



MÉMOIRE
SUR LES
MOUVEMENTS DE LA LUMIÈRE
DANS
LES MILIEUX DIAPHANES.

MÉMOIRE
SUR LES
MOUVEMENTS DE LA LUMIÈRE
DANS
LES MILIEUX DIAPHANES ⁽¹⁾.

Mémoires de l'Académie des Sciences, 1^{re} Série, Tome X; 1810.

La lumière, en passant de l'air dans un milieu transparent non cristallisé, se réfracte de manière que les sinus de réfraction et d'incidence sont constamment dans le même rapport; mais, lorsqu'elle traverse la plupart des cristaux diaphanes, elle présente un singulier phénomène qui fut d'abord observé dans le cristal d'Islande, où il est très sensible.

Un rayon qui tombe perpendiculairement sur une face d'un rhomboïde naturel de ce cristal se divise en deux faisceaux : l'un traverse le cristal sans changer de direction; l'autre s'en écarte dans un plan parallèle au plan mené perpendiculairement à la face, par l'axe du cristal, c'est-à-dire par la ligne qui joint les deux angles solides obtus de ce rhomboïde, et qui, par conséquent, est également inclinée aux côtés de ces angles : le faisceau réfracté s'éloigne de l'axe, en formant avec lui un plus grand angle que le rayon incident. Nous nommerons *section principale* d'une face naturelle ou artificielle un plan mené par cet axe, perpendiculairement à la face, et tout autre plan qui lui est

⁽¹⁾ Lu le 30 janvier 1808.

parallèle. La division du rayon lumineux a généralement lieu relativement à une face quelconque, quel que soit l'angle d'incidence : une partie suit la loi de la réfraction ordinaire; l'autre partie suit une loi extraordinaire, reconnue par Huygens, et qui, considérée comme un résultat de l'expérience, peut être mise au rang des plus belles découvertes de ce rare génie. Il y fut conduit par l'ingénieuse manière dont il envisageait la propagation de la lumière qu'il concevait formée des ondulations d'un fluide éthéré. Il supposait dans les milieux diaphanes ordinaires la vitesse de ces ondulations plus petite que dans le vide et la même dans tous les sens; mais, dans le cristal d'Islande, il imaginait deux espèces d'ondulations : dans l'une, la vitesse était représentée, comme dans les milieux ordinaires, par les rayons d'une sphère dont le centre serait au point d'incidence du rayon lumineux sur la face du cristal; dans l'autre, la vitesse était variable et représentée par les rayons d'un ellipsoïde de révolution, aplati à ses pôles, ayant le même centre que la sphère précédente, et dont l'axe de révolution serait parallèle à l'axe du cristal. Huygens n'assignait point la cause de cette variété d'ondulations, et les phénomènes singuliers qu'offre la lumière, en passant d'un cristal dans un autre, et dont nous parlerons ci-après, sont inexplicables dans son hypothèse. Cela joint aux grandes difficultés que présente la théorie des ondes de lumière est la cause pour laquelle Newton et la plupart des géomètres qui l'ont suivi n'ont pas justement apprécié la loi qu'Huygens y avait attachée. Ainsi cette loi a éprouvé le même sort que les belles lois de Képler, qui furent longtemps méconnues, pour avoir été associées à des idées systématiques dont malheureusement ce grand homme a rempli tous ses Ouvrages. Cependant Huygens avait vérifié sa loi par un grand nombre d'expériences. L'excellent physicien M. Wollaston ayant fait, par un moyen fort ingénieux, diverses expériences sur la double réfraction du cristal d'Islande, il les a trouvées conformes à cette loi remarquable. Enfin M. Malus vient de faire, à cet égard, une suite nombreuse d'expériences très précises sur les faces naturelles et artificielles de ce cristal, et il a constamment observé entre elles et la

loi d'Huygens le plus parfait accord : on ne doit donc pas balancer à la mettre au nombre des plus certains comme des plus beaux résultats de la Physique. L'analogie et des expériences directes ont fait voir à M. Malus qu'elle s'étend encore au cristal de roche, et il est extrêmement vraisemblable qu'elle a lieu pour tous les cristaux qui réfractent doublement la lumière. L'ellipsoïde qui leur est relatif doit être déterminé par l'expérience, et sa position par rapport aux faces naturelles du cristal peut répandre un grand jour sur la nature des molécules intégrantes des substances cristallisées, car ces molécules doivent, chacune, avoir les mêmes propriétés que le cristal entier.

Voici maintenant un phénomène que la lumière présente après avoir subi une double réfraction. Si l'on place à une distance quelconque au-dessous d'un cristal un second cristal de la même matière ou d'une matière différente et disposé de manière que les sections principales des faces opposées des deux cristaux soient parallèles, le rayon réfracté, soit ordinairement, soit extraordinairement, par le premier, le sera de la même manière par le second; mais, si l'on fait tourner l'un des cristaux en sorte que les sections principales soient perpendiculaires entre elles, alors le rayon réfracté ordinairement par le premier cristal le sera extraordinairement par le second, et réciproquement. Dans les positions intermédiaires, chaque rayon émergeant du premier cristal se divisera à son entrée dans le second cristal en deux faisceaux dont l'intensité respective, dépendante de l'angle que les sections principales font entre elles, varie suivant une loi qui n'est pas moins intéressante à connaître que celle de la double réfraction. Lorsqu'on eut fait remarquer à Huygens ce phénomène dans le cristal d'Islande, il convint, avec la candeur qui caractérise un ami sincère de la vérité, qu'il était inexplicable dans ses hypothèses, ce qui montre combien il est essentiel de les séparer de la loi de réfraction qu'il en avait déduite. Ce phénomène indique avec évidence que la lumière, en traversant les cristaux à double réfraction, reçoit deux modifications diverses en vertu desquelles une partie est rompue *ordinairement* et l'autre partie est rompue *extraordinairement*; mais ces modi-

fications ne sont point absolues; elles sont relatives à la position du rayon par rapport à l'axe du cristal, puisqu'un rayon rompu *ordinairement* par un cristal est rompu *extraordinairement* par un autre si les sections principales de leurs faces opposées sont perpendiculaires entre elles.

Il serait bien intéressant de rapporter la loi d'Huygens à des forces attractives et répulsives, ainsi que Newton l'a fait à l'égard de la loi de réfraction ordinaire: il est, en effet, très vraisemblable qu'elle dépend de semblables forces, et je m'en suis assuré par les considérations suivantes qui conduisent à une théorie nouvelle de ce genre de phénomènes.

On sait que le principe de la moindre action a généralement lieu dans le mouvement d'un point qui leur est soumis. En appliquant ce principe à la lumière, on peut faire abstraction de la courbe insensible qu'elle décrit dans son passage du vide dans un milieu diaphane et supposer son mouvement uniforme, lorsqu'elle y a pénétré d'une quantité sensible. Le principe de la moindre action se réduit donc alors à ce que la lumière parvient d'un point pris au dehors à un point pris dans l'intérieur du cristal, de manière que, si l'on ajoute le produit de la droite qu'elle décrit au dehors, par sa vitesse primitive, au produit de la droite qu'elle décrit au dedans, par la vitesse correspondante, la somme soit un minimum. Ce principe donne toujours la vitesse de la lumière dans un milieu diaphane, lorsque la loi de la réfraction est connue, et réciproquement il donne cette loi quand on connaît la vitesse. Mais une condition à remplir dans le cas de la réfraction extraordinaire est que la vitesse du rayon lumineux dans le cristal soit indépendante de la manière dont il y est entré et ne dépende que de sa position par rapport à l'axe du cristal, c'est-à-dire de l'angle que ce rayon forme avec une ligne parallèle à l'axe. En effet, si l'on imagine une face artificielle perpendiculaire à l'axe, tous les rayons intérieurs également inclinés à cet axe le seront également à la face et seront évidemment soumis aux mêmes forces au sortir du cristal: tous reprendront leur vitesse primitive dans le vide; la vitesse

dans l'intérieur est donc pour tous la même. (*Voir la Note de la fin de ce Mémoire.*)

En partant de ces données, je parviens aux deux équations différentielles que donne le principe de la moindre action, et dans lesquelles la vitesse intérieure est une fonction indéterminée de l'angle que le rayon réfracté forme avec l'axe du cristal. J'examine ensuite les deux cas les plus simples, auxquels je me borne, parce qu'ils renferment les lois de réfraction jusqu'à présent observées. Dans le premier cas, le carré de la vitesse de la lumière est augmenté dans l'intérieur du milieu d'une quantité constante. On sait que ce cas est celui des milieux diaphanes ordinaires et que cette constante exprime l'action du milieu sur la lumière. Les deux équations précédentes montrent qu'alors les rayons incident et réfracté sont dans un même plan perpendiculaire à la surface du milieu, et que les sinus des angles qu'ils forment avec la verticale sont constamment dans le même rapport.

Après ce premier cas, le plus simple est celui dans lequel l'action du milieu sur la lumière est égale à une constante, plus un terme proportionnel au carré du cosinus de l'angle que le rayon réfracté forme avec l'axe; car cette action devant être la même de tous les côtés de l'axe, elle ne peut dépendre que des puissances paires du sinus et du cosinus de cet angle. L'expression du carré de la vitesse intérieure est alors de la même forme que celle de l'action du milieu. En la substituant dans les équations différentielles du principe de la moindre action, je détermine les formules de réfraction relatives à ce cas, et je trouve qu'elles sont identiquement celles que donne la loi d'Huygens; d'où il suit que cette loi satisfait à la fois au principe de la moindre action et à la condition que la vitesse intérieure ne dépende que de l'angle formé par l'axe et par le rayon réfracté, ce qui ne laisse aucun lieu de douter qu'elle est due à des forces attractives et répulsives dont l'action n'est sensible qu'à des distances insensibles. Jusqu'ici cette loi n'était qu'un résultat de l'observation, approchant de la vérité, dans les limites des erreurs dont les expériences les

plus précises sont encore susceptibles; maintenant on peut la considérer comme une loi rigoureuse, puisqu'elle en remplit toutes les conditions.

Une donnée précieuse pour déterminer la nature des forces dont elle dépend est l'expression de la vitesse, qui est égale à une fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est le rayon de l'ellipsoïde d'Huygens, suivant lequel la lumière se dirige, la vitesse dans le vide étant prise pour unité. La vitesse du rayon *ordinaire* dans le cristal est, comme l'on sait, constante et égale à l'unité divisée par le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence. Huygens a reconnu par l'expérience que ce rapport est à fort peu près représenté par le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde, ce qui lie entre elles les deux réfractions ordinaire et extraordinaire. Mais on peut démontrer de la manière suivante que cette liaison remarquable est un résultat nécessaire de l'action du cristal sur la lumière, et qu'il ne dépend que de la considération qu'un rayon ordinaire se change en rayon extraordinaire lorsque l'on change convenablement sa position par rapport à l'axe d'un nouveau cristal. Si ce rayon est perpendiculaire à la face artificielle du cristal coupé perpendiculairement à son axe, il est clair qu'une inclinaison infiniment petite de l'axe sur la face, produite par une section infiniment voisine de la première, suffit pour en faire un rayon extraordinaire. Cette inclinaison ne peut qu'altérer infiniment peu l'action du cristal et la vitesse du rayon dans son intérieur; cette vitesse est donc alors celle du rayon extraordinaire, et par conséquent elle est égale à l'unité divisée par le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde. Elle surpasse ainsi généralement celle du rayon extraordinaire, la différence des carrés de ces deux vitesses étant proportionnelle au carré du sinus de l'angle que l'axe forme avec ce dernier rayon : cette différence représente celle de l'action du cristal sur ces deux espèces de rayons. Elle est la plus grande lorsque le rayon incident sur une surface artificielle menée par l'axe du cristal est dans un plan perpendiculaire à cet axe : alors la réfraction extraordinaire suit la même loi que la réfraction ordinaire; seulement, le

rapport des sinus de réfraction et d'incidence qui, dans le cas de la réfraction ordinaire, est le demi petit axe de l'ellipsoïde, est égal au demi grand axe dans la réfraction extraordinaire.

Suivant Huygens, la vitesse du rayon extraordinaire dans le cristal est exprimée par le rayon même de l'ellipsoïde; son hypothèse ne satisfait donc point au principe de la moindre action, mais il est remarquable qu'elle satisfasse au principe de Fermat, qui consiste en ce que la lumière parvient d'un point pris au dehors du cristal à un point pris dans son intérieur, dans le moins de temps possible; car il est visible que ce principe revient à celui de la moindre action, en y renversant l'expression de la vitesse. Ainsi l'un et l'autre de ces principes conduisent à la loi de la réfraction, découverte par Huygens, pourvu que, dans le principe de Fermat, on prenne, avec Huygens, le rayon de l'ellipsoïde pour représenter la vitesse et que, dans le principe de la moindre action, ce rayon représente le temps employé par la lumière à parcourir un espace déterminé pris pour unité. Si les axes de l'ellipsoïde sont égaux entre eux, il devient une sphère, et la réfraction se change en réfraction ordinaire. Ainsi, dans ces phénomènes, la nature en allant du simple au composé fait succéder les formes elliptiques à la forme circulaire comme dans les mouvements et la figure des corps célestes.

L'identité de la loi d'Huygens avec le principe de Fermat a lieu généralement, quel que soit le sphéroïde qui, dans son hypothèse, représente la vitesse intérieure. Je fais voir très simplement que cette identité résulte de la manière ingénieuse dont Huygens envisage la propagation des ondes de lumière; en sorte que cette manière, quoique très hypothétique, représente encore toutes les lois de réfraction, qui peuvent être dues à des forces attractives et répulsives, puisque le principe de Fermat donne les mêmes lois que celui de la moindre action, en y renversant l'expression de la vitesse.

Pour compléter la théorie précédente, je déduis des formules de réfraction, données par le principe de la moindre action, la réfraction de la lumière par les surfaces intérieures des cristaux diaphanes.

A leurs surfaces extérieures, elle se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; mais aux surfaces intérieures un rayon, soit ordinaire, soit extraordinaire, se réfléchit en partie et se divise par cette réflexion en deux faisceaux dont je détermine les directions respectives. M. Malus a, le premier, rattaché ces réflexions à la loi de réfraction d'Huygens, et il a fait à cet égard un grand nombre d'expériences. Leur accord remarquable avec les résultats du principe de la moindre action achève de démontrer que tous les phénomènes de la réfraction et de la réflexion de la lumière dans les cristaux sont le résultat de forces attractives et répulsives.

Descartes est le premier qui ait publié la vraie loi de la réfraction ordinaire que Képler et d'autres physiciens avaient inutilement cherchée. Huygens affirme, dans sa *Dioptrique*, qu'il l'a vue présentée sous une autre forme dans un manuscrit de Snellius, qu'on lui a dit avoir été communiqué à Descartes et d'où peut-être, ajoute-t-il, ce dernier a tiré le rapport constant des sinus de réfraction et d'incidence. Mais cette réclamation tardive d'Huygens en faveur de son compatriote ne me paraît pas suffisante pour enlever à Descartes le mérite d'une découverte que personne ne lui a contestée de son vivant. Ce grand géomètre l'a déduite des deux propositions suivantes : l'une, que la vitesse de la lumière parallèle à la surface d'incidence n'est altérée ni par la réflexion ni par la réfraction; l'autre, que la vitesse est différente dans les milieux divers et plus grande dans ceux qui réfractent plus la lumière. Descartes en a conclu que, si, dans le passage d'un milieu dans un autre moins réfringent, l'inclinaison du rayon lumineux est telle que l'expression du sinus de réfraction soit égale ou plus grande que l'unité, alors la réfraction se change en réflexion, les deux angles de réflexion et d'incidence étant égaux. Tous ces résultats sont conformes à la nature, comme Newton l'a fait voir par la théorie des forces attractives; mais les preuves que Descartes en a données sont inexactes, et il est assez remarquable qu'Huygens et lui soient parvenus, au moyen de théories incertaines ou fausses, aux véritables lois de la réfraction de la lumière. Descartes

eut à ce sujet, avec Fermat, une longue querelle que les cartésiens prolongèrent après sa mort, et qui fournit à Fermat l'occasion heureuse d'appliquer sa belle méthode *De maximis et minimis* aux expressions radicales. En considérant cette matière sous un point de vue métaphysique, il chercha la loi de la réfraction par le principe que nous avons exposé précédemment, et il fut très surpris d'arriver à celle de Descartes. Mais, ayant trouvé que, pour satisfaire à son principe, la vitesse de la lumière devait être plus petite dans les milieux diaphanes que dans le vide, tandis que Descartes la supposait plus grande, il se confirma dans la pensée que les démonstrations de ce grand géomètre étaient fautives. Maupertuis, convaincu par les raisonnements de Newton de la vérité des suppositions de Descartes, reconnut que la fonction qui, dans le mouvement de la lumière, est un minimum n'est pas, comme Fermat le suppose, la somme des quotients, mais celle des produits des espaces décrits par les vitesses correspondantes. Ce résultat étendu à l'intégrale du produit de l'élément de l'espace par la vitesse dans les mouvements variables a conduit Euler au principe de la moindre action, que M. de Lagrange ensuite a dérivé des lois primordiales du mouvement. L'usage que je fais de ce principe, soit pour reconnaître si la loi de réfraction extraordinaire donnée par Huygens dépend de forces attractives ou répulsives, et pour l'élever ainsi au rang des lois rigoureuses, soit pour déduire réciproquement l'une de l'autre les lois de la réfraction et de la vitesse de la lumière dans les milieux diaphanes, m'a paru mériter l'attention des physiciens et des géomètres.

Voici présentement mon analyse. Abaissons d'un point quelconque de la direction du rayon lumineux dans le vide une perpendiculaire sur la face du cristal; nommons p cette perpendiculaire, θ l'angle d'incidence du rayon et σ l'angle que sa projection forme avec une droite invariable située dans le plan de la face et passant par le point d'incidence du rayon; nommons pareillement p' , θ' et σ' les mêmes quantités relatives au rayon réfracté; $p + p'$ sera la distance des deux plans parallèles à la face et passant respectivement par les deux points

pris sur les directions des deux rayons incident et réfracté. La distance des deux plans passant respectivement par les mêmes points, perpendiculairement à la face et parallèlement à la droite invariable, sera

$$p \tan \theta \sin \varpi + p' \tan \theta' \sin \varpi'.$$

Enfin la distance des deux plans passant respectivement par les mêmes points, perpendiculairement à la face et à la droite invariable, sera

$$p \tan \theta \cos \varpi + p' \tan \theta' \cos \varpi'.$$

Si l'on fait varier les angles θ , ϖ , θ' et ϖ' de manière que les deux points pris sur les directions des rayons soient fixes, ces trois distances resteront les mêmes, et l'on aura les deux équations différentielles

$$0 = \frac{p d\theta \sin \varpi}{\cos^2 \theta} + p d\varpi \tan \theta \cos \varpi + \frac{p' d\theta' \sin \varpi'}{\cos^2 \theta'} + p' d\varpi' \tan \theta' \cos \varpi',$$

$$0 = \frac{p d\theta \cos \varpi}{\cos^2 \theta} - p d\varpi \tan \theta \sin \varpi + \frac{p' d\theta' \cos \varpi'}{\cos^2 \theta'} - p' d\varpi' \tan \theta' \sin \varpi'.$$

Suivant le principe de la moindre action, la fonction $\frac{p}{\cos \theta} + \frac{p'}{\cos \theta'}$ doit être un minimum, v étant la vitesse du rayon dans l'intérieur du cristal lorsqu'il y a pénétré d'une quantité sensible, sa vitesse dans le vide étant prise pour unité; car on peut négliger la partie de l'intégrale $\int v ds$ relative à la courbe imperceptible que décrit le rayon à son passage dans le cristal, et dont nous exprimons l'élément par ds . On a donc

$$0 = \frac{p d\theta \sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{p' v d\theta' \sin \theta'}{\cos^3 \theta'} + \frac{p'}{\cos \theta'} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta'} d\theta' + \frac{\partial v}{\partial \varpi'} d\varpi' \right).$$

La première des trois équations différentielles précédentes, multipliée par $\sin \varpi$ et ajoutée à la seconde multipliée par $\cos \varpi$, donne

$$\frac{p d\theta}{\cos^2 \theta} = - \frac{p' d\theta'}{\cos^2 \theta'} \cos(\varpi' - \varpi) + p' d\varpi' \tan \theta' \sin(\varpi' - \varpi).$$

Cette valeur de $\frac{p d\theta}{\cos^2 \theta}$, substituée dans la troisième équation différen-

tielle, donne

$$0 = - \frac{d\theta' \sin \theta}{\cos^2 \theta'} \cos(\varpi' - \varpi) + d\varpi' \sin \theta \tan \theta' \sin(\varpi' - \varpi) \\ + \frac{v d\theta' \sin \theta'}{\cos^2 \theta'} + \frac{d\theta'}{\cos \theta'} \frac{\partial v}{\partial \theta'} + \frac{d\varpi'}{\cos \theta'} \frac{\partial v}{\partial \varpi'}.$$

En comparant séparément les coefficients de $d\theta'$ et $d\varpi'$, on aura les deux équations suivantes, données par le principe de la moindre action :

$$(1) \quad \sin \theta \cos(\varpi' - \varpi) = v \sin \theta' + \frac{\partial v}{\partial \theta'} \cos \theta',$$

$$(2) \quad \sin \theta \sin \theta' \sin(\varpi' - \varpi) = - \frac{\partial v}{\partial \varpi'}.$$

Quand la loi de réfraction est connue, on a les valeurs de θ et ϖ en fonctions de θ' et de ϖ' . Ces valeurs, substituées dans les deux équations précédentes, donneront la vitesse v du rayon lumineux correspondante à cette loi, du moins si la loi de réfraction est un résultat de forces attractives et répulsives. Réciproquement, si la vitesse v est donnée, on aura, au moyen de ces équations, la loi correspondante de la réfraction.

Dans l'intérieur du cristal, la vitesse ne dépend que des angles formés par la direction du rayon et par des axes fixes dans l'intérieur du corps. Supposons qu'il n'y ait qu'un axe et que V soit l'angle formé par cet axe et par la direction du rayon réfracté, v sera fonction de V . Si par l'axe on mène un plan perpendiculaire à la face du cristal et que l'on prenne pour la ligne invariable d'où l'on compte les angles ϖ et ϖ' l'intersection de ce plan avec la face; si, de plus, on nomme λ l'angle que fait avec la face un plan perpendiculaire à l'axe, on aura

$$\cos V = \cos \lambda \cos \theta' - \sin \lambda \sin \theta' \cos \varpi'.$$

On aura donc, en regardant v comme fonction de $\cos V$,

$$\frac{\partial v}{\partial \theta'} = - \frac{\partial v}{\partial \cos V} (\cos \lambda \sin \theta' + \sin \lambda \cos \theta' \cos \varpi'),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varpi'} = \frac{\partial v}{\partial \cos V} \sin \lambda \sin \theta' \sin \varpi'.$$

En multipliant l'équation (1) par $\sin \theta' \sin \varpi'$ et en retranchant l'équation (2) multipliée par $\cos \varpi'$, on aura

$$(3) \quad \sin \theta \sin \varpi = \sin \theta' \sin \varpi' \left(v - \cos V \frac{\partial v}{\partial \cos V} \right).$$

Si l'on multiplie ensuite l'équation (1) par $\sin \theta' \cos \varpi'$ et qu'on l'ajoute à l'équation (2) multipliée par $\sin \varpi'$, on aura

$$(4) \quad \sin \theta \cos \varpi = \sin \theta' \cos \varpi' \left(v - \cos V \frac{\partial v}{\partial \cos V} \right) - \sin \lambda \frac{\partial v}{\partial \cos V}.$$

Ces deux équations donneront la loi de la réfraction extraordinaire, lorsque v sera donné en fonction de $\cos V$, et réciproquement. De plus, elles satisferont à la condition que la vitesse du rayon lumineux, dans l'intérieur du cristal, ne dépende que de sa position par rapport à l'axe du cristal.

Nous observerons ici que non seulement v doit être fonction de $\cos V$, mais qu'il ne doit dépendre que des puissances paires de $\cos V$; car nous avons observé ci-dessus que la vitesse v est la même pour tous les rayons qui forment avec l'axe le même angle. Examinons présentement les lois de la réfraction relatives aux deux expressions les plus simples de la vitesse.

Premier cas.

Le cas le plus simple de tous est celui dans lequel la vitesse v est constante. Les équations (3) et (4) deviennent alors

$$\begin{aligned} \sin \theta \sin \varpi &= v \sin \theta' \sin \varpi', \\ \sin \theta \cos \varpi &= v \sin \theta' \cos \varpi'. \end{aligned}$$

En divisant la première par la seconde, on a

$$\tan \theta = \tan \theta',$$

ce qui montre que les deux rayons incident et réfracté sont dans un même plan perpendiculaire à la face d'incidence. En ajoutant

ensemble les carrés des mêmes équations, on a

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{v},$$

ce qui donne le rapport constant des sinus de réfraction et d'incidence.

Le cas que nous examinons est celui des milieux diaphanes ordinaires. On sait qu'alors le carré de la vitesse de la lumière est augmenté par l'action du milieu d'une quantité constante qui mesure la force réfractive de ce milieu, et qui est égale à la différence des carrés des sinus d'incidence et de réfraction, divisée par le carré du sinus de réfraction. [Voir le Chapitre I du Livre X de la *Mécanique céleste* ⁽¹⁾.]

Second cas.

Le cas le plus simple après le précédent est celui dans lequel l'action du milieu est variable et égale à une constante, plus un terme proportionnel au carré du cosinus de l'angle V . Dans ce cas, l'expression du carré de la vitesse v est de la forme $\beta^2 + \alpha^2 \cos^2 V$, ce qui donne

$$\frac{\partial v}{\partial \cos V} = \frac{\alpha^2 \cos V}{v}.$$

Les équations (3) et (4) deviennent ainsi

$$\begin{aligned} \sin \theta \sin \varpi &= \frac{\beta^2 \sin \theta' \sin \varpi'}{v}, \\ \sin \theta \cos \varpi &= \frac{\beta^2 \sin \theta' \cos \varpi'}{v} - \frac{\alpha^2 \sin \lambda \cos V}{v}. \end{aligned}$$

Ces deux équations donnent

$$\left(\sin \theta \cos \varpi + \frac{\alpha^2 \sin \lambda \cos V}{v} \right)^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \varpi = \frac{\beta^4 \sin^2 \theta'}{v^2}.$$

En multipliant ensuite la dernière des mêmes équations par $\sin^2 \lambda$, et

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, t. IV.

substituant pour $\sin \lambda \sin \theta' \cos \sigma'$ sa valeur $\cos \lambda \cos \theta' - \cos V$, on a

$$\left[\sin \lambda \sin \theta \cos \sigma + \frac{(\xi^2 + \alpha^2 \sin^2 \lambda) \cos V}{v} \right]^2 = \frac{\xi^4 \cos^2 \lambda \cos^2 \theta'}{v^2}.$$

Enfin, en multipliant cette équation par α^2 et en la retranchant de la précédente multipliée par $\beta^2 + \alpha^2 \sin^2 \lambda$; en substituant ensuite au lieu de $\alpha^2 \cos^2 V$ sa valeur $v^2 - \beta^2$ et supposant

$$p = \xi^2 + \alpha^2 \sin^2 \lambda,$$

on trouve, après toutes les réductions,

$$v = \frac{\xi^4 \sqrt{\xi^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta'}}{\sqrt{\xi^2 p - \sin^2 \theta (\xi^2 \cos^2 \sigma + p \sin^2 \sigma)}}.$$

L'expression précédente de $\sin \theta \sin \sigma$ donne ainsi

$$(5) \quad \tan \theta' \sin \sigma' = \frac{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2 \sin \theta \sin \sigma}}{\sqrt{\xi^2 p - \sin^2 \theta (\xi^2 \cos^2 \sigma + p \sin^2 \sigma)}};$$

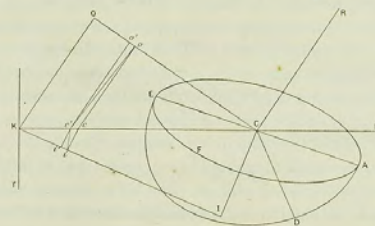
l'expression de $\sin \theta \cos \sigma$ donne, en y substituant au lieu de $\cos V$ sa valeur $\cos \lambda \cos \theta' - \sin \lambda \sin \theta' \cos \sigma'$,

$$(6) \quad \tan \theta' \cos \sigma' = \frac{\xi^4 \sqrt{\xi^2 + \alpha^2 \sin \theta \cos \sigma}}{p \sqrt{\xi^2 p - \sin^2 \theta (\xi^2 \cos^2 \sigma + p \sin^2 \sigma)}} + \frac{\alpha^2 \sin \lambda \cos \lambda}{p}.$$

Comparons maintenant ces résultats à ceux que donne la loi d'Huygens.

Imaginons une face naturelle ou artificielle du cristal sur laquelle soit tracée l'ellipse AFE, dont le centre C soit celui d'un ellipsoïde de révolution AFED, CD étant le demi-axe de révolution, parallèle à l'axe du cristal. Menons par CD un plan perpendiculaire à la face et la coupant suivant la droite ACE. Soit RC un rayon incident, et menons par RC un plan perpendiculaire à la face et la coupant suivant la droite BCK. Menons encore, dans le plan RCK, OC perpendiculaire à CR, et plaçons dans l'angle OCK la droite OK perpendiculaire à OC, et qui représente la vitesse de la lumière dans le vide, vitesse que nous prendrons pour unité. Dans le plan de l'ellipse AFE, menons

par le point K, KT perpendiculaire à CK. Si maintenant on conçoit un plan mené par KT et tangent au sphéroïde AFED, en I; la droite CI sera la direction du rayon réfracté.



Pour réduire cette construction en analyse, nommons, comme précédemment, θ l'angle d'incidence du rayon CR; nommons encore π l'angle que la projection CB de ce rayon sur la face du cristal forme avec AC; nommons pareillement θ' l'angle de réfraction du rayon CI, et σ' l'angle que la projection de ce rayon sur la face forme avec CE. Soient a le demi grand axe de l'ellipsoïde, b son demi-axe de révolution, et λ l'angle formé par la face du cristal et par un plan perpendiculaire à l'axe de révolution; cela posé, on trouve les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \tan \theta' \sin \sigma' &= \frac{a^2 \sin \theta \sin \pi}{\sqrt{A - a^2 \sin^2 \theta (b^2 \cos^2 \pi + A \sin^2 \pi)}}, \\ \tan \theta' \cos \sigma' &= \frac{a^2 b^2 \sin \theta \cos \pi}{A \sqrt{A - a^2 \sin^2 \theta (b^2 \cos^2 \pi + A \sin^2 \pi)}} + \frac{B}{A}, \end{aligned}$$

A et B étant donnés par les équations

$$\begin{aligned} A &= b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \lambda, \\ B &= (a^2 - b^2) \sin \lambda \cos \lambda. \end{aligned}$$

Je ne donne point ici les démonstrations de ces formules auxquelles M. Malus est parvenu d'une manière élégante, et que les géomètres

tireront facilement de la construction d'Huygens : elles ont, comme on le voit par l'inspection seule, une grande analogie avec les équations (5) et (6); mais il est facile de voir qu'elles coïncident entièrement avec elles, en faisant, dans les équations (5) et (6),

$$\xi^2 = \frac{1}{a^2}, \quad \alpha^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2},$$

ce qui donne

$$v = \frac{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 V}}{ab}.$$

Le rayon de l'ellipsoïde est

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 V}}.$$

La vitesse de la lumière rompue extraordinairement dans l'intérieur du cristal est donc égale à l'unité divisée par ce rayon.

Suivant Huygens, cette vitesse est représentée par le rayon même; ses hypothèses ne satisfont donc point au principe de la moindre action, mais elles satisfont à celui de Fermat, car ce dernier principe revient à celui de la moindre action, en y renversant l'expression de la vitesse.

On peut démontrer très simplement l'identité de ce principe, et de la manière dont Huygens envisage la réfraction de la lumière. Il établit que toutes les parties d'une onde lumineuse qui sont dans un plan CO perpendiculaire au rayon incident CR parviennent dans le même temps, et suivant des directions parallèles, au plan KI mené par KT tangentiellement au sphéroïde dont C est le centre, et dont les rayons représentent les vitesses de la lumière dans le cristal. En effet, si l'on prend KO pour unité de temps, d'espace et de vitesse, le temps employé à parcourir *oc* parallèle à OK sera représenté par *co*, et, par conséquent, il sera égal à $\frac{cC}{KC}$. Le temps employé à parcourir *ci* parallèle à CI sera au temps employé à parcourir CI, et qu'il suppose être égal au temps employé à parcourir KO, c'est-à-dire à l'unité, comme *ci* est à CI; ce temps est donc égal à $\frac{Kc}{KC}$. En l'ajoutant à $\frac{cC}{KC}$, la somme sera

l'unité. Ainsi le point *o* de l'onde parvient en *i* dans le même temps que le point O parvient en K. Menons *o'c'* infiniment près de *oc* et parallèlement à cette ligne : le point *o'* de l'onde parviendra en *i'* suivant la ligne brisée *o'c'i'*, dans une unité de temps. Menons présentement les droites *c'o* et *c'i*, et supposons que le point *o* parvienne en *i* suivant la ligne brisée *oc'i*; *c'o'* étant perpendiculaire à CO, la droite *c'o* peut être supposée égale à *c'o'*, et les temps employés à les parcourir peuvent être supposés égaux. De plus, le temps employé à parcourir *c'i'* peut être supposé égal au temps employé à parcourir *c'i*, parce que le plan Ki' touchant en *i'* le sphéroïde semblable au sphéroïde AFED, dont le centre est en *c'*, et dont les dimensions sont diminuées dans la raison de Kc' à KC, les deux points *i* et *i'* peuvent être supposés à la surface de ce sphéroïde. Selon Huygens, les vitesses suivant *c'i* et *c'i'* sont proportionnelles à ces lignes; les temps employés à les parcourir sont donc égaux. Ainsi le temps de la transmission de la lumière suivant la ligne *oc'i* est égal à l'unité, comme suivant la ligne brisée *oci*. La différentielle de ces deux temps est donc nulle, ce qui est le principe de Fermat.

Il est clair que ce raisonnement a généralement lieu quelle que soit la position du point *c'*, et quand il ne serait pas sur la droite CK, pourvu qu'il soit près de cette droite sur la face du cristal; ce raisonnement est d'ailleurs indépendant de la nature du sphéroïde dont les rayons représentent les vitesses de la lumière.

En renversant l'expression de la vitesse, le principe de Fermat donne celui de la moindre action; les lois de réfraction qui résultent des hypothèses d'Huygens sont donc généralement conformes à ce dernier principe et c'est la raison pour laquelle ces hypothèses représentent la nature.

Le principe de la moindre action peut servir encore à déterminer les lois de la réflexion de la lumière; car, quoique la nature de la force qui fait rebondir la lumière à la surface des corps soit inconnue, cependant on peut la considérer comme une force répulsive qui rend en sens contraire à la lumière la vitesse qu'elle lui fait perdre, de même

que l'élasticité restitue aux corps en sens contraire la vitesse qu'elle détruit; or on sait que, dans ce cas, le principe de la moindre action subsiste toujours. À l'égard d'un rayon lumineux, soit ordinaire, soit extraordinaire, réfléchi par la surface extérieure d'un corps, ce principe se réduit à ce que la lumière parvient d'un point à un autre par le chemin le plus court de tous ceux qui rencontrent la surface. En effet, la vitesse de la lumière réfléchie est la même que celle de la lumière directe; et l'on peut établir, en principe général, que lorsqu'un rayon lumineux, après avoir éprouvé l'action de tant de forces que l'on voudra, revient dans le vide, il y reprend sa vitesse primitive. La condition du chemin le plus court donne l'égalité des angles de réflexion et d'incidence dans un plan perpendiculaire à la surface, ainsi que Ptolémée l'avait déjà remarqué. C'est la loi générale de la réflexion à la surface extérieure des corps.

Mais, lorsque la lumière, en entrant dans un cristal, s'est divisée en rayon ordinaire et rayon extraordinaire, une partie de ces rayons est réfléchie par la surface intérieure à leur sortie du cristal. En se réfléchissant, chaque rayon, soit ordinaire, soit extraordinaire, se divise en deux autres; en sorte qu'un rayon solaire, en pénétrant dans le cristal, forme, par sa réflexion partielle à la surface de sortie, quatre faisceaux distincts, dont nous allons déterminer les directions.

Supposons d'abord les faces d'entrée et de sortie, que nous nommerons *première* et *seconde* face, parallèles. Donnons au cristal une épaisseur insensible et cependant plus grande que la somme des rayons des sphères d'activité des deux faces. Dans ce cas, on prouvera, par le raisonnement qui précède, que les quatre faisceaux réfléchis n'en formeront sensiblement qu'un seul, situé dans le plan d'incidence du rayon générateur, et formant avec la première face l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Restitons maintenant au cristal son épaisseur: il est clair que, dans ce cas, les faisceaux réfléchis après leur sortie par la première face prendront des directions parallèles à celles qu'ils avaient prises dans le premier cas. Ces faisceaux seront donc parallèles entre eux et au plan d'incidence du rayon générateur; seule-

ment, au lieu d'être sensiblement confondus, comme dans le premier cas, ils seront séparés par des distances d'autant plus grandes que le cristal aura plus d'épaisseur.

Maintenant, si l'on considère un rayon quelconque intérieur, sortant en partie par la seconde face et en partie réfléchi par elle en deux faisceaux, le rayon sorti sera parallèle au rayon générateur; car la lumière, en sortant du cristal, doit prendre une direction parallèle à celle qu'elle avait en y entrant, puisque les deux faces d'entrée et de sortie étant supposées parallèles, elle éprouve en sortant l'action des mêmes forces qu'elle avait éprouvées en entrant, mais en sens contraire. Concevons par la direction du rayon sorti un plan perpendiculaire à la seconde face, et, dans ce plan, imaginons au dehors du cristal une droite passant par le point de sortie, et formant, avec la perpendiculaire à la face, mais du côté opposé à la direction du rayon sorti, le même angle que cette direction; enfin concevons un rayon solaire entrant suivant cette droite dans le cristal. Ce rayon se partagera à son entrée en deux autres, qui, au sortir du cristal par la première face, prendront des directions parallèles au rayon solaire avant son entrée par la seconde face; elles seront visiblement parallèles aux directions des deux faisceaux réfléchis, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les deux rayons dans lesquels se divise le rayon solaire en entrant par la seconde face se confondent respectivement dans l'intérieur du cristal avec les directions des deux faisceaux réfléchis. Or les formules précédentes donnent les directions des rayons dans lesquels le rayon solaire se divise; elles donneront donc aussi celle des deux faisceaux réfléchis dans l'intérieur du cristal.

Si les deux faces du cristal ne sont pas parallèles, on aura, par les mêmes formules, les directions des deux rayons dans lesquels le rayon générateur se divise en pénétrant par la première face. On aura ensuite par ces formules les directions de chacun de ces rayons à leur sortie par la seconde face; ensuite la construction précédente donnera les directions dans l'intérieur des quatre faisceaux réfléchis par cette face; enfin, par nos formules, on conclura leurs directions au sortir

du cristal par la première face. On aura donc ainsi tous les phénomènes de la réflexion de la lumière par les surfaces des cristaux diaphanes. On pourrait les déduire directement de l'analyse qui nous a conduits aux formules de la réfraction; mais la méthode qui précède est beaucoup plus simple.

NOTE.

Je vais présentement démontrer cette proposition générale, savoir que, de quelque manière qu'une molécule de lumière parvienne du vide dans un milieu d'une densité quelconque, soit qu'elle y parvienne directement, soit qu'elle n'y parvienne qu'après avoir traversé plusieurs autres milieux, dans tous ces cas, sa vitesse dans ce milieu sera toujours la même. En effet, si l'on nomme v cette vitesse; dm une molécule qui agit sur la lumière, soit par attraction, soit par répulsion; f sa distance à la molécule de lumière; $\varphi(f)$ la loi de la force relative à la distance, on aura, par le principe de la conservation des forces vives,

$$v^2 = a^2 + 2 \iint dm df \varphi(f),$$

a étant la vitesse de la lumière dans le vide, et l'intégrale devant s'étendre à toutes les molécules qui agissent sur le rayon lumineux. On peut envisager cette intégrale de deux manières: dans la première, on ne la considère que très près de la surface d'entrée dans le milieu, et l'on conçoit que, lorsque le rayon y a pénétré d'une quantité sensible, alors il est également attiré de toutes parts, et sa vitesse ne reçoit plus d'accroissement. C'est ainsi que Newton a démontré le rapport constant des sinus de réfraction et d'incidence. Dans la seconde manière, on ne considère que l'action éprouvée par le rayon lumineux de la part des molécules qui en sont éloignées d'une quantité

moindre que le rayon de la sphère d'activité sensible de ces molécules; la valeur de $\iint dm df \varphi(f)$ étant insensible relativement aux autres molécules, parce que l'accélération qu'elles ont produite dans le mouvement du rayon lorsqu'il s'en est approché a été détruite par le retardement que ce mouvement a éprouvé lorsque le rayon s'en est éloigné. Cette seconde manière montre avec évidence que la vitesse est la même, de quelque manière que le rayon ait pénétré dans le milieu, et quelles que soient les actions des molécules qu'il a rencontrées, puisque l'intégrale $\iint dm df \varphi(f)$ est nulle relativement à celles qui sont à une distance perceptible de la molécule lumineuse.

Il suit de là que la lumière en rentrant dans le vide, après avoir éprouvé l'action d'un nombre quelconque de forces attractives et répulsives, y reprend sa vitesse primitive.

Les mêmes résultats ont lieu relativement aux rayons extraordinaires; car, sans connaître la cause de la réfraction extraordinaire, on peut cependant assurer qu'elle est due à des forces attractives et répulsives qui agissent de molécule à molécule, suivant des fonctions quelconques de la distance, et qui, dans les cristaux, sont modifiées par la figure de leurs molécules intégrantes, par celle des molécules de la lumière et par la manière dont ces molécules se présentent les unes aux autres. En nommant donc R la résultante de toutes ces forces, et dr l'élément de sa direction, on aura

$$v^2 = a^2 + 2 \iint dm R dr.$$

Maintenant il est visible que, relativement à une molécule dm du cristal, l'intégrale $\int R dr$ est nulle lorsque le rayon lumineux est à une distance sensible de cette molécule; car, dans le passage de ce rayon à travers la sphère d'activité sensible de la molécule, les éléments $R dr$ sont d'abord positifs, ensuite négatifs, et la somme des premiers est égale à celle des seconds et la détruit. En cela ces forces diffèrent de celles qui naissent du frottement et de la résistance des milieux, et qui, dans toutes les directions, retardent constamment la

vitesse. L'intégrale $\iint dm R dr$ ne dépend donc que de l'action que le rayon a éprouvée de la part des molécules dont il n'est éloigné que d'une quantité plus petite que le rayon de la sphère d'activité sensible. Ainsi, lorsqu'un rayon extraordinaire est à une distance sensible de la surface d'un cristal, et dans son intérieur, sa vitesse est toujours la même, quelles que soient la nature de cette surface et la manière dont le rayon a pénétré dans le cristal, pourvu que sa direction soit la même. Donc, si les forces qui produisent la réfraction extraordinaire sont les mêmes de tous les côtés de l'axe du cristal, la vitesse du rayon dans l'intérieur ne dépendra que de l'angle formé par sa direction avec l'axe. On voit encore que le rayon rentrant dans le vide y reprendra sa vitesse primitive.

En général, toutes les forces attractives et répulsives de la nature se réduisent, en dernière analyse, à des forces semblables agissant de molécule à molécule. C'est ainsi que j'ai fait voir, dans ma *Théorie de l'action capillaire*, que les attractions et répulsions des petits corps qui nagent sur un liquide, et généralement tous les phénomènes capillaires, dépendent d'attractions de molécule à molécule qui ne sont sensibles qu'à des distances imperceptibles. On a essayé pareillement de ramener à des actions de molécule à molécule les phénomènes électriques et magnétiques; on peut y ramener encore ceux que présentent les corps élastiques. Pour déterminer l'équilibre et le mouvement d'une lame élastique naturellement rectiligne et pliée suivant une courbe quelconque, on a supposé que, dans chaque point, son ressort est en raison inverse du rayon de courbure. Mais cette loi n'est que secondaire et dérive de l'action attractive et répulsive des molécules, suivant une fonction de la distance. Pour mettre cette dérivation en évidence, il faut concevoir chaque molécule d'un corps élastique dans son état naturel en équilibre au milieu des forces attractives et répulsives qu'elle éprouve de la part des autres molécules, les forces répulsives étant dues, soit à la chaleur, soit à d'autres causes. Il faut supposer ensuite que les molécules tendent à reprendre leur position respective naturelle lorsqu'on les en écarte infiniment

peu. Ainsi deux molécules en équilibre entre leurs forces attractives et répulsives, et séparées l'une de l'autre par un intervalle quelconque, reviendront à cette distance mutuelle, soit qu'on l'augmente, soit qu'on la diminue, si l'une de ces deux conditions est remplie, et alors leur équilibre sera stable. Imaginons présentement une lame très mince, élastique, rectiligne et fixée par une de ses extrémités à un plan qui lui soit perpendiculaire. En pliant la lame, son élément contigu au plan s'écartera de sa position naturelle d'un angle infiniment petit que nous désignerons par α . En désignant par f la distance d'une molécule de l'élément à une autre de ses molécules, cette distance variera d'une quantité proportionnelle à α , et il en résultera une action mutuelle de ces molécules proportionnelle à cette variation, et que nous pouvons exprimer par $h\alpha$. La résultante de toutes ces forces tend à faire reprendre à l'élément son état naturel; mais, de quelque manière qu'elles se combinent, leur résultante ou le ressort de l'élément est nécessairement proportionnel à α ou à l'angle de contingence, et par conséquent ce ressort est réciproque au rayon de courbure. Ce que nous venons de dire du premier élément de la lame s'applique à un élément quelconque, en concevant cet élément fixé par une de ses extrémités à un plan perpendiculaire à l'élément contigu.

Maintenant, si l'on fait varier infiniment peu la position de la courbe, l'angle de contingence α deviendra $\alpha + \delta\alpha$, $\delta\alpha$ étant la variation de cet angle, que nous supposerons infiniment petite par rapport à lui. La distance f de deux molécules de l'élément de la lame, correspondante à cet angle, variera d'une quantité proportionnelle à $\delta\alpha$, et que nous désignerons par $q\delta\alpha$. L'action mutuelle des deux molécules ayant été exprimée par $h\alpha$, le produit de cette action par l'élément de sa direction sera donc $hq\alpha\delta\alpha$. Cette somme, étendue à toutes les molécules de l'élément entier, sera de la forme $M\alpha\delta\alpha$, M étant un coefficient indépendant de α et de $\delta\alpha$, et qui sera le même pour tous les éléments de la lame, si elle est partout également épaisse et large, et si la longueur de ses éléments est supposée constante; nous représenterons

cette longueur par ds , que nous supposerons constant et invariable. La somme de toutes les forces, multipliées respectivement par les variations des éléments de leurs directions, sera donc proportionnelle à $\int \alpha \delta x$; et, s'il n'y a point de forces étrangères, la lame étant supposée fixe par ses deux extrémités, on aura, par le principe des vitesses virtuelles, dans le cas de l'équilibre, $\int \alpha \delta x = 0$; d'où il suit que $\int \alpha^2$ est un minimum dans la courbe d'équilibre. α est égal à $\frac{ds}{r}$, r étant le rayon de courbure; $\int \frac{ds^2}{r^2}$ est donc un minimum dans cette courbe. ds étant supposé constant, on peut diviser l'intégrale précédente par ds et la réduire ainsi à une intégrale finie; $\int \frac{ds}{r^2}$ est par conséquent un minimum dans la courbe d'équilibre de la lame élastique, ce qui est le principe de Daniel Bernoulli, qui a donné à cette intégrale le nom de *force potentielle*. (Voir l'Ouvrage d'Euler qui a pour titre : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*.)

Enfin la considération des actions *ad distans* de molécule à molécule, étendue à la chaleur, conduit d'une manière claire et précise aux véritables équations différentielles du mouvement de la chaleur dans les corps solides et de ses variations à leur surface, et par là cette branche très importante de la Physique rentre dans le domaine de l'Analyse.

On est parti, dans la théorie de l'équilibre et du mouvement de la chaleur, de ce principe, donné par Newton, savoir que la chaleur communiquée par un corps à un autre qui lui est contigu est proportionnelle à la différence de leurs températures. Ainsi une lame infiniment mince d'un corps communique, dans un temps donné très court, à celle qui la suit, une quantité de chaleur proportionnelle à la conductibilité du corps pour la chaleur et à l'excès de sa température sur celle de la lame suivante; mais elle reçoit en même temps de la lame qui la précède une quantité de chaleur proportionnelle à l'excès de la température de cette lame sur la sienne, et c'est la différence de ces chaleurs reçues et communiquées dans un instant infiniment

petit qui forme la différentielle de sa chaleur. Mais il se présente ici une difficulté que l'on n'a point encore résolue. Les quantités de chaleur reçues et communiquées dans un instant ne peuvent être que des infiniment petits du même ordre que l'excès de température d'une lame sur celle de la lame qui la suit. La différence des chaleurs reçues et communiquées est donc un infiniment petit du second ordre, dont l'accumulation dans un temps fini ne pourrait élever d'une quantité finie la température de la lame. Cette difficulté est analogue à celle que présentaient les théories des réfractions astronomiques. On y supposait l'atmosphère divisée en couches d'une épaisseur infiniment petite, dans lesquelles la lumière se réfracte en passant d'une couche dans la suivante, comme si ces couches avaient une épaisseur finie, ce qui donne à leur action une valeur infiniment grande. Cette difficulté n'a point lieu dans la théorie des réfractions, que j'ai donnée dans le Livre X de la *Mécanique céleste*, où j'ai déduit cette théorie de l'action *ad distans* des molécules des milieux diaphanes sur la lumière. On fera pareillement disparaître la difficulté précédente relative à la chaleur, en étendant son action au delà du contact. L'expérience a fait connaître que cela a lieu dans l'air et dans les milieux rares, et que les corps chauds placés dans ces milieux transmettent leur chaleur aux corps éloignés par un rayonnement analogue à celui de la lumière par les corps lumineux. Il paraît naturel d'admettre ce rayonnement de la chaleur dans l'intérieur des corps denses; seulement la chaleur rayonnante intérieure est totalement interceptée par les molécules très voisines de celle qui les chauffe, et dont l'action échauffante ne s'étend alors qu'à une très petite distance. C'est à l'expérience à nous apprendre si cette distance est perceptible; nous la supposerons imperceptible, comme la sphère d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

Imaginons présentement une barre cylindrique très mince et recouverte d'un vernis, qui ne permette point à sa chaleur de se répandre latéralement au dehors. Une lame infiniment mince A de la barre, et perpendiculaire à sa longueur, sera échauffée par celles qui la pré-

cèdent, et échauffera celles qui la suivent. En nommant donc x la coordonnée de la lame ou sa distance à la première extrémité de la barre, et u sa température; en nommant pareillement $x - s$ la coordonnée d'une lame qui la précède, et dont nous désignerons par u' la température, l'action réciproque des deux lames tendra à échauffer la lame A proportionnellement à la différence $u' - u$ de leurs températures, car cette différence, multipliée par une constante K, peut représenter la différence de leurs rayonnements caloriques l'une sur l'autre. Si l'on nomme ensuite u , la température d'une lame dont la coordonnée est $x + s$, la différence $u - u'$, multipliée par la constante K exprimera la chaleur qu'elle reçoit de la lame A; $K(u' - u) - K(u - u')$ ou $K(u' - 2u + u')$ exprimera donc la chaleur qui accroît la température de la lame A. Il faut multiplier cette quantité par ds et par la fonction qui exprime la loi de l'action échauffante relative à la distance, loi que nous désignerons par $\varphi(s)$. La différence des chaleurs reçues et communiquées par la lame A sera donc

$$K \int ds (u' - 2u + u) \varphi(s),$$

l'intégrale étant prise depuis s nul jusqu'au delà de la sphère d'action sensible de la chaleur; et, comme à cette limite la chaleur décroît avec une extrême rapidité à mesure que s augmente, cette intégrale peut être prise depuis s nul jusqu'à s infini. Maintenant on a, en réduisant en série u' et u , par rapport aux puissances de s ,

$$u' - 2u + u = s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

On peut ne considérer que le premier terme de la série, et alors on a

$$K \int ds (u' - 2u + u) \varphi(s) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \int s^2 ds \varphi(s).$$

Maintenant l'accroissement de température de la lame A, dans l'instant dt , est proportionnelle à cette quantité multipliée par l'élément dt du temps. En supposant donc que la caractéristique différentielle d

ne se rapporte qu'au temps t , on aura

$$du = a dt \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

a étant une constante dépendante de la nature du corps. Si l'on fait, dans cette équation aux différences partielles, $at = t'$, elle deviendra

$$du = dt' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et u sera fonction de x et t' . Ainsi, en supposant deux barres de diverses matières, mais de dimensions égales, échauffées l'une et l'autre à l'origine et de la même manière à leur première extrémité toujours entretenue à ce même degré de température, u sera, relativement aux deux barres, la même fonction de x et de t' ou at ; les temps nécessaires pour que deux lames correspondantes dans chaque barre parviennent à la même température seront donc réciproques aux constantes at relatives à ces barres. Si donc on nomme plus *conductible* la barre qui arrive en moins de temps à une température donnée, on pourra représenter par a la conductibilité de la matière. Mais la barre qui arrive le plus promptement à la même température peut n'être pas celle qui, dans le même temps, conduit à une distance donnée le plus de chaleur; car la chaleur conduite dans un temps donné dépend à la fois de la conductibilité de la matière et de sa chaleur spécifique, c'est-à-dire de la chaleur nécessaire pour élever d'un même degré sa température.

Dans le cas général où l'on considère les trois dimensions d'un corps solide, la même analyse fait voir que $\frac{\partial u}{\partial t}$ est égal à une constante multipliée par la somme des trois différences partielles secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, x, y, z étant les trois coordonnées de la molécule.

Cette équation n'est relative qu'au mouvement de la chaleur dans l'intérieur du corps; pour avoir celle de son mouvement à la surface, nous observerons que la perte de chaleur du corps est due à la chaleur qu'il rayonne au dehors. Ce rayonnement est produit, non seulement

par la surface, mais encore par les couches qui en sont extrêmement voisines et qui sont comprises dans la sphère d'action sensible de la chaleur. En vertu de ce rayonnement, la surface parvient en très peu d'instants à la température du vide ou du milieu qui l'environne, et il s'établit très promptement une loi régulière d'accroissement de la chaleur, depuis cette surface jusqu'à une très petite profondeur égale au rayon de la sphère d'action de la chaleur. En nommant u la température de la couche à cette profondeur, les variations de la chaleur des couches supérieures jusqu'à la surface seront proportionnelles à celles de u , la chaleur du milieu environnant étant prise pour le terme zéro. Ainsi les quantités de chaleur émises au dehors, dans l'instant dt , par chacune de ces couches, étant proportionnelles à sa température, elles seront proportionnelles à u , et par conséquent la perte de chaleur du corps lui sera aussi proportionnelle. C'est ce qui a été supposé jusqu'ici par les physiciens; mais ils imaginaient que la surface elle-même avait une température plus élevée que celle du milieu qui l'environne, ce qui est contraire à la loi de continuité. La considération d'une action de la chaleur *ad distans* a donc encore l'avantage de faire disparaître cette difficulté et de donner des idées justes et précises du mouvement de la chaleur à la surface comme à l'intérieur des corps.

La théorie de l'écoulement des liquides par une très petite ouverture faite à la base du vase qui les contient nous fournit un exemple de ces lois régulières de mouvement qui s'établissent dans un temps très court. On sait que la vitesse du liquide qui s'écoule devient très promptement proportionnelle à la racine carrée de sa hauteur au-dessus de l'ouverture, et que l'on peut, sans erreur sensible, calculer par cette loi la quantité de fluide écoulé, en négligeant celle qui s'écoule avant que la loi soit établie; la même chose a lieu par rapport à l'écoulement de la chaleur, et l'équation de cet écoulement, fondée sur la proportionnalité de la chaleur écoulée dans l'instant dt à la température u , peut être employée sans crainte d'erreur sensible. En réunissant cette équation à celle du mouvement de la chaleur à l'intérieur, on pourra déterminer, pour un instant quelconque, la tempé-

ture de tous les points du corps. Le reste est une affaire d'analyse et devient étranger à l'objet de cette Note, dans laquelle j'ai cherché à établir que les phénomènes de la nature se réduisent en dernière analyse à des actions *ad distans* de molécule à molécule, et que la considération de ces actions doit servir de base à la théorie mathématique de ces phénomènes. Mais, de même que les géomètres avaient été conduits aux équations du mouvement de la lumière dans l'atmosphère, en partant d'une supposition inexacte, de même l'hypothèse de l'action de la chaleur limitée au contact peut conduire aux équations du mouvement de la chaleur dans l'intérieur et à la surface des corps. Je dois observer que M. Fourier est déjà parvenu à ces équations, dont les véritables fondements me paraissent être ceux que je viens de présenter.

La considération de l'action mutuelle de molécules de la matière fournit encore une démonstration directe du principe des vitesses virtuelles; car, en décomposant les actions réciproques des corps en actions de molécule à molécule, on peut facilement s'assurer que ce principe n'est que l'expression analytique et générale des conditions auxquelles ces actions doivent être assujetties dans l'état d'équilibre. Lorsqu'un point est en équilibre entre des forces quelconques, il est aisé de voir que, si l'on fait varier infiniment peu la position du point, en sorte qu'il soit assujéti aux conditions de son mouvement, et qu'il reste toujours sur la surface ou sur la courbe qu'il doit suivre quand il n'est pas libre, la somme des forces qui le sollicitent, multipliées chacune par l'espace qu'il parcourt suivant sa direction, est égale à zéro [(*Mécanique céleste*, Livre I, n° 3) ⁽¹⁾].

Considérons maintenant un système de points, que nous nommerons a , liés entre eux d'une manière quelconque et assujettis à se mouvoir sur des courbes ou sur des surfaces données. On peut concevoir ces courbes, ces surfaces, et généralement les liens inflexibles qui unissent ces points, comme étant formés eux-mêmes d'une infinité de

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. I, p. 11.

points b liés fixement entre eux par des droites immatérielles et inviolables; mais les lignes flexibles et inextensibles qui unissent les points a peuvent être conçues comme formées de points b , unis par des droites immatérielles qui peuvent tourner librement autour de ces points. Cela posé, l'action des points a les uns sur les autres, quand elle n'est pas immédiate, se transmet au moyen des points b . Un point a agit sur le point b qui lui est contigu; celui-ci agit sur le point b le plus voisin, et ainsi de suite jusqu'à un second point a qui agit de la même manière sur un troisième. Dans ces actions réciproques, la distance mutuelle de deux points b voisins reste constante; en sorte que, en nommant f la distance infiniment petite qui les sépare, et p leur action mutuelle, qui, par l'égalité de l'action à la réaction, est la même pour les deux points, le produit $p\delta f$ est nul, δf étant une variation de f compatible avec les conditions de la liaison des parties du système; car, f étant constant suivant ces conditions, δf est nul. Dans la nature, δf n'est pas rigoureusement nul, et, quelle que soit la force qui unit les points b consécutifs, une force quelconque peut toujours faire varier la distance qui les sépare; mais cette variation est d'autant moindre que la force de cohésion est plus grande; en sorte que la rigidité et l'inextensibilité sont des abstractions qui servent de limites à ces qualités des corps. Pour concevoir l'action immédiate d'un point a sur un autre point, on peut imaginer chacun de ces points au centre d'une sphère immatérielle et impénétrable qui ne permette pas à ces points de s'approcher au delà d'une limite égale à la somme des rayons des deux sphères. Dans le choc, les deux sphères se touchent, et la distance f qui sépare les points est à son minimum. La variation δf est donc nulle, et en nommant p leur action mutuelle, le produit $p\delta f$ sera nul. Ainsi la pression d'un point a sur une surface peut être considérée comme le choc de ce point contre un point b de la surface. En concevant ces points au centre des deux sphères que nous venons d'imaginer, la distance f de ces points au moment du choc sera la somme des rayons des sphères, et elle sera perpendiculaire à la surface. Le choc ayant lieu dans la direction de

cette distance, il se fera suivant la direction de la normale. En nommant donc p l'action mutuelle des deux points ou la pression du point a sur la surface, le produit $p\delta f$ sera nul, parce qu'alors δf est la variation de la normale, variation qui est nulle lorsque le point a est assujéti à se mouvoir sur la surface.

Cela posé, considérons un des points quelconques a ou b du système. On peut toujours le concevoir comme un point isolé; mais alors il faut le supposer sollicité, non seulement par des forces extérieures, mais encore par l'action des points du système dont il est infiniment voisin. Soient donc S la force extérieure qui le sollicite, et s la direction de cette force; soient encore f la distance de ce point à un autre infiniment voisin, et p l'action mutuelle de ces deux points. On a, par le principe des vitesses virtuelles, qui, comme on l'a vu, a lieu pour un point isolé,

$$0 = S\delta s + \Sigma p\delta f,$$

le signe caractéristique intégral Σ comprenant tous les termes du même genre que celui devant lequel il est placé, et δf étant la variation de f due à la variation de la première extrémité de cette distance ou du point que l'on considère. On formera des équations semblables pour chaque point du système. En les réunissant, l'action p dans leur somme sera multipliée par $\delta f + \delta f$, δf étant la variation de f relative à sa seconde extrémité; en sorte que $\delta f + \delta f = \delta f$. On a donc

$$(1) \quad 0 = \Sigma S\delta s + \Sigma p\delta f.$$

Mais on a, par ce qui précède, $0 = p\delta f$; par conséquent on a

$$0 = \Sigma S\delta s,$$

ce qui est le principe connu des vitesses virtuelles.

J'ai donné, dans le Livre I de la *Mécanique céleste*, n° 14 (1), l'équation (1), et j'ai cherché, dans le même numéro, à établir que $\Sigma p\delta f$ est nul. Cela est évident lorsque les points du système sont liés par des

(1) *Oeuvres de Laplace*, T. I, p. 42.

Oeuvres de L. — XII.

droites inflexibles ou des fils inextensibles dont f est la longueur, car alors ∂f est nul. Cela est encore visible lorsqu'il y a des corps qui peuvent glisser le long de ces fils; dans tous ces cas, p représente la tension du fil, qui est la même dans toute sa longueur; cette longueur restant toujours la même, $p \partial f$ est nul. Mais la manière dont nous venons d'envisager l'action mutuelle des corps, en la décomposant en actions de molécule à molécule, rend généralement évidente l'égalité de $p \partial f$ à zéro, et par conséquent aussi celle de $\Sigma S \partial s$ à zéro.

Il est visible que la démonstration précédente a également lieu pour un système de corps formé, en tout ou en partie, de liquides. Elle suppose seulement que les liens immatériels que l'on imagine entre les divers points du système ne sont ni élastiques ni extensibles avec résistance; autrement le principe des vitesses virtuelles, tel que nous venons de l'énoncer, cesserait d'être exact, et il faudrait y faire entrer la considération de ces forces d'élasticité et de résistance.

MÉMOIRE

SUR LES

APPROXIMATIONS DES FORMULES

QUI SONT FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES

ET SUR

LEUR APPLICATION AUX PROBABILITÉS.



MÉMOIRE
SUR LES
APPROXIMATIONS DES FORMULES
QUI SONT FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES
ET SUR
LEUR APPLICATION AUX PROBABILITÉS ⁽¹⁾.

Mémoires de l'Académie des Sciences, 1^{re} Série, T. X, année 1809; 1810.

L'analyse conduit souvent à des formules dont le calcul numérique, lorsqu'on y substitue de très grands nombres, devient impraticable, à cause de la multiplicité des termes et des facteurs dont elles sont composées. Cet inconvénient a lieu principalement dans la théorie des probabilités, où l'on considère les événements répétés un grand nombre de fois. Il est donc utile alors de pouvoir transformer ces formules en séries d'autant plus convergentes que les nombres substitués sont plus considérables. La première transformation de ce genre est due à Stirling, qui réduisit de la manière la plus heureuse, dans une série semblable, le terme moyen du binôme élevé à une haute puissance; et le théorème auquel il parvint peut être mis au rang des plus belles choses que l'on ait trouvées dans l'analyse. Ce qui frappa surtout les géomètres, et spécialement Moivre, qui s'était occupé longtemps de cet objet, fut l'introduction de la racine carrée de la circonférence dont le rayon est l'unité, dans une recherche qui semblait étrangère à cette transcendante. Stirling y était arrivé au moyen de

⁽¹⁾ Lu le 9 avril 1810.

l'expression de la circonférence par une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des produits en nombre infini, expression que Wallis avait donnée. Ce moyen indirect laissait à désirer une méthode directe et générale pour obtenir, non seulement l'approximation du terme moyen du binôme, mais encore celle de beaucoup d'autres formules plus compliquées et qui s'offrent à chaque pas dans l'analyse des hasards. C'est ce que je me suis proposé dans divers Mémoires publiés dans les Volumes de l'Académie des Sciences pour les années 1778 et 1782 ⁽¹⁾. La méthode que j'ai présentée dans ces Mémoires transforme généralement en séries convergentes les intégrales des équations linéaires aux différences ordinaires ou partielles, finies et infiniment petites, lorsqu'on substitue de grands nombres dans ces intégrales. Elle s'étend encore à beaucoup d'autres formules semblables, telles que les différences très élevées des fonctions. Ces séries ont le plus souvent pour facteur la racine carrée de la circonférence, et c'est la raison pour laquelle cette transcendante s'est offerte à Stirling; mais, quelquefois, elles renferment des transcendentes supérieures dont le nombre est infini.

Parmi les formules que j'ai transformées de cette manière, l'une des plus remarquables est celle de la différence finie de la puissance d'une variable. Mais on a fréquemment besoin, dans les questions de probabilités, de ne considérer qu'une partie de ses termes et de l'arrêter quand la variable, par ses diminutions successives, devient négative. Ce cas a lieu, par exemple, dans le problème où l'on cherche la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbes d'un nombre quelconque de comètes est comprise dans des limites données, toutes les inclinaisons étant également possibles, problème dont la solution sert à reconnaître si ces orbes participent à la tendance primitive des orbes des planètes et des satellites pour se rapprocher du plan de l'équateur solaire. En résolvant ce problème, par la méthode que j'ai donnée pour ce genre de questions dans le Volume de l'Académie des Sciences de

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, T. IX et X.

l'année 1778 ⁽¹⁾, la probabilité dont il s'agit est exprimée par la différence finie de la puissance d'une variable qui décroît uniformément, les degrés de la puissance et de la différence étant le nombre même des orbes que l'on considère, et la formule devant être arrêtée quand la variable devient négative. Le calcul numérique de cette formule est impraticable pour les comètes déjà observées; car il faut considérer près de cinquante termes très composés et qui, étant alternativement positifs et négatifs, se détruisent presque entièrement; de sorte que, pour avoir le résultat final de leur ensemble, il faudrait les calculer séparément avec une précision supérieure à celle que l'on peut obtenir au moyen des Tables les plus étendues de logarithmes. Cette difficulté m'a longtemps arrêté: je suis enfin parvenu à la vaincre en considérant le problème sous un point de vue nouveau, qui m'a conduit à exprimer la probabilité cherchée, par une série convergente, dans le cas général où les facilités des inclinaisons suivent une loi quelconque. Ce problème est identique avec celui dans lequel on cherche la probabilité que la moyenne des erreurs d'un grand nombre d'observations sera comprise dans des limites données, et il résulte de ma solution que, en multipliant indéfiniment les observations, leur résultat moyen converge vers un terme fixe, de manière que, en prenant de part et d'autre de ce terme un intervalle quelconque aussi petit que l'on voudra, la probabilité que le résultat tombera dans cet intervalle finira par ne différer de la certitude que d'une quantité moindre que toute grandeur assignable. Ce terme moyen se confond avec la vérité si les erreurs positives et négatives sont également possibles, et généralement ce terme est l'abscisse de la courbe de facilité des erreurs correspondante à l'ordonnée du centre de gravité de l'aire de cette courbe, l'origine des abscisses étant celle des erreurs.

