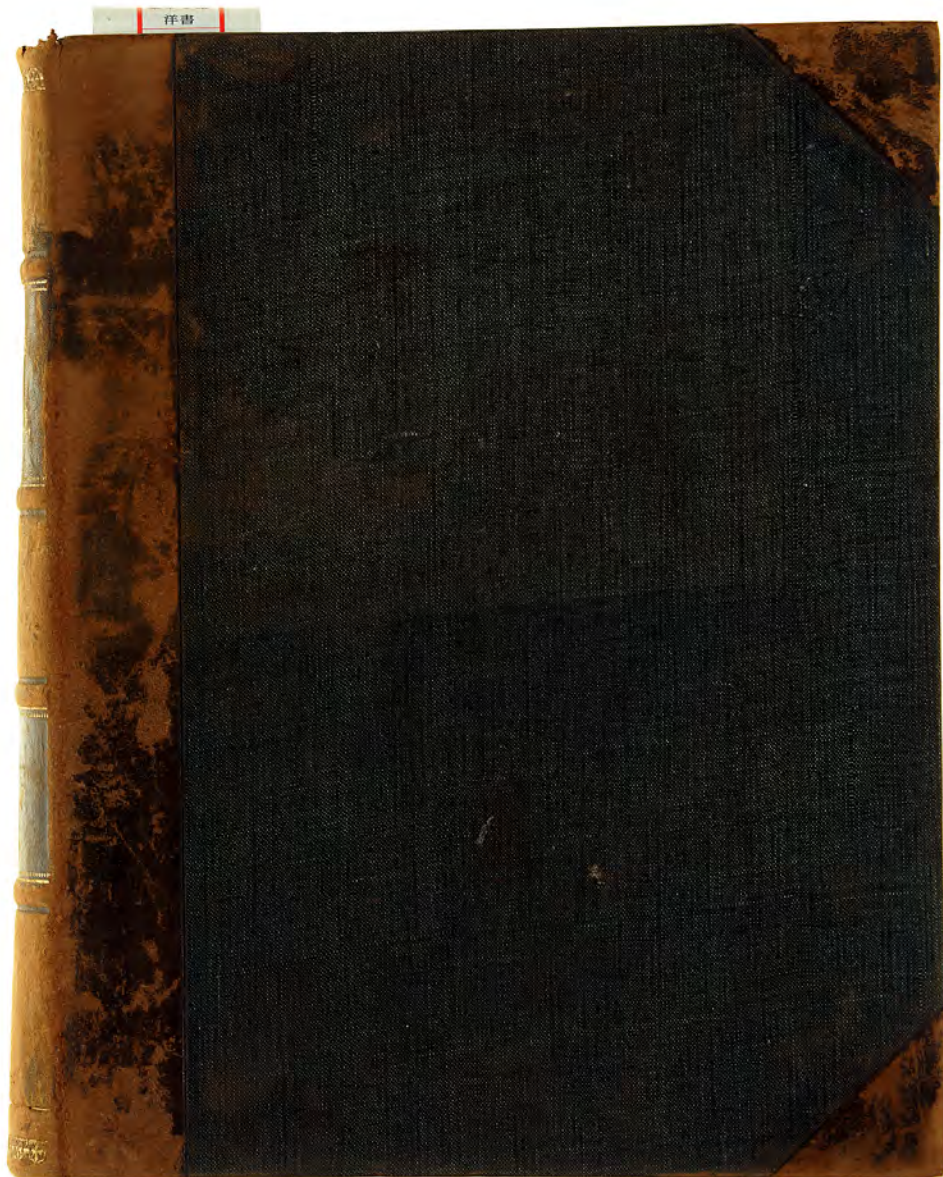




物理
08
L
a.12

九州帝國大學理學部
8452
物理學教室

桑木文庫
洋書
0570

理学部、洋 邇及
022232002009064
九州大学蔵書



物
0
3

801888

ŒUVRES
COMPLETES
DE LAPLACE.



ŒUVRES
COMPLÈTES
DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR
MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME DOUZIÈME.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.
—
MDCCCXCVIII



物
C
a



MÉMOIRES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

ET DE

LA CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
DE L'INSTITUT DE FRANCE.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE DOUZIÈME VOLUME.

	Pages
Mémoire sur le flux et reflux de la mer.....	3
Mémoire sur les mouvements des corps célestes autour de leurs centres de gravité.....	129
Mémoire sur les équations séculaires des mouvements de la Lune, de son apogée et de ses nœuds.....	191
Mémoire sur le mouvement des orbites des satellites de Saturne et d'Uranus.....	237
Mémoire sur la théorie de la Lune.....	257
Mémoire sur les mouvements de la lumière dans les milieux diaphanes.....	267
Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités.....	301
Supplément au Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres.....	349
Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations.....	357
Mémoire sur la figure de la Terre.....	415
Addition au Mémoire sur la figure de la Terre.....	459
Mémoire sur le flux et le reflux de la mer.....	473
Mémoire sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique, en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité.....	519

ERRATA.

Page 138, ligne 7, il faut lire :

- 2° Avec le second axe principal que nous venons de considérer dans le plan de l'équateur;
- 3° Avec un troisième axe perpendiculaire aux deux premiers et formant....





MÉMOIRE

FLUX ET REFLUX DE LA MER.

MÉMOIRE

SUR LE

FLUX ET REFLUX DE LA MER.

*Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1790;
an V (1797).*

I.

Les rapports des phénomènes des marées aux mouvements du Soleil et de la Lune ont été connus des anciens, et indiqués par Pline le naturaliste avec une précision remarquable pour son temps; mais la vraie cause de ces phénomènes a été, pour la première fois, exposée par Newton dans son admirable Ouvrage des *Principes*. Ce grand géomètre, ayant découvert la loi de la gravitation universelle, aperçut bientôt que les mouvements des eaux de la mer étaient une suite de leur inégale pesanteur vers le Soleil et vers la Lune. Pour en déterminer les lois, il supposa la mer en équilibre à chaque instant sous l'action de ces deux astres, et cette hypothèse, qui facilite extrêmement les calculs, lui donna des résultats conformes, à beaucoup d'égards, aux observations. L'Académie des Sciences proposa cette matière pour le sujet d'un prix, en 1740. Les pièces couronnées renferment des développements de la théorie newtonienne, fondés sur la même hypothèse de la mer en équilibre sous l'action des astres qui l'attirent. Il est visible cependant que la rapidité du mouvement de rotation de la Terre empêche les eaux qui la recouvrent de prendre, à chaque instant, la figure qui convient à l'équilibre des forces qui les

amment; mais la recherche des oscillations qui résultent de ce mouvement, combiné avec l'action du Soleil et de la Lune, offrait des difficultés supérieures aux connaissances que l'on avait alors dans l'Analyse et sur le mouvement des fluides. Aidé des découvertes que l'on a faites depuis sur ces deux objets, j'ai repris, dans nos *Mémoires* pour les années 1775 et 1776 ⁽¹⁾, ce problème, le plus épineux de toute la Mécanique céleste. Les seules hypothèses que je me suis permises sont que la mer inonde la Terre entière, et qu'elle n'éprouve que de légers obstacles dans ses mouvements. Toute ma théorie est d'ailleurs rigoureuse et fondée sur les principes du mouvement des fluides. En me rapprochant ainsi de la nature, j'ai eu la satisfaction de voir que mes résultats se rapprochaient des observations, surtout à l'égard du peu de différence qui existe entre les deux marées d'un même jour, vers les syzygies des solstices, différence qui, suivant la théorie de Newton, serait très considérable dans nos ports. Ces résultats, quoique fort étendus, sont encore restreints par les suppositions précédentes et ne représentent pas exactement les observations. La manière dont l'Océan est répandu sur la surface de la Terre, l'irrégularité de sa profondeur, la position et la pente des rivages, leurs rapports avec les côtes qui les avoisinent, les courants, les résistances que les eaux de la mer éprouvent, toutes ces causes, qu'il est impossible d'assujettir au calcul, modifient les mouvements de cette grande masse fluide. Tout ce que nous pouvons faire est d'analyser les phénomènes généraux des marées qui doivent résulter des forces attractives du Soleil et de la Lune, et de tirer des observations les données dont la connaissance est indispensable pour compléter, dans chaque port, la théorie du flux et du reflux de la mer. Ces données sont autant d'arbitraires dépendantes de l'étendue de la mer, de sa profondeur et des circonstances locales du port.

La théorie des oscillations de l'Océan envisagée sous ce point de vue, et sa correspondance avec les observations sont l'objet de cet Ouvrage. Pour le remplir, il était nécessaire d'avoir un grand nombre

⁽¹⁾ *Oeuvres de Laplace*, T. IX.

d'observations, faites avec soin durant plusieurs années dans un port où les phénomènes de marées soient très sensibles, suivent une marche régulière et soient peu altérés par les vents. Le recueil le plus étendu dans ce genre est celui des observations des marées, faites à Brest au commencement de ce siècle, que M. de Cassini a trouvées dans les papiers de son grand-père, et que M. de la Lande a publiées dans le Tome IV de la seconde édition de son *Astronomie*. J'ai fait usage de ces observations; en les discutant, elles m'ont offert une régularité si frappante, eu égard à toutes les causes qui peuvent la troubler, que je ne balance point à indiquer le port de Brest comme l'un des plus favorables aux observations des marées, si l'on veut les suivre avec le soin que l'on a mis à déterminer les autres phénomènes du système du monde. Ce port doit probablement cet avantage à sa position avancée dans la mer, et surtout à ce que sa rade ayant une entrée fort étroite, relativement à son étendue, les oscillations irrégulières des eaux de la mer sont par là très affaiblies. Jacques Cassini s'était contenté de donner, dans nos *Mémoires*, les conséquences qu'il avait tirées des observations dont je viens de parler. Sur cela, je remarquerai combien il est utile de publier les observations originales; souvent la théorie mieux connue des phénomènes rend intéressants ceux qui d'abord avaient été négligés comme ayant paru de peu d'importance; c'est ce que j'ai moi-même éprouvé dans ces recherches. Le Recueil cité ne contient point d'observations sur la loi suivant laquelle la mer monte et descend à Brest; j'y ai suppléé par des observations très détaillées, que l'on a bien voulu faire dans ce port, à ma prière.

Dans ce genre d'observations, où mille causes accidentelles peuvent altérer la marche de la nature, il est nécessaire d'en considérer à la fois un grand nombre, afin que, les effets des causes passagères venant à se compenser les uns par les autres, les résultats moyens ne laissent apercevoir que les phénomènes réguliers ou constants. Il faut encore, par une combinaison avantageuse des observations, faire ressortir les phénomènes que l'on veut déterminer et les séparer des autres, pour les mieux connaître. C'est la méthode que j'ai suivie; en s'en écartant,

on s'expose à prendre pour loi de la nature ce qui n'est que l'effet d'une cause accidentelle. Jacques Cassini, par exemple, avait conclu, de la comparaison de quelques observations isolées, que les plus grandes marées des syzygies ont lieu, toutes choses égales d'ailleurs, dans les équinoxes. M. de la Lande, en suivant le même procédé, a trouvé le contraire. On verra ci-après que les résultats d'un grand nombre d'observations ne laissent aucun lieu de douter qu'à Brest les plus grandes marées des syzygies et les plus petites marées des quadratures arrivent dans les équinoxes, et que, en général, les déclinaisons du Soleil et de la Lune ont une influence très sensible sur les hauteurs et sur les intervalles des marées.

Voici maintenant un précis des résultats auxquels je suis parvenu dans cet Ouvrage.

Considérons d'abord l'action seule du Soleil sur la mer, et supposons que cet astre se meut uniformément dans le plan de l'équateur. Il est visible que, si le Soleil animait de forces égales et parallèles le centre de gravité de la Terre et toutes les molécules de la mer, le système entier du globe terrestre et des eaux qui le recouvrent obéirait à ces forces d'un mouvement commun, et l'équilibre de la mer ne serait pas troublé. Cet équilibre ne peut donc être altéré que par la différence de ces forces et par l'inégalité de leurs directions. Une molécule de la mer placée au-dessous du Soleil en est plus attirée que le centre de la Terre; elle tend ainsi à se séparer de sa surface, mais elle y est retenue par sa pesanteur, que cette tendance diminue. Douze heures après, la molécule se trouve en opposition avec le Soleil, qui l'attire plus faiblement que le centre de la Terre; la surface du globe terrestre tend donc à s'en séparer, mais la pesanteur de la molécule l'y retient encore attachée. Cette force est donc encore diminuée par l'action solaire, et il est facile de s'assurer que la distance du Soleil à la Terre étant fort grande relativement au rayon du globe terrestre, la diminution de pesanteur est, dans ces deux cas, à très peu près la même. Une simple décomposition de l'action du Soleil sur les molécules de la mer suffit pour voir que, dans toute autre position de cet astre par rapport

à ces molécules, son action pour troubler leur équilibre redevient la même après un intervalle de douze heures.

Présentement, on peut établir comme principe général de Mécanique que l'état d'un système de corps, dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances qu'il éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent. L'état de l'Océan doit donc redevenir le même à chaque intervalle de douze heures, en sorte qu'il doit y avoir un flux et un reflux dans l'espace d'un demi-jour.

La loi suivant laquelle la mer s'élève et s'abaisse peut se déterminer ainsi. Concevons un cercle vertical, dont la circonférence représente un intervalle de douze heures, et dont le diamètre soit égal à la marée totale, c'est-à-dire à la différence des hauteurs de la pleine et de la basse mer; supposons que les arcs de cette circonférence, en partant du point le plus bas, expriment les temps écoulés depuis la basse mer; les sinus versés de ces arcs seront les hauteurs de la mer qui correspondent à ces temps.

La diminution de la marée de nos ports doit s'écarter un peu de cette loi, par la raison suivante: la mer n'y descend qu'en vertu de sa pesanteur; elle doit donc, en s'abaissant, se mouvoir plus lentement et parvenir plus tard à sa plus petite hauteur, que loin des côtes, où elle est à la fois sollicitée pour descendre par sa pesanteur et par l'impulsion des flots qui s'éloignent des rivages. Ainsi la mer commence à remonter au loin, quoique dans le port elle continue de baisser, en vertu de la pesanteur, jusqu'à ce que, l'effet de cette force venant à être balancé par l'impulsion des flots éloignés, la marée commence à croître. La mer ne s'abaisse donc jamais jusqu'à sa plus petite hauteur déterminée par la théorie, et le temps qu'elle emploie à monter doit être un peu plus court que celui qu'elle met à descendre. Ce dernier résultat est parfaitement conforme à ce que l'on observe à Brest, où la différence de ces deux temps est d'environ un quart d'heure.

Les lois du mouvement de la mer, que nous venons d'exposer, ont généralement lieu quelles que soient sa profondeur et son étendue;

mais, plus une mer est vaste et moins elle est profonde, plus les phénomènes des marées doivent être sensibles.

Dans une masse fluide, les impressions que reçoit chaque molécule se communiquent à la masse entière; c'est par là que l'action du Soleil, qui est insensible sur une molécule isolée, produit sur l'Océan des effets remarquables. Imaginons un canal courbé sur le fond de la mer et terminé à l'une de ses extrémités par un tube vertical qui s'élève au-dessus de sa surface, et dont le prolongement passe par le centre du Soleil; l'eau s'élèvera dans ce tube par l'action directe de cet astre, qui diminue la pesanteur des molécules qu'il contient, et surtout par la pression des molécules renfermées dans le canal, et qui font toutes un effort pour se réunir au-dessous du Soleil. Si la longueur du canal augmente, la somme de ces efforts sera plus grande, et il y aura plus de différence dans la direction et dans la quantité des forces dont les molécules extrêmes seront animées. Ces deux causes réunies élèveront l'eau à une plus grande hauteur dans le tube vertical. On voit, par cet exemple, l'influence de l'étendue des mers sur les phénomènes des marées, et la raison pour laquelle le flux et le reflux sont insensibles dans les petites mers, telles que la mer Noire et la mer Caspienne.

Si l'Océan a peu de profondeur, ses molécules doivent venir de fort loin, pour qu'il prenne la figure que l'action du Soleil tend à lui donner; ses oscillations doivent donc croître lorsque sa profondeur diminue. Dans une mer très profonde, un très petit mouvement dans ses molécules suffit pour lui donner la figure avec laquelle elle serait à chaque instant en équilibre sous l'action du Soleil, en sorte que cette figure est la limite de celles que la mer prendrait, en augmentant de plus en plus sa profondeur. Ces vues générales sont conformes aux résultats que j'ai trouvés dans nos *Mémoires* pour l'année 1776 ⁽¹⁾.

La grandeur des marées dépend encore des circonstances locales. Les ondulations de la mer, resserrées dans un détroit, peuvent devenir considérables; la réflexion des eaux par les côtes peut les augmenter

⁽¹⁾ *Œuvres de Laplace*, T. IX.

encore. C'est ainsi que le flux et le reflux de la Méditerranée deviennent sensibles dans le golfe de Venise; c'est encore ainsi que les marées, généralement fort petites dans les îles de la mer du Sud, sont fort grandes dans nos ports, et surtout à Saint-Malo. Plus les oscillations de la mer sont promptes, plus ces effets doivent augmenter, toutes choses égales d'ailleurs, puisqu'ils sont dus à la vitesse des eaux: ils sont presque nuls pour les oscillations très lentes; mais ils doivent beaucoup influencer sur celles dont la période est d'un demi-jour.

Les circonstances locales font encore varier considérablement l'heure de la marée dans des ports même fort voisins. Pour nous faire une juste idée de ces variétés, imaginons un large canal communiquant avec la mer et s'avancant très loin dans les terres. Il est visible que les ondulations qui ont lieu à son embouchure se propageront successivement dans toute sa longueur, en sorte que la figure de sa surface sera celle d'une suite d'ondes en mouvement qui se renouvelleront sans cesse, et qui parcourront leur longueur dans l'intervalle d'un demi-jour. Ces ondes produiront à chaque point du canal un flux et un reflux qui suivront les lois précédentes; mais les heures du flux retarderont à mesure que les points seront plus éloignés de la mer. Ce que nous disons d'un canal peut s'appliquer aux fleuves dont la surface s'élève et s'abaisse par des ondes semblables, malgré le mouvement contraire de leurs eaux. On observe ces ondes dans toutes les rivières, près de leurs embouchures; elles se propagent fort loin dans les grands fleuves, et au détroit du Pauxis, dans la rivière des Amazones, à 200 lieues de la mer, elles sont encore sensibles.

Considérons présentement l'action de la Lune, et supposons que cet astre se meut uniformément dans le plan de l'équateur; il est clair que son action doit exciter dans l'Océan un flux et un reflux semblable à celui qui résulte de l'action du Soleil; or on sait que le mouvement total d'un système, agité par de très petites forces, est la somme des mouvements partiels que chaque force lui eût imprimés séparément; ainsi des ondes légères excitées dans un bassin se mêlent sans se confondre; une onde nouvelle se superpose à la précédente, comme elle

se serait disposée sur la surface de niveau du bassin. Les deux flux partiels, produits par les actions du Soleil et de la Lune, s'ajoutent donc sans se troubler mutuellement, et leur somme produit le flux que nous observons dans nos ports.

De la combinaison des deux flux lunaire et solaire, naissent les phénomènes les plus remarquables des marées. Quand la pleine marée lunaire coïncide avec la pleine marée solaire, la marée totale est à son maximum; c'est ce qui a lieu dans les syzygies, où les actions du Soleil et de la Lune concourent. Dans les quadratures, où ces deux actions sont contraires, la pleine marée lunaire coïncide avec la basse marée solaire, et la marée totale est à son minimum.

L'heure du minimum des marées est à six heures de distance du maximum, ce qui prouve que ce minimum est l'excès de la marée lunaire sur la marée solaire, et qu'ainsi l'action de la Lune sur la mer l'emporte sur l'action du Soleil. D'après un grand nombre d'observations des marées, réduites aux moyennes distances du Soleil et de la Lune, je trouve qu'à Brest la marée totale est à fort peu près de $19^{\text{h}} \frac{2}{10}$ dans son maximum, et de $9^{\text{h}} \frac{4}{10}$ dans son minimum. Le rapport de ces deux marées détermine celui des forces de la Lune et du Soleil sur la mer, et l'on en conclut que la première est triple de la seconde. En calculant, d'après ce rapport, les lois de la diminution et de l'accroissement des marées, lorsqu'elles commencent à s'éloigner du maximum et du minimum, on trouve leur accroissement deux fois plus rapide que leur diminution, ce qui est conforme aux observations qui, relativement à ces lois, sont représentées par la théorie avec une précision remarquable.

Les marées lunaires et solaires suivent d'un intervalle constant le passage de leurs astres respectifs au méridien. L'instant de la marée composée doit donc osciller autour de l'instant de la marée lunaire, suivant une loi dépendante des phases de la Lune et du rapport de son action à celle du Soleil. Le premier de ces instants précède le second, depuis le maximum jusqu'au minimum de la marée; il le suit depuis le minimum jusqu'au maximum; leur plus grand écart ne tombe pas

au milieu de l'intervalle qui sépare ces deux marées; mais il est d'environ un tiers plus près du minimum que du maximum. L'heure moyenne de la marée composée est la même que celle de la marée lunaire; en sorte que l'intervalle moyen de deux marées consécutives du matin ou du soir, dans nos ports, est d'un jour lunaire ou de $24^{\text{h}} 50^{\text{m}} 28^{\text{s}}$. Le retard moyen journalier des marées est donc de $50^{\text{m}} 28^{\text{s}}$; mais ce retard varie, ainsi que les hauteurs des marées, avec les phases de la Lune. Le plus petit retard coïncide avec la plus grande hauteur, et le plus grand retard coïncide avec la plus petite hauteur. La discussion d'un grand nombre d'observations des marées m'a donné le plus grand retard, égal à $1^{\text{h}} 15^{\text{m}}$, et le plus petit égal à $39^{\text{m}} 0^{\text{s}}$. Ces deux quantités dépendent du rapport des forces de la Lune et du Soleil et peuvent conséquemment servir à le déterminer. Il en résulte que la première de ces deux forces est triple de la seconde, comme nous l'avons trouvé par la comparaison de la plus grande et de la plus petite hauteur des marées. En changeant un peu ce rapport, il serait fort éloigné de satisfaire aux observations des hauteurs et des intervalles des marées, qui le donnent par conséquent avec beaucoup d'exactitude. La connaissance de cet élément est nécessaire dans l'Astronomie, à cause de son influence sur la précession et la nutation et sur l'équation lunaire des Tables du Soleil. La valeur que nous venons de lui assigner porte à $10''$ la nutation que Bradley a fixée à $9''$, et que plusieurs astronomes supposent de $9'' \frac{1}{2}$; l'équation de la précession est de $18''.8$, et l'équation lunaire est à très peu près de $9''$. Enfin la masse de la Lune est environ $\frac{1}{80}$ de celle de la Terre; et, comme son volume est à peu près $\frac{1}{10}$ de celui de la Terre, la densité de la Lune n'est qu'environ $\frac{5}{8}$ de la moyenne densité de la Terre.

On doit faire ici une remarque importante, et de laquelle dépend l'explication de plusieurs phénomènes des marées. Si les mouvements du Soleil et de la Lune étaient extrêmement lents par rapport au mouvement de rotation de la Terre, les deux marées lunaire et solaire suivraient à très peu près du même intervalle le passage de leurs astres respectifs au méridien; mais, le mouvement journalier de la Lune dans

son orbite étant considérable, la rapidité de ce mouvement peut sensiblement influencer sur l'intervalle dont cet astre précède le flux lunaire. En effet, l'action du Soleil et de la Lune sur chaque molécule de la mer produit à chaque instant une onde infiniment petite, dont cette molécule est l'origine, et qui se propage dans toute l'étendue de l'Océan; c'est de la somme de ces ondes que se compose le mouvement de cette grande masse fluide. Il est visible que celles dont l'origine est vers l'équateur ou dans l'hémisphère austral doivent employer un temps considérable à parvenir dans nos ports; ainsi le flux que l'on y observe est le résultat des impressions communiquées à la mer plusieurs jours auparavant. La Lune ayant dans cet intervalle un mouvement considérable dans son orbite, le rapport du flux lunaire à la position correspondante de cet astre peut différer sensiblement du rapport du flux solaire à la position correspondante du Soleil. A la vérité, si la mer recouvrait toute la Terre, et si sa profondeur était régulière, les impressions qu'elle reçoit se coordonneraient de manière que le flux arriverait à l'instant du passage de l'astre au méridien; mais l'irrégularité de la profondeur de la mer et les résistances qu'elle éprouve doivent changer ce résultat et faire varier, dans chaque port, l'intervalle dont l'astre précède le flux qu'il produit.

