L'Algèbre donne ensuite, pour résoudre ces équations, des méthodes rigoureuses ou approchées. On exposera les principes de ces méthodes et ce que l'on a découvert de plus intéressant sur la nature des équations.

Les grandeurs que l'Arithmétique et l'Algèbre considèrent sont des abstractions de l'entendement, et ces deux sciences sont entièrement son ouvrage. Nous ne connaissons que deux grandeurs réelles, l'étendue et la durée; elles sont l'objet de la Géométrie et de la Mécanique. Les propriétés de l'étendue, considérée simplement comme figurée, appartiennent à la Géométrie. On donnera les principaux théorèmes sur les lignes, les surfaces et les solides. On indiquera leurs applications les plus utiles, et l'on fera remarquer, dans les démonstrations de quelques-uns de ces théorèmes, le germe du Calcul infinitésimal.

L'un des plus féconds rapprochements que l'on ait faits dans les sciences est l'application de l'Algèbre à la théorie des courbes. On développera leur formation et leurs propriétés principales. La recherche de ces propriétés a conduit à l'Analyse infinitésimale, dont la découverte a changé la face des Mathématiques. On exposera les vrais principes de cette Analyse, et l'on fera connaître, à ce sujet, le calcul aux différences finies; ensuite on présentera quelques observations sur l'analyse et la synthèse, et sur les avantages propres à chacune de ces méthodes.

Dans l'infinie variété des mouvements qui ont lieu sur la Terre, on est parvenu à découvrir les lois générales que la matière suit constamment dans ces phénomènes. L'importance de ces lois, dont nous dépendons sans cesse, aurait dû exciter la curiosité dans tous les temps; cependant, par une indifférence trop ordinaire à l'esprit humain, elles ont été ignorées jusqu'au commencement du dernier siècle, époque à laquelle Galilée jeta les premiers fondements de la science du mouvement par ses belles découvertes sur la chute des corps. Les géomètres, en marchant sur les traces de ce grand homme, ont porté cette science au plus haut degré de perfection dont elle paraît susceptible.

On développera les lois de la composition des forces. En examinant les conditions de l'équilibre dans les principales machines, on les ramènera toutes à une seule dont l'énoncé forme le principe des vitesses virtuelles, et qui renferme, de la manière la plus générale, ce qui est nécessaire pour déterminer l'équilibre d'un système quelconque de

corps solides et fluides. On fera connaître l'ingénieux principe au moyen duquel d'Alembert a ramené les lois du mouvement des corps à celles de leur équilibre; en combinant ce principe avec celui des vitesses virtuelles, on réduira la Mécanique entière à la pure analyse. On exposera les principes généraux de cette science, et quelques-uns de ses résultats les plus remarquables, tels que les lois de la communication du mouvement, celles des mouvements accélérés par l'action de la pesanteur et des oscillations des pendules simples et composés.

C'est dans les espaces célestes que les lois du mouvement s'observent avec le plus de précision. Tant de circonstances en compliquent les résultats sur la Terre qu'il est difficile de les démêler, et plus difficile encore de les assujettir au calcul; mais les corps du système solaire, soumis à l'action d'une force principale, dont il est aisé de calculer les effets, ne sont troublés dans leurs mouvements respectifs que par des forces bien connues, et toujours assez petites pour que l'Analyse ait pu déterminer les changements que la suite des temps a produits et doit amener encore dans ce système. Il y a extrêmement loin de la première vue du ciel à cette vue générale qui embrasse à la fois les états passés et futurs du Système du Monde. Pour y parvenir, il a fallu observer les astres pendant un grand nombre de siècles, reconnaître les mouvements réels de la Terre dans les apparences que ces corps nous présentent; s'élever aux lois des mouvements planétaires et, de ces lois, au principe de la pesanteur universelle; redescendre ensuite de ce principe à l'explication complète de tous les phénomènes célestes jusque dans leurs moindres détails. Voilà ce que l'esprit humain a fait dans l'Astronomie. Le tableau de ces découvertes aura le double avantage d'offrir un grand ensemble de vérités intéressantes et la vraie méthode dans la recherche des lois de la nature.

Enfin on donnera les principes de la théorie des probabilités. Dans un temps où les citoyens sont appelés à décider du sort de leurs semblables, il leur importe de connaître une science qui fait apprécier, aussi exactement qu'il est possible, la probabilité des témoignages, et celle qui résulte des circonstances dont les faits sont accompagnés. Il importe surtout de leur apprendre à se défier des aperçus même les plus vraisemblables; et rien n'est plus propre à cet objet que la théorie des probabilités, dont souvent les résultats rigoureux sont contraires à ces aperçus. D'ailleurs, les nombreuses applications de cette théorie aux naissances, aux mortalités, aux élections et aux assurances, applications qu'il est avantageux de perfectionner et d'étendre à d'autres objets, la rendent une des parties les plus utiles des connaissances humaines.

Vous voyez, par le programme que nous venons de mettre sous vos yeux, que l'on ne se propose pas ici de faire un cours complet de Mathématiques; un pareil cours exigerait plusieurs années. Nous avons supposé que vous apportez, sur les diverses parties des sciences, des connaissances au moins élémentaires, qu'il ne s'agit que de perfectionner; en conséquence, nous vous présenterons un tableau général de toutes les découvertes faites en Mathématiques.

Ce rapprochement vous sera utile, en vous indiquant les vérités les plus fécondes et la route la plus directe qui peut y conduire.

Ce rapprochement est utile, même à l'homme le plus instruit, en lui offrant, sous un seul point de vue, l'ensemble des vérités qu'il connaît.

On vous indiquera les meilleures sources où vous pourrez puiser les détails que nous ne pourrons vous donner à l'École Normale.

Cela même est un bienfait de l'institution qui nous rassemble, car il est d'expérience qu'un grand nombre de personnes, pour avoir été mal guidées dans les sciences, ont consumé sans fruit des efforts qui, mieux dirigés, auraient été très utiles; d'ailleurs, il suffit de lire les éloges des savants pour savoir que souvent un bon ouvrage, tombé dans leurs mains par hasard, a décidé leur vocation.

Je vais commencer par vous entretenir de l'Arithmétique, ou de la science des nombres.

La première chose qu'il a fallu faire en Arithmétique a été de pouvoir exprimer d'une manière simple tous les nombres possibles.

Si, pour chaque idée, il avait fallu un signe particulier, la mémoire aurait été bientôt surchargée de ce grand nombre de signes, et les

sciences seraient restées très imparfaites, car les connaissances ne peuvent se perfectionner que par le rapprochement des idées que les signes fixent dans la mémoire. Mais on a observé, en général, que toutes les idées complexes étaient composées d'idées simples, combinées entre elles, suivant des modes généraux.

En conséquence, on a cherché à exprimer les idées simples et ces modes par des mots particuliers; et ainsi l'immense variété des idées complexes a pu s'exprimer par un petit nombre de mots. C'est sur ce principe qu'est fondé le mécanisme des langues.

Vous concevez que la langue philosophiquement la plus parfaite serait celle où l'on pourrait exprimer le plus grand nombre d'idées par le plus petit nombre de mots possible.

L'Arithmétique est une langue particulière dont les nombres sont l'objet; voyons comment, avec un petit nombre de mots et de caractères, on est parvenu à exprimer tous les nombres.

On a d'abord commencé par exprimer, avec des signes particuliers, les neuf premiers nombres.

Une fois parvenu là, on a eu l'idée très heureuse de donner à ces caractères, outre leur valeur absolue, une valeur dépendant de leur position.

Le caractère 1, qui représente l'*unité*, exprime, en l'avançant d'un rang vers la gauche, une unité du second ordre ou une *dizaine*, et, pour lui donner ce rang, on a imaginé un caractère qui n'a pas de valeur et qui ne sert qu'à fixer la position des autres caractères.

Ainsi, l'unité suivie d'un zéro exprime alors une collection de dix unités, ou une dizaine.

Le caractère 2, suivi du zéro, exprime deux dizaines, ou deux unités du second ordre.

De la même manière, vous concevez que l'on a pu exprimer des unités du troisième ordre, ou des dizaines de dizaines; il a suffi de mettre deux zéros à la suite des caractères significatifs. Des dizaines de centaines ou des mille ont été exprimés avec trois zéros placés à la droite des mêmes caractères, ainsi de suite. De cette manière, on a pu exprimer tous les nombres, car tout nombre, en général, peut être décomposé en un certain nombre d'unités de l'ordre le plus grand qu'il contient, plus zéro ou un certain nombre d'unités d'un ordre inférieur, plus zéro ou un certain nombre d'unités de l'ordre immédiatement inférieur à celui-ci, plus, etc.

Pour écrire ce nombre il a suffi d'écrire successivement, à la droite les uns des autres, tous les caractères qui expriment les nombres des unités de chaque ordre que renferme le nombre proposé, ou zéro, lorsque ces nombres partiels manquent.

Vous concevez que, par cette idée simple et ingénieuse de donner aux caractères deux valeurs, l'une absolue, l'autre dépendant de leur position, on est parvenu avec dix caractères, dont le dixième sert uniquement à marquer le rang, à écrire tous les nombres possibles; voilà pour ce qui concerne l'arithmétique écrite.

Quant à l'arithmétique parlée, on a également désigné par un mot particulier chacun des caractères dont je viens de vous entretenir.

Ensuite, de dix unités on a formé une dizaine; pour compter au delà il eût été simple de dire : *dix-un, dix-deux, dix-trois,* au lieu de onze, douze, treize, etc.; mais on n'a commencé à compter ainsi qu'à dix-sept.

Deux unités du second ordre ou deux dizaines ont formé le nombre *vingt;* trois dizaines ont été appelées *trente;* quatre dizaines, *quarante;* ainsi de suite jusqu'à *soixante.*

Arrivé à *soixante,* on a abandonné cette marche. C'est un défaut d'analogie qui se trouve dans presque toutes les langues; aussi quelques mathématiciens ont proposé de dire : *septante, octante* et *nonante.*

Dix dizaines ont été nommées *cent,* et dix centaines ont été nommées *mille.*

Au delà, on n'a employé de nouveaux mots que de mille en mille.

Mille fois mille ont été nommées *million;* mille millions, *billion* ou *milliard;* mille milliards, *trillion,* ainsi de suite; de sorte que, quand un nombre est écrit, pour le déterminer il faut le partager en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, la dernière tranche à gauche pouvant en renfermer moins; on prononce ensuite

chacune des tranches, en commençant par celle de la gauche, et à la fin de chaque tranche on désigne l'ordre d'unités qu'elle renferme : voilà pour ce qui regarde l'arithmétique parlée.

Ces choses vous paraissent simples, et elles le sont effectivement; mais c'est dans leur simplicité même que consiste leur fécondité.

Voyez avec quelle facilité on peut, au moyen de cet arrangement, faire toutes les opérations de l'Arithmétique.

Veut-on ajouter ensemble plusieurs nombres? On les écrit les uns au-dessous des autres, en plaçant dans une même colonne verticale les unités du même ordre; on fait l'addition des nombres de la même colonne, en commençant par la droite; on ne place sous la colonne que l'excédent de la somme sur un nombre d'unités de l'ordre supérieur, ou zéro quand il n'y a pas d'excédent; on retient ce nombre pour l'ajouter à la colonne suivante, et l'on continue ainsi jusqu'à la dernière colonne à gauche, sous laquelle on écrit la somme telle qu'on la trouve.

Veut-on faire la soustraction? Rien de plus simple encore; on écrit le nombre à soustraire au-dessous du nombre dont on veut le soustraire, de manière que les unités correspondantes soient dans une même colonne verticale.

On commence la soustraction par la droite, en retranchant le chiffre inférieur de la première colonne verticale, du correspondant supérieur. Quand cette soustraction ne peut pas se faire, on ajoute dix au chiffre supérieur; mais quand on passe à la colonne suivante, on diminue d'une unité le chiffre du nombre supérieur, ou l'on augmente d'une unité le chiffre du nombre inférieur, ce qui donne deux méthodes de faire la soustraction.

Quant à la multiplication par un seul chiffre, on commence par multiplier les unités du multiplicande par le multiplicateur, et l'on n'écrit que l'excédent du produit sur un nombre d'unités de l'ordre supérieur au premier; on ajoute ce nombre au produit des dizaines du multiplicande par le multiplicateur; on écrit, à la gauche du premier excédent, l'excédent de cette somme sur un nombre de centaines; on continue ainsi jusqu'au dernier chiffre du multiplicande, et l'on écrit en entier la dernière somme trouvée, à la gauche de tous les excédents précédemment écrits.

Si l'on a plusieurs chiffres au multiplicateur, on multiplie d'abord le multiplicande par les unités du multiplicateur, puis par les dizaines; et l'on avance d'un rang vers la gauche les unités du produit; on opère de même pour les centaines, en avançant d'un rang vers la gauche les unités de ce nouveau produit, et ainsi de suite. On additionne tous les produits partiels pour avoir le produit total.

Pour la division, on prend, à la gauche du dividende, le nombre de chiffres nécessaires pour contenir le diviseur; on cherche combien de fois il est contenu dans le dividende partiel; on écrit ce nombre qui forme le premier chiffre à gauche du quotient.

On multiplie ce quotient partiel par le diviseur et l'on retranche le produit du premier dividende partiel. A côté du reste on abaisse le chiffre suivant du dividende, et l'on forme un second dividende partiel que l'on divise de nouveau par le diviseur; on écrit le quotient à la droite du premier; on continue ainsi jusqu'à ce que tous les chiffres du dividende soient abaissés; ainsi la division est encore une opération très simple, qui résulte du système de numération. Elle diffère des trois autres en ce que l'on y procède de gauche à droite, ce qui tient à ce que les chiffres du dividende, abaissés à la suite des restes successifs, forment des dividendes partiels d'un ordre successivement plus petit, et dont les quotients, étant du même ordre, doivent être placés à la droite les uns des autres.

Vous concevez que la facilité des opérations que je viens de vous décrire dépend de la loi que suivent les unités des nombres, en allant de gauche à droite. Les unités deviennent successivement de dix en dix fois plus petites; mais rien ne force de s'arrêter aux unités simples; de même que l'unité simple est la dixième partie des dizaines, de même vous pouvez imaginer des unités fractionnaires qui soient la dixième partie des unités simples; et par la même raison, vous pouvez concevoir des dixièmes de dixième, ou des centièmes parties de l'unité principale, des millièmes, des dix-millièmes, etc. Alors on forme ce que l'on

appelle les *nombres décimaux*, et pour distinguer, dans un nombre composé de décimales, les nombres décimaux on met une virgule après le nombre qui exprime les unités simples.

Comme la loi de décroissement de ces nombres est la même que pour les nombres entiers, on peut les ajouter, les soustraire, les multiplier et les diviser de la même manière. Il n'y a d'attention à faire que dans la position de la virgule.

Dans la multiplication, la seule règle qu'il faut suivre est de mettre dans le produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le multiplicateur et le multiplicande.

Dans la division, il ne faut mettre après la virgule que l'excédent du nombre des chiffres décimaux du dividende sur le nombre des chiffres décimaux du diviseur.

Avec cette seule attention, les mêmes règles qui ont lieu pour les entiers s'appliquent aux décimales.

Dans la société, on a continuellement besoin d'employer des fractions d'unités, ou de diviser l'unité en parties plus petites, et ces parties en d'autres parties.

Vous sentez par là de quel avantage il est que toutes les divisions de l'unité soient décimales, puisque, de cette manière, toutes les opérations d'arithmétique se trouvent réduites à celles que l'on fait sur les nombres entiers.

C'est là ce qui a fait adopter par la Convention nationale le système de la division de toutes les unités en parties décimales. Pour connaître les avantages de ce système il suffit de vous rappeler l'extrême complication qui résulte des divisions anciennement adoptées, quand il s'agit de multiplications ou de divisions complexes.

Vous trouverez dans l'Instruction qu'a publiée sur cet objet la Commission des Poids et Mesures, la méthode d'opérer sur les décimales, exposée dans le plus grand détail; ainsi, je vous engage à lire cette Instruction, pour vous convaincre de la grande utilité du système décimal, et pour vous mettre bien au fait des règles et des opérations qu'il faut faire dans ce système.

Vous concevez, par les principes métaphysiques sur lesquels est fondé notre système de numération, que rien n'obligeait de s'en tenir à dix caractères; on pouvait en employer plus ou moins.

Il paraît très probable que le nombre des doigts est ce qui a déterminé l'arithmétique décimale. Les hommes primitivement ont compté par leurs doigts jusqu'à dix; mais de ce que cette arithmétique était bonne dans l'enfance des sociétés, est-elle maintenant la meilleure? C'est ce que nous allons examiner.

D'abord elle n'est pas la plus simple; la plus simple est celle qui n'admet que deux caractères : le *zéro* et l'*unité*. Cette arithmétique s'appelle *arithmétique binaire*. Il paraît qu'elle a été employée très anciennement par les Chinois; mais, dans ces derniers temps, elle a été renouvelée par Leibnitz.

On peut également, au moyen de cette arithmétique, exprimer tous les nombres.

Les unités du second ordre contiennent deux unités du premier ordre; les unités du troisième ordre en contiennent deux du second, etc.

Pour exprimer une unité du second ordre, on place un zéro à la droite de l'unité; on place deux zéros à la droite de l'unité, pour exprimer une unité du troisième ordre, etc.

Ce système nous offre une propriété remarquable : c'est la possibilité de peser tous les poids entiers avec un certain nombre de poids de 1, de 2, de 4, de 8, de 16 livres, etc. Ces poids représentent les unités des différents ordres de l'arithmétique binaire. Quand un nombre est écrit dans ce système de numération, alors il suffit de prendre les poids qui correspondent aux diverses unités de ce nombre.

Cette arithmétique a de plus l'avantage de réduire toutes les multiplications à de simples additions, et toutes les divisions à de simples soustractions; mais elle a un inconvénient qui ne permet pas de l'employer dans l'usage civil; c'est la multiplicité des caractères pour exprimer des nombres fort simples; le nombre mille vingt-quatre, par exemple, exigerait onze caractères.

Aussi Leibnitz n'a présenté cette arithmétique que comme une chose

curieuse, et qui pouvait conduire à des découvertes intéressantes sur les nombres.

Leibnitz crut y voir l'image de la création. Il imagina que l'unité pouvait représenter Dieu, et zéro le néant; et que l'Être suprême avait tiré du néant tous les êtres de cet univers, de même que l'unité avec le zéro exprime tous les nombres dans ce système de numération.

Cette idée plut tellement à Leibnitz qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, président du tribunal des Mathématiques de la Chine, dans l'espérance que cet emblème de la création convertirait au christianisme l'empereur d'alors, qui aimait particulièrement les Mathématiques. Ce trait nous rappelle le commentaire de Newton sur l'*Apocalypse*.

Quand vous voyez les écarts d'aussi grands hommes, écarts qui sont dus aux impressions reçues dans l'enfance, vous sentez combien un système d'éducation, libre de préjugés, est utile aux progrès de la raison humaine, et qu'il est beau d'être appelé, comme vous l'êtes, à la présenter à vos concitoyens dans toute sa pureté, et dégagée des nuages qui l'ont trop souvent obscurcie.

De tous les systèmes de numération le meilleur est celui qui, n'employant pas un très grand nombre de caractères, renferme dans son échelle le plus grand nombre de diviseurs, et, à cet égard, le système *duodécimal* paraît mériter la préférence. Il eût suffi d'ajouter deux caractères aux nôtres, on aurait eu l'avantage d'exprimer le tiers et le quart de l'unité principale, au moyen des divisions de ce système, ce qui eût été très commode. C'est pour cela que les divisions de presque toutes nos mesures sont duodécimales; ainsi le pied se divise en douze pouces, le pouce en douze lignes, etc.

La Commission des Poids et Mesures a balancé ces avantages qu'offre le système duodécimal avec l'inconvénient de changer totalement et l'arithmétique écrite et l'arithmétique parlée, et nos livres et nos tables formées sur le système décimal. Elle a craint que, en proposant le système duodécimal, les obstacles qu'éprouverait l'introduction de ce système ne se joignissent à ceux que présentait déjà l'institution du nouveau système des poids et mesures; elle a donc jugé à propos de conserver l'arithmétique décimale, dont l'échelle est mieux proportionnée que l'échelle duodécimale à la capacité commune de la mémoire.

Il est d'ailleurs très aisé de traduire un nombre écrit dans un système de numération dans un autre système.

Pour traduire par exemple, dans le système duodécimal, un nombre écrit dans le système décimal, divisez le nombre proposé par l'échelle du nouveau système, par douze; écrivez le reste, ou zéro s'il ne reste rien. Divisez le premier quotient par le même nombre douze, écrivez le reste à gauche du premier reste que vous avez trouvé. Divisez le deuxième quotient par douze, écrivez le reste à gauche du deuxième reste, et ainsi de suite. En continuant l'opération, vous parviendrez à écrire, dans le système duodécimal, le nombre écrit dans le système décimal. Voilà ce que j'avais à vous dire sur les systèmes de numération. La prochaine fois nous parlerons des fractions et des autres objets que l'Arithmétique considère.

DEUXIÈME SÉANCE.

SUR LES FRACTIONS, LES PUISSANCES ET L'EXTRACTION DES RACINES; LES PROPORTIONS, LES PROGRESSIONS ET LES LOGARITHMES.

Nous avons considéré précédemment les nombres entiers et décimaux; examinons présentement les nombres fractionnaires en général. Si l'on conçoit l'unité partagée en plusieurs parties égales, un certain nombre de ces parties est ce que l'on nomme *fraction*. Pour l'exprimer on place, au-dessous d'une petite barre horizontale, le nombre qui désigne en combien de parties l'unité a été divisée, et que l'on nomme *dénominateur;* on place au-dessus le nombre qui exprime combien on prend de ces parties, et que l'on nomme *numérateur*.

De là il est aisé de conclure qu'une fraction est égale au quotient de la division du numérateur par le dénominateur, et qu'ainsi elle ne change point de valeur en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre. La réduction de plusieurs fractions au même dénominateur est fondée sur ce principe; on leur donne pour dénominateur commun un nombre divisible à la fois par chacun de leurs dénominateurs, et l'on multiplie le numérateur de chacune d'elles par le nombre qui exprime combien de fois son dénominateur est contenu dans le dénominateur commun. Les fractions étant ainsi réduites au même dénominateur, il suffit, pour les ajouter ou pour les soustraire les unes des autres, d'ajouter ou de soustraire leurs numérateurs, en conservant à leur somme ou à leur différence le commun dénominateur.

Le produit de deux fractions est une nouvelle fraction, dont le numérateur est le produit des numérateurs de ces fractions, et dont le dénominateur est le produit de leurs dénominateurs.

Pour diviser une fraction par une autre il faut multiplier la fraction dividende par l'autre fraction renversée.

On appelle *nombre premier* tout nombre qui n'a d'autres diviseurs que lui-même et l'unité. Deux nombres sont *premiers entre eux* lorsqu'ils n'ont d'autre commun diviseur que l'unité. Si les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, elle est alors réduite à sa plus simple expression. Pour réduire une fraction quelconque à cet état il faut diviser chacun de ses deux termes par leur plus grand commun diviseur, que l'on obtient ainsi : divisez le plus grand terme par le plus petit; divisez ensuite ce plus petit terme par le reste de la division; ce premier reste par le reste de la deuxième division; ce deuxième reste par le troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce que vous parveniez à une division sans reste. Le dernier diviseur sera le plus grand commun diviseur cherché.

En examinant avec attention cette suite de divisions, il est facile de voir que, si le numérateur de la fraction est moindre que son dénominateur, on peut lui donner la forme d'une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le quotient de la première division, augmenté d'une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le quotient de la deuxième division, augmenté d'une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le quotient de la troisième division, plus, etc. Cette suite de fractions ainsi enchaînées les unes aux autres se nomme *fraction continue*. On peut donner cette forme aux nombres décimaux qui ne sont que des fractions dont le dénominateur est dix, ou cent, ou mille, etc. Si le nombre des décimales est infini, la fraction continue se prolonge à l'infini, à moins que le nombre décimal ne soit une fraction ordinaire, réduite par la division en parties décimales, auquel cas la fraction continue se termine; et cela a généralement lieu toutes les fois que la fraction continue est l'expression du rapport de deux nombres entiers.

La théorie de ces fractions n'est point un pur jeu de l'esprit; elle est importante dans l'Analyse et elle a conduit à plusieurs vérités curieuses,

telles que l'impossibilité d'exprimer, par le rapport de deux nombres entiers, celui du diamètre à la circonférence. L'un de ses principaux avantages est de donner les valeurs des fractions exprimées par de très grands nombres, les plus approchées que l'on puisse obtenir avec de petits nombres. Il suffit pour cela de réduire la fraction proposée en fraction continue, d'arrêter cette fraction à l'un de ses termes, et de mettre la fraction continue ainsi tronquée sous la forme d'une fraction ordinaire. Par exemple, on a déterminé le rapport du diamètre à la circonférence au moyen d'un très grand nombre de décimales; mais il est souvent utile d'avoir ce rapport exprimé d'une manière fort approchée par de petits nombres. En réduisant en fraction continue la valeur de ce rapport exprimé en décimales, on trouve que le rapport de 7 à 22, trouvé par Archimède, est fort approché, et le plus exact que l'on puisse obtenir, en n'employant pas de plus grands nombres que 22. Si l'on réduit pareillement la longueur de l'année en jours et en décimales de jours, et ensuite en fraction continue, on parvient à l'intercalation persane de huit années bissextiles sur trente-trois ans.

Considérons maintenant les nombres, eu égard à leurs puissances. Le produit d'un nombre par lui-même forme le *carré* de ce nombre; le produit du carré par le nombre forme le *cube*; le produit du cube par le nombre forme le *carré carré*, et ainsi de suite. Pour exprimer ces divers produits : on nomme *première puissance* d'un nombre ce nombre lui-même; son carré, *deuxième puissance*; son cube, *troisième puissance*, etc.; et, pour écrire ces puissances, on écrit à la droite du nombre, et vers sa partie supérieure, les nombres 1, 2, 3, ..., qui marquent le degré de la puissance; ces nombres s'appellent *exposants*.

La *racine carrée* d'un nombre est le nombre dont il est la deuxième puissance; sa *racine cubique* est le nombre dont il est la troisième puissance, etc.; et comme, pour former les exposants des puissances, on multiplie l'unité par 2, 3, ..., pour former les exposants des racines on doit diviser l'unité par les mêmes nombres, en sorte que la racine d'un nombre en est une puissance fractionnaire; on peut même donner à l'exposant une valeur quelconque fractionnaire; en le supposant, par exemple, égal à deux tiers, il indique la racine cubique du carré du nombre. Ces notions très simples sont de la plus grande fécondité: elles sont la base d'une branche d'Analyse que l'on nomme *Calcul exponentiel*.

La formation des puissances est toujours facile; l'extraction des racines présente plus de difficulté. On peut généralement y parvenir par la règle suivante :

Partagez le nombre proposé, de droite à gauche, en tranches d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance dont on cherche la racine, la première tranche à gauche pouvant en renfermer moins. Extrayez la racine proposée, de cette tranche, racine qui ne peut être que d'un seul chiffre; vous aurez le premier chiffre à gauche de la racine. Retranchez la puissance de ce chiffre de la même tranche et, à la droite du reste, abaissez le premier chiffre de la deuxième tranche; divisez ce reste ainsi augmenté par l'exposant de la puissance, multiplié par le premier chiffre trouvé, élevé à une puissance moindre d'une unité; le second chiffre de la racine sera égal ou moindre que le quotient de cette division; il lui sera égal, si le nombre formé de ce quotient écrit à la droite du premier chiffre de la racine, et élevé à la puissance, peut être soustrait des deux premières tranches; si cela n'est pas il faudra, pour avoir le deuxième chiffre de la racine, qui doit satisfaire à la condition précédente, diminuer le quotient d'une ou de plusieurs unités. On aura le troisième chiffre de la racine en opérant, sur les deux premiers chiffres trouvés et sur les trois premières tranches, comme on vient de le faire sur le premier chiffre et sur les deux premières tranches.

Si le nombre dont on veut extraire la racine est décimal, il faut, en mettant un nombre convenable de zéros à sa suite, rendre le nombre des décimales un multiple de l'exposant de la puissance; on extrait ensuite la racine de ce nombre, comme s'il était entier, et l'on sépare, sur la droite de cette racine, autant de chiffres par la virgule qu'il y a d'unités dans le quotient du nombre des décimales de la quantité proposée, divisé par l'exposant de la puissance.

Pour extraire la racine d'une fraction il suffit d'extraire la racine de son numérateur et celle de son dénominateur.

La puissance de tout nombre entier ou fractionnaire est un nombre entier ou une fraction; mais il n'en est pas ainsi des racines. Par exemple, la racine carrée de deux n'a aucune mesure commune avec l'unité. Quel que soit le nombre des parties égales, dans lesquelles l'unité est divisée, aucune de ces parties n'est exactement contenue dans la racine carrée de deux, que l'on nomme, par cette raison, *irrationnelle* ou *incommensurable*. Vous voyez comment l'examen des propriétés des nombres étend successivement nos idées. Les nombres entiers se sont présentés, ensuite les nombres fractionnaires, et enfin nous sommes arrivés à la considération des nombres irrationnels. Le nombre n'est plus simplement une collection d'unités, comme nous l'avions conçu d'abord; il est généralement le rapport d'une quantité à une autre quantité prise pour unité. Examinons particulièrement les rapports.

La différence de deux nombres est leur *rapport arithmétique;* la manière dont ils se contiennent forme le *rapport géométrique*, qui n'est ainsi que le quotient de l'un des nombres divisé par l'autre.

La *proportion* consiste dans l'égalité de deux rapports. Si quatre grandeurs sont en proportion arithmétique, c'est-à-dire si la différence de la première à la deuxième est la même que celle de la troisième à la quatrième, la somme des moyens est égale à celle des extrêmes.

Réciproquement, si la somme des extrêmes est égale à celle des moyens, les quatre grandeurs sont en proportion arithmétique.

Si quatre grandeurs sont en proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens; et réciproquement, si le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, les quatre grandeurs sont en proportion géométrique.

De là résultent la règle de trois et toutes les règles qui s'y rapportent.

Une suite de termes tels que le premier est surpassé par le deuxième, comme le deuxième est surpassé par le troisième, comme le troisième est surpassé par le quatrième, etc., forme une *progression arithmé-*

tique. La raison de la progression est l'excès d'un des termes sur celui qui le précède.

Une suite de termes tels que le premier est contenu dans le deuxième, comme le deuxième est contenu dans le troisième, comme le troisième est contenu dans le quatrième, etc., forme une *progression géométrique*. La raison de la progression est la manière dont un terme contient celui qui le précède.

Les deux suites que nous venons de considérer sont le germe de la théorie des suites, l'une des branches les plus étendues de l'Analyse, et qui a particulièrement fixé l'attention des géomètres modernes.

La loi d'une série est la manière dont ses termes se forment successivement; ainsi la loi de la progression arithmétique consiste en ce que chaque terme est égal à celui qui le précède, plus la raison; la loi de la progression géométrique consiste en ce que chaque terme est égal à celui qui le précède, multiplié par la raison.

La valeur du terme général de la série, c'est-à-dire d'un quelconque de ses termes, peut toujours être exprimée au moyen du nombre qui marque le rang de ce terme; et c'est une recherche intéressante et souvent difficile, que d'exprimer ainsi les termes d'une série, d'après la loi de sa formation.

Dans la progression arithmétique, un terme quelconque est égal au premier, plus à la raison multipliée par le nombre qui indique le rang du terme diminué de l'unité.

Dans la progression géométrique, un terme quelconque est égal au premier multiplié par la raison élevée à une puissance moindre d'une unité que le nombre qui indique le rang.

En examinant avec attention ces divers résultats, on observe entre eux une analogie remarquable. Tout ce qui, dans les rapports, les proportions et les progressions arithmétiques, se rapporte aux sommes ou aux différences, se rapporte aux produits ou aux quotients, dans les rapports, les proportions et les progressions géométriques. Tout ce qui, dans les progressions arithmétiques, se rapporte aux produits, se rapporte aux puissances dans les progressions géométriques.

Cette analogie a conduit Neper à la découverte des logarithmes, admirable instrument qui, en réduisant à quelques heures le travail de plusieurs mois, double, si l'on peut ainsi dire, la vie des astronomes, et leur épargne les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs: invention d'autant plus satisfaisante pour l'esprit humain qu'il l'a tirée en entier de son propre fonds. Dans les arts, l'homme emploie les forces et les matériaux de la nature pour accroître sa puissance; mais ici, tout est son ouvrage.

Pour rendre l'analogie dont nous venons de parler plus sensible, et pour en voir naître les logarithmes, concevons que l'on écrive, l'une au-dessous de l'autre, deux progressions, la première géométrique et commençant par l'unité; la seconde, arithmétique et commençant par zéro. Il est aisé de voir qu'au produit de deux termes quelconques de la progression géométrique répond la somme des deux termes correspondants de la progression arithmétique, et qu'à une puissance quelconque d'un des termes de la première progression répond le produit du terme correspondant de la seconde, par l'exposant de la puissance.

Il suit de là que si l'on renfermait dans une progression géométrique tous les nombres 1, 2, 3, ..., en lui faisant correspondre une progression arithmétique commençant par zéro, la somme des deux termes de la progression arithmétique indiquerait le produit des deux nombres correspondants dans la progression géométrique, et, par conséquent, leur différence indiquerait le quotient de ces mêmes nombres. Pareillement, le produit d'un terme de la progression arithmétique par 2, 3, ... indiquerait la puissance deuxième, troisième, etc. du nombre correspondant de la progression géométrique, et, par conséquent, la division d'un terme de la progression arithmétique par 2, 3, ... indiquerait la racine deuxième, troisième, etc. du nombre correspondant. Une Table qui renfermerait les deux progressions précédentes réduirait donc les multiplications à des additions, les divisions à des soustractions, les élévations de puissances à des multiplications et les extractions des racines à des divisions. Cette Table est celle des logarithmes; on nomme ainsi les nombres de la progression arithmétique correspondant aux nombres naturels qui sont censés appartenir à une progression géométrique.

A la vérité, les nombres naturels 1, 2, 3, ... n'entrent point rigoureusement dans une même progression géométrique; mais on conçoit que si, entre un et cent mille, par exemple, on insère un très grand nombre de moyens géométriques, ils croîtront par degrés insensibles, et les nombres naturels pourront se confondre avec eux. Si, en prenant zéro pour le premier terme de la progression arithmétique, et cinq, par exemple, pour le terme correspondant à cent mille dans la progression géométrique, on insère entre un et cinq le même nombre de moyens arithmétiques, ils seront les logarithmes des moyens géométriques correspondants.

On peut, à la progression arithmétique 0, 1, 2, ..., faire correspondre telle progression géométrique que l'on veut, ce qui donne une infinité de systèmes de logarithmes; mais le plus commode est le système dans lequel on lui fait correspondre la progression décimale 1, 10, 100, 1000, ... Alors, dans chaque logarithme, le nombre qui précède les décimales, et que l'on nomme sa *caractéristique*, indique l'ordre des unités les plus considérables du nombre auquel il appartient; et pour multiplier ou diviser un nombre par dix, cent, etc., il suffit d'augmenter ou de diminuer sa caractéristique d'une, de deux unités, etc.

C'est sur ces principes que sont fondées nos Tables de logarithmes; on voit qu'elles deviendront d'un fréquent usage dans la société, quand le système des divisions décimales sera généralement admis. La facilité qui en résulte dans tous les calculs est un des principaux avantages de l'introduction de ce système. Il faut donc s'attacher particulièrement à développer, dans l'enseignement, la nature des logarithmes et leurs divers usages.

Dix, cent, mille, etc. étant les puissances successives de dix, leurs logarithmes sont les exposants de ces puissances. Ainsi l'on peut généralement considérer les logarithmes comme les exposants des puissances entières ou fractionnaires, auxquelles le nombre 10 doit être élevé pour

former successivement tous les nombres. Cette manière d'envisager les logarithmes est plus analytique que la précédente; elle conduit à des séries très convergentes, au moyen desquelles on peut obtenir aisément les logarithmes dans tous les systèmes possibles. Mais les Tables de logarithmes étaient déjà faites quand ces séries ont été trouvées, et la patience des calculateurs avait suppléé à l'imperfection de leurs méthodes.

On peut envisager, sous ce point de vue général, les Tables de logarithmes. Concevons tous les nombres écrits sur une ligne horizontale et sur une ligne verticale, de manière que l'unité soit au point de jonction des deux lignes. Imaginons ensuite des verticales menées par chaque nombre horizontal, et des horizontales menées par chaque nombre vertical, et supposons le produit de ces nombres, écrit au point de jonction de ces lignes. On formera ainsi une Table qui sera une extension de celle que l'on a nommée *Table de Pythagore*, et dont l'inspection seule fera connaître le produit de deux nombres; car, en cherchant sur la première ligne horizontale le nombre multiplicateur et sur la première ligne verticale le nombre multiplicande, et en suivant les deux colonnes verticale et horizontale correspondant à ces nombres, jusqu'au point de leur jonction, on trouvera écrit, à ce point, le produit cherché des deux nombres. Mais une pareille Table serait d'une longueur excessive et, pour les seuls mille premiers nombres, elle renferme un million de produits, ce qui la rend impraticable. Les Tables de ce genre se nomment *Tables à double entrée*, parce que l'on y entre avec deux nombres. L'art de l'analyste consiste à les transformer en *Tables à simple entrée*, ou dans lesquelles on n'entre qu'avec un seul nombre et qui, par cette raison, sont incomparablement moins étendues; c'est ce que l'on obtient d'une manière très heureuse par les logarithmes; car le logarithme du produit de deux nombres étant la somme de deux logarithmes, si l'on conçoit tous les nombres écrits dans une même colonne verticale et leurs logarithmes à côté, en cherchant les logarithmes de chaque nombre, en faisant ensuite une somme de ces logarithmes, et cherchant dans la colonne des logarithmes à quel nombre cette somme correspond, on aura le produit cherché.

Il me reste à vous dire un mot des propriétés des nombres. Elles ont intéressé la curiosité des géomètres, surtout par les artifices singuliers qu'il a fallu imaginer pour y parvenir. Pour vous donner une idée de ces propriétés, il suffit d'en énoncer quelques-unes.

Tout nombre entier est composé de quatre ou d'un moindre nombre de carrés.

La somme de deux puissances semblables et entières ne peut former exactement une puissance semblable, en nombres rationnels, lorsque cette puissance surpasse deux.

Ce dernier théorème est dû, avec beaucoup d'autres également curieux, à Fermat et n'a point encore été démontré. Ce grand géomètre avait promis de publier les démonstrations de ces divers théorèmes, mais elles ont été perdues à sa mort, et ces théorèmes sont restés comme autant de monuments qui, par la difficulté d'y parvenir, attestent la profondeur de son génie. Il est fort remarquable que les grandes découvertes dont l'Analyse s'est enrichie dans ce siècle aient peu influé sur la théorie des nombres. Au reste, ces recherches ne sont jusqu'ici que de pure curiosité, et je ne conseille de s'y livrer qu'à ceux qui en ont le loisir. Cependant il est bon de les suivre; elles fournissent d'excellents modèles dans l'art de raisonner; d'ailleurs on en fera un jour, peut-être, des applications importantes. Tout se tient dans la chaîne des vérités, et quelquefois un seul phénomène a suffi pour faire passer les plus inutiles en apparence, de notre entendement, dans la nature. Rien ne semblait plus futile que les spéculations des anciens géomètres sur les courbes qu'engendre la section de la surface du cône par un plan : après deux mille ans, elles ont fait découvrir à Képler les lois générales du système planétaire, dont les différents corps se meuvent dans ces courbes ([1]).

([1]) Depuis la première publication de ces Leçons, M. Gauss, célèbre géomètre, a réalisé cette prédiction, et, par une application extrêmement ingénieuse de la théorie des nombres, il est parvenu à des résultats intéressants, entièrement nouveaux, sur la résolution des équations et sur l'inscription des polygones réguliers dans le cercle. (*Note de l'Auteur.*)

TROISIÈME SÉANCE.

SUR L'ALGÈBRE; DES PREMIÈRES OPÉRATIONS DE L'ALGÈBRE; DES PUISSANCES ET DES EXPOSANTS.

La considération des nombres, indépendamment de leur valeur et de tout système de numération, a donné naissance à l'Arithmétique universelle, que l'on a désignée sous le nom d'*Algèbre*. Pour rendre cette filiation sensible, supposons que l'on se soit proposé de partager le nombre treize en deux parties telles que la première surpasse de cinq la seconde; on aura pu raisonner ainsi : puisque la seconde partie est égale à la première diminuée de cinq, les deux parties réunies sont égales au double de la première, moins cinq; mais la somme de ces parties est égale à treize; en retranchant donc cinq du double de la première, on aura treize et, par conséquent, la première, prise deux fois, est égale à treize plus cinq, ou à dix-huit; cette partie est donc égale à neuf, et la seconde est égale à quatre.

En considérant d'autres nombres que treize et cinq, on trouve, par le même raisonnement, les deux parties demandées; mais, pour ne pas le recommencer chaque fois que l'on considère de nouveaux nombres, on a cherché à exprimer le résultat final, d'une manière indépendante de leur valeur. Pour cela, on a représenté les deux nombres par des caractères généraux, et les plus simples, pour nous, sont les lettres de l'alphabet. Soient donc a le plus grand de ces nombres et b le plus petit; en appliquant à ces deux caractères le raisonnement que nous venons de faire sur les deux nombres treize et cinq, on trouve aisément que la première partie demandée est égale à la moitié de la somme des deux nombres a et b.

Pour exprimer cette somme, ou, ce qui revient au même, pour indiquer l'addition du nombre b au nombre a, on se sert du signe $+$, dont on fait précéder le nombre que l'on veut ajouter; ainsi $a+b$ exprime la somme des deux nombres a et b.

Nous avons dit, en parlant des fractions, qu'une barre horizontale, au-dessus et au-dessous de laquelle on écrit deux nombres, indique la division du nombre supérieur par l'inférieur; $\frac{a+b}{2}$ exprime donc la moitié de la somme des deux nombres a et b; cette quantité est, par conséquent, l'expression générale de la première partie demandée; quelles que soient les valeurs numériques que l'on assigne aux lettres a et b, il ne s'agit que de les substituer dans cette expression, pour avoir cette partie.

Ces formules ou expressions générales, dont la précédente n'est qu'un exemple très simple, sont un des plus grands avantages de l'Algèbre, parce que, toutes les fois qu'un problème rentre dans ces formules, il est sur-le-champ résolu, et l'on n'a pas besoin de recommencer les raisonnements, souvent très compliqués, qui les ont fait découvrir. Il importe donc extrêmement d'étendre et de multiplier les méthodes et les formules générales, afin qu'elles puissent embrasser tous les cas qui se présentent dans les applications de l'Analyse. Mais, dans les sciences, comme dans les arts, le besoin est le premier et le principal inventeur; et c'est surtout aux besoins de la Physique céleste que l'Analyse, la Mécanique et l'Optique sont redevables de leurs progrès.

Les formules générales de l'Analyse sont maintenant très multipliées; mais elles sont éparses dans un grand nombre d'Ouvrages qu'il est souvent difficile de consulter. Le besoin d'un Ouvrage qui les rassemblerait toutes se fait sentir à chaque instant aux analystes.

Un second avantage de l'Algèbre, avantage qu'elle doit à la simplicité de son langage, est de faire apercevoir très facilement les rapports des objets. Le résultat que nous venons de trouver en fournit un exemple. On peut l'exprimer ainsi : *Le plus grand des deux nombres cherchés est égal à la moitié de leur somme, plus à la moitié de leur différence.* Cette égalité, ainsi exprimée, exige une attention assez grande pour paraître évidente; mais étant traduite en langage algébrique, son évidence

devient sensible. En effet, soient m le plus grand des deux nombres et n le plus petit, leur somme sera $m+n$. Pour indiquer leur différence, ou, ce qui revient au même, pour indiquer la soustraction de n du nombre m, on se sert du signe $-$, dont on fait précéder le nombre à soustraire; ainsi $m-n$ est l'excès de m sur n. La proposition que nous venons d'énoncer consiste donc en ce que m est égal à la moitié de $m+n$, plus à la moitié de $m-n$. Pour indiquer l'égalité, on se sert du signe $=$ placé entre les deux quantités que l'on égale entre elles; on a donc

$$m=\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}.$$

J'observerai ici qu'en inclinant l'une vers l'autre les deux lignes parallèles du signe $=$, on forme le signe $<$, qui sert à indiquer que la quantité placée vers la pointe est plus petite que la quantité placée vers l'ouverture; ainsi $a>b$ exprime que a est plus grand que b.

On nomme *équation* toute égalité exprimée algébriquement; les deux *membres* de l'équation sont les quantités séparées par le signe $=$.

L'équation précédente est la traduction analytique de la proposition énoncée, et, dans cette traduction, la vérité de la proposition se manifeste avec évidence; car si dans le second membre on ajoute les numérateurs des deux fractions qui ont le même dénominateur, et si l'on observe que $+n$ et $-n$ se détruisent, puisque l'on retranche ce que l'on ajoute, on aura

$$m=\frac{2m}{2},$$

ce qui est évident.

Non seulement l'Algèbre donne la facilité de saisir les rapports des objets, mais elle réduit les raisonnements à des opérations en quelque sorte mécaniques. Reprenons le problème que nous nous sommes proposé d'abord. En nommant x la première partie, $x-b$ sera la seconde; la somme de ces deux parties sera $2x-b$; mais cette somme est a, on a conséquemment

$$2x-b=a;$$

l'égalité ne sera point troublée, si l'on ajoute à chaque membre le nombre b, et alors on a

$$2x + b - b = a + b,$$

ou simplement

$$2x = a + b,$$

équation qui n'est que la première, dans laquelle la quantité $-b$ a passé d'un membre dans l'autre, en changeant seulement de signe. On voit, par le même raisonnement, que l'on peut faire passer généralement une quantité d'un membre dans l'autre, en l'effaçant dans le membre où elle se trouve, et en l'écrivant dans l'autre avec un signe contraire.

On peut encore multiplier ou diviser les deux membres d'une équation, par un même nombre, sans troubler l'égalité; en divisant donc par 2 les deux membres de la dernière équation, on aura

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

De là résulte cette règle générale pour résoudre les équations du premier degré à une seule inconnue (on nomme ainsi les équations dans lesquelles l'inconnue n'est élevée qu'à la première puissance) :

Faites passer toutes les quantités connues dans un seul membre, et toutes les quantités affectées de l'inconnue dans l'autre membre; divisez ensuite le membre composé des quantités connues, par la quantité totale qui multiplie l'inconnue dans l'autre membre; le quotient sera la valeur de l'inconnue.

Il importe, dans l'enseignement, d'exercer les élèves dans l'art de mettre les problèmes en équations; pour cela il faut leur proposer un grand nombre de questions délicates, qui demandent une attention soutenue et des considérations fines, pour en traduire les conditions en langage algébrique; ainsi les élèves contractent l'habitude d'envisager les objets sous toutes leurs faces; ils apprennent à se défier des premiers aperçus souvent trompeurs, car le résultat du calcul redresse toujours les erreurs de ce genre.

Ce sont principalement les problèmes qui dépendent de plusieurs inconnues, dont la traduction algébrique est difficile; on est alors

conduit à plusieurs équations entre ces inconnues. Si toutes ces équations sont du premier degré, c'est-à-dire si chaque inconnue n'y est élevée qu'à la première puissance, et n'est pas multipliée par les autres, on prend, dans l'une de ces équations, la valeur d'une des inconnues, comme si toutes les autres étaient connues; on substitue cette valeur dans les autres équations, et l'on a ainsi une équation et une inconnue de moins; en continuant d'opérer de cette manière, on parvient à une équation qui ne renferme qu'une inconnue; on en tire la valeur, qui donne, en revenant sur ses pas, les valeurs de toutes les autres inconnues; mais ces diverses substitutions exigent que l'on sache ajouter, soustraire, multiplier et diviser les quantités algébriques. Nous allons indiquer les règles de ces diverses opérations.

Pour ajouter ensemble plusieurs quantités algébriques, il suffit de les écrire les unes à la suite des autres avec leurs signes, en observant que les quantités qui n'ont point de signe sont censées avoir le signe $+$; on réduit ensuite en un seul terme tous les termes semblables, c'est-à-dire ceux qui ne diffèrent que par leurs coefficients numériques. Pour cela, on fait une somme de tous les coefficients positifs, une autre somme de tous les coefficients négatifs; on retranche la plus grande somme de la plus petite, abstraction faite du signe, et l'on donne à la différence le signe de la plus grande somme.

Pour soustraire une quantité algébrique d'une autre on écrit, à la suite de la quantité dont on soustrait, la quantité à soustraire, en changeant les signes de tous ses termes; ensuite on fait la réduction. Cette règle est évidente quand le nombre à soustraire a le signe $+$; supposons qu'il ait le signe $-$, et que l'on se propose, par exemple, de soustraire $-b$ de a; je dis que le résultat de l'opération est $a + b$. En effet, le nombre a égale $a + b - b$; en retrancher $-b$, sous cette forme, c'est évidemment effacer $-b$, et alors il reste $a + b$.

Quand on ne veut qu'indiquer une multiplication, on se sert du signe $\times$, ou simplement du point que l'on place entre le multiplicande et le multiplicateur. Si les deux quantités que l'on multiplie sont complexes, c'est-à-dire composées de plusieurs termes, on les renferme chacune entre deux parenthèses, ou l'on prolonge une barre horizontale au-dessus; ainsi, pour indiquer le produit de $a+b$ par $c-d$, on écrit

$$(a+b)\times(c-d) \quad \text{ou} \quad \overline{a+b}\times\overline{c-d}.$$

Lorsqu'on multiplie une lettre plusieurs fois par elle-même, on la répète autant de fois qu'elle doit être ainsi multipliée, ou, pour abréger, on ne l'écrit qu'une seule fois, en plaçant vers le haut le nombre de fois que cette lettre était écrite; ce nombre est ce que l'on nomme *exposant*.