En comparant les deux solutions du problème obtenues par les méthodes dont je viens de parler, on a, par des séries convergentes, la valeur de la différence finie des puissances élevées d'une variable

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, T. IX.

et celles de beaucoup d'autres fonctions pareilles, en les arrêtant au point où la variable devient négative; mais, ce moyen étant indirect, j'ai cherché une méthode directe pour obtenir ces approximations, et j'y suis parvenu à l'aide d'équations aux différences partielles finies et infiniment petites dont ces fonctions dépendent, ce qui conduit à divers théorèmes curieux. Ces approximations se déduisent encore très simplement du passage réciproque des résultats imaginaires aux résultats réels, dont j'ai donné divers exemples dans les Mémoires cités de l'Académie des Sciences et tout récemment dans le Tome VIII du *Journal de l'École Polytechnique*. Il est analogue à celui des nombres entiers positifs, aux nombres négatifs et aux nombres fractionnaires, passage dont les géomètres ont su tirer, par induction, beaucoup d'importants théorèmes; employé comme lui avec réserve, il devient un moyen fécond de découvertes, et il montre de plus en plus la généralité de l'analyse. J'ose espérer que ces recherches, qui servent de supplément à celles que j'ai données autrefois sur le même objet, pourront intéresser les géomètres.

Pour appliquer ces recherches aux orbes des comètes, j'ai considéré toutes celles que l'on a observées jusqu'en 1807 inclusivement. Leur nombre s'élève à quatre-vingt-dix-sept et, parmi elles, cinquante-deux ont un mouvement direct et quarante-cinq un mouvement rétrograde; l'inclinaison moyenne de leurs orbes à l'écliptique diffère très peu de la moyenne de toutes les inclinaisons possibles ou d'un demi-angle droit. On trouve par les formules de ce Mémoire que, en supposant les inclinaisons, ainsi que les mouvements directs et rétrogrades, également faciles, la probabilité que les résultats observés devraient se rapprocher davantage de leur état moyen est beaucoup trop faible pour indiquer dans ces astres une tendance primitive à se mouvoir tous sur un même plan et dans le même sens. Mais, si l'on applique les mêmes formules aux mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites, on voit que cette double tendance est indiquée avec une probabilité bien supérieure à celle du plus grand nombre des faits historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute.

I.

On suppose toutes les inclinaisons à l'écliptique également possibles depuis zéro jusqu'à l'angle droit, et l'on demande la probabilité que l'inclinaison moyenne de n orbites sera comprise dans des limites données.

Désignons l'angle droit par h , et représentons par k la loi de facilité des inclinaisons d'une orbite. Ici k sera constant depuis l'inclinaison nulle jusqu'à l'inclinaison h . Au delà de cette limite, la facilité est nulle; on pourra donc généralement représenter la facilité par $k(1 - \frac{t}{h})$, pourvu qu'on ne fasse commencer son second terme qu'à l'inclinaison h et que l'on suppose l égal à l'unité dans le résultat du calcul.

Cela posé, nommons $t, t_1, t_2, \dots$ les inclinaisons des n orbites, et supposons leur somme égale à s , nous aurons

$$t + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} = s.$$

La probabilité de cette combinaison est évidemment le produit des probabilités des inclinaisons $t, t_1, t_2, \dots$ et par conséquent elle est égale à $k^n (1 - \frac{t}{h})^n$. En prenant la somme de toutes les probabilités relatives à chacune des combinaisons dans lesquelles l'équation précédente a lieu, on aura la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites sera égale à s . Pour avoir cette somme de probabilités, on observera que l'équation précédente donne

$$t = s - t_1 - t_2 - \dots - t_{n-1}.$$

Si l'on suppose d'abord $t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$ constants, les variations de t ne dépendront que de celles de t_1 et pourront s'étendre depuis t nul, auquel cas t_1 est égal à $s - t_2 - \dots - t_{n-1}$, jusqu'à

$$t = s - t_2 - \dots - t_{n-1},$$

ce qui rend t_1 nul. La somme de toutes les probabilités relatives à ces variations est évidemment

$$k^n (1 - \frac{t}{h})^n (s - t_2 - t_3 - \dots - t_{n-1}).$$

Il faut ensuite multiplier cette fonction par dt_2 et l'intégrer depuis t_2 nul jusqu'à $t_2 = s - t_2 - \dots - t_{n-1}$, ce qui donne

$$\frac{k^n (1 - t^n)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (s - t_2 - \dots - t_{n-1})^n.$$

En continuant ainsi jusqu'à la dernière variable, on aura la fonction

$$\frac{k^n (1 - t^n)^n s^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}.$$

Il faut enfin multiplier cette fonction par ds et l'intégrer dans les limites données, que nous représenterons par $s - e$ et $s + e'$, et l'on aura

$$\frac{k^n (1 - t^n)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} [(s + e')^n - (s - e)^n]$$

pour la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans ces limites. Mais on doit faire ici une observation importante. Un terme quelconque, tel que $Q t^h (s - e)^n$, ne peut avoir lieu qu'autant qu'un nombre r des variables $t, t_1, \dots, t_{n-1}$ commence à surpasser h ; car ce n'est qu'ainsi que le facteur t^h peut être introduit. Il faut alors augmenter chacune d'elles de la quantité h dans l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} = s,$$

ce qui revient à faire partir ces variables de zéro, en diminuant s de rh . Le terme $Q t^h (s - e)^n$ devient ainsi $Q t^h (s - rh - e)^n$. De plus, comme les variables $t, t_1, \dots$ sont nécessairement positives, ce terme doit être rejeté lorsque $s - rh - e$ commence à devenir négatif. Par ce moyen, la fonction précédente devient, en y faisant $l = 1$,

$$\begin{aligned} & \frac{k^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[(s + e')^n - n(s + e' - h)^n \right. \\ & \quad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (s + e' - 2h)^n \\ & \quad - \dots \\ & \quad - (s - e)^n + n(s - e - h)^n \\ & \quad - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (s - e - 2h)^n \\ & \quad + \dots \left. \right]. \end{aligned}$$

en rejetant les termes dans lesquels la quantité sous le signe de la puissance est négative. Cet artifice, étendu à des lois quelconques de facilités, donne une méthode générale pour déterminer la probabilité que l'erreur d'un nombre quelconque d'observations sera comprise dans des limites données. [Voir les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1778, page 240 et suivantes (*).]

Pour déterminer k , nous ferons $n = 1$, $s + e' = h$ et $s - e$ nul. La formule précédente devient alors kh ; mais cette quantité doit être égale à l'unité, puisqu'il est certain que l'inclinaison doit tomber entre zéro et h . On a donc

$$k = \frac{1}{h},$$

ce qui change la formule précédente dans celle-ci

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot h^n} \left[(s + e')^n - n(s + e' - h)^n \right. \\ & \quad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (s + e' - 2h)^n \\ & \quad - \dots \\ & \quad - (s - e)^n + n(s - e - h)^n \\ & \quad - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (s - e - 2h)^n \\ & \quad + \dots \left. \right] \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait $s + e' = nh$ et $s - e = 0$, la probabilité que la somme des inclinaisons sera comprise entre zéro et nh , étant la certitude ou l'unité, la formule précédente donne

$$n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^n - \dots = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n,$$

ce que l'on sait d'ailleurs.

II.

Appliquons cette formule aux inclinaisons des orbites des planètes. La somme des inclinaisons des autres orbites à celle de la Terre était,

(*) *Oeuvres de Laplace*, T. IX, p. 396 et suivantes.

en degrés décimaux, de $91^{\circ}, 4187$ au commencement de 1801. Si l'on fait varier les inclinaisons depuis zéro jusqu'à la demi-circonférence, on fait disparaître la considération des mouvements rétrogrades; car le mouvement direct se change en rétrograde quand l'inclinaison surpasse un angle droit. Ainsi la formule précédente donnera la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites des dix autres planètes à l'écliptique ne surpassera pas $91^{\circ}, 4187$, en y faisant $n = 10^6$, $h = 200^{\circ}$, $s + e = 91^{\circ}, 4187$, $s - e = 0$. On trouve alors cette probabilité égale à $\frac{1,0972}{(10)^{18}}$; par conséquent, la probabilité que la somme des inclinaisons doit surpasser celle qui a été observée est égale à $1 - \frac{1,0972}{(10)^{18}}$. Cette probabilité approche tellement de la certitude que le résultat observé devient invraisemblable dans la supposition où toutes les inclinaisons sont également possibles. Ce résultat indique donc avec une très grande probabilité l'existence d'une cause primitive qui a déterminé les orbites des planètes à se rapprocher du plan de l'écliptique ou, plus naturellement, du plan de l'équateur solaire. Il en est de même du sens du mouvement des onze planètes, qui est celui de la rotation du Soleil. La probabilité que cela n'a pas dû avoir lieu est $1 - \frac{1}{2^{16}}$. Mais, si l'on considère que les dix-huit satellites observés jusqu'ici font leurs révolutions dans le même sens que leurs planètes respectives, et que les rotations observées, au nombre de treize dans les planètes, les satellites et l'anneau de Saturne, sont encore dirigées dans le même sens, on aura $1 - \frac{1}{2^{21}}$ pour la probabilité que cela n'a pas dû avoir lieu dans l'hypothèse d'une égale possibilité des mouvements directs et rétrogrades. Ainsi l'existence d'une cause commune qui a dirigé ces mouvements dans le sens de la rotation du Soleil est indiquée par les observations avec une probabilité extrême.

Voyons maintenant si cette cause a influé sur les mouvements des comètes. Le nombre de celles qu'on a observées jusqu'en 1807 inclusivement, en comptant pour la même les diverses apparitions de celle de 1759, est de quatre-vingt-dix-sept, dont cinquante-deux ont un

mouvement direct et quarante-cinq un mouvement rétrograde. La somme des inclinaisons des orbites des premières est de $2622^{\circ}, 944$ et celle des inclinaisons des orbites des autres est de $2490^{\circ}, 089$. L'inclinaison moyenne de toutes ces orbites est de $51^{\circ}, 87663$. Si dans la formule (a) de l'article précédent on suppose $e' = e$ et $s = \frac{1}{2}nh$, elle devient

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n.2^n} \left[\left(n + \frac{2e}{h} \right)^n - n \left(n + \frac{2e}{h} - 2 \right)^n + \frac{n(n-1)}{1.2} \left(n + \frac{2e}{h} - 4 \right)^n - \dots - \left(n - \frac{2e}{h} \right)^n + n \left(n - \frac{2e}{h} - 2 \right)^n - \dots \right].$$

Dans le cas présent, $n = 97$, $h = 100^{\circ}$, $e = 182^{\circ}, 033$, et alors elle donne la probabilité que la somme des inclinaisons doit être comprise dans les limites $50^{\circ} \pm 1^{\circ}, 87664$; mais le nombre considérable des termes de cette formule et la précision avec laquelle il faut avoir chacun d'eux en rend le calcul impraticable. Il est donc indispensable de chercher une méthode d'approximation pour ce genre d'expressions analytiques ou de résoudre le problème d'une autre manière. C'est ce que j'ai fait par la méthode suivante.

III.

Je conçois l'intervalle h divisé dans un nombre infini $2i$ de parties que je prends pour l'unité, et je considère la fonction

$$e^{e\sqrt{-1}} + e^{-(i-1)\pi\sqrt{-1}} + \dots + e^{-\pi\sqrt{-1}} + 1 + e^{\pi\sqrt{-1}} + \dots + e^{(i-1)\pi\sqrt{-1}} + e^{e\pi\sqrt{-1}},$$

en désignant maintenant par e le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

En l'élevant à la puissance n , le coefficient de $e^{e\pi\sqrt{-1}}$ du développement de cette puissance exprimera le nombre des combinaisons dans lesquelles la somme des inclinaisons des orbites est égale à h . Cette puissance peut être mise sous la forme

$$(1 + 2 \cos \pi + 2 \cos 2\pi + \dots + 2 \cos i\pi)^n.$$

En la multipliant par $d\sigma e^{-i\sigma\sqrt{-1}}$, le terme multiplié par $e^{i\sigma\sqrt{-1}}$ dans le développement de la puissance deviendra indépendant de σ dans le produit; d'où il est facile de conclure que l'on aura le coefficient de ce terme en prenant l'intégrale

$$(a') \quad \frac{1}{\pi} \int d\sigma \cos t\sigma (1 + 2 \cos \sigma + \dots + 2 \cos i\sigma)^n.$$

depuis σ nul jusqu'à $\sigma = \pi$, π étant la demi-circonférence ou 200° , car les termes de l'intégrale dépendants de σ ne redeviennent tous nuls à la fois, et, pour la première fois, que dans ces limites.

Maintenant on a

$$1 + 2 \cos \sigma + \dots + 2 \cos i\sigma = \frac{\cos i\sigma - \cos(i+1)\sigma}{1 - \cos \sigma} = \cos i\sigma + \frac{\cos \frac{1}{2}\sigma \sin i\sigma}{\sin \frac{1}{2}\sigma}.$$

Soit $i\sigma = t$, on aura

$$\cos i\sigma + \frac{\cos \frac{1}{2}\sigma \sin i\sigma}{\sin \frac{1}{2}\sigma} = \cos t + \frac{\cos \frac{t}{2i} \sin t}{\sin \frac{t}{2i}}.$$

Le second membre de cette équation devient, à cause de i infini,

$$2t \frac{\sin t}{t}.$$

De plus, si l'on fait

$$t = ir\sqrt{n},$$

on aura

$$\cos i\sigma = \cos rt\sqrt{n}.$$

La fonction (a') devient donc

$$(a'') \quad \frac{(2i)^n}{i\pi} \int dt \cos rt\sqrt{n} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n.$$

On a, en réduisant $\sin t$ en série,

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n &= n \log \left(1 - \frac{1}{1.2.3} t^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5} t^4 - \dots \right) \\ &= -\frac{nt^2}{6} - \frac{n}{180} t^4 - \dots, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\sin t}{t} \right)^n = e^{-\frac{nt^2}{6} - \frac{n}{180} t^4 - \dots} = e^{-\frac{nt}{180} \left(t - \frac{n}{180} t^3 - \dots \right)},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. La fonction (a'') prend alors cette forme

$$(a'') \quad \frac{(2i)^n}{i\pi} \int dt \cos rt\sqrt{n} e^{-\frac{nt}{180} \left(t - \frac{n}{180} t^3 - \dots \right)}.$$

Considérons les différents termes de cette fonction. On a d'abord, en réduisant en série $\cos rt\sqrt{n}$ et faisant $t' = t\sqrt{\frac{n}{6}}$,

$$\int dt \cos rt\sqrt{n} e^{-\frac{nt}{180} \left(t - \frac{n}{180} t^3 - \dots \right)} = \sqrt{\frac{6}{n}} \int dt' e^{-t'^2} \left(1 - \frac{t'^2}{1.2} 6t'^2 + \frac{t'^4}{1.2.3.4} 6^2 t'^4 - \dots \right).$$

L'intégrale doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini, parce que t étant infini, t ou $i\sigma$ devient infini à la limite $\sigma = \pi$; l'intégrale relative à t' doit donc être prise depuis t' nul jusqu'à t' infini. Dans ce cas, on a, comme je l'ai fait voir dans les *Mémoires cités de l'Académie des Sciences* pour l'année 1778⁽¹⁾,

$$\int dt' e^{-t'^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

On a ensuite, en intégrant par parties,

$$\int t'^2 dt' e^{-t'^2} = -\frac{1}{2} t' e^{-t'^2} + \frac{1}{2} \int dt' e^{-t'^2}.$$

En prenant l'intégrale depuis t' nul jusqu'à t' infini, ce second membre se réduit à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$. Généralement on a, dans les mêmes limites,

$$\int t'^{2m} dt' e^{-t'^2} = \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2^m} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

On aura donc

$$\int dt \cos rt\sqrt{n} e^{-\frac{nt}{180} \left(t - \frac{n}{180} t^3 - \dots \right)} = \sqrt{\frac{6}{n}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{(1)^2 t^4}{1.2} - \dots \right) = \sqrt{\frac{6}{n}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{2} t^2}.$$

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, T. IX, p. 447.

Le premier terme de la fonction (a^n) devient ainsi

$$\frac{(2i)^n}{2i\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{6}{n}} e^{-\frac{1}{2}r^2}.$$

Considérons présentement le terme

$$\int n t^4 dt e^{-\frac{r^2}{4}} \cos rt \sqrt{n}.$$

En intégrant par parties, ce terme devient

$$-3t^3 e^{-\frac{r^2}{4}} \cos rt \sqrt{n} + 3 \int e^{-\frac{r^2}{4}} d(t^3 \cos rt \sqrt{n}).$$

Mais on a

$$3 \int e^{-\frac{r^2}{4}} d(t^3 \cos rt \sqrt{n}) = 9 \int t^2 dt e^{-\frac{r^2}{4}} \cos rt \sqrt{n} + 3r \frac{d}{dr} \int t^3 dt e^{-\frac{r^2}{4}} \cos rt \sqrt{n};$$

on a ensuite

$$\int t^3 dt e^{-\frac{r^2}{4}} \cos rt \sqrt{n} = -\frac{3t}{n} e^{-\frac{r^2}{4}} \cos rt \sqrt{n} + \frac{3}{n} \int e^{-\frac{r^2}{4}} d(t \cos rt \sqrt{n})$$

et

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{r^2}{4}} d(t \cos rt \sqrt{n}) &= \int dt \cos rt \sqrt{n} e^{-\frac{r^2}{4}} + r \frac{d}{dr} \int dt e^{-\frac{r^2}{4}} \cos rt \sqrt{n} \\ &= \sqrt{\frac{6}{n}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(e^{-\frac{1}{2}r^2} + r \frac{d}{dr} e^{-\frac{1}{2}r^2} \right). \end{aligned}$$

En réunissant ces valeurs et prenant l'intégrale depuis t nul jusqu'à t infini, on aura

$$\int n t^4 dt e^{-\frac{r^2}{4}} \cos rt \sqrt{n} = \frac{3^2}{n} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} e^{-\frac{1}{2}r^2} (1 - 6r^2 + 3r^4).$$

On peut obtenir facilement de cette autre manière l'intégrale

$$\int dt \cos rt \sqrt{n} t^f e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Pour cela, on substituera, au lieu de $\cos rt \sqrt{n}$, sa valeur $\frac{e^{it\sqrt{n}} + e^{-it\sqrt{n}}}{2}$.

Considérons d'abord l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int dt e^{it\sqrt{n}} t^f e^{-\frac{r^2}{4}};$$

nous la mettrons sous cette forme

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}r^2} \int dt e^{-\frac{1}{4}(t\sqrt{n} - 3r\sqrt{-1})^2} t^f.$$

Faisons

$$\frac{t\sqrt{n} - 3r\sqrt{-1}}{\sqrt{6}} = t',$$

cette intégrale deviendra

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}r^2} \sqrt{\frac{6}{n}} \int dt' e^{-t'^2} \frac{(t'\sqrt{6} + 3r\sqrt{-1})^f}{n^f}.$$

Mais elle doit être prise depuis $t' = -\frac{3r\sqrt{-1}}{\sqrt{6}}$ jusqu'à l'infini. La partie $\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}r^2}$ de $\cos rt \sqrt{n}$ donnera pareillement l'intégrale

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}r^2} \sqrt{\frac{6}{n}} \int dt' e^{-t'^2} \frac{(t'\sqrt{6} - 3r\sqrt{-1})^f}{n^f},$$

l'intégrale étant prise depuis $t' = \frac{3r\sqrt{-1}}{\sqrt{6}}$ jusqu'à l'infini. De là il est aisé de conclure que l'intégrale $\int dt t^f \cos rt \sqrt{n} e^{-\frac{r^2}{4}}$ est égale à

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}r^2} \sqrt{\frac{6}{n}} \int dt' e^{-t'^2} \frac{(t'\sqrt{6} - 3r\sqrt{-1})^f}{n^f},$$

l'intégrale étant prise depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = +\infty$, ou, ce qui revient au même, à la partie réelle de l'intégrale

$$e^{-\frac{1}{2}r^2} \sqrt{\frac{6}{n}} \int dt' e^{-t'^2} \frac{(t'\sqrt{6} + 3r\sqrt{-1})^f}{n^f},$$

l'intégrale étant prise depuis t' nul jusqu'à t' infini. En faisant $2f = 4$, on a

$$\int dt t^4 \cos rt \sqrt{n} e^{-\frac{r^2}{4}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}r^2}}{n^2 \sqrt{n}} 3^2 (1 - 6r^2 + 3r^4) \sqrt{\frac{3}{2}\pi},$$

ce qui coïncide avec le résultat précédent.

La fonction (a^n) sera ainsi réduite dans la série descendante suivant les puissances de n ,

$$\frac{(2i)^n}{2i\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{6}{n}} e^{-\frac{2}{3}r^2} \left[1 - \frac{3}{20n} (1 - 6r^2 + r^4) - \dots \right].$$

On aura la somme de toutes les fonctions comprises entre $-l$ et $+l$, en observant que i est la différentielle de l ; or cette différentielle est $i dr\sqrt{n}$; on peut donc substituer $dr\sqrt{n}$ au lieu de $\frac{1}{i}$. La somme de toutes les fonctions dont il s'agit est ainsi, en doublant l'intégrale,

$$(2i)^n \sqrt{\frac{6}{\pi}} \int_{-\frac{l}{\sqrt{n}}}^{\frac{l}{\sqrt{n}}} dr e^{-\frac{2}{3}r^2} \left[1 - \frac{3}{20n} (1 - 6r^2 + 3r^4) + \dots \right].$$

Pour avoir la probabilité que la somme des inclinaisons sera comprise entre $-l$ et $+l$, il faut diviser la fonction précédente par le nombre de toutes les combinaisons possibles, et ce nombre est $(2i)^n$. On a donc, pour cette probabilité,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{6}{\pi}} \int_{-\frac{l}{\sqrt{n}}}^{\frac{l}{\sqrt{n}}} dr e^{-\frac{2}{3}r^2} \left[1 - \frac{3}{20n} (1 - 6r^2 + 3r^4) + \dots \right] \\ &= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left[\int_{-\frac{l}{\sqrt{n}}}^{\frac{l}{\sqrt{n}}} dr e^{-\frac{2}{3}r^2} - \frac{3r}{20n} (1 - r^2) e^{-\frac{2}{3}r^2} \right]. \end{aligned}$$

Mais on a

$$2i = h, \quad \frac{l}{i} = r\sqrt{n};$$

les limites de l'intégrale sont donc $-\frac{h}{2}r\sqrt{n}$ et $+\frac{h}{2}r\sqrt{n}$; par conséquent la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbites sera comprise dans les limites $\frac{1}{2}h - \frac{rh}{2\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{2}h + \frac{rh}{2\sqrt{n}}$, sera exprimée par l'intégrale précédente.

Si l'on fait $\frac{2}{3}r^2 = s^2$, cette intégrale devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int ds e^{-s^2} \left[1 - \frac{3}{20n} (1 - 4s^2 + \frac{1}{3}s^4) + \dots \right]$$

ou

$$(a^{1/2}) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int ds e^{-s^2} - \frac{1}{20n} e^{s^2} (3s - 2s^3) + \dots \right].$$

Lorsque la valeur de s à sa limite est fort grande, alors $\int ds e^{-s^2}$ approche de $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, de manière à en différer moins que d'une grandeur quelconque donnée, si l'on augmente indéfiniment le nombre n ; de plus, les termes suivants $-\frac{1}{20n} e^{-s^2} (3s - 2s^3)$ deviennent alors entièrement insensibles. On peut donc, par l'accroissement de n , resserrer à la fois les limites $\pm \frac{h}{2\sqrt{n}}$ et augmenter en même temps la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbites tombera entre les limites $\frac{1}{2}h \pm \frac{rh}{2\sqrt{n}}$, de manière que la différence de la certitude à cette probabilité et l'intervalle compris entre ces limites soient moindres que toute grandeur assignable.

Lorsque s est fort petit, on a, par une série convergente,

$$\int ds e^{-s^2} = s - \frac{1}{1.2} \frac{s^3}{3} + \frac{1}{1.2.3} \frac{s^5}{5} - \dots$$

Cette série peut être employée lorsque s ne surpasse pas $\frac{2}{3}$; mais lorsqu'il le surpasse, on peut faire usage de la fraction continue que j'ai donnée dans le Livre X de la *Mécanique céleste*,

$$\int ds e^{-s^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-s^2}}{2s} \left(\frac{1}{1 + \frac{q}{2q}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3q}{2q}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4q}{1 + \dots}} \right),$$

q étant égal à $\frac{1}{2s^2}$. La fraction continue $\frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \dots}}$ se réduit, suivant

que l'on s'arrête au premier, au second, ... termes dans les fractions suivantes, alternativement plus grandes et plus petites que la fraction continue :

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1+q}, \quad \frac{1+2q}{1+3q}, \quad \frac{1+5q}{1+6q+3q^2}, \quad \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2}, \quad \dots$$

Les numérateurs de ces fractions se déduisent les uns des autres, en

observant que le numérateur de la fraction $i^{\text{ème}}$ est égal au numérateur de la fraction $(i-1)^{\text{ème}}$, plus au numérateur de la fraction $(i-2)^{\text{ème}}$ multiplié par $(i-1)q$. Les dénominateurs se déduisent les uns des autres de la même manière.

IV.

Nous pouvons maintenant appliquer nos formules aux comètes observées, en faisant usage des données de l'article II. On a, d'après ces données,

$$n = 97, \quad h = 100^6,$$

$$\frac{rh}{2\sqrt{n}} = 1^6,87763,$$

ce qui donne

$$s = \frac{1^6,87763}{100^6} 2\sqrt{97} \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,452731.$$

On peut ici faire usage de l'expression de l'intégrale $\int ds e^{-s^2}$ en série, et alors on a

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int ds e^{-s^2} = 0,4941.$$

La probabilité que l'inclinaison moyenne doit être comprise dans les limites $50^6 \pm 1^6,87763$ est, par la formule (d''), égale à 0,4933, ou $\frac{1}{2}$ à fort peu près; la probabilité que cette inclinaison doit être au-dessous est donc $\frac{1}{4}$, et la probabilité qu'elle doit être au-dessus est $\frac{1}{4}$. Toutes ces probabilités sont trop peu différentes de $\frac{1}{2}$ pour que le résultat observé fasse rejeter l'hypothèse d'une égale facilité des inclinaisons des orbites, et pour indiquer l'existence d'une cause primitive qui a influé sur ces inclinaisons, cause que l'on ne peut s'empêcher d'admettre dans les inclinaisons des orbites planétaires.

La même chose a lieu par rapport au sens du mouvement. La probabilité que, sur quatre-vingt-dix-sept comètes, quarante-cinq au plus seront rétrogrades, est la somme des quarante-six premiers termes du binôme $(p+q)^n$, en faisant $p=q=\frac{1}{2}$; mais la somme des quarante-huit premiers est la moitié du binôme ou $\frac{1}{2}$; d'où il est

facile de conclure que la probabilité cherchée est

$$\frac{1}{2} - \frac{97 \cdot 96 \dots 50}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 48 \cdot 2^{47}} \left(1 + \frac{48}{50} + \frac{48 \cdot 47}{50 \cdot 51} \right).$$

Or on a

$$\frac{97 \cdot 96 \dots 50}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 48 \cdot 2^{47}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 97}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 49)^2} \frac{49}{2^{47}};$$

de plus, on a généralement, lorsque s est un grand nombre,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s = s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12s} + \dots \right),$$

ce qui donne

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 97}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 49)^2} \frac{49}{2^{47}} = \frac{\left(\frac{48,5}{49} \right)^{99} \frac{1165}{1164} e}{\sqrt{\pi} \cdot 48,5 \left(\frac{589}{588} \right)^2}.$$

On trouve ainsi la probabilité cherchée égale à 0,2713, fraction beaucoup trop grande pour qu'elle puisse indiquer une cause qui ait favorisé, dans l'origine, les mouvements directs. Ainsi la cause qui a déterminé le sens des mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites ne paraît pas avoir influé sur le mouvement des comètes.

V.

Si l'on néglige les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$, l'intégrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int ds e^{-s^2}$ ou $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{3}{2}} \int dr e^{-\frac{3}{2}r^2}$ exprime la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites sera comprise dans les limites $\frac{h}{2} - \frac{rh}{2\sqrt{n}}$ et $\frac{h}{2} + \frac{rh}{2\sqrt{n}}$; mais cette même probabilité est, par l'article II, égale à

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^n} \left[(n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n+r\sqrt{n}-4)^n - \dots - (n-r\sqrt{n})^n + n(n-r\sqrt{n}-2)^n - \dots \right];$$

cette fonction est donc égale à l'intégrale précédente. Or on a, sans l'exclusion des quantités négatives élevées à la puissance n dans le premier membre, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & (n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2} (n+r\sqrt{n}-4)^n - \dots \\ & = (n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \dots \\ & + (n-r\sqrt{n})^n - n(n-r\sqrt{n}-2)^n + \dots \end{aligned}$$

Le premier membre est, comme l'on sait, égal à $1.2.3 \dots n.2^n$; la seconde expression de la probabilité devient ainsi, en éliminant $(n-r\sqrt{n})^n - n(n-r\sqrt{n}-2)^n + \dots$ au moyen de sa valeur donnée par l'équation précédente,

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n.2^{n-1}} [(n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \dots - 1.2.3 \dots n.2^{n-1}];$$

en l'égalant à l'intégrale qui exprime la même probabilité, on aura cette équation remarquable

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1.2.3 \dots n.2^n} [(n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2} (n+r\sqrt{n}-4)^n - \dots - 1.2.3 \dots n.2^{n-1}] \\ & = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int dr e^{-\frac{1}{2}r^2}. \end{aligned} \right.$$

Si, au lieu d'éliminer $(n-r\sqrt{n})^n - n(n-r\sqrt{n}-2)^n + \dots$, on éliminait $(n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \dots$, on aurait une équation qui coïnciderait avec la précédente, en y faisant r négatif; ainsi cette équation a lieu, r étant positif ou négatif, l'intégrale devant commencer avec r , et la série des différences devant s'arrêter lorsque la quantité élevée à la puissance n devient négative.

L'équation (b) différenciée par rapport à r donne

$$\frac{\sqrt{n}}{1.2.3 \dots (n-1)2^n} [(n+r\sqrt{n})^{n-1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} + \dots] = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r^2};$$

en différenciant encore, on aura

$$\frac{n}{1.2.3 \dots (n-2)2^n} [(n+r\sqrt{n})^{n-2} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-2} + \dots] = -3r \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r^2}.$$

En continuant de différencier ainsi, on aura d'une manière très approchée les valeurs des différentielles successives du premier membre de l'équation (b), pourvu que le nombre de ces différentiations soit très petit relativement au nombre n . Toutes ces équations ont lieu, r étant positif ou négatif; et lorsque r est nul, elles deviennent

$$\frac{\sqrt{n}}{1.2.3 \dots (n-1)2^n} [n^{n-1} - n(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-4)^{n-1} - \dots] = \sqrt{\frac{3}{2\pi}},$$

$$\frac{n}{1.2.3 \dots (n-2)2^n} [n^{n-2} - n(n-2)^{n-2} + \dots] = 0,$$

$$\frac{n\sqrt{n}}{1.2.3 \dots (n-3)2^n} [n^{n-3} - n(n-2)^{n-3} + \dots] = -3\sqrt{\frac{3}{2\pi}},$$

$$\frac{n^2}{1.2.3 \dots (n-4)2^n} [n^{n-4} - n(n-2)^{n-4} + \dots] = 0,$$

Les seconds membres de ces équations sont zéro, lorsque l'exposant de la puissance est de la forme $n-2s$, ce qu'il est facile de voir d'ailleurs, en observant que

$$n^{n-2s} - n(n-2)^{n-2s} + \dots$$

est la moitié de la série $n^{n-2s} - n(n-2)^{n-2s} + \dots$, sans l'exclusion des quantités négatives élevées à la puissance $n-2s$, série qui, étant la différence finie n^{inc} d'une puissance moindre que n , est nulle.

On peut, en intégrant successivement l'équation (b), obtenir des théorèmes analogues sur les différences des puissances supérieures à n ; ainsi l'on a par une première intégration

$$(b') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1.2.3 \dots (n+1)\sqrt{n}.2^n} [(n+r\sqrt{n})^{n+1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n+1} + \dots - N_n] \\ & = \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int \int dr^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}, \end{aligned} \right.$$

les intégrales commençant avec r , et N_n étant égal à

$$n^{n+1} - n(n-2)^{n+1} + \dots$$

Pour déterminer cette fonction, nous observerons que l'on a

$$\begin{aligned} n^{n+1} - n(n-2)^{n+1} + \dots \\ = n \left[n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-4)^n - \dots \right] \\ + 2n \left[(n-1 + r'\sqrt{n-1})^n - (n-1)(n-1 + r'\sqrt{n-1} - 2)^n + \dots \right] \end{aligned}$$

en faisant $r'\sqrt{n-1} = -1$. On a ensuite

$$n^n - n(n-2)^n + \dots = 1.2.3 \dots n.2^{n-1},$$

car le premier membre de cette équation est la moitié de la série des différences, sans l'exclusion des quantités négatives élevées à la puissance n . De plus, si l'on change, dans l'équation (b'), n dans $n-1$, r en r' , et si l'on y suppose ensuite $r' = -\frac{1}{\sqrt{n-1}}$, on aura à très peu près

$$\begin{aligned} (n-1 + r'\sqrt{n-1})^n - (n-1)(n-1 + r'\sqrt{n-1} - 2)^n + \dots \\ = N_{n-1} + 1.2.3 \dots n \sqrt{n-1}.2^{n-1} \left[-\frac{1}{2\sqrt{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \right]. \end{aligned}$$

On aura donc

$$N_n = 2nN_{n-1} + 1.2.3 \dots n.2^{n-1} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{n}{\sqrt{n-1}};$$

si l'on fait

$$N_n = 1.2.3 \dots n.2^n \delta_n,$$

on aura

$$\delta_n - \delta_{n-1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{n}{\sqrt{n-1}},$$

ce qui donne à très peu près, en intégrant,

$$\delta_n = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{3} (n+1) \sqrt{n};$$

il est facile de voir que l'on peut négliger ici la constante arbitraire.

Donc

$$N_n = 1.2.3 \dots (n+1) 2^n \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2\pi}},$$

partant

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2.3 \dots (n+1) 2^n \sqrt{n}} \left[(n + r\sqrt{n})^{n+1} - n(n + r\sqrt{n} - 2)^{n+1} + \dots \right] \\ = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} + \frac{1}{3} r + \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \iint dr^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}. \end{aligned}$$

En intégrant de nouveau, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2.3 \dots (n+2) 2^n \sqrt{n}} \left[(n + r\sqrt{n})^{n+2} - n(n + r\sqrt{n} - 2)^{n+2} + \dots \right. \\ \left. - n^{n+2} + n(n-2)^{n+2} - \dots \right] \\ = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{r}{3} + \frac{1}{3} r^2 + \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \iint \iint dr^3 e^{-\frac{1}{2}r^2}, \end{aligned}$$

toutes les intégrales devant commencer avec r . Mais on a

$$n^{n+2} - n(n-2)^{n+2} + \dots = 1.2.3 \dots (n+2) 2^{n-1} \frac{n}{6}.$$

En effet, on a, comme on sait,

$$\Delta^n u = \left(e^{\frac{du}{dx}} - 1 \right)^n$$

en appliquant à la caractéristique d les exposants des puissances de $\frac{du}{dx}$, dans le développement du second membre de cette équation, et x étant la variation de x . Si l'on fait $u = x^{n+2}$, on aura, sans exclusion des puissances des quantités négatives,

$$\begin{aligned} (x+2n)^{n+2} - n(x+2n-\alpha)^{n+2} + \dots \\ = 1.2.3 \dots (n+2) \alpha^n \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha n x}{2} + \frac{\alpha^2 n^2}{8} + \frac{\alpha^3 n}{3.8} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne sans cette exclusion, et faisant $x = -n$ et $\alpha = 2$,

$$n^{n+2} - n(n-2)^{n+2} + \dots = 1.2.3 \dots (n+2) 2^n \frac{n}{6},$$

et, avec l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^{n+2} - n(n-2)^{n+2} + \dots = 1.2.3 \dots (n+2)2^{n-1} \frac{n}{6};$$

on a donc

$$\frac{1}{1.2.3 \dots (n+2)2^n n} [(n+r\sqrt{n})^{n+2} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n+2} + \dots] \\ = \frac{1}{12} + \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{r}{3} + \frac{1}{4} r^2 + \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \iint \iint dr^3 e^{-\frac{3}{2}r^2},$$

et ainsi de suite.

VI.

Le problème que nous avons résolu dans l'article I, relativement aux inclinaisons, est le même que celui dans lequel on se propose de déterminer la probabilité que l'erreur moyenne d'un nombre n d'observations sera comprise dans des limites données, en supposant que les erreurs de chaque observation puissent également s'étendre dans l'intervalle h . Nous allons maintenant considérer le cas général dans lequel les facilités des erreurs suivent une loi quelconque.

Divisons l'intervalle h , dans un nombre infini de parties $i+i'$, les erreurs négatives pouvant s'étendre depuis zéro jusqu'à $-i$, et les erreurs positives depuis zéro jusqu'à i' . Pour chaque point de l'intervalle h , élevons des ordonnées qui expriment les facilités des erreurs correspondantes; nommons q le nombre des parties comprises depuis l'ordonnée relative à l'erreur zéro jusqu'à l'ordonnée du centre de gravité de l'aire de la courbe formée par ces ordonnées. Cela posé, représentons par $\varphi\left(\frac{s}{i+i'}$ la probabilité de l'erreur s pour chaque observation, et considérons la fonction

$$\varphi\left(\frac{-i}{i+i'}\right) e^{-i\varpi\sqrt{-1}} + \varphi\left[\frac{-(i-1)}{i+i'}\right] e^{-(i-1)\varpi\sqrt{-1}} + \dots \\ + \varphi\left(\frac{0}{i+i'}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{i'-1}{i+i'}\right) e^{(i'-1)\varpi\sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{i'}{i+i'}\right) e^{i'\varpi\sqrt{-1}}.$$

En élevant cette fonction à la puissance n , le coefficient de $e^{r\varpi\sqrt{-1}}$

dans le développement de cette puissance sera la probabilité que la somme des erreurs de n observations sera r , d'où il suit que, en multipliant la fonction précédente par $e^{-r\varpi\sqrt{-1}}$ et élevant le produit à la puissance n , le coefficient de $e^{r\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement de ce produit sera la probabilité que la somme des erreurs sera $r+nq$. Ce produit est

$$(o) \quad \left[\sum \varphi\left(\frac{r}{i+i'}\right) e^{(r-q)\varpi\sqrt{-1}} \right]^n,$$

le signe $\sum$ devant s'étendre depuis $r = -i$ jusqu'à $r = i'$. Si l'on fait

$$\frac{r}{i+i'} = \frac{x}{h}, \quad \frac{q}{i+i'} = \frac{q'}{h}, \quad \frac{1}{i+i'} = \frac{dx}{h},$$

la fonction (o) devient, en réduisant les exponentielles en séries,

$$\frac{(i+i')^n}{h^n} \left[\int \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx + (i+i')\varpi\sqrt{-1} \int \frac{x-q'}{h} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx \right. \\ \left. - \frac{(i+i')^2}{1.2} \varpi^2 \int \frac{(x-q')^2}{h^2} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx + \dots \right]^n;$$

x est l'abscisse dont l'ordonnée est $\varphi\left(\frac{x}{h}\right)$, l'origine des abscisses correspondant à l'ordonnée relative à l'erreur zéro; q' est l'abscisse correspondante à l'ordonnée du centre de gravité de l'aire de la courbe; les intégrales doivent être prises depuis $x = \frac{-ih}{i+i'}$ jusqu'à $x = \frac{i'h}{i+i'}$. On a, par la nature du centre de gravité de la courbe,

$$\int \frac{x-q'}{h} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx = 0;$$

en faisant

$$k = \int \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx, \quad k' = \int \frac{(x-q')^2}{h^2} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx, \quad \dots,$$

la fonction précédente devient ainsi

$$\frac{(i+i')^n}{h^n} k^n \left[1 - \frac{k'}{2k} (i+i')^2 \varpi^2 + \dots \right]^n.$$

Si, conformément à l'analyse de l'article IV, on multiplie la fonction (o) par $2 \cos t \varpi$, le terme indépendant de ϖ dans le produit exprimera la probabilité que la somme des erreurs sera ou $nq - t$ ou $nq + t$; en multipliant ce produit par $d\varpi$, et intégrant depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \pi$, l'intégrale divisée par π exprimera cette probabilité qui sera ainsi, en rejetant les puissances impaires de ϖ , qui sont multipliées par $\sqrt{-1}$ et qui résultent du développement des sinus de ϖ et de ses multiples dans la fonction (o).

$$(o') \quad \frac{(i+i')^n k^n}{h^n} \frac{2}{\pi} \int \cos t \varpi \left[1 - \frac{k'}{2k} (i+i')^2 \varpi^2 + \dots \right]^n d\varpi.$$

Soit présentement

$$(i+i')\varpi = t;$$

on aura

$$\log \left[1 - \frac{k'}{2k} (i+i')^2 \varpi^2 + \dots \right]^n = n \log \left(1 - \frac{k'}{2k} t^2 + \dots \right) = n \left(-\frac{k'}{2k} t^2 + \dots \right),$$

ce qui donne pour $\left[1 - \frac{k'}{2k} (i+i')^2 \varpi^2 + \dots \right]^n$ une expression de cette forme

$$e^{-\frac{k'}{2k} n t^2} (1 + \Lambda n t^2 + \dots).$$

La fonction (o') deviendra donc

$$(o'') \quad \frac{(i+i')^n k^n}{h^n} \frac{2}{\pi} \frac{1}{i+i'} \int \cos \frac{t}{i+i'} dt e^{-\frac{k'}{2k} n t^2} (1 + \Lambda n t^2 + \dots).$$

L'erreur de chaque observation devant nécessairement tomber dans l'intervalle h , on a

$$\frac{(i+i')k}{h} = 1.$$

Soit $\frac{t}{i+i'} = r\sqrt{n}$; l'expression précédente deviendra, en n'ayant égard qu'à son premier terme,

$$\frac{2}{\pi(i+i')} \int \cos r\sqrt{n} e^{-\frac{k'}{2k} n r^2} dr,$$

ce qui, en intégrant depuis t nul jusqu'à t infini, devient, par l'analyse de l'article III,

$$\frac{2}{(i+i')\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'n}} e^{-\frac{k}{2k'n} r^2}.$$

Si l'on multiplie cette fonction par dl , en l'intégrant on aura la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $nq \pm t$ ou $nq \pm (i+i')r\sqrt{n}$; or on a

$$dl = (i+i') dr\sqrt{n};$$

cette probabilité sera donc

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int e^{-\frac{k}{2k'} r^2} dr,$$

$i+i'$ étant égal à h , et q' pouvant être substitué pour q , les limites précédentes deviendront

$$nq' \pm hr\sqrt{n},$$

et celles de la moyenne des erreurs seront

$$q' \pm \frac{rh}{\sqrt{n}}.$$

Dans le cas que nous avons considéré dans l'article III, q' est nul; $k = h$, $k' = \frac{1}{12}h$; l'expression précédente devient, en y faisant $r = \frac{1}{2}r'$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2}} \int e^{-\frac{1}{2} r'^2} dr',$$

et les limites de la moyenne des erreurs sont $\pm \frac{1}{2} \frac{r'h}{\sqrt{n}}$: ce qui est conforme à l'article cité.

En général, q' est nul lorsque la courbe des facilités des erreurs est symétrique de chaque côté de l'ordonnée correspondante à l'erreur zéro. Si la loi des facilités est représentée par $A(\frac{1}{2}h^2 - x^2)$, on aura

$$k = \frac{\Lambda}{6} h^2, \quad 2k' = \frac{\Lambda}{60} h^2$$

et, par conséquent,

$$\frac{k}{2k'} = 10;$$

ainsi la probabilité que l'erreur moyenne des observations sera comprise dans les limites $\pm \frac{rh}{\sqrt{n}}$ sera

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{10} \int e^{-10r^2} dr.$$

En appliquant à ce cas la méthode de l'article I, on aura l'expression de la même probabilité par une suite d'un très grand nombre de termes, analogue à celle des différences finies, par laquelle nous avons déterminé la probabilité dans le cas d'une égale facilité des erreurs. Mais cette nouvelle suite, que nous avons donnée dans les *Mémoires cités de l'Académie des Sciences* pour l'année 1778, page 249 ⁽¹⁾, est trop compliquée pour offrir par sa comparaison avec l'expression précédente de la probabilité des résultats qui puissent intéresser les géomètres.

Dans le cas où les erreurs peuvent s'étendre à l'infini, l'analyse précédente donne encore la probabilité que l'erreur moyenne d'un très grand nombre d'observations sera resserrée dans les limites données. Pour voir comment on peut alors appliquer cette analyse, supposons que $e^{-\frac{x^2}{h^2}}$ soit l'expression de la facilité des erreurs, l'exposant de e devant toujours être négatif et le même pour des erreurs égales positives et négatives. En supposant les erreurs positives, on aura

$$\int e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = p \left(1 - e^{-\frac{A}{2p}} \right),$$

en prenant l'intégrale depuis x nul jusqu'à $x = \frac{1}{2}h$. Pour avoir la valeur entière de k , il faut doubler cette quantité, parce que les erreurs négatives donnent une quantité égale à la précédente; en supposant donc h assez grand pour que $e^{-\frac{A}{2p}}$ disparaisse devant l'unité, ce qui a lieu exactement dans le cas de h infini, on aura à très peu près

$$k = 2p.$$

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. IX, p. 404.

On trouvera de la même manière, en prenant l'intégrale $\int \frac{x^2 dx}{h^2} e^{-\frac{x^2}{h^2}}$,

$$k' = \frac{4p^2}{h^2};$$

ainsi

$$\frac{k}{2k'} = \frac{h^2}{4p^2}.$$

La probabilité que l'erreur moyenne sera comprise dans les limites $\pm \frac{rh}{\sqrt{n}}$ sera donc

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{h}{2p} \int e^{-\frac{A}{4p^2}} dr.$$

Soit $rh = r'p$, les limites deviennent $\pm \frac{r'p}{\sqrt{n}}$, et la probabilité que l'erreur moyenne sera comprise dans ces limites devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{1}{4}r'^2} dr';$$

alors la considération de h supposé infini disparaît.

VII.

Le moyen qui nous a conduit à l'équation (b) de l'article V laissait à désirer une méthode directe pour y arriver; sa recherche est l'objet de l'analyse suivante.

Désignons par $\varphi(r, n)$ le second membre de cette équation qu'il s'agit de déterminer; en la différentiant par rapport à r , elle donnera

$$\frac{1}{1.2.3... (n-1) 2^n} [(n+r\sqrt{n})^{n-1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} + \dots] = \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi'(r, n),$$

$\varphi'(r, n)$, $\varphi''(r, n)$, ... désignant les différences successives de $\varphi(r, n)$, divisées par les puissances correspondantes de dr ; mais on a

$$\begin{aligned} & (n+r\sqrt{n})^{n-1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} (n+r\sqrt{n}-4)^{n-1} - \dots \\ &= (n-1+r'\sqrt{n-1})^{n-1} - (n-1)(n-1+r'\sqrt{n-1}-2)^{n-1} + \dots \\ &= (n-1+r''\sqrt{n-1})^{n-1} - (n-1)(n-1+r''\sqrt{n-1}-2)^{n-1} - \dots, \end{aligned}$$

en faisant

$$r'\sqrt{n-1} = r\sqrt{n} + 1, \quad r''\sqrt{n-1} = r\sqrt{n} - 1.$$

L'équation (b) donne, en y changeant n dans $n-1$,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot 2^{n-1}} \left[(n-1+r'\sqrt{n-1})^{n-1} - (n-1)(n-1+r'\sqrt{n-1}-2)^{n-1} + \dots \right. \\ \left. - (n-1+r''\sqrt{n-1})^{n-1} + (n-1)(n-1+r''\sqrt{n-1}-2)^{n-1} - \dots \right] \\ = \varphi(r', n-1) - \varphi(r'', n-1);$$

on a donc cette équation aux différences partielles finies et infiniment petites

$$(p) \quad \varphi(r', n-1) - \varphi(r'', n-1) = \frac{2}{\sqrt{n}} \varphi'(r, n).$$

On peut obtenir une seconde équation de cette manière; on a

$$(n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n+r\sqrt{n}-4)^n - \dots \\ = (n+r\sqrt{n})[(n+r\sqrt{n})^{n-1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} + \dots] \\ + 2n[(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} - (n-1)(n+r\sqrt{n}-4)^{n-1} + \dots].$$

L'équation (b) donne, en la différentiant par rapport à r ,

$$\frac{n+r\sqrt{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^n} [(n+r\sqrt{n})^{n-1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} + \dots] \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r}{n} \right) \varphi'(r, n),$$

et la même équation donne, en y changeant comme ci-dessus n dans $n-1$ et r en r' ,

$$\frac{2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^n} [(n-1+r'\sqrt{n-1})^{n-1} - (n-1)(n-1+r'\sqrt{n-1}-2)^{n-1} + \dots] \\ = \varphi(r', n-1) + \frac{1}{2};$$

donc

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^n} [(n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \dots] \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r}{n} \right) \varphi'(r, n) + \varphi(r', n-1) + \frac{1}{2};$$

substituant cette valeur dans l'équation (b), on aura

$$(q) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r}{n} \right) \varphi'(r, n) + \varphi(r', n-1) = \varphi(r, n).$$

Cette équation, combinée avec l'équation (p), donne

$$(q') \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r}{n} \right) \varphi'(r, n) + \varphi(r', n-1) = \varphi(r, n).$$

On a

$$r' = r \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \dots \right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \dots \right),$$

$$r'' = r \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \dots \right).$$

En substituant ces valeurs dans les équations (q) et (q') et en développant en série les fonctions $\varphi(r', n-1)$ et $\varphi(r'', n-1)$, on voit que ces deux équations ne diffèrent qu'en ce que les termes affectés de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ont des signes contraires; on peut donc évaluer séparément à zéro les termes du développement de l'équation (q) qui n'ont point $\sqrt{n}$ pour diviseur, et alors on a une équation de cette forme

$$(r) \quad \begin{cases} \frac{1}{2n} [3r\varphi'(r, n-1) + \varphi'(r, n-1)] \\ = \varphi(r, n) - \varphi(r, n-1) - \frac{r}{n} [\varphi'(r, n) - \varphi'(r, n-1)] \\ + \frac{M}{n^2} + \frac{M'}{n^3} + \dots, \end{cases}$$

$M, M', \dots$ étant des fonctions rationnelles et entières de r , multipliées par les différentielles de $\varphi(r, n-1)$, et qu'il est facile de former. On trouve ainsi

$$M = -\frac{3r}{8} \varphi'(r, n-1) - \frac{4+r^2}{8} \varphi''(r, n-1) \\ - \frac{r}{4} \varphi'''(r, n-1) - \frac{1}{24} \varphi^{IV}(r, n-1).$$

L'équation (p) donne, en l'intégrant et désignant par $\varphi_1(r, n)$

l'intégrale $\int dr \varphi(r, n)$, commençant avec r , et observant que

$$dr' = dr'' = \frac{dr \sqrt{n}}{\sqrt{n-1}},$$

$$\varphi(r', n-1) - \varphi(r'', n-1) = \frac{2}{\sqrt{n-1}} \varphi(r, n).$$

En substituant pour r' et r'' leurs valeurs précédentes et développant en série les fonctions $\varphi(r', n-1)$ et $\varphi(r'', n-1)$, on a une équation de cette forme

$$(r') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n-1}} [\varphi(r, n) - \varphi(r, n-1)] \\ &= \frac{1}{6n\sqrt{n-1}} [3r \varphi'(r, n-1) + \varphi''(r, n-1)] \\ &+ \frac{N}{n^2\sqrt{n-1}} + \frac{N'}{n^3\sqrt{n-1}} + \dots \end{aligned} \right.$$

$N, N', \dots$ étant des fonctions de la même nature que $M, M', \dots$ et qu'il est facile de former de la même manière; on trouve ainsi

$$N = \frac{3r}{8} \varphi'(r, n-1) + \frac{4+3r^2}{24} \varphi''(r, n-1) \\ + \frac{r}{12} \varphi'''(r, n-1) + \frac{1}{120} \varphi^{(iv)}(r, n-1).$$

Si l'on substitue dans l'équation (r), au lieu de $\varphi(r, n) - \varphi(r, n-1)$, sa valeur donnée par l'équation (r'), on aura

$$(s) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3n} [3r \varphi'(r, n-1) + \varphi''(r, n-1)] \\ &= -\frac{r}{6n^2} \frac{d}{dr} [3r \varphi'(r, n-1) + \varphi''(r, n-1)] \\ &+ \frac{M+N}{n^2} + \frac{M'+N'}{n^3} + \dots - \frac{r}{n^2} \frac{dN}{dr} - \frac{r}{n^3} \frac{dN'}{dr} - \dots \end{aligned} \right.$$

Pour intégrer cette équation, supposons

$$\varphi(r, n-1) = \Psi(r) + \frac{\Pi(r)}{n} + \frac{\Gamma(r)}{n^2} + \dots;$$

en substituant cette expression dans l'équation précédente, et compa-

rant les coefficients des puissances descendantes de n , on aura les équations suivantes

$$0 = 3r \Psi'(r) + \Psi''(r),$$

$$3r \Pi'(r) + \Pi''(r) = -\frac{1}{2} r \frac{d}{dr} [3r \Psi'(r) + \Psi''(r)] + 3(\bar{M} + \bar{N}),$$

$\bar{M}$ et $\bar{N}$ étant ce que deviennent M et N lorsqu'on y change $\varphi(r, n-1)$ dans $\Psi(r)$. En continuant ainsi on aura les équations nécessaires pour déterminer $\Gamma(r)$ et les fonctions suivantes.

La première équation donne, en l'intégrant,

$$\Psi'(r) = A e^{-\frac{3}{2}r^2},$$

A étant une constante arbitraire. Pour intégrer la seconde, on doit observer que les expressions précédentes de M et de N donnent

$$\bar{M} = \frac{3Ar}{4} (1-r^2) e^{-\frac{3}{2}r^2}, \quad \bar{N} = -\frac{3Ar}{20} (1-r^2) e^{-\frac{3}{2}r^2}.$$

L'équation en $\Pi(r)$ devient ainsi

$$3r \Pi'(r) + \Pi''(r) = \frac{36A}{20} (r-r^3) e^{-\frac{3}{2}r^2};$$

en la multipliant par $e^{\frac{3}{2}r^2}$ et intégrant, on aura

$$\Pi'(r) = B e^{-\frac{3}{2}r^2} + \frac{3A}{20} (6r^2 - 3r^4) e^{-\frac{3}{2}r^2},$$

B étant une seconde arbitraire. On aura de la même manière $\Gamma(r), \dots$ et l'on obtiendra ainsi $\varphi(r, n-1)$.

Pour déterminer les arbitraires $A, B, \dots$, nous observerons que, si l'on intègre $\int dr \varphi'(r, n-1)$ depuis r nul jusqu'à $r = \sqrt{n}$, ce qui revient à le prendre jusqu'à r infini, parce que l'on peut négliger les termes multipliés par l'exponentielle $e^{-\frac{3}{2}r^2}$, à cause de la grandeur supposée à n , on aura pour cette intégrale une quantité que nous

désignerons par $L\sqrt{\frac{3}{2n}}$, L étant une fonction linéaire de $A, \frac{B}{n}, \dots$; mais, lorsque $r = \sqrt{n}$, le premier membre de l'équation (b) devient, quel que soit n , égal à $\frac{1}{2}$; on a donc

$$L\sqrt{\frac{3}{2n}} = \frac{1}{2}.$$

En égalant à zéro dans cette équation les coefficients des puissances successives de $\frac{1}{n}$, on aura autant d'équations qui détermineront les arbitraires $A, B, \dots$; ainsi $\varphi'(r, n-1)$ étant, par ce qui précède, égal à

$$\left(A + \frac{B}{n} + \dots\right) e^{-\frac{1}{2}r^2} + \frac{3A}{20n} (6r^2 - 3r^4) e^{-\frac{1}{2}r^2} + \dots,$$

on a, en intégrant depuis r nul jusqu'à r infini,

$$\int dr \varphi'(r, n-1) = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(A + \frac{B}{n} + \frac{3A}{20n} + \dots\right);$$

égalant cette quantité à $\frac{1}{2}$ et comparant les puissances de $\frac{1}{n}$, on a

$$A = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \quad B = -\frac{3A}{20}, \quad \dots,$$

ce qui donne

$$\varphi'(r, n-1) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r^2} \left[1 - \frac{3}{20n} (1 - 6r^2 + 3r^4) + \dots\right].$$

En changeant n dans $n+1$ et négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n^2}$, on aura l'expression de $\varphi'(r, n)$ qui résulte des articles III et V; car on voit, par l'article V, que $\varphi(r, n)$ doit être un demi de la probabilité que nous avons déterminée dans l'article IV, et dont la moitié est égale à l'intégrale de dr multipliée par cette expression de $\varphi'(r, n)$.

VIII.

On peut réduire les équations (g) et (g') à une seule équation aux différences infiniment petites et finies. En effet, si dans l'équation (g)

on augmente r de $\frac{2}{\sqrt{n}}$; alors r'' se change dans r' , et l'on a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r + \frac{2}{\sqrt{n}}}{n}\right) \varphi'\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right) + \varphi(r', n-1) = \varphi\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right).$$

En retranchant de cette équation l'équation (g'), membre à membre, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\varphi'\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right) + \varphi'(r, n) \right] + \frac{r + \frac{2}{\sqrt{n}}}{n} \varphi'\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right) - \frac{r}{n} \varphi'(r, n) \\ = \varphi\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right) - \varphi(r, n). \end{aligned}$$

Soit $s = r\sqrt{n}$, et désignons $\varphi(r, n)$ par $\Psi(s)$, ce qui donne

$$dr \varphi'(r, n) = ds \Psi'(s)$$

et, par conséquent,

$$\varphi'(r, n) = \sqrt{n} \Psi'(s);$$

l'équation précédente deviendra

$$\Psi'(s+2) + \Psi'(s) = \Psi'(s+2) - \Psi'(s) - \frac{s+2}{n} \Psi'(s+2) + \frac{s}{n} \Psi'(s).$$

En différenciant, on aura

$$(x) \quad \begin{cases} \Psi''(s+2) + \Psi''(s) = [\Psi'(s+2) - \Psi'(s)] \frac{n-1}{n} \\ \quad - \frac{s+2}{n} \Psi''(s+2) + \frac{s}{n} \Psi''(s). \end{cases}$$

Cette équation est susceptible de la méthode générale que j'ai présentée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782, page 44 ⁽¹⁾. Je fais donc, conformément à cette méthode, et en employant les cosinus au lieu d'exponentielles,

$$\Psi'(s) = \int \cos t \Pi(t) dt.$$

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. X, p. 249.

Il s'agit de déterminer la fonction $\Pi(t)$ et les limites de l'intégrale. Pour cela, on substituera cette intégrale, au lieu de $\Psi'(s)$, dans l'équation (x), et l'on fera disparaître les coefficients $s+2$ et s de cette équation au moyen d'intégrations par parties; on aura ainsi

$$(y) \quad \begin{cases} 0 = \frac{t}{n} \sin(s+1)t \sin t \Pi(t) \\ + \int \sin(s+1)t \left[(t \cos t - \sin t) \Pi(t) - \frac{t \sin t}{n} \Pi'(t) \right] dt. \end{cases}$$

Suivant la méthode citée, on détermine $\Pi(t)$ en égalant à zéro la fonction sous le signe intégral, ce qui donne

$$0 = (t \cos t - \sin t) \Pi(t) - \frac{t \sin t}{n} \Pi'(t),$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\Pi(t) = A \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n$$

et, par conséquent,

$$\Psi'(s) = A \int \cos st \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt = A \int \cos rt \sqrt{n} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt,$$

A étant une constante arbitraire. On aura ensuite, par la même méthode, les limites de cette dernière intégrale en égalant à zéro la partie hors du signe $\int$ dans l'équation (y); or, cette partie est nulle lorsque t est nul et lorsque t est infini, parce que $\Pi(t)$ devient nul alors. On peut donc prendre $t = 0$ et $t = \infty$ pour ces limites. Cette expression de $\Psi'(s)$ est de la même forme que celle que nous avons trouvée dans l'article IV, pour la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites de n comètes sera $\frac{nh}{2} \pm \frac{rh\sqrt{n}}{2}$; et, en la traitant par la méthode de l'article cité, on arrivera, pour déterminer $\varphi(r, n)$, aux mêmes formules que nous venons de donner.

IX.

On peut étendre les recherches précédentes aux différences des puissances fractionnaires. Pour cela, considérons la fonction

$$(n-i)(n-i-1)(n-i-2)\dots(f-i)2^{n-i} \left[(n+r\sqrt{n})^{n-i} - n(n+r\sqrt{n}-1)^{n-i} + \frac{n, n-1}{1, 2} (n+r\sqrt{n}-4)^{n-i} + \dots \right],$$

i étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire très petit relativement à n , et f étant le nombre immédiatement supérieur à i . En désignant cette fonction par $\varphi(r, n)$, on aura d'abord, en suivant l'analyse précédente, l'équation (p). On aura ensuite, au lieu de l'équation (q), celle-ci

$$\frac{n}{n-i} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r}{n} \right) \varphi'(r, n) + \frac{n}{n-i} \varphi(r^2, n-1) = \varphi(r, n).$$

En combinant ces deux équations et réduisant en série, comme ci-dessus, on aura, en négligeant les puissances supérieures de $\frac{1}{n}$,

$$0 = 3r \varphi'(r, n-1) + \varphi'(r, n-1) + 3i \varphi(r, n-1),$$

et, en changeant $n-1$ en n ,

$$(u) \quad 0 = 3r \varphi'(r, n) + \varphi'(r, n) + 3i \varphi(r, n).$$

On satisfait à cette équation lorsque i est un nombre entier en faisant

$$\varphi(r, n) = A \frac{d^{n-1} e^{-\frac{1}{2} r^2}}{dr^{n-1}},$$

A étant une constante arbitraire et la caractéristique différentielle d devant être changée dans le signe intégral $\int$, si $i-1$ est négatif, et alors on obtient les résultats précédents; mais, si i est fractionnaire, l'intégration de l'équation (u) présente plus de difficultés. On peut l'obtenir alors par des intégrales définies.

Considérons le cas de $i = \frac{1}{2}$; on aura pour l'intégrale de l'équation (u)

$$\varphi(r, n) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{r^2}{x}} (a \cos rx + b \sin rx) dx,$$

a et b étant deux constantes arbitraires, et l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. En effet, si, conformément à la méthode exposée aux pages 49 et suivantes des *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782 (*), on fait

$$\varphi(r, n) = \int \cos rx \Psi(x) dx;$$

en substituant cette valeur dans l'équation différentielle (u), et faisant disparaître le coefficient r de cette équation au moyen des intégrations par parties, on aura

$$0 = 3x \cos rx \Psi(x) + \int \cos rx \left[\left(\frac{1}{2} - x^2 \right) dx \Psi(x) - 3 dx \Psi(x) \right].$$

Suivant la méthode citée, on détermine $\Psi(x)$ en égalant à zéro la partie sous le signe $\int$, et l'on a

$$0 = \left(\frac{1}{2} - x^2 \right) dx \Psi(x) - 3 dx \Psi(x),$$

équation qui, intégrée, donne

$$\Psi(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

On détermine ensuite les limites de l'intégrale en égalant à zéro la partie $3x \cos rx \Psi(x)$ hors du signe intégral. Cette partie devient

$$3a\sqrt{x} \cos rx e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

et elle est nulle avec x et lorsque x est infini. Ainsi l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \cos rx e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

doit être prise dans ces limites. Si, au lieu de l'intégrale

$$\int \cos rx \Psi(x) dx,$$

(*) Œuvres de Laplace, t. X, p. 254 et suiv.

nous eussions considéré celle-ci,

$$\int \sin rx \Psi(x) dx,$$

nous aurions trouvé pour $\Psi(x)$

$$\frac{b}{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

La réunion de ces deux intégrales est donc l'intégrale complète de l'équation (u).

Pour déterminer les constantes a et b , nous observerons que, si l'on fait $r = \sqrt{n}$ et $x = \frac{x'}{\sqrt{n}}$, l'intégrale $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{r^2}{x}} (a \cos rx + b \sin rx) dx$ devient

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \int \frac{dx'}{\sqrt{x'}} (a \cos x' + b \sin x') e^{-\frac{x'^2}{n}}.$$

Lorsque n est un très grand nombre, on peut supposer le facteur $e^{-\frac{x'^2}{n}}$ égal à l'unité, dans toute l'étendue de l'intégrale prise depuis x' nul jusqu'à x' infini, car alors ce facteur ne commence à s'écarter sensiblement de l'unité que lorsque x' est de l'ordre $\sqrt{n}$, et l'intégrale, prise depuis une valeur de cet ordre pour x' jusqu'à x' infini, peut être négligée relativement à l'intégrale entière. Maintenant on a, comme je l'ai fait voir dans le Tome VIII du *Journal de l'École Polytechnique*, page 248,

$$\int \frac{dx' \cos x'}{\sqrt{x'}} = \int \frac{dx' \sin x'}{\sqrt{x'}} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}.$$

L'intégrale précédente se réduit donc à

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2}\pi} \frac{a+b}{2};$$

c'est l'expression de $\varphi(r, n)$ lorsqu'on y fait $r = \sqrt{n}$. Alors on a

$$\varphi(r, n) = \frac{2^n}{1.3.5 \dots (2n-1)} \left[n^{\frac{n-1}{2}} - n(n-1)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-2)^{\frac{n-1}{2}} - \dots \right].$$

La formule (μ'') de la page 82 des *Mémoires de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾ pour l'année 1782 donne, en n'ayant égard qu'à son premier terme,

$$n^{\frac{n-1}{2}} - n(n-1)^{\frac{n-1}{2}} + \dots = \frac{1}{2^n} 1.3.5 \dots (2n-1) \sqrt{\frac{2}{n}},$$

on a donc

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}.$$

Si l'on fait ensuite dans $\varphi(r, n)$, $r = -\sqrt{n}$, cette fonction devient nulle; on a par conséquent

$$0 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x^2}{n}} (a \cos x \sqrt{n} - b \sin x \sqrt{n})$$

ou

$$0 = \int \frac{dx'}{\sqrt{x'}} (a \cos x' - b \sin x'),$$

ce qui donne

$$a = b.$$

Donc

$$a = b = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}$$

et, par conséquent,

$$\varphi(r, n) = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x^2}{n}} (\cos rx + \sin rx)$$

ou

$$\varphi(r, n) = \frac{1}{6n^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \int \frac{dx(9+2x^2)}{x^{\frac{3}{2}}} \sin rx \cdot e^{-\frac{x^2}{n}} \quad (2),$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

La même analyse nous conduit à déterminer généralement $\varphi(r, n)$, quel que soit le nombre i . En le supposant moindre que l'unité, on

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. X, p. 285.