Nous aurons une juste idée de ces variations en imaginant, comme ci-dessus, un vaste canal communiquant avec la mer et s'avancant fort loin dans les terres sous le méridien de son embouchure. Si l'on suppose qu'à cette embouchure la pleine mer a lieu à l'instant même du passage de l'astre au méridien et qu'elle emploie 50 heures à parvenir à son extrémité, il est visible que, à ce dernier point, la marée solaire suivra de 2 heures le passage du Soleil au méridien; mais, 50 heures ne formant que $2^{\text{heures}} 19^{\text{m}}$ lunaires, le flux lunaire suivra d'environ 19^{m} le passage de la Lune au méridien; en sorte qu'il y aura $1^{\text{h}} 41^{\text{m}}$ de différence dans les intervalles dont les flux lunaire et solaire suivront le passage de leurs astres respectifs au méridien. Il est facile, d'ailleurs, de s'assurer que cette différence sera la même, à peu près, pour les points assez voisins de l'extrémité du canal, quoiqu'il y ait des diffé-

rences considérables dans les heures des marées correspondantes: ces résultats sont exactement conformes à ceux que l'on observe dans nos ports.

Il suit de là que le maximum et le minimum de la marée n'ont point lieu le jour même de la syzygie et de la quadrature, mais un ou deux jours après; ainsi, dans l'exemple précédent, ce maximum et ce minimum qui, à l'embouchure du canal, ont lieu le jour même de la syzygie et de la quadrature, n'arrivent à son extrémité que 50 heures après. Ce phénomène est très sensible à Brest sur les hauteurs des marées. Les lois des variations des marées vers leur maximum et vers leur minimum doivent en déterminer les instants. J'ai donc interpolé un grand nombre de hauteurs des marées dans le voisinage des syzygies et des quadratures, et j'ai trouvé que le maximum de la marée suit la syzygie de $35^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ et que le minimum suit de 38 heures la quadrature. La différence de ces intervalles qui, par la théorie, doivent être égaux entre eux, est dans les limites des erreurs des observations.

On peut encore déterminer ces intervalles au moyen des heures observées des marées le jour même de la syzygie et de la quadrature. Leur différence serait de 6 heures si elles correspondaient au maximum et au minimum de la marée, mais l'observation la donne plus petite à Brest; elle est de $5^{\text{h}} 5^{\text{m}} 54^{\text{s}}$ pour les marées du matin et de $5^{\text{h}} 18^{\text{m}} 36^{\text{s}}$ pour les marées du soir. Un jour plus tard, ces différences augmentent parce que les marées retardent chaque jour d'environ une demi-heure de plus dans les quadratures que dans les syzygies. En combinant donc ces différences avec les retards journaliers des marées vers leur maximum et vers leur minimum, de manière qu'elles soient précisément de 6 heures, on aura l'intervalle dont le maximum de la marée suit la syzygie. On trouve ainsi que, à Brest, cet intervalle est de $43^{\text{h}} 56^{\text{m}}$.

Enfin, j'ai fait usage d'une quatrième méthode pour déterminer ce même intervalle. Suivant les observations, les marées du jour de la syzygie avancent lorsqu'elles sont périgées et retardent lorsqu'elles sont apogées. Suivant la théorie, le retard des marées apogées sur

les marées périégées est proportionnel à l'intervalle du maximum des marées à la syzygie; il peut donc servir à déterminer cet intervalle. Je l'ai trouvé de cette manière, au moyen d'un assez grand nombre d'observations, égale à $25^h55^m\frac{1}{2}$.

Le milieu entre ces deux intervalles donnés par les heures des marées est 34^h41^m , ce qui s'éloigne peu de 36^h47^m , milieu entre les intervalles donnés par les variations des hauteurs des marées vers les syzygies et vers les quadratures; mais les différences de 43^h56^m et de $25^h55^m\frac{1}{2}$ à ce milieu sont trop grandes pour dépendre uniquement des erreurs des observations. En considérant cet objet avec attention, j'ai reconnu que l'heure des marées à Brest retarde sur l'heure déterminée par la théorie à mesure qu'elles sont plus grandes; et il est clair que cela doit être ainsi: car si l'on compare l'étendue de la rade de Brest à la petitesse de son entrée, on voit que les grandes marées doivent employer plus de temps que les petites à se former dans le port; il peut se faire encore qu'elles emploient plus de temps à y parvenir.

Cette cause rapproche l'heure observée de la marée quadrature de celle de la marée syzygie et diminue, par conséquent, la différence de ces heures, différence qui, sans cela, approcherait davantage de 6 heures; l'intervalle du maximum de la marée à la syzygie en paraît donc augmenté. Je trouve que pour le réduire de 43^h56^m à 36^h47^m il faut supposer que l'heure de la marée du jour de la syzygie retarde sur la théorie d'environ 10^m , en supposant exacte l'heure de la marée du jour de la quadrature.

Voyons maintenant quelle est l'influence de la même cause sur les heures des marées syzygies périégées et apogées. Il est visible qu'elle rapproche ces heures et qu'ainsi l'intervalle du maximum de la marée à la syzygie, conclu de leur différence observée, en doit être diminué; c'est la raison pour laquelle je ne l'ai trouvé que de $25^h55^m\frac{1}{2}$. Pour corriger l'effet de cette cause, j'ai supposé, ce qui est fort naturel, que les marées retardent d'autant plus sur l'heure de la théorie qu'elles sont plus grandes; et en supposant ensuite que ce retard soit, comme

on vient de le dire, de 10^m pour les marées syzygies comparées aux marées quadratures, j'ai trouvé que l'intervalle de $25^h55^m\frac{1}{2}$ s'élevait à 38^h53^m , ce qui se rapproche autant qu'on peut le désirer du résultat moyen donné par les hauteurs des marées et met hors de doute l'influence de la cause dont je viens de parler. C'est en prenant un milieu entre ces divers résultats que j'ai fixé à 36^h30^m l'intervalle dont le maximum de la marée à Brest suit la syzygie, et dont le minimum de la marée suit la quadrature. Il en résulte que, dans ce port, le flux solaire suit le passage du Soleil au méridien, de 4^h26^m , et que le flux lunaire suit le passage de la Lune au méridien, de 3^h19^m ; ainsi, sous ce rapport, les heures des marées à Brest sont les mêmes qu'à l'extrémité d'un canal qui communiquerait avec la mer, en concevant que, à son embouchure, les marées partielles ont lieu à l'instant du passage des astres au méridien, et qu'elles emploient 36^h30^m à parvenir à son extrémité supposée de 3^h56^m plus orientale que son embouchure. En général, l'observation et la théorie m'ont conduit à envisager chacun de nos ports de France, relativement aux marées, comme l'extrémité d'un canal à l'embouchure duquel les marées partielles ont lieu au moment du passage des astres au méridien et emploient un intervalle d'environ un jour et demi à parvenir à son extrémité supposée plus orientale que son embouchure d'une quantité très variable d'un port à l'autre.

On peut observer que la différence dans les rapports des marées à la position des astres qui les produisent ne change point les phénomènes du flux et du reflux; pour un système d'astres mus uniformément dans le plan de l'équateur, elle ne fait que reculer d'environ 36^h30^m les phénomènes calculés dans l'hypothèse où les flux partiels suivraient, du même intervalle, le passage de leurs astres respectifs au méridien.

Le retard des phénomènes des marées sur les phases de la Lune a été indiqué par Plin le naturaliste. Plusieurs philosophes l'ont attribué au temps que l'action lunaire emploie, suivant eux, à se transmettre à la terre; mais cette hypothèse ne peut subsister avec

l'inconcevable activité de la force attractive. En considérant autrefois les tentatives infructueuses des géomètres pour expliquer l'équation séculaire de la Lune, je soupçonnai que la pesanteur n'agit pas de la même manière sur les corps en repos et en mouvement, et je trouvai que, si l'équation séculaire de la Lune provenait de cette cause, il faudrait supposer à cet astre une vitesse vers la Terre plusieurs millions de fois plus grande que celle de la lumière pour le soustraire à l'action de sa pesanteur. Maintenant que la vraie cause de l'équation séculaire de la Lune est connue, cette vitesse doit être beaucoup plus grande encore. Une aussi prodigieuse activité dans la force attractive de la Terre ne permet pas de penser que l'action de la Lune se transmet dans un ou deux jours à l'océan. Ce n'est donc point au temps de cette transmission, mais à celui que les impressions communiquées par les astres à la mer emploient à parvenir dans nos ports qu'il faut attribuer le retard observé des phénomènes des marées sur les phases de la Lune.

Jusqu'ici nous avons supposé le Soleil et la Lune mus d'une manière uniforme dans le plan de l'équateur; faisons présentement varier leurs mouvements et leurs distances au centre de la Terre. En développant les expressions de leur action sur la mer, on peut en représenter les différents termes par les actions d'un même nombre d'astres mus uniformément à des distances constantes de la Terre; il sera donc facile, par les principes que nous venons d'exposer, de déterminer le flux et le reflux de la mer correspondants aux inégalités des mouvements et des distances du Soleil et de la Lune. Si l'on soumet ainsi à l'analyse les phénomènes des marées, on trouve que les marées produites par ces deux astres augmentent en raison inverse du cube de leurs distances. Les marées doivent donc, toutes choses égales d'ailleurs, croître dans le périégée de la Lune et diminuer dans son apogée. Ce phénomène est très remarquable à Brest. La comparaison des observations m'a fait voir que, à 1 minute de variation dans le demi-diamètre de la Lune, répondent 2^{vies} , 8 de variation dans la marée totale, et ce résultat de l'observation est tellement conforme à celui de la

théorie que l'on aurait pu déterminer par ce moyen la loi de l'action de la Lune sur la mer relative à sa distance.

Il suit de là que, si l'on veut dépouiller les phénomènes des marées des variations de la parallaxe lunaire, il faut les considérer à la même distance de deux syzygies consécutives et prendre un milieu entre eux, car il est clair que, si la Lune est apogée dans une syzygie, elle sera, à peu près, périégée dans la suivante; les effets de la variation de sa distance se détruiront mutuellement, et les résultats moyens des phénomènes en seront indépendants.

Les variations de la distance du Soleil à la Terre sont encore sensibles sur les hauteurs des marées, que les observations donnent un peu plus grandes en hiver qu'en été; mais ce phénomène est beaucoup moins considérable pour le Soleil que pour la Lune, parce que son action pour élever les eaux de la mer est trois fois moindre et que sa distance à la Terre varie dans un plus petit rapport.

L'action de la Lune étant plus grande et son mouvement étant plus rapide lorsqu'elle est plus près de la Terre, la marée composée, dans les syzygies, doit se rapprocher de la marée lunaire et la marée lunaire doit se rapprocher du passage de la Lune au méridien, puisque nous venons de voir que la marée partielle se rapproche d'autant plus de l'astre qui la cause que son mouvement est plus rapide. Les marées périégées doivent donc avancer le jour de la syzygie et les marées apogées doivent retarder. Ce phénomène est très sensible à Brest par les observations; elles m'ont donné $9^{\text{m}}27^{\text{s}}$ de retard pour 1 minute de diminution dans le demi-diamètre de la Lune, ce qui résulte, à peu près, de la théorie.

La parallaxe de la Lune influe encore sur l'intervalle de deux marées consécutives du matin ou du soir, vers les syzygies, ou dans le voisinage du maximum des marées: cet intervalle augmente dans le périégée de la Lune et diminue dans son apogée. Suivant la théorie, 1 minute de variation dans le demi-diamètre de la Lune fait varier cet intervalle de $6^{\text{m}}49^{\text{s}}$, et les observations m'ont donné $6^{\text{m}}50^{\text{s}}$.

Ces deux phénomènes ont également lieu dans les quadratures; mais

ils sont beaucoup moins sensibles que dans les syzygies, où les variations du mouvement et de la parallaxe de la Lune sont plus grandes et influent davantage sur ces phénomènes.

La période qui ramène l'apogée de la Lune à la même position par rapport aux équinoxes ramène encore dans les mêmes saisons tout ce qui, dans les marées, dépend de la parallaxe lunaire.

Après avoir développé la théorie du flux et du reflux de la mer, en supposant le Soleil et la Lune mus dans le plan de l'équateur, nous allons considérer les mouvements de ces astres tels qu'ils sont dans la nature. Nous verrons naître de leurs déclinaisons de nouveaux phénomènes qui, comparés aux observations, confirmeront de plus en plus la théorie précédente.

Ce cas général peut encore se ramener à celui de plusieurs astres mus uniformément dans le plan de l'équateur; mais il faut donner à ces astres des mouvements très différents dans leurs orbites. Les uns s'y meuvent avec lenteur; ils produisent un flux et un reflux dont la période est d'environ un demi-jour. D'autres ont un mouvement de révolution à peu près égal à la moitié du mouvement de rotation de la Terre; ils produisent un flux et un reflux dont la période est d'environ un jour. D'autres, enfin, ont un mouvement de révolution à peu près égal au mouvement de rotation de la Terre; ils produisent des flux et des reflux dont les périodes, fort longues, sont d'un mois et d'une année. Examinons ces trois espèces de flux et de reflux.

La première renferme, non seulement les oscillations que nous avons considérées ci-dessus et qui dépendent du mouvement du Soleil et de la Lune et de la variation de leurs distances, mais d'autres encore dépendantes de leurs déclinaisons. En soumettant celles-ci à l'analyse, on trouve que les marées totales des syzygies des équinoxes sont plus grandes que celles des solstices, dans le rapport de l'unité au carré du cosinus de la déclinaison du Soleil et de la Lune vers les solstices; on trouve encore que les marées des quadratures des solstices surpassent celles des équinoxes. Ces résultats de la théorie sont confirmés par toutes les observations, qui ne laissent aucun doute sur

l'affaiblissement de l'action des astres, à mesure qu'ils s'éloignent de l'équateur. Les déclinaisons du Soleil et de la Lune sont sensibles, même sur les lois de la diminution et de l'accroissement des marées, en partant de leur maximum et de leur minimum. Leur diminution est, suivant les observations comme par la théorie, d'environ un tiers plus rapide dans les syzygies des équinoxes que dans les syzygies des solstices. Leur accroissement est, suivant les observations comme par la théorie, environ deux fois plus rapide dans les quadratures des équinoxes que dans les quadratures des solstices. La position des nœuds de l'orbite lunaire, qui augmente ou diminue les déclinaisons solsticiales de la Lune, se fait sentir encore dans les observations des marées.

Le mouvement de cet astre en ascension droite, plus prompt dans les solstices que dans les équinoxes, doit rapprocher la marée lunaire du passage de cet astre au méridien. L'heure des marées syzygies équinoxiales doit donc retarder sur l'heure des marées syzygies solsticiales. Par la même raison, l'heure des marées des quadratures des solstices doit retarder sur celle des marées des quadratures des équinoxes, et ce second retard est environ quadruple du premier.

Les déclinaisons des astres influent encore sur les retards journaliers des marées des équinoxes et des solstices; ils doivent être plus grands vers les syzygies des solstices que vers les syzygies des équinoxes; plus grands encore vers les quadratures des équinoxes que vers les quadratures des solstices, et, dans le premier cas, la différence des retards est environ quatre fois moindre que dans le second. Les observations donnent, avec une précision remarquable, ces divers résultats de la théorie.

Les marées de la seconde espèce, dont la période est à peu près d'un jour, sont proportionnelles au produit du sinus par le cosinus de la déclinaison des astres; elles sont nulles lorsque les astres sont dans l'équateur et elles croissent à mesure qu'ils s'en éloignent. En se combinant avec les marées de la première espèce, elles rendent inégales les deux marées d'un même jour. Dans les syzygies des solstices

d'hiver, la marée du matin à Brest est d'environ 7 pouces plus grande que celle du soir; elle est plus petite de la même quantité dans les syzygies des solstices d'été. En général, les marées de la seconde espèce sont peu considérables dans nos ports. Leur grandeur est une arbitraire dépendante des circonstances locales qui peuvent les augmenter et diminuer en même temps les marées de la première espèce, jusqu'à les rendre insensibles. Imaginons, en effet, un large canal communiquant par ses deux extrémités avec l'Océan; la marée dans un port situé sur la rive de ce canal sera le résultat des ondulations transmises par ses deux embouchures. Or il peut arriver que, à raison de la situation du port, les ondulations de la première espèce y parviennent de chaque côté dans des temps différents, en sorte que le maximum des unes réponde au minimum des autres; et si l'on suppose d'ailleurs qu'elles sont égales entre elles, il est visible que, en vertu de ces ondulations, il n'y aura point de flux et de reflux dans le port; mais il y en aura en vertu des ondulations de la seconde espèce qui, ayant une période deux fois plus longue que celle des ondulations de la première espèce, ne se correspondront point de manière que le maximum de celles qui viennent d'un côté coïncide avec le minimum de celles qui viennent de l'autre côté. La marée dans le port sera donc formée de ces ondulations. Ainsi, dans ce cas, il n'y aura point de flux et de reflux lorsque le Soleil et la Lune seront dans l'équateur; mais la marée deviendra sensible lorsque la Lune s'éloignera de ce plan, et alors il n'y aura qu'un flux et un reflux par jour lunaire, de manière que si le flux arrive au coucher de la Lune, le reflux arrivera à son lever. Ces phénomènes singuliers ont été observés à Batsha, port du royaume de Tunking, et dans quelques autres lieux. Il est vraisemblable que des observations faites dans les différents ports de la Terre offriraient toutes les variétés intermédiaires entre les marées de Batsha et celles de nos ports.

Considérons enfin les marées de la troisième espèce, dont les périodes sont fort longues et indépendantes du mouvement de rotation de la Terre. Si les durées de ces périodes étaient infinies, ces

marées n'auraient d'autre effet que de changer la figure permanente de la mer qui parviendrait bientôt à l'état d'équilibre dû aux forces qui les produisent; mais les périodes de ces marées étant finies, on peut concevoir le mouvement très lent qui en résulte dans chaque molécule comme formé de deux autres, l'un d'oscillation autour du point où cette molécule serait en équilibre si l'action des astres dont ces marées dépendent devenait invariable, et l'autre qui lui est commun avec ce point d'équilibre dont la position change à chaque instant. Le premier de ces mouvements est détruit par les résistances que les eaux de la mer éprouvent; il ne reste ainsi à la molécule que le mouvement qui lui est commun avec le point où elle serait à chaque instant en équilibre. On peut donc considérer la mer comme étant sans cesse en équilibre sous l'action des astres qui produisent les marées de la troisième espèce, et les déterminer dans cette hypothèse. Ces marées sont très peu considérables; elles sont cependant sensibles à Brest et conformes au résultat du calcul. Elles offrent le moyen, peut-être le plus exact, pour avoir le rapport de la moyenne densité de la Terre à celle des eaux de la mer, rapport intéressant à connaître et que l'on a cherché à déterminer par l'attraction des montagnes; mais, pour l'obtenir avec précision, il faudrait au moins un siècle d'observations sur les marées.

On voit, par cet exposé, l'accord de la théorie du flux et du reflux de la mer, fondée sur la loi de la pesanteur, avec les phénomènes des hauteurs et des intervalles des marées. Plusieurs de ces phénomènes m'ont été d'abord indiqués par cette théorie et ont ensuite été confirmés par les observations; d'autres phénomènes que les observations m'avaient fait connaître, et qui ne me semblaient pas pouvoir dépendre de la théorie, ont résulté de cette même théorie plus approfondie. En général, tous les résultats de la théorie, indépendants des circonstances locales, ont été confirmés par les observations; et, lorsque ces circonstances ont modifié les résultats de la théorie, j'ai retrouvé le même accord, en y ayant égard. Des observations plus nombreuses, plus précises et plus détaillées que celles qui ont été faites, en la confirmant de plus en

plus, pourront encore déterminer les petites marées partielles qui dépendent de la quatrième puissance de la parallaxe lunaire et des autres quantités négligées dans le calcul. Il est donc intéressant de suivre les marées avec le même soin que les mouvements célestes. Il suffirait d'observer, chaque année, les instants et les hauteurs des pleines et des basses mers dans les deux syzygies et dans les deux quadratures consécutives qui comprennent chaque équinoxe et chaque solstice, en considérant le jour même de la phase et les trois jours qui la suivent. L'observation des hauteurs n'a aucune difficulté, mais les instants de la pleine et de la basse mer sont difficiles à saisir. On pourra les obtenir avec précision en prenant un milieu entre les deux instants où la mer est à la même hauteur, environ un quart d'heure avant et après la pleine ou la basse mer. Une longue suite d'observations de ce genre, comparées aux positions correspondantes du Soleil et de la Lune, rectifiera les éléments auxquels je suis parvenu dans cet Ouvrage, fixera ceux qui sont encore incertains et développera des phénomènes jusqu'ici enveloppés dans les erreurs des observations.

II.

Expression générale de la hauteur de la mer.

Si l'on suppose la Terre entière inondée par la mer et que ses oscillations n'éprouvent que de légères résistances, la théorie de la pesanteur donne les résultats suivants. [Voir les *Mémoires de l'Académie* pour les années 1775 et 1776 (*).]

Soient S la masse du Soleil, r sa distance au centre de la Terre, v sa déclinaison et φ son ascension droite.

Soient L la masse de la Lune, r' sa distance au centre de la Terre, v' sa déclinaison et φ' son ascension droite.

Soient θ le complément de la latitude d'un lieu quelconque sur la Terre, et ω sa longitude; t le temps, et nt l'angle que forme le premier

(*) *Oeuvres de Laplace*, T. IX.

méridien d'où les angles ω sont comptés avec le colure des équinoxes, en sorte que $nt + \omega$ soit la distance ou longitude du lieu de la Terre dont il s'agit, à l'équinoxe du printemps.

Soient enfin y l'élevation de la mer au-dessus du niveau qu'elle prendrait sans l'action du Soleil et de la Lune, g la pesanteur, et ρ le rapport de la densité de la mer à la moyenne densité de la Terre. On aura

$$y = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)}\left[\frac{S}{r^2}(1-3\sin^2 v) + \frac{L}{r'^2}(1-3\sin^2 v')\right] \\ + A\left[\frac{S}{r^3}\sin v \cos v \cos(nt + \omega - \varphi) + \frac{L}{r'^3}\sin v' \cos v' \cos(nt + \omega - \varphi')\right] \\ + B\left[\frac{S}{r^3}\cos^2 v \cos 2(nt + \omega - \varphi) + \frac{L}{r'^3}\cos^2 v' \cos 2(nt + \omega - \varphi')\right],$$

A et B étant des fonctions de θ indépendantes de la profondeur de la mer et de la loi de cette profondeur.

Si la profondeur de la mer est constante, $A = 0$, et alors les deux marées d'un même jour sont égales; leur différence est très petite si cette profondeur est à peu près constante; mais la loi de la profondeur de la mer étant inconnue, les valeurs de A et B sont des indéterminées que l'observation seule peut faire connaître.

En supposant avec Newton la mer en équilibre à chaque instant sous l'action combinée du Soleil et de la Lune, on a

$$A = \frac{3\sin\theta \cos\theta}{g\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)}, \quad B = \frac{3\sin^2\theta}{4g\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)}.$$

Dans ce cas, l'expression de y est fort éloignée de satisfaire aux observations faites dans nos ports, et suivant lesquelles la différence des deux marées d'un même jour, dans les syzygies des solstices, est très petite.

III.

Voyons maintenant les modifications que doivent apporter dans l'expression précédente de y l'irrégularité de la profondeur de la mer

et les diverses circonstances locales qui ont une si grande influence dans les phénomènes des marées.

On peut considérer la mer comme un système d'une infinité de molécules qui réagissent les unes sur les autres, soit par leur pression, soit par leur attraction mutuelle, et qui, de plus, sont animées par la pesanteur et par les forces attractives du Soleil et de la Lune. Sans l'action de ces deux dernières forces, le système serait depuis longtemps en équilibre : la loi de ces forces doit donc en régler les mouvements.

Pour déterminer les forces attractives du Soleil et de la Lune, soit R le rayon mené du centre de gravité de la Terre à une molécule de la mer, déterminée par les angles θ et ϖ ; nommons V la fonction

$$\frac{S}{2r^2} \{ 3[\cos \theta \sin \varpi + \sin \theta \cos \varpi \cos(nt + \varpi - \varphi)]^2 - 1 \} \\ + \frac{L}{2r^3} \{ 3[\cos \theta \sin \varpi' + \sin \theta \cos \varpi' \cos(nt + \varpi - \varphi')]^2 - 1 \}.$$

La somme des forces solaires et lunaires, décomposées parallèlement au rayon R, sera $2RV$; la somme de ces forces décomposées perpendiculairement au rayon R, dans le plan du méridien de la molécule, sera $R \frac{\partial V}{\partial \theta}$; enfin, la somme des mêmes forces décomposées perpendiculairement au plan de ce méridien sera $R \frac{\partial V}{\sin \theta}$.

Ces expressions sont très approchées pour le Soleil, à cause de sa grande distance à la Terre, qui rend insensibles les termes multipliés par $\frac{S}{r^2}$; elles sont moins exactes pour la Lune; mais les phénomènes observés des marées ne m'ont rien fait apercevoir qui puisse dépendre des forces de l'ordre $\frac{L}{r^3}$. Peut-être des observations plus exactes et plus nombreuses que celles qui ont été faites rendront sensibles les effets de ces forces.

IV.

