

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

AUX OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES DE LA MÉRIDIENNE.

Connaissance des Temps pour l'an 1822; 1820.

Ce Mémoire est reproduit au § 1 du troisième Supplément : *Application des formules géodésiques de probabilité à la Méridienne de France*, Tome VII, p. 581-585 ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ La comparaison du Mémoire dont nous venons de donner le titre avec celui qui a été inséré au Tome VII permet toutefois de relever une petite erreur dans le § 1 du troisième Supplément, Tome VII. A la page 583, lignes 7-8, on lit :

« Il y a un contre un à parier que l'erreur tombe dans les limites $\pm 8^{\text{''}},0757$. »

Et à la page 585, ligne 10 :

« De là il suit que les limites $\pm 8^{\text{''}},0937$, etc. »

L'un de ces deux nombres est donc erroné.

Le Mémoire de la *Connaissance des Temps*, 1822, donne deux fois la même valeur pour l'erreur moyenne, soit $\pm 8^{\text{''}},0937$.

En réalité il faudrait $\pm 8^{\text{''}},0940$. Effectivement

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \quad (\text{Parl un contre un})$$

pour

$$t = 0,476936 \quad (\text{Faye, 1881, t. I, p. 225, ou Liagre, 1879, p. 273}).$$

D'autre part, Tome VII, p. 583, on a

$$t = \frac{5689,797}{11706,40},$$

d'où, pour l'erreur moyenne,

$$t = \pm 8^{\text{''}},0940.$$

Le nombre $\pm 8^{\text{''}},0937$, donné par Laplace, diffère un peu, sans doute, parce que la valeur de t , déduite des formules de Laplace, Tome VII, p. 104, n'a pas été calculée avec autant de précision que celle employée plus haut et tirée de Faye.

SUR

LES INÉGALITÉS LUNAIRES

DUES A L'APLATISSEMENT DE LA TERRE ⁽¹⁾.

Connaissance des Temps pour l'an 1823; 1820.

J'ai publié, dans les Mémoires de l'Institut ⁽²⁾ et dans le septième Livre de la *Mécanique céleste* ⁽³⁾, l'analyse par laquelle j'ai reconnu dans le mouvement lunaire deux inégalités, l'une en longitude, et l'autre en latitude, qui dépendent de l'aplatissement de la Terre. Les coefficients de ces inégalités ont été comparés aux observations, d'abord par M. Bouvard, ensuite par MM. Bürg et Burckhardt, qui les ont déduits du nombre immense d'observations qu'ils ont employées pour la formation de leurs Tables lunaires. Toutes ces comparaisons donnent à la Terre un aplatissement à très peu près égal à $\frac{1}{306}$, et, ce qui est remarquable, l'aplatissement conclu de l'inégalité en longitude s'accorde avec celui que donne l'inégalité en latitude. Cet accord prouve l'exactitude de cet aplatissement, le même, à fort peu près, que celui qui résulte, soit des mesures des degrés des méridiens, soit des expériences du pendule.

Quelques géomètres se sont, depuis, occupés de l'analyse des inégalités précédentes. Leurs résultats s'accordent avec les miens, rela-

⁽¹⁾ Lu au Bureau des Longitudes, le 19 janvier 1820.

⁽²⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. XII, p. 257.

⁽³⁾ *Id.*, T. III, p. 266.

tivement à l'inégalité en latitude; mais ils en diffèrent environ de $\frac{1}{6}$, par rapport à l'inégalité en longitude. Cette différence qui, si je m'étais trompé, troublerait l'accord des deux inégalités, m'a fait examiner de nouveau mon analyse, et je l'ai trouvée juste. Elle est fondée sur les équations différentielles du mouvement troublé, dans lesquelles la différentielle du temps est supposée constante, et que j'ai développées dans le second Livre de la Mécanique céleste. Ces équations sont propres à cette recherche; et l'on voit, en suivant l'analyse du Livre VII, Chapitre II, qu'elles donnent, avec autant de facilité que d'exactitude, l'inégalité dont il s'agit.

Les géomètres dont j'ai parlé ont fait usage des équations où la différentielle du mouvement vrai en longitude est supposée constante, et sur lesquelles j'ai fondé ma théorie de la Lune, comme étant plus avantageuses pour obtenir, par des approximations convergentes, les diverses inégalités du mouvement de cet astre, dues à l'action du Soleil. Car, dans des recherches aussi compliquées, le choix des méthodes n'est point indifférent, et celles qui conviennent à une question peuvent ne pas convenir aux autres: ainsi, dans la théorie des planètes, il est préférable d'employer, comme je l'ai fait dans la *Mécanique céleste*, les équations différentielles où l'élément du temps est supposé constant: l'emploi des autres équations exige quelques attentions assez délicates dont l'omission peut induire en erreur. Cela est arrivé à Clairaut, relativement à l'inégalité produite par l'action de la Lune dans le mouvement de la Terre (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1754); et l'on peut conclure de ce qui précède qu'une omission semblable a été faite par les géomètres qui ont voulu dériver de ces équations les inégalités du mouvement lunaire dues à l'aplatissement de la Terre. Mais, pour m'en assurer encore plus, j'ai cherché les coefficients de ces inégalités, par les mêmes équations, en faisant usage de toutes les considérations délicates que cette recherche exige; et je suis parvenu aux résultats que j'avais trouvés par ma première analyse; ce qui en confirme l'exactitude. J'ai pensé que cette confirmation de l'un des résultats de la pe-

santeur universelle, les plus curieux et les plus utiles dans la théorie de la Terre, pourrait intéresser les géomètres.

Je supposerai ici que l'on a sous les yeux le septième Livre de la *Mécanique céleste* dont ce qui suit doit être regardé comme la continuation, les numéros étant ceux de ce Livre. On a vu, dans le Chapitre II, que la valeur de Q est augmentée, par l'aplatissement de la Terre, du terme

$$-2\beta u^2 s \sin v,$$

en faisant

$$\beta = \left(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi \right) D^2 \sin \lambda \cos \lambda,$$

La troisième des équations (L) du n° 1 donnera ainsi, en la développant, en y faisant $s = H \sin v$ et en ne comparant que les termes dépendants de $\sin v$,

$$\phi = (1-f^2)H \sin v + (g^2-1)H \sin v + \frac{2\beta u}{h^2} \sin v.$$

Car cette équation (L), développée, se change dans l'équation (L') du n° 13; or il est clair que, si, dans le développement, on substituait pour s , $H \sin v$, au lieu de $\gamma \sin(gv - \theta)$ (1), $H \sin v$ aurait le même coefficient que $\gamma \sin(gv - \theta)$; seulement il faudrait changer, dans le coefficient de $\gamma \sin(gv - \theta)$ de l'équation (L'), g en f . Ainsi la valeur de G n'entrant que dans la partie de ce coefficient, de l'ordre m^2 , on voit que le coefficient de $H \sin v$ ne doit différer du coefficient de $\gamma \sin(gv - \theta)$ et qui est égal à $g^2 - 1$, que de quantités de l'ordre m^2 . En ne portant donc l'approximation que jusqu'aux termes de l'ordre m^2 , on aura

$$H = \frac{-2\beta \bar{u}}{h^2(g^2 - f^2)},$$

$\bar{u}$ étant la partie constante de u . Le dénominateur de cette quantité est exact aux quantités près de l'ordre m^2 ; et, comme il est de l'ordre m^2 , la valeur de H est exacte aux quantités près de l'ordre m^2 .

(1) *Oeuvres de Laplace*, T. III, p. 199.



Maintenant la fonction $\frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$ donne le terme

$$-\beta f \bar{u} \gamma \sin(gv - fv - \theta),$$

ce qui donne dans $\frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$ le terme

$$\frac{2\beta f \bar{u}(g+f)}{h^2(g^2-f^2)} \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

Si, dans la seconde des équations (L) du n° 1, on n'a égard qu'aux termes qui peuvent produire le même argument; si l'on substitue au lieu de $\frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{s}{u} \frac{\partial Q}{\partial s}$ sa valeur relative à l'action du Soleil, donnée dans le n° 3; et si l'on augmente Q de la quantité qui dépend de l'aplatissement de la Terre, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(1 - \frac{3}{2} m^2\right) u &= -\frac{2\bar{u}}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} - \frac{3}{2} \frac{s^2}{h^2} \\ &\quad - \frac{4\beta \bar{u}}{h^2} \gamma \cos(gv - fv - \theta). \end{aligned}$$

Le terme

$$-\frac{2\bar{u}}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2},$$

produit le suivant :

$$-\frac{2\beta \bar{u}}{h^2(g^2-f^2)} \gamma f(g+f) \cos(gv - fv - \theta);$$

le terme $-\frac{3}{2} \frac{s^2}{h^2}$ produit le suivant :

$$\frac{3\beta \bar{u}}{h^2(g^2-f^2)} \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

En nommant donc δu la partie de u relative à cet argument, et négligeant $(g-f)^2$, comme étant de l'ordre m^4 , on aura à très peu près

$$\delta u = \left[\frac{-2f(g+f)\bar{u}}{h^2(g^2-f^2)} - \frac{3}{2} \frac{\bar{u}}{h^2} \right] \gamma \cos(gv - fv - \theta) - \frac{4\beta \bar{u}}{h^2} \gamma \cos(gv - fv - \theta),$$

équation dans laquelle on peut supposer $f=1$ dans le numérateur du premier terme du second membre, $f-1$ étant incomparablement plus petit que $g-1$.

Considérons maintenant le dénominateur

$$hu^2 \sqrt{1 + \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}},$$

de l'expression de dt donnée par la première des équations (L) du n° 1. Ce dénominateur est à très peu près égal à

$$hu^2 \left[1 + \frac{1}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right];$$

cette fonction devient, en y substituant $\bar{u} + \delta u$, pour u ,

$$h\bar{u}^2 + \frac{h\bar{u}^2}{h^2(g^2-f^2) \left(1 - \frac{3}{2} m^2\right)} \left\{ \begin{aligned} &-3(g-1) - 3m^2 \\ &+ 6 \left(\frac{1}{h^2 \bar{u}} - 1 \right) \\ &- 8(g^2-1) \left(1 - \frac{3}{2} m^2 \right) \end{aligned} \right\} \beta \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

On a, par les nos 4, 6 et 10,

$$h^2 \bar{u} = \frac{a^2}{a} = 1 - \frac{1}{2} m^2;$$

ainsi, dans le second terme de la fonction précédente, le numérateur est de l'ordre m^2 , et, par conséquent, du même ordre que le dénominateur; on peut donc substituer, dans l'un et dans l'autre, $\frac{3}{2} m^2$, au lieu de $g^2 - f^2$, et $\frac{3}{4} m^2$, au lieu de $g-1$, ce qui réduit ce terme à

$$h\bar{u}^2 \left[1 - \frac{19}{2} \frac{\beta}{a^2} \gamma \cos(gv - fv - \theta) \right].$$

$\bar{u}$ étant à fort peu près égal à $\frac{1}{a}$, et h^2 étant à peu près égal à a .

De là on tire

$$n dt = dv \left[1 + \frac{19}{2} \frac{\beta}{a^2} \gamma \cos(gv - fv - \theta) \right],$$

d'où résulte, par l'intégration, dans l'expression de la longitude moyenne, l'inégalité

$$\frac{19}{2} \frac{\beta}{a^3} \frac{\gamma}{g-f} \sin(gv - fv - \theta),$$

ce qui est conforme à ce que j'ai trouvé dans le second Chapitre ⁽¹⁾.

On voit par l'analyse précédente que le coefficient de l'argument $\sin(gv - fv - \theta)$ n'est divisé que par la première puissance du facteur qui multiplie v dans cet argument : cela résulte encore de ce que l'on sait d'ailleurs touchant les inégalités du mouvement des corps célestes, données par une première approximation : le carré du coefficient de l'angle v ne peut y être introduit comme diviseur qu'en vertu de la partie de ce coefficient qui est relative au corps perturbateur. Dans l'argument précédent, cette partie est $(f-1)$, et elle dépend de la précession des équinoxes. On trouve, en effet, par ce qui précède, qu'elle peut introduire un terme qui a pour diviseur $(g-f)^2$. Mais, comme ce terme a $f-1$ pour facteur, il en résulte que, vu la petitesse de la fraction $\frac{f-1}{g-f}$, il peut être négligé, comme nous l'avons fait. Il suit de là que les termes dépendant des carrés de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire n'introduiraient, dans l'expression de la longitude moyenne, que des termes de l'ordre de ces carrés, ayant pour diviseur la première puissance de $g-1$; ils sont donc très petits par rapport à l'inégalité que nous avons déterminée. Mais l'importance de ces inégalités lunaires dans la recherche de l'aplatissement de la Terre m'a déterminé à considérer ces termes. Pour cela, j'observerai d'abord que la valeur exacte de μ ou du sinus de la déclinaison de la Lune, considérée dans le second Chapitre, n° 20, est

$$\frac{s \cos \lambda + \sin \lambda \sin f v}{\sqrt{1+s^2}},$$

elle rentre dans celle du numéro cité, en négligeant le cube de s .

⁽¹⁾ Oeuvres de Laplace, T. III, p. 272.

auquel il faut ici avoir égard. En faisant

$$\beta = 2 \left(\alpha \rho - \frac{1}{2} \alpha \varphi \right) D^2 \sin \lambda \cos \lambda,$$

l'aplatissement de la Terre introduit dans Q le terme

$$-\frac{\beta u^2 s \sin f v}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il introduit, par conséquent, dans la fonction

$$\frac{us \frac{\partial Q}{\partial u} + (1+s^2) \frac{\partial Q}{\partial s}}{h^2 u^2}$$

le terme

$$-\beta \left(1 - \frac{7}{4} \gamma^2 \right) \frac{u}{h^2} \sin f v.$$

On a, par les n° 4, 6 et 10,

$$\frac{u}{h^2} = \frac{1+2e^2+\frac{5}{4}\gamma^2}{aa_1}, \quad \frac{1}{aa_1} = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2} m^2 \right).$$

De là il est facile de conclure que l'inégalité précédente en latitude devient

$$-2 \left(\alpha \rho - \frac{1}{2} \alpha \varphi \right) \frac{D^2 \sin \lambda \cos \lambda}{a^2} \frac{1}{g^2 - f^2} \left[\left(1 + 2e^2 + \frac{1}{2} m^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 \right) \right] \sin f v,$$

mais cette expression a besoin d'une correction fondée sur ce que $g^2 - 1$ n'est point exactement le coefficient qu'aurait $\sin f v$ dans l'équation (L') du n° 13, en introduisant $H \sin f v$ dans l'expression de s . Il est facile de voir que les deux coefficients doivent différer, d'abord parce qu'il faut changer g en f dans le coefficient de $\gamma \sin(gv - \theta)$, ce qui donne à très peu près

$$\frac{(g^2-1)(g-1)(1-3m)}{2(1-m)} B_1^{(0)}$$

pour la quantité dont il faut diminuer le coefficient (g^2-1) de



$\gamma \sin(gv - \theta)$ dans l'équation (L'') pour avoir le coefficient de $\sin v$, coefficient que nous désignerons par $g_1^2 - 1$. La petitesse de B_1^0 , qui, par le n° 16, est égal à 0,0283831, rend cette diminution insensible.

On trouve, en effet, qu'elle est égale à $(g^2 - 1)0,000047845$. Ainsi elle n'altère pas d'un vingt-millième le coefficient de l'inégalité précédente; on peut donc la négliger.

Les deux coefficients $g_1^2 - 1$ et $g^2 - 1$ peuvent différer dans les puissances $s^2, s^4, \dots$ que donne le développement des forces perturbatrices dans les équations (L) et (L') des n°s 1 et 13. Mais si l'on substitue dans s^2 , par exemple, au lieu de s , $\gamma \sin(gv - \theta) + H \sin v$, et qu'on néglige le carré de H , il est facile de voir que les coefficients de $\gamma \sin(gv - \theta)$ et de $H \sin v$ seront égaux entre eux et à $\frac{3}{4}\gamma^2$. La quantité $g_1^2 - f^2$ est le dénominateur qu'il faudrait rigoureusement substituer à $g^2 - f^2$ dans l'expression de l'inégalité précédente en latitude; on peut donc y conserver sans erreur sensible le dénominateur $g^2 - f^2$.

Le facteur $1 + 2e^2 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\gamma^2$ est égal à 1,004757; il diffère très peu de l'unité. Cependant, il est utile d'y avoir égard dans la recherche délicate de l'aplatissement de la Terre. Pour avoir égard aux carrés de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire, dans l'inégalité lunaire en longitude, il devient très avantageux d'employer l'analyse du Livre VII, Chapitre II.

MM. Bürg et Burckhardt ont comparé les inégalités précédentes: le premier, à toutes les observations de Maskelyne; le second, à l'ensemble des observations de Maskelyne et de Bradley. L'un et l'autre sont parvenus à la même inégalité lunaire en latitude, dont ils ont fixé le coefficient à 8",0 en secondes sexagésimales; on peut donc regarder ce coefficient comme bien déterminé. En le comparant à l'expression analytique précédente, on trouve $\frac{1}{300}$ à très peu près pour l'aplatissement α_2 de la Terre.

Relativement à l'inégalité en longitude, Bürg l'a fixée à 6",8, et Burckhardt à 7",0. On voit donc qu'ils sont à très peu près d'accord

sur cet objet. Par l'analyse précédente, le coefficient de l'inégalité lunaire en longitude est à très peu près égal au coefficient de l'inégalité lunaire en latitude, multiplié par $\frac{10}{3}\gamma$, du moins, si l'on néglige les carrés de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire; ces coefficients sont donc dans le rapport de l'unité à 0,85576; en sorte qu'au coefficient 8",0 de l'inégalité en latitude répond le coefficient 6",846 pour l'inégalité en longitude, ce qui diffère très peu de la moyenne 6",9 des résultats de MM. Bürg et Burckhardt. Cela montre avec quelle précision ces inégalités donnent l'aplatissement de la Terre.



SUR
LE PERFECTIONNEMENT DE LA THÉORIE
ET DES
TABLES LUNAIRES.

Connaissance des Temps pour l'année 1823; 1820 (1).

L'Académie des Sciences, en proposant pour sujet de prix la formation de Tables lunaires uniquement fondées sur la théorie de la pesanteur universelle, a eu pour objet de faire disparaître la seule exception que présentait, à cet égard, l'ensemble des Tables des mouvements célestes.

Déjà, par les travaux des géomètres, la théorie lunaire se rapprochait beaucoup des observations; et, dans le septième Livre de la *Mécanique céleste*, j'étais parvenu à réduire à 8",5 la plus grande différence entre les coefficients des inégalités de mon analyse et ceux des Tables de M. Bürg. Il était donc naturel de penser qu'au moyen d'approximations portées plus loin la théorie représenterait les observations dans les limites des erreurs dont elles sont susceptibles. Les deux pièces que l'Académie vient de couronner remplissent cette condition. Elles sont, l'une et l'autre, le résultat d'un immense travail; et leur comparaison avec nos Tables lunaires ne laisse aucun lieu de douter que les formules qu'elles contiennent, réduites en Tables, satisfieraient aux observations. C'est ce que l'auteur de la première pièce, M. Damoiseau, a prouvé directement en formant, d'après sa théorie, de nouvelles Tables qui, comparées à soixante observations de Bradley, et à

(1) Lu au Bureau des Longitudes, le 29 mars 1820.

SUR LE PERFECTIONNEMENT DE LA THÉORIE, ETC. 499

soixante observations faites depuis 1802, n'ont donné que de légères erreurs du même ordre que celles des Tables de MM. Bürg et Burckhardt. On peut donc croire qu'en améliorant encore, par la discussion d'un très grand nombre d'observations, les éléments arbitraires de sa théorie, l'auteur donnerait à ses Tables toute l'exactitude que l'on peut désirer. Éclairés par la théorie sur la forme des arguments des inégalités lunaires, les astronomes ont pu construire de bonnes Tables par les observations et, par ce moyen, éluder les difficultés des intégrations et des approximations, que cette théorie présente. Mais il était intéressant de vaincre ces difficultés, et d'arriver directement au but que l'on se proposait d'atteindre.

Les auteurs des deux pièces sont partis des équations différentielles du problème des trois corps, dans lesquelles la différentielle du mouvement vrai de la Lune, rapporté à l'écliptique, est supposée constante; et ils ont déterminé la longitude moyenne de cet astre, sa latitude et sa parallaxe, en séries de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement à son mouvement vrai. Cette méthode, dont j'ai fait usage dans le septième Livre de la *Mécanique céleste*, me paraît devoir donner les approximations les plus convergentes. En effet, les forces perturbatrices se présentent sous cette forme, ou du moins elles y sont facilement réduites: pour les réduire à une autre forme, par exemple, à des séries de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, il faudrait, à cause des inégalités considérables du mouvement lunaire, provenant soit de sa partie elliptique, soit des perturbations, porter fort loin les approximations; ce qui compliquerait l'analyse et rendrait les approximations moins convergentes. On a essayé d'autres formes de séries, et il est facile d'en imaginer un grand nombre; mais aucune ne paraît plus propre à obtenir les coefficients des inégalités lunaires. Cependant quelques inégalités fort petites, dont l'argument croît avec une grande lenteur, peuvent être mieux déterminées par d'autres méthodes. Dans la précédente, ces inégalités acquièrent pour diviseurs, en vertu des intégrations répétées, les carrés des coefficients très petits de la longitude vraie



de leurs arguments. Dans le résultat final, ces divers carrés disparaissent et se réduisent à la première puissance; en sorte que ce résultat, étant la différence de quantités très grandes par rapport à lui, devient inexact si l'on n'a pas l'attention de conserver, dans la suite des calculs, toutes les quantités de son ordre. On a vu, dans le Mémoire précédent sur les inégalités lunaires dues à l'aplatissement de la Terre, que plusieurs géomètres, pour avoir négligé cette attention, n'avaient pas bien déterminé l'inégalité dépendant de la longitude du nœud de l'orbite lunaire. C'est pour éviter cet inconvénient que j'ai cherché cette inégalité par une autre méthode dans le Chapitre II du septième Livre de la *Mécanique céleste*. L'uniformité de la méthode donne sans doute de l'élégance à l'analyse. Mais, quand on se propose de rapprocher le plus qu'il est possible l'analyse, des observations, ce qui doit être le but de la théorie lunaire, il faut varier les méthodes suivant la nature des inégalités. C'est dans le choix de ces méthodes et dans la prévoyance des quantités qui peuvent devenir sensibles par les intégrations successives que consiste l'art des approximations, art non moins utile au progrès des Sciences que la recherche des méthodes analytiques. La méthode qui me semble préférable donne la longitude moyenne de la Lune en fonction de la longitude vraie, et pour la formation des Tables il est nécessaire de réduire la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne. Mais cette réduction peut s'exécuter facilement avec toute la précision désirable, et avec la certitude que les termes négligés sont insensibles.

Ayant reconnu, par la théorie, la cause des inégalités séculaires du mouvement de la Lune, j'ai mis un grand intérêt à la vérification de mes résultats, surtout de celui qui est relatif au mouvement du péricée à raison de sa grandeur. Les deux pièces ont confirmé ces résultats. La forme des expressions analytiques de la première étant la même que j'ai adoptée dans le septième Livre de la *Mécanique céleste*, j'ai pu comparer ces expressions aux miennes. Je les ai trouvées concordantes dans les degrés d'approximation qui leur sont communs; mais l'auteur de la pièce ayant porté plus loin ses approximations, les nou-

veaux termes introduits par elles ont produit des différences peu considérables à l'égard des équations séculaires du moyen mouvement et du péricée, mais un peu sensibles à l'égard du mouvement des nœuds.

Le Tableau suivant offre les coefficients numériques par lesquels on doit, pour avoir les équations séculaires, multiplier l'intégrale du produit de la différentielle du temps par l'excès du carré de l'excentricité de l'orbite terrestre, sur ce même carré, à une époque arbitraire origine du temps, et que je fixerai au commencement de 1801.

	Première pièce.	<i>Mécanique céleste.</i>	Deuxième pièce.
Equation séculaire de la longitude vraie ..	0,0086457	0,0083660	0,00760102
Equation séculaire du péricée. . .	-0,0229890	-0,0251093	-0,0311110
Equation séculaire du nœud	0,0051936	0,0061528	0,0053877

Les résultats de la première pièce, vérifiés de nouveau par l'auteur à ma prière, me paraissent dignes de confiance. Les auteurs de la seconde pièce, MM. Plana et Carlini, n'ont point eu égard, dans l'expression de l'inégalité séculaire du moyen mouvement, aux termes dépendant du carré de l'excentricité de l'orbite lunaire et qui, rendus sensibles par les petits diviseurs qu'ils acquièrent dans la suite des intégrations, produisent la différence des résultats des deux pièces. Quant à l'inégalité séculaire du péricée, la différence me paraît tenir à la nature des approximations dont les auteurs de ces pièces ont fait usage. L'auteur de la première a suivi la marche que j'ai adoptée dans la *Mécanique céleste*. Seulement il a porté plus loin les approximations. Les auteurs de la seconde pièce ont réduit leurs expressions en séries ordonnées par rapport aux puissances ascendantes du rapport du mouvement du Soleil à celui de la Lune, rapport moindre qu'un douzième. L'analyse ne présente point ces expressions sous cette forme : elle conduit à des équations dans lesquelles les quantités cherchées sont entremêlées et affectées de divers diviseurs. Pour les réduire à la forme de séries, il faut éliminer ces quantités et réduire ensuite en séries les diviseurs des divers termes de leurs expressions. On conçoit que cela doit conduire à des séries peu convergentes, et qu'il faut beaucoup prolonger pour obtenir le même degré de précision que



donne la méthode employée dans la *Mécanique céleste*. Cependant cette cause d'erreur, qui me semble avoir influé sensiblement sur la valeur de l'inégalité séculaire du périée donnée dans la seconde pièce, ne produit aucun effet sensible sur les inégalités périodiques. A leur égard, les deux pièces sont à très peu près d'accord entre elles et avec nos meilleures Tables; ce qui prouve les soins que les auteurs de la seconde pièce ont mis à porter leurs approximations aussi loin qu'il était nécessaire, et à vérifier des calculs aussi compliqués; les Tables fondées sur leurs résultats représenteraient donc les observations aussi bien que les Tables de la première pièce. Mais il suit incontestablement de ces deux pièces, que la loi de la pesanteur universelle est la seule cause des inégalités bien connues de la Lune, et que l'on peut fonder uniquement sur cette loi des Tables lunaires aussi exactes que nos meilleures Tables.

Les auteurs de la seconde pièce trouvent, dans le moyen mouvement lunaire, une inégalité séculaire égale au produit de $-\alpha$, 1398 par le cube du nombre des siècles écoulés depuis 1801. Cette inégalité, qui augmenterait d'environ 37' la longitude de la Lune au moment de ses éclipses dans les années 719 et 720 avant notre ère, dépend, suivant eux, du déplacement de l'écliptique vraie sur une écliptique fixe, par exemple sur celle de 1801. Mais ils n'ont point eu égard au déplacement séculaire de l'orbite lunaire sur la même écliptique, ce qui aurait détruit leur résultat; car j'ai fait voir que la partie de l'équation séculaire relative aux inclinaisons ne dépend que de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie, et que la rapidité du mouvement des nœuds de la Lune rend insensible la variation séculaire de cette inclinaison.

Si les auteurs de la seconde pièce eussent, comme celui de la première, donné à leurs expressions analytiques la forme que j'ai adoptée dans la *Mécanique céleste*, la comparaison de ces expressions en eût rendu la vérification très facile, et l'on aurait pu vérifier semblablement les calculs numériques. On parviendrait ainsi à donner à la théorie lunaire et aux Tables toute la certitude et la précision désirables. J'invite donc les géomètres et les astronomes qui s'occupent

de cette théorie à suivre la méthode que je viens d'indiquer et à comparer leurs calculs à ceux de la première pièce, lorsqu'elle sera publiée. L'importance de l'objet est un puissant motif pour les y déterminer. J'ai fait cette comparaison relativement à l'inégalité lunaire dépendant de la distance vraie de la Lune au Soleil. Cette inégalité que l'on nomme *parallactique*, parce qu'elle dépend de la parallaxe du Soleil, s'élève à plus de 2 minutes; elle est, par sa grandeur, très propre à déterminer cette parallaxe. J'ai donc mis, dans ma théorie de la Lune, un soin particulier à la bien calculer; mais, en comparant mon expression analytique à celle de la première pièce, j'ai trouvé entre elles une légère différence provenant de quelques petits termes que j'avais négligés, que l'auteur de la pièce a considérés, et dont j'ai reconnu l'exactitude. Il a revu de nouveau tous ses calculs analytiques et numériques sur cet objet, et il a trouvé que, en supposant la parallaxe du Soleil $\frac{1}{100}$ de celle de la Lune, l'inégalité dont il s'agit est 121",15. Je l'avais trouvée, dans la même hypothèse, de 122",01, et, suivant les auteurs de la seconde pièce, elle serait 122",90. Elle est de 122",378 suivant les Tables de M. Bürg, et de 122",97 suivant les Tables de M. Burckhardt; ce qui donne respectivement

$$8'',6303, \quad 8'',6721$$

pour la parallaxe moyenne du Soleil, sur le parallèle dont le rayon terrestre est celui d'une sphère de même masse que la Terre et de la même densité que sa densité moyenne. Le milieu 8'',65 me paraît être la valeur la plus probable de la parallaxe solaire.

L'emploi des observations pour la formation des Tables lunaires a l'avantage de faire connaître les coefficients des inégalités avec une exactitude toujours croissante, quand on augmente le nombre des observations. On voit même, par le calcul des probabilités, que l'on peut ainsi en approcher indéfiniment et, par là, surpasser la précision de la théorie dont les approximations deviennent tellement compliquées, lorsqu'on veut les porter fort loin, que l'on est forcé d'y renoncer. La méthode d'approximation, tirée des observations, peut donc être utilement employée. Mais on la rendra plus exacte et plus

facile si l'on y regarde comme autant de données certaines les coefficients sur lesquels la théorie ne laisse point d'incertitude, et les rapports qu'elle indique avec précision entre ces coefficients. Par ce moyen, on diminuera considérablement le nombre des coefficients à déterminer par la comparaison des observations; ce qui simplifiera le calcul et donnera plus de précision à ses résultats. On perfectionnera ainsi, par la combinaison des observations et de la théorie, les Tables du mouvement lunaire en longitude. A l'égard des Tables de la latitude et de la parallaxe, je pense qu'il convient de les former par la théorie.

Les auteurs des deux pièces ont considéré les inégalités à longues périodes, que j'ai indiquées dans le septième Livre de la *Mécanique céleste*; mais, à cet égard, leur analyse est incomplète. Les hautes montagnes de l'Asie et son plateau élevé peuvent avoir, sur l'inégalité qui dépend de la différence des deux hémisphères terrestres, une influence qu'il était intéressant d'apprécier, mais que j'ai trouvée insensible, comme on le verra dans le Mémoire suivant. La petite altération que les astronomes ont cru remarquer dans le moyen mouvement de la Lune est le seul point de sa théorie qui reste à éclaircir. Les observations futures, en constatant son existence, fixeront sa valeur. Heureusement, dans l'intervalle d'un demi-siècle, cette inégalité peut se confondre avec le moyen mouvement. Ainsi, tant qu'elle ne sera pas bien connue, il suffira aux besoins de la navigation de rectifier, de demi-siècle en demi-siècle, le moyen mouvement lunaire. Mais, quand son existence sera certaine, la Science aura besoin d'en connaître la cause. Les mouvements des planètes et des satellites sont-ils sensiblement altérés par l'attraction des comètes et par le choc de petits corps semblables aux aéroolithes que nous voyons tomber sur la Terre et qui paraissent venir des profondeurs de l'espace céleste? C'est ce que l'imperfection des observations anciennes ne permet pas de décider; mais un siècle au plus d'observations précises éclaircira ce point important du Système du monde.



SUR

L'INÉGALITÉ LUNAIRE A LONGUE PÉRIODE,

DÉPENDANTE DE LA DIFFÉRENCE
DES DEUX HÉMISPHERES TERRESTRES ⁽¹⁾.

Connaissance des Temps pour l'année 1823; 1820.

1. Je conserverai ici les dénominations des Livres III et VII de la *Mécanique céleste* et je supposerai que l'on a ces Livres sous les yeux. Si l'on conçoit une molécule dm de la Terre, placée à distance l du centre de gravité de cette planète; si l'on nomme μ' le cosinus de l'angle que l fait avec le demi-axe boréal de la Terre, et σ' l'angle que le plan mené par ce demi-axe et par l forme avec un méridien fixe sur la Terre; si l'on nomme pareillement μ et σ les mêmes quantités relatives au rayon r de l'orbite lunaire, il résulte du n° 15 du Livre III que l'action de dm sur la Lune produit, dans la valeur de Q du n° 4 du Livre VII, le terme

$$\frac{dm}{\sqrt{r^2 - 2lr[\mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \mu'^2}\cos(\sigma' - \sigma)] + l^2}};$$

ce qui produit, par le n° 15 du Livre III, le terme

$$\frac{25}{4} dm \left(\mu'^2 - \frac{3}{5} \mu'^2 \right) \left(\mu^2 - \frac{3}{5} \mu^2 \right) \frac{r^3}{r^3},$$

en ne considérant que les termes divisés par r^4 , et en n'ayant point

⁽¹⁾ Lu au Bureau des Longitudes, le 12 avril 1820.



égard aux termes dépendant des cosinus de l'angle $\alpha' - \alpha$ et de ses multiples, termes que l'on peut ne pas considérer ici, vu la rapidité du mouvement de rotation de la Terre, qui les rend insensibles dans la théorie de la Lune. Cela revient à considérer la Terre comme un sphéroïde de révolution.

Si la Terre était symétrique de chaque côté de l'équateur, des molécules égales correspondraient aux valeurs de μ' et de $-\mu'$; la somme des termes précédents relatifs à ces molécules serait donc nulle. Mais, si la Terre n'est pas symétrique, la réunion de tous ces termes en produit un que nous désignerons par $\frac{KD^3}{r^3} \left(\mu^2 - \frac{3}{5} \mu \right)$, D étant le rayon moyen de la Terre. Nous allons examiner ici l'influence de ce terme sur le mouvement lunaire; ce qui exige des considérations délicates pour n'omettre aucun des termes qui peuvent avoir une influence sensible.

2. μ est ici le sinus de la déclinaison de la Lune. Si l'on nomme v , comme dans le Livre VII, le mouvement sidéral de cet astre sur l'écliptique, et $f\bar{v}$ sa longitude vraie comptée de l'équinoxe du printemps; si l'on désigne par λ l'obliquité de l'écliptique, on a

$$\mu = \frac{\sin \lambda \sin f\bar{v} + s \cos \lambda}{(1 + s^2)^{\frac{1}{2}}},$$

s étant la tangente de la latitude de la Lune. En faisant ensuite, comme dans le Livre cité,

$$r = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{u},$$

le terme $\frac{KD^3}{r^3} \left(\mu^2 - \frac{3}{5} \mu \right)$ produit le suivant:

$$\frac{H u^3 \sin 3 f\bar{v}}{(1 + s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

H étant égal à

$$-\frac{KD^3 \sin^3 \lambda}{4}.$$

Cela posé, reprenons les équations (L) du n° 1 du Livre VII, et consi-

dérons d'abord la seconde de ces équations. Dans le développement de ses termes, j'aurai égard aux termes dépendant des angles $3f\bar{v} - 2gv$, et $3f\bar{v} - 2gv - cv$, à cause des grands diviseurs qu'ils acquièrent par les intégrations. En faisant

$$Q = \frac{H u^3 \sin 3 f\bar{v}}{(1 + s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

on a, à très peu près,

$$\frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} = \frac{3H u^3 dv \cos 3 f\bar{v}}{(1 + s^2)^{\frac{3}{2}}};$$

on a ensuite, par le n° 4 du Livre VII,

$$u = \frac{1}{h^2(1 + \gamma^2)} (\sqrt{1 + s^2} + e \cos cv),$$

$$s = \gamma \sin gv;$$

en négligeant donc les termes inutiles et ceux qui sont insensibles, on aura

$$2 \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} = \frac{2H}{h^2} \left[\sin 3 f\bar{v} + \frac{15 \gamma^2}{8} \frac{\sin(3 f\bar{v} - 2gv)}{3f - 2g} + \frac{9}{4} e \gamma^2 \frac{\sin(3 f\bar{v} - 2gv - cv)}{3f - 2g - c} \right],$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) 2 \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} = \frac{H}{h^2} \left[\frac{9}{2} \gamma^2 \sin(3 f\bar{v} - 2gv) + \frac{9}{2} e \gamma^2 \frac{\sin(3 f\bar{v} - 2gv - cv)}{3f - 2g - c} \right].$$

On trouve de plus

$$\frac{du}{h^2 u^2} \frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{-3H \gamma^2}{4h^2} \sin(3 f\bar{v} - 2gv),$$

$$-\frac{1}{h^2} \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{s}{h^2 u} \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{-15H \gamma^2}{4h^2} \sin(3 f\bar{v} - 2gv);$$

la seconde des équations (L) citées devient ainsi

$$0 = \frac{d^2 u}{dv^2} + u + \frac{9H e \gamma^2}{2h^2} \frac{\sin(3 f\bar{v} - 2gv - cv)}{3f - 2g - c} + \frac{3s}{h^2} \frac{\partial s}{\partial v},$$

∂s étant la variation de s , due à la différence des deux hémisphères



208 SUR L'INÉGALITÉ LUNAIRE A LONGUE PÉRIODE,
terrestres. Cette variation dépend des angles $3fv - gv - cv$, $3fv - gv$.
On a, en n'ayant égard qu'à ces angles,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2 a^2} \frac{ds}{dv} \frac{dQ}{dv} &= \frac{3He\gamma}{2h^2} \cos(3fv - gv - cv) + \frac{3H\gamma}{2h^2} \cos(3fv - gv), \\ &= \frac{s}{h^2 u} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{(1+s^2)}{h^2 a^2} \frac{\partial Q}{\partial s} \\ &= \frac{3He\gamma}{2h^2} \cos(3fv - gv - cv) + \frac{3H\gamma}{2h^2} \cos(3fv - gv);\end{aligned}$$

la troisième des équations (L) devient ainsi

$$0 = \frac{d^2 s}{dv^2} + g^2 s + \frac{3He\gamma}{h^2} \cos(3fv - gv - cv) + \frac{3H\gamma}{h^2} \cos(3fv - gv).$$

Cette équation intégrée donne à fort peu près

$$\partial s = \frac{3He\gamma}{2h^2(3f-2g-c)} \cos(3fv - gv - cv) + \frac{H\gamma}{h^2} \cos(3fv - gv);$$

en substituant cette valeur dans l'équation différentielle en u , et désignant par ∂u la variation de u dépendante de la différence des deux hémisphères, on aura

$$\partial u = -\frac{9}{4} \frac{He\gamma^2}{h^2} \frac{\sin(3fv - 2gv - cv)}{3f - 2g - c} - \frac{3H\gamma^2 \sin(3fv - 2gv)}{4h^2(3f - 2g - c)}.$$

3. Je reprends maintenant l'analyse du Chapitre II du Livre VII de la *Mécanique céleste*. La partie

$$(a) \quad \frac{3 \, dt \int \partial R + 2 \, dv \, \partial \cdot r \frac{\partial R}{\partial r} - dv \frac{\partial R}{\partial r} \partial r}{r^3 \, dv},$$

de la formule (T) du n° 46 du second Livre exprime la variation différentielle de la longitude vraie de la Lune sur l'orbite, relative à l'inégalité que nous considérons, dv étant dv rapporté à l'orbite lunaire, et la caractéristique ∂ se rapportant ici aux variations dépendant de la différence des deux hémisphères terrestres.