Pour effectuer la multiplication, si le multiplicande et le multiplicateur ne renferment qu'un terme, on multiplie leurs coefficients numériques, on ajoute les exposants des lettres semblables, en observant que toute quantité qui n'a point d'exposant est censée avoir l'unité pour exposant; enfin, on écrit à la suite les unes des autres les lettres dissemblables.

Quant au signe du produit, il doit être positif, si les signes du multiplicande et du multiplicateur sont les mêmes; s'ils sont différents, le signe du produit doit être négatif. Cette règle présente quelques difficultés; on a de la peine à concevoir que le produit de $-a$ par $-b$ soit le même que celui de a par b. Pour rendre cette identité sensible, nous observerons que le produit de $-a$ par $+b$ est $-ab$, puisque ce produit n'est que $-a$ répété autant de fois qu'il y a d'unités dans b. Nous observerons ensuite que le produit de $-a$ par $+b-b$ est nul, puisque le multiplicateur est nul; ainsi, le produit de $-a$ par $+b$ étant $-ab$, le produit de $-a$ par $-b$ doit être d'un signe contraire, ou égal à $+ab$, pour le détruire.

Si le multiplicande et le multiplicateur sont complexes, on multiplie chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, on ajoute tous ces produits et l'on fait la réduction.

Quant à la division, si le dividende et le diviseur ne renferment qu'un seul terme, on divise le coefficient numérique du dividende par celui du diviseur; on retranche l'exposant des lettres du diviseur de l'exposant des lettres semblables du dividende, et s'il y a dans le diviseur des lettres qui ne soient pas dans le dividende, on ne fait qu'indiquer la division par ces lettres; enfin on donne au quotient le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que les signes du dividende et du diviseur sont les mêmes ou contraires. Tout cela résulte de ce que le produit du quotient par le diviseur est égal au dividende.

Ici l'analogie conduit à une remarque importante. Si l'exposant d'une lettre commune au dividende et au diviseur est plus grand dans le diviseur que dans le dividende, alors, en donnant à la lettre dans le quotient un exposant égal à celui du dividende moins l'exposant du diviseur, ce nouvel exposant est négatif; ainsi, a^2 divisé par a^5 donne a^{-3} pour quotient; mais a^2, divisé par a^5, est $\frac{a^2}{a^5}$ ou $\frac{1}{a^3}$; on a donc

$$a^{-3}=\frac{1}{a^3}.$$

On voit ainsi qu'une puissance négative n'est que l'unité divisée par la même puissance prise positivement. Cette manière d'exprimer les divisions de l'unité par les puissances est du plus grand usage dans l'Analyse.

Si l'on avait à diviser a^3 par a^3, le quotient, suivant la règle générale, serait a^0, mais ce quotient est évidemment l'unité; ainsi, toute quantité élevée à la puissance zéro remplace l'unité.

Si le dividende et le diviseur sont complexes, on ordonne l'un et l'autre par rapport aux puissances d'une même lettre, en écrivant les premiers, les termes dans lesquels cette lettre a le plus grand ou le plus petit exposant; ensuite la division se fait comme celle des nombres : on divise le premier terme du dividende par celui du diviseur, et l'on a le premier terme du quotient, que l'on multiplie par le diviseur, pour retrancher le produit du dividende. La différence forme le second dividende partiel, qui, divisé pareillement par le diviseur, donne le second terme du quotient, et ainsi de suite.

Quand la division n'est pas exactement possible, on peut réduire le quotient dans une suite infinie, ordonnée par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une des lettres du dividende et du diviseur; ainsi, l'unité divisée par $1 - x$ donne la suite infinie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Cette opération est analogue à celle par laquelle on réduit une fraction ordinaire en décimales, au moyen du zéro que l'on ajoute après la virgule, dans son numérateur; car il est visible que les nombres décimaux sont des suites ordonnées par rapport aux puissances successives d'un dixième. La réduction des fractions algébriques en suites infinies paraît bien simple; elle fait cependant époque dans l'histoire de l'Analyse, comme ayant donné la première suite pour la quadrature des courbes.

On ajoute, on soustrait, on multiplie et l'on divise les fractions algébriques; on les réduit à leur moindre expression, exactement comme les fractions numériques.

La formation des puissances et l'extraction des racines se font encore de la même manière en Algèbre qu'en Arithmétique, mais on peut considérablement abréger ces opérations par la formule suivante :

Concevez la quantité décomposée en deux parties; soient a et b ces deux parties, et n la puissance à laquelle leur somme doit être élevée, on a

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots.$$

La loi des termes est évidente. Cette formule est ce que l'on nomme formule du binome, dont Newton est l'inventeur. Ce qu'elle offre de remarquable c'est qu'elle s'étend également aux puissances positives, négatives, entières et fractionnaires, en sorte qu'elle a généralement lieu, quelle que soit la valeur de n; c'est ce qui la rend d'un si grand usage dans toute l'Analyse; il faut donc s'attacher dans l'enseignement à la démontrer et à développer les applications que l'on peut en faire. Lorsqu'on en fait usage pour l'extraction des racines, n devient un nombre fractionnaire, et alors on prend la première partie a du binome, plus grande que b, et telle que l'on puisse en extraire la racine proposée.

Je dois ici vous présenter deux observations sur la manière dont il

paraît que Newton parvint à cette formule. Il observa d'abord la loi des coefficients numériques des puissances du binome dans le carré, le cube, la quatrième puissance, etc., et bientôt la loi générale se manifesta. Cette manière de s'élever aux lois générales, par la considération des cas particuliers, se nomme *induction*. Elle est la source de presque toutes les découvertes dans l'Analyse et dans la nature dont tous les phénomènes sont, comme nous l'avons déjà dit, les résultats mathématiques d'un petit nombre de lois invariables; ainsi, la marche de Newton dans la découverte de la gravitation universelle a été exactement la même que dans celle de la formule du binome. Mais, dans cette méthode d'induction, il faut éviter de généraliser trop promptement, car il arrive quelquefois qu'une loi qui se soutient dans un grand nombre de cas est démentie par les cas suivants. La méthode d'induction, quoique excellente pour découvrir les vérités générales, ne doit donc pas dispenser de les démontrer avec rigueur.

Newton étendit ensuite aux puissances fractionnaires et négatives l'expression analytique qu'il avait trouvée dans les puissances entières et positives. Vous voyez dans cette extension un des grands avantages du langage algébrique, qui exprime des vérités beaucoup plus générales que celles que l'on voulait lui faire exprimer; en sorte qu'en lui donnant toute l'étendue qui lui convient, on voit sortir une foule de vérités nouvelles, de formules qui n'avaient été trouvées que par des suppositions particulières. On fut d'abord très réservé à admettre ces conséquences générales que fournissent les formules analytiques; mais un grand nombre d'exemples les ayant justifiées, on s'abandonne aujourd'hui, sans crainte, à l'Analyse et à toutes les conséquences qu'elle nous présente, et les plus heureuses découvertes ont été le fruit de cette hardiesse. Observons cependant qu'il y a quelques précautions à prendre pour éviter de donner aux formules plus de généralité qu'elles n'en comportent, et qu'il est toujours bon de démontrer en rigueur les résultats que l'on obtient.

Quand on ne veut qu'indiquer une extraction de racine, on se sert du signe $\sqrt{}$ sous lequel on renferme la quantité proposée; ce radical, par lui-même, n'indique qu'une racine carrée; mais pour lui faire indiquer une racine cubique ou une racine quatrième, etc., on écrit au-dessus les nombres 3, 4, ...; ainsi $\sqrt[3]{a+b}$ indique la racine cubique de $a+b$. Ce signe et les précédents forment, avec les lettres de l'alphabet, les éléments de la langue algébrique, qui, comme l'on voit, est aussi simple qu'elle est générale. On verra par la suite de nouvelles manières d'envisager les grandeurs, introduire encore quelques nouveaux signes dans l'Analyse.

QUATRIÈME SÉANCE.

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS.

Après avoir exposé, dans la précédente Leçon, les éléments du langage algébrique, je reviens à la théorie des équations. J'ai indiqué la méthode de résoudre les équations du premier degré, méthode que l'on est parvenu à simplifier, en déterminant directement la valeur de chaque inconnue, au moyen des quantités connues de ces équations. La considération des carrés des nombres a conduit aux équations du second degré. On appelle ainsi les équations dans lesquelles l'inconnue est élevée à sa deuxième puissance.

Supposons que l'on se propose de trouver un nombre tel que, si de trois fois ce nombre on retranche son carré, le reste soit égal à 2. En nommant x ce nombre, $3x$ en fera le triple, et son carré sera x^2; leur différence sera donc $3x - x^2$; ainsi l'on aura l'équation

$$3x - x^2 = 2.$$

C'est la traduction algébrique de la question proposée; il s'agit d'en tirer la valeur de l'inconnue.

Pour cela, on commence par rendre le carré de l'inconnue positif, ce que l'on fait en multipliant tous les termes de l'équation par -1, et alors on a

$$x^2 - 3x = -2.$$

Si, par l'addition d'un terme connu à chaque membre de l'équation, on parvenait à rendre le premier membre un carré parfait, il est clair qu'en extrayant la racine carrée de chaque membre, l'équation s'abaisserait au premier degré; or, on sait que le carré d'un binome est égal au carré du premier terme, plus au double du produit du premier terme par le second, plus au carré du second; en considérant donc x comme le premier terme du binome, et $-3x$ comme étant égal au produit de x par le double du second, $-\frac{3}{2}$ sera ce second terme; il suffit donc d'ajouter son carré ou $\frac{9}{4}$ au premier membre de l'équation précédente, pour le rendre un carré parfait. Cette équation devient ainsi

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}-2.$$

En extrayant la racine carrée de chaque membre, on a

$$x-\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{9}{4}-2}.$$

Mais on doit faire ici une observation importante. La racine carrée d'un nombre peut être également affectée du signe $+$ ou du signe $-$; car le carré de $-a$ est le même que celui de $+a$; ainsi, en extrayant la racine carrée de chaque membre de l'équation précédente, le signe radical peut être indifféremment affecté de l'un ou l'autre de ces signes, et rien n'indique lequel doit être employé. Pour exprimer cette double signification du radical, on le fait précéder du double signe $\pm$. On a ainsi

$$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2};$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

On a donc pour x les deux valeurs $x=2$ et $x=1$, suivant que l'on prend le signe $+$ ou le signe $-$, et il est visible que chacune de ces valeurs satisfait également à la question proposée. Ces valeurs ont été nommées *racines* de l'équation.

Vous voyez par là que les équations du deuxième degré ont un caractère très distinct de celles du premier degré, dans lesquelles l'inconnue n'est susceptible que d'une seule valeur, et vous pouvez déjà en conclure que, dans les équations du troisième degré et des degrés supérieurs, où l'inconnue est élevée à la troisième puissance, et à des puis-

sances plus élevées, l'inconnue a autant de valeurs qu'il y a d'unités dans l'exposant de sa plus haute puissance.

Si, dans la question proposée, la différence $3x-x^2$, au lieu d'être égale à 2, était supposée égale à 3, on aurait

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-3} \quad \text{ou} \quad x=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}.$$

La quantité $\sqrt{-3}$ est impossible; car un nombre réel, positif ou négatif, ne peut avoir pour carré un nombre négatif; le problème qui conduit à ces valeurs est donc impossible. Ces valeurs se nomment *imaginaires;* on peut les mettre sous la forme d'une quantité réelle augmentée ou diminuée d'une autre quantité réelle multipliée par $\sqrt{-1}$; ainsi les deux valeurs précédentes de x peuvent être mises sous cette forme, $\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}}.\sqrt{-1}$, et l'on voit qu'à cause du double signe $\pm$, dont le radical $\sqrt{-1}$ doit être affecté, la racine imaginaire est double; en sorte que les racines d'une équation du deuxième degré sont, ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires.

Quoique les quantités imaginaires soient impossibles, cependant leur considération est du plus grand usage dans l'Analyse. Souvent les grandeurs réelles se présentent sous la forme de plusieurs imaginaires, dans lesquelles tout ce qu'il y a d'imaginaire se détruit mutuellement, quoiqu'il soit difficile de le reconnaître à l'inspection des formules. On verra bientôt que l'expression des racines des équations du troisième degré est dans ce cas, lorsque toutes les racines sont réelles; d'ailleurs, la comparaison des grandeurs réelles entre elles, et des imaginaires avec les imaginaires, est un moyen fécond de l'Analyse, pour déterminer les grandeurs.

Proposons-nous encore le problème suivant :

Deux lumières, dont l'une est quatre fois plus intense que l'autre, étant séparées par un intervalle de trois pieds, déterminer, sur la droite qui les joint, le point qu'elles éclairent également.

Si l'on nomme x la distance de la plus faible lumière à ce point, cette distance étant supposée dirigée vers la plus forte lumière, $3-x$ sera la distance de la plus forte lumière au même point; or, on sait que la force de la lumière décroît en raison du carré de la distance, en sorte que $\frac{1}{x^2}$ sera la force de la plus petite lumière, à la distance x, et $\frac{4}{(3-x)^2}$ sera la force de la plus grande, à la distance $3-x$; ainsi, ces forces devant être égales par la condition du problème, on a

$$\frac{1}{x^2}=\frac{4}{(3-x)^2},$$

ce qui donne, après les réductions convenables,

$$x^2+2x=3;$$

d'où l'on tire

$$x=-1\pm 2.$$

Les deux valeurs de x sont donc $x=1$ et $x=-3$. La première apprend que le point également éclairé par les deux lumières, et placé entre elles, est à 1 pied de distance de la plus faible. La seconde valeur est négative; elle montre ce que l'on pouvait ignorer d'abord, savoir qu'il existe un second point également éclairé par les lumières, et placé à 3 pieds de distance de la plus faible, mais en sens contraire du premier, c'est-à-dire sur la droite qui joint les deux lumières, prolongée du côté opposé à la plus forte. En effet, il est visible que ce point étant à 3 pieds de distance de la plus faible lumière, et à 6 pieds de distance de l'autre, il est également éclairé par les deux lumières. Vous voyez par là que les valeurs négatives satisfont, comme les positives, aux problèmes; mais elles doivent être prises dans un sens opposé à celui des valeurs que l'on considère comme positives. Ces solutions inattendues nous prouvent la richesse de la langue algébrique, à la généralité de laquelle rien n'échappe, quand on la sait bien lire.

Élevons-nous maintenant à la considération de l'équation la plus générale du deuxième degré. Quelle que soit cette équation, en transposant tous ses termes dans un seul membre, et en la divisant par le

coefficient du carré de l'inconnue, on peut lui donner cette forme,

$$x^2+px+q=0;$$

p et q étant des quantités quelconques positives ou négatives. Le premier membre de cette équation devient le carré de $x+\frac{1}{2}p$, en lui ajoutant $\frac{1}{4}p^2$; on a donc

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=\frac{1}{4}p^2-q;$$

d'où l'on tire

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

Telle est la forme générale des racines des équations du deuxième degré, et vous voyez que ces racines ne peuvent être imaginaires que dans le cas où q est positif, et plus grand que $\frac{1}{4}p^2$.

En examinant avec attention la raison pour laquelle l'équation du deuxième degré est susceptible de deux valeurs que nous désignerons par a et b, il est facile de reconnaître que la quantité x^2+px+q est le produit des deux $x-a$ et $x-b$, et qu'ainsi l'équation du deuxième degré peut être mise sous la forme

$$(x-a)(x-b)=0.$$

Alors il est visible que cette équation est également satisfaite par la supposition de $x=a$ et par celle de $x=b$. Cette manière d'envisager les équations du deuxième degré, étendue aux équations d'un degré quelconque, est la clef de toute la théorie des équations; il importe donc de la développer et d'en faire sortir les principaux résultats de cette théorie.

Je ne puis ici que tracer la route, en indiquant les vérités les plus remarquables, et en vous laissant le soin de rétablir les vérités intermédiaires et les démonstrations que je suis forcé de supprimer. J'exhorte ceux qui veulent approfondir ces matières à se réunir de temps en temps pour cet objet. Je me ferai un devoir d'assister, le plus souvent qu'il me sera possible, à ces conférences, heureux d'être utile à ceux d'entre vous que leur goût et leurs talents appellent à répandre les sciences mathématiques et à reculer leurs bornes.

Considérons généralement l'équation

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \ldots + h = 0.$$

Soient $a, b, c, d, \ldots$ ses n racines; le premier membre sera le produit des n facteurs $x-a, x-b, x-c, x-d, \ldots$. En formant ce produit on trouve : 1° que le coefficient p est égal à la somme des racines, prise avec le signe $-$; 2° que le coefficient q est égal à la somme des produits deux à deux des mêmes racines; 3° que le coefficient r est égal à la somme des produits trois à trois des mêmes racines, prise avec le signe $-$, et ainsi de suite; enfin, que le dernier terme h est le produit de toutes les racines, pris avec le signe $+$, ou avec le signe $-$, suivant que le degré de l'équation est pair ou impair.

Les coefficients $p, q, r, \ldots, h$ étant supposés des nombres entiers, l'équation ne peut pas avoir pour racine un nombre rationnel, à moins qu'il ne soit entier. Dans ce cas, cette racine est un des diviseurs du terme h; en substituant donc, dans l'équation proposée, au lieu de x, chacun de ces diviseurs pris successivement avec le signe $+$ et avec le signe $-$, ceux qui y satisferont seront les racines commensurables de l'équation; si a est une de ces racines, $x-a$ sera diviseur de son premier membre; ainsi l'on aura ses diviseurs commensurables du premier degré. On a imaginé divers artifices pour simplifier cette méthode et pour l'étendre aux diviseurs commensurables des degrés supérieurs. Vous les trouverez exposés, avec autant de clarté que d'élégance, dans l'*Algèbre* de Clairaut.

Dans le cas où l'équation a des racines égales, on peut obtenir fort simplement ces racines, et par conséquent le diviseur commensurable formé de leur produit. Pour cela, on multiplie chaque terme de l'équation par l'exposant de l'inconnue dans ce terme; le commun diviseur de l'équation proposée, et de cette même équation ainsi multipliée, donne, en l'égalant à zéro, toutes les racines égales de l'équation.

On nomme *fonction* d'une ou de plusieurs grandeurs, toute quantité

qui les contient d'une manière quelconque. La fonction est *rationnelle* si elle ne renferme point ces grandeurs sous le signe radical; elle est entière si elle ne contient point de fractions.

Les coefficients $p, q, r, \ldots$ sont des fonctions des racines de l'équation telles qu'elles restent les mêmes, en y échangeant les racines entre elles. Je nomme *fonction invariable* toute fonction des racines qui jouit de cette propriété. Telles sont les sommes des carrés, des cubes, etc. des racines.

Toute fonction invariable des racines peut être déterminée au moyen des coefficients de l'équation. Cette détermination est un problème très intéressant, pour la solution duquel les analystes ont donné diverses méthodes générales qu'il est bon de connaître. La méthode suivante suffit pour ce qui doit suivre.

On peut obtenir successivement la somme des puissances des racines, au moyen de cette équation : la somme des puissances m des racines, plus la somme des puissances $m-1$, multipliée par p, plus la somme des puissances $m-2$, multipliée par q, plus la somme des puissances $m-3$, multipliée par r, plus, etc., plus enfin le coefficient de x^{n-m} dans l'équation proposée, multiplié par m, est égale à zéro.

On doit observer de n'admettre dans cette formule que des puissances positives entières, et égales ou plus grandes que l'unité; on doit observer encore que le coefficient de x^{n-m} est nul, si m surpasse n.

Pour avoir la somme des termes de la forme $a^m b^{m'}$ on multipliera la somme des puissances a^m par la somme des puissances $a^{m'}$; le produit sera formé de la somme des puissances $a^{m+m'}$ et de la somme des termes de la forme $a^m b^{m'}$; ainsi l'on aura cette dernière somme au moyen de celle des puissances, et, par conséquent, en fonction des coefficients de l'équation.

Pour avoir la somme des termes de la forme $a^m b^{m'} c^{m''}$, on multipliera la somme des termes de la forme $a^m b^{m'}$ par la somme des puissances $a^{m''}$; le produit sera formé : 1° de la somme des termes de la forme $a^{m+m''} b^{m'}$; 2° de la somme des termes de la forme $a^m b^{m'+m''}$; 3° de la somme des termes de la forme $a^m b^{m'} c^{m''}$; on aura donc encore cette dernière somme en fonction des coefficients de l'équation, et ainsi de suite.

Maintenant, toute fonction invariable est égale à une ou plusieurs sommes de la forme précédente; elle peut donc être ainsi déterminée au moyen des coefficients $p, q, r, \ldots$ de l'équation proposée.

Si l'on a une fonction de racines qui subisse des variations, en y échangeant toutes les racines de l'équation, les unes dans les autres, alors en désignant par $a', b', c', \ldots$ ces divers changements que je suppose être au nombre de i, cette fonction sera donnée par une équation en z résultant du produit des i facteurs $z-a'$, $z-b'$, $z-c'$, ... En développant ce produit, les coefficients des puissances de z seront des fonctions invariables des racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation primitive, et pourront être déterminés au moyen de ses coefficients. Par exemple, la fonction $(a-b)^2$ subit $\frac{n(n-1)}{2}$ changements, en y substituant pour a et b toutes les racines de l'équation primitive; l'équation en z, dont les diverses racines sont, dans ce cas, les carrés des différences des racines $a, b, c, \ldots$, est donc du degré $\frac{n(n-1)}{2}$.

Toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle, d'un signe contraire à celui de son dernier terme; car, si l'on suppose, par exemple, ce dernier terme positif, en substituant dans le premier membre de l'équation, au lieu de l'inconnue, toutes les valeurs, depuis zéro jusqu'à l'infini négatif, ce membre passera, par degrés insensibles, d'une valeur positive à une valeur infinie négative; d'où il suit qu'une des valeurs de l'inconnue, intermédiaire entre zéro et l'infini négatif, rend ce premier membre nul, et, par conséquent, elle est une des racines de la proposée.

Le même raisonnement fait voir que, si l'équation étant d'un degré pair, son dernier terme est négatif, elle a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.

Les racines imaginaires des équations sont de la forme $m+n\sqrt{-1}$, m et n étant des quantités réelles, et si l'équation a pour racines $m+n\sqrt{-1}$, elle a pareillement pour racine $m-n\sqrt{-1}$; en sorte que les racines imaginaires sont toujours en nombre pair, et l'équation, si elle est d'un degré pair, peut être décomposée en facteurs du deuxième degré, dont les coefficients sont réels. Ce théorème important a été admis par les analystes, avant qu'ils en aient eu une démonstration rigoureuse. D'Alembert est le premier qui l'ait démontré, en faisant voir en même temps que toutes les imaginaires connues se réduisent à la forme $m \pm n\sqrt{-1}$.

Deux termes consécutifs d'une équation, qui ont le même signe, forment une *permanence;* s'ils ont différents signes ils forment une *variation*. Par termes consécutifs j'entends ceux dans lesquels les exposants de l'inconnue ne diffèrent que d'une unité.

Il ne peut pas y avoir, dans une équation, plus de racines réelles positives que de variations; il ne peut pas y avoir plus de racines réelles négatives que de permanences.

De là il suit que, si toutes les racines sont réelles, il y a autant de racines positives que de variations, et autant de racines négatives que de permanences. C'est la fameuse règle de Descartes, qui ne l'a trouvée que par induction. Elle a été démontrée depuis, et même généralisée par de Gua, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1741.

Si quelques-uns des termes de l'équation manquent, ce qui revient à supposer leurs coefficients égaux à zéro, on peut alors les faire précéder, à volonté, des signes + ou −, et si le nombre des variations n'est pas le même dans ces hypothèses, l'équation a nécessairement des racines imaginaires. Par exemple, si deux termes consécutifs manquent à la fois, l'équation a des racines imaginaires, et l'équation $x^n+1=0$ a toutes ses racines imaginaires si n est pair, et elle n'a qu'une racine réelle si n est impair.

On n'a point encore de règle générale pour reconnaître, dans une équation proposée, le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires. Plusieurs géomètres ont donné les moyens de déterminer, dans les équations du troisième et du quatrième degré, le nombre des racines imaginaires, celui des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives. Je citerai, entre autres, Dionis-Duséjour, que la mort vient d'enlever aux sciences et, en particulier, à l'Astronomie qu'il a considérablement enrichie par des applications nombreuses et importantes de l'Analyse aux divers problèmes astronomiques. Ce savant, illustre et regrettable sous tous les rapports, a laissé en manuscrit un beau Mémoire, dans lequel il étend aux équations du cinquième degré ses recherches publiées dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1772.

On peut toujours déterminer si toutes les racines d'une équation sont réelles, en formant l'équation dont les racines soient les carrés des différences des racines de la proposée; car il est visible que toutes les racines de cette nouvelle équation seront réelles et positives si toutes les racines de la proposée sont réelles; l'équation du carré des différences des racines aura donc alors tous ses termes alternativement positifs et négatifs. Réciproquement, si cela a lieu, la proposée n'a aucune racine imaginaire, car les deux racines imaginaires, $m+n\sqrt{-1}$ et $m-n\sqrt{-1}$, donneraient la racine négative $-4n^2$, dans l'équation du carré des différences des racines; mais, par le théorème exposé ci-dessus, cette équation ne peut pas avoir des racines négatives si ses termes sont alternativement positifs et négatifs; toutes les racines de la proposée sont donc alors réelles.

On peut faire subir aux équations diverses transformations utiles; si l'on veut, par exemple, changer les racines positives en négatives, et réciproquement, il suffit de changer les signes des termes dans lesquels l'inconnue est élevée à une puissance impaire. On peut augmenter ou diminuer, à volonté, les racines d'une équation, d'une quantité quelconque, et faire ainsi disparaître un de ses termes, x étant l'inconnue, n le degré de l'équation et p le coefficient du second terme; si l'on suppose $x=y-\frac{p}{n}$, on aura une nouvelle équation en y du degré n, dans laquelle le coefficient de y^{n-1} sera nul, et dont la forme sera, par cette raison, un peu plus simple que celle de la proposée.

CINQUIÈME SÉANCE.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS. THÉORÈME SUR LA FORME DE LEURS RACINES IMAGINAIRES.

Je vous ai présenté, dans la Leçon précédente, les propriétés les plus remarquables des équations; je vais m'occuper, dans celle-ci, de leur résolution.

Il existe une classe nombreuse d'équations que l'on peut résoudre comme celles du deuxième degré; elles sont comprises dans cette formule générale :

$$x^{2n}+px^n+q=0.$$

En les résolvant par la méthode que nous avons donnée, relativement aux équations du deuxième degré, on a

$$x=\sqrt[n]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}.$$

Cette valeur de x donne lieu à quelques observations. D'abord, l'extraction exacte de la racine de la quantité renfermée sous le radical est quelquefois possible; ainsi, en supposant $n=2$ et q égal à un carré que nous représentons par m^2, on a

$$x=\pm\sqrt{-\frac{1}{4}p+\frac{1}{2}m}\pm\sqrt{-\frac{1}{4}p-\frac{1}{2}m}.$$

Les géomètres ont imaginé, pour faire ces extractions, lorsqu'elles sont possibles, diverses méthodes qu'il est bon de connaître, pour donner aux expressions analytiques toute la simplicité dont elles sont susceptibles.

On peut observer ensuite que si l'on ne considère que les racines auxquelles on parvient par les méthodes arithmétiques de l'extraction des racines, l'expression précédente de x n'a que deux valeurs, et cependant l'équation proposée étant du degré $2n$, elle doit avoir $2n$ racines. Pour les déterminer, nommons h et h' les deux racines précédentes, déterminées par les méthodes arithmétiques; nommons ensuite 1, α, α', ... les n racines de l'équation $x^n - 1 = 0$, racines qui sont les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; alors les $2n$ racines de l'équation primitive seront $h, \alpha h, \alpha' h, \ldots, h', \alpha h', \alpha' h', \ldots$. Tout se réduit donc à déterminer les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$.

Si $n = 2$, ces racines sont ± 1.

Si $n = 3$, l'une des racines est l'unité. En divisant ensuite l'équation $x^3 - 1 = 0$ par $x - 1$, on a

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Si $n = 4$, les quatre racines sont ± 1, $\pm\sqrt{-1}$.

On peut déterminer algébriquement ces diverses racines, lorsque n ne surpasse pas 10 ([1]). En traitant de l'application de l'Algèbre à la Géométrie nous donnerons le moyen d'obtenir toutes les racines de l'équation $x^n \pm 1 = 0$, quelle que soit n. Nous observerons seulement ici que 1 et α étant deux racines de l'équation $x^n - 1 = 0$, les $n - 2$ autres racines sont $\alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}$, si n est un nombre premier.

Considérons présentement les équations du troisième et du quatrième degré. Depuis longtemps les analystes ont résolu ces équations par diverses méthodes ingénieuses; elles consistent à transformer, par des substitutions convenables, l'équation que l'on veut résoudre, dans une autre qui puisse être résolue à la manière des équations d'un degré inférieur, et à déterminer, au moyen des racines de cette nouvelle équation que l'on nomme *réduite*, toutes les racines de la proposée.

([1]) Depuis l'époque de la première publication de ces Leçons, M. Gauss est parvenu, par une analyse extrêmement remarquable, à déterminer algébriquement ces racines pour un degré quelconque. (*Note de l'Auteur.*)

Il est visible que ces dernières racines étant données au moyen des racines de la réduite, elles en sont des fonctions, et qu'ainsi les racines de la réduite sont elles-mêmes fonctions des racines de la proposée. Toutes les méthodes de résoudre une équation se réduisent donc à déterminer une fonction de ses racines qui dépende d'une équation d'un degré inférieur et qui soit telle qu'elle donne facilement les racines de la proposée. En considérant sous ce point de vue les diverses solutions des équations du troisième et du quatrième degré, il en résulte une méthode de les résoudre puisée dans la nature même de ces équations, et qui a l'avantage d'éclairer ces solutions, d'en montrer les rapports et de faire voir comment, par des procédés très différents, elles conduisent cependant à des résultats identiques; ainsi, quoique cette méthode soit un peu plus longue que les méthodes indirectes, je la crois préférable dans un cours destiné à développer les vrais principes des sciences. Je dois observer ici que cette méthode de résoudre les équations du troisième et du quatrième degré et le rapprochement des méthodes connues pour le même objet ont été donnés de la manière la plus générale et la plus lumineuse par M. Lagrange, dans deux Mémoires insérés parmi ceux de l'Académie des Sciences de Berlin, pour les années 1770 et 1771; je vous engage pareillement à voir, sur cette matière, un excellent Mémoire de Vandermonde, imprimé dans le Volume de l'Académie des Sciences pour l'année 1771 ([1]), et l'Ouvrage de Waring, intitulé *Meditationes algebraicæ*.

Pour exposer d'une manière uniforme ce que l'on sait sur la résolution des équations, nous allons reprendre celle de l'équation du deuxième degré,

$$x^2 + px + q = 0.$$

([1]) Dans ce Mémoire, Vandermonde donne l'expression de la racine d'une équation du cinquième degré dont dépend la résolution de l'équation

$$x^{11} - 1 = 0,$$

et l'on peut dire qu'il est le premier qui ait franchi les limites dans lesquelles la résolution des équations à deux termes se trouvait resserrée. Malheureusement ce résultat important fut longtemps ignoré.

Consulter *Œuvres de Lagrange*, t. VIII, p. 355-360.

Nommons a et b ses deux racines. Leur somme $a+b$ est, comme on l'a vu, égale à $-p$; il ne s'agit donc plus que d'avoir la valeur d'une autre fonction des racines qui, combinée avec l'égalité précédente, détermine chacune de ces racines, en ne résolvant que des équations du premier degré. Pour cela, il faut que la fonction cherchée soit de la forme $la+mb$; les fonctions de cette forme, dans lesquelles les quantités ne sont élevées qu'à la première puissance et ne sont point multipliées les unes par les autres, se nomment *fonctions linéaires*. La précédente est susceptible de deux combinaisons, en y changeant a en b, et réciproquement; elle dépend donc d'une équation du deuxième degré, excepté dans le cas où $l=m$; mais alors cette fonction ne donne que la somme des racines qui est déjà connue. Puisque nous sommes forcés, pour déterminer la fonction $la+mb$ dont nous avons besoin, de résoudre une équation du deuxième degré, il faut que cette équation puisse se résoudre par une simple extraction de racines, et qu'ainsi elle ne renferme que le carré de l'inconnue. Dans ce cas, ses deux racines sont égales mais de signes contraires; il faut donc déterminer les deux coefficients l et m, de manière que la fonction $la+mb$ ne change point de valeur et prenne un signe contraire, en y changeant a en b et réciproquement, ce qui donne

$$la+mb=-lb-ma$$

ou

$$l=-m,$$

et si l'on suppose, pour simplifier, $l=1$, la fonction cherchée sera $a-b$; en la désignant par z, la valeur de z sera donnée par l'équation

$$[z-(a-b)][z-(b-a)]=0$$

ou

$$z^2=a^2+b^2-2ab.$$

Or, on a

$$a^2+b^2=p^2-2q, \qquad ab=q;$$

donc

$$z^2=p^2-4q,$$

d'où l'on tire z ou $a-b$ égal à $\sqrt{p^2-4q}$. En combinant cette égalité

avec celle-ci $a+b=-p$, on trouve, pour a et b, les deux racines que nous avons données dans la Leçon précédente.

Il est visible que ces deux racines sont réelles ou imaginaires, suivant que p^2-4q est positif ou négatif. Quand les racines sont réelles, leur signe est le même si q est positif; enfin, si elles sont de même signe, elles ont un signe contraire à p.

En supposant l'équation générale du troisième degré privée, pour plus de simplicité, de son second terme, elle prend la forme

$$x^3+px+q=0.$$

Soient a, b, c ses trois racines et cherchons *a priori* une fonction de ces racines qui ne dépende que d'une équation du deuxième degré et qui les détermine facilement. La forme la plus simple que l'on puisse supposer à cette fonction est celle-ci : $la+mb+nc$; en y échangeant entre elles les racines a, b, c, on a six combinaisons différentes; ainsi, l'équation dont cette fonction dépend est du sixième degré. Pour en faire usage, il faut qu'elle soit résoluble à la manière des équations du deuxième degré, et qu'ainsi le cube de cette fonction ne dépende que d'une équation du deuxième degré. Alors, en nommant h et h' ses deux racines et en désignant par 1, α et α' les trois racines cubiques de l'unité, les six valeurs de la fonction proposée seront

$$h, \quad \alpha h, \quad \alpha' h, \quad h', \quad \alpha h', \quad \alpha' h'.$$

Si l'on prend pour h et h' deux de ces valeurs, telles que $la+mb+nc$ et $lb+ma+nc$, et si l'on se rappelle que $\alpha'=\alpha^2$, il est facile de voir que les quatre autres valeurs ne peuvent pas être égales à celles-ci multipliées respectivement par α et α', à moins que les coefficients l, m et n ne soient entre eux comme les racines cubiques de l'unité et, réciproquement, que, si cela a lieu, les six valeurs de $la+mb+nc$ ne seront que les deux précédentes multipliées respectivement par ces racines cubiques. En supposant donc l, m, n égaux à ces racines et représentant par z la fonction $la+mb+nc$, z sera donné par l'équation

$$[z^3-(a+\alpha b+\alpha' c)^3][z^3-(\alpha a+b+\alpha' c)^3]=0,$$

dans laquelle le coefficient de z^3 et le terme indépendant de z seront des fonctions invariables des racines a, b, c, puisque les six valeurs de la fonction $a+\alpha b+\alpha' c$ y entrent de la même manière. C'est, en effet, ce que le calcul confirme *a posteriori;* car, si l'on considère que par la nature des racines cubiques de l'unité on a

$$1+\alpha+\alpha'=0,$$

on parvient à la réduite

$$z^6+27qz^3-27p^3=0.$$

Les racines de cette équation sont

$$3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}},$$
$$3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}};$$

en nommant donc z et z' ces racines, on aura

$$a+\alpha b+\alpha' c=z,$$
$$\alpha a+\ \ b+\alpha' c=z'.$$

La condition que le second terme de la proposée est nul donne

$$a+b+c=0;$$

on aura ainsi

$$a=\frac{z+\alpha' z'}{3},\qquad b=\frac{\alpha' z+z'}{3},\qquad c=\frac{\alpha(z+z')}{3};$$

z et z' étant des racines cubiques, ils sont susceptibles chacun de trois valeurs qui donnent neuf valeurs différentes pour les racines a, b, c. Cette multiplicité de valeurs tient à ce que z et z' ne contiennent que le cube de p, en sorte que les valeurs précédentes de a, b, c résolvent, outre la proposée, les deux équations

$$x^3+\alpha px+q=0,\qquad x^3+\alpha' px+q=0;$$

elles sont donc les racines de l'équation du neuvième degré, résultante du produit de ces trois équations. Mais, parmi ces racines, il ne faut

choisir que les trois qui, substituées pour a, b, c, satisfont à l'équation

$$ab+ac+bc=p;$$

cette équation donne $zz'=-3\alpha p$; ainsi, en désignant par $3h$ et $3h'$ les valeurs de z et z', lorsqu'on prend l'unité pour racine cubique de l'unité, il suffit de supposer $z=3h$ et $z'=3\alpha h'$, et alors on a

$$a=h+h',\qquad b=\alpha' h+\alpha h',\qquad c=\alpha h+\alpha' h'.$$

Ces expressions des racines du troisième degré offrent une singularité remarquable qui embarrassa beaucoup les premiers analystes. Lorsque $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ est négatif, les valeurs de h et h' sont imaginaires. Il ne faut pas cependant en conclure que la proposée renferme alors des racines imaginaires. Loin que cette conséquence soit juste, il est généralement vrai que, dans ce cas, les trois racines de la proposée sont réelles et qu'elles ne peuvent l'être que dans ce cas, qui a été nommé *cas irréductible*, tous les efforts que l'on a faits pour donner une autre forme aux expressions des racines ayant été inutiles. On ne tarda pas à reconnaitre la réalité des racines dans ce cas singulier. Parmi les moyens imaginés pour s'en assurer, voici le plus simple :

Faisons, pour plus de simplicité,

$$-\frac{1}{2}q=m\qquad \text{et}\qquad \sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=n\sqrt{-1};$$

on aura

$$h=\sqrt[3]{m+n\sqrt{-1}},\qquad h'=\sqrt[3]{m-n\sqrt{-1}}.$$

Si l'on développe chacun de ces radicaux en séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de n, suivant que n est plus petit ou plus grand que m, on aura, pour h et h', des expressions de cette forme

$$h=\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1},\qquad h'=\mathrm{M}-\mathrm{N}\sqrt{-1},$$

M et N étant des quantités réelles; on aura ainsi

$$a=2\mathrm{M},\qquad b=-\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{3},\qquad c=-\mathrm{M}-\mathrm{N}\sqrt{3}.$$

Si h et h' sont réels, il n'y a que la première racine a de réelle; on reconnaîtra donc si une équation du troisième degré a toutes ses racines réelles par le signe de la quantité $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$; si cette quantité est négative, les trois racines sont réelles; si elle est positive, deux des racines sont imaginaires. A la vérité, l'équation que nous venons de considérer manque de son second terme; mais il est toujours facile, comme on l'a vu, de réduire une équation à cette forme, et cela ne change point le nombre de ses racines réelles. Les valeurs de p et q de la transformée sont alors des coefficients de la proposée, faciles à déterminer, et en les substituant dans la quantité $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, le signe de cette fonction déterminera si toutes les racines sont réelles, ou si deux sont imaginaires. Quand toutes les racines sont réelles, la règle de Descartes fait connaître le nombre des racines positives et celui des racines négatives. Si deux racines sont imaginaires, la racine réelle est d'un signe contraire à celui du dernier terme de l'équation.

Considérons maintenant l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Soient a, b, c, d ses quatre racines. Pour les déterminer, nous allons chercher, comme nous venons de le faire relativement aux équations du deuxième et du troisième degré, une fonction de ces racines qui les donne facilement et qui ne dépende que d'une équation d'un degré inférieur au quatrième. Nous emploierons encore la supposition qui nous a réussi pour les équations des degrés inférieurs, savoir que cette fonction renferme les racines sous une forme linéaire; nous la représenterons ainsi par la suivante $fa + mb + nc + ld$. Cette fonction est susceptible de vingt-quatre combinaisons différentes; elle dépend donc d'une équation du vingt-quatrième degré. Mais il est facile de voir que, si l'on suppose $f = m$, les vingt-quatre combinaisons se réduiront à douze et que, si l'on suppose de plus $l = n$, les douze combinaisons se réduiront à six, en sorte que la fonction $m(a+b) + n(c+d)$ ne dépend que d'une équation du sixième degré. Enfin, si l'on suppose

$n = -m$, cette dernière équation aura ses racines égales deux à deux, mais affectées de signes contraires; elle ne renfermera donc que les puissances paires de l'inconnue et elle pourra se résoudre à la manière des équations du troisième degré.

Il suit de là que, en supposant, pour plus de simplicité, $m = 1$ et en représentant par $4z$ la fonction $(a + b - c - d)^2$, z sera donné par une équation du troisième degré; or, on a

$$(a + b - c - d)^2 = -4p + 4(ab + cd);$$

l'équation en z sera donc

$$[z + p - (ab + cd)][z + p - (ad + bc)][z + p - (ac + bd)] = 0,$$

d'où l'on tire

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

Telle est la réduite des équations du quatrième degré. Soient z, z', z'' ses trois racines, on aura

$$a + b - c - d = 2\sqrt{z},$$
$$a + c - b - d = 2\sqrt{z'},$$
$$a + d - b - c = 2\sqrt{z''}.$$

En combinant ces trois équations avec celle-ci, $a + b + c + d = 0$, qui résulte de ce que le deuxième terme manque dans l'équation proposée du quatrième degré, on aura

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{z} + \sqrt{z'} + \sqrt{z''}),$$

$$b = \frac{1}{2}(\sqrt{z} - \sqrt{z'} - \sqrt{z''}),$$

$$c = \frac{1}{2}(\sqrt{z'} - \sqrt{z} - \sqrt{z''}),$$

$$d = \frac{1}{2}(\sqrt{z''} - \sqrt{z} - \sqrt{z'}).$$

Chacun des radicaux $\sqrt{z}$, $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ pouvant être également affecté du signe $+$ ou du signe $-$, il en résulte huit valeurs différentes pour les racines a, b, c, d. Cela vient de ce que la réduite en z ne renfermant que le carré de q, les valeurs qu'elle donne pour a, b, c, d doivent également satisfaire à la proposée, en y supposant q négatif, en sorte que ces valeurs résolvent une équation du huitième degré, comme on a vu que la réduite du troisième degré résout une équation du neuvième. Mais ces valeurs se réduisent à quatre, en leur faisant remplir la condition que la somme des produits trois à trois des racines a, b, c, d soit égale à $-q$. Cette somme est égale à

$$\sqrt{z}\sqrt{z'}\sqrt{z''};$$

il faut conséquemment donner aux radicaux un signe tel que ce produit soit d'un signe contraire à q, et cela déterminera les quatre valeurs que l'on doit prendre pour les racines de la proposée.

Si la réduite en z a ses trois racines réelles, l'équation du quatrième degré a ses racines ou toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires. On pourra donc ainsi reconnaître si une équation du quatrième degré, lors même qu'elle a tous ses termes, a ses racines ou toutes réelles ou toutes imaginaires. Il suffira de faire disparaître son deuxième terme, de former ensuite sa réduite et de voir si cette réduite a toutes ses racines réelles.

Quand l'équation du quatrième degré a toutes ses racines réelles, la règle de Descartes donne le nombre des racines positives et celui des racines négatives.

Si l'équation a deux racines réelles et deux racines imaginaires, les deux racines réelles seront de même signe ou de signe contraire, suivant que le dernier terme sera positif ou négatif.

Si les deux racines réelles sont de même signe, elles seront positives s'il y a dans la proposée plus de variations que de permanences; elles seront négatives s'il y a plus de permanences que de variations et, s'il y a autant de variations que de permanences, le signe de ces racines sera contraire à celui de la fonction $f^3 - 4pf + 8q$, f étant le coefficient du deuxième terme dans l'équation supposée complète. La réduite en z a toujours une valeur réelle positive, puisque son dernier terme

est négatif. Supposons que $\sqrt{z}$ soit réel, les valeurs précédentes de a et de b donnent

$$a + b = \sqrt{z},$$

$$ab = \frac{1}{4}\left(z - z' - z'' - 2\sqrt{z'z''}\right).$$

Or, on a $z' + z'' = -2p - z$; de plus, $zz'z'' = -q^2$, ce qui donne

$$\sqrt{z'z''} = \frac{-q}{\sqrt{z}};$$

ainsi, $a + b$ et ab sont réels, le facteur $x^2 - (a+b)x + ab$ est donc réel; or, ce facteur est évidemment diviseur de l'équation proposée du quatrième degré; cette équation est donc résoluble en deux facteurs réels du deuxième degré.

De là résulte une démonstration fort simple de ce théorème général que nous avons énoncé précédemment et qui consiste en ce que toute équation d'un degré pair est résoluble en facteurs réels du deuxième degré.

Soient a, b, c, ... les diverses racines de cette équation et supposons que $2^i s$ soit son degré, s exprimant un nombre impair. L'équation dont les racines seront $a + b + mab$, m étant un coefficient quelconque, sera du degré $2^{i-1}s2^i(s-1)$ et, par conséquent, l'exposant de son degré sera de la forme $2^{i-1}s'$, s' étant un nombre impair.

Si $i = 1$, cette nouvelle équation, dérivée de la première, sera d'un degré impair; elle aura donc au moins une racine réelle, quelle que soit la valeur de m et, comme on peut donner à m une infinité de valeurs, on aura une infinité de fonctions de la forme $a + b + mab$ qui auront des valeurs réelles. Parmi ces fonctions il y en aura nécessairement qui renfermeront les mêmes racines de la proposée. Soient a et b ces racines et soient $a + b + mab$ et $a + b + m'ab$ deux fonctions dont les valeurs soient réelles; leur différence $(m' - m)ab$ sera réelle; ab et $a + b$ seront donc réels, ainsi que le facteur $x^2 - (a+b)x + ab$; la proposée aura, par conséquent, un facteur réel du deuxième degré.

En général, la proposée aura un facteur réel du deuxième degré si toute équation du degré $2^{i-1}s'$ a un facteur réel du même degré; car alors on a une infinité de fonctions de la forme $a+b+mab$, dont la valeur est de la forme $e+g\sqrt{-1}$ et l'on en conclura, par le raisonnement précédent, qu'il y a deux racines a et b telles que $a+b$ et ab sont de la même forme. Le facteur $x^2-(a+b)x+ab$ prend alors la forme

$$x^2+fx+h+\sqrt{-1}(f'x+h').$$

Soit $P+Q\sqrt{-1}$ le quotient de la division de la proposée par ce facteur, $P-Q\sqrt{-1}$ sera le quotient de la proposée par la quantité

$$x^2+fx+h-\sqrt{-1}(f'x+h');$$

la proposée sera donc divisible par le produit de ces deux facteurs du deuxième degré, du moins si ces facteurs n'ont point de diviseur commun. Elle aura donc pour facteur la fonction du quatrième degré

$$(x^2+fx+h)^2+(f'x+h')^2;$$

or, cette quantité est, comme on vient de le voir, décomposable en deux facteurs réels du deuxième degré; la proposée a donc un facteur réel de ce degré.

Si les deux facteurs précédents du deuxième degré ont un facteur commun, il ne peut être que $f'x+h'$, puisqu'il doit diviser leur différence; la proposée sera donc divisible par $f'x+h'$. Après la division, son degré devenant impair, elle aura encore un facteur réel du premier degré; elle a donc un facteur du deuxième degré résultant du produit de ces deux facteurs du premier degré.

Toute équation du degré 2^is a donc un facteur réel du deuxième degré si toute équation du degré $2^{i-1}s'$ a un facteur semblable. Par la même raison, toute équation du degré $2^{i-1}s'$ a un facteur réel du deuxième degré si toute équation du degré $2^{i-2}s''$ a un facteur semblable, s'' étant un nombre impair. En continuant ainsi jusqu'à l'équation du degré $2k$, k étant impair, équation qui, comme on vient de le voir, a nécessairement un facteur réel du deuxième degré, on voit, en

rétrogradant, que toute équation du degré 2^is a un facteur réel du deuxième degré.

Donc, toute équation d'un degré pair a un facteur du deuxième degré; en la divisant par ce facteur on aura une nouvelle équation d'un degré pair, qui aura elle-même un facteur réel du deuxième degré, et en continuant ainsi on décomposera l'équation entière en facteurs réels du deuxième degré.

Nous venons d'exposer ce que l'on sait sur la résolution des équations complètes. Les analystes parvinrent bientôt à celle des équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré; mais, arrivés à ce terme, ils trouvèrent un obstacle que des efforts continués pendant plus de deux siècles n'ont pu surmonter encore. L'uniformité des méthodes imaginées pour résoudre les équations des degrés inférieurs au cinquième donnait quelque espoir de les étendre à ce degré; mais toutes les tentatives que l'on a faites pour cet objet ont été jusqu'à présent infructueuses. Au reste, ce qui doit consoler du peu de succès des recherches de ce genre, c'est que la résolution complète des équations, quoique très belle par elle-même, serait peu utile dans les applications de l'Analyse, pour lesquelles il est toujours plus commode d'employer les approximations.

SIXIÈME SÉANCE.

SUR L'ÉLIMINATION DES INCONNUES DES ÉQUATIONS. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PAR APPROXIMATION.