Ne considérons d'abord que l'action du Soleil, et supposons qu'il se meuve dans le plan de l'équateur, uniformément et toujours à la même distance du centre de la Terre; les trois forces précédentes deviennent

$$\frac{SR}{2r^2} [3 \sin^2 \theta - 2 + 3 \sin^2 \theta \cos 2(nt + \varpi - \varphi)], \\ \frac{3SR}{2r^2} \sin \theta \cos \theta [1 + \cos 2(nt + \varpi - \varphi)], \\ - \frac{3SR}{2r^2} \sin \theta \sin 2(nt + \varpi - \varphi).$$

En vertu des seules forces constantes

$$\frac{SR}{2r^2} (3 \sin^2 \theta - 2) \quad \text{et} \quad \frac{3SR}{2r^2} \sin \theta \cos \theta,$$

la mer finirait par être en équilibre; ces forces ne font donc qu'altérer un peu la figure permanente que prend la Terre en vertu de son mouvement de rotation; mais les trois forces variables

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{3SR}{2r^2} \sin^2 \theta \cos 2(nt + \varpi - \varphi), \\ \frac{3SR}{2r^2} \sin \theta \cos \theta \cos 2(nt + \varpi - \varphi), \\ - \frac{3SR}{2r^2} \sin \theta \sin 2(nt + \varpi - \varphi) \end{cases}$$

doivent exciter dans l'Océan des oscillations dont nous allons déterminer la nature.

Les trois forces précédentes redevenant les mêmes à chaque intervalle d'un demi-jour, l'état de la mer doit redevenir le même à chacun de ces intervalles. Pour le faire voir, supposons que, à un instant quelconque a , la hauteur de la mer, dans un port, ait été h , et qu'elle soit devenue la même après les intervalles $f_1, f_2, f_3, \dots, f_i, \dots$, comptés de l'instant a ; $a + f_i$ sera l'instant où la hauteur de la mer est h .

après le nombre i de ces intervalles. Si l'on suppose i très considérable, cet instant ne dépendra point des conditions du mouvement qui ont eu lieu à l'instant a que nous prenons pour origine du mouvement; car toutes ces conditions ont dû bientôt disparaître par les frottements et les résistances de tout genre que la mer éprouve dans ses oscillations; en sorte que, le mouvement de la mer finissant par n'en plus dépendre et par se rapporter uniquement aux forces actuelles qui la sollicitent, il est impossible de connaître l'état primitif de la mer par son état présent. Imaginons maintenant que, à l'instant a plus un demi-jour, toutes les conditions du mouvement de la mer aient été les mêmes qu'elles étaient dans le premier cas, à l'instant a ; puisque les forces solaires sont les mêmes et varient de la même manière dans les deux cas, il est clair que, dans le second cas, les intervalles successifs après lesquels la hauteur de la mer sera h , en partant de l'instant a plus un demi-jour, seront, comme dans le premier cas, $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$, en sorte que, à l'instant $a + f_i +$ un demi-jour, la hauteur de la mer sera h . Mais, puisque i étant fort grand, l'état actuel de la mer est indépendant de tout ce qui a rapport à l'origine du mouvement, il est visible que l'instant $a + f_i +$ un demi-jour doit coïncider avec quelques-uns des instants où la hauteur de la mer est h dans le premier cas; on doit donc avoir

$$a + f_i + \text{un demi-jour} = a + f_{i+r},$$

r étant un nombre entier; partant

$$f_{i+r} - f_i = \text{un demi-jour};$$

d'où il suit que l'état de la mer redevient le même après l'intervalle d'un demi-jour.

Il est vraisemblable que, en supposant la mer entière ébranlée par une cause quelconque, les résistances qu'elle éprouve anéantiraient l'effet de cette cause dans l'intervalle de quelques mois, de manière que, après cet intervalle, les marées reprendraient leur état naturel.

On peut juger par là du peu d'influence des vents et des ouragans qui, quelque violents qu'ils soient, ne sont que locaux et n'ébranlent que la superficie des mers. Ainsi, en prenant un résultat moyen entre un grand nombre d'observations continuées pendant plusieurs années ces résultats représenteront, à très peu près, l'effet des forces régulières qui agissent sur l'Océan.

Imaginons une droite dont les parties représentent le temps, et sur cette droite, comme axe des abscisses, concevons une courbe dont les ordonnées représentent la hauteur de la mer dans un lieu donné; la partie de la courbe correspondante à l'abscisse qui représente un demi-jour déterminera la courbe entière qui sera formée de cette partie répétée à l'infini. Ainsi l'intervalle entre deux pleines mers consécutives sera d'un demi-jour, de même que l'intervalle entre deux basses mers consécutives.

V.

Déterminons la courbe des hauteurs de la mer. Pour cela, concevons un second Soleil S parfaitement égal au premier et mù de la même manière dans le plan de l'équateur, avec la seule différence qu'il précède le premier, dans son orbite, de l'angle horaire $n'T$, n' étant égal à $n - m$, et m étant égal à $\frac{d\varphi}{dt}$. On aura les forces relatives à ce nouveau Soleil en changeant, dans l'expression des forces (A) de l'article précédent, φ dans $\varphi + n'T$; ces nouvelles forces ajoutées aux forces (A) produiront les suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{3SR}{2r^3} \sin^2 \delta [\cos 2(nt + \varpi - \varphi) + \cos 2(nt + \varpi - \varphi - n'T)], \\ & \frac{3SR}{2r^3} \sin \delta \cos \delta [\cos 2(nt + \varpi - \varphi) + \cos 2(nt + \varpi - \varphi - n'T)], \\ & - \frac{3SR}{2r^3} \sin \delta [\sin 2(nt + \varpi - \varphi) + \sin 2(nt + \varpi - \varphi - n'T)]. \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$S' = 2S \cos n'T, \quad T = 2q,$$

ces trois forces se réduisent aux suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{3S'R}{2r^3} \sin^2 \theta \cos 2(nt + \varpi - \varphi - n'q), \\ & \frac{3S'R}{2r^3} \sin \theta \cos \theta \cos 2(nt + \varpi - \varphi - n'q), \\ & - \frac{3S'R}{2r^3} \sin \theta \sin 2(nt + \varpi - \varphi - n'q). \end{aligned}$$

Ces dernières forces produiront un flux et un reflux semblable à celui qu'exciterait le Soleil S si sa masse se changeait en S' et si l'on diminuait de q le temps t dans les forces (A). En nommant donc y'' l'ordonnée de la courbe des hauteurs de la mer correspondante à l'abscisse $t - q$, on aura $\frac{S'y''}{S}$ pour la hauteur de la mer produite, après le temps t , par les trois forces précédentes.

Cette hauteur est, par la nature des oscillations très petites, la somme des hauteurs de la mer dues aux actions des deux Soleils S. Soit donc y l'ordonnée de la courbe des hauteurs de la mer, correspondante au temps t , et y' l'ordonnée correspondante au temps $t - T$; $y + y'$ sera la somme de ces hauteurs : on aura, par conséquent,

$$(a) \quad y + y' = \frac{S'y''}{S};$$

maintenant, si l'on développe y' et y'' en séries ordonnées par rapport aux puissances de T et de q , on aura, en négligeant les cubes et les puissances supérieures de ces quantités,

$$\begin{aligned} y' &= y - T \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} T^2 \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ y'' &= y - q \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} q^2 \frac{d^2 y}{dt^2}, \end{aligned}$$

on a de plus

$$S' = 2S - S n^2 T^2, \quad q = \frac{1}{2} T.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (a), donneront

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -4n^2 y,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$y = \frac{BS}{r^3} \cos 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda),$$

B et λ étant deux arbitraires dont la première dépend de la grandeur de la marée totale dans le port, et dont la seconde dépend de l'heure de la marée ou du temps dont elle suit le passage du Soleil au méridien.

Cette expression de y donne la loi suivant laquelle la marée s'élève et s'abaisse; elle est la traduction analytique de la règle que nous avons donnée pour cet objet dans l'article I, où nous avons exposé en même temps la raison pour laquelle les observations faites dans nos ports s'en écartent un peu.

VI.

Considérons présentement les actions du Soleil et de la Lune, en supposant ces astres mus uniformément dans le plan de l'équateur. Le Soleil produira toujours des marées conformes aux lois que nous venons d'exposer; la Lune en produira de semblables qui, par la nature des ondulations très petites, se combineront avec les premières sans les altérer et sans en être altérées. Cela posé, L étant la masse de la Lune, r' sa distance au centre de la Terre et φ' son ascension droite, la hauteur de la mer due à l'action de la Lune sera exprimée par la fonction

$$B' \frac{L}{r'^3} \cos 2(nt + \varpi - \varphi' - \lambda'),$$

B' et λ' étant deux arbitraires. Nous avons observé dans l'article I que λ' est plus petit que la constante λ relative au Soleil, à cause de la rapidité du mouvement de la Lune dans son orbite, et que l'on peut supposer ces deux constantes égales à Brest, pourvu que l'on donne aux angles nt , φ et φ' les valeurs qu'ils avaient $36^h \frac{1}{2}$ avant l'instant pour lequel on calcule les phénomènes des marées. La rapidité du

mouvement lunaire peut rendre encore B' différent de B ; mais cette différence doit être peu considérable : nous supposons ainsi $B' = B$, dans le facteur $\frac{B'L}{r^3}$, en observant que L ne représente pas alors exactement la masse de la Lune, mais cette masse augmentée dans le rapport de B' à B . On pourra ainsi donner à l'expression de la hauteur y de la mer, produite par les actions réunies du Soleil et de la Lune, la forme suivante

$$y = B \left[\frac{S}{r^3} \cos 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda) + \frac{L}{r^3} \cos 2(nt + \varpi - \varphi' - \lambda) \right],$$

le temps t devant être diminué d'environ $36^{\text{h}} \frac{1}{2}$ à Brest.

Aux instants de la pleine et de la basse mer, on a

$$\frac{dy}{dt} = 0,$$

ce qui donne

$$\tan 2(nt + \varpi - \varphi' - \lambda) = \frac{-(n-m) \frac{S}{r^3} \sin 2(\varphi' - \varphi)}{(n-m') \frac{L}{r^3} + (n-m) \frac{S}{r^3} \cos 2(\varphi' - \varphi)},$$

m' étant égal à $\frac{d\varphi'}{dt}$. Si $(n-m') \frac{L}{r^3}$ est plus grand que $(n-m) \frac{S}{r^3}$, c'est-à-dire si l'action de la Lune, pour soulever les eaux de la mer, est plus forte que celle du Soleil, l'angle $nt + \varpi - \varphi' - \lambda$ ne peut jamais atteindre 45° , et la tangente du double de cet angle est toujours comprise dans les limites

$$\pm \frac{(n-m) \frac{S}{r^3}}{\sqrt{(n-m')^2 \left(\frac{L}{r^3}\right)^2 - (n-m)^2 \left(\frac{S}{r^3}\right)^2}}.$$

Dans ce cas, la pleine mer suivra toujours le passage de la Lune au méridien d'une quantité qui ne passera pas certaines limites et qui dépendra des phases de la Lune. Dans un temps déterminé, il y aura autant de marées que de passages de la Lune au méridien supérieur

ou inférieur, en sorte que les marées se régleront principalement sur ces passages.

Dans le cas contraire où l'action du Soleil l'emporterait sur celle de la Lune, les marées se régleraient principalement sur les passages du Soleil au méridien, et il y aurait constamment deux marées par jour. On peut donc ainsi reconnaître laquelle des deux actions lunaire et solaire est la plus grande : toutes les observations se réunissent à faire voir que la première l'emporte sur la seconde.

VII.

Voyons maintenant ce qui doit arriver lorsque le Soleil et la Lune, toujours supposés dans le plan de l'équateur, sont assujettis à des inégalités dans leurs mouvements et dans leurs distances. Considérons d'abord les effets de l'action du Soleil. Les forces partielles

$$\frac{SR}{2r^3} (3 \sin^2 \theta - 2), \quad \frac{3SR}{2r^3} \sin \theta \cos \theta,$$

trouvées dans l'article IV, ne seront plus constantes; mais elles varieront avec une grande lenteur, et la période de leur variation sera d'une année; on pourra donc, par l'article I, supposer la mer en équilibre à chaque instant sous l'action de ces forces. La partie

$$\frac{-(1+3 \cos 2\theta) S}{8g \left(1 - \frac{3\beta}{5}\right) r^3}$$

de l'expression de y de l'article II exprime la hauteur de la mer due à l'action des forces précédentes en les supposant invariables, et en supposant la Terre entièrement recouverte par la mer; elle exprimera donc encore à très peu près cette hauteur dans le cas de la nature où ces forces varient lentement et où la mer recouvre une grande partie de la surface de la Terre. Cette hauteur étant très petite, l'erreur que l'on peut commettre est fort peu considérable.

Si, dans les forces solaires (A) de l'article IV, on substitue au lieu de r et de φ leurs valeurs, chacune de ces forces se développera en

cosinus d'angles de la forme $2nt - 2qt + 2t$, en sorte que l'on aura

$$\frac{3SR}{2r^3} \sin^2 \theta \cos 2(nt + \varpi - \varphi) = \sin^2 \theta \Sigma k \cos 2(nt - qt + t),$$

$$\frac{3SR}{2r^3} \sin \theta \cos \theta \cos 2(nt + \varpi - \varphi) = \sin \theta \cos \theta \Sigma k \cos 2(nt - qt + t),$$

$$\frac{3SR}{2r^3} \sin \theta \sin 2(nt + \varpi - \varphi) = \sin \theta \Sigma k \sin 2(nt - qt + t),$$

le signe Σ des intégrales finies servant ici à désigner la somme de tous les termes de la forme $k \frac{\sin}{\cos} 2(nt - qt + t)$, dans lesquels le premier membre de chacune de ces équations peut se décomposer. Les plus considérables de ces termes sont ceux qui dépendent de l'angle $2nt - 2mt + 2\varpi$ et qui donnent le flux et le reflux de la mer dans le cas que nous avons examiné ci-dessus, où le Soleil serait mu uniformément dans le plan de l'équateur, en conservant toujours sa même distance à la Terre. Les autres termes, qui sont fort petits relativement à ceux-ci, peuvent être considérés comme le résultat de l'action d'autant d'astres particuliers, mus uniformément dans le plan de l'équateur. C'est de la combinaison des flux et des reflux partiels dus à l'action de tous ces astres que résulte le flux et reflux total dû à l'action du Soleil.

Si l'on nomme s la masse de l'astre fictif dont l'action produit le terme dépendant de l'angle $2nt - 2qt + 2t$, et a sa distance au centre de la Terre, on aura

$$\frac{3Rs}{2a^3} = k \quad \text{ou} \quad \frac{s}{a^3} = \frac{2k}{3R}.$$

On a vu, dans l'article V, que le Soleil étant supposé mu uniformément dans le plan de l'équateur avec un mouvement angulaire égal à mt , la partie de l'expression de la hauteur de la mer dépendante de l'angle $2nt - 2mt + 2\varpi$ est égale à

$$B \frac{S}{r^3} \cos 2(nt - mt + \varpi - \lambda),$$

le temps t devant être diminué d'environ $36^h \frac{1}{2}$ relativement au port de

Brest. La hauteur de la mer due à l'action de l'astre s sera donc

$$B \frac{s}{a^3} \cos 2(nt - qt + t - \lambda).$$

On doit encore diminuer dans cette expression le temps t d'environ $36^h \frac{1}{2}$, car le flux lunaire se rapprochant de la Lune plus que le flux solaire du Soleil d'une quantité que nous pouvons représenter par $(m' - m)h$, le flux dû à l'action de l'astre s doit se rapprocher de cet astre d'une quantité égale à $(g - m)h$. On remplit cette condition en supposant que la valeur de λ est la même pour tous les astres $S, s, \dots$ et en diminuant le temps t d'environ $36^h \frac{1}{2}$.

Quant à la valeur de B , elle peut être un peu différente pour l'astre s que pour l'astre S , ainsi que nous l'avons observé dans l'article VI, en comparant l'action de la Lune à celle du Soleil. On peut représenter cette constante par $B + \frac{q-m}{n} C$, C étant une nouvelle arbitraire qui est la même pour tous les astres $s, s', \dots$; mais, ces astres étant fort petits, ainsi que le coefficient $\frac{q-m}{n}$, on peut négliger les termes multipliés par $\frac{q-m}{n} C \frac{s}{a^3}$.

Maintenant, la somme de toutes les marées partielles dépendantes des angles de la forme $2nt + \dots$, et dues aux actions des astres $S, s, \dots$, sera

$$B \sum \frac{s}{a^3} \cos 2(nt - qt + t - \lambda),$$

et par conséquent elle sera

$$\frac{2B}{3R} \Sigma k \cos 2(nt - qt + t - \lambda).$$

Mais on a, par ce qui précède,

$$\Sigma k \cos 2(nt - qt + t - \lambda) = \frac{3RS}{2r^3} \cos 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda);$$

la partie de la hauteur de la mer due à l'action du Soleil, et dépendante

de l'angle $2n + 2\varpi - 2\varphi$, est donc

$$B \frac{S}{r^3} \cos 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda),$$

expression dans laquelle on doit prendre pour t , r et φ leurs valeurs relatives à l'instant qui précède de $36^h \frac{1}{2}$ celui que l'on considère.

Si l'on transporte à la Lune ce que nous venons de dire du Soleil, on trouvera que la partie de la hauteur de la mer due à son action, et indépendante du mouvement de rotation de la Terre, est égale à

$$\frac{-(1 + 3 \cos 2\vartheta)}{8g \left(1 - \frac{3\varrho}{5}\right)} \frac{L}{r^3}.$$

Cette expression est un peu moins exacte pour la Lune que pour le Soleil, à cause de la rapidité de son mouvement dans son orbite.

On trouvera ensuite que la partie de la hauteur de la mer due à l'action de la Lune, et dépendante du mouvement de rotation de la Terre, est

$$B \frac{L}{r^3} \cos(2nt + \varpi - \varphi' - \lambda);$$

les valeurs de r' , φ' et t se rapportent à un instant qui précède de $36^h \frac{1}{2}$ l'instant que l'on considère. Cette expression est moins exacte pour la Lune que pour le Soleil, parce que les termes multipliés par $\frac{m' - q}{n} C \frac{x}{a^3}$, et que nous avons négligés, sont beaucoup plus sensibles pour la Lune que pour le Soleil, le facteur $\frac{m' - q}{n}$ étant plus considérable, à cause de la rapidité du mouvement lunaire, et les astres fictifs s , s' , ... étant plus grands, à raison des grandes inégalités de ce mouvement. L'omission de ces termes peut être une des causes principales des très petites différences que nous trouverons dans la suite entre les résultats de l'observation et du calcul. Il sera nécessaire d'y avoir égard lorsque l'on aura des observations très nombreuses et très précises des marées, et alors on pourra déterminer l'arbitraire C , impor-

tante à connaître pour conclure exactement la masse L de la Lune des phénomènes des marées.

En réunissant tous les termes dus aux actions du Soleil et de la Lune, on aura pour l'expression approchée de la hauteur y de la mer

$$y = - \frac{1 + 3 \cos 2\vartheta}{8g \left(1 - \frac{3\varrho}{5}\right)} \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) + B \left[\frac{S}{r^3} \cos 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda) + \frac{L}{r'^3} \cos 2(nt + \varpi - \varphi' - \lambda) \right],$$

cette expression devant se rapporter à $36^h \frac{1}{2}$ avant le moment que l'on considère.

VIII.

Examinons enfin le cas de la nature, dans lequel le Soleil et la Lune ne se meuvent pas dans le plan de l'équateur. Nous avons donné, dans l'article III, la manière d'obtenir les forces solaires et lunaires décomposées parallèlement à trois droites perpendiculaires entre elles, et il en résulte :

1° Que ces forces, décomposées parallèlement au rayon terrestre R , sont

$$\begin{aligned} & -\frac{R}{4} (1 + 3 \cos 2\vartheta) \left[\frac{S}{r^3} (1 - 3 \sin^2 v) + \frac{L}{r'^3} (1 - 3 \sin^2 v') \right] \\ & + 6R \sin \vartheta \cos \vartheta \left[\frac{S}{r^3} \sin v \cos v \cos (nt + \varpi - \varphi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L}{r'^3} \sin v' \cos v' \cos (nt + \varpi - \varphi') \right] \\ & + \frac{3R}{2} \sin^2 \vartheta \left[\frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos 2(nt + \varpi - \varphi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L}{r'^3} \cos^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \varphi') \right]; \end{aligned}$$

2° Que ces forces, décomposées perpendiculairement à R dans le

plan du méridien, sont

$$\begin{aligned} & \frac{3R}{4} \sin 2\theta \left[\frac{S}{r^3} (1 - 3 \sin^2 v) + \frac{L}{r^5} (1 - 3 \sin^2 v') \right] \\ & + 3R \cos 2\theta \left[\frac{S}{r^3} \sin v \cos v \cos (nt + \varpi - \varphi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L}{r^5} \sin v' \cos v' \cos (nt + \varpi - \varphi') \right] \\ & + \frac{3R}{2} \sin \theta \cos \theta \left[\frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos 2(nt + \varpi - \varphi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L}{r^5} \cos^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \varphi') \right]; \end{aligned}$$

3^o Que ces forces, décomposées perpendiculairement au méridien, sont

$$\begin{aligned} & -3R \cos \theta \left[\frac{S}{r^3} \sin v \cos v \sin (nt + \varpi - \varphi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L}{r^5} \sin v' \cos v' \sin (nt + \varpi - \varphi') \right] \\ & - \frac{3R}{2} \sin \theta \left[\frac{S}{r^3} \cos^2 v \sin 2(nt + \varpi - \varphi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L}{r^5} \cos^2 v' \sin 2(nt + \varpi - \varphi') \right]. \end{aligned}$$

Les forces partielles

$$\begin{aligned} & -\frac{R}{4} (1 + 3 \cos 2\theta) \left[\frac{S}{r^3} (1 - 3 \sin^2 v) + \frac{L}{r^5} (1 - 3 \sin^2 v') \right], \\ & \frac{3R}{4} \sin 2\theta \left[\frac{S}{r^3} (1 - 3 \sin^2 v) + \frac{L}{r^5} (1 - 3 \sin^2 v') \right] \end{aligned}$$

variant avec une grande lenteur, on peut, comme on l'a vu dans l'article précédent, supposer que la mer est à chaque instant en équilibre, en vertu de ces forces, et, dans ce cas, la partie

$$-\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)} \left[\frac{S}{r^3} (1 - 3 \sin^2 v) + \frac{L}{r^5} (1 - 3 \sin^2 v') \right]$$

de l'expression de y , donnée dans l'article II, représente la hauteur de la mer due à l'action de ces forces.

Les forces partielles dépendantes de l'angle $2nt + 2\varpi + \dots$ peuvent être décomposées en différents termes multipliés par les sinus et cosinus d'angles de la forme $2nt - 2qt + 2t$. On s'assurera, comme dans l'article précédent, qu'il en résulte dans l'expression de la hauteur de la mer une quantité égale à

$$B \left[\frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda) + \frac{L}{r^5} \cos^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \varphi' - \lambda) \right],$$

le temps t devant être diminué, dans cette fonction, d'un intervalle qui, pour Brest, est d'environ $36^h \frac{1}{2}$.

Il nous reste à considérer la partie des forces précédentes qui dépend de l'angle $nt + \varpi + \dots$. Cette partie peut se développer en termes multipliés par des sinus et cosinus d'angles de la forme $nt - qt + t$, q étant fort petit relativement à n . Chacun de ces termes produira, dans l'intervalle d'un jour à peu près, un flux et un reflux analogues à ceux que produisent les termes dépendants des angles de la forme $2nt - 2qt + 2t$, avec la seule différence que le flux relatif à l'angle $nt - qt + t$ n'a lieu qu'une fois par jour, au lieu que le flux relatif à l'angle $2nt - 2qt + 2t$ a lieu deux fois par jour.

Si la mer inondait la Terre entière et n'éprouvait point de résistance dans ses mouvements, les deux espèces de flux que nous venons de considérer auraient lieu à l'instant même du passage des astres au méridien; mais nous avons déjà observé que, dans nos ports, les flux dont la période est d'un demi-jour suivent ou précèdent ces passages: il en est très probablement de même des flux dont la période est d'un jour; mais il est possible que ces deux espèces de flux n'aient pas lieu au même instant.

Nous avons encore vu que le flux dont la période est d'un demi-jour, et qui dépend de l'action de la Lune, suit de plus près le passage de cet astre au méridien que le flux de la même espèce dépendant de l'action du Soleil suit le passage du Soleil au méridien. La même chose a lieu, selon toute apparence, relativement au flux dont la période est d'un jour.

Cela posé, en suivant l'analyse des articles V et VII, on trouvera que la hauteur de la mer due aux forces dont la période est à peu près d'un jour peut être représentée par la formule

$$A \left[\frac{S}{r^3} \sin v \cos v \cos(nt + \varpi - \varphi - \gamma) + \frac{L}{r^2} \sin v' \cos v' \cos(nt + \varpi - \varphi' - \gamma) \right].$$

A et γ étant deux arbitraires que l'observation seule peut déterminer dans chaque port, et le temps devant être diminué d'un intervalle que l'observation peut seule encore déterminer.