La fonction $-\partial R$ est ce que nous avons désigné ci-dessus Q; cette

DÉPENDANTE DE LA DIFFÉRENCE, ETC. 209

fonction est donc de l'ordre 4 en u et, par conséquent, de l'ordre -4 en r , ce qui donne $r \frac{\partial R}{\partial r} = -4R$. De plus, lorsqu'il s'agit des inégalités dont l'argument ne dépend que des éléments du mouvement lunaire, on a $\int \partial R = \partial R$. Enfin, le terme $-\partial r \frac{\partial R}{\partial r}$ est de l'ordre ∂^2 lorsqu'on ne considère, dans la force perturbatrice R , que la partie relative à la différence des hémisphères terrestres; en négligeant donc les quantités de l'ordre de ∂^2 , la formule (a) devient

$$\frac{5 \, dt^2 Q}{r^3 \, dv}.$$

En substituant pour dt sa valeur elliptique $\frac{r^3 \, dv'}{\sqrt{a}}$, et ensuite pour $\frac{r^3 \, dv'}{\sqrt{a}}$ sa valeur elliptique $\frac{dv}{h a^2}$, et pour Q sa valeur précédente, ce terme devient

$$\frac{5 H a^2 \, dv \sin 3fv}{h^2 (1+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En y substituant pour u et s leurs valeurs elliptiques précédentes, en le développant et observant que h^2 diffère très peu de a , on voit que l'expression différentielle de la longitude vraie contient le terme

$$\frac{15 H e \gamma^2 \, dv}{4 a^2} \sin(3fv - 2gv - cv).$$

Mais ce terme n'est pas le seul de ce genre : l'action du Soleil donne dans Q, par le n° 3 du Livre VII, en prenant pour unité la somme des masses de la Terre et de la Lune, le terme

$$\frac{m^2}{4 a^2 u^2} (1 - 2s^2) \quad \text{ou} \quad \frac{m^2 r^2}{4 a^2} (1 - 3s^2);$$

en prenant donc ce terme pour $-R$, et observant que $\int \partial R = \partial R$, et que ∂r est $-\frac{\partial u}{u^2} + \frac{s \, \partial s}{u}$; enfin, en substituant pour $\frac{dt^2}{r^3 \, dv}$ sa valeur fort approchée $\frac{dv}{a u^2}$, pour ∂u et ∂s leurs valeurs précédentes, la fonc-

tion (a) donne le terme

$$-\frac{27m^2e\gamma^2Hdv\sin(3fv-2gv-cv)}{4a^3(3f-2g-c)}.$$

En réunissant ce terme au précédent, l'expression différentielle de la longitude vraie de la Lune contiendra le terme

$$(b) \quad \frac{3e\gamma^2Hdv}{4a^3} \left[5 - \frac{9m^2}{(3f-2g-c)} \right] \sin(3fv-2gv-cv).$$

Le terme (b) est rapporté à l'orbite de la Lune. Pour le rapporter à l'écliptique, il faut, par le Chapitre II cité (*), lui ajouter ce que produit la fonction $\left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dv^2}\right)dv$, lorsqu'on y substitue pour s

$$\gamma \sin gv + \frac{3He\gamma}{2h^2(3f-2g-c)} \cos(3fv-gv-cv).$$

Le terme qui en résulte est

$$\frac{3He\gamma^2dv}{4h^2(3f-2g-c)} [g(3f-g-c)-1] \sin(3fv-2gv-cv).$$

En l'ajoutant au précédent (b), en intégrant et observant que g^2-1 est à peu près $\frac{3}{2}m^2$, on aura, dans l'expression de la longitude vraie de la Lune, rapportée à l'écliptique, l'inégalité

$$\frac{9He\gamma^2}{8a^3(3f-2g-c)} \left(\frac{5m^2}{3f-2g-c} - 4 \right) \cos(3fv-2gv-cv).$$

Enfin, la formule (T) du n° 46 du second Livre de la *Mécanique céleste* donne, dans l'expression de la longitude vraie, la fonction

$$\frac{2d(r\partial r)}{r^2dv} - \frac{dr\partial r}{r^2},$$

ce qui produit le terme

$$-\frac{3He\gamma^2}{8a^3(3f-2g-c)} \cos(3fv-2gv-cv),$$

qu'il faut ajouter au précédent.

(*) *Œuvres de Laplace*, Tome III, p. 271.

L'inégalité entière devient ainsi

$$\frac{3He\gamma^2}{8a^3(3f-2g-c)} \left(\frac{15m^2}{3f-2g-c} - 13 \right) \cos(3fv-2gv-cv).$$

En faisant

$$3f-2g-c = \frac{m}{180}, \quad m = \frac{3}{40},$$

cette inégalité devient à fort peu près, en substituant pour H sa valeur,

$$170550 \frac{K D^2}{4 a^3} e \gamma^2 \sin^2 \lambda \cos(3fv-2gv-cv).$$

En supposant, comme dans le Livre VII de la *Mécanique céleste*,

$$\frac{D}{a} = 0,016551,$$

$$\gamma = 0,090081,$$

$$e = 0,054873,$$

et faisant l'obliquité λ de l'écliptique égale à $23^\circ 28'$, la valeur de cette inégalité en secondes sexagésimales est

$$1', 12 K \cos(3fv-2gv-cv).$$

Pour déterminer K, nous observerons que, par le n° I, la Terre peut être ici considérée comme un sphéroïde de révolution; alors

$$\frac{K D^2}{r^4} \left(\mu^2 - \frac{3}{5} \mu' \right)$$

est le terme, divisé par r^4 , de la formule (3) du n° 14 du Livre III.

Le terme $\alpha l Y^{(2)}$ du rayon d'une couche du sphéroïde terrestre dont l est le rayon moyen est de la forme $\alpha l p \left(\mu^2 - \frac{3}{5} \mu' \right)$, p étant fonction de l ; le terme, divisé par r^4 , de la formule (3) citée devient ainsi

$$\frac{4\alpha\pi}{7r^4} \int p d(l^2 p) \left(\mu^2 - \frac{3}{5} \mu' \right),$$

l'intégrale étant prise depuis l nul jusqu'à $l = D$; on a donc

$$K D^2 = \frac{4\alpha\pi}{7} \int p d(l^2 p),$$

212 SUR L'INÉGALITÉ LUNAIRE A LONGUE PÉRIODE, ETC.
 mais, la masse de la Terre ayant été prise pour unité, on a

$$1 = \frac{4}{3} \pi \int \rho \, dV;$$

on a donc

$$K = \frac{3\alpha}{7} \frac{\int \rho \, d(\rho p)}{D^3 \int \rho \, dV}.$$

Dans le cas de la Terre homogène, cette équation donne

$$K = \frac{3}{7} \alpha p,$$

nous sommes certain que αp est une petite fraction au-dessous de $\frac{1}{300}$; l'inégalité précédente est donc au-dessous de

$$0^s,0016 \cos(3fv - 2gv - cv).$$

On voit par là que cette inégalité est insensible dans toutes les suppositions que l'on peut raisonnablement admettre sur la constitution du sphéroïde terrestre. Ainsi, nous pouvons affirmer que la différence des deux hémisphères de ce sphéroïde ne peut produire aucune inégalité sensible dans le mouvement de la Lune (*).

(*) Consulter les *Oeuvres de Laplace* (Tome V, Livre XVI, p. 424), où le calcul des inégalités lunaires à longues périodes dépendant de la figure non sphérique de la Terre est effectué avec plus de précision.

MÉMOIRE

SUR LA

DIMINUTION DE LA DURÉE DU JOUR

PAR LE REFROIDISSEMENT DE LA TERRE.

Connaissance des Temps pour l'année 1823; 1830.

Ce Mémoire est reproduit textuellement, ou avec des compléments, au Tome V, Livre XI, Chapitre I, pages 24-28, et Chapitre IV, pages 82-88 et 91-96.



MÉMOIRE

(ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT)

SUR LA

DIMINUTION DE LA DURÉE DU JOUR

PAR LE REFROIDISSEMENT DE LA TERRE.

Connaissance des Temps pour l'année 1823; 1820.

Ce Mémoire est reproduit intégralement au Tome V, Livre XI,
Chapitre IV, pages 88-91.

SUR LA

DENSITÉ MOYENNE DE LA TERRE.

Connaissance des Temps pour l'année 1823; 1820.

Un des points les plus curieux de la Géologie est le rapport de la moyenne densité du sphéroïde terrestre à celle d'une substance connue. Newton, dans ses *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, a donné le premier aperçu que l'on ait publié sur cela. Cet admirable Ouvrage contient les germes de toutes les grandes découvertes qui ont été faites depuis sur le Système du monde : l'histoire de leur développement par les successeurs de ce grand géomètre serait à la fois le plus utile commentaire de son Ouvrage et le meilleur guide pour arriver à de nouvelles découvertes. Voici le passage de cet Ouvrage, sur l'objet dont il s'agit, tel qu'il se trouve dans la première édition et dans les suivantes.

« J'établis ainsi que le Globe terrestre est plus dense que l'eau; s'il en était entièrement formé, tous les corps plus rares s'élèveraient et surnageraient à la surface à raison de leur moindre gravité spécifique. Ainsi, le globe de la Terre, étant supposé recouvert en entier par les eaux, s'il était plus rare qu'elles, se découvrirait quelque part, et les eaux des parties découvertes se rassembleraient dans la région opposée. La même chose doit avoir lieu pour notre Terre, en grande partie recouverte par l'Océan. Si elle était moins dense que lui, elle en sortirait par sa légèreté; les eaux se portant alors vers les régions opposées. Par la même raison, les taches solaires sont plus légères



que la matière lumineuse sur laquelle elles surnagent; et dans la formation quelconque des planètes, les matières les plus denses se sont portées vers le centre, lorsque toute la masse était fluide. Ainsi, la couche supérieure de la Terre étant à peu près deux fois plus dense que l'eau, et les couches inférieures devenant, à mesure qu'elles sont plus profondes, trois, quatre et même cinq fois plus denses, il est vraisemblable que la masse entière de la Terre est cinq ou six fois plus grande que si elle était formée d'eau. »

Les théories de la figure des planètes et des oscillations des fluides qui les recouvrent, considérablement perfectionnées depuis Newton, ont confirmé cet aperçu. Elles établissent que, pour la stabilité de l'équilibre des mers, leur densité doit être moindre que la moyenne densité de la Terre : comme je l'ai fait voir dans le quatrième Livre de la *Mécanique céleste*. Malgré les irrégularités que présentent les degrés mesurés des méridiens, ils indiquent cependant un aplatissement moindre que celui qui convient à l'homogénéité de la Terre; et la théorie prouve que cet aplatissement exige dans les couches terrestres une densité croissante de la surface au centre. Pareillement, les expériences du pendule, plus précises et plus concordantes que les mesures des degrés, indiquent un accroissement de la pesanteur, de l'équateur aux pôles, plus grand que dans le cas de l'homogénéité. Un théorème remarquable, auquel je suis parvenu (Tome II des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*) ⁽¹⁾, rend ce résultat indépendant de la figure continue ou discontinue du sphéroïde terrestre, des irrégularités de sa surface, de la manière dont elle est recouverte en grande partie par la mer, et de la densité de ce fluide.

Si l'on imagine un fluide très rare qui, en s'élevant à une petite hauteur, enveloppe la Terre entière et ses montagnes, ce fluide prendra un état d'équilibre, et j'ai fait voir, dans le Tome cité ⁽²⁾, que les points de sa surface extérieure seront tous également élevés au-dessus de la mer. Les points intérieurs des continents, autant

⁽¹⁾ *Œuvres de Laplace*, T. XII, p. 415.

⁽²⁾ *Ibidem*.

abaissés que ceux de la surface de la mer, au-dessous de la surface supérieure du fluide supposé, forment, par leur continuité, ce que je nomme *niveau prolongé de la mer*. La hauteur d'un point des continents, au-dessus de ce niveau, sera déterminée par la différence de pression de ce fluide, à ce point et au niveau de la mer, différence que les observations du baromètre feront connaître, car notre atmosphère, supposée réduite partout à sa densité moyenne, devient le fluide que nous venons d'imaginer.

Cela posé, concevons que la Terre soit un sphéroïde quelconque homogène, et recouvert en partie par la mer; et prenons pour unité la longueur du pendule à secondes, à l'équateur et au niveau des mers. Si, à la longueur de ce pendule, observée à un point quelconque de la surface du sphéroïde, on ajoute la moitié de la hauteur de ce point au-dessus du niveau de l'Océan, divisée par le demi-axe terrestre, l'accroissement de cette longueur ainsi corrigée, de l'équateur aux pôles, sera égal au produit du carré du sinus de la latitude par cinq quarts du rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, ou par $\frac{13}{10000}$.

Les expériences multipliées du pendule, faites dans les deux hémisphères et réduites au niveau de la mer, s'accordent à donner au carré du sinus de la latitude un coefficient qui surpasse $\frac{13}{10000}$, et à fort peu près égal à $\frac{51}{10000}$; il est donc bien prouvé, par ces expériences, que la Terre n'est point homogène, et que les densités de ses couches croissent de la surface au centre.

J'ai fait voir, dans le Tome cité ⁽¹⁾, que les inégalités lunaires dues à l'aplatissement de la Terre et les phénomènes de la précession et de la nutation conduisent au même résultat, qui ne doit ainsi laisser aucun doute.

Mais tous ces phénomènes, en indiquant une densité moyenne de la Terre supérieure à celle de l'eau, ne donnent point le rapport de ces densités. Des expériences sur l'attraction des corps à la surface de la Terre peuvent seules déterminer ce rapport. Pour y parvenir, on

⁽¹⁾ *Œuvres de Laplace*, Tome XII, p. 257.



a d'abord essayé de mesurer l'attraction des hautes montagnes. Cet objet a fixé particulièrement l'attention des académiciens français envoyés au Pérou pour y mesurer un degré du méridien. Cette attraction peut se manifester, soit par le pendule, dont elle accélère la marche, soit par la déviation qu'elle produit dans la direction du fil à plomb des instruments astronomiques. Ces deux moyens ont été employés au Pérou. Il résulte de la comparaison des expériences du pendule, faites à Quito et au bord de la mer, que, par l'action des Cordillères, la pesanteur, à Quito, est plus grande qu'elle ne doit être, si l'on ne considère que l'élévation de Quito, et que cela indique dans ces montagnes une densité à peu près égale au cinquième de la moyenne densité de la Terre. Les déviations du fil à plomb ont donné un résultat peu différent. Mais l'ignorance où l'on est de la constitution intérieure de ces montagnes, la certitude que l'on a qu'elles sont volcaniques, jointe à l'incertitude des observations, ne permettent pas de prononcer sur la vraie densité spécifique de la Terre. On a donc cherché une montagne assez considérable, dont la constitution intérieure fût bien connue. Le mont Shichallin, en Écosse, a paru réunir ces avantages. M. Maskelyne observa la déviation du fil à plomb d'un instrument astronomique, de deux côtés opposés de ce mont, et il trouva la somme égale à $11^{\circ},6$; mais il fallait ensuite déterminer la somme des attractions de toutes les parties de la montagne sur le fil, ce qui exigeait un calcul délicat, long et pénible, et l'invention d'artifices particuliers propres à le simplifier et à le rendre très précis. Tout cela fut exécuté de la manière la plus satisfaisante par M. Hutton, géomètre illustre, auquel les Sciences mathématiques sont redevables d'ailleurs d'un grand nombre de recherches importantes. Son travail sur l'objet dont il s'agit a été couronné par la *Société royale de Londres*, qui avait déterminé l'auteur à l'entreprendre. Il en résulte que la densité de la Terre est à celle de la montagne dans le rapport de 9 à 5. Pour avoir le rapport de la densité de la montagne à celle de l'eau, M. Pleyfair fit un examen lithologique de cette montagne; il la trouva formée de roches dont la densité spécifique ou relative à celle de l'eau varie

de 2,5 à 3,2, et il jugea que celle de la montagne est entre 2,7 et 2,8; ce qui donne à fort peu près 5 pour la moyenne densité spécifique de la Terre.

M. Michell, de la *Société royale de Londres*, imagina un appareil propre à mesurer l'attraction de très petits corps, tels que des sphères en plomb de $0^m,1$ ou $0^m,2$ de rayon; mais il ne vécut pas assez pour le mettre en expérience. Cet appareil fut transmis à M. Cavendish, qui le changea considérablement pour éviter toutes les causes d'erreurs dans la mesure d'aussi faibles attractions. La pièce fondamentale de l'appareil est la balance de torsion, que mon savant confrère Coulomb a inventée de son côté, qu'il a le premier publiée, et dont il a fait de si heureuses applications à la mesure des forces électriques et magnétiques. En examinant avec une scrupuleuse attention l'appareil de M. Cavendish et toutes ses expériences faites avec la précision et la sagacité qui caractérisent cet excellent physicien, je ne vois aucune objection à faire à son résultat, qui donne 5,48 pour la densité moyenne de la Terre. C'est le milieu de vingt-neuf expériences dont les extrêmes sont 4,88 et 5,79. Si l'on applique, à ce résultat, les formules de ma *Théorie analytique des probabilités*, on trouvera qu'il y a une très grande probabilité que l'erreur est extrêmement petite. Ainsi, on peut, d'après ces expériences, confirmées par les observations faites sur le mont Shichallin, regarder la moyenne densité spécifique de la Terre comme bien connue et à très peu près égale à 5,48, ce qui confirme l'aperçu de Newton.

Ces expériences et ces observations mettent en évidence l'attraction réciproque des plus petites molécules de la matière, en raison des masses divisées par le carré des distances. Newton l'avait conclue du principe de l'égalité de l'action à la réaction, et de ses expériences sur la pesanteur des corps, qu'il trouva, par les oscillations du pendule, proportionnelle à leur masse. Malgré cette preuve, Huygens, fait plus qu'aucun autre contemporain de Newton pour bien l'apprécier, rejeta cette attraction de la matière de molécule à molécule et l'admit seulement entre les corps célestes; mais, sous ce dernier rapport,



il rendit aux découvertes de Newton la justice qui leur était due. Au reste, la gravitation universelle n'avait pas, pour les contemporains de Newton et pour Newton lui-même, toute la certitude que les progrès des Sciences mathématiques, qui lui sont dus principalement, et que les observations subséquentes lui ont donnée; et l'on peut justement appliquer à cette découverte, la plus grande qu'ait faite l'esprit humain, ces paroles de Cicéron : *Opinionum commenta delet dies, natura judicia confirmat.*

ECLAIRCISSEMENTS SUR LES MÉMOIRES PRÉCÉDENTS,

RELATIFS

AUX INÉGALITÉS LUNAIRES

DÉPENDANTES DE LA FIGURE DE LA TERRE,

ET AU

PERFECTIONNEMENT DE LA THÉORIE DES TABLES DE LA LUNE.

Connaissance des Temps pour l'année 1823; 1820.

Dans le premier de ces Mémoires ⁽¹⁾, j'ai fait

$$H = \frac{-2\delta\bar{u}}{h^2(g_1^2 - f^2)},$$

et l'on a réellement, comme je l'ai dit,

$$H = \frac{-2\delta\bar{u}}{h^2(g_1^2 - f^2)},$$

$g_1^2 - 1$ étant le coefficient de $\sin f$ dans le développement de l'équation (1^{re}) du n° 13 du Livre VII. J'ai supposé que $g^2 - g_1^2$ n'était que de l'ordre m^2 ; mais, en analysant cette différence, on trouve facilement, par le n° 13 cité, qu'elle est de l'ordre m^1 et égale à $\frac{27}{128}m^1$; ce

⁽¹⁾ *Œuvres de Laplace*, T. XIII, p. 189.

qui donne, à très peu près,

$$H = \frac{-2\varepsilon\bar{u}\left(1 + \frac{9m^2}{64}\right)}{h^3(g^2 - f^2)},$$

en observant que $g^2 - f^2$ est à peu près $\frac{3}{2}m^2$.

J'observe ensuite que, dans le terme $-\frac{3}{2}\frac{s^2}{h^2}$ de l'équation différentielle en u , il faut substituer, pour s , les termes suivants :

$$\gamma \sin(gv - \theta) + H \sin fv \\ + B_1^{(0)} \gamma \sin(2v - 2mv - gv + \theta) + B_1^{(0)} H \sin(2v - 2mv - fv);$$

$B_1^{(0)}$ étant ce que $B_1^{(0)}$ devient en y changeant g en f . Le terme dont il s'agit donne ainsi le suivant :

$$-\frac{3}{2h^2} H \gamma (1 + B_1^{(0)} B_1^{(0)}) \cos(gv - fv - \theta).$$

On peut supposer ici $B_1^{(0)}$ et $B_1^{(0)}$ égaux à $\frac{3}{8}m$; en substituant ensuite pour H sa valeur précédente, ce terme devient

$$\frac{3\varepsilon\bar{u}\left(1 + 2\frac{9}{64}m^2\right)}{h^2(g^2 - f^2)} \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

La valeur de ∂u , que nous avons trouvée dans le Mémoire cité, est ainsi augmentée du terme

$$+ \frac{27}{32} \frac{m^2 \varepsilon \bar{u}}{h^2(g^2 - f^2)} \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

On peut, dans ce terme, substituer $\frac{3}{2}m^2$, au lieu de $g^2 - f^2$, et alors il devient

$$+ \frac{9}{16} \frac{\varepsilon \bar{u}}{h^2} \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

Le terme $\frac{1}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$ reçoit un accroissement par la substitution de la partie de Q relative à l'action du Soleil. En effet, cette action pro-

duit, par le n° 3 du Livre VII, dans $\frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$, le terme

$$-\frac{3(1-m)m^2}{2a^3 u^4} dv \sin(2v - 2mv).$$

Substituant, au lieu de u , sa valeur elliptique

$$\frac{1}{h^2(1+\gamma^2)} [\sqrt{1+s^2} + e \cos(cv - \theta)],$$

le développement produit le terme

$$\frac{3h^2 m^2 s^2}{a^3} \sin(2v - 2mv).$$

En substituant, dans ce dernier terme, au lieu de s , sa valeur précédente, on a, dans le développement, un terme égal à

$$+ \frac{3m^2 h^2}{2a^3} \gamma H (B_1^{(0)} - B_1^{(0)}) \sin(gv - fv - \theta).$$

On trouve, à fort peu près, par le n° 14, Livre VII (*),

$$B_1^{(0)} - B_1^{(0)} = \frac{9}{64} m^2;$$

en substituant donc pour H sa valeur, et faisant $g^2 - 1 = \frac{3}{2}m^2$, on trouve qu'il en résulte dans $\frac{1}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$ le terme

$$+ \frac{3}{8} \frac{\varepsilon \bar{u}^2 h^2}{a^3} \gamma \cos(gv - fv - \theta);$$

la valeur de ∂u se trouve ainsi augmentée du terme

$$- \frac{3}{4} \frac{\varepsilon \bar{u}^2 h^2}{a^3} \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

En supposant, comme on le peut, dans ces divers accroissements,

$\bar{u} = \frac{1}{a}$ et $h^2 = a$, on aura, pour l'accroissement total de ∂u ,

$$- \frac{3}{16} \frac{\varepsilon}{a^3} \gamma \cos(gv - fv - \theta)$$

(*) Œuvres de Laplace, T. III, p. 239.

et, pour l'accroissement de $\frac{1}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$,

$$+ \frac{3}{8} \frac{\varepsilon}{a^2} \gamma \cos(gv - fv - \varphi).$$

La valeur de $\delta \frac{dt}{dv}$ est

$$- \frac{1}{hu^2} \left[\frac{2\partial u}{u} + \frac{1}{h^2} \delta \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right].$$

En substituant, pour δu et $\frac{1}{h^2} \delta \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$, leurs accroissements précédents, et mettant $\frac{1}{a}$ au lieu de u , on aura un résultat nul; ainsi, les termes que nous venons de considérer se détruisent et ne changent point le coefficient de l'inégalité lunaire.

On voit, par ce qui précède, qu'il faut multiplier par $1 + \frac{9}{64} m^2$ le coefficient de l'inégalité lunaire en latitude de la page 6 de mon Mémoire, en rectifiant ensuite ce que j'ai dit à la page 7 relativement aux termes multipliés par s^2 , dont l'influence, sur la différence $g^2 - g_1^2$, n'est pas nulle et l'augmente du terme $\frac{3}{2}(g^2 - 1)\gamma^2$; enfin, ayant égard au terme $-\varepsilon \bar{u} \gamma^2 \sin \varphi$ que produit la fonction $\left(\frac{d^2 s}{dv^2} + s\right) \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$ de la troisième des équations (L) du n° 4 du Livre VII, l'inégalité lunaire en latitude devient

$$-2 \left(\alpha \rho - \frac{1}{2} \alpha \rho' \right) \frac{D^2 \sin \lambda \cos \lambda}{a^2} \left(1 + 2\varepsilon^2 + \frac{41}{64} m^2 \right) \sin fv.$$

Si les termes dont j'ai parlé ci-dessus ne se détruisaient pas mutuellement, la différence qu'ils auraient produite entre le résultat de mon Mémoire et celui de la *Mécanique céleste* m'aurait averti de leur existence. J'en ai été instruit par les observations que MM. Plana et Carlini ont publiées sur mon Mémoire relatif au perfectionnement de la théorie et des Tables lunaires, dont je leur avais envoyé un exemplaire, ainsi que de mes deux Mémoires sur les inégalités lunaires dépendant de la

figure de la Terre. Dans leur pièce couronnée par l'Académie des Sciences, et dans un Supplément qu'ils ont envoyé trois mois après leur pièce, ils avaient trouvé un coefficient de l'inégalité lunaire en longitude plus petit de $\frac{1}{4}$ que celui de la *Mécanique céleste*. Mais, en analysant avec beaucoup de soin tous les termes qui doivent entrer dans sa valeur, ils viennent de retrouver celle à laquelle j'étais parvenu dans l'Ouvrage cité, par une méthode qui ne doit laisser aucun doute, qui a l'avantage de dispenser des attentions minutieuses et délicates que la méthode précédente exige et que j'ai confirmée, par une nouvelle analyse, dans le Supplément au troisième Volume de la *Mécanique céleste*. Ils trouvent qu'en ayant égard aux carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, les termes qui en résultent se détruisent. Comme cette destruction est un corollaire du n° 5 de ma *Théorie de la Lune* (1), je me suis dispensé d'avoir égard à ces termes : ce que j'ai dit, dans la page 7 de mon Mémoire, n'est pas, comme le pensent MM. Plana et Carlini, relatif à ces termes, mais aux termes de l'ordre de ces carrés, que la considération du carré des forces perturbatrices introduit, et qui peuvent alors, dans l'expression de la longitude, acquérir pour diviseur le carré du coefficient qui multiplie v dans les angles des arguments, ce qui ne peut arriver aux termes dépendant de la première puissance de ces forces, lorsque les angles ne dépendent que des moyens mouvements de la Lune, de son périégée et de ses nœuds. C'est ce qui rend si petite l'inégalité lunaire, dont l'argument est $2gv - 2cv$, et ce qui me l'avait fait négliger. MM. Plana et Carlini, qui ont rapporté fort au long les tentatives infructueuses d'Euler, de d'Alembert et de Mayer pour la déterminer, n'approuvent point mes raisons; mais, qu'ils veuillent bien y réfléchir de nouveau, et ils en sentiront la justesse confirmée *a posteriori* par leur calcul. On est redevable à M. de Lagrange du théorème énoncé dans le numéro cité (2) et qui, comme on voit, peut épargner de longs calculs.

Ayant examiné attentivement les raisons que MM. Plana et Carlini

(1) *Œuvres de Laplace*, T. III, p. 201.

(2) *Ibidem*, T. III, p. 203.

allèguent en faveur de la méthode qu'ils ont suivie dans leur *Théorie de la Lune*, je persiste à croire que celle de la *Mécanique céleste* est plus propre à donner des approximations convergentes, parce qu'il y a de l'avantage à ne pas réduire en séries les diviseurs que l'analyse donne, surtout lorsqu'ils sont fort petits. Mais je rends avec plaisir à ces analystes très habiles la justice de dire qu'ils compensent la perte de cet avantage par une attention spéciale à prolonger leurs séries autant qu'il est nécessaire. J'observerai cependant que le diviseur, introduit par l'inégalité dont l'argument est la distance du périégée de la Lune à celui du Soleil, donne une série divergente en le réduisant dans une série ordonnée suivant les puissances des rapports du mouvement moyen du Soleil à celui de la Lune; mais l'inégalité dont il s'agit est si petite, par le n° 5 de ma *Théorie lunaire*, que cela n'a aucune importance dans cette Théorie.

Dans le Mémoire auquel ils répondent ⁽¹⁾, j'ai nié l'existence de leur équation séculaire proportionnelle au cube du temps, et qu'ils attribuent au déplacement séculaire de l'écliptique. Je vois que, sans approuver mes raisons, ils commencent à élever sur cette équation des doutes qu'ils se proposent d'éclaircir par le calcul. Je crois pouvoir affirmer que ce calcul confirmera mon assertion et les raisons *a priori* sur lesquelles je la fonde : elles sont développées dans le Mémoire où j'assignai la véritable cause de l'équation séculaire de la Lune, et qui est inséré dans le Volume de l'Académie des Sciences pour l'année 1786 ⁽²⁾. J'ai dit encore, dans mon Mémoire, que la différence, entre leur valeur de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune et celle de la première pièce, venait principalement de ce qu'ils n'y faisaient point entrer les termes dépendant du carré de l'excentricité de l'orbite lunaire, parce qu'ils les jugeaient fort petits. En développant leur analyse et réduisant en nombres les termes dont il s'agit, ils obtiennent un résultat fort approchant de celui de la première pièce : les résultats des deux pièces, sur l'équation séculaire du

⁽¹⁾ *Œuvres de Laplace*, T. XIII, p. 198.

⁽²⁾ *Idem*, T. XI, p. 243.

nœud, sont pareillement très peu différents. Je désirerais beaucoup le même rapprochement à l'égard de l'équation séculaire du périégée. J'invite les auteurs de ces pièces à revoir, avec un soin particulier, leurs calculs sur cet important objet.

Désirant de voir l'empirisme banni des Tables de la Lune, et de faire discuter par d'autres géomètres plusieurs points délicats de la théorie lunaire dont j'avais donné l'analyse, j'obtins de l'Académie qu'elle proposerait pour le sujet du prix de Mathématiques de l'année 1820 la formation, par la seule théorie, de Tables lunaires aussi parfaites que celles qui ont été construites par le concours de la théorie et des observations. Tous ceux qui s'intéressent au progrès des Sciences verront sans doute avec satisfaction cet objet rempli par les auteurs des deux pièces couronnées. L'auteur de la première pièce y a joint des Tables lunaires fondées uniquement sur sa théorie, il les a comparées à 120 observations qu'elles représentent aussi bien que nos meilleures Tables. Il a donc, le premier, satisfait littéralement au programme de l'Académie, conçu en ces termes :

Former par la seule théorie de la pesanteur universelle, et en n'empruntant des observations que les éléments arbitraires, des Tables du mouvement de la Lune aussi précises que nos meilleures Tables actuelles.

Les auteurs de la seconde pièce n'y ont point joint de Tables; mais ils ont exposé leur méthode et leurs formules avec beaucoup d'étendue; ils ont donné les expressions analytiques et numériques du rayon vecteur, de la longitude moyenne et de la latitude, en fonctions du mouvement vrai; enfin, ils ont comparé leurs coefficients des inégalités lunaires en longitude à celles de nos meilleures Tables réduites à la même forme, et ils n'ont trouvé que de légères différences. La Commission de cinq membres, nommée par l'Académie pour juger les pièces du concours, et dont je faisais partie, pensa unanimement que le mérite de l'analyse, l'immensité des calculs et leur accord avec nos Tables et avec les résultats de la première pièce rendaient la seconde

pièce également digne d'un prix. L'Académie, par une circonstance particulière, avait les fonds nécessaires pour décerner un prix à chacune des deux pièces : elle adopta la proposition que nous lui en fîmes. Notre jugement ayant été proclamé dans sa dernière séance publique et inséré dans les journaux, j'ai cru qu'il était convenable d'en publier les motifs.

SUR LES VARIATIONS

DES

ÉLÉMENTS DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE

ET SUR

LES INÉGALITÉS LUNAIRES À LONGUES PÉRIODES.

Connaissance des Temps pour l'an 1824; 1821.

Les inégalités lunaires à longues périodes ne peuvent être obtenues qu'avec difficulté par la méthode générale exposée dans le septième Livre de la *Mécanique céleste*, méthode si propre, d'ailleurs, à donner par des approximations convergentes les autres inégalités lunaires. Mais dans le second Chapitre du même Livre, et dans le Supplément au troisième Volume de l'Ouvrage ⁽¹⁾, j'ai donné deux méthodes fort simples pour déterminer les inégalités à longues périodes, et je les ai appliquées aux inégalités de la Lune, dépendant de l'ellipticité de la Terre. C'est par la première de ces méthodes que j'ai découvert ces inégalités. Les termes des expressions de ce genre d'inégalités ont pour diviseurs le très petit coefficient du temps dans leurs arguments, ce qui les rend sensibles. La méthode générale conduit, par des intégrations doubles, à des termes qui ont pour diviseur le carré de ce coef-

(1) *Œuvres de Laplace*, T. III. C'est dans ce Mémoire que Laplace a développé, pour la première fois, les idées fondamentales des Livres XV et XVI de la *Mécanique céleste*; plusieurs parties de ce Mémoire ont été reproduites par Laplace, presque sans changement, dans sa *Mécanique céleste*; on les retrouvera au Tome V, pages 367-373, et pages 424 et suiv.

ficient et que l'on sait, d'ailleurs, devoir se détruire dans le résultat final; en sorte que ce résultat étant la différence de quantités fort grandes, il faut déterminer avec un soin particulier toutes les quantités d'un ordre inférieur qui entrent dans cette différence, ce qui exige des considérations délicates et minutieuses. La recherche, par cette méthode, des inégalités lunaires dues à l'ellipticité de la Terre, recherche que j'ai publiée dans le Volume précédent de la *Connaissance des Temps*, en offre un exemple. Les deux méthodes spéciales dont je viens de parler ne considèrent point ces grandes quantités; elles ne donnent que des termes qui ont pour diviseurs la première puissance du coefficient du temps dans les arguments, et qui subsistent dans le résultat final. Je vais déterminer par ces méthodes les inégalités lunaires à longues périodes; mais, auparavant, je présenterai quelques considérations nouvelles sur les formules de la variation des éléments du mouvement elliptique, exposées dans le Supplément cité dont je conserverai les dénominations.

I.

De la variation des éléments du mouvement elliptique.

Les équations (5) et (6) de la page 6 de ce Supplément supposent que l'on néglige les carrés et les produits de p et de q ; ce qui revient à les considérer comme infiniment petits. Mais il est facile d'étendre ces équations au cas où ces quantités sont finies. En effet, imaginons sur la surface d'une sphère deux arcs AC et BC, se coupant en C, dont le premier représente un plan fixe infiniment peu incliné au plan de l'orbite, représenté par le second arc BC. Représentons encore, par l'arc BAM, un autre plan fixe formant avec AC un angle fini A. Nommons γ' l'inclinaison de l'orbite BC sur BM ou le supplément de l'angle CBM. AC étant ce que j'ai nommé θ dans le Supplément, et l'angle ACB étant ce que j'ai nommé γ , on aura, en désignant par π le rapport de la circonférence au diamètre,

$$A + \pi - \gamma' + \gamma = \pi + \text{surface ACB}.$$

La surface sphérique ACB est, aux infiniment petits près du second ordre, égale à $\gamma(1 - \cos\theta)$, et par conséquent égale à $\gamma - q$, q désignant dans le Supplément $\gamma \cos\theta$; on a donc

$$A + \pi - \gamma' + \gamma = \pi + \gamma - q;$$

ce qui donne

$$q = \gamma' - A, \quad dq = d\gamma'.$$

On a ensuite, en faisant $AB = f$,

$$\sin\gamma \sin\theta = \sin f \sin\gamma';$$

ce qui donne, en observant que γ et f sont infiniment petits, et que $\gamma \sin\theta$ est ce que nous avons désigné par p dans le Supplément cité,

$$dp = df \sin\gamma'.$$

Nommons présentement θ' la distance du nœud B de l'orbite au point fixe M, et faisons

$$p' = \sin\gamma' \sin\theta', \quad q' = \sin\gamma' \cos\theta';$$

on aura, en observant que $df = d\theta'$,

$$\begin{aligned} dp' &= d\gamma' \cos\gamma' \sin\theta' + df \sin\gamma' \cos\theta', \\ dq' &= d\gamma' \cos\gamma' \cos\theta' - df \sin\gamma' \sin\theta'. \end{aligned}$$

L'expression précédente de dp donne

$$df = \frac{dp}{\sin\gamma'};$$

on a ensuite, par ce qui précède, $d\gamma' = dq$; on aura donc

$$\begin{aligned} dp' &= dq \cos\gamma' \sin\theta' + dp \cos\theta', \\ dq' &= dq \cos\gamma' \cos\theta' - dp \sin\theta'. \end{aligned}$$

Si l'on substitue, au lieu de dp et de dq , leurs valeurs données par les équations (5) et (6) de la page 6 du Supplément, on aura

$$dp' = \frac{an \, dt}{\sqrt{1-e^2}} \left(\cos\gamma' \sin\theta' \frac{\partial R}{\partial p} - \cos\theta' \frac{\partial R}{\partial q} \right).$$

On a évidemment, en considérant successivement R comme fonction de p' et de q' , et comme fonction de p et de q ,

$$\frac{\partial R}{\partial p'} dp' + \frac{\partial R}{\partial q'} dq' = \frac{\partial R}{\partial p} dp + \frac{\partial R}{\partial q} dq.$$

En substituant pour dp' et dq' leurs valeurs précédentes en dp et dq , et comparant séparément les coefficients de dp et de dq , on aura

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial p'} \cos \theta' - \frac{\partial R}{\partial q'} \sin \theta' &= \frac{\partial R}{\partial p}, \\ \frac{\partial R}{\partial p'} \cos \gamma' \sin \theta' + \frac{\partial R}{\partial q'} \cos \gamma' \cos \theta' &= \frac{\partial R}{\partial q}.\end{aligned}$$

Ces valeurs de $\frac{\partial R}{\partial p}$ et de $\frac{\partial R}{\partial q}$, substituées dans l'expression de dp' , donnent

$$dp' = -\frac{an dt}{\sqrt{1-e^2}} \cos \gamma' \frac{\partial R}{\partial q'}.$$

On trouvera de la même manière

$$dq' = \frac{an dt}{\sqrt{1-e^2}} \cos \gamma' \frac{\partial R}{\partial p'}.$$

Ces équations sont rigoureuses et peuvent être substituées aux équations (5) et (6) du Supplément.