⁽²⁾ Cette formule est fautive, puisque, pour $r = 0$, le second membre s'annule sans qu'il en soit de même du premier. La formule exacte est

$$\varphi(r, n) = \frac{1}{6n^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \int \sin rx \cdot e^{-\frac{x^2}{n}} \left(\frac{2x^2+3}{r} + 6x \right) \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

(Note de l'Éditeur.)

satisfera à l'équation différentielle (u) en $\varphi(r, n)$ par la supposition de

$$\varphi(r, n) = \int \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{x^{1-i}} (a \cos rx + b \sin rx) dx,$$

a et b étant des constantes que l'on déterminera ainsi.

En supposant $r = \sqrt{n}$, on aura

$$\varphi(r, n) = \frac{\Delta^n s^{n-i}}{(1-i)(2-i) \dots (n-i)},$$

s croissant de l'unité et étant nul à l'origine. La formule (μ'') de la page 82 des *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782 ⁽¹⁾ donne, en ne considérant que son premier terme,

$$\Delta^n s^{n-i} = (1-i)(2-i) \dots (n-i) \frac{s^i}{n^i};$$

on a donc, dans le cas de $r = \sqrt{n}$,

$$\varphi(r, n) = \frac{s^i}{n^i}.$$

Si l'on fait ensuite, dans l'expression précédente de $\varphi(r, n)$, $r = \sqrt{n}$ et $x = \frac{x'}{\sqrt{n}}$, elle devient

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \int \frac{1}{x'^{(1-i)}} e^{-\frac{x'^2}{n}} (a \cos x' + b \sin x') dx';$$

or on a, par les formules du Tome cité du *Journal de l'École Polytechnique*, page 250,

$$\int \frac{1}{x'^{(1-i)}} \cos x' dx' = \frac{k}{i} \cos \frac{i\pi}{2},$$

$$\int \frac{1}{x'^{(1-i)}} \sin x' dx' = \frac{k}{i} \sin \frac{i\pi}{2},$$

k étant l'intégrale $\int dt e^{-t^{\frac{1}{1-i}}}$ prise depuis t nul jusqu'à t infini; en prenant donc pour l'unité le facteur $e^{-\frac{x'^2}{n}}$, comme on le peut lorsque n est

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. X, p. 285.

un très grand nombre, l'expression de $\varphi(r, n)$ devient

$$\frac{k}{in^3} \left(a \cos \frac{i\pi}{2} + b \sin \frac{i\pi}{2} \right).$$

En l'égalant à $\frac{2^i}{n^i}$, on aura

$$a \cos \frac{i\pi}{2} + b \sin \frac{i\pi}{2} = \frac{i \cdot 2^i}{k n^3}.$$

En faisant ensuite $r = -\sqrt{n}$ dans $\varphi(r, n)$, il se réduit à zéro; mais alors, dans son expression en intégrale définie, $\sin rx$ se change dans $-\sin x \sqrt{n}$. De là il est facile de conclure que l'on a

$$0 = a \cos \frac{i\pi}{2} - b \sin \frac{i\pi}{2},$$

par conséquent

$$a = \frac{i \cdot 2^i}{2 k n^3 \cos \frac{i\pi}{2}}, \quad b = \frac{i \cdot 2^i}{2 k n^3 \sin \frac{i\pi}{2}}.$$

On a donc

$$\varphi(r, n) = \frac{i \cdot 2^i}{k n^3 \sin i\pi} \int \left(\sin \frac{i\pi}{2} \cos rx + \cos \frac{i\pi}{2} \sin rx \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{n}} dx}{x^{i-1}}.$$

ou

$$\varphi(r, n) = \frac{i \cdot 2^i}{k n^3 \sin i\pi} \int \frac{e^{-\frac{x^2}{n}} \sin \left(rx + \frac{i\pi}{2} \right) dx}{x^{i-1}}.$$

X.

On peut obtenir fort simplement tous les résultats qui précèdent par l'analyse suivante.

Considérons généralement l'intégrale $\int \frac{e^{-ix}}{x^{n-i+1}} dx$ prise depuis x nul jusqu'à x infini, $n-i$ étant égal à $i' + \frac{1}{2f}$, i' exprimant un nombre entier positif ou zéro. En intégrant par parties, depuis $x = x$ jusqu'à

x infini, on a

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^i e^{-ix}}{\frac{1}{2f} \left(\frac{1}{2f} + 1 \right) \left(\frac{1}{2f} + 2 \right) \dots (n-i) x^{\frac{1}{2f}}} \left[s^i - \frac{1}{2f} \frac{s^{i-1}}{x} + \frac{1}{2f} \left(\frac{1}{2f} + 1 \right) \frac{s^{i-2}}{x^2} + \dots \right. \\ & \quad \left. + (-1)^i \frac{1}{2f} \left(\frac{1}{2f} + 1 \right) \dots (n-i) \frac{1}{x^i} \right] \\ & \quad + \frac{(-1)^{i+1} s^{i+1}}{x^{\frac{1}{2f}}} \int \frac{dx e^{-ix}}{x^{\frac{1}{2f}}}. \end{aligned}$$

On a généralement

$$\Delta^n \frac{e^{-ix}}{x^{n-i}} = 0,$$

lorsqu'on suppose x infiniment petit; car, si l'on développe e^{-ix} dans une série ordonnée par rapport aux puissances de sx , toutes les puissances de s inférieures à n deviennent nulles dans la fonction $\Delta^n \frac{e^{-ix}}{x^{n-i}}$, et toutes les puissances égales à n ou supérieures sont nulles par la supposition de x infiniment petit. Il suit de là que $\Delta^n \int \frac{e^{-ix} dx}{x^{n-i+1}}$ est égal à

$$\frac{(-1)^{i+1} \Delta^n \left(s^{i+1} \int \frac{e^{-ix} dx}{x^{\frac{1}{2f}}} \right)}{\frac{1}{2f} \left(\frac{1}{2f} + 1 \right) \dots (n-i)},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini; or on a

$$\Delta^n \int \frac{e^{-ix} dx}{x^{n-i+1}} = \int \frac{e^{-ix} (e^{-x} - 1)^n dx}{x^{n-i+1}},$$

en faisant ensuite $x = \frac{x'}{s}$, on a

$$\int \frac{e^{-ix} dx}{x^{\frac{1}{2f}}} = \frac{1}{s^{\frac{1}{2f}-1}} \int \frac{e^{-x'} dx'}{x'^{\frac{1}{2f}}},$$

les deux intégrales étant prises depuis x et x' nuls jusqu'à leurs

valeurs infinies; on a donc

$$\int \frac{e^{-ix}(e^{-x}-1)^n dx}{x^{n-l+1}} = \frac{(-1)^{l+1} \Delta^n s^{n-l}}{\frac{1}{2f} \left(\frac{1}{2f} + 1 \right) \dots (n-l)} \int \frac{e^{-x'} dx'}{x'^{2f}},$$

ce qui donne

$$\Delta^n s^{n-l} = \frac{1}{2f} \left(\frac{1}{2f} + 1 \right) \dots (n-l) (-1)^{l+1} \frac{\int \frac{e^{-ix}(e^{-x}-1)^n dx}{x^{n-l+1}}}{\int \frac{e^{-x'} dx'}{x'^{2f}}},$$

équation qui est la même que la formule (μ'') des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1782 ⁽¹⁾, comme il est facile de s'en convaincre.

Supposons $l' = n-1$ et f un nombre entier positif. Si l'on fait $s = -\frac{n}{2} - \frac{r\sqrt{n}}{2}$, l'intégrale $\int \frac{e^{-ix}(e^{-x}-1)^n dx}{x^{n-l+1}}$ deviendra

$$\int \frac{e^{\frac{1}{2}rx\sqrt{n}} dx}{x^{\frac{1}{2f}}} \left(\frac{e^{-x}}{x} - e^{\frac{x}{2}} \right)^n.$$

Faisons $x = 2x'\sqrt{-1}$, et alors cette dernière intégrale se transforme dans la suivante

$$\frac{(-1)^n 2\sqrt{-1}}{(2\sqrt{-1})^{\frac{1}{2f}}} \int \frac{1}{x'^{\frac{1}{2f}}} (\cos rx'\sqrt{n} + \sqrt{-1} \sin rx'\sqrt{n}) \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n dx';$$

on a donc

$$(x) \left\{ \begin{aligned} \Delta^n s^{n-l} &= \frac{1}{2f} \left(\frac{1}{2f} + 1 \right) \dots (n-l) \frac{2\sqrt{-1}}{(2\sqrt{-1})^{\frac{1}{2f}}} \\ &\times \frac{\int \frac{1}{x'^{\frac{1}{2f}}} (\cos rx'\sqrt{n} + \sqrt{-1} \sin rx'\sqrt{n}) \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n dx'}{\int \frac{e^{-x'} dx'}{x'^{\frac{1}{2f}}}}, \end{aligned} \right.$$

les intégrales étant prises depuis x' nul jusqu'à $x' = \pm \infty$.

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. X, p. 287.

Supposons d'abord f infini; on a généralement $k^{\frac{1}{2f}} = 1$ en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{2f}$; car si l'on fait $k^{\frac{1}{2f}} = 1 + q$, en prenant les logarithmes, on aura

$$\frac{1}{2f} \log k = \log(1 + q),$$

ce qui donne

$$q = \frac{1}{2f} \log k.$$

Cela posé, l'équation précédente devient

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\frac{n-1+\frac{1}{2f} \Delta^n s^{n-1+\frac{1}{2f}}}{2} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{2f} 2^n \int (\sqrt{-1} \cos rx'\sqrt{n} - \sin rx'\sqrt{n}) \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n dx'; \end{aligned} \right.$$

or on a, avec l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$\frac{n-1+\frac{1}{2f} \Delta^n s^{n-1+\frac{1}{2f}}}{2} = \frac{1}{2f} \left[(n+r\sqrt{n})^{n-1+\frac{1}{2f}} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1+\frac{1}{2f}} + \dots \right] \\ - (-1)^{\frac{1}{2f}} \left[(n+r\sqrt{n})^{n-1+\frac{1}{2f}} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1+\frac{1}{2f}} + \dots \right].$$

$i^{\frac{1}{2f}}$ est susceptible de $2f$ valeurs dont une seule est réelle et égale à l'unité. On obtient ces valeurs en observant que

$$1 = \cos 2l\pi + \sqrt{-1} \sin 2l\pi,$$

et qu'ainsi

$$i^{\frac{1}{2f}} = (\cos 2l\pi + \sqrt{-1} \sin 2l\pi)^{\frac{1}{2f}} = \cos \frac{2l\pi}{2f} + \sqrt{-1} \sin \frac{2l\pi}{2f},$$

l étant un nombre entier positif qui peut s'étendre depuis $l=1$ jusqu'à $l=2f$. Pour avoir la valeur réelle de $i^{\frac{1}{2f}}$, il faut donner à l sa plus grande valeur $2f$. Alors la partie imaginaire de l'expression précédente de $\Delta^n s^{n-1+\frac{1}{2f}}$ est produite par la partie affectée de $(-1)^{\frac{1}{2f}}$. Cette dernière quantité a pareillement $2f$ valeurs représentées par

$\cos \frac{(2l-1)\pi}{2f} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2l-1)\pi}{2f}$, l pouvant encore s'étendre depuis $l=1$ jusqu'à $l=2f$. Mais, ayant choisi $l=2f$ pour avoir $1^{\frac{1}{2f}}$, nous devons pareillement choisir cette valeur de l pour déterminer $(-1)^{\frac{1}{2f}}$, et alors la partie imaginaire de $(-1)^{\frac{1}{2f}}$ devient $\sqrt{-1} \sin \frac{(4f-1)\pi}{2f}$; et, dans le cas de f infini, elle devient $-\sqrt{-1} \frac{\pi}{2f}$; ce qui donne, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{f^2}$,

$$\frac{\pi\sqrt{-1}}{2f} [(n+r\sqrt{n})^{n-1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} + \dots],$$

pour la partie imaginaire de l'expression précédente de

$$2^{n-1+\frac{1}{2f}} \Delta^n s^{n-1+\frac{1}{2f}}.$$

En l'égalant à la partie imaginaire de l'expression donnée par l'équation (2), on aura

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^{n-1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} + \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) 2^n} = \frac{1}{\pi} \int \cos rx' \sqrt{n} \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n dx'.$$

Le second membre de cette équation étant intégré par la méthode de l'article III, on aura les mêmes résultats que ci-dessus.

Supposons maintenant, dans l'équation (x), $f=1$, on aura, en y changeant x' en $-x'$ dans le numérateur du second membre, et observant que l'intégrale $\int \frac{1}{\sqrt{x^2}} e^{-x'} dx'$ du dénominateur est égale à $\sqrt{\pi}$,

$$\Delta^n s^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n-1} \sqrt{2\pi}} (-1)^{\frac{1}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2}} (\cos rx' \sqrt{n} - \sqrt{-1} \sin rx' \sqrt{n}) \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n dx'.$$

Ici les intégrales doivent être prises depuis x' nul jusqu'à x' infini. On a, en excluant les puissances des quantités négatives,

$$2^{n-\frac{1}{2}} \Delta^n s^{n-\frac{1}{2}} = (n-r\sqrt{n})^{n-\frac{1}{2}} - n(n-r\sqrt{n}-2)^{n-\frac{1}{2}} + \dots - \sqrt{-1} [(n+r\sqrt{n})^{n-\frac{1}{2}} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-\frac{1}{2}} + \dots].$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente et prenant $\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ au lieu de $(-1)^{\frac{1}{2}}$, on aura, en comparant les quantités réelles aux réelles et les imaginaires aux imaginaires, la double équation

$$\begin{aligned} & \frac{(n \pm r\sqrt{n})^{n-\frac{1}{2}} - n(n \pm r\sqrt{n}-2)^{n-\frac{1}{2}} + \dots}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2}} (\cos rx' \sqrt{n} \pm \sin rx' \sqrt{n}) \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n dx'. \end{aligned}$$

Si l'on réduit en série $\frac{\sin x'}{x'}$, et si l'on fait $x' = \frac{t}{\sqrt{n}}$, on aura

$$1 - \frac{t^2}{6n} + \dots;$$

on pourra donc substituer $e^{-\frac{t^2}{6n}}$ au lieu de $\left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n$, et alors le second membre de l'équation précédente devient

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{t}} (\cos rt \pm \sin rt) e^{-\frac{t^2}{6n}} dt,$$

ce qui coïncide avec les résultats de l'article précédent.

En généralisant cette analyse, on parviendra facilement à cette expression rigoureuse, i étant moindre que l'unité et les puissances des quantités négatives étant exclues,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-i)(2-i) \dots (n-i) 2^{n-i}} \left[(n+r\sqrt{n})^{n-i} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-i} \right. \\ & \quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} (n+r\sqrt{n}-4)^{n-i} - \dots \right] \\ &= \frac{i \cdot 2^i}{k \sin i\pi} \int \frac{1}{x^{1-i}} \sin \left(rx\sqrt{n} + \frac{i\pi}{2} \right) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n dx, \end{aligned}$$

L'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et k étant l'intégrale $\int e^{-x^2} dx$ prise dans les mêmes limites. On aura, par des différentiations successives, les valeurs relatives à i plus grand que l'unité.



SUPPLÉMENT AU MÉMOIRE

SUR LES

APPROXIMATIONS DES FORMULES

QUI SONT FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES



SUPPLÉMENT AU MÉMOIRE

sur les

APPROXIMATIONS DES FORMULES

QUI SONT FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES.

Mémoires de l'Académie des Sciences, 1^{re} Série, Tome X, année 1809; 1810.

J'ai fait voir, dans l'article VI de ce Mémoire, que, si l'on suppose dans chaque observation les erreurs positives et négatives également faciles, la probabilité que l'erreur moyenne d'un nombre n d'observations sera comprise dans les limites $\pm \frac{rh}{n}$ est égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int dr e^{-\frac{k}{2k'} r^2};$$

h est l'intervalle dans lequel les erreurs de chaque observation peuvent s'étendre. Si l'on désigne ensuite par $\varphi\left(\frac{x}{h}\right)$ la probabilité de l'erreur $\pm x$, k est l'intégrale $\int dx \varphi\left(\frac{x}{h}\right)$ étendue depuis $x = -\frac{1}{2}h$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}h$; k' est l'intégrale $\int \frac{x^2}{h^3} dx \varphi\left(\frac{x}{h}\right)$ prise dans le même intervalle; π est la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, et e est le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Supposons maintenant qu'un même élément soit donné par n observations d'une première espèce, dans laquelle la loi de facilité des erreurs soit la même pour chaque observation, et qu'il soit trouvé égal à A par un milieu entre toutes ces observations. Supposons ensuite qu'il soit trouvé égal à $A + q$ par n' observations d'une se-

conde espèce, dans laquelle la loi de facilité des erreurs ne soit pas la même que dans la première espèce; qu'il soit trouvé égal à $A + q'$ par n'' observations d'une troisième espèce, et ainsi de suite. On demande le milieu qu'il faut choisir entre ces divers résultats.

Si l'on suppose que $A + x$ soit le résultat vrai, l'erreur du résultat moyen des observations n sera $-x$, et la probabilité de cette erreur sera, par ce qui précède,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \frac{dx}{dx} e^{-\frac{k}{2k'} x^2};$$

on a ici

$$x = \frac{rh}{\sqrt{n}},$$

ce qui transforme la fonction précédente dans celle-ci

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} a \sqrt{n} e^{-n a^2 x^2},$$

a étant égal à $\frac{1}{k} \sqrt{\frac{k}{2k'}}$.

L'erreur du résultat moyen des observations n' est $\pm (q - x)$, le signe $+$ ayant lieu, si q surpasse x , et le signe $-$ s'il en est surpassé. La probabilité de cette erreur est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} a' \sqrt{n'} e^{-n' a'^2 (q-x)^2},$$

a' exprimant par rapport à ces observations ce que a exprime relativement aux observations n .

Pareillement l'erreur du résultat moyen des observations n'' est $\pm (q' - x)$, et la probabilité de cette erreur est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} a'' \sqrt{n''} e^{-n'' a''^2 (q'-x)^2},$$

a'' étant ce que devient a relativement à ces observations, et ainsi du reste.

Maintenant, si l'on désigne généralement par $\Psi(-x)$, $\Psi'(q-x)$, $\Psi''(q'-x)$, ... ces diverses probabilités, la probabilité que l'erreur

du premier résultat sera $-x$, et que les autres résultats s'écarteront du premier, respectivement de q , q' , ... sera, par la théorie des probabilités, égale au produit $\Psi(-x) \Psi'(q-x) \Psi''(q'-x) \dots$; donc, si l'on construit une courbe dont l'ordonnée y soit égale à ce produit, les ordonnées de cette courbe seront proportionnelles aux probabilités des abscisses, et, par cette raison, nous la nommerons *courbe des probabilités*.

Pour déterminer le point de l'axe des abscisses où l'on doit fixer le milieu entre les résultats des observations n , n' , n'' , ... nous observerons que ce point est celui où l'écart de la vérité, que l'on peut craindre, est un minimum; or, de même que, dans la théorie des probabilités, on évalue la perte à craindre en multipliant chaque perte que l'on peut éprouver par sa probabilité, et en faisant une somme de tous ces produits, de même on aura la valeur de l'écart à craindre en multipliant chaque écart de la vérité, ou chaque erreur, abstraction faite du signe, par sa probabilité, et en faisant une somme de tous ces produits. Soient donc l la distance du point qu'il faut choisir à l'origine de la courbe des probabilités, et z l'abscisse correspondante à y et comptée de la même origine; le produit de chaque erreur par sa probabilité, abstraction faite du signe, sera $(l-z)y$, depuis $z=0$ jusqu'à $z=l$, et ce produit sera $(z-l)y$ depuis $z=l$ jusqu'à l'extrémité de la courbe. On aura donc

$$\int (l-z)y dz + \int (z-l)y dz$$

pour la somme de tous ces produits, la première intégrale étant prise depuis z nul jusqu'à $z=l$, et la seconde étant prise depuis $z=l$ jusqu'à la dernière valeur de z . En différenciant la somme précédente par rapport à l , il est facile de s'assurer que l'on aura

$$d \int y dz - d \int y dz$$

pour cette différentielle, qui doit être nulle dans le cas du minimum; on a donc alors

$$\int y dz = \int y dz,$$

c'est-à-dire que l'aire de la courbe, comprise depuis z nul jusqu'à l'abscisse qu'il faut choisir, est égale à l'aire comprise depuis z égal à cette abscisse jusqu'à la dernière valeur de z ; l'ordonnée correspondante à l'abscisse qu'il faut choisir divise donc l'aire de la courbe des probabilités en deux parties égales. [Voir les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1778, page 324 (*).]

Daniel Bernoulli, ensuite Euler et M. Gauss ont pris pour cette ordonnée la plus grande de toutes. Leur résultat coïncide avec le précédent lorsque cette plus grande ordonnée divise l'aire de la courbe en deux parties égales, ce qui, comme on va le voir, a lieu dans la question présente; mais, dans le cas général, il me paraît que la manière dont je viens d'envisager la chose résulte de la théorie même des probabilités.

Dans le cas présent, on a, en faisant $x = X + z$,

$$y = p p' p'' \dots e^{-p^2 m X + z^2} - p^2 p' p'' q - X - 2z^2 - p^2 p' p'' q - X - 2z^2 \dots,$$

p étant égal à $\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$, et par conséquent exprimant la plus grande probabilité du résultat donné par les observations n ; p' exprime pareillement la plus grande ordonnée relative aux observations n' , et ainsi du reste; r pouvant, sans erreur sensible, s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, comme on l'a vu dans l'article VII du *Mémoire* cité, on peut prendre z dans les mêmes limites, et alors si l'on choisit X de manière que la première puissance de z disparaisse de l'exposant de e , l'ordonnée y correspondante à z nul divisera l'aire de la courbe en deux parties égales, et sera en même temps la plus grande ordonnée. En effet, on a, dans ce cas,

$$X = \frac{p'^2 q + p'^2 q' + \dots}{p^2 + p'^2 + p'^2 + \dots},$$

et alors y prend cette forme

$$y = p p' p'' \dots e^{-N z^2};$$

(*) *Oeuvres de Laplace*, T. IX, p. 478.

d'où il suit que l'ordonnée qui répond à z nul est la plus grande, et divise l'aire entière de la courbe en parties égales. Ainsi $A + X$ est le résultat moyen qu'il faut prendre entre les résultats A , $A + q$, $A + q'$, La valeur précédente de X est celle qui rend un minimum la fonction

$$(pX)^2 + [p'(q - X)]^2 + [p''(q' - X)]^2 + \dots,$$

c'est-à-dire la somme des carrés des erreurs de chaque résultat, multipliées respectivement par la plus grande ordonnée de la courbe de facilité de ses erreurs. Ainsi cette propriété, qui n'est qu'hypothétique lorsqu'on ne considère que des résultats donnés par une seule observation ou par un petit nombre d'observations, devient nécessaire lorsque les résultats entre lesquels on doit prendre un milieu sont donnés chacun par un très grand nombre d'observations, quelles que soient d'ailleurs les lois de facilité des erreurs de ces observations. C'est une raison pour l'employer dans tous les cas.

On aura la probabilité que l'erreur du résultat $A + X$ sera comprise dans les limites $\pm Z$, en prenant dans ces limites l'intégrale $\int dz e^{-Nz^2}$ et en la divisant par la même intégrale, prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$. Cette dernière intégrale est $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{N}}$, en faisant donc $z\sqrt{N} = t$ et $Z\sqrt{N} = T$, la probabilité que l'erreur du résultat choisi $A + X$ sera comprise dans les limites $\pm \frac{T}{\sqrt{N}}$ sera

$$\frac{2 \int_0^T dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à $t = T$. La valeur de N est, par ce qui précède,

$$\pi(p^2 + p'^2 + p'^2 + \dots).$$



MÉMOIRE
SUR
LES INTÉGRALES DÉFINIES
ET
LEUR APPLICATION AUX PROBABILITÉS,
ET SPÉCIALEMENT A LA RECHERCHE DU MILIEU
QU'IL FAUT CHOISIR ENTRE LES RÉSULTATS DES OBSERVATIONS.



MÉMOIRE
SUR
LES INTÉGRALES DÉFINIES
ET
LEUR APPLICATION AUX PROBABILITÉS,

ET SPÉCIALEMENT A LA RECHERCHE DU MILIEU
QU'IL FAUT CHOISIR ENTRE LES RÉSULTATS DES OBSERVATIONS.

Mémoires de l'Académie des Sciences, 1^{re} Série, T. XI (1^{re} Partie); année 1810; 1811.

J'ai donné, il y a environ trente ans, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾, la théorie des fonctions génératrices et celle de l'approximation des formules qui sont fonctions de grands nombres. La première a pour objet les rapports des coefficients des puissances d'une variable indéterminée dans le développement d'une fonction de cette variable à la fonction elle-même. De la simple considération de ces rapports découlent, avec une extrême facilité, l'interpolation des suites, leur transformation, l'intégration des équations aux différences ordinaires ou partielles, l'analogie des puissances et des différences, et généralement le transport des exposants des puissances aux caractéristiques qui expriment la manière d'être des variables. La théorie des approximations des formules fonctions de très grands nombres est fondée sur l'expression des variables données par des équations aux différences, au moyen d'intégrales définies que l'on intègre par des approximations très convergentes; et il y a cela de très remarquable, savoir que la quantité sous le signe intégral est la fonction génératrice de la variable exprimée par l'intégrale définie, en sorte que les

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace, T. X.*

théories des fonctions génératrices et des approximations des formules fonctions de très grands nombres peuvent être considérées comme les deux branches d'un même calcul, que je désigne par le nom de *calcul des fonctions génératrices*. Ce qu'Arbogast a nommé *Méthode de séparation des échelles d'opérations* est renfermé dans la première partie du calcul des fonctions génératrices, qui donne à la fois la démonstration et la vraie métaphysique de cette méthode. Ce que Kramp et d'autres ont nommé *facultés numériques*, et ce qu'Euler a nommé *fonctions inexplicables*, se rattachent à la seconde partie, avec cet avantage, que ces facultés et ces fonctions inexplicables, mises sous la forme d'intégrales définies, présentent alors des idées claires, et sont susceptibles de toutes les opérations de l'Analyse.

Le calcul des fonctions génératrices s'étend aux différences infiniment petites; car, si l'on développe tous les termes d'une équation aux différences par rapport aux puissances de la différence supposée indéterminée, mais infiniment petite, et que l'on néglige les infiniment petits d'un ordre supérieur relativement à ceux d'un ordre inférieur, on aura une équation aux différences infiniment petites, dont l'intégrale est celle de l'équation aux différences finies, dans laquelle on néglige pareillement les infiniment petits par rapport aux quantités finies.

Les quantités qu'on néglige dans ces passages du fini à l'infiniment petit semblent ôter au Calcul infinitésimal la rigueur des résultats géométriques; mais, pour la lui rendre, il suffit d'envisager les quantités que l'on conserve dans le développement d'une équation aux différences finies et de son intégrale, par rapport aux puissances de la différence indéterminée, comme ayant toutes pour facteur la plus petite puissance dont on compare entre eux les coefficients. Cette comparaison étant rigoureuse, le Calcul différentiel, qui n'est évidemment que cette comparaison même, a toute la rigueur des autres opérations algébriques. Mais la considération des infiniment petits de différents ordres, la facilité de les reconnaître, *a priori*, par l'inspection seule des grandeurs, et l'omission des infiniment petits d'un ordre supé-

rieur à celui que l'on conserve, à mesure qu'ils se présentent, simplifient extrêmement les calculs, et sont l'un des principaux avantages de l'Analyse infinitésimale, qui d'ailleurs, en réalisant les infiniment petits et leur attribuant de très petites valeurs, donne, par une première approximation, les différences et les sommes des quantités.

Le passage du fini à l'infiniment petit a l'avantage d'éclairer plusieurs points de l'Analyse infinitésimale, qui ont été l'objet de grandes contestations parmi les géomètres. C'est ainsi que, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1779 ⁽¹⁾, j'ai fait voir que les fonctions arbitraires qu'introduit l'intégration des équations différentielles partielles pouvaient être discontinues, et j'ai déterminé les conditions auxquelles cette discontinuité doit être assujettie. Les résultats transcendans de l'Analyse sont, comme toutes les abstractions de l'entendement, des signes généraux dont on ne peut déterminer la véritable étendue qu'en remontant par l'Analyse métaphysique aux idées élémentaires qui y ont conduit, ce qui présente souvent de grandes difficultés; car l'esprit humain en éprouve moins encore à se porter en avant qu'à se replier sur lui-même.

Il paraît que Fermat, le véritable inventeur du Calcul différentiel, a considéré ce calcul comme une dérivation de celui des différences finies, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur par rapport à ceux d'un ordre inférieur: c'est du moins ce qu'il a fait dans sa méthode *De maximis* et dans celle des tangentes, qu'il a étendue aux courbes transcendantes. On voit encore par sa belle solution du problème de la réfraction de la lumière, en supposant qu'elle parvient d'un point à un autre dans le temps le plus court, et en concevant qu'elle se meut dans divers milieux diaphanes avec différentes vitesses, on voit, dis-je, qu'il savait étendre son calcul aux fonctions irrationnelles, en se débarrassant des irrationalités par l'élevation des radicaux aux puissances. Newton a, depuis, rendu ce calcul plus analytique dans sa *Méthode des Fluxions*, et il en a simplifié et géné-

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. X.

ralisé les procédés par l'invention de son théorème du binôme; enfin, presque en même temps, Leibnitz a enrichi le Calcul différentiel d'une notation très heureuse, et qui s'est adaptée d'elle-même à l'extension que le Calcul différentiel a reçue par la considération des différentielles partielles. La langue de l'Analyse, la plus parfaite de toutes, étant par elle-même un puissant instrument de découvertes, ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées, sont les germes de nouveaux calculs. Ainsi la simple idée qu'eut Descartes d'indiquer les puissances des quantités, représentées par des lettres, en écrivant vers le haut de ces lettres les nombres qui expriment le degré de ces puissances, a donné naissance au Calcul exponentiel; et Leibnitz a été conduit, par sa notation, à l'analogie singulière des puissances et des différences. Le calcul des fonctions génératrices, qui donne la véritable origine de cette analogie, offre tant d'exemples de ce transport des exposants des puissances aux caractéristiques, qu'il peut encore être considéré comme le calcul exponentiel des caractéristiques.

Le calcul des fonctions génératrices est le fondement d'une théorie que je me propose de publier bientôt sur les probabilités. Les questions relatives aux événements dus au hasard se ramènent le plus souvent avec facilité à des équations aux différences: la première branche de ce calcul en fournit les solutions les plus générales et les plus simples. Mais, lorsque les événements que l'on considère sont en très grand nombre, les formules auxquelles on est conduit se composent d'une si grande multitude de termes et de facteurs, que leur calcul numérique devient impraticable. Il est alors indispensable d'avoir une méthode qui transforme ces formules en séries convergentes. C'est ce que la seconde branche du calcul des fonctions génératrices fait avec d'autant plus d'avantage que la méthode devient plus nécessaire. Par ce moyen, on peut déterminer avec facilité les limites de la probabilité des résultats et des causes, indiqués par les événements considérés en grand nombre, et les lois suivant lesquelles cette probabilité approche de ses limites, à mesure que les événements se mul-

tiplient. Cette recherche, la plus délicate de la théorie des hasards, mérite l'attention des géomètres par l'analyse qu'elle exige, et celle des philosophes, en faisant voir comment la régularité finit par s'établir dans les choses même qui nous paraissent entièrement livrées au hasard, et en nous dévoilant les causes cachées, mais constantes, dont cette régularité dépend.

La considération des intégrales définies par lesquelles les quantités sont représentées dans la théorie de l'approximation des formules fonctions de très grands nombres m'a conduit aux valeurs de plusieurs intégrales définies que j'ai données dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782⁽¹⁾, et qui offrent cela de remarquable, savoir qu'elles dépendent à la fois de ces deux transcendentes: le rapport de la circonférence au diamètre et le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. J'ai obtenu ces valeurs par une analogie singulière, fondée sur les passages du réel à l'imaginaire, passages qui peuvent être considérés comme moyens de découvertes, dont les premières applications ont paru, si je ne me trompe, dans les *Mémoires* cités et qui ont conduit aux valeurs de diverses intégrales définies dépendantes des sinus et cosinus. Mais ces moyens, comme celui de l'induction, quoique employés avec beaucoup de précaution et de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations directes de leurs résultats. M. Poisson vient d'en donner plusieurs dans le *Bulletin de la Société philomathique* du mois de mars de cette année 1811. Je me propose ici de trouver directement toutes ces valeurs, et celles d'intégrales définies, plus générales encore, et qui me semblent pouvoir intéresser les géomètres.

La recherche de ces valeurs n'est point un simple jeu de l'Analyse: elle est d'une grande utilité dans la théorie des probabilités. J'en fais ici l'application à trois problèmes de ce genre, qu'il serait très difficile de résoudre par d'autres méthodes. Le second de ces problèmes est remarquable en ce que sa solution offre le premier exemple de l'emploi du calcul aux différences infiniment petites partielles, dans les

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, t. X.
Oeuvres de L. — XII.

questions de probabilités. Le troisième problème est relatif au milieu qu'il faut choisir entre les résultats donnés par diverses observations : c'est l'un des plus utiles de toute l'analyse des hasards, et, par cette raison, je le traite avec étendue; j'ose croire que mon analyse intéressera les géomètres.

Lorsque l'on veut corriger par l'ensemble d'un grand nombre d'observations plusieurs éléments déjà connus à peu près, on s'y prend de la manière suivante. Chaque observation étant une fonction des éléments, on substitue dans cette fonction leurs valeurs approchées, augmentées respectivement de petites corrections qu'il s'agit de connaître. En développant ensuite la fonction en série, par rapport à ces corrections, et négligeant leurs carrés et leurs produits, on égale la série à l'observation, ce qui donne une première équation de condition entre les corrections des éléments. Une seconde observation fournit une équation de condition semblable, et ainsi du reste. Si les observations étaient rigoureuses, il suffirait d'en employer autant qu'il y a d'éléments; mais, vu les erreurs dont elles sont susceptibles, on en considère un grand nombre, afin de compenser les unes par les autres ces erreurs, dans les valeurs des corrections que l'on déduit de leur ensemble. Mais de quelle manière faut-il combiner entre elles les équations de condition pour avoir les corrections les plus précises? C'est ici que l'analyse des probabilités peut être d'un grand secours. Toutes les manières de combiner ces équations se réduisent à les multiplier chacune par un facteur particulier et à faire une somme de tous ces produits : on forme ainsi une première équation finale entre les corrections des éléments. Un second système de facteurs donne une seconde équation finale, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait autant d'équations finales que d'éléments dont on déterminera les corrections en résolvant ces équations. Maintenant il est visible qu'il faut choisir les systèmes de facteurs, de sorte que l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur chaque élément soit un minimum. J'entends par *erreur moyenne* la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité. En déterminant les facteurs par

cette condition, l'analyse conduit à ce résultat remarquable, savoir que, si l'on prépare chaque équation de condition de manière que son second membre soit zéro, la somme des carrés des premiers membres est un minimum, en y faisant varier successivement chaque correction. Ainsi cette méthode, que MM. Legendre et Gauss ont proposée, et qui, jusqu'à présent, ne présentait que l'avantage de fournir, sans aucun tâtonnement, les équations finales nécessaires pour corriger les éléments, donne en même temps les corrections les plus précises.

I.

Sur les intégrales définies.

Considérons l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \frac{dx e^{-ax}}{x^{\omega}} (\cos rx - \sqrt{-1} \sin rx) \quad \text{ou} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx e^{-ax - rx\sqrt{-1}}}{x^{\omega}},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. En réduisant $e^{-rx\sqrt{-1}}$ en série, elle devient

$$\int_0^{\infty} \frac{dx e^{-ax}}{x^{\omega}} \left[1 - \frac{r^2 x^2}{1.2} + \frac{r^4 x^4}{1.2.3.4} - \frac{r^6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \right. \\ \left. - rx\sqrt{-1} \left(1 - \frac{r^2 x^2}{1.2.3} + \frac{r^4 x^4}{1.2.3.4.5} + \dots \right) \right].$$

Or on a généralement

$$\int_0^{\infty} x^{i-\omega} dx e^{-ax} = \frac{(1-\omega)(2-\omega)\dots(i-\omega)}{a^i} \int_0^{\infty} \frac{dx e^{-ax}}{x^{\omega}};$$

en faisant ensuite $ax = s$, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\omega}} e^{-ax} = \frac{1}{a^{1-\omega}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\omega}} e^{-s}.$$

En nommant donc k cette dernière intégrale, on aura

$$\int_0^{\infty} x^{i-\omega} dx e^{-ax} = \frac{(1-\omega)(2-\omega)\dots(i-\omega)}{a^{i+1-\omega}} k,$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\frac{r}{a}} \frac{dx e^{-ax}}{x^{\omega}} (\cos rx - \sqrt{-1} \sin rx) \\ = \frac{k}{a^{1-\omega}} \left\{ 1 - \frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2} \frac{r^2}{a^2} + \frac{(1-\omega)(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)}{1.2.3.4} \frac{r^4}{a^4} - \dots \right. \\ \left. - \sqrt{-1} \left[\frac{1-\omega}{1} \frac{r}{a} - \frac{(1-\omega)(2-\omega)(3-\omega)}{1.2.3} \frac{r^3}{a^3} + \dots \right] \right\}.$$

Si l'on fait $\frac{r}{a} = t$, le second membre de cette équation devient

$$\frac{k}{a^{1-\omega}(1+t\sqrt{-1})^{1-\omega}}.$$

Soit A un angle dont t est la tangente, on aura

$$\sin A = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

par conséquent

$$\cos A - \sqrt{-1} \sin A = \frac{1-t\sqrt{-1}}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t\sqrt{-1}},$$

ce qui donne, par le théorème connu,

$$\cos(1-\omega)A - \sqrt{-1} \sin(1-\omega)A = \frac{(1+t^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}{(1+t\sqrt{-1})^{1-\omega}};$$

la tangente t est non seulement la tangente de l'angle A , mais encore celle du même angle augmenté d'un multiple quelconque de la demi-circonférence; mais, le premier membre de cette équation devant se réduire à l'unité lorsque t est nul, il est clair que l'on doit prendre pour A le plus petit des angles positifs dont t est la tangente.

Maintenant cette équation donne, en y restituant $\frac{r}{a}$ au lieu de t ,

$$\frac{k}{a^{1-\omega}(1+t\sqrt{-1})^{1-\omega}} = \frac{k}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}} [\cos(1-\omega)A - \sqrt{-1} \sin(1-\omega)A];$$

on a donc

$$\int_0^{\frac{r}{a}} \frac{dx e^{-ax}}{x^{\omega}} (\cos rx - \sqrt{-1} \sin rx) \\ = \frac{k}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}} [\cos(1-\omega)A - \sqrt{-1} \sin(1-\omega)A].$$

En comparant séparément les quantités réelles et les imaginaires, on a ces deux équations

$$\int_0^{\frac{r}{a}} \frac{dx \cos rx e^{-ax}}{x^{\omega}} = \frac{k}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}} \cos(1-\omega)A, \\ \int_0^{\frac{r}{a}} \frac{dx \sin rx e^{-ax}}{x^{\omega}} = \frac{k}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}} \sin(1-\omega)A.$$

Si a est nul, $\frac{r}{a}$ sera infini, et le plus petit angle dont il est la tangente sera $\frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité; on a donc

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos rx}{x^{\omega}} = \frac{k}{r^{1-\omega}} \cos \frac{(1-\omega)\pi}{2}, \\ \int_0^{\infty} \frac{dx \sin rx}{x^{\omega}} = \frac{k}{r^{1-\omega}} \sin \frac{(1-\omega)\pi}{2}.$$

Dans le cas de $\omega = \frac{1}{2}$, on a, en faisant $s^2 = t$,

$$k = \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-t} = 2 \int_0^{\infty} dt e^{-t}.$$

Ce dernier membre est $\sqrt{\pi}$; on a donc $k = \sqrt{\pi}$; si l'on suppose ensuite $r = 1$, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\infty} \frac{dx \sin x}{\sqrt{x}}.$$

Euler est parvenu à toutes ces équations dans le Tome IV de son *Calcul intégral*, publié en 1794, par la considération du passage du réel à l'imaginaire.

II.

Considérons présentement l'intégrale $\int_0^\infty dx \cos rx e^{-a^2 x^2}$. Si l'on nomme y cette intégrale, on aura

$$\frac{dy}{dr} = - \int_0^\infty x dx \sin rx e^{-a^2 x^2} \\ = \left(\frac{1}{2a^2} \sin rx e^{-a^2 x^2} \right)_0^\infty - \frac{r}{2a^2} \int_0^\infty dx \cos rx e^{-a^2 x^2};$$

on aura donc

$$\frac{dy}{dr} + \frac{r}{2a^2} y = 0.$$

L'intégrale de cette équation est

$$y = B e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

B étant une constante arbitraire; pour la déterminer, on observera que, si l'on fait r nul, $\cos rx$ devient l'unité, et l'on a

$$y = \int_0^\infty dx e^{-a^2 x^2};$$

cette dernière intégrale est, comme on sait, égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; donc

$$B = \frac{\sqrt{\pi}}{2a};$$

on a donc

$$\int_0^\infty dx \cos rx e^{-a^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

De là on tire

$$\int_0^\infty x^{2n} dx \cos rx e^{-a^2 x^2} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \frac{d^{2n}}{dr^{2n}} e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

le signe $+$ ayant lieu si n est pair, et le signe $-$ si n est impair; on aura pareillement, en différenciant par rapport à r ,

$$\int_0^\infty x^{2n+1} dx \sin rx e^{-a^2 x^2} = \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \frac{d^{2n+1}}{dr^{2n+1}} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

En intégrant une fois par rapport à r l'expression de

$$\int_0^\infty dx \cos rx e^{-a^2 x^2},$$

on aura

$$\int_0^\infty \frac{dx \sin rx}{x} e^{-a^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^\infty dr e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

III.

Considérons encore la double intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty 2xy dy dx e^{-y^2(1+x^2)} \cos rx.$$

En l'intégrant d'abord par rapport à y , elle devient

$$\int_0^\infty \frac{dx \cos rx}{1+x^2}.$$

Intégrons-la maintenant par rapport à x ; on a, par l'article précédent,

$$\int_0^\infty dx \cos rx e^{-y^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2y} e^{-\frac{r^2}{4y^2}},$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty \int_0^\infty 2y dy dx \cos rx e^{-y^2(1+x^2)} = \sqrt{\pi} \int_0^\infty dy e^{-y^2 - \frac{r^2}{4y^2}} = \sqrt{\pi} e^r \int_0^\infty dy e^{-\left(\frac{y^2+r}{2y}\right)^2}.$$

r étant supposé positif, la quantité $\left(\frac{y^2+r}{2y}\right)^2$ a un minimum qui répond à $y = \sqrt{\frac{r}{2}}$, ce qui donne $2r$ pour ce minimum. Soit donc

$$y = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 + 2r};$$

y devant s'étendre depuis $y=0$ jusqu'à $y=\infty$, z doit s'étendre depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$. Cette valeur de y donne

$$dy = \frac{1}{2}dz + \frac{1}{2} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 + 2r}}.$$

En prenant les intégrales depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dz e^{-z^2}}{\sqrt{z^2 + 2r}} = 0;$$

on a donc

$$\sqrt{\pi} e^r \int_0^{\infty} dy e^{-\left(\frac{y^2 + r}{2}\right)} = \sqrt{\pi} e^r \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2 - 2r} = \frac{\pi e^{-r}}{2},$$

partant

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos rx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2e^r}.$$

En différentiant par rapport à r , on a

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx \sin rx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2e^r},$$

ce qui donne

$$\int_0^{\infty} \frac{dx (\cos rx + x \sin rx)}{1 + x^2} = \frac{\pi}{e^r},$$

en faisant $r = 1$, on aura le théorème que j'ai donné dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1782, page 59 (1).

Si l'on fait $rx = t$, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos rx}{1 + x^2} = \int_0^{\infty} \frac{r dt \cos t}{r^2 + t^2},$$

partant

$$\int_0^{\infty} \frac{dt \cos t}{r^2 + t^2} = \frac{\pi e^{-r}}{2r}.$$

Soit $r^2 = q$, on aura en différentiant $i - 1$ fois par rapport à q l'équation précédente, et restituant pour t sa valeur rx ,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos rx}{(1 + x^2)^i} = \frac{(-1)^{i-1} q^{i-\frac{1}{2}}}{1.2.3 \dots (i-1)} \frac{\pi}{2} \frac{d^{i-1}}{dq^{i-1}} \frac{e^{-\sqrt{q}}}{\sqrt{q}};$$

on pourra donc intégrer généralement, depuis x nul jusqu'à x infini, la différentielle

$$\frac{(A + Bx^2 + Cx^4 + \dots + Hx^{2i-2}) dx \cos rx}{(1 + x^2)^i},$$

(1) *Oeuvres de Laplace*, T. X, p. 264.

car, en mettant un terme quelconque, tel que Fx^{2n} , sous la forme $F(1 + x^2 - 1)^n$, et en le développant suivant les puissances de $1 + x^2$, on réduira la différentielle précédente dans une suite de différentielles de la forme $\frac{k dx \cos rx}{(1 + x^2)^n}$, qui seront intégrables par ce qui précède; on aura donc ainsi en fonction de r l'intégrale de la différentielle précédente. On pourra même, au lieu de $\cos rx$, y substituer une puissance entière et positive de ce cosinus, parce que cette puissance se décompose en cosinus de l'angle et de ses multiples. Nommons R la fonction de r dont il s'agit, on aura, en différentiant par rapport à r cette intégrale,

$$\int_0^{\infty} x dx \sin rx \frac{A + Bx^2 + Cx^4 + \dots + Hx^{2i-2}}{(1 + x^2)^i} = -\frac{dR}{dr}.$$

En l'intégrant par rapport à r , après l'avoir multipliée par dr , on aura

$$\int_0^{\infty} dx \sin rx \frac{A + Bx^2 + Cx^4 + \dots + Hx^{2i-2}}{x(1 + x^2)^i} = \int_0^r R dr.$$

On peut, au moyen des passages du réel à l'imaginaire, facilement conclure de la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{dx \cos rx}{1 + x^2}$ la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{M}{N} dx \cos rx$, M et N étant des fonctions rationnelles et entières de x^2 , telles que le dénominateur N soit d'un plus haut degré que M , et n'ait aucun facteur réel en x du premier degré. Dans ce cas, la fraction $\frac{M}{N}$ est décomposable en fractions de la forme $\frac{A}{1 + \epsilon^2 x^2}$, A et ϵ étant réels ou imaginaires. Or on a, en faisant $\epsilon x = x'$ et $\frac{r}{\epsilon} = r'$,

$$A \int_0^{\infty} \frac{dx \cos rx}{1 + \epsilon^2 x^2} = \frac{A}{\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{dx' \cos r' x'}{1 + x'^2};$$

en donnant donc généralement à cette dernière intégrale la valeur qu'elle a dans le cas de x' réel et qui, par ce qui précède, est égale à $\frac{\pi}{2} e^{-r'}$, on aura

$$A \int_0^{\infty} \frac{dx \cos rx}{1 + \epsilon^2 x^2} = \frac{A\pi}{2\epsilon} e^{-\frac{r}{\epsilon}}.$$

$\frac{1}{2}$ est la racine carrée de $\frac{1}{2}$, et cette racine est également $-\frac{1}{2}$; mais l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{dx}{N} \cos rx$ ne devenant jamais infinie dans le cas même de r infini, et de plus $\cos rx$ ne changeant point, en y changeant le signe de r , il est clair que l'on doit choisir celle des deux racines $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, dont la partie réelle est positive. On trouve ainsi, par exemple,

$$\int_0^{\infty} \frac{dr \cos rx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{r}{\sqrt{2}} + \sin \frac{r}{\sqrt{2}} \right)^2$$

IV.

Application de l'analyse précédente aux probabilités.

Appliquons l'analyse précédente à la théorie des probabilités. Pour cela, considérons deux joueurs A et B, dont les adresses soient égales, et jouant ensemble de manière que B ait primitivement r jetons; que, à chaque coup qu'il perd, il donne un de ses jetons au joueur A, et que, à chaque coup qu'il gagne, il en reçoive un du joueur A, qui est supposé en avoir un nombre infini. Le jeu continue jusqu'à ce que le joueur A ait gagné tous les jetons de B. Cela posé, r étant un grand nombre, on demande en combien de coups on peut parier un contre un, ou deux contre un, ou trois contre deux, etc., que le joueur A aura gagné la partie.

Nous allons d'abord établir que la partie doit finir. Pour cela, soit y_r la probabilité qu'elle finira. Après le premier coup, cette probabilité est ou y_{r-1} , ou y_{r+1} , suivant que le joueur A gagne ou perd ce coup; on a donc

$$y_r = \frac{1}{2} y_{r+1} + \frac{1}{2} y_{r-1}.$$

L'intégrale de cette équation aux différences est

$$y_r = a + br,$$

a et b étant des constantes arbitraires. J'observe d'abord que la constante b doit être nulle, autrement y_r croîtrait indéfiniment, ce qui ne

peut être, puisqu'il ne peut jamais dépasser l'unité. De plus y_r est 1 lorsque $r=0$, car alors, B n'ayant plus de jetons, la partie est finie; donc

$$y_0 = 1.$$

Cherchons maintenant la probabilité que la partie sera finie avant ou au coup x . En nommant $y_{r,x}$ cette probabilité, on aura

$$y_{r,x} = \frac{1}{2} y_{r+1,x-1} + \frac{1}{2} y_{r-1,x-1}.$$

Il faut intégrer cette équation aux différences finies partielles en remplissant les conditions suivantes : 1° que $y_{r,x}$ soit nul lorsque x est moindre que r ; 2° qu'il soit égal à l'unité lorsque r est nul. Ces deux conditions étant remplies, l'équation précédente aux différences donne toutes les valeurs de $y_{r,x}$, quels que soient r et x . Présentement, l'expression suivante de $y_{r,x}$ satisfait à ces conditions et à l'équation aux différences partielles, d'où il suit qu'elle exprime la vraie valeur de $y_{r,x}$,

$$y_{r,x} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sin r\varphi (\cos \varphi)^{r+x-1}}{\sin \varphi}.$$

x est égal à $r+2i$; en effet, il ne peut être que r ou ce même nombre augmenté d'un nombre pair, car le nombre de parties jouées doit être égal à r ou le surpasser d'un nombre pair, puisque A ne peut gagner la partie, qu'il ne gagne le nombre r des jetons de B, plus ceux qu'il a perdus, et il faut pour cela deux parties pour chaque jeton, l'une pour le perdre et l'autre pour le gagner. Je ne donnerai point l'analyse qui m'a conduit à l'expression précédente : je me contenterai de faire voir qu'elle satisfait à l'équation aux différences partielles et aux conditions prescrites ci-dessus. D'abord, en la substituant dans l'équation aux différences partielles, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sin r\varphi (\cos \varphi)^{r+x-1}}{\sin \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi (\cos \varphi)^x}{\sin \varphi} \left[\frac{1}{2} \sin(r+1)\varphi + \frac{1}{2} \sin(r-1)\varphi \right],$$

équation évidente. De plus, si l'on fait r nul, l'expression précédente

de $y_{r,x}$ devient l'unité. Enfin, si l'on fait i négatif, elle se réduit à zéro. En effet, on a

$$\frac{\sin r\varphi}{\sin \varphi} = \frac{e^{r\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} - e^{-r\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}} \\ = e^{(r-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} + e^{(r-2)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} + \dots + e^{-(r-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} + e^{-(r-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}.$$

De plus, $(\cos \varphi)^{r-2i+1}$ est égal à

$$\frac{(e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} + e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}})^{r-2i+1}}{2^{r-2i+1}}.$$

En développant cette fonction et multipliant ce développement par celui de $\frac{\sin r\varphi}{\sin \varphi}$, chaque terme du premier développement donnera, dans le produit, un terme indépendant de φ ; la somme de tous ces termes sera donc $\frac{(1+1)^{r-2i+1}}{2^{r-2i+1}}$ ou l'unité, et en multipliant cette somme par $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$, le produit sera l'unité. Les autres termes du produit des deux développements précédents seront des cosinus de 2φ , 4φ , ..., et l'intégrale de leurs produits par $d\varphi$ sera nulle. On a donc

$$y_{r,x} = 0,$$

lorsque i est négatif.

Supposons maintenant que r et i soient de grands nombres. Le maximum de la fonction

$$\frac{\varphi (\cos \varphi)^{r+2i+1}}{\sin \varphi}$$

répond à $\varphi = 0$, ce qui donne 1 pour ce maximum. La fonction décroît ensuite avec une très grande rapidité, et dans l'intervalle où elle a une valeur sensible, on peut supposer

$$\log \sin \varphi = \log \varphi + \log \left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2\right) = \log \varphi - \frac{1}{4}\varphi^2, \\ \log (\cos \varphi)^{r+2i+1} = (r+2i+1) \log \left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4\right) \\ = -\frac{r+2i+1}{2}\varphi^2 + \frac{r+2i+1}{12}\varphi^4,$$

ce qui donne, en négligeant les sixièmes puissances de φ et ses quatrièmes puissances qui ne sont pas multipliées par $r+2i+1$,

$$\log \frac{(\cos \varphi)^{r+2i+1}}{\sin \varphi} = -\log \varphi - \frac{r+2i+1}{2}\varphi^2 - \frac{r+2i+1}{12}\varphi^4.$$

En faisant donc

$$a^2 = \frac{r+2i+1}{2},$$

on aura

$$\frac{(\cos \varphi)^{r+2i+1}}{\sin \varphi} = \frac{1 - \frac{a^2}{6}\varphi^4}{\varphi} e^{-a^2\varphi^2},$$

par conséquent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sin r\varphi (\cos \varphi)^{r+2i+1}}{\sin \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \left(1 - \frac{a^2}{6}\varphi^4\right)}{\varphi} \sin r\varphi e^{-a^2\varphi^2}.$$

Cette dernière intégrale peut être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à φ infini, car elle doit être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; or, a^2 étant un nombre considérable, $e^{-a^2\varphi^2}$ devient excessivement petit lorsqu'on y fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, en sorte qu'on peut le supposer nul, vu l'extrême rapidité avec laquelle cette exponentielle diminue lorsque φ augmente. Maintenant on a

$$\frac{d}{dr} \int_0^{\infty} \frac{d\varphi \left(1 - \frac{a^2}{6}\varphi^4\right)}{\varphi} \sin r\varphi e^{-a^2\varphi^2} = \int_0^{\infty} d\varphi \left(1 - \frac{a^2}{6}\varphi^4\right) e^{-a^2\varphi^2} \cos r\varphi;$$

on a d'ailleurs, par l'article II,

$$\int_0^{\infty} d\varphi \cos r\varphi e^{-a^2\varphi^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}, \\ \int_0^{\infty} \varphi^4 d\varphi \cos r\varphi e^{-a^2\varphi^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \frac{d^4}{da^4} e^{-\frac{r^2}{4a^2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^5} e^{-\frac{r^2}{4a^2}} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^4}{12a^4}\right);$$

d'où l'on tire, en supposant $\frac{r^2}{4a^2} = t^2$,

$$\int_0^{\infty} \frac{d\varphi \sin r\varphi (\cos \varphi)^{r+2i+1}}{\sin \varphi} = \sqrt{\pi} \left[\int_0^1 dt e^{-t^2} - \frac{t e^{-t^2}}{8a^2} \left(1 - \frac{3}{2}t^2\right) \right];$$

ainsi la probabilité que A gagnera la partie dans un nombre $r + 2i$ de coups est

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^T dt e^{-t^2} - \frac{T e^{-T^2}}{8a^2} (1 - \frac{1}{2} T^2) \right],$$

T^2 étant égal à $\frac{r^2}{4a^2}$.

Si l'on cherche le nombre de coups dans lesquels on peut parier un contre un que cela aura lieu, on fera cette probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\int_0^T dt e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{T e^{-T^2}}{8a^2} (1 - \frac{1}{2} T^2).$$

Nommons T' la valeur de t qui correspond à l'équation

$$\int_0^{T'} dt e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

et supposons $T = T' + q$, q étant de l'ordre $\frac{1}{a^2}$. L'intégrale $\int_0^T dt e^{-t^2}$ sera augmentée à très peu près de $q e^{-T'^2}$, ce qui donne

$$q e^{-T'^2} = \frac{T' e^{-T'^2}}{8a^2} (1 - \frac{1}{2} T'^2);$$

on aura donc

$$T^2 = T'^2 + \frac{T'^2}{4a^2} (1 - \frac{1}{2} T'^2).$$

Ayant ainsi T^2 aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^2}$, on aura, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^2}$, en vertu de l'équation

$$2a^2 = r + 2i + \frac{1}{2} = \frac{r^2}{2T^2},$$

la suivante

$$r + 2i = \frac{r^2}{2T^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} T'^2.$$

Pour déterminer la valeur de T^2 , nous observerons qu'ici T' est plus petit que $\frac{1}{2}$; ainsi l'équation transcendante et intégrale

$$\int dt e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

peut être transformée dans la suivante :

$$T' = \frac{1}{3} T'^3 + \frac{1}{1.2} \frac{1}{5} T'^5 - \frac{1}{1.2.3} \frac{1}{7} T'^7 + \dots = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

En résolvant cette équation, on trouve

$$T'^2 = 0,2102497.$$

Ainsi, en supposant $r = 100$, on aura

$$r + 2i = 23780,14;$$

il y a donc alors du désavantage à parier un contre un que A gagnera la partie dans 23780 coups; mais il y a de l'avantage à parier qu'il la gagnera dans 23781 coups.

V.

Considérons deux urnes A et B, renfermant chacune le même nombre n de boules; et supposons que, dans le nombre total $2n$ de boules, il y en ait autant de blanches que de noires. Concevons que l'on tire en même temps une boule de chaque urne, et qu'ensuite on mette dans une urne la boule extraite de l'autre. Supposons que l'on répète cette opération un nombre quelconque r de fois, en agitant à chaque fois les urnes pour en bien mêler les boules; et cherchons la probabilité qu'après ce nombre r d'opérations il y aura x boules blanches dans l'urne A.

Soit $z_{x,r}$ cette probabilité; n^{2r} est le nombre des combinaisons possibles dans r opérations, car, à chaque opération, les boules de l'urne A peuvent se combiner avec chacune des n boules de l'urne B, ce qui produit n^2 combinaisons; $n^{2r} z_{x,r}$ est donc le nombre des combinaisons dans lesquelles il peut y avoir x boules blanches dans l'urne A après ces opérations. Maintenant il peut arriver que l'opération $(r+1)^{\text{ème}}$ fasse sortir une boule blanche de l'urne A, et y fasse rentrer une boule blanche: le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est le produit de $n^{2r} z_{x,r}$ par le nombre x des boules blanches de l'urne A, et par le nombre $n - x$ des boules blanches qui doivent

être alors dans l'urne B, puisque le nombre total des boules blanches des deux urnes est n ; dans tous ces cas, il reste x boules blanches dans l'urne A; le produit $x(n-x)n^{2r}z_{x,r}$ est donc une des parties de $n^{2r+2}z_{x,r+1}$.

Il peut arriver encore que l'opération $(r+1)^{\text{ième}}$ fasse sortir et entrer dans l'urne A une boule noire, ce qui conserve dans cette urne x boules blanches; ainsi $n-x$ étant après l'opération $r^{\text{ième}}$ le nombre des boules noires de l'urne A, et x étant celui des mêmes boules dans l'urne B, on voit, par le raisonnement précédent, que $(n-x)x n^{2r}z_{x,r}$ est encore une partie de $n^{2r+2}z_{x,r+1}$.

S'il y a $x-1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{\text{ième}}$, et que l'opération suivante en fasse sortir une boule noire et y fasse rentrer une boule blanche, il y aura x boules blanches dans l'urne A à l'opération $(r+1)^{\text{ième}}$. Le nombre des cas dans lesquels cela peut avoir lieu est le produit de $n^{2r}z_{x-1,r}$ par le nombre $n-x+1$ des boules noires de l'urne A, après l'opération $r^{\text{ième}}$, et le nombre $n-x+1$ des boules blanches de l'urne B après la même opération; $(n-x+1)^2 n^{2r}z_{x-1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2}z_{x,r+1}$.

Enfin, s'il y a $x+1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{\text{ième}}$, et que l'opération suivante en fasse sortir une boule blanche et y fasse rentrer une boule noire, il y aura encore, après cette dernière opération, x boules blanches dans l'urne. Le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est le produit de $n^{2r}z_{x+1,r}$ par le nombre $x+1$ des boules blanches de l'urne A, et par le nombre $x+1$ des boules noires de l'urne B; $(x+1)^2 n^{2r}z_{x+1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2}z_{x,r+1}$.

En réunissant toutes ces parties et en égalant leur somme à $n^{2r+2}z_{x,r+1}$, on aura l'équation aux différences finies partielles

$$z_{x,r+1} = \left(\frac{x+1}{n}\right)^2 z_{x+1,r} + \frac{2x}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right) z_{x,r} + \left(1 - \frac{x-1}{n}\right)^2 z_{x-1,r}.$$

Quoique cette équation soit différentielle du second ordre par rapport à la variable x , son intégrale ne renferme qu'une fonction arbitraire

qui dépend de la probabilité des diverses valeurs de x dans l'état initial des urnes. En effet, il est visible que si l'on connaît les valeurs de $z_{x,0}$ correspondantes à toutes les valeurs de x , depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$, l'équation précédente donne toutes les valeurs de $z_{x,1}, z_{x,2}, \dots$, en observant que, les valeurs négatives de x étant impossibles, $z_{x,r}$ est nul lorsque x est négatif.

Lorsque x est un très grand nombre, cette équation se transforme dans une équation aux différences infiniment petites partielles que l'on obtient ainsi; on a alors, à très peu près,

$$z_{x+1,r} = z_{x,r} + \frac{\partial z_{x,r}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_{x,r}}{\partial x^2},$$

$$z_{x-1,r} = z_{x,r} - \frac{\partial z_{x,r}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_{x,r}}{\partial x^2},$$

$$z_{x,r+1} = z_{x,r} + \frac{\partial z_{x,r}}{\partial r}.$$

Soit

$$x = \frac{n + \mu\sqrt{n}}{2}, \quad r = nr', \quad z_{x,r} = U;$$

l'équation précédente aux différences partielles deviendra, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n^2}$,

$$\frac{\partial U}{\partial r'} = 2U + 2\mu \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2}.$$

Pour intégrer cette équation, qui, comme on peut s'en assurer par la méthode que j'ai donnée pour cet objet, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de l'année 1773⁽¹⁾, n'est intégrable, en termes finis, qu'au moyen d'intégrales définies, faisons

$$U = \int \varphi dt e^{-\mu t};$$

φ étant une fonction de t et de r' , on aura

$$2\mu \frac{\partial U}{\partial \mu} = 2e^{-\mu t} t \varphi - 2 \int e^{-\mu t} (\varphi dt + t d\varphi), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} = \int e^{-\mu t} t^2 \varphi dt;$$

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. VIII.

l'équation aux différences partielles en U devient ainsi

$$\int e^{-\mu t} \frac{\partial^2}{\partial r^2} dt = 2 e^{-\mu t} t \varphi + \int e^{-\mu t} dt \left(t^2 \varphi - 2 t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

En égalant entre eux les termes affectés du signe $\int$, conformément à la méthode que j'ai donnée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1782 ⁽¹⁾, on aura l'équation aux différences partielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = t^2 \varphi - 2 t \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

et le terme hors du signe $\int$, égalé à zéro, donnera, pour l'équation aux limites de l'intégrale,

$$0 = t \varphi e^{-\mu t}.$$

L'intégrale de l'équation précédente aux différences partielles est

$$\varphi = e^{\frac{1}{2} r^2} \psi \left(\frac{t}{e^{1/2} r} \right),$$

$\psi \left(\frac{t}{e^{1/2} r} \right)$ étant une fonction arbitraire de $\frac{t}{e^{1/2} r}$; on a donc

$$U = \int dt e^{-\mu t + \frac{1}{2} r^2} \psi \left(\frac{t}{e^{1/2} r} \right).$$

Soit

$$t = 2\mu + 2s\sqrt{-1};$$

l'équation précédente prendra cette forme

$$(A) \quad U = e^{-\mu^2} \int ds e^{-s^2} \Gamma \left(\frac{s + \mu\sqrt{-1}}{e^{1/2} r} \right).$$

Il est aisé de voir que l'équation aux limites de l'intégrale, donnée ci-dessus, exige que les limites de l'intégrale relative à s soient prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$. En prenant le radical $\sqrt{-1}$ avec le signe $-$, on aurait pour U une expression de cette forme

$$U = e^{-\mu^2} \int ds e^{-s^2} \Pi \left(\frac{s + \mu\sqrt{-1}}{e^{1/2} r} \right),$$

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. X.

la fonction arbitraire $\Pi(s)$ pouvant être autre que la fonction $\Gamma(s)$. La somme de ces deux expressions de U sera la valeur entière de U; mais il est facile de s'assurer que les intégrales, étant prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$, l'addition de cette nouvelle expression de U n'ajoute rien à la généralité de la première dans laquelle elle est comprise.