Si l'on réunit toutes ces hauteurs partielles de la mer, on aura pour sa hauteur entière y

$$y = - \frac{1+3\cos 2\theta}{8g \left(1 - \frac{3\rho}{5}\right)} \left[\frac{S}{r^3} (1-3\sin^2 v) + \frac{L}{r^2} (1-3\sin^2 v') \right] \\ + A \left[\frac{S}{r^3} \sin v \cos v \cos(nt + \varpi - \varphi - \gamma) \right. \\ \left. + \frac{L}{r^2} \sin v' \cos v' \cos(nt + \varpi - \varphi' - \gamma) \right] \\ + B \left[\frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda) \right. \\ \left. + \frac{L}{r^2} \cos^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \varphi' - \lambda) \right],$$

expression dans laquelle on doit observer de diminuer le temps d'un certain intervalle dans les termes multipliés par A, et d'un autre intervalle dans les termes multipliés par B. L'observation peut seule faire connaître ces intervalles dans chaque port, ainsi que les constantes A, γ , B, λ .

La partie de cette expression multipliée par A étant très petite dans nos ports, ainsi que la partie indépendante de A et de B, on peut y supposer, sans erreur sensible, le temps t diminué de la même quantité que dans la partie multipliée par B; en sorte que, dans l'expression entière de y , le temps peut être diminué relativement au port de Brest d'environ $36^{\text{h}} \frac{1}{2}$.

IX.

Des hauteurs des marées vers les syzygies.

Développons maintenant les principaux phénomènes des marées qui résultent de l'expression précédente de y , et comparons- y les observations. Nous distinguerons ces phénomènes en deux classes, l'une relative aux hauteurs des marées et l'autre relative à leurs intervalles. Les marées les plus remarquables sont les plus grandes, qui ont lieu vers les syzygies, et les plus petites, qui ont lieu vers les quadratures; considérons d'abord les premières.

Aux instants de la pleine et de la basse mer, on a

$$\frac{dy}{dt} = 0;$$

or on peut, en différenciant l'expression précédente de y , supposer les quantités v , v' , r , r' , φ et φ' constantes, parce que, ces quantités variant avec lenteur, l'effet de leurs variations est insensible sur les hauteurs de la pleine et de la basse mer ou sur le maximum et sur le minimum de y , car on sait que, vers ces points, une petite erreur sur le temps t est insensible sur la valeur de y . L'équation $\frac{dy}{dt} = 0$ donnera donc

$$0 = \frac{A}{2B} \left[\frac{S}{r^3} \sin v \cos v \sin(nt + \varpi - \varphi - \gamma) \right. \\ \left. + \frac{L}{r^2} \sin v' \cos v' \sin(nt + \varpi - \varphi' - \gamma) \right] \\ + \frac{S}{r^3} \cos^2 v \sin 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda) + \frac{L}{r^2} \sin^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \varphi' - \lambda).$$

La fraction $\frac{A}{2B}$ étant très petite dans nos ports, on peut la négliger sans craindre aucune erreur sensible; l'équation précédente donnera ainsi

$$\tan 2(nt + \varpi - \varphi' - \lambda) = \frac{\frac{S}{r^3} \cos^2 v \sin 2(\varphi - \varphi')}{\frac{L}{r^2} \cos^2 v' + \frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos^2(\varphi - \varphi')}.$$

On substituera dans l'expression de y la valeur de $nt + \pi - \varphi' - \gamma$ déterminée par cette équation; soit (A) ce que devient alors la fonction

$$A \left[\frac{S}{r^3} \sin v \cos v \cos(nt + \pi - \varphi - \gamma) + \frac{L}{r^3} \sin v' \cos v' \cos(nt + \pi - \varphi' - \gamma) \right],$$

on aura

$$y = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)} \left[\frac{S}{r^3} (1-3\sin^2 v) + \frac{L}{r^3} (1-3\sin^2 v') \right] + (A) \\ \pm B \sqrt{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 v' \right)^2 + \frac{2L}{r^3} \cos^2 v' \frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos 2(\varphi - \varphi') + \left(\frac{S}{r^3} \cos^2 v \right)^2},$$

le signe + ayant lieu pour la haute mer, et le signe - ayant lieu pour la basse mer.

Supposons que cette expression se rapporte à la pleine mer du matin; on aura l'expression de la hauteur de la pleine mer du soir en augmentant les quantités variables de ce dont elles croissent dans l'intervalle de ces deux marées. Il faut par conséquent changer le signe de (A), parce que l'angle $nt + \pi - \varphi' - \gamma$ augmente d'environ 180° dans cet intervalle, la petite différence pouvant être négligée à raison de la petitesse de (A).

Nommons présentement y' la demi-somme des hauteurs des marées du matin et du soir; y' sera ce que nous entendrons dans la suite par *hauteur moyenne absolue de la marée d'un jour*. On aura, à très peu près,

$$y' = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)} \left[\frac{S}{r^3} (1-3\sin^2 v) + \frac{L}{r^3} (1-3\sin^2 v') \right] \\ + B \sqrt{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 v' \right)^2 + \frac{2L}{r^3} \cos^2 v' \frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos 2(\varphi - \varphi') + \left(\frac{S}{r^3} \cos^2 v \right)^2},$$

toutes les variables de cette expression étant relatives à la basse mer intermédiaire entre les deux marées du matin et du soir, et devant

conséquemment, dans le port de Brest, se rapporter à un instant qui précède de $36^h \frac{1}{2}$ celui de cette basse mer.

L'excès de la marée du matin sur celle du soir sera $2(A)$.

Si l'on nomme (A') ce que devient (A) lorsque l'on augmente $nt + \pi$ de 90° , la hauteur de la basse mer intermédiaire entre les deux marées du matin et du soir sera

$$- \frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)} \left[\frac{S}{r^3} (1-3\sin^2 v) + \frac{L}{r^3} (1-3\sin^2 v') \right] + (A') \\ - B \sqrt{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 v' \right)^2 + \frac{2L}{r^3} \cos^2 v' \frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos 2(\varphi - \varphi') + \left(\frac{S}{r^3} \cos^2 v \right)^2}.$$

En retranchant cette expression de celle de y' , on aura ce que nous entendons par *marée totale*, qui est ainsi l'excès de la demi-somme des deux marées d'un jour sur la basse mer intermédiaire; soit y'' cet excès, on aura

$$y'' = -(A') + 2B \sqrt{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 v' \right)^2 + \frac{2L}{r^3} \cos^2 v' \frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos 2(\varphi - \varphi') + \left(\frac{S}{r^3} \cos^2 v \right)^2};$$

enfin, la différence des deux basses mers consécutives sera $2(A')$.

Vers le maximum des marées, ou vers les syzygies, l'angle $\varphi - \varphi'$ est peu considérable, puisqu'il est nul au maximum; on aura donc, à peu près, à l'instant de la pleine mer,

$$nt + \pi - \varphi' = \lambda,$$

ce qui donne

$$(A) = A \left(\frac{S}{r^3} \sin v \cos v + \frac{L}{r^3} \sin v' \cos v' \right) \cos(\lambda - \gamma),$$

$$(A') = -A \left(\frac{S}{r^3} \sin v \cos v + \frac{L}{r^3} \sin v' \cos v' \right) \sin(\lambda - \gamma).$$

Ces expressions ont une exactitude suffisante à cause de la petitesse de A. Cela posé, si dans les termes multipliés par B on néglige la quatrième puissance de $\varphi' - \varphi$, on aura vers les syzygies

$$y' = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3\rho}{6}\right)} \left[\frac{S}{r^3} (1-3\sin^2 v) + \frac{L}{r'^3} (1-3\sin^2 v') \right] \\ + B \left(\frac{S}{r^3} \cos^2 v + \frac{L}{r'^3} \cos^2 v' \right) - \frac{2B}{S \cos^2 v + \frac{L}{r'^3} \cos^2 v'} \frac{S}{r^3} \cos^2 v \frac{L}{r'^3} \cos^2 v' (\varphi' - \varphi)^2, \\ y'' = A \left(\frac{S}{r^3} \sin v \cos v + \frac{L}{r'^3} \sin v' \cos v' \right) \sin(\lambda - \gamma) \\ + 2B \left(\frac{S}{r^3} \cos^2 v + \frac{L}{r'^3} \cos^2 v' \right) - \frac{4B}{S \cos^2 v + \frac{L}{r'^3} \cos^2 v'} \frac{S}{r^3} \cos^2 v \frac{L}{r'^3} \cos^2 v' (\varphi' - \varphi)^2.$$

En considérant ces expressions de y' et de y'' , on voit d'abord que les déclinaisons du Soleil et de la Lune influent sur les hauteurs absolues de la mer et sur les marées totales des syzygies, en sorte que, toutes choses égales d'ailleurs, les plus grandes de ces marées totales ont lieu vers les équinoxes, et les plus petites vers les solstices, les premières étant aux secondes à peu près dans le rapport de l'unité au carré du cosinus de l'obliquité de l'écliptique. L'action de la Lune, pour élever les eaux de la mer, étant environ trois fois plus grande que celle du Soleil, l'effet de sa déclinaison est, en même raison, plus considérable. Les marées syzygies des solstices sont donc les plus petites qu'il est possible lorsque le nœud ascendant de l'orbite lunaire coïncide avec l'équinoxe. Ainsi les phénomènes des marées dépendent du mouvement des nœuds de la Lune.

On voit ensuite que, tout étant égal d'ailleurs, les marées syzygies sont plus grandes dans le péricée de la Lune que dans son apogée, parce que la fraction $\frac{L}{r'^3}$ augmente très sensiblement dans le premier

cas et diminue dans le second cas. Pareillement, le Soleil étant apogée vers le solstice d'été et péricée vers le solstice d'hiver, les marées des solstices d'hiver surpassent celles des solstices d'été; mais cet effet de la variation des distances est moins sensible pour le Soleil que pour la Lune, parce que l'excentricité de l'orbite terrestre est environ trois fois moindre que celle de l'orbite lunaire et que l'action du Soleil est trois fois plus faible que celle de la Lune.

X.

Pour démêler ces divers effets dans les observations, afin d'y comparer la théorie, il faut combiner ces observations de manière que chaque effet s'y montre séparément. Considérons d'abord l'effet des déclinaisons des astres. On ajoutera dans l'une des deux syzygies qui comprennent l'équinoxe les hauteurs moyennes absolues de la mer, du jour même de la syzygie et des trois jours qui la suivent. Le maximum de cette hauteur tombera entre ces observations. On ajoutera pareillement dans l'autre syzygie les hauteurs moyennes absolues du jour même de la syzygie et des trois jours qui la suivent. On fera ensuite de ces deux sommes partielles une somme totale que nous désignerons par h . L'effet des variations des distances du Soleil et de la Lune sera à peu près nul dans h , parce que le Soleil est dans sa moyenne distance à la Terre, vers les équinoxes, et que, si dans l'une des deux syzygies la Lune est apogée, elle est péricée dans l'autre. On peut donc supposer, dans h , r égal à la moyenne distance du Soleil et r' égal à la moyenne distance syzygie de la Lune.

Si l'on ajoute les huit valeurs de y' correspondantes aux huit jours d'observation que nous venons de considérer, la somme des termes dépendants de $(\varphi' - \varphi)^2$ sera

$$-\frac{4\alpha B}{S + \frac{L}{r'^3}} \frac{S}{r^3} \frac{L}{r'^3} v^2 \cos^2 \epsilon,$$

ε étant l'obliquité de l'écliptique, ν étant le moyen mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle des deux marées consécutives du matin ou du soir vers le maximum des marées, et z étant la somme des carrés des quatre intervalles de l'instant de ce maximum dans chaque syzygie, aux instants des basses marées intermédiaires entre les deux marées du matin et du soir, dans chacun des quatre jours que l'on considère, l'intervalle entre deux marées consécutives du matin et du soir vers les syzygies étant pris pour unité. Cela suit de ce que l'angle $\varphi' - \varphi$ est nul à l'instant du maximum, et de ce que vers les équinoxes la variation journalière de cet angle est égale à $\nu \cos \varepsilon$.

Dans le terme $B\left(\frac{S}{r^3} \cos^2 \nu + \frac{L}{r^3} \cos^2 \nu'\right)$ de l'expression de y' , la variation de ν' dans l'intervalle des quatre jours d'observation considérés dans chaque syzygie devient sensible. Supposons que q soit la longitude du Soleil à l'instant de la syzygie, q étant fort petit; la somme des quatre valeurs du terme précédent relatives à ces quatre jours sera à fort peu près

$$4B(1 - q^2 \sin^2 \varepsilon) \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) - 2B \frac{L}{r^3} \nu^2 \sin^2 \varepsilon,$$

parce que le maximum des hauteurs des marées tombe à peu près au milieu des observations extrêmes.

De là il est facile de conclure

$$h = -\frac{1 + 3 \cos 2\theta}{g \left(1 - \frac{3\theta}{5}\right)} \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) + 8B(1 - q^2 \sin^2 \varepsilon) \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) - 2B \frac{L}{r^3} \nu^2 \left(\sin^2 \varepsilon + \frac{\frac{2S}{r^3} \cos^2 \varepsilon}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3}} \right),$$

la valeur de q^2 étant ici une moyenne entre les deux valeurs de cette quantité relatives aux deux syzygies qui comprennent l'équinoxe.

Si l'on nomme l la somme des huit marées totales correspondantes aux huit hauteurs moyennes absolues précédentes, l'expression de y'

donnera

$$l = 16B(1 - q^2 \sin^2 \varepsilon) \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) - 4B \frac{L}{r^3} \nu^2 \left(\sin^2 \varepsilon + \frac{\frac{2S}{r^3} \cos^2 \varepsilon}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3}} \right).$$

En opérant de la même manière sur les deux syzygies qui comprennent un solstice d'été, et en supposant que, dans ce solstice, la déclinaison de la Lune est la même que celle du Soleil et égale à ε ; enfin, en nommant h' et l' ce que deviennent alors h et l , on trouvera, à fort peu près,

$$\begin{aligned} h' &= -\frac{1 + 3 \cos 2\theta}{g \left(1 - \frac{3\theta}{5}\right)} \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) (1 - 3 \sin^2 \varepsilon) \\ &\quad + 8B(1 + q'^2 \tan^2 \varepsilon) \cos^2 \varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) + 2B \frac{L}{r^3} \nu^2 \left(\sin^2 \varepsilon - \frac{\frac{2S}{r^3}}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3}} \right), \\ l' &= 8A \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin(\lambda - \gamma) \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) \\ &\quad + 16B(1 + q'^2 \tan^2 \varepsilon) \cos^2 \varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) + 4B \frac{L}{r^3} \nu^2 \left(\sin^2 \varepsilon - \frac{\frac{2S}{r^3}}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3}} \right). \end{aligned}$$

$90^\circ - q'$ étant la longitude moyenne du Soleil à l'instant de la syzygie, et q'^2 étant une moyenne entre les deux valeurs de cette quantité relatives aux deux syzygies qui comprennent le solstice d'été.

Dans ces expressions de h' et de l' , le rayon r est la distance apogée du Soleil; on aura les valeurs de h' et de l' , relatives aux solstices d'hiver, en y changeant ε dans $-\varepsilon$, parce que les déclinaisons des deux astres changent de signe, et en supposant que r est la distance périégée du Soleil.

Pour faire disparaître l'effet des variations des distances du Soleil, ainsi que le terme multiplié par A , on ajoutera un nombre quelconque i de valeurs de h' , relatives aux solstices d'été, au même nombre de valeurs de h' , relatives aux solstices d'hiver. Soit (K) cette somme. On

ajoutera semblablement i valeurs de l' relatives aux solstices d'été, à i valeurs de l relatives aux solstices d'hiver. Soit (l') cette somme. Nommons pareillement (h) et (l) la somme de $2i$ valeurs, soit de h , soit de l , on aura

$$\begin{aligned}(h) &= -2i \frac{1+3\cos 2\theta}{8\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)} \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) \\ &\quad + 16iB(1-q^2\sin^2\varepsilon) \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) - 4i\alpha B \frac{L}{r'^3} \nu^2 \left(\sin^2\varepsilon + \frac{\frac{2S}{r^3}\cos^2\varepsilon}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}}\right), \\ (l) &= 3\alpha iB(1-q^2\sin^2\varepsilon) \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) - 8i\alpha B \frac{L}{r'^3} \nu^2 \left(\sin^2\varepsilon + \frac{\frac{2S}{r^3}\cos^2\varepsilon}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}}\right), \\ (h') &= -2i \frac{1+3\cos 2\theta}{8\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)} \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) (1-3\sin^2\varepsilon) \\ &\quad + 16iB(1+q^2\tan^2\varepsilon)\cos^2\varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) \\ &\quad + 4i\alpha B \frac{L}{r'^3} \nu^2 \left(\sin^2\varepsilon - \frac{\frac{2S}{r^3}}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}}\right), \\ (l') &= 3\alpha iB(1+q^2\tan^2\varepsilon)\cos^2\varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) \\ &\quad + 8i\alpha B \frac{L}{r'^3} \nu^2 \left(\sin^2\varepsilon - \frac{\frac{2S}{r^3}}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}}\right).\end{aligned}$$

Dans ces expressions, les distances r et r' sont les moyennes distances du Soleil et de la Lune syzygie; en sorte que l'effet de la variation des distances disparaît, ainsi que la valeur de A . La valeur de q^2 est moyenne entre toutes les valeurs de cette quantité, relatives aux $2i$ syzygies des équinoxes, et la valeur de q'^2 est moyenne entre toutes les valeurs relatives aux $2i$ syzygies des solstices.

Les expressions précédentes donnent

$$\begin{aligned}(h) - (h') &= -\frac{6i(1+3\cos 2\theta)}{8\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)} \sin^2\varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) \\ &\quad + 16iB(1-2q^2)\sin^2\varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) - 8i\alpha B \frac{\left(\frac{L}{r'^3}\right)^2}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}} \nu^2 \sin^2\varepsilon, \\ (l) - (l') &= 3\alpha iB(1-2q^2)\sin^2\varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) - 16i\alpha B \frac{\left(\frac{L}{r'^3}\right)^2}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}} \nu^2 \sin^2\varepsilon,\end{aligned}$$

la valeur de q^2 dans ces expressions étant une moyenne entre les valeurs de q^2 et de q'^2 relatives aux $4i$ syzygies des équinoxes et des solstices. On voit ainsi que $(l) - (l')$ est à peu près double de $(h) - (h')$; la première de ces quantités est même plus que double de la seconde à Brest, à cause du facteur $1+3\cos 2\theta$, qui est positif dans ce port. Voilà donc un moyen simple de juger, par les observations, de l'effet des déclinaisons du Soleil et de la Lune sur les marées, et de comparer à cet égard la théorie aux observations.

XI.

Pour cela, j'ai fait usage des observations faites à Brest vers le commencement de ce siècle, et consignées dans le Recueil dont j'ai fait mention (art. I). J'ai considéré les deux syzygies entre lesquelles l'équinoxe ou le solstice était compris; j'ai pris la somme des hauteurs absolues de la mer au-dessus du zéro de l'échelle d'observation, le jour même de la syzygie et les trois jours qui la suivent. Les hauteurs des deux marées de chaque jour ayant été très souvent observées, j'ai pris, pour hauteur absolue de la marée, la moyenne entre les hauteurs absolues des deux marées. Dans le très petit nombre de cas, où une seule des hauteurs a été observée, je l'ai corrigée pour la réduire à la hauteur moyenne, en faisant usage de l'excès d'une des marées sur

l'autre dans les solstices, excès que je déterminerai ci-après. Pour avoir les marées totales, dans le cas où la basse mer intermédiaire entre les deux marées d'un même jour n'a pas été observée, j'ai conclu par interpolation la hauteur de cette basse mer.

C'est en discutant ainsi avec soin les observations, que j'ai formé la Table suivante : les hauteurs absolues et les marées totales de cette Table sont chacune la somme des huit hauteurs absolues et des huit marées totales, correspondantes aux huit jours des deux syzygies, considérées dans chaque équinoxe et dans chaque solstice.

TABLE I.

MARÉES DES SYZYGIES DES ÉQUINOXES.

	Hauteurs absolues.	Marées totales.
1711. Septembre.....	$\left\{ \begin{array}{l} 145,549 \\ 139,299 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 151,215 \\ 148,285 \end{array} \right.$
1712. { Mars.....	143,028	145,444
{ Septembre.....	144,667	146,889
1714. Septembre.....	$\left\{ \begin{array}{l} 141,076 \\ 141,368 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 149,201 \\ 151,076 \end{array} \right.$
1713. { Mars.....	145,639	150,056
{ Septembre.....	141,160	149,285
1716. { Mars.....	140,701	156,743
{ Septembre.....	138,924	145,007
Total.....	1421,411	1493,201

MARÉES DES SYZYGIES DES SOLSTICES.

	Hauteurs absolues.	Marées totales.
1711. { Juin.....	132,257	126,368
{ Décembre.....	140,278	130,361
1712. { Juin.....	133,292	128,042
{ Décembre.....	138,514	129,097
1714. { Juin.....	134,695	133,236
{ Décembre.....	133,910	134,910
1715. { Juin.....	133,715	130,799
{ Décembre.....	131,854	137,063
1716. { Juin.....	133,938	139,542
{ Décembre.....	133,660	140,729
Total.....	1346,113	1330,147

J'observerai sur ces résultats que les deux syzygies du solstice de décembre 1711 ne comprennent pas ce solstice, le défaut des observations des basses marées dans la syzygie qui suit ce solstice m'ayant forcé de considérer les syzygies du 25 novembre et du 9 décembre de la même année. Par la même raison, j'ai considéré, en 1716, les syzygies du 1^{er} et du 15 septembre; ces dernières observations n'ont point été imprimées dans le Tome IV de l'*Astronomie* de M. de la Lande, mais M. de Cassini a bien voulu me les communiquer manuscrites.

Pour multiplier les observations, j'ai considéré, en 1711 et en 1714, les deux syzygies consécutives qui ont précédé et celles qui ont suivi chaque équinoxe d'automne; ainsi les premiers nombres de ces deux équinoxes sont relatifs aux deux syzygies dont l'une précède et l'autre suit médiatement l'équinoxe, et les seconds nombres sont relatifs aux deux syzygies, dont l'une précède et l'autre suit immédiatement l'équinoxe. Pareillement, les premiers nombres du solstice de décembre 1715 sont relatifs aux deux syzygies, dont l'une précède et l'autre suit médiatement le solstice, et les seconds nombres sont relatifs aux deux syzygies, dont l'une précède et l'autre suit immédiatement le solstice.

On voit, par la Table précédente, l'influence des déclinaisons du Soleil et de la Lune sur les marées totales des solstices; cette influence est si sensible, qu'elle s'est constamment manifestée dans les dix équinoxes et dans les dix solstices de cette Table, puisque le plus grand des nombres relatifs aux marées totales des solstices est plus faible que le plus petit des nombres relatifs aux marées totales des équinoxes. Dans les quatre premiers solstices, les marées totales sont plus faibles que dans les solstices suivants, parce que la position des nœuds de l'orbite lunaire a augmenté les déclinaisons solsticiales de la Lune en 1711 et 1712. On peut donc regarder comme un phénomène incontestable que les plus fortes marées totales ont lieu à Brest dans les équinoxes, en entendant toujours par *marée totale* la demi-somme des deux marées d'un même jour au-dessus du niveau de la basse mer intermédiaire.

Les déclinaisons du Soleil et de la Lune influent pareillement sur les hauteurs absolues des marées, mais d'une manière moins sensible que sur les marées totales; car la différence du total des hauteurs absolues des marées dans les équinoxes précédents, au total des mêmes hauteurs dans les solstices, n'est que de $75^m, 298$, tandis que cette même différence pour les marées totales est de $163^m, 054$, et par conséquent plus que double de la première, comme cela doit être par l'article X.

XII.

Comparons maintenant la théorie aux observations, et voyons si les déclinaisons des astres ont sur les marées la même influence par les observations que par la théorie. On verra ci-après que $\frac{L}{r^3}$ est à fort peu près triple de $\frac{S}{r^3}$, en sorte que l'on peut, sans erreur sensible, faire cette supposition dans les termes de l'expression de $(l) - (l')$, multipliés par v^2 ; cette expression, trouvée dans l'article X, deviendra ainsi, en négligeant les produits de quatre dimensions de v et de g ,

$$(1) \quad (l) - (l') = (l) \sin^2 \varepsilon - (l) \sin^2 \varepsilon \left(q^2 + \frac{3\alpha}{32} v^2 \right) (2 - \sin^2 \varepsilon);$$

nous prendrons pour q^2 sa valeur moyenne entre les deux extrêmes, qui ont lieu lorsque la syzygie arrive dans l'équinoxe même, et lorsqu'elle arrive quinze jours après; cette valeur est

$$q^2 = \frac{1}{2} \sin^2 14^\circ 30'.$$

v est le moyen mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle de deux marées consécutives du matin ou du soir vers les syzygies; on verra dans la suite que cet intervalle est de $24^h 39^m$. Le moyen mouvement correspondant de la Lune est de $12^\circ 47'$, en ayant égard à l'argument de la variation qui augmente constamment ce mouvement dans les syzygies.