On peut en conclure de cette manière les valeurs de $d\gamma'$ et de $d\theta'$. Pour cela, on observera que

$$\sin^2 \gamma' = p'^2 + q'^2, \quad \tan \theta' = \frac{p'}{q'},$$

ce qui donne

$$d\gamma' \sin \gamma' \cos \gamma' = p' dp' + q' dq', \quad d\theta' \sin^2 \gamma' = q' dp' - p' dq'.$$

Substituant au lieu de dp' et de dq' leurs valeurs précédentes, on aura

$$d\gamma' \sin \gamma' = -\frac{an dt}{\sqrt{1-e^2}} \left(p' \frac{\partial R}{\partial q'} - q' \frac{\partial R}{\partial p'} \right).$$

On a

$$\frac{\partial R}{\partial p'} dp' + \frac{\partial R}{\partial q'} dq' = \frac{\partial R}{\partial \theta'} d\theta' + \frac{\partial R}{\partial \gamma'} d\gamma'.$$

En substituant pour $d\theta'$ et $d\gamma'$ leurs valeurs précédentes, et en comparant séparément les coefficients de dp' et de dq' , on aura

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial p'} &= \frac{\partial R}{\partial \theta'} \cos \theta' + \frac{\partial R}{\partial \gamma'} \sin \theta', \\ \frac{\partial R}{\partial q'} &= -\frac{\partial R}{\partial \theta'} \sin \theta' + \frac{\partial R}{\partial \gamma'} \cos \theta',\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$p' \frac{\partial R}{\partial q'} - q' \frac{\partial R}{\partial p'} = -\frac{\partial R}{\partial \theta'};$$

on a donc

$$d\gamma' = \frac{an dt}{\sqrt{1-e^2} \sin \gamma'} \frac{\partial R}{\partial \theta'}.$$

On trouvera de la même manière

$$d\theta' = -\frac{an dt}{\sqrt{1-e^2} \sin \gamma'} \frac{\partial R}{\partial \gamma'}.$$

De là il suit que l'on a

$$0 = \frac{\partial R}{\partial \gamma'} d\gamma' + \frac{\partial R}{\partial \theta'} d\theta';$$

ainsi la fonction R est constante, eu égard aux variations de γ' et de θ' .

Si l'on réunit ces équations aux équations (1), (2), (3), (4) de la page 6 du Supplément cité, et si l'on désigne par γ et θ ce que nous venons de désigner par γ' et θ' , on aura les six équations suivantes :

- (1) $da = -2a^2 dR,$
- (2) $dt = -\frac{an dt \sqrt{1-e^2}}{e} (1-\sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial e} + 2a^3 n dt \frac{\partial R}{\partial a},$
- (3) $de = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e} (1-\sqrt{1-e^2}) dR + \frac{an dt \sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial R}{\partial \omega},$
- (4) $d\omega = -\frac{an dt \sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial R}{\partial e},$
- (5) $d\gamma = \frac{an dt}{\sqrt{1-e^2} \sin \gamma} \frac{\partial R}{\partial \theta},$
- (6) $d\theta = -\frac{an dt}{\sqrt{1-e^2} \sin \gamma} \frac{\partial R}{\partial \gamma}.$

Dans la théorie des variations séculaires, il est plus simple d'employer, au lieu des quantités e , ω , γ , θ , les suivantes, h , l , p , q , en faisant

$$\begin{aligned}h &= e \sin \omega, & l &= e \cos \omega, \\ p &= \gamma \sin \theta, & q &= \gamma \cos \theta.\end{aligned}$$

Si l'on néglige les carrés et les produits de e et de γ , eu égard à



234 VARIATIONS DES ÉLÉMENTS DU MOUV. ELLIPTIQUE

l'unité; si l'on substitue pour n , $\frac{1}{a^3}$, et si l'on observe qu'en n'ayant égard qu'aux variations séculaires on doit supposer dR nul, les équations (3), (4), (5) et (6) donneront les suivantes :

$$\begin{aligned} m \frac{dh}{dt} \sqrt{a} &= -m \frac{\partial R}{\partial l}, \\ m \frac{dl}{dt} \sqrt{a} &= m \frac{\partial R}{\partial h}, \\ m \frac{dp}{dt} \sqrt{a} &= -m \frac{\partial R}{\partial q}, \\ m \frac{dq}{dt} \sqrt{a} &= m \frac{\partial R}{\partial p}, \end{aligned}$$

où l'on ne doit considérer dans une première approximation que la partie constante de mR et dépendant de h, l, p et q . Cela posé, si l'on développe l'expression de R du n° 46 du second Livre, et si l'on désigne par F la fonction

$$\begin{aligned} \Sigma \left\{ \frac{3mm'aa'(a, a')^4}{8(a^4 - a'^4)^3} [(h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2) - (p' - p)^2 - (q' - q)^2] \right. \\ \left. - 3mm' \left[\frac{(a^2 + a'^2)(a, a') + aa'(a, a')^3}{2(a^4 - a'^4)^2} \right] (hh' + ll') \right\}, \end{aligned}$$

(a, a') étant la partie indépendante de θ , dans le développement de $(a^2 - 2aa' \cos \theta + a'^2)^{\frac{3}{2}}$, suivant les cosinus de θ et de ses multiples; $(a, a')^4$ étant le coefficient de $\cos \theta$ dans ce développement et $\Sigma mm'$ désignant la somme de tous les produits des quantités $m, m', m'', \dots$, multipliées deux à deux, on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned} m \frac{dh}{dt} \sqrt{a} &= -\frac{\partial F}{\partial l}, \\ m \frac{dl}{dt} \sqrt{a} &= \frac{\partial F}{\partial h}, \\ m \frac{dp}{dt} \sqrt{a} &= -\frac{\partial F}{\partial q}, \\ m \frac{dq}{dt} \sqrt{a} &= \frac{\partial F}{\partial p}, \\ m \frac{dh'}{dt} \sqrt{a'} &= -\frac{\partial F}{\partial l'}, \quad \dots \end{aligned}$$

ET INÉGALITÉS LUNAIRES A LONGUES PÉRIODES. 235

Ces équations sont les équations (A) et (C) des n° 55 et 59 du second Livre de la *Mécanique céleste*. Lagrange a donné le premier les équations (C), relatives aux nœuds et aux inclinaisons des orbites, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1774. J'ai donné les équations (A) dans les *Mémoires* de la même Académie de 1772. Toutes ces équations sont linéaires et facilement intégrables par les méthodes connues; leur forme symétrique et fort simple m'a permis de faire voir (*Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1784) que leurs intégrales ne renferment, par rapport au temps, ni arcs de cercle, ni exponentielles, et qu'ainsi les valeurs de $h, l, p, q, h', \dots$ sont des fonctions périodiques de sinus et de cosinus d'angles croissant avec une extrême lenteur, en sorte que les orbites planétaires ont toujours été et seront toujours presque circulaires et peu inclinées entre elles, résultat très important en ce qu'il assure la stabilité du système solaire. Il est facile de voir que les équations précédentes donnent

$$\begin{aligned} m\sqrt{a}(h \, dh + l \, dl) + m'\sqrt{a'}(h' \, dh' + l' \, dl') + \dots = 0, \\ m\sqrt{a}(p \, dp + q \, dq) + m'\sqrt{a'}(p' \, dp' + q' \, dq') + \dots = 0. \end{aligned}$$

En les intégrant, on aura

$$\begin{aligned} e^2 m\sqrt{a} + e'^2 m'\sqrt{a'} + \dots = C, \\ \gamma^2 m\sqrt{a} + \gamma'^2 m'\sqrt{a'} + \dots = C'. \end{aligned}$$

C et C' étant des constantes très petites, il en résulte que $e, e', \dots, \gamma, \gamma', \dots$ seront toujours de très petites quantités. Lagrange, dans la seconde édition de sa *Mécanique analytique*, observe que, si m' est très petit par rapport à m , comme Mars relativement à Jupiter, dont il n'est pas la centième partie, alors le terme $e'^2 m'\sqrt{a'}$ sera toujours du même ordre que $e^2 m\sqrt{a}$, quoique e' croisse considérablement et devienne même égal à l'unité. Il en conclut que l'on ne peut être alors assuré que e'^2 conservera toujours une très petite valeur qu'en résolvant l'équation algébrique qui détermine les coefficients du temps dans les sinus et cosinus des expressions de $h, l, h', l', \dots$, et en s'assurant ainsi que les racines de cette équation sont toutes réelles. Mais, si ce grand géo-

mètre eût considéré ce que j'ai dit dans les *Mémoires* cités de l'Académie de 1784 et dans le second Livre de la *Mécanique céleste*, il aurait vu que, sans recourir à cette résolution, je démontre que ces racines ne doivent point renfermer d'imaginaires. En effet, h aurait alors une exponentielle de la forme $e^{h'P}$. Soient $e^{h'Q}$, $e^{h'P'}$, $e^{h'Q'}$, ..., les exponentielles correspondantes de l , h' , l' , ...; l'équation précédente en e^2 , e'^2 , ... donnera

$$e^{h'P}[(P^2 + Q^2)m\sqrt{a} + (P'^2 + Q'^2)m'\sqrt{a'} + \dots] + \dots = C.$$

En supposant $e^{h'P}$, la plus grande des exponentielles des valeurs de h , l , h' , ..., on voit que le premier terme du premier membre de cette équation ne peut être détruit par les suivants, d'où il suit que P , Q , P' , ..., sont nuls, et qu'ainsi toutes les racines de l'équation dont nous venons de parler sont réelles. C'est ainsi que dans les *Mémoires de l'Académie* de 1784 et dans la *Mécanique céleste*, j'ai conclu des équations précédentes entre e^2 , e'^2 , ..., γ^2 , γ'^2 , ..., auxquelles je suis parvenu le premier, la stabilité du système solaire et des systèmes de satellites. J'ai observé de plus, dans le Livre VI de la *Mécanique céleste*, que la grande inégalité de Jupiter et de Saturne n'altère point cette stabilité, quoiqu'elle produise des quantités très sensibles dans les expressions des variations séculaires des éléments.

Euler, Clairaut et d'Alembert appliquèrent, les premiers, l'analyse aux perturbations des mouvements célestes, que Newton n'avait considérées que d'une manière synthétique et imparfaite. Mais, ce qui est très remarquable, ils trouvèrent, tous les trois, des résultats de la théorie contraires aux observations. Euler, dans sa pièce sur Jupiter et Saturne, qui remporta le prix de l'Académie des Sciences de 1748 et qui parvint au secrétariat de l'Académie le 27 juillet 1747, donna les équations différentielles du mouvement de trois corps qui s'attirent suivant la loi newtonienne. En les appliquant au mouvement de Saturne troublé par l'action de Jupiter et cherchant à les intégrer, il rencontra une grande difficulté dans le radical qui exprime la distance rectiligne des deux planètes. Il parvint, par une savante analyse, à le développer dans une série de cosinus d'angles multiples de leur élon-

gation mutuelle, série que les intégrations rendent fort convergente, ce qui est d'une grande importance dans la théorie des perturbations. Les résultats de son analyse, réduits en nombres, lui donnèrent, dans le mouvement de Saturne, une inégalité considérable dépendant de l'excentricité de l'orbite de cette planète, mais affectée d'un signe contraire à celui que les observations indiquaient. Ayant refait son calcul, il n'y trouva point d'erreurs, et il en conclut que l'attraction newtonienne ne suffisait point pour représenter les observations. Dans les recherches que je communiquai à l'Académie, le 10 mai 1786, et qui ont paru dans le Volume de ses *Mémoires* de la même année, j'ai repris, avec tout le soin nécessaire, la théorie générale de ces deux planètes; non seulement j'ai rectifié l'erreur d'Euler, mais j'ai trouvé, dans les termes dépendant des carrés et des cubes des excentricités, les plus grandes inégalités qui affectent leurs mouvements, et spécialement la grande inégalité dont la période est d'environ neuf siècles, et qui explique les anomalies singulières que les observations présentaient dans ces mouvements. Au moyen de mes formules, M. Delambre, et tout récemment M. Bouvard, ont construit des Tables de Jupiter et de Saturne qui satisfont à toutes les observations anciennes et modernes, avec la précision des observations elles-mêmes.

Dans l'année 1747, mais après la réception de la pièce d'Euler, Clairaut et d'Alembert communiquèrent à l'Académie leurs solutions du problème des trois corps qu'ils appliquèrent d'abord au mouvement de la Lune. La différence de leurs méthodes, soit entre elles, soit avec la méthode d'Euler, ne permet pas de douter que ces trois grands géomètres aient résolu à la fois ce problème. Clairaut et d'Alembert tirèrent aisément de leur analyse la variation que Newton avait déterminée par la synthèse d'une manière ingénieuse, mais pénible; l'évection beaucoup plus grande que la variation, et que Newton n'avait pas même essayé de rattacher à son principe, découle de leurs solutions, ainsi que les autres inégalités lunaires, ce qui montre la grande supériorité de l'analyse sur la synthèse. Mais ils s'accordèrent tous les deux

à trouver, par une première approximation, le mouvement du périée de l'orbe lunaire plus petit de moitié que suivant les observations, ce qu'il était facile de conclure du second corollaire de la proposition 45 du premier Livre des *Principes* de Newton. Clairaut pensa qu'il fallait ajouter à la loi newtonienne un nouveau terme qui, diminuant dans une plus grande raison que le carré de la distance, est sensible pour la Lune et devient insensible pour les planètes. Cette idée fut vivement combattue par Buffon qui chercha, par des raisons métaphysiques, à établir que la loi de la gravitation universelle ne pouvait être exprimée que par un seul terme. Clairaut, en cherchant à déterminer ce qu'il jugeait devoir y ajouter, reconnut que la seconde approximation donne, à fort peu près, la seconde moitié du mouvement du périée, ce qui a été confirmé depuis par les recherches des géomètres qui sont enfin parvenus à ramener toutes les inégalités lunaires au seul principe général de la pesanteur et à former, d'après ce principe seul, des Tables lunaires aussi exactes que celles que l'on a déduites des observations combinées avec la théorie.

Les arcs de cercle, que la suite des intégrations introduit, ont embarrassé les géomètres qui ont appliqué l'analyse aux perturbations des mouvements célestes, et les moyens qu'ils ont imaginés pour les faire disparaître sont une des parties les plus intéressantes de l'Astronomie théorique. L'un de ces moyens consiste à considérer l'orbite comme une ellipse variable, dont le périée et les nœuds ont des mouvements uniformes. En substituant les coordonnées de cette ellipse dans les équations différentielles du mouvement troublé, on détermine ces mouvements de manière que les termes qui peuvent introduire des arcs de cercle se détruisent. Clairaut a, le premier, employé, dans la théorie de la Lune, ce moyen qui devient insuffisant dans la théorie des planètes. Euler, dans sa seconde pièce sur Jupiter et Saturne, qui remporta le prix de l'Académie des Sciences de 1752, imagina de considérer l'équation du centre comme formée de deux autres. Il supposa donc la partie variable du rayon vecteur de l'astre troublé exprimée par deux termes, dont l'un se rapporte à un périée mobile et l'autre à

un second périée mobile. Il supposa pareillement la partie variable du rayon vecteur de l'astre perturbateur exprimée par deux termes semblables rapportés aux deux périées précédents. En faisant ensuite les substitutions de ces rayons et des mouvements qui en résultent, dans les équations différentielles des mouvements troublés, il déterminait les mouvements des périées de manière à faire disparaître les termes qui pouvaient introduire des arcs de cercle, ce qui le conduisit à une équation du second degré, dont les racines sont les coefficients du temps dans l'expression de ces mouvements. Un calcul inexact lui donna des racines imaginaires, et l'on vint de voir qu'elles sont toutes réelles, quel que soit le nombre des planètes. Ce grand géomètre ne s'est plus occupé de cette méthode, dont il ne paraît pas avoir senti l'avantage et qui conduit d'une manière beaucoup plus simple à la théorie générale des variations séculaires que l'analyse profonde employée par Lagrange dans sa théorie des satellites de Jupiter. La considération d'une double équation du centre conduisit Euler à une inégalité dans les mouvements de Jupiter et de Saturne, dont l'argument est la distance angulaire des deux périées, et qui, acquérant par l'intégration, pour diviseur, le coefficient du temps dans cet argument, devient très considérable. En la développant en série, par rapport aux puissances du temps, le premier et le second terme de cette série se confondent l'un avec l'époque de la longitude et l'autre avec le moyen mouvement. Le troisième terme donne une inégalité dans ce mouvement, proportionnelle au carré du temps, la même pour Jupiter et pour Saturne et additive à leur longitude moyenne, ce qui est contraire aux observations. Lagrange obtint ensuite, dans le Tome IV des *Mémoires de Turin*, des résultats qui leur sont plus conformes. Frappé de ces différences, j'examinai de nouveau cet objet, et en apportant le plus grand soin à sa discussion je parvins à la véritable expression analytique du mouvement séculaire des planètes. En la développant, je reconnus qu'elle était identiquement nulle; d'où je conclus que les moyens mouvements des planètes et leurs distances moyennes au Soleil sont invariables, du moins quand on néglige les quatrièmes puissances des

excentricités et des inclinaisons des orbites et les carrés des masses perturbatrices, ce qui suffit aux besoins actuels de l'Astronomie.

La variation des éléments arbitraires fournit un moyen ingénieux de faire disparaître les arcs de cercle et de déterminer les inégalités des mouvements célestes. Déjà Newton avait déterminé les inégalités du mouvement de la Lune en latitude, produites par l'action du Soleil, en considérant comme variables la position des nœuds de l'orbite lunaire et son inclinaison à l'écliptique. Euler, dans sa pièce sur les perturbations du mouvement de la Terre, couronnée par l'Académie des Sciences en 1756, étendit cette considération à tous les éléments du mouvement elliptique; il donna les expressions différentielles de ces éléments dépendant des forces perturbatrices et il les appliqua au mouvement de la Terre. Ces expressions se rapportent à toutes les inégalités périodiques et séculaires du mouvement troublé. Mais, l'intégration directe des équations différentielles qui déterminent le rayon vecteur, la longitude et la latitude, donne des expressions des inégalités périodiques beaucoup plus simples et plus commodes pour la formation des Tables. Il était donc utile de faire disparaître, des intégrales, les arcs de cercle que l'intégration introduit alors. Pour cela, je considérai que ces arcs viennent du développement en série des constantes arbitraires; en augmentant donc, dans les intégrales, chacune de ces constantes d'un terme égal au temps multiplié par la différentielle de cette constante supposée variable, divisée par l'élément du temps, la comparaison des termes multipliés par le temps donne, entre ces constantes et leurs différentielles, autant d'équations qui, étant intégrées, déterminent ces constantes en fonctions de sinus et de cosinus d'angles croissant avec une extrême lenteur. Ces fonctions étant substituées dans les intégrales au lieu des constantes, on peut effacer de ces intégrales les termes dépendant des arcs de cercle et de leurs diverses puissances. Tel est le moyen que je proposai dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* des années 1772 et suivantes, et que j'ai exposé dans le n° 45 du second Livre de la *Mécanique céleste*.

Lagrange fit la remarque importante que les forces perturbatrices des diverses coordonnées des mouvements planétaires sont les différences partielles d'une même fonction. En reprenant ensuite la considération de la variation des éléments arbitraires, il parvint à l'expression différentielle du grand axe donnée par l'équation (1), et il démontra ainsi, d'une manière aussi élégante que générale, l'invariabilité des distances moyennes des planètes au Soleil et de leurs moyens mouvements, résultats auxquels j'étais parvenu en portant l'approximation jusqu'aux troisièmes puissances des excentricités et des inclinaisons inclusivement. J'observerai ici que l'expression de $d\frac{1}{a}$, donnée par Euler dans sa pièce couronnée en 1756, coïncide avec l'équation (1) lorsqu'on prend pour plan de projection celui de l'orbite de la planète troublée à une époque fixe; alors la latitude de cette planète devient de l'ordre des forces perturbatrices, et en négligeant, comme on le fait ici, le carré de ces forces, il est facile de s'assurer que l'expression d'Euler revient à l'équation (1). Mais cette propriété remarquable de $d\frac{1}{a}$, d'être une différence exacte de R par rapport aux coordonnées de la planète troublée, se montre avec évidence lorsqu'on emploie, dans la décomposition des forces, les différences partielles de R.

Il était intéressant d'exprimer, d'une manière semblable, les autres éléments du mouvement elliptique, et mes recherches sur cet objet me conduisirent au système des équations (1), (2), (3), (4), (5) et (6), que je présentai, le 17 août 1808, au Bureau des Longitudes. Dans la même séance, Lagrange lui communiqua une savante analyse par laquelle il exprimait la différence partielle de R, prise par rapport à chaque élément, par une fonction linéaire des différences infiniment petites des éléments, et dans laquelle les coefficients de ces différences ne sont fonctions que des éléments eux-mêmes. En déterminant au moyen de ces expressions les différences de chaque élément, il parvint ensuite aux mêmes équations que j'avais trouvées. La propriété remarquable des coefficients des différences partielles dans ces équations

de n'être fonctions que des éléments est très utile pour les approximations, et j'en ai conclu facilement le beau théorème auquel M. Poisson était parvenu le premier sur l'invariabilité des moyens mouvements, en ayant égard aux carrés et aux produits des masses perturbatrices. Lagrange a étendu son analyse au mouvement des corps solides et généralement d'un système de corps liés entre eux d'une manière quelconque. Ces travaux des dernières années de ce grand géomètre doivent être mis au rang de ses plus belles productions et montrent que l'âge n'avait point affaibli son génie. M. Poisson a publié plusieurs savants Mémoires sur cet objet, et il a été conduit pour le mouvement des corps solides à des équations de la même forme que pour les points libres, ce qui établit l'analogie de tous ces mouvements.

Dans le Supplément cité du troisième Volume de la *Mécanique céleste*, j'ai conclu des équations précédentes (1), (2), (3), (4), (5), (6) que, en désignant par la caractéristique δ les variations relatives aux forces perturbatrices, la valeur de δR est nulle dans une première approximation, en n'ayant égard qu'aux variations séculaires. Mais, dans la théorie de la Lune, il est nécessaire de porter plus loin les approximations. Si l'on désigne par mt le moyen mouvement du Soleil, celui de la Lune étant représenté par t , la force perturbatrice du Soleil et, par conséquent, R seront de l'ordre m^2 . Les termes de R , qui ne dépendent que de l'angle mt , acquérant par l'intégration le diviseur m , leurs expressions deviennent de l'ordre m . Ces termes, dans une seconde approximation, donnent un terme de l'ordre m^2 dans l'expression du mouvement du périhélie lunaire, et il arrive que ce terme est à fort peu près égal à celui de l'ordre m^2 donné par une première approximation. De là résulte la nécessité d'une seconde approximation de la valeur de δR .

Je vais maintenant conclure de ces équations que, dans la théorie lunaire, les inégalités à longues périodes, dont les arguments sont supposés ne varier qu'en vertu des changements fort lents du périhélie et du nœud de l'orbite lunaire, disparaissent de l'expression de R . Pour rendre plus claire mon analyse, je vais l'appliquer à l'inégalité à

longue période, dont l'argument est le double de la distance angulaire du périhélie au nœud de l'orbite de la Lune.

— R est, dans ce cas, ce que j'ai nommé Q dans le n° 1 du Livre VII de la *Mécanique céleste*, et en négligeant, comme on peut le faire ici, les termes dépendant de la parallaxe du Soleil et de l'excentricité de son orbite, on a, par le n° 3 du Livre cité,

$$Q = \frac{m^2 p^2}{4} [1 - 3s^2 + 3(1 - s^2) \cos(2v - 2v')] = -R.$$

Je suppose R développé dans une suite ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de e et de γ , et qui, en ne considérant que les termes constants ou dépendant seulement du mouvement du Soleil, soit

$$Mm^2 + Hm^2e^2 + H'm^2\gamma^2 + Lm^2e^2 \cos(2mt - 2\varpi) \\ + L'm^2\gamma^2 \cos(2mt - 2\theta) + Pm^2e^2\gamma^2 \cos(2\varpi - 2\theta) + \dots$$

En négligeant les termes de l'ordre m^4 , on peut négliger les termes du développement dépendant du moyen mouvement de la Lune, parce que ces termes ne produisent que des termes de l'ordre m^2 dans les variations des éléments, comme il sera facile de le voir par l'analyse suivante; il n'en résulte donc, dans R , que des quantités de l'ordre m^4 . En substituant pour R le développement précédent, dans les équations différentielles des éléments, et faisant, pour simplifier, a et n égaux à l'unité, on aura

$$de = m^2 dt [2eL \sin(2mt - 2\varpi) - 2e\gamma^2 P \sin(2\varpi - 2\theta)], \\ d\varpi = -m^2 dt [2H + 2L \cos(2mt - 2\varpi) + 2\gamma^2 P \cos(2\varpi - 2\theta)], \\ d\gamma = m^2 dt [2\gamma L' \sin(2mt - 2\theta) + 2e^2 \gamma P \sin(2\varpi - 2\theta)], \\ d\theta = -m^2 dt [2H' + 2L' \cos(2mt - 2\theta) + 2e^2 P \cos(2\varpi - 2\theta)].$$

Je néglige, dans l'expression de de , le terme dépendant de dR , parce qu'il est de l'ordre e^2 par rapport au suivant et parce que l'on peut supposer ici dR nul. Ces expressions différentielles donnent, en les



244 VARIATIONS DES ÉLÉMENTS DU MOUV. ELLIPTIQUE
intégrant et désignant par la caractéristique δ , les variations

$$\begin{aligned}\partial e &= -\frac{m^2 e L}{m+c-1} \cos(2mt-2\omega) + \frac{m^2 e \gamma^2 P}{g-c} \cos(2gt-2ct), \\ \partial \omega &= -2m^2 H t - \frac{m^2 P \gamma^2}{g-c} \sin(2gt-2ct) - \frac{m^2 L}{m+c-1} \sin(2mt-2\omega), \\ \partial \gamma &= -\frac{m^2 \gamma L'}{m+g-1} \cos(2mt-2\theta) - \frac{m^2 e^2 \gamma P}{g-c} \cos(2gt-2ct), \\ \partial \theta &= -2m^2 H' t - \frac{m^2 P e^2}{g-c} \sin(2gt-2ct) - \frac{m^2 L'}{m+g-1} \sin(2mt-2\theta).\end{aligned}$$

Nous avons substitué, dans les termes dépendant de l'angle $2\omega - 2\theta$, $(1-c)t$ pour ω et $(1-g)t$ pour θ , en vertu des équations

$$t - \omega = ct, \quad t - \theta = gt.$$

Il est nécessaire ici de porter plus loin l'approximation des valeurs de ∂e , $\partial \omega$, $\partial \gamma$ et $\partial \theta$, en substituant ces premières valeurs dans les expressions différentielles des éléments. Si l'on désigne par $\delta' e$ et $\delta' \gamma$ les parties de δe et de $\delta \gamma$ qui dépendent de l'argument $2gt - 2ct$, ou $2\omega - 2\theta$, on voit facilement que l'on aura à très peu près, dans δe , les deux termes

$$-\frac{(c+\delta' e) L m^2}{m+c-1} \cos(2mt-2\omega-2\delta\omega) + \frac{m^2 e \gamma^2 P}{g-c} \cos(2gt-2ct),$$

et, dans $\delta \gamma$, les deux termes

$$-\frac{(\gamma+\delta' \gamma) L' m^2}{m+g-1} \cos(2mt-2\theta-2\delta\theta) - \frac{m^2 e^2 \gamma P}{g-c} \cos(2gt-2ct);$$

on aura ensuite, dans $\delta \omega$, le terme proportionnel au temps

$$-2H m^2 t + \frac{2L^2 m^4 t}{m+c-1},$$

et, dans $\delta \theta$, les termes

$$-2H' m^2 t + \frac{2L'^2 m^4 t}{m+g-1}.$$

Ces termes proportionnels au temps donnent les mouvements du

ET INÉGALITÉS LUNAIRES A LONGUES PÉRIODES. 245

périgée et des nœuds, en sorte que l'on a

$$\begin{aligned}1-c &= -2m^2 H + \frac{2L^2 m^4}{m+c-1}, \\ 1-g &= -2m^2 H' + \frac{2L'^2 m^4}{m+g-1}.\end{aligned}$$

Maintenant, on peut donner à l'expression précédente de R cette forme

$$\begin{aligned}M m^2 + H m^2 (e + \delta e)^2 + H' m^2 (\gamma + \delta \gamma)^2 \\ + L m^2 (e + \delta e)^2 \cos(2mt-2\omega-2\delta\omega) \\ + L' m^2 (\gamma + \delta \gamma)^2 \cos(2mt-2\theta-2\delta\theta) \\ + P m^2 e^2 \gamma^2 \cos(2gt-2ct) + \dots\end{aligned}$$

Le terme $H m^2 (e + \delta e)^2$ donne, par la substitution de la valeur de δe , le suivant, $2H m^2 e \delta' e$, ou

$$\frac{2H e^2 \gamma^2 m^4}{g-c} P \cos(2gt-2ct).$$

Le terme $L(e + \delta e)^2 m^2 \cos(2mt-2\omega-2\delta\omega)$ donne, en substituant pour δe sa valeur,

$$-\frac{2L^2 m^4 e^2 \gamma^2 P}{(m+c-1)(g-c)} \cos(2gt-2ct).$$

Si l'on réunit ce terme au précédent, on aura

$$-\frac{(1-c)e^2 \gamma^2 P m^4}{g-c} \cos(2gt-2ct).$$

On trouvera de la même manière que les deux termes

$$H' m^2 (\gamma + \delta \gamma)^2 \quad \text{et} \quad L' m^2 (\gamma + \delta \gamma)^2 \cos(2mt-2\theta-2\delta\theta)$$

de l'expression de R produiront le terme

$$+\frac{1-g}{g-c} e^2 \gamma^2 P m^2 \cos(2gt-2ct).$$

En le réunissant au précédent, on aura le terme

$$-e^2 \gamma^2 P m^4 \cos(2gt-2ct),$$

qui détruit le terme $e^2 \gamma^2 P m^2 \cos(2gt-2ct)$ de l'expression de R.



246 VARIATIONS DES ÉLÉMENTS DU MOUV. ELLIPTIQUE

L'inégalité dépendant de l'argument $2gt - 2ct$ disparaît donc de cette expression, en portant même l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre m^3 . La même analyse s'étend généralement aux inégalités lunaires à longue période, dont l'argument ne dépend que des éléments du mouvement lunaire, ou n'est censé varier que par la variation de ces éléments.

En intégrant, relativement à ce genre d'inégalités, l'équation différentielle (1), on a $\frac{1}{2a} = R$; on a de plus $n^2 a^4 = 1$; ainsi ces inégalités disparaissent, comme dans R , des expressions de a et de n .

Les résultats précédents donnent lieu à une considération importante pour les calculs suivants. Le développement de R donne

$$H = -\frac{3}{8}, \quad L = -\frac{15}{8},$$

$$H' = \frac{3}{8}, \quad L' = -\frac{3}{8},$$

d'où l'on tire

$$1 - e = \frac{3}{4} m^2 \left[1 + \frac{75m}{8 \left(1 + \frac{e-1}{m} \right)} \right],$$

$$g - 1 = \frac{3}{4} m^2 \left[1 - \frac{3m}{8 \left(1 + \frac{g-1}{m} \right)} \right].$$

Le terme $\frac{75m}{8 \left(1 + \frac{e-1}{m} \right)}$, quoique de l'ordre m , est peu différent de

l'unité; car $1 - e$ étant à fort peu près $\frac{3}{2} m^2$, et m étant égal à 0,0748, ce terme est égal à 0,790; ce qui ne diffère de l'unité que de 0,21, ou d'un cinquième, à fort peu près. Cette valeur considérable du second terme de l'expression de $1 - e$, en série, change considérablement les diviseurs très petits dans lesquels cette expression entre, et par conséquent les inégalités à longue période que ces diviseurs rendent sensibles. Il faut donc, dans le calcul de ces inégalités, porter, comme dans celui de $1 - e$, la précision jusqu'aux termes de l'ordre m^3 . C'est ce que nous allons faire.

ET INÉGALITÉS LUNAIRES A LONGUES PÉRIODES. 247

II.

De l'inégalité lunaire dont l'argument est le double de la distance angulaire du périée au nœud de l'orbite.

Je vais déterminer cette inégalité par la méthode du second Chapitre du Livre VII de la *Mécanique céleste*: je conserverai les dénominations de ce Livre et du second Livre du même Ouvrage. La formule (T) du n° 46 de ce second Livre peut être mise sous la forme

$$(A) \quad d\delta v = \frac{2d^3(r\delta r) - d(dr\delta r) + d^2 \left(3 \int \delta dR + 2\delta r \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial r} \delta r \right)}{r^3 dv}.$$

Je supposerai ici l'orbite lunaire très peu inclinée à l'écliptique, et que la caractéristique δ est relative à son inclinaison, dont je négligerai les puissances supérieures au carré. On peut, dans cette formule, supposer $r^2 dv$ proportionnel à l'élément du temps. Cette proportionnalité a lieu, même en ayant égard aux termes de l'ordre m , de r et de v , m étant comme ci-dessus le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune; car ces termes, que l'intégration réduit à l'ordre m , ont des arguments qui ne diffèrent de v que de quantités de l'ordre m ; on peut donc les considérer comme autant de petites équations du centre, qui, comme l'on sait, ne troublent point la proportionnalité de l'aire $\frac{1}{2} r^2 dv$, décrite par le rayon vecteur, à l'élément du temps. On s'assurera directement de ce résultat de cette manière. Reprenons l'équation du n° 46 du second Livre :

$$\frac{r^3 d\phi^2}{dt^2} = \frac{r d^3 r}{dt^3} + \frac{\mu}{r} + rR'.$$

En désignant par δ les perturbations, on aura

$$\delta \frac{r^3 d\phi^2}{dt^2} = r^3 \frac{d^3 \delta r}{dt^3} + \frac{3r^2 d^2 r}{dt^2} \delta r + \mu \delta r + r^3 R'.$$

En ne considérant que les termes de l'ordre m et observant que R' est



248 VARIATIONS DES ÉLÉMENTS DU MOUV. ELLIPTIQUE
de l'ordre m^2 , et que les termes de l'ordre m de δr ont des arguments dont la partie variable diffère très peu de t ; en prenant pour t le moyen mouvement de la Lune, ce qui donne, à fort peu près, $\frac{d^2 \delta' r}{dt^2} = -\delta' r$, on aura, en négligeant les termes de l'ordre m^2 ,

$$\delta' r^3 \frac{d^3 v}{dt^3} = \delta' r \left(3 r^3 \frac{d^3 r}{dt^3} - r^3 + \mu \right);$$

or, la supposition de t égal au moyen mouvement de la Lune donne $\mu = 1$, et le facteur $3 r^3 \frac{d^3 r}{dt^3} - r^3 + 1$ est nul aux quantités près de l'ordre e^2 ; on a donc

$$\delta' r^3 \frac{d^3 v}{dt^3} = 0;$$

ainsi l'on peut supposer que $r^3 dv$ reste, en vertu des perturbations, à fort peu près égal à dt .

Nous observerons ensuite que, relativement aux inégalités à longues périodes, δR est nul par l'article précédent. En négligeant donc, comme on le peut à l'égard de ces inégalités, $\frac{2 d^2 (r \delta r)}{dt^2}$, la formule (A) prend cette forme très simple,

$$(a) \quad d\delta v = -\frac{d(dr \delta r)}{dt} + dt \left(2 \delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial r} \delta r \right);$$

— R est ce que nous avons nommé Q dans le n° 4 du Livre VII; et en négligeant, comme on peut le faire ici, les termes dépendant de la parallaxe et de l'excentricité solaires, on a, par le n° 3 du Livre cité, — Q ou R égal à

$$-\frac{m^2 r^2}{4} [1 - 3s^2 + 3(1 - s^2) \cos(2v - 2v')];$$

ce qui donne

$$2r \frac{\partial R}{\partial r} = 4R,$$

et par conséquent

$$2 \delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r} = 4 \delta R = 0.$$

La formule (a) devient ainsi

$$d\delta v = -\frac{d(dr \delta r)}{dt} + dt \frac{m^2 r \delta r}{2} [1 + 3 \cos(2v - 2v')].$$

L'équation

$$r^2 = \frac{1 + s^2}{u^2}$$

donne

$$r \delta r = -\frac{\delta u}{u^2} + \frac{s \delta s}{u^2};$$

la fonction

$$\frac{m^2 dt \cdot r \delta r}{2} [1 + 3 \cos(2v - 2v')]$$

devient donc, en y substituant pour dt , $\frac{dv}{u^2}$,

$$(b) \quad \frac{m^2 dv}{2} \left(-\frac{\delta u}{u^2} + \frac{s \delta s}{u^2} \right) [1 + 3 \cos(2v - 2v')].$$

Si l'on désigne par $A^{(24)}$ le coefficient de $e \gamma^2 \cos(2gv - cv)$, dans l'expression de δu ; par $A^{(16)}$ le coefficient de $e^2 \gamma^2 \cos(2gv - 2cv)$, dans la même expression; et par $B^{(12)}$ le coefficient de $\gamma e^2 \sin(2cv - gv)$, dans l'expression de δs , tous ces coefficients devenant de l'ordre m^2 par leurs diviseurs, il est facile de voir que la fonction

$$-\frac{m^2}{2} dv \left(\frac{\delta u}{u^2} - \frac{s \delta s}{u^2} \right)$$

donne le terme

$$m^2 dv \left(\frac{5}{4} A^{(24)} - \frac{1}{2} A^{(16)} + \frac{1}{4} B^{(12)} \right) e^2 \gamma^2 \cos(2gv - 2cv).$$

Le coefficient $2g - 2c$ de l'angle v dans l'argument de ce terme, devenant diviseur en vertu de l'intégration, et la valeur de c , dans ce très petit diviseur, étant doublée par les termes de l'ordre m^2 , comme on l'a vu ci-dessus, il est nécessaire, pour pouvoir employer ce diviseur, d'avoir égard aux termes de l'ordre m^3 . Les termes de cet ordre sont produits par le développement de la fonction

$$(c) \quad \frac{3m^2 dv}{2} \left(-\frac{\delta u}{u^2} + \frac{s \delta s}{u^2} \right) \cos(2v - 2v').$$

En désignant par $A^{(1)}$ le coefficient de $e \cos(2v - 2mv - cv)$, dans l'expression de u , $A^{(1)}$ étant, comme l'on sait, de l'ordre m , on trouve

facilement que la fonction précédente, en y substituant mv au lieu de v' , ce que l'on peut faire en négligeant les termes de l'ordre m^4 , produit le terme

$$\frac{15}{8} A^{(1)} A^{(1)} m^2 dv e^2 \gamma^2 \cos(2gv - cv).$$

Si l'on désigne par $A^{(22)}$ le coefficient de $e^2 \gamma^2 \cos(2v - 2mv + cv - 2gv)$ dans l'expression de δu , on trouve encore que la fonction (c) produit le terme

$$\frac{15}{8} A^{(22)} m^2 dv e^2 \gamma^2 \cos(2gv - 2cv).$$

Il nous reste à considérer les termes du développement de la fonction (c) , dépendant de δs . En désignant par $B^{(0)} \gamma \sin(2v - 2mv - gv)$ le terme de δs dépendant de cet argument, $B^{(0)}$ étant de l'ordre m , la fonction (c) produit le terme de l'ordre m^2

$$\frac{15}{16} B^{(0)} m^2 dv e^2 \gamma^2 \cos(2gv - 2cv).$$

Si l'on désigne par $B^{(1)} e^2 \gamma \sin(2v - 2mv - 2cv + gv)$ la partie de δs dépendant de cet argument, la fonction (c) produit le terme

$$-\frac{3}{8} B^{(1)} m^2 dv e^2 \gamma^2 \cos(2gv - 2cv).$$

En réunissant tous ces termes, le développement de la fonction (b) produit le terme suivant, dans l'expression de $d\delta v$,

$$(c) \left\{ m^2 dv \left(\frac{5}{4} A^{(21)} - \frac{1}{4} A^{(12)} + \frac{1}{4} B^{(12)} + \frac{15}{8} A^{(1)} A^{(21)} + \frac{15}{8} A^{(22)} + \frac{15}{16} B^{(0)} - \frac{3}{8} B^{(1)} \right) e^2 \gamma^2 \cos(2gv - 2cv) \right\}.$$

Pour avoir la valeur de $d\delta v$, rapportée à l'écliptique, il faut, par le Chapitre II du Livre VII, ajouter à la valeur de dv sur l'orbite la fonction

$$dv \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dv^2} \right).$$

En substituant dans cette fonction, au lieu de s ,

$$\gamma \sin gv + B^{(12)} e^2 \gamma \sin(2cv - gv),$$

on aura à très peu près, dans $d\delta v$, les termes

$$(1-c) B^{(12)} e^2 \gamma^2 dv \cos(2gv - 2cv) - \frac{1}{2} \gamma^2 dv \cos 2gv.$$

En réunissant ces termes au terme (e) , en intégrant et observant que $1-c$ est à fort peu près égal à $\frac{3}{2} m^2$, on aura dans δv les termes

$$\frac{m^2}{2g-2c} \left(\frac{5}{4} A^{(21)} - \frac{1}{4} A^{(12)} + \frac{1}{4} B^{(12)} + \frac{15}{8} A^{(1)} A^{(21)} + \frac{15}{8} A^{(22)} + \frac{15}{16} B^{(0)} - \frac{3}{8} B^{(1)} \right) e^2 \gamma^2 \sin(2gv - 2cv),$$

$$- \frac{1}{4} \gamma^2 \sin 2gv;$$

les valeurs de v et de δv étant ici rapportées au plan de l'écliptique. La formule (a) donne encore, dans dv , le terme $-\frac{dr}{dt} \frac{\partial r}{\partial t}$, ou à fort peu près $-\frac{du}{u^2} \frac{\partial u}{\partial v}$. En y substituant pour du , $-c dv \sin cv$, et pour δu , $A^{(21)} e^2 \gamma^2 \cos(2gv - cv)$, on aura le terme

$$-\frac{1}{2} A^{(21)} e^2 \gamma^2 \sin(2gv - 2cv),$$

qu'il faut ajouter aux précédents. Nous observerons ici que l'on peut, dans l'argument $2gv - 2cv$, changer v en t . En substituant, dans le terme $-\frac{1}{4} \gamma^2 \sin 2gv$, au lieu de v , $t + 2e \sin ct + \frac{5}{4} e^2 \sin 2ct$, il en résulte le terme

$$-\frac{3}{16} e^2 \gamma^2 \sin(2gt - 2ct);$$

on aura donc par la réunion de ces termes la valeur de l'inégalité dépendant de l'argument $2gt - 2ct$, dans l'expression de la longitude vraie de la Lune, rapportée à l'écliptique. Pour réduire en nombres cette

252 VARIATIONS DES ÉLÉMENTS DU MOUV. ELLIPTIQUE

valeur, j'emploierai les valeurs suivantes que M. Damoiseau a déterminées dans sa pièce sur la théorie de la Lune :

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= 0,202461, & A^{(12)} &= -0,04680, \\ A^{(14)} &= -0,725508, & A^{(15)} &= -0,72857, \\ B^{(6)} &= 0,0284888, & B^{(11)} &= 0,003991, & B^{(13)} &= 0,475745. \end{aligned}$$

Ces valeurs, et les valeurs connues de c , g , e , γ et m , donnent

$$+ 0'',82 \sin(2gt - 2ct)$$

pour l'inégalité dont il s'agit, ce qui diffère de $1''$ environ de l'inégalité

$$+ 1'',9 \sin(2gt - 2ct)$$

que M. Burekhardt a déduite des observations.