Jusqu'ici nous n'avons considéré, parmi les équations des degrés supérieurs au premier, que celles qui ne renferment qu'une inconnue; mais, le plus souvent, les applications de l'Analyse offrent les inconnues mêlées ensemble dans les équations qui doivent les déterminer. Pour avoir leurs valeurs il est nécessaire de les séparer en éliminant de ces équations toutes les inconnues, à l'exception d'une seule. On forme ainsi des équations à une inconnue auxquelles on peut appliquer les méthodes rigoureuses ou approchées de résoudre les équations. On a vu que cette élimination est toujours facile dans les équations du premier degré et que l'équation finale est pareillement de ce degré; mais il n'en est pas ainsi des équations des degrés supérieurs, et l'équation finale s'élève presque toujours beaucoup plus que les équations composantes.

Concevons que l'on ait, entre les deux inconnues x et y, deux équations complètes, l'une du degré m et l'autre du degré n; c'est-à-dire telles que les puissances et les produits de ces inconnues s'élèvent à la dimension m dans la première et à la dimension n dans la seconde. Par *dimension* on entend dans l'Analyse la somme des exposants des quantités. Supposons, de plus, m égal ou plus grand que n; il est clair que l'on pourra, au moyen de la seconde équation, éliminer de la première les puissances de x, égales ou supérieures à x^n; il suffit d'y substituer, pour x^n, sa valeur tirée de la seconde équation et de continuer ces sub-

stitutions jusqu'à ce que l'on parvienne à une équation qui ne renferme que des puissances de x inférieures à x^n. On aura donc ainsi une troisième équation dans laquelle la plus haute puissance de x sera x^{n-1}. En éliminant à son moyen les puissances x^n et x^{n-1} de la deuxième équation, on aura une quatrième équation dans laquelle x^{n-2} sera la plus haute puissance de x. Cette équation, combinée de la même manière avec la troisième, donnera une cinquième équation dans laquelle x^{n-3} sera la plus haute puissance de x. En continuant ainsi, on parviendra à une équation indépendante de x et qui sera l'équation finale en y.

On doit observer que, avant d'y parvenir, on aura une équation du premier degré en x qui donnera x en y; en sorte que, ayant les différentes valeurs de y par la résolution de l'équation finale, on aura sur-le-champ les valeurs correspondantes de x, sans être obligé de résoudre l'équation finale en x.

Si l'on conçoit la première des deux équations proposées entre x et y résolue par rapport à x, ses racines, que nous nommerons $a, b, c, \ldots$, seront fonctions de y. Si l'on conçoit pareillement la seconde de ces équations résolue par rapport à x, ses racines, que nous nommerons $a', b', c', \ldots$, seront fonctions de y. Or, il est évident que les valeurs de x doivent être égales dans ces deux équations; on a donc

$$a = a' \quad \text{ou} \quad a' - a = 0;$$

et comme il n'y a aucune raison d'égaler plutôt les racines a et a' que les racines a et b', on a pareillement

$$a - b' = 0.$$

On voit ainsi que l'équation finale en y doit satisfaire également aux diverses équations que l'on peut former en retranchant chacune des racines $a', b', c', \ldots$ des racines $a, b, c, \ldots$; elle doit donc être le produit de toutes ces équations. Dans ce produit, les racines $a, b, c, \ldots$ entrent de la même manière; il est par conséquent une fonction invariable de ces racines, qui peuvent en être éliminées au moyen des coefficients des puissances de x dans la première équation. Ce produit est encore invariable par rapport aux racines $a', b', c', \ldots$; elles peuvent donc en être éliminées, au moyen des coefficients des puissances de x dans la seconde équation; il deviendra ainsi une fonction rationnelle et entière de y et, en l'égalant à zéro, on aura l'équation finale en y.

Cette équation peut être formée plus simplement en substituant successivement, au lieu de x, dans la seconde des équations proposées, les racines $a, b, c, \ldots$ et en formant le produit des m équations qui en résultent. Ce produit égalé à zéro sera l'équation finale cherchée et, comme il est une fonction invariable des racines $a, b, c, \ldots$, on pourra les éliminer au moyen des coefficients des puissances de x dans la première équation.

Le degré de l'équation finale est visiblement égal à la plus haute puissance de y dans le produit $a^n b^n c^n \ldots$; or, le produit $abc\ldots$ étant la quantité indépendante de x dans la première des équations proposées, la plus haute puissance de y qu'elle contient est y^m; la plus haute puissance de y dans l'équation finale est donc y^{mn}; ainsi, le degré de cette équation, dans le cas général, est égal au produit des degrés des deux équations composantes et, dans aucun cas, il ne peut excéder ce produit.

p étant une des racines de l'équation finale en y, en la substituant pour y dans les deux équations proposées, on aura deux équations en x qui auront pour diviseur commun $x-q$, q étant la valeur de x correspondant à la valeur de p de y.

De là résulte un nouveau moyen d'obtenir l'équation finale en y; car les deux équations proposées devant avoir un diviseur commun en x, si l'on cherche ce diviseur par les méthodes connues, on parvient à un reste qui est une fonction de y et qui, étant égalé à zéro, donnera l'équation finale.

On peut encore parvenir à cette équation finale par la méthode suivante. Multiplions la première des deux équations par un polynome en x et y du degré i; nous pouvons, au moyen de la seconde équation, éliminer du produit toutes les puissances de x égales ou supérieures à x^n. Nous pouvons, de plus, prendre ce polynome assez élevé, et renfermant par conséquent un nombre suffisant de coefficients arbitraires, pour faire disparaître à leur moyen les coefficients des diverses puissances de x qui resteront dans le produit après l'élimination dont nous venons de parler. Alors on aura l'équation finale en y. Mais on doit observer que l'on aurait pu, au moyen de la deuxième des équations proposées, faire disparaître du polynome toutes les puissances de x égales et supérieures à x^n. Il faut donc, pour le débarrasser des coefficients inutiles, n'employer qu'un polynome multiplicateur dans lequel ces puissances ne se rencontrent point. Il est facile de voir que, dans ce cas, le nombre de ses coefficients arbitraires est

$$\frac{n(2i-n+3)}{2}.$$

Il faut diminuer ce nombre d'une unité, parce que l'on peut concevoir le polynome entier divisé par l'un de ses coefficients, en sorte que le nombre des coefficients arbitraires et utiles est

$$\frac{n(2i-n+3)}{2}-1.$$

Le degré du produit de la première équation proposée par ce multiplicateur est $m+i$ et, quand on a fait disparaître de ce produit les puissances de x égales et supérieures à x^n, le nombre de termes qui renferme x et ses puissances est

$$\frac{(n-1)(2m+2i-n+2)}{2}.$$

Il faut que ce nombre soit égal à celui des coefficients arbitraires pour faire disparaître ces termes; on a donc, pour déterminer le degré i du polynome, l'équation suivante :

$$\frac{(n-1)(2m+2i-n+2)}{2}=\frac{n(2i-n+3)}{2}-1;$$

d'où l'on tire

$$m+i=mn;$$

or, $m+i$ est le degré de l'équation finale en y; ce degré est donc égal au produit des degrés des équations composantes.

Vous trouverez cette méthode exposée dans un grand détail et appliquée à un nombre quelconque d'équations et d'inconnues dans un très bon Ouvrage de Bezout qui a pour titre : *Théorie des équations*. L'auteur y démontre, par une application ingénieuse du calcul aux différences finies, ce théorème général, savoir que, *si l'on a un nombre quelconque d'équations complètes entre un pareil nombre d'inconnues, le degré de l'équation finale résultant de l'élimination de toutes les inconnues, à l'exception d'une seule, est égal au produit des degrés de toutes ces équations*.

Ce degré peut s'abaisser quand les équations ne sont pas complètes; il importe alors d'avoir l'équation finale la plus simple et débarrassée des facteurs étrangers aux problèmes et qu'introduisent souvent les procédés de l'élimination. Bezout donne les moyens de remplir cet objet, relativement aux équations incomplètes d'un grand nombre de formes.

Cette méthode d'élimination est un cas particulier d'une méthode générale connue sous le nom de *méthode des coefficients indéterminés*. Souvent la forme des expressions des grandeurs est évidente et il ne reste à connaître que les coefficients de leurs différents termes. On les suppose arbitraires et, en substituant ces expressions dans les équations auxquelles il faut satisfaire, il en résulte des équations de condition qui déterminent ces coefficients. On fait toujours en sorte que le nombre des équations de condition n'excède pas celui des coefficients arbitraires; mais, quoique cette égalité ait lieu, il arrive quelquefois que les équations sont impossibles. Ainsi, la méthode des coefficients indéterminés doit être employée avec circonspection, et les conséquences qu'elle fournit ne doivent pas toujours être admises sans réserve. La méthode précédente d'élimination laisse donc un peu d'incertitude sur le véritable degré de l'équation finale. D'ailleurs, elle n'est pas aussi directe que la méthode fondée sur la considération des racines; il est donc à désirer que l'on étende à un nombre quelconque d'équations et d'inconnues cette dernière méthode qui, jusqu'à pré-

sent, est restreinte à deux équations entre deux inconnues (1).

Il suffit presque toujours de résoudre une des équations finales pour avoir les autres inconnues par des équations du premier degré, ce qui est visible par la première des méthodes d'élimination que nous venons d'exposer. Cependant, il y a des cas où quelques-unes de ces inconnues ne peuvent se déterminer au moyen de l'inconnue de l'équation finale qu'en résolvant des équations du deuxième degré et même de degrés supérieurs. C'est ce qui arrive lorsque à une même valeur de l'inconnue relative à l'équation finale répondent deux ou un plus grand nombre de valeurs d'une autre inconnue.

Les usages de l'élimination sont fort étendus. Pour en donner quelques exemples relatifs à notre objet, c'est-à-dire à la résolution des équations, concevons que l'on ait, entre plusieurs racines d'une équation proposée, une relation quelconque. Si l'on considère ces racines comme des inconnues déterminées par autant d'équations résultant de leur substitution dans l'équation dont elles sont les racines, on pourra les éliminer toutes de la relation donnée, à l'exception d'une seule; on aura ainsi une nouvelle équation pour déterminer cette racine et, en cherchant le plus grand commun diviseur de cette équation et de la proposée, dans laquelle on substitue cette racine, au lieu de l'inconnue, on aura la valeur de cette racine. On peut donc déterminer, par ce moyen, chacune des racines qui entrent dans la relation donnée. Mais on doit observer que, si deux de ces racines y entrent de la même manière en sorte qu'on puisse les changer l'une dans l'autre sans que la relation change, alors le plus grand commun diviseur sera du deuxième degré, il sera du troisième degré si trois racines entrent de la même manière dans la relation donnée et ainsi de suite.

Si chaque racine d'une équation proposée d'un degré pair, que nous représentons par $2n$, a une racine correspondante avec laquelle elle soit dans une relation donnée, telle que cette relation ne change point, en y changeant ces deux racines l'une dans l'autre, alors la résolution

(1) C'est ce qu'a fait M. Poisson dans un Mémoire inséré dans le XIe Cahier de ce *Journal*. (*Note de l'Auteur*.)

de la proposée ne dépend que d'une équation du degré n. En effet, x et x' étant deux racines correspondantes de cette équation, si l'on suppose $x+x'=z$ et si, dans la relation donnée, on substitue au lieu de x' sa valeur $z-x$, on aura une équation entre z et x, de laquelle, éliminant x au moyen de la proposée, on aura une équation finale en z. Mais si l'on forme l'équation générale dont les racines soient les sommes des racines de la proposée, prises deux à deux, on aura une nouvelle équation en z. Ces deux équations en z auront, par conséquent, un diviseur commun qui sera du degré n, car il n'y a, par la supposition, que n couples de racines qui satisfassent à la relation donnée. On aura donc chacun de ces couples au moyen d'une équation du degré n. Maintenant, si l'on suppose que $-p$ soit l'un d'eux, le facteur du deuxième degré x^2+px+q sera un diviseur de la proposée, q étant une quantité qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, on divisera la proposée par ce facteur et, après avoir fait la division, autant qu'il est possible, on égalera séparément à zéro dans le reste de la division et le coefficient de x et la quantité qui en est indépendante. On aura ainsi deux équations entre p et q et, comme p est supposé connu, on aura q en cherchant le commun diviseur de ces deux équations.

Si la proposée, par exemple, est telle que les coefficients des termes, également éloignés des extrêmes, soient les mêmes, ce qui constitue les équations que l'on nomme *réciproques*, alors il est clair que x étant une des racines de l'équation, elle aura une racine correspondante x', telle que $x'=\frac{1}{x}$. En faisant donc $x+\frac{1}{x}=z$, z sera donné par une équation du degré n. On obtiendra facilement cette équation en observant que, si l'on divise par x^n tous les termes de la proposée et si l'on réunit les termes également éloignés des extrêmes, on aura des sommes de la forme $f\left(x^r+\frac{1}{x^r}\right)$, et il est très aisé d'avoir ces sommes en fonctions de z.

On voit ainsi que le choix des inconnues n'est pas indifférent dans la solution des problèmes; si deux d'entre elles, par exemple, sont données par la même équation, il sera plus simple d'employer à leur

place une nouvelle inconnue qui ait un même rapport avec chacune d'elles, telle que leur somme ou leur produit. Cette nouvelle inconnue sera donnée par une équation plus simple. En général, pour avoir les solutions des problèmes les plus élégantes, il faut choisir les inconnues de manière à obtenir les équations les moins élevées par des artifices analogues à ceux dont nous avons fait usage pour la résolution des équations.

On peut encore, au moyen de l'élimination, faire disparaître les radicaux d'une équation irrationnelle. On égalera chacun de ces radicaux à une inconnue et, dans cette dernière égalité, on fera disparaître le radical en élevant chaque membre de l'équation à une puissance convenable. On aura ainsi plusieurs équations rationnelles entre le même nombre d'inconnues et l'élimination donnera une équation finale et rationnelle qui ne renfermera que la première inconnue.

On a vu le peu de progrès que l'on a faits jusqu'ici dans la résolution des équations complètes et l'on peut juger, par la complication des expressions des racines dans les degrés résolus, du peu d'utilité que l'on retirerait de la résolution générale des équations. Ces raisons ont déterminé les analystes à s'occuper des méthodes d'approximation. Voici, de toutes ces méthodes, la plus naturelle et la plus simple.

Si, après avoir fait passer tous les termes d'une équation dans le premier membre, on y substituait successivement, au lieu de l'inconnue, tous les nombres tant positifs que négatifs, il est clair que ce membre donnerait une suite de résultats qui ne seraient nuls que dans le cas où les nombres substitués seraient égaux aux racines réelles de l'équation. Il est visible encore que, en deçà et au delà de ces racines, les résultats des substitutions auraient des signes contraires; en substituant donc successivement, au lieu de l'inconnue, des nombres très rapprochés, on aura autant de changements de signes dans les résultats qu'il y a de racines réelles dans l'équation proposée.

Pour ne laisser échapper aucune racine réelle, il faut que la différence de la progression des nombres que l'on substitue au lieu de l'inconnue soit moindre que la plus petite différence des racines. Si l'on avait quelque incertitude à cet égard, on pourrait former l'équation aux carrés des différences des racines et chercher la valeur de la plus petite racine positive de cette équation par la méthode que nous allons bientôt indiquer. La plus petite différence des racines réelles de la proposée ne sera jamais moindre que la racine carrée de cette valeur.

L'équation étant préparée de manière que la plus haute puissance de l'inconnue ait l'unité pour coefficient, ce que l'on peut toujours facilement exécuter, la plus grande racine positive n'excédera jamais le plus grand coefficient négatif pris avec le signe $+$ et augmenté de l'unité. Le plus grand des coefficients négatifs de l'équation, lorsqu'en y faisant l'inconnue négative on conserve l'unité avec le signe $+$ pour coefficient de sa plus haute puissance, sera, en lui ajoutant -1, la limite des racines négatives de la proposée. Au moyen de ces théorèmes le nombre des essais sera nécessairement limité.

Quand on parvient, par des substitutions successives, à deux résultats de signes contraires, on est assuré qu'une des racines réelles de l'équation tombe entre les valeurs qui, substituées pour l'inconnue, ont produit ces résultats; alors, en prenant une moyenne entre ces valeurs et en la substituant pour l'inconnue dans l'équation proposée, la racine sera comprise entre cette valeur moyenne et celle des deux valeurs extrêmes qui ont donné un résultat de signe contraire au sien. Les limites dans lesquelles cette racine est comprise sont donc par là resserrées. En continuant ainsi de resserrer ces limites, on parvient à une valeur de la racine aussi approchée que l'on veut.

Mais, quand on a une valeur déjà suffisamment approchée de la racine, on peut l'obtenir, par une approximation beaucoup plus rapide, de cette manière : on substituera dans l'équation, au lieu de l'inconnue, cette première valeur approchée plus une nouvelle inconnue dont on négligera le carré et les puissances supérieures; on aura ainsi, pour la déterminer, une équation du premier degré. En l'ajoutant à la première valeur approchée, on aura une deuxième valeur plus approchée de la racine. Si l'on fait le même usage de cette deuxième valeur, on aura une troisième valeur encore plus approchée et ainsi de suite.

Cette méthode a l'avantage de s'étendre à un nombre quelconque d'équations entre un pareil nombre d'inconnues. Si l'on a des valeurs suffisamment approchées de ces inconnues, alors, en substituant à leur place ces valeurs augmentées respectivement d'une nouvelle inconnue et en négligeant les carrés de ces nouvelles inconnues, elles seront déterminées par autant d'équations du premier degré. Ainsi, pour avoir les valeurs très approchées des inconnues dans les équations proposées, on ne sera point obligé de recourir à l'élimination qui souvent est très pénible. Enfin, la même méthode s'étend aux équations que l'on nomme *transcendantes* et dont je vous parlerai dans la suite.

On a imaginé divers moyens pour avoir les premières valeurs approchées des racines des équations; si l'on forme les sommes successives des carrés, des cubes, des quatrièmes puissances, ..., des racines, il est visible que la plus grande des racines, abstraction faite du signe, se manifestera d'autant plus que les puissances seront plus élevées; en divisant la somme des puissances m par la somme des puissances $m-1$, le quotient approchera beaucoup de cette plus grande racine, si le nombre m et l'excès de cette racine sur chacune des autres sont un peu considérables. Mais on aura plus exactement cette racine en extrayant la racine $m^{\text{ième}}$ de la somme des puissances m des racines.

On aura, de la même manière, la plus petite valeur approchée de l'inconnue en faisant cette inconnue égale à l'unité divisée par une nouvelle inconnue. La plus petite racine de l'équation proposée devient alors la plus grande racine de l'équation transformée.

On peut encore déterminer la racine approchée des équations par le moyen des fractions continues. Si l'on suppose que i et $i+k$ soient deux nombres qui, substitués dans l'équation proposée au lieu de l'inconnue, donnent deux résultats de signes contraires, k étant positif et assez petit pour qu'il n'y ait qu'une racine réelle entre i et $i+k$; en faisant l'inconnue égale à i plus l'unité divisée par une nouvelle inconnue, on aura, pour déterminer cette deuxième inconnue, une transformée dont il suffira de considérer la plus grande valeur positive. Supposons qu'elle tombe entre les deux nombres i' et $i'+k'$, on fera la deuxième inconnue égale à i' plus l'unité divisée par une troisième inconnue. En continuant ainsi, on voit que la valeur de la première inconnue sera exprimée par une fraction continue que l'on peut prolonger aussi loin que l'on veut.

Cette méthode a l'avantage de faire connaître les diviseurs commensurables du deuxième degré de l'équation proposée, en vertu de cette propriété remarquable des équations du deuxième degré, suivant laquelle les fractions continues qui expriment leurs racines sont périodiques.

Pour avoir les racines imaginaires d'une équation, représentons par $m \pm n\sqrt{-1}$ deux de ces racines, $-4n^2$ sera une des racines de l'équation aux carrés des différences des racines; on déterminera donc les racines négatives de cette dernière équation, ce qui donnera la valeur de n. En substituant ensuite $m + n\sqrt{-1}$ au lieu de l'inconnue dans la proposée, on égalera séparément à zéro les termes réels et les termes imaginaires; on formera ainsi deux équations en m dont le plus grand commun diviseur déterminera la valeur de m relative à la valeur supposée pour n.

Vous trouverez de plus grands détails sur ces objets dans les Mémoires de Fontaine et dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin.

Les équations du troisième et du quatrième degré peuvent se résoudre très simplement au moyen des Tables de sinus; mais, comme cette méthode dépend de l'application de l'Algèbre à la Géométrie, nous remettons à l'exposer quand nous traiterons de cette application.

Il me reste à vous dire un mot de l'analyse indéterminée. Dans cette analyse, les solutions des problèmes donnent moins d'équations que d'inconnues, ce qui rend ces solutions indéterminées; mais on assujettit les valeurs des inconnues à être ou rationnelles ou des nombres entiers, ou enfin des nombres entiers positifs, et ces conditions limitent ces valeurs, en sorte qu'elles sont quelquefois en nombre fini et quelquefois impossibles. Pour les obtenir, il faut employer des artifices très difficiles et qui, par là, ont excité la curiosité des géomètres. On

vous a expliqué l'ingénieuse méthode par laquelle on peut résoudre une équation du premier degré entre deux inconnues. La résolution des degrés supérieurs doit offrir de bien plus grandes difficultés; mais, ayant à vous exposer un grand nombre d'autres objets plus utiles, je me contenterai ici de vous indiquer sur ces matières le second volume de l'*Algèbre* d'Euler et surtout les belles additions que Lagrange y a jointes.

SEPTIÈME SÉANCE.

SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; NOTIONS SUR LA LIMITE; PRINCIPES DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Pour bien connaitre les propriétés des corps on a d'abord fait abstraction de leurs propriétés particulières, et l'on n'a vu en eux qu'une étendue figurée, mobile et impénétrable. On a fait encore abstraction de ces deux dernières propriétés générales, en considérant l'étendue simplement comme figurée. Les nombreux rapports qu'elle présente sous ce point de vue sont l'objet de la Géométrie. Enfin, par une abstraction encore plus grande, on n'a envisagé dans l'étendue qu'une quantité susceptible d'accroissement et de diminution; c'est l'objet de la Science des grandeurs en général, ou de l'Arithmétique universelle, dont nous nous sommes occupés dans les leçons précédentes. Ensuite on a restitué successivement aux corps les propriétés dont on les avait dépouillés; l'observation et l'expérience en ont fait connaître de nouvelles; et l'on a déterminé les nouveaux rapports qui naissaient de ces additions successives, en s'aidant toujours des rapports précédemment découverts; ainsi la Mécanique, l'Astronomie, l'Optique, et généralement toutes les sciences qui s'appuient à la fois sur l'observation et le calcul, ont été créées et perfectionnées. Vous voyez par là que ces sciences diverses s'enchaînent les unes aux autres, et qu'elles ont une source commune dans la Science des grandeurs, dont l'utile influence s'étend sur toute la Philosophie naturelle. Cette méthode de décomposer les objets, et de les recomposer pour en saisir parfaitement les rapports, se nomme *Analyse*. L'esprit humain lui est redevable de tout ce qu'il sait avec précision sur la nature des choses.

L'étendue figurée dont je me propose de vous entretenir ici n'existe qu'avec trois dimensions; mais, pour la considérer suivant la méthode analytique, on commence par la dépouiller de deux de ces dimensions et, en la réduisant ainsi à une seule, on a l'idée de la *ligne*. Si, dans cette idée, on écarte tout rapport avec deux dimensions, on a l'idée de la *ligne droite;* car, quoiqu'une ligne courbe n'ait qu'une dimension, cependant l'idée de sa courbure suppose nécessairement la considération de deux dimensions. L'extrémité de la ligne forme le *point* qui est la dernière abstraction de l'entendement, dans la considération de l'étendue. La *surface* est l'étendue envisagée avec deux dimensions; et si, dans cette idée, on fait entièrement abstraction de la troisième, on a l'idée du *plan*. Enfin, l'étendue avec ses trois dimensions forme le *solide*.

La ligne droite est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point à un autre.

Si deux droites se rencontrent en deux points elles se confondent; si elles ne se rencontrent que dans un point elles forment un *angle* par leur inclinaison mutuelle.

Deux droites qui, prolongées à l'infini de chaque côté, ne se rencontrent jamais, sont *parallèles*. Les perpendiculaires élevées sur l'une de ces lignes, et prolongées jusqu'à l'autre ligne, sont toutes égales. Les parallèles sont également inclinées sur une droite quelconque.

La démonstration de ces propositions fort simples laisse peut-être quelque chose à désirer du côté de la rigueur; mais leur seul énoncé produit la conviction la plus entière. Il ne faut donc pas dans l'enseignement insister sur ce qui peut manquer encore à la rigueur des preuves que l'on en donne, et l'on doit abandonner cette discussion aux métaphysiciens géomètres, du moins jusqu'à ce qu'elle ait été suffisamment éclaircie, pour ne laisser aucun nuage dans l'esprit des commençants. Les sciences même les plus exactes renferment quelques principes généraux que l'on saisit par une sorte d'instinct qui ne permet pas d'en douter, et auquel il est bon de se livrer d'abord. Après les avoir suivis dans toutes leurs conséquences, et s'être fortifié l'esprit par un long exercice dans l'art de raisonner, on peut, sans danger, revenir sur ces principes, qui se présentent alors dans un plus grand jour; et l'on risque moins de s'égarer, en cherchant à les démontrer avec rigueur. Si l'on insiste trop en commençant, sur l'exactitude de leurs démonstrations, il est à craindre que de vaines subtilités ne produisent de fausses idées, qu'il est très difficile ensuite de rectifier. Malheureusement, les exemples de personnes égarées pour toujours, par ces subtilités, ne sont pas rares. Cependant on ne peut se dispenser d'une extrême rigueur, dans l'enseignement de la Géométrie, que relativement aux premières propositions sur la ligne droite et les parallèles; tout le reste doit être démontré de la manière la plus rigoureuse; car, s'il est utile d'écarter les subtilités d'une fausse métaphysique, il importe également d'accoutumer l'esprit à n'accorder une entière confiance qu'aux choses parfaitement prouvées; et rien n'est plus propre à remplir ce double objet que les démonstrations exactes et sensibles de la Géométrie.

L'uniformité de la courbure de la circonférence en fait la mesure la plus naturelle des angles. En supposant le sommet d'un angle au centre d'un cercle dont le rayon représente l'unité, cet angle peut être pris pour l'arc même, intercepté entre ses côtés. Il n'est pas même nécessaire que le sommet de l'angle soit au centre, pour que la circonférence puisse lui servir de mesure. En vertu d'une propriété remarquable du cercle, quelle que soit la position de ce sommet, l'angle sera toujours mesuré par la demi-somme des deux arcs compris entre ses côtés prolongés, si cela est nécessaire, l'arc convexe vers le sommet étant pris négativement.

L'égalité de la somme des trois angles d'un triangle à deux angles droits est un des résultats les plus utiles de la Géométrie élémentaire. En général, dans un polygone quelconque qui n'a point d'angles rentrants, la somme de tous les angles intérieurs est égale à deux fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés, moins quatre angles droits.

Une des parties les plus importantes des éléments est la théorie des

lignes proportionnelles. Cette théorie est fondée sur la proposition suivante : *Une droite, menée parallèlement à la base d'un triangle, divise ses côtés en parties proportionnelles*. Il est facile de la démontrer quand un des côtés et sa partie sont commensurables; car, si l'on porte la commune mesure sur ce côté, et si par les extrémités de toutes les divisions on mène des parallèles à la base, on prouve aisément qu'elles divisent le second côté dans le même nombre de parties égales, et qu'ainsi l'une quelconque de ces parallèles partage les deux côtés en parties proportionnelles. Si le côté et sa partie sont incommensurables, nommons A et a les deux côtés du triangle; B et b leurs parties retranchées par la parallèle à la base. Si l'on conçoit le côté A divisé dans un nombre n de parties égales, et si l'on porte une de ces parties sur B, elle y sera contenue un certain nombre de fois avec un reste que je désigne par R. En menant donc, par l'extrémité de B — R, une droite parallèle à la base, elle retranchera du côté a une partie $b-r$, telle que

$$\frac{b-r}{a}=\frac{B-R}{A};$$

d'où l'on tire

$$\frac{B}{A}-\frac{b}{a}=\frac{R}{A}-\frac{r}{a}.$$

Le nombre n pouvant être augmenté à volonté, les restes R et r peuvent être diminués à l'infini; la différence $\frac{B}{A}-\frac{b}{a}$ est donc plus petite qu'aucune grandeur donnée. *Or deux quantités dont on peut prouver que la différence est moindre qu'aucune grandeur donnée sont évidemment égales entre elles;* c'est en cela que consiste le premier principe de la méthode des limites; on a donc

$$\frac{B}{A}=\frac{b}{a}.$$

On nomme *figures semblables* celles qui ont les angles correspondants égaux, et les côtés homologues proportionnels. Dans deux triangles, l'égalité des angles correspondants entraîne la proportionnalité des côtés homologues, et réciproquement.

Deux figures sont semblables quand elles sont formées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.

Si d'un point fixe quelconque on mène des droites aux angles d'un polygone, et si l'on prolonge ces droites proportionnellement à leurs extrémités, on formera un second polygone semblable au premier. Deux points, placés sur une droite menée par le point fixe du même côté et à des distances de ce point proportionnelles aux côtés des polygones, sont semblablement placés par rapport à ces polygones; deux droites terminées par des points semblablement placés sont elles-mêmes semblablement placées; elles sont homologues et proportionnelles aux côtés des polygones.

Ainsi l'on peut, dans un très petit espace, représenter exactement les contours d'une grande figure tracée sur un vaste terrain, et la position des objets qu'elle renferme. Si, des deux extrémités d'une base prise à volonté sur le terrain, on observe les angles que les rayons visuels des objets forment avec elle; si l'on prend ensuite sur le papier une ligne pour représenter la base, et que l'on mène par ses extrémités des droites qui fassent avec elle les mêmes angles que les rayons visuels des objets font avec la base, les points de concours de ces droites détermineront sur le papier la position respective de ces objets; le rapport de leur distance mutuelle à la base sera le même dans les deux figures. Voilà une des applications les plus usuelles et les plus utiles de la Géométrie.

Considérons maintenant les surfaces. Celle d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur. Pour avoir une idée juste de ce que l'on doit entendre par le produit de deux lignes, il faut concevoir une droite quelconque prise pour unité, et considérer ces lignes comme des nombres abstraits qui expriment les rapports de leurs longueurs à l'unité linéaire. Le produit de ces lignes sera le carré formé sur l'unité linéaire, répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le produit des deux nombres précédents.

En général, on peut multiplier ou diviser un nombre quelconque de lignes les unes par les autres, extraire ensuite les racines de ces produits ou de ces quotients; ces lignes étant considérées comme des nombres abstraits, la dimension du résultat final indiquera l'espèce de ses unités. Ainsi, en multipliant quatre lignes les unes par les autres, et extrayant la racine carrée du produit, le résultat sera une surface égale au carré de l'unité linéaire, répété autant de fois qu'il y a d'unités dans cette racine.

Il est facile de démontrer que la surface du rectangle est le produit de sa base par sa hauteur, quand l'une et l'autre sont commensurables; si elles sont incommensurables, on le prouvera par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé relativement aux lignes proportionnelles.

Un parallélogramme est égal en surface au rectangle de même base et de même hauteur. La surface d'un triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur. Les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés de leurs lignes homologues. Le carré formé sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés formés sur ses côtés. Si d'un point fixe on mène à la circonférence d'un cercle une droite indéfinie, le produit des deux parties de cette droite, comprises entre le point fixe et chacun des points où elle rencontre la circonférence, est toujours le même, quelle que soit la position de la droite, pourvu qu'elle passe par le point fixe; ce qui fournit divers procédés pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Je ne fais que vous rappeler ces théorèmes qui vous sont bien connus; mais je dois observer que la belle propriété des triangles rectangles et celle des triangles semblables sont les principaux résultats que l'Analyse emprunte de la Géométrie dans ses applications.

La surface d'un polygone quelconque, circonscrit au cercle, est la moitié du produit du rayon par le contour du polygone; d'où il suit que les surfaces des polygones circonscrits sont entre elles comme leurs périmètres. Il en résulte encore que la surface du cercle est le produit du rayon par la demi-circonférence; mais ce passage du polygone au cercle mérite une attention particulière. Il est visible que plus on multiplie les côtés du polygone circonscrit, plus son périmètre approche en longueur de la circonférence, plus sa surface approche de celle du cercle. Ainsi le produit du rayon par le demi-contour des polygones successifs a pour limite le produit du rayon par la demi-circonférence, puisqu'il en approche sans cesse et qu'il peut en différer moins que d'aucune grandeur donnée. La surface de ces polygones a pareillement la surface du cercle pour limite; or il est évident que les deux limites d'une grandeur et de son expression doivent être égales entre elles; c'est en cela que consiste le second principe fondamental de la théorie des limites, principe qui peut s'énoncer ainsi : *La limite de l'expression d'une suite de grandeurs est l'expression de la limite de ces grandeurs;* la surface du cercle est donc égale au produit du rayon par la demi-circonférence.

La méthode des limites sert de base au Calcul infinitésimal. Pour faciliter l'intelligence de ce calcul, il est utile d'en faire remarquer les premiers germes dans les vérités élémentaires qu'il convient toujours de démontrer suivant les méthodes les plus générales. On donne ainsi à la fois aux élèves des connaissances et la méthode pour en acquérir de nouvelles. En continuant de s'instruire, ils ne font que suivre la route qui leur a été tracée, et dans laquelle ils ont contracté l'habitude de marcher; et la carrière des sciences leur devient beaucoup moins pénible. D'ailleurs le système des connaissances liées entre elles par une méthode uniforme peut mieux se conserver et s'étendre. Préférez donc dans l'enseignement les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles.

Toutes les tentatives que l'on a faites pour déterminer le rapport de la circonférence au diamètre ont été infructueuses; on est parvenu à s'assurer qu'il est irrationnel; mais ce rapport est maintenant connu avec une précision beaucoup plus grande que ne l'exigent nos besoins, en sorte que le rapport rigoureux n'est qu'un objet de curiosité. Pour en avoir la valeur approchée, on a inscrit et circonscrit au cercle des polygones réguliers, en doublant continuellement leurs côtés, et en

déduisant les contours de ces polygones, successivement les uns des autres, ce qui peut se faire par des procédés fort simples. On est ainsi parvenu à deux polygones inscrit et circonscrit, dont les contours différaient très peu de la circonférence et la comprenaient entre eux. Archimède a trouvé de cette manière, au moyen de deux polygones de 96 côtés, que le rapport de la circonférence au diamètre n'était ni plus grand que $3\frac{10}{70}$, ni moindre que $3\frac{8}{70}$, en sorte qu'il est fort approchant de celui de 22 à 7, et ce rapport suffit au besoin des arts. Le rapport plus approché de 355 à 113 suffit dans tous les cas.

Par une propriété remarquable, le cercle est, de toutes les figures qui ont le même périmètre, celle qui renferme le plus grand espace.

La considération de la ligne droite et de la circonférence donne lieu à beaucoup de problèmes très piquants, dont on peut trouver des solutions fort élégantes; un choix bien fait de ces problèmes, que l'on proposerait à résoudre aux élèves, exercerait leur esprit d'une manière utile, et graverait dans leur mémoire les propositions les plus intéressantes de la Géométrie.

Si l'on en croit plusieurs historiens de l'antiquité, la Géométrie doit sa naissance à l'Arpentage; mais il est plus vraisemblable que les besoins des arts ont fait découvrir les diverses propositions géométriques qui leur sont relatives, et que l'ensemble de ces propositions, étendues et multipliées par les spéculations des philosophes, a formé la Géométrie. La méthode qui se présente le plus naturellement pour mesurer la surface d'un grand terrain consiste à le dessiner en petit, et à évaluer la surface du petit polygone en la réduisant à un carré, ce qui est facile; en multipliant ensuite cette surface par le carré du rapport de deux lignes homologues dans le grand et dans le petit polygone, on a la surface du plus grand; mais on peut l'obtenir avec plus de précision, sans recourir à la considération des polygones semblables.

La figure dont on veut avoir la surface peut toujours être partagée en triangles; la mesure de leurs côtés donnera leur surface au moyen de ce théorème : *La surface d'un triangle est égale à la racine carrée du* *produit de ces quatre lignes, la demi-somme des côtés, et la différence de cette demi-somme à chacun d'eux.* Il serait très pénible et souvent impossible de mesurer chacun des côtés de ces triangles; mais, leur longueur étant déterminée par les mesures d'une base et des angles que font avec cette base les rayons visuels de leurs extrémités observées des extrémités de la base, il ne s'agit que d'avoir le rapport de cette longueur à ces mesures, et il est aisé de voir que ce problème se réduit à déterminer dans un triangle les angles et les côtés, lorsque parmi ces six grandeurs on en connait assez pour que les autres soient déterminées. La solution de ce problème est l'objet de cette branche de la Géométrie, que l'on a nommée *Trigonométrie*, et dont l'Analyse même a su tirer de grands avantages.

Si l'on conçoit un triangle inscrit dans un cercle, les côtés du triangle seront les cordes des arcs dont les moitiés mesurent les angles opposés; une Table qui donnerait en parties du rayon les longueurs des cordes correspondant à tous les arcs, depuis zéro jusqu'à la circonférence, ferait donc connaître les rapports des côtés du triangle, au moyen de ses angles, et réciproquement. C'est ainsi que l'on a, pendant longtemps, envisagé cet objet; mais, puisque les angles du triangle inscrit n'ont pour mesure que la moitié des arcs compris entre leurs côtés, il parait plus simple de faire correspondre aux arcs, dans les Tables, les cordes des arcs doubles; et, pour ne pas considérer deux systèmes d'arcs au lieu de ces cordes, on peut n'employer que leurs moitiés qui se déterminent en abaissant une perpendiculaire de l'extrémité d'un arc simple sur le diamètre qui passe par l'autre extrémité.

Les Tables actuelles sont fondées sur ces considérations; et ce changement, qui parait être peu de chose en lui-même, est cependant d'une grande importance, soit dans la Géométrie, soit dans l'Analyse.

La perpendiculaire dont je viens de parler se nomme *sinus* de l'arc; le *cosinus* est la partie du diamètre comprise entre le centre et le sinus; c'est le sinus du complément de l'arc au quart de la circonférence. On a encore introduit dans la Trigonométrie la considération des tan-

gentes, qui simplifie souvent les calculs. La *tangente* d'un arc est la droite qui touche une des extrémités de l'arc, et qui se termine à la rencontre du prolongement du rayon mené par l'autre extrémité. La *sécante* de l'arc est le rayon ainsi prolongé. Les *cotangentes* et les *cosécantes* sont les tangentes et les sécantes du complément de l'arc au quart de la circonférence. Toutes ces grandeurs sont supposées divisées par le rayon que l'on prend pour unité; en sorte qu'elles sont des nombres abstraits. Il est facile de voir que la tangente est le rapport du sinus au cosinus, et que la sécante est l'unité divisée par le cosinus.

Le signe de ces diverses grandeurs mérite une attention particulière. Le sinus d'un arc est positif depuis zéro jusqu'à la demi-circonférence; le cosinus devient négatif ou prend une position contraire, quand l'arc surpasse le quart de la circonférence. Si l'arc devient négatif, son sinus change de signe, et son cosinus reste le même. Ainsi les résultats relatifs aux angles aigus s'appliquent aux angles obtus, en y changeant le signe de leurs cosinus; les résultats relatifs à la somme des deux angles s'étendent à leur différence, en faisant un des angles négatif et en changeant le signe de son sinus.

Quoiqu'un angle ne puisse jamais surpasser deux angles droits, cependant les géomètres, qui cherchent toujours à s'élever aux plus grandes généralités, ont considéré les arcs mesures des angles comme pouvant surpasser la demi-circonférence, et même un nombre quelconque de circonférences.

Au delà de la demi-circonférence, les sinus tombent au-dessous du diamètre qui passe par la première extrémité de l'arc; ils redeviennent nuls quand l'arc devient égal à la circonférence; ensuite, ils sont positifs, et les mêmes que dans la première moitié de la circonférence. Il suit de là que le sinus d'un arc ne change point lorsque l'arc augmente d'un nombre quelconque de circonférences; il ne fait que changer de signe lorsque l'arc augmente d'un nombre impair de demi-circonférences; enfin il est le même que le sinus d'un nombre impair de demi-circonférences, moins cet arc. Ainsi à un même sinus répondent une infinité d'arcs différents; l'équation entre l'arc et le sinus doit par conséquent donner pour l'arc une infinité de valeurs; elle n'est donc pas algébrique. Nous donnerons, dans la suite, cette équation décomposée dans ses facteurs simples.

Le cosinus d'un arc est positif dans le premier quart de la circonférence et négatif dans le second quart; il ne change point quand l'arc augmente d'un nombre quelconque de circonférences; il ne fait que changer de signe quand l'arc augmente d'un nombre impair de demi-circonférences.

Le théorème fondamental de la théorie des sinus consiste en ce que *le sinus de la somme de deux angles est égal au produit du sinus du premier par le cosinus du second, plus au produit du sinus du second par le cosinus du premier*. Si l'on fait dans ce théorème le second angle négatif, il donne le sinus de la différence de deux angles; si l'on augmente d'un angle droit le premier angle, il donne le cosinus de la somme ou de la différence de deux angles. Ces divers résultats qui se déduisent d'un seul théorème par un changement convenable dans le signe des grandeurs, et qu'il est facile de démontrer d'une manière directe, sont très propres à faire comprendre la nature et les usages des quantités négatives.

On peut, au moyen de ces résultats, déterminer successivement les sinus et les cosinus des angles multiples de la dix-millième partie de l'angle droit quand on a ceux de ce petit angle que l'on obtiendra de cette manière : la tangente de la moitié de l'angle droit est égale à l'unité; or la tangente de la moitié d'un angle est le quotient de la division par la tangente de l'angle de l'unité plus la racine carrée du carré de la tangente augmenté de l'unité; on aura donc, par une suite de divisions successives, la tangente du quart, du huitième, ... de l'angle droit; et l'on parviendra ainsi à la tangente d'un angle très petit. En observant ensuite que les tangentes de très petits angles sont à fort peu près proportionnelles à leurs arcs, on aura la tangente du dix-millième de l'angle droit, et cette tangente pourra être prise pour le sinus du même angle. On aura son cosinus en extrayant la racine carrée de la différence du carré du sinus à l'unité.

C'est par de semblables procédés que les premières Tables de sinus et de cosinus ont été construites; il a suffi de les étendre jusqu'à la moitié de l'angle droit, parce que le sinus et le cosinus d'un angle sont les mêmes que le cosinus et le sinus de son complément.

Depuis l'invention des logarithmes, les Tables ne renferment que les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes, ...; car l'avantage de cette heureuse découverte se fait principalement sentir dans l'emploi de ces quantités, et la première Table de logarithmes construite par Neper leur était relative.

Les Tables trigonométriques ne s'étendent que depuis zéro jusqu'à l'angle droit, ou jusqu'au quart de la circonférence; parce qu'au delà les sinus, cosinus, ... redeviennent les mêmes, au signe près. Il est donc naturel de regarder cet intervalle comme l'unité des angles, ainsi que le rayon est considéré comme l'unité des sinus; or, il est avantageux, dans notre système arithmétique, de diviser toutes les unités en parties décimales; l'angle doit donc être divisé de la même manière. Déjà l'on avait substitué la division décimale du rayon à la division sexagésimale que les anciens avaient adoptée pour le rayon et les angles; mais on conservait la seconde de ces divisions. Dans le nouveau système des poids et mesures, la division décimale a été étendue aux angles eux-mêmes; et c'est sur ce partage si naturel de l'angle droit qu'est fondé le choix du *mètre*, qui est la dix-millionième partie du quart de la circonférence terrestre dans le sens des méridiens.

La résolution des triangles rectilignes est très facile au moyen des Tables dont je viens de parler. Si l'on connait un côté et les deux angles adjacents, on a le troisième angle, en retranchant de deux angles droits la somme des deux angles donnés; on a ensuite les autres côtés, en observant que les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.

Si l'on connait deux côtés et l'angle compris, on a la somme des deux autres angles, en retranchant l'angle connu de deux angles droits; on a leur différence par cette proportion : la somme des deux côtés connus est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de leur demi-différence.

Si l'on connaît les trois côtés du triangle, on a les angles par cette proportion : le produit des deux côtés qui comprennent un angle est au produit des deux restes que l'on obtient en retranchant chacun de ces côtés de la demi-somme des trois côtés, comme l'unité est au carré du sinus de la moitié de l'angle compris entre les deux côtés.

Considérons présentement l'étendue avec ses trois dimensions. La rencontre des plans forme les angles solides des polyèdres, comme la rencontre des lignes forme les angles des polygones. Deux plans qui se rencontrent se coupent suivant une droite; leur inclinaison mutuelle se mesure par l'angle que forment deux perpendiculaires menées, dans chacun d'eux, d'un même point de leur intersection commune.

Une droite perpendiculaire à deux droites menées dans un plan est perpendiculaire au plan même.

Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles, et alors toutes les perpendiculaires menées d'un plan à l'autre sont égales.

Par deux droites quelconques données de position dans l'espace on peut toujours faire passer deux plans parallèles dont la distance mutuelle est la plus courte distance de ces droites.

Si d'un point quelconque dans l'espace on mène des droites à un plan, elles seront coupées proportionnellement par des plans parallèles au premier plan.

La somme de tous les angles plans qui forment un angle solide est moindre que quatre angles droits.

Telles sont les propriétés les plus remarquables des plans.

On nomme *prisme* le solide dont les bases sont parallèles et dont les arêtes des faces sont parallèles; si les arêtes sont perpendiculaires à la base le prisme est droit.

La surface d'un prisme droit quelconque, sans y comprendre ses deux bases, est le produit de sa hauteur par le contour de sa base, résultat que l'on peut facilement étendre aux cylindres droits par le

principe de la théorie des limites que nous avons exposé précédemment.

La solidité d'un prisme droit, qui a pour base un rectangle, est égale au produit de sa hauteur par sa base, ce qui se démontre de la même manière que le théorème sur la surface du rectangle; et l'on doit faire ici une observation analogue à celle que nous avons déjà faite relativement au produit de deux lignes. On peut concevoir un prisme droit quelconque, partagé en autant de petits prismes rectangulaires qu'il y a de petits rectangles dans sa base, d'où il suit que la solidité du prisme est le produit de la somme de tous ces rectangles, c'est-à-dire de la base entière par sa hauteur; il est facile de faire voir, par les principes de la théorie des limites, que cela est généralement vrai dans le cas même où la base ne peut pas être partagée exactement en petits rectangles.

Si le prisme est oblique, supposons d'abord qu'il soit triangulaire, et concevons-le partagé dans un grand nombre de petites tranches de même hauteur par des plans parallèles à sa base; en prenant pour chacune de ces tranches le prisme droit qui a la même base, la différence ne peut être qu'une partie de ce prisme, d'autant moindre que sa hauteur est plus petite. Pour s'en convaincre, il n'est pas nécessaire d'évaluer cette différence; il suffit d'observer qu'en la représentant par un prisme droit rectangulaire, dont la longueur est toujours la même, et dont la hauteur est celle de la tranche, la largeur de ce prisme diminue à mesure que l'on augmente le nombre des tranches; alors il est visible que le rapport de ce nouveau prisme au prisme droit, qui a même base et même hauteur que la tranche, diminue sans cesse et devient moindre qu'aucune grandeur donnée; le rapport de la tranche au prisme droit de même base et de même hauteur approche donc sans cesse de l'unité; or ce rapport est évidemment le même que celui du prisme oblique entier au prisme droit de même base et de même hauteur, quel que soit le nombre des tranches; ce dernier rapport diffère donc de l'unité moins que d'aucune grandeur donnée; il est donc égal à l'unité, ou, ce qui revient au même, le prisme oblique est égal au prisme droit, de même base et de même hauteur.

C'est sur de pareilles considérations que sont fondées les applications du Calcul infinitésimal, comme on le verra dans la suite; on y néglige les quantités formées de deux dimensions qui diminuent sans cesse, relativement à celles qui n'ont qu'une semblable dimension; mais, pour faire sentir la justesse de ces omissions, et pour montrer qu'elles ne nuisent point à l'exactitude des résultats, il est bon de donner plus de développement aux démonstrations de ce genre dans les éléments de Géométrie.

Concevons donc que, par les trois angles de la base supérieure d'une des tranches du prisme, on abaisse trois perpendiculaires sur sa base inférieure, et que l'on fasse passer trois plans par ces perpendiculaires prises deux à deux; on formera un prisme droit triangulaire, qui sera égal au produit de la base de la tranche par sa hauteur; on formera ensuite trois solides, dont la somme sera évidemment plus grande que la différence entre le prisme droit et la tranche. Chacun de ces solides est plus petit qu'un prisme droit de même base et de même hauteur; chaque base est un parallélogramme dont la longueur est le côté correspondant de la base de la tranche, et dont la largeur est moindre que l'arête de la tranche; la somme des trois solides est donc moindre que le produit du contour de la base de la tranche par son arête et par sa hauteur; la différence de la tranche, au prisme droit de même base et de même hauteur, est donc moindre que ce produit, et, par conséquent, la différence entière de la somme de toutes les tranches, ou du prisme oblique, au prisme droit de même base et de même hauteur, est moindre que le produit de la hauteur du prisme par le contour de sa base et par l'arête d'une de ses tranches. En multipliant le nombre des tranches, on voit que cette différence peut être supposée moindre qu'aucune grandeur donnée; elle est donc nulle. Ainsi, le prisme triangulaire est égal au produit de sa base par sa hauteur, et il est facile d'en conclure que cela est également vrai pour un prisme quelconque et pour le cylindre.

Une pyramide est droite lorsque sa base est un polygone régulier,

dont le centre et le sommet de la pyramide sont sur une perpendiculaire à cette base. La surface d'une semblable pyramide, sans y comprendre sa base, est le produit du contour de la base par la moitié de la perpendiculaire menée du sommet sur un de ses côtés; d'où il suit que la surface du cône droit est le produit de la moitié de son côté par la circonférence de sa base.