Pour déterminer la valeur de α , nous supposerons, par un milieu,

que, dans les syzygies de la Table précédente, la syzygie est arrivée à midi, et qu'elle précède de $36^h \frac{1}{2}$ le maximum des marées. L'intervalle de deux marées consécutives du matin et du soir, vers les syzygies, étant pris pour l'unité, les intervalles du maximum des marées à la basse marée intermédiaire de chacun des quatre jours que nous avons considérés dans chaque syzygie seront, par l'article suivant,

$$1,58169, \quad 0,58169, \quad -0,41831, \quad -1,41831.$$

La somme de leurs carrés est la valeur de α qui, par conséquent, est égale à $5,0266$. Cela posé, si l'on prend pour ε l'obliquité de l'écliptique, qui, à l'époque des observations précédentes, était d'environ $23^\circ 29'$, et si l'on observe que, par la Table I, on a

$$(l) = 1493^m, 201,$$

l'équation (1) deviendra

$$(l) - (l') = 213^m, 347.$$

La Table I donne

$$(l) - (l') = 163^m, 054;$$

ainsi le résultat de l'observation est plus petit que celui de la théorie de $50^m, 293$. Cette différence paraît trop considérable pour pouvoir être attribuée aux erreurs des observations; mais l'expression de $(l) - (l')$, donnée par l'équation (1), suppose l'orbite de la Lune dans le plan de l'écliptique, tandis qu'elle lui est inclinée d'environ 5° ; or, dans le plus grand nombre des observations solsticiales de la Table I, les nœuds de l'orbite lunaire étaient disposés de manière que, dans les solstices, la déclinaison de la Lune était de plusieurs degrés inférieure à l'obliquité de l'écliptique; on doit, par conséquent, supposer ε moindre que cette obliquité dans l'équation (1), et, pour réduire son second membre à la valeur de $(l) - (l')$, donnée par les observations, on trouve qu'il faut supposer ε égal à $20^\circ 24'$. C'est encore à peu près ce qui résulte des positions des nœuds de l'orbite lunaire dans les observations solsticiales de la Table précédente.

Cette Table donne

$$\begin{aligned}(h) - (h') &= 75^{\text{p}}, 298, \\ (l) - (l') &= 163^{\text{p}}, 054,\end{aligned}$$

et par conséquent l'excès de $\frac{1}{2}(l) - \frac{1}{2}(l')$ sur $(h) - (h')$ est, suivant les observations de cette Table, égal à $6^{\text{p}}, 229$. Cet excès, par l'article X, est égal à

$$\frac{30(1 + 3 \cos 2\theta)}{8 \left(1 - \frac{3\rho}{5}\right)} \sin^2 \varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right).$$

On a [*Mémoires de l'Académie*, année 1776, page 210 (')]]

$$\frac{3S}{2r^3g} = 0^{\text{p}}, 7629;$$

de plus, la densité ρ de la mer est, d'après les observations faites sur l'attraction des montagnes, une petite fraction de la moyenne densité de la Terre, en sorte que l'on peut négliger la fraction $\frac{3\rho}{5}$ vis-à-vis de l'unité; la fraction $\frac{L}{r'^3}$ est égale à $\frac{3S}{r^3}$. L'angle ε doit être supposé, par ce qui précède, égal à $20^{\circ} 24'$; enfin la latitude de Brest est de $48^{\circ} 22' 42''$, ce qui donne à peu près

$$2\theta = 83^{\circ} 14' 36''.$$

Cela posé, on aura

$$\frac{30(1 + 3 \cos 2\theta)}{8 \left(1 - \frac{3\rho}{5}\right)} \sin^2 \varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) = 10^{\text{p}}, 037.$$

Ce résultat ne diffère que de $3^{\text{p}}, 808$ de celui des observations, et cette différence est dans les limites des erreurs dont elles sont susceptibles.

XIII.

Un phénomène bien constaté par les observations est que les plus grandes marées n'arrivent pas le jour même des syzygies, mais un ou deux jours après. Pour le vérifier, j'ai ajouté dans chaque équinoxe

(') *Œuvres de Laplace*, T. IX, p. 227.

et dans chaque solstice de la Table I les deux marées totales du jour même de la syzygie; j'ai ajouté pareillement les marées totales des deux jours qui suivent la syzygie. Les premières sommes ont été constamment plus faibles que les secondes, ce qui prouve que le phénomène dont il s'agit est très sensible à Brest, puisqu'il s'est manifesté, non seulement dans l'ensemble de toutes les observations, mais encore dans chacun des équinoxes et des solstices de la Table précédente.

L'intervalle dont le maximum des marées suit la syzygie est un élément important de la théorie des marées. Pour le déterminer par les observations, j'ai ajouté les marées totales de chaque jour dans les vingt syzygies équinoxiales et dans les vingt syzygies solsticiales de la Table I, en considérant les marées totales du jour même de la syzygie et des trois jours qui la suivent; j'ai trouvé les quatre sommes suivantes :

$$(a) \quad 692^{\text{p}}, 91, \quad 711^{\text{p}}, 73, \quad 722^{\text{p}}, 93, \quad 695^{\text{p}}, 78,$$

la première de ces sommes étant relative au jour même de la syzygie; la seconde étant relative au premier jour qui la suit; la troisième somme étant relative au second jour; enfin la quatrième étant relative au troisième jour après la syzygie. L'ensemble de ces observations embrasse quarante syzygies, qui sont arrivées, les unes le matin, et les autres le soir; en sorte qu'on peut supposer par un milieu que, dans cet ensemble, le moment de la syzygie a été celui de midi.

Si l'on prend pour unité l'intervalle de deux marées consécutives du matin et du soir vers les syzygies, et que l'on nomme ζ la distance de la basse marée intermédiaire entre les deux marées d'un jour quelconque fort voisin de la syzygie à la syzygie supposée arriver à midi, les quatre sommes précédentes pourront être représentées par la formule $m + n\zeta - p\zeta^2$. En effet, supposons que x soit l'intervalle d'une marée du matin d'un jour quelconque fort voisin de la syzygie à la syzygie supposée arriver à midi, et que la hauteur absolue de cette marée soit exprimée par la formule $a + bx - cx^2$, en n'ayant égard qu'aux flux partiels dont la période est d'un demi-jour, les seuls que

L'on doit considérer ici, parce que les effets des autres flux partiels se compensent dans les observations de la Table précédente; la hauteur absolue de la marée du soir du même jour sera

$$a + b(x + \frac{1}{2}) - c(x + \frac{1}{2})^2,$$

et la hauteur de la basse marée intermédiaire sera

$$-a - b(x + \frac{1}{2}) + c(x + \frac{1}{2})^2.$$

L'expression de la marée totale sera donc

$$2a - \frac{1}{2}c + 2b(x + \frac{1}{2}) - 2c(x + \frac{1}{2})^2;$$

or $x + \frac{1}{2}$ est ce que nous avons nommé ζ ; les sommes (a) peuvent donc être représentées par la formule $m + n\zeta - p\zeta^2$.

Pour déterminer les coefficients m , n et p à leur moyen, il faut avoir les valeurs de ζ relatives à chacune d'elles. On verra ci-après que, vers les syzygies, l'intervalle des marées consécutives du matin ou du soir est de $24^h 39^m$; on verra, de plus, que la marée du matin du jour de la syzygie supposée arriver à midi en est éloignée de $8^h 39^m 30^s$, en sorte que sa distance à la syzygie, comptée en intervalles des marées consécutives du matin, pris pour unité, est $-\frac{8^h 39^m 30^s}{24^h 39^m}$; je l'affecte du signe $-$, parce qu'elle précède la syzygie. On aura la distance à la syzygie de la basse marée intermédiaire du jour même de la syzygie en ajoutant $\frac{1}{2}$ à la distance précédente, ce qui donne, relativement au jour même de la syzygie,

$$\zeta = \frac{1}{2} - \frac{8^h 39^m 30^s}{24^h 39^m} = -0,10125.$$

On aura les valeurs de ζ relatives au premier, au second et au troisième jour qui suivent la syzygie, en augmentant successivement d'une unité cette première valeur de ζ . Ainsi l'on aura, relativement aux quatre nombres (a),

$$\zeta = -0,10125,$$

$$\zeta = 0,89875,$$

$$\zeta = 1,89875,$$

$$\zeta = 2,89875.$$

Maintenant, si l'on prend la seconde différence des trois premiers nombres (a) et la seconde différence des trois derniers, et que l'on prenne un milieu entre ces secondes différences, on aura la seconde différence finie de la formule $m + n\zeta - p\zeta^2$, ζ variant de l'unité. Cette différence seconde est $-2p$; on trouvera ainsi

$$p = 11^m, 4925.$$

On ajoutera ensuite successivement aux nombres (a) les valeurs de $p\zeta^2$ que l'on obtiendra en donnant successivement à ζ les quatre valeurs précédentes, et l'on aura les quatre nouveaux nombres

$$(b) \quad 693^m, 03, \quad 721^m, 01, \quad 764^m, 36, \quad 792^m, 35;$$

ces quatre nombres sont représentés par la formule $m + n\zeta$; en prenant les différences du premier et du second de ces nombres, du second et du troisième, du troisième et du quatrième, et en prenant le tiers de la somme de ces trois différences, ce qui revient à prendre le tiers de la différence du premier et du quatrième des nombres (b), on aura la différence première de la formule $m + n\zeta$ et par conséquent la valeur de n ; on trouvera ainsi

$$n = 33^m, 1067.$$

Si l'on retranche des quatre nombres (b) les valeurs correspondantes de $n\zeta$, on aura les suivants

$$(c) \quad 696^m, 38, \quad 691^m, 26, \quad 701^m, 50, \quad 696^m, 38;$$

chacun de ces nombres est représenté par m ; on aura donc la valeur de m en prenant un milieu entre eux, ce qui donne

$$m = 696^m, 38.$$

La formule $m + n\zeta - p\zeta^2$ devient ainsi

$$696^m, 38 + 33^m, 1067\zeta - 11^m, 4925\zeta^2.$$

On peut la mettre sous cette forme

$$(e) \quad 720^m, 22 - 11^m, 4925(\zeta - 1, 44036)^2;$$

il est aisé de voir que les erreurs de cette formule comparée aux nombres (α) ne sont que les différences des nombres (c) à la valeur de m ; ces erreurs sont, par conséquent,

$$0, -5^{\text{h}}, 12, +5^{\text{h}}, 12, 0;$$

elles sont dans les limites des erreurs dont les observations elles-mêmes sont susceptibles.

La formule (e) est à son maximum lorsque $\zeta = 1,44036$. En multipliant cette valeur de ζ par $24^{\text{h}}39^{\text{m}}$, on aura $35^{\text{h}}30^{\text{m}}$ pour l'intervalle dont le maximum de la marée totale suit la syzygie. Il est visible, par ce qui précède, que cette quantité est encore l'intervalle dont le maximum de la hauteur absolue de la marée suit la syzygie.

Pour comparer, sur ce point, la théorie aux observations, nous remarquerons que la somme des valeurs de (L) et de (L'), trouvées dans l'article X, peut être mise sous cette forme

$$32B \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) (1 + \cos^2 \varepsilon) \left[1 - \frac{\frac{2S}{r^3} \frac{L}{r'^3}}{\left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right)^2} \frac{\alpha}{4} \right].$$

Si l'on suppose $\varepsilon = 5$ dans cette fonction, elle sera la somme des quatre nombres (α). La quantité α est la somme des valeurs de $(\zeta - 1,44036)^2$ correspondantes à chacun de ces nombres. Il est aisé d'en conclure que ces nombres sont représentés par la formule

$$40B \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) (1 + \cos^2 \varepsilon) \left[1 - \frac{\frac{2S}{r^3} \frac{L}{r'^3}}{\left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right)^2} \frac{\alpha}{4} (\zeta - 1,44036)^2 \right].$$

En comparant cette formule à celle-ci

$$720^{\text{h}}, 22 - 11^{\text{h}}, 4925 (\zeta - 1,44036)^2,$$

qui résulte de l'observation, on aura

$$720^{\text{h}}, 22 \frac{\frac{2S}{r^3} \frac{L}{r'^3}}{\left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right)^2} \frac{\alpha}{4} = 11^{\text{h}}, 4925.$$

Pour voir si cette équation est satisfaite, nous observerons que l'on a, à fort peu près,

$$\frac{L}{r'^3} = \frac{3S}{r^3};$$

de plus, on a par l'article XII

$$\nu = 12^{\text{h}}47', \quad \varepsilon = 20^{\circ}24';$$

on trouve ainsi que le premier membre de cette équation devient $13^{\text{h}}, 223$. La différence d'avec le second membre peut être attribuée aux erreurs des observations; ainsi la théorie est, sur ce point, d'accord avec elles.

XIV.

Pour m'assurer encore plus de cette conformité, j'ai déterminé la somme des marées totales dans les syzygies de la Table I, relativement au jour qui précède la syzygie, et que je désigne par -1 , au jour même de la syzygie, que je désigne par zéro, et relativement aux quatre jours qui la suivent, et que je désigne successivement par $1, 2, 3$ et 4 ; j'ai obtenu les résultats suivants.

TABLE II.

Jours.	Marées totales	
	des équinoxes.	des solstices.
-1	$334,32$	$308,15$
0	$363,10$	$329,81$
1	$377,52$	$334,21$
2	$386,27$	$336,66$
3	$366,32$	$329,46$
4	$335,14$	$306,23$

Les sommes des marées totales, tant des équinoxes que des solstices, correspondantes aux différents jours sont

$$(q) \quad 642^{\text{h}}, 47, \quad 692^{\text{h}}, 91, \quad 711^{\text{h}}, 73, \quad 722^{\text{h}}, 93, \quad 695^{\text{h}}, 78, \quad 641^{\text{h}}, 37.$$

Si l'on prend une moyenne entre les différences secondes successives de ces six nombres, on aura $26^{\text{h}}, 212$, dont la moitié $13^{\text{h}}, 106$ est la

valeur de p donnée par ces observations et que nous venons de trouver, par la théorie, égale à $13^{\text{p}}, 223$, ce qui s'accorde aussi exactement qu'on peut le désirer.

Nous verrons dans la suite que, en prenant un milieu entre les divers résultats des observations, la distance du maximum des marées à la syzygie est, à fort peu près, de $36^{\text{h}} 30^{\text{m}}$; en divisant donc $36^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ par $24^{\text{h}} 39^{\text{m}}$, on aura cette distance en parties de l'intervalle des marées consécutives du matin et du soir vers les syzygies, et l'on trouvera $1,48073$. Cela posé, représentons chacun des six nombres (q) par la formule

$$K - 13^{\text{p}}, 223 (\zeta - 1,48073)^2;$$

en substituant pour ζ ses diverses valeurs relatives aux jours $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ et qui, par l'article précédent, sont égales à

$$-1,10125, \quad -0,10125, \quad 0,89875, \quad 1,89875, \quad 2,89875, \quad 3,89875,$$

on aura

$$6K - 231^{\text{p}}, 937$$

pour la somme des nombres (q) résultante de la formule précédente; mais cette somme est égale à $4107^{\text{p}}, 19$; partant

$$K = 723^{\text{p}}, 188,$$

et la formule précédente devient

$$(r) \quad 723^{\text{p}}, 188 - 13^{\text{p}}, 223 (\zeta - 1,48073)^2.$$

En y substituant successivement pour ζ ses valeurs correspondantes aux jours de la Table II, on aura les six nombres

$$635^{\text{p}}, 035, \quad 690^{\text{p}}, 095, \quad 718^{\text{p}}, 709, \quad 720^{\text{p}}, 877, \quad 696^{\text{p}}, 599, \quad 645^{\text{p}}, 876;$$

ces nombres, comparés aux nombres (q), donnent pour les erreurs de la formule

$$-7^{\text{p}}, 435, \quad -2^{\text{p}}, 815, \quad +6^{\text{p}}, 979, \quad -2^{\text{p}}, 053, \quad +0^{\text{p}}, 819, \quad +4^{\text{p}}, 506,$$

et l'on voit que ces erreurs sont dans les limites de celles des observations.

La valeur de K est, par l'article précédent, égale à

$$40B \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) (1 + \cos^2 \epsilon);$$

on aura donc

$$2B \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) = \frac{723^{\text{p}}, 188}{20(1 + \cos^2 \epsilon)}.$$

En supposant, conformément à l'article XII, $\epsilon = 20^{\circ} 24'$, on aura

$$2B \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) = 19^{\text{p}}, 249;$$

c'est la valeur de la plus grande marée totale qui aurait lieu à Brest si le Soleil et la Lune se mouvaient uniformément dans le plan de l'équateur aux distances r et r' de la Terre.

On peut craindre que la formule (r) ne s'étende pas à des intervalles aussi éloignés du maximum que ceux que nous avons considérés; mais on s'assurera facilement de son exactitude en développant le radical

$$\sqrt{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 \varphi' \right)^2 + \frac{2S}{r^2} \cos^2 \varphi' \frac{L}{r'^2} \cos^2 \varphi' \cos 2(\varphi' - \varphi) + \left(\frac{S}{r^3} \cos^2 \varphi \right)^2}$$

qui entre dans l'expression de y'' ; on trouvera que les termes multipliés par $(\varphi' - \varphi)^4$ sont encore assez petits aux distances précédentes du maximum pour pouvoir être négligés sans erreur sensible.

Si l'on divise $723^{\text{p}}, 188$ par $1 + \cos^2 \epsilon$ ou par $1 + \cos^2 20^{\circ} 24'$, on aura $384^{\text{p}}, 98$. En multipliant cette quantité par $1 - q^2 \sin^2 \epsilon$, l'expression des marées totales des équinoxes de la Table II sera, par l'article X, de cette forme

$$384^{\text{p}}, 98 (1 - q^2 \sin^2 \epsilon) - H (\zeta - 1,48073)^2,$$

H étant un coefficient constant ou indépendant de ζ . On doit ici, comme dans l'article XII, supposer

$$q^2 = \frac{1}{2} \sin^2 14^{\circ} 30', \quad \epsilon = 20^{\circ} 24',$$

ce qui change la formule précédente dans celle-ci

$$383^{\text{re}}, 56 - H(\zeta - 1, 48073)^2.$$

On trouve de la même manière que l'expression des marées totales des solstices de la Table II est de cette forme

$$384^{\text{re}}, 98(1 + \eta^2 \tan^2 \varepsilon) \cos^2 \varepsilon - H'(\zeta - 1, 48073)^2,$$

ce qui se réduit à

$$339^{\text{re}}, 63 - H'(\zeta - 1, 48073)^2.$$

Pour déterminer, par l'observation, le rapport de H à H' , nous prenons dans la Table II la demi-somme des marées totales des équinoxes correspondantes aux jours -1 et 4 ; en la retranchant de la demi-somme des marées totales des équinoxes correspondantes aux jours 1 et 2 , nous aurons $47^{\text{re}}, 165$ pour la différence. Nous considérons semblablement les marées totales des solstices de la Table II, et nous aurons $28^{\text{re}}, 245$ pour la différence. Cela posé, on aura

$$H : H' :: 47,165 : 28,245.$$

On voit ainsi que, suivant les observations, les valeurs de H et de H' ne sont pas égales entre elles et que, la première étant supposée $47,165$, la seconde est $28,245$.

Ce résultat de l'observation est conforme à la théorie, car il résulte de l'article X que l'on a

$$H : H' :: \frac{\frac{2S}{r^2} \cos^2 \varepsilon}{\frac{S}{r^2} + \frac{L}{r'^2}} + \sin^2 \varepsilon : \frac{\frac{2S}{r^2}}{\frac{2S}{r^2} + \frac{L}{r'^2}} - \sin^2 \varepsilon.$$

Ces deux dernières quantités sont dans le rapport de $0,56075$ à $0,37850$; ainsi, H étant supposé $47,165$, H' est égal à $32,09$, ce qui diffère peu du nombre $28,245$ donné par l'observation. La théorie s'accorde donc parfaitement avec les observations sur la loi de la diminution des marées des équinoxes et des solstices, à mesure qu'elles s'éloignent de l'instant de leur maximum.

XV.

Les marées du soir surpassent, à Brest, celles du matin dans les solstices d'été; elles en sont surpassées dans les solstices d'hiver. Pour déterminer la quantité de ce phénomène, j'ai ajouté, dans dix-sept syzygies vers les solstices d'été, l'excès des marées du soir sur celles du matin, le premier et le second jour après la syzygie. Le maximum de la marée tombant à peu près vers le milieu de ces deux jours d'observation, la variation journalière de la hauteur des marées est insensible dans le résultat, qui ne doit, par conséquent, renfermer que l'excès des marées du soir sur celles du matin dans les syzygies des solstices d'été. La somme de ces excès dans les 34 jours d'observation a été de $18^{\text{re}}, 882$.

J'ai ajouté pareillement l'excès des marées du matin sur celles du soir dans onze syzygies des solstices d'hiver. La somme de ces excès dans les 22 jours d'observation a été de $12^{\text{re}}, 655$. En prenant un milieu entre ces deux résultats, l'excès d'une marée du soir sur celle du matin, dans les syzygies des solstices d'été, ou d'une marée du matin sur celle du soir, dans les syzygies des solstices d'hiver, est de $0^{\text{re}}, 563$.

Par l'article IX, cet excès est égal à

$$-2A \sin \varepsilon \cos \varepsilon \left(\frac{S}{r^2} + \frac{L}{r'^2} \right) \cos(\lambda - \gamma);$$

cette fonction, à Brest, est donc égale à $0^{\text{re}}, 563$.

XVI.

Si dans la Table I on ajoute séparément les hauteurs absolues des marées des cinq solstices d'été, on aura $667^{\text{re}}, 619$ pour leur somme. Relativement aux cinq solstices d'hiver, cette somme est $678^{\text{re}}, 494$ plus forte que la première de $10^{\text{re}}, 875$. L'influence de la plus grande proximité du Soleil en hiver qu'en été se manifeste donc dans ces observations.

Suivant l'article IX, on aura la différence des hauteurs absolues de la mer, dans les solstices d'hiver et dans les solstices d'été de la Table I, en multipliant la demi-somme des marées totales de ces solstices par la variation de la fraction $\frac{1}{r^3}$ du solstice d'hiver au solstice d'été, la distance moyenne du Soleil à la Terre étant prise pour unité, et en multipliant encore ce produit par le rapport de l'action du Soleil à la somme des actions réunies du Soleil et de la Lune, rapport qui est égal à $\frac{1}{4}$. On aura ainsi $8^{\text{p}}, 50$ pour cette différence, ce qui ne diffère que de $2^{\text{p}}, 37$ du résultat de l'observation.

L'influence de la plus grande proximité du Soleil en hiver se manifeste encore dans les marées totales de la Table I; la somme des marées totales des cinq solstices d'été est $659^{\text{p}}, 174$, et cette somme pour les cinq solstices d'hiver est $670^{\text{p}}, 973$, plus forte que la première de $11^{\text{p}}, 799$.

Par l'article IX, cet excès est égal à

$$17^{\text{p}}, 0 - 80 A \sin \varepsilon \cos \varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) \sin(\lambda - \gamma).$$

En égalant cette quantité à $11^{\text{p}}, 799$, on aura

$$-2 A \sin \varepsilon \cos \varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) \sin(\lambda - \gamma) = 0^{\text{p}}, 13;$$

mais on a, par l'article précédent,

$$-2 A \sin \varepsilon \cos \varepsilon \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) \cos(\lambda - \gamma) = 0^{\text{p}}, 563.$$

On aura ainsi

$$\tan(\lambda - \gamma) = \frac{0,13}{0,563},$$

ce qui donne

$$\lambda - \gamma = 13^{\circ} 0'.$$

Il semble par là que les marées de la seconde espèce, ou qui dépendent de l'angle $nt + \varpi$, se rapprochent du passage des astres au méridien d'environ une heure plus que les marées de la première espèce, qui dépendent de l'angle $2nt - 2\varpi$; mais il faudrait

avoir un plus grand nombre d'observations pour être assuré de l'existence et de la quantité de ce phénomène. Le moyen le plus précis pour cet objet est de comparer les deux basses marées consécutives du même jour, dans les syzygies des solstices; mais le recueil des observations faites à Brest, dont nous avons fait usage, ne marque, le plus souvent, que les basses marées intermédiaires entre les pleines mers de chaque jour.

XVII.

Nous avons observé dans l'article IX que, suivant la théorie, les marées dans lesquelles la Lune est périgée doivent surpasser celles dans lesquelles cet astre est apogée. Ce phénomène est indiqué par les observations d'une manière très sensible, soit dans les syzygies, soit dans les quadratures.

Pour comparer, sur ce point, la théorie avec les observations, j'ai ajouté, dans douze syzygies où la Lune était vers son périgée et dans les douze syzygies voisines et correspondantes où la Lune était vers son apogée, les marées totales du second et du troisième jour après la syzygie. Ces marées sont très peu différentes de leur maximum dont elles sont très voisines. La Table suivante renferme leurs hauteurs, avec les demi-diamètres correspondants de la Lune et ses déclinaisons.

TABLE III.

	Marées totales.	Demi-diamètres de la Lune.	Déclinaisons de la Lune.
1714. Janvier	16... 40,979 30... 32,813	16.33' 14.48'	17.44' 13.40'
Avril	14... 41,667 29... 33,195	16.48' 14.46'	12.40' 16.56'
Août	10... 32,194 25... 43,507	14.54' 16.44'	11. 0' 6. 0'
Septembre	8... 32,688 23... 44,778	14.46' 16.48'	2.20' 4.15'
Octobre	8... 32,896 23... 41,486	14.48' 16.39'	9.10' 13. 0'

TABLE III (suite).