Je n'ai point eu égard à cette inégalité dans la théorie de la Lune, exposée dans le Livre VII de mon *Traité de Mécanique céleste*, parce que, ne me proposant que d'avoir les inégalités lunaires jusqu'aux quantités du troisième ordre inclusivement, j'ai regardé l'inégalité précédente comme étant du quatrième, ce qui résulte du n° 5 du Livre VII. En effet, si l'on considère, ainsi que dans le Chapitre VIII du Livre II, l'orbite troublée par les forces perturbatrices, comme une ellipse dont tous les éléments sont variables, on voit clairement par le même Chapitre que les éléments ne peuvent acquérir pour diviseurs que la première puissance du coefficient du temps dans les inégalités. Mais, pour repasser de l'expression du demi-grand axe à celle de la longitude moyenne, il faut une nouvelle intégration qui reproduit ce diviseur et l'élève au carré. Si l'argument de l'inégalité ne dépend que des éléments du mouvement de l'astre troublé, on voit par l'analyse du même Chapitre que le diviseur n'affecte point cette inégalité dans l'expression du demi-grand axe, et qu'ainsi il n'est élevé qu'à la première puissance dans l'expression de la longitude moyenne et, par conséquent, aussi dans l'expression de la longitude vraie; en supposant donc que ce diviseur soit de l'ordre de la force perturbatrice, le coefficient de l'inégalité ayant cette force pour facteur, il ne changera point d'ordre par

ET INÉGALITÉS LUNAIRES A LONGUES PÉRIODES. 253

les intégrations. Dans l'inégalité précédente, ce coefficient est de l'ordre $e^2 \gamma^2$, ou du quatrième ordre; il sera donc du même ordre dans l'expression de la longitude. Tout ce raisonnement est si simple que j'ai dû l'abandonner à l'intelligence du lecteur.

III.

De l'inégalité lunaire dépendant de la distance angulaire des périgées du Soleil et de la Lune.

J'ai déterminé cette inégalité par la méthode précédente et par celle de la variation des éléments. Je suis parvenu au même résultat par ces deux méthodes; mais, pour donner une application de la seconde, je vais déterminer, en la suivant, la valeur de l'inégalité dont il s'agit. En conservant toujours les dénominations du Livre VII de la *Mécanique céleste*, la partie de Q dont cette inégalité dépend est, par le n° 3 de ce Livre,

$$\frac{m' u^4}{8 a^2} [3 \cos(v - v') + 5 \cos(3v - 3v')].$$

En faisant donc toujours $a = 1$, la partie correspondante de R est

$$- \frac{m^2}{8 a^2} \frac{r^3}{\left(\frac{r}{a}\right)^4} [3 \cos(v - v') + 5 \cos(3v - 3v')].$$

Considérons d'abord le premier de ces deux termes. En y substituant $1 - e \cos(t - \varpi)$ au lieu de r , $t + 2e \sin(t - \varpi)$ au lieu de v , $1 - e' \cos(mt - \varpi')$ au lieu de $\frac{r'}{a'}$, et $mt + 2e' \sin(mt - \varpi')$ au lieu de v' , on aura dans R le terme

$$\frac{15}{16} m^2 \frac{1}{a^2} e e' \cos(\varpi - \varpi').$$

Pour porter l'approximation jusqu'aux termes de l'ordre m^3 , on observera que, par le Livre VII, l'action du Soleil augmente u , ou $\frac{1}{r}$, de la



254 VARIATIONS DES ÉLÉMENTS DU MOUV. ELLIPTIQUE

quantité

$$\Lambda_1^{(1)} e \cos(t - 2mt + \varpi) + \Lambda_1^{(2)} e e' \cos(t - mt + \varpi - \varpi') \\ + \Lambda_1^{(3)} e e' \cos(t - mt - \varpi + \varpi').$$

Ces termes peuvent, à cause de la petitesse de m , être considérés comme autant d'équations du centre, qui produisent dans la longitude ν de la Lune les termes

$$2\Lambda_1^{(1)} e \sin(t - 2mt + \varpi) + 2\Lambda_1^{(2)} e e' \sin(t - mt + \varpi - \varpi') \\ + 2\Lambda_1^{(3)} e e' \sin(t - mt - \varpi + \varpi');$$

il faut ajouter à ces termes celui-ci : $-C_1^{(1)} e' \sin(m't - \varpi')$. De là résulte, dans R , le terme de l'ordre m^3

$$\frac{15}{16} \left(3\Lambda_1^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} + \Lambda_1^{(3)} - \frac{1}{2} C_1^{(1)} \right) m^2 \frac{1}{a} e e' \cos(\varpi - \varpi').$$

La partie entière de R , relative à $\cos(\varpi - \varpi')$, et dépendant de la parallaxe du Soleil, est ainsi

$$(f) \quad \frac{15}{16} \left(1 + 3\Lambda_1^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} + \Lambda_1^{(3)} - \frac{1}{2} C_1^{(1)} \right) m^2 \frac{1}{a} e e' \cos(\varpi - \varpi');$$

mais la partie de R , indépendante de la parallaxe du Soleil, peut produire un terme semblable, en y substituant pour r et ν les termes dépendant de cette parallaxe. Désignons par $m^2 r^2 Q'$ cette partie de R ; on aura

$$R = m^2 r^2 Q' + X,$$

en désignant par X le terme précédent (f). En désignant donc par la caractéristique δ la variation relative à cette parallaxe, et observant que la partie de R qui en dépend a pour facteur r^2 , on aura

$$\delta R = \delta m^2 r^2 Q' + X;$$

$$2a^2 \frac{\partial R}{\partial a} = 4a m^2 r^2 Q' + 6a X;$$

partant

$$2\delta a^2 \frac{\partial R}{\partial a} = 4\delta a m^2 r^2 Q' + 6a X = 4\delta a R + 2a X.$$

ET INÉGALITÉS LUNAIRES A LONGUES PÉRIODES. 255

Mais on a

$$\delta a R = a \delta R + R \delta a;$$

et par l'article I on a, aux quantités près de l'ordre m^4 , δa et δR nuls relativement aux inégalités à longues périodes; on a donc, en faisant toujours $a = 1$,

$$2\delta a^2 \frac{\partial R}{\partial a} = 2X.$$

Considérons maintenant l'équation différentielle (2) de la longitude de l'époque, elle donne

$$d\delta t = -dt \delta \frac{e}{a} + 2dt \delta a^2 \frac{\partial R}{\partial a},$$

il faut déterminer $\delta a^2 \frac{\partial R}{\partial a}$. En substituant pour R sa valeur précédente, on a

$$\delta a^2 \frac{\partial R}{\partial a} = m^2 \delta \left[e d \left(\frac{r^2 Q'}{de} \right) \right] + X;$$

soit, en négligeant les puissances de e supérieures à e^2 ,

$$m^2 r^2 Q' = m^2 H + m^2 e H' + m^2 e^2 H'';$$

on aura

$$R = m^2 H + m^2 e H' + m^2 e^2 H'' + X,$$

$$\delta \left[e \frac{d(m^2 r^2 Q')}{de} \right] = m^2 \delta e H' + 2m^2 \delta e^2 H'';$$

mais l'expression de R donne, en vertu de l'équation $\delta R = 0$,

$$m^2 \delta e^2 H'' = -m^2 \delta H - \delta m^2 e H' - X;$$

on aura donc

$$\delta \left[e \frac{d(m^2 r^2 Q')}{de} \right] = -2m^2 \delta H - m^2 \delta e H' - 2X.$$

Par le n° 3 du Livre VII on a

$$m^2 r^2 Q' = -\frac{m' u^2}{4 u^2} [1 + 3 \cos(2\nu - 2\nu')];$$

ainsi H contient un terme de la forme

$$m^2 L \cos(2t - 2mt - 2\varepsilon + 2\varepsilon').$$

Ce terme varie à raison de la variation $\delta\varepsilon$, et sa variation est

$$2m^2 L \delta\varepsilon \sin(2t - 2mt - 2\varepsilon + 2\varepsilon').$$

Mais il est facile de voir, par l'inspection seule de l'expression de $\delta\varepsilon$ de l'équation (2) de l'article I, que la partie de $\delta\varepsilon$ qui peut réduire cette variation à ne dépendre que de l'angle $\varpi - \varpi'$, ayant pour argument $2t - 2mt + (\varpi - \varpi')$, ne peut être que de l'ordre m^2 , ce qui abaisse cette variation à l'ordre m^4 .

Pareillement, eH' contient un terme de la forme

$$m^3 P e \cos(t - 2mt + \varpi - 2\varepsilon + 2\varepsilon'),$$

dont la variation est

$$m^3 P \delta e \cos(t - 2mt + \varpi - 2\varepsilon + 2\varepsilon') \\ + m^3 P (2\delta\varepsilon - \delta\varpi) e \sin(t - 2mt + \varpi - 2\varepsilon + 2\varepsilon').$$

Ces termes ne peuvent se réduire à des termes dépendant de l'angle $\varpi - \varpi'$ que par les parties de δe , $\delta\varpi$ et $\delta\varepsilon$, dont les arguments renferment l'angle $t - 2mt$; et il est visible par les expressions différentielles de e , ϖ et ε , de l'article I, que ces parties sont de l'ordre m^2 : ainsi la variation précédente ne peut produire que des termes de l'ordre m^4 , dépendant de $\varpi - \varpi'$. On peut appliquer le même raisonnement aux autres termes du développement de eH' . Ainsi, en négligeant les termes de l'ordre m^4 , on a

$$0 = -2m^2 \delta H - m^2 \delta \cdot eH';$$

on a donc

$$\delta \left[e \frac{d(m^2 r^2 Q)}{dc} \right] = -2X.$$

En substituant cette valeur et celle de $\delta \cdot a^2 \frac{\partial R}{\partial a}$ dans l'expression

de $d\delta\varepsilon$, elle devient

$$d\delta\varepsilon = \frac{5}{2} X dt.$$

Nous pouvons, dans l'argument $\varpi - \varpi'$, substituer $(1-c)t$ pour ϖ , et regarder ϖ' comme constant; et comme nous avons porté l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre m^3 , qui doublent à fort peu près la valeur de $1-c$ et la rapprochent beaucoup des observations, nous devons, dans l'intégration, employer sa véritable valeur, telle qu'elle résulte des observations. On a donc à fort peu près

$$\delta\varepsilon = \frac{75}{32} \frac{m^2}{1-c} \frac{1}{a'} \left(1 + 3A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + A_1^{(3)} - \frac{1}{2} C_1^{(1)} \right) e e' \sin(\varpi - \varpi').$$

L'expression de la longitude vraie de la Lune étant

$$nt + \varepsilon + 2e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \dots,$$

elle varie par les variations de n , ε , e et ϖ . On vient de voir que, relativement à l'inégalité dont l'argument est $\varpi - \varpi'$, la variation de n est nulle. Les variations de e et de ϖ produiront les termes

$$2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - 2e \delta\varpi \cos(nt + \varepsilon - \varpi).$$

Mais pour qu'il en résulte un terme dépendant de l'angle $\varpi - \varpi'$, il faut employer les parties des variations δe et $\delta\varpi$, qui renferment nt dans leurs arguments, et l'on voit, par l'inspection seule des équations (3) et (4) de l'article I, que ces parties sont de l'ordre m^2 . En négligeant donc les quantités de cet ordre, la valeur précédente de $\delta\varepsilon$ exprime l'inégalité de la longitude vraie de la Lune, qui dépend de l'angle $\varpi - \varpi'$.

Dans le n° 16 du Livre VII j'ai trouvé

$$A_1^{(1)} = 0,202619, \quad A_1^{(2)} = -0,0698493, \\ A_1^{(3)} = 0,274122, \quad C_1^{(1)} = 0,196755.$$

En employant ensuite pour e , e' , m et $1-c$ leurs valeurs données

dans le numéro cité du même Livre, et faisant

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{400},$$

on trouve l'inégalité dont il s'agit, égale à $1'',3 \sin(\varpi - \varpi')$, ce qui diffère peu de l'inégalité $0'',8 \sin(\varpi - \varpi')$ que M. Burckhardt a déduite des observations.

IV.

Des inégalités lunaires dues à l'aplatissement de la Terre.

L'importance de ces inégalités, pour la théorie de la figure de la Terre, rend très utile la recherche des termes qui peuvent donner à leurs expressions plus d'exactitude. Dans le Volume précédent de la *Connaissance des Temps*, j'ai considéré les termes dépendant des carrés de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire, que le carré de la force perturbatrice introduit dans l'expression de l'inégalité lunaire en latitude due à l'aplatissement de la Terre. Je vais considérer ici, dans l'expression de l'inégalité lunaire correspondante en longitude, les termes de l'ordre m , auxquels je n'ai point eu égard dans le Chapitre II du Livre VII de la *Mécanique céleste*.

Je reprends l'équation (a) de l'article II,

$$(a) \quad d\delta v = -\frac{d(dr\delta r)}{dt} + dt \left(2\delta r \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial r} \delta r \right);$$

dans la question présente on a, par le Chapitre II du Livre VII de la *Mécanique céleste*, en négligeant la parallaxe solaire,

$$R = \left(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi^2 \right) \frac{D^2}{r^3} \left[\sin^2\lambda(1-s^2)\sin^2\varphi' + 2s\sin\lambda\cos\lambda\sin\varphi + s^2\cos^2\lambda - \frac{1}{3} \right] + r^2 Q',$$

Q' étant, par le n° 3 du Livre cité,

$$-\frac{m^2}{4} [1 - 3s^2 + 3(1-s^2)\cos(2v - 2v')].$$

En désignant donc par X le premier terme de l'expression précédente de R , on aura

$$2r \frac{\partial R}{\partial r} = 4R - 10X;$$

en supposant que la variation δ se rapporte à l'aplatissement de la Terre, on aura

$$2\delta r \frac{\partial R}{\partial r} = 4\delta R - 10X$$

et l'expression (a) précédente de $d\delta v$ donnera, en faisant δR nul, comme on le peut à l'égard des inégalités à longues périodes,

$$d\delta v = -\frac{d(dr\delta r)}{dt} - dt(10X + 2rQ'\delta r).$$

Le terme

$$\left(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi^2 \right) \frac{D^2}{r^3} 2s\sin\lambda\cos\lambda\sin\varphi$$

de l'expression de X produit le suivant à longue période :

$$\left(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi^2 \right) \frac{D^2}{r^3} \sin\lambda\cos\lambda\gamma\cos(gv - fv).$$

En n'ayant donc égard qu'à ce terme, et substituant dv pour dt , ce que l'on peut faire quand on néglige les quantités de l'ordre des carrés de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire, l'équation (a) donnera

$$d\delta v = -\frac{d(dr\delta r)}{dt} - dv \left[10 \left(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi^2 \right) \frac{D^2}{r^3} \sin\lambda\cos\lambda\gamma\cos(gv - fv) + 2Q'r\delta r \right].$$

Pour déterminer δr je reprends l'équation différentielle (S) du n° 46 du second Livre

$$0 = \frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + (M+m) \frac{r\delta r}{r^3} + 2\delta \int dR + \delta r \frac{\partial R}{\partial r}.$$

Si l'on n'a égard qu'aux quantités à longues périodes on a, par ce qui

précède,

$$2\partial \int dR + \partial . r \frac{\partial R}{\partial r} = 2\partial R - 3X + 2\partial . r^2 Q;$$

mais on a

$$\partial R = X + \partial . r^2 Q;$$

on a donc, en observant que ∂R doit être supposé nul,

$$2\partial \int dR + \partial . r \frac{\partial R}{\partial r} = -5X;$$

l'équation différentielle en ∂r donnera ainsi

$$\partial r = 5X.$$

En négligeant donc les quantités des ordres e^2 et m^2 , et observant que Q a pour facteur m^2 , on aura

$$d\partial v = -10dv \left(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi \right) \frac{D^2}{a^2} \sin \lambda \cos \lambda \gamma \cos (gv - fv).$$

Cette valeur de $d\partial v$ est relative à l'orbite. Pour la rapporter à l'écliptique il faut, par le Chapitre II du Livre VII, lui ajouter la fonction

$$dv \left(s \partial s - \frac{ds d\partial s}{dv^2} \right).$$

En substituant, pour s , $\gamma \sin gv$, et pour ∂s sa valeur approchée aux quantités près de l'ordre m^2 , $-\frac{(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{g-1} \frac{D^2}{a^2} \sin \lambda \cos \lambda \sin fv$, on aura

$$dv \left(s \partial s - \frac{ds d\partial s}{dv^2} \right) = \frac{1}{2} dv \left(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi \right) \sin \lambda \cos \lambda \frac{D^2}{a^2} \gamma \cos (gv - fv),$$

ce qui donne

$$d\partial v = -\frac{19}{2} dv \left(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi \right) \frac{D^2}{a^2} \sin \lambda \cos \lambda \gamma \cos (gv - fv),$$

la valeur de $d\partial v$ se rapportant ici à l'écliptique, ainsi que les valeurs

de v et de ∂v . L'inégalité en longitude rapportée à l'écliptique est donc

$$-\frac{19}{2} \frac{(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{g-1} \frac{D^2}{a^2} \sin \lambda \cos \lambda \gamma \sin (gt - ft),$$

en intégrant et changeant v en t . Cette expression est exacte aux quantités près des ordres e^2 , γ^2 et m^2 .

V.

De l'inégalité lunaire à longue période, dépendant de la différence des deux hémisphères terrestres.

J'ai considéré cette inégalité dans le Volume précédent de la *Connaissance des Temps* pour l'année 1823, pages 232 et suivantes. Mais je n'ai point eu égard aux termes de l'ordre m^2 . Cependant, ce sont les termes de cet ordre qui, doublant la valeur de $1-c$, rendent extrêmement petit le diviseur $3f-2g-c$ qui affecte cette inégalité, ce qui l'augmente considérablement. Dans l'errata de la *Connaissance des Temps*, citée, j'ai observé que la considération de ces termes doit diminuer encore l'inégalité dont il s'agit, et que j'avais trouvée insensible. Je vais ici avoir égard à ces termes.

En conservant les dénominations de mon Mémoire inséré dans la *Connaissance des Temps* de 1823, on a

$$R = r^2 Q' - \frac{H \sin 3fv}{r^2 (1+s^2)^{\frac{1}{2}}},$$

Q' étant égal à

$$-\frac{m^2}{4} [1-3s^2+3(1-s^2)\cos(2v-2v')].$$

Cette expression de R donne

$$2r \frac{\partial R}{\partial r} = 4r^2 Q' + \frac{8H \sin 3fv}{r^2 (1+s^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on ne fait porter la caractéristique δ que sur les termes dépendant de H , et si l'on néglige les termes de l'ordre H^2 , on aura

$$\begin{aligned} 2\delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r} &= 4\delta \cdot r^2 Q' + \frac{8H \sin 3fv}{r^4(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \delta R &= \delta \cdot r^2 Q' - \frac{H \sin 3fv}{r^4(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Mais en n'ayant égard qu'à l'inégalité à longue période dont l'argument est $3fv - 2gv - cv$, on a, par ce qui précède, $\delta R = 0$, ce qui donne

$$\delta \cdot r^2 Q' = \frac{H \sin 3fv}{r^4(1+s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

on a donc

$$2\delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{12H \sin 3fv}{r^4(1+s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

la formule (a) de l'article II devient ainsi

$$d\delta v = -\frac{d(dr \partial r)}{dt} + dt \left[\frac{12H \sin 3fv}{r^4(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - 2rQ' \partial r \right].$$

En faisant $a = 1$, on peut substituer $\frac{dv}{u^2}$ pour dt . On a ensuite

$$r = \frac{\sqrt{1+s^2}}{u}, \quad u = \sqrt{1+s^2} + e \cos cv;$$

le terme

$$\frac{12H \sin 3fv}{r^4(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donne celui-ci,

$$9e\gamma^2 dv H \sin(3fv - 2gv - cv),$$

s étant $\gamma \sin gv$, et u étant à fort peu près $\sqrt{1+s^2} + e \cos cv$. On trouvera facilement

$$-2Q' dt r \partial r = \frac{m^2}{2} [1 + 3 \cos(2v - 2mv)] \left(-\frac{\partial u}{u^2} + \frac{s \partial s}{u} \frac{dv}{u^2} \right);$$

on a (*Connaissance des Temps* de 1823, p. 235)

$$\begin{aligned} \partial u &= -\frac{9}{4} e \gamma^2 \frac{H \sin(3fv - 2gv - cv)}{3f - 2g - c} - \frac{3\gamma^2}{4} \frac{H \sin(3fv - 2gv)}{3f - 2g - c}, \\ \partial s &= \frac{3}{2} e \gamma \frac{H \cos(3fv - gv - cv)}{3f - 2g - c}. \end{aligned}$$

En substituant ensuite, pour s , $\gamma \sin gv$, et pour u sa valeur fort approchée, $1 + e \cos cv$, on trouve

$$\frac{m^2}{2} \left(-\frac{\partial u}{u^2} + \frac{s \partial s}{u} \right) = -\frac{3m^2}{16} e \gamma^2 \frac{H \sin(3fv - 2gv - cv)}{3f - 2g - c}.$$

Pour avoir égard aux termes de l'ordre m^3 , il faut considérer la fonction

$$\frac{3m^2}{2} dv \cos(2v - 2mv) \left(-\frac{\partial u}{u^2} + \frac{s \partial s}{u} \right).$$

On doit supposer ici

$$\begin{aligned} u &= 1 + e \cos cv + A_1^{(1)} e \cos(2v - 2mv - cv), \\ s &= \gamma \sin gv + B_1^{(1)} \gamma \sin(2v - 2mv - gv). \end{aligned}$$

La fonction précédente donne ainsi le terme suivant

$$-\frac{3m^2}{16} dv \left(\frac{15}{2} A_1^{(1)} - 3B_1^{(1)} \right) e \gamma^2 \frac{H \sin(3fv - 2gv - cv)}{3f - 2g - c}.$$

En réunissant tous ces termes, l'expression précédente de $d\delta v$ devient

$$d\delta v = -\frac{d(dr \partial r)}{dt} + e \gamma^2 H dv \left[9 - \frac{3m^2(1 + \frac{15}{2} A_1^{(1)} - 3B_1^{(1)})}{16(3f - 2g - c)} \right] \sin(3fv - 2gv - cv);$$

dans le premier membre de cette équation, v se rapporte à l'orbite lunaire. Pour le rapporter, comme dans le second membre, à l'écliptique, il faut, par le Chapitre II du Livre VII de la *Mécanique céleste*, lui ajouter ce que produit la fonction

$$\left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dc^2} \right) dv$$

lorsqu'on y substitue, pour s ,

$$\gamma \sin gv + \frac{3}{2} e \gamma \frac{\Pi \cos(3fv - gv - cv)}{3f - 2g - c}.$$

Il en résulte le terme

$$\frac{3}{4} e \gamma^3 \Pi dv \left[\frac{g(3f - g - c) - 1}{3f - 2g - c} \right] \sin(3fv - 2gv - cv);$$

en l'ajoutant à l'expression précédente de $d\delta v$; en intégrant ensuite, on aura l'inégalité δv rapportée à l'écliptique, égale à

$$-\frac{dr}{dt} \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{e \gamma^3 \Pi}{3f - 2g - c} \times \left\{ 9 + \frac{3}{4} g - \frac{3m^2}{16} \left[1 + \frac{1}{3} A^{(1)} - \frac{3B^{(1)}}{3f - 2g - c} - \frac{1}{3}(g^2 - 1) \right] \right\} \cos(3fv - 2gv - cv).$$

En substituant, pour dr , $-\frac{du}{a^2}$; pour ∂r , $-\left(\frac{\partial u}{a^2} - \frac{s \partial s}{a}\right)$, et pour dt , $\frac{dv}{a^2}$, le terme $-\frac{dr}{dt} \frac{\partial r}{\partial t}$ donne le suivant :

$$-\frac{3e \gamma^3 \Pi}{8(3f - 2g - c)} \cos(3fv - 2gv - cv).$$

Cela posé, en suivant l'analyse de la page 238 de la *Connaissance des Temps* de 1823, on trouve que cette inégalité est insensible et au-dessous d'un centième de seconde sexagésimale.

DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES.

Connaissance des Temps pour l'an 1824; 1821.

J'ai donné dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1780 ⁽¹⁾, et dans le second Livre de la *Mécanique céleste*, une méthode pour déterminer l'orbite des Comètes par les observations. Cette méthode diffère des autres en ce qu'elle fait porter les approximations sur les données mêmes de l'observation, l'analyse étant d'ailleurs rigoureuse et fort simple. On peut employer plus de trois observations, pourvu que l'on ait l'attention d'en augmenter l'intervalle, à mesure qu'on les multiplie; on obtient alors des données analytiquement plus exactes; mais la longueur du calcul et les erreurs dont les observations sont susceptibles diminuent cet avantage, de sorte que ceux qui ont fait usage de cette méthode ont presque tous préféré de n'employer que trois observations peu distantes entre elles. Dans un court intervalle, les différences supérieures aux secondes différences sont insensibles. On peut donc ne considérer que les époques des mouvements en longitude et en latitude, et les premières et secondes différences de ces mouvements. Ce sont les seules données de l'observation que l'on emploie dans la méthode. Trois observations suffiront pour les déterminer; chaque observation étant équivalente à deux, l'une en longitude et l'autre en latitude. Mais on peut faire servir à la détermination des six données précédentes toutes les observations faites dans l'intervalle que l'on considère.

⁽¹⁾ *Œuvres de Laplace*, T. X.

En exprimant chaque observation par une fonction linéaire de ces données, on aura plus d'équations que de données inconnues; alors, suivant un procédé bien connu, on multipliera respectivement chaque équation par le coefficient de la première inconnue. En ajoutant ces produits, on formera une première équation finale. En traitant de la même manière la seconde inconnue, on formera une seconde équation finale, et ainsi de suite. En résolvant ces équations, on aura les données avec une précision d'autant plus grande que l'on aura fait concourir plus d'observations. C'est un avantage propre à cette méthode.

Au moyen de ces données, la méthode conduit, dans le cas ordinaire du mouvement parabolique, aux équations (1), (2), (3), (4) de la page 224 du premier Volume de la *Mécanique céleste* ⁽¹⁾, qui déterminent le rayon vecteur de la Comète, sa distance à la Terre, projetée sur l'écliptique, et la différentielle de cette distance, divisée par l'élément du temps. En désignant par y ce quotient, les équations (2) et (3) donnent deux expressions de y , entre lesquelles on peut choisir. Les erreurs des observations étant principalement sensibles sur les différences secondes des mouvements en longitude et en latitude, j'ai prescrit, dans la page citée, d'employer celle des deux expressions de y qui dépend de la plus grande différence. Mais depuis cette époque, m'étant beaucoup occupé des milieux qu'il faut choisir entre les résultats des observations, j'ai reconnu qu'il y a de l'avantage à faire concourir les deux valeurs de y ; et en appliquant à cet objet les méthodes que j'ai données pour obtenir les résultats les plus avantageux, j'ai trouvé qu'il fallait multiplier l'équation (2) par le carré de a , l'ajouter à l'équation (3), multipliée par le carré de h , et diviser leur somme par $a^2 + h^2$; ce qui donne l'expression de y qu'il faut combiner avec les équations (1) et (4) conformément à la méthode dont il s'agit.

Cette méthode donne la distance périhélie et l'instant du passage par le périhélie. Ensuite, on corrige ces deux éléments approchés, au moyen de trois observations choisies, sans avoir besoin des autres éléments de l'orbite, ce qui simplifie beaucoup le calcul. Pour cela, on

⁽¹⁾ *Œuvres de Laplace*, T. I, p. 227-228.

détermine, en partant des éléments approchés et des observations, les différences d'anomalie de la première à la deuxième observation, et de la première observation à la troisième. On compare ensuite ces différences aux mêmes différences d'anomalie que donnent immédiatement les deux éléments approchés, et l'on note les deux résultats de cette comparaison, dans cette première hypothèse. On fait ensuite varier d'une très petite quantité la distance périhélie, et l'on calcule les mêmes résultats dans cette deuxième hypothèse. Enfin, en conservant la distance périhélie de la première hypothèse, on fait varier très peu l'instant du passage au périhélie, et l'on calcule encore les résultats dans cette troisième hypothèse. En multipliant respectivement les deux variations supposées dans la distance périhélie, et dans l'instant du passage, par les indéterminées u et t , on forme, au moyen des résultats obtenus dans les trois hypothèses, deux équations du premier degré, qui donnent les inconnues u et t , par lesquelles il faut multiplier les variations supposées pour avoir les véritables. On peut obtenir ces inconnues par les méthodes différentielles, mais il m'avait paru que le moyen précédent, ayant l'avantage de refaire les mêmes calculs pour chaque hypothèse, était préférable. M. Brinkley, astronome très distingué de l'Observatoire de Dublin, pense que les formules différentielles sont plus exactes et plus simples, et il a donné ces formules dans les *Transactions de l'Académie d'Irlande*. L'usage seul peut décider cette question.

M. Bouvard a bien voulu appliquer la méthode précédente à l'orbite de la seconde Comète de 1805. Voici le résultat de son calcul ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Voir également *Œuvres de Laplace*, T. V, Livre XV.



DE
L'ORBITE DE LA SECONDE COMÈTE DE 1805;

PAR M. BOUVARD.

La méthode de M. de Laplace consiste à choisir quatre ou cinq observations très rapprochées les unes des autres, en employant la formule suivante :

$$x + ty + \frac{t^2}{2} z = \beta^a,$$

dans laquelle x représente la longitude prise pour époque moyenne, y la différence première et z la différence seconde; t le temps qui sépare les observations employées du temps de l'observation moyenne. La même formule servira également pour la latitude.

Substituant, dans cette formule, pour t les temps correspondant aux observations, on aura autant d'équations que d'observations. On fera ensuite usage de la méthode des moindres carrés pour trouver les valeurs des trois inconnues x , y et z .

Voici les observations de cette Comète :

Temps moyen.	Longitudes.	Latitudes.
1805. Novembre 16, 45206.....	$29^{\circ}.23'.37'' = \beta$	$+30^{\circ}.2'.40'' = \gamma$
17, 36386.....	$28^{\circ}.51'.23'' = \beta'$	$+29^{\circ}.48'.52'' = \gamma'$
18, 39997.....	$28^{\circ}.14'.18'' = \beta''$	$+29^{\circ}.32'.44'' = \gamma''$
23, 32241.....	$24^{\circ}.41'.4'' = \beta'''$	$+27^{\circ}.25'.35'' = \gamma'''$
30, 51095.....	$15^{\circ}.39'.40'' = \beta^{IV}$	$+19^{\circ}.25'.28'' = \gamma^{IV}$
Décembre 5, 29581.....	$2^{\circ}.7'.11'' = \beta^V$	$+3^{\circ}.20'.45'' = \gamma^V$
8, 27324.....	$344^{\circ}.1'.31'' = \beta^{VI}$	$-18^{\circ}.54'.14'' = \gamma^{VI}$

En choisissant les quatre premières observations et en prenant pour

DE L'ORBITE DE LA SECONDE COMÈTE DE 1805. 269

époque celle du 18, les temps sont

$$t = -1^{\text{d}}.94721, \quad t' = -1^{\text{d}}.63541, \quad t'' = +4^{\text{d}}.92314;$$

ce qui donne les équations

- (1) $x - 1,94721y + 1,89581z = 29^{\circ}.23'.37'' = 29^{\circ}.3937,$
- (2) $x - 1,63541y + 0,53604z = 28^{\circ}.51'.23'' = 28^{\circ}.8564,$
- (3) $x + 0y + 0z = 28^{\circ}.14'.18'' = 28^{\circ}.2383,$
- (4) $x + 4,92314y + 12,11866z = 24^{\circ}.41'.4'' = 24^{\circ}.6845.$

L'équation du minimum, pour x , sera

$$(a) \quad 4x + 1,94052y + 14,55051z = +111^{\circ}.1729.$$

L'équation du minimum, pour y , est

$$(b) \quad +1,94052x + 29,10102y + 55,41531z = +34^{\circ}.4113.$$

Enfin celle relative à z sera

$$(c) \quad +14,55051x + 55,41531y + 150,74344z = +370^{\circ}.3361.$$

La résolution de ces trois équations donne

$$\begin{aligned} x &= 28^{\circ}.2276 = 28^{\circ}.13'39'', \\ y &= -2279',536, \\ z &= -125,8951; \end{aligned}$$

d'où l'on tire le premier membre de l'équation de condition

$$(m) \quad 28^{\circ}.13'39'' - 2279',536 - 62^{\circ}.94751z,$$

laquelle, étant comparée à celle de la *Mécanique céleste*, page 200⁽¹⁾, donne

$$\alpha = 28^{\circ}.13'39''$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \log \alpha &= 9,8078393 -, \\ \log b &= 0,3144190 -, \end{aligned}$$

(1) *Oeuvres de Laplace*, T. I, p. 205.

ou

$$\begin{aligned}a &= -0,64245, \\b &= -2,06262.\end{aligned}$$

En opérant de même pour les latitudes, on aura également les quatre équations

$$\begin{aligned}(1) \quad \theta &= 1,94721y' + 1,89581z' = 30^\circ \quad 2'40'' = 30^\circ, 0444, \\(2) \quad \theta &= 1,03541y' + 0,53604z' = 29^\circ 48'52'' = 29^\circ, 8145, \\(3) \quad \theta &+ \quad 0y' + \quad 0z' = 29^\circ 31'44'' = 29^\circ, 5455, \\(4) \quad \theta &+ 4,92314y' + 12,11866z' = 27^\circ 25'35'' = 27^\circ, 4264;\end{aligned}$$

d'où l'on tire les équations

$$\begin{aligned}(a') \quad &4\theta + 1,94952y' + 14,55051z' = + 116^\circ, 8308, \\(b') \quad &+ 1,94052\theta + 29,10102y' + 53,41531z' = + 43^\circ, 6512, \\(c') \quad &+ 14,55051\theta + 55,44531y' + 150,74344z' = + 405^\circ, 3118.\end{aligned}$$

En résolvant ces trois équations, on a trouvé

$$\theta = 29^\circ 31' 57'', \quad y' = -1112', 72 \quad \text{et} \quad z' = -172', 9503;$$

ce qui fournit le premier membre de l'équation de condition

$$(d) \quad 29^\circ 31' 57'' - 1112', 72 - 88^\circ, 4751 \theta,$$

de laquelle on tire

$$\theta = 29^\circ 31' 57''$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\log h &= 9,4963774 - \quad \text{et} \quad h = -0,313601, \\ \log l &= 0,4523320 - \quad \text{et} \quad l = -2,83356.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à substituer ces quantités dans les équations de la page 224 (*) de la *Mécanique céleste*. Nous avons pris pour époque moyenne l'observation du 18 novembre. La longitude du Soleil pour cet instant est égale à

$$236^\circ 9' 39'' = E,$$

son rayon vecteur, ou

$$\log R = 9,9916166;$$

enfin, on a trouvé

$$\log(R' - 1) = 8,0666986.$$

(*) *Oeuvres de Laplace*, T. I, p. 227-228.