Développons maintenant le second membre de l'équation (A), suivant les puissances de $\frac{1}{e^{1/2} r}$, et considérons un des termes de ce développement, tel que

$$\frac{\Pi^{(i)} e^{-\mu^2}}{e^{i/2} r^i} \int ds e^{-s^2} (s - \mu\sqrt{-1})^i;$$

ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5 \dots (2i-1)}{2^i} \sqrt{\pi} \frac{\Pi^{(i)} e^{-\mu^2}}{e^{i/2} r^i} \left[1 - \frac{i}{1.2} (2\mu)^2 + \frac{i(i-1)}{1.2.3.4} (2\mu)^4 - \frac{i(i-1)(i-3)}{1.2.3.4.5.6} (2\mu)^6 + \dots \right].$$

Considérons encore un terme du développement de l'expression de U, tel que

$$\frac{\Gamma^{(i)} \sqrt{-1} e^{-\mu^2}}{e^{(i+1)/2} r^{i+1}} \int ds e^{-s^2} (s - \mu\sqrt{-1})^{i+1};$$

ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5 \dots (2i+1) \Gamma^{(i)} \mu e^{-\mu^2} \sqrt{\pi}}{2^i e^{(i+1)/2} r^{i+1}} \left[1 - \frac{i}{1.2.3} (2\mu)^2 + \frac{i(i-1)}{1.2.3.4.5} (2\mu)^4 - \frac{i(i-1)(i-3)}{1.2.3.4.5.6.7} (2\mu)^6 + \dots \right].$$

On aura donc ainsi l'expression générale de la probabilité U, développée dans une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{e^{1/2} r}$, série qui devient très convergente, lorsque r est un peu considérable. Cette expression doit être telle que $\int U dx$ ou $\frac{1}{2} \int U d\mu \sqrt{n}$ soit égal à l'unité, les intégrales étant étendues à toutes les valeurs dont x et μ sont susceptibles, c'est-à-dire depuis x nul jusqu'à $x = n$ et depuis $\mu = -\sqrt{n}$ jusqu'à $\mu = \sqrt{n}$; car il est certain que l'urne doit ou non contenir des boules blanches. En prenant l'intégrale $\int e^{-\mu^2} d\mu$ dans ces limites, et généralement dans les limites $\pm \frac{1}{2} \sqrt{n}$, on a le même

résultat à très peu près qu'en la prenant depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$; la différence n'est ici que de l'ordre $\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$, et, vu l'extrême rapidité avec laquelle e^{-n} diminue à mesure que n augmente, on voit que cette différence est entièrement insensible lorsque n est un grand nombre. Cela posé, considérons dans l'intégrale $\frac{1}{2} \int U d\mu \sqrt{n}$ le terme

$$\frac{1.3.5 \dots (2i-1) \frac{1}{2} H^{(i)} \pi \sqrt{n}}{2^i e^{i\mu r}} \int e^{-\mu^2} d\mu \left[1 - \frac{i}{1.2} (2\mu)^2 + \frac{i(i-1)}{1.2.3.4} (2\mu)^4 - \dots \right].$$

En étendant l'intégrale depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$, ce terme devient

$$\frac{1.3.5 \dots (2i-1) \frac{1}{2} H^{(i)} \pi \sqrt{n}}{2^i e^{i\mu r}} \left[1 - i + \frac{i(i-1)}{1.2} - \frac{i(i-1)(i-3)}{1.2.3} + \dots \right];$$

le dernier facteur $1 - i + \frac{i(i-1)}{1.2} - \dots$ est égal à $(i-1)!$; il est donc nul, excepté dans le cas de $i=0$, où il se réduit à l'unité. Il est visible que les termes de l'expression de U qui renferment des puissances impaires de μ donnent un résultat nul dans l'intégrale $\frac{1}{2} \int U d\mu \sqrt{n}$, étendue depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$; car ces termes ont pour facteur $e^{-\mu^2}$, et l'on a généralement dans ces limites

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mu^{2i+1} e^{-\mu^2} = 0;$$

il n'y a donc que le premier terme de l'expression de U , terme que nous représentons par $H e^{-\mu^2}$, qui puisse donner un résultat dans l'intégrale $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U d\mu \sqrt{n}$, et ce résultat est $\frac{1}{2} H n \sqrt{n}$; on a donc

$$\frac{1}{2} H n \sqrt{n} = 1,$$

par conséquent

$$H = \frac{2}{n \sqrt{n}}.$$

L'expression générale de U a ainsi la forme suivante

$$U = \frac{2e^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}} \left[1 + \frac{Q^{(1)}(1-2\mu^2)}{e^{i\mu r}} + \frac{Q^{(2)}(1-4\mu^2+\frac{1}{2}\mu^4)}{e^{2i\mu r}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{L^{(2)}\mu}{e^{2i\mu r}} + \frac{L^{(1)}\mu(1-\frac{1}{2}\mu^2)}{e^{4i\mu r}} + \frac{L^{(2)}\mu(1-\frac{1}{2}\mu^2+\frac{1}{2}\mu^4)}{e^{6i\mu r}} + \dots \right],$$

$Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, L^{(2)}, L^{(1)}, \dots$ étant des constantes indéterminées qui dépendent de la valeur initiale de U .

Supposons que U devienne X lorsque r' est nul, X étant une fonction donnée de μ . On a généralement ces deux théorèmes

$$0 = Q^{(i)} \int \mu^{2i} d\mu U_i e^{-\mu^2},$$

$$0 = L^{(i)} \int \mu^{2i+1} d\mu U'_i e^{-\mu^2},$$

lorsque q est moindre que i , U_i et U'_i étant les fonctions de μ par lesquelles $\frac{2Q^{(i)}e^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}e^{i\mu r}}$ et $\frac{2L^{(i)}e^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}e^{i(i+1)\mu r}}$ sont multipliés dans l'expression de U .

Par ce qui précède, le terme $\frac{2Q^{(i)}Ue^{-\mu^2}}{e^{i\mu r}\sqrt{n\pi}}$ est égal à

$$\frac{H^{(i)}(\sqrt{-1})^{2i}}{e^{i\mu r}} e^{-\mu^2} \int ds e^{-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i};$$

il faut donc démontrer que l'on a

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2i} ds d\mu e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i}.$$

En intégrant d'abord par rapport à μ , ce terme devient

$$\frac{2q-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2q-1} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} \\ + i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2q-1} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1}.$$

En continuant d'intégrer ainsi par parties, on arrive à des termes de la forme

$$K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2c}.$$

c n'étant pas zéro; et, par ce qui précède, ce terme est nul. On prouvera de la même manière que l'on a

$$0 = L_i^{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2i+1} d\mu U_i e^{-\mu^2}.$$

De là il suit que l'on a généralement

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} U_i U_{i'} d\mu e^{-\mu^2},$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} U_i U_{i'} d\mu e^{-\mu^2},$$

i et i' étant des nombres différents; car, si, par exemple, i' est plus grand que i , toutes les puissances de μ dans U_i seront moindres que $2i'$; chacun des termes de U donnera donc, par les théorèmes précédents, un résultat nul dans l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} U_i U_{i'} d\mu e^{-\mu^2}$. Le même raisonnement a lieu pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} U_i U_{i'} d\mu e^{-\mu^2}$.

Mais ces intégrales ne sont pas nulles lorsque $i' = i$; on les obtiendra, dans ce cas, de cette manière. On a, par ce qui précède,

$$U_i = \frac{2^i (\sqrt{-1})^{2i} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1) \sqrt{\pi}}.$$

Le terme qui a pour facteur μ^{2i} dans cette expression est

$$\frac{2^i (\sqrt{-1})^{2i} \mu^{2i}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)};$$

or on peut ne considérer que ce terme dans le premier facteur U_i de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} U_i U_i d\mu e^{-\mu^2}$; car les puissances inférieures de μ dans ce facteur donnent un résultat nul dans l'intégrale; on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_i U_i d\mu e^{-\mu^2} = \frac{2^{2i}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)]^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2i} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i},$$

On a, en intégrant par rapport à μ , depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2i} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} \\ &= \frac{2i-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2i-2} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} \\ &+ \frac{2i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2i-1} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1}. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de cette équation est nul par ce qui précède; ce membre se réduit donc à son second terme; on trouve de la même manière que l'on a

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2i-1} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1} \\ &= \frac{2i-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2i-3} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-3}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite; on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2i} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1}{2^{2i}},$$

par conséquent

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_i U_i d\mu e^{-\mu^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)}.$$

On trouvera de la même manière

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_i U_i d\mu e^{-\mu^2} = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)};$$

on a évidemment

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_i U_i d\mu e^{-\mu^2} = 0$$

dans le cas même où i et i' ne sont pas différents, parce que le produit $U_i U_{i'}$ ne contient que des puissances impaires de μ .

Cela posé, l'expression générale de U donne, pour sa valeur initiale,

que nous avons désignée par X,

$$X = \frac{2e^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}} [1 + Q^{(1)}(1 - 2\mu^2) + \dots + L^{(6)}\mu + L^{(1)}\mu(1 - \frac{1}{2}\mu^2) + \dots].$$

Si l'on multiplie cette équation par $U_i d\mu$, et si l'on prend les intégrales depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$, on aura, en vertu des théorèmes précédents,

$$\int_{-\infty}^{\infty} X U_i d\mu = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} Q^{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} U_i U_i d\mu e^{-\mu^2};$$

d'où l'on tire

$$Q^{(i)} = \frac{1.3.5 \dots (2i-1) \frac{1}{2} \sqrt{n}}{2.4.6 \dots 2i} \int_{-\infty}^{\infty} X U_i d\mu;$$

on trouvera de la même manière

$$L^{(i)} = \frac{1.3.5 \dots (2i+1) \frac{1}{2} \sqrt{n}}{2.4.6 \dots 2i} \int_{-\infty}^{\infty} X U_i d\mu.$$

On aura donc ainsi les valeurs successives de $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, L^{(6)}, L^{(1)}, \dots$ au moyen d'intégrales définies, lorsque X ou la valeur initiale de U sera donnée.

Dans le cas où X est égal à $\frac{2i}{\sqrt{n\pi}} e^{-\mu^2}$, l'expression générale de U prend une forme très simple. Alors la fonction arbitraire $\Gamma\left(\frac{s-\mu\sqrt{-1}}{e^{1/r}}\right)$ de la formule (A) est de la forme $k e^{-\frac{\mu\sqrt{-1}}{e^{1/r}}}$. Pour déterminer les constantes $\frac{6}{e^{1/r}}$ et k , nous observerons que, en supposant

$$\frac{6}{e^{1/r}} = \frac{6}{e^{1/r}},$$

on aura

$$U = k e^{\frac{-\mu^2}{e^{1/r}}} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-(1+\frac{6}{e^{1/r}}) \left(s - \frac{6\mu\sqrt{-1}}{1+\frac{6}{e^{1/r}}}\right)};$$

en faisant ensuite

$$\sqrt{1+\frac{6}{e^{1/r}}} \left(s - \frac{6\mu\sqrt{-1}}{1+\frac{6}{e^{1/r}}}\right) = s',$$

et observant que l'intégrale relative à s devant être prise depuis

$s = -\infty$ jusqu'à $s = +\infty$, l'intégrale relative à s' doit être prise dans les mêmes limites, on aura

$$U = \frac{k\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\frac{6}{e^{1/r}}}} e^{\frac{-\mu^2}{e^{1/r}}}.$$

En comparant cette expression à la valeur initiale de U, qui est

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}} e^{-\mu^2},$$

et observant que $\frac{6}{e^{1/r}}$ est la valeur initiale de $\frac{6}{e^{1/r}}$, on aura

$$i^2 = \frac{1}{1+\frac{6}{e^{1/r}}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{6}{e^{1/r}} = \frac{1-i^2}{i^2}, \quad \frac{6}{e^{1/r}} = \frac{1-i^2}{i^2}.$$

On doit avoir ensuite

$$\frac{k\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\frac{6}{e^{1/r}}}} = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}},$$

ce qui donne

$$k\sqrt{\pi} = \frac{2}{\sqrt{n\pi}},$$

valeur que l'on obtient encore par la condition que

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U d\mu \sqrt{n} = 1;$$

on aura donc pour l'expression de U, quel que soit r' ,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi(1+\frac{6}{e^{1/r}})}} e^{\frac{-\mu^2}{e^{1/r}}}.$$

On trouve, en effet, que cette valeur de U, substituée dans l'équation aux différentielles partielles en U, y satisfait. $\frac{6}{e^{1/r}}$ diminuant sans cesse quand r' augmente, la valeur de U varie sans cesse et devient à sa limite, lorsque r' est infini,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} e^{-\mu^2}.$$

Pour donner une application de ces formules, imaginons dans une urne C un très grand nombre m de boules blanches et un pareil nombre de boules noires. Ces boules ayant été mêlées, supposons que l'on tire de l'urne n boules que l'on met dans l'urne A. Supposons ensuite que l'on mette dans l'urne B autant de boules blanches qu'il y a de boules noires dans l'urne A, et autant de boules noires qu'il y a de boules blanches dans la même urne. Il est clair que le nombre des cas dans lesquels on aura x boules blanches, et par conséquent $n - x$ boules noires dans l'urne A, est égal au produit du nombre des combinaisons des m boules blanches de l'urne C, prises x à x , par le nombre des combinaisons des m boules noires de la même urne, prises $n - x$ à $n - x$. Ce produit est égal à

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-x+1)}{1.2.3\dots x} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+x+1)}{1.2.3\dots(n-x)}$$

ou à

$$\frac{(1.2.3\dots m)^2}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots(m-x).1.2.3\dots(n-x).1.2.3\dots(m-n+x)}.$$

Le nombre de tous les cas possibles est le nombre des combinaisons des $2m$ boules prises n à n ; ce nombre est

$$\frac{1.2.3\dots 2m}{1.2.3\dots n.1.2.3\dots(2m-n)};$$

en divisant donc la fraction précédente par celle-ci, on aura pour la probabilité de x ou pour la valeur initiale de U

$$\frac{(1.2.3\dots m)^2.1.2.3\dots n.1.2.3\dots(2m-n)}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots(m-x).1.2.3\dots(n-x).1.2.3\dots(m-n+x).1.2.3\dots 2m}.$$

Maintenant, si l'on observe que l'on a à très peu près, lorsque s est un très grand nombre,

$$1.2.3\dots s = s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{2\pi},$$

on trouvera après toutes les réductions, en faisant

$$x = \frac{n + \mu\sqrt{n}}{2}$$

et négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \sqrt{\frac{m}{2m-n}} e^{-\frac{\mu^2}{2}};$$

en faisant donc

$$i^2 = \frac{m}{2m-n},$$

on aura

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}} e^{-i^2\mu^2}.$$

Si le nombre m est infini, alors $i^2 = \frac{1}{2}$, et la valeur initiale de U est

$$U = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2}.$$

Sa valeur, après un nombre quelconque de tirages, est

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi(1+e^{-\frac{\mu^2}{n}})}} e^{-\frac{\mu^2}{1+e^{-\frac{\mu^2}{n}}}}.$$

Le cas de m infini revient à celui dans lequel l'urne A serait remplie, en projetant n fois une pièce qui amènerait indifféremment *croix* ou *pile*, et en mettant dans l'urne A une boule blanche chaque fois que *croix* arriverait, et une boule noire chaque fois que *pile* arriverait; car il est visible que la probabilité de tirer une boule blanche ou noire de l'urne C est $\frac{1}{2}$ comme celle d'amener *croix* ou *pile*. En prenant l'intégrale $\int U dx$ ou $\frac{1}{2} \int U d\mu\sqrt{n}$ depuis $\mu = -a$ jusqu'à $\mu = a$, on aura la probabilité que le nombre des boules blanches de l'urne A sera compris dans les limites $\pm a\sqrt{n}$.

VI.

Du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations.

Lorsque l'on veut corriger un élément déjà connu à fort peu près, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, on forme des équations de condition de la manière suivante. Soient z la correction de

l'élément et ξ l'observation; l'expression analytique de celle-ci sera une fonction de l'élément. En y substituant, au lieu de l'élément, sa valeur approchée, plus la correction z ; en réduisant en série par rapport à z et négligeant le carré de z , cette fonction prendra la forme $m + pz$, à laquelle on égale la quantité observée ξ , ce qui donne

$$\xi = m + pz;$$

z serait donc ainsi déterminé, si l'observation était rigoureuse; mais, comme elle est susceptible d'erreur, en nommant ε cette erreur, on a rigoureusement

$$\xi + \varepsilon = m + pz$$

ou, en faisant $\xi - m = \varphi$, on a

$$z = pz - \varphi.$$

Chaque observation fournit une équation de condition semblable, que l'on peut représenter pour l'observation $(i+1)^{\text{ème}}$ par celle-ci

$$\xi^{(i)} = p^{(i)} z - \varphi^{(i)}.$$

En réunissant toutes ces équations, on a

$$S \xi^{(i)} = z S p^{(i)} - S \varphi^{(i)},$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i , depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$, s étant le nombre total des observations. En supposant nulle la somme des erreurs, cette équation donne

$$z = \frac{S \varphi^{(i)}}{S p^{(i)}};$$

c'est ce que l'on nomme ordinairement *résultat moyen* des observations.

J'ai donné dans le Volume précédent ⁽¹⁾ la loi de la probabilité des erreurs de ce résultat; mais, au lieu de supposer nulle la somme des erreurs, on peut supposer nulle une fonction quelconque linéaire de ces erreurs que nous représenterons ainsi

$$(m) \quad q\xi + q^{(1)}\xi^{(1)} + q^{(2)}\xi^{(2)} + \dots + q^{(s-1)}\xi^{(s-1)},$$

⁽¹⁾ Voir, plus haut, p. 322 et suivantes.

$q, q^{(1)}, q^{(2)}, \dots$ étant des nombres positifs ou négatifs que nous supposons être entiers. En substituant dans la fonction (m) , au lieu de $\xi, \xi^{(1)}, \dots$, leurs valeurs données par les équations de condition, elle devient

$$z S p^{(i)} q^{(i)} - S q^{(i)} \varphi^{(i)}.$$

En égalant donc à zéro la fonction (m) , on a

$$z = \frac{S q^{(i)} \varphi^{(i)}}{S p^{(i)} q^{(i)}}.$$

Soit z' l'erreur de ce résultat, en sorte que l'on ait

$$z = \frac{S q^{(i)} \varphi^{(i)}}{S p^{(i)} q^{(i)}} + z',$$

ce qui donne pour l'expression de la fonction (m)

$$z' S p^{(i)} q^{(i)};$$

et déterminons la loi de probabilité de l'erreur z' du résultat, lorsque les observations sont en grand nombre. Pour cela, considérons le produit

$$S \Psi\left(\frac{x}{a}\right) e^{x \sigma \sqrt{-1}} \times S \Psi\left(\frac{x}{a}\right) e^{q^{(1)} x \sigma \sqrt{-1}} \times \dots \times S \Psi\left(\frac{x}{a}\right) e^{q^{(s-1)} x \sigma \sqrt{-1}},$$

le signe S s'étendant ici depuis la valeur négative extrême de x jusqu'à sa valeur positive extrême: $\Psi\left(\frac{x}{a}\right)$ est la probabilité d'une erreur x dans chaque observation, x étant supposé, ainsi que a , formé d'une infinité de parties prises pour unité. Il est clair que le coefficient d'une exponentielle quelconque $e^{t \sigma \sqrt{-1}}$ dans ce produit sera la probabilité que la somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par $q, q^{(1)}, \dots$, c'est-à-dire la fonction (m) , sera égale à t ; en multipliant donc le produit précédent par $e^{-t \sigma \sqrt{-1}}$, le terme indépendant de σ , dans ce nouveau produit, exprimera cette probabilité. Si l'on suppose, comme nous le ferons ici, la probabilité des erreurs de chaque observation la même pour les erreurs, soit positives, soit négatives, on pourra, dans la somme $S \Psi\left(\frac{x}{a}\right) e^{q x \sigma \sqrt{-1}}$,

réunir les deux termes multipliés, l'un par $e^{q x \varpi \sqrt{-1}}$ et l'autre par $e^{-q x \varpi \sqrt{-1}}$, alors cette somme prend la forme $2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos qx\varpi$. Il en est de même des autres sommes semblables. De là il suit que la probabilité que la fonction (m) sera égale à l est le terme indépendant de ϖ dans la fonction

$$e^{-l\varpi\sqrt{-1}} \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos qx\varpi \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos q^{(1)}x\varpi \times \dots \\ \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos q^{(s-1)}x\varpi.$$

En y changeant $-l$ dans l , on aura la probabilité que la fonction (m) sera égale à $-l$; en réunissant ces deux expressions, le terme indépendant de ϖ dans le produit

$$2\cos l\varpi \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos qx\varpi \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos q^{(1)}x\varpi \times \dots \\ \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos q^{(s-1)}x\varpi$$

est la probabilité que la fonction (m) sera ou $+l$ ou $-l$; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varpi \cos l\varpi \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos qx\varpi \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos q^{(1)}x\varpi \times \dots \\ \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos q^{(s-1)}x\varpi.$$

On a, en réduisant les cosinus en séries,

$$S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos qx\varpi = S\Psi\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}q^2a^2\varpi^2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right) + \dots$$

Si l'on fait $\frac{x}{a} = x'$, et si l'on observe que, la variation de x étant l'unité, on a $dx' = \frac{1}{a}$, on aura

$$S\Psi\left(\frac{x}{a}\right) = a \int dx' \Psi(x').$$

Nommons k l'intégrale $2 \int dx' \Psi(x')$, prise depuis x nul jusqu'à sa

valeur extrême; nommons pareillement k' l'intégrale $\int x'^2 dx' \Psi(x')$ étendue dans les mêmes limites, et ainsi de suite; nous aurons

$$2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos qx\varpi = ak \left(1 - \frac{k'}{k}q^2a^2\varpi^2 + \dots\right);$$

son logarithme est

$$-\frac{k'}{k}q^2a^2\varpi^2 - \dots + \log ak.$$

ak ou $2a \int dx' \Psi(x')$ étant égal à $2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)$, il exprime la probabilité que l'erreur de chaque observation sera comprise dans ses limites, ce qui est certain; on a donc $ak = 1$, ce qui réduit le logarithme précédent à

$$-\frac{k'}{k}q^2a^2\varpi^2 - \dots$$

De là il est aisé de conclure que le logarithme du produit

$$2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos qx\varpi \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos q^{(1)}x\varpi \times \dots \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos q^{(s-1)}x\varpi$$

est égal à

$$-\frac{k'}{k}Sg^{(i)}a^2\varpi^2 - \dots,$$

le signe S s'étendant ici depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$. Lorsque les observations sont en très grand nombre, on peut ne conserver que le premier terme de la série; car il est facile de voir que la somme des carrés ou des cubes, ... de $q, q^{(1)}, \dots$ étant de l'ordre s , chacun des termes de la série a pour facteur une quantité de cet ordre; mais, si l'on suppose que $sa^2\varpi^2$ soit toujours d'un ordre moindre que $\sqrt{s}$, alors le second terme de la série étant de l'ordre $sa^2\varpi^4$, il sera très petit et deviendra nul dans le cas de s infini; on peut donc négliger vis-à-vis du premier terme le second, et à plus forte raison les suivants. Maintenant si l'on repasse des logarithmes aux nombres, on aura

$$2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos qx\varpi \times 2S\Psi\left(\frac{x}{a}\right)\cos q^{(1)}x\varpi \times \dots = e^{-\frac{k'}{k}a^2\varpi^2 Sg^{(i)}};$$

la probabilité que la fonction (m) sera égale à $+l$ ou à $-l$ est donc, en intégrant depuis σ nul jusqu'à $\sigma = \pi$,

$$\frac{2}{a\pi} \int_0^\pi a d\sigma \cos l\sigma e^{-\frac{k}{a} \sigma^2 \pi^2 S q^{(i)2}}$$

Si l'on fait $a\sigma = t$, cette intégrale devient

$$\frac{2}{a\pi} \int_0^{a\pi} dt \cos \frac{l}{a} t e^{-\frac{k}{a} t^2 \pi^2 S q^{(i)2}}$$

L'intégrale relative à σ devant être prise depuis σ nul jusqu'à $\sigma = \pi$, l'intégrale relative à t doit être prise depuis t nul jusqu'à $t = a\pi$ ou jusqu'à l'infini, a étant supposé d'un nombre infini d'unités. A la vérité, nous sommes parvenus à l'intégrale précédente, en supposant $sa^2\pi^2$ ou st^2 d'un ordre plus petit que $\sqrt{s}$; mais, lorsque st^2 est de l'ordre $\sqrt{s}$, l'exponentielle $e^{-\frac{k}{a} t^2 \pi^2 S q^{(i)2}}$ devient si excessivement petite que l'on peut, sans crainte d'aucune erreur sensible, étendre l'intégrale au delà jusqu'à l'infini. Cela posé, cette intégrale devient, par l'article II,

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{k}} \frac{1}{S q^{(i)2}} e^{-\frac{k\pi^2}{4k a^2 S q^{(i)2}}}$$

En faisant donc $l = ar$, et observant que, la variation de l étant l'unité, on a $a dr = 1$, on aura

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi} S q^{(i)2}} \int dr e^{-\frac{k\pi^2}{4k a^2 S q^{(i)2}}}$$

pour la probabilité que la fonction (m) sera comprise dans les limites $\pm ar$.

Déterminons présentement la valeur moyenne de l'erreur à craindre, en adoptant pour résultat moyen des observations la correction

$$\frac{S q^{(i)2} q^{(i)}}{S p^{(i)2} q^{(i)2}}$$

qui résulte, comme on l'a vu, de l'égalité de la fonction (m) à zéro.

z' étant supposé la correction de ce résultat, la fonction (m) devient $z' S p^{(i)2} q^{(i)}$. En faisant cette quantité égale à ar , on aura

$$\frac{dr e^{-\frac{k\pi^2}{4k a^2 S q^{(i)2}}}}{\sqrt{k\pi} S q^{(i)2}} = \frac{dz' S p^{(i)2} q^{(i)}}{2a\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{k}{k}} S q^{(i)2}} e^{-\frac{k\pi^2}{4k a^2 S q^{(i)2}}};$$

le coefficient de dz' dans le second membre de cette équation est donc l'ordonnée de la courbe des probabilités des erreurs z' qui représentent les abscisses de cette courbe, que l'on peut étendre à l'infini de chaque côté de l'ordonnée qui répond à z' nul. Cela posé, toute erreur, soit positive, soit négative, doit être considérée comme un désavantage ou une perte réelle à un jeu quelconque; or, par les principes connus du Calcul des probabilités, on évalue ce désavantage en prenant la somme de tous les produits de chaque désavantage par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre est donc la somme des produits de chaque erreur, abstraction faite du signe, par sa probabilité; par conséquent elle est égale à l'intégrale

$$\int_0^\infty z' dz' S p^{(i)2} q^{(i)} e^{-\frac{k\pi^2}{4k a^2 S q^{(i)2}}};$$

L'erreur moyenne à craindre est donc

$$(B) \quad 2a \sqrt{\frac{k}{k\pi}} \frac{\sqrt{S q^{(i)2}}}{S p^{(i)2} q^{(i)2}}$$

Les valeurs de $p, p^{(i)}, \dots$ sont données par les équations de condition; mais les valeurs de $q, q^{(i)}, \dots$ sont arbitraires et doivent être déterminées par la condition que l'expression précédente soit un minimum. Cette condition donne, en ne faisant varier que $q^{(i)}$,

$$\frac{q^{(i)}}{S q^{(i)2}} = \frac{p^{(i)}}{S p^{(i)2} q^{(i)2}}$$

Cette équation a lieu quel que soit i ; et, comme la variation de i ne

fait point changer la fraction $\frac{S q^{(i)}}{S p^{(i)} q^{(i)}}$, en la nommant μ , on aura

$$q = \mu p, \quad q^{(1)} = \mu p^{(1)}, \quad \dots, \quad q^{(i-1)} = \mu p^{(i-1)},$$

et l'on peut, quels que soient $p, p^{(1)}, \dots$, prendre μ tel que les nombres $q, q^{(1)}, \dots$ soient des nombres entiers, comme l'analyse précédente l'exige. Alors la formule (B) donne, pour l'erreur moyenne à craindre,

$$(D) \quad \sqrt{\frac{k\pi}{k'} S p^{(i)2}};$$

c'est, dans toutes les suppositions que l'on peut faire sur les valeurs de $q, q^{(1)}, \dots$, la plus petite erreur moyenne possible. Le résultat moyen des observations devient alors

$$z = \frac{S p^{(i)} q^{(i)}}{S p^{(i)2}}.$$

Si l'on suppose les valeurs de $q, q^{(1)}, \dots$ égales à ± 1 , l'erreur moyenne à craindre sera la plus petite lorsque le signe $\pm$ sera déterminé de manière que $p^{(i)} q^{(i)}$ soit positif, ce qui revient à supposer $1 = q = q^{(1)} = \dots$, et à préparer les équations de condition, de sorte que le coefficient de z dans chacune d'elles soit positif : c'est ce que l'on fait dans la méthode ordinaire. Alors le résultat moyen est

$$z = \frac{S q^{(i)}}{S p^{(i)}},$$

et l'erreur moyenne à craindre est

$$\frac{2a\sqrt{s}}{S p^{(i)} \sqrt{\frac{k\pi}{k'}}};$$

mais cette erreur surpasse la précédente (D), puisque celle-ci est la plus petite possible. On peut s'en convaincre d'ailleurs de cette manière : on a

$$\frac{\sqrt{s}}{S p^{(i)}} > \frac{1}{\sqrt{S p^{(i)2}}} \quad \text{ou} \quad s S p^{(i)2} > (S p^{(i)})^2.$$

En effet, $2pp^{(1)}$ est moindre que $p^{(2)} + p^{(1)2}$, puisque $(p^{(1)} - p)^2$ est une quantité positive; on peut donc, dans le second membre de l'inégalité précédente, substituer pour $2pp^{(1)}$, $p^2 + p^{(1)2} - f$, f étant une quantité positive. En faisant des substitutions semblables pour tous les produits semblables, ce second membre sera égal à $s(p^2 + p^{(1)2} + \dots + p^{(i-1)2})$ moins une quantité positive.

Le résultat

$$z = \frac{S p^{(i)} q^{(i)}}{S p^{(i)2}},$$

auquel correspond le minimum d'erreur à craindre, est celui que donne la méthode des moindres carrés des erreurs, car la somme de ces carrés étant

$$(pz - q)^2 + (p^{(1)}z - q^{(1)})^2 + \dots + (p^{(i-1)}z - q^{(i-1)})^2,$$

la condition du minimum de cette fonction, en faisant varier z , donne pour cette variable l'expression précédente; cette méthode doit donc être employée de préférence, quelle que soit la loi de facilité des erreurs, loi dont dépend le rapport $\frac{k}{k'}$. Quoique cette loi soit presque toujours ignorée, cependant on peut supposer $\frac{k}{k'} > 6$. En effet, si l'on suppose que les limites des erreurs de chaque observation sont $\pm a$, alors x' étant $\frac{x}{a}$, la valeur de x' s'étendra depuis zéro jusqu'à l'unité de sorte qu'on obtiendra les intégrales

$$2 \int_0^1 dx' \Psi(x')$$

et

$$\int_0^1 x'^2 dx' \Psi(x'),$$

que k et k' représentent; il faut donc faire voir qu'alors

$$2 \int_0^1 dx' \Psi(x') > 6 \int_0^1 x'^2 dx' \Psi(x').$$

Pour cela, il suffit de prouver que l'on a

$$x^{1/2} \int_0^x dx' \Psi(x') > 3 \int_0^x x'^{1/2} dx' \Psi(x').$$

En effet, si l'on différentie cette inégalité, on aura

$$2x' \int_0^{x'} dx'' \Psi(x'') > 2x'^{1/2} \Psi(x')$$

ou

$$\int_0^{x'} dx'' \Psi(x'') > x' \Psi(x').$$

Différentiant encore cette inégalité, on aura

$$0 > x' \frac{d\Psi(x')}{dx'};$$

or cette inégalité est juste, si l'on suppose que la probabilité $\Psi(x')$ de l'erreur x de chaque observation est d'autant plus petite que l'erreur est plus grande, ce qu'il est naturel d'admettre; la différentielle de $\Psi(x')$ est alors négative, et, par conséquent, moindre que zéro.

De là il suit que la fonction (D) est moindre que

$$\frac{2a}{\sqrt{6\pi Sp^{(1/2)}}}.$$

La moitié de cette fonction est l'erreur moyenne à craindre en plus, en adoptant le résultat donné par la méthode des moindres carrés; cette moitié, prise avec le signe —, est l'erreur moyenne à craindre en moins. On peut donc apprécier par là le degré d'approximation de ce résultat, en prenant pour a l'écart du résultat moyen qui ferait rejeter une observation. Dans l'ignorance entière où l'on est le plus souvent de la loi des erreurs, on peut également prendre toutes celles qui satisfont aux deux conditions de donner la même probabilité pour les erreurs positives et négatives égales, et de rendre les erreurs d'autant moins probables qu'elles sont plus grandes. Alors il faut choisir la loi moyenne entre toutes ces lois, et que j'ai déterminée dans les

Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1778, page 258 ⁽¹⁾. Cette loi donne, pour la probabilité de l'erreur $\pm x$,

$$\frac{1}{2a} \log \frac{a}{x};$$

on trouve alors

$$\frac{k}{k'} = 1.8,$$

ce qui donne $\frac{2a}{3\sqrt{2\pi Sp^{(1/2)}}}$ pour l'erreur moyenne à craindre.

Si l'on fait

$$z' = \frac{2at\sqrt{\frac{k}{k'}}}{\sqrt{Sp^{(1/2)}}},$$

on aura par ce qui précède, dans la méthode des moindres carrés des erreurs, où $q^{(0)} = \mu p^{(0)}$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dt e^{-t^2}$$

pour la probabilité que l'erreur du résultat moyen sera comprise dans les limites

$$\pm \frac{2at\sqrt{\frac{k}{k'}}}{\sqrt{Sp^{(1/2)}}}.$$

Dans la méthode ordinaire où $q^{(0)} = 1$, l'intégrale précédente exprime la probabilité que l'erreur du résultat moyen donné par cette méthode sera comprise dans les limites

$$\pm \frac{2at\sqrt{\frac{k}{k'}}\sqrt{5}}{Sp^{(1/2)}}.$$

La valeur de t étant supposée la même pour les résultats des deux méthodes, la probabilité que l'erreur sera contenue dans les limites correspondantes sera la même; mais ces limites sont plus resserrées dans la première méthode que dans la seconde. Si l'on suppose que

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. IX, p. 412.

ces limites sont les mêmes, relativement aux résultats des deux méthodes, la valeur de t sera plus grande, et par conséquent la probabilité que l'erreur du résultat moyen n'excèdera pas ces limites sera plus considérable dans la première méthode que dans la seconde; ainsi, sous ce nouveau rapport, la méthode des moindres carrés mérite la préférence.

VII.

Supposons maintenant qu'un même élément soit donné : 1° par le résultat moyen de s observations d'un premier genre et qu'il soit, par ces observations, égal à A ; 2° par le résultat moyen de s' observations d'un second genre et qu'il soit égal à $A + q$; 3° par le résultat moyen de s'' observations d'un troisième genre et qu'il soit égal à $A + q'$, et ainsi du reste. Si l'on représente par $A + x$ l'élément vrai, l'erreur du résultat des observations s sera $-x$; en supposant donc ξ égal à

$$\sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{\sqrt{Sp^{(0)}}}{2a},$$

si l'on fait usage des moindres carrés des erreurs pour déterminer le résultat moyen, ou à

$$\sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{Sp^{(0)}}{2a\sqrt{s}},$$

si l'on emploie la méthode ordinaire, la probabilité de cette erreur sera, par l'article précédent, en supposant s un grand nombre,

$$\frac{\xi}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2 s^2}.$$

L'erreur du résultat des observations s' sera $q - x$, et en désignant par ξ' , pour ces observations, ce que nous avons nommé ξ pour les observations s , la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{\xi'}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi'^2 (x-q)^2}.$$

Pareillement, l'erreur du résultat des observations s'' sera $q' - x$, et,

en nommant pour elles ξ'' ce que nous avons nommé ξ pour les observations s , la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{\xi''}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi''^2 (x-q')^2};$$

et ainsi de suite. Le produit de toutes ces probabilités sera la probabilité que $-x$, $q - x$, $q' - x$, ... seront les erreurs des résultats moyens des observations s , s' , s'' , ...; cette probabilité est donc égale à

$$\frac{\xi}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi'}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi''}{\sqrt{\pi}} \dots e^{-\xi^2 x^2 - \xi'^2 (x-q)^2 - \xi''^2 (x-q')^2 - \dots},$$

En la multipliant par dx et prenant l'intégrale depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, on aura la probabilité que les résultats moyens des observations s , s' , ... surpasseront respectivement de q , q' , ... le résultat moyen des observations s .

Si l'on prend l'intégrale dans des limites déterminées, on aura la probabilité que, la condition précédente étant remplie, l'erreur du premier résultat sera comprise dans ces limites; en divisant cette probabilité par celle de la condition elle-même, on aura la probabilité que l'erreur du premier résultat sera comprise dans les limites données, lorsqu'on est certain que la condition a effectivement lieu; cette probabilité est donc

$$\frac{\int dx e^{-\xi^2 x^2 - \xi'^2 (x-q)^2 - \xi''^2 (x-q')^2 - \dots}}{\int dx e^{-\xi^2 x^2 - \xi'^2 (x-q)^2 - \xi''^2 (x-q')^2 - \dots}};$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans les limites données et celle du dénominateur étant prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$.

On a

$$\begin{aligned} & \xi^2 x^2 + \xi'^2 (x-q)^2 + \xi''^2 (x-q')^2 + \dots \\ &= (\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots) x^2 - 2x(\xi'^2 q + \xi''^2 q' + \dots) + \xi'^2 q^2 + \xi''^2 q'^2 + \dots \end{aligned}$$

Soit

$$x = \frac{\xi'^2 q + \xi''^2 q' + \dots}{\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots} + t;$$

la probabilité précédente deviendra

$$\frac{\int dt e^{-(\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots)t}}{\int dt e^{-(\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots)t}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans des limites données et celle du dénominateur étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Cette dernière intégrale est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots}};$$

en faisant donc

$$t = t\sqrt{\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots},$$

la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dt' e^{-t'^2}.$$

La valeur de t' la plus probable est celle qui répond à t' nul, d'où il suit que la valeur de x la plus probable est celle qui répond à $t = 0$; ainsi la correction du premier résultat que donne avec le plus de probabilité l'ensemble de toutes les observations s, s', s'' est

$$\frac{\xi'^2 q + \xi''^2 q' + \dots}{\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots},$$

et l'on trouvera, par l'article précédent, que l'erreur moyenne à craindre est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots)}}$$

dont la moitié est l'erreur à craindre en plus, et l'autre moitié, prise avec le signe —, est l'erreur à craindre en moins.

La correction que nous venons de donner est celle qui rend un minimum la fonction

$$(\xi x)^2 + [\xi'(x - q)]^2 + [\xi''(x - q)]^2 + \dots;$$

or la plus grande ordonnée de la courbe des probabilités des erreurs

du premier résultat est, par ce qui précède, $\frac{\xi}{\sqrt{\pi}}$; celle de la courbe des probabilités des erreurs du second résultat est $\frac{\xi'}{\sqrt{\pi}}$, et ainsi de suite. Le milieu qu'il faut choisir entre les divers résultats est donc celui qui rend un minimum la somme des carrés de l'erreur de chaque résultat multipliée par la plus grande ordonnée de la courbe de sa probabilité. Ce milieu est le premier résultat A , plus sa correction, ou

$$\frac{A\xi^2 + (A + q)\xi'^2 + (A + q')\xi''^2 + \dots}{\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots};$$

ainsi la loi du minimum des carrés des erreurs devient nécessaire lorsque l'on doit prendre un milieu entre des résultats donnés chacun par un grand nombre d'observations.

VIII.

L'analyse exposée dans l'article VI peut être étendue à la correction d'un nombre quelconque d'éléments par les observations. Elle conduit toujours à ce résultat : savoir que la méthode des moindres carrés des erreurs des observations est celle qui donne sur la correction des éléments la plus petite erreur moyenne à craindre.

Quand on veut corriger un ou plusieurs éléments déjà connus, à fort peu près, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, on forme des équations de condition d'une manière analogue à celle que nous avons donnée dans l'article VI, relativement à un seul élément.

Considérons deux éléments, et nommons z la correction du premier et z' celle du second. Soit ξ l'observation; son expression analytique sera fonction des deux éléments : en y substituant leurs valeurs approchées, augmentées respectivement des corrections z et z' , en la réduisant ensuite en série et négligeant le produit et les carrés de z et z' , cette fonction prendra la forme $A + pz + qz'$, et en lui égalant la quantité observée ξ , on aura

$$\xi = A + pz + qz'.$$

Une seconde observation donnera une équation semblable, et l'on aura, en résolvant ces deux équations, les valeurs de z et de z' . Ces valeurs seraient exactes si les observations étaient rigoureuses; mais, comme elles sont susceptibles d'erreur, on en considère un grand nombre. En combinant ensuite les équations de condition que chacune d'elles fournit, de manière à les réduire à deux, on obtient les corrections des éléments avec d'autant plus d'exactitude que l'on emploie plus d'observations et qu'elles sont mieux combinées. La recherche de la combinaison la plus avantageuse est une des plus utiles de la théorie des probabilités et mérite à la fois l'attention des géomètres et des observateurs.

Si dans l'équation de condition précédente on fait $\varepsilon - A = \alpha$, et si l'on nomme ε l'erreur de la première observation, on aura

$$\varepsilon = pz + qz' - \alpha.$$

L'observation $(i+1)^{\text{ème}}$ donnera une équation semblable, que nous représenterons par celle-ci

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)}z + q^{(i)}z' - \alpha^{(i)},$$

$\varepsilon^{(i)}$ étant l'erreur de cette observation et s étant le nombre des observations, en sorte que i peut s'étendre depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$.

Présentement, toutes les manières de combiner ensemble ces équations se réduisent à les multiplier respectivement par des constantes et à les ajouter ensuite. En les multipliant d'abord respectivement par $m, m^{(1)}, m^{(2)}, \dots$ et les ajoutant, on aura l'équation finale

$$Sm^{(i)}\varepsilon^{(i)} = zSm^{(i)}p^{(i)} + z'Sm^{(i)}q^{(i)} - Sm^{(i)}\alpha^{(i)}.$$

En multipliant encore les mêmes équations respectivement par $n, n^{(1)}, \dots$ et ajoutant ces produits, on aura une seconde équation finale

$$Sn^{(i)}\varepsilon^{(i)} = zSn^{(i)}p^{(i)} + z'Sn^{(i)}q^{(i)} - Sn^{(i)}\alpha^{(i)},$$

le signe S s'étendant dans ces deux équations à toutes les valeurs de i , depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$.

Si l'on suppose nulles les deux fonctions $Sm^{(i)}\varepsilon^{(i)}$ et $Sn^{(i)}\varepsilon^{(i)}$, sommes que nous désignerons respectivement par (m) et (n) , les deux équations finales précédentes donneront les corrections z et z' des deux éléments. Mais ces corrections sont susceptibles d'erreurs, relatives à celle dont la supposition que nous venons de faire est susceptible elle-même. Concevons donc que les fonctions (m) et (n) , au lieu d'être nulles, soient respectivement l et l' ; et nommons u et u' les erreurs correspondantes des corrections z et z' déterminées par ce qui précède, les deux équations finales deviendront

$$l = uSm^{(i)}p^{(i)} + u'Sm^{(i)}q^{(i)},$$

$$l' = uSn^{(i)}p^{(i)} + u'Sn^{(i)}q^{(i)}.$$

Il faut maintenant déterminer les facteurs $m, m^{(1)}, \dots, n, n^{(1)}, \dots$, de manière que l'erreur moyenne à craindre soit un minimum. Pour cela, considérons le produit

$$\int_{-a}^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) e^{-(mx + n\varpi)} x \sqrt{-1} \int_{-a}^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) e^{-(m^{(1)}x + n^{(1)}\varpi)} x \sqrt{-1} \dots \int_{-a}^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) e^{-(m^{(s-1)}x + n^{(s-1)}\varpi)} x \sqrt{-1},$$

x étant l'erreur quelconque d'une observation, $-a$ et $+a$ étant les limites de cette erreur, $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ étant la probabilité de cette erreur, et la probabilité d'une erreur positive étant supposée la même que celle de l'erreur négative correspondante; enfin e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. La fonction précédente devient, en réunissant les deux exponentielles relatives à x et à $-\varpi$,

$$2 \int_0^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos(mx\varpi + nx\varpi') \times 2 \int_0^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos(m^{(1)}x\varpi + n^{(1)}x\varpi') \times \dots \\ \times 2 \int_0^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos(m^{(s-1)}x\varpi + n^{(s-1)}x\varpi').$$

x étant supposé, ainsi que a , divisé dans une infinité de parties prises pour unité. Maintenant, il est clair que le terme indépendant des exponentielles, dans le produit de la fonction précédente par $e^{-l\varpi\sqrt{-1} - l'\varpi'\sqrt{-1}}$, est la probabilité que la somme des erreurs de chaque observation,

multipliées respectivement par $m, m^{(1)}, \dots$, ou la fonction (m) sera égale à l en même temps que la fonction (n) , somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par $(n), n^{(1)}, \dots$, sera égale à l' ; cette probabilité est donc, en supposant $m, m^{(1)}, \dots, n, n^{(1)}, \dots$ des nombres entiers,

$$(1) \quad \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varpi d\varpi' e^{-i\varpi\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1}} \right. \\ \left. \times \left[2 \int_0^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos(mx\varpi + nx\varpi') \times \dots \times 2 \int_0^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos(m^{(s-1)}x\varpi + n^{(s-1)}x\varpi') \right] \right]$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

En réduisant les cosinus en série, et faisant

$$\frac{x}{a} = x', \quad \frac{1}{a} = dx',$$

$$K = 2 \int_0^1 dx' \varphi(x'), \quad K^2 = \int_0^1 x'^2 dx' \varphi(x'), \quad K^{12} = \int_0^1 x'^4 dx' \varphi(x'), \quad \dots,$$

on a

$$2 \int_0^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos(mx\varpi + nx\varpi') \\ = aK \left[1 - \frac{K^2 a^2}{K} (m\varpi + n\varpi')^2 + \frac{K^{12}}{12K^3} a^4 (m\varpi + n\varpi')^4 + \dots \right];$$

aK ou $2a \int_0^1 dx' \varphi(x')$ exprime la probabilité que l'erreur de chaque observation sera comprise dans ses limites, ce qui est certain; on a donc $aK = 1$. En prenant donc le logarithme du second membre de l'équation précédente, on aura

$$- \frac{K^2}{K} a^2 (m\varpi + n\varpi')^2 + \frac{KK^{12} - 6K^2}{12K^3} a^4 (m\varpi + n\varpi')^4 - \dots$$

De là il est facile de conclure que le logarithme du produit des facteurs

$$2 \int_0^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos(mx\varpi + nx\varpi'), \quad 2 \int_0^a \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos(m^{(1)}x\varpi + n^{(1)}x\varpi'), \quad \dots$$

est, le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i ,

$$- \frac{K^2}{K} a^2 (\varpi^2 S m^{(i)2} + 2\varpi\varpi' S m^{(i)} n^{(i)} + \varpi'^2 S n^{(i)2}) \\ + \frac{KK^{12} - 6K^2}{12K^3} a^4 (\varpi^4 S m^{(i)4} + 4\varpi^3\varpi' S m^{(i)3} n^{(i)} + \dots) + \dots$$

En repassant des logarithmes aux nombres, on aura, pour le produit lui-même,

$$\left[1 + \frac{KK^{12} - 6K^2}{12K^3} a^4 (\varpi^4 S m^{(i)4} + \dots) + \dots \right] e^{-\frac{K^2}{K} a^2 (\varpi^2 S m^{(i)2} + 2\varpi\varpi' S m^{(i)} n^{(i)} + \varpi'^2 S n^{(i)2})}$$

En substituant donc, au lieu de ce produit, cette valeur dans la fonction intégrale (1), elle devient

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varpi d\varpi' \left[1 + \frac{KK^{12} - 6K^2}{12K^3} a^4 (\varpi^4 S m^{(i)4} + \dots) + \dots \right] \\ \times e^{-i\varpi\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1} - \frac{K^2}{K} a^2 (\varpi^2 S m^{(i)2} + 2\varpi\varpi' S m^{(i)} n^{(i)} + \varpi'^2 S n^{(i)2})};$$

s étant le nombre des observations que nous supposons très grand; faisons

$$a\varpi\sqrt{s} = t, \quad a\varpi'\sqrt{s} = t',$$

cette intégrale devient

$$\frac{1}{4\pi^2 a^2 s} \iint dt dt' \left[1 + \frac{KK^{12} - 6K^2}{12K^3} \left(\frac{t^4 S m^{(i)4}}{s^2} + \dots \right) + \dots \right] \\ \times e^{-\frac{t\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}} - \frac{t'\sqrt{-1}}{a'\sqrt{s}} - \frac{K^2}{K} \left(\frac{t^2 S m^{(i)2}}{s} + \frac{2t t' S m^{(i)} n^{(i)}}{s} + \frac{t'^2 S n^{(i)2}}{s} \right)}.$$

$S m^{(i)2}, S m^{(i)4}, S m^{(i)} n^{(i)}, \dots$ sont évidemment des quantités de l'ordre s ; en négligeant donc les termes de l'ordre $\frac{1}{s}$, vis-à-vis de l'unité, l'intégrale précédente se réduit à

$$(2) \quad \frac{1}{4\pi^2 a^2 s} \iint dt dt' e^{-\frac{t\sqrt{-1}}{\sqrt{s}} - \frac{t'\sqrt{-1}}{a'\sqrt{s}} - \frac{K^2}{K} \left(\frac{t^2 S m^{(i)2}}{s} + \frac{2t t' S m^{(i)} n^{(i)}}{s} + \frac{t'^2 S n^{(i)2}}{s} \right)}.$$

L'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$,

l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -a\pi\sqrt{s}$ jusqu'à $t = +a\pi\sqrt{s}$; et, dans ces deux cas, l'exponentielle sous le signe $\int$ est insensible à ces deux limites, soit parce que s est un grand nombre, soit parce que a est ici supposé divisé dans une infinité de parties prises pour unité; on peut donc prendre l'intégrale relative à t depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, et il en est de même de l'intégrale relative à t' . Cela posé, si l'on fait

$$t^2 = t + t' \frac{Sm^{(1)}n^{(1)}}{Sm^{(1)2}} + \frac{Kl\sqrt{s}\sqrt{-1}}{2K^2aSm^{(1)2}},$$

$$t'^2 = t' - \frac{K\sqrt{s}}{2K^2a} \frac{(Sm^{(1)}n^{(1)} - t'Sm^{(1)2})\sqrt{-1}}{Sm^{(1)2}Sm^{(1)2} - (Sm^{(1)}n^{(1)})^2};$$

si l'on fait ensuite

$$E = Sm^{(1)2}Sn^{(1)2} - (Sm^{(1)}n^{(1)})^2,$$

la double intégrale précédente devient

$$e^{-\frac{K}{4K^2a^2E}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' e^{-\frac{K}{4\pi^2a^2s} t'^2 - \frac{K}{K^2} t'^2 \frac{Sm^{(1)2}}{t} - \frac{K}{K^2} t'^2 \frac{E}{sSm^{(1)2}}},$$

Les intégrales relatives à t'' et t' doivent être prises comme celles qui sont relatives à t et t' entre les limites infinies positives et négatives; or on a dans ces limites, par les théorèmes connus,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-Et} = \frac{\sqrt{\pi}}{E};$$

la fonction (2) se réduit donc ainsi à

$$(3) \quad \frac{K}{4K^2\pi a^2\sqrt{E}} e^{-\frac{K}{4K^2a^2E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' e^{-\frac{K}{4\pi^2a^2s} t'^2 - \frac{K}{K^2} t'^2 \frac{Sm^{(1)2}}{t} - \frac{K}{K^2} t'^2 \frac{E}{sSm^{(1)2}}}}.$$

Il faut maintenant, pour avoir la probabilité que les valeurs de t et de t' seront comprises dans des limites données, multiplier cette quantité par $dl dl'$ et l'intégrer ensuite dans ces limites; en nommant donc x cette quantité, la probabilité dont il s'agit sera $\int \int x dl dl'$; mais, pour avoir la probabilité que les erreurs u et u' des corrections des éléments seront comprises dans des limites données, il faut substituer

dans cette intégrale, au lieu de t et de t' , leurs valeurs en u et u' . Si l'on différencie ces valeurs en supposant l' constant, on a

$$dt = du Sm^{(1)}p^{(1)} + du' Sm^{(1)}q^{(1)},$$

$$0 = du Sn^{(1)}p^{(1)} + du' Sn^{(1)}q^{(1)},$$

ce qui donne, en faisant

$$I = Sm^{(1)}p^{(1)}Sn^{(1)}q^{(1)} - Sn^{(1)}p^{(1)}Sm^{(1)}q^{(1)},$$

$$dt = \frac{I du}{Sn^{(1)}q^{(1)}}.$$

Si l'on différencie ensuite l'expression de l' en supposant u constant, on a

$$dl' = du' Sn^{(1)}q^{(1)};$$

on aura donc

$$dl dl' = I du du';$$

ainsi, en supposant

$$F = Sn^{(1)2}(Sm^{(1)}p^{(1)})^2 - 2Sm^{(1)}n^{(1)}Sm^{(1)}p^{(1)}Sn^{(1)}p^{(1)} + Sm^{(1)2}(Sn^{(1)}p^{(1)2}),$$

$$G = Sn^{(1)2}Sm^{(1)}p^{(1)}Sm^{(1)}q^{(1)} + Sm^{(1)2}Sn^{(1)}p^{(1)}Sn^{(1)}q^{(1)} - Sm^{(1)2}(Sn^{(1)}p^{(1)}Sm^{(1)}q^{(1)} + Sm^{(1)}p^{(1)}Sn^{(1)}q^{(1)}),$$

$$H = Sn^{(1)2}(Sm^{(1)}q^{(1)})^2 - 2Sm^{(1)}n^{(1)}Sm^{(1)}q^{(1)}Sn^{(1)}q^{(1)} + Sm^{(1)2}(Sn^{(1)}q^{(1)2}),$$

la fonction (3), multipliée par $dl dl'$ et ensuite affectée du signe intégral, devient

$$(4) \quad \int \int \frac{K}{4K^2\pi} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{du du'}{a^2} e^{-\frac{K(Fu^2 + 2Guu' + Hu'^2)}{4K^2a^2E}}.$$

Intégrons d'abord cette fonction par rapport à u' et dans toute l'étendue de ses limites. La valeur de $\frac{u'}{a}$ est finie à ces limites; mais, comme dans l'exponentielle elle est multipliée par $\frac{G}{E}$ et $\frac{H}{E}$, et ces quantités étant de l'ordre s , parce que G et H sont de l'ordre s^3 , tandis que E est de l'ordre s^2 , cette exponentielle devient insensible à ces limites, et l'on peut étendre l'intégrale depuis $u' = -\infty$ jusqu'à $u' = \infty$. En faisant

$$t = \frac{\sqrt{KH} \left(u' + \frac{Gu}{H} \right)}{a\sqrt{E}},$$

et prenant l'intégrale relative à t depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, la fonction (4) se réduit à

$$\int \sqrt{\frac{K}{4K^2\pi}} \frac{du}{a\sqrt{H}} e^{-\frac{Kt^2 u^2}{4K^2 a^2 H}},$$

parce que

$$\frac{FH - G^2}{E} = 1.$$

Maintenant, si l'on conçoit une courbe dont u soit l'abscisse et dont l'ordonnée soit

$$\sqrt{\frac{K}{4K^2\pi}} \frac{1}{a\sqrt{H}} e^{-\frac{Kt^2 u^2}{4K^2 a^2 H}},$$

cette courbe, que l'on peut étendre à l'infini de chaque côté de l'ordonnée qui répond à u nul, sera la courbe des probabilités des erreurs u de la correction du premier élément. Cela posé, toute erreur, soit positive, soit négative, doit être considérée comme un désavantage ou une perte réelle à un jeu quelconque; or, par les principes connus du Calcul des probabilités, on évalue ce désavantage en prenant la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre, en plus ou en moins, sur le premier élément, est donc

$$\pm \sqrt{\frac{K}{4K^2\pi}} \frac{1}{a\sqrt{H}} \int_0^\infty u \, du e^{-\frac{Kt^2 u^2}{4K^2 a^2 H}},$$

le signe $+$ indiquant l'erreur moyenne à craindre en plus, et le signe $-$ indiquant l'erreur à craindre en moins. Cette erreur devient ainsi

$$\pm \sqrt{\frac{K}{K\pi}} \frac{a\sqrt{H}}{1}.$$

En y changeant H en F , on aura

$$\pm \sqrt{\frac{K}{K\pi}} \frac{a\sqrt{F}}{1}$$

pour l'erreur moyenne à craindre sur le second élément.

Déterminons présentement les facteurs $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$, de manière que

cette erreur soit un minimum. En faisant varier $m^{(i)}$ seul, on a

$$d \log \frac{\sqrt{H}}{1} = dm^{(i)} \frac{q^{(i)} S n^{(i)} p^{(i)} - p^{(i)} S n^{(i)} q^{(i)}}{1} \\ + dm^{(i)} \frac{\left[q^{(i)} S n^{(i)} S m^{(i)} q^{(i)} - n^{(i)} S m^{(i)} q^{(i)} S n^{(i)} q^{(i)} \right] \\ - q^{(i)} S m^{(i)} n^{(i)} S n^{(i)} q^{(i)} + m^{(i)} (S n^{(i)} q^{(i)})^2}{H}.$$

Il est facile de voir que cette différentielle disparaît si l'on suppose dans les coefficients de $dm^{(i)}$

$$m^{(i)} = \mu p^{(i)}, \quad n^{(i)} = \mu q^{(i)},$$

μ étant un coefficient arbitraire indépendant de i , et au moyen duquel on peut rendre $m, m^{(i)}, \dots$ des nombres entiers, comme l'analyse précédente l'exige. La supposition précédente rend donc nulle la différentielle de $\frac{\sqrt{H}}{1}$ prise par rapport à $m^{(i)}$. On verra de la même manière qu'elle rend nulle la différentielle de la même quantité, prise par rapport à $n^{(i)}$; ainsi cette supposition rend un minimum l'erreur moyenne à craindre sur la correction du premier élément, et l'on verra de la même manière qu'elle rend encore un minimum l'erreur moyenne à craindre sur la correction du second élément. Dans cette supposition, les corrections des deux éléments sont

$$z = \frac{S q^{(i)2} S p^{(i)} x^{(i)} - S p^{(i)} q^{(i)} S q^{(i)} x^{(i)}}{S p^{(i)2} S q^{(i)2} - (S p^{(i)} q^{(i)})^2}, \\ z' = \frac{S p^{(i)2} S q^{(i)} x^{(i)} - S p^{(i)} q^{(i)} S p^{(i)} x^{(i)}}{S p^{(i)2} S q^{(i)2} - (S p^{(i)} q^{(i)})^2}.$$

Ces corrections sont celles que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations, ou la condition du minimum de la fonction

$$S(p^{(i)} z + q^{(i)} z' - x^{(i)})^2,$$

d'où il suit que cette méthode a généralement lieu, quel que soit le nombre des éléments à déterminer; car il est visible que l'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'éléments. L'er-

reur moyenne à craindre sur le premier élément devient alors

$$\pm a \frac{\sqrt{\frac{K^*}{K\pi}} \sqrt{S q^{(i)2}}}{\sqrt{S p^{(i)2} S q^{(i)2} - (S p^{(i)} q^{(i)})^2}},$$

et sur le second élément elle devient

$$\pm a \frac{\sqrt{\frac{K^*}{K\pi}} \sqrt{S p^{(i)2}}}{\sqrt{S p^{(i)2} S q^{(i)2} - (S p^{(i)} q^{(i)})^2}}.$$

On voit ainsi que le premier élément sera plus ou moins bien déterminé, que le second, suivant que $S q^{(i)2}$, sera plus petit ou plus grand que $S p^{(i)2}$.

Si les r premières équations de condition ne renferment point q , et si les $s - r$ dernières ne renferment point p , alors $S p^{(i)} q^{(i)}$ est nul et la première des deux formules précédentes devient

$$\pm a \frac{\sqrt{\frac{K^*}{K\pi}}}{\sqrt{S p^{(i)2}}}.$$

Le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = r - 1$, c'est la formule relative à un seul élément déterminé par un grand nombre r d'observations; elle s'accorde avec celle que nous avons trouvée dans l'article VI.

Dans toutes ces formules, le facteur $a \sqrt{\frac{K^*}{K}}$ est inconnu. On peut prendre pour a l'écart du résultat moyen, qui ferait rejeter une observation. Si l'on suppose $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ égal à une constante, on a

$$\frac{K^*}{K} = 1;$$

c'est la plus grande valeur que l'on puisse supposer à la fraction $\frac{K^*}{K}$, comme on l'a vu dans l'article cité; mais la remarque suivante ôte toute incertitude sur le facteur dont il s'agit. J'ai reconnu, et je prou-

verai dans un Ouvrage que je vais bientôt publier sur les probabilités, que la somme des carrés des erreurs d'un grand nombre s d'observations peut être supposée à très peu près égale à $2s \frac{a^2 K^*}{K}$; or on a cette somme en substituant, dans chaque équation de condition, les corrections des éléments, déterminées par la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; car, si l'on nomme $\varepsilon^{(i)}$ ce qui reste après ces substitutions dans l'équation de condition $(i+1)^{\text{ème}}$, cette somme sera à très peu près $S \varepsilon^{(i)2}$; en l'égalant donc à $2sa^2 \frac{K^*}{K}$, on aura

$$a \sqrt{\frac{K^*}{K}} = \sqrt{\frac{S \varepsilon^{(i)2}}{2s}}.$$

Pour un seul élément, l'erreur moyenne devient donc ainsi

$$(a) \quad \sqrt{\frac{S \varepsilon^{(i)2}}{2s\pi} \frac{1}{\sqrt{S p^{(i)2}}}}.$$

De là résulte cette règle générale pour avoir l'erreur moyenne à craindre, quel que soit le nombre des éléments. Représentons généralement les équations de condition par la suivante

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)} z + q^{(i)} z' + r^{(i)} z'' + \varepsilon^{(i)} z''' + \dots + \alpha^{(i)},$$

$z, z', z'', \dots$ étant les corrections de ces éléments.

Lorsqu'il y a deux éléments, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, en changeant dans la fonction (a)

$$S p^{(i)2} \quad \text{dans} \quad S p^{(i)2} - \frac{(S p^{(i)} q^{(i)})^2}{S q^{(i)2}}.$$

On aura ainsi une expression que nous désignerons par (a').

Lorsqu'il y aura trois éléments, on aura l'erreur à craindre sur le premier élément, en changeant dans l'expression (a')

$$S p^{(i)2} \quad \text{dans} \quad S p^{(i)2} - \frac{(S p^{(i)} q^{(i)})^2}{S q^{(i)2}},$$

$$S q^{(i)2} \quad \text{dans} \quad S q^{(i)2} - \frac{(S q^{(i)} p^{(i)})^2}{S p^{(i)2}}.$$

et

$$Sp^{(i)}q^{(i)} \text{ dans } Sp^{(i)}q^{(i)} - \frac{Sp^{(i)}r^{(i)}Sq^{(i)}r^{(i)}}{Sr^{(i)2}}.$$

On formera ainsi une expression que nous désignerons par (α'').

Lorsqu'il y a quatre éléments, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, en changeant dans l'expression (α'')

$$Sp^{(i)2} \text{ dans } Sp^{(i)2} - \frac{Sp^{(i)}l^{(i)2}}{Sl^{(i)2}},$$

$$Sp^{(i)}q^{(i)} \text{ dans } Sp^{(i)}q^{(i)} - \frac{Sp^{(i)}l^{(i)}Sq^{(i)}l^{(i)}}{Sl^{(i)2}}, \dots$$

En continuant ainsi, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, quel que soit le nombre des éléments. En changeant dans l'expression de cette erreur ce qui est relatif au premier élément, dans ce qui est relatif au second et réciproquement, on aura l'erreur moyenne à craindre sur cet élément, et ainsi des autres.

MÉMOIRE

SUR

LA FIGURE DE LA TERRE.



MÉMOIRE
SUR
LA FIGURE DE LA TERRE ⁽¹⁾.

Mémoires de l'Académie des Sciences, II^e Série, T. II, année 1817; 1819.

Les géomètres ont, jusqu'à présent, considéré la Terre comme un sphéroïde formé de couches de densités quelconques et recouvert en entier d'un fluide en équilibre. Ils ont donné les expressions de la figure de ce fluide et de la pesanteur à sa surface; mais ces expressions, quoique fort étendues, ne représentent pas exactement la nature. L'océan laisse à découvert une partie du sphéroïde terrestre, ce qui doit altérer les résultats obtenus dans l'hypothèse d'une inondation générale, et donner naissance à de nouveaux résultats. A la vérité, la recherche de la figure de la Terre présente alors plus de difficultés; mais le progrès de l'Analyse, surtout dans cette partie, fournit le moyen de les vaincre et de considérer les continents et les mers tels que l'observation nous les présente. C'est l'objet de l'analyse suivante, qui, comparée aux expériences du pendule, aux mesures des degrés et aux observations lunaires, conduit à ces résultats :

1^o La densité des couches du sphéroïde terrestre croît de la surface au centre;

2^o Ces couches sont à très peu près régulièrement disposées autour de son centre de gravité;

3^o La surface de ce sphéroïde, dont la mer recouvre une partie, a

⁽¹⁾ Lu à l'Académie des Sciences le 4 août 1818.

une figure peu différente de celle qu'elle prendrait en vertu des lois de l'équilibre, si, la mer cessant de la recouvrir, elle devenait fluide;

4° La profondeur de la mer est une petite fraction de la différence des deux axes de la Terre;

5° Les irrégularités de la Terre et les causes qui troublent sa surface ont peu de profondeur;

6° Enfin, la Terre entière a été primitivement fluide.

Ces résultats de l'analyse, des observations et des expériences me semblent devoir être placés dans le petit nombre des vérités que nous offre la Géologie.

1. La figure de chaque couche du sphéroïde terrestre étant à fort peu près sphérique, j'exprimerai, comme dans le troisième Livre de la *Mécanique céleste*, son rayon par $a(1 + \alpha y)$, α étant un très petit coefficient constant. Je désignerai par ρ la densité de cette couche, ρ étant fonction de α . Je nommerai V la somme des quotients de chaque molécule du sphéroïde terrestre, divisée par sa distance à un point extérieur attiré, r étant la distance de ce point à l'origine des rayons terrestres placée très près du centre de gravité de la Terre. Enfin, je nommerai μ le cosinus de l'angle que r fait avec l'axe du sphéroïde, et ω l'angle que le plan passant par cet axe et par r forme avec un méridien fixe sur la surface du sphéroïde. On peut supposer y développé dans une série de cette forme

$$y = Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \dots,$$

$Y^{(i)}$ étant une fonction de α , μ , $\sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega$, $\sqrt{1 - \mu^2} \cos \omega$, rationnelle et entière de l'ordre i , relativement à ces trois dernières quantités, et telle que l'on ait généralement

$$0 = -\frac{\partial \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu} \right]}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 Y^{(i)}}{\partial \omega^2} + i(i+1)Y^{(i)}.$$

La formule (5) du n° 14 du troisième Livre de la *Mécanique céleste*

devient ainsi

$$V = \frac{4\pi}{3r} \int \rho da^3 + 4\pi \int \rho d \left(\frac{\alpha^3 Y^{(1)}}{3r^3} + \frac{\alpha^5 Y^{(2)}}{5r^5} + \frac{\alpha^7 Y^{(3)}}{7r^7} + \dots \right),$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon : les différentielles et les intégrales étant relatives à la variable α , celles-ci étant prises depuis α nul jusqu'à sa valeur à la surface du sphéroïde, valeur que je prendrai pour l'unité.