		Marées totales.	Demi-diamètres de la Lune.	Déclinaisons de la Lune.
1715. Mars	5....	44,042	16.40	1.50
	20....	33,833	14.47	3.20
	4....	43,306	16.48	8.20
Avril	18....	31,944	14.46	12.40
	12....	44,396	16.44	9.20
Octobre	27....	32,188	14.45	13.20
	11....	42,229	16.48	16.30
Novembre	26....	30,757	14.48	19. 0
	6....	31,549	14.47	16.20
1716. Mai	21....	40,611	16.48	17.45
	5....	29,542	14.46	19. 0
Juin	19....	41,514	16.43	19. 0
	4....	30,028	14.54	18. 0
Juillet	19....	37,375	16.36	16.50

Dans cette Table, tous les demi-diamètres de la Lune sont ou plus grands que 16' ou plus petits que 15', et les marées totales qui correspondent aux premiers sont constamment plus grandes que celles qui correspondent aux seconds.

Si l'on ajoute ensemble les marées totales correspondantes aux demi-diamètres de la Lune plus grands que 16', on aura 505^m,890; pareillement, la somme des marées totales correspondantes aux demi-diamètres de la Lune plus petits que 15' est de 383^m,627. La différence de ces deux sommes est de 122^m,263. Voyons ce qu'elle doit être par la théorie.

On aura ainsi cette différence, par l'article IX, en négligeant les quantités dépendantes de (A'), et qui sont insensibles dans la Table précédente, soit par elles-mêmes, soit parce que les déclinaisons de cette Table sont alternativement boréales et australes, en sorte que les quantités (A') se détruisent mutuellement.

On prendra le demi-diamètre moyen de la Lune dans les vingt observations de la Table; ce demi-diamètre est de 15'45", 1; on multipliera dans chaque observation le carré du cosinus de la déclinaison de la Lune par le cube du rapport de son demi-diamètre à 15'45", 1. En

faisant une somme de ces produits relatifs aux douze observations dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune surpasse 16', on aura 13,5846.

En faisant une somme des mêmes produits relatifs aux douze observations dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune est au-dessous de 15', on aura 9,3628.

La différence de ces deux sommes est 4,2218; en la multipliant par $4B \frac{L}{r^3}$, r' étant la moyenne distance de la Lune à la Terre dans les syzygies, on doit, par l'article IX, retrouver à peu près la différence observée 122^m,263.

On a, par l'article XIV,

$$2B \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right) = 19^m, 249.$$

De plus, on verra dans la suite que $\frac{S}{r^3}$ est, à très peu près, le tiers de $\frac{L}{r'^3}$, r' étant ici la moyenne distance de la Lune à la Terre, distance qui, à raison de l'argument de la variation, est d'environ $\frac{1}{120}$ plus grande que la moyenne distance de la Lune dans les syzygies; nous ferons donc

$$\frac{S}{r^3} = \frac{40}{123} \frac{L}{r'^3},$$

r' étant relatif aux distances syzygies. Nous aurons ainsi

$$\frac{163}{123} 2B \frac{L}{r'^3} = 19^m, 249,$$

d'où l'on tire

$$4,2218 \cdot 4B \frac{L}{r'^3} = 122^m, 644,$$

ce qui est d'accord avec le résultat 122^m,263 donné par l'observation.

Les observations de la Table précédente peuvent servir à déterminer la valeur de $2B \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \right)$. En effet, si l'on ajoute les marées totales de cette Table, on a pour leur somme 889^m,517. En ajoutant ensuite tous les produits des carrés des cosinus des déclinaisons de la

Lune par les cubes des rapports des demi-diamètres correspondants de la Lune à $15^{\circ}45'$, 1, on a 22,9474 pour la somme de ces produits. Cette somme aurait été, à fort peu près, égale à 24 si la Lune eût été constamment dans le plan de l'équateur; mais elle est plus petite à raison des déclinaisons de la Lune, et l'on peut supposer dans la Table III que, relativement au Soleil, la somme des produits des carrés des cosinus de ses déclinaisons, par les cubes des rapports de ses demi-diamètres correspondants à son diamètre moyen, est encore 22,9474; il faut donc, pour avoir la somme des marées totales de la Table III, multiplier $4B\left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right)$ par 22,9474, ce qui donne

$$4B\left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) 22,9474 = 889^{\text{pi}}, 517,$$

d'où l'on tire

$$2B\left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) = 19^{\text{pi}}, 381.$$

On doit observer que, dans cette équation, la valeur de $\frac{L}{r'^3}$ est moyenne entre les deux valeurs de cette quantité; mais cette valeur moyenne est plus grande que celle qui convient à la distance moyenne syzygie de la Lune. En effet, si l'on prend le demi-diamètre moyen de la Lune, dans les douze syzygies périgées de la Table, on aura $1002'', 35$ pour ce demi-diamètre; le demi-diamètre apogée est $887'', 85$, et le demi-diamètre moyen est $945'', 10$. Représentons par q la valeur de $\frac{L}{r'^3}$ qui convient à ce demi-diamètre moyen; on aura $q \cdot 1,01102$ pour la moyenne entre les deux valeurs extrêmes de $\frac{L}{r'^3}$. Il faut donc, pour réduire la valeur précédente de $2B\left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right)$ à la moyenne distance syzygie de la Lune, en retrancher $2Bq \cdot 0,01102$; or on a

$$2Bq = \frac{123}{163} 19^{\text{pi}}, 249;$$

la quantité à soustraire est donc $0^{\text{pi}}, 16007$; mais il faut, d'un autre côté, ajouter $0^{\text{pi}}, 090$, parce que les marées de la Table ne se rapportent point à l'instant du maximum, et l'on trouve, par l'article XIII,

qu'elles sont par là diminuées de $0^{\text{pi}}, 090$. On aura donc ainsi

$$2B\left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\right) = 19^{\text{pi}}, 311,$$

ce qui diffère très peu de la valeur $19^{\text{pi}}, 249$ que nous avons trouvée dans l'article XIV.

XVIII.

Les hauteurs absolues des marées de la Table I ne sont pas comptées du niveau d'équilibre que prendrait la mer sans l'action du Soleil et de la Lune; elles sont comptées du zéro de l'échelle d'observation, qui est abaissé de plusieurs pieds au-dessous du niveau d'équilibre. Soit e la hauteur de ce niveau au-dessus de zéro de l'échelle d'observation, et nommons f la quantité

$$\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3p}{5}\right)}\left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r'^3}\right);$$

on aura par l'article X et par les observations des équinoxes de la Table I

$$1421^{\text{pi}}, 411 - 80e + 80f = \frac{1}{2}(1493^{\text{pi}}, 201).$$

Si l'on néglige, dans l'article XII, la fraction $\frac{3p}{5}$, on trouvera par cet article

$$80f = 27^{\text{pi}}, 524;$$

l'équation précédente donnera ainsi

$$e = 8^{\text{pi}}, 7792.$$

On aura pareillement, par l'article X et par les observations des solstices de la Table I,

$$1346^{\text{pi}}, 113 - 80e + 80f(1-3\sin^2\epsilon) = \frac{1}{2}(1330^{\text{pi}}, 147);$$

en faisant $\epsilon = 20^{\circ}24'$, cette équation donnera

$$e = 8^{\text{pi}}, 7316.$$

Ces deux valeurs de e sont fort peu différentes; en prenant entre elles un milieu, on aura

$$e = 8^{\text{m}}, 7554.$$

On peut ainsi, dans chaque port, déterminer le véritable niveau d'équilibre de la mer.

XIX.

Des hauteurs des marées vers les quadratures.

Pour déterminer ces hauteurs, nous reprendrons les expressions complètes de y , y' et y'' de l'article IX, et nous observerons que, si l'on augmente ou si l'on diminue l'angle φ' de 90° , on aura, en réduisant y' et y'' en série et en supposant $\varphi' - \varphi$ peu considérable, comme cela a lieu vers les quadratures,

$$y' = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)}\left[\frac{S}{r^3}(1-3\sin^2 v) + \frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v')\right] \\ + B\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v' - \frac{S}{r^3}\cos^2 v\right) + 2B\frac{\frac{S}{r^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v}{\frac{L}{r^3}\cos^2 v' - \frac{S}{r^3}\cos^2 v}(\varphi' - \varphi)^2,$$

$$y'' = A\frac{L}{r^3}\sin v'\cos v'\cos(\lambda - \gamma) \pm A\frac{S}{r^3}\sin v\cos v\cos(\lambda - \gamma) \\ + 2B\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v' - \frac{S}{r^3}\cos^2 v\right) + 4B\frac{\frac{S}{r^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v}{\frac{L}{r^3}\cos^2 v' - \frac{S}{r^3}\cos^2 v}(\varphi' - \varphi)^2,$$

le signe $+$ ayant lieu vers le premier quartier et le signe $-$ ayant lieu vers le second quartier de la Lune.

L'excès de la marée du matin sur celle du soir, dans les quadratures de l'équinoxe du printemps, sera

$$2A\frac{L}{r^3}\sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos(\lambda - \gamma).$$

Dans les quadratures de l'équinoxe d'automne, cette quantité sera l'excès des marées du soir sur celles du matin, et, comme elle est négative par l'article XV, il en résulte que, dans les quadratures des équinoxes du printemps, la marée du soir surpasse celle du matin, et qu'elle en est surpassée dans les quadratures des équinoxes d'automne.

En considérant les expressions précédentes de y' et de y'' , on voit d'abord que les déclinaisons du Soleil et de la Lune influent sur les hauteurs absolues de la mer et sur les marées totales des quadratures; en sorte que, toutes choses égales d'ailleurs, les plus grandes de ces marées totales ont lieu vers les solstices où la déclinaison de la Lune est nulle dans les quadratures, et les plus petites ont lieu vers les équinoxes où, dans les quadratures, la Lune est à son maximum de déclinaison. On voit ensuite l'influence des distances du Soleil et de la Lune sur ces marées.

Si, dans un nombre i d'équinoxes du printemps, on considère les deux quadratures voisines entre lesquelles chaque équinoxe est compris; si l'on considère pareillement dans le même nombre d'équinoxes d'automne les deux quadratures voisines qui comprennent chaque équinoxe; si l'on ajoute ensemble les hauteurs moyennes absolues du jour même de la quadrature et des trois jours suivants; enfin, si l'on nomme (H) la somme de toutes ces hauteurs, on aura, en négligeant les quantités insensibles et en suivant l'analyse par laquelle nous avons déterminé la valeur de (h) dans l'article X,

$$(H) = -\frac{2i(1+3\cos 2\theta)}{8\left(1-\frac{3\rho}{5}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 \varepsilon) + \frac{S}{r^3}\right] \\ + 16iB\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3}\right) + 16iB\eta^2 \sin^2 \varepsilon \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3}\right) \\ + 4i\alpha^2 B\frac{L}{r^3}\eta^2 \left(\sin^2 \varepsilon + \frac{\frac{2S}{r^3}}{\frac{L}{r^3}\cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3}}\right).$$

Si l'on nomme (L) la somme des marées totales correspondantes, on aura

$$(L) = 32iB \left(\frac{L}{r^3} \cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3} \right) + 32iBq^2 \sin^2 \varepsilon \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) + 8i\alpha'B \frac{L}{r^3} \nu^2 \left(\sin^2 \varepsilon + \frac{\frac{2S}{r^3}}{\frac{L}{r^3} \cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3}} \right).$$

En considérant de la même manière les quadratures d'un nombre i de solstices d'été et celles du même nombre de solstices d'hiver, et en désignant par (H') la somme des hauteurs absolues des marées du jour même de la quadrature et des trois jours suivants, et par (L') la somme des marées totales correspondantes, on aura à très peu près

$$(H') = -\frac{2i(1+3\cos 2\theta)}{s \left(1 - \frac{3\rho}{5}\right)} \left[\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} (1-3\sin^2 \varepsilon) \right] + 16iB \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right) - 16iBq^2 \sin^2 \varepsilon \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) - 4i\alpha'B \frac{L}{r^3} \nu^2 \left(\sin^2 \varepsilon - \frac{\frac{2S}{r^3} \cos^2 \varepsilon}{\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon} \right),$$

$$(L') = 32iB \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right) - 32iBq^2 \sin^2 \varepsilon \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) - 8i\alpha'B \frac{L}{r^3} \nu^2 \left(\sin^2 \varepsilon - \frac{\frac{2S}{r^3} \cos^2 \varepsilon}{\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon} \right).$$

Dans ces expressions de (H), (L), (H') et (L'), r est la moyenne distance du Soleil à la Terre; r' est la moyenne distance de la Lune dans les quadratures, distance qui, à raison de l'argument de la variation, diffère un peu de la moyenne distance de cet astre dans les syzygies; q est la moyenne distance angulaire du Soleil et de la Lune au solstice ou à l'équinoxe, à l'instant de la quadrature; en sorte que q^2 est une moyenne entre toutes ses valeurs relatives aux diverses

quadratures que l'on considère; ε est la plus grande déclinaison de la Lune; ν est le moyen mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle de deux marées consécutives du matin ou du soir vers les quadratures; enfin, cet intervalle étant pris pour unité, α' est la somme des carrés des quatre intervalles de l'instant du minimum des marées dans les quadratures, à l'instant de la basse marée intermédiaire entre les deux marées d'un même jour dans chacun des quatre jours que l'on considère dans chaque quadrature.

Les expressions précédentes donnent

$$(H') - (H) = -\frac{6i(1+3\cos 2\theta)}{s \left(1 - \frac{3\rho}{5}\right)} \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \right) \sin^2 \varepsilon + 16iB \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) \sin^2 \varepsilon (1-2q^2) - \frac{8i\alpha'B \left(\frac{L}{r^3} \right)^2 \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) \nu^2 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon}{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3} \right) \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right)},$$

$$(L') - (L) = 32iB \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) \sin^2 \varepsilon (1-2q^2) - \frac{16i\alpha'B \left(\frac{L}{r^3} \right)^2 \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) \nu^2 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon}{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3} \right) \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right)}.$$

On voit ainsi que les marées des quadratures des solstices l'emportent sur les marées des quadratures des équinoxes.

XX.

Pour comparer sur ce point la théorie aux observations, j'ai considéré les observations des marées dans les quadratures de la même manière que les observations des marées des syzygies de la Table I, c'est-à-dire que, dans chaque équinoxe et dans chaque solstice, j'ai considéré les deux quadratures consécutives entre lesquelles il est compris. Dans chaque quadrature, j'ai pris la somme des hau-

teurs moyennes absolues de la mer et celle des marées totales du jour même de la quadrature et des trois premiers jours qui la suivent. La Table suivante offre les résultats que j'ai obtenus; chacune des hauteurs absolues et des marées totales de cette Table est le résultat des huit hauteurs absolues et des huit marées totales des huit jours d'observation, considérés dans chaque équinoxe et dans chaque solstice.

TABLE IV.

MARÉES DES QUADRATURES DES ÉQUINOXES.

	Hauteurs absolues.	Marées totales.
	^{pi}	^{pi}
1711. Septembre.....	99,993	66,611
{ Mars.....	103,444	67,007
1712. { Septembre.....	103,632	67,618
{ Septembre.....	102,472	65,431
1714. { Septembre.....	106,764	72,514
{ Septembre.....	101,354	71,042
1715. { Mars.....	103,785	71,493
{ Mars.....	98,764	72,715
1716. { Mars.....	96,444	71,945
{ Septembre.....	103,944	72,653
Total.....	1020,596	699,029

MARÉES DES QUADRATURES DES SOLSTICES.

	Hauteurs absolues.	Marées totales.
	^{pi}	^{pi}
1711. Juin.....	106,361	78,347
1712. { Juin.....	111,319	84,111
{ Juin.....	106,819	80,611
{ Juin.....	106,722	80,035
1714. { Juin.....	107,896	82,604
{ Décembre.....	103,181	81,535
1715. { Juin.....	106,792	84,146
{ Décembre.....	106,660	83,160
1716. { Juin.....	108,458	86,028
{ Juin.....	103,103	78,160
Total.....	1067,611	818,737

J'observerai sur ces résultats que le défaut des observations des basses marées m'a forcé, dans les quadratures du solstice d'hiver de

1714, de considérer les quadratures du 31 décembre de cette année et du 15 janvier 1715. Pour multiplier les observations, j'ai considéré, en 1712 et 1714, les deux quadratures consécutives qui ont précédé et celles qui ont suivi l'équinoxe d'automne; en sorte que les premiers nombres de ces équinoxes, dans la Table précédente, sont relatifs aux deux quadratures, dont l'une précède et l'autre suit immédiatement cet équinoxe, et les seconds nombres sont relatifs aux deux quadratures, dont l'une précède et l'autre suit immédiatement l'équinoxe. On doit faire une remarque semblable sur les nombres relatifs aux équinoxes de mars 1716 et aux solstices de juin 1712, 1714 et 1716. J'aurais bien désiré de pouvoir considérer autant de solstices d'hiver que de solstices d'été; mais le défaut d'observations ne me l'a pas permis.

On voit par la Table IV que, conformément à la théorie, les marées totales des quadratures des solstices l'emportent sur les marées totales des quadratures des équinoxes. Ce phénomène est si sensible, que le plus petit des nombres relatifs aux quadratures des solstices surpasse le plus grand des nombres relatifs aux quadratures des équinoxes.

Nous retrouvons ici l'influence de la position des nœuds de l'orbite lunaire en 1711 et 1712, influence que nous avons observée dans l'article XI. Les marées totales des quadratures des équinoxes de ces deux années sont plus faibles que celles des années suivantes.

Les déclinaisons du Soleil et de la Lune influent pareillement sur les hauteurs absolues des marées, mais d'une manière moins sensible que sur les marées totales; car la différence du total des hauteurs absolues des marées dans les solstices précédents au total de ces mêmes hauteurs dans les équinoxes n'est que de 47^{pi}, 015, tandis que cette même différence pour les marées totales est de 119^{pi}, 708, et par conséquent plus que double de la première, comme cela doit être par l'article XIX.

XXI.

Comparons maintenant la théorie aux observations; pour cela, nous allons reprendre l'expression de (L') — (L) de l'article XIX et évaluer

ses différents termes. Considérons d'abord le terme

$$32iB \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) \sin^2 \varepsilon.$$

Nous verrons dans la suite que l'on a, dans les moyennes distances,

$$\frac{L}{r^3} = \frac{3S}{r^3};$$

mais, à raison de l'argument de la variation, la valeur de r' est plus grande de $\frac{1}{120}$ dans les quadratures que dans les moyennes distances, ce qui diminue la valeur de $\frac{L}{r^3}$ et la réduit à $\frac{29}{15}$ de sa valeur moyenne; nous ferons donc, dans les quadratures,

$$\frac{L}{r^3} = \frac{117}{40} \frac{S}{r^3}.$$

Quant à la valeur de $B \frac{S}{r^3}$, nous observerons que l'on a, par l'article XIV,

$$2B \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) = 19^m, 249;$$

mais, dans cette équation, r' est la moyenne distance de la Lune dans les syzygies, et cette distance est, à raison de l'argument de la variation, plus petite de $\frac{1}{120}$ que la moyenne distance de la Lune, ce qui rend $\frac{L}{r^3}$ égal à $\frac{11}{15}$ de sa valeur moyenne, et par conséquent égal à $\frac{123}{40} \frac{S}{r^3}$. L'équation précédente donne ainsi

$$B \frac{S}{r^3} = 2^m, 3618;$$

on aura, par conséquent, en observant que $i = 5$,

$$32iB \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) \sin^2 \varepsilon = 1483^m, 21 \sin^2 \varepsilon.$$

Le terme

$$-64iB \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \right) q^2 \sin^2 \varepsilon$$

de l'expression de $(L') - (L)$ devient

$$-92^m, 984 \sin^2 \varepsilon,$$

en y supposant, conformément à l'article XII,

$$q^2 = \frac{1}{2} \sin^2 14^\circ 30'.$$

Le terme

$$- \frac{16ix'B \left(\frac{L}{r^3} \right)^2 \left(\frac{L}{r^3} + \frac{S}{r^3} \right) v^2 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon}{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3} \right) \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right)}$$

de la même expression ne peut être évalué, à moins que l'on ne connaisse la valeur de l'angle ε . Nous allons voir bientôt que cet angle doit être supposé, à fort peu près, de $19^\circ \frac{1}{2}$. Nous observerons ensuite que l'on a, par l'article suivant,

$$\alpha' = 5,0403.$$

D'ailleurs v est le moyen mouvement synodique de la Lune dans les quadratures, dans l'intervalle de deux marées consécutives du matin ou du soir vers le minimum des marées, intervalle que nous verrons ci-après être égal à $25^h 14^m 10^s$. On aura ainsi, en ayant égard à l'argument de la variation,

$$v = 12^\circ 34' 35'';$$

cela posé, le terme précédent devient

$$-423^m, 65 \sin^2 \varepsilon.$$

L'expression de $(L') - (L)$ donne par conséquent, lorsque $i = 5$,

$$(L') - (L) = 966^m, 60 \sin^2 \varepsilon.$$

La Table IV donne

$$(L') - (L) = 119^m, 708;$$

mais, dans cette Table, il y a huit solstices d'été et deux solstices d'hiver. Dans les solstices d'été, le Soleil, plus éloigné de la Terre, a moins d'action pour diminuer les marées des quadratures; ces marées

en sont donc augmentées de la différence de $2B\frac{S}{r^2}$ à sa valeur moyenne. Dans les solstices d'été, la valeur de r est augmentée d'environ $\frac{1}{10}$, ce qui diminue $2B\frac{S}{r^2}$ d'environ $\frac{1}{10}B\frac{S}{r^2}$. Il faut donc multiplier cette dernière quantité par 48, qui est l'excès du nombre des jours considérés dans les solstices d'été sur celui des jours considérés dans les solstices d'hiver, ce qui donne $11^{\text{e}}, 366$, qu'il faut retrancher de la somme $818^{\text{e}}, 737$ des marées solsticiales de la Table IV, pour avoir la somme que l'on aurait eue si l'on avait considéré autant de solstices d'hiver que de solstices d'été. On aura ainsi $807^{\text{e}}, 371$ pour cette somme, ce qui donne, pour le résultat de l'observation,

$$(L') - (L) = 108^{\text{e}}, 342.$$

Maintenant si, dans le résultat $966^{\text{e}}, 60 \sin^2 \varepsilon$ de la théorie, on suppose $\varepsilon = 19^{\circ}\frac{1}{2}$, il deviendra $107^{\text{e}}, 70$, ce qui ne diffère que d'environ un demi-pied du résultat de l'observation, et ce qui prouve la justesse de la valeur supposée pour ε .

XXII.

Le minimum des marées totales n'a point lieu le jour même de la quadrature; il suit cette phase du même intervalle dont le maximum de la marée totale suit la syzygie. Nous avons déterminé, dans l'article XIII, cet intervalle par la loi des marées totales vers les syzygies; voyons si la loi de ces marées vers les quadratures conduit au même résultat.

Pour cela, j'ai ajouté séparément, dans les quadratures de la Table IV, les marées totales relatives à chacun des quatre jours que j'ai considérés dans chaque quadrature, et j'ai obtenu les nombres suivants :

$$(a') \quad 397^{\text{e}}, 55, \quad 349^{\text{e}}, 53, \quad 357^{\text{e}}, 46, \quad 413^{\text{e}}, 23.$$

Le premier de ces nombres est la somme des marées totales relatives au jour même de la quadrature; le second est la somme des marées totales relatives au premier jour qui la suit; le troisième est la somme

relative au second jour, et le quatrième est la somme relative au troisième jour. Chacune de ces sommes est le résultat de quarante jours d'observation, dans lesquels, la quadrature étant arrivée alternativement le matin et le soir, on peut supposer, par un milieu, que, dans toutes ces observations, la quadrature est arrivée à midi.

Prenons pour unité l'intervalle de deux marées consécutives du matin ou du soir, vers les quadratures, et nommons ζ la distance de la basse marée intermédiaire entre deux marées d'un jour quelconque, fort voisin de la quadrature, à la quadrature supposée arriver à midi. On s'assurera, comme dans l'article XIII, que les sommes (a') peuvent être représentées par la formule $m' - n'\zeta + p'\zeta^2$.

On verra, ci-après, que la quadrature étant supposée arriver à midi, la marée du matin du jour même de la quadrature précède le midi de $3^{\text{h}}33^{\text{m}}36^{\text{s}}$. On verra d'ailleurs que l'intervalle de deux marées consécutives du matin ou du soir vers les quadratures est de $25^{\text{h}}14^{\text{m}}10^{\text{s}}$; on aura donc, relativement au jour de la quadrature,

$$\zeta = \frac{1}{4} - \frac{3^{\text{h}}33^{\text{m}}36^{\text{s}}}{25^{\text{h}}14^{\text{m}}10^{\text{s}}} = 0,10893.$$

En augmentant ζ successivement d'une, deux et trois unités, on aura les valeurs de ζ relatives au premier, au second et au troisième jour qui suivent la quadrature.