Les équations seront les suivantes :

$$\begin{aligned}(1) \quad r^2 &= 1,32095x^2 + 1,745218x + 0,975514, \\(2) \quad y &= -1,605275x + \frac{0,360085}{r^2} - 0,373728, \\(3) \quad y &= -4,057880x - \frac{0,596684}{r^2} + 0,619291, \\(4) \quad \begin{cases} 0 = 1,32095y^2 - 0,469364xy + 0,584345x^2 \\ - 0,969176y - 1,142341x - \frac{2}{r} + 1,025101. \end{cases}\end{aligned}$$

En multipliant la première valeur de y par a^2 , et la deuxième par h^2 , la somme divisée par $a^2 + h^2$, l'équation en y est la suivante :

$$y = -2,165710x + \frac{0,175979}{r^2} - 0,182648.$$

En la combinant avec les équations (1) et (4), j'ai trouvé qu'il fallait supposer $x = 0,20083$, ce qui donne $r = 1,17448$ et $y = -0,50901$. L'équation de la parabole donne pour reste $-0,00014$, quantité suffisamment exacte.

J'ai trouvé ensuite

$$P = -0,757218.$$

Cette valeur de P donne

$$D = 0,88779,$$

et le temps du passage

Décembre 31, 6830, temps moyen.

Pour corriger ces deux éléments j'ai fait usage des observations du 16, du 30 novembre et de celle du 8 décembre, qui a été faite au méridien de Greenwich par Maskelyne. Les observations ont été corrigées de l'aberration, de la nutation et de la parallaxe, d'après les éléments que j'avais calculés en 1805, de sorte que les calculs précédents sont déduits des observations déjà corrigées.

Voici les éléments que j'ai trouvés :

Passage par le périhélie, décembre 1805, le 31, 28224.
(Temps moyen compté de midi.)

Distance périhélie.....	D = 0,8917974
Longitude du périhélie.....	P = 109°23'29"
Longitude du nœud.....	Ω = 250°33'20"
Inclinaison de l'orbite.....	φ = 16°31'27"
Mouvement.....	Direct.

Ces éléments représentent les observations comme il suit :

	En longitude.	En latitude.
Novembre 16.....	+ 2. 6"	— 0. 8"
17.....	— 0. 6	— 1. 2
18.....	+ 0. 4	+ 0. 3
23.....	— 0.16	+ 0. 2
30.....	— 1.58	+ 0.37
Décembre 5.....	+ 1.23	+ 1.11
8.....	— 0.27	+ 2.25

La Comète étant très près de la Terre, l'angle au Soleil très petit, les plus légères variations dans les éléments changent considérablement les erreurs.

SUR

L'ATTRACTION DES SPHÈRES

ET SUR

LA RÉPULSION DES FLUIDES ÉLASTIQUES ⁽¹⁾.

Connaissance des Temps pour l'année 1824; 1821.

I.

Newton a démontré ces deux propriétés remarquables de la loi d'attraction réciproque au carré de la distance : l'une, que la sphère attire un point situé au dehors, comme si toute sa masse était réunie à son centre; l'autre, qu'un point situé au dedans d'une couche sphérique ne reçoit de son attraction aucun mouvement. J'ai fait voir, dans le second Livre de la *Mécanique céleste*, que parmi toutes les lois d'attraction décroissante à l'infini, par la distance, la loi de la nature est la seule qui jouisse de ces propriétés : dans toute autre loi d'attraction, l'action des sphères est modifiée par leurs dimensions. Pour déterminer ces modifications je partirai des formules que j'ai données dans le n° 12 du second Livre cité, en conservant les mêmes dénominations. J'ai trouvé l'attraction d'une surface sphérique dont u est le rayon, et r est la distance d'un point extérieur à son centre, égale à la différentielle, prise par rapport à r et divisée par dr , de la fonction

$$\frac{2\pi u}{r} [\psi(r+u) - \psi(r-u)].$$

(¹) Lu à l'Académie des Sciences le 10 septembre 1821.

Dans cette fonction, π est le rapport de la circonférence au diamètre; $\psi(r)$ est $\int r dr \varphi(r)$, et $\varphi(r)$ est $\int dr \varphi(r)$, $\varphi(r)$ exprimant la loi de l'attraction. Enfin, l'attraction de la couche est supposée dirigée vers son centre.

Désignons $\int dr \psi(r)$ par $\psi_1(r)$; $\int dr \psi_1(r)$ par $\psi_2(r)$, et ainsi de suite. La fonction précédente multipliée par du , et intégrée depuis $u = 0$ jusqu'à $u = R$, R étant le rayon de la sphère, devient

$$\frac{2\pi}{r} \{ R[\psi_1(r+R) + \psi_1(r-R)] - \psi_2(r+R) + \psi_2(r-R) \},$$

ou

$$\frac{2\pi R^2}{r} \frac{\partial}{\partial R} \frac{\psi_1(r+R) - \psi_2(r-R)}{R}.$$

La différentielle de cette fonction, prise par rapport à r et divisée par dr , donne, pour l'attraction d'une sphère de la densité ρ ,

$$(A) \quad 2\pi\rho R^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial R} \frac{\psi_1(r+R) - \psi_2(r-R)}{rR}.$$

Si l'on suppose la loi d'attraction $\varphi(r)$ égale à $r^{-2-\alpha}$, cette formule devient, en désignant par M la masse de la sphère,

$$(B) \quad \frac{3M}{2r^2 R^3} \frac{(r+R)^{1-\alpha} - (r-R)^{1-\alpha} - (3-\alpha)[(r+R)^{1-\alpha} + (r-R)^{1-\alpha}]Rr}{(1+\alpha)(1-\alpha)(3-\alpha)}.$$

Si le point attiré est à la surface, on a $r = R$, et cette fonction devient

$$\frac{M 2^{-2-\alpha} R^{-2-\alpha}}{(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)}.$$

A une grande distance r , la même fonction devient $M r^{-2-\alpha}$; ce n'est donc que dans les deux cas de $\alpha = 0$ et de $\alpha = -3$ que l'attraction à la surface de la sphère est à l'attraction à une grande distance dans le rapport donné par la loi de l'attraction, c'est-à-dire dans le rapport de $R^{-2-\alpha}$ à $r^{-2-\alpha}$.

Lorsque Newton voulut reconnaître l'identité de la force qui retient la Lune dans son orbite avec la pesanteur, il supposa que la pesanteur d'un corps qui s'élève successivement de la surface de la Terre diminue

suivant le rapport des distances, donné par la loi d'attraction de la nature. L'exactitude de cette supposition, que ce grand géomètre a démontrée depuis, lui fit voir cette identité.

Dans le cas de $\alpha = -1$, le numérateur et le dénominateur de la formule (B) deviennent nuls, et l'on trouve, par les formules connues, que cette formule devient

$$\frac{3M}{8rR^2} (r^2 + R^2) + \frac{3M}{16r^2 R^2} (r^2 - R^2) \log \frac{r-R}{r+R}.$$

Considérons présentement l'attraction d'une couche sphérique sur un point placé au dedans, à la distance r de son centre : R et r' étant les rayons des surfaces extérieure et intérieure de la couche. L'attraction d'une couche dont u est le rayon, du l'épaisseur et ρ la densité est, par le n° 12 du second Livre,

$$2\pi\rho u du \frac{\partial}{\partial r} \frac{\psi(u+r) - \psi(u-r)}{r}.$$

Il faut intégrer cette quantité depuis $u = r'$ jusqu'à $u = R$, et l'on trouvera par l'analyse précédente que cette intégrale est

$$(C) \quad 2\pi\rho R^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial R} \frac{\psi_1(R+r) - \psi_2(R-r)}{rR} - 2\pi\rho r'^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} \frac{\psi_1(r'+r) - \psi_2(r'-r)}{rr'}.$$

En comparant cette formule à la formule (A), on voit que l'attraction de la couche sphérique sur le point intérieur est la différence des produits des attractions de la sphère intérieure dont le rayon est r , sur deux points placés aux surfaces extérieure et intérieure de la couche, multipliées respectivement par $\frac{R^2}{r^2}$ et $\frac{r'^2}{r^2}$, ce qui donne l'attraction de la couche sur un point intérieur, lorsqu'on a l'attraction de la sphère sur les points extérieurs.

Si l'on suppose le point attiré à la surface intérieure de la couche, r' devient r ; en ajoutant à la formule (C) l'attraction de la sphère dont le rayon est r , sur un point placé à sa surface, la formule (C) deviendra

$$(D) \quad 2\pi\rho R^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial R} \frac{\psi_1(R+r) - \psi_2(R-r)}{rR};$$

c'est l'expression de l'attraction de la sphère dont le rayon est R , sur un point de son intérieur placé à la distance r du centre. La comparaison de cette formule avec la formule (A) donne le théorème suivant :

L'attraction d'une sphère sur un point de la surface d'une petite sphère intérieure concentrique à la première est à l'attraction de la petite sphère, sur un point de la surface de la grande, comme la grande surface est à la petite.

De là il suit que l'attraction entière d'une sphère sur la surface de l'autre est la même pour chacune d'elles.

Je vais maintenant considérer l'attraction mutuelle de deux sphères l'une sur l'autre. Soient R et R' leurs rayons, ρ et ρ' leurs densités et r la distance de leurs centres. On peut considérer la première sphère comme si sa masse était réunie à son centre et attirait les points extérieurs suivant une loi d'attraction exprimée par la formule (A). En vertu de l'égalité de l'action à la réaction, un point attire une sphère, comme il en est attiré; ainsi, pour avoir l'action de la seconde sphère sur la première, il faut supposer la loi d'attraction exprimée par la fonction (A). En désignant donc cette fonction par $\psi(r)$, on aura

$$\psi(r) = \frac{2\pi\rho R^2}{r} \frac{\partial}{\partial R} \frac{\psi_s(R+r) - \psi_s(r-R)}{R},$$

ce qui donne $\int r dr \cdot \psi(r)$, que nous désignerons par $\psi(r)$ égal à

$$2\pi\rho R^2 \frac{\partial}{\partial R} \frac{\psi_s(R+r) - \psi_s(r-R)}{R}.$$

Si l'on substitue cette valeur de $\psi(r)$, au lieu de $\psi(r)$, dans la formule (A), cette formule donnera, pour l'attraction de la seconde sphère sur la première,

$$(E) \quad 4\pi^2\rho\rho'R^2R'^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial R \partial R'} \left\{ \frac{\psi_s(r+R+R') - \psi_s(r+R-R')}{rRR'} \right. \\ \left. - \frac{\psi_s(r-R+R') + \psi_s(r-R-R')}{rRR'} \right\};$$

ce sera aussi l'attraction de la première sphère sur la seconde, c'est-à-dire que l'on peut supposer les deux sphères réunies respectivement

à leurs centres, et agissant l'une sur l'autre suivant une loi d'attraction exprimée par la fonction (E) divisée par le produit des masses ou par

$$\frac{16}{9} \pi^2 \rho \rho' R^3 R'^3.$$

II.

Les formules précédentes s'appliquent évidemment à la répulsion des fluides élastiques contenus dans des enveloppes sphériques, pourvu que la densité du fluide soit partout la même.

Si l'on nomme p la pression du fluide, et si l'on désigne par φ la force répulsive d'une sphère fluide, dont R est le rayon et ρ la densité, sur un point placé à la distance r de son centre, et qui éprouve la pression p , on aura, par le n° 17 du premier Livre de la *Mécanique céleste*,

$$dp = \rho \varphi dr,$$

dr étant l'élément de la direction de la force répulsive qui agit en sens contraire de la force attractive. φ est la fonction (D); $\int \varphi dr$ est donc cette fonction dans laquelle on supprime la différentiation par rapport à r ; et alors on a $p = \text{constante}$

$$(F) \quad + 2\pi\rho^2 \frac{R^2}{r} \frac{\partial}{\partial R} \frac{\psi_s(R+r) - \psi_s(R-r)}{R}.$$

Newton a supposé entre les molécules de l'air une force répulsive réciproque à leur distance, ce qui revient à supposer $\varphi(r) = \frac{1}{r}$. Cette supposition donne

$$\psi_s(r) = \frac{1}{96} r^4 \left(4 \log r - \frac{13}{3} \right);$$

cette valeur substituée dans la fonction (F) est loin de représenter les observations qui donnent p constant; aussi ce grand géomètre ne donne-t-il à cette loi de répulsion qu'une sphère d'activité d'une étendue insensible. Mais la manière dont il explique ce défaut de continuité est bien peu satisfaisante. Il faut sans doute admettre, entre les molécules de l'air, une force répulsive qui ne soit sensible qu'à des distances

imperceptibles; la difficulté consiste à en déduire les lois que présentent les fluides élastiques. C'est ce que l'on peut faire par les considérations suivantes :

J'observe d'abord qu'une molécule de gaz ou de fluide élastique, contenue dans une enveloppe sphérique, n'étant point en contact avec les molécules voisines, elle doit être en équilibre, en vertu de toutes les forces répulsives qu'elle éprouve; en sorte que φ doit être nul dans l'équation

$$dp = \varphi \varphi dr,$$

ce qui donne la pression p constante dans toute l'étendue du fluide. En supposant donc, conformément à l'expérience, la pression p fonction de la densité dans les fluides élastiques, à une température constante, on voit que la densité φ doit être supposée la même dans toutes les parties du fluide. Nous démontrerons ci-après ce résultat de l'expérience pour tous les points du fluide placés à une distance de l'enveloppe plus grande que le rayon de la sphère d'activité sensible, de la force répulsive.

Maintenant, je suppose les molécules des gaz, à une distance réciproque, telle que leur attraction mutuelle soit insensible, ce qui me paraît être la propriété caractéristique de ces fluides, et même des vapeurs, de celles du moins qui, par une légère compression, ne se réduisent point en partie à l'état liquide. Je suppose ensuite que ces molécules retiennent par leur attraction la chaleur, et que leur répulsion mutuelle soit due à la répulsion des molécules de la chaleur, répulsion dont je suppose l'étendue de la sphère d'activité insensible.

Soit c la chaleur contenue dans chaque molécule de gaz, la répulsion de deux molécules sera évidemment proportionnelle à c^2 . En nommant donc r leur distance mutuelle, nous exprimerons la loi de répulsion de deux molécules de gaz, par $Hc^2 \varphi(r)$, $\varphi(r)$ devenant insensible lorsque r a une valeur sensible. Il est une constante qui dépend de la force répulsive de la chaleur, et qui semble ainsi devoir être la même pour tous les gaz; mais ne connaissant point la nature de cette force, nous ne savons pas si elle est modifiée par la nature même de la molécule du

gaz; je la supposerai seulement constante pour le même gaz, laissant à l'expérience à déterminer les modifications qu'elle peut ainsi recevoir. J'imagine présentement une enveloppe sphérique, remplie d'un gaz quelconque. On vient de voir que la pression et la densité seront les mêmes dans tous les points de cette sphère placés à une distance sensible de l'enveloppe. Je conçois ensuite une sphère intérieure concentrique à l'enveloppe, dont R soit le rayon à très peu près égal à celui de l'enveloppe, de manière cependant que la densité de la couche du gaz qui recouvre cette sphère puisse être censée constante dans une étendue égale ou supérieure à celle de la sphère d'activité sensible de la force répulsive de la chaleur. Si l'on nomme r le rayon d'une molécule de cette couche, la formule (A) de l'article I donnera

$$- 2\pi Hc^2 \varphi R^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial R} \frac{\psi(r-R)}{rR}$$

pour la force répulsive que la sphère exerce sur cette molécule de la couche. En effet, la nature des forces qui ne sont sensibles qu'à des distances insensibles rend $\psi(r)$ insensible, lorsque r a une valeur sensible. Sur quoi j'observerai qu'en vertu de cette nature, $\psi(r)$ est incomparablement supérieur à $\psi_s(r)$. $\psi_s(r)$ est incomparablement supérieur à $\psi(r)$, et ainsi de suite. J'affecte l'expression précédente du facteur Hc^2 , parce que $\varphi(r)$ a ce facteur. La fonction précédente devient encore par les mêmes considérations

$$2\pi \frac{Hc^2 \varphi R^2}{rR} \psi(r-R).$$

Il faut multiplier cette fonction par $4\pi \varphi r^2 dr$, pour avoir l'action répulsive de la sphère sur la couche extérieure dont φ est la densité, r le rayon et dr l'épaisseur. Soit $r - R = s$, s étant une quantité imperceptible, la fonction précédente devient à très peu près

$$2\pi^2 Hc^2 \varphi^2 4R^2 ds \psi(s);$$

il faut, pour avoir l'action entière de la sphère intérieure sur la couche qui la recouvre, intégrer cette différentielle, depuis s nul jusqu'à s in-

fini; en nommant K l'intégrale $\int ds \psi(s)$ prise dans ces limites, on aura, pour cette action,

$$2\pi Hc^2 \rho^2 \dot{q} \pi R^2 K.$$

Concevons maintenant toutes les molécules du gaz liées fixement entre elles, et que la couche qui recouvre la sphère soit divisée en parties finies qui puissent se soulever par l'action répulsive de la sphère, mais qu'elles soient retenues par une pression P exercée sur chaque point de l'enveloppe. Cette pression sur l'enveloppe entière sera $4\pi R^2 P$, à très peu près, et elle doit faire équilibre à l'action répulsive de la sphère, ce qui donne

$$P = 2\pi Hc^2 \rho^2 K.$$

Cette valeur de P est indépendante du rayon R de la sphère, ce qui tient à ce que l'action répulsive de la chaleur ne s'exerce qu'à des distances insensibles, on peut ne considérer que les parties du gaz extrêmement voisines du point de l'enveloppe qui éprouve la pression P . De là et de ce que la pression p dans l'intérieur du gaz est constante, la force φ qu'éprouve chaque molécule étant nulle dans l'équation

$$dp = \rho \varphi dr,$$

il est facile de conclure que, quelle que soit la forme de l'enveloppe, la pression P du gaz est toujours

$$(1) \quad P = 2\pi HK \rho^2 c^2.$$

Imaginons cette enveloppe à une température t , et contenant un gaz à la même température. Il est clair qu'une molécule quelconque de ce gaz sera atteinte à chaque instant par des rayons caloriques émanés des corps environnants. Elle éteindra une partie de ces rayons, mais il faudra, pour le maintien de la température, qu'elle remplace ces rayons éteints par son rayonnement propre. La molécule, dans tout autre espace à la même température, sera atteinte à chaque instant par la même quantité de rayons caloriques; elle en éteindra une même partie qu'elle rendra par son rayonnement. La quantité de rayons caloriques

qu'une surface donnée reçoit à chaque instant est donc une fonction de la seule température, et indépendante de la nature des corps environnants; je la désignerai par $\Pi(t)$. L'extinction sera donc $q\Pi(t)$, q étant un facteur constant dépendant de la nature de la molécule ou du gaz. J'observerai ici que la quantité de rayons émanés des corps environnants, et qui forme la chaleur libre de l'espace, est, à raison de l'extrême vitesse que l'on doit supposer à ces rayons, une partie insensible de la chaleur contenue dans les corps, comme on l'a reconnu d'ailleurs par les expériences que l'on a faites pour condenser cette chaleur. Maintenant, quelle que soit la manière dont la chaleur des molécules environnantes agit par sa répulsion sur la chaleur de la molécule du gaz, pour en détacher une partie, et pour faire rayonner cette molécule, il est clair que ce rayonnement sera en raison composée de la densité du gaz environnant la molécule, ou de ρc et de la chaleur c contenue dans la molécule; il sera donc proportionnel à ρc^2 ; ρc^2 est donc proportionnel à l'extinction $q\Pi(t)$, et nous pourrions supposer

$$(2) \quad \rho c^2 = q' \Pi(t),$$

q' étant un facteur constant dépendant de la nature du gaz et $\Pi(t)$ étant une fonction de la température, indépendante de cette nature.

Les équations (1) et (2) renferment les lois générales des fluides élastiques. Elles donnent

$$(3) \quad P = i\rho \Pi(t),$$

en désignant par i le facteur $2\pi HKq'$, qui dépend de la nature du gaz. Cette équation donne, en supposant la température constante, P proportionnel à ρ , ce qui est la loi de Mariotte. En supposant ensuite P constant, la température t devenant t' et la densité ρ devenant ρ' on a

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\Pi(t)}{\Pi(t')}.$$

Le second membre de cette équation étant indépendant de la nature du

gaz, on voit que la fraction $\frac{p'}{p}$ est la même pour tous les gaz lorsque la température t se change en t' , ce qui est la loi que M. Gay-Lussac nous a fait connaître, et suivant laquelle le même volume v des divers gaz se change pour tous dans le même volume v' par le même changement de la température t en t' ; car on a évidemment

$$\frac{p}{p'} = \frac{v'}{v}.$$

Il résulte de l'équation (1) que la pression P croît dans un rapport plus grand que la chaleur c ; en sorte que la chaleur c de chaque molécule devenant double, P devient quadruple; ce qui explique l'économie de combustible observée dans l'emploi des machines à vapeur à grandes compressions.

Il résulte de l'équation (2) que, la température restant la même, la chaleur c diminue quand la densité augmente: la compression d'un gaz doit donc développer de la chaleur pour être ramené à la même température, ce que l'expérience confirme. Ainsi une pression quadruple exprimera d'une masse de gaz la moitié de sa chaleur.

J'ai observé le premier que l'excès de la vitesse du son sur le résultat donné par la formule newtonienne était dû à ce développement de chaleur; il serait même plus grand que l'excès observé si la compression ne dégageait pas instantanément, par voie de rayonnement, une partie très sensible de cette chaleur développée.

Les considérations et l'analyse précédentes s'appliquent facilement au mélange des gaz et des vapeurs, qui dans ce mélange n'exercent point d'affinité les uns avec les autres. On sait qu'à la longue la diffusion de ces gaz les répand en proportions égales dans toutes les parties du mélange. Je vais donc considérer le mélange de deux gaz dans cet état. Je le suppose dans une enveloppe sphérique. On voit d'abord que chaque molécule de ce mélange, étant en équilibre au milieu de toutes les forces répulsives qu'elle éprouve, la pression doit être la même dans toutes les parties du mélange. Si l'on conçoit, comme ci-dessus, une sphère intérieure concentrique à l'enveloppe, et d'un rayon R à très

peu près égal à celui de cette enveloppe, on aura l'action répulsive de cette sphère sur la couche très mince de gaz qui la recouvre, en considérant la sphère et la couche comme deux sphères et deux couches, formées des deux gaz. Soient p et p' les densités de ces gaz; l'action de la sphère du premier gaz sur la couche du premier gaz sera, par ce qui précède, $2\pi HKc^2p^2$, ou Lc^2p^2 , en désignant $2\pi HK$ par L ; c est la chaleur contenue dans chaque molécule du premier gaz, et L dépend de la nature de ce gaz, ou de la manière dont ses molécules se repoussent mutuellement en vertu de la force répulsive de la chaleur qu'elles contiennent. Il résulte encore de l'analyse précédente que l'action répulsive du premier gaz sur la couche du second gaz peut être exprimée par $Ncc'pp'$, c' étant la chaleur contenue dans une molécule du second gaz, et N étant une constante qui dépend de la manière dont deux molécules du premier et du second gaz se repoussent mutuellement par la force répulsive de leur chaleur. L'action de la sphère du second gaz sur la couche du premier gaz sera pareillement $Ncc'pp'$. Enfin, l'action de la sphère du second gaz sur la couche du second gaz peut être exprimée par $L'c'^2p'^2$. En réunissant toutes ces actions dont la somme doit être égale à la pression P du mélange, on aura

$$P = Lc^2p^2 + 2Ncc'pp' + L'c'^2p'^2.$$

On voit, par ce qui précède, que cette valeur de P a lieu quelle que soit la figure de l'enveloppe.

Considérons maintenant le rayonnement de chaque molécule du gaz mélangé. Le rayonnement d'une molécule du premier gaz, produit par l'action répulsive de la chaleur de ce gaz, sera, par ce qui précède, proportionnel à Lc^2p . Le rayonnement de la même molécule, par l'action du second gaz, sera dans le même rapport avec $Ncc'p'$. En égalant la somme de ces rayonnements à l'extinction, par la molécule, des rayons qu'elle reçoit, et qui est proportionnelle à la fonction $\Pi(t)$ de la température t , on aura

$$Lc^2p + Ncc'p' = i\Pi(t);$$

i étant un facteur dépendant de la manière dont les molécules du pre-

mier gaz éteignent les rayons caloriques. On aura pareillement

$$L'c'^2\rho' + Ncc'\rho = t'\Pi(t).$$

Ces deux équations, multipliées respectivement par ρ et ρ' , donnent en les ajoutant

$$Lc^2\rho^2 + 2Ncc'\rho\rho' + L'c'^2\rho'^2 = t\rho\Pi(t) + t'\rho'\Pi(t).$$

Le premier membre de cette équation est la pression P du mélange à la température t . La fonction $t\rho\Pi(t)$ serait, par ce qui précède, la pression du premier gaz, s'il existait seul dans l'enveloppe; et $t'\rho'\Pi(t)$ serait la pression du second gaz s'il était seul. En nommant donc p et p' ces pressions, on aura

$$P = p + p'.$$

Il est facile de voir que la pression P d'un nombre quelconque de gaz, dont les pressions particulières seraient $p, p', p'', \dots$, sera

$$P = p + p' + p'' + \dots,$$

ce qui est donné par l'expérience.

Cette équation ayant lieu, quelle que soit N , elle subsistera en faisant, comme M. Dalton, N nul, c'est-à-dire en supposant nulle l'action répulsive réciproque de deux gaz différents. Mais cette hypothèse est bien peu naturelle : elle me paraît d'ailleurs contraire à plusieurs phénomènes.

L'équation (3) donne pour un même gaz

$$\frac{\Pi(t')}{\Pi(t)} = \frac{P'\rho}{P\rho'}.$$

Si l'on nomme v et v' les volumes du gaz aux températures t et t' , on aura $\frac{P}{P'} = \frac{v'}{v}$; par conséquent,

$$\frac{\Pi(t')}{\Pi(t)} = \frac{P'v'}{Pv}.$$

En supposant P constant ou $P = P'$, $\Pi(t)$ sera proportionnel à v ; la

fonction $\Pi(t)$ sera donc indiquée par un thermomètre d'un de ces gaz, maintenu à une pression constante. L'équation (1) donne alors

$$\rho'c' = \rho c;$$

et par conséquent

$$\frac{c'}{c} = \frac{v'}{v};$$

ce thermomètre indique donc les accroissements de la chaleur c , contenue dans ce gaz à diverses températures. Pour 1° d'accroissement, en partant de la température zéro, c' croît de $0,00375c$; c' croît donc de $0,00375c$; d'où il suit que si l'on a trouvé par l'expérience qu'une masse donnée de ce gaz, en s'abaissant de la température de 1° à celle de zéro ou de la glace fondante, peut élever 1° d'eau, de zéro à 1° , par le développement de sa chaleur, toute la chaleur contenue dans cette masse de gaz, à zéro de température, élèvera $266^{\frac{2}{3}}$ d'eau, de zéro à 1° .

III.

Je dois faire ici une remarque importante. L'action réciproque de deux molécules de gaz, appartenant au même gaz ou à deux gaz différents, est composée : 1° de la répulsion mutuelle des deux quantités de calorique qu'elles contiennent; 2° de l'attraction du calorique de la seconde molécule, par la première molécule; 3° de l'attraction du calorique de la première molécule, par la seconde molécule; 4° de l'attraction mutuelle des deux molécules. Je n'ai considéré, dans ce qui précède, que la première de ces forces, et j'ai supposé que les trois autres sont considérablement plus petites. Cela me paraît certain relativement à la quatrième force que l'écartement des molécules des gaz rend insensible; mais je n'oserais assurer que la seconde et la troisième force soient insensibles, surtout relativement aux vapeurs, qu'une légère compression réduit à l'état liquide. Je vais donc considérer ces forces, et présenter en même temps la théorie précédente sous un point de vue plus simple.

Imaginons un vase cylindrique vertical d'une largeur et d'une hau-

teur indéfinies. Supposons-le rempli d'un gaz pressé par un poids à sa surface supérieure. Concevons dans le cylindre, à une distance quelconque de cette surface, un plan horizontal A, infiniment mince, de toute la largeur du cylindre, et supposons les molécules du gaz situées au-dessus du plan, fixement liées entre elles. Soient m une de ces molécules, r sa distance au plan horizontal, f sa distance à une molécule m' située au-dessous du plan à la distance R, de manière que les deux verticales passant par ces deux molécules soient éloignées entre elles de la quantité s . On aura évidemment

$$f = \sqrt{(R+r)^2 + s^2}.$$

Soient $H\varphi(f)$ la loi de l'action répulsive des quantités de chaleur contenues dans ces molécules, et $N\varphi(f)$ la loi de la force attractive de la chaleur par ces molécules, l'action répulsive de la molécule m' sur la molécule m , décomposée verticalement, sera évidemment

$$(Hc^2 - Nc)\varphi(f)\frac{(R+r)}{f};$$

et relativement à toutes les molécules situées à la distance f de la molécule m , et sur le plan horizontal passant par la molécule m' , elle sera

$$2\pi\rho s\frac{(R+r)}{f}\varphi(f)(Hc^2 - Nc),$$

ρ étant la densité du gaz. Pour avoir l'action répulsive de tout le gaz contenu au-dessous du plan A, sur la molécule m , il faut multiplier la fonction précédente par $ds dR$, et intégrer depuis $s = 0$ jusqu'à s infini, et depuis $R = 0$ jusqu'à R infini. On trouvera ainsi

$$2\pi\rho(Hc^2 - Nc)\psi(r)$$

pour cette action répulsive. Maintenant, si l'on conçoit des séries verticales de molécules, contiguës et prolongées depuis le plan A jusqu'à la surface supérieure du cylindre, elles formeront une colonne verticale. Soit ω la base de cette colonne; l'action répulsive du gaz situé

au-dessous du plan A sur cette colonne placée au-dessus sera

$$2\pi\omega\rho^2(Hc^2 - Nc)\int dr\psi(r);$$

l'intégrale étant prise depuis r nul jusqu'à r infini; car je suppose la distance de la molécule m à la surface, plus grande que le rayon de la sphère d'activité sensible des forces attractives et répulsives. La pression sur la surface ω est ωP , P étant le poids que cette colonne supporte à la surface supérieure prise pour unité; on aura donc, en négligeant le poids du gaz,

$$(4) \quad P = 2\pi\rho^2(Hc^2 - Nc)K.$$

Je considère maintenant l'action d'une molécule quelconque m' du gaz sur une autre molécule m , dont elle est éloignée de la distance r ; cette action sera $(Hc - N)\varphi(r)$. Je suppose le rayonnement de la molécule m proportionnel au nombre des molécules, à ces forces et à la chaleur c contenue dans la molécule m ; ce rayonnement sera donc proportionnel à $\rho(Hc^2 - Nc)$, et l'on aura

$$(5) \quad \rho(Hc^2 - Nc) = q\Pi(r);$$

$\Pi(r)$ exprimant une fonction de la seule température. Les équations (4) et (5) donnent les deux lois de Mariotte et de M. Gay-Lussac. Mais on doit observer que ces équations n'ont été trouvées qu'en supposant que $\varphi(r)$ représente à la fois la loi de répulsion de la chaleur et la loi de son attraction par les molécules du gaz.

Il est maintenant facile de faire voir que la densité du gaz doit être partout la même, à une distance de l'enveloppe plus grande que le rayon de la sphère d'activité sensible des forces. En effet, on peut supposer la densité des tranches fluides horizontales sensiblement constante dans une épaisseur égale au diamètre de cette sphère. En plaçant donc le plan horizontal A au milieu d'une de ces tranches dont la densité soit ρ ; en appliquant ensuite l'analyse précédente, on aura

$$P = i\rho\Pi(r).$$

Pour une autre tranche dont ρ' serait la densité, on aurait encore

$$P = i\rho' \Pi(t);$$

on a donc $\rho = \rho'$.

Considérons maintenant, comme nous l'avons fait ci-dessus, le mélange de deux gaz. Soient $Hc^2 \varphi(r)$ la répulsion, à la distance r , du calorique d'une molécule du premier gaz, par le calorique d'une autre molécule de gaz, et $Nc \varphi(r)$ l'attraction du calorique d'une de ces molécules, par une autre molécule; on aura, par ce qui précède, la répulsion du premier gaz situé au-dessus du plan A, par le même gaz situé au-dessous, égale à

$$2\pi K \rho^2 (Hc^2 - Nc).$$

Soient $Lcc' \varphi(r)$ la répulsion du calorique du second gaz par le calorique du premier gaz, et $M'c' \varphi(r)$ l'attraction du calorique du second gaz par une molécule du premier; on trouvera par l'analyse précédente la répulsion du second gaz situé au-dessus du plan A, par l'action du premier gaz situé au-dessous, égale à

$$2\pi K \rho \rho' (Lcc' - M'c').$$

En désignant par L' et M' pour le second gaz, relativement au premier, ce que nous avons désigné par L et M pour le premier gaz, relativement au second, on aura

$$2\pi K \rho \rho' (L'cc' - M'c')$$

pour la répulsion du premier gaz placé au-dessus du plan A, par le second gaz placé au-dessous. Enfin, H' et N' désignant, pour le second gaz, ce que H et N signifient pour le premier, on aura

$$2\pi K \rho'^2 (H'c'^2 - N'c').$$

pour la répulsion du second gaz placé au-dessus du plan A par le second gaz placé au-dessous. En nommant donc P la pression du fluide à sa surface supérieure, on aura

$$P = 2\pi K \left\{ \rho^2 (Hc^2 - Nc) + \rho \rho' [(L + L')cc' - M'c' - M'c] + \rho'^2 (H'c'^2 - N'c') \right\}.$$

L'action du premier gaz sur le calorique d'une molécule de ce gaz est proportionnelle à

$$\rho (Hc^2 - Nc) \varphi(r).$$

L'action du second gaz sur ce même calorique a le même rapport à

$$\rho' (L'cc' - M'c') \varphi(r);$$

on aura donc le rayonnement de la molécule du premier gaz, proportionnel à la somme de ces actions, ce qui donne

$$\rho (Hc^2 - Nc) + \rho' (L'cc' - M'c') = i \Pi(t);$$

on aura pareillement

$$\rho' (H'c'^2 - N'c') + \rho (Lcc' - M'c') = i' \Pi(t).$$

En multipliant respectivement ces deux équations par ρ et ρ' , on aura, en les ajoutant,

$$P = i\rho \Pi(t) + i'\rho' \Pi(t);$$

mais, en désignant par p et p' les pressions relatives à chacun des gaz, on a

$$p = i\rho \Pi(t), \quad p' = i'\rho' \Pi(t);$$

donc

$$P = p + p'.$$

Quant à l'égale diffusion des deux gaz, dans toutes les parties du mélange, il est facile de voir que ce n'est que dans cet état que chaque molécule de gaz peut être en équilibre.

La théorie précédente revient à considérer chaque molécule des corps comme rayonnant du calorique, par la force répulsive que le calorique des molécules environnantes exerce sur le calorique qu'elle contient. Un corps jouit d'une température constante, lorsqu'il éteint autant de calorique qu'il en rayonne. Un espace qui renferme un système de corps jouit d'une température constante, lorsque chaque corps y rayonne autant de calorique qu'il en éteint. La densité du calorique répandu par les rayonnements dans cet espace croît avec la température; elle peut ainsi lui servir de mesure et même de définition. Cette densité est

exactement représentée par les dilatations d'un volume de gaz soumis à une pression constante, ou par les degrés du thermomètre à air, que l'on peut ainsi regarder comme le thermomètre de la nature. Deux corps à la température de l'espace supposé ne changent point de température par le contact, car leurs surfaces, qui ne se touchent point, devant rayonner comme avant le contact, la chaleur intérieure de chacun d'eux doit rester la même. Si le premier de ces corps est une couche polie d'une mince épaisseur, elle réfléchira en grande partie le calorique qu'elle reçoit, et n'en éteindra qu'une petite partie à laquelle son rayonnement sera proportionnel. Mise en contact avec le second corps, elle n'en changera point la température. On conçoit ainsi que le poli d'un corps ne change point sa température intérieure.

DÉVELOPPEMENT

DE

LA THÉORIE DES FLUIDES ÉLASTIQUES

ET

APPLICATION DE CETTE THÉORIE A LA VITESSE DU SON ⁽¹⁾.

Connaissance des Temps pour l'an 1835; 1832.

La théorie que j'ai donnée de ces fluides consiste à regarder chacun de leurs molécules comme un petit corps en équilibre dans l'espace, en vertu de toutes les forces qui le sollicitent. Ces forces sont : 1^o l'action répulsive de la chaleur des molécules environnant une molécule A, sur la chaleur propre de cette molécule qui la retient par son attraction; 2^o l'attraction de cette dernière chaleur par les mêmes molécules; 3^o l'attraction qu'elles exercent, par leur chaleur et par elles-mêmes, sur la molécule A. Je suppose que ces forces attractives et répulsives ne sont sensibles qu'à des distances imperceptibles, et qu'à raison de la rareté du fluide, la première de ces forces est la seule qui soit sensible. Cela posé, je trouve, par les lois de l'équilibre des fluides, l'équation suivante :

$$(1) \quad P = kn^2c^2;$$

n est le nombre des molécules du gaz contenues dans un espace pris pour unité, et que je supposerai être le litre; c est le calorique renfermé

⁽¹⁾ Présenté au Bureau des Longitudes, le 12 décembre 1821.



dans chaque molécule; k est une constante dépendant de la force répulsive que les particules du calorique exercent les unes sur les autres, et qu'il paraît naturel de supposer la même pour tous les gaz. Enfin, P est la pression du fluide contre les parois du litre qui le contient.

J'obtiens une seconde équation par les considérations suivantes. Je conçois le litre comme un espace vide à une température quelconque. En y plaçant un ou plusieurs corps, ils rayonneront du calorique les uns sur les autres, et sur les parois du litre, qui rayonneront pareillement du calorique sur eux et sur elles-mêmes. Il y aura équilibre de température, lorsque chaque molécule rayonnera autant de calorique qu'elle en absorbe. L'espace vide du litre sera traversé dans tous les sens par les rayons caloriques qui formeront ainsi un fluide discret d'une densité très petite, et dont la quantité sera insensible relativement à la quantité de chaleur contenue dans les corps. On peut facilement prouver qu'à raison, de la vitesse des particules libres du calorique, vitesse qui peut être comparée à celle de la lumière, ce fluide doit être d'une extrême rareté. Aussi les expériences que l'on a faites pour le condenser n'ont-elles donné aucun résultat sensible. Il est clair que la densité de ce fluide discret augmente avec la chaleur des corps. Elle peut ainsi servir de mesure à leur température, et en donner une définition précise. Elle croît proportionnellement aux dilatations de l'air dans un thermomètre d'air à pression constante et, par cette raison, ce thermomètre me paraît être le vrai thermomètre de la nature.