Concevons maintenant la mer en équilibre sur ce sphéroïde doué d'un mouvement de rotation. Soit αz le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, et désignons par V' la somme de toutes les molécules de la mer, divisées par leurs distances respectives au point attiré. Si l'on suppose ce point à la surface de la mer, on aura, par le n° 23 du troisième Livre de la *Mécanique céleste*, pour l'équation de l'équilibre,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{const.} &= \frac{4\pi}{3r} \int \rho da^3 + 4\pi \int \rho d \left(\frac{\alpha^3 Y^{(1)}}{3r^3} + \frac{\alpha^5 Y^{(2)}}{5r^5} + \frac{\alpha^7 Y^{(3)}}{7r^7} + \dots \right) \\ &+ V' - \frac{1}{2} \pi \int \rho da^3 \frac{\alpha z r^2}{2} \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer V' , je supposerai que le rayon mené de l'origine des rayons terrestres à la surface de la mer soit $1 + \alpha \bar{y} + \alpha y'$, $\bar{y}$ étant la valeur de y à la surface du sphéroïde : $\alpha y'$ sera, à très peu près, la profondeur de la mer. Je supposerai ensuite

$$y' = Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + Y'^{(3)} + \dots,$$

$Y'^{(i)}$ étant une fonction rationnelle et entière de μ , $\sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega$, $\sqrt{1 - \mu^2} \cos \omega$, assujettie à la même équation aux différences partielles que $Y^{(i)}$. On peut considérer la mer comme égalant un sphéroïde dont le rayon est $1 + \alpha \bar{y} + \alpha y'$, moins un second sphéroïde dont le rayon est $1 + \alpha \bar{y}$, plus la partie de ce second sphéroïde qui se relève au-dessus du premier et où, par conséquent, $\alpha y'$ est négatif. La somme des molécules du premier sphéroïde divisées par leurs distances au point attiré est, par ce qui précède, en prenant pour

unité la densité de la mer,

$$\frac{4\pi}{3r} + 4\alpha\pi \left(\frac{Y^{(0)}}{r} + \frac{\bar{Y}^{(1)} + Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{\bar{Y}^{(2)} + Y^{(2)}}{5r^3} + \dots \right),$$

$\bar{Y}^{(1)}, \bar{Y}^{(2)}, \dots$ étant ce que deviennent $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots$ à la surface du sphéroïde terrestre. La même somme relative au second sphéroïde est

$$\frac{4\pi}{3r} + 4\alpha\pi \left(\frac{\bar{Y}^{(1)}}{3r^2} + \frac{\bar{Y}^{(2)}}{5r^3} + \frac{\bar{Y}^{(3)}}{7r^4} + \dots \right).$$

La différence de ces deux quantités est

$$4\alpha\pi \left(\frac{Y^{(0)}}{r} + \frac{Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{Y^{(2)}}{5r^3} + \dots \right).$$

En nommant donc V la somme des molécules de la partie du second sphéroïde qui se relève au-dessus du premier, divisées par leurs distances respectives au point attiré, on aura

$$V' = V + 4\alpha\pi \left(\frac{Y^{(0)}}{r} + \frac{Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{Y^{(2)}}{5r^3} + \dots \right).$$

L'équation précédente de l'équilibre deviendra donc

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{const.} &= \frac{4\pi}{3r} \int \rho da^3 + 4\alpha\pi \int \rho d \left(\frac{\alpha^4 Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{\alpha^4 Y^{(2)}}{5r^3} + \frac{\alpha^4 Y^{(3)}}{7r^4} + \dots \right) \\ &+ 4\alpha\pi \left(\frac{Y^{(0)}}{r} + \frac{Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{Y^{(2)}}{5r^3} + \dots \right) \\ &+ V' - \frac{\alpha^2}{2} r^2 \frac{4\pi}{3} \int \rho da^3 \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \right.$$

r devant être supposé égal à $1 + \alpha\bar{y} + \alpha y'$, et par conséquent égal à l'unité dans les termes multipliés par α , puisqu'on néglige les termes de l'ordre α^2 . Cette équation a cela de remarquable, savoir que la différentielle de son second membre, prise par rapport à r , et divisée par $-dr$, est l'expression de la pesanteur, comme il résulte du n° 33 du troisième Livre de la *Mécanique céleste*. En nommant donc p la

pesanteur, on aura

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{4\pi}{3r^2} \int \rho da^3 + 4\alpha\pi \int \rho d \left(\frac{2\alpha^4 Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{3\alpha^4 Y^{(2)}}{5r^3} + \dots \right) \\ &+ 4\alpha\pi \left(\frac{Y^{(0)}}{r^2} + \frac{2Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{3Y^{(2)}}{5r^3} + \dots \right) \\ &- \frac{\partial V'}{\partial r} + \alpha^2 r \frac{4\pi}{3} \int \rho da^3 \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

On a, par le n° 10 du troisième Livre de la *Mécanique céleste*, à la surface de la mer,

$$(a) \quad 0 = \frac{\partial V'}{\partial r} + \frac{1}{2} V'.$$

Cette équation remarquable étant très utile pour ce qui va suivre, je vais en rappeler ici la démonstration. Si l'on conçoit une sphère homogène du rayon a , et dont la densité soit exprimée par l'unité, la somme de ses molécules divisées par leurs distances respectives à un point extérieur attiré dont r soit la distance à son centre sera la masse de la sphère divisée par r . En désignant donc par V cette somme, on aura

$$V = \frac{4}{3}\pi \frac{a^3}{r}.$$

Maintenant, si l'on imagine à la surface de la sphère une molécule dm , sa distance au point attiré sera $\sqrt{r^2 - 2ar \cos \gamma + a^2}$, γ étant l'angle compris entre le rayon r mené au point attiré et le rayon a mené à la molécule dm ; V ou la somme des molécules divisées par leurs distances au point attiré sera donc, relativement à cette molécule,

$$\frac{dm}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \gamma + a^2}},$$

et la valeur de $\frac{\partial V}{\partial r}$ sera

$$-\frac{dm(r - a \cos \gamma)}{(r^2 - 2ar \cos \gamma + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si le point attiré est à la surface de la sphère, on aura

$$r = a,$$

et alors $\frac{\partial V}{\partial r}$ sera

$$\frac{-dm}{2a\sqrt{2a^2(1-\cos\gamma)}} \text{ ou } -\frac{V}{2a},$$

ce qui donne

$$(b) \quad a \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}V = 0,$$

et, comme cette équation a lieu pour chaque molécule d'un système de molécules disséminées à la surface de la sphère, elle aura lieu pour le système entier, en supposant V relatif à ce système.

Cette équation cesse d'avoir lieu, si l'on suppose la molécule dm très près du point attiré et très peu élevée au-dessus de la sphère, en sorte que, en désignant par a' son rayon, la différence $r - a'$ soit fort petite. La fonction $a' \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}V$ étant égale à

$$(f) \quad \frac{r - a'}{2} \int \frac{dm(r - a' - 2a' \cos\gamma)}{(r^2 - 2a'r \cos\gamma + a'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

cette intégrale, à cause de la petitesse de son diviseur, pourrait alors ne pas devenir insensible par la petitesse du facteur $r - a'$; mais on voit que si, près du point attiré, la molécule dm diminue comme le carré $r^2 - 2a'r \cos\gamma + a'^2$ de la distance de ce point à cette molécule, alors l'intégrale (f) devient insensible et l'équation (b) subsiste.

Si l'on conçoit maintenant un sphéroïde très peu différent d'une sphère, et si l'on suppose le point attiré à sa surface, et à ce point une sphère osculatrice d'un rayon a fort peu différent du rayon du sphéroïde, alors V désignant la somme des molécules de l'excès du sphéroïde sur la sphère divisées par leurs distances au point attiré, l'intégrale (f) deviendra nulle, parce que les molécules dm de cet excès sont nulles au point de contact et que, près de ce point, elles croissent comme le carré de leur distance à ce point. L'équation (b) subsiste donc pour ce point. Relativement à la sphère, on a

$$a \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}V = -\frac{1}{2}\pi \frac{a^2}{r};$$

en supposant donc V relatif au sphéroïde entier, on aura pour le point situé à ce contact

$$(c) \quad a \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}V = -\frac{1}{2}\pi a^2;$$

c'est l'équation que j'ai donnée dans le n° 10 du troisième Livre de la *Mécanique céleste*. Ici, l'origine de r est fixée au centre de la sphère osculatrice du rayon a . Fixons cette origine à un point quelconque très proche du centre de gravité du sphéroïde, et désignons par $a(1 + \alpha\gamma)$ le rayon du sphéroïde, α étant un très petit coefficient. L'attraction du sphéroïde, décomposée vers l'origine des r , est $-\frac{\partial V}{\partial r}$, et il est facile de voir qu'elle est la même, aux quantités près de l'ordre α^2 , quelle que soit cette origine, pourvu qu'elle ne s'écarte du centre de gravité du sphéroïde que d'une quantité de l'ordre α , puisque ces attractions partielles sont les résultantes de l'attraction totale composée avec des forces de l'ordre α qui lui sont perpendiculaires. Ainsi l'équation précédente (c) subsiste en fixant l'origine des r à un point quelconque pris très près du centre de gravité.

Telle est la démonstration que j'ai donnée de cette équation dans l'endroit cité de la *Mécanique céleste*. Quelques géomètres ne l'ayant pas bien saisie l'ont jugée inexacte. Lagrange, dans le Tome VIII du *Journal de l'École Polytechnique*, a démontré cette équation par une analyse à peu près semblable à celle qui me l'avait fait découvrir (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1775, p. 83) (1). C'est pour simplifier cette matière que j'ai préféré donner, dans la *Mécanique céleste*, la démonstration précédente.

Si le point attiré est élevé d'une quantité $\alpha\alpha'$ au-dessus du sphéroïde, V étant de la forme $\frac{1}{2}\pi \frac{a^2}{r} + \alpha Q$, il ne variera, par ce déplacement du point et en négligeant les quantités d'ordre α^2 , que de la quantité $-\frac{1}{2}\pi \alpha^2 \alpha'$: la différence partielle $a \frac{\partial V}{\partial r}$ variera de la quantité $\frac{1}{2}\pi \alpha^2 \alpha'$. La variation du premier membre de l'équation (c) sera

(1) *Oeuvres de Laplace*, T. IX, p. 82.

donc $2\pi a^2 \alpha y$, et cette équation deviendra

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}V = -\frac{2a^2\pi}{3} + 2a^2\pi\alpha y'.$$

Mais l'équation (a) subsistera toujours, malgré ce déplacement du point attiré, parce que, V'' étant de l'ordre α , ce déplacement ne peut y produire que des termes de l'ordre α^2 .

Cela posé, si l'on substitue, dans les équations (2) et (3), $1 + \alpha y + \alpha y'$ au lieu de r , elles deviendront, en négligeant les termes de l'ordre α^2 ,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{const.} &= \alpha \bar{y} + \alpha y' - \frac{3\alpha}{\int \rho da^3} \int \rho d \left(\frac{a^3 Y^{(1)}}{3} + \frac{a^5 Y^{(3)}}{5} + \frac{a^7 Y^{(5)}}{7} + \dots \right) \\ &- \frac{3\alpha}{\int \rho da^3} \left(\frac{Y^{(0)}}{3} + \frac{Y^{(1)}}{5} + \frac{Y^{(2)}}{7} + \dots \right) \\ &- \frac{V''}{\frac{1}{2}\pi \int \rho da^3} + \frac{\alpha \varphi}{2} (\mu^2 - \frac{1}{2}), \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\pi \int \rho da^3 (1 - 2\alpha \bar{y} - 2\alpha y') \\ &+ 4\alpha \pi \int \rho d \left(\frac{2a^3 Y^{(1)}}{3} + \frac{3a^5 Y^{(3)}}{5} + \frac{4a^7 Y^{(5)}}{7} + \dots \right) \\ &+ 4\alpha \pi \left(\frac{Y^{(0)}}{3} + \frac{2Y^{(1)}}{5} + \frac{3Y^{(2)}}{7} + \frac{4Y^{(3)}}{9} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{2}V'' + \frac{4\pi}{3} \int \rho da^3 \alpha \varphi (\mu^2 - \frac{1}{2}). \end{aligned} \right.$$

Si l'on ajoute cette dernière équation à la précédente, multipliée par $\frac{2}{3}\pi \int \rho da^3$, on aura

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \text{const.} - 2\pi \alpha (\bar{y} + y') \int \rho da^3 \\ &+ 2\alpha \pi \int \rho d(a^3 Y^{(1)} + a^5 Y^{(3)} + a^7 Y^{(5)} + \dots) \\ &+ 2\alpha \pi y' + \frac{1}{2}\pi \int \rho da^3 \frac{1}{2} \alpha \varphi (\mu^2 - \frac{1}{2}). \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose la Terre homogène ou ρ constant, on aura

$$p = \text{const.} - 2\alpha \pi (\rho - 1) y' + \frac{1}{2}\pi \rho \frac{1}{2} \alpha \varphi (\mu^2 - \frac{1}{2}),$$

où l'on doit observer que $\frac{1}{2}\pi \rho$ est à très peu près la pesanteur à l'équa-

teur. On a donc, dans le cas de $\rho = 1$, ce qui donne à la mer la densité du sphéroïde terrestre,

$$p = P(1 + \frac{1}{2}\alpha \varphi \mu^2),$$

P étant la pesanteur à l'équateur.

Cette valeur de p subsisterait encore dans le cas où des plateaux d'une densité quelconque et de hautes montagnes recouvriraient les continents. Ces corps ajouteraient à l'équation (1) un terme V'' qui serait la somme de leurs molécules divisées par leurs distances respectives au point attiré. En supposant ce point à la surface de la mer, on aurait

$$\frac{\partial V''}{\partial r} + \frac{1}{2}V'' = 0.$$

Ainsi V'' disparaîtrait de l'expression de p par le même procédé qui a fait disparaître V'' de cette expression, qui se réduirait ainsi à la précédente; le terme V'' changerait donc la figure de la mer sans altérer la loi de la pesanteur.

II. Pour déterminer la figure de la mer, lorsque celle du sphéroïde est donnée, la méthode la plus simple consiste à ordonner les approximations suivant les puissances du rapport de la densité de la mer à la moyenne densité de la Terre, rapport égal à $\frac{1}{2}$, à fort peu près. Nous allons donc considérer d'abord la figure de la mer en négligeant ce rapport ou en supposant la mer un fluide infiniment rare. Cela revient à négliger les termes qui ont pour dénominateur $\frac{1}{2}\pi \int \rho da^3$, et qui n'ont pas ρ au numérateur dans l'équation (4), qui donne alors, en ne négligeant, pour plus d'exactitude, que le terme dépendant de V'' ,

$$\begin{aligned} \alpha y' &= \text{const.} - \alpha \bar{y} + \frac{3\alpha}{\int \rho da^3} \int \rho d \left(\frac{a^3 Y^{(1)}}{3} + \frac{a^5 Y^{(3)}}{5} + \frac{a^7 Y^{(5)}}{7} + \dots \right) \\ &+ \frac{3\alpha}{\int \rho da^3} \left(\frac{Y^{(1)}}{3} + \frac{Y^{(2)}}{5} + \dots \right) \\ &- \frac{\alpha \varphi}{2} (\mu^2 - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

En substituant pour y' et $\bar{y}$ leurs valeurs

$$Y^{(0)} + Y^{(1)} + \dots, \quad \bar{Y}^{(1)} + \bar{Y}^{(2)} + \dots,$$

et comparant les termes semblables, on aura généralement

$$Y^{(1)} \left[1 - \frac{3}{(2i+1) \int \rho da^2} \right] = -\bar{Y}^{(1)} + \frac{3 \int \rho d(a^{i+2} Y^{(i)})}{(2i+1) \int \rho da^2}.$$

Dans le cas de $i=2$, il faut ajouter au second membre de cette équation le terme $-\frac{\sigma}{2}(\mu^2 - \frac{1}{2})$. L'équation (6), dans laquelle rien n'est négligé, donnera ensuite la pesanteur p à la surface de la mer.

Les expériences du pendule font voir que $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, ..., $\bar{Y}^{(1)}$, $\bar{Y}^{(2)}$, ... sont des quantités très petites relativement à $Y^{(2)}$ et $\bar{Y}^{(2)}$, et que ces deux dernières fonctions se réduisent, à fort peu près, aux suivantes $-h(\mu^2 - \frac{1}{2})$ et $-\bar{h}(\mu^2 - \frac{1}{2})$, h et $\bar{h}$ étant des constantes; ce qui donne aux couches du sphéroïde terrestre la figure d'un ellipsoïde de révolution. Examinons donc ce cas particulièrement. L'expression précédente donne alors

$$Y^{(2)} \left(1 - \frac{3}{5 \int \rho da^2} \right) = \left[\bar{h} - \frac{3 \int \rho d(a^2 h)}{5 \int \rho da^2} - \frac{\sigma}{2} \right] (\mu^2 - \frac{1}{2}).$$

En faisant donc h' égal à

$$\frac{-h + \frac{3 \int \rho d(a^2 h)}{5 \int \rho da^2} + \frac{\sigma}{2}}{1 - \frac{3}{5 \int \rho da^2}},$$

on aura

$$\alpha y' = \alpha l - \alpha h' \mu^2,$$

l étant une constante; h' serait nul si, en supposant la mer anéantie, la surface du sphéroïde supposée fluide était en équilibre. En supposant donc cette surface moins aplatie que dans ce cas, h' sera positif et la

mer recouvrira l'équateur du sphéroïde. Sa profondeur sera

$$\alpha l - \alpha h' \mu^2;$$

elle s'étendra vers les deux pôles, à des latitudes égales. Soit ε le sinus de ces latitudes; la profondeur de la mer étant nulle à ces points, on aura

$$\alpha l = \alpha h' \varepsilon^2,$$

et en fixant l'origine des rayons terrestres au centre de gravité du sphéroïde, ce qui rend $Y^{(1)}$ nul, la profondeur de la mer sera

$$\alpha h' (\varepsilon^2 - \mu^2);$$

la masse de la mer sera

$$\frac{3}{2} \pi h' \varepsilon^2.$$

Cette masse étant donnée fera donc connaître ε . L'équation (6), combinée avec l'expression précédente de h' , donnera pour l'expression de la pesanteur à la surface de la mer

$$P \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} \alpha \sigma - \alpha (\bar{h} + h') \right] \right\} \mu^2,$$

P étant la pesanteur à l'équateur, qui est, aux quantités près de l'ordre α , égale à $\frac{1}{2} \pi \int \rho da^2$.

Si la surface du sphéroïde a un aplatissement plus grand que celui qui convient à son équilibre en la supposant fluide, et qui résulte de l'égalité à zéro du numérateur de l'expression de h' , h' devient négatif, et la mer ne peut plus recouvrir l'équateur. Alors elle se portera vers les deux pôles et elle formera deux mers distinctes dont les masses pourront être dans un rapport quelconque. En faisant $h' = -g$, g étant positif, la profondeur de la mer boréale sera, en supposant que ε se rapporte à cette mer,

$$\alpha g (\mu^2 - \varepsilon^2).$$

La profondeur de la mer située vers le pôle austral sera

$$\alpha g (\mu^2 - \varepsilon'^2),$$

ε' exprimant le sinus de la latitude australe. Les masses des deux mers seront respectivement

$$\frac{2\alpha\pi\kappa}{3}(1-\varepsilon)^2(1+2\varepsilon), \quad \frac{2\alpha\pi\kappa}{3}(1-\varepsilon')^2(1+2\varepsilon').$$

Leur somme étant donnée, on voit qu'elle peut se partager d'une infinité de manières. La pesanteur à la surface de la mer boréale sera

$$P + [\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha(\bar{h} - g)]P\mu^2,$$

P étant la pesanteur à la surface et au pôle du sphéroïde. Au pôle et à la surface de la mer, la pesanteur est égale à

$$P[1 - 2\alpha g(1 - \varepsilon^2)],$$

$\alpha g(1 - \varepsilon^2)$ étant à ce point la profondeur de la mer; on a donc

$$P' = P[1 - 2\alpha g(1 - \varepsilon^2) - \frac{1}{2}\alpha\varphi + \alpha(\bar{h} - g)].$$

La pesanteur à un point quelconque de la surface de cette mer sera donc

$$P\{1 - 2\alpha g(1 - \varepsilon^2) - [\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha(\bar{h} - g)](1 - \mu^2)\}.$$

A la surface de la mer australe, la pesanteur sera

$$P\{1 - 2\alpha g(1 - \varepsilon'^2) - [\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha(\bar{h} - g)](1 - \mu'^2)\}.$$

Pour avoir une seconde approximation, il faut déterminer la valeur analytique du terme $\frac{V^2}{\frac{1}{2}\pi\int\rho da^2}$ de l'équation (4) pour l'ajouter à la première valeur approchée de zy' ; or on a

$$(o) \quad V^2 = \alpha \int \frac{y_1 d\mu' d\omega'}{\sqrt{2(1 - \cos\gamma)}},$$

y_1 étant ce que devient l'expression trouvée par une première approximation pour y' , et dans laquelle on change μ en μ' , ω en ω' , μ' et ω' étant relatifs au point attirant, tandis que μ et ω se rapportent au

point attiré; γ est l'angle compris entre les rayons terrestres menés à ces deux points, en sorte que l'on a

$$\cos\gamma = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \mu'^2}\cos(\omega' - \omega);$$

l'intégrale précédente est relative à toute la surface des continents. Développons le radical

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\gamma + 1}}$$

suivant les puissances de $\frac{1}{r}$. En nommant $P^{(i)}$ le coefficient de $\frac{1}{r^{i+1}}$ dans ce développement, on aura par le n° 23 du troisième Livre de la *Mécanique céleste*, en faisant $\cos\gamma = \lambda$,

$$P^{(i)} = \frac{1.3.5 \dots (2i-1)}{1.2.3 \dots i} \left[\lambda^i - \frac{i(i-1)}{2(2i-1)} \lambda^{i-2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4(2i-1)(2i-3)} \lambda^{i-4} - \dots \right].$$

Si l'on fait $\frac{1}{r} = x$, ce coefficient sera celui de x^i , dans le développement de la fonction $(1 - 2x\lambda + x^2)^{-\frac{1}{2}}$, fonction que l'on peut mettre sous cette forme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \sqrt{1 + \frac{(x - \lambda)^2}{1 - \lambda^2}}.$$

Le coefficient de x^i dans le développement de

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(x - \lambda)^2}{1 - \lambda^2}}}$$

est égal à

$$\frac{1}{1.2.3 \dots i} \frac{d^i}{dx^i} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(x - \lambda)^2}{1 - \lambda^2}}},$$

en faisant $x = 0$ après les différentiations. J'ai fait voir, dans le n° 38 du Livre I^{er} de ma *Théorie des probabilités*, que l'on a

$$\frac{1}{1.2.3 \dots i} \frac{d^i}{dx^i} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{1}{\pi(1 - \zeta^2)^{i+\frac{1}{2}}} \int d\omega (\zeta + \cos\omega)^i,$$

l'intégrale étant prise depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \pi$. En faisant donc

$$\frac{x - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \zeta \sqrt{-1},$$

on aura

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \frac{d^i}{dx^i} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda x + x^2}} = \frac{1}{\pi(\sqrt{-1})^i} \int_0^\pi d\omega (\lambda\sqrt{-1} + \sqrt{1 - \lambda^2} \cos \omega)^i.$$

L'intégrale précédente est égale à cette même intégrale prise depuis ω nul jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{2}$, plus à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega' (\lambda\sqrt{-1} - \sqrt{1 - \lambda^2} \cos \omega')^i,$$

comme il est facile de s'en assurer en changeant ω en $\pi - \omega'$, au delà de $\omega = \frac{\pi}{2}$. Soit donc $\gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma'$, ce qui donne

$$\lambda = \sin \gamma',$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \frac{d^i}{dx^i} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda x + x^2}} \\ = \frac{1}{\pi(\sqrt{-1})^i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega [(\sqrt{-1} \sin \gamma' + \cos \gamma' \cos \omega)^i + (\sqrt{-1} \sin \gamma' - \cos \gamma' \cos \omega)^i]. \end{aligned}$$

On peut mettre le second membre de cette équation sous cette forme

$$(q) \left\{ \frac{1}{\pi(\sqrt{-1})^i} \int d\omega \left\{ (\cos i\gamma' + \sqrt{-1} \sin i\gamma') [1 - 2(\cos \gamma' - \sqrt{-1} \sin \gamma') \cos \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega]^i \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^i (\cos i\gamma' - \sqrt{-1} \sin i\gamma') [1 - 2(\cos \gamma' + \sqrt{-1} \sin \gamma') \cos \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega]^i \right\} \right\}.$$

On a généralement

$$(1 - q)^i = e^{i \log(1 - q)} = e^{-iq \left(1 + \frac{q}{2} + \frac{q^2}{3} + \dots\right)},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; i étant infini, cette exponentielle est nulle ou se réduit à e^{-iq} . En effet, lorsqu'elle n'est pas nulle, iq est une quantité finie ou infiniment petite,

que nous désignerons par q' ; alors cette exponentielle devient

$$e^{-q'} e^{-\frac{q'^2}{2i}} e^{-\frac{q'^3}{3i^2}} \dots,$$

ou $e^{-q'}$; le facteur $e^{-\frac{q'^2}{2i} - \frac{q'^3}{3i^2} - \dots}$ devenant l'unité, parce que son exposant est infiniment petit.

Il suit de là que, i étant un grand nombre, on peut supposer dans l'intégrale précédente

$$[1 - 2(\cos \gamma' - \sqrt{-1} \sin \gamma') \cos \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega]^i = e^{-2i \cos \gamma' (\cos \gamma' - \sqrt{-1} \sin \gamma') \sin^2 \frac{1}{2} \omega},$$

$$[1 - 2(\cos \gamma' + \sqrt{-1} \sin \gamma') \cos \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega]^i = e^{-2i \cos \gamma' (\cos \gamma' + \sqrt{-1} \sin \gamma') \sin^2 \frac{1}{2} \omega},$$

d'où il est facile de conclure que la fonction (q) , dans le cas de i un nombre pair et très considérable, devient

$$\frac{2}{\pi(-1)^{\frac{i}{2}}} \int d\omega e^{-2i \cos^2 \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega} \cos(i\gamma' + 2i \sin \gamma' \cos \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega),$$

et que, dans le cas de i impair, cette fonction devient

$$\frac{2}{\pi(-1)^{\frac{i-1}{2}}} \int d\omega e^{-2i \cos^2 \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega} \sin(i\gamma' + 2i \sin \gamma' \cos \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega).$$

Si l'on a $\lambda = 1$, ce qui donne $\gamma' = \frac{\pi}{2}$, ces deux quantités se réduisent à l'unité, comme cela doit être, car alors $\sqrt{1 - 2\lambda x + x^2}$ devient $1 - x$, et l'on a, en faisant x nul après les différentiations,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \frac{d^i}{dx^i} \frac{1}{1 - x} = 1 = P^{(i)}.$$

Mais, quelque petit que l'on suppose $\sqrt{1 - \lambda^2}$ ou $\cos \gamma'$, on peut toujours supposer i assez grand pour que $2i \cos^2 \gamma'$ soit fort grand, et alors on a, à fort peu près, l'intégrale

$$\int d\omega e^{-2i \cos^2 \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega \pm 2i \sin \gamma' \cos \gamma' \sin^2 \frac{1}{2} \omega},$$

égale à cette même intégrale, dans laquelle on change $\sin^2 \frac{1}{2} \omega$ dans

$\frac{1}{2}\omega^2$, et que l'on prend depuis ω nul jusqu'à ω infini. Il est facile d'en conclure que, dans le cas de i pair, on a, lorsque i est un très grand nombre,

$$P^{(i)} = \frac{2(-1)^{\frac{i}{2}} \cos(i + \frac{1}{2})\gamma'}{\sqrt{2i\pi}(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et dans le cas de i impair et très grand, on a

$$P^{(i)} = \frac{2(-1)^{\frac{i-1}{2}} \sin(i + \frac{1}{2})\gamma'}{\sqrt{2i\pi}(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour peu que λ soit moindre que l'unité, on peut supposer i assez grand pour que ces expressions de $P^{(i)}$ soient fort approchées; elles deviennent exactes lorsque i est infini.

Considérons maintenant l'intégrale $\alpha \int \frac{y_1 d\mu' d\omega'}{\sqrt{r^2 - 2\lambda r + 1}}$, qui devient V'' , ou l'intégrale (o), lorsqu'on suppose $r = 1$. Cette intégrale, développée par rapport aux puissances de $\frac{1}{r}$, devient, en ne considérant que la puissance $\frac{1}{r^{i+1}}$, i étant un nombre pair,

$$\frac{2(-1)^{\frac{i}{2}}}{\sqrt{2i\pi}} \int \int \alpha \frac{y' d\mu' d\omega' \cos(i + \frac{1}{2})\gamma}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En intégrant cette fonction par rapport à μ' , on a

$$\begin{aligned} & \frac{2(-1)^{\frac{i}{2}}}{(i + \frac{1}{2})\sqrt{2i\pi}} \int \alpha \frac{y_1 d\omega' \sin(i + \frac{1}{2})\gamma \frac{\partial \mu'}{\partial \gamma}}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\ & - \frac{2(-1)^{\frac{i}{2}}}{(i + \frac{1}{2})\sqrt{2i\pi}} \int \int \alpha d\omega' d\mu' \sin(i + \frac{1}{2})\gamma \frac{\partial}{\partial \mu'} \frac{y_1 \frac{\partial \mu'}{\partial \gamma}}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Si i est un nombre impair, il suffit de changer dans cette expression le sinus en — cosinus, et $(-1)^{\frac{i}{2}}$ dans $(-1)^{\frac{i-1}{2}}$. On voit ainsi que, quel que soit γ , on arrivera toujours par le développement du radical.

suivant les puissances de $\frac{1}{r}$, à une série convergente et finie, à cause du diviseur $\frac{1}{(i + \frac{1}{2})\sqrt{2i\pi}}$. Or $P^{(i)}$ étant le coefficient de $\frac{1}{r^{i+1}}$ dans ce développement, on a, par le n° 15 du Livre III de la *Mécanique céleste*,

$$\begin{aligned} P^{(i)} = & 2 \left[\frac{1.3.5 \dots (2i-1)}{1.2.3 \dots i} \right]^2 \\ & \times \sum \left\{ \frac{i(i-1)(i-2) \dots (i-n+1)}{(i+1)(i+2) \dots (i+n)} (1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \left[\mu^{i-n} - \frac{(i-n)(i-n-1)}{2(2i-1)} \mu^{i-n-2} + \dots \right] \right. \\ & \left. \times (1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}} \left[\mu'^{i-n} - \frac{(i-n)(i-n-1)}{2(2i-1)} \mu'^{i-n-2} + \dots \right] \cos n(\omega' - \omega) \right\}, \end{aligned}$$

le signe $\sum$ comprenant toutes les valeurs de la fonction qu'il enveloppe, depuis $n = 0$ jusqu'à $n = i$. Dans le cas de $n = 0$, il ne faut prendre que la moitié de cette fonction. La première approximation nous a donné γ' sous cette forme

$$Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots;$$

en la prenant négativement et en γ changeant μ en μ' , on aura la valeur de y_1 , qui, substituée dans l'intégrale

$$\int \frac{\alpha y_1 d\mu' d\omega'}{\sqrt{r^2 - 2\lambda r + 1}},$$

développée par rapport aux puissances de $\frac{1}{r}$, donne, par une série fort convergente, cette intégrale, et par conséquent la valeur de V'' . On aura ainsi, au moyen de l'équation (4), une seconde approximation de $\alpha y'$, et, au moyen de l'équation (6), une seconde approximation de la pesanteur p . Ces approximations seront suffisantes, vu le peu de densité de la mer et son peu de profondeur, comme on le verra bientôt.

III. Considérons présentement les phénomènes de la pesanteur et de la variation des degrés à la surface des continents ou du sphéroïde terrestre. Ces phénomènes sont, en effet, les seuls de ce genre que nous puissions observer. Pour en avoir l'expression analytique, imaginons une atmosphère infiniment rare, très peu élevée, mais qui

cependant embrasse toute la Terre. Soit $\alpha y''$ l'élévation d'un de ses points au-dessus de la surface du sphéroïde terrestre. L'équation (1) du n° I, qui détermine la figure de la mer, déterminera la partie de la figure de l'atmosphère qui s'élève au-dessus de la mer, car il est clair que la valeur de V' étant de l'ordre α est, aux quantités près de l'ordre α^2 , la même à ces deux surfaces; mais, relativement à la surface de la mer, r doit être changé dans $1 + \alpha y' + \alpha \bar{y}$, et, relativement à la surface de l'atmosphère, il doit être changé dans $1 + \alpha y' + \alpha \bar{y}$. Cela posé, si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$\alpha y'' - \alpha y' = \text{const.};$$

ainsi, tous les points de la surface de l'atmosphère qui correspondent à celle de la mer sont également élevés au-dessus de cette dernière surface, en sorte que ces deux surfaces sont semblables à très peu près.

Si l'on nomme p' la pesanteur à la surface de l'atmosphère, il est facile de voir que sa valeur sera donnée par l'équation (3), en y substituant, pour r , $1 + \alpha y'' + \alpha \bar{y}$; tandis que, pour avoir la valeur de p relative à la surface de la mer, il faut changer r dans $1 + \alpha y' + \alpha \bar{y}$; en retranchant ces deux valeurs l'une de l'autre, et observant que $\alpha y'' - \alpha y'$ est, par ce qui précède, une quantité constante que nous désignons par αl , on aura

$$p' = p - 2P\alpha l,$$

P étant la pesanteur à l'équateur. Ainsi la loi de la pesanteur est la même aux deux surfaces. On a vu, dans le n° I, que, dans le cas du sphéroïde terrestre homogène et de même densité que la mer, on a

$$p = P(1 + \frac{1}{2}\alpha\varphi\mu^2);$$

on a donc alors

$$p' = P(1 - 2\alpha l + \frac{1}{2}\alpha\varphi\mu^2).$$

Pour avoir l'équation de la surface de l'atmosphère au-dessus des continents, nous nommerons V , la somme des molécules de la mer, divisées par leurs distances respectives à un point de cette surface;

alors l'équation (1) du n° I deviendra celle de cette surface, en y changeant V' en V , et en y substituant $1 + \alpha y'' + \alpha \bar{y}$ pour r . Or on a

$$V' = \int \frac{\alpha y' d\mu' d\omega'}{\sqrt{r^2 - 2r \cos \gamma + 1}},$$

l'intégrale étant prise pour toutes les valeurs de μ' et de ω' relatives à l'étendue de la mer, r devant être supposé égal à l'unité, et $\cos \gamma$ étant

$$\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\omega' - \omega).$$

En développant le radical, relativement aux puissances de $\frac{1}{r}$, on voit, par ce qui précède, que V' est composé de termes de la forme

$$\varepsilon(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}(\mu'^2 - \dots) \int y' d\mu' d\omega' \cos n(\omega' - \omega) (1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}(\mu'^2 - \dots).$$

La valeur de V , se compose exactement des mêmes termes; on a donc

$$V' = V.$$

Cela posé, si l'on retranche l'une de l'autre les équations relatives aux deux surfaces, on aura

$$\alpha y'' = \text{const.} + \alpha y',$$

pourvu que les coordonnées μ et ω de la fonction y' se rapportent au point de la surface de l'atmosphère que nous considérons.

Pour avoir l'expression de la pesanteur, il faut changer, dans l'équation (1), V' dans V ; mais on ne peut pas supposer

$$\frac{\partial V'}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r},$$

à cause de la grandeur que le radical acquiert lorsque $\cos \gamma = 1$ dans la fonction $\frac{\partial V'}{\partial r}$. Pour avoir la valeur de $\frac{\partial V'}{\partial r}$, nous observerons qu'elle égale, par ce qui précède,

$$\frac{\partial V'}{\partial r} = 4\alpha\pi \left(Y^{(0)} + 2 \frac{Y^{(1)}}{3} + 3 \frac{Y^{(2)}}{5} + \dots \right),$$

ce qui donne

$$\frac{\partial V'}{\partial r} + \frac{1}{2} V' = \frac{\partial V''}{\partial r} + \frac{1}{2} V'' - 2\pi y';$$

mais on a

$$\frac{\partial V''}{\partial r} + \frac{1}{2} V'' = 0;$$

on a donc

$$\frac{\partial V'}{\partial r} = -\frac{1}{2} V' - 2\pi y'.$$

Le second membre de l'équation (1), différentié par rapport à r et divisé par $-dr$, donne la valeur de p , en y faisant $r = 1 + \alpha\bar{y} + \alpha y'$. Il donne la valeur de la pesanteur p' à la surface de l'atmosphère, en le différentiant de la même manière et en y changeant r en $1 + \alpha\bar{y} + \alpha y'$, et V' en V_1 . Si l'on retranche ensuite cette valeur de p' de celle de p ; si l'on substitue, au lieu de $\frac{\partial V'}{\partial r}$ et de $\frac{\partial V_1}{\partial r}$, leurs valeurs $-\frac{1}{2} V' - 2\pi y'$ et $-\frac{1}{2} V_1$, et si l'on observe que $V' = V_1$, et que $\alpha y'' - \alpha y'$ est constant, on aura

$$p' = \text{const.} + p - 2\pi y',$$

p étant la valeur de p déterminée précédemment, et dans laquelle on substitue, pour μ et ω , les valeurs relatives au point de la surface de l'atmosphère que l'on considère.

A la surface du sphéroïde, la pesanteur p' est augmentée dans le rapport de l'unité à $1 + 2\alpha y''$; en nommant donc p'' la pesanteur à cette surface, on aura

$$p'' = \text{const.} + 2P\alpha y'' - 2\pi y' + p.$$

En substituant au lieu de p sa valeur donnée par l'équation (6), et observant que $\alpha y'' - \alpha y'$ est une quantité constante, et que

$$P = \frac{1}{2}\pi \int \rho da^2,$$

il est facile de conclure

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} p'' &= \text{const.} - \frac{1}{2} P(\alpha l - \alpha y'') + 2\pi \bar{y} \int \rho da^2 \\ &\quad - 2\pi \int \rho (a^4 Y^{(1)} + a^5 Y^{(2)} + a^6 Y^{(3)} + \dots) + \frac{1}{2} \alpha \bar{y} P \mu^2, \end{aligned} \right.$$

αl étant la hauteur de l'atmosphère supposée, au-dessus du niveau de la mer, en sorte que $\alpha l - \alpha y''$ est la hauteur du point du sphéroïde correspondant à p'' au-dessus de ce niveau, hauteur que l'on peut déterminer au moyen du baromètre.

Cette équation peut se déduire directement de l'équation de l'équilibre au-dessus de la surface des continents, en observant que cette équation est donnée par l'équation (1) en y changeant V' en V_1 , V_1 représentant ici la somme des molécules de la mer, divisées par leurs distances respectives au point de l'atmosphère que l'on considère, et en substituant pour r , $1 + \alpha\bar{y} + \alpha y'$.

On peut supposer, pour plus de généralité, que V_1 comprend encore la somme semblable relative aux montagnes et même aux cavités de la surface du sphéroïde terrestre, en observant que, par rapport à ces cavités, V_1 devient une quantité négative. La pesanteur p' sera donnée par la différentielle du second membre de l'équation (1), prise par rapport à r et divisée par $-dr$, en y supposant

$$r = 1 + \alpha\bar{y} + \alpha y''$$

et en y changeant V' en V_1 . Si l'on en retranche l'équation (1) multipliée par $\frac{1}{2}$, et si l'on observe que l'on a

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{1}{2} V_1 = 0,$$

on aura

$$p' = \text{const.} - 2\pi(\bar{y} + y'') \int \rho da^2 \\ + 2\pi \int \rho (a^4 Y^{(1)} + a^5 Y^{(2)} + a^6 Y^{(3)} + \dots) + \frac{1}{2} \alpha \bar{y} P \mu^2.$$

Si l'on substitue, au lieu de p' sa valeur $\frac{p''}{1 + 2\alpha y''}$, ou, à fort peu près, $p'' - 2\pi P y''$, on aura l'expression précédente de p'' , expression qui, comme l'on voit, embrasse les attractions des montagnes et, généralement, tous les effets des irrégularités du sphéroïde terrestre, pourvu que le point attiré en soit éloigné, car cette condition est né-

cessaire à l'existence de l'équation

$$0 = \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{1}{2} V_1,$$

qui fait disparaître ces effets.

Si le sphéroïde terrestre était homogène, $d\rho$ serait nul, et l'on aurait

$$p' = P \left[1 - \frac{1}{2} (x^2 - xy^2) + \frac{1}{2} x^2 \mu^2 \right],$$

P étant ici la pesanteur à l'équateur au niveau de la mer. On peut, au moyen de cette équation, vérifier l'hypothèse de cette homogénéité, car alors, en ajoutant à toutes les valeurs de p' , observées au moyen du pendule, la quantité $\frac{1}{2} P(x^2 - xy^2)$, l'expression de la pesanteur ainsi corrigée deviendrait $P(1 + \frac{1}{2} x^2 \mu^2)$. Ainsi l'accroissement de la pesanteur serait $\frac{1}{2} x^2 P \mu^2$; or on a $\frac{1}{2} x^2 = 0,004325$; cet accroissement serait donc $0,004325 P \mu^2$. Les expériences multipliées du pendule dans les deux hémisphères indiquent un accroissement proportionnel à μ^2 , ou au carré du sinus de la latitude; mais elles donnent à μ^2 un coefficient plus grand que le précédent, et à fort peu près égal à $0,0054 P$. L'hypothèse de l'homogénéité du sphéroïde terrestre est donc exclue par ces expériences; on voit même que l'hétérogénéité de ses couches doit s'étendre, depuis sa surface, fort au delà des quantités de l'ordre x , ou de l'aplatissement de la Terre, afin que la quantité

$$- 2 x \pi \int d\rho (a^4 Y^{(1)} + a^5 Y^{(2)} + \dots)$$

soit de l'ordre x et devienne égale à

$$(0,0054 P - 0,004325 P) (\mu^2 - \frac{1}{2}).$$

IV. Comparons maintenant l'analyse aux observations. L'équation (1) donne à la surface de l'atmosphère, au-dessus des continents,

$$\begin{aligned} & (x\bar{y} + xy^2) \frac{1}{2} \pi \int \rho da^3 \\ & = \text{const.} + 4 x \pi \int \rho d \left(\frac{a^4 Y^{(1)}}{3} + \frac{a^5 Y^{(2)}}{5} + \dots \right) + V_1 - \frac{1}{2} x^2 \varphi (\mu^2 - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi \int \rho da^3; \end{aligned}$$

elle donne ensuite, en observant que $\frac{\partial V_1}{\partial r} = -\frac{1}{2} V_1$, et que la valeur de $-\frac{1}{2} V_1$, étant fort convergente, il convient de la substituer au lieu de $\frac{\partial V_1}{\partial r}$,

$$\begin{aligned} p' = \text{const.} - \frac{1}{2} \pi \int \rho da^3 (2 x \bar{y} + 2 xy^2) \\ + 4 x \pi \int \rho d \left(\frac{2 a^4 Y^{(1)}}{3} + \frac{3 a^5 Y^{(2)}}{5} + \frac{4 a^6 Y^{(3)}}{7} + \dots \right) \\ + \frac{1}{2} V_1 + x \varphi (\mu^2 - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi \int \rho da^3. \end{aligned}$$

Si l'on retranche de cette équation le double de la précédente, on aura

$$\begin{aligned} p' = \text{const.} + 4 x \pi \int \rho d \left(\frac{a^4 Y^{(1)}}{5} + \frac{2 a^5 Y^{(2)}}{7} + \dots \right) \\ - \frac{1}{2} V_1 + 2 x \varphi (\mu^2 - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi \int \rho da^3. \end{aligned}$$

En développant V_1 suivant les puissances de $\frac{1}{r}$, on aura une expression de cette forme

$$V_1 = \frac{U_1^{(0)}}{r} + \frac{U_1^{(1)}}{r^2} + \frac{U_1^{(2)}}{r^3} + \frac{U_1^{(3)}}{r^4} + \dots,$$

$U_1^{(0)}$ étant une fonction rationnelle et entière de μ , $\sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega$ et $\sqrt{1 - \mu^2} \cos \omega$, assujettie à la même équation aux différences partielles que $Y^{(0)}$; l'équation précédente devient ainsi

$$\begin{aligned} p' = \text{const.} + 4 x \pi \int \rho d \left(\frac{a^4 Y^{(1)}}{5} + 2 \frac{a^5 Y^{(2)}}{7} + \dots \right) \\ - \frac{1}{2} (U_1^{(1)} + U_1^{(2)} + U_1^{(3)} + \dots) + 2 x \varphi (\mu^2 - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi \int \rho da^3. \end{aligned}$$

Il résulte des expériences nombreuses du pendule que l'on a, à fort peu près,

$$p' = \text{const.} + x \varphi P (\mu^2 - \frac{1}{2}),$$

$x \varphi$ étant à très peu près égal à $0,0054$. De là il suit que la fonction

$$4 x \pi \int \rho d \left(\frac{2 a^4 Y^{(1)}}{7} + \frac{3 a^5 Y^{(2)}}{9} + \dots \right) - \frac{1}{2} (U_1^{(1)} + U_1^{(2)} + U_1^{(3)} + \dots)$$

est très petite relativement au terme $\alpha q P(\mu^2 - \frac{1}{3})$, et que la fonction

$$4\pi \int \rho d\left(\frac{a^3 Y^{(3)}}{5}\right) - \frac{1}{3} U_1^{(2)}$$

est à fort peu près égale à

$$(\alpha q - 2\alpha q) P(\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

L'expression générale de cette fonction est de la forme

$$A(\mu^2 - \frac{1}{3}) + A^{(1)}\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega + A^{(2)}\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega \\ + A^{(3)}(1-\mu^2)\sin 2\omega + A^{(4)}(1-\mu^2)\cos 2\omega;$$

ainsi les constantes $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ sont très petites relativement à la constante A , et l'on a, à fort peu près,

$$A = P(\alpha q - 2\alpha q).$$

Les observations donnent

$$\alpha q = \frac{1}{119} = 0,0034602;$$

on aura ainsi

$$A = -0,00152P.$$

On peut encore déterminer A au moyen des deux inégalités de la Lune, qui dépendent de l'aplatissement de la Terre. Il résulte du Chapitre II du Livre VII de la *Mécanique céleste*, que, si l'on désigne par $k(\mu^2 - \frac{1}{3})$ la partie de

$$\frac{4\pi}{5} \int \rho d(a^3 Y^{(3)} + U_1^{(3)}),$$

qui est indépendante de l'angle ω , l'inégalité lunaire en latitude, sera

$$\frac{k}{(g-1)^2} f^2 \sin\lambda \cos\lambda \sin u,$$

n étant la longitude de la Lune, $g-1$ le rapport du moyen mouvement de ses nœuds à son moyen mouvement, f sa parallaxe, λ l'obli-

quité de l'écliptique, et T la masse de la Terre, à très peu près égale à P . Suivant M. Burg, cette inégalité est, en secondes sexagésimales,

$$-8'',0 \sin u;$$

et la comparaison de quatre mille observations a conduit M. Burkhardt au même résultat, qui donne

$$k = -0,0015388P.$$

Maintenant, il est facile de voir que, si l'on nomme $Q(\mu^2 - \frac{1}{3})$ la partie de $U_1^{(2)}$ indépendante de l'angle ω , on a

$$k = A + \frac{1}{3}Q;$$

on a donc

$$A = -0,0015588P - \frac{1}{3}Q.$$

Si l'on compare cette valeur de A à la précédente, conclue des expériences du pendule, on voit que $\frac{1}{3}Q$ est une quantité insensible, ce qui indique que la masse de la mer est très petite, et qu'ainsi elle a très peu de profondeur. En effet, on a vu précédemment que

$$\alpha y' = \text{const.} + \alpha y'';$$

les variations de la profondeur zy' de la mer sont donc du même ordre que les élévations des grands plateaux des continents au-dessus de son niveau, élévations dont les plus grandes n'excèdent pas 2000^m, et dont la moyenne ne surpasse pas 1000^m. Cela joint au peu de densité de la mer, rend la valeur de Q presque insensible. La comparaison des deux valeurs de A donne

$$Q = -0,0001552P;$$

mais on sent combien les erreurs des observations et des expériences répandent d'incertitude sur cette valeur.

Les mesures des degrés des méridiens, réduites au niveau de la mer ou de l'atmosphère supposée, nous offrent un troisième moyen pour obtenir A .

L'équation (1) donne

$$P(\alpha\bar{y} + \alpha y^e) = \text{const.} + 4\pi \int \rho d\left(\frac{a^2 Y^{(1)}}{5} + \frac{a^2 Y^{(2)}}{7} + \dots\right) \\ + U_1^{(1)} + U_1^{(2)} + U_1^{(3)} + \dots - P \frac{\alpha^2}{2} (\mu^2 - \frac{1}{2}).$$

Les mesures des degrés s'écartent peu de la figure d'un ellipsoïde de révolution; elles présentent cependant des anomalies plus grandes que les longueurs du pendule, ce qui tient, en partie, aux erreurs dont les observations d'amplitude des arcs mesurés sont susceptibles, et qui sont beaucoup plus considérables, relativement à l'arc mesuré, que les erreurs des expériences du pendule, et, en partie, à ce que les petites irrégularités de la Terre affectent plus les degrés que les longueurs du pendule, comme je l'ai fait voir dans le Livre III de la *Mécanique céleste*. Mais, lorsque l'on compare des degrés éloignés, tels que ceux de France et de l'équateur, l'influence de ces irrégularités devient peu sensible. La comparaison des degrés dont je viens de parler a donné à M. Delambre

$$\alpha(\bar{y} + y^e) = \text{const.} - 0,00324(\mu^2 - \frac{1}{2}).$$

En comparant cette expression de $\alpha(\bar{y} + y^e)$ à la précédente, on voit que les quantités $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, U_1^{(1)}, U_1^{(2)}, \dots$ sont très petites, comme cela résulte pareillement des expériences du pendule. La première de ces expressions donne, en désignant par

$$-\alpha h(\mu^2 - \frac{1}{2}), \quad -\alpha \bar{h}(\mu^2 - \frac{1}{2}), \quad -\alpha h^e(\mu^2 - \frac{1}{2})$$

les parties de $\alpha Y^{(2)}, \alpha \bar{Y}^{(2)}$ et de $\alpha Y^{e(2)}$, qui sont indépendantes de l'angle ω ,

$$-P(\alpha \bar{h} + \alpha h^e) = A + \frac{1}{2}Q - \frac{\alpha^2}{2}P;$$

on aura donc, en substituant pour $-P(\alpha \bar{h} + \alpha h^e)$ sa valeur

$$-0,00324P,$$

que donnent les mesures des degrés de France et de l'équateur,

$$A = -0,00151P - \frac{1}{2}Q.$$

On voit encore, par ces mesures, que $\frac{1}{2}Q$ est insensible: on a ainsi pour A ces trois valeurs

$$A = -0,00153P,$$

$$A = -0,001588P - \frac{1}{2}Q,$$

$$A = -0,00151P - \frac{1}{2}Q.$$

En supposant donc Q nul, ces valeurs s'accordent aussi bien qu'on peut le désirer.

La précession des équinoxes donne des limites entre lesquelles la valeur de A est comprise. Ce phénomène dépend de la somme des molécules du sphéroïde terrestre et de la mer, divisées par leurs distances respectives aux centres du Soleil et de la Lune. En supposant que r se rapporte au centre du Soleil, et que S soit la masse de cet astre, la partie de la précession annuelle due à cette action sera, en rejetant les quantités périodiques,

$$-\frac{1}{Cn \sin \lambda} \frac{S}{r^3} \frac{d}{dt} \left[\frac{4\pi}{5} \int \rho d(a^2 Y^{(2)} + U_1^{(2)}) \right] T.$$

λ est l'obliquité de l'écliptique, n est la vitesse de rotation de la Terre, C est le moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe de rotation; enfin T exprime une année julienne. (Voir la *Connaissance des Temps* pour l'année 1821, page 262).

Si l'on nomme ϵ le rapport de la masse de la Lune, divisée par le cube de sa moyenne distance à la Terre, à la masse du Soleil divisée par le cube de sa moyenne distance, et si l'on désigne par N la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil, on aura

$$\frac{S}{r^3} = N^2,$$

et la précession moyenne des équinoxes, en vertu des actions réunies

du Soleil et de la Lune, sera

$$-\frac{N^2(1+\varepsilon)}{Cn \sin \lambda} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{4\pi}{5} \int \rho d(a^3 Y^{(2)} + U^{(2)}) \right] T.$$

En supposant, comme ci-dessus, que la partie indépendante de ω , dans la fonction

$$\frac{4\pi}{5} \int \rho d(a^3 Y^{(2)} + U^{(2)}),$$

soit $k(\mu^2 - \frac{1}{3})$, μ sera le sinus de la déclinaison du Soleil. En nommant donc ε sa longitude, on aura

$$\mu = \sin \lambda \sin \varepsilon,$$

ce qui donne

$$\mu^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \lambda - \frac{1}{4} \sin^2 \lambda \cos 2\varepsilon.$$

En négligeant les quantités périodiques dépendantes de l'angle ε , on aura

$$\mu^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \lambda,$$

et alors l'expression précédente de la précession annuelle devient

$$-\frac{k(1+\varepsilon)N^2 T \cos \lambda}{Cn};$$

ainsi, en désignant par lT la précession annuelle observée, on aura

$$k = \frac{-CnlT}{NT(1+\varepsilon)N \cos \lambda}.$$

On a, pour les nos 2 et 13 du Livre V de la *Mécanique céleste*,

$$\frac{C}{P} = \frac{2}{5} \frac{\int \rho da^3}{\int \rho da^3},$$

P étant toujours la pesanteur, qui est à très peu près égale à la masse de la Terre, son rayon étant pris pour l'unité. On a ensuite, en secondes décimales,

$$lT = 155', 20, \quad NT = 3999930'';$$

on a, de plus,

$$\frac{N}{n} = 0,00273033.$$

Enfin, par un milieu pris entre les résultats des phénomènes des marées, de la nutation, de la parallaxe lunaire et de l'équation lunaire des Tables du Soleil, on trouve

$$\varepsilon = 2,57;$$

on a donc

$$k = -P,0,001736 \frac{\int \rho da^3}{\int \rho da^3}.$$

Si l'on compare cette valeur de k à celle que nous avons trouvée précédemment par les inégalités lunaires, et qui est

$$k = -P,0,0015588,$$

on voit que la fraction $\frac{\int \rho da^3}{\int \rho da^3}$ est un peu moindre que l'unité, ce qui doit être, si, conformément aux lois de l'Hydrostatique, la densité ρ des couches terrestres diminue du centre à la surface. Les limites de cette fraction étant zéro et l'unité, les limites de A sont

$$0 \quad \text{et} \quad -0,001736P.$$

Les trois valeurs précédentes de A sont entre ces limites; le milieu entre ces trois valeurs donne, à fort peu près,

$$k = -P,0,00153,$$

ce qui donne

$$(i) \quad \int \rho da^3 = \frac{0,001736}{0,00153} \int \rho da^3.$$

Supposons la densité ρ croître en progression arithmétique de la surface au centre, en sorte que (ρ) étant la densité de la couche extérieure du sphéroïde terrestre, la densité d'une de ses couches soit $(\rho)(1+e-ca)$. On aura, en nommant D la moyenne densité de la Terre,

$$D = \int \rho da^3 = (\rho)(1+\frac{1}{2}e);$$

et l'équation (i) donnera

$$D = 1,552(\rho).$$

En supposant la densité de la première écorce du sphéroïde ter-

restre égale à celle du granit, ou à trois fois la densité de l'eau prise pour unité, on aurait

$$D = 4,656,$$

ce qui s'accorde avec les observations de M. Maskelyne et avec la belle expérience de M. Cavendish, autant qu'on peut le désirer, vu l'incertitude des observations et des hypothèses que nous venons de faire sur la loi de densité des couches du sphéroïde terrestre et sur la densité de sa couche extérieure.

L'ellipticité $zh + zh'$ de la surface de la mer est, par ce qui précède,

$$\frac{1}{2} \alpha \varphi - \frac{A + \frac{1}{2} Q}{P}.$$

En prenant pour A le milieu des trois valeurs précédentes, on aura, pour cette ellipticité,

$$0,00326 + \frac{5}{6} \frac{Q}{P} \quad \text{ou} \quad 0,00326,$$

en négligeant le terme $\frac{5}{6} \frac{Q}{P}$.

Le rayon du sphéroïde terrestre est

$$1 + \alpha \bar{h} (\mu^2 - \frac{1}{2}) + \alpha x,$$

αx étant une quantité peu considérable par rapport à $\alpha \bar{h}$ et du même ordre que l'élévation moyenne des continents. Pareillement, l'expression du rayon de la surface de la mer est

$$\alpha l + (\alpha h' + \alpha \bar{h}) (\mu^2 - \frac{1}{2}) + \alpha x',$$

$\alpha l'$ étant une constante et $\alpha x'$ étant de l'ordre de αx . La profondeur de la mer est, à très peu près, la différence de ces rayons, et par conséquent égale à

$$\alpha l' + \alpha h' (\mu^2 - \frac{1}{2}) + \alpha x' - \alpha x.$$

À l'équateur, les continents occupent une grande étendue sur laquelle cette expression devient négative. La mer y occupe une étendue plus grande encore, sur laquelle la même expression est positive. Dans le premier cas, $\alpha l' - \frac{1}{2} \alpha h'$ est moindre que $\alpha x - \alpha x'$;

dans le second cas, il est plus grand : $\alpha l' - \frac{1}{2} \alpha h'$ est donc une quantité de l'ordre de αx . Fort près du pôle boréal, où l'on a, à fort peu près, $\mu = 1$, la quantité $\alpha l' + \frac{1}{2} \alpha h' + \alpha x' - \alpha x$ est positive aux points que la mer recouvre et négative aux points qu'elle laisse à découvert : ainsi $\alpha l' + \frac{1}{2} \alpha h'$ est une quantité très petite de l'ordre αx ; donc $\alpha l' - \frac{1}{2} \alpha h'$ étant du même ordre, la somme et la différence de ces deux quantités, ou $2\alpha l'$ et $\alpha h'$, seront encore de cet ordre. Par conséquent, la mer est peu profonde et ses profondeurs sont du même ordre que les élévations des continents au-dessus de son niveau.

De là il suit que la surface du sphéroïde terrestre est à peu près elliptique, et celle qui convient à l'équilibre de cette surface supposée fluide. Ses diverses couches sont elles-mêmes à peu près elliptiques, car on a vu que les quantités $Y^{(2)}$, $Y^{(4)}$, ... sont fort petites relativement à $Y^{(2)}$.

Tout cela suppose que les degrés mesurés à la surface du sphéroïde terrestre et réduits au niveau de l'atmosphère supposée sont ceux de la surface de cette atmosphère. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que la direction de la pesanteur est, aux quantités près de l'ordre α , la même à la surface du sphéroïde et à la surface de l'atmosphère. L'angle que cette direction forme avec le rayon r dans le sens du méridien, par exemple, est égal au rapport de la différentielle du second membre de l'équation (1) du n° I, prise par rapport à θ et divisée par $d\theta$, à cette différentielle prise par rapport à r et divisée par $-dr$; or il est visible que ce rapport est, aux quantités près de l'ordre α^2 , le même à la surface du sphéroïde qu'à celle de l'atmosphère.

V. Supposons maintenant qu'un vaste plateau recouvre une partie du sphéroïde terrestre, et déterminons la loi de pesanteur à la surface de ce plateau. Nommons $1 + \alpha \bar{y} + \alpha y$, le rayon mené du centre de la Terre à ce plateau, en sorte que αy , soit l'élévation d'un de ses points au-dessus du sphéroïde. Soit $\alpha y''$ l'élévation au-dessus du plateau du point correspondant de l'atmosphère supposée. Si l'on con-

çoit deux sphéroïdes dont les rayons soient $1 + \alpha \bar{y}$ et $1 + \alpha \bar{y} + \alpha y_1$, le plateau sera évidemment l'excès du second sphéroïde sur le premier, plus la partie de la différence des deux sphéroïdes correspondante à y_1 , négatif. Soient, relativement aux deux sphéroïdes et à cette partie de leur différence, V_1, V_2, V_3 les sommes de leurs molécules divisées par leurs distances au point attiré de l'atmosphère; on aura l'équation de l'équilibre de cette atmosphère, en augmentant, dans l'équation (1), V de la quantité $V_3 - V_1 + V_2$. En différentiant le second membre de cette équation par rapport à r , et le divisant par $-dr$, on aura l'expression de la pesanteur p' à la surface de l'atmosphère. On retranchera ensuite de cette expression le second membre de l'équation (1), multipliée par $\frac{1}{2}$, et l'on observera que, relativement à un sphéroïde quelconque de la densité ρ_1 , on a, par ce qui précède,

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2} V = 2\pi \rho_1 h,$$

h étant la hauteur du point attiré au-dessus de la surface du sphéroïde; ce qui donne, en représentant par ρ , la densité du plateau,

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{1}{2} V_1 = 2\pi \rho_1 (y_1 + y^*),$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{1}{2} V_2 = 2\pi \rho_1 y^*;$$

on a ensuite

$$\frac{\partial V_3}{\partial r} + \frac{1}{2} V_3 = 0,$$

$$\frac{\partial V'}{\partial r} + \frac{1}{2} V' = 0;$$

on aura ainsi

$$\begin{aligned} p' = \text{const.} - 2\pi \rho (\bar{y}_1 + y_1 + y^*) \int \rho da^2 \\ + 2\pi \rho \int \rho d(a^4 Y^{(1)} + a^2 Y^{(2)} + a^4 Y^{(3)} + \dots) \\ + 2\pi \rho_1 y_1 + \frac{1}{2} 2\pi \rho P \mu^2. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par p , la pesanteur à la surface du plateau, il faudra,

pour l'obtenir, augmenter p' de la quantité $2Pzy^*$; on aura donc

$$\begin{aligned} p_1 = \text{const.} - 2\pi \rho (\bar{y}_1 + y_1 + y^*) \int \rho da^2 \\ + 2\pi \rho \int \rho d(a^4 Y^{(1)} + a^2 Y^{(2)} + \dots) \\ + 2\pi \rho_1 y_1 + 2Pzy^* + \frac{1}{2} 2\pi \rho P \mu^2. \end{aligned}$$

Si le sphéroïde terrestre était homogène, cette équation donnerait

$$(o) \quad P_1 = P[1 - \frac{1}{2}(\alpha l - \alpha y^*) + \frac{1}{2}\alpha \rho \mu^2 - \frac{1}{2}\alpha(\rho_1 - \rho)(y_1 - h)],$$

h étant la valeur de y_1 , au bord de la mer, à l'équateur et au point où la pesanteur est P , et ρ , étant ici le rapport de la densité du plateau à la moyenne densité de la Terre. Si ces deux densités étaient égales, on aurait

$$p_1 = P[1 - \frac{1}{2}(\alpha l - \alpha y^*) + \frac{1}{2}\alpha \rho \mu^2].$$

En appliquant cette formule aux expériences de Bouguer sur la pesanteur, à Quito, au bord de la mer et à l'équateur, on a

$$- \frac{1}{2}(\alpha l - \alpha y^*) P$$

pour la diminution de la pesanteur à Quito; $\alpha l - \alpha y^*$ est la hauteur de Quito au-dessus du niveau de la mer, et cette hauteur est $\frac{1}{2731}$. Le rayon terrestre étant pris pour unité; la diminution de la pesanteur à Quito serait donc $\frac{1}{1365}$. L'expérience donne $\frac{1}{1351}$ pour cette diminution, c'est-à-dire une quantité plus que triple de la précédente; ainsi l'hypothèse du sphéroïde terrestre homogène et de même densité que les Cordillères est exclue par les observations du pendule qui prouvent incontestablement que la moyenne densité de la Terre surpasse la densité de ces montagnes.

L'expression de p_1 , donnée par l'équation (o), aurait encore lieu pour un point situé sous l'équateur si le sphéroïde terrestre était de révolution, comme il est facile de s'en assurer. On peut d'ailleurs supposer sans erreur sensible, relativement à Quito, que $\alpha(y - h)$ exprime la hauteur de cette ville au-dessus du niveau de la mer, hauteur égale à $\alpha l - \alpha y^*$; on aura ainsi

$$p_1 = P[1 - (\alpha - \frac{1}{2}\rho_1)(\alpha l - \alpha y^*)].$$

La diminution de la pesanteur, depuis le bord de la mer jusqu'à Quito, serait donc

$$(2 - \frac{1}{2}f)(\alpha l - \alpha y'').$$

En substituant, au lieu de $\alpha l - \alpha y''$, $\frac{1}{2257}$, et en égalant la diminution précédente à la diminution observée $\frac{1}{1257}$, on trouve

$$\rho_1 = 0,2129.$$

La densité des Cordillères est donc peu différente de celle de l'eau qui, suivant l'expérience de Cavendish, est 0,182, la moyenne densité de la Terre étant prise pour unité. Le peu de densité de ces montagnes résulte encore du peu d'effet de leur attraction sur le fil à plomb dans les observations des astronomes français, qui ont remarqué que ces montagnes, comme étant volcaniques, doivent renfermer de grandes cavités dans leur intérieur.

L'expression précédente de p_1 est déduite de la considération du plateau, comme résultant de la différence de deux sphéroïdes très peu différents d'une même sphère; et, vu la rapidité avec laquelle le plateau sur lequel la ville de Quito est située s'élève à partir du bord de la mer, cette considération peut sembler inexacte. Mais cette expression est encore très approchée en considérant ce plateau comme la partie supérieure d'une montagne dont les dimensions horizontales sont beaucoup plus grandes que sa hauteur, ce qui est à peu près conforme à la nature. Si l'on conçoit une série de couches circulaires horizontales et disposées de manière que leurs centres soient sur une verticale et que l'on place Quito au centre de la tranche supérieure; en nommant ρ_1 la densité de ces couches, R le rayon de l'une d'elles, dont r est la distance de son centre à Quito, la somme des molécules de cette couche, divisées par leurs distances à Quito, sera

$$2\pi\rho_1(\sqrt{r^2 + R^2} - r).$$

R étant supposé fort grand relativement à r , cette fonction se réduit, à fort peu près, à

$$2\pi\rho_1(R - r);$$

elle reste donc toujours très petite si, comme on doit le supposer ici, R est une petite fraction du rayon terrestre; elle n'apporte ainsi qu'un terme insensible dans l'équation de l'équilibre de l'atmosphère, et par conséquent la somme de ces fonctions ne produit aucun changement sensible dans la valeur de $\alpha y''$. Il n'en est pas de même de la pesanteur p_1 . L'attraction de la couche que nous venons de considérer produit un accroissement égal à la différentielle de la fonction précédente, prise par rapport à r et divisée par $-dr$, et par conséquent égale à $2\pi\rho_1$; ainsi, par l'attraction de la montagne, cet accroissement sera

$$2\pi\rho_1 r',$$

r' étant la hauteur de la montagne, hauteur toujours égale à $\alpha l - \alpha y''$, puisque $\alpha y''$ n'est point altéré sensiblement par cette attraction. La pesanteur sera donc augmentée de la quantité

$$\frac{1}{2}\rho_1 P(\alpha l - \alpha y'').$$

ce qui est conforme à ce qui précède. On déterminera, par la même analyse, la variation de la pesanteur, due à un corps dense ou à une cavité située dans l'intérieur de la Terre.