Deux pyramides triangulaires de même base et de même hauteur sont égales en solidité. Pour le faire voir, concevons les deux pyramides sur un même plan, et partagées en tranches de même hauteur par des plans parallèles à la base; il est facile de prouver que les sections seront respectivement égales en surface. Si l'on abaisse de chaque angle de la base supérieure d'une tranche de l'une des pyramides trois perpendiculaires sur la base inférieure, on formera un prisme droit triangulaire et trois solides, dont la somme sera plus grande que la différence entre la tranche et le prisme. La somme de ces trois solides est moindre que le produit du contour de la base inférieure de la tranche par sa hauteur et par la plus grande de ses arêtes; la différence entre le prisme et la tranche est donc moindre que le produit du contour de la base de la pyramide par la plus grande arête de la tranche et par sa hauteur. En considérant pareillement la tranche correspondante dans la seconde pyramide, on voit que la différence entre le prisme droit qui lui correspond et cette tranche est moindre que le produit du contour de la base de cette seconde pyramide par la hauteur de la tranche et par la plus grande de ses arêtes; or, les deux prismes droits sont égaux dans les deux pyramides, puisqu'ils ont même base et même hauteur; donc la différence des tranches correspondantes dans les deux pyramides est moindre que le produit de la somme des contours des bases des pyramides par la hauteur des tranches et par la plus grande arête des mêmes tranches; la différence entière des deux pyramides est, par conséquent, moindre que le produit de leur hauteur par la somme des contours de leurs bases et par la plus grande arête de leurs tranches; or, le nombre des tranches pouvant augmenter à l'infini, cette différence peut être supposée moindre qu'aucune grandeur donnée; elle est donc nulle, et les deux pyramides sont égales en solidité.

Il est facile d'en conclure, par la décomposition du prisme triangulaire en trois pyramides triangulaires, qu'une pyramide triangulaire est le tiers du produit de sa base par sa hauteur, et que cela est généralement vrai pour une pyramide quelconque et pour un cône.

Si, d'un point fixe quelconque, on mène des droites à tous les angles d'un polyèdre et qu'on les prolonge proportionnellement à leur longueur, en faisant passer des plans par les extrémités de ces droites, on formera un nouveau polyèdre semblable au premier. Deux points situés sur une droite passant par le point fixe et à des distances de ce point proportionnelles aux côtés homologues des deux polyèdres seront semblablement placés relativement à chacun d'eux; deux lignes terminées par des points semblablement placés seront elles-mêmes semblablement placées; deux surfaces planes terminées par des lignes semblablement placées seront semblablement placées; enfin, deux solides terminés par des plans semblablement placés seront placés semblablement.

Les lignes semblablement placées sont proportionnelles aux arêtes homologues des deux polyèdres semblables; les surfaces semblablement placées sont proportionnelles aux carrés des lignes homologues; les solides semblablement placés sont proportionnels aux cubes des mêmes lignes.

Quelle que soit la nature du polyèdre, il existe entre les nombres de ses angles solides, de ses faces et de ses arêtes un rapport remarquable. Si l'on nomme a, b, c ces trois nombres, on a généralement

$$a + b = c + 2.$$

La surface d'un segment sphérique, sans y comprendre sa base, est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphère. Pour le faire voir, imaginons le segment partagé dans un nombre quelconque de tranches de même hauteur par des plans parallèles à sa base. Concevons de plus une suite de troncs de cônes droits

de même épaisseur que ces tranches, et dont la surface touche celle des tranches dans leur circonférence moyenne. Il est facile de s'assurer que la surface de chaque tronc de cône est le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphère; la somme de ces surfaces est donc égale au produit de la hauteur du segment par cette circonférence; or, en multipliant le nombre des tranches, cette somme approche sans cesse de la surface du segment, et elle peut en différer moins que d'aucune grandeur donnée; ainsi la surface du segment sphérique est le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle; d'où il suit que la surface entière de la sphère est le produit de son diamètre par sa circonférence; elle est quadruple de la surface d'un de ses grands cercles, et la même que la surface extérieure du cylindre circonscrit; et, si l'on a égard aux bases du cylindre, la surface entière du cylindre est à celle de la sphère comme 3 est à 2.

Un polyèdre circonscrit à la sphère peut être partagé dans autant de pyramides qu'il y a de faces, le sommet de ces pyramides étant au centre de la sphère. La hauteur de toutes ces pyramides est la même et égale au rayon; la solidité du polyèdre est donc le tiers du produit de sa surface par le rayon; d'où il suit, par la théorie des limites, que cela s'étend à la sphère, dont la solidité est, par conséquent, à celle du cylindre circonscrit comme 2 est à 3, ou en raison des surfaces de ces corps.

Ces beaux théorèmes, dus à Archimède, sont l'un des plus précieux monuments de l'antiquité. Leur connaissance étant aujourd'hui devenue familière, on remarque peu la difficulté que présentait alors la comparaison des surfaces convexes avec les surfaces planes; cette comparaison est le germe des découvertes qui ont été faites depuis dans la Géométrie des courbes et des surfaces.

Le rapport trouvé par Archimède, entre les surfaces et les solidités de la sphère et du cylindre circonscrit, s'étend au cône, et généralement à tous les corps circonscrits à la sphère; les solidités de tous ces corps sont comme leurs surfaces, ce qui donne un moyen simple d'avoir la surface d'un cône droit coupé par un plan quelconque.

Le rayon de la sphère étant pris pour unité, sa surface équivaut à deux circonférences ou à huit angles droits. Cette comparaison d'une surface à un angle ne présente aucune difficulté si l'on considère que la surface doit être divisée par le carré du rayon pris pour unité, et que l'angle est l'arc compris entre ses côtés divisé par le rayon; la surface et l'arc deviennent ainsi des nombres abstraits, et conséquemment comparables.

La surface d'un polygone sphérique qui n'a point d'angles rentrants est égale à l'excès de la somme de ses angles intérieurs sur deux fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés, moins quatre angles droits. On suppose les côtés du polygone formés par des arcs de grands cercles, qui sur la sphère sont toujours les plus courtes lignes entre leurs points extrêmes.

Ce théorème donne une solution fort simple du problème qui consiste à déterminer en combien de manières on peut couvrir la surface d'une sphère avec des polygones égaux et réguliers. Ce problème dépendant de l'analyse indéterminée va nous fournir une application de cette analyse dont je ne vous ai donné qu'une idée très succincte.

Soient x le nombre des côtés d'un des polygones réguliers qui recouvrent la sphère, y le nombre des angles qui s'assemblent autour d'un même point et z le nombre des polygones. La surface de chaque polygone sera $\frac{8A}{z}$; mais cette surface est égale à l'excès de la somme de ses angles intérieurs sur $2(x-2)A$; la somme de ces angles est donc

$$\frac{8A}{z}+2(x-2)A;$$

ainsi chaque angle intérieur est égal à

$$\frac{8A}{xz}+\frac{2(x-2)A}{x};$$

la somme des angles qui s'assemblent autour d'un même point est conséquemment égale à

$$\frac{8yA}{xz}+\frac{2(x-2)yA}{x};$$

mais cette somme vaut quatre angles droits, on a donc

$$(x-2)yz+4y=2xz,$$

équation indéterminée dans laquelle x, y et z sont des nombres entiers positifs, qui ne peuvent pas être plus petits que trois. Quoique cette équation renferme trois variables, on va voir cependant qu'elle ne peut être satisfaite que de huit manières. Elle peut se changer dans celle-ci

$$z=\frac{4y}{2x-y(x-2)}.$$

Le dénominateur de cette fraction ne peut être négatif; x ne doit donc pas surpasser $2+\frac{4}{y-2}$; et, par conséquent, il ne peut pas excéder six. En le supposant égal à trois, on a

$$z=\frac{4y}{6-y}.$$

Si l'on fait, dans cette équation, $y=3$, on a

$$z=4;$$

si l'on fait $y=4$, on a

$$z=8;$$

si l'on fait $y=5$, on a

$$z=20;$$

enfin si l'on fait $y=6$, on a

$$z=\infty;$$

ainsi l'on peut recouvrir la sphère avec quatre, ou huit, ou vingt, ou une infinité de triangles équilatéraux.

Supposons $x=4$, nous aurons

$$z=\frac{2y}{4-y}.$$

Si l'on fait $y=3$, on a

$$z=6;$$

si l'on fait $y=4$,

$$z=\infty;$$

on peut donc recouvrir la sphère avec quatre ou une infinité de polygones réguliers de quatre côtés.

Supposons $x = 5$, nous aurons

$$z = \frac{4y}{10 - 3y}.$$

Si l'on fait $y = 3$, on a

$$z = 12;$$

on ne peut donc couvrir la sphère que d'une manière avec des polygones réguliers de cinq côtés.

Supposons enfin $x = 6$, nous aurons

$$z = \frac{y}{3 - y}.$$

Si l'on fait $y = 3$,

$$z = \infty;$$

on ne peut donc couvrir la sphère que d'une manière avec des polygones réguliers de six côtés, en les prenant en nombre infini.

Si l'on ne considère que des polygones finis, on voit que la sphère ne peut être recouverte avec des polygones égaux et réguliers que de cinq manières : savoir, de trois manières avec des triangles, d'une manière avec des polygones de quatre côtés, et d'une manière avec des polygones de cinq côtés.

Si l'on considère les polygones infiniment petits, on a encore trois manières de recouvrir la sphère : savoir, avec des triangles, des carrés et des hexagones; or, si l'on suppose le rayon de la sphère infini, une partie finie de la surface se confond avec un plan; on ne peut donc recouvrir que des trois manières précédentes une surface plane avec des polygones égaux et réguliers.

Il suit de ce qui précède qu'il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers : savoir, le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre; le premier, le troisième et le cinquième de ces corps ayant des faces triangulaires, les faces des deux autres étant des carrés et des

pentagones. En effet, les faces d'un polyèdre régulier devant être des polygones égaux, réguliers et également inclinés les uns aux autres, il est clair que ce polyèdre peut être circonscrit à une sphère dont le centre est au point de concours des perpendiculaires élevées du centre de chaque surface sur son plan. Si l'on conçoit des rayons menés de ce centre à tous les angles du polyèdre, ils marqueront sur la sphère les angles des polygones réguliers correspondant à chaque face; il doit donc y avoir autant de corps réguliers qu'il y a de manières possibles de recouvrir une sphère avec des polygones égaux et réguliers.

Les polyèdres qui répondent à l'infinité des petits polygones réguliers, qui peuvent recouvrir la surface de la sphère, se confondent avec la sphère elle-même que l'on peut, sous ce point de vue, considérer comme un polyèdre régulier d'une infinité de faces.

La Trigonométrie sphérique a pour objet la détermination des angles et des côtés d'un triangle sphérique, quand on connaît trois de ces six quantités. Si l'on conçoit des droites menées du centre de la sphère aux angles d'un triangle, et si l'on coupe ces droites par un plan quelconque, on formera une pyramide triangulaire; les côtés du triangle sphérique seront les mesures des angles plans qui, par leur réunion, forment l'angle solide du sommet de la pyramide; les angles de ce triangle sphérique sont les inclinaisons mutuelles des plans qui concourent à ce sommet. Ainsi, la considération des pyramides triangulaires pouvait donner naissance à la Trigonométrie sphérique; mais cette science doit son origine à l'Astronomie, où elle est d'une nécessité indispensable; car l'observateur projette sans cesse les astres sur la surface d'une sphère indéfinie dont il se fait le centre.

Les angles et les côtés d'un triangle sphérique étant de même nature, il paraît plus naturel de chercher directement leurs rapports que de les déterminer au moyen de leurs sinus et cosinus; mais les équations entre les arcs et les angles sont transcendantes et fort compliquées, au lieu que les relations entre leurs sinus sont algébriques et fort simples.

Toute la Trigonométrie sphérique n'est que le développement de cette proposition fondamentale :

Le cosinus d'un côté est égal au produit des cosinus des deux autres côtés, plus au produit de leurs sinus, multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.

Je vous engage à lire sur cet objet un excellent Mémoire d'Euler, inséré parmi ceux de l'Académie des Sciences de Pétersbourg, pour l'année 1779. Ce Mémoire, quoique très court, est un traité complet de Trigonométrie sphérique.

HUITIÈME SÉANCE.

SUR L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE. DE LA DIVISION DES ANGLES. THÉORÈMES DE COTES. USAGE DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS. APPLICATIONS DE L'ALGÈBRE A LA THÉORIE DES LIGNES ET DES SURFACES COURBES.

L'Algèbre ayant pour objet la grandeur en général, il est visible qu'elle peut s'appliquer à la considération des lignes, des surfaces et des solides, et que les diverses questions géométriques peuvent être traitées par son moyen. Il ne s'agit que de représenter les lignes par les caractères algébriques, et de former les équations résultantes de leurs rapports qui, le plus souvent, sont donnés par les propriétés des triangles semblables ou rectangles et par celles du cercle. Dans la solution des problèmes, une ou plusieurs des lignes que ces équations renferment sont des inconnues, dont on détermine les valeurs par les méthodes que l'Algèbre fournit pour résoudre les équations. On construit ensuite ces valeurs, c'est-à-dire que l'on assigne, par des procédés géométriques, les lignes qui leur sont égales. Ainsi, l'on transporte dans la Géométrie toutes les ressources de l'Analyse, et l'on parvient sans peine à des résultats qu'il serait souvent difficile d'obtenir par la Géométrie seule.

Les propriétés du cercle et des lignes proportionnelles suffisent pour construire les expressions qui ne renferment que des racines carrées. Par exemple, une fraction, dont le numérateur est de la dimension n et dont le dénominateur est de la dimension $n-2$, exprimant une surface, si l'on veut déterminer le côté du carré qui lui est égal, on peut concevoir le numérateur de la fraction divisée par f^{n-1}, f étant une ligne prise à volonté. Chaque terme de ce numérateur devient de la première dimension, et l'on détermine la ligne qu'il représente par les proportionnelles, en observant que, f, a, b exprimant trois lignes, $\frac{ab}{f}$ est une quatrième proportionnelle à ces lignes. On aura donc ainsi une ligne h égale à la somme de tous les termes du numérateur divisés par f^{n-1}; on aura pareillement une ligne l égale à la somme de tous les termes du dénominateur divisés par f^{n-2}; la fraction proposée sera réduite à celle-ci, $\frac{hf^2}{l}$, ou à pf, p étant une quatrième proportionnelle aux lignes l, h, f. La moyenne proportionnelle entre p et f sera le côté du carré égal à la fraction proposée.

On peut, en suivant ce procédé, déterminer en lignes, en surfaces et en solides les expressions d'une, de deux ou de trois dimensions qui renferment des radicaux carrés, et même des radicaux dont l'exposant est une puissance de deux. Ainsi la racine de toute équation du deuxième degré peut être construite au moyen du cercle et de la ligne droite, c'est-à-dire avec la règle et le compas; mais le cercle et la ligne droite, ou deux cercles, ne pouvant se couper qu'en deux points, on ne peut pas, par leur moyen, construire les racines d'une équation du troisième degré ni des racines cubiques; en sorte que la duplication du cube et la trisection de l'angle, problèmes fameux dans l'antiquité, sont impossibles avec la règle seule et le compas.

Le choix des inconnues n'est point indifférent dans les problèmes géométriques, et c'est de là que dépend principalement la simplicité de leurs solutions. La règle que nous avons donnée pour ce choix, dans les problèmes algébriques, peut encore servir ici. Lorsque deux ou plusieurs inconnues sont déterminées par une même équation, il ne faut pas choisir l'une d'elles pour inconnue principale; on doit prendre pour cette inconnue une ligne qui ait un même rapport avec elles, telle que leur somme ou leur différence, ou une moyenne proportionnelle. L'équation que l'on obtient alors est moins composée que celle qui détermine les inconnues du problème; elle en est une réduite plus facile à résoudre, et qui donne aisément les valeurs des inconnues. Supposons, par exemple, que la hauteur d'un triangle, sa base et la somme de ses deux côtés étant connues, on propose de déterminer

chacun de ces côtés; il est clair que, dépendant de la même manière des quantités connues, ils doivent être donnés par la même équation; ainsi, au lieu de considérer l'un d'eux comme l'inconnue principale, il vaut mieux prendre pour cette inconnue leur différence.

Parmi les diverses constructions que l'on peut donner d'un même problème, il en est qui sont recommandables par leur simplicité et leur élégance, et dont la recherche exige quelquefois beaucoup d'adresse. Il est utile dans l'enseignement d'exercer sur cet objet les élèves.

Vous trouverez un grand nombre de problèmes géométriques résolus par l'Algèbre dans l'*Arithmétique universelle* de Newton, Ouvrage digne de son illustre auteur, soit par les découvertes qu'il contient, soit par les artifices au moyen desquels les solutions des problèmes sont ramenées aux équations les plus simples. Il importe d'autant plus de connaître et de perfectionner ces artifices, qu'ils peuvent seuls assurer aux solutions algébriques la supériorité sur les solutions purement géométriques qui, d'ailleurs, ont l'avantage de ne faire jamais perdre de vue l'objet principal, et d'éclairer la route entière qui conduit des premiers axiomes à leurs dernières conséquences. Mais je pense que l'Algèbre peut toujours fournir les meilleures méthodes; il ne s'agit pour cela que de l'appliquer d'une manière convenable, en faisant un choix avantageux des inconnues, et en donnant aux résultats la forme la plus facile à construire ou à réduire en calcul numérique. Pour employer commodément dans cette réduction les tables de logarithmes, il convient de décomposer les résultats en facteurs. La recherche de la solution la plus simple sous ce rapport est un nouveau problème qui souvent présente d'assez grandes difficultés, alors même que le problème principal n'en offre aucune. C'est à les résoudre que l'on doit s'attacher si l'on veut rendre utile l'application de l'Algèbre à la Géométrie; dans ce genre, lorsqu'il s'agit de méthodes usuelles, un abrégé de calcul est une vraie découverte; ce qui n'a pas toujours été senti par ceux qui ont essayé de substituer l'Analyse aux méthodes trigonométriques; et c'est pour cela que, dans un grand nombre de cas, ces dernières méthodes sont encore préférées.

Vous concevez que, pour appliquer d'une manière générale l'Algèbre à la Géométrie, il était nécessaire que les quantités, soit connues, soit inconnues, fussent représentées par des caractères généraux. On n'a d'abord employé les lettres que pour exprimer les inconnues; les connues étaient représentées par des nombres. Viète est le premier qui ait eu l'heureuse idée d'exprimer les unes et les autres par des lettres. L'application que ce grand analyste fit de l'Algèbre ainsi généralisée à la Géométrie est devenue, par l'extension que Descartes lui a donnée, l'une des plus importantes découvertes que l'on ait faites dans les sciences. Il semble aujourd'hui qu'il était facile d'y parvenir. Déjà vous avez eu l'occasion d'observer que presque toujours les idées les plus fécondes sont en même temps si simples que l'on est tenté de les regarder comme d'heureux hasards; mais ces hasards, qui ne sont jamais arrivés qu'aux hommes de génie, ont toujours été préparés par des recherches antérieures. Nous ne pouvons nous élever aux vérités générales que par la comparaison des résultats particuliers qu'il faut considérer longtemps, et varier d'un grand nombre de manières, pour saisir ce qu'ils ont de commun entre eux, et pour en faire éclore ces grandes théories qui changent la face des sciences et font époque dans leur histoire.

Une des applications les plus intéressantes de l'Algèbre à la Géométrie est celle qui a pour objet la division des angles et de la circonférence en parties égales. L'Analyse en ayant tiré de grands avantages, soit pour la décomposition des fonctions en facteurs, soit pour le développement des fonctions en séries, soit pour la résolution des équations; je vais vous l'exposer en peu de mots.

x et y étant deux angles quelconques, il est aisé de voir par le théorème fondamental de la Trigonométrie que le produit de

$$\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x, \quad \text{par} \quad \cos y \pm \sqrt{-1}\sin y$$

est égal à

$$\cos(x+y) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y).$$

De là il résulte, en faisant y successivement égal à x, $2x$, $3x$, ..., que

l'on a généralement

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx.$$

Cette formule, l'une des plus utiles de l'Analyse, a, comme celle du binome, l'avantage de s'étendre aux valeurs de n, entières et fractionnaires, positives et négatives, irrationnelles et même imaginaires.

Il est facile, au moyen de cette formule, de développer une fonction quelconque de sinus et de cosinus de l'angle x en sinus et cosinus de ses multiples; pour cela, il suffit de substituer dans cette fonction

$$\frac{1}{2}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) + \frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)$$

au lieu de $\cos x$ et

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x),$$

au lieu de $\sin x$; et de développer ensuite la fonction par rapport aux puissances et aux produits de

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x \quad \text{et de} \quad \cos x - \sqrt{-1}\sin x.$$

Ces puissances et ces produits se réduisent en sinns et cosinus de multiples de x, en observant que le produit de

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^{i'} \quad \text{par} \quad (\cos x \mp \sqrt{-1}\sin x)^{i}$$

est égal à

$$[\cos(i'-i)x \pm \sqrt{-1}\sin(i'-i)x];$$

on aura ainsi les expressions connues des puissances des sinus, cosinus, tangentes, ... d'un angle quelconque. Vous trouverez tous les développements que l'on peut désirer sur cet objet dans l'*Introduction à l'analyse des infiniment petits*, par Euler, Ouvrage excellent, dont je vous recommande la lecture, comme indispensable à tous ceux qui veulent faire des progrès dans l'Analyse.

La formule précédente donne un moyen simple de décomposer en facteurs le binome $x^n \pm a^n$. Pour cela, supposons $x = ay$, et considérons l'équation $y^n \pm 1 = 0$. Si l'on y suppose

$$y = \cos x \pm \sqrt{-1}\sin x,$$

on aura

$$\cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx = \mp 1,$$

ce qui donne

$$\cos nx = \mp 1.$$

Si le signe + a lieu, on a

$$nx = 2ic,$$

i étant zéro ou un nombre entier, et c étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité; on a donc alors

$$y = \cos\frac{2ic}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2ic}{n};$$

les facteurs de $y^n - 1$ sont donc les diverses quantités que l'on obtient en faisant $2i$ égal à 0, 2, 4, ... jusqu'à n ou $n-1$, suivant que n est pair ou impair, dans la fonction

$$y = \cos\frac{2ic}{n} \mp \sqrt{-1}\sin\frac{2ic}{n};$$

les valeurs ultérieures de $2i$ reproduisent les mêmes facteurs; ainsi la fonction

$$x - a\cos\frac{2ic}{n} \mp a\sqrt{-1}\sin\frac{2ic}{n}$$

représente les facteurs de $x^n - a^n$.

Si l'on a $\cos nx = -1$, on aura

$$nx = (2i+1)c$$

et, dans ce cas, les facteurs de $x^n + a^n$ seront compris dans la forme

$$x - a\cos\frac{(2i+1)}{n}c \pm a\sqrt{-1}\sin\frac{(2i+1)}{n}c,$$

$2i$ étant successivement égal à 0, 2, 4, ... jusqu'à $n-2$ ou $n-1$, suivant que n est pair ou impair.

De là il est facile de conclure que $x^n - a^n$ est égal à la racine carrée du produit de n facteurs que l'on obtient en donnant à i toutes les valeurs, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = n-1$, dans le trinome

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2ic}{n} + a^2;$$

et que $x^n + a^n$ est égal à la racine carrée du produit des n facteurs que l'on obtient en donnant à i toutes les valeurs, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = n-1$, dans le trinome

$$x^2 - 2ax\cos\frac{(2i+1)}{n}c + a^2.$$

Ce résultat est la traduction analytique de ce théorème de Côtes :

Si, dans un cercle, on mène un diamètre quelconque; qu'à partir d'une des extrémités de ce diamètre, comme origine, on divise la circonférence dans le nombre 2n de parties égales, et que l'on désigne par les nombres 0, 1, 2, 3, ... ces divisions, 0 répondant à l'origine; si d'un point fixe quelconque pris sur le diamètre ou sur son prolongement, et du même côté du centre que l'origine des arcs, on mène des droites aux divisions 0, 1, 2, ...; le produit de toutes les droites menées du point fixe aux nombres impairs est égal à la somme des puissances n, du rayon et de la distance du point fixe au centre; le produit de toutes les droites menées du point fixe aux nombres pairs 0, 2, ... est égal à la différence des mêmes puissances. Si le point fixe est supposé de l'autre côté du centre, il suffit alors de considérer sa distance au centre comme étant négative.

Ce théorème, l'un des plus beaux que l'on ait trouvés en Géométrie, mérita à son auteur, qu'une mort prématurée enleva aux sciences, ce bel éloge de Newton : « Si Côtes eût vécu, nous saurions quelque chose. »

Ce grand géomètre ayant laissé sans démonstration son théorème, les géomètres s'appliquèrent à la rétablir, et leurs recherches ont produit l'analyse que nous venons d'exposer.

Il en résulte que la division de la circonférence en parties égales et la résolution de l'équation $x^n - 1 = 0$ dépendent réciproquement l'une de l'autre; or, on peut résoudre cette équation, sans admettre de radicaux cubes, lorsque n est successivement égal à 3, 4, 5, et à ces nombres multipliés respectivement par des puissances de 2; on peut donc, par la règle seule et le compas, inscrire et circonscrire au cercle des polygones réguliers de ce nombre de côtés.

En général, m et n étant premiers entre eux, et exprimant le nombre des côtés de deux polygones réguliers, inscrits ou circonscrits au cercle, on pourra facilement inscrire ou circonscrire un polygone régulier d'un nombre mn de côtés. Pour cela, on portera l'arc relatif à un côté du polygone qui a le plus de côtés, sur l'arc relatif à un côté de l'autre polygone, autant de fois qu'il y est contenu exactement; on portera le reste sur le second arc, autant de fois qu'il y est contenu; on portera le deuxième reste sur le premier reste, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ne trouve point de reste. Le dernier reste sera la commune mesure des deux arcs; or cette commune mesure est égale à $\frac{2c}{mn}$; on pourra donc inscrire ou circonscrire au cercle un polygone de mn côtés.

De là, et de la relation qui existe entre la division de la circonférence et la résolution des équations à deux termes, il suit que les racines des deux équations

$$x^m - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^n - 1 = 0$$

donnent les racines de l'équation

$$x^{mn} - 1 = 0.$$

En effet, la résolution de la première de ces équations donne la valeur de

$$\cos\frac{2c}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2c}{m};$$

et, par conséquent, celle de

$$\cos\frac{2rc}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2rc}{m},$$

r étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, puisque cette seconde valeur est la puissance r de la première. Pareillement, la résolution de l'équation $x^n - 1 = 0$ donne la valeur de

$$\cos\frac{2r'c}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2r'c}{n},$$

r' étant un nombre entier; on aura donc la valeur du produit de ces deux dernières fonctions, produit qui est égal à

$$\cos\left(\frac{rn + r'm}{mn}2c\right) \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{rn + r'm}{mn}2c\right);$$

or, m et n étant premiers entre eux, on peut toujours déterminer r et r' en sorte que l'on ait

$$rn + r'm = 1;$$

on aura donc ainsi la valeur de

$$\cos\frac{2c}{mn} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2c}{mn}.$$

La résolution de l'équation $x^n - 1 = 0$ donne toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; et l'on voit que les racines autres que l'unité sont les puissances de celle qui répond au plus petit arc. La remarque que l'unité peut avoir plusieurs racines du même ordre, quoiqu'une suite immédiate de la formation des équations, ne paraît avoir été bien connue que dans ce siècle. Elle montre que l'égalité d'une même puissance de deux grandeurs ne prouve point l'égalité de ces grandeurs; de même que la condition de satisfaire à une même équation ne prouve point l'égalité des racines. Cette réflexion nous sera utile dans la théorie des logarithmes que nous ferons voir être en nombre infini pour une même quantité.

On peut, au moyen de ce qui précède, extraire une racine quelconque d'une quantité, soit réelle, soit imaginaire. Pour cela, considérons la quantité $p + q\sqrt{-1}$; sa racine $n^{\text{ième}}$ est égale à

$$\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{q\sqrt{-1}}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)^{\frac{1}{n}}(p^2+q^2)^{\frac{1}{2n}}.$$

Soit A le plus petit des angles dont le sinus et le cosinus sont respectivement

$$\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad \text{et} \quad \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}};$$

la fonction précédente sera

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2n}}\left[\cos\left(\frac{2ic+\mathrm{A}}{n}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(\frac{2ic+\mathrm{A}}{n}\right)\right],$$

i étant un nombre entier positif qui peut s'étendre depuis $i=0$ jusqu'à $i=n-1$.

Ainsi, toutes les racines des fonctions de la forme

$$p+q\sqrt{-1}$$

sont de la même forme, et l'on voit généralement que toute fonction algébrique d'une ou de plusieurs imaginaires de la forme

$$p+q\sqrt{-1}$$

est de la même forme et peut se déterminer par la méthode précédente.

Si n est un nombre fractionnaire que nous représentons par $\frac{h}{l}$, l'angle $\frac{2ic+\mathrm{A}}{n}$ deviendra $\frac{2ilc+\mathrm{A}l}{h}$; il reproduira donc les mêmes sinus et cosinus lorsque i sera égal à h; ainsi la racine $n^{\text{ième}}$ n'a, dans ce cas, que h valeurs différentes; mais, si n est irrationnel, alors elle a une infinité de valeurs; car, i et i' étant deux nombres quelconques, la différence des deux angles

$$\frac{2ic+\mathrm{A}}{n} \quad \text{et} \quad \frac{2i'c+\mathrm{A}}{n}$$

ne peut jamais devenir un multiple de la circonférence; les valeurs successives de i ne finissent point par reproduire les mêmes sinus et cosinus. Nous verrons dans la suite que, si n est imaginaire, et de la forme $p+q\sqrt{-1}$, les racines $n^{\text{ièmes}}$ sont encore de la même forme.

Le cosinus de l'angle nx étant donné, comme on l'a vu précédemment, en puissances du cosinus de l'angle x, si l'on considère le premier de ces cosinus comme une quantité connue et le second comme une inconnue, on aura, pour déterminer cette inconnue, en supposant

$$a=\cos nx \quad \text{et} \quad y=\cos x,$$

l'équation

$$a=2^{n-1}y^n-n.2^{n-3}y^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}y^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}y^{n-6}+\ldots.$$

Cette équation peut donc être résolue par la division d'un arc en parties égales; et, si l'on nomme A le plus petit des arcs, dont le cosinus est a, les diverses valeurs de y seront exprimées par $\cos\left(\frac{2ic+\mathrm{A}}{n}\right)$, i pouvant s'étendre depuis $i=0$ jusqu'à $i=n-1$.

Il suit de ce qui précède que

$$\sqrt[n]{a\pm\sqrt{a^2-1}}=\cos\left(\frac{2ic+\mathrm{A}}{n}\right)\pm\sqrt{-1}\sin\left(\frac{2ic+\mathrm{A}}{n}\right),$$

ce qui donne

$$y=\cos\left(\frac{2ic+\mathrm{A}}{n}\right)=\frac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}}+\frac{1}{2}\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}.$$

Ainsi l'expression de y peut être mise sous une forme indépendante des cosinus et, sous cette forme, elle embrasse le cas où a est plus grand que l'unité.

Lorsque a est moindre que l'unité, les racines de l'équation sont toutes réelles, et elles offrent la même singularité que le cas irréductible des équations du troisième degré, celle d'être la somme de deux imaginaires. En effet, nous verrons bientôt que l'équation du troisième degré est alors comprise dans la précédente.

Les expressions du sinus et de la tangente de l'angle nx, en puissances du sinus et de la tangente de l'angle x, fournissent pareillement des équations d'un degré indéfini, qui peuvent être résolues par la division de l'angle en parties égales.

De là résulte un moyen facile de résoudre les équations du troisième et du quatrième degré, en faisant usage des Tables de sinus. Ce moyen est si commode que, malgré la facilité que présente la résolution des équations du deuxième degré, il peut être employé avec avantage, relativement à ces dernières équations.

Considérons l'équation du deuxième degré

$$x^2 + px \pm q = 0,$$

q étant positif. Soit $x = z\sqrt{q}$, on aura

$$z \pm \frac{1}{z} = -\frac{p}{\sqrt{q}}.$$

Si le signe $+$ a lieu, et si $\frac{-p}{2\sqrt{q}}$ est, abstraction faite du signe, moindre que l'unité, on fera

$$z = \cos u + \sqrt{-1}\sin u,$$

et l'on aura

$$\cos u = \frac{-p}{2\sqrt{q}}.$$

Les Tables des sinus feront connaître l'angle u, au moyen de cette équation, qui donnera facilement le logarithme de $\cos u$; et, comme à la même valeur de $\cos u$ répondent les deux angles u et $-u$, on aura pour x deux valeurs qui, dans ce cas, sont imaginaires.

Si $\frac{-p}{2\sqrt{q}}$ est, abstraction faite du signe, plus grand que l'unité, on fera

$$z = \tang u;$$

et l'on aura

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sin 2u},$$

d'où l'on tire

$$\sin 2u = -\frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Les Tables des sinus donneront le plus petit des angles qui répondent à cette expression de $\sin 2u$ prise positivement. Cet angle, affecté du même signe que cette expression, sera la valeur de $2u$; mais au sinus de $2u$ répondent les deux arcs $2u$ et $c - 2u$, c étant la demi-circonférence; on aura donc, pour les deux valeurs de x,

$$x = \sqrt{q}\,\tang u, \qquad x = \sqrt{q}\,\tang\left(\frac{c}{2} - u\right).$$

Si l'on a

$$z - \frac{1}{z} = \frac{-p}{\sqrt{q}},$$

on fera encore $z = \tang u$, ce qui donne

$$z - \frac{1}{z} = -\frac{2}{\tang 2u}$$

et, par conséquent,

$$\tang 2u = \frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Les Tables des sinus feront connaître le plus petit des angles qui répondent à cette expression de $\tang 2u$ prise positivement; cet angle, affecté du même signe que cette expression, sera la valeur de $2u$. Mais à la tangente de $2u$ répondent les deux arcs $2u$ et $c + 2u$; on aura donc

$$x = \sqrt{q}\,\tang u, \qquad x = \sqrt{q}\,\tang\left(\frac{c}{2} + u\right).$$

Considérons présentement l'équation du troisième degré

$$x^3 \mp px + q = 0,$$

p étant positif. Supposons $x = r\left(z \pm \frac{1}{z}\right)$; nous aurons

$$x^3 \mp px + q = r^3\left(z^3 \pm \frac{1}{z^3}\right) \pm (3r^3 - pr)\left(z \pm \frac{1}{z}\right) + q = 0.$$

Soit $r^2 = \frac{1}{3}p$ et $-\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}} = 2h$, on aura

$$z^3 \pm \frac{1}{z^3} = 2h.$$

Cette équation en z est du sixième degré, mais résoluble à la manière de celles du deuxième degré, ce qui donne un nouveau moyen de résoudre les équations du troisième degré.

Supposons d'abord que le signe supérieur ait lieu et que h, abstraction faite du signe, soit moindre que l'unité; alors $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ est une quantité négative et l'équation proposée tombe dans le cas irréductible. Si l'on fait $z = \cos u + \sqrt{-1}\sin u$, on aura

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos u;$$

on aura ensuite

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = 2\cos 3u;$$

partant, $\cos 3u = h$. Soit A le plus petit des angles dont le cosinus est h, et que les Tables feront connaître; on aura, pour $3u$, les trois valeurs A, $2c + \mathrm{A}$, $4c + \mathrm{A}$; et, par conséquent, les trois valeurs de x seront

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{1}{3}\mathrm{A},$$

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{2c + \mathrm{A}}{3}\right),$$

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{4c + \mathrm{A}}{3}\right).$$

Remarquez bien ici l'usage des quantités imaginaires pour déterminer les quantités réelles; la valeur de z exprime le radical imaginaire dont la racine de l'équation du troisième degré est composée dans le cas irréductible; mais, sous cette forme, on voit clairement que les imaginaires disparaissent de l'expression de $r\left(z + \frac{1}{z}\right)$, qui est égale à x. Ainsi, la considération des quantités imaginaires qui embarrassaient beaucoup les premiers analystes est devenue, par leur comparaison avec l'expression $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x$, facile et d'un grand usage dans l'Analyse, et vous aurez occasion d'en voir des applications nombreuses dans le Calcul infinitésimal.

Si h, abstraction faite du signe, est plus grand que l'unité, on fera

$$z^3 = \operatorname{tang} u;$$

alors on aura

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \frac{2}{\sin 2u};$$

d'où l'on tire

$$\sin 2u = \frac{1}{h};$$

on aura donc u par les Tables des sinus. Si l'on fait ensuite

$$\sqrt[3]{\operatorname{tang} u} = \operatorname{tang} u',$$

on aura

$$x = \frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2u'}.$$

C'est la valeur réelle de x; ses deux valeurs imaginaires sont

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}\cos 2u'}{\sin 2u'}\right).$$

Il nous reste à considérer le cas où l'on a

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

On fera, dans ce cas, $\frac{1}{z^3} = \operatorname{tang} u$, et l'équation

$$z^3 - \frac{1}{z^3} = 2h$$

donnera

$$\operatorname{tang} 2u = \frac{1}{h};$$

on aura donc l'angle u au moyen des Tables. Soit

$$\operatorname{tang} u' = \sqrt[3]{\operatorname{tang} u};$$

on aura

$$x = \frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\operatorname{tang} 2u'}.$$

Les valeurs imaginaires de x sont

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{\cos 2u' \pm \sqrt{-3}}{\sin 2u'}\right).$$

La résolution des équations du quatrième degré dépend d'une réduite du troisième degré; ses racines sont une fonction très simple de celles de la réduite; on pourra donc les déterminer facilement par la méthode précédente.

Vous voyez par ce qui précède que l'application de l'Algèbre à la Géométrie a pour objet de faire servir les méthodes de l'Analyse à la détermination d'un ou de plusieurs points d'après des conditions données. Mais, si le nombre des équations qui résultent de ces conditions est insuffisant pour la détermination de ces points, il en existe alors une infinité dont l'ensemble forme des surfaces ou des lignes.

La manière la plus simple de fixer la position d'un point dans l'espace consiste à le rapporter à trois plans perpendiculaires entre eux. Les distances du point à chacun de ces plans se nomment *coordonnées*, et les intersections mutuelles des plans sont les axes des coordonnées qui leur sont parallèles. x, y, z exprimant ces coordonnées, z est la distance du point au plan dans lequel sont les axes des x et des y; la rencontre de z avec ce plan est la projection du point, et y est la distance de cette projection à l'axe des x. Enfin, x est la distance du point où la perpendiculaire y à l'axe des x rencontre cet axe, à l'intersection commune des trois axes, intersection qui est l'origine des coordonnées. Cette distance se nomme alors *abscisse*, et les deux autres lignes, y et z, se nomment *ordonnées*. Si l'on considère comme positives les coordonnées prises d'un certain côté de leur origine, elles seront négatives prises du côté opposé.

Si l'on n'a qu'une équation entre les trois coordonnées, la position du point est indéterminée, et le lieu de tous les points qui y satisfont est une surface dont cette équation exprime la nature.

Si l'on a deux équations entre ces trois coordonnées, la position du point est encore indéterminée; le lieu de tous les points qui satisfont à ces équations est à la fois sur les deux surfaces qu'elles représentent; elle est donc sur la ligne formée par leur commune intersection; et cette ligne se nomme *courbe à double courbure* quand elle n'est pas située dans un même plan.

Enfin, si l'on a trois équations entre les coordonnées, la position du point est déterminée; et c'est sous ce point de vue que nous venons d'envisager l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

Le premier objet de l'Analyse appliquée à la théorie des courbes et des surfaces est de former leurs équations d'après les conditions qui les déterminent. Par exemple, la circonférence étant une ligne dont tous les points sont également éloignés du centre, il est facile d'en conclure que, a étant son rayon, y une perpendiculaire abaissée d'un de ses points sur un diamètre, et x la distance de cette perpendiculaire au centre, la condition dont il s'agit donne, pour l'équation du cercle,

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Mais souvent ce problème présente de grandes difficultés dont la solution a fait naître des théories importantes. Ainsi, la considération des lignes et des surfaces, d'après la condition qu'elles embrassent, sous la même étendue, le plus petit espace, a produit le calcul des variations; et les premiers éléments du calcul des différences partielles sont dus à la recherche des courbes qui coupent, un système donné d'autres courbes, à angles droits.

Quand les équations sont formées, on peut lire, dans leur développement, toutes les affections des surfaces et des lignes qu'elles expriment. On peut déterminer le cours de ces surfaces et de ces lignes dans l'espace, leurs branches infinies, leurs inflexions, leurs rebroussements, leurs contours, leurs nœuds et leur courbure, leur grandeur et celle des espaces qu'elles renferment, la position des plans et des lignes qui les touchent, leurs plus grandes et leurs plus petites ordonnées. Ce rapprochement de la Géométrie et de l'Algèbre répand un nouveau jour sur ces deux sciences; les opérations intellectuelles de l'Analyse, rendues sensibles par les images de la Géométrie, sont plus faciles à saisir, plus intéressantes à suivre. Cette correspondance fait l'un des plus grands charmes attachés aux spéculations mathématiques, et, quand l'observation réalise ces images et transforme les résultats mathématiques en lois de la nature, quand ces lois, en embrassant l'univers, dévoilent à nos yeux ses états passés et à venir : alors la vue de ce sublime spectacle nous fait éprouver le plus noble des plaisirs réservés à la nature humaine.

Considérons d'abord les lignes courbes. Elles sont algébriques ou transcendantes suivant la nature de l'équation qui les exprime; mais, dans tous ces cas, on peut les considérer comme l'intersection de deux surfaces représentées chacune par une équation entre les trois coordonnées x, y et z. Si l'on élimine de ces équations une des coordonnées, z par exemple, on aura une équation entre x et y, qui sera celle de la projection de la courbe sur le plan des x et des y. En éliminant y au lieu de z, on aura une équation entre x et z, qui sera celle de la projection de la courbe sur le plan des x et des z; enfin, si l'on élimine x, on aura une équation entre y et z, qui sera celle de la projection de la courbe sur le plan des y et des z. Mais il est visible que, deux de ces projections étant données, la troisième en est une suite nécessaire.

Quoique la considération des axes des coordonnées, perpendiculaires entre eux, soit la plus simple, cependant il est quelquefois utile de supposer que ces axes font entre eux des angles quelconques; en changeant la position des axes, leur inclinaison mutuelle et leur origine, les nouvelles coordonnées parallèles à ces axes seront données en x, y, z par des équations linéaires et réciproquement; en sorte que le degré des équations qui déterminent les courbes ou les surfaces restera toujours le même. C'est sous ce point de vue général que nous envisageons les coordonnées.

La nature des courbes à double courbure dépend, comme on vient de le voir, de la nature des courbes situées dans un même plan. Celles-ci, quand elles sont rapportées à leur plan, ne dépendent que d'une seule équation; lorsqu'elles sont algébriques, on les a distinguées en différents ordres relatifs au degré de l'équation dont elles dépendent.

On a nommé *lignes du premier ordre* celles dont l'équation, entre les coordonnées x et y, est du premier degré, et la ligne droite est évidemment la seule de cet ordre. Les *lignes du deuxième ordre* sont celles dont l'équation est du deuxième degré, et ainsi de suite.

Chaque ordre présente, à mesure qu'il s'élève, une grande variété de figures. Quelquefois la courbe ne s'étend que jusqu'à certaines limites, au delà desquelles les ordonnées ou les abscisses deviennent imaginaires; ainsi, dans l'équation du cercle $x^2 + y^2 = a^2$, l'une des coordonnées étant imaginaire quand l'autre surpasse a, la courbe est renfermée tout entière dans un carré dont le côté est $2a$. Dans d'autres cas, la courbe étend à l'infini plusieurs branches dont le nombre et la nature sont le caractère le plus propre à distinguer les ordres en genres. Les branches infinies des courbes approchent sans cesse d'une courbe beaucoup plus simple qui lui sert d'asymptote, et dont elle finit par s'éloigner moins que d'aucune quantité donnée. Cette propriété des courbes est commune à toutes les suites infinies des grandeurs qui dépendent les unes des autres. La détermination des lois qui leur servent de limites est un des objets les plus intéressants de l'Analyse. Voici comme on y est parvenu relativement aux branches infinies des courbes.

Si l'on conçoit l'expression de l'ordonnée y de la courbe, développée dans une suite ordonnée par rapport aux puissances descendantes de l'abscisse x, il est clair que les termes qui renferment les puissances négatives de x seront d'autant moindres que cette abscisse sera plus grande et qu'ils parviendront à être plus petits qu'aucune grandeur donnée. La courbe approchera donc sans cesse de celle qui est exprimée par l'expression de y lorsque l'on n'a égard qu'aux termes précédents de la série, et cette seconde courbe sera l'asymptote de la première. Tout se réduit donc à former la courbe dont nous venons de parler, ce qui, dans plusieurs cas, présente des difficultés. Newton a imaginé un procédé ingénieux pour les résoudre. Il consiste à partager un parallélogramme en cases égales par des lignes menées parallèlement à ses côtés. En supposant l'un d'eux horizontal et l'autre vertical, on place chaque terme de l'équation proposée dans la colonne verticale dont le rang, à partir du concours des deux côtés, est égal à l'exposant de x, augmenté de l'unité : on le place en même temps dans la colonne horizontale dont le rang, à partir du même point, est indiqué par l'exposant de y augmenté de l'unité. Cela fait, on dispose une règle de manière qu'elle passe par le centre de deux cases qui renferment des termes de l'équation, en remplissant la condition de laisser au-dessous tous les termes qui ne sont pas sur sa direction. Maintenant, si dans l'équation on suppose $y = Ax^i$, tous les termes placés sur la direction de la règle renfermeront les plus hautes puissances de x, et ces puissances seront les mêmes pour chacun d'eux. En égalant leurs exposants, on aura la valeur de l'exposant indéterminé i; en égalant la somme de leurs coefficients à zéro, on aura la valeur de A.

Le terme Ax^i est le premier terme de la série descendante en x; on aura le second terme en supposant dans l'équation y égal à Ax^i, plus une nouvelle variable y' dont on déterminera, par la même méthode, le premier terme $A'x^{i'}$ de son expression, en ayant soin d'observer que i' doit être moindre que i. En continuant ainsi, on aura les différents termes de l'expression de y. Souvent, après un certain nombre de termes, la loi des exposants se manifeste, et alors il suffit de donner, aux termes de la série, des coefficients arbitraires que l'on détermine aisément en substituant cette série au lieu de y dans l'équation proposée, et en comparant les puissances semblables de x.

Si la règle peut prendre deux ou un plus grand nombre de positions différentes, de manière à remplir les conditions dont nous avons parlé, on aura, pour l'expression de y, autant de séries différentes qui donneront les diverses branches infinies de la courbe; mais la courbe n'aura aucune branche infinie si toutes ces séries sont imaginaires, et alors on sera sûr qu'elle ne s'étend point au delà de certaines limites.

Il est facile de conclure de ce qui précède que les branches infinies d'une courbe sont toujours en nombre pair, et que, si le degré de son équation est impair, elle a au moins deux branches infinies.

S'il est intéressant de suivre la courbe dans ses branches infinies, il ne l'est pas moins de la considérer à sa naissance, et d'avoir la courbe la plus simple qui, dans ces points, coïncide avec elle. Pour cela, il faut ordonner l'expression de y en série par rapport aux puissances ascendantes de x. Le parallélogramme de Newton offre encore un

moyen facile d'y parvenir; mais, au lieu de placer la règle de manière à laisser au-dessous d'elle tous les termes qui ne sont pas sur sa direction, il faut alors la disposer de manière qu'elle laisse ces termes au-dessus.

Il n'est pas nécessaire, pour l'usage de ce parallélogramme, que les exposants des puissances de x et de y soient des nombres entiers positifs; ils peuvent être fractionnaires et même négatifs. Dans tous les cas, il suffit de placer chaque terme au point du concours des deux lignes parallèles aux côtés du parallélogramme qui répondent aux exposants de x et de y. Au reste, sans recourir à ce moyen mécanique, on peut, par le calcul, former, d'une manière encore plus simple, les séries, soit ascendantes, soit descendantes, de l'expression de y; et c'est ce que Lagrange a fait dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de Berlin.

La considération de l'expression de y en série ascendante sert à déterminer la courbe d'une nature donnée, qui coïncide avec la proposée, dans un de ses points quelconques, et que l'on nomme *courbe osculatrice*. x et y étant les deux coordonnées du point, changeons, dans l'équation de la courbe, x dans $x + x'$ et y dans $y + y'$; les termes indépendants de x' et de y' disparaîtront par la nature de l'équation, et l'on aura une nouvelle équation entre x' et y'; d'où l'on tirera pour y' une expression en série de cette forme

$$y' = Ax' + Bx'^2 + Cx'^3 + \dots,$$

A, B, C, ... étant des fonctions connues de x et de y. On représentera ensuite, de la manière la plus générale, l'équation de la courbe osculatrice, en supposant que ses coordonnées soient $x + x'$ et $y + y'$, et que les constantes arbitraires dont elle dépend soient des fonctions de x et de y qu'il s'agit de déterminer. Alors, en réduisant cette équation dans une série ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de x' et de y', elle deviendra de cette forme

$$o = H + Lx' + My' + Nx'^2 + Px'y' + Qy'^2 + \dots,$$

H, L, M, N, ... étant des fonctions connues de x, y et des arbitraires de la courbe osculatrice.