J' imagine présentement que le système des corps contenus dans le litre soit un gaz. Chaque molécule dans l'état d'équilibre rayonnera autant de calorique qu'elle en absorbe. Or il est évident que cette absorption est proportionnelle à la densité du calorique discret que je viens de considérer, ou à la température que je désignerai par u . Pour avoir l'expression du rayonnement de la molécule il faut remonter à sa cause. On ne peut pas l'attribuer à la molécule même, qui est supposée n'agir que par attraction sur le calorique; il paraît donc naturel de le faire dépendre de la force répulsive du calorique contenu, soit dans la

molécule, soit dans les molécules environnantes. Le calorique de la molécule étant infiniment petit par rapport à l'ensemble du calorique de toutes les molécules environnantes, on peut n'avoir égard qu'à la force répulsive de cet ensemble. Sans chercher à expliquer comment cette force détache une partie du calorique de la molécule A et la fait rayonner ⁽¹⁾, je considère que l'action du calorique d'une molécule B pour cet objet est proportionnelle à ce calorique et au calorique c de la molécule A; je la fais ainsi proportionnelle au produit kc^2 . Le rayonnement de la molécule A est donc proportionnel à ce produit; en l'égalant à l'absorption du calorique, on a

$$(2) \quad knc^2 = qu;$$

q étant une constante dépendant de la nature du gaz.

nc exprime la quantité de calorique du gaz contenu dans le litre; en supposant donc que c soit le calorique contenu dans 1^{re} du gaz, et que p soit le nombre de grammes ou le poids du gaz renfermé dans le litre, on pourra, dans les équations précédentes, substituer p à n , et alors elles deviennent

$$(3) \quad P = kp^2c^2,$$

$$(4) \quad kp^2c^2 = qu.$$

On peut voir, dans la *Connaissance des Temps* de 1824, l'analyse qui m'a conduit à ces équations. Je l'ai étendue au mélange d'un nombre quelconque de gaz, en supposant pour une plus grande généralité que la valeur de k n'est pas la même pour les divers gaz, et que l'action répulsive du calorique d'une molécule de gaz sur le calorique d'une autre molécule pouvait être modifiée par la nature même de ces molécules. Mais il me paraît naturel de la supposer indépendante de cette nature, ce qui simplifie les formules que j'ai données dans l'Ouvrage

(1) Les mouvements des molécules d'un gaz, produits par l'action des rayons caloriques et dont les liquides soumis à l'action de la lumière et de la chaleur offrent des exemples, ne peuvent-ils pas occasionner leur rayonnement, en faisant varier alternativement l'action répulsive du calorique des molécules qui environnent chaque molécule du gaz, sur le calorique de cette molécule?

cité. Car alors on doit y faire

$$H = H' = L = L' \dots$$

En n'ayant point égard à l'action des molécules sur la chaleur et sur elles-mêmes, M, N, M', N', ... sont nuls, et alors on a les équations suivantes relatives au mélange d'un nombre quelconque de gaz, renfermé dans 1^{re}, mélange qui n'est dans un état stable d'équilibre qu'autant que chacune de ses plus petites portions contient les molécules des divers gaz, en même rapport que le mélange total :

$$(A) \quad \begin{cases} P = k(\rho c + \rho' c' + \rho'' c'' + \dots)^2, \\ k \rho c (\rho c + \rho' c' + \rho'' c'' + \dots) = q \rho u, \\ k \rho' c' (\rho c + \rho' c' + \rho'' c'' + \dots) = q' \rho' u, \\ k \rho'' c'' (\rho c + \rho' c' + \rho'' c'' + \dots) = q'' \rho'' u, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

P est la pression du mélange; k est une constante dépendant de l'intensité de la force répulsive mutuelle des particules du calorique; c, c', c'', ... sont les quantités de chaleur contenues dans 1^{re} du premier gaz, du deuxième, du troisième, etc.; $\rho, \rho', \rho'', \dots$ sont les nombres de grammes de ces gaz, dans 1^{re} du mélange; u est la température du mélange, et q, q', q'', ... sont des constantes dépendant de la nature de chaque gaz.

Les équations (A) donnent

$$\frac{\rho' c'}{\rho c} = \frac{q' \rho'}{q \rho}, \quad \frac{\rho'' c''}{\rho c} = \frac{q'' \rho''}{q \rho}, \quad \dots;$$

on a donc

$$\rho c + \rho' c' + \rho'' c'' + \dots = (\rho q + \rho' q' + \rho'' q'' + \dots) \frac{c}{q}.$$

Ainsi en faisant

$$\rho q + \rho' q' + \rho'' q'' + \dots = (q)(\rho),$$

$$\rho + \rho' + \rho'' + \dots = (\rho),$$

$$C = \frac{(q)c}{q},$$

les équations (A) donneront

$$(5) \quad P = k(\rho)^2 C,$$

$$(6) \quad k(\rho) C^2 = (q) u.$$

Ces équations sont les mêmes que les équations (3) et (4) relatives à un fluide simple. Elles reviennent à considérer comme molécules du fluide composé un groupe infiniment petit dans lequel les molécules des divers gaz entrent dans le même rapport que dans le mélange entier. C est le calorique contenu dans 1^{re} de ce mélange; (ρ) est le poids de 1^{re} du mélange.

L'air atmosphérique est, comme on sait, composé de quatre différents gaz, savoir : l'azote, l'oxygène, la vapeur aqueuse et un peu d'acide carbonique; on peut donc appliquer à ce fluide composé les équations (5) et (6). On peut encore, dans les vibrations aériennes, considérer l'air comme formé de groupes pareils à ceux que je viens d'imaginer. A la vérité, chaque molécule d'un de ces groupes étant sollicitée par des forces différentes, elles devraient, dans leurs mouvements, se séparer; mais les obstacles que les autres groupes opposent à cette séparation suffisent pour les retenir ensemble, en sorte que le centre de gravité de chaque groupe se meut comme si ses molécules étaient liées fixement entre elles; et c'est ainsi que nous les envisagerons dans la suite.

Les équations (5) et (6) donnent

$$P = (q)(\rho) u;$$

ainsi, la température restant la même, la pression d'un fluide quelconque, simple ou composé, est proportionnelle à sa densité; ce qui est la loi de Mariotte.

Les mêmes équations donnent encore, pour un autre fluide simple ou composé,

$$P = (q')(\rho') u,$$

(ρ') étant la densité du second fluide et (q') étant la valeur de (q) rela-

tive à ce fluide; on a donc, quelles que soient la pression P et la température u ,

$$\frac{(\rho')}{(\rho)} = \frac{(q')}{(q)}.$$

Le rapport des densités des deux fluides reste donc toujours le même, ce qui est la loi de M. Gay-Lussac.

Enfin les équations (A) donnent

$$P = q\rho u + q'\rho' u + q''\rho'' u + \dots;$$

$q\rho u, q'\rho' u, q''\rho'' u, \dots$ sont les pressions que chaque gaz exercerait contre les parois du litre, s'il était seul dans cet espace; en nommant donc $p, p', p'', \dots$ ces pressions, on aura

$$P = p + p' + p'' + \dots,$$

ce qui est la troisième loi des fluides élastiques.

Dans l'analyse exposée (p. 339 et suiv. de la *Connaissance des Temps* de 1824) j'ai omis l'action des molécules inférieures au plan horizontal que j'y considère, sur le calorique des molécules supérieures à ce plan, ce qui m'a conduit à une expression incomplète de la pression P . En rétablissant cette action, on voit que l'on ne peut alors satisfaire aux trois lois générales des fluides élastiques; ce qui prouve que l'attraction de chaque molécule d'un gaz sur les autres molécules et sur leur calorique est insensible, et ce qui dispense de toute hypothèse sur la loi d'attraction des molécules des gaz par la chaleur. Mais alors, pour satisfaire à l'ensemble des phénomènes que les gaz nous présentent, il faut considérer le calorique de chacune de leurs molécules dans deux états différents. Dans le premier état, il est libre, et c'est ce que nous avons désigné par c . Dans le second état, il est combiné et n'exerce alors aucune force répulsive et attractive sensible; mais il se développe dans le passage de l'état gazeux à l'état liquide, et même dans la variation de densité des gaz. En le désignant par i , la chaleur absolue de la molécule sera $c + i$.

De la vitesse du son dans l'atmosphère.

Je vais maintenant appliquer la théorie précédente à la vitesse du son dans notre atmosphère. Je considérerai, comme ci-dessus, ses molécules comme des groupes composés des molécules des divers gaz dont elle est formée, et qui se meuvent comme si les molécules de chaque groupe étaient liées fixement entre elles. Imaginons un cylindre horizontal d'une longueur indéfinie et rempli d'air en vibration. Pour avoir la force qui sollicite une de ses molécules A, désignons par $N\varphi(f)$ la loi de la force répulsive de la chaleur, relative à la distance f . La force répulsive de la chaleur d'une molécule B sur la chaleur de la molécule A sera $Ncc_1\varphi(f)$, f étant la distance mutuelle des deux molécules, c étant la chaleur de la molécule A, et c_1 celle de la molécule B. En nommant s la distance horizontale de B à A, et z leur distance verticale, l'action répulsive de la chaleur de B, sur la chaleur de A, sera dans le sens horizontal, et en sens contraire de l'origine des s ,

$$Ncc_1 \frac{s}{f} \varphi(f).$$

En la multipliant par la densité ρ de l'air au point B, et par $2\pi z dz$, π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité, on aura, pour la force entière qui sollicite la molécule A dans le sens horizontal,

$$2\pi N \int \int \frac{z dz}{f} \rho cc_1 s ds \varphi(f);$$

les intégrales étant prises depuis $z = 0$ jusqu'à z infini, et depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$. On a

$$f^2 = s^2 + z^2;$$

en désignant donc par $\varphi_1(f)$ l'intégrale $\int \frac{df}{f} \varphi(f)$, et observant que $\varphi_1(f)$ est nul lorsque f est infini, la force précédente devient

$$-2\pi N \int \rho cc_1 s ds \varphi_1(s).$$

ρ, c , étant relatifs à la section verticale du cylindre qui passe par la molécule B, nous aurons, en réduisant en série,

$$\rho c c_1 = \rho c^2 + s c \frac{\partial \rho c}{\partial s} + \dots$$

les différentielles du second membre se rapportant à la molécule A. Or on a

$$\int s ds \varphi_1(s) = 0,$$

lorsqu'on prend les intégrales depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$. On a ensuite

$$\int s^2 ds \varphi_1(s) = s \psi(s) - \int ds \psi(s),$$

en désignant par $\psi(s)$ l'intégrale $\int s ds \varphi_1(s)$. Donc, si l'on nomme Q l'intégrale $\int ds \psi(s)$ prise depuis s nul jusqu'à s infini, la force qui sollicite horizontalement la molécule A sera, en sens contraire de l'origine des s ,

$$4\pi Q c \frac{\partial \rho c}{\partial s}.$$

Soit

$$\frac{\partial \rho c}{\rho c \partial s} = (1 - \epsilon) \frac{\partial \rho}{\rho \partial s};$$

la force précédente devient ainsi

$$4\pi N Q \frac{\partial \rho}{\partial s} c^2 (1 - \epsilon).$$

Soient X la coordonnée horizontale de la molécule A dans l'état d'équilibre, et X + x sa coordonnée dans l'état de mouvement. Soit encore (ρ) la densité de l'air dans l'état d'équilibre. On aura

$$\rho = (\rho) \frac{dX}{dX + dx};$$

en négligeant donc le carré de dx , et observant que $\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial X}$, on aura

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = -(\rho) \frac{\partial^2 x}{\partial X^2}.$$

La force qui sollicite la molécule A dans le sens des x sera donc

$$4\pi N Q (\rho) \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} c^2 (1 - \epsilon).$$

Il résulte de l'analyse que j'ai donnée dans la *Connaissance des Temps* de 1824, que P étant la pression de l'atmosphère, on a, dans l'état d'équilibre,

$$P = 2\pi N Q (\rho)^2 c^2;$$

en égalant donc la force précédente à $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, dt étant l'élément du temps, on aura

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{2P}{(\rho)} (1 - \epsilon) \frac{\partial^2 x}{\partial X^2};$$

ainsi la vitesse du son ou l'espace qu'il parcourt dans une seconde étant, comme l'on sait, et comme il est facile de le conclure de l'intégrale de cette équation aux différences partielles, la racine carrée du coefficient de $\frac{\partial^2 x}{\partial X^2}$, cette vitesse sera

$$\sqrt{\frac{2P}{(\rho)} (1 - \epsilon)}.$$

Soient h la hauteur d'une atmosphère de la densité (ρ), et ϵ la hauteur dont la pesanteur fait tomber les corps dans une seconde, cette vitesse devient

$$\sqrt{4h\epsilon(1 - \epsilon)}.$$

Les géomètres, en étendant ces principes et cette analyse au cas où l'air a trois dimensions, trouveront facilement que, dans ce cas, la vitesse du son a la même expression.

La formule de Newton donne $\sqrt{2h\epsilon}$ pour l'expression de cette vitesse, et en partant des valeurs connues de ϵ et de h , elle serait de 282^m, 4 à la température de 6° centésimaux. L'expérience a donné, à la même température, 337^m, 2 aux académiciens français. Il est donc bien certain que la formule de Newton donne un résultat trop faible. Si la



valeur de i était nulle, la formule précédente donnerait $\sqrt{4h\epsilon}$, ou $399^m,4$ pour la vitesse du son, résultat trop considérable.

Il est difficile, par les expériences sur l'air, de déterminer le facteur $1 - \epsilon$, et il est plus exact et plus simple de le conclure de la vitesse même du son. Cependant on peut faire usage, pour cet objet, des expériences de MM. Laroche et Bérard, sur la chaleur que l'air abandonne sous diverses pressions, en passant d'une température élevée à une température inférieure. J'en ai conclu ce facteur $1 - \epsilon$ égal à 0,8 environ; d'où résulte à peu près la vitesse observée du son. Mais ces expériences délicates méritent d'être répétées avec un grand soin.

Les géomètres ont, d'après Newton, fondé la théorie du son sur des principes différents de ceux qui précèdent. Ils considèrent une molécule aérienne ρdX , comme étant pressée d'arrière en avant, par la pression P , et d'avant en arrière, par la pression $P + dP$; ce qui donne, en vertu des principes dynamiques,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \frac{dP}{\rho dX}.$$

Ils supposent ensuite que l'équation

$$P = q\rho u$$

a lieu dans l'état de mouvement comme dans celui d'équilibre, et que la température u reste constante, ce qui donne

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho};$$

et comme on a, par ce qui précède,

$$d\rho = -(\rho) \frac{\partial^2 x}{\partial X^2},$$

il est facile d'en conclure

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{P}{(\rho)} \frac{\partial^2 x}{\partial X^2},$$

ce qui donne la vitesse du son égale à $\sqrt{\frac{P}{(\rho)}}$. On vient de voir que cette

valeur est trop faible, ce qui montre l'inexactitude de l'analyse sur laquelle on l'a fondée. En effet, l'air n'agit point, sur une couche aérienne d'une épaisseur infiniment petite, par une simple différence de pression, comme il agirait sur un plan d'une épaisseur sensible; en sorte que l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \frac{dP}{\rho dX}$$

n'est point exacte. De plus, l'équation $P = q\rho u$ n'est vraie que dans l'état d'équilibre. Il est donc nécessaire, pour avoir l'expression véritable de la vitesse, de considérer, comme nous l'avons fait, toutes les forces qui sollicitent une molécule d'air.

CONTINUATION DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT

SUR LE

DÉVELOPPEMENT

DE

LA THÉORIE DES FLUIDES ÉLASTIQUES.

Connaissance des Temps pour l'an 1825; 1822.

Ce Mémoire, pages 302-323 de la *Connaissance des Temps* de 1825, est reproduit textuellement et avec des Additions au Tome V, Livre XII, pages 135-160, et dans l'historique du Livre XII, pages 104-105 et page 112.

SUR LA VITESSE DU SON.

Connaissance des Temps pour l'an 1825; 1822.

La formule de la vitesse du son, que j'ai publiée dans les *Annales de Physique et de Chimie* pour l'année 1816, consiste à multiplier la formule newtonienne par la racine carrée du rapport de la chaleur spécifique de l'air sous une pression constante, à sa chaleur spécifique sous un volume constant. La formule de Newton donne la vitesse du son, égale à la racine carrée du rapport de la pression à la densité de l'air. Si l'on prend pour unité la seconde sexagésimale, ce rapport à zéro de température, et sous la pression barométrique $0^m,76$, est le produit de cette pression par le rapport de la densité du mercure à celle de l'air, et par le double de l'espace dont la pesanteur fait tomber les corps dans la première seconde. J'ai conclu ce double espace des expériences de Borda sur la longueur du pendule, qui le donnent égal à $9^m,808674$. MM. Biot et Arago ont trouvé le rapport de la densité du mercure à celle de l'air sous la pression $0^m,76$ et à zéro de température, égal à $10466,82$. On aura donc, par la formule newtonienne, la vitesse du son égale à la racine carrée du produit de ces trois nombres, $9^m,808674$, $0^m,76$ et $10466,82$; ce qui donne $279^m,331$ pour l'espace décrit par le son, dans une seconde sexagésimale, à zéro de température. On doit remarquer que par la loi de Mariotte cette vitesse est constante, quelle que soit la pression, pourvu que la température reste la même. On réduira cette vitesse à la température de $15^{\circ},9$, à laquelle la nouvelle expérience de la vitesse du son a été faite, en la multipliant par la racine carrée de l'unité augmentée du produit de $15,9$ par la dilatation

de l'air, correspondant à l'accroissement de 1° dans la température, dilatation que M. Gay-Lussac a trouvée égale à 0,00375. On a ainsi $287^m,538$ pour cette vitesse, ce qui diffère de $53^m,35$ du résultat de la nouvelle expérience sur le son.

Il faut multiplier cette vitesse par la racine carrée du rapport des deux chaleurs spécifiques de l'air. Ce rapport important peut être conclu avec une grande exactitude des expériences intéressantes que MM. Gay-Lussac et Welter font dans ce moment sur la compression de l'air. Quatre de ces expériences faites sous la pression atmosphérique $0^m,757$, et que ces savants physiciens ont bien voulu me communiquer, m'ont donné pour ce rapport $1,3748$. Les résultats extrêmes ne diffèrent pas de ce résultat moyen de $\frac{1}{134}$ de sa valeur. Il est très remarquable que ce rapport soit à fort peu près constant à toutes les pressions et à toutes les températures. Dans les grands intervalles de -20° à 40° , et de 142^{mm} de pression à 2300^{mm} , ce rapport n'a pas varié d'un seizième de sa valeur. En multipliant donc $287^m,538$ par la racine carrée de $1,3748$, on a pour la vitesse du son $337^m,144$. On doit faire à ce résultat une petite correction dépendant de l'état hygrométrique de l'air. Toutes les expériences de MM. Biot, Arago, Gay-Lussac et Welter ont été faites sur un air privé d'humidité. La vapeur aqueuse répandue dans l'air atmosphérique étant plus légère que ce fluide le rend moins dense; elle doit donc produire, sur la vitesse du son, un effet analogue à celui de la chaleur. Dans la nouvelle expérience sur cette vitesse, les hygromètres à cheveu indiquaient 72° . En partant des expériences de M. Gay-Lussac sur ce genre d'hygromètres, et en supposant avec lui la densité de la vapeur aqueuse égale à $\frac{1}{16}$ de la densité de l'air, je trouve $0^m,571$ pour l'effet hygrométrique de l'air, qu'il faut ajouter à la vitesse précédente; elle devient ainsi $337^m,715$. La nouvelle expérience sur le son donne $340^m,889$; la différence $3^m,174$ me paraît être dans les limites des petites erreurs dont cette expérience et les éléments de calcul dont j'ai fait usage sont encore susceptibles.

 ADDITION AU MÉMOIRE

SUR

 LA THÉORIE DES FLUIDES ÉLASTIQUES.

Connaissance des Temps pour l'an 1825; 1822.

Ce Mémoire, pages 386-387 de la *Connaissance des Temps* 1825, est reproduit à peu près textuellement au Tome V, Livre XII, pages 104-105.

DE
L'ACTION DE LA LUNE SUR L'ATMOSPHÈRE.

Connaissance des Temps pour l'an 1826; 1823.

Ce Mémoire, pages 308-317 de la *Connaissance des Temps* 1826, est
inséré textuellement au Tome V, Livre XIII, pages 184-188 et 262-268.

SUR LES
VARIATIONS DE L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE
ET DE
LA PRÉCESSION DES ÉQUINOXES.

Connaissance des Temps pour l'an 1827; 1824.

J'ai fait voir, dans le cinquième Livre de la *Mécanique céleste*, que l'aplatissement de la Terre change considérablement la variation de l'obliquité de l'écliptique, qui résulte du mouvement séculaire de l'orbe terrestre, produit par l'action des planètes. Leur action directe sur la Terre, pour changer la position de son axe, est insensible. Mais cette action réfléchie, si je puis ainsi dire, par le Soleil, acquérant par là, dans son expression, de très petits diviseurs, devient considérable. Il arrive ici la même chose que j'ai remarquée dans la théorie de la Lune, où, par une réflexion semblable, la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe terrestre devient, dans les équations séculaires du mouvement de ce satellite, beaucoup plus sensible que par elle-même.

On sait que les produits de la tangente de l'inclinaison de l'écliptique vraie, sur une écliptique fixe, par le sinus ou par le cosinus de la longitude de son nœud, comptée d'un équinoxe fixe, sont exprimés, le premier par une suite de termes de la forme $e \sin(gt + \epsilon)$, et le second par la même suite de termes dans lesquels on change le sinus en cosinus.

Nous représenterons la première suite par

$$\sum c \sin(gt + \epsilon),$$

et la seconde par

$$\sum c \cos(gt + \epsilon),$$

le signe $\sum$ désignant la somme des termes de la nature de celui qu'il précède.

L'angle $gt + \epsilon$ peut être rapporté à l'équinoxe mobile, en l'augmentant de l'angle lt , l exprimant le moyen mouvement des équinoxes.

En faisant donc

$$l + g = f,$$

les produits de la tangente de l'inclinaison de l'écliptique vraie, par le sinus ou par le cosinus de la longitude de son nœud, comptée de l'équinoxe mobile, seront

$$\sum c \sin(ft + \epsilon), \quad \sum c \cos(ft + \epsilon).$$

Maintenant, j'ai fait voir dans le cinquième Livre de la *Mécanique céleste*, que si l'on nomme θ' l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique vraie, on a

$$(1) \quad \theta' = h + \sum c \frac{(f-l)}{f} [\cos(ft + \epsilon) - \cos \epsilon],$$

h étant l'obliquité de l'écliptique lorsque t est nul. Si la Terre était sphérique, l serait nul et l'on aurait

$$(1) \quad \theta' = h + \sum c [\cos(gt + \epsilon) - \cos \epsilon].$$

Ce n'est pas ainsi que Lagrange, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* de 1781, et d'après lui M. Schubert, dans son *Traité d'Astronomie théorique*, ont considéré cet objet. Ils ont égard à l'aplatissement de la Terre, en tant qu'il produit la précession moyenne lt des équinoxes; mais ils n'ont point égard à l'effet de cet aplatissement combiné

avec le déplacement séculaire de l'écliptique. Ils trouvent ainsi

$$\theta' = h + \sum c [\cos(ft + \epsilon) - \cos(lt + \epsilon)].$$

Lorsque le temps t , que nous supposons exprimer un nombre d'années tropiques, n'excède pas 100, cette formule et la formule (1) donneront à fort peu près l'une et l'autre, pour la variation de l'obliquité de l'écliptique,

$$t \sum (l-f) c \sin \epsilon;$$

mais ces formules seront fort différentes, lorsque le nombre t sera de plusieurs milles.

ψ exprimant la précession des équinoxes sur l'écliptique vraie, on a, par le cinquième Livre de la *Mécanique céleste*,

$$\psi = lt + \sum c \left(1 + \frac{l}{f} \tan^2 h \right) \frac{(l-f)}{f} \cot h [\sin(ft + \epsilon) - \sin \epsilon].$$

Suivant les géomètres cités, on a

$$\psi = lt - \sum c \cot h [\sin(ft + \epsilon) - \sin(lt + \epsilon)];$$

la longueur de l'année est

$$T \left(1 - \frac{d\psi}{dt 360^\circ} \right).$$

T étant l'année sidérale, on a donc cette longueur égale à

$$T \left\{ 1 - \frac{1}{360^\circ} \sum c \left(1 + \frac{l}{f} \tan^2 h \right) (l-f) \cot h [\cos(ft + \epsilon) - \cos \epsilon] \right\}.$$

T' étant la longueur de l'année tropique, lorsque t est nul. Suivant les géomètres cités, cette longueur est

$$T' \left\{ 1 - \frac{1}{360^\circ} \sum c \cot h [\cos(ft + \epsilon) - \cos \epsilon] \right\}.$$

En comparant ces formules aux nôtres, on voit que l'on aura notre expression de θ' en multipliant chaque terme de leur expression, ren-

fermé sous le signe $\sum$, par $\frac{f-t}{f}$, et en retranchant du produit ce qu'il devient lorsque t est nul.

On aura pareillement notre expression de ψ en multipliant chaque terme de leur expression renfermé sous le signe $\sum$ par

$$\frac{(f-t)}{f} \left(1 + \frac{t}{f} \tan^2 h \right),$$

et en retranchant du produit ce qu'il devient lorsque t est nul.

Les diverses valeurs de f sont les racines d'une équation algébrique, d'un degré d'autant plus élevé qu'il y a plus de planètes. Les valeurs numériques de ces racines dépendent des rapports que l'on assigne aux masses des planètes comparées à celle du Soleil. Lagrange, dans les Mémoires cités de l'Académie de Berlin, a déterminé ces valeurs en adoptant des rapports qui lui donnent, pour la diminution séculaire actuelle de l'obliquité de l'écliptique, $61''.56$. Cette diminution est beaucoup trop grande, et les observations de Bradley, La Caille et Mayer, comparées aux observations modernes, me paraissent indiquer une diminution plus petite que $50''$. M. Schubert, dans la seconde édition qu'il vient de publier de son *Traité d'Astronomie théorique*, a donné une expression de la variation de l'obliquité de l'écliptique plus concordante avec les observations modernes. Elle consiste à ajouter, à l'obliquité de l'écliptique du commencement de l'année 1800, la formule suivante :

$$\begin{aligned} & -1307''.21 \cos t 50'',1 - 5527''.78 \sin t 50'',1 \\ & - 387''.02 \cos t 24'',5715 - 530''.93 \sin t 24'',5715 \\ & - 1274''.56 \cos t 31'',4271 + 5681''.76 \sin t 31'',4271 \\ & + 264''.24 \cos t 33'',3851 + 294''.40 \sin t 33'',3851 \\ & - 450''.91 \cos t 43'',2280 + 1522''.68 \sin t 43'',2280 \\ & + 3155''.49 \cos t 45'',3674 - 1440''.48 \sin t 45'',3674. \end{aligned}$$

On transformera cette formule dans la véritable, en multipliant chacun de ses termes par $\frac{(50''.1-f)}{f}$, $50''.1$ exprimant la précession moyenne

annuelle des équinoxes, et f étant le coefficient de l'angle t compris sous les signes sinus et cosinus : on aura ainsi la formule suivante :

$$\begin{aligned} & 402''.09 \cos t 24'',5715 + 551''.61 \sin t 24'',5715 \\ & + 757''.30 \cos t 31'',4271 - 3375''.91 \sin t 31'',4271 \\ & - 132''.30 \cos t 33'',3851 - 147''.40 \sin t 33'',3851 \\ & + 71''.68 \cos t 43'',2280 - 242''.06 \sin t 43'',2280 \\ & - 329''.17 \cos t 45'',3674 + 150''.26 \sin t 45'',3674. \end{aligned}$$

Il faut ajouter cette formule à l'obliquité de l'écliptique du commencement de 1800, et retrancher de la somme la valeur de la formule lorsque t est nul, ou l'arc $12'49''.60$.

Comparons à cette formule l'observation de Tcheou-kong, que j'ai rapportée dans les *Connaissances des Temps* de 1809 et 1811⁽¹⁾. Cette observation donne l'obliquité de l'écliptique correspondant à l'an 1100 avant notre ère, égale à $23^\circ 54' 2''.5$. Il faut, dans la formule précédente, supposer $t = -2900$, et alors elle donne $2111''.56$. En faisant donc l'obliquité de l'écliptique égale à $23^\circ 27' 57''.0$, au commencement de 1800, cette formule donnera $23^\circ 50' 19''.0$ pour l'obliquité correspondant à l'an 1100 avant notre ère; ce qui ne diffère que de $3' 43''.5$ de l'observation de Tcheou-kong.

Les limites comprises entre le maximum et le minimum de la fonction $a \sin \theta + b \cos \theta$ sont $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$. De là j'ai conclu que les limites de la variation de l'obliquité de l'écliptique donnée par la formule de M. Schubert sont $\pm 4^\circ 53' 33''$. Par cette formule transformée dans la véritable, ces limites se réduisent à $\pm 1^\circ 22' 35''$.

On voit donc que la considération de l'aplatissement du sphéroïde terrestre réduit considérablement l'étendue des variations de l'obliquité de l'écliptique qui existeraient sans cet aplatissement; ce qui a lieu pareillement pour les variations de la longueur de l'année.

(1) Œuvres de Laplace, T. XIII.



SUR
LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DU RADICAL
QUI EXPRIME LA DISTANCE MUTUELLE DE DEUX PLANÈTES
ET SUR
LE DÉVELOPPEMENT DU RAYON VECTEUR ELLIPTIQUE.

Connaissance des Temps pour l'an 1828; 1825.

Ce Mémoire, dans lequel Laplace recherche et détermine pour la première fois la valeur de l'excentricité e pour laquelle les séries de la *Mécanique céleste* restent convergentes, est reproduit, avec des additions, dans le Supplément au cinquième Volume du *Traité de Mécanique céleste*, par M. le MARQUIS DE LAPLACE (imprimé sur le Manuscrit trouvé dans ses papiers), 1827, Tome V, pages 469-489.

MÉMOIRE
SUR
LES DEUX GRANDES INÉGALITÉS
DE JUPITER ET DE SATURNE.

Connaissance des Temps pour l'an 1829; 1826.

Ces inégalités ont pour argument cinq fois la longitude moyenne de Saturne, moins deux fois celle de Jupiter; leur période est de neuf siècles environ. J'ai reconnu qu'elles ont entre elles, à fort peu près, un rapport simple, qui consiste en ce que, si l'on nomme m la masse de Jupiter, celle du Soleil étant prise pour unité, a la moyenne distance de cette planète au Soleil; si l'on désigne pareillement par m' la masse de Saturne et par a' sa moyenne distance au Soleil, la grande inégalité de Saturne est à celle de Jupiter comme $m\sqrt{a}$ est à $-m'\sqrt{a'}$. Dans le calcul de ces inégalités, j'ai eu égard aux parties très petites dépendant du carré de la force perturbatrice, et j'ai conclu, au moyen du rapport précédent, la partie relative à Jupiter de celle qui est relative à Saturne. Dans un Mémoire inséré parmi ceux de la Société astronomique de Londres ⁽¹⁾, qui a pour titre *Mémoire sur différents points relatifs à la théorie des perturbations des planètes, exposée dans la Mécanique céleste*, M. Plana a discuté de nouveau ces petites parties, et il a reconnu que le rapport dont il s'agit ne leur est point applicable. Cette remarque m'ayant fait reprendre mon analyse, je suis parvenu à un rapport entre ces parties auquel les résultats de M. Plana sont loin

⁽¹⁾ Tome II, pages 325-412.

de satisfaire, et d'où il suit que le rapport dont j'avais fait usage s'éloigne peu de la vérité.

En publiant mon *Traité de Mécanique céleste*, j'ai désiré que les géomètres en vérifiassent les résultats, et spécialement ceux qui me sont propres. Les résultats de la théorie du Système du monde sont si distants des premiers principes que leur vérification est nécessaire pour en assurer l'exactitude. Les géomètres qui s'en occupent font donc une chose très utile à l'Astronomie. Je dois, comme savant et comme auteur, beaucoup de reconnaissance à ceux qui veulent bien prendre mon Ouvrage pour texte de leurs discussions et qui, par là, me fournissent l'occasion d'éclaircir quelques points délicats traités dans cet Ouvrage. Ainsi, dans le Mémoire cité, M. Plana étant parvenu par une analyse, qui n'est point irréprochable, à des équations différentielles du mouvement de l'orbite du dernier satellite de Saturne, qu'il croit devoir être substituées à celles que j'ai données à la page 182 du quatrième Volume de la *Mécanique céleste*, j'ai de nouveau examiné mes équations, et j'en ai confirmé l'exactitude par une autre méthode, comme je le montrerai dans un prochain Mémoire.

Je reprends l'équation (7) du n° 9 du deuxième Livre de la *Mécanique céleste* (1). En n'y considérant que l'action mutuelle du Soleil dont je désigne la masse par M , de Jupiter dont je désigne la masse par m , et de Saturne dont je désigne la masse par m' ; en nommant x, y, z les trois coordonnées orthogonales de Jupiter, rapportées au centre du Soleil, x', y', z' celles de Saturne, r et r' leurs rayons vecteurs; enfin dt exprimant l'élément du temps t , cette équation donnera

$$\begin{aligned} \text{const.} &= (M + m')m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - 2(M + m + m') \frac{Mm}{r} \\ &+ (M + m)m' \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2} - 2(M + m + m') \frac{Mm'}{r'} \\ &- 2mm' \left(\frac{dx dx'}{dt^2} + \frac{dy dy'}{dt^2} + \frac{dz dz'}{dt^2} \right) \\ &- \frac{2(M + m + m')mm'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}. \end{aligned}$$

(1) *Oeuvres de Laplace*, T. I, p. 147.

On a, par le n° 46 du deuxième Livre (1),

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2(M + m)}{r} - 2 \int dR + \text{const.},$$

$$\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2} = \frac{2(M + m')}{r'} - 2 \int dR' + \text{const.};$$

R étant égal à

$$\frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r^2} - \frac{m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}};$$

la différentielle d sous le signe intégral $\int$ se rapportant aux seules coordonnées de Jupiter, et la différentielle d' se rapportant aux seules coordonnées de Saturne; on aura donc

$$(A) \quad \begin{cases} (M + m')m \int dR + (M + m)m' \int dR' \\ = mm' \left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} \right) - mm' \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{dt^2} \\ - \frac{(M + m + m')mm'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}} + \text{const.} \end{cases}$$

Il faut maintenant considérer les termes de cette équation, affectés du très petit diviseur $5n' - 2n$, et qui ont pour argument $5n't - 2nt$, nt et $n't$ étant les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne. Ces termes sont en effet les seuls qui, acquérant encore ce diviseur par une nouvelle intégration, donnent dans les expressions de $\int \int dR$ et de $\int \int dR'$, et par conséquent dans les expressions de la longitude des deux planètes, des termes ayant pour diviseur $(5n' - 2n)^2$. Pour les déterminer, nous observerons que les fonctions

$$-mm' \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{dt^2}, \quad -\frac{(M + m + m')mm'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}$$

ne renferment point de termes semblables de l'ordre m^2 . Car on obtient les termes de l'ordre m^2 , dans ces fonctions, en y substituant, au lieu de $x, x', y, y', \dots$, leurs valeurs elliptiques, et il est clair qu'en développant ces fonctions, elles ne donneront point de termes ayant pour diviseur $5n' - 2n$. Il faut donc, pour avoir des termes semblables dans

(1) *Oeuvres de Laplace*, T. I, p. 278.

ce développement, substituer pour $x, y, x', y', \dots$ leurs valeurs augmentées des quantités dues aux forces perturbatrices, ce qui donnera des termes de l'ordre m^2 . On peut obtenir ces termes d'une manière fort simple, en considérant les orbites comme des ellipses variables. Pour cela, je vais rappeler ici quelques résultats exposés dans le Supplément ⁽¹⁾ au *Traité de la Mécanique céleste*, et dans le deuxième Livre ⁽²⁾.

En exprimant par $\int n dt + \varepsilon$ la longitude moyenne de Jupiter, ε sera l'élément que l'on nomme époque de la longitude moyenne. Soient a le demi-grand axe de son ellipse, e l'excentricité, ϖ la longitude du périhélie, γ l'inclinaison de l'ellipse à un plan fixe, et θ la longitude du nœud. Marquons d'un trait, pour Saturne, les lettres $n, \varepsilon, a, e, \varpi, \gamma$ et θ . Les quantités a, n, a' et n' seront, par le n° 23 du deuxième Livre, liées entre elles par les deux équations

$$n^2 a^3 = M + m, \quad n'^2 a'^3 = M + m',$$

et l'on aura, par le n° 64 du même Livre,

$$d \frac{M+m}{a} = 2dR, \quad d \frac{M+m'}{a'} = 2d'R'.$$

V étant une fonction des coordonnées x, y, z, x', y', z' des deux ellipses, on peut la différencier une première fois en n'y faisant varier que le temps t , et en y regardant les éléments comme constants, ce qui donnera, lorsqu'on aura substitué dans V , au lieu de x, y, z, x', y', z' , leurs valeurs elliptiques, et faisant

$$\int n dt + \varepsilon = L, \quad \int n' dt + \varepsilon' = L',$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial L} n dt + \frac{\partial V}{\partial L'} n' dt;$$

on a ensuite

$$0 = \frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial L} dL + \frac{\partial V}{\partial e} de + \frac{\partial V}{\partial \varpi} d\varpi + \frac{\partial V}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta,$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial a'} da' + \frac{\partial V}{\partial L'} dL' + \frac{\partial V}{\partial e'} de' + \frac{\partial V}{\partial \varpi'} d\varpi' + \frac{\partial V}{\partial \gamma'} d\gamma' + \frac{\partial V}{\partial \theta'} d\theta'.$$

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, T. III, p. 325.

⁽²⁾ Id., T. I, Chap. VIII, p. 346.

Cela posé, les valeurs elliptiques de x et de x' peuvent être mises sous cette forme

$$x = A + B \cos \left(\int n dt + \varepsilon + L \right) + \dots,$$

$$x' = A' + B' \cos \left(\int n' dt + \varepsilon' + L' \right) + \dots,$$

$A, B, L, \dots, A', B', L', \dots$ étant fonctions des éléments des orbites; on aura donc par ce qui précède

$$dx = -B n dt \sin \left(\int n dt + \varepsilon + L \right) - \dots,$$

$$dx' = -B' n' dt \sin \left(\int n' dt + \varepsilon' + L' \right) - \dots$$

Le produit $dx dx'$ ne renfermera donc que des quantités périodiques de la forme

$$H \cos \left(i \int n dt + i' \int n' dt + E \right),$$

H et E étant fonctions des éléments. Il est facile de voir, par le Supplément cité, qu'en considérant les éléments comme variables, leurs variations correspondant aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne ont le même argument que ces inégalités, savoir $5n't - 2nt$ ou $5 \int n' dt - 2 \int n dt$, et elles ont $5n' - 2n$ pour diviseur. En les substituant dans la quantité précédente, il en résultera des termes qui auront ce même diviseur; mais il est visible qu'ils n'auront point le même argument, à moins que i' ne soit égal à 10 et i égal à -4; mais, dans ce cas, H est très petit de l'ordre e^6 , ce qui rend sa considération inutile. On voit ainsi que la fonction

$$-mm' \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{dt^2}$$

ne renferme point de termes des ordres m^2 et m^3 , qui aient pour argument $5n't - 2nt$, et pour diviseur $5n' - 2n$.

Cependant cette fonction contient un terme de la forme

$$H' \cos (5n't - 2nt + A),$$

H' étant fonction des éléments. En y substituant la partie des variations

des éléments proportionnelles au temps, on aura des termes de la forme

$$Kt \cos(5n't - 2nt + B),$$

termes qui, sans avoir $5n' - 2n$ pour diviseur, peuvent, à la longue, devenir sensibles. Mais j'ai eu égard à ces termes dans ma théorie de Jupiter et de Saturne.