Maintenant, si l'on suit exactement le procédé de l'article XIII, on trouvera que la formule $m' - n'\zeta + p'\zeta^2$ devient

$$405^{\text{e}}, 77 - 78^{\text{e}}, 2607\zeta + 25^{\text{e}}, 9475\zeta^2,$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme

$$(e') \quad 346^{\text{e}}, 75 + 25^{\text{e}}, 9475(\zeta - 1,50817)^2.$$

En donnant successivement à ζ les quatre valeurs précédentes, on aura quatre nombres qui doivent représenter les nombres (a') , et qui, comparés à ces nombres, donnent, pour les erreurs de la formule,

$$0^{\text{e}}, 00, \quad -1^{\text{e}}, 35, \quad +1^{\text{e}}, 35, \quad 0^{\text{e}}, 00.$$

Ces erreurs étant fort petites, on voit que la formule (e') a toute l'exactitude qu'on peut désirer.

Cette formule est à son minimum lorsque $\zeta = 1,50817$; en multipliant cette valeur de ζ par l'intervalle de $25^h 14^m 10^s$, que nous avons pris pour unité, on aura $38^h 4^m$ pour l'intervalle dont le minimum de la marée totale suit la quadrature. Par l'article XIII, le maximum de la marée totale suit de $35^h 30^m$ la syzygie, d'où il résulte que le minimum doit suivre du même intervalle la quadrature. La différence entre les résultats donnés par les observations des syzygies et par celles des quadratures est $2^h 34^m$; cette différence est dans les limites des erreurs des observations.

Pour comparer la théorie à la formule (e'), nous observerons que la somme des valeurs de (L) et de (L') de l'article XIX est égale à

$$4k \left\{ 1 + \frac{\frac{2S}{r^3} \frac{L}{r^3} \left[\frac{L}{r^3} (1 - \cos^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon) - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right] \frac{1}{4} \alpha' \nu^2}{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3} \right) \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right) \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \right)} \right\}$$

k étant égal à

$$8iB \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \right) (1 + \cos^2 \varepsilon).$$

Si l'on suppose $i = 5$ dans cette formule, elle sera la somme des quatre nombres (a'); il est facile d'en conclure que ces nombres seront représentés par la formule

$$k \left\{ 1 + \frac{2\nu^2 \frac{S}{r^3} \frac{L}{r^3} \left[\frac{L}{r^3} (1 - \cos^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon) - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right] (\zeta - 1,50817)^2}{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3} \right) \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right) \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \right)} \right\}$$

En comparant cette formule à la formule (e'), on aura

$$k = 346^e, 75,$$

d'où l'on tire

$$2B \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \right) = \frac{346^e, 75}{20(1 + \cos^2 \varepsilon)}.$$

On aura ensuite

$$\frac{2k \frac{S}{r^3} \frac{L}{r^3} \left[\frac{L}{r^3} (1 - \cos^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon) - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right] \nu^2}{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3} \right) \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon \right) \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \right)} = 25^e, 9475.$$

Si l'on suppose dans le premier membre de cette équation, conformément à ce que nous avons trouvé dans l'article XXI,

$$\frac{L}{r^3} = \frac{117}{40} \frac{S}{r^3}, \quad \varepsilon = 19^e 30', \quad \nu = 12^e 34' 35',$$

il devient $27^e, 459$, ce qui ne diffère que de $1^e, 5$ du résultat $25^e, 9475$ donné par l'observation.

Reprenons l'équation

$$2B \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \right) = \frac{346^e, 75}{20(1 + \cos^2 \varepsilon)}.$$

Dans cette équation, la valeur de $\frac{S}{r^3}$ est une moyenne entre toutes les valeurs de cette quantité correspondantes aux observations de la Table IV; or, dans cette Table, il y a dix équinoxes dans lesquels $\frac{S}{r^3}$ est égal à sa valeur moyenne; il y a huit solstices d'été dans chacun desquels cette quantité est $\frac{12}{20}$ de sa valeur moyenne; enfin, il y a deux solstices d'hiver dans lesquels $\frac{S}{r^3}$ est $\frac{21}{20}$ de sa valeur moyenne. On doit donc supposer dans l'équation précédente cette quantité égale à 0,985 de sa valeur moyenne. De plus, la valeur de $\frac{L}{r^3}$ dans cette même équation n'est que $\frac{12}{10}$ de sa valeur moyenne; en faisant donc, dans les moyennes distances,

$$\frac{L}{r^3} = \mu \frac{S}{r^3},$$

l'équation précédente donnera

$$2B \frac{S}{r^3} \left(\frac{30}{40} \mu - 0,985 \right) = 9^e, 18023.$$

Reprenons maintenant l'équation

$$2B\left(\frac{L}{r^2} + \frac{S}{r^3}\right) = 19^{\text{pi}}, 249,$$

trouvée dans l'article XIV. Dans cette équation, $\frac{L}{r^2}$ est $\frac{41}{16}$ de sa valeur moyenne; elle devient ainsi

$$2B\frac{S}{r^3}\left(\frac{41}{16}\mu + 1\right) = 19^{\text{pi}}, 249;$$

on aura donc

$$\frac{\frac{11}{16}\mu - 0,985}{\frac{11}{16}\mu + 1} = \frac{9^{\text{pi}}, 18023}{19^{\text{pi}}, 249}$$

et, par conséquent,

$$\mu = 3,0071.$$

Cette valeur de μ diffère très peu de 3; ainsi l'on peut supposer, à fort peu près, $\frac{L}{r^2}$ triple de $\frac{S}{r^3}$.

Nous avons trouvé, dans l'article XVII, une seconde valeur de $2B\left(\frac{L}{r^2} + \frac{S}{r^3}\right)$; cette valeur est $19^{\text{pi}}, 381$; elle a, sur celle de l'article XIII, l'avantage d'être indépendante de l'évaluation de l'angle ε ; en en faisant usage, on trouve

$$\mu = 2,9944,$$

valeur encore très approchante de 3. La moyenne entre ces deux valeurs de μ est

$$\mu = 3,0007,$$

ce qui diffère si peu de 3 que l'on peut négliger la différence.

XXIII.

Les observations m'ont fait connaître que la loi de la variation des marées totales, près de leur minimum, n'est pas la même dans les équinoxes que dans les solstices. Pour cela, j'ai ajouté séparément dans les observations de la Table IV les marées totales correspondantes au jour même de la quadrature, que je désigne par zéro, et aux trois

jours suivants, que je désigne par 1, 2 et 3. La Table suivante offre les résultats que j'ai obtenus :

TABLE V.

Jours.	Marées totales des équinoxes.	Marées totales des solstices.
0.....	183,51	214,24
1.....	154,12	195,11
2.....	161,69	195,27
3.....	199,91	213,32

Si, de la somme des marées totales des équinoxes correspondantes aux jours 0 et 3, on retranche la somme des marées totales des équinoxes correspondantes aux jours 1 et 2, on aura $67^{\text{pi}}, 41$ pour la différence. Cette même différence, relativement aux marées totales des solstices, n'est que de $36^{\text{pi}}, 38$.

Maintenant, si l'on représente par $a + l\zeta^2$ la loi de la variation des marées totales vers les quadratures des équinoxes, et par $a' + l'\zeta^2$ cette même loi vers les quadratures des solstices, ζ étant l'intervalle d'une marée quelconque au minimum des marées, on aura, par les observations précédentes,

$$l : l' :: 67^{\text{pi}}, 41 : 36^{\text{pi}}, 38.$$

Voyons quel doit être le rapport de l à l' suivant la théorie. Il est facile de conclure de l'article XIX que ce rapport est celui de

$$\sin^2\varepsilon + \frac{\frac{2}{r^2}S}{\frac{L}{r^2}\cos^2\varepsilon - \frac{S}{r^3}} \quad \text{à} \quad \frac{\frac{2}{r^2}S\cos^2\varepsilon}{\frac{L}{r^2} - \frac{S}{r^3}\cos^2\varepsilon} - \sin^2\varepsilon.$$

En substituant pour ε sa valeur $19^{\circ}30'$, on trouvera, par l'article XXI,

$$l : l' :: 1,3721 : 0,6640,$$

en sorte que, l étant supposé égal à $67^{\text{pi}}, 41$, l' est égal à $32^{\text{pi}}, 62$, ce qui diffère peu du résultat $36^{\text{pi}}, 38$, donné par l'observation. On voit

ainsi que la théorie s'accorde aussi bien avec les observations, relativement à la variation des marées vers les quadratures, que relativement à leur variation vers les syzygies. J'ai reconnu encore que les observations s'accordaient avec la théorie d'une manière très précise, relativement aux variations de la grandeur des marées vers les quadratures, dues aux variations de la parallaxe lunaire.

XXIV.

On a vu, dans l'article XIX, que dans les quadratures de l'équinoxe du printemps les marées du soir doivent l'emporter à Brest sur celles du matin, et que, au contraire, les marées du matin doivent l'emporter sur celles du soir dans les quadratures de l'équinoxe d'automne. Pour vérifier ce phénomène, j'ai ajouté, dans onze quadratures vers l'équinoxe du printemps, l'excès des marées du soir sur celles du matin, le premier et le second jour après la quadrature. La somme de ces excès a été de $9^m, 681$. J'ai ajouté pareillement, dans treize quadratures vers l'équinoxe d'automne, l'excès des marées du matin sur celles du soir; la somme de ces excès a été de $10^m, 424$. Par un milieu entre ces observations, on a $0^m, 419$ pour l'excès d'une marée du soir sur celle du matin dans les quadratures de l'équinoxe du printemps, ou d'une marée du matin sur celle du soir dans les quadratures de l'équinoxe d'automne.

Nous avons trouvé, dans l'article XV, $0^m, 563$ pour l'excès des marées du soir sur celles du matin dans les syzygies des solstices d'été. Cet excès doit être au précédent, par les articles IX et XIX, dans le rapport de $\frac{L}{P^2} + \frac{S}{P^2}$ à $\frac{L}{P^2}$, ou dans le rapport de 4 à 3, ce qui est, à fort peu près, le rapport des nombres $0^m, 563$ et $0^m, 419$.

XXV.

On peut déterminer le niveau d'équilibre de la mer par les marées des quadratures comme nous l'avons déterminé dans l'article XVIII,

par les marées des syzygies. Pour cela, on retranchera de la somme des vingt hauteurs absolues de la Table IV la demi-somme des vingt marées totales de la même Table, et l'on aura, par l'article XIX, en conservant les dénominations de l'article XVIII,

$$160e - 80f(2 - 3 \sin^2 \epsilon) = 1329^m, 324.$$

On a, par l'article XVIII,

$$160e - 80f(2 - 3 \sin^2 \epsilon) = 1355^m, 850;$$

le terme $-80f(2 - 3 \sin^2 \epsilon)$ est à fort peu près le même dans ces deux équations; ainsi la valeur de e , conclue de la première, est moindre que sa valeur conclue de la seconde de la quantité

$$\frac{1355^m, 850 - 1329^m, 324}{160}.$$

Mais cette seconde valeur est égale à $8^m, 7554$, par l'article XVIII; la première est par conséquent égale à $8^m, 5896$.

La différence $0^m, 1658$ des deux valeurs de e , déterminées, l'une par les marées des syzygies, et l'autre par les marées des quadratures, doit-elle être attribuée aux erreurs des observations ou aux circonstances locales, qui, dans nos ports, altèrent les résultats de la théorie? C'est ce que des observations plus nombreuses pourront apprendre un jour. Je suis cependant très porté à croire que cette différence tient, au moins en partie, aux circonstances locales: 1° la différence $26^m, 526$ des deux seconds membres des équations précédentes me paraît trop considérable pour dépendre uniquement des erreurs des observations; 2° nous avons observé, dans l'article I, que, dans nos ports, la mer, en descendant, n'atteint jamais exactement sa plus petite hauteur donnée par la théorie; mais, dans les quadratures, où elle s'élève moins que dans les syzygies, la mer doit en approcher davantage. Ainsi le niveau de la mer doit paraître plus bas dans les marées des quadratures que dans celles des syzygies; ce qui vient encore à l'appui de ce résultat, c'est que nous avons trouvé, dans l'article XVIII, la valeur de e plus petite dans les syzygies des solstices

que dans celles des équinoxes. Cette considération doit influer sur le rapport des forces lunaires et solaires conclu par les hauteurs des marées, puisque ces hauteurs ne sont point exactement celles qui résultent de la théorie; la différence des diverses valeurs de e étant peu sensible à Brest, le rapport de ces forces est bien déterminé par les hauteurs des marées que l'on y observe; mais, dans d'autres ports, les diverses valeurs de e peuvent très sensiblement différer par les circonstances locales, et, dans ce cas, le rapport des forces lunaires et solaires ne sera plus exactement donné par les hauteurs des marées.

XXVI.

Des heures et des intervalles des marées vers les syzygies.

Reprenons l'équation

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi' - \lambda) = \frac{\frac{S}{r^3} \cos^2 v \sin 2(\varphi - \varphi')}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v' + \frac{S}{r^3} \cos^2 v \cos 2(\varphi - \varphi')},$$

trouvée dans l'article IX, et mettons-la sous cette forme

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3} \cos^2 v' \sin 2(\varphi' - \varphi)}{\frac{S}{r^3} \cos^2 v + \frac{L}{r^3} \cos^2 v' \cos 2(\varphi' - \varphi)}.$$

L'angle $\varphi' - \varphi$ étant peu considérable vers les syzygies, nous pourrions négliger sa troisième puissance, et nous aurons

$$nt + \varpi - \varphi - \lambda = \frac{\frac{L}{r^3} (\varphi' - \varphi) \cos^2 v'}{\frac{S}{r^3} \cos^2 v + \frac{L}{r^3} \cos^2 v'};$$

$nt + \varpi - \varphi$ est l'angle horaire du Soleil. Pour le réduire en temps, il faut le multiplier par $\frac{1^h}{15^m}$; cet angle est, par l'article VIII, relatif à un instant qui précède de trente-six heures et demie celui que l'on considère; mais on peut, sans erreur sensible, le rapporter à ce dernier

instant, en diminuant convenablement l'angle λ . Soit alors T l'angle λ réduit en temps; l'heure de la marée sera donc

$$T + \frac{\frac{L}{r^3} (\varphi' - \varphi) \cos^2 v'}{15 \left(\frac{S}{r^3} \cos^2 v + \frac{L}{r^3} \cos^2 v' \right)}.$$

Considérons l'heure de la pleine mer du jour même de la syzygie. L'angle $\varphi' - \varphi$ est nul à l'instant du maximum des marées, et cet instant suit toujours la syzygie d'un intervalle constant qui est d'environ $36^h 30^m$; $\varphi' - \varphi$ est donc négatif relativement aux marées du jour même de la syzygie. Lorsque cette phase de la Lune arrive le matin, cet angle est plus petit que lorsque la syzygie arrive à midi. La marée syzygie doit donc alors retarder sur l'heure moyenne de la marée syzygie, en prenant pour cette heure celle qui a lieu lorsque la syzygie arrive à midi. L'heure de la marée syzygie doit, au contraire, avancer sur l'heure moyenne lorsque la syzygie arrive le soir. On ramènera donc à cette heure moyenne la pleine mer d'une syzygie quelconque en ajoutant à l'heure observée la quantité

$$\frac{iv \cdot 1^h}{30^m},$$

v étant le moyen mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle d'une heure, et i étant le nombre d'heures dont la syzygie suit le midi. v est, à fort peu près, d'un demi-degré, ce qui réduit la quantité précédente à $i \frac{3^m}{2}$. Il suit de là que l'on doit ajouter ou retrancher de l'heure observée de la marée $1^m 30^s$ environ pour chaque heure dont la syzygie suit ou précède le midi.

Le phénomène du retard ou de l'avancement des marées, suivant que la syzygie arrive plus tôt ou plus tard, est un des premiers que M. de Cassini ait tiré des observations. Il avait fixé à 2^m par heure la correction que nous venons de trouver de $1^m 30^s$: les observations considérées en grand nombre m'ont fait voir que cette correction est, à peu près, telle que la théorie la donne.

Soit U le mouvement synodique de la Lune depuis l'instant de la marée, lorsque la syzygie arrive à midi, jusqu'à l'instant du maximum de la marée; l'heure de la pleine mer du jour même de la syzygie vers les équinoxes sera, à très peu près,

$$T = \frac{\frac{L}{r^3} U \cos \varepsilon}{15 \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right)},$$

et, le jour d'une syzygie vers les solstices, l'heure de la pleine mer sera

$$T = \frac{\frac{L}{r^3} U}{15 \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right) \cos \varepsilon};$$

ainsi, l'heure moyenne de la pleine mer des syzygies des équinoxes doit retarder sur celle des syzygies des solstices d'une quantité, à fort peu près, égale à

$$\frac{U \sin \varepsilon \tan \varepsilon}{20}.$$

La fonction

$$\frac{\frac{L}{r^3} U}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3}}$$

augmente dans le périégée de la Lune et diminue dans son apogée; les marées du jour de la syzygie doivent donc, tout étant égal d'ailleurs, avancer dans le périégée de la Lune et retarder dans son apogée.

Ces divers résultats ont lieu pour les marées du soir comme pour celles du matin; la seule différence entre elles est que la valeur de U n'est pas la même pour ces deux marées: elle est moindre d'environ 6° dans la marée du soir; l'heure de cette marée retarde par conséquent sur l'heure de la marée du matin de la quantité

$$\frac{\frac{L}{r^3} 6^{\circ}}{15 \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right)}$$

ou d'environ 18^m , en sorte que si l'heure de la marée du matin est a , celle de la marée du soir sera, à peu près, $a + 18^m$.

XXVII.

Pour vérifier ces résultats par les observations, j'ai ajouté les heures des marées du matin à Brest, dans trente-six syzygies que j'ai prises le plus près que je l'ai pu des équinoxes, en ramenant, par la règle précédente, les heures des marées à ce qu'elles auraient été si la syzygie fût arrivée à midi, et en considérant à la fois deux syzygies consécutives pour faire disparaître l'effet des variations des distances de la Lune. J'ai trouvé $121^h 50^m 0^s$ pour la somme de ces heures, ce qui donne $3^h 23^m 3^s$ pour l'heure moyenne de la marée du matin à Brest, dans les syzygies vers les équinoxes. J'observerai ici que, dans ces résultats et dans tous ceux qui suivent, les heures sont comptées en temps vrai.

J'ai ajouté de la même manière les heures des marées du matin, dans trente-six syzygies que j'ai choisies le plus près que je l'ai pu des solstices, en considérant de plus autant de solstices d'été que de solstices d'hiver pour faire disparaître l'effet de la variation des distances du Soleil. J'ai trouvé $118^h 46^m 30^s$ pour leur somme, ce qui donne $3^h 17^m 58^s$ pour l'heure moyenne de la marée du matin à Brest, dans les syzygies vers les solstices. Cette heure avance donc, par les observations précédentes, de $5^m 5^s$ sur l'heure moyenne des syzygies des équinoxes.

En considérant de la même manière les marées du soir à Brest, j'ai trouvé, par quarante-six observations, $3^h 40^m 56^s$ pour l'heure moyenne de la marée du soir vers les syzygies des équinoxes; et j'ai trouvé, par quarante observations, $3^h 36^m 0^s$ pour l'heure moyenne de la marée du soir vers les solstices. Cette heure avance donc sur la précédente de $4^m 56^s$: ainsi l'avance des marées syzygies, par l'effet des déclinaisons, est à la fois confirmée par les observations des marées du matin et par celles des marées du soir.

Le milieu entre les avances des marées du matin et du soir dans les observations précédentes est $5^m 1^s$; mais, dans ces observations, les syzygies considérées vers les équinoxes et vers les solstices étaient sensiblement éloignées de ces points, en sorte que, pour comparer au résultat précédent son expression analytique

$$\frac{U \sin \varepsilon \tan \varepsilon}{20},$$

il faut supposer ε moindre que l'obliquité de l'écliptique et ne le porter qu'à 16° ou 17° , et alors la formule précédente est d'accord avec l'observation.

Si l'on prend un milieu entre les soixante-douze observations précédentes des marées du matin, on trouve que, à Brest, l'heure moyenne de la marée du matin dans les syzygies est de $3^h 20^m 30^s$. En prenant semblablement un milieu entre les quatre-vingt-six observations précédentes des marées du soir, l'heure moyenne de cette marée dans les syzygies est de $3^h 38^m 38^s$; elle est par conséquent plus avancée que la première de $18^m 8^s$, ce qui est conforme à la théorie.

XXVIII.

Pour déterminer, par les observations, l'effet de la variation de la distance lunaire, j'ai ajouté les heures des marées du matin dans dix-huit syzygies dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune surpassait $16'$, en ramenant ces heures à celles qui auraient eu lieu si la syzygie fût arrivée à midi; j'ai trouvé $57^h 40^m$ pour leur somme.

J'ai pareillement ajouté les heures des dix-huit marées syzygies correspondantes dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune était au-dessous de $15'$, et j'ai trouvé $63^h 52^m$ pour leur somme, ce qui donne $26^m 40^s$ pour la différence moyenne entre les heures des marées apogées et les heures des marées périgées dans ces observations.

J'ai ajouté encore les heures des marées du soir dans les dix-huit syzygies périgées précédentes, et j'ai trouvé $64^h 12^m$ pour leur somme.

Les heures des marées du soir dans les dix-huit syzygies apogées précédentes m'ont donné pour leur somme $68^h 14^m 30^s$, ce qui donne à peu près 13^m pour la différence moyenne entre les heures des marées syzygies apogées et celles des marées syzygies périgées, dans ces observations : ainsi le retard des marées syzygies apogées sur les marées syzygies périgées est à la fois indiqué par les observations des marées du matin et par celles des marées du soir. Ce retard dans les marées du soir n'est qu'environ deux tiers de ce même retard dans les marées du matin, et cela doit être suivant l'analyse de l'article XXVI, parce que la distance des marées du soir du jour même de la syzygie, au maximum des marées, n'est qu'environ les deux tiers de cette même distance relative aux marées du matin.

La somme des dix-huit demi-diamètres de la Lune périgée dans ces observations a été de $299' 45''$; la somme des dix-huit demi-diamètres apogées correspondants a été de $267' 14''$. Si l'on prend un résultat moyen entre les observations des marées du matin et celles des marées du soir, on trouve qu'à une variation de $1'$ dans le demi-diamètre de la Lune répond une variation de $9' 27''$ dans l'heure de la marée du jour même de la syzygie ou, plus exactement, dans la demi-somme des heures des marées du matin et du soir.

Comparons sur ce point la théorie aux observations. On a vu dans l'article XXVI que le retard des marées apogées dépend de la diminution de la fonction

$$\frac{L}{r^3} U$$

Soit $2r'$ la variation de r ; la variation correspondante de U sera, comme l'on sait, à peu près $-2U \frac{2r'}{r}$. La variation de la fonction précédente sera donc, en observant que $\frac{L}{r^3} = \frac{3S}{r^3}$,

$$-\frac{33}{16} \frac{\partial r'}{r} U$$

Le demi-diamètre moyen de la Lune étant supposé $15^{\circ}45'$, 1 dans les syzygies, on a

$$\frac{\partial r'}{r'} = \frac{60''}{945'',1};$$

U est ici le moyen mouvement synodique de la Lune depuis l'instant moyen entre les deux marées du jour de la syzygie supposée arriver à midi jusqu'à l'instant du maximum de la marée. En supposant que ce maximum suit de $36^{\text{h}}30^{\text{m}}$ la syzygie, U sera le moyen mouvement synodique de la Lune vers les syzygies, dans l'intervalle de 39^{h} , et par conséquent il sera à fort peu près égal à $20^{\circ}7'$, ce qui donne $-10'33''$ pour la fonction précédente. Sa valeur donnée par les observations précédentes est $-9'27''$. La différence $1'6''$ est dans les limites des erreurs des observations, vu surtout l'incertitude qui existe sur le moment de la pleine mer. Nous verrons d'ailleurs, dans la suite, la raison par laquelle la théorie surpasse un peu sur ce point le résultat des observations.

XXIX.

Il est facile, par l'article XXVI, de déterminer le retard journalier des marées vers les syzygies. Si U exprime le mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle d'une des deux marées du jour même de la syzygie à la marée correspondante du troisième jour qui la suit, le retard de la marée de ce troisième jour sur la marée du jour même de la syzygie sera, dans les équinoxes,

$$\frac{\frac{L}{r'^2} U \cos \varepsilon}{15 \left(\frac{S}{r^2} + \frac{L}{r'^2} \right)},$$

et, dans les solstices, il sera

$$\frac{\frac{L}{r'^2} U}{\left(\frac{S}{r^2} + \frac{L}{r'^2} \right) 15 \cos \varepsilon}.$$

Ces formules sont d'autant plus exactes, que l'instant du maximum de la marée tombe à peu près au milieu de l'intervalle que nous considé-

rons. On voit ainsi que le retard des marées est plus grand dans les syzygies des solstices que dans celles des équinoxes; on voit encore que ce retard est plus grand dans les syzygies où la Lune est périgée que dans celles où elle est apogée.

Pour vérifier ces résultats par les observations, j'ai ajouté les retards des marées du matin du jour même de la syzygie au troisième jour qui la suit, dans vingt-quatre observations les plus voisines que j'ai pu choisir des équinoxes, en ayant toujours soin de considérer à la fois deux syzygies consécutives. La somme de ces retards a été de $43^{\text{h}}52^{\text{m}}30^{\text{s}}$, ce qui donne $1^{\text{h}}49^{\text{m}}41^{\text{s}}$ pour le retard moyen.