Le point de la courbe proposée, déterminé par les coordonnées x et y, devant appartenir à la courbe osculatrice, on a d'abord $\mathrm{H} = 0$ et, par conséquent,

$$0 = \mathrm{L}x' + \mathrm{M}y' + \mathrm{N}x'^2 + \ldots;$$

d'où l'on tire pour y' une expression de cette forme

$$y' = \mathrm{R}x' + \mathrm{S}x'^2 + \ldots,$$

R, S, ... étant des fonctions de x, y et des arbitraires de la courbe osculatrice. Maintenant, si le nombre de ces arbitraires est i, on pourra faire coïncider les $(i-1)$ premiers termes de cette série avec les $(i-1)$ premiers termes de l'expression de y' relative à la courbe proposée; on aura alors, pour déterminer les i arbitraires, les i équations

$$0 = \mathrm{H}, \quad \mathrm{A} = \mathrm{R}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{S}, \quad \ldots$$

L'ordonnée y' de la courbe osculatrice ayant le plus grand nombre de termes qu'il est possible, communs avec ceux de l'ordonnée y' de la courbe proposée, il est évident qu'elle est de toutes les courbes de la même nature celle qui approche le plus de coïncider avec la proposée à l'origine des x'. Vous verrez dans la suite que tout l'art du Calcul différentiel consiste à former, d'une manière générale et simple, les termes des séries dont je viens de parler, et à exprimer, au moyen d'un caractère particulier, la loi suivant laquelle ils dépendent de la variable y considérée comme fonction de x, en sorte que cette loi puisse entrer dans les expressions et dans les équations, indépendamment de la connaissance de y en fonction de x; vous verrez encore que l'objet du Calcul intégral est de remonter de ces équations à la valeur même de la fonction y.

La solution du problème précédent embrasse tout ce qui concerne les tangentes et les rayons de courbure; car il est clair qu'il suffit d'y supposer que la ligne osculatrice est une droite ou un cercle. Représentons par $y = h(x+a)$ l'équation de la tangente; $x + a$ sera la sous-tangente, et l'on aura

$$x + a = \frac{y}{h};$$

si l'on change x dans $x + x'$ et y dans $y + y'$, on aura

$$y' = hx'.$$

En comparant cette expression de y' avec celle-ci,

$$y' = \mathrm{A}x' + \mathrm{B}x'^2 + \ldots,$$

relative à la courbe proposée, on aura

$$h = \mathrm{A}$$

et, par conséquent, la sous-tangente est égale à $\frac{y}{\mathrm{A}}$.

Si la courbe osculatrice est un cercle, en nommant R son rayon et a et b les coordonnées de son centre, coordonnées que nous supposons ici perpendiculaires entre elles, ainsi que x et y, on aura, par la nature du cercle,

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 - \mathrm{R}^2 = 0;$$

en changeant x dans $x + x'$ et y dans $y + y'$, on aura

$$y' = \left(\frac{x-a}{b-y}\right)x' + \frac{(a-x)^2 + (b-y)^2}{2(b-y)^3}x'^2 + \ldots.$$

Cette expression de y' comparée à celle-ci,

$$y' = \mathrm{A}x' + \mathrm{B}x'^2 + \ldots,$$

donne

$$\frac{x-a}{b-y} = \mathrm{A}; \qquad \frac{(a-x)^2 + (b-y)^2}{2(b-y)^3} = \mathrm{B};$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{R} = \frac{(1+\mathrm{A}^2)^{\frac{3}{2}}}{2\mathrm{B}},$$

$$a = x - \mathrm{A}\frac{1+\mathrm{A}^2}{2\mathrm{B}},$$

$$b = y + \frac{1+\mathrm{A}^2}{2\mathrm{B}}.$$

On aura donc ainsi la position et la grandeur de la circonférence osculatrice à un point quelconque de la courbe proposée. Les centres de ces diverses circonférences formeront, par leur continuité, une nouvelle courbe dont les coordonnées seront a et b; or on peut, au moyen des expressions précédentes de a et de b en x et y, déterminer x et y en fonctions de a et de b; en substituant donc ces valeurs dans l'équation de la courbe proposée, on aura une équation entre a et b qui sera celle de la nouvelle courbe. Pour en concevoir la nature, imaginons que, d'un point quelconque et avec un rayon quelconque R, on décrive un très petit arc de cercle; que l'on prolonge le rayon extrême de ce petit arc, de manière à former un second rayon R', et qu'avec ce rayon on décrive un nouvel arc; que l'on prolonge encore le rayon extrême de cet arc, de manière à former un troisième rayon R'' avec lequel on décrira un troisième arc, et ainsi de suite; on formera une série d'arcs de cercle qui se toucheront par leurs extrémités, et dont les centres seront les sommets des angles d'un polygone qui aura pour côtés les différences $R' - R$, $R'' - R'$, ... Si l'on imagine ce polygone enveloppé d'un fil tel que sa partie extrême soit dirigée suivant le premier côté du polygone et s'étende de la quantité R au delà de ce polygone; en développant ce fil de dessus le polygone, il décrira la suite des arcs que nous venons de considérer. Maintenant, plus les arcs seront petits plus leur suite approchera d'une courbe continue dont ils seront les arcs osculateurs, et plus le polygone approchera de la courbe formée par les centres des circonférences osculatrices : les deux courbes sont donc les limites des suites des arcs et des polygones, et tout ce qui a constamment lieu dans ces suites a lieu également pour ces courbes. Ainsi l'on peut concevoir une courbe quelconque comme étant formée par le développement d'un fil qui enveloppe la courbe formée par les centres de ses cercles osculateurs. On nomme cette dernière *courbe développée*; la première se nomme *développante*. On voit par là qu'un arc quelconque de la développée est égal à la différence des deux rayons de courbure de la développante correspondant aux deux extrémités de cet arc; or, la développante étant une courbe algébrique, on a, par ce

qui précède, ses rayons de courbure et la nature de sa développée exprimée par une équation algébrique; on aura donc ainsi une infinité de courbes algébriques rectifiables, c'est-à-dire telles que l'on pourra déterminer une ligne droite de même longueur qu'une portion quelconque de leur circonférence.

Aux points multiples d'une courbe plusieurs de ses branches se rencontrent, et l'on a plusieurs valeurs de y' correspondant à la même valeur de x'; ainsi, en changeant, dans l'équation de la courbe proposée, x dans $x + x'$ et y dans $y + y'$, et en développant cette équation en série, les termes indépendants de x' et de y' disparaîtront par la nature de cette équation; et, dans le cas d'un point double, les coefficients de x' et de y' seront nuls, soit par eux-mêmes, soit en vertu de la même équation. Dans le cas d'un point triple, ces coefficients et ceux de x'^2, $x'y'$ et y'^2 seront nuls, et ainsi de suite; ce qui déterminera les valeurs de x et de y correspondant à ces points.

Pour avoir les points où y est un maximum ou un minimum, on observera que l'expression de l'ordonnée correspondant à $x + x'$ est

$$y + Ax' + Bx'^2 + Cx'^3 + \ldots,$$

et que l'ordonnée correspondant à $x - x'$ est

$$y - Ax' + Bx'^2 - Cx'^3 + \ldots.$$

Or, x' pouvant être supposé aussi petit que l'on veut, le terme Ax', s'il n'est pas nul, peut être tel qu'il surpasse la somme des termes

$$Bx'^2 \pm Cx'^3 + \ldots;$$

l'ordonnée y ne serait donc pas à la fois plus grande que les deux ordonnées voisines correspondant à $x + x'$ et à $x - x'$; ainsi, dans le cas du maximum ou du minimum, on doit avoir

$$A = 0,$$

et cette équation, combinée avec l'équation de la courbe proposée, déterminera les valeurs de x et de y correspondant à ces points.

On distinguera lequel des deux cas a lieu par le signe B qui, s'il est négatif, désigne un maximum ; il désigne un minimum s'il est positif. Mais si B est nul il faut, pour le maximum ou le minimum, que C soit nul. En général, il est nécessaire pour cela que les termes de la série

$$\mathrm{A}x' + \mathrm{B}x'^2 + \mathrm{C}x'^3 + \ldots$$

disparaissent en nombre impair, et le signe du premier terme qui ne devient pas nul indique un maximum s'il est négatif et un minimum s'il est positif.

Nous avons supposé que la série qui exprime la valeur de y' est de la forme

$$\mathrm{A}x' + \mathrm{B}x'^2 + \mathrm{C}x'^3 + \ldots.$$

C'est ce qui a lieu dans le cas général où l'on considère un point quelconque de la courbe ; mais, dans des points particuliers, il peut arriver que cette valeur ait la forme

$$\mathrm{A}x'^{i} + \mathrm{B}x'^{i'} + \ldots,$$

i, i', ... étant des nombres positifs, entiers ou fractionnaires ; et alors ces points peuvent être des points de rebroussement. Si l'on a, par exemple,

$$y' = \mathrm{A}x'^2 \pm \mathrm{B}(-x')^{-\frac{5}{2}},$$

il est clair que, x' étant négatif, la valeur de y' est réelle ; mais elle devient imaginaire lorsque x' est positif ; la courbe s'arrête donc à l'abscisse x, et elle revient sur elle-même ; les deux branches formées par la double expression de y' se terminent en forme de bec à l'extrémité de l'ordonnée y.

Deux courbes rapportées aux mêmes axes peuvent se couper dans plusieurs points que l'on déterminera en observant qu'à ces points les valeurs de x et de y étant communes à ces courbes, on aura deux équations entre ces deux coordonnées, et l'on connaîtra chacune d'elles par l'élimination. m et n exprimant les degrés des équations, l'équation finale en x ne peut pas s'élever au delà du degré mn ; ainsi, les deux courbes ne peuvent pas se couper dans plus de mn points.

On a fait usage de ces intersections pour déterminer, par des constructions géométriques, les racines des équations. Si l'on a, par exemple, à résoudre l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

on pourra faire $y = x^2$, et l'on aura

$$y^2 + py + qx + r = 0;$$

les intersections des deux courbes exprimées par ces deux équations donneront toutes les racines réelles de l'équation proposée. Ces constructions, qui ont beaucoup occupé les géomètres, sont maintenant de peu d'usage, l'Analyse ayant été appliquée à des objets plus intéressants.

Cependant, la construction des racines des équations par l'intersection d'une courbe avec l'axe des abscisses est très utile dans la théorie des équations, comme vous l'avez déjà vu, en rendant sensibles plusieurs résultats importants de cette théorie.

Si l'on suppose que, y^r étant le terme de l'équation d'une courbe, dans lequel y est élevé à sa plus haute puissance, la partie indépendante de y soit une fonction rationnelle et entière de x qui, décomposée en facteurs, soit de la forme

$$k(x-a)(x-b)(x-c)\ldots;$$

alors le produit de toutes les ordonnées y, relatives à la même abscisse x, sera, par la nature des équations, égal à

$$\pm k(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.$$

$a, b, c, \ldots$ sont les abscisses des points où la courbe coupe l'axe des abscisses ; or, ces abscisses étant supposées toutes réelles, ainsi que toutes les ordonnées, $x-a$, $x-b$, ... seront les distances de ces ordonnées aux points où la courbe rencontre l'axe des x ; d'où résulte ce théorème général :

Le produit de toutes les ordonnées relatives à la même abscisse est, au produit des distances de l'extrémité de l'abscisse aux points où la courbe rencontre l'axe des abscisses, en raison constante.

Il vous sera facile d'appliquer les résultats précédents aux lignes du deuxième ordre dont l'équation générale est

$$o = a + bx + cy + fx^2 + hxy + ly^2.$$

En plaçant cette équation sur le parallélogramme de Newton, la directrice, dans sa position la plus élevée, rencontrera les trois termes

$$fx^2 + hxy + ly^2;$$

en égalant leur somme à zéro, on aura $\frac{x}{y}$ par une équation du deuxième degré. Si les deux racines de cette équation sont imaginaires, la courbe n'aura point de branches infinies, et elle sera inscrite dans un espace limité; si les deux racines sont égales, la courbe aura deux branches infinies; elle aura quatre branches infinies si les deux racines sont réelles et inégales. Dans le premier cas, la courbe se nomme *ellipse*, et son équation peut être ramenée, par une transformation convenable de ses coordonnées, à cette forme

$$u^2 + m^2 t^2 = k^2,$$

u et t étant les deux nouvelles coordonnées. Dans le deuxième cas, la courbe se nomme *parabole*, et son équation peut être ramenée à cette forme

$$u^2 = kt;$$

enfin, dans le troisième cas, la courbe se nomme *hyperbole*, et son équation peut être ramenée à cette forme

$$u^2 - m^2 t^2 = k^2,$$

et même à celle-ci

$$ut = h.$$

Ces courbes ont été nommées *sections coniques* parce qu'elles sont

formées par la section de la surface du cône par un plan. C'est sous ce point de vue qu'elles ont été considérées par les anciens géomètres qui ont découvert sur leur nature un grand nombre de beaux théorèmes. Descartes qui, le premier, a eu l'idée heureuse d'appliquer l'Algèbre à la Géométrie des courbes, a observé qu'elles formaient la classe entière des courbes du deuxième ordre. Vous pourrez conclure aisément de l'analyse précédente leurs propriétés les plus remarquables; ainsi, je n'insiste point sur cette matière, qui d'ailleurs est exposée, avec beaucoup de détails, dans plusieurs Ouvrages élémentaires. Je vous engage seulement à la présenter dans l'enseignement, suivant cette analyse, conformément à ce que je vous ai déjà recommandé, de préférer en tout les méthodes les plus générales.

Une des plus singulières remarques que l'on ait faites sur les sections coniques est celle des deux points placés sur le grand axe auxquels on a donné le nom de *foyers*. Ils sont tels dans l'ellipse que la somme de leurs distances à un point quelconque de la courbe est toujours la même. Un rayon lumineux, émané d'un des foyers, est réfléchi par la courbe à l'autre foyer. Dans l'hyperbole, la différence des distances des foyers à un point quelconque de la courbe est constante. Les foyers des sections coniques sont devenus plus remarquables encore depuis que l'on a découvert que c'est dans des points semblables que résident les forces qui animent tous les corps du système du monde.

Les bornes de cette leçon ne me permettent pas d'insister davantage sur la théorie des courbes. On trouvera tous les détails que l'on peut désirer à cet égard dans le second volume de l'*Introduction à l'analyse des infiniment petits*, par Euler, et dans l'Ouvrage de Cramer *Sur la théorie des courbes*. Ces deux Ouvrages, quoique excellents chacun dans son genre, ne dispensent pas de lire les deux Ouvrages originaux qui leur ont donné naissance et qui, soit par eux-mêmes, soit par l'influence qu'ils ont eue sur les sciences mathématiques, méritent toute l'attention des géomètres : je veux parler de la *Géométrie* de Descartes et du Traité de Newton intitulé *Énumération des lignes du troisième ordre*.

Il sera facile, au moyen des méthodes précédentes, de déduire les diverses affections des courbes à double courbure de celle de leurs projections; mais, quelque intéressante que soit cette discussion, je ne puis m'y livrer ici, et je vais terminer cette leçon par l'application des mêmes méthodes à la théorie des surfaces.

On distingue les surfaces comme les lignes en différents ordres, suivant le degré de leur équation; ainsi la surface du premier ordre est celle dont l'équation, entre les trois coordonnées x, y, z, est du premier degré, et il est visible qu'elle est plane.

Les surfaces les plus simples, qui servent d'asymptotes à une surface donnée, dans le cas de x, ou de y, ou de z infinis, se déterminent de la même manière que les courbes les plus simples qui servent d'asymptotes à une courbe donnée. On a encore, par la même analyse, les plans tangents des surfaces et leurs courbures. En effet, x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque de la surface, si l'on change, dans son équation, x dans $x+x'$, y dans $y+y'$ et z dans $z+z'$, les termes indépendants de x', y', z' seront nuls séparément, et l'on aura, pour z', une équation de cette forme

$$z' = px' + qy' + rx'^2 + sx'y' + ty'^2 + \ldots,$$

p, q, r, s, t, ... étant des fonctions connues de x, y et z. L'équation générale d'un plan quelconque est

$$z = \mathrm{M} + \mathrm{N}x + \mathrm{P}y.$$

Si l'on change, dans cette équation, x, y, z dans $x+x'$, $y+y'$ et $z+z'$, on aura les deux équations

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{M} + \mathrm{N}x + \mathrm{P}y, \\ z' &= \phantom{\mathrm{M} +{}} \mathrm{N}x' + \mathrm{P}y'. \end{aligned}$$

En comparant cette expression de z' avec les premiers termes de l'expression précédente de z', on aura

$$\mathrm{N} = p, \qquad \mathrm{P} = q;$$

on aura donc ainsi les valeurs de M, N et P, en fonctions de x, y, z, et, par conséquent, on aura la position d'un plan tangent, à un point quelconque de la surface, au moyen des coordonnées de ce point.

Si l'on rapporte à ce plan les coordonnées de la surface, que nous supposerons ici perpendiculaires entre elles, et si nous fixons au point de tangence l'origine de ces coordonnées, en nommant x'', y'' les coordonnées dans le plan tangent, et z'' l'ordonnée qui lui est perpendiculaire, l'expression de z'' en série pourra être mise sous la forme

$$z'' = mx''^2 + ny''^2 + \ldots.$$

Car, par la nature du plan tangent, les termes multipliés par les premières puissances de x'' et de y'' doivent disparaître, et l'on peut choisir la position de l'axe des x'' de manière que le terme $x''y''$ disparaisse; m, n, ... sont des fonctions connues des coordonnées x, y, z du point de tangence. Si, par ce point, on imagine un plan quelconque perpendiculaire à la surface, la courbe formée par la section de ce plan aura pour coordonnées z'' et $\sqrt{x''^2 + y''^2}$; si l'on nomme R le rayon osculateur de cette section, on aura, par la nature du cercle,

$$z'' = \frac{x''^2 + y''^2}{2\mathrm{R}} + \ldots.$$

Soit A l'angle que forme le plan coupant avec l'axe des x'', on aura

$$y'' = x'' \operatorname{tang} \mathrm{A};$$

les expressions de z'', relatives à la section et au cercle osculateur, deviendront

$$z'' = \frac{m\cos^2\mathrm{A} + n\sin^2\mathrm{A}}{\cos^2\mathrm{A}}\, x''^2 + \ldots,$$

$$z'' = \frac{x''^2}{2\mathrm{R}\cos^2\mathrm{A}} + \ldots.$$

La comparaison de ces expressions donne

$$2\mathrm{R} = \frac{1}{m\cos^2\mathrm{A} + n\sin^2\mathrm{A}}.$$

Si l'on nomme r et r' les rayons osculateurs qui répondent aux deux sections faites par le plan coupant lorsqu'il passe par l'axe des x'' et lorsqu'il passe par l'axe des y'', on aura

$$R = \frac{rr'}{r'\cos^2 A + r\sin^2 A};$$

d'où il est facile de conclure que le plus grand et le plus petit rayon de courbure répondent aux deux sections que nous venons de considérer, et qui sont perpendiculaires l'une à l'autre. Les rayons osculateurs des autres sections ne dépendent que de ceux-ci et de l'angle qu'elles forment avec les précédentes.

Nous avons vu que l'intersection de deux surfaces courbes formait une courbe; l'ordre des projections de cette courbe ne peut pas surpasser le produit des degrés des équations des deux surfaces. Si l'une d'elles est un plan, l'équation de la courbe sera du même degré que celle de la surface; ainsi toute surface du deuxième ordre, coupée par un plan, forme une section conique. Trois surfaces ne peuvent pas se rencontrer dans un nombre de points plus grand que le produit des degrés de leurs équations.

NEUVIÈME SÉANCE.

SUR LE NOUVEAU SYSTÈME DES POIDS ET MESURES.

J'interromps aujourd'hui l'ordre des leçons de Mathématiques pour vous entretenir du système des poids et mesures qui vient d'être définitivement décrété par la Convention nationale. L'un des plus utiles objets qui vous occuperont, après être retournés dans vos départements, sera de faire connaître à vos concitoyens, et spécialement aux instituteurs des écoles primaires, ce bienfait des sciences et de la révolution. Je vais donc l'exposer ici avec le détail dû à son importance.

On ne peut pas voir le nombre prodigieux de mesures en usage, non seulement chez les différents peuples mais dans la même nation; leurs divisions bizarres et incommodes pour les calculs, la difficulté de les connaître et de les comparer; enfin, les embarras et les fraudes qui en résultent dans le commerce, sans regarder comme l'un des plus grands services que les sciences et les gouvernements puissent rendre à l'humanité, l'adoption d'un système de mesures dont les dimensions uniformes se prêtent le plus facilement au calcul, et qui dérive, de la manière la moins arbitraire, d'une mesure fondamentale indiquée par la nature elle-même. Un peuple qui se donnerait un semblable système de mesures réunirait, à l'avantage d'en recueillir les premiers fruits, celui de voir son exemple suivi par les autres peuples dont il deviendrait ainsi le bienfaiteur; car l'empire lent, mais irrésistible, de la raison l'emporte à la longue sur les jalousies nationales et sur tous les obstacles qui s'opposent au bien d'une utilité généralement sentie. Tels furent les motifs qui déterminèrent l'Assemblée constituante à charger de cet important objet l'Académie des Sciences. Le nouveau système des poids et mesures est le résultat du travail de ses commissaires, secondés par le zèle et les lumières de plusieurs membres de la Représentation nationale.

L'identité du calcul décimal et de celui des nombres entiers ne laisse aucun doute sur les avantages de la division de toutes les espèces de mesures en parties décimales; il suffit, pour s'en convaincre, de comparer la difficulté des multiplications et des divisions complexes avec la facilité des mêmes opérations sur les nombres entiers, facilité qui devient plus grande encore au moyen des logarithmes dont on peut rendre, avec des instruments simples et peu coûteux, l'usage extrêmement populaire. On ne balança donc point à adopter la division décimale et, pour mettre de l'uniformité dans le système entier des mesures, on résolut de les dériver toutes d'une même mesure linéaire et de ses divisions décimales. La question fut ainsi réduite au choix de cette mesure universelle à laquelle on donna le nom de *mètre*. Pour vous faire connaître les motifs qui, dans ce choix, ont guidé les commissaires de l'Académie, il convient de rappeler en peu de mots les principaux résultats que l'on a trouvés sur la figure de la Terre et sur la variation de la pesanteur à sa surface.

Du moment où l'homme eut reconnu la sphéricité du globe qu'il habite, sa curiosité dut le porter à en mesurer les dimensions; il est donc vraisemblable que ses premières tentatives sur cet objet remontent à des temps bien antérieurs à ceux dont l'Histoire nous a conservé le souvenir, et qu'elles ont été perdues dans les révolutions physiques et morales que la Terre a éprouvées. Les rapports que plusieurs mesures de la plus haute antiquité ont entre elles, et avec la longueur de la circonférence terrestre, viennent à l'appui de cette conjecture et semblent indiquer non seulement que, dans les temps fort anciens, cette mesure a été exactement connue, mais qu'elle a servi de base à un système complet de mesures dont on retrouve des vestiges en Égypte et dans l'Asie. Quoi qu'il en soit, la première mesure précise de la Terre, dont nous ayons une connaissance certaine, est celle que Picard exécuta en France, vers la fin du dernier siècle, et qui, depuis, a été plusieurs

fois vérifiée. Cette opération est facile à concevoir. En s'avançant vers le Nord, on voit le pôle s'élever de plus en plus; la hauteur méridienne des étoiles situées au Nord augmente, et celle des étoiles situées au Midi diminue, quelques-unes même deviennent invisibles. La notion de la courbure de la Terre est due, sans doute, à l'observation de ces phénomènes qui ne pouvaient pas manquer de fixer l'attention des hommes dans les premiers âges des sociétés, où l'on ne distinguait les saisons et leurs retours que par le lever et le coucher des principales étoiles comparés à ceux du Soleil. L'élévation ou la dépression des étoiles fait connaître l'angle que les verticales élevées aux extrémités de l'arc parcouru sur la Terre font au point de leurs concours; car cet angle est évidemment égal à la différence des hauteurs méridiennes d'une même étoile moins l'angle sous lequel on verrait du centre de l'étoile l'espace parcouru, et l'on s'est assuré que ce dernier angle est insensible. Il ne s'agit plus ensuite que de mesurer cet espace; il serait long et pénible d'appliquer nos mesures sur une aussi grande étendue; il est beaucoup plus simple d'en lier, par une suite de triangles, les extrémités à celles d'une base de 5000 ou 6000 toises, et, vu la précision avec laquelle on peut déterminer les angles de ces triangles, on a très exactement sa longueur. On a trouvé de cette manière qu'en France l'arc du méridien terrestre correspondant à la centième partie de l'angle droit, et coupé dans son milieu par le parallèle moyen entre le pôle et l'équateur, est de $51324^t,3$.

De toutes les figures rentrantes, la figure sphérique est la plus simple, puisqu'elle ne dépend que d'un seul élément, la grandeur de son rayon. Le penchant naturel à l'esprit humain de supposer aux objets la forme qu'il conçoit le plus aisément le porta donc à donner une forme sphérique à la Terre. Mais la simplicité de la nature ne doit pas toujours se mesurer sur celle de nos conceptions. Infiniment variée dans ses effets, la nature n'est simple que dans ses causes, et son économie consiste à produire un grand nombre de phénomènes au moyen d'un petit nombre de lois générales. La figure de la Terre est un résultat de ces lois qui, modifiées par mille circonstances, peuvent l'écarter sensiblement de la sphère et la rendre fort compliquée. De petites variations observées dans la grandeur des degrés du méridien en France indiquaient ces écarts; mais les erreurs inévitables des observations laissaient des doutes sur cet intéressant phénomène, et l'Académie des Sciences, dans le sein de laquelle cette grande question fut vivement agitée, jugea avec raison que la différence des degrés terrestres, si elle était réelle, se manifesterait principalement dans la comparaison des degrés mesurés à l'équateur et vers les pôles. Elle envoya des académiciens à l'équateur même; et ils y trouvèrent le degré décimal du méridien, égal à $51077^t,7$, plus petit de $246^t,6$ que le degré correspondant au parallèle moyen. D'autres académiciens se transportèrent au Nord, à $73^\circ,7$ environ de latitude, et le degré décimal du méridien y fut observé de $51664^t,5$, plus grand de $586^t,8$ qu'à l'équateur. Ainsi l'accroissement des degrés des méridiens de l'équateur aux pôles fut incontestablement prouvé par ces mesures; et il fut reconnu que la Terre n'est pas exactement sphérique.

Ces voyages fameux des académiciens français ayant dirigé vers cet objet l'attention des observateurs, de nouveaux degrés des méridiens furent mesurés en Italie, en Allemagne, en Afrique et en Pensylvanie; toutes ces mesures concourent à donner à la Terre une figure aplatie aux pôles.

L'ellipse étant, après le cercle, la plus simple des courbes rentrantes, on regarda la Terre comme un solide formé par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe. Son aplatissement dans le sens des pôles est nécessairement indiqué par l'accroissement observé des degrés des méridiens des pôles à l'équateur. Les rayons de ces degrés étant sur le prolongement des lignes verticales ou dans la direction de la pesanteur, ils sont, par la loi de l'équilibre des fluides, perpendiculaires à la surface des mers dont la Terre est en grande partie recouverte. Ils n'aboutissent pas, comme dans la sphère, au centre de l'ellipsoïde; ils n'ont ni la même direction ni la même grandeur que les rayons menés de ce centre à la surface, et qui la coupent obliquement partout ailleurs qu'à l'équateur et aux pôles. La rencontre de

deux verticales voisines, situées sous le même méridien, est le centre du petit arc terrestre qu'elles comprennent entre elles; si cet arc était une droite, ces verticales seraient parallèles ou ne se rencontreraient qu'à une distance infinie; mais, à mesure qu'on le courbe, elles se rencontrent à une distance d'autant moindre que sa courbure devient plus grande; ainsi l'extrémité du petit axe étant le point où l'ellipse approche le plus de se confondre avec une ligne droite, le rayon du degré du pôle, et par conséquent ce degré lui-même, est le plus considérable de tous. C'est le contraire à l'extrémité du grand axe de l'ellipse, à l'équateur où, la courbure étant la plus grande, le degré dans le sens du méridien est le plus petit. En allant du second au premier de ces extrêmes, les degrés vont en augmentant et, si l'ellipse est peu aplatie, leur accroissement est à très peu près proportionnel au carré du sinus de la latitude.

Ces résultats sont autant de vérités incontestables généralement admises par les géomètres. On peut même démontrer qu'en supposant à la Terre une figure de révolution sur laquelle les degrés des méridiens vont en augmentant de l'équateur aux pôles, l'axe qui la traverse dans le sens des pôles est moindre que le diamètre de l'équateur. L'importance de l'objet m'engage à vous donner cette démonstration fort simple.

Vous avez vu, dans la leçon précédente, que les points de concours de toutes les perpendiculaires à une courbe forment sa développée. Représentez-vous donc le rayon osculateur du méridien au pôle boréal, et la suite de tous les rayons osculateurs depuis ce pôle jusqu'à l'équateur, rayons qui, par la supposition, vont en diminuant sans cesse; la développée sera évidemment tangente à l'axe du pôle; ensuite, elle s'écartera de cet axe, en tournant vers lui sa convexité et en s'élevant vers le pôle, jusqu'à ce qu'enfin le rayon osculateur prenne une direction perpendiculaire à la première; alors, il sera sur le diamètre même de l'équateur. Considérons comme le centre de la Terre l'intersection de ce diamètre et de l'axe du pôle; il est visible que la somme des deux tangentes à la développée du méridien, menées de ce centre, la première suivant l'axe du pôle, et la seconde suivant le diamètre de l'équateur, sera plus grande que l'arc de la développée qu'elles comprennent entre elles; or le rayon, mené du centre de la Terre au pôle boréal, est égal au rayon osculateur du méridien à ce pôle, moins la première tangente; le demi-diamètre de l'équateur est égal au rayon osculateur du méridien à l'équateur, plus la seconde tangente; l'excès du demi-diamètre de l'équateur, sur le rayon terrestre du pôle, est donc égal à la somme de ces tangentes, moins l'excès du rayon osculateur du pôle sur celui de l'équateur; ce dernier excès est l'arc même de la développée, arc qui est moindre que la somme des tangentes extrêmes; donc l'excès du demi-diamètre de l'équateur sur le rayon mené du centre de la Terre au pôle boréal est positif. On prouvera de même que l'excès du demi-diamètre de l'équateur sur le rayon mené du centre de la Terre au pôle austral est positif; l'axe entier des pôles est donc moindre que le diamètre de l'équateur ou, ce qui revient au même, la Terre est aplatie dans le sens de ses pôles.

En considérant chaque partie du méridien comme un arc très petit de sa circonférence osculatrice, il est facile de voir que le rayon, mené du centre de la Terre à l'extrémité de l'arc la plus voisine du pôle, est plus petit que le rayon mené du même centre à l'autre extrémité; d'où il suit que les rayons terrestres vont en croissant des pôles à l'équateur si, comme toutes les observations l'indiquent, les degrés du méridien augmentent de l'équateur aux pôles; et il est visible que ces démonstrations ont encore lieu dans le cas où les deux hémisphères boréal et austral ne seraient pas égaux et semblables.

La différence des rayons osculateurs au pôle et à l'équateur est égale à la différence des rayons terrestres correspondants, plus à l'excès du double de la développée sur la somme des deux tangentes extrêmes, excès qui est évidemment positif. Ainsi, les degrés des méridiens croissent de l'équateur aux pôles dans un plus grand rapport que celui de la diminution des rayons terrestres.

La mesure de deux degrés, dans le sens du méridien, suffit pour déterminer les deux axes de l'ellipse génératrice de la Terre, et par

conséquent sa figure, en la supposant elliptique. Si cette hypothèse est celle de la nature, on doit trouver le même rapport entre ces axes en comparant deux à deux les degrés mesurés; mais leur comparaison donne à cet égard des différences qu'il est difficile d'attribuer aux seules erreurs des observations, et qui semblent indiquer à la Terre une figure beaucoup plus composée qu'on ne l'avait cru d'abord; ce qui ne paraîtra point extraordinaire si l'on fait attention aux irrégularités de sa surface et à l'inégale densité de ses différentes couches et des eaux de la mer.

Un phénomène très remarquable, dont nous devons la connaissance aux voyages astronomiques, est la variation de la pesanteur à la surface de la Terre. Cette force singulière anime, dans le même lieu, tous les corps proportionnellement à leurs masses, et tend à leur imprimer dans le même temps des vitesses égales. Il est impossible, au moyen d'une balance, de reconnaître ces variations, puisqu'elles affectent également le corps que l'on pèse et le poids auquel on le compare. Mais les observations du pendule sont propres à les faire découvrir; car il est clair que ses oscillations doivent être plus lentes dans les lieux où la pesanteur est moindre. Vous connaissez cet instrument, dont l'application aux horloges, en fournissant une mesure du temps très précise, a été l'une des causes principales des progrès de l'Astronomie moderne. Il consiste dans un corps suspendu à l'extrémité d'un fil ou d'une verge mobile autour du point fixe placé à l'autre extrémité; on écarte un peu l'instrument de sa situation verticale, et on l'abandonne à l'action de la pesanteur; il fait de petites oscillations qui sont à très peu près de la même durée, malgré la différence des arcs décrits. Cette durée dépend de la grandeur et de la figure du corps suspendu, et de la masse de la verge; mais les géomètres ont trouvé des règles générales pour déterminer, par l'observation des oscillations d'un pendule composé, de figure quelconque, la longueur d'un pendule dont les oscillations auraient une durée connue, et dans lequel la masse de la verge serait supposée nulle relativement à celle du corps considéré comme un point infiniment dense. C'est à ce pendule idéal, nommé *pendule simple*, que l'on a rapporté toutes les expériences du pendule faites dans les divers lieux de la Terre.

Richer, envoyé, en 1762, à Cayenne par l'Académie des Sciences pour y faire des observations astronomiques, trouva que son horloge, réglée à Paris sur le temps moyen, retardait, d'une quantité sensible, à l'équateur; il fut obligé d'en raccourcir le pendule de plus d'une ligne pour corriger ce retard. Cette observation donna la première idée de la diminution de la pesanteur à l'équateur, diminution qu'il était cependant facile de prévoir d'après le mouvement déjà reconnu de la rotation de la Terre. Mais l'esprit humain, si actif dans la formation des systèmes, a presque toujours attendu que l'observation et l'expérience aient fait connaître d'importantes vérités, qu'un raisonnement fort simple eût pu faire découvrir; c'est ainsi que la découverte des télescopes a suivi de près de trois siècles celle des verres lenticulaires, et n'a été due qu'au hasard; c'est encore ainsi que l'aberration des étoiles, résultat fort simple du mouvement progressif de la lumière, a échappé aux savants célèbres du commencement de ce siècle et n'a été reconnue que par l'observation cinquante ans après la découverte de ce mouvement.

L'expérience du pendule a été faite avec beaucoup de soin, dans un grand nombre d'endroits, en tenant compte de la température et de la résistance de l'air. Il en résulte que la pesanteur augmente de l'équateur aux pôles, et que son accroissement qui, sous le pôle même, est égal à cinquante-cinq dix-millièmes de la pesanteur totale, suit à peu près la loi du carré du sinus de latitude. Une nouvelle mesure de la longueur du pendule à secondes, que Borda vient de faire à l'Observatoire national, avec une précision remarquable, lui a donné 3 pieds 8 lignes 56 centièmes pour cette longueur réduite au vide, et rapportée à la toise de fer qui a servi à la mesure de la Terre à l'équateur, la température de cette toise étant 13 degrés du thermomètre de Réaumur.

Je reviens présentement au choix du mètre. La longueur du pendule et celle du méridien sont les deux moyens principaux qu'offre la nature pour fixer l'unité des mesures linéaires. Indépendants l'un et l'autre des révolutions morales, ils ne peuvent éprouver d'altération sensible que par de très grands changements dans la constitution physique de la Terre. Le premier moyen, d'un usage facile, a l'inconvénient de faire dépendre la mesure de la distance de deux éléments qui lui sont hétérogènes, la pesanteur et le temps, dont la division est d'ailleurs arbitraire. On se détermina donc pour le second moyen, qui paraît avoir été employé dans la plus haute antiquité, tant il est naturel à l'homme de rapporter les mesures itinéraires aux dimensions mêmes du globe qu'il habite; en sorte qu'en se transportant sur ce globe il connaisse, par la seule dénomination de l'espace parcouru, le rapport de cet espace au circuit entier de la Terre. On trouve encore à cela l'avantage de faire correspondre les mesures nautiques avec les mesures célestes. Souvent le navigateur a besoin de déterminer, l'un par l'autre, le chemin qu'il a décrit et l'arc céleste compris entre les zéniths du lieu de son départ et de celui où il est arrivé. Il est donc intéressant que l'une de ces mesures soit l'expression de l'autre, à la différence près de leurs unités; mais, pour cela, l'unité fondamentale des mesures linéaires doit être une partie aliquote du méridien terrestre qui corresponde à l'une des divisions de la circonférence; ainsi, le choix du mètre fut réduit à celui de l'unité des angles.

L'angle droit est la limite des inclinaisons d'une ligne sur un plan et de la hauteur des objets sur l'horizon; d'ailleurs, c'est dans le premier quart de la circonférence que se forment les sinus, et généralement toutes les lignes que la Trigonométrie emploie, et dont les rapports avec le rayon ont été réduits en tables; il était donc naturel de prendre l'angle droit pour l'unité des angles, et le quart de la circonférence pour l'unité de leur mesure. On le divisa en parties décimales et, pour avoir des mesures correspondantes sur la Terre, on divisa, dans les mêmes parties, le quart du méridien terrestre, ce qui a été fait dans des temps fort anciens; car la mesure de la Terre, citée par Aristote, et dont l'origine est inconnue, donne 100000 stades au quart du méridien. Il ne s'agissait plus que d'avoir exactement sa longueur. Ici se présentaient plusieurs questions que l'ignorance où nous sommes de la vraie figure de la Terre ne nous permet pas de résoudre. La Terre est-elle un sphéroïde de révolution? Ses deux hémisphères sont-ils égaux et semblables de chaque côté de l'équateur? Quel est le rapport d'un arc du méridien mesuré à une latitude donnée au méridien entier? Dans les hypothèses les plus naturelles sur la constitution du sphéroïde terrestre, la différence des méridiens est insensible, et le degré décimal, coupé dans son milieu par le parallèle moyen entre le pôle boréal et l'équateur, est la centième partie du quart du méridien. L'erreur de ces hypothèses, si elle existe, ne peut influer que sur les distances géographiques où elle n'est d'aucune importance. On pouvait donc conclure la grandeur du quart du méridien de celle de l'arc qui traverse la France, depuis Dunkerque jusqu'aux Pyrénées, et qui a été mesuré avec soin en 1740 par les Académiciens français. Mais une nouvelle mesure d'un arc plus grand, faite avec des moyens encore plus précis, devant inspirer en faveur du nouveau système de mesures un intérêt propre à le répandre, on résolut de mesurer l'arc du méridien terrestre, compris entre Dunkerque et Barcelone; et cependant, pour que la nation française pût jouir promptement des avantages de ce nouveau système, on se servit provisoirement des mesures exécutées et, après en avoir conclu la longueur du quart du méridien, on prit la dix-millionième partie de cette longueur pour le *mètre* ou l'unité des mesures linéaires. La décimale au-dessus eût été trop grande; la décimale au-dessous, trop petite, et le mètre, dont la longueur est de 3 pieds 11 pouces 44 centièmes, remplace avec avantage la toise et l'aune, deux de nos mesures les plus usuelles.

Delambre s'est déjà avancé, depuis Dunkerque jusqu'à Orléans, en formant une chaîne de triangles qu'il doit joindre à celle que Méchain, parti de Barcelone, forme de son côté en s'avançant au Nord; et il y a tout lieu de croire que la mesure de l'arc du méridien, compris entre Dunkerque et Barcelone, sera terminée dans le cours de la campagne prochaine. Les commissaires nommés par l'Académie des Sciences sont de nouveau réunis pour suivre avec activité cette grande opération, trop longtemps suspendue; mais nous avons la douleur de ne

point revoir parmi nous l'infortuné Lavoisier, que la plus sanglante tyrannie a fait périr au milieu d'une carrière illustrée par d'importantes découvertes, et par la révolution heureuse qu'il a opérée dans la Philosophie chimique.

Pour conserver la longueur du mètre, la Convention a décrété qu'un étalon exécuté en platine, d'après les expériences et les observations des commissaires chargés de sa détermination, serait déposé près du Corps législatif. Cette longueur sera d'ailleurs liée d'une manière si précise à celle du pendule à secondes, qu'il sera facile de la retrouver dans tous les temps, sans être obligé de recourir à la mesure du grand arc qui l'aura donnée. Deux monuments durables, élevés sur la base qui doit être mesurée près de Melun, et séparés par un intervalle exact de 10000^{m}, offriraient un nouveau moyen pour retrouver la longueur de la mesure universelle si, par la suite des siècles, elle vient à s'altérer.

Toutes les mesures dérivent du mètre de la manière la plus simple; les mesures linéaires en sont des multiples et des sous-multiples décimaux.

L'unité des mesures superficielles pour le terrain est un carré dont le côté est de 10^{m}; elle se nomme *are*.

On a nommé *stère* une mesure égale au mètre cube et destinée particulièrement au bois de chauffage.

L'unité des mesures de capacité est le cube de la dixième partie du mètre; on lui a donné le nom de *litre*.

L'unité de poids, que l'on a nommée *gramme*, est le poids absolu du cube de la centième partie du mètre, en eau distillée, et considérée à la température de la glace fondante. On a préféré l'eau comme étant l'une des substances les plus homogènes, et celle que l'on peut réduire le plus facilement à l'état de pureté; on l'a rapportée à la température de la glace fondante comme au degré de température le plus fixe et le plus indépendant des modifications de l'atmosphère. Le citoyen Haüy vous a fait connaître les précautions délicates qui ont été prises pour avoir, avec une grande précision, le poids d'un volume connu d'eau distillée. Cette expérience va être répétée avec des moyens encore plus précis; ainsi, quand la longueur du mètre sera irrévocablement fixée, on aura très exactement le rapport du gramme à la livre actuelle.

Toutes les mesures étant comparées sans cesse à la livre *monnaie*, il était surtout important de la diviser en parties décimales; on lui a donné le nom de *franc;* sa dixième partie s'appelle *décime*, et sa centième partie *centime*. La Convention nationale ayant décrété la fabrication de pièces de monnaie, multiples d'un centime, et d'un poids multiple du gramme, on aura des poids justes dans ces pièces, ce qui sera très utile au commerce.

Les unités de superficie, de capacité, de poids et de monnaie sont assez petites pour que l'on n'ait pas besoin de considérer, dans les calculs ordinaires, des fractions décimales au-dessous du centième, ce qui est un avantage; car l'esprit saisit plus aisément les multiples que les sous-multiples, dont l'idée se compose de divisions et de multiplications.

Il me reste à vous parler de la nomenclature qui a été adoptée. Deux moyens se présentent pour dénommer les mesures : l'un consiste à exprimer leurs multiples et leurs aliquotes, par des mots différents, d'une seule syllabe; l'autre consiste à ne désigner, par un nom propre, que l'unité principale de chaque espèce de mesures, et à distinguer ses aliquotes et ses multiples par un système de mots qui se composent avec le nom de cette unité. On a préféré ce second moyen qui, en réduisant la nomenclature des poids et mesures au plus petit nombre de mots possible, a l'avantage de soulager la mémoire et de simplifier la langue du commerce, celle de toutes les langues qui doit être la plus facile et la plus claire.

Pour désigner les multiples de l'unité principale, dix, cent, mille et dix mille fois plus grands, on la fait précéder des mots suivants tirés du grec : *deca, hecto, kilo, myria*. On exprime les sous-multiples en la faisant précéder des mots *deci, centi, milli,* qui répondent à sa dixième, centième et millième partie. Au reste, je vous engage à lire le rapport intéressant du citoyen Prieur, sur cet objet, à la Convention nationale, et la Note instructive qu'il y a jointe.

Pour faciliter le calcul de l'or et de l'argent fin contenu dans les pièces de monnaie, les commissaires de l'Académie ont proposé de les fabriquer avec un dixième d'alliage, et d'égaler leur poids à des multiples décimaux du gramme. Enfin, l'uniformité du système entier des poids et mesures leur a paru exiger que le jour fût divisé en dix heures, l'heure en cent minutes, la minute en cent secondes, ... Cette division du jour, qui va devenir nécessaire aux astronomes, est moins utile dans la vie civile, où l'on a peu d'occasions d'employer le temps comme multiplicateur ou comme diviseur. La difficulté de l'adapter aux horloges et aux montres et nos rapports commerciaux en horlogerie avec les étrangers ont fait suspendre indéfiniment son usage. On peut croire cependant qu'à la longue la division décimale du jour remplacera sa division actuelle, qui contraste trop avec les divisions des autres mesures pour n'être pas abandonnée.

Tel est le nouveau système des poids et mesures que les savants ont offert à la Convention nationale qui s'est empressée de le sanctionner. Ce système, fondé sur la mesure des méridiens terrestres, convient également à tous les peuples, il n'a de rapport avec la France que par l'arc du méridien qui la traverse; mais la position de cet arc, dont les extrémités aboutissent aux deux mers et qui est coupé par le parallèle moyen, est si avantageuse que les savants de toutes les nations, réunis pour fixer la mesure universelle, n'eussent pas fait un autre choix. Il est donc permis d'espérer qu'un jour ce nouveau système sera généralement adopté. Incomparablement plus simple que l'ancien, dans ses divisions et dans sa nomenclature, il présentera beaucoup moins de difficultés à l'enfance. Vous en éprouverez à le faire entendre aux instituteurs, qu'une longue habitude a familiarisés avec les anciennes mesures; il leur paraît fort compliqué; car l'homme est naturellement porté à rejeter sur la complication des choses la peine que ses préjugés et ses habitudes lui donnent à les concevoir; mais votre zèle éclairé surmontera ces obstacles.

DIXIÈME SÉANCE [1].

SUR LES PROBABILITÉS.

Pour suivre le plan que j'ai tracé dans le programme du cours de Mathématiques, je devrais vous entretenir encore des calculs différentiel et intégral aux différences, soit finies, soit infiniment petites; de la Mécanique, de l'Astronomie et de la théorie des probabilités. Le peu de durée de l'École Normale ne me le permet point; mais je me propose d'y suppléer, relativement à la Mécanique et à l'Astronomie, par la publication d'un Ouvrage qui aura pour titre *Exposition du système du Monde*, et dans lequel j'ai présenté, indépendamment de l'Analyse, la série des découvertes qui ont été faites, jusqu'à ce jour, sur le système du Monde. Je vous parlerai, dans cette dernière Leçon, de la théorie des probabilités, théorie intéressante par elle-même et par ses nombreux rapports avec les objets les plus utiles de la société.

Tous les événements, ceux même qui, par leur petitesse, semblent ne pas tenir aux grandes lois de l'Univers, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du Soleil. Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de la nature, on les a fait dépendre des causes finales ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité ou sans ordre apparent; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes.

[1] Cette Leçon est reproduite, avec des développements étendus, dans l'Introduction à la *Théorie analytique des probabilités* (*Œuvres de Laplace*, t. VII).

On sera convaincu de ce résultat important du progrès des lumières si l'on se rappelle qu'autrefois une pluie ou une sécheresse extrême, une comète traînant après elle une queue fort étendue, les éclipses, les aurores boréales, et généralement tous les phénomènes extraordinaires étaient regardés comme autant de signes de la colère céleste. On invoquait le ciel pour détourner leur funeste influence; on ne le priait point de suspendre le cours des planètes et du Soleil : l'observation eût bientôt fait sentir l'inutilité de ces prières; mais, parce que ces phénomènes, arrivant et disparaissant à de longs intervalles et sans causes apparentes, semblaient contrarier l'ordre de la nature, on supposait que le ciel les faisait naître et les modifiait à son gré pour punir les crimes de la Terre. Ainsi la longue queue de la comète de 1456 répandit la terreur dans l'Europe déjà consternée par les succès rapides des Turcs qui venaient de renverser le Bas-Empire; et le pape Callixte ordonna des prières publiques dans lesquelles on conjurait la comète et les Turcs. Cet astre, après quatre de ses révolutions, a excité parmi nous un intérêt bien différent. La connaissance des lois du système du Monde, acquise dans cet intervalle, avait dissipé les craintes enfantées par l'ignorance des vrais rapports de l'homme avec l'Univers; et Halley ayant reconnu l'identité de la comète avec celles des années 1531, 1607 et 1682, il annonça son prochain retour pour la fin de 1758 ou le commencement de 1759. Le monde savant attendit avec impatience ce retour qui devait confirmer l'une des plus grandes découvertes que l'on eût faites dans les sciences, et accomplir la prédiction de Sénèque lorsqu'il a dit, en parlant de la révolution de ces astres qui descendent d'une énorme distance : « Le jour viendra que, par une étude suivie de plusieurs siècles, les choses actuellement cachées paraîtront avec évidence, et la postérité s'étonnera que des vérités si claires nous aient échappé. » Clairaut entreprit alors de soumettre à l'analyse les perturbations que la comète avait éprouvées par l'action des deux plus grosses planètes, Jupiter et Saturne. Après d'immenses calculs, il fixa son prochain passage au périhélie, vers le commencement d'avril 1759; ce que l'observation ne tarda pas à vérifier. La régularité que l'Astronomie nous montre dans le mouvement des comètes a lieu, sans aucun doute, dans tous les phénomènes; la courbe décrite par le plus léger atome est réglée d'une manière aussi certaine que les orbites planétaires; il n'y a de différence entre elles que celle qu'y met notre ignorance.

La probabilité est relative en partie à cette ignorance, et en partie à nos connaissances. Nous savons que sur trois ou un plus grand nombre d'événements un seul doit exister; mais rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres; dans cet état d'indécision il nous est impossible de prononcer avec certitude sur leur existence. Il est cependant probable qu'un de ces événements, pris à volonté, n'existera pas, parce que nous voyons plusieurs cas également possibles qui excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence; et à déterminer le nombre des cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité, qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles.