La fonction

$$\frac{-(M + m + m')mm'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}$$

peut se réduire à sa partie

$$\frac{-Mmm'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}},$$

parce que l'autre partie est de l'ordre m^2 et ne renferme point de termes qui, ayant pour argument $5n't - 2nt$, ont pour diviseur $5n' - 2n$. Concevons la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}},$$

développée dans la suite

$$A + K \cos(5n't - 2nt + I) + Q,$$

Q étant une série de cosinus d'angles de la forme $int + i'n't$, i et i' étant des nombres entiers positifs ou négatifs, et $int + i'n't$ étant différent de $5n't - 2nt$. Cela posé, si l'on désigne par la caractéristique δ les variations, et si l'on fait

$$R = (R) + \delta R, \quad R' = (R') + \delta R',$$

(R) et (R') étant les parties de R et de R' de l'ordre m ; δR et $\delta R'$ étant les parties de l'ordre m^2 ; l'équation (A) donnera en ne conservant que les termes utiles, c'est-à-dire ceux qui ont pour argument $5n't - 2nt$, et $5n' - 2n$ pour diviseur, et observant que $mm\left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'}\right)$ n'en ren-

ferment point de semblables de l'ordre m^2 ,

$$\begin{aligned} M \left[m \int d(R) + m' \int d'(R') \right] + mm' \left[\int d(R) + \int d'(R') \right] \\ + M \left(m \int d \delta R + m' \int d' \delta R' \right) = -Mmm' \left\{ (A) + [K \cos(5n't - 2nt + I)] \right\} \\ - Mmm' \delta [A + K \cos(5n't - 2nt + I)], \end{aligned}$$

(A) et $[K \cos(5n't - 2nt + I)]$

étant les parties de

$$A \quad \text{et de} \quad K \cos(5n't - 2nt + I)$$

indépendantes de m et de m' . En égalant donc séparément les quantités de l'ordre m^2 et de l'ordre m^3 , on aura

$$\begin{aligned} M \left[m \int d(R) + m' \int d'(R') \right] = -Mmm' \left\{ (A) + [K \cos(5n't - 2nt + I)] \right\}, \\ mm' \left[\int d(R) + \int d'(R') \right] + mm' \int d \delta \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} + Q \right) \\ + mm' \int d' \delta \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} + Q \right) = 0; \end{aligned}$$

les quantités

$$m' \int d \delta \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} + Q \right) \quad \text{et} \quad m \int d' \delta \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} + Q \right)$$

sont, comme il est facile de s'en assurer, celles que j'ai considérées, ainsi que M. Plana, dans les valeurs de $\int d \delta R$ et de $\int d' \delta R'$; en restreignant donc ainsi ces valeurs, on aura

$$(O) \quad 0 = m \int d \delta R + m' \int d' \delta R' + mm' \int d(R) + mm' \int d'(R'),$$

ce qui donne

$$(Z) \quad 3a'n' \int d' \delta R' = -\frac{ma'n'}{m'an} 3an \int d \delta R + (m' - m) 3a'n' \int d'(R').$$

On a, aux quantités près de l'ordre m ,

$$n^2 a^2 = n'^2 a'^2,$$

ce qui donne

$$\frac{ma'n'}{m'an} = \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}};$$

de plus, si l'on nomme ζ et ζ' les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, on a à fort peu près, par le n° 64 du deuxième Livre,

$$\zeta' = \int 3a'n' dt \int d'(R');$$

l'équation (Z) donnera donc

$$\int 3a'n' dt \int d' \partial R' = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \int 3an dt \int d' \partial R + (m' - m)\zeta'.$$

Suivant M. Plana, dans son Mémoire cité ⁽¹⁾, on a en secondes sexagésimales

$$\int 3an dt \int d' \partial R = -1^s, 9200 \sin(5n't - 2nt) + 5^s, 5575 \cos(5n't - 2nt);$$

on aura donc, en observant que l'on a

$$m = \frac{1}{1070}, \quad m' = \frac{1}{3512}, \quad \log \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} = 0, 3844953,$$

$$\begin{aligned} \int 3a'n' dt \int d' \partial R' \\ = 4^s, 6537 \sin(5n't - 2nt) - 10^s, 6998 \cos(5n't - 2nt) + \left(\frac{1}{3512} - \frac{1}{1070}\right)\zeta'; \end{aligned}$$

la valeur de ζ' du n° 35 du sixième Livre ⁽²⁾ est, en la réduisant en secondes sexagésimales,

$$-2931^s \sin(5n't - 2nt) - 223^s \cos(5n't - 2nt);$$

on aura ainsi

$$\int 3a'n' dt \int d' \partial R' = 6^s, 559 \sin(5n't - 2nt) - 10^s, 555 \cos(5n't - 2nt);$$

M. Plana trouve ⁽³⁾

$$\int 3a'n' dt \int d' \partial R' = 25^s, 1036 \sin(5n't - 2nt) - 12^s, 8932 \cos(5n't - 2nt),$$

⁽¹⁾ *Mémoires de la S. R. A.*, T. II, p. 397.

⁽²⁾ *Ouvrages de Laplace*, T. III, p. 147.

⁽³⁾ Mémoire cité, p. 405.

ce qui diffère beaucoup du résultat précédent. Il me paraît donc que les valeurs de $3 \int an dt \int d' \partial R$ et $3 \int a'n' dt \int d' \partial R'$, déterminées par ce savant géomètre, ont besoin de correction ⁽¹⁾.

On aura égard dans l'équation (O) aux valeurs entières de ∂R et de $\partial R'$, en ajoutant au second membre de cette équation la fonction

$$mm' \partial[A + K \cos(5n't - 2nt + 1)].$$

Enfin, pour compléter le calcul des parties des inégalités de Jupiter et de Saturne, dépendant du carré de la force perturbatrice, et qui, ayant pour argument $5n't - 2nt$, ont pour diviseur $(5n' - 2n)^2$; il faut avoir égard aux variations de l'élément que l'on nomme *époque*, et que l'on peut obtenir par les formules que j'ai données à la page 6 du Supplément au troisième Volume de la *Mécanique céleste*.

⁽¹⁾ Les résultats numériques de Plana, donnés ci-dessus et empruntés par Laplace, sont entièrement erronés, par suite d'une faute de signe dans les calculs analytiques. La découverte en a été faite par de Pontécoulant.

Au lieu de

$$\zeta = -1^s, 9200 \sin(5n't - 2nt) + 5^s, 5575 \cos(5n't - 2nt)$$

et

$$\zeta' = 25^s, 1036 \sin(5n't - 2nt) - 12^s, 8932 \cos(5n't - 2nt),$$

il faut lire :

$$\zeta = 1^s, 4800 \sin(5n't - 2nt) + 17^s, 7241 \cos(5n't - 2nt)$$

et

$$\zeta' = 5^s, 0730 \sin(5n't - 2nt) - 40^s, 3282 \cos(5n't - 2nt),$$

d'après le Mémoire :

Note sur le calcul de la partie du coefficient de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne qui dépend du carré de la force perturbatrice, 1829 (*Mémoires de l'Académie de Turin*, T. XXXIV et XXXV).

Si maintenant nous refaisons les calculs de Laplace, nous avons successivement

$$\begin{aligned} \int 3a'n' dt \int d' \partial R' &= -3^s, 5872 \sin(5n't - 2nt) \\ &\quad - 42^s, 9595 \cos(5n't - 2nt) + \left(\frac{1}{3512} - \frac{1}{1070}\right)\zeta' \end{aligned}$$

et

$$\int 3a'n' dt \int d' \partial R' = -1^s, 6823 \sin(5n't - 2nt) - 42^s, 8146 \cos(5n't - 2nt),$$

au lieu de la valeur

$$\zeta' = 5^s, 0730 \sin(5n't - 2nt) - 40^s, 3282 \cos(5n't - 2nt),$$

obtenue par Plana.

Cette rectification nous dispense de corriger les coefficients $-10^{\circ},6998$, $-10^{\circ},555$ et $-12^{\circ},8932$, qui sont également inexactes.

Sur la valeur $\zeta' = -2931'' \sin(5n't - 2nt) - 223'' \cos(5n't - 2nt)$,

employée par Laplace, voici la remarque de Plana, Mémoire cité, page 7 :

« Laplace, dans la page 243 de la *Connaissance des Temps* pour l'année 1829, fait

$$\zeta' = -2931'' \sin(5n't - 2nt) - 223'' \cos(5n't - 2nt),$$

ce qui revient à réduire en secondes sexagésimales le résultat qu'il avait donné dans la page 140 du troisième Volume de la *Mécanique céleste*. Mais cela n'est pas exact. Car : 1^o on doit appliquer à ces nombres la correction dont il est parlé dans les pages 23 et 24 du premier Supplément à la *Mécanique céleste*, publié en 1808 (*); 2^o on doit, pour se conformer à l'esprit de la démonstration par laquelle on arrive à l'équation

$$m\sqrt{a}\ddot{\zeta} + m'\sqrt{a'}\ddot{\zeta}' + (m - m')m'\sqrt{a'a'}\zeta'' = 0,$$

exclure de la valeur totale de ζ' la partie $\ddot{\zeta}'$, qui est de l'ordre du carré de la force perturbatrice. Et comme il est démontré maintenant que les nombres (en division centésimale),

$$-11^{\circ},779432 \sin(5n't - 2nt) + 132^{\circ},4701 \cos(5n't - 2nt),$$

donnés dans la même page 140, doivent être pris avec un signe contraire, on sent qu'il n'est pas permis de négliger ces deux corrections. D'après ces motifs, j'ai formé la valeur de ζ' que j'emploie ici en posant (division centésimale)

$$\zeta' = -\frac{m}{m'} \sqrt{\frac{a}{a'}} \frac{3354,46}{3512} [(3900^{\circ},616 - 38^{\circ},692) \sin(5n't - 2nt) + (368^{\circ},910 + 25^{\circ},065) \cos(5n't - 2nt)]$$

(voir p. 127 et 129 du troisième Volume de la *Mécanique céleste*) et faisant ensuite la réduction en secondes sexagésimales. »

Le calcul de la grande inégalité de Jupiter et Saturne a suscité de nombreuses recherches; nous mentionnerons seulement, en dehors des Mémoires déjà cités, parmi ceux qui se rapportent plus directement au travail précédent de Laplace :

PLANA, *Sur le Mémoire de Laplace intitulé : Sur les deux grandes inégalités de Jupiter et Saturne* (Mémoires de l'Académie de Turin, t. XXXI, 1827).

POISSON, *Sur les inégalités à longues périodes résultant de l'action mutuelle de Saturne et Jupiter* (Connaissance des Temps pour les années 1831 et 1832).

(*) Œuvres de Laplace, T. III.

MÉMOIRE

SUR

DIVERS POINTS DE MÉCANIQUE CÉLESTE.

Connaissance des Temps pour l'an 1829; 1826.

I.

Sur les mouvements de l'orbite du dernier satellite de Saturne.

J'ai donné, à la page 182 du quatrième Volume de la *Mécanique céleste* (*), les variations différentielles de l'inclinaison de cette orbite et du mouvement de ses nœuds sur l'orbite de Saturne. M. Plana, dans un Mémoire inséré parmi ceux de la Société astronomique de Londres (**), est parvenu à des résultats différents; mais, en les examinant avec attention, on reconnaît que son analyse n'est pas entièrement exacte. D'ailleurs, j'ai retrouvé mes résultats par une autre méthode, comme on va le voir.

Si l'on nomme :

II la distance du nœud ascendant de l'équateur de Saturne au nœud ascendant de l'orbite du satellite, ce dernier nœud étant supposé moins avancé que le premier dans le sens du mouvement de la planète;

ψ l'arc de l'orbite du satellite, compris entre son nœud ascendant sur l'orbite de Saturne et son nœud descendant sur l'équateur de cette planète;

(*) Œuvres de Laplace, T. IV, p. 182.

(**) Ibid., T. II, p. 325-412.

γ l'inclinaison mutuelle de cet équateur et de l'orbite du satellite;

λ l'inclinaison de l'orbite du satellite à l'orbite de Saturne;

A l'inclinaison de l'équateur de Saturne à son orbite.

Si l'on désigne par k la quantité $\frac{2}{3}m^2$, m étant le moyen mouvement de Saturne, et t exprimant le temps représenté par le moyen mouvement du satellite dont le mouvement vrai est exprimé par v ; si l'on désigne encore par k' la quantité

$$\frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^3} M,$$

a étant la moyenne distance du satellite au centre du sphéroïde de Saturne dont le rayon moyen est pris pour unité; ρ étant l'ellipticité de ce sphéroïde; M sa masse et φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à son équateur; je suis parvenu, dans la page citée, aux deux équations suivantes, en ne considérant que les actions du Soleil et de Saturne sur le satellite dont l'orbite est supposée circulaire :

$$(1) \quad \frac{d\lambda}{dv} = -k' \sin \gamma \cos \gamma \sin \psi,$$

$$(2) \quad \frac{d\Pi}{dv} = k \cos \lambda - \frac{k' \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \lambda} \cos \psi.$$

En considérant le triangle sphérique formé par les positions, sur la sphère céleste, des trois nœuds dont je viens de parler, observés du centre de Saturne, les formules trigonométriques donnent

$$\begin{aligned} \sin \gamma \sin \psi &= \sin \Lambda \sin \Pi, \\ \cos \gamma &= \sin \Lambda \sin \lambda \cos \Pi + \cos \Lambda \cos \lambda, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(3) \quad \frac{d\lambda}{dv} = -k' \sin \Lambda \cos \Lambda \cos \lambda \sin \Pi - \frac{1}{2} k' \sin^2 \Lambda \sin \lambda \sin 2\Pi.$$

Ensuite les formules trigonométriques donnent

$$\sin \gamma \cos \psi = \sin \Lambda \cos \lambda \cos \Pi - \cos \Lambda \sin \lambda;$$

on a donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\Pi}{dv} &= k \cos \lambda - k' \frac{(\sin \Lambda \sin \lambda \cos \Pi + \cos \Lambda \cos \lambda)}{\sin \lambda} \\ &\times (\sin \Lambda \cos \lambda \cos \Pi - \cos \Lambda \sin \lambda). \end{aligned} \right.$$

Les équations (3) et (4) ne renferment plus avec v que les variables λ et Π , si l'on suppose invariables l'orbite et l'équateur de Saturne, ce que l'on peut, à fort peu près, supposer; on aura donc ces variables en intégrant ces équations. Sous cette forme, l'intégration est très difficile; mais on peut, par l'analyse exposée dans le n° 35 du Livre VIII de la *Mécanique céleste* (*), la ramener, au moyen d'une transformation convenable des variables, à la rectification des sections coniques.

Si l'on conçoit un plan fixe qui passe entre l'équateur et l'orbite de Saturne, par leur commune intersection, et qui soit incliné à cet équateur d'un angle θ tel que

$$\tan \alpha \theta = \frac{k \sin 2\Lambda}{k + k' \cos 2\Lambda},$$

en nommant σ l'inclinaison de l'orbite du satellite à ce plan, et Π' la distance angulaire du nœud de cette orbite avec ce plan, et du nœud de l'équateur avec l'orbite de Saturne, le premier de ces nœuds étant supposé moins avancé que le second, en longitude; si l'on fait

$$q = \frac{1}{4} (k + k' - \sqrt{k^2 + 2kk' \cos 2\Lambda + k'^2}),$$

$$p = \frac{1}{4} (k + k' + 3\sqrt{k^2 + 2kk' \cos 2\Lambda + k'^2}),$$

on aura, par le numéro cité,

$$\begin{aligned} \sin \sigma &= \frac{b}{\sqrt{p - q \cos 2\Pi'}}, \\ dv &= \frac{d\Pi'}{\sqrt{(p - q \cos 2\Pi')(p - b^2 - q \cos 2\Pi')}} \end{aligned}$$

b étant une constante arbitraire. En faisant

$$\tan \Pi' = \sqrt{\frac{p - q}{p + q}} \tan \Pi'',$$

on aura

$$dv = \frac{d\Pi''}{\sqrt{p^2 - q^2 - b^2 p - b^2 q \cos 2\Pi''}}.$$

(*) *Oeuvres de Laplace*, T. IV, p. 173.

L'intégrale de cette dernière équation dépend, comme on sait, de la rectification des sections coniques.

Ayant ainsi ϖ et Π' en fonction de v ou du temps, on aura, par le numéro cité, λ et Π , au moyen des équations

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= \cos(\Lambda - \vartheta) \cos \varpi - \sin(\Lambda - \vartheta) \sin \varpi \cos \Pi', \\ \sin \Lambda \sin \lambda \cos \Pi + \cos \Lambda \cos \lambda &= \cos \vartheta \cos \varpi + \sin \vartheta \sin \varpi \cos \Pi',\end{aligned}$$

car les deux membres de cette dernière équation sont, par ce qui précède et par le numéro cité, les expressions de $\cos \gamma$.

Je vais maintenant parvenir d'une autre manière aux équations (1) et (2). Je reprends pour cela les équations (5) et (6) du n° 2 du Livre XV de la *Mécanique céleste* (*). En y changeant γ en λ , et en négligeant le carré de l'excentricité de l'orbite du satellite, elles deviennent

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{a}{\sin \lambda} \frac{\partial R}{\partial \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{a}{\sin \lambda} \frac{\partial R}{\partial \lambda},$$

t étant le moyen mouvement du satellite et ϑ la longitude de son nœud ascendant sur l'orbite de Saturne, comptée d'un point fixe. La fonction R est ce que j'ai désigné par cette lettre dans le n° 35 du Livre VIII de la *Mécanique céleste*; et il résulte de l'expression que j'ai donnée de sa valeur, qu'en négligeant les quantités périodiques dépendant des sinus et cosinus des moyens mouvements de Saturne et du satellite, on a

$$aR = \frac{1}{8} m^2 - \frac{k}{2} \cos^2 \lambda + k' \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right),$$

μ étant le sinus de la latitude du satellite, au-dessus de l'équateur de Saturne. On a

$$\mu = \sin \gamma \sin(v - \psi),$$

v étant l'arc de l'orbite du satellite, compris entre ce satellite et l'orbite de Saturne, ce qui donne, en négligeant les inégalités périodiques

(*) Œuvres de Laplace, T. V, p. 370.

dépendant de v ,

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \gamma;$$

on a ensuite, en nommant Γ la longitude du nœud ascendant de l'équateur de Saturne sur son orbite, à partir du point fixe,

$$\Pi = \Gamma - \vartheta.$$

Les équations différentielles précédentes deviendront ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{k' \cos \gamma}{\sin \lambda} \frac{d \cos \gamma}{d \Pi}, \\ \frac{d\Pi}{dt} &= k \cos \lambda - \frac{k' \cos \gamma}{\sin \lambda} \frac{d \cos \gamma}{d \lambda}.\end{aligned}$$

En substituant, au lieu de $\cos \gamma$, sa valeur, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= -k' \cos \gamma \sin \Lambda \sin \Pi, \\ \frac{d\Pi}{dt} &= k \cos \lambda - \frac{k' \cos \gamma}{\sin \lambda} (\sin \Lambda \cos \lambda \cos \Pi - \cos \Lambda \sin \lambda); \end{aligned}$$

ce qui, en changeant

$$\begin{aligned}dt &\text{ en } dv, & \sin \Lambda \sin \Pi &\text{ en } \sin \gamma \sin \psi, \\ \sin \Lambda \cos \lambda \cos \Pi - \cos \Lambda \sin \lambda &\text{ en } \sin \gamma \cos \psi,\end{aligned}$$

donne les équations (1) et (2).

II.

Sur l'inégalité de Mercure à longue période, dont l'argument est le moyen mouvement de Mercure, moins celui de la Terre.

La période de cette inégalité est environ 27 fois plus grande que celle de Mercure. Son coefficient est de l'ordre du cube des excentricités; mais il peut devenir sensible par le diviseur très petit $\left(1 - \frac{4n'}{n}\right)^2$, qu'il acquiert par une double intégration, dans l'expression de la

longitude de Mercure; nt et $n't$ étant les moyens mouvements de Mercure et de la Terre. Je l'ai déterminé dans le n° 10 du Livre VI de la *Mécanique céleste* ⁽¹⁾, par une méthode d'approximation fort simple, et qui m'a dispensé de calculer les termes du développement de la fonction perturbatrice, dépendant des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites. J'ai trouvé ainsi ce coefficient au-dessous d'une seconde sexagésimale. M. Plana, dans son Mémoire déjà cité, a fait contre cette méthode des objections qu'il résoudre lui-même, s'il prend la peine de revoir son analyse et la mienne, en observant de ne conserver que les termes qui ont pour diviseur $(1 - \frac{4n'}{n})^2$. Il a calculé l'inégalité dont il s'agit, en considérant les termes du développement de la force perturbatrice dépendant des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons, et il est arrivé à un résultat numérique fort peu différent de celui que j'avais trouvé; ce qui prouve que ma méthode est suffisamment approchée.

III.

De l'action des étoiles sur le système planétaire.

J'ai traité cet objet dans le Chapitre XVIII du Livre VI de la *Mécanique céleste* ⁽²⁾; mais en revoyant mon analyse, elle m'a paru susceptible de plusieurs corrections; je vais donc la reprendre ici en suivant la même méthode.

Je suppose que l'on a sous les yeux le Chapitre cité dont je conserverai toutes les dénominations, et l'analyse jusqu'à la ligne 17 de la page 165 du troisième Volume de mon Ouvrage ⁽³⁾. Je substitue, à la partie suivante de cette analyse, ce qui suit :

$$\int dR = R_1 + g, \quad r \frac{\partial R}{\partial r} = 2R_1,$$

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. III, p. 32.

⁽²⁾ *Ibid.*, T. III, p. 174.

⁽³⁾ *Ibid.*, T. III, p. 175, ligne 21.

g étant une quantité qui ne varie que par la variation très petite de la position de l'étoile. On a, en négligeant le carré de l'excentricité e de l'orbite, et en négligeant les variations de la position de l'étoile,

$$r = a[1 - e \cos(v - \varpi)], \quad n dt = dv[1 - 2e \cos(v - \varpi)].$$

La formule (X) donnera ainsi, en ne considérant que les termes multipliés par l'arc v , et en supposant $\mu = 1$, ce qui revient à très peu près à prendre pour unité de masse celle du Soleil,

$$\begin{aligned} \delta r &= 3eg a^2 v \sin(v - \varpi) + 6 \frac{m' a^3}{4 r^3} (2 - 3 \cos^2 I) e v \sin(v - \varpi) \\ &\quad - 9 \frac{m' a^3}{4 r^3} \cos^2 I e v \sin(v - \varpi - 2U + 2\varpi). \end{aligned}$$

La formule (Y) donnera

$$\delta v = 3agv + \frac{7m' a^3}{4 r^3} v (2 - 3 \cos^2 I) + \frac{2d}{a} \frac{\delta r}{dv}.$$

v étant égal au moyen mouvement nt , plus à des quantités périodiques, δv ne doit contenir que ces dernières quantités, ce qui donne

$$3ag = - \frac{7m' a^3}{4 r^3} (2 - 3 \cos^2 I);$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} \delta r &= - \frac{m' a^3}{4 r^3} (2 - 3 \cos^2 I) n t e \sin(v - \varpi) \\ &\quad - \frac{9m' a^3}{4 r^3} \cos^2 I n t e \sin(v - \varpi - 2U + 2\varpi), \\ \delta v &= - \frac{2m' a^3}{4 r^3} (2 - 3 \cos^2 I) n t e \cos(v - \varpi) \\ &\quad - \frac{18m' a^3}{4 r^3} \cos^2 I n t e \cos(v - \varpi - 2U + 2\varpi). \end{aligned}$$

Déterminons présentement δs au moyen de l'équation (Z). On peut faire ici

$$s = \varphi \sin(v - \vartheta),$$

φ étant l'inclinaison, supposée très petite, de l'orbite à un plan fixe, et ϑ étant la longitude de son nœud ascendant sur ce plan. On a, à fort

peu près, $z = as$; on aura donc

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{6m'a}{4r'^2} \sin 2l \cos(v-U);$$

l'équation (Z) donnera ainsi

$$\delta t = \frac{3m'a^2}{4r'^2} \sin 2l \sin(v-U).$$

Cette variation en latitude est l'effet le plus sensible de l'action des étoiles sur le système planétaire. Mais il est visible que, par rapport aux planètes les plus éloignées du Soleil, où cet effet est le plus grand, il ne pourra devenir sensible qu'après un grand nombre de siècles.

MÉMOIRE

SUR

UN MOYEN DE DÉTRUIRE LES EFFETS DE LA CAPILLARITÉ

DANS LES BAROMÈTRES.

Connaissance des Temps pour l'an 1829; 1826.

Je prends pour exemple le baromètre qui sert journellement à l'Observatoire royal. Le tube de ce baromètre plonge dans une large cuvette, en partie remplie de mercure et dont le fond est mobile. La différence en hauteur de la surface de ce mercure et du sommet de la surface du mercure dans le tube est la hauteur du baromètre, abstraction faite de sa capillarité. Pour avoir cette différence, on élève ou l'on abaisse le bord de la cuvette de manière que la surface du mercure qu'elle contient touche l'extrémité d'une pointe d'ivoire attachée fixement, ainsi que la cuvette et le tube, à une règle verticale dont les divisions indiquent la hauteur du baromètre. On obtient ce contact en élevant le fond mobile de la cuvette, en sorte que la pointe plonge un peu dans le mercure et forme autour d'elle, par un effet capillaire, une cavité en forme d'entonnoir. On abaisse ensuite insensiblement la surface du mercure de la cuvette, jusqu'au moment où cette cavité disparaît. La précision et la facilité avec lesquelles on reconnaît ainsi le contact de la pointe, avec la surface de mercure, est un des avantages de ce baromètre. La règle donne alors, par sa division correspon-



332 MÉMOIRE SUR UN MOYEN DE DÉTRUIRE LES EFFETS
dant au sommet de la surface du mercure du baromètre, la hauteur
barométrique.

Il y a dans cette hauteur observée deux effets capillaires qui, étant
contraires, peuvent se détruire mutuellement. L'un de ces effets est dû
à la convexité de la surface intérieure du mercure du baromètre, et il
diminue la hauteur barométrique. L'autre effet est dû à la courbure
de la surface du mercure de la cuvette, courbure très sensible vers ses
bords. En vertu de cette courbure, l'extrémité de la pointe d'ivoire,
au moment où elle ne fait que toucher le mercure, est un peu au-des-
sous de la vraie surface de niveau du mercure de la cuvette, ou du plan
horizontal tangent à cette surface, en sorte que sa distance au sommet
du mercure du baromètre est plus grande que la distance de ce plan
au même sommet. La hauteur barométrique observée est donc augmen-
tée par cet effet capillaire. Ainsi, la pointe étant placée de manière que
cette augmentation soit égale à la diminution produite par la capilla-
rité du tube, la hauteur observée sera, sans aucune correction, la vraie
hauteur représentative de la pression de l'atmosphère.

J'ai donné, dans la *Connaissance des Temps* de 1812 ⁽¹⁾, des formules
fondées sur ma théorie de l'action capillaire, pour avoir la dépression
du mercure dans le tube d'un baromètre, due à sa capillarité et corres-
pondant à son diamètre intérieur, formules que M. Bouvard a réduites
en Table. On peut, par la même théorie, former une Table correspon-
dante de la distance de la pointe d'ivoire à la cuvette, nécessaire pour
détruire l'effet de la capillarité du tube. Voici les formules dont on peut
faire usage. Soient z cette distance; α l'inclinaison à l'horizon de
l'élément de la courbe que forme l'intersection de la surface du mer-
cure de la cuvette et d'un plan vertical mené par le sommet de cette
surface; soit σ' ce que devient σ au point de contact du mercure et de
la cuvette. Soit enfin ε l'abaissement de la pointe au-dessous du plan
horizontal mené par le sommet. Cela posé, il résulte des formules que
j'ai données dans le Supplément au Livre X de la *Mécanique céleste* ⁽²⁾,

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. XIII, p. 71.

⁽²⁾ *Ibid.*, T. IV, p. 484.

DE LA CAPILLARITÉ DANS LES BAROMÈTRES. 333
relativement à la figure d'une goutte de mercure, que l'on a

$$\varepsilon = \left[\log \text{hyp} \left(\frac{\tan \frac{1}{2} \sigma'}{\tan \frac{1}{2} \sigma} \right) - 4 \sin \left(\frac{\sigma + \sigma'}{4} \right) \sin \left(\frac{\sigma' - \sigma}{4} \right) \right] \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha}},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin \frac{1}{2} \sigma,$$

α étant une quantité dépendant de l'attraction moléculaire du mercure
sur lui-même. J'ai conclu d'un grand nombre d'expériences de Gay-
Lussac :

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha}} = 1^{\text{mm}} \sqrt{13}, \quad \sigma' = 52'.$$

Cela posé, les deux effets capillaires du baromètre dont je viens de
parler se détruiront mutuellement si l'on fait z égal à la dépression du
mercure dans le baromètre, produite par sa capillarité, dépression
donnée par le diamètre intérieur du tube. La valeur de z donnera
l'angle $\frac{1}{2} \sigma$, et cet angle donnera α , ou la distance à laquelle il faut placer
la pointe de la cuvette. Et M. Bouvard a formé, d'après ces formules,
une Table qu'il doit publier dans ce Volume.



TABLES NOUVELLES

DES DÉPRESSIONS DU MERCURE DANS LE BAROMÈTRE.

DUES A SA CAPILLARITÉ;

PAR M. BOUVARD.

Dans les Additions de la *Connaissance des Temps* de 1812, Laplace a inséré un Mémoire ⁽¹⁾ où il rappelle sa théorie des attractions moléculaires de la matière, d'après les lois des affinités décroissant avec une extrême rapidité, de manière à devenir insensibles aux plus petites distances perceptibles. Les formules qu'il a données sur la dépression du mercure, dans un tube de baromètre, me servirent alors pour calculer la Table qui est imprimée à la fin de ce Mémoire.

Quelques erreurs de transformation et d'impression s'étant introduites dans la Table, elle se trouve inexacte dans quelques parties. Aujourd'hui que de toute part l'on s'occupe avec zèle d'observations météorologiques, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de reprendre avec de nouveaux soins la formation d'une Table qui doit mettre les observateurs à même de rendre leurs baromètres comparables.

« Pour former cette Table, dit Laplace; il a fallu intégrer par approximation l'équation différentielle du second ordre de la surface du mercure dans un tube cylindrique de verre. Cette équation, que j'ai donnée dans ma *Théorie de l'action capillaire*, fournit une expression fort simple du rayon osculateur de la courbe génératrice de la surface. En considérant donc cette courbe comme une suite de petits arcs de cercle décrits avec ces divers rayons, et qui se touchent par leurs extré-

⁽¹⁾ *OEuvres de Laplace*, T. XIII, p. 71.

TABLES NOUVELLES DES DÉPRESSIONS, ETC. 335

mités, on aura les coordonnées de la courbe d'une manière d'autant plus précise que l'on aura divisé l'amplitude de la courbe dans un plus grand nombre de parties. Cette amplitude, à partir du sommet, est l'angle que le côté de la courbe fait avec l'horizon. » L'amplitude totale est de 52°, ou 46°48' de la division ordinaire. Cette quantité est donc la valeur de V qui entre dans les formules.

J'ai divisé cette amplitude en douze parties égales, et j'ai supposé la dépression du mercure dans le baromètre successivement égale à 5^{mm}, 0, 4^{mm}, 5, 4^{mm}, 0, 3^{mm}, 5, 3^{mm}, 0, 2^{mm}, 5, 2^{mm}, 0, 1^{mm}, 5, 1^{mm}, 2, 1^{mm}, 0. Ensuite, pour les dépressions à partir de 1^{mm} et au-dessous, on a fait varier la dépression de dixième en dixième jusqu'à 0^{mm}, 4; de 0^{mm}, 4, de 5 en 5 centièmes, et enfin, dans les deux dernières dépressions, on a supposé 0^{mm}, 06 et 0^{mm}, 63.

Voici maintenant les formules et les séries que j'ai employées; elles sont tirées du Mémoire que nous avons cité.

Soit $V^{(r)}$ l'inclinaison du côté de la courbe, à l'extrémité inférieure de la première division; soient $z^{(r)}$ et $u^{(r)}$ l'abscisse et l'ordonnée correspondant à la même extrémité; soient encore $b^{(r)}$ le rayon osculateur de la courbe au même point, et b ce même rayon au sommet de la courbe, l'équation différentielle donnera

$$\frac{1}{b^{(r)}} = \frac{2}{b} + 2\alpha z^{(r)} - \frac{\sin V^{(r)}}{u^{(r)}},$$

$$u^{(r+1)} = u^{(r)} + 2b^{(r)} \sin \frac{1}{2}(V^{(r+1)} - V^{(r)}) \cos \frac{1}{2}(V^{(r+1)} + V^{(r)}),$$

$$z^{(r+1)} = z^{(r)} + 2b^{(r)} \sin \frac{1}{2}(V^{(r+1)} - V^{(r)}) \sin \frac{1}{2}(V^{(r+1)} + V^{(r)});$$

la quantité α étant un coefficient constant égal à $\frac{2}{13}$, le millimètre étant pris pour unité. La dépression du mercure dans le baromètre est $\frac{1}{\alpha b} = n$, n étant la dépression supposée; d'où l'on tire $b = \frac{1}{\alpha n}$, quantité connue. Les séries suivantes sont employées pour déterminer les valeurs de z et V , qui sont nécessaires pour les dépressions

336 TABLES NOUVELLES DES DÉPRESSIONS DU MERCURE

au-dessous de 1^{mm} :

$$z = \frac{1}{2b} (2,8860566 u^2 + 3,1700532 u^4 + 5,1018673 u^6 + 8,7838040 u^8 + 10,2719206 u^{10}),$$

$$\text{tang } V = \frac{1}{2b} (1,1870866 u + 3,7721132 u^3 + 5,8800186 u^5 + 7,6868940 u^7 + 9,2719206 u^9);$$

les coefficients des puissances de u étant ici représentés par leurs logarithmes, pour la facilité du calcul; les chiffres surmontés d'une barre horizontale étant des caractéristiques négatives.

Dans les calculs de la dépression du mercure, au-dessus de 1^{mm}, on a supposé d'abord $V = 4^\circ$, et l'on a fait croître cet angle de 4° en 4° jusqu'à 40° ; le reste de l'amplitude a été divisé en deux parties, chacune de $3^\circ 24'$; et, pour les dépressions au-dessous de 1^{mm}, on a fait usage des deux séries précédentes, en choisissant pour u une valeur telle que V se soit trouvé exactement de 4° . Ensuite cet angle a été successivement augmenté de 2° en 2° jusqu'à 12° ; depuis 12° jusqu'à 40° , de 4° en 4° ; enfin de $3^\circ 24'$ deux fois de suite, jusqu'à $46^\circ 48'$.

Pour coordonner les résultats obtenus par cette méthode, dans une Table procédant suivant des accroissements égaux du diamètre du tube, Laplace fait observer que, dans ce cas, les différences des logarithmes des dépressions, divisées par les différences des diamètres des tubes, forment une suite de quotients qui varient avec beaucoup de lenteur. En désignant par a et a' les dépressions, par d et d' les diamètres correspondants, on trouve la formule

$$\frac{\log a - \log a'}{d - d'} = C = \text{const.}$$

Ensuite, soit x la dépression cherchée, correspondant à d_1 , diamètre du tube de la Table, on aura semblablement

$$\frac{\log a - \log x}{d_1 - d} = C,$$

DANS LE BAROMÈTRE, DUES A SA CAPILLARITÉ. 337

d'où l'on tire

$$\log x = \log a + (d - d_1)C.$$

C'est au moyen de la propriété précédente, et exprimée par cette formule, que j'ai formé la Table I, dans laquelle la première colonne contient les diamètres de demi-millimètre en demi-millimètre, depuis 21 jusqu'à 2; la deuxième colonne renferme les dépressions correspondantes; enfin la troisième les différences entre ces quantités, afin de rendre l'usage de cette Table plus commode dans la pratique.

L'utilité de cette Table est évidente; elle sert à réduire la colonne de mercure à sa véritable hauteur, quand le zéro de l'échelle du baromètre correspond d'ailleurs exactement à la sommité de la surface supérieure du mercure de la cuvette.

Les baromètres de Fortin ne réunissent pas toujours cette dernière condition; il est important de la vérifier. On sait que le zéro de l'échelle est marqué par la pointe d'une cheville que l'on met en contact avec la surface du mercure, et que cette cheville n'est en général placée par l'artiste qu'approximativement; l'erreur sur la hauteur absolue est donc variable pour chaque instrument, comme je m'en suis assuré, depuis quelque temps, par des expériences directes sur le baromètre de l'Observatoire. L'échelle de cet instrument ayant été vérifiée il y a quelques années par Arago, je n'ai pas eu besoin de m'en occuper de nouveau; mais en examinant avec attention la position du zéro, nous reconnûmes, M. Gambart et moi, que ce point de départ ne correspondait pas exactement à la partie la plus élevée de la surface du mercure dans la cuvette. L'erreur était sensible, et il devenait important d'avoir un procédé certain pour l'estimer. Nous en fîmes part à Laplace. Peu de temps après, ce savant lut au Bureau des Longitudes le Mémoire précédent, où l'on trouve des formules pour apprécier cette erreur, et à l'aide desquelles j'ai construit une Table qui fera connaître la place qu'on doit donner à la cheville, dans chaque baromètre, afin de détruire les effets de la capillarité dans le tube et dans la cuvette, qui sont de signes contraires.

En partant donc de ces formules, j'ai formé la Table II, dans laquelle



338 TABLES NOUVELLES DES DÉPRESSIONS DU MERCURE

on trouve, à la première colonne, le diamètre du tube du baromètre et, à la deuxième, la distance de la cheville à la paroi intérieure de la cuvette. Un exemple rendra facile l'usage de ces deux Tables pour toutes ces corrections.

Je suppose un baromètre dont le diamètre intérieur soit de $9^{\text{mm}},30$ et dont la distance de la cheville à la paroi soit de $4^{\text{mm}},50$.

Entrez dans la Table I avec $9^{\text{mm}},30$, diamètre du tube, vous trouverez $0^{\text{mm}},497$ pour la dépression du mercure. Cette quantité s'ajoute toujours à la hauteur observée du mercure dans le baromètre. Maintenant, pour trouver la correction dépendant de la position du zéro de l'échelle, cherchez dans la Table II le diamètre du tube correspondant à $4^{\text{mm}},50$, distance de la cheville à la paroi de la cuvette, on trouvera $13^{\text{mm}},55$. Enfin, avec $13^{\text{mm}},55$ pour argument, la Table I donne, pour dépression, $0^{\text{mm}},177$.

Cette quantité est l'erreur du zéro de l'échelle barométrique; elle est toujours soustractive de la dépression dans le tube; on aura donc $0^{\text{mm}},320$ pour la correction totale dépendant de la dépression et du zéro de l'échelle.

Pour compléter le système des corrections à faire aux observations barométriques, je donne ici la Table III, propre à réduire les hauteurs barométriques à zéro de température. Pour la former, j'ai pris dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* la différence des dilatations du mercure et du cuivre. Cette différence est égale à $-0,0001614$ pour 1°C . En désignant par h la hauteur du mercure du baromètre, et par n le nombre de degrés du thermomètre centigrade, la correction cherchée sera exprimée par la formule suivante :

$$\mp hn \times 0,0001614.$$

La Table III est construite en donnant à n toutes les valeurs depuis l'unité jusqu'à 30, et en faisant varier h de 5^{mm} en 5^{mm} , depuis 780 jusqu'à 700.

DANS LE BAROMÈTRE, DUES À SA CAPILLARITÉ. 339

TABLE I

DES DÉPRESSIONS DU MERCURE DANS LE BAROMÈTRE,
DUES À SA CAPILLARITÉ.