Considérons maintenant l'effet de l'attraction d'une montagne sur la mesure des degrés du méridien. L'expression d'un degré du méridien, mesuré sur la surface de l'atmosphère supposée, est, en exprimant par c un degré moyen,

$$c\left(1 + \alpha y + \alpha \frac{d^2 y}{d\theta^2}\right),$$

θ étant la latitude du milieu de ce degré et $1 + \alpha y$ étant le rayon mené du centre de la Terre à ce milieu. Concevons maintenant une montagne dont la masse soit m et θ' la latitude. La distance de cette montagne au milieu du degré mesuré sera $2 \sin \frac{1}{2} \gamma$, γ étant l'angle que forment entre eux les deux rayons terrestres, menés à la montagne et au milieu du degré. En considérant ce milieu comme un point attiré par la montagne, la masse de la montagne, divisée par

sa distance à ce point, sera $\frac{m}{2P \sin \frac{1}{2}\gamma}$. C'est la quantité dont la valeur de V de l'équation (4) du n° I s'accroît par l'accession de la montagne. Cette accession ajoute donc à la valeur du rayon terrestre mené à la surface de l'atmosphère, que donne cette équation, le terme

$$\frac{m}{2P \sin \frac{1}{2}\gamma},$$

P étant la masse de la Terre.

De là il suit que l'accession de la montagne ajoute au degré mesuré la quantité

$$(i) \quad \frac{mc}{2P} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}\gamma} + \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \right)$$

ou

$$\frac{mc}{2P \sin \frac{1}{2}\gamma} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{d\gamma}{d\theta} \right)^2 + \frac{\left(\frac{d\gamma}{d\theta} \right)^2 - \frac{d^2\gamma}{d\theta^2} \frac{1}{4} \sin \gamma}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\gamma} \right].$$

On a

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\omega' - \omega);$$

ω et ω' étant les longitudes du milieu du degré mesuré et de la montagne. Si la montagne est dans la direction même du degré mesuré, on a

$$\gamma = \pm (\theta' - \theta).$$

Le signe + ayant lieu si la montagne est plus près du pôle que le point attiré, le signe - a lieu dans le cas contraire; la quantité précédente devient

$$\pm \frac{mc}{2P \sin \frac{1}{2}(\theta' - \theta)} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2}(\theta' - \theta)} \right].$$

Le second terme de cette expression est le seul sensible lorsque la montagne est peu éloignée de l'arc mesuré. Pour une montagne de même densité que la Terre et égale à une sphère dont le rayon serait $\frac{1}{1000}$ du rayon terrestre, et qui serait éloignée du point attiré de $\frac{1}{32}$ de ce dernier rayon, ce terme donnerait 25^m d'accroissement dans le degré décimal du méridien : cet accroissement resterait le même si

l'on doublait le rayon de la sphère égale à la montagne, ainsi que son éloignement. Une sphère d'un pareil rayon aurait une masse bien supérieure à celle des plus hautes montagnes de la Terre.

Si la montagne était assez près de l'arc mesuré pour que la moitié de cet arc fût une partie sensible de sa distance, alors il faudrait, dans l'expression (i) de l'effet de la montagne, changer c en $d\theta$ et l'intégrer, ce qui donne

$$\frac{m}{2P} \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\gamma} + \int \frac{d\theta}{\sin \frac{1}{2}\gamma} + \text{const.} \right).$$

la constante devant être déterminée par la condition que cette fonction soit nulle à la première extrémité de l'arc mesuré. Si la montagne est dans la direction du méridien, cette fonction devient

$$\frac{m}{2P} \left[2 \log \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta' - \theta_s)}{\tan \frac{1}{2}(\theta' - \theta_p)} + \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{1}{2}(\theta' - \theta_s)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta' - \theta_p)} - \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{1}{2}(\theta' - \theta_s)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta' - \theta_s)} \right],$$

θ_s et θ_p étant les latitudes des deux extrémités de l'arc mesuré c , dont le milieu a θ pour latitude. Lorsque $\theta' - \theta_s$ et $\theta - \theta_p$ sont de petits arcs, cette fonction se réduit à peu près à

$$\frac{2mc}{P} \frac{(\theta' - \theta)}{[(\theta' - \theta)^2 - \frac{1}{4}c^2]},$$

cette quantité exprime d'une manière fort approchée l'action de la montagne lorsqu'elle devient sensible.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que l'action directe de la montagne; mais elle a sur la mesure du degré une action indirecte, en changeant la figure de la mer, qui, par là, change la figure de l'atmosphère supposée. Nous allons faire voir que l'effet de cette action indirecte est insensible.

L'équation (4) du n° I donne, pour la variation de $\alpha\gamma'$, due à l'action de la montagne,

$$\frac{m}{2P \sin \frac{1}{2}\gamma},$$

γ' étant l'angle compris entre les rayons terrestres menés à la montagne et à une molécule de la surface de la mer. L'élément de la mer, dû à cette variation, est donc le produit de cette quantité par $d\gamma' \sin \gamma' d\epsilon'$, ϵ' étant l'angle que l'arc intercepté entre cette molécule et la montagne forme avec le méridien de la montagne. L'action de cet élément de la mer produit, dans la valeur de zy' , en vertu de l'équation (1), transportée à la partie de la surface de l'atmosphère qui s'élève au-dessus des continents, le terme

$$\frac{m d\gamma' d\epsilon' \sin \gamma'}{2P \sin \frac{1}{2}\gamma'} \frac{1}{2P \sin \frac{1}{2}\gamma'},$$

γ'' étant l'angle formé par les rayons terrestres menés aux molécules de la mer et de l'atmosphère. La variation de zy' , due à l'action de la montagne sur la mer, est

$$\iint \frac{m d\gamma' d\epsilon' \cos \frac{1}{2}\gamma'}{P} \frac{1}{2P \sin \frac{1}{2}\gamma'};$$

cette double intégrale n'a de valeur sensible que dans le petit espace où $\sin \frac{1}{2}\gamma''$ est une très petite quantité, et alors il est visible qu'elle est beaucoup moindre que la variation $\frac{m}{2P \sin \frac{1}{2}\gamma'}$, introduite dans zy' par l'action directe de la montagne.

En suivant les raisonnements qui nous ont conduit à l'équation (7) du n° III, on voit qu'elle subsiste encore dans le cas où l'on suppose une montagne sensiblement éloignée de l'observateur. La variation de la pesanteur, due à l'action de la montagne, est donc le produit de $\frac{1}{2}P$ par la variation correspondante de zy' ou par $\frac{m}{2P \sin \frac{1}{2}\gamma'}$; ainsi la variation de la pesanteur est beaucoup plus petite que la variation correspondante du degré du méridien.

Nous observerons à cette occasion que l'existence de l'équation (a) du n° I contribue singulièrement à la régularité de la pesanteur et de la variation du pendule.

VI. Je terminerai ces recherches par les considérations suivantes sur la stabilité de la figure de la Terre. Cette stabilité repose sur ces deux conditions : savoir, que la mer soit en équilibre et que la Terre tourne autour d'un axe invariable relativement à sa surface. J'ai prouvé, dans la *Connaissance des Temps* de 1821, la possibilité d'un pareil axe, lorsque la mer recouvre tout le sphéroïde terrestre, et je suis parvenu à ce théorème :

La Terre étant supposée un sphéroïde formé de couches de densités variables suivant une loi quelconque, et recouvert d'un fluide; que l'on imagine un second sphéroïde qui pénètre le premier, et dont les couches soient les mêmes, avec la seule différence que leurs densités soient diminuées de la densité du fluide : si l'on fait tourner le premier sphéroïde autour de l'un des axes principaux du second, le fluide pourra toujours être en équilibre, et alors la figure et l'axe de rotation seront invariables; en sorte que les trois axes principaux du sphéroïde imaginaire deviendront ceux de la Terre entière.

Dans la nature, la mer laisse à découvert une partie du sphéroïde terrestre; mais on voit, par l'analyse précédente, que, en faisant tourner ce sphéroïde autour d'un axe quelconque retenu dans une position fixe, la mer pourra toujours prendre une figure d'équilibre. En supposant nulle la densité ρ de la mer, l'axe principal de rotation du sphéroïde sera celui de la Terre entière. Si l'on nomme x, y, z les trois coordonnées d'une molécule dm de la mer, rapportées à cet axe et aux deux autres axes principaux, les trois intégrales $\int xy dm$, $\int xz dm$, $\int yz dm$, étendues à tout l'océan, seront nulles, parce que dm est proportionnel à ρ supposé nul; mais, si ρ n'est pas nul, les valeurs de ces intégrales s'opposeront, par les propriétés connues des axes principaux, à ce que l'axe principal du sphéroïde soit celui de la Terre entière. Prenons maintenant pour nouvel axe fixe de rotation l'axe principal du corps formé par le sphéroïde terrestre et par la mer dans ce premier état d'équilibre, la durée de rotation étant toujours

supposée la même. Soient x', y', z' les coordonnées d'une molécule dm de la mer, dans ce premier état, et rapportées aux nouveaux axes principaux; la mer ne sera plus alors en équilibre, mais elle prendra un second état d'équilibre autour du nouvel axe de rotation. Soient alors x'', y'', z'' les coordonnées d'une molécule dm de la mer; il est facile de voir que les valeurs des fonctions $\int x' y' dm - \int x' y' dm$, $\int x' z' dm - \int x' z' dm$, $\int y' z' dm - \int y' z' dm$ s'opposent à ce que ce nouvel axe soit un axe principal: or x'', y'', z'' ne diffèrent de x', y', z' que de quantités de l'ordre ρ , puisque leur différence est due à l'écart du second axe de rotation du premier, écart qui serait nul avec ρ , et qui est par conséquent de l'ordre ρ . Les valeurs des fonctions précédentes sont donc de l'ordre ρ^2 . Prenons encore pour troisième axe fixe de rotation l'axe principal du corps formé par le sphéroïde terrestre et par la mer dans son second état d'équilibre. Ce troisième axe ne s'écartera du second que d'une quantité de l'ordre ρ^2 , car les valeurs qu'il faut détruire par un déplacement du second axe pour en former un axe principal étant de cet ordre, ce déplacement sera du même ordre. Soient x''', y''', z''' les coordonnées d'une molécule dm de la mer dans son second état d'équilibre et rapportées au troisième axe de rotation. Soient, de plus, x''', y''', z''' les coordonnées de cette molécule dans le troisième état d'équilibre; les valeurs des fonctions $\int x'' y'' dm - \int x'' y'' dm$, $\int x'' z'' dm - \int x'' z'' dm$, $\int y'' z'' dm - \int y'' z'' dm$ s'opposent à ce que le troisième axe de rotation soit un axe principal. Mais l'écart de ce troisième axe du second n'étant que de l'ordre ρ^2 , x''', y''', z''' ne diffèrent de x'', y'', z'' que de quantités de cet ordre; les valeurs des fonctions précédentes sont donc de l'ordre ρ^3 . En continuant ainsi, on voit que ces fonctions décroissent sans cesse, et qu'à leurs limites l'axe de rotation devient un axe principal, la mer étant en équilibre, ce qui démontre la possibilité d'un pareil axe. Son existence est prouvée par toutes les observations astronomiques suivant lesquelles les hauteurs du pôle sont invariables, et qui, de plus, font voir que les mouvements primitifs de

cet axe sont depuis longtemps anéantis, et que la durée du jour moyen, prise généralement pour étalon de temps, est constante. Je n'ai point eu égard aux variations de la rotation, dues aux passages de la mer d'un état d'équilibre à un nouvel état d'équilibre. Ces variations ne pouvant être que de l'ordre $\alpha\rho$, la variation qui en résulte dans la force centrifuge et, par conséquent, dans la figure de la mer, est de l'ordre $\alpha^2\rho$, quantité que nous avons négligée.



LA FIGURE DE LA TERRE.

LA FIGURE DE LA TERRE.

LA FIGURE DE LA TERRE.



ADDITION AU MÉMOIRE

SUR

LA FIGURE DE LA TERRE.

Mémoires de l'Académie des Sciences, II^e Série, T. III, 1818; 1820.

Les expériences multipliées du pendule ont fait voir que l'accroissement de la pesanteur suit une marche fort régulière et, à très peu près, proportionnelle au carré du sinus de la latitude. Cette force étant la résultante des attractions de toutes les molécules terrestres, ses observations comparées à la théorie de l'attraction des sphéroïdes offrent le seul moyen qui puisse nous faire pénétrer dans la constitution intérieure de la Terre; et, sous ce rapport, elles sont très importantes pour l'avancement de la Géologie. J'ai publié sur cet objet, dans le Volume précédent (*), un théorème fondé sur une propriété remarquable de l'attraction que les corps placés à la surface d'une sphère exercent sur un point situé près de cette surface.

Si l'on imagine un fluide très rare et qui, en s'élevant à une petite hauteur, enveloppe la Terre entière et ses montagnes, ce fluide prendra un état d'équilibre, et j'ai fait voir, dans le Volume cité, que les points de sa surface extérieure seront tous également élevés au-dessus de la mer. Les points intérieurs des continents, autant abaissés que ceux de la surface de la mer, au-dessous de la surface extérieure du fluide supposé, forment par leur continuité ce que je nomme *niveau prolongé de la mer*. La hauteur d'un point des continents au-dessus de ce niveau sera déterminée par la différence de pression du fluide à ce point et au niveau de la mer, différence que

(*) Voir le Mémoire qui précède.

les observations du baromètre feront connaître, car notre atmosphère, supposée réduite partout à sa densité moyenne, devient le fluide que nous venons d'imaginer.

Cela posé, concevons que la Terre soit un sphéroïde homogène d'une forme quelconque et recouvert en partie par la mer. Si l'on prend pour unité la longueur du pendule à secondes à l'équateur, et si à la longueur de ce pendule, observée à un point quelconque de la surface du sphéroïde terrestre, on ajoute la moitié de la hauteur de ce point au-dessus du niveau de l'océan, hauteur que donne l'observation barométrique, l'accroissement de cette longueur ainsi corrigée sera égal au produit du carré du sinus de la latitude par $\frac{1}{2}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur ou par $\frac{43}{10000}$.

Ce théorème est vrai à très peu près, quelles que soient la densité de la mer et la manière dont elle recouvre en partie la Terre, dans le cas même où la surface des continents serait discontinue et formée de plusieurs surfaces tangentes les unes aux autres : il s'étend aux plateaux élevés, un peu vastes, pourvu qu'ils soient de même densité que le sphéroïde terrestre. Enfin, il n'est point sensiblement altéré par l'attraction des montagnes éloignées. Il me paraît mériter d'autant plus l'attention des analystes, que, dans tous ces cas où il donne une expression si simple de la pesanteur, il est impossible de déterminer la figure de la mer.

Les expériences du pendule faites dans les deux hémisphères s'accordent à donner au carré du sinus de la latitude un coefficient qui surpasse $\frac{43}{10000}$ et à peu près égal à $\frac{34}{10000}$; il est donc bien prouvé, par ces expériences, que la Terre n'est point homogène dans son intérieur et que les densités de ses couches croissent de la surface au centre.

Mais la Terre, hétérogène dans le sens mathématique, serait homogène dans le sens chimique si l'accroissement de la densité de ses couches n'était dû qu'à l'accroissement de la pression qu'elles éprouvent à mesure qu'elles sont plus près du centre. On conçoit, en effet, que le poids immense des couches supérieures peut augmenter con-

sidérablement leur densité, dans le cas même où elles ne seraient pas fluides, car on sait que les corps solides se compriment par leur propre poids. La loi des densités résultantes de ces compressions étant inconnue, nous ne pouvons pas savoir jusqu'à quel point la densité des couches terrestres peut ainsi s'accroître. La densité d'un gaz quelconque est proportionnelle à sa compression lorsque sa température reste la même. Cette loi, trouvée juste dans les limites de densité des gaz où l'on a pu l'éprouver, ne peut évidemment convenir aux liquides et aux solides dont la densité est très grande relativement à celle des gaz, lorsque la pression est très petite ou nulle. Il est naturel de penser que ces corps résistent d'autant plus à la compression qu'ils sont plus comprimés ; en sorte que le rapport de la différentielle de la pression à celle de la densité, au lieu d'être constant, comme dans les gaz, croît avec la densité : la fonction la plus simple qui puisse représenter ce rapport est la première puissance de la densité multipliée par une constante. C'est celle que j'ai adoptée, parce qu'elle réunit à l'avantage de représenter de la manière la plus simple ce que nous savons sur la compression des liquides et des solides, celui de se prêter facilement au calcul dans la recherche de la figure de la Terre. Jusqu'ici les géomètres n'ont point fait entrer dans cette recherche l'effet résultant de la compression des couches. M. Young vient d'appeler leur attention sur cet objet, par la remarque ingénieuse que l'on peut expliquer de cette manière l'accroissement de densité des couches du sphéroïde terrestre. J'ai pensé que l'on verrait avec intérêt l'analyse suivante, de laquelle il résulte qu'il est possible de satisfaire ainsi à tous les phénomènes connus dépendant de la loi de densité de ces couches. Ces phénomènes sont : les variations des degrés des méridiens et de la pesanteur ; la précession des équinoxes ; la nutation de l'axe terrestre ; les inégalités que l'aplatissement de la Terre produit dans le mouvement de la Lune ; enfin le rapport de la moyenne densité de la Terre à celle de l'eau, rapport que Cavendish a fixé, par une belle expérience, à $5\frac{1}{2}$. En partant de la loi précédente sur la compression des liquides et des solides, je trouve

que, si la Terre était entièrement formée d'eau, son aplatissement serait $\frac{1}{999}$; le coefficient du carré du sinus de la latitude, dans l'expression de la longueur du pendule à secondes, serait $\frac{59}{10000}$, et la densité moyenne de la Terre serait neuf fois celle de l'eau. Tous ces résultats s'écartent des observations au delà des limites des erreurs dont elles sont susceptibles.

Si l'on suppose la Terre formée d'une substance homogène dans le sens chimique, dont la densité soit 2; de celle de l'eau commune, et qui, comprimée par une colonne verticale de sa propre substance, égale à la millionième partie du demi-axe terrestre, augmente en densité de 5,5345 millionièmes de sa densité primitive, on satisfait à tous les phénomènes que je viens de citer. L'existence d'une telle substance est très admissible et il y en a vraisemblablement de pareilles à la surface de la Terre. Au reste, je suis loin d'affirmer que ce cas soit celui de la nature; il est même probable, vu la grande variété des substances qui sont à la surface de la Terre, que, dans l'intérieur de cette planète, il en existe semblablement un grand nombre qui n'ont pu être disposées régulièrement autour de son centre de gravité que dans un état primitif de fluidité due à une chaleur excessive. Mais l'hypothèse d'une substance unique, dont les couches ne varient en densité que par la compression qu'elles éprouvent, n'offrant rien d'impossible, elle m'a paru digne de l'attention des géomètres.

Je suppose la température uniforme dans toute l'étendue du sphéroïde terrestre; mais il est possible que la chaleur soit plus grande vers le centre, et cela serait ainsi dans le cas où la Terre, douée primitivement d'une grande chaleur, se refroidirait continuellement. L'ignorance où nous sommes de la constitution intérieure de cette planète ne nous permet pas de calculer la loi de ce refroidissement et la diminution qui en résulte dans la température moyenne des climats; mais nous pouvons établir d'une manière certaine que cette diminution est insensible depuis deux mille ans.

Imaginons, dans un espace d'une température constante, une sphère douée d'un mouvement de rotation; concevons ensuite qu'après un

long temps la température de l'espace diminue d'un degré; la sphère finira par prendre ce nouveau degré de température: sa masse n'en sera point altérée, mais ses dimensions diminueront d'une quantité que je suppose être 1 cent-millième, ce qui a lieu à peu près pour le verre. En vertu du principe des aires, la somme des aires que chaque molécule de la sphère décrit autour de son axe de rotation sera, dans un temps donné, la même qu'auparavant. Il est facile d'en conclure que la vitesse angulaire de rotation sera augmentée de 1 cinquante-millième. Ainsi, en supposant que la durée de la rotation soit d'un jour ou de cent mille secondes décimales, elle sera diminuée de deux secondes par la diminution d'un degré dans la température de l'espace. Si l'on étend cette conséquence à la Terre, et si l'on considère que la durée du jour n'a pas varié, depuis Hipparque, d'un centième de seconde, comme je l'ai fait voir par la comparaison des observations avec la théorie de l'équation séculaire de la Lune, on jugera que, depuis cette époque, la variation de la chaleur intérieure de la Terre est insensible. A la vérité, la dilatation, la chaleur spécifique, la perméabilité plus ou moins grande à la chaleur et la densité des diverses couches du sphéroïde terrestre, toutes choses inconnues, peuvent mettre une différence sensible entre les résultats relatifs à la Terre et ceux de la sphère que nous venons de considérer, suivant lesquels une diminution d'un centième de seconde dans la durée du jour répond à une diminution d'un deux-centième de degré dans la température; mais cette différence ne peut jamais élever d'un deux-centième de degré à un dixième la perte de la chaleur terrestre, correspondante à la diminution d'un centième de seconde dans la durée du jour. On voit même que la diminution d'un centième de degré près de la surface suppose une diminution plus grande dans la température des couches inférieures, car on sait qu'à la longue la température de toutes les couches diminue suivant la même progression géométrique; en sorte que la diminution d'un degré près de la surface répond à des diminutions plus grandes dans les couches plus voisines du centre. Les dimensions de la Terre et son moment d'inertie diminuent donc

plus que dans le cas de la sphère que nous avons imaginée. Il suit de là que, si dans la suite des temps l'on observe quelques changements dans la hauteur moyenne du thermomètre placé au fond des caves de l'Observatoire, il faudra l'attribuer, non à une variation dans la température moyenne de la Terre, mais à un changement dans le climat de Paris, dont la température peut varier par beaucoup de causes accidentelles. Il est remarquable que la découverte de la vraie cause de l'équation séculaire de la Lune nous fasse connaître en même temps l'invariabilité de la durée du jour et celle de la température de la Terre, depuis l'époque des plus anciennes observations.

Je reprends l'équation (1) du n° 29 du Livre III de la *Mécanique céleste*; en la différentiant et ne comparant que les termes constants de ses deux membres, on aura

$$\frac{d\Pi}{\rho} = -\frac{4\pi da}{a^3} \int \rho a^2 da.$$

Il est ici la pression à la surface d'une courbe de niveau du sphéroïde terrestre dont le rayon est a ; ρ est la densité de cette couche, et π est le rapport de la circonférence au diamètre. L'intégrale doit être prise depuis $a = 0$. Maintenant, si l'on suppose $d\Pi = 2k\rho d\rho$, k étant une constante, on aura

$$\Pi = k\rho^2 - k(\rho')^2;$$

(ρ') étant la densité à la surface où Π est nul; l'équation précédente donnera donc

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{n^2}{a^2} \int \rho a^2 da,$$

en faisant $n^2 = \frac{2\pi}{k}$. Supposons $\rho' = a\rho$, on aura

$$a^2 d\rho = a d\rho' - \rho' da;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$\frac{a d\rho'}{da} - \rho' = -n^2 \int a \rho' da.$$

En différentiant, on aura

$$\frac{d^2 \rho'}{da^2} + a^2 \rho' = 0.$$

L'intégrale de cette équation est

$$\rho' = A \sin an + B \cos an,$$

A et B étant deux constantes arbitraires; on aura donc

$$\rho = \frac{A}{a} \sin an + \frac{B}{a} \cos an.$$

La densité n'étant point infinie au centre où a est nul, on a

$$B = 0,$$

par conséquent

$$\rho = \frac{A}{a} \sin an.$$

Telle est donc la loi de densité des couches du sphéroïde terrestre relative à la loi supposée entre la pression et la densité. A la surface de la Terre, où nous supposons $a = 1$, on a

$$\rho = A \sin n, \\ \frac{d\rho}{da} = -A \sin n \left(1 - \frac{n}{\tan n}\right).$$

En faisant donc à cette surface

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{\rho}{\rho'} = q,$$

on aura

$$(a) \quad q = 1 - \frac{n}{\tan n}.$$

Si l'on nomme D la moyenne densité de la Terre, on aura

$$\int \rho a^3 da = D \int a^3 da = \frac{1}{4} D.$$

Or l'équation

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{n^2}{a^2} \int \rho a^2 da$$

donne à la surface

$$q\rho = n^2 \int \rho a^2 da;$$

on a donc

$$(h) \quad \frac{D}{\rho} = \frac{3q}{n^2},$$

$\frac{D}{\rho}$ étant le rapport de la densité moyenne de la Terre à la densité de la couche à sa surface. Cette équation, combinée avec l'équation (a), donnera q et $\frac{D}{\rho}$ lorsque l'une de ces deux quantités sera connue.

Mais il existe deux autres éléments que les observations font connaître, et qui, dépendant comme q et D de la loi de densité des couches du sphéroïde terrestre, sont liés aux quantités précédentes. L'un de ces éléments est l'ellipticité du sphéroïde. Si l'on nomme h l'ellipticité de la couche du sphéroïde dont le rayon est a et la densité ρ , on a, par le n° 30 du Livre cité,

$$\frac{d^2 h}{da^2} - \frac{6h}{a^2} + \frac{2\rho a}{\int \rho a^2 da} - \frac{a dh + h da}{da} = 0.$$

Si l'on met cette équation sous la forme

$$0 = \frac{d^2(h \int \rho a^2 da)}{da^2} - \frac{6h \int \rho a^2 da}{a^2} - \frac{ha^2 d\rho}{da},$$

et si, au lieu de

$$\frac{d\rho}{da},$$

on substitue sa valeur

$$-\frac{n^2}{a^2} \int \rho a^2 da,$$

on aura

$$0 = \frac{d^2(h \int \rho' a da)}{da^2} - \frac{6h \int \rho' a da}{a^2} + n^2 h \int \rho' a da.$$

Il est facile de voir que l'on satisfait à cette équation en faisant

$$h \int \rho' a da = B\rho' \left(1 - \frac{3}{n^2 a^2}\right) + \frac{3B}{n^2 a} \frac{d\rho'}{da},$$

B étant une arbitraire, et en observant que $\frac{d^2 \rho'}{da^2} = -n^2 \rho'$. Cette expression donne, en substituant pour ρ' sa valeur $A \sin an$,

$$h = B \left(\frac{n^2 \tan an}{\tan an - na} - \frac{3}{a^2} \right),$$

expression qui devient nulle au centre. On voit, par le n° 30 du Livre cité, que cette expression de h est la seule admissible dans la question présente; par le même numéro, l'ellipticité de la Terre est à la surface, où $a = 1$,

$$\frac{\alpha q h \int \rho' a da}{2 h \int \rho' a da - \frac{1}{2} a^2 h \rho + \frac{1}{2} \int a^2 h d\rho},$$

les intégrales étant prises depuis a nul; αq est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur. Substituant, au lieu de $h d\rho$, $-\frac{hn^2}{a^2} da \int \rho' a da$, et, au lieu de $h \int \rho' a da$, sa valeur précédente, on aura

$$\int a^2 h d\rho = -n^2 B \int a^2 \left(\rho' - \frac{3\rho'}{n^2 a^2} + \frac{3d\rho'}{n^2 a da} \right) da;$$

on aura facilement cette intégrale, en observant que l'on a généralement

$$\int a^2 \rho' da = -\frac{1}{n^2} \int a^2 \frac{d^2 \rho'}{da^2} da,$$

et en intégrant par parties. On trouvera ainsi à la surface de la Terre, où $a = 1$, l'ellipticité égale à

$$\frac{\frac{1}{2} \alpha q \left(1 - \frac{3q}{n^2}\right)}{3 - q - \frac{n^2}{q}}.$$

Je dois observer ici que M. Legendre a déjà déterminé l'aplatissement de la Terre, dans le cas où la densité ρ des couches est exprimée par $\frac{A}{a} \sin an$ (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1789).

En combinant les phénomènes de la précession et de la nutation avec les inégalités lunaires dépendantes de l'aplatissement de la Terre et avec les observations des degrés des méridiens et de la pesanteur,

je suis parvenu, dans le Tome II des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences* (*), à cette équation

$$\frac{\int \rho da^3}{\int \rho da^3} = \frac{0,00153}{0,001736}.$$

Cette équation suppose le rapport de la masse de la Lune, divisée par le cube de sa moyenne distance à la Terre, à la masse du Soleil, divisée par le cube de sa moyenne distance, égal à 2,57. Mais, si ce rapport était $3,57i - 1$, i étant une indéterminée, on aurait

$$\frac{\int \rho da^3}{\int \rho da^3} = \frac{i \cdot 0,00153}{0,001736}.$$

Or, on a

$$\frac{\int \rho a^3 da}{\int \rho a^3 da} = 1 + \frac{2}{q} - \frac{6}{n^3},$$

on aura donc

$$1 + \frac{2}{q} - \frac{6}{n^3} = i \cdot 0,052880.$$

On a ainsi les quatre équations suivantes :

$$q = 1 - \frac{n}{\tan g n},$$

$$D = \frac{3q}{n^2},$$

$$\text{ellipticité de la Terre} = \frac{0,00865 \left(1 - \frac{3q}{n^2} \right)}{3 - q - \frac{n^2}{q}},$$

$$1 + \frac{2}{q} - \frac{6}{n^3} = i \cdot 0,052880.$$

Si l'on suppose $n = \frac{2}{3}\pi$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre, on aura

$$q = 5,5345,$$

$$\frac{D}{\rho} = 2,4225,$$

$$\text{ellipticité} = \frac{1}{306,6},$$

$$i = 0,919;$$

(*) Voir, plus haut, p. 443.

le rapport de la densité du centre à celle de la surface sera $\frac{2}{3}\pi$ ou 5,236, et la nutation en secondes sexagésimales sera $9'',32$. L'ellipticité précédente satisfait à l'ensemble des observations des degrés, de la pesanteur et des inégalités lunaires dépendantes de l'aplatissement de la Terre. La nutation $9'',30$ est, à fort peu près, celle qui résulte des observations de la hauteur et de l'ascension droite de l'étoile polaire. En supposant, conformément à l'expérience de Cavendish, le rapport de la moyenne densité de la Terre à celle de l'eau égal à 5,5, la densité de la couche de la surface sera 2,27, celle de l'eau étant prise pour unité.

Si la Terre était entièrement formée d'eau, en supposant, conformément aux expériences de Canton, que, à la température de 16°C ., elle augmente, en densité, de 44 millionièmes, sous la pression d'une colonne d'eau de 10^m , on a

$$q = 28,012,$$

d'où l'on tire

$$n = 3,02970,$$

$$\frac{D}{\rho} = 9,0479,$$

$$\text{ellipticité} = \frac{1}{359,54};$$

le coefficient du carré du sinus de la latitude, dans l'expression de la longueur du pendule à secondes, la longueur à l'équateur étant prise pour unité, est égal à 0,00587; enfin la nutation est, en secondes sexagésimales, $8'',6$. Tous ces résultats s'éloignent des observations, au delà des limites des erreurs dont elles sont susceptibles.



MÉMOIRE

SUR

LE FLUX ET LE REFLUX DE LA MER.



MÉMOIRE

SUR

LE FLUX ET LE REFLUX DE LA MER.

Mémoires de l'Académie des Sciences, II^e Série, Tome III, année 1818; 1820.

Ce phénomène mérite particulièrement l'attention des observateurs, en ce qu'il est le résultat de l'action des astres, le plus près de nous et le plus sensible, et que les nombreuses variétés qu'il présente sont très propres à vérifier la loi de la pesanteur universelle. Sur l'invitation de l'Académie des Sciences, on fit, au commencement du dernier siècle, dans le port de Brest, une suite d'observations qui furent continuées pendant six années consécutives et dont la plus grande partie a été publiée par Lalande, dans le quatrième Volume de son *Astronomie*. La situation de ce port est très favorable à ce genre d'observations : il communique avec la mer par un canal fort vaste, au fond duquel le port a été construit. Les irrégularités de la mer parviennent ainsi, dans ce port, très affaiblies, à peu près comme les oscillations que le mouvement irrégulier d'un vaisseau produit dans le baromètre sont atténuées par un étranglement fait au tube de cet instrument. D'ailleurs, les marées étant considérables à Brest, les variations accidentelles n'en sont qu'une faible partie : aussi l'on remarque dans les observations de ces marées, pour peu qu'on les multiplie, une grande régularité que ne doit point altérer la petite rivière qui vient se perdre dans la rade immense de ce port. Frappé de cette régularité, je priai le Gouvernement d'ordonner que l'on fit, à Brest, une nouvelle suite d'observations des marées, pendant une période entière du mouve-

ment des nœuds de l'orbe lunaire. C'est ce que l'on a bien voulu entreprendre. Ces nouvelles observations datent du 1^{er} juin de l'année 1806, et depuis cette époque elles ont été continuées sans interruption jusqu'à ce jour. Elles laissent encore à désirer : elles ne se rapportent ni au même endroit du port, ni à la même échelle. Les observations des cinq premières années ont été faites au lieu du port que l'on nomme *la mâtire*; les autres l'ont été près du bassin; mais le peu de distance de ces deux endroits n'a dû produire que de très légères différences, et j'ai reconnu par les observations que ces différences sont insensibles. Cependant, il vaudrait mieux faire les observations dans le même point et avec la même échelle. Il est temps enfin d'observer ce genre de phénomènes avec autant de soin que les phénomènes astronomiques.

J'ai considéré, dans ces nouvelles observations, celles de l'année 1807 et des sept années suivantes. J'ai choisi dans chaque équinoxe et dans chaque solstice les trois syzygies et les trois quadratures les plus voisines de l'équinoxe et du solstice. Dans les syzygies, j'ai pris l'excès de la haute mer du soir sur les basses mers du matin, du jour qui précède la syzygie, du jour même de la syzygie et des quatre jours qui la suivent, parce que la plus haute mer arrive vers le milieu de cet intervalle. J'ai fait une somme des excès correspondants à chaque jour, en doublant les excès relatifs à la syzygie intermédiaire, ou la plus voisine de l'équinoxe ou du solstice. Par ce procédé, les effets des variations des distances du Soleil et de la Lune à la Terre se trouvent détruits; car, si la Lune était, par exemple, vers son périgée, dans la syzygie intermédiaire, elle était vers son apogée dans les deux syzygies extrêmes. Les sommes d'excès qu'on obtient ainsi sont donc, à fort peu près, indépendantes des variations du mouvement et de la distance des astres. Elles le sont encore des inégalités des marées, différentes de l'inégalité dont la période est d'environ un demi-jour, et qui, dans nos ports, est beaucoup plus grande que les autres : car, en considérant à la fois les observations des deux équinoxes et des deux solstices, les effets de la petite inégalité dont la période est à peu près d'un jour se détruisent mutuellement; les sommes dont il s'agit sont donc unique-

ment dues à la grande inégalité. Les vents doivent avoir sur elles peu d'influence; car, s'ils élèvent la haute mer, ils doivent également soulever la basse mer. J'ai déterminé la loi de ces sommes pour chaque année, en observant que leur variation est, à fort peu près, proportionnelle au carré de leur distance en temps, au maximum; ce qui m'a donné l'intervalle dont ce maximum suit la moyenne des marées syzygies et le coefficient du carré du temps. Le peu de différence que présentent, à l'égard de ce coefficient, les résultats des observations de chaque année prouve la régularité de ces observations.

J'ai considéré de la même manière les marées quadratures en prenant les excès de la haute mer du matin sur la basse mer du soir, du jour même de la quadrature et des trois jours qui la suivent. L'accroissement des marées, à partir du minimum, étant beaucoup plus rapide que leur diminution à partir du maximum, j'ai dû restreindre à un plus petit intervalle la loi de variation proportionnelle au carré du temps.

Dans tous ces résultats, l'influence de la déclinaison des astres sur les hauteurs des marées et sur la loi de leur variation dans les syzygies et dans les quadratures se montre avec évidence. En considérant, par la même méthode, neuf syzygies équinoxiales vers le périgée de la Lune, et neuf syzygies équinoxiales vers son apogée, l'influence des changements de la distance lunaire sur la hauteur et sur la loi de variation des marées se manifeste avec la même évidence. C'est ainsi que, en combinant les observations de manière à dégager l'élément que l'on veut connaître de tout ce qui lui est étranger, on parvient à démêler les lois des phénomènes, confondues dans les recueils d'observations.

Les résultats des observations étant toujours susceptibles d'erreurs, il est nécessaire de connaître la probabilité que ces erreurs sont contenues dans des limites données. On sent, il est vrai, que la probabilité restant la même, ces limites sont d'autant plus rapprochées, que les observations sont plus nombreuses et plus concordantes entre elles. Mais cet aperçu général ne suffit pas pour assurer l'exactitude des résultats des observations et l'existence des causes régulières

qu'elles paraissent indiquer : quelquefois même il a fait rechercher la cause de phénomènes qui n'étaient que des accidents du hasard. Le Calcul des probabilités peut seul faire apprécier ces objets, ce qui rend son usage de la plus haute importance dans les sciences physiques et morales. Les recherches précédentes m'offraient une occasion trop favorable d'appliquer à l'un des grands phénomènes de la nature les nouvelles formules auxquelles je suis parvenu dans ma Théorie analytique des probabilités pour ne pas la saisir. J'expose donc ici l'application que j'en ai faite aux lois de la variation des hauteurs et des intervalles des marées syzygies et quadratures, et à l'influence qu'exercent, à leur égard, les déclinaisons des astres. On verra que ces lois sont déterminées par les observations avec une précision très remarquable, ce qui explique l'accord des résultats des observations modernes avec ceux des observations faites, il y a plus d'un siècle, dans le port de Brest, et que j'ai discutées dans le quatrième Livre de la *Mécanique céleste*. On sentira l'utilité de cette application du Calcul des probabilités, si l'on considère que plusieurs savants, et spécialement Lalande, pour n'avoir pas soumis à ce calcul l'ensemble des observations, et pour s'être attachés à quelques observations partielles où les marées, vers les solstices, s'étaient fort élevées par le concours de causes accidentelles, ont révoqué en doute l'influence des déclinaisons des astres dans ces phénomènes, influence indiquée à la fois par les hauteurs des marées et par les lois de leur variation, avec une probabilité bien supérieure à celle de la plupart des choses sur lesquelles on ne se permet aucun doute.

Je compare ensuite tous ces résultats à la théorie de la pesanteur universelle. Celle que j'ai donnée dans le Livre cité est fondée sur le principe suivant de Dynamique, qui peut être utile dans tous les cas où les circonstances sont trop compliquées pour être soumises au calcul. *L'état d'un système de corps dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances qu'il éprouve est périodique comme les forces qui l'animent.* En réunissant ce principe à celui de la coexistence des oscillations très petites, je suis parvenu à une expres-

sion de la hauteur des marées, dont les arbitraires comprennent l'effet des circonstances locales du port. Pour cela, j'ai réduit en séries de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, l'expression génératrice des forces lunaires et solaires sur l'océan. Chaque terme de la série peut être considéré comme représentant l'action d'un astre particulier qui se meut uniformément, et à une distance constante, dans le plan de l'équateur. De là naissent plusieurs espèces de flux partiels dont les périodes sont à peu près d'un demi-jour, d'un jour, d'une demi-année, d'une année, enfin de dix-huit ans et demi, durée du mouvement périodique des nœuds de l'orbe lunaire. En suivant cette idée, que j'ai exposée dans le n° 19 du Livre IV de la *Mécanique céleste*, je parviens ici à des formules plus exactes encore que celles dont j'ai fait usage dans le Livre cité.

J'ai comparé ces nouvelles formules aux observations faites dans le port de Brest, et j'ai trouvé entre elles un parfait accord. Il était curieux de voir si les constantes arbitraires déterminées par cette comparaison se retrouvent les mêmes que celles qui résultent des observations faites il y a plus d'un siècle, ou si elles ont éprouvé des altérations par les changements que les opérations de la nature et de l'art ont pu produire dans ce long intervalle, au fond de la mer, dans le port et sur les côtes adjacentes. Il résulte de cet examen que les hauteurs actuelles des marées surpassent de $\frac{1}{11}$ environ les hauteurs déterminées par les observations anciennes; mais, ces observations n'ayant point été faites au même lieu que les observations modernes, cette considération, jointe à l'incertitude de la graduation de l'ancienne échelle, ne permet pas de prononcer sur ce point qui doit fixer, à l'avenir, l'attention des observateurs. Du reste, les observations anciennes et modernes présentent l'accord le plus satisfaisant, soit entre elles, soit avec la théorie de la pesanteur, par rapport aux variations des hauteurs des marées, dépendantes des déclinaisons et des distances des astres à la Terre, et par rapport aux lois de leur accroissement et de leur diminution, à mesure qu'elles s'éloignent de leur minimum et de leur maximum. Je n'avais point considéré, dans la *Mé-*

canique céleste, ces lois, relativement aux variations des distances de la Lune à la Terre. Ici je les considère, et je trouve le même accord entre l'observation et la théorie.

Le retard des plus grandes et des plus petites marées sur les instants des syzygies et des quadratures a été observé par les anciens, comme on le voit dans Plin le Naturaliste. Daniel Bernoulli, dans sa Pièce sur le flux et le reflux de la mer, couronnée en 1740 par l'Académie des Sciences, attribue ce retard à l'inertie des eaux, et peut-être encore, ajoute-t-il, au temps que l'action de la Lune, emploie à se transmettre à la Terre. Mais j'ai prouvé, dans le Livre IV de la *Mécanique céleste*, que, en ayant égard à l'inertie des eaux, les plus grandes marées coïncideraient avec les syzygies, si la mer recouvrait régulièrement la Terre entière. Quant au temps de la transmission de l'action de la Lune, j'ai reconnu, par l'ensemble des phénomènes célestes, que l'attraction de la matière se transmet avec une vitesse incomparablement supérieure à la vitesse même de la lumière. Il faut donc chercher une autre cause du retard dont il s'agit.

J'ai fait voir, dans le Livre cité, que ce phénomène dépend de la rapidité du mouvement de l'astre dans son orbite, combinée avec les circonstances locales du port. Nous aurons une idée juste de l'influence de ces causes, en imaginant un vaste canal communiquant avec la mer, et s'avancant dans les terres sous le méridien de son embouchure. Si l'on suppose le Soleil et la Lune mus dans le plan de l'équateur, et qu'à l'embouchure la pleine mer, arrivant à l'instant même du passage de l'astre au méridien, emploie un demi-jour à parvenir à l'extrémité du canal, il est visible qu'à ce dernier point tous les phénomènes qui ont lieu à l'embouchure se reproduisent après un demi-jour. Ainsi les maxima et les minima des marées n'auront lieu qu'un demi-jour après la syzygie et la quadrature. Si le flux lunaire, à raison de sa grandeur, mettait un trentième de jour moins que le flux solaire à parcourir le canal, le maximum à l'extrémité du canal arrivant lorsque les deux flux partiels solaire et lunaire coïncident, il correspondrait au cas où la Lune traverse le méridien, un trentième de

jour après le Soleil, ce qui suit d'un jour à peu près la syzygie. En l'ajoutant au demi-jour que la marée solaire est supposée employer à parcourir le canal, on aurait un jour et demi pour le temps dont le maximum de la marée suivrait la syzygie à son extrémité.

Concevons maintenant que le port soit au point de jonction de deux canaux, dont les embouchures soient très peu distantes entre elles. Supposons que la marée solaire emploie un quart de jour à parcourir le premier canal, et un jour et demi à parcourir le second. Il est clair que la basse mer solaire du premier canal correspond alors à la haute mer du second; et si, à l'extrémité commune des deux canaux, les deux marées sont d'égale grandeur, la mer y sera stationnaire, à ne considérer que l'action du Soleil; mais, le jour lunaire surpassant le jour solaire de 0,035, la basse mer lunaire du premier canal ne correspondra point à la haute mer lunaire du second canal; les deux flux partiels lunaires ne se détruiront point mutuellement, et leur différence pourra être augmentée par leurs mouvements propres dans les canaux; il y aura donc un flux lunaire sensible à leurs extrémités. Le rapport de l'action solaire à l'action lunaire qui, dans le port de Brest, est à très peu près un tiers, sera donc nulle à cette extrémité. On voit par là que les circonstances locales peuvent influer considérablement sur le rapport des actions des deux astres sur la mer. J'ai donné, dans le Livre cité de la *Mécanique céleste*, une méthode pour déterminer par les observations l'accroissement que le rapport de l'action de la Lune à celle du Soleil reçoit des circonstances locales. En comparant les marées équinoxiales et solsticiales, observées à Brest, dans les syzygies et dans les quadratures, je fus conduit, par cette méthode, à un accroissement d'un dixième dans ce rapport; mais je remarquai qu'un élément aussi délicat devait être déterminé par un plus grand nombre d'observations. L'ensemble des observations modernes m'a prouvé cet avantage. Ces observations, deux fois plus nombreuses que les anciennes, confirment l'accroissement dont il s'agit et le portent à un neuvième, en sorte que son existence est très vraisemblable. En appliquant à cet objet les formules de probabilité, je trouve que la

probabilité de cet accroissement est $\frac{2581}{2182}$ par les seules observations modernes. Ainsi la réunion de ces observations avec les anciennes ne doit laisser aucun doute à cet égard. Pour conclure des phénomènes des marées le vrai rapport des actions du Soleil et de la Lune, il faut corriger de cet accroissement l'action lunaire. Alors on a $\frac{1}{25}$ environ pour la masse de la Lune, celle de la Terre étant prise pour unité, d'où il est facile de conclure les valeurs des phénomènes astronomiques qui dépendent de cette masse. Mais, en considérant la petitesse des quantités qui m'ont servi à déterminer l'accroissement de l'action lunaire, et en réfléchissant que ces quantités sont du même ordre que les petites erreurs dont l'application du principe de la coexistence des ondulations très petites aux phénomènes des marées est susceptible, je n'ose garantir l'exactitude de cette valeur de la masse lunaire, et j'incline à penser que les phénomènes astronomiques sont plus propres à la fixer.

J'ai déterminé pareillement les heures et les intervalles des marées dans les syzygies et dans les quadratures, vers les équinoxes et les solstices, et dans l'apogée et le périée de la Lune. L'influence des déclinaisons et des distances des astres est indiquée par ces observations avec une extrême probabilité dont je détermine la valeur : j'ai retrouvé les mêmes résultats que m'avait donnés la discussion des observations anciennes et le même accord de ces résultats avec la théorie. Les intervalles des marées peuvent servir à déterminer le rapport des actions de la Lune et du Soleil sur la mer. On conçoit, en effet, que plus l'action lunaire l'emporte sur l'action solaire, plus l'intervalle journalier des marées se rapproche du jour lunaire. Le retard observé des marées syzygies donne, à fort peu près, le même rapport que le retard des marées quadratures ; le milieu de ces rapports est 3,14782. Les hauteurs des marées donnent, pour ce rapport, 2,88347. La différence, quoique assez petite, ne me paraît pas devoir être attribuée aux seules erreurs des observations, et je pense qu'une partie de cette différence vient de l'erreur de l'hypothèse de la coexistence des oscillations, qui ne peut plus être considérée comme très approchée quand

les ondulations, comme celles de la mer à Brest, sont considérables. L'intervalle moyen des marées est exactement la durée moyenne du jour lunaire, en sorte que, dans nos ports, il y a autant de marées que de passages de la Lune au méridien. On peut donc considérer le flux et le reflux de la mer comme un phénomène lunaire, modifié par l'action solaire, qui rend les intervalles des flux consécutifs alternativement plus grands et plus petits que la durée d'un demi-jour lunaire, et les hauteurs des marées alternativement plus petites et plus grandes que les hauteurs dues à l'action seule de la Lune.

Des hauteurs des marées.

I. J'ai considéré les syzygies équinoxiales suivantes :

1807...	9 mars	23 mars	8 avril	2 septembre	16 septembre	1 ^{er} octobre
1808...	12 "	27 "	10 "	4 "	20 "	4 "
1809...	2 "	15 "	31 mars	9 "	23 "	9 "
1810...	5 "	21 "	4 avril	13 "	28 "	12 "
1811...	10 "	24 "	8 "	2 "	17 "	2 "
1812...	13 "	28 "	11 "	5 "	20 "	5 "
1813...	2 "	17 "	1 "	10 "	24 "	10 "
1814...	6 "	21 "	4 "	13 "	29 "	13 "

J'ai pris dans les syzygies l'excès de la haute mer du soir sur la basse mer du matin, relatif au jour qui précède la syzygie, au jour même de la syzygie et aux quatre jours qui la suivent. J'ai fait pour chaque année une somme des excès relatifs à chacun de ces jours, en doublant les résultats correspondants à la syzygie la plus voisine de l'équinoxe, et qui est la moyenne des trois syzygies considérées dans chaque équinoxe. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants exprimés en mètres.

1807.....	^m 44,425	^m 49,020	^m 51,460	^m 50,720	^m 48,830	^m 44,070
1808.....	44,740	49,155	51,116	51,005	48,495	43,910
1809.....	44,495	48,530	50,910	51,115	49,305	44,910
1810.....	46,366	49,910	51,086	50,371	48,069	44,890
1811.....	44,205	49,030	51,290	51,110	48,865	43,895
1812.....	43,210	48,448	51,512	51,536	49,526	45,261
1813.....	45,317	49,071	51,043	50,797	49,957	43,264
1814.....	44,219	48,651	50,553	50,707	48,791	44,708

Si l'on nomme f, f', f'', f''', f'''' , les sommes des hauteurs relatives à chacun des six jours, et que l'on représente la loi de ces sommes par

$$\zeta t^3 + \zeta' t + \zeta'',$$

t étant le temps écoulé depuis la haute marée du soir du jour qui précède la syzygie, l'intervalle de deux marées consécutives du soir étant pris pour unité, on aura les six équations de condition suivantes :

$$\begin{aligned}\zeta'' &= f, \\ \zeta + \zeta' + \zeta'' &= f', \\ 4\zeta + 2\zeta' + \zeta'' &= f'', \\ 9\zeta + 3\zeta' + \zeta'' &= f''', \\ 16\zeta + 4\zeta' + \zeta'' &= f'''', \\ 25\zeta + 5\zeta' + \zeta'' &= f''''.\end{aligned}$$

Si l'on multiplie chacune de ces équations respectivement par le coefficient de ζ , et que l'on fasse la somme de ces produits; si l'on fait des sommes semblables relativement aux coefficients de ζ' et de ζ'' , ces trois sommes formeront les équations suivantes :

$$\begin{aligned}979\zeta + 225\zeta' + 55\zeta'' &= f' + 4f'' + 9f''' + 16f'''' + 25f''', \\ 225\zeta + 55\zeta' + 15\zeta'' &= f' + 2f'' + 3f''' + 4f'''' + 5f''', \\ 55\zeta + 15\zeta' + 6\zeta'' &= f + f' + f'' + f''' + f'''' + f''.\end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{10(f + f'' - f' - f''') + 2(f'' + f''' - f' - f''')}{112}, \\ \zeta' &= \frac{5(f'' - f) + 3(f'''' - f') + f'' - f''}{35} - 5\zeta, \\ \zeta'' &= \frac{f + f' + f'' + f''' + f'''' + f''}{6} - \frac{5}{2}\zeta' - \frac{55}{6}\zeta.\end{aligned}$$

Maintenant on a, le mètre étant pris pour unité,

$$\begin{aligned}f &= 356,977, & f' &= 391,815, \\ f'' &= 409,570, & f''' &= 407,385, \\ f'''' &= 391,838, & f''''' &= 353,138.\end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\zeta &= -8,9446, \\ \zeta' &= 44,114, \\ \zeta'' &= 356,828.\end{aligned}$$

L'expression $\zeta t^3 + \zeta' t + \zeta''$ ou $\zeta'' - \frac{\zeta''}{4t^2} + \zeta\left(t + \frac{\zeta'}{2\zeta}\right)^2$ des valeurs de $f, f', \dots$ devient ainsi

$$411^m,220 - 8^m,9446(t - 2,46596)^2.$$

Exprimons par t' la distance d'une haute marée du soir à l'instant de la syzygie, t' étant supposé positif pour les marées qui suivent la syzygie, et représentons par $\alpha - \epsilon t'^2$ cette haute marée. La basse marée qui la précède sera, d'après la loi de la pesanteur universelle,

$$-\alpha + \epsilon\left(t' - \frac{1}{4}\right)^2;$$

l'excès de la haute mer sur la basse mer sera donc

$$2\alpha - \frac{\epsilon}{32} - 2\epsilon\left(t' - \frac{1}{8}\right)^2.$$

Ainsi, en désignant par i le nombre des syzygies employées pour former les valeurs de $f, f', \dots$, l'expression générale de ces valeurs sera

$$(a) \quad 2i\alpha - \frac{i\epsilon}{32} - 2i\epsilon\left(t' - \frac{1}{8}\right)^2.$$

Désignons par k la valeur moyenne des quantités dont les syzygies ont précédé, dans les observations précédentes, les instants des hautes marées du soir des jours mêmes des syzygies, on aura

$$t' = t - 1 + k.$$

On a vu, dans le quatrième Livre de la *Mécanique céleste*, qu'il faut diminuer t' , d'une quantité constante que nous nommerons u ; la formule (a) devient ainsi

$$2i\alpha - \frac{2i\epsilon}{64} - 2i\epsilon\left(t - \frac{9}{8} + k - u\right)^2.$$

Cette formule doit coïncider avec celle-ci

$$(b) \quad \zeta' - \frac{\zeta'^2}{4\zeta} + \zeta \left(t + \frac{\zeta'}{2\zeta} \right)^2;$$

on a donc

$$\frac{\zeta'}{2\zeta} = -\frac{9}{8} + k - u,$$

ce qui donne

$$u = -\frac{\zeta'}{2\zeta} - \frac{9}{8} + k.$$

En substituant les valeurs précédentes de ζ' et de ζ , on a

$$u = 1,34096 + k.$$

Dans les syzygies précédentes, le retard journalier des marées a été 0,026736, en sorte que l'intervalle pris pour unité est 1,026736; on a ainsi, en parties du jour

$$1,34096 = 13,37682.$$

La valeur moyenne k dont les syzygies ont précédé les marées du soir est 0,10417; on a ainsi

$$u = 13,48099.$$

Cette valeur diffère peu de la valeur 13,50724 à laquelle je suis parvenu dans le n° 24 du Livre IV de la *Mécanique céleste*.

La comparaison des expressions (a) et (b) donne

$$2i\zeta = 8,9446,$$

$$2i\alpha = 411,359.$$

Le nombre i des syzygies employées est ici égal à 64, en comptant pour deux les syzygies intermédiaires dont on a doublé les résultats.

II. Pour que l'on puisse apprécier la régularité des résultats des observations des marées dans le port de Brest, je vais déterminer la loi de probabilité des erreurs dont la valeur précédente de $2i\zeta$ est susceptible, et pour cela je vais conclure cette valeur correspondante aux observations de chaque année. En désignant par $f, f', f'', \dots$ les

hauteurs précédentes relatives à chaque année, j'exprimerai, comme ci-dessus, la loi de ces hauteurs par la fonction $\zeta t^2 + \zeta' t + \zeta''$. En déterminant ensuite la valeur de ζ par la méthode précédente, on aura celle de $2i\zeta$; mais, comme le nombre des syzygies employées dans chaque année n'est qu'un huitième du nombre des syzygies employées dans les huit années, il faut, pour comparer cette valeur de $2i\zeta$ à la précédente, la multiplier par 8. Je trouve ainsi :

	$2i\zeta$.
1807.....	9,15643
1808.....	8,98343
1809.....	8,43286
1810.....	8,56071
1811.....	9,63071
1812.....	9,46958
1813.....	9,06900
1814.....	8,26386

Le peu de différence de ces valeurs à leur moyenne 8,9446 montre la régularité des marées dans le port de Brest. Suivant la théorie que j'ai exposée dans le second Livre de ma *Théorie analytique des probabilités*, si l'on nomme ε la somme des carrés des écarts de chacune de ces valeurs, de la moyenne, et n le nombre des années, la probabilité d'une erreur u dans cette moyenne sera proportionnelle à l'exponentielle

$$e^{-\frac{n^2 u^2}{\varepsilon}},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Cette proportionnalité est d'autant plus exacte, que n est un plus grand nombre; mais ici ce nombre est égal à huit. Le nombre total des observations employées est beaucoup plus grand, et égal à 288; car le nombre des syzygies employées dans chaque année est six, et chaque syzygie a donné six observations. Ainsi l'erreur u de ζ étant une fonction linéaire des erreurs de chaque observation, la probabilité de cette erreur sera, par le n° 20 de l'Ouvrage cité, proportionnelle à une exponentielle de la forme e^{-ku^2} . On pourra déterminer k par le même

numéro, au moyen des carrés des erreurs de chaque observation; mais on obtiendra sa valeur d'une manière beaucoup plus simple et suffisamment exacte par le procédé suivant.

Nommons $a, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots$ les valeurs de ζ relatives à chacune des huit années, et désignons par b la moyenne de ces valeurs ou la valeur de ζ ; u étant l'erreur de cette valeur, celle de la valeur a sera $b - a + u$: en supposant donc que l'erreur r des valeurs de $a, a^{(1)}, \dots$ soit proportionnelle à l'exponentielle e^{-kr} , la probabilité de l'erreur $b - a + u$ sera proportionnelle à

$$e^{-k(b-a+u)^2}.$$

Elle sera donc égale à

$$\frac{du \sqrt{k} e^{-k(b-a+u)^2}}{\int du \sqrt{k} e^{-k(b-a+u)^2}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $u = -\infty$ jusqu'à $u = \infty$, ce qui donne $\sqrt{\pi}$ pour cette intégrale, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. En effet, la somme de ces probabilités relatives à toutes les valeurs possibles de u doit être l'unité. La probabilité de l'erreur $b - a + u$ est donc proportionnelle à

$$\sqrt{k} e^{-k(b-a+u)^2}.$$

Pareillement $b - a^{(1)} + u$ est l'erreur de la valeur $a^{(1)}$, et la probabilité de cette erreur est proportionnelle à

$$\sqrt{k} e^{-k(b-a^{(1)}+u)^2},$$

et ainsi de suite. La probabilité des erreurs simultanées $b - a + u, b - a^{(1)} + u, \dots$ sera donc proportionnelle au produit des probabilités de ces erreurs, produit égal à

$$\frac{1}{k^{\frac{n}{2}}} e^{-k[(b-a+u)^2 + (b-a^{(1)}+u)^2 + \dots]}$$

ou à

$$\frac{1}{k^{\frac{n}{2}}} e^{-k[(b-a)^2 + (b-a^{(1)})^2 + \dots] - 2ku^2}.$$

La probabilité de k sera proportionnelle à l'intégrale de cette fonction

multipliée par du et intégrée depuis $u = -\infty$ jusqu'à u infini; en désignant donc par ε la somme des carrés $(b-a)^2, (b-a^{(1)})^2, \dots$, cette probabilité sera proportionnelle à

$$\frac{1}{k^{\frac{n+1}{2}}} e^{-k\varepsilon}.$$

La valeur de k qu'il faut choisir n'est pas, comme plusieurs géomètres le pensent, celle qui rend la fonction précédente un maximum: elle est, comme je l'ai fait voir dans le n° 23 de ma *Théorie analytique des probabilités*, la moyenne des produits de chaque valeur de k par sa probabilité; cette valeur est donc

$$\frac{\int \frac{n+1}{k^{\frac{n+1}{2}}} e^{-k\varepsilon} dk}{\int \frac{n+1}{k^{\frac{n+1}{2}}} e^{-k\varepsilon} dk},$$

les intégrales étant prises depuis $k = 0$ jusqu'à k infini. L'intégrale du numérateur est

$$-\frac{n+1}{\varepsilon} e^{-k\varepsilon} + \frac{n+1}{2\varepsilon} \int \frac{n+1}{k^{\frac{n+1}{2}}} dk e^{-k\varepsilon},$$

et elle se réduit à son second terme. La valeur de k qu'il faut choisir est donc $\frac{n+1}{2\varepsilon}$; ainsi la probabilité de u étant, par ce qui précède, proportionnelle à e^{-ku^2} , elle sera proportionnelle à

$$e^{-\frac{n(n+1)}{4\varepsilon} u^2},$$

et par conséquent elle sera

$$\frac{du \sqrt{\frac{n(n+1)}{2\varepsilon}} e^{-\frac{n(n+1)}{4\varepsilon} u^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

En prenant l'intégrale du numérateur dans des limites données, on aura la probabilité que la valeur de a sera comprise dans ces limites. Dans le cas présent, on a

$$n = 8 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 1,6672.$$

La probabilité d'une erreur u' est donc proportionnelle à

$$e^{-21,2551 u'^2}.$$

Le coefficient de $-u'^2$ ou du carré de l'erreur, pris en moins, est ce que je nomme *poids* du résultat, parce que, les mêmes erreurs devenant moins probables lorsque ce poids augmente, le résultat pèse plus, si je puis ainsi dire, vers la vérité. Si l'on désigne par P ce coefficient, et si l'on fait $u' \sqrt{P} = t$, la probabilité que l'erreur u' sera comprise dans les limites $\pm \frac{T}{\sqrt{P}}$ sera égale à

$$\frac{2 \int_0^T e^{-t^2} dt}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à $t = T$.

En formant donc une Table des valeurs de cette formule, correspondantes aux diverses valeurs de T , on aura la probabilité que l'erreur du résultat sera comprise dans des limites données. M. Kramp a formé une Table des valeurs de l'intégrale $\int_0^T e^{-t^2} dt$, prise depuis $t = T$ jusqu'à t infini; il est facile d'en déduire celle dont je viens de parler. Je trouve ainsi $\frac{0,82,3}{0,83,3}$ pour la probabilité que l'erreur est comprise dans les limites $\pm 0^m,5$, et $\frac{8,6}{9,6}$ pour la probabilité que cette erreur est comprise dans les limites $\pm 0^m,25$.

On déterminera facilement la probabilité des erreurs dont la valeur précédente de $2iz$ est susceptible, en observant que cette valeur est très peu différente de la somme des hauteurs des marées $f, f', \dots$ divisée par 6, et à laquelle on ajoute le sixième du produit de $2iz$ par la somme des carrés des fractions $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$; car le maximum des marées tombant à peu près au milieu de l'intervalle qui sépare les marées extrêmes, il est clair que, en ajoutant à chacune des valeurs de $f, f', \dots$ le produit de $2iz$ par le carré de la fraction qui lui correspond, on aura six valeurs de $2iz$; le sixième de la somme de ces six valeurs sera donc la valeur moyenne de $2iz$. Cette valeur moyenne est ainsi le sixième de la somme des valeurs de $f, f', \dots$.

plus le produit de $2iz$ par $\frac{25}{12}$. De là il est aisé de conclure que l'on aura la valeur très approchée de $2iz$, relative à chaque année, en multipliant par $1 + \frac{1}{3}$ la somme des six hauteurs des marées qui lui sont relatives, et en ajoutant à cette somme le produit de $\frac{25}{12}$ par la valeur précédente de $2iz$, qui correspond à cette année. On trouve de cette manière

	$2iz$.
	^m
1807	411,106
1808	410,763
1809	410,323
1810	410,692
1811	412,493
1812	414,003
1813	412,383
1814	407,607

La moyenne de ces valeurs est $411^m,209$; la valeur de $2z$ est ici $50,1954$, ce qui donne le poids P égal à $1,4344$; en sorte que les erreurs également probables des valeurs de $2iz$ et de $2z$ sont dans le rapport de 1 à 3,88.

III. J'ai considéré de la même manière les syzygies solsticiales suivantes :

	6 juin	20 juin	5 juillet	15 décembre	29 décembre	
1807...						
1808... 13 janvier	8 "	24 juin	7 juillet	3 "	17 décembre	
1809...	1 "	12 "	27 "	11 "	7 "	21 "
1810...	5 "	2 "	17 "	1 "	10 "	26 "
1811...	9 "	6 "	20 "	6 "	15 "	29 "
1812...	14 "	9 "	24 "	8 "	4 "	18 "
1813...	2 "	14 "	28 "	13 "	7 "	22 "
1814...	6 "	3 "	17 "	2 "	11 "	26 "
1815...	10 "					

J'ai fait, comme ci-dessus, les sommes des excès des hautes marées du soir sur les basses marées du matin, du jour qui précède la syzygie, du jour même de la syzygie, et des quatre jours qui la suivent, en doublant les résultats relatifs à la syzygie intermédiaire dans chaque solstice. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants :

1807	41,030	43,040	44,745	45,550	43,830	41,843
1808	41,365	44,260	46,075	45,920	44,877	42,405
1809	39,762	43,180	45,620	46,020	44,875	41,820
1810	41,957	45,247	46,574	46,676	44,969	40,998
1811	40,695	44,163	45,559	46,111	45,140	43,282
1812	42,059	44,690	45,927	45,642	43,725	40,910
1813	41,736	44,164	45,822	44,860	43,337	39,771
1814	40,068	43,937	45,782	45,276	43,964	41,124

L'ensemble de ces hauteurs donne, en mètres,

$$f = 328,672, \quad f' = 352,681, \quad f'' = 336,104, \\ f''' = 366,055, \quad f^{iv} = 354,737, \quad f^v = 332,153;$$

on trouve ainsi

$$\zeta = -5,92730, \quad \zeta' = 30,3086, \quad \zeta'' = 328,630,$$

et l'expression générale $\zeta t^2 + \zeta' t + \zeta''$ des valeurs de $f, f', \dots$ devient

$$367,375 - 5,92730 (t - 2,556705)^2,$$

ce qui donne

$$216 = 5,92730, \\ 21x = 367,468;$$

on a, comme dans le numéro précédent,

$$\frac{\zeta'}{2\zeta} = -\frac{1}{2} + k - u,$$

ce qui donne

$$u = 1,4317 + k.$$

Dans les syzygies des solstices, le retard journalier des marées est 0,028076, en sorte que l'intervalle, pris pour unité, est ici 1,028076; on a ainsi, en parties du jour,

$$1,4317 = 1,47193.$$

Dans les syzygies précédentes, on a

$$k = 0,14166,$$

ce qui donne

$$u = 1,6136.$$

Cette valeur de u surpasse un peu celle du numéro précédent, donnée par les syzygies équinoxiales.