La notion précédente de la probabilité suppose qu'en faisant croître dans le même rapport le nombre des cas favorables et celui des cas possibles, la probabilité reste la même. Pour s'en convaincre, que l'on considère deux urnes A et B, dont la première contienne quatre boules blanches et deux noires, et dont la seconde ne renferme que deux boules blanches et une noire. On peut imaginer les deux boules noires de la première urne attachées par un fil qui se rompt au moment où l'on saisit l'une d'elles, et les quatre boules blanches formant deux systèmes semblables. Toutes les chances qui feront saisir l'une des boules du système noir amèneront une boule noire. Si l'on conçoit maintenant que les fils qui unissent les boules ne puissent se rompre, il est clair que le nombre des chances possibles ne changera pas, non plus que celui des chances favorables à l'extraction des boules noires,

seulement on tirera de l'urne deux boules à la fois. La probabilité d'extraire une boule noire de l'urne sera donc la même qu'auparavant; mais alors on a évidemment le cas de l'urne B, avec la seule différence que les trois boules de cette dernière urne sont remplacées par trois systèmes de deux boules invariablement unies. Ici les cas également possibles ne sont pas les extractions des boules; ce sont les chances qui les amènent et dont la somme, supposée la même pour chaque urne, est répartie sur six boules dans la première et sur trois dans la seconde. La juste appréciation des cas également possibles est un des points les plus délicats de l'analyse des hasards.

Quand tous les cas possibles sont favorables à un événement, sa probabilité se change en certitude, et son expression devient égale à l'unité. Sous ce rapport, la certitude et la probabilité sont comparables, quoiqu'il y ait une différence essentielle entre les deux états de l'esprit, lorsqu'une vérité lui est rigoureusement démontrée, ou lorsqu'il aperçoit encore une petite source d'erreurs.

Dans les choses qui ne sont que vraisemblables, la différence des données que chaque homme a sur elles est une des causes principales de la diversité des opinions que l'on voit régner sur le même objet. Supposons, par exemple, que l'on ait trois urnes A, B, C, dont une ne contienne que des boules noires, tandis que les autres ne renferment que des boules blanches; on doit tirer une boule de l'urne C et l'on demande la probabilité que cette boule sera noire. Si l'on ignore quelle est celle des trois urnes qui ne renferme que des boules noires, en sorte que l'on n'ait aucune raison de croire qu'elle est plutôt C que B ou A, ces trois hypothèses paraîtront également possibles; et, comme une boule noire ne peut être extraite que dans la première, la probabilité de l'extraire est égale à un tiers. Si l'on sait que l'urne A ne contient que des boules blanches, l'indécision ne porte plus alors que sur les urnes B et C, et la probabilité que la boule extraite de l'urne C sera noire est un demi; enfin cette probabilité se change en certitude si l'on est assuré que les urnes A et B ne contiennent que des boules blanches.

C'est ainsi que le même fait, récité devant un nombreux auditoire, obtient divers degrés de croyance, suivant l'étendue des connaissances de ceux qui l'écoutent. Si l'homme qui le rapporte en paraît intimement persuadé et si son état et ses vertus sont propres à inspirer une grande confiance, quelque extraordinaire que soit son récit, il aura, par rapport aux auditeurs dépourvus de lumières, le même degré de vraisemblance qu'un fait ordinaire rapporté par le même homme, et ils lui ajouteront une foi entière. Cependant, si quelqu'un d'eux a eu occasion d'entendre des faits contraires affirmés par d'autres hommes également respectables, il sera dans le doute; et le fait sera jugé faux par les auditeurs éclairés qui le trouveront opposé, soit à des faits bien avérés, soit aux lois immuables de la nature. Quelle indulgence ne devons-nous donc pas avoir pour les opinions différentes des nôtres, puisque cette différence ne dépend souvent que des points de vue divers où les circonstances nous ont placés? Éclairons ceux que nous ne jugeons pas suffisamment instruits; mais, auparavant, examinons sévèrement nos propres opinions, et pesons avec impartialité leurs probabilités respectives.

La différence des opinions dépend encore de la manière dont chacun détermine l'influence des données qui lui sont connues. La théorie des probabilités est si difficile, elle tient à des considérations si délicates, qu'il n'est pas surprenant qu'avec les mêmes données deux personnes trouvent des résultats différents, surtout dans les matières trop compliquées pour être soumises à un calcul rigoureux. L'esprit a ses illusions comme le sens de la vue; et, de même que le toucher rectifie celles-ci, la réflexion et le calcul corrigent également les premières. La probabilité fondée sur une expérience journalière, ou exagérée par la crainte ou l'espérance, nous frappe plus qu'une probabilité supérieure qui n'est qu'un simple résultat analytique; il serait donc à désirer que dans tous les cas on pût assujettir les probabilités au calcul; mais le plus souvent la chose est impossible, et nous sommes forcés de nous en rapporter à des aperçus quelquefois trompeurs. Alors, l'analogie, l'induction, une saine critique, un tact donné par la

nature et perfectionné par des comparaisons multipliées de ses indications avec l'expérience, suppléent, autant que cela se peut, les applications de l'Analyse.

C'est par l'analogie que nous attribuons des effets semblables à la même cause ou à des causes semblables, et réciproquement; ainsi nous jugeons que des êtres pourvus des mêmes organes, exécutant les mêmes choses et communiquant ensemble, éprouvent les mêmes sensations. C'est encore ainsi qu'en voyant le Soleil faire éclore, par l'action bienfaisante de sa lumière et de sa chaleur, les plantes et les animaux qui couvrent la Terre, nous jugeons qu'il produit des effets semblables sur les autres planètes; car il n'est pas naturel de penser que la matière dont nous observons la fécondité se développer en tant de façons est stérile sur une aussi grosse planète que Jupiter qui, comme le globe terrestre, a ses jours, ses nuits et ses années, et sur lequel les observations indiquent des changements qui supposent des forces très actives. Mais ce serait donner trop d'extension à l'analogie que d'en conclure la similitude des habitants des planètes avec ceux de la Terre. L'homme fait pour la température dont il jouit à sa surface ne pourrait pas, selon toute apparence, vivre sur les autres planètes. Mais ne doit-il pas y avoir une infinité d'organisations relatives aux diverses températures des globes de cet Univers? Si la seule différence des éléments et des climats met tant de variété dans les productions terrestres, combien plus doivent différer celles des diverses planètes et de leurs satellites? L'imagination la plus active ne peut s'en former aucune idée; mais leur existence est au moins fort vraisemblable.

Vous avez vu que souvent les lois des expressions analytiques se manifestent dans leurs premiers termes, et que celles de la nature sont indiquées par un petit nombre d'observations; le propre du génie est de les démêler au milieu des circonstances dont elles sont enveloppées, et de les exposer dans un jour tel qu'il soit impossible de les méconnaître. Ce moyen d'y parvenir se nomme *induction;* pour en accroître la probabilité, on forme de nouveaux termes, ou l'on fait de nouvelles observations, et, si les lois dont on a soupçonné l'existence continuent d'y satisfaire, elles acquièrent un degré de vraisemblance qui finit par se confondre avec la certitude.

Ce que l'on observe dans l'Analyse a également lieu dans la nature, dont les phénomènes ne sont, en effet, que les résultats mathématiques d'un petit nombre de lois invariables. Pour découvrir ces lois, il faut choisir ou faire naître les phénomènes les plus propres à cet objet, les multiplier pour en varier les circonstances, et observer ce qu'ils ont de commun entre eux. Ainsi l'on s'élève à des rapports de plus en plus étendus, et l'on parvient enfin aux lois générales que l'on vérifie, soit par des preuves ou des expériences directes, lorsque cela est possible, soit en examinant si elles satisfont à tous les phénomènes connus.

Telle est la méthode la plus sûre qui puisse nous guider dans la recherche de la vérité. On lui doit les plus belles découvertes dans les sciences; mais son application la plus sublime et la plus étendue est celle que Newton en a faite au système du Monde, comme vous pouvez le voir dans l'Ouvrage que je vous ai annoncé au commencement de cette Leçon.

Ce système offre un exemple remarquable d'une probabilité bien supérieure à celle d'un grand nombre de faits historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute, mais qui, n'étant point analogue aux probabilités dont nous faisons habituellement usage, n'est pas généralement sentie. L'observation nous montre les planètes et leurs satellites décrivant des orbes presque circulaires, et tournant sur eux-mêmes dans le sens de la rotation du Soleil, et sur des plans peu inclinés à son équateur. Si l'on applique le calcul à ce phénomène extraordinaire, on trouve qu'il y a des millions de milliards à parier contre un qu'il n'est point dû au hasard, et qu'il dépend d'une cause générale qui, primitivement, embrassa tous les corps du système planétaire, sans exercer d'influence sur les comètes observées, puisqu'elles se meuvent dans tous les sens et sous toutes les inclinaisons à l'équateur solaire. Cependant, leurs orbes étant fort excentriques, tandis que ceux des planètes sont presque circulaires, il est naturel de penser que la même cause fit disparaître, à l'origine, les orbes qui présentaient les nuances

intermédiaires entre une grande et une petite excentricité. La cause que j'ai assignée ailleurs à ces singuliers phénomènes me paraît être la seule qui puisse satisfaire à leur ensemble; mais, cette discussion étant étrangère ici, je me borne à renvoyer pour cet objet à mon *Exposition du système du Monde*.

Un des points les plus délicats de la théorie des probabilités, et celui qui prête le plus aux illusions, est la manière dont les probabilités augmentent ou diminuent par leurs combinaisons mutuelles. Si les événements sont indépendants les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières. Ainsi la probabilité d'amener un as avec un seul dé étant un sixième, celle d'amener deux as en projetant deux dés à la fois est un trente-sixième. En effet, chacune des faces de l'un pouvant se combiner avec les six faces de l'autre, il y a trente-six cas possibles parmi lesquels un seul donne les deux as. Généralement, la probabilité qu'un événement simple dans les mêmes circonstances arrivera de suite un nombre donné de fois est égale à la probabilité de l'événement simple élevée à une puissance indiquée par ce nombre. Ainsi les puissances successives d'une fraction moindre que l'unité diminuant sans cesse, un événement qui dépend d'une suite de probabilités fort grandes peut devenir extrêmement peu vraisemblable. Supposons qu'un fait nous soit transmis par vingt témoins, de manière que le premier l'ait transmis au deuxième, le deuxième au troisième, et ainsi de suite; supposons encore que la probabilité de chaque témoignage soit égale à neuf dixièmes; celle du fait sera moindre qu'un huitième, c'est-à-dire qu'il y aura plus de sept à parier contre un qu'il est faux. On ne peut mieux comparer cette diminution de la probabilité qu'à l'extinction de la clarté des objets par l'interposition de plusieurs morceaux de verre, une épaisseur peu considérable suffisant pour dérober la vue d'un objet qu'un seul morceau laisse apercevoir d'une manière distincte. Les historiens ne paraissent pas avoir fait assez d'attention à cette dégradation de la probabilité des faits lorsqu'ils sont vus à travers un grand nombre de générations successives; plusieurs événements historiques, réputés comme certains, seraient au moins douteux si on les soumettait à cette analyse.

Dans les sciences purement mathématiques, les conséquences les plus éloignées participent de la certitude du principe dont elles dérivent. Dans les applications de l'Analyse à la Physique, les conséquences ont toute la certitude des faits ou des expériences. Mais dans les sciences morales, où chaque conséquence n'est déduite de ce qui la précède que d'une manière vraisemblable, quelque probables que soient ces déductions, la chance de l'erreur croît avec leur nombre et finit par surpasser la chance de la vérité dans les conséquences très éloignées du principe.

Quand la possibilité des événements simples est connue, la probabilité des événements composés peut être déterminée par la théorie des combinaisons; mais la méthode la plus directe et la plus générale pour y parvenir consiste à observer la loi de la variation qu'elle éprouve par l'addition d'un ou de plusieurs événements simples, et à la faire dépendre d'une équation aux différences finies ordinaires ou partielles. L'intégrale de cette équation est l'expression analytique de la probabilité cherchée. La théorie des fonctions génératrices, que j'ai donnée autrefois dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, peut être ici d'un grand usage [1]. Cette théorie a pour objet les rapports des coefficients des puissances d'une variable indéterminée, dans le développement d'une fonction de cette variable, à la fonction elle-même. De la simple considération de ces rapports découlent, avec une extrême facilité, l'intégration des équations aux différences ordinaires ou partielles, l'analogie des puissances et des différences, et généralement le transport des exposants des puissances aux caractéristiques qui expriment la manière d'être des variables.

La théorie des fonctions génératrices s'étend aux différences infiniment petites; car, si l'on développe tous les termes d'une équation aux différences par rapport aux puissances de la différence supposée indé-

[1] *Œuvres de Laplace*, t. VIII à XII. Ces divers Mémoires forment la première Partie de la *Théorie analytique des probabilités*, t. VII.

terminée, mais infiniment petite, et que l'on néglige les infiniment petits d'un ordre supérieur relativement à ceux d'un ordre inférieur, on aura une équation aux différences infiniment petites, dont l'intégrale est celle de l'équation aux différences finies, dans laquelle on néglige pareillement les infiniment petits par rapport aux quantités finies.

Les quantités qu'on néglige dans ces passages du fini à l'infiniment petit semblent ôter au calcul infinitésimal la rigueur des résultats géométriques; mais pour la lui rendre il suffit d'envisager les quantités que l'on conserve dans le développement d'une équation aux différences finies et de son intégrale, par rapport aux puissances de la différence indéterminée, comme ayant toutes pour facteur la plus petite puissance dont on compare entre eux les coefficients. Cette comparaison étant rigoureuse, le calcul différentiel, qui n'est évidemment que cette comparaison même, a toute la rigueur des autres opérations algébriques. Mais la considération des infiniment petits de différents ordres, la facilité de les reconnaître *a priori* par l'inspection seule des grandeurs, et l'omission des infiniment petits d'un ordre supérieur à celui que l'on conserve, à mesure qu'ils se présentent, simplifient extrêmement les calculs et sont l'un des principaux avantages de l'Analyse infinitésimale, qui d'ailleurs, en réalisant les infiniment petits et leur attribuant de très petites valeurs, donne, par une première approximation, les différences et les sommes des quantités.

Le passage du fini à l'infiniment petit a l'avantage d'éclairer plusieurs points de l'Analyse infinitésimale qui ont été l'objet de grandes contestations parmi les géomètres. C'est ainsi que, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1779 [1], j'ai fait voir que les fonctions arbitraires qu'introduit l'intégration des équations différentielles partielles pouvaient être discontinues, et j'ai déterminé les conditions auxquelles cette discontinuité doit être assujettie. Les résultats transcendants de l'Analyse sont, comme toutes les abstractions de l'entendement, des signes généraux dont on ne peut déterminer la véritable étendue qu'en remontant, par l'Analyse métaphy-

[1] *Œuvres de Laplace*, t. X, p. 59.

sique, aux idées élémentaires qui y ont conduit, ce qui présente souvent de grandes difficultés; car l'esprit humain en éprouve moins encore à se porter en avant qu'à se replier sur lui-même.

Il paraît que Fermat, le véritable inventeur du Calcul différentiel, a considéré ce calcul comme une dérivation de celui des différences finies, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur, par rapport à ceux d'un ordre inférieur; c'est, du moins, ce qu'il a fait dans sa méthode *de Maximis* et dans celle des tangentes, qu'il a étendue aux courbes transcendantes. On voit encore par sa belle solution du problème de la réfraction de la lumière, en supposant qu'elle parvient d'un point à un autre dans le temps le plus court et en concevant qu'elle se meut, dans divers milieux diaphanes, avec différentes vitesses, on voit, dis-je, qu'il savait étendre son calcul aux fonctions irrationnelles, en se débarrassant des irrationnalités par l'élévation des radicaux aux puissances. Newton a depuis rendu ce calcul plus analytique dans sa *Méthode des fluxions*, et il en a simplifié et généralisé les procédés par l'invention de son théorème du binome; enfin, presque en même temps, Leibnitz a enrichi le Calcul différentiel d'une notation très heureuse et qui s'est adaptée d'elle-même à l'extension que le Calcul différentiel a reçue par la considération des différentielles partielles. La langue de l'Analyse, la plus parfaite de toutes, étant par elle-même un puissant instrument de découvertes, ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées, sont les germes de nouveaux calculs. Ainsi la simple idée qu'eut Descartes d'indiquer les puissances des quantités représentées par des lettres, en écrivant vers le haut de ces lettres les nombres qui expriment le degré de ces puissances, a donné naissance au Calcul exponentiel; et Leibnitz a été conduit par sa notation à l'analogie singulière des puissances et des différences. Le calcul des fonctions génératrices, qui donne la véritable origine de cette analogie, offre tant d'exemples de ce transport des exposants des puissances aux caractéristiques, qu'il peut encore être considéré comme le calcul exponentiel des caractéristiques.

Après cette courte digression que je me suis permise pour suppléer, à quelques égards, les leçons que je devais vous faire sur l'Analyse infinitésimale, je reviens aux probabilités : lorsque les événements que l'on considère sont en très grand nombre, les formules auxquelles on est conduit se composent d'une si grande multitude de termes et de facteurs que leur calcul numérique devient impraticable. Il est alors indispensable d'avoir une méthode qui transforme ces formules en séries convergentes. J'ai donné pour cet objet, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* ([1]), une méthode fondée sur la transformation des formules fonctions de très grands nombres, en intégrales définies que l'on intègre par des séries très convergentes; et il y a cela de remarquable, savoir, que la quantité sous le signe intégral est la fonction génératrice de la fonction exprimée par l'intégrale définie; en sorte que les théories des fonctions génératrices et des approximations des formules fonctions de très grands nombres peuvent être considérées comme les deux branches d'un même calcul que je désigne sous le nom de *Calcul des fonctions génératrices*.

Par son moyen on peut déterminer avec facilité les limites de la probabilité des résultats et des causes indiqués par les événements considérés en grand nombre, et les lois suivant lesquelles cette probabilité approche de ses limites à mesure que les événements se multiplient. Cette recherche, la plus délicate de la théorie des hasards, mérite l'attention des géomètres par l'analyse qu'elle exige, et celle des philosophes, en faisant voir comment la régularité finit par s'établir dans les choses mêmes qui nous paraissent entièrement livrées au hasard, et en nous dévoilant les causes cachées, mais constantes, dont cette régularité dépend. Mais je dois ici me borner à vous présenter les principes et les résultats généraux de la théorie des probabilités.

Quand deux événements dépendent l'un de l'autre, la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier de ces événements par la probabilité que, cet événement étant arrivé, l'autre aura lieu.

([1]) *Œuvres de Laplace*, t. IX, X et XII.

Ainsi dans le cas précédent des trois urnes A, B, C, dont deux ne contiennent que des boules blanches et dont une ne renferme que des boules noires, la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne C est $\frac{2}{3}$, puisque deux des trois urnes ne contiennent que des boules de cette couleur; mais, lorsqu'on a extrait une boule blanche de l'urne C, l'indécision relative à celle des urnes qui ne renferme que des boules noires ne portant plus que sur les urnes A et B, la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne B devient $\frac{1}{2}$; le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ est donc la probabilité d'extraire des urnes B et C deux boules blanches.

On voit, par ce qui précède, l'influence des événements passés sur la probabilité des événements futurs. Car la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne B, qui primitivement est $\frac{2}{3}$, se réduit à $\frac{1}{2}$ lorsqu'on a extrait une boule blanche de l'urne C; elle se changerait en certitude si l'on avait extrait une boule noire de la même urne. On déterminera cette influence des événements passés au moyen du principe suivant :

Si l'on calcule a priori *les probabilités de l'événement arrivé et d'un événement composé de celui-ci et d'un autre que l'on attend, la seconde probabilité divisée par la première sera la probabilité de l'événement attendu tirée de l'événement observé.*

Quand les possibilités des événements simples sont totalement inconnues, on détermine *a priori* la probabilité d'un événement composé en donnant successivement à ces possibilités toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, et en prenant une moyenne entre les probabilités relatives à chacune de ces valeurs. On trouve ainsi, par exemple, qu'en faisant remonter à cinq mille ans l'époque la plus ancienne de l'histoire, le Soleil s'étant levé constamment dans cet intervalle à chaque révolution de vingt-quatre heures, il y a dix-huit cent vingt-six mille à parier contre un qu'il se lèvera dans la révolution suivante. Mais ce nombre est incomparablement plus fort pour celui qui, connaissant par l'ensemble des phénomènes célestes le principe

régulateur des jours et des saisons, voit que rien ne peut, dans le moment actuel, en arrêter le cours.

Ici se présente la question agitée par quelques philosophes touchant l'influence du passé sur la probabilité de l'avenir.

Supposons qu'au jeu de *croix* et *pile* on ait amené *croix* plus souvent que *pile;* par cela seul nous serons portés à croire que, dans la constitution de la pièce, il existe une cause constante qui le favorise, les coups passés influent donc alors sur la probabilité des événements futurs. Ainsi, dans la conduite de la vie, le bonheur est souvent une preuve d'habileté qui doit faire employer de préférence les personnes heureuses. Mais si, par l'instabilité des circonstances, nous sommes ramenés sans cesse à l'état d'une indécision absolue sur ce qui doit arriver; si, par exemple, on change de pièce à chaque coup au jeu de croix et pile, le passé ne peut répandre aucune lumière sur l'avenir, et il serait absurde d'en tenir compte. On voit par là ce qu'il faut penser de ces veines de bonheur ou de malheur que les hommes imaginent pour expliquer la constance de quelques événements qui leur sont favorables ou contraires. Ils tombent même à cet égard dans une contradiction évidente, puisque dans plusieurs cas, et spécialement dans les loteries, ils jugent qu'un événement qui depuis longtemps n'est pas arrivé en devient plus vraisemblable. Cette erreur fort commune me paraît tenir à une illusion par laquelle on se reporte involontairement à l'origine des événements. Il est, par exemple, très peu vraisemblable qu'au jeu de croix et pile on amènera croix dix fois de suite; cette invraisemblance, qui nous frappe encore lorsqu'il est arrivé neuf fois, nous porte à croire qu'au dixième coup il n'arrivera pas. Mais, loin de nous faire juger ainsi, le passé, en paraissant indiquer dans la pièce plus de pente pour croix que pour pile, rend le premier de ces événements plus probable que l'autre; il augmente conséquemment la probabilité de l'arrivée de croix au coup suivant. En étendant généralement cette remarque aux causes inconnues, mais constantes, qui favorisent les événements, on trouve ce résultat remarquable, savoir, *qu'elles accroissent toujours la probabilité des événements composés de la répétition* *d'un même événement simple sans accroître cependant la probabilité de sa première arrivée, puisque l'on est censé ignorer d'abord les événements que ces causes favorisent.* Ainsi, au jeu de croix et pile, l'inégalité inconnue qui, selon toute vraisemblance, existe entre les facilités des deux faces, n'augmente point la probabilité d'amener croix ou pile au premier coup; mais elle augmente la probabilité d'amener l'un ou l'autre deux fois de suite, probabilité qui serait $\frac{1}{2}$ si les facilités des deux faces étaient parfaitement égales.

Dans un grand nombre de cas, et ce sont les plus intéressants de l'analyse des hasards, les possibilités des événements simples sont inconnues, et nous sommes réduits à chercher dans les événements passés les indices qui peuvent nous guider dans nos conjectures sur les causes dont ils dépendent. Mais de quelle manière ces événements nous dévoilent-ils, en se développant, leurs causes et leurs possibilités respectives? C'est un problème dont la solution exige une analyse très délicate. Cette analyse conduit au théorème suivant :

Lorsqu'un événement, composé de plusieurs événements simples, tel qu'une partie de jeu, a été répété un grand nombre de fois, les possibilités des événements simples qui rendent ce que l'on a observé le plus probable sont celles que l'observation indique avec le plus de vraisemblance; à mesure que l'événement composé se répète, cette vraisemblance augmente sans cesse et finit par se confondre avec la certitude, dans la supposition d'un nombre infini de répétitions.

Il y a ici deux sortes d'approximations; l'une d'elles est relative aux limites prises de part et d'autre des possibilités qui donnent au passé le plus de vraisemblance; l'autre approximation se rapporte à la probabilité que ces possibilités tombent dans ces limites. La répétition de l'événement composé accroît de plus en plus cette probabilité, les limites restant les mêmes; elle resserre de plus en plus l'intervalle de ces limites, la probabilité restant la même; dans l'infini cet intervalle devient nul, et la probabilité se change en certitude. La même analyse conduit encore à cet autre théorème :

Si l'on multiplie indéfiniment les observations ou les expériences, leur résultat moyen converge vers un terme fixe, de manière qu'en prenant de part et d'autre de ce terme un intervalle aussi petit que l'on voudra, la probabilité que le résultat moyen tombera dans cet intervalle finira par ne différer de la certitude que d'une quantité moindre que toute grandeur assignable. Ce terme est la vérité même si les erreurs positives et négatives sont également faciles; et, généralement, il est l'abscisse de la courbe de facilité des erreurs correspondant au centre de gravité de l'aire de cette courbe, l'origine des abscisses étant celle des erreurs.

Ainsi, le résultat moyen d'un grand nombre d'observations futures sera le même à très peu près que celui d'un grand nombre d'observations semblables déjà faites.

Les événements qui dépendent du hasard offrent dans leur ensemble une régularité qui paraît tenir à un dessein, mais qui n'est au fond que le développement de leurs possibilités respectives. Le rapport des naissances annuelles des garçons à celles des filles, dans les grandes villes telles que Paris et Londres, en est un exemple. Ce rapport est très peu variable; on a cru voir dans cette constance une preuve de la Providence qui gouverne le monde; mais elle n'est qu'un résultat du premier des théorèmes précédents, suivant lequel ce rapport doit toujours coïncider à peu près avec celui des facilités de naissance des deux sexes. On peut même en conclure, comme loi générale, que les rapports des effets de la nature, tels que celui des naissances à la population, ou des mariages aux naissances, sont à fort peu près constants quand ces effets sont considérés en très grand nombre. Ainsi, malgré la grande variété des années, la somme des productions, pendant un nombre d'années considérable, est sensiblement la même; en sorte que l'homme peut, par une utile prévoyance, se mettre à l'abri de l'irrégularité des saisons en répandant également sur tous les temps les biens que la nature lui distribue d'une manière inégale. Je n'excepte pas même de la loi précédente les effets dus aux causes morales : à Paris, le nombre des naissances annuelles, depuis un grand nombre d'années, a peu différé de dix-neuf mille; et j'ai ouï dire qu'à la poste, le nombre des lettres mises au rebut, par les défauts des adresses, était à peu près le même chaque année.

Au milieu de l'inconstance des phénomènes qui semblent le plus dépendre du hasard, il existe donc des rapports fixes vers lesquels ils tendent sans cesse, mais qu'ils ne peuvent atteindre que dans l'infini. La recherche de ces rapports et des lois suivant lesquelles les résultats des phénomènes s'en approchent est un des points les plus intéressants de la théorie des probabilités.

Chacune des causes auxquelles un événement observé peut être attribué est indiquée avec d'autant plus de vraisemblance qu'il est plus probable que, cette cause étant supposée exister, l'événement aura lieu; la probabilité de l'existence d'une quelconque de ces causes est donc une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement résultant de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes.

C'est le principe fondamental de cette branche de l'Analyse des hasards, qui consiste à remonter des événements aux causes.

Ce principe donne la raison pour laquelle on attribue les événements réguliers à une cause particulière. Quelques philosophes ont cru que ces événements sont moins possibles que les autres et qu'au jeu de croix et pile, par exemple, la combinaison dans laquelle croix arrive vingt fois de suite est moins facile à la nature que celle où croix et pile sont entremêlées d'une façon irrégulière. Mais cette opinion suppose que les événements passés influent sur la possibilité des événements futurs, ce qui n'est point admissible. Les combinaisons régulières n'arrivent plus rarement que parce qu'elles sont moins nombreuses. Si nous recherchons une cause là où nous apercevons de la symétrie, ce n'est pas que nous regardions un événement symétrique comme étant moins possible que les autres; mais, cet événement devant être l'effet d'une cause régulière ou celui du hasard, la première de ces suppositions est plus probable que la seconde. Nous

voyons sur une table des caractères d'imprimerie disposés dans cet ordre, *Constantinople*, et nous jugeons que cet arrangement n'est pas l'effet du hasard, non parce qu'il est moins possible que les autres, puisque, si ce mot n'était employé dans aucune langue, cet arrangement ne serait ni plus ni moins possible en lui-même, et cependant nous ne lui soupçonnerions alors aucune cause particulière; mais, ce mot étant en usage parmi nous, il est incomparablement plus probable qu'une personne aura ainsi disposé les caractères précédents qu'il ne l'est que cet arrangement est dû au hasard.

De là nous devons généralement conclure que, plus un fait est extraordinaire, plus il a besoin d'être appuyé de fortes preuves; car, ceux qui l'attestent pouvant ou tromper ou avoir été trompés, ces deux causes sont d'autant plus probables que la réalité du fait l'est moins en elle-même. Il y a des choses tellement extraordinaires que rien ne peut, aux yeux des hommes éclairés, en balancer l'invraisemblance. Mais celle-ci, par l'effet d'une opinion dominante, peut être affaiblie au point de paraître inférieure à la probabilité des témoignages; et quand cette opinion vient à changer, un récit absurde, admis généralement dans le siècle qui lui a donné naissance, n'offre aux siècles suivants qu'une nouvelle preuve de la grande influence de l'opinion sur les meilleurs esprits.

Avant de prononcer sur l'existence d'une cause qui semble indiquée par les événements observés, il faut déterminer sa probabilité résultant de ces événements; autrement, on s'exposerait à rapporter à une cause constante cette régularité qu'affectent quelquefois les événements dus au hasard, et qui ne se soutient plus quand ils sont très multipliés; mais cette distinction exige une analyse toute particulière. En l'appliquant au rapport des naissances des garçons à celles des filles observé dans les diverses parties de l'Europe, on trouve que ce rapport, partout à peu près celui de 22 à 21, indique avec une extrême probabilité une plus grande facilité dans les naissances des garçons. Si l'on considère ensuite qu'il est le même à Naples qu'à Pétersbourg, on verra qu'à cet égard l'influence du climat est insensible. On pouvait donc soupçonner, contre l'opinion commune, que cette supériorité des naissances masculines subsiste dans l'Orient même. J'avais, en conséquence, invité les savants français envoyés en Égypte à faire des recherches sur cette question intéressante; mais la difficulté d'obtenir des renseignements précis sur les naissances ne leur a pas permis de la résoudre.

Les registres des naissances peuvent servir à déterminer la population sans recourir au dénombrement des habitants; mais il faut, pour cela, connaître le rapport de la population aux naissances. Le moyen d'y parvenir le plus exact consiste : 1° à choisir plusieurs communes dans chaque département pour avoir un milieu entre les petites différences que les causes locales apportent dans les résultats; 2° à faire le dénombrement des habitants de ces communes à une époque donnée; 3° à déterminer, par le relevé des naissances durant plusieurs années qui précèdent ou suivent cette époque, le nombre correspondant des naissances annuelles. Ce nombre, divisé par celui des habitants, donnera le rapport des naissances à la population, d'une manière d'autant plus précise que le dénombrement sera plus considérable. On trouve, par l'analyse des hasards, que ce dénombrement doit s'élever à douze ou quinze cent mille habitants, pour avoir une grande probabilité que les erreurs sur la population entière de la France, déterminée par les naissances, seront renfermées dans d'étroites limites. Le Gouvernement, convaincu de l'utilité d'un semblable dénombrement, en a bien voulu ordonner l'exécution, à ma prière. Dans trente départements distribués sur la surface de la France, on a fait choix des communes qui pouvaient donner les renseignements les plus précis. Elles ont fourni, pour le 1er vendémiaire an XI, des dénombrements dont la somme s'élève à 2037615 individus. Le relevé des naissances, des mariages et des morts, pendant les années VIII, IX et X, a donné pour ces trois années :

Naissances.	Mariages.	Décès.
110312 garçons 105287 filles	46037	103659 mâles 99443 femelles

Le rapport de la population aux naissances annuelles est donc $28 \frac{3528}{10000}$; il est donc plus grand qu'on ne l'avait estimé jusqu'ici. Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, que ce relevé présente, est celui de 22 à 21; et les mariages sont aux naissances comme 3 à 14.

A Paris, les baptêmes des enfants des deux sexes s'écartent un peu du rapport de 22 à 21. Depuis le commencement de 1745, époque à laquelle on a commencé à distinguer les sexes sur les registres des naissances, jusqu'à la fin de 1784, on a baptisé dans cette grande ville 393386 garçons et 377555 filles. Le rapport de ces deux nombres est à peu près celui de 25 à 24; il paraît donc qu'à Paris une cause particulière rapproche de l'égalité les baptêmes des deux sexes; et, si l'on applique à cet objet le Calcul des probabilités, on trouve qu'il y a 238 environ à parier contre 1 en faveur de son existence, ce qui suffit pour en autoriser la recherche. Alors j'ai soupçonné que la différence observée à cet égard entre Paris et le reste de la France pouvait tenir à ce que, dans la campagne et dans les provinces, les parents, trouvant quelque avantage à retenir près d'eux les garçons, en avaient envoyé à l'hospice des enfants trouvés de Paris dans un rapport moindre que celui des naissances des deux sexes. C'est ce que le relevé des registres de cet hospice m'a fait voir avec évidence. Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, il y est entré 159405 filles et 163499 garçons; et ce dernier nombre n'excède que de $\frac{1}{38}$ le précédent, qu'il aurait dû surpasser de $\frac{1}{21}$, d'après le rapport observé des naissances. Ce qui achève de confirmer la cause assignée, c'est que, si l'on n'a point égard aux enfants trouvés, le rapport des deux sexes, à Paris, est celui de 22 à 21, comme dans les départements.

La probabilité des événements sert à déterminer l'espérance et la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions : il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans une supposition qui n'est que vraisemblable. Dans la théorie des hasards, cet avantage est le produit de la somme espérée par la probabilité de l'obtenir; c'est la somme partielle qui doit revenir, lorsqu'on ne veut point courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition de la somme entière se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette manière de la répartir est la seule équitable, quand on fait abstraction de toute circonstance étrangère, parce qu'avec un égal degré de probabilité on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage *espérance mathématique*, pour la distinguer de l'*espérance morale*, qui dépend, comme elle, de la somme espérée et de la probabilité de l'obtenir, mais qui se règle encore sur mille circonstances variables qu'il est presque toujours impossible de définir et plus encore d'assujettir au Calcul. Ces circonstances, il est vrai, ne font qu'augmenter ou diminuer la valeur du bien espéré; alors on peut considérer l'espérance morale elle-même comme le produit de cette valeur par la probabilité de l'obtenir; mais on doit distinguer, dans le bien espéré, sa valeur relative de sa valeur absolue. Celle-ci est indépendante des motifs qui le font désirer, au lieu que la première croît avec ces motifs.

On ne peut donner de principe général pour apprécier cette valeur relative. En voici cependant un proposé par Daniel Bernoulli, et qui peut servir dans beaucoup de cas. *La valeur relative d'une somme infiniment petite est égale à sa valeur absolue divisée par le bien total de la personne intéressée.* En effet, il est clair que 1^{fr} ayant peu de valeur pour celui qui en possède un grand nombre, la manière la plus naturelle d'estimer sa valeur relative est de la supposer en raison inverse de ce nombre.

En appliquant l'Analyse à ce principe, on parvient à divers résultats conformes aux indications du sens commun, mais que l'on peut apprécier par ce moyen avec quelque exactitude. Telle est cette règle dictée par la prudence, et qui consiste à exposer sa fortune par parties à des dangers indépendants les uns des autres, plutôt que de l'exposer tout entière au même danger. Il résulte encore du même principe qu'au jeu le plus égal la perte est toujours relativement plus grande que le gain. Ainsi, l'on trouve qu'en supposant la fortune des joueurs de 100^{fr} et leur mise au jeu de 50^{fr}, leur fortune se trouve réduite

à 87^{fr}; le jeu est donc désavantageux dans le cas même où la mise est égale au produit de la somme espérée par la probabilité de l'obtenir. On peut juger par là de l'immoralité des jeux dans lesquels la somme promise est au-dessous de ce produit : ils ne subsistent que par les faux raisonnements et la cupidité qu'ils fomentent et qui, portant le peuple à sacrifier son nécessaire à des espérances chimériques dont il est hors d'état d'apprécier l'invraisemblance, sont la source d'une infinité de maux.

Il existe, dans la répétition d'un événement avantageux, un terme fixe vers lequel le bénéfice moyen converge à mesure que l'événement se multiplie. Le bénéfice réel est de plus en plus probable et s'accroît sans cesse; il devient certain dans l'hypothèse d'un nombre infini de répétitions et, en le divisant par leur nombre, le quotient est l'espérance mathématique elle-même ou l'avantage relatif à chaque événement. Il en est de même de la perte, qui devient certaine à la longue, pour peu que l'événement soit désavantageux.

Ce théorème sur les bénéfices ou les pertes est analogue à ceux que nous avons donnés précédemment sur les rapports qu'indiquent les répétitions indéfinies des événements simples ou composés; et, comme eux, ils prouvent que la régularité finit par s'établir dans les choses les plus subordonnées à ce que nous nommons *hasard*.

On a construit des Tables de mortalité qui présentent toutes ce résultat affligeant, savoir : que la moitié du genre humain périt avant d'avoir terminé sa vingtième année. La manière de former ces Tables est très simple. On prend sur les registres des naissances et des morts un grand nombre d'enfants que l'on suit pendant le cours de leur vie, en déterminant combien il en reste à la fin de chaque année de leur âge, et l'on inscrit ce nombre vis-à-vis de chaque année finissante. Mais, comme dans les deux ou trois premières années de la vie la mortalité est très rapide, il faut, pour plus d'exactitude, indiquer dans ce premier âge le nombre des survivants à la fin de chaque demi-année. Les divers états de la vie offrent, à l'égard de la mortalité, des différences très sensibles, relatives aux fatigues et aux dangers inséparables de chaque état, et dont il est indispensable de tenir compte dans les calculs fondés sur la durée de la vie. Mais ces différences n'ont pas encore été suffisamment déterminées. Elles le seront un jour : alors on saura quel sacrifice de la vie chaque profession exige, et l'on profitera de ces connaissances pour en diminuer les dangers.

Si l'on divise la somme des années de la vie de tous les individus considérés dans une Table de mortalité par le nombre de ces individus, on a la durée moyenne de la vie, que l'on trouve ainsi de vingt-huit ans et demi. La durée moyenne de ce qui reste encore à vivre, lorsqu'on est parvenu à un âge quelconque, se détermine en faisant une somme des années qu'ont vécu au delà de cet âge tous les individus qui l'ont atteint, et en la divisant par le nombre de ces individus. Ce n'est point au moment de la naissance que cette durée est la plus grande; c'est lorsqu'on a échappé aux dangers de la première enfance, et alors elle est d'environ quarante-trois ans. La probabilité d'arriver à un âge quelconque, en partant d'un âge donné, est égale au rapport des deux nombres d'individus indiqués dans la Table à ces deux âges.

On conçoit que la précision de ces résultats exige que l'on considère un très grand nombre de naissances; mais l'analyse des probabilités nous montre qu'ils approchent sans cesse de la vérité, avec laquelle ils finissent par coïncider, lorsque le nombre des naissances considérées devient infini.

On a observé qu'il existe plus de femmes que d'hommes, quoiqu'il naisse plus de garçons que de filles. Or, dans les contrées où la population est constante, le rapport de la population aux naissances annuelles est égal au nombre des années de la durée moyenne de la vie; cette durée est donc plus grande pour les femmes que pour les hommes, soit en vertu de leur constitution, soit parce qu'elles sont exposées à moins de dangers.

Il est visible que la durée moyenne de la vie serait augmentée si les guerres devenaient plus rares, si l'aisance était plus grande et plus générale et si, par des moyens quelconques, l'homme parvenait à

rendre plus salubre le sol qu'il habite et à diminuer le nombre et les dangers des maladies. C'est ce qu'il a fait à l'égard de la petite vérole, l'un des fléaux les plus destructeurs de l'espèce humaine. Daniel Bernoulli a trouvé, par une application ingénieuse du Calcul des probabilités, que l'inoculation augmente sensiblement la vie moyenne, en supposant même qu'il périt un inoculé sur deux cents; il n'est donc pas douteux qu'elle soit avantageuse à l'État. Mais celui qui veut se faire inoculer doit comparer le danger très petit, mais prochain, d'en mourir au danger beaucoup plus grand, mais plus éloigné, de mourir de la petite vérole naturelle; et, quoique la considération de la proximité du danger soit nulle pour l'État, qui n'envisage que la masse des citoyens, elle ne l'est pas pour les individus. Cependant, l'inoculation bien conduite fait périr un si petit nombre de personnes, et les ravages de la petite vérole naturelle sont si considérables, que l'intérêt particulier se joint à celui de l'État pour adopter cette méthode. Le père de famille, dont l'attachement pour ses enfants croît avec eux, ne doit point balancer à les soumettre à une opération qui les délivre de l'inquiétude et des dangers d'une aussi cruelle maladie, et qui lui assure le fruit de ses soins et de leur éducation. Je n'hésite donc point à conseiller la pratique salutaire de l'inoculation et à la regarder comme l'un des résultats les plus avantageux que la Médecine ait tirés de l'expérience (¹).

On a fondé, sur les Tables de mortalité, divers établissements, tels que les rentes viagères et les tontines; mais les plus utiles de ces établissements sont ceux dans lesquels, au moyen d'un léger sacrifice de son revenu, on assure l'existence de sa famille pour un temps où l'on doit craindre de ne pouvoir plus suffire à ses besoins. Autant le jeu est immoral, autant ces établissements sont avantageux aux mœurs en favorisant les plus doux penchants de la nature. D'ailleurs, des

(¹) Depuis la première publication de ses leçons, toutes les craintes de l'inoculation que la petite vérole laissait encore ont été dissipées par l'inestimable découverte de la vaccine, dont on est redevable à Jenner, qui, par là, s'est rendu l'un des plus grands bienfaiteurs de l'espèce humaine.

capitaux qui, par leur petitesse, seraient stériles entre les mains de chaque particulier, deviennent productifs et alimentent le commerce dans les grands établissements qui les reçoivent et qui, par la multitude de ces capitaux, produisent un bénéfice certain quand ils sont bien conçus et sagement administrés. Ils n'offrent point l'inconvénient que nous avons remarqué dans les jeux même les plus équitables, celui de rendre la perte plus sensible que le gain, puisqu'au contraire ils donnent le moyen d'échanger le superflu contre des ressources assurées dans l'avenir. Le Gouvernement doit donc encourager ces établissements et les respecter dans ses vicissitudes; car les espérances qu'ils présentent portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée.

La méthode la plus générale et la plus simple de calculer les bénéfices et les charges de ces établissements consiste à les réduire en capitaux actuels au moyen de ce principe : *Le capital actuel équivalant à une somme, qui ne doit être probablement payée qu'après un certain nombres d'années, est égal à cette somme multipliée par la probabilité qu'elle sera payée à cette époque, et divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt élevée à une puissance égale au nombre de ces années.* L'intérêt annuel de l'unité est ce que l'on nomme *taux de l'intérêt.*

Il est facile d'appliquer ce principe aux rentes viagères sur une ou plusieurs têtes, et aux caisses d'épargne et d'assurance, d'une nature quelconque. Supposons que l'on se propose de former une Table de rentes viagères d'après une Table donnée de mortalité. Une rente viagère payable, par exemple, au bout de cinq ans, et réduite en capital actuel, sera, par ce principe, égale au produit des deux quantités suivantes, savoir : la rente divisée par la cinquième puissance de l'unité augmentée du taux de l'intérêt; et la probabilité de la payer : cette probabilité est le rapport inverse du nombre des personnes à l'âge de celui qui constitue la rente au nombre des personnes vivantes à cet âge augmenté de cinq années. En formant donc une suite de fractions dont les dénominateurs soient les produits du nombre des personnes indiquées dans la Table de mortalité, comme vivantes à l'âge de celui qui constitue la rente, par les puissances successives de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et dont les numérateurs soient les produits de la rente, par le nombre des personnes vivantes au même âge, augmenté successivement d'une année, de deux années, ..., la somme de ces fractions sera le capital requis pour la rente viagère à cet âge.

Supposons maintenant qu'une personne veuille, au moyen d'une rente viagère, assurer à ses héritiers un capital payable à la fin de l'année de sa mort. Pour déterminer la valeur de cette rente, on peut imaginer que la personne emprunte en viager, à une caisse d'assurance, ce capital divisé par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et qu'elle le place à intérêt perpétuel à la même caisse. Il est clair que ce capital sera dû par la caisse à ses héritiers à la fin de l'année de sa mort; mais elle n'aura payé chaque année que l'excès de l'intérêt viager sur l'intérêt perpétuel; la Table des rentes viagères fait donc connaître ce que la personne doit payer annuellement à la caisse pour assurer ce capital après sa mort.

Les assurances maritimes se calculent par les mêmes principes. Un négociant a des vaisseaux en mer; il veut assurer leur valeur et celle de leur cargaison contre les dangers qu'ils peuvent courir; pour cela, il donne une somme à une compagnie qui lui répond de la valeur estimée de ses cargaisons et de ses vaisseaux. Le rapport de cette valeur à la somme qui doit être donnée pour prix de l'assurance dépend des dangers auxquels les vaisseaux sont exposés, et ne peut être apprécié que par des observations nombreuses sur le sort des vaisseaux partis du port pour la même destination. Mais ces établissements et tous ceux du même genre, tels que les assurances contre les incendies et les orages, ne peuvent réussir qu'autant qu'ils ont un avantage propre à subvenir aux dépenses qu'ils entraînent. Il faut de plus qu'ils aient des relations très nombreuses, afin que cet avantage en se développant produise un bénéfice certain et fasse coïncider leur espérance mathématique et morale.

Il me reste à vous parler des milieux qu'il faut choisir entre les résultats des observations et de la probabilité des décisions des assemblées.

Quand on veut corriger par l'ensemble d'un grand nombre d'observations un ou plusieurs éléments déjà connus à fort peu près, on forme de la manière suivante des équations que l'on nomme *équations de condition*.

L'expression analytique de chaque observation étant une fonction des éléments, on y substitue la valeur approchée de chacun d'eux, plus sa correction; en développant ensuite l'expression en série et en négligeant, à cause de leur petitesse, les carrés et les produits des corrections, on égale la série à l'observation qu'elle représente; on a ainsi une équation de condition entre les corrections des éléments. Chaque observation fournit une équation de condition semblable. Si les observations étaient exactes, il suffirait d'en avoir un nombre égal à celui des éléments; mais, vu les erreurs dont elles sont toujours susceptibles, on en considère un grand nombre, afin que les erreurs se compensent à fort peu près dans les résultats moyens. L'observateur doit choisir les circonstances les plus favorables à la détermination des éléments; l'art du calculateur consiste à combiner de la manière la plus avantageuse les équations de condition, fournies par les observations, pour les réduire à un nombre égal à celui des éléments. Toutes les combinaisons que l'on peut faire reviennent à multiplier respectivement chaque équation par un facteur particulier et à faire une somme de tous ces produits; ce qui donne une première équation finale relative au système des facteurs employés. Un second système de facteurs donnera une seconde équation finale, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait autant d'équations finales qu'il y a d'éléments. Il est visible que l'on aura les corrections les plus précises si l'on choisit les systèmes de facteurs tels que l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur chaque élément soit un minimum; par *erreur moyenne* on doit entendre la somme des produits de chaque erreur à craindre par sa probabilité. La recherche de ce minimum, l'une des plus utiles de la théorie des probabilités, exige des artifices singuliers d'analyse.

Nous nous bornerons à dire ici que l'on est conduit à ce résultat remarquable, savoir, que la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition consiste à rendre minimum la somme des carrés des erreurs des observations; ce qui fournit autant d'équations finales qu'il y a de corrections à déterminer.

La probabilité des décisions d'une assemblée dépend de la pluralité des voix, des lumières et de l'impartialité des membres qui la composent. Tant de passions et d'intérêts particuliers y mêlent souvent leur influence, qu'il est impossible de soumettre cette probabilité au Calcul. Voici cependant un résultat général auquel on est conduit par l'Analyse. Si l'assemblée est très peu éclairée sur l'objet soumis à sa décision, si cet objet exige des considérations délicates et à la portée du plus petit nombre, ou si la vérité sur ce point est contraire à des préjugés reçus, en sorte qu'il y ait plus d'un contre un à parier que chaque votant s'en écartera, il sera probable que la raison sera du côté de la minorité; et plus l'assemblée sera nombreuse, plus il y aura lieu de craindre que la décision de la majorité soit mauvaise. Ce sera le contraire si l'assemblée est composée d'hommes instruits. Concevez, par exemple, cent personnes rassemblées indistinctement, et proposez-leur de statuer sur cette question : *Le Soleil tourne-t-il, chaque jour, autour de la Terre?* Il y a tout lieu de croire que la décision de la majorité sera pour l'affirmative, et cela deviendra plus probable encore si, au lieu de cent personnes, vous en supposez mille ou dix mille réunies. De là vous pouvez tirer cette conséquence, dictée par le simple bon sens : c'est qu'il importe extrêmement à la chose publique que l'instruction soit fort répandue et que la représentation nationale soit l'élite des hommes justes et éclairés. *Vérité, justice, humanité*, voilà les lois éternelles de l'ordre social qui doit reposer uniquement sur les vrais rapports de l'homme avec ses semblables et avec la nature; elles sont aussi nécessaires à son maintien que la gravitation universelle à l'existence de l'ordre physique; la plus dangereuse des erreurs est de croire que l'on peut quelquefois s'en écarter et tromper ou asservir les hommes pour leur propre bonheur; de fatales expériences ont prouvé, dans tous les temps, que ces lois sacrées ne sont jamais impunément enfreintes.

Il est souvent difficile de connaître et même de définir le vœu d'une assemblée, au milieu de la variété des opinions de ses membres. Essayons de donner sur cela quelques règles, et considérons les deux cas les plus ordinaires, l'élection entre plusieurs candidats et celle entre plusieurs propositions relatives au même objet.