DIAMÈTRE intérieur du tube.	DÉPRESSION.	DIFFÉRENCES.	DIAMÈTRE intérieur du tube.	DÉPRESSION.	DIFFÉRENCES.
mm	mm	mm	mm	mm	mm
21,00	0,038	0,004	11,50	0,393	0,037
20,50	0,032	0,004	11,00	0,330	0,042
20,00	0,036	0,005	10,50	0,372	0,047
19,50	0,041	0,006	10,00	0,419	0,054
19,00	0,047	0,006	9,50	0,473	0,061
18,50	0,053	0,007	9,00	0,534	0,070
18,00	0,060	0,008	8,50	0,604	0,080
17,50	0,068	0,009	8,00	0,684	0,091
17,00	0,077	0,010	7,50	0,775	0,102
16,50	0,087	0,012	7,00	0,877	0,118
16,00	0,099	0,013	6,50	0,995	0,141
15,50	0,113	0,015	6,00	1,136	0,170
15,00	0,127	0,016	5,50	1,306	0,201
14,50	0,143	0,018	5,00	1,507	0,245
14,00	0,161	0,020	4,50	1,753	0,301
13,50	0,181	0,023	4,00	2,053	0,362
13,00	0,204	0,026	3,50	2,415	0,432
12,50	0,230	0,030	3,00	2,803	0,602
12,00	0,260	0,033	2,50	3,594	0,985
11,50	0,293		2,00	4,579	



340 TABLES NOUVELLES DES DÉPRESSIONS DU MERCURE

TABLE II

DE LA DISTANCE DE LA POINTE D'IVOIRE À LA SURFACE INTÉRIEURE DE LA CUVETTE,
POUR DÉTERMINER LA CAPILLARITÉ DÉPENDANT DU DIAMÈTRE INTÉRIEUR DU TUBE DU
BAROMÈTRE.

DIAMÈTRE Intérieur du tube.	DISTANCE DE LA POINTE à la paroi de la cuvette.	DIFFÉRENCES.
mm	mm	mm
20,0	22,43	2,83
19,5	19,60	2,40
19,0	17,20	2,05
18,5	15,15	1,78
18,0	13,37	1,58
17,5	11,79	1,40
17,0	10,39	1,23
16,5	9,16	1,07
16,0	8,09	0,93
15,5	7,16	0,81
15,0	6,35	0,71
14,5	5,64	0,64
14,0	5,00	0,55
13,5	4,45	0,49
13,0	3,96	0,44
12,5	3,52	0,39
12,0	3,13	0,35
11,5	2,78	0,31
11,0	2,47	0,27
10,5	2,20	0,24
10,0	1,96	0,21
9,5	1,75	0,18
9,0	1,57	0,16
8,5	1,41	0,14
8,0	1,27	0,12
7,5	1,15	0,11
7,0	1,04	

DANS LE BAROMÈTRE, DUES À SA CAPILLARITÉ. 341

TABLE III

POUR RÉDUIRE LES HAUTEURS BAROMÉTRIQUES À ZÉRO DE TEMPÉRATURE.

0.	780°	775°	770°	765°	760°	755°	750°	745°	740°	735°	730°	725°	720°	715°	710°	705°	700°
1	0,126	0,125	0,124	0,123	0,122	0,121	0,120	0,119	0,118	0,117	0,116	0,115	0,114	0,113	0,112	0,111	0,110
2	0,252	0,250	0,249	0,247	0,245	0,244	0,242	0,241	0,239	0,237	0,236	0,234	0,233	0,231	0,229	0,228	0,226
3	0,377	0,375	0,373	0,371	0,368	0,366	0,363	0,361	0,359	0,356	0,354	0,351	0,349	0,347	0,344	0,341	0,339
4	0,503	0,500	0,497	0,494	0,490	0,488	0,484	0,481	0,478	0,475	0,472	0,468	0,465	0,460	0,458	0,455	0,452
5	0,628	0,625	0,621	0,618	0,614	0,610	0,606	0,601	0,598	0,594	0,590	0,586	0,581	0,578	0,574	0,569	0,565
6	0,754	0,751	0,746	0,741	0,736	0,731	0,727	0,722	0,717	0,713	0,709	0,703	0,698	0,693	0,688	0,683	0,678
7	0,880	0,876	0,870	0,865	0,859	0,853	0,848	0,842	0,837	0,831	0,825	0,819	0,814	0,809	0,803	0,797	0,791
8	1,006	1,001	0,994	0,988	0,983	0,977	0,970	0,963	0,956	0,950	0,943	0,937	0,930	0,924	0,918	0,910	0,904
9	1,133	1,126	1,119	1,113	1,104	1,097	1,090	1,083	1,076	1,068	1,061	1,054	1,047	1,040	1,032	1,024	1,017
10	1,259	1,251	1,243	1,235	1,227	1,219	1,211	1,203	1,195	1,187	1,179	1,171	1,163	1,155	1,147	1,138	1,130
11	1,385	1,376	1,367	1,359	1,350	1,341	1,332	1,323	1,315	1,306	1,297	1,288	1,279	1,271	1,262	1,253	1,243
12	1,511	1,501	1,491	1,482	1,472	1,463	1,453	1,444	1,435	1,424	1,415	1,405	1,396	1,386	1,376	1,366	1,356
13	1,636	1,626	1,616	1,606	1,595	1,585	1,575	1,565	1,554	1,543	1,533	1,522	1,512	1,501	1,491	1,479	1,469
14	1,761	1,751	1,740	1,729	1,718	1,707	1,695	1,684	1,673	1,661	1,650	1,638	1,627	1,616	1,604	1,592	1,581
15	1,886	1,875	1,863	1,852	1,841	1,830	1,818	1,806	1,795	1,783	1,771	1,759	1,747	1,735	1,723	1,711	1,699
16	2,011	2,000	1,988	1,976	1,963	1,951	1,938	1,925	1,913	1,899	1,886	1,874	1,861	1,848	1,835	1,821	1,808
17	2,136	2,124	2,111	2,100	2,086	2,073	2,059	2,045	2,032	2,018	2,004	1,991	1,977	1,964	1,950	1,934	1,921
18	2,261	2,248	2,235	2,223	2,209	2,194	2,180	2,165	2,151	2,137	2,122	2,108	2,093	2,079	2,065	2,048	2,034
19	2,386	2,372	2,359	2,345	2,331	2,316	2,301	2,286	2,271	2,255	2,240	2,225	2,210	2,195	2,179	2,162	2,147
20	2,511	2,500	2,486	2,470	2,454	2,438	2,422	2,406	2,390	2,374	2,358	2,342	2,326	2,310	2,294	2,276	2,260
21	2,636	2,624	2,610	2,594	2,577	2,560	2,543	2,526	2,510	2,493	2,476	2,459	2,442	2,426	2,409	2,390	2,373
22	2,761	2,748	2,734	2,717	2,699	2,682	2,664	2,646	2,628	2,611	2,594	2,576	2,559	2,541	2,523	2,505	2,486
23	2,886	2,872	2,858	2,841	2,823	2,806	2,788	2,769	2,751	2,733	2,715	2,697	2,679	2,661	2,643	2,624	2,605
24	3,011	3,000	2,986	2,969	2,951	2,933	2,915	2,896	2,878	2,860	2,842	2,824	2,806	2,788	2,769	2,751	2,733
25	3,136	3,124	3,109	3,092	3,074	3,056	3,038	3,020	3,002	2,984	2,966	2,948	2,930	2,912	2,894	2,875	2,857
26	3,261	3,248	3,233	3,215	3,197	3,179	3,161	3,143	3,125	3,107	3,089	3,071	3,053	3,035	3,017	2,998	2,979
27	3,386	3,372	3,357	3,339	3,321	3,303	3,285	3,267	3,249	3,231	3,213	3,195	3,177	3,159	3,141	3,123	3,105
28	3,511	3,500	3,486	3,468	3,450	3,432	3,414	3,396	3,378	3,360	3,342	3,324	3,306	3,288	3,270	3,252	3,234
29	3,636	3,624	3,609	3,592	3,574	3,556	3,538	3,520	3,502	3,484	3,466	3,448	3,430	3,412	3,394	3,376	3,358
30	3,761	3,748	3,734	3,717	3,699	3,682	3,664	3,646	3,628	3,611	3,594	3,576	3,559	3,541	3,523	3,505	3,486

0,1..... 0,012 0,4..... 0,050 0,7..... 0,088
0,2..... 0,025 0,5..... 0,092 0,8..... 0,100
0,3..... 0,037 0,6..... 0,095 0,9..... 0,113

La correction est soustractive pour les degrés du thermomètre au-dessus de zéro
et positive au-dessous de zéro de température.

MÉMOIRE
SUR
LE FLUX ET REFLUX LUNAIRE ATMOSPHÉRIQUE.

Connaissance des Temps pour l'an 1830; 1827.

J'ai donné à la fin du Livre XIII de mon *Traité de Mécanique céleste* ⁽¹⁾ la théorie du flux et reflux lunaire atmosphérique. J'ai conclu les éléments de ce phénomène d'une longue suite d'observations du baromètre, faites à l'Observatoire royal pendant sept années consécutives, chaque jour à 9^h du matin, à midi, et le soir à 3^h et à 9^h. L'ensemble de ces observations, réduites par M. Bouvard à zéro de température, a donné $\frac{2.1}{1000}$ de millimètre pour l'étendue entière du flux lunaire, depuis son maximum jusqu'à son minimum, et 3^h 19^m sexagésimales pour l'heure de son maximum du soir, le jour de la syzygie. Mais j'ai reconnu par le calcul des probabilités que cette heure, et l'existence même du phénomène sensible à Paris, n'ont qu'un faible degré de probabilité. Le système d'observations, suivi à l'Observatoire royal, déjà adopté dans quelques autres Observatoires, et que l'on doit désirer de voir répandu généralement, est dû à M. Ramond, qui l'a employé dans les nombreuses observations qu'il a faites à Clermont, chef-lieu du département du Puy-de-Dôme. Il l'a exposé, ainsi que les résultats qu'il en a déduits sur la variation diurne du baromètre, dans plusieurs Mémoires lus à l'Institut, et qui peuvent être regardés comme une des choses les plus intéressantes que l'on ait faites en Météorologie.

(1) *Œuvres de Laplace*, T. V, p. 263.

MÉMOIRE SUR LE FLUX ET REFLUX LUNAIRE, ETC. 343

M. Bouvard a confirmé ces résultats, dans ses recherches qu'il vient de perfectionner en ajoutant quatre années d'observations à celles des sept années qu'il avait considérées, et en discutant avec une attention scrupuleuse les observations de ces onze années, dans la réduction desquelles il a eu égard à la dilatation de l'échelle du baromètre.

Ce travail immense m'a fait reprendre ma théorie du flux lunaire atmosphérique. J'ai déterminé avec un soin spécial les facteurs par lesquels on doit multiplier les diverses équations de condition, pour obtenir les résultats les plus avantageux, dans lesquels l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins est un minimum. Ces facteurs ne sont point ceux que donne le procédé connu sous le nom de *méthode des moindres carrés*, procédé qui n'est qu'un cas particulier de la méthode la plus avantageuse, et dont il diffère dans la plupart des questions où il a été employé. En effet, lorsqu'il s'agit, par exemple, de corriger les éléments elliptiques du mouvement des planètes, on forme des équations de condition, en égalant chaque longitude observée à la longitude calculée par ces éléments augmentés chacun de sa correction. On forme ainsi un grand nombre d'équations de condition. Ensuite on multiplie chacune d'elles par le coefficient de la première correction, et l'on ajoute toutes ces équations ainsi multipliées, ce qui donne une première équation finale. En opérant de la même manière, relativement à la deuxième correction, à la troisième, etc., on forme autant d'équations finales qu'il y a de corrections que l'on détermine en résolvant ces équations. Mais la longitude n'est point le résultat d'une observation directe; elle est déduite de deux observations faites avec des instruments différents, dont l'un donne l'ascension droite de l'astre, et dont l'autre donne sa déclinaison. La loi de probabilité des erreurs de chacun de ces instruments peut n'être pas la même; de plus, ces erreurs ont, suivant la position de l'astre, une influence différente sur la longitude. La méthode des moindres carrés, dont plusieurs géomètres ont donné des preuves très peu satisfaisantes, ne donne point ici les facteurs les plus avantageux; elle n'a plus que l'avantage d'offrir un moyen régulier de former les équations finales. J'ai présenté, dans le troisième

Supplément à ma *Théorie analytique des probabilités* ⁽¹⁾, l'expression générale des facteurs les plus avantageux.

M. Bouvard, ayant appliqué mes formules à toutes les observations qu'il a considérées, en a conclu que l'étendue entière du flux lunaire est de $\frac{16}{1780}$ de millimètre, et que l'heure du plein flux lunaire, le soir du jour de la syzygie, est 2^h 8^m. Ces nouveaux résultats sont différents des premiers; mais, quoiqu'ils soient fondés sur 298 syzygies et autant de quadratures, dans chacune desquelles on a considéré le deuxième et le premier jour avant la phase, le jour même de la phase et les deux jours suivants, ils n'ont cependant qu'un faible degré de probabilité, en sorte que l'on doit, jusqu'ici, regarder comme incertaine l'existence sensible à Paris du flux lunaire atmosphérique. Le même nombre d'observations faites avec le même soin à l'équateur, et discuté de la même manière, indiquerait ce phénomène avec une grande probabilité. Il est vraisemblable que de pareilles observations faites dans un port où les marées sont très grandes, tel que celui de Saint-Malo, manifesteraient le flux atmosphérique produit par l'élévation et par la dépression de l'atmosphère, dues à l'élévation et à la dépression alternatives de la surface de la mer.

M. Ramond a remarqué le premier que la variation diurne du baromètre, de 9^h du matin à 3^h du soir, n'était pas la même dans toutes les saisons; M. Bouvard a confirmé ce résultat. Il a trouvé : 1° la variation moyenne des trois mois de novembre, décembre et janvier, égale à 0^{mm},557; 2° celle des trois mois suivants égale à 0^{mm},940; 3° celle des trois mois de mai, juin et juillet égale à 0^{mm},752; 4° celle des trois autres mois égale à 0^{mm},802; ce qui donne 0^{mm},763 pour la variation de l'année entière. Ces différences dépendent-elles des anomalies du hasard, ou indiquent-elles des causes régulières? c'est ce que le calcul des probabilités peut seul faire connaître. Il était donc intéressant de l'appliquer à cet objet. J'ai trouvé qu'il y a une très grande probabilité que des causes régulières ont produit le minimum 0^{mm},557 de la

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. VII, p. 608.

variation, et son *maximum* 0^{mm},940; mais que les différences entre les variations 0^{mm},752, 0^{mm},802 et la moyenne 0^{mm},763 de l'année, peuvent sans invraisemblance être attribuées aux anomalies du hasard.

Les 132 mois d'observations que M. Bouvard a discutées pour avoir la variation diurne du baromètre présentent ce phénomène remarquable, savoir, que la variation moyenne de 9^h du matin à 3^h du soir a été positive pour chacun de ces mois. Je trouve, par le calcul des probabilités, que ce phénomène, loin d'être extraordinaire, est *a priori* vraisemblable.

I. Je nomme λ l'heure sexagésimale du flux et reflux lunaire atmosphérique du soir, le jour de la syzygie supposée arriver à midi, cette heure étant convertie en arc, à raison de la circonférence pour un jour. Je nomme R la hauteur du baromètre, au-dessus de sa hauteur moyenne, au moment du flux, produite par l'action de la Lune sur l'atmosphère. Je fais

$$4R \sin 2\lambda = x, \quad 4R \cos 2\lambda = y.$$

Soient A_i, A'_i, A''_i les hauteurs observées du baromètre, à 9^h sexagésimales du matin, à midi et à 3^h du soir, le jour $i^{\text{ème}}$, à partir de la syzygie, i étant nul pour le jour de la syzygie, positif pour les jours qui le suivent et négatif pour les jours qui le précèdent. Soient pareillement B_i, B'_i, B''_i les hauteurs observées du baromètre, à 9^h du matin, midi et 3^h du soir, le jour $i^{\text{ème}}$ à partir de la quadrature. Je suis parvenu, dans le Chapitre VII du Livre XIII de la *Mécanique céleste* ⁽¹⁾, aux deux équations suivantes :

$$(o) \quad \begin{cases} x \cos 2iq + y \sin 2iq = E_i, \\ y \cos 2iq - x \sin 2iq = F_i, \end{cases}$$

dans lesquelles q est le moyen mouvement synodique de la Lune dans un jour, et l'on a

$$\begin{aligned} E_i &= A''_i - A_i + B_i - B''_i, \\ F_i &= (2A'_i - A_i - A''_i - 2B'_i + B_i + B''_i) \left(1 + \frac{1}{19}\right); \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. VI, p. 264.

les équations (o) donnent

$$(u) \quad x = E_i \cos 2iq - F_i \sin 2iq;$$

on peut former autant d'équations semblables qu'il y a de syzygies et que i a de valeurs. En nommant donc n le nombre de syzygies, n étant un grand nombre; en nommant s' le nombre des valeurs de i , on aura ns' valeurs de x ; d'où il faut conclure la valeur la plus avantageuse, c'est-à-dire celle dans laquelle l'erreur moyenne à craindre, en plus ou en moins, est la plus petite.

On doit pour cela multiplier chacune des ns' équations que représente l'équation (u) par un facteur convenable. J'ai fait voir [p. 32 du troisième Supplément à ma *Théorie analytique des probabilités* ⁽¹⁾] que, si l'on a entre les éléments $x, y, z, \dots$ un grand nombre d'équations de condition représentées par la suivante :

$$(i) \quad E^{(i)}x + p^{(i)}y + q^{(i)}z + \dots = a^{(i)} + m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + r^{(i)}\delta^{(i)} + \dots,$$

le facteur le plus avantageux par lequel cette équation doit être multipliée est

$$\frac{1}{\frac{k^2}{k} m^{(i)2} + \frac{k^2}{k} n^{(i)2} + \frac{k^2}{k} r^{(i)2} + \dots},$$

$kk^2, \bar{k}\bar{k}^2, \dots$ dépendant des lois de probabilité des erreurs $\gamma^{(i)}, \lambda^{(i)}, \dots$ de la manière suivante : si $\varphi(\gamma^{(i)})$ est la loi de probabilité de l'erreur $\gamma^{(i)}$, cette loi étant supposée la même pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives, on a

$$k = 2 \int d\gamma^{(i)} \varphi(\gamma^{(i)}), \quad k^2 = \int d\gamma^{(i)} \gamma^{(i)2} \varphi(\gamma^{(i)}),$$

les intégrales étant prises depuis zéro jusqu'à l'infini : pareillement, si $\psi(\lambda^{(i)})$ est la loi de probabilité des erreurs $\lambda^{(i)}$, on a

$$\bar{k} = 2 \int d\lambda^{(i)} \psi(\lambda^{(i)}), \quad \bar{k}^2 = \int d\lambda^{(i)} \lambda^{(i)2} \psi(\lambda^{(i)}).$$

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, T. VII, p. 612.

et ainsi du reste. Dans la question présente $\gamma^{(i)}, \lambda^{(i)}, \dots$ sont les erreurs des observations désignées par les lettres $A_i^{(i)}, A_i'^{(i)}, A_i''^{(i)}, B_i^{(i)}, \dots$, observations qui se rapportent au $i^{\text{ème}}$ jour depuis la $s^{\text{ème}}$ syzygie. La loi des erreurs des observations étant supposée la même pour toutes ces observations, on aura

$$k = \bar{k} = \dots, \quad k^2 = \bar{k}^2 = \dots;$$

le facteur précédent deviendra donc

$$\frac{1}{\frac{k^2}{k} (m^{(i)2} + n^{(i)2} + r^{(i)2} + \dots)}.$$

En désignant par $\gamma_i^{(i)}, \lambda_i^{(i)}, \delta_i^{(i)}, \gamma_i'^{(i)}, \lambda_i'^{(i)}, \delta_i'^{(i)}$ les erreurs des observations $A_i^{(i)}, A_i'^{(i)}, A_i''^{(i)}, B_i^{(i)}, B_i'^{(i)}, B_i''^{(i)}$; et par $\bar{m}^{(i)}, \bar{n}^{(i)}, \bar{r}^{(i)}$, relativement aux trois dernières de ces observations, ce que représentent $m^{(i)}, n^{(i)}, r^{(i)}$, relativement aux trois premières, on aura

$$m^{(i)} = -\cos 2iq + \left(1 + \frac{1}{19}\right) \sin 2iq,$$

$$n^{(i)} = -2 \left(1 + \frac{1}{19}\right) \sin 2iq,$$

$$r^{(i)} = \cos 2iq + \left(1 + \frac{1}{19}\right) \sin 2iq,$$

$$\bar{m}^{(i)} = -m^{(i)}, \quad \bar{n}^{(i)} = -n^{(i)}, \quad \bar{r}^{(i)} = -r^{(i)};$$

le facteur précédent devient ainsi

$$\frac{1}{\frac{4k^2}{k} (1 + 2,324 \sin^2 2iq)}.$$

En réunissant toutes les valeurs de x , multipliées par ce facteur, on aura

$$\frac{x}{1 + 2,324 \sin^2 2iq} = \frac{\cos 2iq \frac{SE_i^{(i)}}{n} - \sin 2iq \frac{SF_i^{(i)}}{n}}{1 + 2,324 \sin^2 2iq},$$

$E_i^{(i)}$ et $F_i^{(i)}$ étant les valeurs de E_i et de F_i relatives à la $s^{\text{ème}}$ syzygie et

à la *sième* quadrature à laquelle on la compare. Le signe S indiquant la somme des quantités qu'il précède, pour toutes les syzygies dont le nombre est n , $\frac{SE_i^n}{n}$ et $\frac{SF_i^n}{n}$ seront donc les moyennes des valeurs de E_i^n et F_i^n , moyennes que l'on obtiendra en substituant dans les expressions de E_i et de F_i , au lieu de $A_i, A'_i, A''_i, B_i, \dots$, leurs valeurs moyennes. L'équation précédente deviendra ainsi

$$\frac{x}{1 + 2,324 \sin^2 2iq} = \frac{E_i \cos 2iq - F_i \sin 2iq}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}.$$

Cette équation produit autant d'équations que i a de valeurs. Si l'on réunit ces équations on aura

$$x \sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq} = \sum \left(\frac{E_i \cos 2iq - F_i \sin 2iq}{1 + 2,324 \sin^2 2iq} \right);$$

le signe $\sum$ exprimant la somme des valeurs du terme qu'il précède, on aura ainsi, pour la valeur de x la plus avantageuse,

$$x = \frac{\sum \left(\frac{E_i \cos 2iq - F_i \sin 2iq}{1 + 2,324 \sin^2 2iq} \right)}{\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}};$$

les équations (o) donnent

$$y = F_i \cos 2iq + E_i \sin 2iq.$$

On aura donc la valeur de y la plus avantageuse en changeant, dans l'expression précédente de x , $\cos 2iq$ dans $\sin 2iq$, et $\sin 2iq$ dans $-\cos 2iq$, ce qui donne

$$y = \frac{\sum \left(\frac{E_i \sin 2iq + F_i \cos 2iq}{1 + 2,324 \cos^2 2iq} \right)}{\sum \frac{1}{1 + 2,324 \cos^2 2iq}}.$$

M. Bouvard a conclu de ces formules

$$x = 0,031758, \quad y = 0,01534,$$

et l'étendue entière $2R$ du flux lunaire atmosphérique égale à 0,01763.

II. Je vais présentement déterminer la loi de probabilité des erreurs de ces deux valeurs de x et de y . Il résulte des formules que j'ai données dans ma *Théorie analytique des probabilités* (*), que si $\gamma, \lambda, \delta, \dots$ sont des erreurs indépendantes, mais assujetties à la même loi de probabilité, la probabilité que l'erreur de la fonction

$$m\gamma + n\lambda + r\delta + \dots$$

sera égale à une quantité quelconque l est proportionnelle à l'exponentielle

$$\frac{-l^2}{c^2},$$

H étant la somme des carrés de $m, n, r, \dots$, et c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Si, dans la valeur précédente de x , on désigne par γ, λ, δ les erreurs des observations $A_i^{(n)}, A'_i^{(n)}, A''_i^{(n)}$, il est facile de voir que les coefficients de ces erreurs sont

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + \frac{1}{19} \right) \sin 2iq - \cos 2iq \right] \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}, \\ & n \sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}, \\ & -2 \left(1 + \frac{1}{19} \right) \sin 2iq \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}, \\ & n \sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}, \\ & \left[\left(1 + \frac{1}{19} \right) \sin 2iq + \cos 2iq \right] \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}, \\ & n \sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}. \end{aligned}$$

La somme des carrés de ces coefficients est

$$\frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq} \frac{1}{n^2} \left(\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq} \right).$$

La somme des carrés des coefficients des erreurs des observations $B_i^{(n)}$,

(*) *Oeuvres de Laplace*, T. VII, p. 322 ou 610.

$B_i^{(n)}$, $B_i^{(n)}$ est égale à la précédente. En ajoutant donc ces deux sommes, on aura

$$4 \frac{1}{1+2,324 \sin^2 2iq} \frac{1}{n^2 \left(\sum \frac{1}{1+2,324 \sin^2 2iq} \right)^2}.$$

Chaque syzygie fournit une quantité semblable; la somme de toutes ces quantités sera donc, pour les n syzygies, la quantité précédente multipliée par le nombre n de syzygies. Cette somme sera donc, relativement à toutes les syzygies, et relativement à toutes les valeurs de i , c'est-à-dire relativement à toutes les observations,

$$\frac{4}{n \sum \frac{1}{1+2,324 \sin^2 2iq}}.$$

Ainsi la probabilité que l sera l'erreur de x peut être supposée égale à

$$\frac{-\frac{n}{H} \sum \frac{1}{1+2,324 \sin^2 2iq}}{Hc},$$

H étant une constante qu'il faut déterminer. Pour cela, j'observe que si l'on intègre cette différentielle depuis $l = -\infty$ jusqu'à $l = \infty$, l'intégrale doit être l'unité, puisqu'il est certain que la valeur de l est comprise dans ces limites; en faisant donc

$$g^2 = \frac{nk}{16k^2} \sum \frac{1}{1+2,324 \sin^2 2iq},$$

on doit avoir

$$H \int_{-\infty}^{+\infty} dl e^{-g^2 l^2} = 1.$$

Mais on a, par un théorème connu,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g dl e^{-g^2 l^2} = \sqrt{\pi},$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité; on a donc

$$H = \frac{g}{\sqrt{\pi}}.$$

Ainsi la probabilité que l'erreur de la valeur de x sera comprise dans des limites données est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int g dl e^{-g^2 l^2},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites.

On trouvera de la même manière que la probabilité que l'erreur de la valeur de y sera comprise dans les limites données est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int g' dl e^{-g'^2 l^2},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites, et g'^2 étant égal à

$$\frac{nk}{16k'^2} \sum \frac{1}{1+2,324 \cos^2 2iq}.$$

Il faut maintenant déterminer par les observations la valeur numérique de $\frac{k}{k'}$. Pour cela, j'observe que par ma *Théorie analytique des probabilités* ⁽¹⁾, si l'on nomme c la somme des carrés des différences des variations journalières de g^h du matin à 3^h du soir, d'un grand nombre s de jours à leur variation moyenne, on a, avec une très grande vraisemblance,

$$\frac{2k^2}{k} s = c,$$

ce qui donne

$$\frac{k}{k^2} = \frac{cs}{c}.$$

Le calcul de $\frac{k}{k^2}$ devient pénible lorsque s est très considérable; mais on peut le simplifier de la manière suivante :

Je conçois le nombre s de jours partagé en groupes de jours, par exemple, dans un nombre i de mois moyens, et je suppose s assez grand pour que i soit lui-même un grand nombre. Je désigne par $\bar{k}$ et $\bar{k}'$, relativement à ces mois, ce que j'ai nommé k et k' relativement aux jours. Soit encore E la somme des carrés des différences des erreurs des varia-

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. VII, p. 317.



tions moyennes de chacun de ces mois, à la variation moyenne de tous ces mois. On aura par ce qui précède

$$\frac{\bar{k}}{k^2} = \frac{2i}{E}.$$

Mais la probabilité de l'erreur u de la variation moyenne de tous ces jours, ou de tous ces mois, est, par la théorie citée, proportionnelle à l'exponentielle

$$\frac{-2u^2}{c^2 \frac{1}{k^2}}.$$

Elle est encore proportionnelle à l'exponentielle

$$\frac{-2u^2}{c^2 \frac{1}{k^2}}.$$

En comparant ces exponentielles on aura

$$\frac{k}{k^2} = \frac{i}{s} \frac{\bar{k}}{k^2} = \frac{2i^2}{sE}.$$

Le calcul de E est beaucoup plus simple que celui de c , et c'est ainsi que la valeur numérique de $\frac{k}{k^2}$ a été déterminée. Il y avait pour cela quelques précautions à prendre. La variation diurne du baromètre n'est pas la même à Paris, dans tous les mois; elle est la plus petite dans ceux de novembre, décembre et janvier, et la plus grande dans les trois mois suivants. Dans les six autres mois, elle diffère peu de la variation moyenne de l'année. Il y a donc des causes régulières de ces phénomènes, et que l'on ne doit pas confondre avec les causes irrégulières de la variation diurne. Les causes régulières agissant de la même manière sur la variation des syzygies et sur celle des quadratures, elles n'influent point sur les valeurs de x et de y , qui ne dépendent que des différences de ces variations; les valeurs de E_i et de F_i ne dépendent que de ces différences. Il faut donc, pour avoir la loi de probabilité des erreurs dont ces valeurs sont susceptibles, ne considérer que les varia-

tions diurnes dépendant des seules causes irrégulières et qui paraissent être celles des mois de mai, juin, juillet, août, septembre et octobre; ce sont celles dont on a fait usage pour avoir la valeur de $\frac{k}{k^2}$. On a trouvé ainsi, en prenant le millimètre carré pour unité, $E = 2,565118$; d'où l'on tire

$$\frac{k}{k^2} = 4.0,42884.$$

On a ensuite

$$\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq} = 3,29667,$$

$$\sum \frac{1}{1 + 2,324 \cos^2 2iq} = 1,97904.$$

Pour déterminer le flux lunaire, j'observe que l'on a $n = 298$, d'où l'on tire

$$g^2 = 3,29667.298.0,42884 \frac{1}{4},$$

$$g'^2 = 1,97904.298.0,42884 \frac{1}{4},$$

et, en supposant que la valeur de x soit le résultat des causes accidentelles, la probabilité qu'elle sera comprise dans les limites $\pm 0,031758$ sera

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int g dt e^{-t^2 n},$$

l'intégrale étant prise relativement à t , dans ces mêmes limites. On trouve, au moyen des données précédentes, 0,3617 pour cette probabilité. Si cette probabilité était fort approchante de l'unité, elle indiquerait avec une grande vraisemblance que la valeur de x n'est pas due aux seules anomalies du hasard, et qu'elle est en partie l'effet d'une cause constante qui ne peut être que l'action de la Lune sur l'atmosphère. Mais la différence considérable entre cette probabilité et la certitude représentée par l'unité montre que, malgré le très grand nombre d'observations employées, cette action n'est indiquée qu'avec une faible vraisemblance, en sorte que l'on peut regarder son existence sensible à Paris comme incertaine. La valeur de y , considérée de la même manière, donne encore plus d'incertitude sur cette existence.

III. Je vais soumettre au calcul des probabilités quelques singularités que la variation diurne du baromètre a présentées à M. Bouvard. Ce savant astronome a trouvé, par onze années d'observations barométriques faites tous les jours à 9^h du matin et à 3^h du soir, que la variation moyenne diurne du baromètre dans cet intervalle a été 0^{mm},557 pour les trois mois de novembre, décembre et janvier; 0^{mm},940 pour les trois mois de février, mars et avril; 0^{mm},752 pour les trois mois de mai, juin et juillet; enfin, 0^{mm},802 pour les trois mois d'août, septembre et octobre. Il a trouvé 0^{mm},763 pour la variation moyenne de l'année. Déterminons la probabilité des différences de ces variations en les supposant dues aux anomalies du hasard.

Si l'on nomme u l'erreur de la variation conclue par une moyenne de onze années ou de cent trente-deux mois, la probabilité de cette erreur sera proportionnelle à

$$\frac{-112\frac{1}{2}}{C} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{u^2},$$

comme il est facile de s'en assurer par le n° 20 du deuxième Livre de ma *Théorie analytique des probabilités*. Pareillement, si l'on nomme u' l'erreur de la variation conclue par une moyenne des mois de février, mars et avril pendant onze années, la probabilité de u' sera proportionnelle à

$$\frac{-31\frac{1}{2}}{C} \frac{e^{-\frac{1}{2}u'^2}}{u'^2};$$

la probabilité de l'existence simultanée de u et de u' sera donc proportionnelle à

$$\frac{-32\frac{1}{2}}{C} \frac{e^{-\frac{1}{2}(u^2 + u'^2)}}{(u^2 + u'^2)},$$

soit $u' = u + z$; la probabilité de l'existence simultanée de u et de z sera ainsi proportionnelle à

$$\frac{-32\frac{1}{2}}{C} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[u^2 + \left(u + \frac{1}{2}z\right)^2 + z^2\right]}}{[u^2 + \left(u + \frac{1}{2}z\right)^2 + z^2]}.$$

En multipliant cette exponentielle par du et intégrant le produit depuis $u = -\infty$ jusqu'à $u = \infty$, on aura une quantité proportionnelle à

la probabilité de la valeur de z correspondant à l'ensemble de toutes les valeurs de u , et cette exponentielle sera proportionnelle à

$$\frac{-32\frac{1}{2}}{C} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{z^2}.$$

En faisant donc

$$h^2 = \frac{32\frac{1}{2}}{C} \frac{4}{5},$$

la probabilité que la valeur de z sera comprise dans des limites données est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int h dz e^{-h^2 z^2},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites. Par les observations précédentes, z est égale à 0^{mm},940 — 0^{mm},763 ou à 0^{mm},177; ainsi la probabilité que z est au-dessous de 0^{mm},177 est

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,177h} dt e^{-t^2}.$$

On a, par le n° 44 de ma *Théorie analytique des probabilités* ⁽¹⁾,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt e^{-t^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1,3}{2^2T^4} - \frac{1,3,5}{2^3T^6} + \dots \right),$$

et la série a l'avantage de donner une valeur alternativement plus grande et plus petite, suivant que l'on s'arrête à un nombre pair ou impair de ses termes.

Si l'on fait $\frac{1}{2T^2} = q$, la série $1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1,3}{2^2T^4} - \dots$ peut être mise sous la forme suivante de fraction continue

$$\frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 + \frac{3q}{1 + \frac{4q}{1 + \dots}}}}}$$

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. VII, p. 178.

ici l'on a

$$T = 0,177h, \quad h^2 = 33 \frac{\bar{k}}{4k^2} \frac{4}{5},$$

et l'on a, par le numéro précédent,

$$\frac{\bar{k}}{4k^2} = 30 \frac{k}{4k^2} = 30.0,42884 = 12,8652;$$

on a donc

$$T^2 = (0,177)^2 26,4.12,8652;$$

c'est le logarithme hyperbolique de e^T , et, pour avoir le logarithme tabulaire de cette exponentielle, il faut le multiplier par 0,434294. On trouvera ainsi, à fort peu près,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T dt e^{-t^2} = 0,000001984;$$

en retranchant ce nombre de l'unité on aura la probabilité que l'excès de la variation diurne observée pendant les trois mois de février, mars et avril, et pendant onze années, sur la variation moyenne de onze années, serait moindre que $0^{\text{mm}},177$, s'il était dû aux simples anomalies du hasard. L'excès observé indique donc, avec une extrême vraisemblance, une cause constante, qui augmente à Paris la variation diurne du baromètre pendant les trois mois cités.

On trouve de la même manière que l'excès $0^{\text{mm}},206$, de la variation moyenne de l'année, sur la variation moyenne des trois mois de novembre, décembre et janvier, indique, avec une vraisemblance encore plus grande, une cause constante, qui diminue la variation diurne pendant ces mois.

Enfin, on trouve que les différences observées entre la variation moyenne de l'année et les variations moyennes, soit des trois mois de mai, juin et juillet, soit des trois mois d'août, de septembre et octobre, peuvent sans invraisemblance être attribuées aux seules anomalies du hasard.

Les observations de la variation diurne du baromètre, de 9^h du matin à 3^h du soir, discutées par M. Bouvard, présentent ce phénomène re-

marquable, savoir que la variation moyenne de chacun des cent trente-deux mois qu'il a considérés a été positive. Pour apprécier la probabilité de ce phénomène, je supposerai que la variation moyenne des trois mois de novembre, décembre et janvier serait, indépendamment des anomalies du hasard, et par l'effet des seules causes régulières, celle que M. Bouvard a conclue de onze années d'observations, savoir $0^{\text{mm}},557$. Je ferai une supposition semblable relativement à la variation des trois mois suivants : février, mars et avril, et qui a été trouvée de $0^{\text{mm}},940$. Enfin, je supposerai que la variation moyenne des six autres mois, qui ne paraît être soumise qu'à l'action des causes accidentelles, est celle que l'on a trouvée pour l'année entière, savoir $0^{\text{mm}},763$. Cela posé, si l'on nomme u l'erreur de la variation d'un mois, due aux seules causes accidentelles, la probabilité de cette erreur sera, par ce qui précède, proportionnelle à $e^{-12,8652u^2}$. D'où il est facile de conclure que la probabilité que u ne sera pas au-dessous de $-0^{\text{mm}},557$ sera

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T dt e^{-t^2},$$

en supposant

$$t^2 = 12,8652 u^2,$$

et l'intégrale étant prise depuis $t = 0^{\text{mm}},557 \sqrt{12,8652}$ jusqu'à $t = \infty$.

La probabilité qu'aucun des trois mois de novembre, décembre et janvier n'aura de variation négative, ou que l'erreur négative de u n'atteindra jamais $-0^{\text{mm}},557$, sera

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T dt e^{-t^2}\right)^3,$$

et celle que le même résultat aura lieu pendant onze années sera

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T dt e^{-t^2}\right)^{33}.$$

On trouvera de la même manière que la probabilité semblable relative aux trois mois de février, mars et avril est

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T dt e^{-t^2}\right)^{21}.$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0^{\text{mm}},940\sqrt{12,8652}$ jusqu'à $t = \infty$. Enfin, on trouvera que la probabilité semblable relative aux six autres mois est

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dt e^{-t^2}\right)^{66},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0^{\text{mm}},763\sqrt{12,8652}$ jusqu'à $t = \infty$.

Le produit de ces trois probabilités est la probabilité du phénomène observé, que l'on trouve ainsi à peu près égale à 0,9, en sorte que, loin de présenter une chose invraisemblable, il est lui-même vraisemblable.

J'ai supposé dans tous ces résultats tous les mois égaux et de trente jours. On leur donnerait plus d'exactitude en y introduisant l'inégalité des mois, ce qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul. Mais comme il suffit que ces résultats soient approchés pour que nos conclusions soient justes, soit relativement à l'existence des causes régulières qui produisent le maximum et le minimum de la variation, soit relativement à la vraisemblance du phénomène suivant lequel les cent trente-deux mois ont donné une variation diurne positive, on peut se dispenser de ce calcul.

FIN DU TOME TREIZIEME.