La différence des valeurs de ζ indique, avec une extrême probabilité, l'influence des déclinaisons des astres sur cette valeur. Pour le faire voir, déterminons la probabilité des erreurs de ζ . Les valeurs de ζ , multipliées par 8, sont pour chacune des huit années :

	216.
1807	4,81214
1808	5,46672
1809	6,67071
1810	6,92014
1811	5,15686
1812	5,69228
1813	6,10200
1814	6,59614

Le peu de différence de ces valeurs à la moyenne 5,927 est une nouvelle preuve de la régularité des marées dans le port de Brest. La somme des carrés des différences de chacune de ces valeurs à la moyenne est ici 4,1206. On trouve ainsi, par les formules du numéro précédent, la probabilité que l'erreur de la valeur moyenne est u' , proportionnelle à

$$e^{-8,7366 u'^2},$$

ou le poids P de la valeur moyenne 5,927, égal à 8,7366; d'où l'on conclut la probabilité que l'erreur est comprise dans les limites $\pm 1^m$, égale à

$$\frac{34524}{34525}.$$

La probabilité qu'elle est comprise dans les limites $\pm \frac{1^m}{2}$ est égale à

$$\frac{26,32}{27,32}.$$

Si l'on forme, d'après la méthode du numéro précédent, les valeurs

de $2iz$, d'année en année, on aura

	$2iz$.
1807.....	369,752
1808.....	369,147
1809.....	367,825
1810.....	375,411
1811.....	368,368
1812.....	367,207
1813.....	364,078
1814.....	366,106

La moyenne de ces valeurs est 367,354. La valeur de $2z$ est ici 230,322, ce qui donne le poids P égal à 0,31275; ainsi les erreurs également probables dans les valeurs de $2i\bar{z}$ et de $2iz$ sont ici dans le rapport de 1 à 5,2854.

Dans les syzygies équinoxiales, la valeur moyenne de $2i\bar{z}$ est, par ce qui précède, égale à 8,9446. Elle surpasse la précédente de 3,073. Il est donc extrêmement probable que cette différence n'est point l'effet du hasard. Pour avoir cette probabilité, nous observerons que la probabilité d'une erreur u' dans la valeur de $2i\bar{z}$ relative aux équinoxes est proportionnelle à $e^{-21,3012.u'^2}$, et que la probabilité d'une erreur u'' dans cette valeur relative aux solstices est $e^{-21,7366.u''^2}$; la probabilité des erreurs simultanées u' et u'' est donc proportionnelle à l'exponentielle $e^{-P.u'^2 - P'.u''^2}$, en faisant

$$P = 21,5931, \quad P' = 8,7366.$$

Si l'on fait $u'' = u' - t$, l'exponentielle précédente prendra cette forme

$$e^{-(P+P')(u' - \frac{P't}{P+P'})^2 - \frac{PP'}{P+P'}t^2}.$$

On aura une quantité proportionnelle à la probabilité de t , en multipliant cette exponentielle par du' et prenant l'intégrale depuis $u' = -\infty$ jusqu'à $u' = \infty$. Cette probabilité est donc proportionnelle à

$$e^{-\frac{PP'}{P+P'}t^2}.$$

Le poids de la différence 3,0173 des valeurs moyennes de $2i\bar{z}$ est

donc $\frac{PP'}{P+P'}$, qui devient ici 6,22285. On trouve ainsi la probabilité que l'erreur t est hors des limites $\pm 3,0173$ égale à une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur surpasse 4 suivi de vingt-cinq zéros. On ne peut donc pas douter que la différence observée entre les valeurs de $2i\bar{z}$, relatives aux solstices et aux équinoxes, ne soit l'effet d'une cause spéciale qui diminue cette valeur dans les solstices.

La même cause est indiquée avec une probabilité plus grande encore par la différence des valeurs de $2iz$, relatives aux équinoxes et aux solstices, différence égale à 43^m,855. Le poids de cette différence, par ce qui précède, est $\frac{PP'}{P+P'}$; il devient, en substituant les valeurs de P et de P' relatives aux valeurs de $2iz$, 0,25675, d'où il suit que les erreurs également probables des différences relatives aux valeurs de $2i\bar{z}$ et de $2iz$ sont entre elles comme 1 à 4,9231. La différence observée 3^m,0173 des valeurs de $2i\bar{z}$ répond ainsi à 15^m environ de différence entre les valeurs de $2iz$, différence beaucoup moindre que la différence 43,855. La cause dont il s'agit est donc à la fois indiquée par les hauteurs des marées dans les équinoxes et dans les solstices, et par les lois de leur variation, avec une extrême probabilité qui ne laisse aucun doute. On peut observer ici que le poids précédent de la différence 43,855 des valeurs moyennes de $2iz$, relatives aux syzygies des équinoxes et des solstices, est aussi le poids de leur somme 778^m,563, comme il est facile de le voir. On aura, d'une manière plus approchée, le poids de la différence 43^m,855 en formant, pour chaque année, la différence des valeurs correspondantes de $2iz$, relatives aux équinoxes et aux solstices. Voici le Tableau de cette différence :

1807.....	50,654
1808.....	41,616
1809.....	42,498
1810.....	35,281
1811.....	41,185
1812.....	46,796
1813.....	48,365
1814.....	41,501

La moyenne de ces valeurs est $43^m,855$. En formant la somme des carrés des différences de cette moyenne à chacune de ces valeurs, on aura

$$2\varepsilon = 361,390,$$

ce qui donne le poids P de cette moyenne égal à $0,22403$. Il est un peu moindre que celui que nous venons de trouver, ce qui tient à ce que le nombre d'années que nous avons considéré n'est pas fort grand. En adoptant ce poids, on trouve que la probabilité d'une erreur égale à $+3^m,9054$ est inférieure à $\frac{1}{233,6}$.

IV. J'ai considéré d'une manière à peu près semblable les quadratures équinoxiales suivantes :

1807...	1 ^{er} mars	17 mars	30 mars	8 septembre	24 septembre	8 octobre
1808...	5 "	19 "	4 avril	13 "	26 "	12 "
1809...	8 "	24 "	7 "	1 ^{er} "	16 "	1 ^{er} "
1810...	13 "	28 "	11 "	6 "	20 "	5 "
1811...	2 "	17 "	31 mars	9 "	25 "	9 "
1812...	6 "	19 "	4 avril	13 "	27 "	13 "
1813...	9 "	25 "	7 "	2 "	17 "	2 "
1814...	14 "	28 "	12 "	7 "	21 "	6 "

J'ai pris l'excès de la haute mer du matin sur la basse mer du soir, relatif au jour même de la quadrature et aux trois jours qui la suivent. Je n'ai pas considéré six jours, comme je l'ai fait relativement aux syzygies, parce que, la variation des marées quadratures étant plus rapide que celle des marées syzygies, la loi de variation, proportionnelle au carré du temps, ne pourrait pas, sans erreur sensible, comprendre un intervalle de six jours. J'ai fait, pour chaque année, une somme des excès relatifs à chacun des quatre jours, en doublant les résultats relatifs à la quadrature intermédiaire des quadratures considérées dans chaque équinoxe. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants :

1807.....	^m 25,130	^m 20,100	^m 20,180	^m 26,106
1808.....	^m 26,770	^m 20,950	^m 20,935	^m 26,301
1809.....	^m 26,130	^m 21,400	^m 21,130	^m 25,280
1810.....	^m 24,432	^m 20,584	^m 21,715	^m 26,858
1811.....	^m 26,055	^m 21,440	^m 21,130	^m 26,185
1812.....	^m 26,896	^m 21,500	^m 20,625	^m 26,117
1813.....	^m 25,437	^m 20,341	^m 20,682	^m 25,917
1814.....	^m 23,808	^m 19,907	^m 19,930	^m 25,944

Si l'on nomme f, f', f'', f''' les sommes des hauteurs relatives à chacun des quatre jours et que l'on représente la loi de ces sommes par

$$\zeta t^2 + \zeta' t + \zeta'',$$

t étant le temps écoulé depuis la haute marée du matin du jour de la quadrature, l'intervalle de deux marées quadratures du matin étant pris pour unité, on aura les quatre équations de condition suivantes :

$$\begin{aligned}\zeta'' &= f, \\ \zeta + \zeta' + \zeta'' &= f', \\ 4\zeta + 2\zeta' + \zeta'' &= f'', \\ 9\zeta + 3\zeta' + \zeta'' &= f'''.\end{aligned}$$

Si l'on multiplie chacune de ces équations respectivement par leurs coefficients de ζ , et que l'on fasse une somme de leurs produits; si l'on fait les sommes semblables, relativement aux coefficients de ζ' et de ζ'' , ces trois sommes forment les équations suivantes :

$$\begin{aligned}98\zeta + 36\zeta' + 14\zeta'' &= f' + 4f'' + 9f''', \\ 36\zeta + 14\zeta' + 6\zeta'' &= f' + 2f'' + 3f''', \\ 14\zeta + 6\zeta' + 4\zeta'' &= f + f' + f'' + f'''.\end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{f - f' - f'' + f'''}{4}, \\ \zeta' &= \frac{21}{2} \frac{(f - f' - f'' + f''') + 2(f'' - f') + 4(f''' - f')}{10}, \\ \zeta'' &= \frac{f + f' + f'' + f'''}{4} - \frac{3}{2} \zeta' - \frac{7}{2} \zeta.\end{aligned}$$

Maintenant on a

$$f = 204^m,658, \quad f' = 166^m,022, \quad f'' = 166^m,327, \quad f''' = 207^m,711,$$

ce qui donne

$$\zeta = 20^m,005, \quad \zeta' = -59^m,0686, \quad \zeta'' = 204^m,7649.$$

L'expression $\zeta t^2 + \zeta' t + \zeta''$ devient ainsi

$$(a) \quad 161^m,162 + 20^m,005(t - 1,47635)^2.$$

Nommons t' la distance d'une haute marée du matin à l'instant de la quadrature, et représentons par $\alpha + \epsilon t'^2$ cette haute marée. La basse mer qui la suit sera

$$-\alpha - \epsilon \left(t' + \frac{1}{2} \right)^2;$$

l'excès de la haute sur la basse mer sera donc

$$(a') \quad 2\alpha + \frac{2\epsilon}{64} + 2\epsilon \left(t' + \frac{1}{8} \right)^2.$$

Nommons k' la valeur moyenne des quantités dont les quadratures ont suivi les hautes marées du matin, et désignons, comme ci-dessus, par u la quantité dont le maximum et le minimum des marées suivent respectivement la syzygie et la quadrature; on aura

$$t' = t - k' - u.$$

La formule (a') devient, en la multipliant par le nombre i de quadratures considérées,

$$2i\alpha + \frac{2i\epsilon}{64} + 2i\epsilon \left(t - k' - u + \frac{1}{8} \right)^2.$$

Cette formule sera l'expression des valeurs de $f, f', \dots$. En la comparant à la formule (a), on aura

$$k' + u - \frac{1}{8} = 1,47635,$$

ce qui donne

$$u = 1,60135 - k'.$$

L'intervalle pris pour unité est ici 1,056223. En multipliant donc 1,60135 par cet intervalle, on aura 1,6914. D'ailleurs, la valeur de k' relative aux quadratures précédentes est 0,1937. On aura donc ainsi

$$u = 1,4977,$$

ce qui diffère peu de la valeur 1,5378 donnée par l'ensemble des syzygies. On a ensuite

$$2i\epsilon = 20^m,005,$$

$$2i\alpha = 160^m,850.$$

Déterminons présentement la probabilité de la valeur de ζ ou de $2i\epsilon$. Ces valeurs, relatives à chacune des huit années et multipliées par 8, sont :

	2iε.
	m
1807	21,912
1808	22,378
1809	17,760
1810	17,982
1811	19,340
1812	19,776
1813	20,662
1814	20,230

La somme des carrés des différences de ces valeurs à la moyenne 20,005 est 19,3770; il est facile d'en conclure que le poids P de cette moyenne est 1,85787, le mètre étant pris pour unité d'erreur. On trouve ainsi la probabilité que l'erreur de cette valeur moyenne est comprise dans les limites $\pm 1^m$ égale à $\frac{17,55}{18,55}$: la probabilité que cette erreur est comprise dans les limites $\pm 2^m$ est $\frac{8382}{8383}$.

On aura, à très peu près, la valeur de $2i\alpha$ en diminuant les valeurs de f, f', f'', f''' , respectivement du produit de 20,005 par les carrés des fractions $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, ce qui donne $2i\alpha$ égal au quart de la somme de ces quatre valeurs, diminuée du produit de 20,005 par $\frac{3}{2}$ ou à 161^m,173. De là il est aisé de conclure que l'on aura la valeur fort approchée de $2i\alpha$ relative à chaque année, en faisant une somme des

quatre valeurs de f, f', f'', f''' correspondantes à l'année, en doublant cette somme et en lui ajoutant $\frac{1}{2}$ de la valeur de 2α relative à la même année. On formera ainsi le Tableau suivant :

	2α
1807	155,642
1808	161,956
1809	165,680
1810	164,709
1811	165,445
1812	163,546
1813	158,925
1814	153,490

On trouvera ici

$$2\alpha = 303,812,$$

le poids P de l'erreur de la valeur moyenne 161,173 est donc 0,23699, d'où il suit que les erreurs également probables des valeurs moyennes de 2α et de $2\alpha'$ sont dans le rapport de 1 à 2,80.

V. J'ai considéré les quadratures solsticiales suivantes :

1807...	13 juin	28 juin	12 juillet	6 décembre	22 décembre	
1808...	5 janvier	2	15 juin	1 ^{er} juillet	10	24 décembre
1809...	9	5	20	4	13	29
1810...	12	10	23	9	3	19
1811...	1	13	29	12	6	22
1812...	6	3	16	1	11	25
1813...	9	5	21	5	1	14
1814...	11 juin	24	10 juillet	4 décembre	19	
1815...	2 janvier					

J'ai pris, comme dans les quadratures précédentes, l'excès de la haute mer du matin sur la basse mer du soir, relativement au jour même de la syzygie et aux trois jours qui la suivent. J'ai fait, pour chaque année, une somme des excès relatifs à chacun de ces jours, en doublant les résultats relatifs à la quadrature intermédiaire entre les quadratures considérées dans chaque solstice. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants :

	m	m	m	m
1807	28,720	26,495	25,310	27,135
1808	28,830	25,780	25,345	27,215
1809	28,985	26,872	25,154	26,798
1810	29,817	26,217	26,655	28,261
1811	29,319	26,458	25,999	28,008
1812	28,108	25,818	25,820	27,711
1813	26,585	24,909	26,235	28,685
1814	27,196	24,431	25,446	28,383

L'ensemble de ces hauteurs donne, en mètres,

$$f = 227^m,560, \quad f' = 206^m,980, \quad f'' = 205^m,964, \quad f''' = 222^m,196,$$

d'où l'on tire

$$\zeta = 9^m,203, \quad \zeta' = -29^m,3198, \quad \zeta'' = 227^m,4592.$$

L'expression $\zeta t^2 + \zeta' t + \zeta''$ devient ainsi

$$204^m,0917 + 9^m,203(t - 1,5929)^2,$$

ce qui donne

$$2\alpha = 9^m,203,$$

$$2\alpha' = 203^m,948;$$

on aura ensuite, comme dans le numéro précédent,

$$k' + u = 1,5976 + \frac{1}{4}.$$

L'intervalle pris pour unité est ici 11,04796, et la valeur de k' relative à ces marées quadratures est 0,20972, d'où l'on tire, pour la quantité u dont le minimum de la marée suit les quadratures solsticiales,

$$u = 11,5907.$$

Les marées quadratures équinoxiales ont donné, pour u , 11,4977; les marées syzygies équinoxiales ont donné 11,4810; les marées syzygies solsticiales ont donné 11,6136. La moyenne de ces valeurs est

$$u = 11,5458.$$

L'ensemble des syzygies anciennes m'a donné, dans le Livre IV de la *Mécanique céleste*,

$$u = 11,56445;$$

la différence est insensible.

Déterminons la probabilité de la valeur de ζ ou de $2i\zeta$. Ces valeurs, relatives à chacune des huit années et multipliées par 8, sont :

	$2i\zeta$.
1807.....	$8,100$
1808.....	$9,840$
1809.....	$7,514$
1810.....	$10,412$
1811.....	$9,740$
1812.....	$8,362$
1813.....	$8,252$
1814.....	$11,404$

La somme des carrés des différences de ces valeurs à la moyenne 9,203 est 12,6813; on trouve ainsi le poids P de la valeur moyenne égal à 2,83882, d'où il est aisé de conclure la probabilité que l'erreur de cette valeur est comprise dans les limites $\pm 1^m$ égale $\frac{57,23}{58,33}$. La probabilité que cette erreur est comprise dans les limites $\pm 1^m,5$ est $\frac{2839}{2840}$.

On aura, à très peu près, les valeurs de $2iz$ par la méthode du numéro précédent; j'ai formé ainsi le Tableau suivant :

	$2iz$.
1807.....	$205,195$
1808.....	$202,040$
1809.....	$206,226$
1810.....	$208,885$
1811.....	$207,393$
1812.....	$204,404$
1813.....	$202,513$
1814.....	$196,657$

La valeur moyenne est 204,171; on a ici

$$2z = 223,406;$$

d'où l'on conclut le poids P de l'erreur moyenne égal à 0,32228. Ainsi les erreurs également probables des valeurs de $2i\zeta$ et de $2iz$ sont entre elles comme 1 à 2,9679.

La différence moyenne des valeurs de $2iz$, relative aux quadratures des solstices et des équinoxes, est $42^m,998$; on trouvera, par ce qui précède, le poids P de cette différence égal à 0,13656. C'est aussi le poids de la somme 365,345 de ces valeurs. De là il suit que la probabilité d'une erreur négative, égale ou supérieure à $+2,5983$, est

$$\frac{1}{11,4564}.$$

Maintenant, si l'on compare ces valeurs de $2iz$, leur différence montre avec évidence l'influence des déclinaisons des astres sur ces marées. Cette influence est pareillement indiquée avec une extrême probabilité par les valeurs de $2i\zeta$; celle qui est relative aux marées quadratures équinoxiales s'élève à $20^m,005$, tandis que la valeur relative aux marées quadratures solsticiales n'est que de $9^m,203$. D'après la probabilité des erreurs de ces valeurs, déterminée ci-dessus, on voit qu'une erreur de 9^m dans chacune d'elles est invraisemblable, et qu'il est par conséquent impossible de les faire coïncider.

Les valeurs de $2iz$ et de $2i\zeta$, relatives aux marées syzygies et quadratures dans les équinoxes et dans les solstices, sont les résultats des observations, les plus propres à vérifier la théorie de ces phénomènes, fondée sur la loi de la pesanteur universelle; mais, avant que de les comparer à cette théorie, je vais les comparer avec les résultats semblables que j'ai déduits, dans le Livre IV de la *Mécanique céleste*, des observations faites à Brest un siècle auparavant.

VII. Les résultats de ces observations anciennes sont relatifs à vingt-quatre syzygies et à vingt-quatre quadratures, tandis que ceux des observations modernes se rapportent à soixante-quatre syzygies et à soixante-quatre quadratures. Il faut donc, pour comparer aux résultats anciens les résultats modernes, diminuer ceux-ci dans le rapport de 3 à 8; on aura ainsi :

	Observations	
	anciennes.	modernes.
<i>Syzygies équinoxiales.</i>		
482.....	154,260	150,235
486.....	3,3542	3,1623
<i>Syzygies solsticiales.</i>		
482.....	137,766	132,371
486.....	2,2227	1,9451
<i>Quadratures équinoxiales.</i>		
482.....	60,319	58,033
486.....	7,5019	7,495
<i>Quadratures solsticiales.</i>		
482.....	76,480	75,517
486.....	3,4511	3,4100

On voit, par l'inspection de ce Tableau, que les résultats des observations modernes s'accordent avec ceux des observations anciennes aussi bien qu'on peut le désirer, vu surtout la petite différence que doivent y produire les déclinaisons de la Lune, plus grandes aux époques des anciennes observations qu'aux époques des observations modernes. On voit encore que les valeurs de $2ix$ indiqueraient des marées plus fortes maintenant qu'au commencement du dernier siècle d'environ $\frac{1}{31}$, si l'on était bien certain de l'exactitude de la graduation de l'échelle qui a servi aux observations anciennes.

VIII. Comparons maintenant les résultats des observations avec ceux de la théorie de la pesanteur universelle. J'ai donné, dans le Livre IV de la *Mécanique céleste*, les formules nécessaires à cette comparaison; mais je vais ici reprendre cet objet par une nouvelle analyse. Ma théorie des marées, exposée dans le Livre cité, repose sur ce principe, savoir, que l'état d'un système de corps, dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances qu'il

éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent. Ce principe, combiné avec celui de la coexistence des oscillations très petites, explique, d'une manière singulièrement heureuse, tous les phénomènes des marées, indépendants des circonstances locales. Les forces productrices de ces phénomènes, relatives à l'action d'un astre L , sont, comme on le voit dans le n° 16 du Livre IV de la *Mécanique céleste*, exprimées par les différences partielles de la fonction

$$(a) \quad \frac{3L}{2r^3} [\sin v \cos \theta + \cos v \sin \theta \cos (nt + \omega - \psi)]^2,$$

en désignant par L la masse de l'astre, par r sa distance au centre de la Terre, par v sa déclinaison, par ψ son ascension droite comptée de l'intersection de son orbite avec l'équateur, et par φ sa distance angulaire à cette intersection : $nt + \omega$ est l'angle horaire de cette intersection et θ est le complément de la latitude du port. Soit ε l'inclinaison de l'orbite à l'équateur; on aura, par les formules de la Trigonométrie sphérique,

$$\begin{aligned} \sin v &= \sin \varepsilon \sin \varphi, \\ \cos v \sin \psi &= \cos \varepsilon \sin \varphi, \\ \cos v \cos \psi &= \cos \varphi, \\ \cos^2 v &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \varepsilon) + \frac{1}{2} \sin \varepsilon \cos 2\varphi, \\ \cos^2 v \sin 2\psi &= \cos \varepsilon \sin 2\varphi, \\ \cos^2 v \cos 2\psi &= \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon + \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \varepsilon) \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

La formule (a) devient ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{3L}{2r^3} \left[\frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \varepsilon + \frac{1}{2} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \varepsilon) - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon (\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta) \cos 2\varphi \right] \\ & + \frac{3L}{2r^3} \sin \theta \cos \theta [\sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin (nt + \omega) \\ & \quad - \frac{1}{2} \sin \varepsilon (1 + \cos \varepsilon) \sin (nt + \omega - 2\varphi) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sin \varepsilon (1 - \cos \varepsilon) \sin (nt + \omega + 2\varphi)] \\ & + \frac{3L}{4r^3} \sin^2 \theta \left[\cos^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos (2nt + 2\omega - 2\varphi) \right. \\ & \quad \left. + \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos (2nt + \omega + 2\varphi) + \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \cos (2nt + 2\omega) \right]. \end{aligned}$$

Si, comme nous l'avons fait, on ne considère dans les observations des marées que l'excès d'une haute mer sur l'une des deux basses mers voisines; si, de plus, on prend ces excès en nombre égal dans les syzygies et dans les quadratures des équinoxes du printemps et d'automne, et des solstices d'hiver et d'été; enfin, si, comme nous l'avons fait encore, pour détruire l'effet des variations de la parallaxe lunaire, on considère les trois syzygies ou les trois quadratures les plus voisines de l'équinoxe ou du solstice, en doublant les observations relatives à la syzygie intermédiaire, les résultats de l'observation ne dépendront que des inégalités relatives aux angles $2nt + 2\omega$, $2nt + 2\omega - 2\gamma$, $2nt + 2\omega + 2\gamma$, inégalités dont la période est d'environ un demi-jour, et dont les deux premières sont, dans nos ports, beaucoup plus grandes que toutes les inégalités des marées. $\sin^{\frac{1}{2}}\varepsilon$ est un coefficient toujours très petit dans les observations que nous avons considérées et au milieu desquelles l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'équateur est parvenue à son minimum. On peut donc négliger le terme que ce coefficient multiplie, et alors les flux partiels, dont les périodes sont d'environ un demi-jour, dépendent des termes

$$\frac{3L}{4r^3} \sin^2\theta \cos^{\frac{\varepsilon}{2}} \cos(2nt + 2\omega - 2\gamma) + \frac{3L}{8r^3} \sin^2\theta \sin^2\varepsilon \cos(2nt + 2\omega).$$

Ces termes produisent, comme on l'a vu dans le n° 7 du Livre IV de la *Mécanique céleste*, deux flux partiels que l'on peut représenter par

$$A \frac{L}{r^3} \cos^{\frac{\varepsilon}{2}} \cos(2nt - 2mt - 2\lambda) + \frac{1}{2} B \frac{L}{r^3} \sin^2\varepsilon \cos(2nt - 2\gamma),$$

mt étant le moyen mouvement de l'astre L dans son orbite, A, B, λ et γ sont des constantes dépendantes des circonstances locales du port.

Ces deux flux sont les mêmes que ceux qui seraient produits par deux astres mus dans le plan de l'équateur, à la distance r du centre de la Terre, et dont le premier, représenté par $L \cos^{\frac{\varepsilon}{2}}$, aurait le même moyen mouvement que l'astre L dans son orbite et passerait en

même temps que lui par l'intersection de cette orbite avec le plan de l'équateur. Le second astre, représenté par $\frac{1}{2} L \sin^2\varepsilon$, correspondrait constamment au point de cette intersection. Le maximum des hautes marées de l'astre L a lieu vers la conjonction ou l'opposition des deux astres fictifs, lorsque la haute mer du premier coïncide avec celle du second. Le minimum des hautes marées a lieu vers les quadratures de ces astres fictifs, lorsque la haute mer du premier coïncide avec la basse mer du second. Ce maximum et ce minimum donneront donc le rapport de leurs actions et, par conséquent, la fraction $\frac{A}{B}$. Si cette fraction surpasse l'unité, l'action de l'astre L est augmentée par les circonstances locales et par le mouvement mt de l'astre dans son orbite, ce dont j'ai fait voir la possibilité dans le n° 18 du Livre IV de la *Mécanique céleste*; $\cos^{\frac{\varepsilon}{2}}$ est égal à $\cos\varepsilon + \sin^{\frac{\varepsilon}{2}}$. Sans l'accroissement dû au mouvement de l'astre fictif $L \cos^{\frac{\varepsilon}{2}}$, la hauteur de la mer qu'il produit serait, en négligeant $\sin^{\frac{\varepsilon}{2}}$,

$$B \frac{L}{r^3} \cos\varepsilon \cos(2nt - 2mt - 2\lambda).$$

L'accroissement en hauteur de la mer, dû au mouvement de l'astre L, est donc

$$(A - B) \frac{L}{r^3} \cos\varepsilon \cos(2nt - 2mt - 2\lambda),$$

ce qui est conforme au n° 20 du Livre IV de la *Mécanique céleste*, en observant que B est ce que nous avons nommé 2P dans le numéro cité, et que $(A - B) \cos\varepsilon$ est ce que nous avons désigné par

$$-4mPQ \cos\varepsilon.$$

Supposons maintenant que les quantités L, r , m , A, ε , λ et γ se rapportent au Soleil, et marquons d'un trait les mêmes quantités relatives à la Lune; on aura, par l'action réunie de ces deux astres, et en n'ayant égard qu'aux inégalités dont la période est d'environ un demi-

jour, la hauteur de la mer au-dessus de son niveau, due à l'action du Soleil et de la Lune, égale à

$$\begin{aligned} & A \frac{L}{r^3} \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos(2nt - 2mt - 2\lambda) + \frac{1}{2} B \frac{L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \cos(2nt - 2\gamma) \\ & + A' \frac{L'}{r'^3} \cos^2 \frac{\varepsilon'}{2} \cos(2nt - 2m't - 2\lambda') + \frac{1}{2} B' \frac{L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \cos(2nt - 2\gamma'), \end{aligned}$$

la constante B devant être la même pour le Soleil et pour la Lune, parce que les cosinus des angles $2nt - 2\gamma$ et $2nt - 2\gamma'$ varient à très peu près de la même manière, vu la lenteur du mouvement des nœuds de l'orbe lunaire. La différence des quantités γ et λ serait nulle si m était nul; nous la supposons donc proportionnelle à m et égale à $m\varepsilon$, en sorte que l'on ait $\lambda = \gamma - m\varepsilon$. On aura pareillement $\lambda' = \gamma' - m'\varepsilon$; γ' serait égale à γ si l'intersection de l'orbe lunaire avec l'équateur coïncidait avec l'équinoxe du printemps. En comptant les angles nt , mt et $m't$ de cet équinoxe, et désignant par δ l'ascension droite de l'intersection de l'orbe lunaire avec l'équateur, on aura

$$\gamma' = \gamma + \delta.$$

Cela posé, lorsque la marée syzygie est parvenue à sa plus grande hauteur, les cosinus des deux angles

$$2nt - 2mt - 2\lambda, \quad 2nt - 2m't - 2\lambda'$$

sont très peu différents de l'unité. En supposant donc la demi-circonférence dont le rayon est l'unité égale à π , et

$$\begin{aligned} nt - mt - \lambda &= i\pi + q, \\ nt - m't - \lambda' &= i'\pi + q', \end{aligned}$$

i et i' étant des nombres entiers, q et q' seront de petites quantités, et l'on aura, à fort peu près,

$$\begin{aligned} \cos(2nt - 2mt - 2\lambda) &= 1 - 2q^2, \\ \cos(2nt - 2m't - 2\lambda') &= 1 - 2q'^2; \end{aligned}$$

on aura ensuite

$$t = \frac{i\pi + q + \lambda}{n - m} = \frac{i'\pi + q' + \lambda'}{n - m'};$$

d'où, en substituant pour λ' sa valeur $\lambda - (m' - m)\varepsilon$ et faisant

$$\varepsilon' = (m' - m)\varepsilon - \frac{\lambda(m' - m)}{n - m} - \frac{i\pi(m' - m)}{n - m} - (i' - i)\pi,$$

on tire

$$q' = \frac{n - m'}{n - m} q + \varepsilon'.$$

L'expression précédente de la hauteur de la mer devient ainsi, en substituant, pour t , sa valeur précédente et, pour γ , $\lambda + m\varepsilon$,

$$\begin{aligned} & A \frac{L}{r^3} (1 - 2q^2) \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} + A' \frac{L'}{r'^3} (1 - 2q'^2) \cos^2 \frac{\varepsilon'}{2} \\ & + \frac{1}{2} B \frac{L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \cos \left[\frac{2m(i\pi + \lambda)}{n - m} - 2m\varepsilon + \frac{2nq}{n - m} \right] \\ & + \frac{1}{2} B' \frac{L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \cos \left[\frac{2m(i'\pi + \lambda)}{n - m} - m\varepsilon - 2\delta + \frac{2nq}{n - m} \right]. \end{aligned}$$

La condition de la haute mer exige que la différentielle de cette fonction soit nulle; en la différentiant donc et observant que l'on a

$$dq = (n - m) dt,$$

$$dq' = (n - m') dt,$$

on aura

$$\begin{aligned} 0 &= -4A \frac{L}{r^3} (n - m) q \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} - 4A' \frac{L'}{r'^3} (n - m') q' \cos^2 \frac{\varepsilon'}{2} \\ &- nB \frac{L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \left\{ \sin \left[\frac{2m(i\pi + \lambda)}{n - m} - 2m\varepsilon \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2nq}{n - m} \cos \left[\frac{2m(i\pi + \lambda)}{n - m} - 2m\varepsilon \right] \right\} \\ &- nB' \frac{L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \left\{ \sin \left[\frac{2m(i'\pi + \lambda)}{n - m} - 2m\varepsilon - 2\delta \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2nq}{n - m} \cos \left[\frac{2m(i'\pi + \lambda)}{n - m} - 2m\varepsilon - 2\delta \right] \right\}; \end{aligned}$$

ce qui donne, en faisant, pour abrégér,

$$2A \frac{L}{r^3} \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} = a, \quad 2A' \frac{L'}{r'^3} \cos^2 \frac{\varepsilon'}{2} = a',$$

$$B \frac{L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \cos \left(2m \frac{\pi + \lambda}{n - m} - 2m\varepsilon \right) \\ + B' \frac{L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \cos \left(2m' \frac{\pi + \lambda'}{n' - m'} - 2m'\varepsilon' - 2\delta \right) = b,$$

$$B \frac{L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \sin \left(2m \frac{\pi + \lambda}{n - m} - 2m\varepsilon \right) \\ + B' \frac{L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \sin \left(2m' \frac{\pi + \lambda'}{n' - m'} - 2m'\varepsilon' - 2\delta \right) = 2h,$$

les valeurs suivantes :

$$q = - \frac{(n - m) [(n - m') a' \varepsilon' + nh]}{(n - m)^2 a + (n - m')^2 a' + n^2 b}, \\ q' = \frac{[(n - m)^2 a + n^2 b] \varepsilon' - (n - m') nh}{(n - m)^2 a + (n - m')^2 a' + n^2 b}.$$

L'expression entière de la hauteur de la marée au-dessus de la basse mer, expression double de la valeur précédente de la haute mer, devient ainsi, à très peu près, en négligeant le carré de h , à cause de son extrême petitesse, surtout dans les équinoxes et dans les solstices,

$$a + a' + b \frac{2a' [(n - m)^2 a + n^2 b] \varepsilon' + 4(n - m') a' h \varepsilon'}{(n - m)^2 a + (n - m')^2 a' + n^2 b}.$$

Si l'on suppose, dans les expressions de ε' , b et h ,

$$i' = i = i'', \quad i = i'' + s,$$

et si l'on nomme ε' , b' et h' ce que deviennent ces expressions lorsqu'on y change i en i'' , la fonction précédente devient, à très peu près,

$$a + a' + b' - \frac{2ns\pi h'}{n - m} \\ \left\{ \frac{[(n - m)^2 a + n^2 b]}{(n - m)^2} \left[\frac{s^2 \pi^2 (m' - m)^2}{(n - m)^2} - 2\varepsilon' s \pi \frac{m' - m}{n - m} + \varepsilon'^2 \right] \right. \\ \left. - 2n(n - m') \left[\varepsilon'' - \frac{s\pi(m' - m)}{n - m} \right] \left(h' + \frac{ms\pi}{n - m} b' \right) \right\} \\ - 2a' \frac{[(n - m)^2 a + (n - m')^2 a' + n^2 b]}{(n - m)^2 a + (n - m')^2 a' + n^2 b}.$$

Si l'on détermine les constantes ε et λ de l'expression de ε'' , de manière que le coefficient de la première puissance de s soit nul, cette fonction devient à très peu près, en observant que l'on peut négliger les termes affectés de $m^2 b'$, etc.,

$$a + a' + b' - \frac{2s^2 \pi^2 [aa'(m' - m)^2 - a'b'm^2 + a'b'm'^2]}{(n - m)^2 a + (n - m')^2 a' + n^2 b'}$$

ou

$$(o) \quad a + a' + b' - \frac{2 \left(s \pi \frac{m' - m}{n - m} \right)^2 a'}{a + a' + b'} \left(a + b' \frac{m' + m}{m' - m} \right) \left[1 + 2 \frac{(m' - m)a' - mb'}{(n - m)(a + a' + b')} \right].$$

s étant supposé nul, on a la plus grande marée vers les syzygies. Si l'on fait successivement $s = \pm 1$, $s = \pm 2$, $s = \pm 3$, ..., on a les hautes marées qui suivent ou précèdent cette plus grande marée; et, en ne considérant que les nombres pairs de ces valeurs de s , on aura les plus hautes mers qui suivent ou précèdent cette plus haute mer d'un ou de plusieurs jours.

Au moment de la syzygie, $m't - mt$ est nul ou un multiple de la demi-circonférence, t' désignant le temps relatif à cette phase. Soit $t' + T$ le temps relatif à la plus haute mer; $nt - mt - \lambda$ et $nt - m't - \lambda'$ étant, au moment de cette marée, multiples de la demi-circonférence, $m't - mt - \lambda' - \lambda$ sera un multiple de la demi-circonférence; d'où il est aisé de conclure que

$$(m' - m)T - \lambda' + \lambda \quad \text{ou} \quad (m' - m)(T - \varepsilon)$$

est égal à zéro, ce qui donne

$$T = \varepsilon.$$

De là, il suit que

$$\cos(2nt - 2\gamma) \quad \text{ou} \quad \cos(2nt - 2mt - 2\lambda + 2mt - 2m\varepsilon)$$

devient, au moment de la plus haute mer,

$$\cos(2mt - 2m\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \cos 2mt'.$$

Pareillement,

$$\cos(2mt - 2\gamma - 2\delta) = \cos(2mt' - 2\delta);$$

ainsi les cosinus de l'expression de $\mathcal{E}'$ se rapportent à l'instant même de la syzygie, ce qui a également lieu pour les marées quadratures.

Soit p le carré du cosinus de la déclinaison du Soleil, à l'instant de la syzygie; on aura, par ce qui précède,

$$p = \frac{1 + \cos^2 \varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \cos 2mt';$$

or on a

$$\cos^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1 + \cos^2 \varepsilon}{2} - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}.$$

En négligeant donc, comme nous l'avons fait, $\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$, on aura

$$\begin{aligned} 2A \frac{L}{r^3} \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} + B \frac{L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \cos 2mt' \\ = 2A \frac{L}{r^3} p - (A - B) \frac{L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \cos 2mt'. \end{aligned}$$

En nommant pareillement p' le carré du cosinus de la déclinaison de la Lune à l'instant de la syzygie, on aura

$$\begin{aligned} 2A' \frac{L'}{r'^3} \cos^2 \frac{\varepsilon'}{2} + B' \frac{L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \cos(2m't' - 2\delta) \\ = 2A' \frac{L'}{r'^3} p' - (A' - B') \frac{L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \cos(2m't' - 2\delta). \end{aligned}$$

Dans les syzygies des solstices, mt' et $m't'$ sont augmentées de $\frac{\pi}{2}$. En désignant donc par $\frac{\pi}{2} + mt''$ et $\frac{\pi}{2} + m't''$ les angles mt' et $m't'$, ce qui revient à compter du solstice les arcs mt'' et $m't''$, on aura

$$\begin{aligned} \cos 2mt' &= -\cos 2mt'', \\ \cos(2mt' - 2\delta) &= -\cos 2(mt'' - \delta). \end{aligned}$$

En désignant par q et q' les carrés des cosinus des déclinaisons solaire

et lunaire à l'instant de la syzygie, on aura

$$\begin{aligned} 2A \frac{L}{r^3} \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} + B \frac{L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \cos 2mt' \\ = 2qA \frac{L}{r^3} + (A - B) \frac{L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \cos 2mt'', \\ 2A' \frac{L'}{r'^3} \cos^2 \frac{\varepsilon'}{2} + B' \frac{L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \cos(2m't' - 2\delta) \\ = 2q'A' \frac{L'}{r'^3} + (A' - B') \frac{L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \cos(2m't'' - 2\delta). \end{aligned}$$

On peut supposer que, dans l'ensemble des syzygies considérées ci-dessus, la somme des cosinus de $2mt'$ est égale à la somme des cosinus de $2mt''$, et que la somme des cosinus de $2mt' - 2\delta$ égale la somme des cosinus de $2m't'' - 2\delta$, parce que ces angles diffèrent peu de l'unité, et parce que leurs cosinus sont multipliés dans les expressions précédentes par les très petits facteurs

$$(A - B) \sin^2 \varepsilon \quad \text{et} \quad (A' - B') \sin^2 \varepsilon'.$$

En supposant donc que p et q expriment les sommes des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil aux instants des syzygies équinoxiales et solsticiales, et que p' et q' expriment les mêmes sommes pour la Lune, la somme des quantités $\sin^2 \varepsilon \cos 2mt'$ sera $p - q$, et la somme des quantités $\sin^2 \varepsilon' \cos(2m't' - 2\delta)$ sera $p' - q'$.

On aura donc, dans les syzygies équinoxiales,

$$2ix = 2A \frac{L}{r^3} p + 2A' \frac{L'}{r'^3} p' - (A - B) \frac{L}{r^3} (p - q) - (A' - B') \frac{L'}{r'^3} (p' - q'),$$

et, dans les syzygies solsticiales,

$$2ix' = 2A \frac{L}{r^3} q + 2A' \frac{L'}{r'^3} q' + (A - B) \frac{L}{r^3} (p - q) + (A' - B') \frac{L'}{r'^3} (p' - q'),$$

$2ix'$ étant la valeur de $2ix$ relative aux syzygies solsticiales.

Dans les quadratures, la haute marée lunaire coïncide avec la basse marée solaire, ce qui revient à supposer $\frac{L}{r^3}$ négatif dans les expressions précédentes. De là il suit que, si l'on désigne par p_i et q_i les

carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil dans les quadratures équinoxiales et solsticiales; si l'on désigne par p'_i et q'_i les carrés des cosinus des déclinaisons de la Lune dans les mêmes quadratures; enfin, si l'on nomme $2ix''$ et $2ix'''$ ce que devient $2ix$ dans ces quadratures, on aura

$$2ix'' = 2A' \frac{L'}{r^3} q'_i - 2A \frac{L}{r^3} p_i + (A - B) \frac{L}{r^3} (p_i - q_i) + (A' - B) \frac{L'}{r^3} (p'_i - q'_i),$$

$$2ix''' = 2A' \frac{L'}{r^3} p'_i - 2A \frac{L}{r^3} q_i - (A - B) \frac{L}{r^3} (p_i - q_i) - (A' - B) \frac{L'}{r^3} (p'_i - q'_i).$$

J'ai observé, dans le n° 25 du Livre IV de la *Mécanique céleste*, que, à raison de l'argument de la variation dans l'expression de la parallaxe lunaire, l'action de la Lune sur la mer est augmentée d'environ $\frac{1}{15}$ dans les syzygies et diminuée de la même quantité dans les quadratures. Ayant traité depuis, avec un soin particulier, la théorie de la Lune, dans le septième Livre de la *Mécanique céleste*, j'ai reconnu que cet accroissement et cette diminution sont un peu plus petits et qu'ils sont environ $\frac{1}{15}$ de la valeur moyenne ou, plus exactement, le produit de cette valeur par 0,022486, lorsque l'on considère, comme nous l'avons fait, autant de pleines que de nouvelles lunes.

Dans les syzygies que nous avons considérées, on a

$$p = 63,632467, \quad q = 54,260856,$$

$$p' = 63,546581, \quad q' = 56,879696,$$

$$p_1 = 63,635484, \quad q_1 = 54,301142,$$

$$p'_1 = 63,497242, \quad q'_1 = 56,962913,$$

et, par ce qui précède, on a

$$2ix = 411^m, 359, \quad 2ix' = 367^m, 468,$$

$$2ix'' = 160^m, 850, \quad 2ix''' = 203^m, 948.$$

On aura ainsi les quatre équations suivantes :

$$(1) \begin{cases} 411^m, 359 = 63,546581 \cdot 1,022486 \cdot 2A' \frac{L'}{r^3} + 63,632467 \cdot 2A \frac{L}{r^3} \\ - 3,333442 \cdot 2(A' - B) \cdot 1,022486 \frac{L'}{r^3} - 4,685805 \cdot 2(A - B) \frac{L}{r^3}, \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 367^m, 468 = 56,879696 \cdot 1,022486 \cdot 2A' \frac{L'}{r^3} + 54,260856 \cdot 2A \frac{L}{r^3} \\ + 3,333442 \cdot 2(A' - B) \cdot 1,022486 \frac{L'}{r^3} + 4,685805 \cdot 2(A - B) \frac{L}{r^3}, \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 160^m, 850 = 56,962913 \cdot 0,977514 \cdot 2A' \frac{L'}{r^3} - 63,635484 \cdot 2A \frac{L}{r^3} \\ + 3,267165 \cdot 0,977514 \cdot 2(A' - B) \frac{L'}{r^3} + 4,667171 \cdot 2(A - B) \frac{L}{r^3}, \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 203^m, 948 = 63,497242 \cdot 0,977514 \cdot 2A' \frac{L'}{r^3} - 54,301142 \cdot 2A \frac{L}{r^3} \\ - 3,267165 \cdot 0,977514 \cdot 2(A' - B) \frac{L'}{r^3} - 4,667171 \cdot 2(A - B) \frac{L}{r^3}. \end{cases}$$

Dans toutes ces équations, les valeurs $\frac{L'}{r^3}$ et $\frac{L}{r^3}$ sont relatives aux moyennes distances de la Lune et du Soleil à la Terre.

Le système + (1) + (2) des équations précédentes donne

$$(5) \quad 778^m, 708 = 120,426277 \cdot 1,022486 \cdot 2A' \frac{L'}{r^3} + 117,893323 \cdot 2A \frac{L}{r^3};$$

le système des équations + (3) + (4) donne

$$(6) \quad 364^m, 798 = 120,460155 \cdot 0,977514 \cdot 2A' \frac{L'}{r^3} - 117,936626 \cdot 2A \frac{L}{r^3}.$$

De ces deux équations on tire

$$2A' \frac{L'}{r^3} = 4^m, 74788, \quad 2A \frac{L}{r^3} = 1^m, 64658.$$

Le système des équations + (1) - (2) donne

$$(7) \begin{cases} 43^m, 891 = 6,666885 \cdot 1,022486 \cdot 2A' \frac{L'}{r^3} + 9,371611 \cdot 2A \frac{L}{r^3} \\ - 6,666885 \cdot 1,022486 \cdot 2 \frac{A' - B}{A'} \cdot A' \frac{L'}{r^3} - 9,371611 \cdot 2 \frac{A - B}{A} \cdot A \frac{L}{r^3}, \end{cases}$$

le système des équations + (4) - (3) donne

$$(8) \quad \begin{cases} 43^m,098 = 6,534329.0,977514.2A' \frac{L'}{r^3} + 9,334342.2A \frac{L}{r^3} \\ - 6,534329.0,977514.2 \frac{A'-B}{A'} \frac{L'}{r^3} - 9,334842.2 \frac{A-B}{A} \frac{L}{r^3}. \end{cases}$$

En substituant pour $2A' \frac{L'}{r^3}$ et $2A \frac{L}{r^3}$ leurs valeurs précédentes, l'équation (7) donne

$$(9) \quad 3,9054 = 32,3653 \frac{A'-B}{A'} + 15,4311 \frac{A-B}{A},$$

et l'équation (8) donne

$$(10) \quad 2,5983 = 30,3266 \frac{A'-B}{A'} + 15,3697 \frac{A-B}{A}.$$

Si l'on suppose $A' = (1+x)B$, x sera l'accroissement de A' dû à la rapidité du mouvement de l'astre L' dans son orbite; alors on a

$$\frac{A'-B}{A'} = \frac{x}{1+x}.$$

On peut supposer ici, sans erreur sensible, cet accroissement proportionnel à la vitesse angulaire m' de l'astre dans son orbite et, dans ce cas,

$$A-B = \frac{m}{m'} x,$$

ce qui donne

$$\frac{A-B}{A} = \frac{mx}{m'-mx} = \frac{m}{m'} x,$$

en négligeant le carré de la petite fraction $\frac{m}{m'}$. On peut même supposer, sans erreur sensible, vu la petitesse de x ,

$$\frac{m}{m'} x = \frac{m}{m'} \frac{x}{1+x};$$

de plus

$$\frac{m}{m'} = 0,0748.$$

En ajoutant donc les équations (9) et (10), on aura

$$x = 0,11119,$$

ce qui donne

$$2B \frac{L'}{r^3} = 4^m,27279,$$

$$2B \frac{L}{r^3} = 1^m,63289$$

et, par conséquent,

$$\frac{\frac{L'}{r^3}}{\frac{L}{r^3}} = 2,6167.$$

On voit, par les équations (9) et (10), qu'une valeur positive de x , peu différente de $\frac{1}{9}$, est à la fois indiquée par les observations des marées syzygies et des marées quadratures.

On aura, d'une manière approchée, la probabilité de l'existence d'une valeur positive de x , en observant que, si elle n'existait pas, l'erreur de la différence 43,891 des valeurs de $2ix$, relatives aux syzygies des équinoxes et des solstices, serait 3,9054 ou au-dessus, et, par le n° 3, sa probabilité est $\frac{1}{223,6}$. L'erreur de la différence 43,098 des valeurs de $2ix$ relatives aux quadratures des solstices et des équinoxes serait 2,5983 ou au-dessus, et, par le n° 5, sa probabilité est $\frac{1}{11,4567}$. La probabilité de l'existence simultanée de ces erreurs est le produit des deux probabilités précédentes : elle est donc $\frac{1}{2562}$, en sorte que la probabilité d'une valeur positive de x est $\frac{2561}{2562}$.

Les observations anciennes des marées syzygies m'ont donné, pour x , 0,10637 (*Mécanique céleste*, Livre IV, n° 26). Les observations anciennes des marées quadratures m'ont donné, pour x , 0,1061, ce qui diffère très peu de la valeur précédente de x , qui me semble préférable, à cause du plus grand nombre d'observations que nous venons d'employer. L'existence d'une valeur de x positive étant donc à la fois prouvée par les observations anciennes et modernes, il me semble impossible de la révoquer en doute.

Les observations anciennes m'ont donné

$$2A' \frac{L'}{r^3} = 4^m, 6740, \quad \frac{2AL}{r^3} = 1^m, 5750;$$

ces valeurs diffèrent peu des précédentes, $4^m, 74788$ et $1^m, 64658$. La somme des valeurs de $48z$ est $416,156$ par les observations anciennes, et $430,825$ par les observations modernes; il faut donc, pour comparer les valeurs anciennes et modernes de $2A' \frac{L'}{r^3}$ et de $\frac{2AL}{r^3}$, multiplier les valeurs modernes par la fraction $\frac{416,156}{430,825}$, et alors elles deviennent $4^m, 5968$ et $1^m, 5905$; mais, les valeurs modernes étant fondées sur un plus grand nombre d'observations, elles doivent être préférées.

Le rapport de $\frac{L'}{r^3}$ à $\frac{L}{r^3}$ est un élément important de l'Astronomie. Le rapport précédent donne $\frac{1}{69,3}$ pour le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre; il donne encore, en secondes décimales, le coefficient de la nutation égal à $29^s, 940$, ce qui correspond à $9^s, 70$ en secondes sexagésimales.

Newton a déterminé le rapport des actions du Soleil et de la Lune sur la mer dans la proposition 37 du Livre III des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*. Il suppose, d'après les observations de Sturm, qu'aux jours des équinoxes la marée, à Bristol, est de quinze pieds dans les quadratures et de vingt-cinq pieds dans les syzygies, et il en conclut que, dans les moyennes distances du Soleil et de la Lune à la Terre, les actions de ces astres sur la mer sont dans le rapport de 1 à 4,4815. Pour déterminer ce rapport, Newton observe que le maximum des marées syzygies et le minimum des marées quadratures n'ont pas lieu les jours mêmes de ces phases, mais environ quarante-trois heures sexagésimales après leur arrivée. A ce moment, la Lune s'est éloignée sensiblement du Soleil, ce qui, selon ce grand géomètre, doit affaiblir l'action solaire dans le rapport du cosinus du double de cette distance à l'unité. Mais cela n'est pas exact; et l'on a vu précédemment qu'il faut, pour avoir le maximum ou le minimum des marées, supposer cette distance nulle, comme au moment de la

phase, et employer les déclinaisons des astres qui ont lieu à ce moment. C'est ce que Newton avait fait dans la première édition de son Ouvrage. Il a pensé, dans les deux éditions suivantes, qu'il obtiendrait plus d'exactitude en considérant les actions des astres à l'instant même de la marée. Ce n'est pas le seul exemple des erreurs que l'on commet en cherchant à s'approcher de la vérité.

IX. Considérons maintenant le coefficient de $2i\zeta$; ce coefficient, par ce qui précède, est, dans les syzygies des équinoxes,

$$(x) \quad \frac{2a'(a+b' \frac{m'+m}{m'-m})}{a+a'+b'} \left(2\pi \frac{m'-m}{n-m} \right)^2 \left[1 + \frac{2a'(m'-m) - 2mb'}{(n-m)(a+a'+b')} \right];$$

on peut faire disparaître le terme $\frac{2a'(m'-m) - 2mb'}{(n-m)(a+a'+b')}$, en observant que le retard journalier des marées syzygies est, à fort peu près, $\frac{a'(m'-m) - mb'}{(n-m)(a+a'+b')}$, comme on le verra dans la suite; d'où il suit que, si l'on prend pour unité de temps, comme nous l'avons fait ci-dessus, l'intervalle de deux marées syzygies d'un jour à l'autre, et si l'on désigne par v le mouvement synodique de la Lune dans cet intervalle, la formule de la hauteur des marées deviendra, pour le nombre t d'intervalles, à partir du maximum,

$$(y) \quad a + a' + b' - \frac{2a'(a+b' \frac{m'+m}{m'-m})}{a+a'+b'} t^2 v^2.$$

Voyons maintenant comment on peut y faire entrer les inégalités du mouvement lunaire. Si l'on développe, dans une série d'angles croissants proportionnellement au temps, la fonction

$$2 \frac{L'}{r^3} \left[\cos^2 \frac{e'}{2} \cos(2nt + 2\omega - 2\varphi') + \frac{1}{2} \sin^2 e' \cos(2nt + 2\omega) \right] \\ + 2 \frac{L}{r^3} \left[\cos^2 \frac{e}{2} \cos(2nt + 2\omega - 2\varphi) + \frac{1}{2} \sin^2 e \cos(2nt + 2\omega) \right],$$

en désignant cette série par

$$b \cos(2nt + 2\omega) + b' \cos(2nt + 2\omega - 2mt) \\ + b'' \cos(2nt + 2\omega - 2m't) + b''' \cos(2nt + 2\omega - 2m''t) + \dots,$$

chaque de ces termes produira un flux partiel, dont la somme sera de la forme

$$\begin{aligned} & b \cos(2nt - 2\gamma) + a \cos(2nt - 2mt - 2\lambda) \\ & + a' \cos(2nt - 2m't - 2\lambda') \\ & + a'' \cos(2nt - 2m''t - 2\lambda'') + \dots \end{aligned}$$

Le plus grand flux possible a lieu lorsque tous les cosinus deviennent égaux à l'unité. Supposons qu'à partir de cet état on ait

$$\begin{aligned} nt - \gamma &= s\pi + p, \\ nt - mt - \lambda &= i\pi + q, \\ nt - m't - \lambda' &= i'\pi + q', \\ &\dots \end{aligned}$$

En réduisant en série l'expression précédente de la hauteur des marées, elle deviendra

$$b + a + a' + a'' + \dots - 2bp^2 - 2aq^2 - 2a'q'^2 - \dots$$

La supposition d'une grande marée donne la différentielle de cette fonction nulle, et par conséquent

$$bp = -aq = -a'q' = -a''q'' = \dots,$$

à cause de

$$dp = dq = dq' = \dots,$$

toutes ces différentielles étant à très peu près égales à $n dt$. Maintenant les équations

$$\begin{aligned} nt - \gamma &= s\pi + p, \\ nt - mt - \lambda &= i\pi + q \end{aligned}$$

donnent

$$q = p \frac{n-m}{n} - \frac{ms\pi}{n} - (i-s)\pi - \lambda + \frac{n-m}{n} \gamma.$$

En faisant $i-s=s'$ et déterminant γ et λ , de manière que $-s'\pi - \lambda + \frac{n-m}{n} \gamma$ soit nul, on aura, à très peu près,

$$q = p - \frac{ms\pi}{n},$$

à cause de la petitesse de m relativement à n ; on aura pareillement

$$q' = p - \frac{m's\pi}{n},$$

et alors on aura

$$p = \frac{s\pi}{n} \frac{am + a'm' + a''m'' + \dots}{b + a + a' + a'' + \dots} = \frac{s\pi}{n} p',$$

en exprimant par p' la quantité

$$\frac{am + a'm' + \dots}{b + a + a' + \dots}$$

L'expression de la hauteur de la mer devient ainsi

$$b + a + a' + \dots - 2\left(\frac{s\pi}{n}\right)^2 [bp'^2 + a(p'-m)^2 + a'(p'-m')^2 + \dots].$$

Considérons le terme

$$2 \frac{L'}{r^3} \cos^2 \frac{\epsilon'}{2} \cos(2nt + 2\omega - 2\varphi')$$

de l'expression des forces perturbatrices. Soit $h \sin(lt - \delta')$ une des inégalités de φ' qui devienne nulle constamment au moment des syzygies. En n'ayant égard qu'à cette inégalité et négligeant le carré de h , le terme précédent devient

$$\begin{aligned} 2 \frac{L'}{r^3} \cos^2 \frac{\epsilon'}{2} [& \cos(2nt + 2\omega - 2m't) \\ & + h \cos(2nt + 2\omega - 2m't - lt + \delta') \\ & - h \cos(2nt + 2\omega - 2m't + lt - \delta')], \end{aligned}$$

ce qui produit, dans l'expression de la hauteur de la mer, trois termes de la forme

$$(i) \quad \begin{cases} a' \cos(2nt - 2m't - 2\lambda') \\ + a'h' \cos(2nt - 2m't - lt - 2\lambda'') \\ - a'h' \cos(2nt - 2m't + lt - 2\lambda''). \end{cases}$$

Il en résulte, par ce qui précède, dans l'expression du maximum de la marée, les trois termes $a' + a'h' - a'h''$; h' et h'' seraient égaux à h , si

l'action des astres n'était point accrue par la rapidité de leur mouvement. Mais on a vu précédemment que cette augmentation, que nous avons désignée par x , est $\frac{1}{2}$ environ pour la Lune, d'où il suit que l'on a, à fort peu près, en supposant, comme nous l'avons fait, l'accroissement proportionnel au mouvement de l'astre dans son orbite,

$$a'h' = a'h + \frac{1}{2m'} x a'h,$$

$$a'h'' = a'h - \frac{1}{2m'} x a'h,$$

et qu'ainsi les trois termes

$$a' + a'h' - a'h''$$

se réduisent à

$$a' + \frac{1}{m'} x a'h.$$

Le second terme de cette quantité peut être négligé, sans erreur sensible, relativement à l'argument de la variation.

Les trois termes précédents produisent encore, dans l'expression de la hauteur de la marée, la quantité

$$-2 \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \left[a'(p' - m')^2 + a'h' \left(p' - m' - \frac{t}{2} \right) - a'h'' \left(p' - m' + \frac{t}{2} \right) \right];$$

elle se réduit, à très peu près, à

$$-2 \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \left\{ a'(p' - m' - hl)^2 + x \frac{t}{m'} a'h \left[(p' - m')^2 + \frac{t^2}{4} \right] \right\}.$$

Ce dernier terme peut être négligé sans erreur sensible. D'ailleurs, hl est l'accroissement de la vitesse angulaire de la Lune, en vertu de l'argument $h \sin(lt - \delta)$. Il suffit donc, pour avoir égard à cet argument, de prendre pour m' la vitesse angulaire de la Lune au moment de la syzygie.

La valeur de p' est

$$\frac{am + a'm' + a''m' + \dots}{b + a + a' + a'' + \dots};$$

les trois termes (t) introduisent dans le numérateur de cette expression les suivants :

$$a'm' + a'h' \left(m' + \frac{t}{2} \right) - a'h'' \left(m' - \frac{t}{2} \right);$$

en substituant pour $a'h'$ et $a'h''$ leurs valeurs précédentes et négligeant x , ces trois termes se réduisent à $a'm' + a'hl$, ce qui revient encore à prendre dans p' , au lieu de m' , la vitesse angulaire de la Lune.

De là il suit que l'on aura égard à toutes les inégalités du mouvement φ' de la Lune dans son orbite, en supposant, dans la formule (y) , que v est le mouvement angulaire de cet astre pendant l'intervalle t .

Considérons maintenant l'influence des variations de r' , et supposons que $\frac{h}{r'} \cos(lt - \delta)$ soit une des inégalités de $\frac{1}{r'}$ ou de la parallaxe lunaire : il en résultera, dans la fonction

$$2 \frac{L'}{r'^2} \cos^2 \frac{t'}{2} \cos(2nt + 2\omega - 2\varphi'),$$

les trois termes

$$2 \frac{L'}{r'^2} \cos^2 \frac{t'}{2} \left[\cos(2nt + 2\omega - 2m't) + \frac{1}{2} h \cos(2nt + 2\omega - 2m't - lt + \delta') + \frac{1}{2} h \cos(2nt + 2\omega - 2m't + lt - \delta') \right],$$

ce qui produit, dans l'expression de la hauteur de la mer, les trois inégalités

$$a' \cos(2nt - 2m't - \lambda') + \frac{1}{2} a'h' \cos(2nt - 2m't - lt - 2\lambda') + \frac{1}{2} a'h'' \cos(2nt - 2m't + lt - 2\lambda''),$$

et, par conséquent, dans l'expression du maximum des marées, les trois termes

$$a' + \frac{1}{2} a'h' + \frac{1}{2} a'h''$$

ou simplement

$$a'(1 + 3h),$$

en substituant pour $a'h'$ et $a'h''$ leurs valeurs précédentes. On aura

donc égard à la variation du rayon vecteur dépendante de h , en augmentant la parallaxe lunaire de la quantité h .

Les termes précédents produisent encore, dans l'expression des marées, la quantité

$$-2\left(\frac{s\pi}{n}\right)^2 \left[a'(p' - m')^2 + \frac{3}{2}a'h'(p' - m' - \frac{l'}{2})^2 + \frac{3}{2}a'h^2(p' - m' + \frac{l'}{2})^2 \right].$$

Cette quantité se réduit, à fort peu près, à

$$-2\left(\frac{s\pi}{n}\right)^2 \left[a'(1 + 3h)(p' - m')^2 + 3a'h\frac{l'^2}{4} \right].$$

Le premier terme revient à augmenter, dans le calcul de a' ou de l'action lunaire, la parallaxe lunaire de h . Le second terme devient

$$-6a'h\left(\frac{s\pi l'}{2n}\right)^2.$$

Le terme

$$\pm \frac{1}{2} \frac{L'}{r'^2} \sin^2 \epsilon' \cos(2nt + 2\omega)$$

de l'expression des forces perturbatrices ajoutera, à fort peu près, à la hauteur des marées les termes

$$\pm \frac{a'(1 + 3h) \sin^2 \epsilon'}{2(1 + x) \cos^2 \frac{\epsilon'}{2}} \left[1 - 6h \left(\frac{1}{n} \frac{s\pi l'}{2} \right)^2 \right].$$

De là il suit que l'on aura égard à la variation de r' en substituant, pour la parallaxe lunaire, sa valeur réduite dans une série ordonnée par rapport aux puissances du mouvement angulaire de la Lune pendant l'intervalle t , et en négligeant les puissances supérieures au carré de t .

Le seul terme de φ' qui soit constamment nul dans les syzygies et dans les quadratures est celui qui dépend de l'argument de la variation, et dans lequel $l' = 2m' - 2m$. Alors la variation de r' produit le terme

$$-6a'h \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \epsilon'}{\cos^2 \frac{\epsilon'}{2}} \right) l'^2 v^2.$$

Dans les syzygies, il faut ici, pour avoir a' , multiplier la valeur précédente de $2A' \frac{L'}{r'^2}$ par $1,022486 \frac{p' + q'}{2}$ et multiplier la valeur moyenne de v par $1,02091$ pour avoir égard à l'argument de la variation. On aura

$$a'h \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \epsilon'}{\cos^2 \frac{\epsilon'}{2}} \right)$$

en multipliant la valeur de $2A' \frac{L'}{r'^2} \cdot 1,022486$ par $p'h$ dans les syzygies équinoxiales, et $q'h$ dans les syzygies solsticiales. $3h$ est égal à $0,022486$.

¶ Dans les quadratures, on aura a' en multipliant la valeur de $2A' \frac{L'}{r'^2}$ par

$$\frac{p'_1 + q'_1}{2} 0,975514.$$

On aura v en multipliant sa valeur moyenne par $0,97909$; $3h$ devient négatif et égal à $-0,022486$. On aura

$$a'h \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \epsilon'}{\cos^2 \frac{\epsilon'}{2}} \right)$$

en multipliant la valeur de $2A' \frac{L'}{r'^2} \cdot 0,975514$ par $q'h$ dans les quadratures équinoxiales, et par $p'h$ dans les quadratures solsticiales.

On aura généralement

$$a + a' + b' = 2ix$$

et, par conséquent,

$$a' + b' = 2ix - a';$$

et cela a lieu dans les équinoxes où b est positif, et dans les solstices où il est négatif. La formule (y) devient ainsi

$$(z) \quad 2ix = \frac{2a'(2ix - a')}{2ix} l'^2 v^2;$$

cette formule s'étend aux quadratures comme aux syzygies : $2ix - a'$ est négatif dans les quadratures; v est le moyen mouvement synodique de la Lune dans un intervalle de $11,026736$ pour les syzygies équi-

noxiales, de $1^m,028076$ pour les syzygies solsticiales, de $1^m,056223$ pour les quadratures équinoxiales et de $1^m,04796$ pour les quadratures solsticiales. Cela posé, on trouve dans les syzygies équinoxiales

$$2i\delta = 9^m,1065.$$

Les observations nous ont donné $8^m,9446$. La différence $0^m,01619$ est dans les limites des erreurs des approximations et des observations.

On trouve par la formule, dans les syzygies solsticiales,

$$2i\delta = 6^m,5817.$$

Les observations nous ont donné $5^m,9273$. La différence $0^m,5546$ est encore dans les limites des erreurs des approximations et des observations.

La formule donne, dans les quadratures équinoxiales,

$$2i\delta = 19^m,4393.$$

Les observations nous ont donné $20^m,005$. La différence $0^m,5658$ est encore dans les limites des erreurs des approximations et des observations.

Dans les quadratures solsticiales, la formule donne

$$2i\delta = 9^m,2722.$$

Les observations nous ont donné $9^m,203$, ce qui s'accorde bien avec la théorie.

X. Je vais présentement considérer l'influence des distances de la Lune à la Terre sur les marées. J'ai choisi, pour cela, parmi les syzygies équinoxiales considérées ci-dessus, les dix-huit suivantes, dans lesquelles la Lune était vers son apogée ou vers son périgée :

	Apogée.	Périgée.
1807.....	9 mars 8 avril 16 septembre	23 mars 2 septembre 1 ^{re} octobre
1808.....	27 mars	12 mars 10 avril
1811.....	17 septembre	2 septembre 2 octobre
1812.....	28 mars 5 septembre 5 octobre	13 mars 11 avril 20 septembre

J'ai pris, comme ci-dessus, dans chaque équinoxe, l'excès de la haute marée du soir sur la basse marée du matin, du jour qui précède la syzygie, du jour même de la syzygie et des quatre jours qui la suivent, et j'ai doublé les résultats relatifs à la syzygie la plus voisine de l'équinoxe. En faisant ensuite une somme des résultats relatifs aux mêmes jours, j'ai obtenu les résultats suivants :

	Apogée.	Périgée.
1807.....	20,040 21,430 21,750 21,615 20,970 19,790	24,385 27,590 29,710 29,105 27,860 24,280
1808 et 1811.....	20,290 21,370 21,890 21,740 20,750 19,360	23,641 27,405 29,205 29,035 27,925 25,495
1812.....	19,944 21,340 22,459 22,186 21,403 20,533	23,267 27,108 29,053 29,344 28,123 25,018

Si l'on ajoute les hauteurs correspondantes de chacun de ces trois groupes, on obtient les sommes suivantes :

Apogée.	Périgée.
^m 60,274	^m 71,993
64,146	82,103
66,099	87,768
65,541	87,484
63,123	83,908
59,683	73,803

Si l'on détermine la loi de ces nombres par les formules du n° I, on trouve

$$\text{Apogée... } 65^m,966 - 0^m,96496(t - 2,40281)^2,$$

$$\text{Périgée... } 88^m,457 - 2^m,52748(t - 2,5999)^2,$$

t étant, comme dans le n° I, le nombre des intervalles pris pour unité et écoulés depuis la haute mer du soir du jour qui précède la syzygie.