Lorsqu'une assemblée doit choisir entre divers candidats qui se présentent pour une ou plusieurs places du même genre, ce qui paraît le plus simple consiste à faire écrire à chaque votant, sur un billet, les noms de tous les candidats dans l'ordre du mérite qu'il leur attribue. En supposant qu'il les classe de bonne foi, l'inspection de ces billets fera connaître les résultats des élections, de quelque manière que les candidats soient comparés entre eux, en sorte que de nouvelles élections ne peuvent apprendre rien de plus à cet égard. Il s'agit présentement d'en conclure l'ordre de préférence qu'ils établissent entre les candidats. Imaginons que l'on donne à chaque électeur une urne qui contienne une infinité de boules au moyen desquelles il puisse nuancer tous les degrés de mérite des candidats; concevons encore qu'il tire de son urne un nombre de boules proportionnel au mérite de chaque candidat, et supposons ce nombre écrit sur son billet à côté du nom du candidat. Il est clair qu'en faisant une somme de tous les nombres relatifs à chaque candidat, sur chaque billet, celui de tous les candidats qui aura la plus grande somme sera le candidat que l'assemblée préfère, et qu'en général l'ordre de préférence des candidats sera celui des sommes relatives à chacun d'eux. Mais les billets ne marquent point le nombre de boules que chaque électeur donne aux candidats; ils indiquent seulement que le premier en a plus que le second, le second plus que le troisième, et ainsi de suite. En supposant donc au premier, sur un billet donné, un nombre quelconque de boules, toutes les combinaisons des nombres inférieurs, qui remplissent les conditions précédentes, sont également admissibles, et l'on aura le nombre de boules relatif à chaque candidat, en faisant une somme de tous les

nombres que lui donne chaque combinaison et en la divisant par le nombre entier des combinaisons. Si ces nombres sont très considérables, comme on doit le supposer pour qu'ils puissent exprimer toutes les nuances de mérite, une analyse fort simple fait voir que les nombres qu'il faut écrire sur chaque billet à côté du premier nom, du second nom, sont entre eux comme les suivants : 1° le nombre des candidats; 2° ce nombre diminué d'une unité; 3° ce nombre diminué de deux unités, etc. Il suffit donc d'écrire sur chaque billet ces derniers nombres et d'ajouter les nombres relatifs à chaque candidat sur tous les billets; ces diverses sommes indiqueront, par leur grandeur, l'ordre de préférence qui doit être établi entre les candidats. On simplifiera le calcul en écrivant sur chaque billet, zéro, à côté du dernier candidat et les nombres 1, 2, 3, ... respectivement à côté des candidats supérieurs. Tel est le mode d'élection qu'indique la théorie des probabilités. Il serait sans doute le meilleur, si chaque électeur inscrivait sur sa liste les noms des candidats suivant l'ordre de mérite qu'il leur suppose : mais les passions, les intérêts particuliers et beaucoup de considérations étrangères au mérite doivent souvent troubler cet ordre et faire placer au dernier rang le concurrent le plus à redouter pour celui que l'on préfère; ce qui, en donnant un grand avantage aux concurrents d'un mérite médiocre, rend ce mode d'élection inférieur à ceux que l'on emploie communément.

Le choix entre plusieurs propositions relatives au même objet semble devoir être assujetti aux mêmes règles que l'élection entre plusieurs candidats; cependant il existe entre ces deux cas cette différence essentielle, que le mérite d'un candidat n'exclut point celui de ses concurrents; au lieu que, si les propositions entre lesquelles il faut choisir sont contraires, la vérité de l'une exclut la vérité des autres. Voici comment on peut alors envisager la question.

Donnons encore à chaque votant une urne qui renferme un très grand nombre de boules, et concevons qu'il les distribue sur chaque proposition en raison de la probabilité qu'il lui suppose. Il est clair que le nombre total des boules exprimant la certitude, et le votant étant, par l'hypothèse, assuré que l'une des propositions est vraie, il doit répartir le nombre des boules de l'urne sur ces diverses propositions; le problème se réduit donc à déterminer les comparaisons dans lesquelles toutes les boules sont réparties sur les propositions, de manière qu'il y ait plus sur la première que sur la seconde, plus sur la seconde que sur la troisième, ...; à faire les sommes de tous les nombres de boules, relatifs à chaque proposition dans ces diverses combinaisons et à diviser ces sommes par le nombre des combinaisons; les quotients seront les nombres de boules que l'on doit attribuer aux propositions sur un billet quelconque. On trouve ainsi, par l'analyse, que ces quotients, en partant de la dernière proposition pour remonter à la première, sont entre eux comme les quantités suivantes : 1° l'unité divisée par le nombre des propositions; 2° l'unité divisée par le nombre des propositions, plus l'unité divisée par ce nombre diminué d'un; 3° l'unité divisée par le nombre des propositions, plus l'unité divisée par ce nombre diminué d'un; plus, l'unité divisée par le même nombre diminuée de deux, et ainsi du reste; on écrira donc ces quantités sur chaque billet, à côté des propositions correspondantes et, en ajoutant les quantités relatives à chaque proposition sur les divers billets, les sommes indiqueront par leur grandeur l'ordre de préférence que l'assemblée donne à ces propositions.

Je viens de parcourir la plupart des objets auxquels on a jusqu'à présent appliqué le calcul des probabilités. On peut, en tenant compte de tous les résultats de l'observation et de l'expérience, étendre ces applications et perfectionner ainsi l'économie politique. Les questions que cette science présente sont si compliquées; elles tiennent à tant d'éléments inappréciables ou inconnus, qu'il est impossible de les résoudre *a priori*. On ne peut avoir à leur égard que des aperçus, et le calcul, dans les matières qui en sont susceptibles, nous montre combien ils sont trompeurs. Traitons l'économie, comme on a traité la physique, par la voie de l'expérience et de l'analyse. Considérez, d'un côté, le grand nombre de vérités que cette méthode a fait découvrir sur la nature et, de l'autre, la foule des erreurs que la manie des systèmes a

produites; vous sentirez alors la nécessité de consulter en tout l'expérience. C'est un guide lent, mais toujours sûr; en l'abandonnant, on s'expose aux plus dangereux écarts.

Si l'on considère les méthodes analytiques auxquelles la théorie des probabilités a déjà donné naissance et celles qu'elle peut faire naître encore, la justesse des principes qui lui servent de base, la logique rigoureuse qu'exige leur emploi dans la solution des problèmes, le grand nombre et l'importance des objets qu'elle embrasse, les établissements d'utilité publique qui s'appuient sur elle; si l'on observe ensuite que, dans les choses mêmes qui ne peuvent être soumises au calcul, cette théorie donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements et qu'elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent, on verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations et dont les résultats soient plus utiles. Elle doit la naissance à deux géomètres français du XVII^e siècle, si fécond en grands hommes et en grandes découvertes, et peut-être celui de tous les siècles qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain. Pascal et Fermat se proposèrent et résolurent quelques problèmes sur les probabilités. Huygens réunit ces solutions et les étendit dans un petit Traité sur cette matière, qui ensuite a été considérée d'une manière plus générale par les Bernoulli, Montmort, Moivre et par plusieurs géomètres célèbres de ces derniers temps.

MÉMOIRE

SUR

DIVERS POINTS D'ANALYSE.

Journal de l'École Polytechnique, XV^e Cahier, Tome VIII; 1809.

I.

Sur le calcul des fonctions génératrices.

L'objet de ce calcul est de ramener au simple développement des fonctions toutes les opérations relatives aux différences, et spécialement l'intégration des équations aux différences ordinaires ou partielles : en voici l'idée principale. Soit u une fonction quelconque de t, et supposons qu'en la développant par rapport aux puissances de t, on ait

$$u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x + \ldots + y_\infty t^\infty;$$

u est ce que l'on nomme *fonction génératrice* de y_x ou du coefficient de t^x dans son développement. Il est visible que $y_{x+1} - y_x$, ou Δy_x, sera le coefficient de t^x dans le développement de $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)$; en sorte que, pour avoir la fonction génératrice de la différence finie d'une variable, il suffit de multiplier par $\frac{1}{t} - 1$ la fonction génératrice de cette variable; $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2$ sera donc la fonction génératrice de $\Delta^2 y_x$, et, généralement, la fonction génératrice de $\Delta^n y_x$ sera $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$. Maintenant on a

$$u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n = u\left[\frac{1}{t^n} - \frac{n}{t^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2\,t^{n-2}} - \ldots\right];$$

le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^n}$ est évidemment y_{x+n}, celui de t^x dans $\frac{u}{t^{n-1}}$ est y_{x+n-1}, et ainsi de suite; en égalant donc les coefficients de t^x dans les deux membres de l'équation précédente, c'est-à-dire en repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients, on aura

$$\Delta^n y_x = y_{x+n} - n y_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{x+n-2} - \ldots.$$

Si, au lieu de multiplier la fonction u par $\frac{1}{t} - 1$, on la multipliait par toute autre quantité, on aurait des résultats analogues. Soit, par exemple, $a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots$ ce nouveau multiplicateur; le coefficient de t^x dans le développement de la fonction

$$u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots\right)$$

sera $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots$; soit ∇y_x ce coefficient, et désignons par $\nabla^2 y_x$ la quantité $a\nabla y_x + b\nabla y_{x+1} + c\nabla y_{x+2} + \ldots$, par $\nabla^3 y_x$ la quantité $a\nabla^2 y_x + b\nabla^2 y_{x+1} + \ldots$, et ainsi de suite; la fonction génératrice de $\nabla^n y_x$ sera

$$u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots\right)^n;$$

et, en développant $\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots\right)^n$ en série, on aura une équation de cette forme :

$$u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots\right)^n = u\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \ldots\right).$$

Cette équation donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\nabla^n y_x = Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} + \ldots.$$

Je renvoie, pour le développement de ce calcul des fonctions génératrices, aux *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1779 (¹). Je me bornerai ici à présenter quelques nouveaux théorèmes qui en résultent.

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 1.

Soit u une fonction de t, et supposons que y_x soit le coefficient de t^x dans son développement; soit pareillement u' une fonction de t', et désignons par y'_x le coefficient de t'^x dans son développement; soit encore u'' une fonction de t'', et désignons par y''_x le coefficient de t''^x dans son développement, et ainsi de suite. Il est clair que $y_x y'_x y''_x \ldots$ sera le coefficient de $t^x t'^x t''^x \ldots$, dans le développement de $uu'u''\ldots$; $\frac{uu'u''\ldots}{tt't''\ldots}$ sera la fonction génératrice de $y_{x+1} y'_{x+1} y''_{x+1} \ldots$; celle de $\Delta(y_x y'_x y''_x \ldots)$ sera donc

$$uu'u''\ldots\left(\frac{1}{tt't''\ldots} - 1\right),$$

et, par conséquent, la fonction génératrice de $\Delta^n(y_x y'_x y''_x \ldots)$ sera

$$uu'u''\ldots\left(\frac{1}{tt't''\ldots} - 1\right)^n;$$

en changeant n dans $-n$, on aura, par les principes exposés dans les *Mémoires* cités de l'Académie des Sciences, la fonction génératrice de $\Sigma^n(y_x y'_x y''_x \ldots)$, Σ étant la caractéristique des intégrales finies; en sorte que l'on peut changer n en $-n$ dans la fonction génératrice, pourvu que l'on change Δ^n en Σ^n dans son coefficient.

Considérons deux fonctions y_x et y'_x; la fonction génératrice de $\Delta^n y_x y'_x$ sera

$$uu'\left(\frac{1}{tt'} - 1\right)^n.$$

On peut la mettre sous cette forme :

$$uu'\left[\frac{1}{t} - 1 + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)\right]^n.$$

En la développant, elle devient

$$uu'\left[\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{n}{t}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{1.2\,t^2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^2 + \ldots\right].$$

Les fonctions

$$uu'\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n, \quad \frac{uu'}{t}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'} - 1\right), \quad \frac{uu'}{t^2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^2, \quad \ldots$$

sont respectivement génératrices des variables

$$y'_x \Delta^n y_x, \quad \Delta y'_x \Delta^{n-1} y_{x+1}, \quad \Delta^2 y'_x \Delta^{n-2} y_{x+2}, \quad \ldots;$$

l'équation identique

$$uu'\left(\frac{1}{tt'} - 1\right)^n = uu'\left[\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{n}{t}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'} - 1\right) + \ldots\right]$$

donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\Delta^n y_x y'_x = y'_x \Delta^n y_x + n \Delta y'_x \Delta^{n-1} y_{x+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y'_x \Delta^{n-2} y_{x+2} + \ldots;$$

en changeant n dans $-n$, on aura

$$\Sigma^n y_x y'_x = y'_x \Sigma^n y_x - n \Delta y'_x \Sigma^{n+1} y_{x+1} + \frac{n(n+1)}{1.2} \Delta^2 y'_x \Sigma^{n+2} y_{x+2} + \ldots.$$

Au lieu du multiplicateur $\frac{1}{tt'} - 1$, considérons généralement le multiplicateur

$$a + \frac{bz}{tt'} + \frac{cz^2}{t^2 t'^2} + \ldots,$$

et désignons par $\nabla y_x y'_x$ la fonction

$$a y_x y'_x + bz y_{x+1} y'_{x+1} + cz^2 y_{x+2} y'_{x+2} + \ldots;$$

$uu'\left(a + \frac{bz}{tt'} + \frac{cz^2}{t^2 t'^2} + \ldots\right)^n$ sera la fonction génératrice de $\nabla^n y_x y'_x$; désignons par $\varphi^n\left(\frac{z}{tt'}\right)$ la fonction

$$\left(a + \frac{bz}{tt'} + \frac{cz^2}{t^2 t'^2} + \ldots\right)^n;$$

nous aurons

$$\begin{aligned} uu'\varphi^n\left(\frac{z}{tt'}\right) &= uu'\varphi^n\left[\frac{z}{t} + \frac{z}{t}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)\right] \\ &= uu'\left[\varphi^n\left(\frac{z}{t}\right) + \frac{z}{t}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)\frac{\partial \varphi^n\left(\frac{z}{t}\right)}{\partial z}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{z^2}{t^2}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi^n\left(\frac{z}{t}\right)}{1.2\,\partial z^2} + \ldots\right]; \end{aligned}$$

or, $uu'\varphi^n\left(\frac{z}{t}\right)$ est la fonction génératrice de $y'_x\nabla^n y_x$;

$$\frac{z}{t}\left(\frac{1}{t'}-1\right)\frac{d\varphi^n\left(\frac{1}{t}\right)}{dz}$$

est la fonction génératrice de $z\Delta y'_x\frac{d\nabla^n y_{x+1}}{dz}$, et ainsi de suite; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\nabla^n(y_x y'_x) = y'_x\nabla^n y_x + z\Delta y'_x\frac{d\nabla^n y_{x+1}}{dz} + z^2\Delta^2 y'_x\frac{d^2\nabla^n y_{x+2}}{1.2\,dz^2} + \ldots.$$

On a également

$$uu'u''\ldots\left(\frac{1}{tt't''\ldots}-1\right)^n$$
$$= uu'u''\ldots\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)\ldots-1\right]^n;$$

en repassant donc des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$\Delta^n(y_x y'_x y''_x\ldots) = [(1+\Delta)(1+\Delta')(1+\Delta'')\ldots-1]^n,$$

pourvu que, dans chaque terme du développement du second membre de cette équation, on place immédiatement après la puissance de chaque caractéristique la variable correspondante, et qu'ensuite on multiplie ce terme par le produit des variables dont il ne renferme point la caractéristique : ainsi, dans le cas de trois variables, on écrira, au lieu de Δ^r, $y'_x y''_x\Delta^r y_x$; au lieu de $\Delta^r\Delta'^{r'}$, on écrira $y''_x\Delta^r y_x\Delta'^{r'} y'_x$; et au lieu de $\Delta^r\Delta'^{r'}\Delta''^{r''}$, on écrira $\Delta^r y_x\Delta'^{r'} y'_x\Delta''^{r''} y''_x$; et ainsi du reste.

Dans le cas des différences infiniment petites, les caractéristiques Δ, Δ', Δ'', ... se changent en d, d', d'', ...; et l'équation précédente donne, en négligeant les différences supérieures, relativement aux inférieures,

$$d^n y_x y'_x y''_x\ldots = (d+d'+d''+\ldots)^n;$$

ainsi, dans le cas de deux variables, on a

$$d^n y_x y'_x = d^n + n\,d^{n-1}d' + \frac{n(n-1)}{1.2}d^{n-2}d'^2 + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$d^n y_x y'_x = y'_x d^n y_x + n\,dy'_x d^{n-1}y_x + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2 y'_x d^{n-2}y_x + \ldots;$$

en faisant n négatif, d^n se change en $\int^n$, et l'on a

$$\int^n y_x y'_x\,dx^n = y'_x\int^n y_x\,dx^n + n\frac{dy'_x}{dx}\int^{n+1} y_x\,dx^{n+1}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2y'_x}{dx^2}\int^{n+2} y_x\,dx^{n+2} + \ldots.$$

On a encore

$$uu'u''\ldots\left(\frac{1}{t^i t'^i t''^i\ldots}-1\right)^n = uu'u''\ldots\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^i\ldots-1\right]^n;$$

en désignant donc par ${}'\Delta^n(y_x y'_x y''_x\ldots)$ la différence finie du produit $y_x y'_x y''_x\ldots$ lorsque x varie de i, l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\text{(a)}\qquad {}'\Delta^n(y_x y'_x y''_x\ldots) = [(1+\Delta)^i(1+\Delta')^i(1+\Delta'')^i\ldots-1]^n,$$

en observant les conditions prescrites ci-dessus, relativement aux caractéristiques Δ, Δ', ... et à leurs puissances. Supposons $x = \frac{x'}{dx'}$, $i = \frac{\alpha}{dx'}$; y_x, y'_x, ... deviendront des fonctions de x', que nous désignerons par $y_{x'}$, $y'_{x'}$, ...; x variant de l'unité dans y_x, x' ne variera que de dx' dans $\Delta y_{x'}$; ainsi la caractéristique Δ se changera dans la caractéristique différentielle d; mais dans ${}'\Delta y_{x'}$, x variant de i ou de $\frac{\alpha}{dx'}$, x' variera de la quantité finie α; maintenant on a

$$(1+d)^i = (1+d)^{\frac{\alpha}{dx'}};$$

le logarithme hyperbolique de ce second membre est $\frac{\alpha d}{dx'}$, ce qui donne, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$(1+d)^{\frac{\alpha}{dx'}} = e^{\frac{\alpha d}{dx'}},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; l'équation (a) donnera donc

$$'\Delta^n(y_{x'}y'_{x'}y''_{x'}\ldots) = (e^{\alpha dy_{x'}+\alpha dy'_{x'}+\alpha dy''_{x'}+\cdots} - 1)^n,$$

pourvu que, dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique d les exposants des puissances de $dy_{x'}$, $dy'_{x'}$, ...

Si, dans l'équation (a), on suppose i infiniment petit et égal à dx, x croîtra de dx dans $'\Delta y_x$; alors $'\Delta$ se changera dans la caractéristique différentielle d; de plus, on a $(1+\Delta)^{dx} = 1 + dx \log(1+\Delta)$; l'équation (a) deviendra donc

$$\frac{d^n y_x y'_x y''_x \cdots}{dx^n} = [\log(1+\Delta)(1+\Delta')(1+\Delta'')\ldots]^n,$$

en observant toujours les conditions prescrites ci-dessus, relativement aux caractéristiques Δ, Δ', ... On peut supposer dans toutes ces équations n négatif, pourvu que les caractéristiques différentielles correspondant aux exposants négatifs soient changées en caractéristiques intégrales.

Sur les intégrales définies des équations à différences partielles.

J'ai donné, dans les *Mémoires* déjà cités de l'Académie des Sciences de l'année 1779 (¹), une méthode pour intégrer dans un grand nombre de cas les équations linéaires aux différences partielles finies ou infiniment petites, au moyen d'intégrales définies, lorsque l'intégration n'est pas possible en termes finis. Plusieurs géomètres se sont occupés depuis du même objet, mais sans s'assujettir à la condition que l'expression en intégrales définies devienne l'intégrale en termes finis, lorsqu'elle est possible. Cette condition est ce qui rend utile ce genre d'intégrales, et il en résulte qu'elles ont souvent les mêmes avantages que les intégrales finies, comme je l'ai fait voir dans les *Mémoires*

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 54 et suiv.

cités, relativement à la propagation du son dans un plan, et comme M. Poisson l'a remarqué ensuite dans la solution du problème de la *Chaîne vibrante*.

Parmi les équations que j'ai considérées, est l'équation aux différences partielles du second ordre, à coefficients constants; mais elle offre un cas particulier qui ne se trouve point compris dans la solution générale, et qui, donnant lieu à plusieurs remarques intéressantes sur la nature des intégrales des équations aux différences partielles, m'a paru mériter l'attention des Géomètres.

Soit

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + c\frac{\partial z}{\partial x} + h\frac{\partial z}{\partial y} + lz,$$

a, b, c, h et l étant des coefficients constants; si l'on fait

$$s = y + fx,$$
$$s' = y + f'x;$$

l'équation proposée devient

$$\text{(b)}\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & (f^2 + af + b)\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \\ & + [2ff' + a(f+f') + 2b]\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial s'} + (f'^2 + af' + b)\frac{\partial^2 z}{\partial s'^2} \\ & + (cf+h)\frac{\partial z}{\partial s} + (cf'+h)\frac{\partial z}{\partial s'} + lz; \end{aligned}\right.$$

on fera disparaître les différences partielles $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial s'^2}$, si l'on prend pour f et f' les deux racines de l'équation

$$0 = u^2 + au + b;$$

alors on a $f + f' = -a$ et $ff' = b$; l'équation précédente devient ainsi

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial s'} + \frac{cf+h}{4b-a^2}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{cf'+h}{4b-a^2}\frac{\partial z}{\partial s'} + \frac{lz}{4b-a^2}.$$

Il résulte des *Mémoires* cités (¹) que, si l'on intègre l'équation dif-

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 61.

férentielle de second ordre,

$$o = \frac{(4b-a^2)l - bc^2 + ahc - h^2}{(4b-a^2)^2}\mu + \frac{d\mu}{d\theta} + \theta\frac{d^2\mu}{d\theta^2};$$

de manière que l'on ait $\mu = 1$,

$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{bc^2 - ahc + h^2 - (4b-a^2)l}{(4b-a^2)^2},$$

lorsque θ est nul, et si l'on désigne par $r = \Gamma(\theta)$ cette intégrale, on a

$$z = e^{\frac{(ac-2h)y + (ah-2bc)x}{4b-a^2}}\Big\{\int dt\, \Gamma[(y+f'x)(y+fx-t)]\,\varphi(t) + \int dt\,\Gamma[(y+fx)(y+f'x-t)]\,\psi(t)\Big\},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont deux fonctions arbitraires de t : la première intégrale doit être prise depuis $t = o$ jusqu'à $t = y + fx$, et la seconde, depuis $t = o$ jusqu'à $t = y + f'x$.

Si l'on a

$$(4b-a^2)l - bc^2 + ach + h^2 = o;$$

alors $\Gamma(\theta)$ se réduit à l'unité, et l'on a

$$z = e^{(ac-2h)y + (ah-2bc)x}[\varphi_{,}(y+fx) + \psi_{,}(y+f'x)],$$

en désignant par $\varphi_{,}(t)$ et $\psi_{,}(t)$ les intégrales $\int dt\,\varphi(t)$ et $\int dt\,\psi(t)$; on aura donc alors, sous forme finie d'intégrales indéfinies, l'expression de z; mais c'est le seul cas dans lequel cela est possible : dans tous les autres cas l'intégrale n'est possible, en termes finis, qu'au moyen d'intégrales définies.

L'analyse précédente suppose que les deux racines f et f' de l'équation $o = u^2 + au + b$ sont inégales. Si elles sont égales, alors s est égal à s', et la transformation précédente des variables x et y, dans s et s', ne peut avoir lieu. Dans ce cas, supposons f nul dans l'équation (b), et f' la racine de l'équation $o = u^2 + au + b$. La condition de l'égalité des racines de cette équation donne $a^2 = 4b$, $f' = -\frac{1}{2}a$;

l'équation (b) devient ainsi

$$o = b\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + (cf'+h)\frac{\partial z}{\partial s'} + h\frac{\partial z}{\partial s} + lz.$$

Si l'on fait ensuite

$$z = ue^{\frac{-hs}{2b} - \frac{(4bl-h^2)x'}{4b^2(cf'+h)}}, \qquad s' = \left(\frac{cf'+h}{b}\right)x',$$

on aura cette équation très simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial u}{\partial x'}.$$

J'ai fait voir, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1773, page 360 (¹), que son intégrale est impossible en termes finis, au moyen d'intégrales indéfinies, et que l'expression de u ne peut être donnée par une série ascendante d'intégrales indéfinies d'une fonction arbitraire. On a observé depuis qu'elle pouvait l'être par une série ascendante de différences de ce genre de fonctions; et ce qui est digne de remarque, M. Poisson a fait voir que l'expression de u ne dépend que d'une seule fonction arbitraire, quoique l'équation soit aux différences partielles du second ordre.

Dans les questions délicates de l'Analyse infinitésimale, il est très utile de considérer les choses relativement aux différences finies, et de voir les modifications qu'elles subissent dans le passage du fini à l'infiniment petit. C'est ainsi que j'ai fait voir, dans les *Mémoires* cités de l'Académie des Sciences pour l'année 1779 (²), la nécessité d'introduire les fonctions discontinues, dans les intégrales des équations à différences partielles, et les conditions auxquelles ces fonctions doivent être assujetties. Je vais employer le même moyen pour déterminer le nombre des fonctions arbitraires que doit renfermer l'intégrale de l'équation précédente.

Soit u une fonction des deux quantités t et t', et concevons qu'en la

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. IX, p. 26.
(²) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 80 et suiv.

développant dans une série ordonnée par rapport aux puissances de t et de t', $y_{x,x'}$ soit le coefficient de $t^x t^{x'}$ dans cette série; u sera la fonction génératrice de $y_{x,x'}$; $u\left[\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-\left(\frac{1}{t'}-1\right)\right]$ sera la fonction génératrice de $\Delta^2 y_{x,x'}-\Delta' y_{x,x'}$, la caractéristique Δ étant relative à la variable x, et la caractéristique Δ' à la variable x'. Soit

$$\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-\left(\frac{1}{t'}-1\right)=z;$$

on aura

$$\frac{1}{t'}=1+\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-z,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{u}{t'^{x'}}&=u\left[1+\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-z\right]^{x'}\\&=u\left\{1+x'\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+\frac{x'(x'-1)}{1.2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^4+\ldots\right.\\&\qquad\left.-x'z\left[1+(x'-1)\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+\ldots\right]+\ldots\right\},\end{aligned}$$

si l'on a

$$\Delta^2 y_{x,x'}=\Delta' y_{x,x'},$$

l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x,x'}=y_{x,0}+x'\Delta^2 y_{x,0}+\frac{x'(x'-1)}{1.2}\Delta^4 y_{x,0}+\ldots;$$

ainsi l'expression de $y_{x,x'}$ ne dépend que de la seule fonction arbitraire $y_{x,0}$; en sorte que, si l'on a toutes les valeurs de $y_{x,0}$ pour toutes les valeurs positives et négatives de x, on aura celles de $y_{x,x'}$ relatives à toutes les valeurs de x et x'. Les intégrations des équations aux différences finies ne sont, à proprement parler, que des éliminations des variables données par une suite d'équations formées suivant une même loi. L'équation précédente aux différences partielles donne

$$y_{x,x'+1}=y_{x,x'}+\Delta^2 y_{x,x'},$$

en faisant $x'=0$, on aura d'abord

$$y_{x,1}=y_{x,0}+\Delta^2 y_{x,0},$$

en faisant ensuite $x'=1$, on aura

$$y_{x,2}=y_{x,1}+\Delta^2 y_{x,1},$$

et substituant pour $y_{x,1}$ sa valeur en $y_{x,0}$ donnée par l'équation précédente, on aura

$$y_{x,2}=y_{x,0}+2\Delta^2 y_{x,0}+\Delta^4 y_{x,0},$$

et en continuant ainsi, on parviendra à l'expression générale précédente de $y_{x,x'}$ en $y_{x,0}$. On voit par là que le calcul intégral aux différences finies n'est au fond qu'un calcul d'élimination, ce que l'on peut étendre au calcul intégral des différences infiniment petites, en observant dans les éliminations successives, de rejeter les infiniment petits d'un ordre supérieur à celui que l'on conserve.

L'équation aux différences finies,

$$\Delta^2 y_{x,x'}=\Delta' y_{x,x'},$$

se change dans une équation aux différences infiniment petites, en y substituant $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial x'}$, au lieu des caractéristiques Δ et Δ' (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1779) (¹), et en y changeant $y'_{x,x'}$ en y, on a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial y}{\partial x'}.$$

Pour avoir ce que devient alors l'expression précédente de $y_{x,x'}$, il faut, comme on l'a vu dans les *Mémoires* cités, faire x', $x'-1$, ... égaux entre eux et à l'infini; ce qui donne, en désignant $y_{x,0}$ par $\varphi(x)$,

$$y=\varphi(x)+x'\frac{d^2\varphi(x)}{dx}+\frac{x'^2}{1.2}\frac{d^4\varphi(x)}{dx}+\ldots.$$

Il est d'ailleurs facile de s'assurer par la différentiation, que cette valeur satisfait à l'équation proposée aux différences partielles; mais l'analyse précédente montre avec évidence que l'intégrale complète de cette équation ne dépend que d'une seule fonction arbitraire.

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 35.

Pour avoir, sous forme finie, cette expression, au moyen d'intégrales définies, nous observerons que $\int dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi}$, l'intégrale étant prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$; π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. Nous observerons ensuite que dans ces limites on a

$$\int z^{2r-1}\, dz e^{-z^2} = 0,$$
$$\int z^{2r}\, dz e^{-z^2} = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2^r}\sqrt{\pi};$$

l'expression précédente de y peut donc être mise sous cette forme finie,

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dz e^{-z^2} \varphi(x + 2z\sqrt{x'}),$$

car il est visible qu'en développant en série, par rapport aux puissances de z, la fonction $\varphi(x + 2z\sqrt{x'})$, et en intégrant, on aura l'expression précédente de y; cette intégrale satisfait ainsi à la condition de représenter exactement la série des différences, comme celles que j'ai données dans les *Mémoires* cités représentent les séries des intégrales indéfinies. Il est facile d'ailleurs de s'assurer par la différentiation, que l'équation

$$y = \int dz e^{-z^2} \varphi(x + 2z\sqrt{x'})$$

satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial x'},$$

car on a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \int dz e^{-z^2} \varphi''(x + 2z\sqrt{x'}),$$

$\varphi'(x)$ étant égal à $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ et $\varphi''(x)$ à $\frac{d\varphi'(x)}{dx}$, on a ensuite

$$\frac{\partial y}{\partial x'} = \int \frac{z\, dz}{\sqrt{x'}} e^{-z^2} \varphi'(x + 2z\sqrt{x'});$$

or, en intégrant par partie, on a

$$\frac{\partial y}{\partial x'} = -\frac{1}{2\sqrt{x'}} e^{-z^2} \varphi'(x + 2z\sqrt{x'}) + \int dz e^{-z^2} \varphi''(x + 2z\sqrt{x'}),$$

l'intégrale étant prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$, $e^{-z^2}\varphi'(x + 2z\sqrt{x'})$ est nul à ces limites; car nous supposons la fonction $\varphi'(x + 2z\sqrt{x'})$ telle que son produit par e^{-z^2} reste nul lorsque z est infini; on a donc alors

$$\frac{\partial y}{\partial x'} = \int dz e^{-z^2} \varphi''(x + 2z\sqrt{x'}) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

L'expression précédente de y, au moyen d'une intégrale définie, est complète, quoiqu'elle ne renferme qu'une seule fonction arbitraire; cependant, en développant y par rapport aux puissances de x, on trouve que l'on satisfait à l'équation proposée aux différences partielles, en faisant

$$\begin{aligned} y = {} & \varphi(x') + \frac{x^2}{1.2}\frac{d\varphi(x')}{dx'} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{d^2\varphi(x')}{dx'^2} + \ldots \\ & + x\psi(x') + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d\psi(x')}{dx'^2} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\frac{d^2\psi(x')}{dx'^2} + \ldots; \end{aligned}$$

$\varphi(x')$ et $\psi(x')$ étant deux fonctions arbitraires de x'. Cette expression parait donc, au premier coup d'œil, plus générale que la précédente, qui ne renferme qu'une seule fonction arbitraire; mais nous allons faire voir qu'elle en dérive.

Supposons que $\Gamma(x + 2z\sqrt{x'})$ soit une fonction arbitraire qui ne renferme que des puissances paires de $x + 2z\sqrt{x'}$, on satisfera par ce qui précède, à l'équation proposée aux différences partielles, en faisant

$$y = \int dz e^{-z^2} \Gamma(x + 2z\sqrt{x'}).$$

En développant cette expression de y par rapport aux puissances de x, on aura

$$y = \int dz e^{-z^2} \left[\Gamma(2z\sqrt{x'}) + x\Gamma'(2z\sqrt{x'}) + \frac{x^2}{1.2}\Gamma''(2z\sqrt{x'}) + \ldots\right],$$

$\Gamma(2z\sqrt{x'})$ ne renfermant que des puissances paires de $2z\sqrt{x'}$, $\Gamma'(2z\sqrt{x'})$ ne renfermera que des puissances impaires de la même quantité; en sorte que l'on aura

$$\Gamma'(-2z\sqrt{x'}) = -\Gamma'(2z\sqrt{x'}),$$

et, par conséquent, $\int dz\, e^{-z^2}\Gamma'(2z\sqrt{x'})$ est nul dans les limites $z=-\infty$ et $z=\infty$. De plus, on a

$$\int dz\, e^{-z^2}\Gamma^{(2r)}(2z\sqrt{x'}) = \frac{e^{-z^2}}{2\sqrt{x'}}\Gamma^{(2r-1)}(2z\sqrt{x'}) + \int \frac{e^{-z^2}z\,dz}{\sqrt{x'}}\Gamma^{(2r-1)}(2z\sqrt{x'}).$$

Le premier de ces deux termes est nul dans les limites $z=-\infty$ et $z=\infty$, parce que nous supposons généralement $\Gamma^{(2r-1)}(2z\sqrt{x})$ tel que son produit par e^{-z^2} disparaisse lorsque z est infini. Le terme $\int \frac{e^{-z^2}z\,dx}{\sqrt{x'}}\Gamma^{(2r-1)}(2z\sqrt{x'})$ est égal à

$$\frac{\partial}{\partial x'}\int e^{-z^2}dz\,\Gamma^{(2r-2)}(2z\sqrt{x'}),$$

on aura ainsi généralement

$$\int dz\, e^{-z^2}\Gamma^{(2r)}(2z\sqrt{x'}) = \frac{d^r}{dx'^r}\int e^{-z^2}dz\,\Gamma(2z\sqrt{x'});$$

en désignant donc par $\varphi(x')$ l'intégrale $\int dz\, e^{-z^2}\Gamma(2z\sqrt{x'})$, on aura

$$y = \varphi(x') + \frac{x^2}{1.2}\frac{d\varphi(x')}{dx'} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{d^2\varphi(x')}{dx'^2} + \ldots = \int dz\, e^{-z^2}\Gamma(x+2z\sqrt{x'}).$$

Si l'on désigne maintenant par $\Pi(x+2z\sqrt{x'})$ une fonction qui ne renferme que des puissances impaires de $x+2z\sqrt{x'}$, on aura

$$y = \int dz\, e^{-z^2}\left[x\,\Pi'(2z\sqrt{x'}) + \frac{x^3}{1.2.3}\Pi''(2z\sqrt{x'}) + \ldots\right],$$

fonction que l'on réduira, comme ci-dessus, à la suivante, en faisant $\int dz\, e^{-z^2}\Pi'(2z\sqrt{x'}) = \psi(x')$,

$$y = x\,\psi(x') + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d\psi(x')}{dx'} + \ldots = \int dz\, e^{-z^2}\Pi(x+2z\sqrt{x'}).$$

En réunissant ces deux expressions de y, comme on le peut, l'équa-

tion proposée aux différences partielles étant linéaire, on aura

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x') + \frac{x^2}{1.2}\frac{d\varphi(x')}{dx'} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{d^2\varphi(x')}{dx'^2} + \ldots \\ &\quad + x\,\psi(x') + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d\psi(x')}{dx'} + \ldots \\ &= \int dz\, e^{-z^2}\left[\Gamma(x+2z\sqrt{x'}) + \Pi(x+2z\sqrt{x'})\right] = \int dz\, e^{-z^2}\varphi(x+2z\sqrt{x'}), \end{aligned}$$

en faisant

$$\varphi(x+2z\sqrt{x'}) = \Gamma(x+2z\sqrt{x'}) + \Pi(x+2z\sqrt{x'}).$$

On voit donc avec évidence comment l'expression de y, qui semble renfermer deux fonctions arbitraires $\varphi(x')$ et $\psi(x')$, ne dépend cependant que d'une seule fonction arbitraire.

Sur le passage réciproque des résultats réels aux résultats imaginaires.

Lorsque les résultats sont exprimés en quantités indéterminées, la généralité de la notation embrasse tous les cas, soit réels, soit imaginaires. L'analyse a tiré un grand parti de cette extension, surtout dans le calcul des sinus et des cosinus, qui peuvent, comme l'on sait, être représentés par des exponentielles imaginaires. J'ai fait voir, dans ma *Théorie des approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres*, insérée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782 (¹), que ce passage du réel à l'imaginaire pouvait encore avoir lieu, même lorsque les résultats sont exprimés en quantités déterminées; et j'en ai conclu les valeurs de quelques intégrales définies, qu'il serait difficile d'obtenir par d'autres moyens. Je vais donner ici quelques nouvelles applications de cet artifice remarquable.

Je considère généralement l'intégrale $\int \frac{dx\, e^{x\sqrt{-1}}}{x^\alpha}$, α étant positif

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 209.

et moindre que l'unité. Soit $x = t^{\frac{1}{1-\alpha}}\sqrt{-1}$; cette intégrale deviendra

$$\frac{1}{1-\alpha}(-1)^{\frac{1-\alpha}{2}}\int dt\, e^{-t^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

En prenant la première intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à x infini; la seconde intégrale devra être prise depuis $t = 0$ jusqu'à t infini.

Nommons k l'intégrale $\int dt\, e^{-t^{\frac{1}{1-\alpha}}}$, prise dans cet intervalle; on aura

$$\int \frac{dx\, e^{x\sqrt{-1}}}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(-1)^{\frac{1-\alpha}{2}} k;$$

$(-1)^{\frac{1-\alpha}{2}}$ peut être représenté par $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$, et alors on a

$$-1 = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{2}{1-\alpha}} = \cos\frac{2}{1-\alpha}\varphi + \sqrt{-1}\sin\frac{2}{1-\alpha}\varphi;$$

cette équation donne $\frac{2}{1-\alpha}\varphi = (2r+1)\pi$, r étant un nombre entier positif ou négatif, et π étant la demi-circonférence; on a donc

$$\varphi = (2r+1)(1-\alpha)\frac{\pi}{2},$$

et, par conséquent,

$$(-1)^{\frac{1-\alpha}{2}} = \cos(2r+1)(1-\alpha)\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin(2r+1)(1-\alpha)\frac{\pi}{2};$$

on a donc

$$\int \frac{dx\, e^{x\sqrt{-1}}}{x^\alpha} = \int \frac{dx\cos x}{x^\alpha} + \sqrt{-1}\int \frac{dx\sin x}{x^\alpha}$$
$$= \left[\cos(2r+1)(1-\alpha)\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin(2r+1)(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right]\frac{k}{1-\alpha};$$

en comparant les quantités réelles aux réelles et les imaginaires aux imaginaires, on aura

$$(1)\qquad \int \frac{dx\cos x}{x^\alpha} = \frac{k}{1-\alpha}\cos(2r+1)(1-\alpha)\frac{\pi}{2},$$

$$(2)\qquad \int \frac{dx\sin x}{x^\alpha} = \frac{k}{1-\alpha}\sin(2r+1)(1-\alpha)\frac{\pi}{2},$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini. Dans cet intervalle, $\int \frac{dx\sin x}{x^\alpha}$ est une quantité positive et finie, lorsque α est moindre que 2. En effet, dans la première demi-circonférence, tous les éléments de l'intégrale étant positifs, l'intégrale entière est positive. Dans la seconde demi-circonférence, tous les éléments sont négatifs; mais l'élément qui correspond à $\sin x$, dans la première, est $\frac{dx\sin x}{x^\alpha}$, et l'élément qui correspond au même sinus, dans la seconde, est $-\frac{dx\sin x}{(\pi+x)^\alpha}$; la somme de ces deux éléments est évidemment positive; ainsi la somme de leurs intégrales, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, est positive : or, cette somme est l'intégrale $\int \frac{dx\sin x}{x^\alpha}$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2\pi$; cette intégrale, prise dans l'étendue de la circonférence, est donc positive. On prouvera de la même manière qu'elle est positive dans l'étendue de la deuxième, de la troisième, etc. circonférence; et c'est la somme de toutes ces quantités positives qui forme l'intégrale entière $\int \frac{dx\sin x}{x^\alpha}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini.

Cette intégrale, prise à l'infini, est plus petite que sa valeur prise dans l'étendue de la première demi-circonférence. En effet, si l'on suppose $x = \pi + x'$, elle devient $-\int \frac{dx'\sin x'}{(\pi+x')^\alpha}$, et l'on prouvera, comme ci-dessus, que cette dernière intégrale prise depuis x' nul jusqu'à x' infini est une quantité négative et, comme elle doit être ajoutée à l'intégrale $\int \frac{dx\sin x}{x^\alpha}$ prise dans l'étendue de la première demi-circonférence, il en résulte que cette dernière intégrale surpasse l'intégrale entière prise jusqu'à x infini.

L'intégrale $\int \frac{dx\cos x}{x^\alpha}$ est égale à $\frac{\sin x}{x^\alpha} + \alpha\int \frac{dx\sin x}{x^{\alpha+1}}$, et cette dernière quantité se réduit à son second terme, lorsque les intégrales sont prises depuis $x = 0$ jusqu'à x infini : or, on vient de voir que la seconde intégrale est toujours positive et finie, lorsque α est moindre que l'unité. L'intégrale $\int \frac{dx \cos x}{x^\alpha}$ est donc aussi positive et finie. Tous les éléments de cette intégrale sont positifs depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{\pi}{2}$. En faisant ensuite $x = \frac{\pi}{2} + x'$, l'intégrale se réduit à $-\int \frac{dx' \sin x'}{\left(\frac{\pi}{2} + x'\right)^\alpha}$, et l'on voit par ce qui précède, que cette dernière intégrale, prise depuis x' nul jusqu'à x' infini, est une quantité négative; l'intégrale partielle $\int \frac{dx \cos x}{x^\alpha}$, prise depuis x nul jusqu'à $x = \frac{\pi}{2}$, surpasse donc l'intégrale entière prise jusqu'à l'infini.

Reprenons maintenant les équations (1) et (2) et supposons d'abord $1 - \alpha$ infiniment petit, l'équation (2) donnera

$$\int \frac{dx \sin x}{x^\alpha} = (2r + 1) \frac{\pi}{2} k,$$

k est égal à l'intégrale $\int dt e^{-t^{\frac{1}{1-\alpha}}}$, et cette intégrale devient ici $\int dt e^{-t^\infty}$. Tant que t est moindre que l'unité, e^{-t^∞} est égal à l'unité; et il devient nul, lorsque t surpasse l'unité; k est donc égal à l'unité. Maintenant, l'intégrale $\int \frac{dx \sin x}{x}$ est moindre que cette même intégrale, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; et cette dernière intégrale est plus petite que l'intégrale $\int \frac{x\, dx}{x}$, prise dans le même intervalle, et, par conséquent, plus petite que π; il faut donc ici faire $r = 0$ et $k = 1$, ce qui donne

$$\int \frac{dx \sin x}{x} = \frac{\pi}{2},$$

l'équation (1) donne alors $\int \frac{dx \cos x}{x}$ infini, comme cela doit être.

Si l'on suppose $\alpha = \frac{1}{2}$, on aura $k = \int dt e^{-t^2}$, et cette dernière quantité est $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, comme je l'ai fait voir dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782 (1); les équations (1) et (2) deviennent

(1) *OEuvres de Laplace*, T. X, p. 223.

donc

$$\int \frac{dx \cos x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} \cos \frac{2r + 1}{4} \pi,$$

$$\int \frac{dx \sin x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} \sin \frac{2r + 1}{4} \pi,$$

le sinus et le cosinus de $\frac{(2r + 1)\pi}{4}$ doivent donc être positifs, ce qui suppose r nul ou un multiple de 4; alors, on a

$$\sin \frac{(2r + 1)\pi}{4} = \cos \frac{(2r + 1)\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

partant

$$\int \frac{dx \sin x}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx \cos x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Mascheroni, dans un Ouvrage intitulé *Annotationes in Calculum integralem Euleri*, a trouvé $\int \frac{dx \cos x}{\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$; mais cette valeur est évidemment trop grande, car on a vu que $\int \frac{dx \cos x}{\sqrt{x}}$ est moindre que l'intégrale partielle, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{\pi}{2}$, et cette intégrale partielle est plus petite elle-même que l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$, prise dans le même intervalle : or, cette dernière intégrale est $\sqrt{2\pi}$; donc $\int \frac{dx \cos x}{\sqrt{x}}$ est moindre que $\sqrt{2\pi}$.

Si $\alpha = \frac{3}{4}$, on aura

$$k = \int dt e^{-t^4}.$$

En nommant π' l'intégrale $\int \frac{du}{(1 - u^4)^{\frac{1}{2}}}$, prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$, on a

$$\pi' = 1,311\,028\,777\,146\,059\,87$$

et

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{\pi' \sqrt{2\pi}} = 0,906\,402$$

(*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1782, p. 21) (¹); on a ensuite

$$\int \frac{dx \cos x}{x^{\frac{3}{4}}} = 4k \cos \frac{(2r+1)}{4} \frac{\pi}{2},$$

$$\int \frac{dx \sin x}{x^{\frac{3}{4}}} = 4k \sin \frac{(2r+1)}{4} \frac{\pi}{2}.$$

Ici, on peut supposer encore r nul; car l'intégrale $\int \frac{dx \sin x}{x^{\frac{3}{4}}}$ doit être comprise entre les intégrales $\int \frac{dx \sin x}{x^{\frac{1}{2}}}$ et $\int \frac{dx \sin x}{x}$, et c'est ce qui a lieu en supposant r nul, car alors ces trois intégrales sont 1,2533; 1,3875; 1,5708 : la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx \cos x}{x^{\frac{3}{4}}}$ est 3,34963.

Si α est infiniment petit, alors $k = \int dt e^{-t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \int dt e^{-t} = 1$, ensuite on a

$$\int \frac{dx \sin x}{x^{\alpha}} = \sin(2r+1)\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\int \frac{dx \cos x}{x^{\alpha}} = \sin(2r+1)\alpha\frac{\pi}{2} = (2r+1)\frac{\alpha\pi}{2};$$

or on a, pour ce qui précède,

$$\int \frac{dx \cos x}{x^{\alpha}} = \alpha \int \frac{dx \sin x}{x^{\alpha+1}},$$

et, dans le cas de α infiniment petit,

$$\int \frac{dx \sin x}{x^{\alpha+1}} = \int \frac{dx \sin x}{x} = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\int \frac{dx \cos x}{x^{\alpha}} = \frac{\alpha\pi}{2}.$$

En comparant cette valeur à la précédente, on voit que r doit être supposé nul.