Si l'on désigne toujours par $2iz$ et $2i\bar{z}$ ce que nous avons désigné par là dans les n° I et suivants, on aura $65^m,981$ et $80^m,497$ pour les valeurs respectives de $2iz$ dans les hauteurs précédentes des marées apogées et périgées. La valeur de $2i\bar{z}$ est près de trois fois plus grande dans le périgée que dans l'apogée : ainsi l'effet des distances de la Lune à la Terre se manifeste, non seulement dans les hauteurs des marées, mais encore d'une manière fort remarquable dans la loi de variation de ces hauteurs. La somme des deux valeurs de $2iz$ est $154^m,478$. Elle se rapporte à vingt-quatre syzygies équinoxiales; elle doit être, par conséquent, les $\frac{2}{3}$ de la valeur de $2iz$ relative aux soixante-quatre syzygies équinoxiales du n° I, et qui est égale à $411^m,359$. Ces $\frac{2}{3}$ sont $154^m,260$, ce qui diffère très peu de la somme précédente. La somme des valeurs de $2i\bar{z}$, relative aux marées apogées et périgées précédentes, est $3^m,5047$. La valeur de $2i\bar{z}$, relative aux marées syzygies du n° I, est $8^m,9446$, dont les $\frac{2}{3}$ sont $3^m,4723$, ce qui ne diffère que de $\frac{1}{100}$ environ de la somme précédente.

Comparons maintenant les expressions précédentes à la théorie. La différence des deux valeurs de $2iz$ est $22^m,291$; c'est l'effet du changement de la distance de la Lune à la Terre. Par ce qui précède, la hauteur de la marée due à l'action de la Lune sur la mer est, en

négligeant le carré de x ,

$$2A' \frac{L'}{r'^3} (1+3h) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \varepsilon'}{\cos^2 \frac{\varepsilon'}{2}} \right) \cos^4 \frac{\varepsilon'}{2} \\ + 2x \frac{hL}{m'} A' \frac{L'}{r'^3} (1+3h) \cos^4 \frac{\varepsilon'}{2} - 2x A' \frac{L'}{r'^3} (1+3h) \frac{1}{\cos^2 \frac{\varepsilon'}{2}} \cos^4 \frac{\varepsilon'}{2},$$

r étant la moyenne distance de la Lune. Or on a, à très peu près, en ayant égard à l'équation du centre et à l'évection,

$$\frac{hL}{m'} + 1 = \frac{r'^2}{r^2},$$

ensuite

$$1+3h = \frac{r'^3}{r^3}.$$

L'expression précédente devient ainsi

$$2B \frac{L'}{r'^3} p' \frac{r'^3}{r^3} + 2B \frac{L'}{r'^3} x \frac{r'^3}{r^3} p' \cos^4 \frac{\varepsilon'}{2},$$

p' étant le carré du cosinus de la déclinaison de la Lune à l'instant de la syzygie. Il suit de là que l'on aura la première partie de l'effet du changement de la distance lunaire : 1° en multipliant dans chaque syzygie le carré du cosinus de la déclinaison de la Lune, à l'instant de la syzygie, par le cube du rapport de son demi-diamètre vrai à son demi-diamètre moyen égal à $2881^r,8$; 2° en faisant une somme de ces produits relatifs aux douze syzygies périgées que nous avons considérées et dans chacune desquelles le demi-diamètre vrai a surpassé 3000^r , les syzygies dont on a doublé les résultats comptant toujours pour deux; 3° en retranchant de cette somme la somme des mêmes produits relatifs aux douze syzygies apogées; 4° enfin, en multipliant la différence de ces deux sommes par $2B \frac{L'}{r^3}$. On trouve ainsi pour ce produit

$$4,59027 \cdot 2B \frac{L'}{r^3}.$$

Pour avoir l'autre partie de l'effet de la variation des distances lunaires, il faut : 1° faire une somme des produits du carré du cosinus de la déclinaison lunaire par la cinquième puissance du rapport du demi-diamètre vrai de la Lune dans chaque syzygie périgée à son demi-diamètre moyen, 2881^r,8, et en retrancher la même somme relative aux syzygies apogées; 2° multiplier la différence par

$$2B \frac{L'}{r^3} x \cos^2 \frac{e'}{2}.$$

On trouve ainsi pour ce produit

$$7,86126x.2B \frac{L'}{r^3} \cos^2 \frac{e'}{2}.$$

On voit que ces résultats sont conformes à ceux que j'ai obtenus par une autre méthode dans le n° 28 du Livre IV de la *Mécanique céleste*. On peut prendre, pour $\cos^2 \frac{e'}{2}$, la quantité $\frac{p'+q'}{128}$, p' et q' étant les valeurs données dans le n° VIII. On aura ainsi, pour l'effet dû au changement des distances lunaires,

$$4,59027 \frac{2BL'}{r^3} + 7,86126x \frac{2BL'}{r^3}$$

ou

$$4,59027 \frac{2A'L'}{r^3} + 2,8058x \frac{2BL'}{r^3}.$$

Substituant pour $2A' \frac{L'}{r^3}$ sa valeur trouvée dans le n° VIII, on aura

$$21^m,794 + 2,8058x \frac{2BL'}{r^3},$$

quantité qu'il faut égaler à l'effet observé, 22^m,291, ce qui donne

$$x.2,8058 \frac{2BL'}{r^3} = 0^m,497.$$

Ainsi l'accroissement de l'action lunaire est encore indiqué par la comparaison des observations apogées et périgées lunaires. Les ob-

servations anciennes, que j'ai discutées dans le n° 28 du Livre IV de la *Mécanique céleste*, m'avaient paru indiquer le contraire; mais j'avais pris pour 4ix la somme des marées des deux jours qui suivent la syzygie; et l'on voit, par ce qui précède, que cette somme est sensiblement plus petite que 4ix dans les observations périgées, où la diminution des hauteurs des marées à partir du maximum est très rapide et beaucoup plus grande que dans les observations apogées. Il faut donc augmenter la différence 39^m,6961 des marées syzygies apogées et périgées, donnée dans le numéro cité; et, d'après les résultats précédents, cette augmentation est 1^m,220. Alors on a, par le numéro cité,

$$\frac{x}{1+x} 25^m,819 = 0^m,354;$$

ce qui donne, pour x , une valeur positive, et ce qui indique, par conséquent, un accroissement dans l'action lunaire dû aux circonstances locales. Mais toutes ces observations apogées et périgées sont trop peu nombreuses pour déterminer la valeur de x : il vaut beaucoup mieux employer, pour cet objet, les observations des équinoxes et des solstices. Peut-être aussi n'est-il pas très exact de supposer, comme nous le faisons, que l'accroissement de l'action d'un astre, dû aux circonstances locales, est proportionnel au mouvement de l'astre dans son orbite.

Nous allons maintenant comparer à la théorie la loi de diminution des marées, à mesure qu'elles s'éloignent de leur maximum dans l'apogée et dans le périgée de la Lune. Considérons d'abord l'apogée; cette diminution est composée de deux parties: la première est égale, par ce qui précède, à

$$-\frac{2a'(a+b')}{a+a'+b'} e^2,$$

v étant le mouvement réel de la Lune dans l'intervalle d'une marée syzygie à la marée correspondante du jour suivant. On aura a' en multipliant $2A' \frac{L'}{r^3} \cos^2 \frac{e'}{2}$ par 12 et par le cube du rapport du demi-diamètre lunaire dans les douze marées syzygies apogées précédentes à

son demi-diamètre moyen; et l'on peut prendre pour $\cos \frac{t'}{2}$ le rapport de $\frac{p' + q'}{2}$ à p' ; p' et q' étant donnés par le n° 7. Il faut employer pour e le mouvement de la Lune dans cette syzygie apogée, pendant l'intervalle t , qui est ici 11,0227331, et qui devient 11,0305744 dans les syzygies périgées.

La seconde partie est due à la variation de la distance lunaire, à partir de l'apogée, en ayant égard aux inégalités de l'équation du centre, de l'évection et de la variation. Cela posé, on trouve $-0^m,8711$ pour le coefficient de t^2 ; un calcul semblable donne $-2^m,9635$ pour ce coefficient dans les observations périgées. Les observations nous ont donné $-0^m,96496$ et $-2^m,52748$. La différence tient aux erreurs des observations et des approximations, et surtout à ce que, dans les observations précédentes, la Lune n'était point exactement, soit à son périgée, soit à son apogée, comme nous l'avons supposé dans le calcul.

XI. Je vais présenter ici quelques réflexions sur l'accroissement de l'action respective des astres par les circonstances locales. Supposons que le port soit situé à la jonction de deux canaux, qui lui transmettent le flux qui a lieu à leur embouchure. Soient

$$A \cos(2nt - 2mt - 2\lambda)$$

l'expression du flux transmis par le premier canal, et

$$B \cos(2nt - 2mt - 2\lambda')$$

le flux transmis par le second; le flux total dans le port sera exprimé par

$$C \cos(2nt - 2mt - 2Q),$$

en faisant

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(2\lambda' - 2\lambda)},$$

$$\sin 2Q = \frac{A \sin 2\lambda + B \sin 2\lambda'}{C}.$$

Les constantes A , B , λ et λ' dépendent de l'intensité du flux aux embouchures des canaux, de la longueur et de la figure de ces canaux.

Cependant, toutes choses égales d'ailleurs, A et B , et par conséquent C , sont proportionnels à la masse L de l'astre attirant; car, en doublant cette masse, on ne fait que réunir les deux flux partiels que produit chacune de ces moitiés. λ et λ' relatifs à chacun de ces flux ont également lieu pour le flux total; ils ne varient donc d'un astre à un autre qu'à raison de la différence des mouvements propres de ces astres. Ces mouvements étant supposés fort petits par rapport au mouvement de rotation de la Terre, il est naturel de faire

$$\lambda = (n - m)T, \quad \lambda' = (n - m)T,$$

T et T' étant les temps que les flux respectifs emploient à se transmettre des embouchures au port, et de supposer, comme nous l'avons fait, l'accroissement de l'action de l'astre dû aux circonstances locales proportionnel à m . Mais on voit que cela n'est pas rigoureux, en admettant même le principe de la coexistence des oscillations très petites, principe qui, vu la grandeur des oscillations de la mer dans le port de Brest, ne leur est pas exactement applicable; mais il résulte, de la précision avec laquelle les formules précédentes représentent les observations, que ces causes d'erreur sont peu considérables.

Des heures et des intervalles des marées.

XII. Pour déterminer les heures et les intervalles des marées, j'ai considéré, dans les syzygies que j'ai employées précédemment pour leurs hauteurs, les heures des basses mers du matin et des hautes mers du soir, des premiers et des seconds jours qui suivent ceux des syzygies, en doublant toujours les résultats relatifs à la syzygie la plus voisine de l'équinoxe ou du solstice. J'ai fait une somme des heures relatives à chaque année, et, en la divisant par 8, nombre des syzygies correspondantes, j'ai obtenu les résultats suivants. Les heures observées ont été comptées en temps vrai; mais il est facile de s'assurer que l'équation du temps disparaît des heures suivantes conclues de l'ensemble des syzygies.

SYZYGIES DES ÉQUINOXES.

Années.	Heure du premier jour après la syzgie.	Accroissement de l'heure au second jour.	Premier jour.	Accroissement.
	<i>Basse mer.</i>		<i>Haute mer.</i>	
1807.....	0,41988	0,027214	0,67795	0,06393
1808.....	0,42769	0,025608	0,68442	0,023785
1809.....	0,42418	0,025304	0,67943	0,021593
1810.....	0,43116	0,026997	0,68837	0,025781
1811.....	0,42448	0,025347	0,68195	0,025000
1812.....	0,42873	0,027691	0,68533	0,027604
1813.....	0,43611	0,028559	0,69262	0,027344
1814.....	0,42899	0,027170	0,68551	0,026476
Moyennes de ces valeurs.	0,42765	0,026736	0,68438	0,025901

SYZYGIES DES SOLSTICES.

Années.	Heure du premier jour après la syzgie.	Accroissement de l'heure au second jour.	Premier jour.	Accroissement.
	<i>Basse mer.</i>		<i>Haute mer.</i>	
1807.....	0,43355	0,026953	0,68841	0,026736
1808.....	0,42444	0,028342	0,68294	0,028212
1809.....	0,42044	0,026693	0,67769	0,028082
1810.....	0,42930	0,028082	0,68646	0,025694
1811.....	0,42036	0,027908	0,67791	0,028038
1812.....	0,42778	0,028906	0,68620	0,027604
1813.....	0,42813	0,028819	0,68498	0,028472
1814.....	0,42153	0,028906	0,67830	0,028906
Moyennes de ces valeurs.	0,42556	0,028076	0,68286	0,027718

Quadratures.

J'ai considéré pareillement, dans les quadratures que j'ai employées pour les hauteurs, les heures des hautes mers du matin et des basses mers du soir, du premier et du second jour qui suivent la quadrature, en doublant encore les résultats relatifs à la quadrature la plus voi-

sine de l'équinoxe ou du solstice. J'ai fait une somme des heures relatives à chaque année, et, en la divisant par le nombre des quadratures correspondantes, j'ai obtenu les résultats suivants :

QUADRATURES DES ÉQUINOXES.

Années.	Heure du premier jour après la quadrature.	Accroissement de l'heure au second jour.	Premier jour.	Accroissement.
	<i>Haute mer.</i>		<i>Basse mer.</i>	
1807.....	0,38589	0,061675	0,64948	0,063021
1808.....	0,39891	0,056250	0,66441	0,054123
1809.....	0,39097	0,055035	0,65417	0,057248
1810.....	0,40278	0,057118	0,66563	0,057639
1811.....	0,39058	0,054080	0,65655	0,053689
1812.....	0,38941	0,053038	0,65148	0,054774
1813.....	0,40439	0,052432	0,66658	0,053312
1814.....	0,39792	0,060156	0,65981	0,063715
Moyennes de ces valeurs.	0,39511	0,056223	0,65851	0,057178

QUADRATURES DES SOLSTICES.

Années.	Heure du premier jour après la quadrature.	Accroissement de l'heure au second jour.	Premier jour.	Accroissement.
	<i>Haute mer.</i>		<i>Basse mer.</i>	
1807.....	0,40469	0,050521	0,66806	0,048611
1808.....	0,40004	0,047129	0,66693	0,044924
1809.....	0,39470	0,045269	0,65816	0,045139
1810.....	0,40360	0,048437	0,66641	0,047396
1811.....	0,40147	0,044097	0,66220	0,046137
1812.....	0,40312	0,049653	0,66545	0,050347
1813.....	0,41398	0,047483	0,67596	0,047396
1814.....	0,41059	0,051042	0,67352	0,049132
Moyennes de ces valeurs.	0,40402	0,047960	0,66709	0,047385

XIII. L'ensemble des observations syzygies donne, en prenant un milieu entre les retards journaliers des hautes et basses mers,

0,0271075

pour le retard journalier moyen. Les observations anciennes m'ont donné, dans le Livre IV de la *Mécanique céleste*,

$$0^h, 027052$$

pour ce retard, ce qui s'accorde aussi bien qu'on peut le désirer.

Les observations précédentes donnent $0^h, 42660$ pour l'heure de la basse mer du matin du jour qui suit la syzygie. L'heure de la basse mer du matin du jour de la syzygie est donc $0^h, 39949$. Dans ces observations, la syzygie a précédé la haute mer du soir de $0^h, 1229$; elle a donc suivi la basse mer du matin de $0^h, 1339$. De là il est facile de conclure que, si la syzygie arrivait au moment de la basse mer du matin, l'heure de cette basse mer serait $0^h, 40312$. Il résulte du n° 35 du Livre IV de la *Mécanique céleste* que, par les observations anciennes, cette heure est $0^h, 98826$. La différence $486''$ me paraît tenir à ce que la méridienne dont on fit usage dans ces observations n'était point exacte. Elle était d'abord en erreur de $17'$. On corrigea cette erreur; mais il y a lieu de croire qu'on en laisse subsister une partie, ce qui va être confirmé par les observations des quadratures.

L'ensemble des observations précédentes donne $0^h, 0521865$ pour le retard journalier des marées quadratures. Les observations anciennes m'avaient donné, pour ce retard, $0^h, 052067$, ce qui s'accorde à très peu près. Les observations précédentes donnent $0^h, 66280$ pour l'heure de la basse mer du jour qui suit la quadrature, ce qui donne $0^h, 61061$ pour l'heure de la basse mer du soir du jour de la quadrature. La haute mer du matin de ce jour a précédé, par le n° 6, la quadrature de $0^h, 20171$, et elle a précédé la basse mer du soir de

$$0^h, 25 + \frac{1}{2} \cdot 0^h, 0521865.$$

La quadrature a donc précédé la basse mer du soir de $0^h, 06134$. De là il est facile de conclure que l'heure de cette basse mer serait $0^h, 60741$, si elle coïncidait avec la quadrature. Dans les observations anciennes, cette même heure était $0^h, 60326$. La différence est $415''$ au lieu de $486''$ que donnent les observations anciennes. Il n'est donc pas dou-

teux que la différence entre les heures des observations modernes et des observations anciennes tient à l'inexactitude de la méridienne dont on fit usage dans les observations anciennes; car, dans les observations modernes, le temps a été déterminé avec soin par des observations astronomiques.

L'effet des déclinaisons des astres sur les retards journaliers des marées est sensible dans la comparaison de ces retards vers les équinoxes et vers les solstices. En prenant un milieu entre les retards des hautes et des basses mers, le retard moyen a été $0^h, 026318$ dans les syzygies précédentes des équinoxes, et $0^h, 0278997$ dans les syzygies des solstices. Les observations anciennes m'avaient donné $0^h, 025503$, $0^h, 028600$.

Pour déterminer la probabilité avec laquelle l'influence des déclinaisons est indiquée par les observations modernes, j'ai considéré les retards des hautes et des basses mers dans les syzygies équinoxiales de chaque année, et je les ai comparés au retard moyen $0^h, 026318$. J'ai pris le carré de chaque différence, ce qui m'a donné seize carrés, dont la somme est ce que nous avons désigné par ε dans le n° II. La probabilité d'une erreur u du résultat moyen est, par le numéro cité, proportionnelle à

$$e^{-\frac{n(u+1)}{2\varepsilon}};$$

n est ici égal à 16. En supposant que u exprime un nombre de minutes décimales ou de millièmes du jour, j'ai trouvé que l'exponentielle précédente devient

$$e^{-5.5193 u^2}.$$

En considérant de la même manière les retards observés dans les syzygies des solstices, j'ai trouvé la probabilité d'une erreur u du retard moyen $0^h, 027897$ proportionnelle à

$$e^{-9.5781 u^2};$$

de là j'ai conclu, par la méthode du n° III, la probabilité que la valeur de u surpassera u de la différence $1^m, 579$ des deux retards $27^m, 897$ et

26^m, 318, égale à la fraction $\frac{1}{25498}$; d'où il suit que l'influence des déclinaisons est indiquée par cette différence, avec une probabilité de 25497 contre l'unité.

Cette probabilité, déjà fort grande, le devient beaucoup plus par la comparaison des observations des marées des quadratures. En faisant, sur les retards de ces marées dans les équinoxes, le même calcul que je viens de présenter sur les retards des marées des syzygies, j'ai trouvé la probabilité d'une erreur u'' de minutes dans le retard moyen proportionnelle à

$$e^{-0.67310 u''};$$

et, relativement aux marées quadratures des solstices, j'ai trouvé la probabilité d'une erreur de u'' minutes proportionnelle à

$$e^{-1.9533 u''}.$$

Le retard moyen des marées quadratures équinoxiales est 56^m, 700, et celui des marées quadratures solsticiales est 47^m, 673. Leur différence est 9^m, 027. J'en conclus qu'il y a plus de 8.10¹⁸ à parier contre 1 que cette différence est l'effet des déclinaisons des astres.

Les observations syzygies précédentes donnent 0^h, 68362 pour l'heure moyenne de la haute mer du soir du jour de la syzygie; elles donnent 0^h, 42660 pour l'heure moyenne de la basse mer du même jour, en sorte que l'excès de la première sur la seconde est 0^h, 25700. Cet excès doit être égal à un quart de jour, plus un quart du retard journalier des marées syzygies, retard qui, par ce qui précède, est 0^h, 0271075. L'excès dont il s'agit doit donc être 0^h, 25678, ce qui ne diffère que de 22^s de l'excès observé. Pareillement, les observations quadratures précédentes donnent 0^h, 66280 pour l'heure moyenne des basses mers du soir du jour de la quadrature, et 0^h, 39956 pour l'heure moyenne des hautes mers du même jour. Cet excès doit être 0^h, 25 plus le quart de 0^h, 0521865, retard moyen journalier des marées quadratures. Il doit donc être 0^h, 26305, ce qui ne diffère que de 19^s du retard observé. Les différences 22^s et 19^s sont dans les limites des erreurs des observations. Leur petitesse prouve que la mer emploie le même

temps à monter qu'à descendre. Les observations anciennes m'avaient paru indiquer le temps de l'ascension un peu plus petit que celui de la descente; mais il paraît que cela tient aux erreurs des observations anciennes.

L'heure moyenne de la haute mer du soir qui suit la syzygie a été, dans les observations précédentes, 0^h, 68362. En lui ajoutant un demi-jour, plus un demi-retard journalier des marées syzygies, retard égal à 0^h, 0271075, on aura 0^h, 19717 pour l'heure de la haute mer du matin du second jour qui suit la syzygie. La haute mer du soir du jour de la syzygie a suivi, dans ces observations, la syzygie de 0^h, 1229; la haute mer du matin du second jour après la syzygie a donc suivi la syzygie de 0^h, 1229 + $\frac{1}{2}$. 0^h, 0271075 ou de 0^h, 66356.

En nommant u l'intervalle dont le maximum des hautes mers suit la syzygie, on aura l'instant de ce maximum, en ajoutant à l'heure de la haute mer du matin du second jour après la syzygie la quantité $(u - 0^h, 66356) \cdot 0^h, 0271075. Cette heure est donc$

$$(u - 0^h, 66356) \cdot 0^h, 0271075 + 0^h, 19717.$$

L'heure de la basse mer du jour qui suit la quadrature a été, dans les observations précédentes, 0^h, 66280. En lui ajoutant

$$0^h, 5 + \frac{1}{2} \cdot 0^h, 0521865,$$

on aura 0^h, 18889 pour l'heure de la basse mer du matin du second jour après la quadrature. La haute mer du matin du jour de la quadrature a précédé de 0^h, 20171 la quadrature dans les observations précédentes; elle a donc suivi la basse mer du soir de 0^h, 06134. En lui ajoutant

$$0^h, 5 + \frac{1}{2} \cdot 0^h, 0521865,$$

on aura 0^h, 63962 pour le temps dont la quadrature a précédé la basse mer du matin du second jour après la quadrature. Pour avoir l'heure de cette basse mer, lorsqu'elle correspond au maximum des basses mers quadratures, il faut lui ajouter

$$(u - 0^h, 63962) \cdot 0^h, 0521865$$

on a donc cette heure égale à

$$(u - 1^h, 63^m, 62^s).0,0521865 + 0^h, 18889.$$

A cette heure, la marée solaire est à son maximum, comme dans le maximum des hautes mers syzygies : les deux heures du maximum des basses mers quadratures et du maximum des hautes mers syzygies doivent donc être égales, ce qui donne

$$(u - 1^h, 66^m, 35^s).0,0371075 + 0^h, 19717 = (u - 1^h, 63^m, 62^s).0,0521865 + 0^h, 18889,$$

d'où l'on tire

$$u = 1^h, 94^m, 46^s.$$

Les hauteurs des marées nous ont donné, dans le n° VII.

$$u = 1^h, 54^m, 58^s.$$

La différence me paraît trop considérable pour être attribuée aux seules erreurs des observations; elle indique une anticipation dans l'heure des marées quadratures relativement à celle des marées syzygies. En supposant cette anticipation de 10^m, les deux valeurs de u , déduites des heures et des hauteurs des marées, seraient à fort peu près les mêmes. Les marées anciennes m'avaient donné cette anticipation, égale à 8^m $\frac{1}{2}$, dans le n° 39 du Livre IV de la *Mécanique céleste*. Je l'attribuais aux légers écarts de la supposition que les deux flux partiels solaire et lunaire se superposent l'un à l'autre, comme ils se disposeraient séparément sur la surface du niveau de la mer. Je ne vois encore maintenant aucune autre cause de cette anticipation.

XIV. Je vais maintenant comparer les résultats précédents à la théorie. Pour cela, je reprends l'expression de la hauteur des marées que j'ai donnée dans le n° VIII,

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{L}{r^3} \cos^2 \frac{e}{2} \cos(2nt - 2mt - 2\lambda) + \frac{1}{2} B \frac{L}{r^3} \sin^2 e \cos(2nt - 2\gamma) \\ + A' \frac{L'}{r'^3} \cos^2 \frac{e'}{2} \cos(2nt - 2m't - 2\lambda') + \frac{1}{2} B' \frac{L'}{r'^3} \sin^2 e' \cos(2nt - 2\gamma'). \end{array} \right.$$

Dans les plus hautes marées syzygies ou quadratures des équinoxes ou des solstices, les cosinus de cette expression sont à peu près égaux à ± 1 . Je suppose que T soit le temps de la plus haute marée syzygie équinoxiale, et que $t^1 + T + Q$ soit le temps de la plus haute marée du jour suivant, en sorte que Q soit le retard journalier de la marée syzygie équinoxiale. La différentielle de la fonction (o) prise par rapport au temps t , étant nulle au moment de la haute mer, si l'on différentie cette fonction, en y faisant d'abord $t = T$ et ensuite $t = t^1 + T + Q$: si l'on observe ensuite que $(n - m).t^1 = 2\pi$, 2π étant la circonférence dont le rayon est l'unité, on aura, par l'ensemble des marées,

$$Q = \frac{[(n - m')(m' - m)a' - nmb']}{(n - m)^2 a + (n - m')^2 a' + n^2 b'} t^1,$$

a, a' et b' étant ce que nous avons désigné par ces lettres dans le n° VIII, et se rapportant à l'ensemble des marées syzygies équinoxiales. Nous avons donné, dans le n° IX, le moyen de les obtenir numériquement. Pour réduire plus facilement en nombres la formule précédente, je lui donne cette forme très approchée

$$(f) \quad Q = \frac{m' - m}{n - m} \frac{a'}{2ix} + \left(\frac{m' - m}{n - m} \frac{a'}{2ix} \right)^2 \frac{2a' - 2ix}{a'}.$$

On a, dans les syzygies,

$$Q = 293^m, 313^s;$$

et, en ayant égard à la variation,

$$\frac{m' - m}{n - m} = 0,033863.$$

Dans les syzygies des équinoxes,

$$2ix = 411^m, 35^s,$$

ce qui donne

$$Q = 0^h, 02^m, 02^s, 4.$$

Les observations nous ont donné

$$Q = 0,026318;$$

mais cette dernière valeur de Q est exprimée en temps vrai, et, dans les équinoxes, le jour moyen surpasse le jour vrai, de $0,000218$, ce qui réduit la valeur observée de Q à $0,026100$. La différence $0,001176$ est dans les limites des erreurs, soit des observations, soit des suppositions sur lesquelles le calcul est fondé.

Dans les syzygies des solstices, b' est négatif, et l'on a

$$2ix = 367^m, 468,$$

ce qui donne

$$Q = 0,028063.$$

Les observations donnent, en temps vrai,

$$Q = 0,027897;$$

mais, dans les solstices, le jour vrai surpasse le jour moyen d'environ $0,000238$, ce qui donne $0,028135$ pour cette valeur de Q réduite en temps moyen. L'excès de la valeur calculée n'est que $0,000072$, ce qui est insensible.

Dans les quadratures,

$$a' = 279^m, 535;$$

dans les quadratures des équinoxes,

$$2ix = 160^m, 850,$$

ce qui donne

$$Q = 0,062300.$$

Les observations, réduites au temps moyen, donnent

$$Q = 0,056462.$$

La différence $0,005838$ est dans les limites des erreurs et des suppositions du calcul, ce que l'on verra si l'on considère que, par le n° XII, le poids de Q , ou le coefficient du carré de ces erreurs possibles, pris négativement dans l'exponentielle qui représente leur probabilité, est très petit.

Dans les quadratures des solstices,

$$2ix = 202^m, 948,$$

ce qui donne

$$Q = 0,048815.$$

Les observations, réduites au temps moyen, donnent

$$Q = 0,047911.$$

La différence $0,000904$ est dans les limites des erreurs des observations.

XV. Considérons maintenant les variations des intervalles des marées dues aux variations de la parallaxe lunaire. Pour cela, j'ai pris les heures des basses mers du matin et des hautes mers du soir, des jours des syzygies périgées du n° X, et je les ai retranchées des heures correspondantes des troisièmes jours qui suivent ces syzygies. J'ai fait une somme de toutes ces différences, et je l'ai divisée par 72; car il y a douze syzygies, et chaque syzygie produit trois retards journaliers relatifs aux basses mers, et trois semblables retards relatifs aux hautes mers. J'ai trouvé ainsi $0,0305744$ pour les retards journaliers des marées syzygies périgées. Un calcul semblable, fait sur les marées syzygies apogées du même numéro, m'a donné $0,0227331$ pour le retard journalier correspondant des mêmes marées. On voit donc que ce retard augmente et diminue avec la parallaxe lunaire. Le demi-diamètre moyen apparent de la Lune était $3094'', 65$ dans les syzygies périgées, et $2734'', 57$ dans les syzygies apogées. Ainsi l'accroissement du retard journalier, dû à une minute d'accroissement dans le demi-diamètre lunaire apparent, a été $217'', 76$. Les observations anciennes m'avaient donné $258''$ pour cet accroissement; mais elles se rapportaient à des syzygies, tant équinoxiales que solsticiales. Il faut donc, pour ramener l'accroissement observé $217'', 76$ à l'accroissement moyen, le diviser par le carré du cosinus de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'équateur dans les observations précédentes, ce qui donne

231^h, 77 pour cet accroissement. En le fixant par un milieu à 245^h, on sera fort près de la vérité.

Je trouve, dans les syzygies apogées précédentes,

$$a' = 45^m, 658.$$

En ayant égard aux arguments de la variation, de l'évection et à l'équation du centre, je trouve

$$\frac{m' - m}{n - m} = 0,029569;$$

on a, de plus,

$$2ix = 65^m, 982.$$

La formule (f) donne ainsi

$$Q = 0^h, 020590.$$

Les observations donnent

$$Q = 0^h, 022731.$$

La différence 2^m, 143 est dans les limites des erreurs, soit des observations, soit des suppositions employées dans le calcul.

Dans les syzygies périgées précédentes, je trouve

$$a' = 66^m, 405, \quad \frac{m' - m}{n - m} = 0,039493;$$

on a, de plus,

$$2ix = 88^m, 497.$$

La formule (f) donne ainsi

$$Q = 0^h, 029083.$$

Les observations donnent

$$Q = 0^h, 0305744.$$

La différence est presque insensible.

XVI. L'expression de Q, donnée dans le n° XIV, peut servir à déterminer le rapport des actions de la Lune et du Soleil sur la mer, soit par les retards journaliers des marées syzygies, soit par ceux des ma-

rées quadratures. Elle donne, à très peu près,

$$Q \left(a + a' + b' - 2 \frac{m' - m}{n - m} a' + \frac{2m}{n - m} b' \right) \\ = \left(\frac{m' - m}{n - m} a' + \frac{mb'}{n - m} \right) v \left(1 - \frac{m' - m}{n - m} \right).$$

Si l'on nomme Q' ce que devient Q dans les syzygies solsticiales, cette équation subsistera en y changeant Q en Q' et en y faisant b' négatif, ce qui donne

$$Q' \left[a + a' - b' - 2 \frac{m' - m}{n - m} a' - \frac{2mb'}{n - m} \right] \\ = \left(\frac{m' - m}{n - m} a' + \frac{mb'}{n - m} \right) v \left(1 - \frac{m' - m}{n - m} \right).$$

En réunissant ces deux équations et négligeant le terme

$$\frac{mb'}{n - m} (Q' - Q),$$

à raison de la petitesse de m, b' et Q' - Q, on aura

$$(Q + Q') \left[a + a' - 2 \frac{m' - m}{n - m} a' \right] - (Q' - Q) b' \\ = 2 \frac{m' - m}{n - m} a' v \left(1 - \frac{m' - m}{n - m} \right).$$

Nommons R la fraction

$$\frac{A' \frac{L'}{r'^2}}{A \frac{L}{r^2}}$$

ou le rapport des actions lunaires et solaires sur l'océan dans les syzygies; l'équation précédente donnera, par le n° VIII, en négligeant les termes de l'ordre $(Q' - Q) b' \frac{A' - B}{A}$,

$$(Q + Q') \left[\frac{p + q}{2} + \frac{p' + q'}{2} R \left(1 - 2 \frac{m' - m}{n - m} \right) \right] - (Q' - Q) \left(\frac{p - q}{2} + \frac{p' - q'}{2} R \right) \\ = \frac{m' - m}{n - m} \left(1 - \frac{m' - m}{n - m} \right) (p' + q') v R.$$

d'où l'on tire

$$(z) \quad R = \frac{(Q + Q') \frac{p+q}{2} - (Q' - Q) \frac{p-q}{2}}{(p' + q') \frac{m'-m}{n-m} \left(1 - \frac{m'-m}{n-m}\right)^{11} - (Q + Q') \left(1 - 2 \frac{m'-m}{n-m}\right) \frac{p'+q'}{2} + (Q' - Q) \frac{p'-q'}{2}}$$

Pour réduire cette valeur de R à la moyenne distance de la Lune à la Terre, il faut, par le n° VIII, la diviser par 11,022486.

On a, par le numéro précédent, en temps moyen,

$$Q = 0,026100,$$

$$Q' = 0,028135.$$

De plus, en ayant égard à l'argument de la variation,

$$\frac{m'-m}{n-m} = 0,0345239.$$

En employant les valeurs précédentes de p , q , p' et q' , on trouve, pour la valeur de R dans les moyennes distances du Soleil et de la Lune,

$$R = 3,17738.$$

On pourra encore déterminer la valeur de R par les intervalles des marées quadratures, en observant que la formule (z) s'étend à ces marées, pourvu que l'on change les signes du dénominateur, et p , q , p' et q' en p_1 , q_1 , p'_1 et q'_1 ; on a alors

$$R = \frac{(Q + Q') \frac{p_1+q_1}{2} + (Q - Q') \frac{p_1-q_1}{2}}{(Q + Q') \left(1 - 2 \frac{m'-m}{n-m}\right) \frac{p'_1+q'_1}{2} + (Q - Q') \frac{p'_1-q'_1}{2} - (p'_1+q'_1) \frac{m'-m}{n-m} \left(1 - \frac{m'-m}{n-m}\right)^{11}}$$

ici l'on a, par le numéro précédent,

$$Q = 0,056462,$$

$$Q' = 0,047911.$$

En ayant égard à l'argument de la variation, on a

$$\frac{m'-m}{n-m} = 0,0331898.$$

De plus, pour réduire la valeur de R à la moyenne distance de la Lune à la Terre, il faut diviser la valeur que donne la formule précédente par 0,977514. On trouve ainsi, par les intervalles des marées quadratures,

$$R = 3,11826.$$

Cette valeur diffère peu de la précédente. Leur milieu donne

$$R = 3,14782.$$

Les hauteurs des marées donnent, par le n° VII,

$$R = 2,88347;$$

la moyenne de ces trois valeurs est

$$R = 3,05970,$$

ce qui coïncide, à fort peu près, avec la valeur 3, que j'ai trouvée pour R dans le quatrième Volume de la *Mécanique céleste*.

L'ensemble des hauteurs des marées syzygies et quadratures nous a donné, dans le n° VII,

$$2\Lambda \frac{L'}{r^3} = 4^m, 74788;$$

en adoptant la valeur moyenne de R, donnée par les intervalles des marées, on a

$$2\Lambda \frac{L}{r^3} = 1^m, 50831.$$

Le second membre de l'équation (5) du n° VII serait par là diminué de 16^m environ, et le second membre de l'équation (6) serait augmenté de la même quantité. Il faudrait supposer une erreur de 16^m dans chacun des premiers membres de ces équations, qui sont donnés par les observations. Cette erreur est peu vraisemblable, et il me paraît naturel d'en rejeter au moins une partie sur l'hypothèse de la coexistence des oscillations très petites, hypothèse qui cesse d'avoir lieu quand les oscillations sont considérables.

Remarque.

Dans les applications que je viens de faire du Calcul des probabilités aux phénomènes des marées, j'ai déterminé la constante que la loi inconnue des erreurs des observations partielles introduit dans ce calcul, par les différences du résultat moyen aux résultats semblables donnés par les observations de chaque année. Le petit nombre des années que j'ai considérées rend incertaine la valeur de cette constante. On l'obtiendrait plus exactement en déterminant les résultats semblables par l'ensemble des observations des deux syzygies correspondantes vers chaque équinoxe ou vers chaque solstice, ce qui donnerait trois résultats pour chaque année, et, par conséquent, vingt-quatre résultats pour les huit années. Il faudrait, de plus, corriger les résultats de l'effet du mouvement des nœuds de l'orbite lunaire, effet donné par les formules précédentes de la théorie. Mais mon objet a été moins d'avoir exactement la probabilité des résultats, que de constater qu'ils indiquent, avec une extrême probabilité, l'influence des déclinaisons des astres; les formules de probabilité auxquelles je suis parvenu remplissent parfaitement cet objet.

MÉMOIRE

SUR LE DÉVELOPPEMENT

DE L'ANOMALIE VRAIE ET DU RAYON VECTEUR ELLIPTIQUE,

EN SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES DE L'EXCENTRICITÉ.



MÉMOIRE

SUR LE DÉVELOPPEMENT

DE L'ANOMALIE VRAIE ET DU RAYON VECTEUR ELLIPTIQUE,

EN SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES DE L'EXCENTRICITÉ.

Mémoires de l'Académie des Sciences, II^e Série, Tome VI, année 1823; 1827.

I.

Le développement des fonctions en séries est un des objets les plus importants de l'Analyse : la plupart des applications du calcul aux phénomènes en dépendent. Ce développement pouvant se faire d'une infinité de manières, le choix de celle qui donne les séries les plus convergentes est une des choses les plus utiles à la solution des problèmes. Il est donc intéressant de connaître les conditions qui font converger les séries et l'expression la plus simple dont leurs termes successifs approchent de plus en plus, et avec laquelle ils finissent par coïncider. Les méthodes que j'ai données dans ma *Théorie analytique des probabilités*, sur les approximations des formules fonctions de grands nombres, sont fort avantageuses pour cet objet. Je vais considérer ici les développements en séries des coordonnées du mouvement elliptique.

L'excentricité des orbites elliptiques planétaires étant peu considérable, on développe le plus souvent le rayon vecteur et l'anomalie

vraie en séries ordonnées suivant ses puissances. Mais, si l'excentricité qui, dans les orbites elliptiques, ne surpasse jamais l'unité, en devenait fort approchante, on conçoit que les séries pourraient cesser d'être convergentes. Il importe donc de connaître si parmi les valeurs comprises entre zéro et l'unité, que l'excentricité peut avoir, il en est une au-dessus de laquelle ces séries seraient divergentes, et dans ce cas, de la déterminer. Prenons pour unité le demi grand axe de l'ellipse; désignons par e son excentricité, par t l'anomalie moyenne comptée du périhélie, et par R le rayon vecteur. On aura, par le n° 22 du second Livre de la *Mécanique céleste*,

$$\begin{aligned} R &= 1 + \frac{e^2}{2} - e \cos t \\ &\quad - \frac{e^3}{1.2} \cos 2t \\ &\quad - \frac{e^3}{1.2.2^2} (3 \cos 3t - 3 \cos t) \\ &\quad - \frac{e^4}{1.2.3.2^3} (4^2 \cos 4t - 4.2^2 \cos 2t) \\ &\quad - \frac{e^5}{1.2.3.4.2^4} \left(5^3 \cos 5t - 5.3^2 \cos 3t + \frac{5.4}{1.2} \cos t \right) \\ &\quad - \frac{e^6}{1.2.3.4.5.2^5} \left(6^4 \cos 6t - 6.4^3 \cos 4t + \frac{6.5}{1.2} 2^4 \cos 2t \right) \\ &\quad - \dots \end{aligned}$$

Le terme général de cette expression est

$$\begin{aligned} & - \frac{e^i}{1.2.3 \dots (i-1)2^{i-1}} \left[i^{i-1} \cos it - i(i-2)^{i-2} \cos(i-2)t \right. \\ & \quad + \frac{i(i-1)}{1.2} (i-4)^{i-2} \cos(i-4)t \\ & \quad - \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} (i-6)^{i-2} \cos(i-6)t \\ & \quad + \dots \left. \right]; \end{aligned}$$

la série étant continuée jusqu'à ce que l'on arrive à un facteur $(i-2r)^{i-2}$ dans lequel $i-2r$ soit négatif. Si l'on fait t égal à un angle droit, ce terme devient nul lorsque i est impair; et, dans le cas de i pair, il

devient, abstraction faite du signe, égal à

$$(a) \quad \frac{e^i}{1.2.3 \dots (i-1)2^{i-1}} \left[i^{i-2} + \frac{i}{1} (i-2)^{i-2} + \frac{i(i-1)}{1.2} (i-4)^{i-2} + \dots \right],$$

et il est alors le plus grand possible. Déterminons sa valeur lorsque i est un très grand nombre.

Il est facile de voir que les termes de la série

$$(a') \quad i^{i-2} + \frac{i}{1} (i-2) + \frac{i(i-1)}{1.2} (i-4)^{i-2} + \dots$$

vont d'abord en croissant et qu'ils ont un maximum après lequel ils diminuent. A ce maximum, deux termes consécutifs sont à très peu près égaux. Soit

$$\frac{i(i-1)(i-2) \dots (i-r+1)}{1.2.3 \dots r} (i-2r)^{i-2}$$

le terme maximum. Le terme qui le précède sera

$$\frac{i(i-1) \dots (i-r+2)}{1.2.3 \dots (r-1)} (i-2r+2)^{i-2};$$

en égalant donc ces deux termes, on aura

$$\frac{i-r+1}{r} (i-2r)^{i-2} = (i-2r+2)^{i-2}.$$

Cette équation donne la valeur de r et, par conséquent, le rang que le terme le plus grand occupe dans la série. Si l'on prend les logarithmes des deux membres, on a

$$\log \frac{i-r+1}{r} = (i-2) \log \left(1 + \frac{2}{i-2r} \right)$$

ou

$$(b) \quad \log \frac{i-r}{r} + \log \left(1 + \frac{1}{i-r} \right) = (i-2) \log \left(1 + \frac{2}{i-2r} \right);$$

or on a, lorsque i et r sont de très grands nombres,

$$\log \left(1 + \frac{1}{i-r} \right) = \frac{1}{i-r} - \frac{1}{2(i-r)^2} + \dots,$$

$$\log \left(1 + \frac{2}{i-2r} \right) = \frac{2}{i-2r} - \frac{2}{(i-2r)^2} + \dots;$$

l'équation (b) deviendra donc, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$\log \frac{i-r}{r} = \frac{2i}{i-2r},$$

ce qui donne

$$\frac{i-r}{r} = e^{\frac{2i}{i-2r}},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. En faisant $r = \omega i$, on aura

$$(c) \quad \frac{i-\omega}{\omega} = e^{\frac{2}{1-i\omega}}.$$

Si l'on nomme p le terme maximum

$$\frac{i(i-1)\dots(i-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots r} (i-2r)^{i-2},$$

le terme qui en est éloigné du rang t sera

$$p \frac{(i-r)(i-r-1)\dots(i-r-t+1)}{(r+1)(r+2)\dots(r+t)} \left(\frac{i-2r-2t}{i-2r} \right)^{i-2}.$$

Son logarithme sera donc

$$\begin{aligned} \log p + t \log(i-r) + \log\left(1 - \frac{1}{i-r}\right) + \log\left(1 - \frac{2}{i-r}\right) + \dots \\ + \log\left(1 - \frac{t-1}{i-r}\right) - t \log r - \log\left(1 + \frac{1}{r}\right) - \log\left(1 + \frac{2}{r}\right) - \dots \\ - \log\left(1 + \frac{t}{r}\right) + (i-2) \log\left(1 - \frac{2t}{i-2r}\right). \end{aligned}$$

En développant en séries ces logarithmes et négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$, on aura

$$\begin{aligned} \log p + t \log \frac{i-r}{r} - \frac{1+2+3+\dots+(t-1)}{i-r} \\ - \frac{1+2+3+\dots+t}{r} - (i-2) \left[\frac{2t}{i-2r} + \frac{2t^2}{(i-2r)^2} \right]. \end{aligned}$$

Par la nature de r , on a à très peu près, par ce qui précède,

$$\log \frac{i-r}{r} + \frac{1}{i-r} = (i-2) \left[\frac{2}{i-2r} - \frac{2}{(i-2r)^2} \right];$$

la fonction précédente deviendra donc

$$\log p - (1+2+3+\dots+t) \frac{i}{r(i-r)} - \frac{2t(i-2)(t+1)}{(i-2r)^2}.$$

En ne conservant ainsi parmi les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$ que ceux qui sont multipliés par t^2 , et observant que

$$1+2+3+\dots+t = \frac{t^2+t}{2},$$

cette fonction prendra la forme

$$\log p - \frac{t^2 t}{2r(i-r)(i-2r)^2},$$

ce qui donne pour le terme placé à la distance t du terme p

$$p e^{-\frac{t^2 t}{2r(i-r)(i-2r)^2}}.$$

Il est facile de s'assurer que cette même valeur a lieu à très peu près pour le terme placé avant p à la même distance. La somme de tous ces termes sera la série entière (α'). On aura, comme on sait, cette somme à très peu près égale à

$$p \int dt e^{-\frac{t^2 t}{2r(i-r)(i-2r)^2}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, ce qui donne, par les méthodes connues, la série (α') égale à

$$p \sqrt{\pi} \frac{i-2r}{i} \sqrt{\frac{2r(i-r)}{i}},$$

π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité. On a

$$p = \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots i(i-2r)^{i-2}}{1\cdot 2\cdot 3\dots i(i-r)1\cdot 2\cdot 3\dots r}.$$

La série (a) devient ainsi, abstraction faite du signe,

$$\frac{i(i-2r)^{i-2}\sqrt{\pi}}{1.2.3\dots(i-r)1.2.3\dots r} = \frac{i-2r}{i} \sqrt{\frac{2r(i-r)}{i}} \frac{e^i}{2^{i-1}}.$$

On a à très peu près, par les théorèmes connus,

$$1.2.3\dots(i-r) = (i-r)^{i-r+\frac{1}{2}} e^{-(i-r)} \sqrt{2\pi},$$

$$1.2.3\dots r = r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r} \sqrt{2\pi}.$$

La série (a) devient donc

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{i}} (i-2r)^{i-1} \left(\frac{ee}{2}\right)^i}{r^i (i-r)^{i-r} \sqrt{2\pi}}$$

ou

$$(d) \quad \frac{2}{i\sqrt{i(1-2\omega)}\sqrt{2\pi}} \left[\frac{ec(1-2\omega)}{2\omega^{2\omega}(1-\omega)^{1-2\omega}} \right]^i,$$

ω étant donné par l'équation (c).

On doit observer ici que la valeur de ω donnée par cette équation n'est pas rigoureuse. Nous avons négligé, pour former cette équation, les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$, et de plus nous avons supposé que le terme maximum p était égal à celui qui le précède, ce qui n'est qu'approché. De là il suit que la valeur exacte de ω est celle que donne l'équation (c), plus une correction de l'ordre $\frac{1}{i}$, que nous désignerons par $\frac{q}{i}$. Mais cette correction disparaît d'elle-même par la condition de p maximum. En effet, si l'on nomme D la fonction

$$\frac{ec(1-2\omega)}{2\omega^{2\omega}(1-\omega)^{1-2\omega}}$$

et D' cette fonction, lorsqu'on y change ω dans $\omega + \frac{q}{i}$, on aura

$$\log D' = i \log \left[\left(1 + \frac{q}{i} \frac{D'D}{D} + \frac{q^2}{2i^2} \frac{D^2 D'}{D^2} + \dots \right) D \right].$$

En repassant des logarithmes aux membres et négligeant ensuite les

quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$, on aura

$$D' = D' e^{\frac{D'D}{D}}.$$

On a

$$\frac{dD}{D d\omega} = -\frac{2}{1-2\omega} + \log \frac{1-\omega}{\omega},$$

et l'équation (c) donne

$$\log \frac{1-\omega}{\omega} = \frac{2}{1-2\omega};$$

on a donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$D' = D,$$

d'où il est facile de conclure que, par le changement de ω dans $\omega + \frac{q}{i}$, la formule (d) reste la même. Si la quantité

$$\frac{ec(1-2\omega)}{2\omega^{2\omega}(1-\omega)^{1-2\omega}}$$

surpasse l'unité, la fonction (d) devient infinie lorsque i est infini: l'expression du rayon vecteur devient donc alors divergente. La valeur de l'excentricité déduite de l'équation

$$e = \frac{2\omega^{2\omega}(1-\omega)^{1-2\omega}}{(1-2\omega)c}$$

est, par conséquent, la limite des valeurs de l'excentricité qui font converger l'expression du rayon vecteur développé suivant les puissances de l'excentricité. En substituant au lieu de e sa valeur

$$\left(\frac{1-\omega}{\omega} \right)^{\frac{1-\omega}{2}}$$

donnée par l'équation (c), cette expression de e devient

$$e = \frac{2\sqrt{\omega(1-\omega)}}{1-2\omega}.$$

L'équation (c) donne à peu près

$$\omega = 0,08307,$$

d'où l'on tire

$$e = 0,66195.$$

L'équation précédente de la limite de l'excentricité e donne à cette limite

$$1 - 2\omega = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}},$$

d'où il est facile de conclure

$$\frac{1-\omega}{\omega} = \frac{1+\sqrt{1+e^2}}{e^2};$$

L'équation (c) donnera donc

$$(m) \quad 1 + \sqrt{1+e^2} = e^e \sqrt{1+e^2}.$$

Les valeurs de e , supérieures à celle que cette équation donne, rendent l'expression en série du rayon vecteur R divergente lorsque t est un angle droit. Pour toutes les valeurs inférieures, cette série est convergente quel que soit t . En effet, le terme général de l'expression de R développée en série ordonnée par rapport aux puissances de l'excentricité est, comme on l'a vu,

$$-\frac{e^i}{1.2.3\dots(i-1)2^{i-1}} [i^{i-2} \cos it - i(i-2)^{i-2} \cos(i-2)t + \dots].$$

La plus grande valeur de ce terme, abstraction faite du signe, ne peut surpasser

$$\frac{e^i}{1.2.3\dots(i-1)2^{i-1}} [i^{i-2} + i(i-2)^{i-2} + \frac{i(i-1)}{1.2} (i-4)^{i-2} + \dots].$$

On vient de voir que cette valeur, lorsque i est infini, devient nulle par un facteur moindre que l'unité élevé à la puissance i , lorsque l'excentricité e est au-dessous de celle qui résulte de l'équation aux limites; la série est donc convergente quel que soit t . Je vais mainte-

nant établir qu'alors la série de l'expression de l'anomalie vraie développée de la même manière est pareillement convergente.

II.

u étant l'anomalie excentrique et v l'anomalie vraie, on a, par le n° 20 du second Livre de la *Mécanique céleste*,

$$t = u - e \sin u,$$

$$R = 1 - e \cos u,$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{R^2},$$

or on a, par la loi des aires proportionnelles aux temps,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{R^3};$$

on a donc

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \sqrt{1-e^2}.$$

L'expression en série de u du n° 22 du Livre cité donne

$$\frac{du}{dt} = 1 + e \cos t + \frac{e^2}{1.2.2} 2^2 \cos 2t + \frac{e^3}{1.2.3.2^2} (3^2 \cos 3t - 3 \cos t) + \dots$$

Le terme général de cette série est

$$\frac{e^i}{1.2.3\dots i.2^{i-1}} \left[i^i \cos it - i(i-2)^i \cos(i-2)t + \frac{i(i-1)}{1.2} (i-4)^i \cos(i-4)t - \dots \right],$$

et, dans aucun cas, il ne peut surpasser

$$\frac{e^i}{1.2.3\dots i.2^{i-1}} \left[i^i + i(i-2)^i + \frac{i(i-1)}{1.2} (i-4)^i + \dots \right].$$

En suivant exactement l'analyse de l'article précédent, on trouve ce

dernier terme égal à

$$(e) \quad \frac{2}{\sqrt{i}} \frac{1-2\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{ee(1-2\omega)}{2\omega^2(1-\omega)^{1-\omega}} \right]^i,$$

ω étant donné par l'équation (c) de l'article précédent.

Maintenant, si l'on désigne par Λ la série

$$1 + e + \frac{e^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \dots \\ + \frac{e^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i \cdot 2^{i-1}} \left[i^i + i(i-2)^i + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} (i-4)^i + \dots \right] + \dots,$$

la série étant continuée jusqu'à $i = \infty$, il est facile de voir que l'expression en série de $\frac{du}{dt}$ sera moindre que le développement en série de la fonction

$$(o) \quad \Lambda + \frac{2(1-2\omega)q^i e^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)},$$

en désignant par q la quantité

$$\frac{(1-2\omega)e}{2\omega^2(1-\omega)^{1-\omega}};$$

car il est visible que le coefficient d'une puissance quelconque e^i dans le développement de la fonction (o) est positif, et qu'il est plus grand, abstraction faite du signe, que le coefficient de la même puissance dans le développement de $\frac{du}{dt}$. L'expression de $\frac{dv}{dt}$ ou de $\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \sqrt{1-e^2}$ est donc moindre

$$\left[\Lambda + \frac{2(1-2\omega)q^i e^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)} \right]^2 \sqrt{1-e^2};$$

or le développement de $\sqrt{1-e^2}$ est moindre que celui de $\frac{1}{1-e^2}$; le développement de $\frac{dv}{dt}$ est donc moindre que celui de

$$(p) \quad \left[\Lambda + \frac{2(1-2\omega)q^i e^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)} \right]^2,$$

c'est-à-dire que le coefficient d'une puissance quelconque e^i dans le développement de cette fonction est positif et plus grand, abstraction faite du signe, que le coefficient de la même puissance dans le développement de $\frac{dv}{dt}$.

Donnons à la fonction (p) cette forme

$$\frac{\Lambda^2}{1-e^2} + \frac{4\Lambda(1-2\omega)q^i e^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)(1-e^2)} + \frac{2(1-2\omega)^2 q^{2i} e^{2i}}{\pi(1-qe)^2(1-e^2)}.$$

Le terme $\frac{\Lambda^2}{1-e^2}$ développé en série donne une série convergente; car, quelque grand que l'on suppose i , pourvu qu'il soit fini, Λ^2 sera composé d'un nombre fini de termes. En désignant par me^i l'un de ces termes, $\frac{me^i}{1-e^2}$, développé en série, donnera une série convergente, e étant supposé moindre que l'unité. Ainsi $\frac{\Lambda^2}{1-e^2}$ donnera un nombre fini de séries convergentes, et, dans leur somme, le terme dépendant de e^i deviendra nul lorsque s est infini.

Le terme

$$\frac{4\Lambda(1-2\omega)q^i e^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)(1-e^2)}$$

donnera un nombre fini de termes de la forme

$$\frac{ne^i}{(1-qe)(1-e^2)^2},$$

or la fraction

$$\frac{1}{(1-qe)(1-e^2)}$$

se décompose dans les trois suivantes :

$$\frac{1}{2(1-q)} \frac{1}{1-e} + \frac{1}{2(1+q)} \frac{1}{1+e} - \frac{q^i}{1-q^2} \frac{1}{1-qe}.$$

Chacune d'elles, développée en série, donne une série convergente; car, par la supposition, qe est moindre que l'unité. On voit donc que le terme

$$\frac{4\Lambda(1-2\omega)q^i e^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)(1-e^2)}$$

donne une série convergente; pareillement le terme

$$\frac{2(1-2\omega)^2 q^{2t} e^{2t}}{\pi(1-qe)^2(1-e^2)}$$

donne une série convergente, comme il est facile de le voir, en décomposant la fraction

$$\frac{1}{(1-qe)^2(1-e^2)}$$

en fractions partielles; $\frac{dv}{dt}$, développé en série ordonnée par rapport aux puissances de l'excentricité, donne par conséquent une série convergente, lorsque qe est moindre que l'unité. Il est facile d'en conclure que l'expression de $v-t$ ainsi développée forme une série convergente; car, l'intégration de dv faisant acquérir des diviseurs à ses termes, on voit que, quel que soit t , $v-t$ sera moindre que

$$\left[A + \frac{2(1-2\omega)q^t e^t}{\sqrt{2\pi}(1-qe)} \right] \frac{1}{1-e^2},$$

qui, comme on vient de le voir, forme une série convergente.

Il résulte de ce qui précède que la condition nécessaire pour la convergence des séries qui expriment le rayon vecteur et l'anomalie vraie, développés suivant les puissances de l'excentricité, est que l'excentricité soit moindre que

$$\frac{2\sqrt{\omega(1-\omega)}}{1-2\omega},$$

ω étant donné par l'équation

$$\frac{1-\omega}{\omega} = e^{\frac{2}{1-2\omega}}.$$

Les deux séries sont alors convergentes; c'est ce qui a lieu pour toutes les planètes, même pour les planètes télescopiques. Les valeurs supérieures de l'excentricité font diverger la série du rayon vecteur, et alors il faut recourir à d'autres développements. Tel est le cas de la comète à courte période.

III.

On développe encore les expressions de l'anomalie vraie et du rayon vecteur, suivant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie moyenne. Soit alors

$$v = t + a^{(1)} \sin t + a^{(2)} \sin 2t + \dots + a^{(i)} \sin it + \dots,$$

$a^{(1)}, a^{(2)}, \dots$ étant des fonctions de l'excentricité. On peut facilement démontrer que la série est toujours convergente. En effet, on a

$$\int (v-t) dt \sin it = \pi a^{(i)},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t égal à 2π . Or on a, dans ces limites, en intégrant par parties,

$$\int dt (v-t) \sin it = \frac{1}{i} \int dt \left(\frac{dv}{dt} - 1 \right) \cos it = -\frac{1}{i^2} \int dt \sin it \frac{d^2 v}{dt^2};$$

on aura donc

$$a^{(i)} = -\frac{1}{i^2 \pi} \int dt \sin it \frac{d^2 v}{dt^2};$$

l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{R^2}$$

donne

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{2\sqrt{1-e^2}}{R^3} \frac{dR}{dt}.$$

Au périhélie et à l'aphélie, $\frac{dR}{dt}$ est nul; $\frac{dR}{R^3 dt}$ est positif, en allant du premier de ces points au second, et négatif, du second au premier. Soit k sa plus grande valeur positive; $-k$ sera sa plus grande valeur négative. En supposant donc que les valeurs de $\sin it$ soient positives et égales à l'unité, depuis le périhélie jusqu'à l'aphélie, et négatives et égales à -1 , depuis l'aphélie jusqu'au périhélie, on voit que l'intégrale $\int \frac{1}{R^3} \frac{dR}{dt} \sin it dt$, prise depuis le périhélie jusqu'à l'aphélie,

sera moindre, abstraction faite du signe, que $2k\pi$. De là il suit que $a^{(0)}$, abstraction faite du signe, est moindre que

$$\frac{4k\sqrt{1-e^2}}{e^2},$$

ce terme devient nul lorsque i est infini. De plus, la série de l'expression précédente de c , à partir de i supposé très grand, est moindre que

$$\frac{4k\sqrt{1-e^2}}{i};$$

quantité qui devient nulle lorsque i est infini. Cette série est donc convergente.

Considérons de la même manière l'expression de R , développée dans une série ordonnée par rapport aux cosinus de t et de ses multiples. Soit

$$R = b^{(0)} + b^{(1)} \cos t + \dots + b^{(i)} \cos it + \dots;$$

on aura

$$\pi b^{(i)} = \int R dt \cos it,$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t égal à 2π , ce qui donne

$$\pi b^{(i)} = -\frac{1}{i^3} \int dt \cos it \frac{d^3 R}{dt^3}.$$

Les formules du mouvement elliptique donnent

$$\frac{d^3 R}{dt^3} = \frac{1-e^2-R}{R^3}.$$

Cette dernière quantité est toujours négative (*). Désignons par $-K$ son maximum, et supposons $\cos it$ égal à l'unité; on aura, abstraction faite du signe, $\pi b^{(i)}$ moindre que $\frac{2K}{i^3}\pi$; d'où il suit que la série de l'expression de R est convergente.

On peut, en suivant la méthode exposée dans le numéro précédent,

(*) Voir, dans le Tome V des Œuvres de Laplace, la note de la page 486.

déterminer la valeur approchée de $b^{(i)}$ lorsque i est un grand nombre. Pour cela, j'observe que l'expression de R développée en série par rapport aux puissances de l'excentricité, que nous avons rapportée dans le n° I, donne

$$b^{(i)} = \frac{e^i i^{i-2}}{1.2.3 \dots i.2^{i-1}} \left[i - \frac{i+2}{1(i+1)} \left(\frac{ei}{2}\right)^2 + \frac{i+4}{1.2(i+1)(i+2)} \left(\frac{ei}{2}\right)^4 - \frac{i+6}{1.2.3(i+1)(i+2)(i+3)} \left(\frac{ei}{2}\right)^6 + \dots \right].$$

Le terme général de cette expression est

$$\pm \frac{e^i i^{i-2}}{1.2.3 \dots i.2^{i-1}} \frac{i+2r}{1.2.3 \dots r(i+1)(i+2) \dots (i+r)} \left(\frac{ei}{2}\right)^{2r}.$$

Si l'on observe que, r étant un très grand nombre, on a, à fort peu près,

$$1.2.3 \dots r.1.2.3 \dots (i+r) = r^{r+\frac{1}{2}} (i+r)^{i+r+\frac{1}{2}} e^{-i-3r} 2\pi;$$

on peut donner à ce terme la forme

$$\pm \frac{e^i e^i i^{i-2} (i+2r)}{2^i \pi (i+r)^i \sqrt{r(i+r)}} \left[\frac{e^2 i^2 e^2}{4r(i+r)} \right]^r,$$

quantité qui devient nulle lorsque r est infini. La série de l'expression de $b^{(i)}$ est donc convergente.

Pour avoir sa valeur approchée, je considère la série

$$(m) \quad i + \frac{i+2}{1(i+1)} \left(\frac{ei}{2}\right)^2 + \frac{i+4}{1.2(i+1)(i+2)} \left(\frac{ei}{2}\right)^4 + \dots,$$

dont le terme général est

$$\frac{i+2r}{1.2.3 \dots r(i+1)(i+2) \dots (i+r)} \left(\frac{ei}{2}\right)^{2r}.$$

On aura, par la méthode exposée dans l'article I, la somme de cette série, fort approchée lorsque i est un très grand nombre. Nommons p le terme précédent, et supposons qu'il soit le plus grand des termes

de la série. Pour avoir le rang qu'il y occupe, on l'égalera, suivant la méthode citée, au terme qui le précède, ce qui donne

$$(i+2r-2)r(i+r) = (i+2r) \frac{i^2 e^2}{4},$$

d'où l'on tire, à fort peu près,

$$r = \frac{i\sqrt{1+e^2} - i}{2}.$$

Le terme qui suit p d'un rang supérieur de t est

$$\frac{p^{i+2r-t} \left(\frac{ei}{2}\right)^{2t}}{(r+1)(r+2)\dots(r+t)(i+r+1)(i+r+2)\dots(i+r+t)}.$$

En appliquant ici l'analyse de l'article I, il est facile de voir que le logarithme de ce terme est, à très peu près,

$$\log p - \frac{t}{i+2r} + 2t \log \frac{ei}{2} - t \log r - \frac{1+2+3+\dots+t}{r} - t \log(i+r) - \frac{1+2+3+\dots+t}{i+r}.$$

Mais on a, à très peu près,

$$\log r(i+r) = 2 \log \frac{ei}{2};$$

en ne conservant donc, conformément à la méthode citée, parmi les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$, que ceux qui sont multipliés par i^2 , et observant que

$$1+2+3+\dots+t = \frac{t^2+t}{2},$$

le logarithme du terme placé à la distance t du terme maximum sera

$$\log p - \frac{(i+2r)t^2}{2r(i+r)};$$

ce terme sera donc

$$p c^{\frac{(i+2r)t^2}{2r(i+r)}}.$$

Il est facile de voir que ce sera aussi l'expression du terme qui précède p du même intervalle t . La somme de la série (m) sera donc, à très peu près,

$$p \int dt c^{\frac{(i+2r)t^2}{2r(i+r)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, ce qui donne cette somme égale à

$$p \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{r(i+r)}{i+2r}}.$$

Si, dans l'expression précédente de p , on substitue, au lieu du produit

$$1.2.3\dots r(i+1)(i+2)\dots(i+r)$$

sa valeur très approchée

$$\frac{[r(i+r)]^r (i+r)^{2\pi} e^{-i+2r} \sqrt{r(i+r)}}{1.2.3\dots i},$$

on aura

$$p = \frac{1.2.3\dots i(i+2r)e^{i+2r}}{2\pi \sqrt{r(i+r)(i+r)}};$$

ce qui, en observant que $i+2r$ est égal à $i\sqrt{1+e^2}$, et que $i+r$ est égal à

$$\frac{i\sqrt{1+e^2} + i}{2},$$

donne, pour la somme de la série (m),

$$\frac{1.2.3\dots i(1+e^2)^{\frac{1}{2}} 2^i e^{i\sqrt{1+e^2}} \sqrt{i}}{\sqrt{2\pi} i^2 (\sqrt{1+e^2} + 1)^i}.$$

En changeant e^2 dans $-e^2$ dans cette expression, on aura la valeur fort approchée de la série

$$i - \frac{i+2}{1(i+1)} \left(\frac{ei}{2}\right)^2 + \frac{(i+4)}{1.2(i+1)(i+2)} \left(\frac{ei}{2}\right)^4 - \frac{(i+6)}{1.2.3(i+1)(i+2)(i+3)} \left(\frac{ei}{2}\right)^6 + \dots$$

Ces passages du positif au négatif, comme du réel à l'imaginaire, ne doivent être employés qu'avec une grande circonspection. Mais ici, e^2

566 SUR LE DEVELOPPEMENT DE L'ANOMALIE VRAIE, ETC.
 étant indéterminé, on peut les employer sans crainte. J'en ai reconnu
 d'ailleurs l'exactitude par une autre analyse; on a ainsi

$$b^{(i)} = \frac{2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} e^i \sqrt{1-e^2} e^i}{i \sqrt{i} \sqrt{2\pi} (1 + \sqrt{1-e^2})^i}.$$

Lorsque i est infini, cette valeur de $b^{(i)}$ reste toujours infiniment
 petite quel que soit e , pourvu qu'il n'excède pas l'unité.

FIN DU TOME DOUZIEME.