Considérons encore le cas de $\alpha = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, on a

$$k = \int dt e^{-t^{\frac{4}{3}}};$$

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. X, p. 226.

en faisant $t = t'^3$, on aura

$$k = 3 \int dt' t'^2 e^{-t'^4};$$

or on a (page citée des *Mémoires de l'Académie des Sciences*)

$$16 \int dt e^{-t^4} \int dt' t'^2 e^{-t'^4} = \pi\sqrt{2},$$

on aura donc

$$k = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16 \int dt e^{-t^4}} = 0,919\,062.$$

On peut encore ici supposer $r = 0$, parce que $\int \frac{dx \sin x}{x^{\frac{1}{4}}}$ doit être compris entre $\int \frac{dx \sin x}{x^{\alpha}}$, α étant infiniment petit, et $\int \frac{dx \sin x}{x^{\frac{1}{2}}}$; on a ainsi

$$\int \frac{dx \sin x}{x^{\frac{1}{4}}} = 1,1321, \qquad \int \frac{dx \cos x}{x^{\frac{1}{4}}} = 0,4689.$$

Si l'on rassemble ces divers résultats, on en formera le Tableau suivant :

α.	$\int \frac{dx \sin x}{x^{\alpha}}$.	$\int \frac{dx \cos x}{x^{\alpha}}$.
0	1,0000	0,0000
$\frac{1}{4}$	1,1321	0,4689
$\frac{2}{4}$	1,2533	1,2533
$\frac{3}{4}$	1,3875	3,34963
$\frac{4}{4}$	1,5708	∞
$\frac{5}{4}$	1,8756	∞
$\frac{6}{4}$	2,2507	∞
$\frac{7}{4}$	4,4662	∞
$\frac{8}{4}$	∞	∞

De là nous pouvons généralement conclure que, dans les équations (1) et (2), r peut être supposé nul, et alors elles deviennent

$$\int \frac{dx \cos x}{x^\alpha} = \frac{k}{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \tag{3}$$

$$\int \frac{dx \sin x}{x^\alpha} = \frac{k}{1-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2}, \tag{4}$$

on doit y joindre l'équation

$$\int \frac{dx \sin x}{x^{\alpha+1}} = \frac{k}{\alpha(1-\alpha)} \sin \frac{\alpha\pi}{2}. \tag{5}$$

Pour donner une application de cette analyse, considérons une lame élastique repliée naturellement sur elle-même en forme de spirale. Concevons que son extrémité intérieure soit fixe, et que la lame puisse être développée dans une ligne horizontale, par un poids p suspendu à son autre extrémité. Dans cet état, l'action du poids sur un élément de la lame, placé à la distance s de l'extrémité, sera ps; et le ressort de l'élément doit lui faire équilibre. Ce ressort est réciproque au rayon osculateur de la lame dans son état naturel. En nommant donc r ce rayon relatif à la partie s de la lame, prise de son extrémité extérieure, on aura

$$ps = \frac{g}{r},$$

g étant une constante dépendant de l'élasticité propre de la lame. Nous ferons $\frac{g}{p} = a^2$, a étant une droite, pour conserver l'homogénéité des dimensions; on aura ainsi, dans l'état naturel de la lame,

$$s = \frac{a^2}{r}.$$

Maintenant concevons dans cet état, et par l'extrémité extérieure de la lame, deux coordonnées orthogonales x et y dont la première soit, à cette origine, tangente à la lame; on aura

$$\frac{ds}{r} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1-\frac{dy^2}{ds^2}}},$$

ce qui donne

$$\frac{dy}{ds} = \sin\left(\int \frac{ds}{r}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\left(\int \frac{ds}{r}\right);$$

substituant pour $\frac{1}{r}$ sa valeur $\frac{s}{a^2}$, on aura

$$x = \int ds \cos \frac{s^2}{2a^2}, \qquad y = \int ds \sin \frac{s^2}{2a^2}.$$

Euler parvient aux mêmes équations, dans son bel Ouvrage *Sur les isopérimètres*, page 276; mais il ajoute : « *Curva ergo erit ex spiralium genere, ita ut infinitis peractis spiris, in certo quodam puncto tanquam centro convolvatur, quod punctum ex hâc constructione invenire difficillimum videtur.* » La détermination de ce point se déduit facilement de l'analyse précédente; car, en faisant $\frac{s^2}{2a^2} = \varphi$, on aura

$$ds = a\frac{d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} \qquad \text{et} \qquad x = a\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} \cos\varphi, \qquad y = a\int \frac{d\varphi \sin\varphi}{\sqrt{2\varphi}},$$

les intégrales étant prises depuis φ nul jusqu'à φ infini; alors on a, par ce qui précède,

$$x = y = \tfrac{1}{2} a\sqrt{\pi}.$$

On peut généraliser l'analyse précédente, en l'appliquant à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} e^{-fx+gx\sqrt{-1}}.$$

Si l'on fait

$$fx - gx\sqrt{-1} = t^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

l'intégrale devient

$$\int \frac{dt\, e^{-t^{\frac{1}{1-\alpha}}}}{(1-\alpha)(f-g\sqrt{-1})^{1-\alpha}};$$

en nommant donc, comme ci-dessus, k l'intégrale $\int dt\, e^{-t^{\frac{1}{1-\alpha}}}$ prise depuis t nul jusqu'à t infini, et substituant, au lieu de $e^{gx\sqrt{-1}}$,

$\cos gx + \sqrt{-1}\sin gx$, on aura

$$\int \frac{dx\, e^{-fx}}{x^{\alpha}}(\cos gx + \sqrt{-1}\sin gx) = \frac{k}{(1-\alpha)(f - g\sqrt{-1})^{1-\alpha}}, \tag{6}$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini.

Représentons la fraction $\frac{1}{(f-g\sqrt{-1})^{1-\alpha}}$, par $h(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$; nous aurons

$$f - g\sqrt{-1} = h^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\cos\frac{\varphi}{1-\alpha} - \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{1-\alpha}\right),$$

ce qui donne

$$h^{\frac{1}{\alpha-1}}\cos\frac{\varphi}{1-\alpha} = f,$$

$$h^{\frac{1}{\alpha-1}}\sin\frac{\varphi}{1-\alpha} = g,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{1-\alpha} = \frac{g}{f},$$

$$h = (f^2+g^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

La première équation donne

$$\varphi = (A + r\pi)(1-\alpha),$$

A étant le plus petit angle positif dont $\frac{g}{f}$ soit la tangente, et r étant un nombre entier, que l'on doit supposer nul, d'après ce qui précède. Cela posé, l'équation (6) donnera les deux suivantes

$$\int \frac{dx\, e^{-fx}\cos gx}{x^{\alpha}} = \frac{k\cos A}{(1-\alpha)(f^2+g^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}, \tag{7}$$

$$\int \frac{dx\, e^{-fx}\sin gx}{x^{\alpha}} = \frac{k\sin A}{(1-\alpha)(f^2+g^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}. \tag{8}$$

On a, en prenant les intégrales depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\int \frac{dx\, e^{-fx}\cos gx}{x^{\alpha}} = \int \frac{f}{g}\,\frac{dx\, e^{-fx}\sin gx}{x^{\alpha}} + \int \frac{\alpha}{g}\,\frac{dx\, e^{-fx}\sin gx}{x^{\alpha+1}};$$

on aura donc

$$\int \frac{dx\, e^{-fx}\sin gx}{x^{\alpha+1}} = \frac{k}{\alpha(1-\alpha)(f^2+g^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}(g\cos A - f\sin A); \tag{9}$$

en supposant f nul et $g = 1$, on a

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{1-\alpha} = \frac{1}{0} = \infty,$$

ce qui donne

$$\frac{\varphi}{1-\alpha} = \frac{\pi}{2},$$

et, par conséquent,

$$A = \frac{\pi}{2}(1-\alpha);$$

alors il est visible que les équations (7), (8), (9) coïncident avec les équations (3), (4), (5).

Sur l'intégration des équations aux différences finies, non linéaires.

Jusqu'à présent, les géomètres se sont principalement occupés des équations aux différences finies, linéaires; ce sont, en effet, celles qui se présentent le plus fréquemment dans ce genre d'analyse : mais la considération des équations non linéaires pouvant être utile, je vais exposer ici une méthode pour les intégrer dans plusieurs cas.

J'ai déjà observé que l'intégration des équations aux différences finies n'est, au fond, qu'une élimination entre un nombre quelconque d'équations semblables. En désignant donc par $x^{(n)}$ et $x^{(n+1)}$ les deux variables d'une équation donnée entre elles, cette équation se changera dans une équation aux différences finies. Pour l'intégrer, différentions cette équation par rapport aux différences infiniment petites $dx^{(n)}$ et $dx^{(n+1)}$; on pourra, au moyen de l'équation proposée et de sa différentielle, parvenir à une équation de cette forme,

$$dx^{(n)}\,\varphi(x^{(n)}) = dx^{(n+1)}\,\psi(x^{(n+1)}),$$

et, par conséquent, à l'équation

$$\int dx^{(n+1)}\,\psi(x^{(n+1)})-\int dx^{(n)}\,\varphi(x^{(n)})=a.$$

Cette équation n'est qu'une transformée de la proposée, mais dans laquelle les deux variables sont séparées.

Si, dans la proposée, les deux variables $x^{(n)}$ et $x^{(n+1)}$ entrent de manière que l'on ait $\psi(x^{(n+1)})=\varphi(x^{(n+1)})$, la transformée deviendra

$$\int dx^{(n+1)}\,\varphi(x^{(n+1)})-\int dx^{(n)}\,\varphi(x^{(n)})=a,$$

et, en intégrant

$$\int dx^{(n)}\,\varphi(x^{(n)})=an+b,$$

b étant la constante arbitraire introduite par l'intégration; on aura ainsi $x^{(n)}$ en fonction de $an+b$. Appliquons cette méthode à quelques exemples.

Considérons d'abord l'équation

$$0=1-\beta(x-y)+xy,$$

ce qui donne

$$\beta=\frac{1+xy}{x-y};$$

en différentiant, on aura

$$\frac{dx}{1+x^2}-\frac{dy}{1+y^2}=0,$$

et, par conséquent,

$$\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{dy}{1+y^2}=a,$$

a étant une constante qui doit être une fonction de β; car cette dernière équation n'est qu'une transformée de la proposée. Maintenant, si l'on fait $x=x^{(n+1)}$, $y=x^{(n)}$, cette proposée se change dans l'équation aux différences finies,

$$0=1-\beta(x^{(n+1)}-x^{(n)})+x^{(n+1)}x^{(n)},$$

ou

$$0=1+(x^{(n)}-\beta)\,\Delta x^{(n)}+x^{(n)2}.$$

Sa transformée devient

$$a=\int\frac{dx^{(n+1)}}{1+x^{(n+1)2}}-\int\frac{dx^{(n)}}{1+x^{(n)2}},$$

ou

$$\Delta\int\frac{dx^{(n)}}{1+x^{(n)2}}=a;$$

en l'intégrant, on aura

$$\int\frac{dx^{(n)}}{1+x^{(n)2}}=an+b,$$

b étant la constante arbitraire introduite par l'intégration aux différences finies. L'intégrale $\int\frac{dx^{(n)}}{1+x^{(n)2}}$ est, comme on sait, arc tang$x^{(n)}$; ainsi l'on a

$$x^{(n)}=\operatorname{tang}(an+b).$$

Pour déterminer a, supposons n et b tels que $an+b$ soit nul; on aura $x^{(n)}$ nul, et $x^{(n+1)}=\operatorname{tang}a$: or, l'équation précédente aux différences finies donne, lorsque $x^{(n)}$ est nul,

$$x^{(n+1)}=\frac{1}{\beta}=\operatorname{tang}a;$$

a est donc l'angle dont la tangente est $\frac{1}{\beta}\cdot$ L'arbitraire b est l'angle dont la tangente est $x^{(0)}$.

Considérons maintenant l'équation

$$0=1-\beta(x^2+y^2)+2\gamma xy+x^2y^2,$$

elle donne, en la différentiant,

$$\frac{dx^2}{dy^2}=\frac{(x^2y-\beta y+\gamma x)^2}{(xy^2-\beta x+\gamma y)^2}=\frac{y^2(x^2-\beta)^2+2\gamma xy(x^2-\beta)+\gamma^2x^2}{x^2(y^2-\beta)^2+2\gamma xy(y^2-\beta)+\gamma^2y^2}.$$

Substituant dans le numérateur, pour x^2 sa valeur $\frac{1-\beta y^2+2\gamma xy}{\beta-y^2}$, et dans le dénominateur, pour y^2 sa valeur $\frac{1-\beta x^2+2\gamma xy}{\beta-x^2}$, on aura

$$\frac{dx^2}{dy^2}=\frac{1-\dfrac{1+\beta^2-\gamma^2}{\beta}x^2+x^4}{1-\dfrac{1+\beta^2-\gamma^2}{\beta}y^2+y^4},$$

en faisant donc

$$2\alpha=\frac{1+\beta^2-\gamma^2}{\beta},$$

on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}} - \frac{dy}{\sqrt{1 - 2\alpha y^2 + y^4}} = 0,$$

et en intégrant, on aura l'équation suivante, qui n'est qu'une transformée de l'équation proposée,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}} - \int \frac{dy}{\sqrt{1 - 2\alpha y^2 + y^4}} = a.$$

Si l'on fait maintenant $x = x^{(n+1)}$, $y = x^{(n)}$; la proposée se changera dans l'équation aux différences finies,

$$0 = 1 - \beta(x^{(n+1)^2} + x^{(n)^2}) + 2\gamma x^{(n+1)} x^{(n)} + x^{(n+1)^2} x^{(n)^2},$$

et sa transformée deviendra

$$\Delta \int \frac{dx^{(n)}}{\sqrt{1 - 2\alpha x^{(n)^2} + x^{(n)^4}}} = a,$$

d'où l'on tire, en intégrant aux différences finies,

$$\int \frac{dx^{(n)}}{\sqrt{1 - 2\alpha x^{(n)^2} + x^{(n)^4}}} = an + b,$$

b étant une constante arbitraire, qui est égale à

$$\int \frac{dx^{(0)}}{\sqrt{1 - 2\alpha x^{(0)^2} + x^{(0)^4}}}.$$

Pour déterminer a, nous désignerons par $\psi(x^{(n)})$ l'intégrale

$$\int \frac{dx^{(n)}}{\sqrt{1 - 2\alpha x^{(n)^2} + x^{(n)^4}}},$$

et a par $\psi(q)$; nous aurons

$$\psi(x^{(n+1)}) - \psi(x^{(n)}) = \psi(q).$$

Supposons que $\psi(x)$ soit nul, lorsque x est nul; on aura, en faisant $x^{(0)}$ nul,

$$\psi(x^{(1)}) = \psi(q) \quad \text{ou} \quad q = x^{(1)};$$

or, la proposée donne alors $x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, donc

$$q = \frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

partant

$$\psi(x^{(n)}) = n\psi\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) + \psi(x^{(0)}).$$

En tirant de cette équation la valeur de $x^{(n)}$, on aura l'intégrale de la proposée. La valeur de $\psi(x^{(n)})$, en quantités algébriques, circulaires ou logarithmiques, est impossible en termes finis; il est donc impossible de représenter autrement que par une caractéristique l'expression de $x^{(n)}$; mais il est remarquable qu'elle dépende de la rectification des sections coniques.

On peut semblablement intégrer par une quadrature transcendante l'équation générale aux différences finies,

$$\begin{aligned} 0 = a + b(x^{(n+1)} + x^{(n)}) + c(x^{(n+1)^2} + x^{(n)^2}) + f x^{(n+1)} x^{(n)} \\ + g x^{(n+1)} x^{(n)} (x^{(n+1)} + x^{(n)}) + h x^{(n+1)^2} x^{(n)^2}, \end{aligned}$$

car, si l'on fait

$$x^{(n)} = \frac{l x'^{(n)} + p}{x'^{(n)} + q},$$

on aura une équation différentielle en $x'^{(n)}$ de la même forme que la précédente; et, en déterminant convenablement les trois arbitraires l, p et q, on pourra faire disparaître les coefficients de $(x'^{(n+1)} + x'^{(n)})$ et de $x'^{(n+1)} x'^{(n)} (x'^{(n+1)} + x'^{(n)})$, et rendre égaux le coefficient constant et celui de $x'^{(n)^2} x'^{(n+1)^2}$. L'équation différentielle est alors réduite à la forme de celle que nous venons d'intégrer.

Sur la réduction des fonctions en Tables.

Pour réduire en Tables les valeurs d'une fonction à une seule variable, on donne à cette variable des valeurs numériques successives, et telles que ses accroissements soient très petits et égaux entre eux.

On place ensuite à côté de chaque accroissement la valeur correspondante de la fonction. Une Table ainsi formée se nomme *Table à simple entrée*. Elle donne non seulement les valeurs de la fonction, correspondant aux accroissements indiqués de la variable, mais encore celles qui correspondent aux accroissements intermédiaires : une simple proportion, ou, si l'on veut plus d'exactitude, la méthode des différences fait connaître les valeurs intermédiaires de la fonction.

Si la fonction renferme deux variables x et y, alors, en donnant à x une valeur déterminée, on fera croître successivement y, et l'on placera la valeur correspondante de la fonction à côté de chaque accroissement. On formera ainsi, pour chaque valeur de x, une Table à simple entrée, et la réunion de ces Tables correspondant aux accroissements successifs de x, formera une Table à *double entrée*, qui représentera la fonction proposée, en x et y.

La Table de Pythagore, qui donne le produit xy des deux nombres x et y, est le cas le plus simple de ce genre de Tables; et en la prolongeant jusqu'à un nombre considérable, elle donnerait les produits des grands nombres; mais alors elle deviendrait embarrassante par son étendue excessive : on faciliterait donc extrêmement les calculs numériques, en la réduisant à une Table à simple entrée.

Pour y parvenir, il faudrait pouvoir réduire xy à une ou plusieurs fonctions de la forme $\varphi(X+Y)$, X étant une fonction de x et Y étant une fonction de y. Alors on aurait X, au moyen des valeurs de x, par une Table à simple entrée; la même Table donnerait encore Y, au moyen des valeurs de y; car, dans le cas présent, Y est une fonction de y, entièrement semblable à celle de X en x. Enfin, une Table à simple entrée donnerait encore xy, au moyen des valeurs de $X+Y$.

Voyons maintenant si cette réduction de xy est possible. Supposons

$$xy = \varphi(X+Y).$$

En différentiant cette équation par rapport à x, on aura

$$y\frac{dx}{dX} = \varphi'(X+Y),$$

en désignant $\frac{d\varphi(z)}{dz}$ par $\varphi'(z)$. On aura pareillement, en différentiant par rapport à y,

$$x\frac{dy}{dY} = \varphi'(X+Y).$$

La comparaison de ces deux équations donne

$$\frac{dx}{x\,dX} = \frac{dy}{y\,dY},$$

le premier membre de cette équation étant fonction de x seul, et le second membre étant fonction de y seul; il est clair que les deux variables x et y étant indépendantes, chacun de ces membres doit être égal à une même constante que nous indiquerons par q; on aura donc

$$\frac{dx}{x\,dX} = q = \frac{dy}{y\,dY}.$$

Les intégrales de ces équations sont évidemment

$$x = Ae^{qX}, \qquad y = Be^{qY}.$$

A et B étant deux constantes arbitraires, car il est visible que l'on a

$$dx = Ae^{qX}(e^{q\,dX}-1) = x(e^{q\,dX}-1),$$

ce qui donne

$$\frac{dx}{x\,dX} = q,$$

si l'on a

$$e^{q\,dX}-1 = q\,dX \qquad \text{ou} \qquad e = (1+q\,dX)^{\frac{1}{q\,dX}}.$$

En développant le second membre en série, par le théorème connu du binome, et négligeant l'unité, eu égard à $\frac{1}{q\,dX}$, on aura

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2,71821;$$

on aura ainsi les trois équations

$$x = Ae^{qX}, \qquad y = Be^{qY}, \qquad xy = ABe^{q(X+Y)};$$

et il est visible que les Tables à simple entrée, dont on a parlé ci-dessus, se réduiront à une seule, si l'on fait $A = B = 1$; et alors X et Y sont nuls, lorsque x et y sont égaux à l'unité.

La Table à simple entrée, que l'on obtient de cette manière, est une Table de logarithmes, X étant le logarithme de x. Les logarithmes sont hyperboliques, si q est égal à l'unité, c'est-à-dire si l'accroissement infiniment petit du logarithme X est égal à celui du nombre x, lorsque x est égal à l'unité. Les logarithmes sont ceux que l'on nomme *tabulaires*, si q est tel que l'on ait $e^q = 10$. Cette valeur de q offre l'avantage de donner les logarithmes des nombres dix, cent, mille, etc. fois plus grands ou plus petits, en ajoutant ou retranchant de ces logarithmes 1, ou 2, ou 3, ...

Si l'on emploie deux fonctions pour représenter xy, si, par exemple, on suppose

$$xy = \varphi(X+Y) - \varphi(X-Y),$$

on aura

$$y\frac{d^2x}{dX^2} = x\frac{d^2y}{dY^2} = \varphi''(X+Y) - \varphi''(X-Y),$$

$\varphi''(z)$ étant égal à $\frac{d\varphi'(z)}{dz}$. On aura donc

$$\frac{d^2x}{dX^2} + a^2x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dY^2} + a^2y = 0;$$

a étant une constante quelconque. Le cas le plus simple est celui de a nul, et alors on peut supposer $x = X$, $y = Y$; ce qui donne

$$0 = \varphi''(X+Y) - \varphi''(X-Y).$$

Ainsi, $\varphi''(X+Y)$ est égal à une constante et, par conséquent, $\varphi(X+Y)$ est de la forme $b(X+Y)^2 + p(X+Y) + q$; b, p et q étant des constantes. L'expression précédente de xy déterminera ces constantes, et elle donnera

$$xy = \frac{1}{2}[(x+y)^2 - (x-y)^2].$$

En formant une Table à simple entrée, de la fonction $\frac{1}{2}t^2$, la différence des deux nombres qui répondront dans cette Table à $t = x+y$ et $t = x-y$ ou $y-x$, suivant que X sera plus ou moins grand que Y; cette différence, dis-je, sera le produit xy.

En faisant $a = 1$, les équations

$$\frac{d^2x}{dX^2} + x = 0, \qquad \frac{d^2y}{dY^2} + y = 0$$

seront satisfaites, en faisant $x = \sin X$, $y = \sin Y$; et alors on aura

$$xy = \frac{1}{2}[\cos(X-Y) - \cos(X+Y)];$$

on peut donc, au moyen d'une Table de sinus et de cosinus, déterminer le produit des deux nombres x et y; on déterminera les angles X et Y au moyen de leurs sinus x et y, et en prenant dans la Table les cosinus des angles $X-Y$ et $X+Y$, leur demi-différence sera le produit xy. Cette manière ingénieuse de faire servir les Tables de sinus à la multiplication des nombres fut imaginée et employée un siècle environ avant l'invention des logarithmes, qui, comme on vient de le voir, ne dépendant que d'une seule fonction $\varphi(X+Y)$, est beaucoup plus simple et rend très facile la division des nombres, leur élévation aux puissances et l'extraction de leurs racines; car on a

$$\frac{x}{y} = e^{q(X-Y)} \qquad \text{et} \qquad x^n = e^{qnX};$$

ainsi la division se réduit à une soustraction; l'élévation aux puissances se réduit à une multiplication et l'extraction des racines à une division.

La facilité de tous ces calculs rend les logarithmes un des instruments les plus puissants de l'esprit humain et, lorsque le système métrique sera généralement adopté, ils deviendront d'un usage commun dans la Société, à laquelle ils seront aussi utiles que notre échelle arithmétique, dont ce système est le complément. On doit donc multiplier, le plus qu'il est possible, les usages des logarithmes et par leur moyen réduire en Tables à simple entrée les Tables à double entrée. C'est ce que j'ai fait à l'égard de la Table des réfractions astronomiques, publiée par le Bureau des Longitudes, et dans laquelle la formule des réfractions, que j'ai donnée dans le dixième Livre de la *Mécanique céleste*, est réduite de cette manière à des Tables à simple entrée. M. Oltmans a fait ensuite la même chose à l'égard de la formule des hauteurs conclues des observations barométriques.

On peut généraliser l'analyse précédente, en considérant une fonction quelconque $\varphi(X+Y)$. Supposons que l'on ait généralement

$$u=\varphi(X+Y),$$

en différentiant, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dX}=\varphi'(X+Y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dY}=\varphi'(X+Y),$$

partant

$$\frac{\frac{dx}{dX}}{\frac{dy}{dY}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Il faut donc, pour que la réduction soit possible, que le quotient de $\frac{\partial u}{\partial x}$, divisé par $\frac{\partial u}{\partial y}$, soit de la forme $\frac{S}{T}$, S étant une fonction de x, et T une fonction de y. L'équation différentielle

$$o=S\,dx+T\,dy$$

a pour intégrale

$$\text{const.}=\int S\,dx+\int T\,dy,$$

elle a donc aussi pour intégrale $u=$ const.; ainsi toute équation finie en x et y, qui, de plus, renfermant une arbitraire, satisfait à l'équation précédente, donne pour l'expression de cette constante une fonction de x et de y, dont on pourra déterminer les valeurs au moyen d'une Table à simple entrée.

On a vu précédemment que l'équation

$$o=1-\beta(x^2+y^2)+2\gamma xy+x^2y^2$$

donnait la suivante,

$$o=\frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x^2+x^4}}-\frac{dy}{\sqrt{1-2\alpha y^2+y^4}},$$

dans laquelle

$$\alpha=\frac{1+\beta^2-\gamma^2}{2\beta},$$

et comme α est donné en fonction des deux constantes β et γ, l'équation finie précédente renferme une constante arbitraire et, par conséquent, elle est l'intégrale complète de l'équation différentielle. En effet, si l'on suppose $\frac{1}{\beta}=a^2$, l'équation finie devient

$$o=a^2-(x^2+y^2)+2xy\sqrt{1-2\alpha a^2+a^4}+a^2x^2y^2,$$

a étant une constante arbitraire qui ne se rencontre point dans l'équation différentielle. Cette équation donne

$$a=\frac{x\sqrt{Y}-y\sqrt{X}}{1-x^2y^2},$$

Y étant égal à $1-2\alpha y^2+y^4$, et X étant $1-2\alpha x^2+x^4$. On a de plus, par ce qui précède,

$$\psi(x)=\psi(y)+\psi(a),$$

$\psi(x)$ étant l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$, cette intégrale commençant avec x; en formant donc une Table à simple entrée des valeurs de $\psi(x)$, cette Table donnera les valeurs de $\frac{x\sqrt{Y}-y\sqrt{X}}{1-x^2y^2}$ ou de a; car la différence $\psi(x)-\psi(y)$ étant égale à $\psi(a)$, cette Table donnera la valeur de a. On pourra même, au moyen d'une seconde Table à simple entrée, qui donne les valeurs d'une fonction quelconque $\Gamma(x)$ de x, avoir celle de $\Gamma\left(\frac{x\sqrt{Y}-y\sqrt{X}}{1-x^2y^2}\right)$.

Si l'on fait $A=1-2\alpha a^2+a^4$, l'équation algébrique précédente donnera

$$x=\frac{y\sqrt{A}+a\sqrt{Y}}{1-a^2y^2},$$

en changeant x en $x^{(n)}$ et y en $x^{(n-1)}$, on aura

$$x^{(n)} = \frac{x^{(n-1)}\sqrt{\mathrm{A}} + a\sqrt{\mathrm{X}^{(n-1)}}}{1 - a^2 x^{(n-1)^2}}.$$

$\mathrm{X}^{(n)}$ étant ce que devient X lorsqu'on y change x en $x^{(n)}$. On aura, au moyen de cette équation, la valeur de $x^{(n)}$ en $x^{(0)}$ et a; car elle donnera la valeur de $x^{(1)}$ en fonction de ces deux quantités; ensuite elle donne $x^{(2)}$ en fonction de $x^{(1)}$ et de a et, par conséquent, en fonction de $x^{(0)}$ et de a, en substituant pour $x^{(1)}$ sa valeur, et ainsi de suite. On aura ainsi $x^{(n)}$ en fonction de $x^{(0)}$, a et n; or on a, par ce que l'on a vu ci-dessus,

$$\psi(x^{(n)}) = n\psi(a) + \psi(x^{(0)});$$

en désignant donc par le signe renversé $\rotatebox[origin=c]{180}{ψ}$ la valeur de $x^{(n)}$ en $\psi(x^{(n)})$, en sorte que l'on ait

$$x^{(n)} = \rotatebox[origin=c]{180}{ψ}[\psi(x^{(n)})];$$

on aura

$$x^{(n)} = \rotatebox[origin=c]{180}{ψ}[n\psi(a) + \psi(x^{(0)})].$$

La Table à simple entrée qui donne $\psi(x)$ en x donnera donc la valeur de $x^{(n)}$.

Supposons $\alpha = -1$; on aura

$$\mathrm{X} = (1 + x^2)^2, \qquad x^{(n)} = \frac{x^{(n-1)} + a}{1 - a x^{(n-1)}}, \qquad \psi(x) = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tang} x;$$

$\psi(x)$ sera donc $\operatorname{arc\,tang} x$ et, par conséquent, $\rotatebox[origin=c]{180}{ψ}(x)$ sera $\operatorname{tang} x$; on aura donc

$$x^{(n)} = \operatorname{tang}(n \operatorname{arc\,tang} a + \operatorname{arc\,tang} x^{(0)}),$$

ainsi la Table des tangentes donnera généralement la valeur de $x^{(n)}$ ou les valeurs de l'intégrale de l'équation aux différences finies,

$$0 = a - (x^{n+1} - x^{(n)}) + a x^{(n+1)} x^{(n)}.$$

MÉMOIRES

EXTRAITS DU

JOURNAL DE PHYSIQUE.

SUR

LA THÉORIE DES TUBES CAPILLAIRES [1].

Journal de Physique, t. LXII; 1806.

Ce Mémoire, destiné à paraître parmi ceux de la première Classe de l'Institut [2], est précédé par l'analyse suivante de la théorie qu'il renferme, et que l'auteur nous a communiquée.

Clairaut a soumis le premier, à une analyse exacte et rigoureuse, les phénomènes des tubes capillaires, dans son *Traité sur la figure de la Terre*. Mais sa théorie, exposée avec l'élégance qui caractérise ce bel et important Ouvrage, laisse à désirer l'explication complète du principal de ces phénomènes, qui consiste en ce que l'élévation du fluide au-dessus de son niveau, dans les tubes de même matière, est en raison inverse de leurs diamètres. Ce grand géomètre se contente d'observer, sans le prouver, qu'il doit y avoir une infinité de lois d'attraction qui, substituées dans ses formules, donnent ce résultat. J'ai cherché, il y a longtemps, à suppléer ce qui manque à la théorie de Clairaut : de nouvelles recherches m'ont enfin conduit non seulement à reconnaître l'existence de semblables lois, mais encore à faire voir que toutes les lois dans lesquelles l'attraction cesse d'être sensible à une distance sensible, donnent l'élévation du fluide, en raison inverse du diamètre du tube; et il en résulte une théorie complète de ce genre de phénomène.

Clairaut suppose que l'action du tube capillaire est sensible sur la

[1] Extrait d'un Mémoire lu à l'Institut, le 23 décembre 1805; par M. Laplace.
[2] *Œuvres de Laplace*, T. IV. Supplément au Livre X.

colonne infiniment étroite du fluide, qui passe par l'axe du tube. Je m'écarte en cela de son opinion et je pense, avec Hawskbée et beaucoup d'autres physiciens, que l'action capillaire, comme la force réfractive et toutes les affinités chimiques, n'est sensible qu'à des distances imperceptibles. Hawskbée a observé que dans les tubes de verre, ou très minces, ou très épais, l'eau s'élevait à la même hauteur, toutes les fois que les diamètres intérieurs étaient les mêmes. Les couches cylindriques du verre, qui sont à une distance sensible de la surface intérieure, ne contribuent donc point à l'ascension de l'eau, quoique dans chacune d'elles, prise séparément, ce fluide s'élèverait au-dessus de son niveau. D'ailleurs une expérience bien simple prouve la vérité de ce principe. Si l'on enduit d'une couche extrêmement mince de matière grasse la surface intérieure d'un tube de verre, on fait disparaître sensiblement l'effet capillaire. Cependant le tube agit toujours de la même manière sur la colonne fluide de son axe; car les attractions capillaires doivent se transmettre à travers les corps, ainsi qu'on l'observe dans la pesanteur et dans les attractions et répulsions magnétiques et même électriques. Newton, Clairaut et tous les géomètres qui ont soumis au calcul ce genre d'attractions, sont partis de cette hypothèse : l'effet capillaire étant donc détruit par l'interposition d'une couche de matière grasse, quelque mince que soit son épaisseur, l'action du tube doit être insensible à une distance sensible.

Le phénomène suivant fournit une nouvelle preuve du principe que je viens d'exposer. On sait que, par une forte ébullition du mercure dans un tube capillaire de verre, on parvient à élever ce fluide au niveau, et même au-dessus, par une ébullition plus longtemps continuée. Ce phénomène me paraît dépendre de la petite couche aqueuse qui, dans l'état ordinaire, tapissant la surface intérieure du tube, affaiblit l'action réciproque du verre et du mercure, action qui s'accroît de plus en plus, à mesure que, par l'ébullition de ce fluide dans le tube, on diminue l'épaisseur de la couche. Dans les expériences que j'ai faites avec M. Lavoisier sur les baromètres, en y faisant bouillir longtemps le mercure, nous avons fait disparaître la convexité de sa surface intérieure; nous sommes même parvenus à la rendre concave; mais nous avons toujours rétabli l'effet de la capillarité, en introduisant une goutte d'eau dans le tube. Si l'on considère maintenant le peu d'épaisseur que la couche aqueuse doit avoir, surtout lorsqu'on a bien fait sécher le tube et le mercure, ce qui ne suffit pas pour détruire la capillarité, on jugera que l'action du verre sur ce fluide n'est sensible qu'à des distances insensibles.

En partant de ce principe je détermine, par les formules de mon *Traité de Mécanique céleste*, l'action d'une masse fluide terminée par une surface sphérique concave ou convexe, sur une colonne fluide intérieure, renfermée dans un canal infiniment étroit qui passe par l'axe de cette surface. Par cette action, j'entends la pression que le fluide renfermé dans le canal exercerait en vertu de l'attraction de la masse entière, sur une base plane, située dans l'intérieur du canal, perpendiculairement à ses côtés, à une distance quelconque sensible de la surface, cette base étant prise pour unité. Je fais voir que cette action est plus petite ou plus grande que si la surface était plane : plus petite, si la surface est concave; plus grande, si la surface est convexe. Son expression analytique est composée de deux termes : le premier, beaucoup plus grand que le second, exprime l'action de la masse terminée par une surface plane, et je pense que de ce terme dépendent les phénomènes de l'adhérence des corps entre eux, et de la suspension du mercure, dans un tube de baromètre, à une hauteur deux ou trois fois plus grande que celle qui est due à la pression de l'atmosphère. Le second terme exprime la partie de l'action, due à la sphéricité de la surface : il est positif ou négatif, suivant que la surface est convexe ou concave. Je fais voir que dans l'un et l'autre cas ce terme est en raison inverse du rayon de la surface sphérique. De là je conclus ce théorème général, savoir : *que dans toutes les lois où l'attraction n'est sensible qu'à des distances insensibles, l'action d'un corps terminé par une surface courbe, sur un canal intérieur infiniment étroit et perpendiculaire à cette surface dans un point quelconque, est égale à la demi-somme des actions sur le même canal, de deux sphères qui auraient pour* *rayons, le plus grand et le plus petit des rayons osculateurs de la surface, à ce point.* Au moyen de ce théorème et des lois de l'équilibre des fluides, on peut déterminer la figure que doit prendre une masse fluide animée par la pesanteur. Je prouve que dans un tube cylindrique d'un diamètre considérable, la section de la surface du fluide, par un plan vertical, est une courbe du genre de celles que les géomètres ont nommées *élastiques*, et qui sont formées par une lame élastique pliée par des poids; cela résulte de ce que dans cette section, comme dans la courbe élastique, la force due à la courbure est réciproque au rayon osculateur. Si le tube est très étroit, la surface du fluide approche d'autant plus de celle d'un segment sphérique, que le diamètre du tube est plus petit; je prouve ensuite que, dans divers tubes de même matière, ces segments sont à très peu près semblables; d'où il suit que les rayons de leurs surfaces sont à fort peu près proportionnels aux diamètres des tubes. Cette similitude des segments sphériques sera évidente, si l'on considère que la distance où l'action du tube cesse d'être sensible est imperceptible; en sorte que si, par le moyen d'un très fort microscope, on parvenait à la faire paraître égale à 1^{mm}, il est vraisemblable que le même pouvoir amplifiant donnerait au diamètre du tube une grandeur apparente de plusieurs mètres. La surface du tube peut donc être considérée comme étant plane à très peu près, dans un rayon égal à cette distance; le fluide dans cet intervalle s'abaissera donc ou s'élèvera depuis cette surface, à très peu près, comme si elle était plane : au delà le fluide n'étant plus soumis sensiblement qu'à la pesanteur et à son action sur lui-même, sa surface sera à fort peu près celle d'un segment sphérique dont les côtés extrêmes étant ceux de la surface aux limites de la sphère d'activité sensible du tube, seront à très peu près également inclinés à l'horizon, dans les différents tubes; d'où il suit que tous ces segments seront à fort peu près semblables.

Le rapprochement de ces résultats donne la vraie cause de l'ascension ou de l'abaissement des fluides dans les tubes capillaires, en raison inverse de leurs diamètres. Si, par l'axe d'un tube de verre, on

conçoit un canal infiniment étroit qui, se recourbant un peu au-dessous du tube, aille aboutir à la surface plane et horizontale de l'eau d'un vase dans lequel l'extrémité inférieure du tube est plongée, l'action de l'eau du tube sur ce canal sera moindre, à raison de la concavité de sa surface, que l'action de l'eau du vase sur le même canal; le fluide doit donc s'élever dans le tube, pour compenser cette différence, et comme elle est, par ce qui précède, en raison inverse du diamètre du tube, l'élévation du fluide au-dessus de son niveau doit suivre le même rapport.

Si le fluide est du mercure, sa surface, dans l'intérieur d'un tube capillaire de verre, est convexe; son action sur le canal est donc plus forte que celle du mercure du vase, et le fluide doit s'abaisser dans le tube en raison de cette différence et, par conséquent, en raison inverse du diamètre du tube.

Ainsi, l'attraction des tubes capillaires n'a d'influence sur l'élévation ou l'abaissement des fluides qu'ils renferment, qu'en déterminant l'inclinaison des premiers plans de la surface du fluide intérieur, extrêmement voisins des parois du tube, inclinaison dont dépend la concavité ou la convexité de cette surface et la grandeur de son rayon. Si, par l'effet du frottement du fluide contre les parois du tube, on augmente ou l'on diminue la courbure, l'effet capillaire augmentera ou diminuera dans le même rapport.

Il est intéressant de connaître le rayon de courbure de la surface de l'eau renfermée dans les tubes capillaires de verre. On peut y parvenir au moyen d'une expérience curieuse qui rend sensibles à la fois les effets de la concavité et de la convexité des surfaces. Elle consiste à enfoncer dans l'eau, à une profondeur connue, un tube capillaire de verre, d'un diamètre pareillement connu. En fermant avec le doigt l'extrémité inférieure du tube, on le retire de l'eau et l'on essuie légèrement sa surface extérieure. En ôtant le doigt, on voit l'eau s'abaisser dans le tube et former une goutte d'eau sur la base inférieure; mais la hauteur de la colonne est toujours plus grande que l'élévation de l'eau dans le tube, au-dessus du niveau. Cet excès est dû à l'action de la goutte sur cette colonne, à raison de sa convexité; et l'on observe qu'il est d'autant plus considérable que le diamètre de la goutte est plus petit. La longueur de la colonne fluide employée à former cette goutte en détermine la masse; et comme sa surface est sphérique, ainsi que celle du fluide intérieur, si l'on connaît la hauteur du fluide, au-dessus du sommet de la goutte, et la distance de ce sommet au plan de la base inférieure du tube, il sera facile d'en conclure les rayons de ces deux surfaces. Quelques expériences me portent à croire que la surface du fluide intérieur est fort approchante de celle d'une demi-sphère.

Clairaut a fait cette singulière remarque : savoir que, *si la loi de l'attraction de la matière du tube sur le fluide ne diffère que par son intensité de la loi de l'attraction du fluide sur lui-même, le fluide s'élèvera au-dessus du niveau, tant que l'intensité de la première de ces attractions surpassera la moitié de l'intensité de la seconde*. Si elle en est exactement la moitié, il est facile de s'assurer que la surface du fluide dans le tube sera horizontale, et qu'il ne s'élèvera pas au-dessus du niveau. Si ces deux intensités sont égales, la surface du fluide dans le tube sera concave, et celle d'une demi-sphère; et il y aura élévation du fluide. Si l'intensité de l'attraction du tube est nulle ou insensible, la surface du fluide dans le tube sera convexe, et celle d'une demi-sphère; il y aura dépression du fluide. Entre ces deux limites, la surface du fluide sera celle d'un segment sphérique, et elle sera concave ou convexe, suivant que l'intensité de l'attraction de la matière du tube sur le fluide sera plus grande ou plus petite que la moitié de celle de l'attraction du fluide sur lui-même.

Si l'intensité de l'attraction du tube sur le fluide surpasse celle de l'attraction du fluide sur lui-même, il me paraît vraisemblable qu'alors le fluide, en s'attachant au tube, formera un tube intérieur qui seul élèvera le fluide dont la surface sera concave, et celle d'une demi-sphère. Je présume que ce cas est celui de l'eau dans un tube de verre.

Après avoir considéré les fluides terminés par des surfaces sphériques, je les considère terminés par des surfaces cylindriques. Ce cas est celui d'un fluide renfermé entre deux plans parallèles très proches l'un de l'autre et plongeant par leurs extrémités inférieures, dans un vase rempli du même fluide. Je trouve, par l'analyse, que le fluide doit s'élever ou s'abaisser suivant que la surface cylindrique du fluide est concave ou convexe et que cette élévation ou cette dépression suit encore la raison inverse de la distance mutuelle des plans. Je trouve, de plus, que l'élévation ou la dépression est égale à celle qui aurait lieu dans un tube cylindrique dont cette distance serait le demi-diamètre intérieur. Parvenu à ce résultat de l'analyse, j'ai proposé à M. Haüy de le vérifier par des expériences, et il l'a trouvé entièrement conforme à celles qu'il a bien voulu faire à ma prière. Depuis, en relisant ce que l'on a écrit sur l'action capillaire, j'ai vu que ces expériences avaient été déjà faites avec beaucoup de soin, en présence de la Société royale de Londres et sous les yeux de Newton, et que leur résultat est exactement conforme à celui de l'analyse. On peut s'en convaincre par le passage suivant de son *Optique*, Ouvrage admirable, dans lequel ce profond génie a jeté, en avant de son siècle, un grand nombre de vues originales que la Chimie moderne a confirmées.

« Voici (dit-il, question 31) quelques expériences de la même espèce. Si deux plaques de verre planes et polies (supposez deux pièces d'un miroir bien poli) sont jointes ensemble à une distance très petite l'une de l'autre, leurs côtés étant parallèles, et que par leurs extrémités inférieures on les enfonce un peu dans un vase plein d'eau; cette eau montera entre les deux verres et, à mesure que les plaques seront moins éloignées, l'eau s'élèvera à une plus grande hauteur. Si leur distance est environ la centième partie d'un pouce, l'eau montera à la hauteur d'un pouce environ, et, si la distance est plus grande ou plus petite, en quelque proportion que ce soit, la hauteur sera à peu près en proportion réciproque de la distance..... Si l'on trempe, dans une eau dormante, le bout d'un tuyau de verre fort menu, l'eau montera dans le tuyau, à une hauteur qui sera réciproquement proportionnelle au diamètre de la cavité du tuyau, et égalera la hauteur à laquelle elle monte entre les deux plaques de verre, si le demi-diamètre de la cavité du tuyau est égal à la distance qui est entre les plaques, ou à peu près. Du reste, toutes ces expériences réussissent aussi bien dans le vide qu'en plein air, comme on l'a éprouvé en présence de la Société royale et, par conséquent, elles ne dépendent en aucune manière du poids ou de la pression de l'atmosphère. »

Les phénomènes capillaires des plans inclinés et des tubes coniques et prismatiques sont autant de corollaires de mon analyse. Ainsi, l'on observe qu'une petite colonne d'eau, dans un tube conique ouvert par ses deux extrémités et maintenu horizontalement, se porte vers le sommet du tube, et l'on voit, par ce qui précède, que cela doit être. En effet, la surface de la colonne fluide est concave à ses deux extrémités, mais le rayon de sa surface est plus petit du côté du sommet que du côté de la base; l'action du fluide sur lui-même est donc moindre du côté du sommet et, par conséquent, la colonne doit tendre vers ce côté. Mais si la colonne fluide est du mercure, alors sa surface est convexe et son rayon est moindre encore vers le sommet que vers la base, mais à raison de sa convexité, l'action du fluide sur lui-même est plus grande vers le sommet et la colonne doit se porter vers la base du tube.

On peut balancer cette action par le propre poids de la colonne, et la tenir suspendue en équilibre, en inclinant l'axe du tube à l'horizon. Un calcul fort simple fait voir que, si la longueur de la colonne est très petite, le sinus de l'inclinaison de l'axe est alors à très peu près en raison inverse du carré de la distance du milieu de la colonne au sommet du cône, ce qui a lieu semblablement si, au lieu de faire mouvoir une goutte de fluide dans un tube conique, on la fait mouvoir entre deux plans qui forment entre eux un très petit angle. Ces résultats sont entièrement conformes à l'expérience, comme on peut le voir dans l'*Optique* de Newton (question 31).

Le calcul nous apprend, de plus, que le sinus de l'inclinaison de l'axe du cône à l'horizon est alors, à très peu près, égal à une fraction dont le dénominateur est la distance du milieu de la goutte au sommet du cône, et dont le numérateur est la hauteur à laquelle le fluide s'élèverait dans un tube cylindrique dont le diamètre serait celui du cône au milieu de la colonne. Si deux plans qui renferment une goutte du même fluide forment entre eux un angle égal au double de l'angle formé par l'axe du cône et ses côtés, l'inclinaison à l'horizon de la ligne qui divise également l'angle formé par les plans ne doit être que la moitié de celle de l'axe du cône, pour que la goutte reste en équilibre.

La théorie précédente donne encore l'explication et la mesure d'un phénomène singulier que présente l'expérience. Soit que le fluide s'élève ou s'abaisse entre deux plans verticaux et parallèles plongeant dans ce fluide par leurs extrémités inférieures, ces plans tendent à se rapprocher. L'analyse nous montre que, si le fluide s'élève entre eux, chaque plan éprouve, du dehors en dedans, une pression égale à celle d'une colonne du même fluide, dont la hauteur serait la moitié de la somme des élévations, au-dessus du niveau, des points de contact des surfaces intérieures et extérieures du fluide avec le plan, et dont la base serait la partie du plan comprise entre les deux lignes horizontales menées par ces points. Si le fluide s'abaisse entre les plans, chacun d'eux éprouvera pareillement, du dehors en dedans, une pression égale à celle d'une colonne du même fluide, dont la hauteur serait la moitié de la somme des abaissements, au-dessous du niveau, des points de contact des surfaces intérieures et extérieures du fluide avec le plan, et dont la base serait la partie du plan comprise entre les deux lignes horizontales menées par ces points.

En général, si l'on compare la théorie que j'expose aux nombreuses expériences des physiciens sur l'action capillaire, on verra que les résultats, obtenus dans ces expériences, s'en déduisent, non par des considérations vagues et toujours incertaines, mais par une suite de raisonnements géométriques qui me paraissent ne laisser aucun doute sur la vérité de cette théorie. Je désire que cette application de l'analyse à l'un des objets les plus curieux de la Physique puisse intéresser les géomètres et les exciter à multiplier, de plus en plus, ces applications qui joignent, à l'avantage d'assurer les théories physiques, celui de perfectionner l'analyse elle-même, en exigeant souvent de nouveaux artifices de calcul.

NOTE.

Les démonstrations des théorèmes précédents seront publiées dans l'un des prochains Volumes de l'Institut. Voici quelques résultats d'analyse, qui pourront guider ceux qui voudront parvenir d'eux-mêmes aux principales.

Désignons par $\varphi(f)$ la loi de l'attraction d'une molécule fluide, sur une autre molécule placée à la distance f; $\varphi(f)$ décroissant avec une extrême rapidité, lorsque f augmente, et étant insensible pour toute valeur sensible de f. Désignons ensuite par $c - \Pi(f)$ l'intégrale $\int df\,\varphi(f)$ prise depuis $f = 0$, c étant la valeur de cette intégrale, lorsque f est infini; $\Pi(f)$ décroîtra pareillement avec une rapidité extrême et sera encore insensible pour toutes les valeurs sensibles de f. Désignons encore par $c' - \Psi(f)$ l'intégrale $\int f\,df\,\Pi(f)$, c' étant sa valeur lorsque f est infini; $\Psi(f)$ sera pareillement insensible pour toutes les valeurs sensibles de f. Enfin, désignons par K et H les intégrales $2\pi\int dz\,\Psi(z)$ et $2\pi\int z\,dz\,\Psi(z)$ prises depuis z nul jusqu'à z infini, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. On trouvera, par l'analyse du n° 12 du second Livre de la *Mécanique céleste* (¹), que l'action d'une sphère dont le rayon est b, sur le fluide renfermé dans un canal infiniment étroit, perpendiculairement à la surface, est $K + \frac{H}{b}$. Par cette action, j'entends la pression que le fluide du canal exercerait en vertu de cette action, sur une base perpendiculaire à la direction du canal, placée dans son intérieur à une distance quelconque sensible de la surface du corps, et prise pour unité.

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. I, p. 155.

Ce serait encore l'expression de l'action d'un corps terminé par un segment sensible d'une sphère dont le rayon est b; ce qui résulte de ce que l'attraction n'est sensible qu'à des distances insensibles. Si la surface, au lieu d'être convexe, est concave, il faut faire b négatif et alors l'action devient $K - \frac{H}{b}$. Dans le cas du plan ou de b infini, elle se réduit à K.

Ces attractions sont du même genre que celles dont dépend la réfraction de la lumière et que j'ai considérées dans les n^os 2 et 3 du dixième Livre de ma *Mécanique céleste* (¹). Ce qui les rend indépendantes des dimensions des corps, c'est qu'il est indifférent de prendre les intégrales précédentes, depuis zéro jusqu'à l'infini, ou depuis zéro jusqu'à une valeur sensible de la variable.

Le théorème relatif à l'action d'un corps quelconque, sur un canal intérieur infiniment étroit et perpendiculaire à sa surface, se démontre en observant qu'à chaque point de la surface on peut concevoir un ellipsoïde osculateur qui se confond avec le corps, de manière que la différence d'action de ces deux corps sur le canal est insensible; et il est facile de prouver que l'action d'un ellipsoïde sur un canal, qui passe par l'un de ses axes, est égale à la demi-somme des actions de deux sphères qui auraient pour rayons le plus grand et le plus petit des rayons osculateurs de la surface de l'ellipsoïde à l'extrémité de cet axe. En nommant donc b et b' ces deux rayons, l'action du corps sera $K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$. Dans le cas d'une surface cylindrique, b est infini, et l'action devient $K + \frac{H}{2b'}$. La différence de cette action et de celle d'un corps terminé par une surface plane est donc $\frac{H}{2b'}$ et, par conséquent, la moitié plus petite que si la surface du corps était sphérique et d'un rayon égal à b'. C'est la raison pour laquelle le fluide s'abaisse ou s'élève entre deux plans parallèles, la moitié moins que dans un tube cylindrique d'un diamètre égal à leur distance.

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. IV, p. 235 et suiv.