J'ai ajouté pareillement les retards des marées du soir, du jour même de la syzygie au troisième jour qui la suit, dans trente observations les plus voisines que j'ai pu choisir des équinoxes, en ayant toujours soin de considérer à la fois deux syzygies consécutives. La somme de ces retards a été de $55^{\text{h}}17^{\text{m}}30^{\text{s}}$, ce qui donne $1^{\text{h}}50^{\text{m}}35^{\text{s}}$ pour le retard moyen.

En prenant un milieu entre ces retards des marées du matin et du soir, on a $1^{\text{h}}50^{\text{m}}8^{\text{s}},12$ pour le retard moyen des marées du jour même de la syzygie au troisième jour qui la suit, ce qui donne $36^{\text{m}}43^{\text{s}}$ pour le retard journalier des marées syzygies vers les équinoxes.

En considérant de la même manière les retards des marées du matin dans vingt-deux observations les plus voisines que j'ai pu choisir des solstices, j'ai trouvé leur somme égale à $45^{\text{h}}37^{\text{m}}$, ce qui donne $2^{\text{h}}3^{\text{m}}49^{\text{s}}$ pour le retard moyen.

La somme des retards des marées du soir dans trente-deux observations semblables a été de $65^{\text{h}}49^{\text{m}}30^{\text{s}}$, d'où résulte $2^{\text{h}}2^{\text{m}}48^{\text{s}}$ pour le retard moyen.

Le milieu entre ces retards des marées du matin et du soir est $2^{\text{h}}3^{\text{m}}49^{\text{s}}$, ce qui donne $41^{\text{m}}16^{\text{s}}$ pour le retard journalier des marées syzygies vers les solstices, retard qui est de $4^{\text{m}}33^{\text{s}}$ plus grand que vers les équinoxes. On voit ainsi que les observations des marées du matin et du soir vers les syzygies concourent à établir l'influence des déclinaisons des astres sur le retard journalier de ces marées.

Si l'on prend un milieu entre les retards des marées du matin et du soir, tant vers les équinoxes que vers les solstices, dans les observations précédentes, on trouve $1^h56^m58^s,5$ pour le retard moyen des marées du jour même de la syzygie au troisième jour qui le suit.

Suivant les formules précédentes, ce retard doit être plus grand vers les solstices que vers les équinoxes de la quantité

$$\frac{U \sin \varepsilon \tan \varepsilon}{20}$$

U est le moyen mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle des marées que l'on considère, c'est-à-dire dans l'intervalle de 31^h57^m : sa valeur est d'environ $38^{\circ}20'$. En égalant donc la formule précédente à la différence observée des retards, différence qui, par ce qui précède, est égale à 13^m41^s , on aura, à fort peu près,

$$\varepsilon = 19^{\circ}\frac{1}{2}.$$

ce qui peut être admis; en sorte qu'à cet égard la théorie est d'accord avec les observations.

XXX.

L'accroissement du retard journalier des marées périgées vers les syzygies et la diminution du retard journalier des marées apogées vers les syzygies sont indiqués, d'une manière très sensible, par les observations. Dans neuf marées syzygies du matin, dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune surpassait $16'$, j'ai trouvé 19^h53^m pour la somme des retards des marées du jour même de la syzygie au troisième jour qui la suit, tandis que la somme de ces retards dans les marées syzygies voisines ou correspondantes, dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune était au-dessous de $15'$, n'a été que de 14^h7^m .

La somme des retards des marées du soir dans les mêmes syzygies périgées a été de 19^h55^m ; dans les mêmes syzygies apogées, cette somme n'a été que de 14^h27^m .

Le phénomène que nous considérons ici est si sensible, que, dans chacune des observations précédentes, le plus petit retard observé des

marées périgées a surpassé le plus grand retard observé des marées apogées, ce qui prouve la nécessité de considérer à la fois, dans la détermination des retards des marées syzygies, les deux syzygies consécutives, lorsque l'on veut faire disparaître l'effet de la variation des distances de la Lune à la Terre.

Si l'on prend un milieu entre les retards des marées du matin et du soir dans les observations précédentes, on trouve que le retard journalier des marées périgées a été plus grand que le retard journalier des marées apogées, de 12^m29^s .

La somme des demi-diamètres de la Lune périgée dans ces observations a été de $149'50''$, et la somme des demi-diamètres de la Lune apogée a été de $133'29''$; ainsi la différence 12^m29^s des retards journaliers répond à $1'49''$ de variation dans le demi-diamètre de la Lune, ce qui donne 6^m50^s de retard pour $1'$ d'accroissement dans ce demi-diamètre.

Pour comparer, sur ce point, la théorie aux observations, nous remarquerons que, par ce qui précède, la variation du retard des marées périgées et apogées dépend de la variation de la fonction

$$\frac{\frac{L}{r^2} U}{15 \left(\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r^3} \right)}.$$

Supposons que r' varie de $\partial r'$, la variation de U sera, à fort peu près, $-2U \frac{\partial r'}{r'}$; en nommant donc q la valeur moyenne de la fonction précédente, et en observant que $\frac{L}{r^2} = \frac{3S}{r^2}$ à fort peu près, on aura

$$-\frac{11}{4} q \frac{\partial r'}{r'}$$

pour la variation de cette fonction.

Par un milieu entre les retards journaliers des marées syzygies vers les équinoxes et vers les solstices, la valeur de q relative à un jour est de 39^m ; en supposant ensuite que la variation $\partial r'$ réponde à $1'$ de variation dans le demi-diamètre de la Lune, et que le demi-diamètre

moyen de cet astre soit de $15^{\circ}45', 1$, on aura

$$-\frac{11}{4}q \frac{\partial r'}{r'} = -6^m 49^s.$$

Les observations nous ont donné $-6^m 50^s$; elles sont donc, à cet égard, parfaitement conformes à la théorie.

XXXI.

Le retard des marées vers les syzygies offre un moyen de déterminer le rapport des forces lunaires et solaires. Pour cela, reprenons l'équation trouvée dans l'article XXVI,

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda) = \frac{\frac{L}{r'^3} \cos^2 v' \sin 2(\varphi' - \varphi)}{\frac{S}{r^3} \cos^2 v + \frac{L}{r'^3} \cos^2 v' \cos 2(\varphi' - \varphi)}.$$

Si l'on nomme μ le retard de la marée du jour même de la syzygie au troisième jour qui la suit, ce retard étant moyen entre le retard des syzygies des équinoxes et celui des syzygies des solstices, cette équation donnera, en observant que l'instant du maximum des marées est à peu près au milieu de l'intervalle que nous considérons,

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\frac{L}{r'^3} \sin U}{\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3} \cos U},$$

μ étant évalué en arc de cercle à raison de $15''$ par heure, et U étant le moyen mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle de la marée du jour de la syzygie à la marée du troisième jour qui la suit. On aura donc

$$\frac{\frac{L}{r'^3}}{\frac{S}{r^3}} = \frac{\operatorname{tang} \mu}{\sin U - \operatorname{tang} \mu \cos U}.$$

Le retard μ est, par l'article XXIX, de $7018^s, 5$ en temps; en le convertissant en degrés, on a

$$\mu = 29^{\circ} 14' 38''.$$

Le moyen mouvement synodique de la Lune dans les syzygies, pendant l'intervalle de trois jours plus $7018^s, 5$ est de $38^{\circ} 16' 25''$: c'est la valeur de U ; on trouvera ainsi, dans les syzygies,

$$\frac{\frac{L}{r'^3}}{\frac{S}{r^3}} = 3,11271.$$

Pour réduire ce rapport des forces lunaire et solaire à la distance moyenne de la Lune à la Terre, il faut le diminuer d'environ $\frac{1}{16}$, à raison de l'argument de la variation; mais il faut l'augmenter ensuite à peu près de $\frac{1}{16}$, par la considération suivante.

Dans l'équation $\frac{dy}{dt} = 0$, qui, par l'article IX, détermine l'instant de la pleine mer, $\frac{S}{r^3}$ est multiplié par $n - m$, mt étant le moyen mouvement du Soleil et $\frac{L}{r'^3}$ est multiplié par $n - m'$, $m't$ étant le moyen mouvement de la Lune. Ainsi le rapport des forces lunaire et solaire, donné par les retards des marées, est celui de $(n - m') \frac{L}{r'^3}$ à $(n - m) \frac{S}{r^3}$; il doit donc être augmenté de sa $\left(\frac{m' - m}{n - m}\right)^{\text{ième}}$ partie, ou d'environ $\frac{1}{16}$, pour donner le rapport véritable de $\frac{L}{r'^3}$ à $\frac{S}{r^3}$. On aura ainsi, par les retards observés des marées syzygies,

$$\frac{\frac{L}{r'^3}}{\frac{S}{r^3}} = 3,13605,$$

ce qui diffère peu du rapport trouvé par les hauteurs des marées dans l'article XXII.

XXXII.

Des heures et des intervalles des marées vers les quadratures.

Reprenons l'équation

$$(A) \quad \operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi - \lambda) = \frac{\frac{L}{r'^3} \cos^2 v' \sin 2(\varphi' - \varphi)}{\frac{S}{r^3} \cos^2 v + \frac{L}{r'^3} \cos^2 v' \cos 2(\varphi' - \varphi)},$$

trouvée dans l'article XXVI. Si l'on y change φ' dans $90^\circ + \varphi'$ ou dans $270^\circ + \varphi'$, elle deviendra

$$\tan 2(nt + \pi - \varphi - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3} \cos^2 v' \sin 2(\varphi' - \varphi)}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v' \cos 2(\varphi' - \varphi) - \frac{S}{r^3} \cos^2 v};$$

l'angle $\varphi' - \varphi$ étant peu considérable vers les quadratures, nous pouvons négliger son cube, ce qui donne

$$nt + \pi - \varphi + 90^\circ - \lambda = \frac{\frac{L}{r^3} (\varphi' - \varphi) \cos^2 v'}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v' - \frac{S}{r^3} \cos^2 v}.$$

$nt + \pi - \varphi$ est l'angle horaire du Soleil; en le réduisant en temps, on aura, pour l'heure de la pleine mer,

$$6^h + T + \frac{\frac{L}{r^3} (\varphi' - \varphi) \cos^2 v'}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v' - \frac{S}{r^3} \cos^2 v}.$$

Dans les quadratures des équinoxes, cette fonction devient, à fort peu près,

$$6^h + T - \frac{\frac{L}{r^3} U' \cos \varepsilon \left(1 + \frac{1}{12} \sin^2 \varepsilon\right)}{15 \left(\frac{L}{r^3} \cos^2 \varepsilon - \frac{S}{r^3}\right)},$$

et, dans les quadratures des solstices, elle devient à peu près

$$6^h + T - \frac{\frac{L}{r^3} U' \cos \varepsilon \left(1 - \frac{1}{12} \tan^2 \varepsilon\right)}{15 \left(\frac{L}{r^3} - \frac{S}{r^3} \cos^2 \varepsilon\right)},$$

U' étant le mouvement synodique de la Lune, depuis l'instant de la pleine mer que l'on considère jusqu'à l'instant du minimum de la marée, où U' est nul. Ce second instant suit la quadrature d'un intervalle constant; ainsi le jour même de la quadrature, l'angle U' est plus petit lorsque la quadrature arrive le matin, que lorsqu'elle arrive à

midi; il est plus grand lorsque cette phase arrive le soir. En prenant donc, pour l'heure moyenne de la marée du jour de la quadrature, celle qui a lieu lorsque la quadrature arrive à midi, l'heure de la marée quadrature doit retarder sur l'heure moyenne lorsque la quadrature arrive le matin; elle doit au contraire avancer lorsque la quadrature arrive le soir. On ramènera donc, à fort peu près, à cette heure moyenne l'instant de la pleine mer d'une quadrature quelconque, en ajoutant à l'heure observée la quantité $\frac{3iU}{15}$, U étant le moyen mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle d'une heure, et i étant le nombre d'heures dont la quadrature suit l'instant du midi. L'angle ε est à peu près de $\frac{1}{2}$ degré, ce qui réduit la quantité précédente à $i.3^m$ (¹), en sorte que l'on doit ajouter ou retrancher de l'heure observée de la marée environ 3 minutes pour chaque heure dont la quadrature suit ou précède l'instant du midi; mais les termes de l'ordre U^2 que nous avons négligés, et qui sont fort sensibles vers les quadratures, diminuent un peu cette correction et la réduisent à $2^m 30^s$, comme nous le verrons bientôt.

Il est clair, par les formules précédentes, que l'heure de la marée des quadratures des solstices doit retarder sur celle des quadratures des équinoxes. En retranchant les expressions analytiques de ces heures et en observant que, $\sin^2 \varepsilon$ étant une petite fraction, on peut négliger les quantités multipliées par $\frac{S}{r^3} \sin^2 \varepsilon$; on trouve que le retard des marées quadratures solsticiales sur les marées quadratures équinoxiales est, à fort peu près, égal à

$$\frac{11}{20} U' \sin \varepsilon \tan \varepsilon.$$

Suivant l'article XXVI, le retard des marées syzygies équinoxiales sur les marées syzygies solsticiales est

$$\frac{U \sin \varepsilon \tan \varepsilon}{20};$$

(¹) En partant de l'expression $\frac{3iU}{15}$, on trouverait $i \frac{3^m}{2}$.

U est un peu plus grand que U', parce que les marées quadratures arrivent plus tard que les marées syzygies; ainsi le retard des marées quadratures solsticiales sur les marées quadratures équinoxiales est environ quadruple du retard des marées syzygies équinoxiales sur les marées syzygies solsticiales, du moins lorsque l'on n'a point égard aux termes de l'ordre U².

XXXIII.

Comparons ces résultats aux observations; pour cela, j'ai ajouté les heures des marées du matin du jour même de la quadrature, dans trente quadratures le plus voisines que j'ai pu choisir des solstices, en considérant à la fois deux quadratures consécutives, et en ramenant, par la règle précédente, ces heures à celles qui auraient eu lieu si la quadrature fût arrivée à midi. J'ai trouvé, pour la somme de ces heures, 258^h38^m, ce qui donne 8^h37^m16^s pour l'heure moyenne de la marée du matin du jour des quadratures vers les solstices.

En ajoutant, de la même manière, les heures de trente marées du matin, le plus voisines que j'ai pu choisir des équinoxes, j'ai trouvé pour leur somme 247^h46^m30^s, ce qui donne 8^h15^m33^s pour l'heure moyenne de la marée du matin, le jour des quadratures vers les équinoxes; cette heure est plus petite que la précédente de 21^m43^s.

Pour confirmer le même résultat par les marées du soir, j'ai ajouté, par le même procédé que ci-dessus, les heures des marées du soir du jour même de la quadrature, dans trente quadratures le plus voisines que j'ai pu choisir des solstices, et j'ai trouvé pour leur somme 273^h46^m30^s, ce qui donne 9^h7^m33^s pour l'heure moyenne de la marée du soir, dans les quadratures vers les solstices.

En ajoutant, de la même manière, les heures des marées du soir dans trente quadratures le plus voisines que j'ai pu choisir des équinoxes, j'ai trouvé pour leur somme 263^h27^m30^s, ce qui donne l'heure moyenne de la marée du soir, dans les quadratures vers les équinoxes, égale à 8^h46^m55^s, plus petite que la précédente de 20^m38^s. Ainsi, le retard de la marée quadrature des solstices sur la marée quadrature des équinoxes est confirmé à la fois par les observations des marées du matin et celles des marées du soir.

noxes est confirmé à la fois par les observations des marées du matin et celles des marées du soir.

La moyenne entre les deux retards donnés par ces observations est 21^m20^s. Par l'article XXVII, le retard des marées du jour de la syzygie vers les équinoxes sur cette même marée vers les solstices, est 5^m1^s. Le retard des marées produit par les déclinaisons des astres est donc, suivant les observations comme par la théorie, environ quatre fois plus grand dans les quadratures que dans les syzygies.

Si l'on prend un milieu entre les heures des marées du matin du jour des quadratures, vers les équinoxes et vers les solstices, on aura pour l'heure moyenne de cette marée 8^h26^m24^s. Pareillement, l'heure moyenne de la marée du soir dans les quadratures est 8^h57^m14^s.

On peut remarquer ici que le retard observé des marées du jour de la quadrature vers les solstices sur les marées du jour de la quadrature vers les équinoxes est à peu près le même par les marées du matin que par celles du soir. Il semble cependant que, suivant la théorie, il doit être d'environ un tiers plus petit dans le second cas que dans le premier, la valeur de U' étant à peu près d'un tiers plus petite. Quoique les causes irrégulières aient une influence très sensible sur les heures des marées quadratures, la différence entre la théorie précédente et les observations me paraît trop considérable pour pouvoir être attribuée uniquement aux erreurs des observations. J'ai soupçonné, en conséquence, que les termes dépendants de U² que j'ai négligés pouvaient diminuer la différence entre les retards donnés par les marées du matin et par celles du soir et les rapprocher de l'égalité et, par conséquent, des observations.

Pour vérifier cette conjecture, j'ai calculé, au moyen de l'équation (A) de l'article précédent, les heures des marées du matin, tant dans les équinoxes que dans les solstices : 1° en supposant le Soleil et la Lune mus dans un plan incliné de 19° à l'équateur; 2° en faisant dans les moyennes distances

$$\frac{L}{r^2} = \frac{3S}{r^2},$$

et en observant que, à raison de l'argument de la variation, $\frac{L}{r^2}$ doit être diminué de $\frac{1}{30}$ dans l'équation (A), et qu'il doit être encore diminué de $\frac{1}{30}$ par l'article XXXI; 3° que les heures moyennes des marées du matin et du soir dans les quadratures sont telles que nous venons de les déterminer par les observations; 4° enfin, que la quadrature arrive à midi et qu'elle précède de 36°30' le minimum des marées. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants :

Équinoxes.	
Heures des marées	
quadratures du soir.	quadratures du matin.
$6^h + T - 2^h 6^m 25^s$	$6^h + T - 1^h 31^m 15^s$
Solstices.	
$6^h + T - 1^h 43^m 22^s$	$6^h + T - 1^h 12^m 54^s$

Le retard des marées quadratures des solstices sur les marées quadratures des équinoxes est donc de 23°3' pour les marées du matin et 18°21' pour les marées du soir. Suivant les observations précédentes, les retards sont de 21°43' et de 20°38'. La différence est dans les limites des erreurs des observations et de la supposition que nous avons faite sur l'angle ε . On voit par les résultats précédents que les retards des marées ne diffèrent que d'environ 4°42' pour le matin et pour le soir, tandis que cette différence, en n'ayant égard qu'aux termes dépendants de la première puissance de U , serait d'environ 7°, d'où il suit que les termes dépendants de U^2 rapprochent ces deux retards de l'égalité.

Suivant les résultats précédents, l'heure moyenne de la marée quadrature du matin est $6^h + T - 1^h 54^m 54^s$, et l'heure moyenne de la marée du soir est $6^h + T - 1^h 22^m 4^s$; elle surpasse ainsi la première de 32°50'. Suivant les observations précédentes, cet excès est de 30°50', ce qui diffère peu du résultat du calcul. On voit en même temps que, pour l'intervalle de douze heures et demie qui sépare les marées quadratures du matin de celles du soir, le retard des marées

est de 32°50', ce qui fait à peu près 2°30' par heure, comme nous l'avons annoncé ci-dessus.

XXXIV.

Si l'on suppose le Soleil et la Lune dans le plan de l'équateur, l'heure de la marée du jour de la quadrature sera

$$6^h + T - \frac{\frac{L}{r^2} U'}{15 \left(\frac{L}{r^2} - \frac{S}{r^3} \right)}.$$

Cette heure varie avec la parallaxe de la Lune; elle retarde dans son apogée, et elle avance dans son périégée. $\delta r'$ étant l'accroissement de r' , le retard de la marée sera

$$\frac{3}{4} \frac{\delta r'}{r'} \frac{U'}{15}.$$

Par l'article XXVIII, le retard de la marée dans les syzygies, dû à la variation de la distance de la Lune, est

$$\frac{33}{16} \frac{\delta r'}{r'} \frac{U}{15}.$$

Ainsi U étant un peu plus grand que U' , ce retard est environ trois fois plus grand dans les syzygies que dans les quadratures. Ce qui augmente encore cet effet de la parallaxe dans les syzygies, c'est que, à raison de l'évection, la variation des distances de la Lune est plus grande dans ces points que dans les quadratures. Il y a même une cause, savoir le retard des marées sur l'heure de la théorie, à mesure qu'elles sont plus grandes, qui rend cet effet de la parallaxe lunaire presque nul dans les quadratures. Ces résultats sont entièrement conformes aux observations des marées.

XXXV.

Il est facile, par l'article XXXII, de déterminer le retard journalier des marées vers la quadrature. Si U' exprime le mouvement synodique

de la Lune dans l'intervalle de l'une des deux marées du jour même de la quadrature à la marée correspondante du troisième jour qui la suit, on trouvera que le retard de la marée de ce troisième jour sur la marée du jour même de la quadrature est plus grand dans les quadratures des équinoxes que dans celles des solstices, et que la différence est à fort peu près égale à

$$\frac{13}{3} U' \sin \varepsilon \tan \varepsilon$$

Par l'article XXIX, la différence de ces retards dans les syzygies est

$$\frac{U \sin \varepsilon \tan \varepsilon}{20},$$

elle est donc environ quatre fois moindre dans les syzygies que dans les quadratures. Voyons ce que les observations donnent à ce sujet.

J'ai ajouté la somme des retards des marées, depuis la marée du matin du jour même de la quadrature jusqu'à la troisième marée correspondante qui la suit, dans trente quadratures le plus voisines que j'ai pu choisir des solstices, en ayant toujours soin de considérer deux quadratures consécutives; j'ai trouvé $98^h 26^m 0^s$ pour la somme de ces retards, ce qui donne $3^h 16^m 52^s$ pour le retard moyen.

J'ai ajouté pareillement les retards des marées, depuis la marée du matin du jour même de la quadrature jusqu'à la troisième marée correspondante qui la suit, dans trente-deux quadratures le plus voisines que j'ai pu choisir des équinoxes, et j'ai trouvé $131^h 19^m 30^s$ pour la somme de ces retards, ce qui donne $4^h 6^m 14^s$ de retard moyen, plus grand que le précédent de $49^m 22^s$.

La somme des retards des marées du soir, considérées de la même manière dans vingt-six observations des quadratures le plus voisines que j'ai pu choisir des solstices, a été de $86^h 47^m 30^s$, ce qui donne $3^h 20^m 17^s$ de retard moyen.

La somme de ces retards dans vingt-huit observations des quadratures le plus voisines que j'ai pu choisir des équinoxes a été de

$115^h 16^m 30^s$, ce qui donne $4^h 7^m 10^s$ de retard moyen, plus grand que le précédent de $46^m 53^s$; ainsi l'accroissement du retard des marées des quadratures par les déclinaisons de la Lune est à la fois prouvé par les observations des marées du matin et par celles des marées du soir.

En prenant un milieu entre les cinquante-six observations précédentes du matin et du soir vers les solstices, on a $3^h 18^m 27^s, 32$ pour le retard moyen de la marée du jour de la quadrature vers les solstices à la troisième marée correspondante qui la suit.

En prenant un milieu entre les soixante observations précédentes du matin et du soir vers les équinoxes, on a $4^h 6^m 36^s, 00$ pour le retard moyen, qui surpasse le précédent de $48^m 8^s, 68$.

Nous venons de voir que l'excès du retard des marées syzygies vers les solstices sur le retard des mêmes marées vers les équinoxes, en considérant l'intervalle de la marée du jour même de la syzygie à la marée correspondante du troisième jour qui la suit, doit être à peu près le quart de $48^m 8^s, 68$, et par conséquent d'environ 12^m . Par l'article XXIX, cet excès est de $13^m 41^s$; la différence est dans les limites des erreurs des observations.

Le milieu entre les retards précédents des marées quadratures, tant vers les équinoxes que vers les solstices, est $3^h 42^m 31^s, 66$, ce qui donne $1^h 14^m 10^s$ pour le retard journalier des marées, près de leur minimum.

Les marées périgées avancent et les marées apogées retardent dans les quadratures comme dans les syzygies; mais, par les observations, ce phénomène est beaucoup moins sensible dans les quadratures que dans les solstices, ce qui est conforme à la théorie, comme l'on peut facilement s'en convaincre par l'analyse de l'article précédent. Pour m'assurer de cette conformité, j'ai ajouté dans onze quadratures, dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune était au-dessous de $15'$, les retards des marées, depuis les marées tant du matin que du soir, du jour même de la quadrature, jusqu'aux troisièmes marées correspondantes qui les suivent, et j'ai trouvé $78^h 24^m$ pour la somme de ces retards. J'ai ajouté pareillement dans les onze quadratures correspon-

dantes dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune était au-dessus de 16', les retards des marées, tant du matin que du soir, depuis le jour même de la quadrature jusqu'aux troisièmes marées correspondantes qui les suivent, et j'ai trouvé 81^h 26^m pour la somme de ces retards. La somme des demi-diamètres lunaires dans les onze premières quadratures était de 163' 12", et dans les onze dernières quadratures cette somme était de 176' 44"; ainsi 13' 32" d'accroissement dans la somme de ces demi-diamètres ont produit 3^h 26^m d'accroissement dans la somme de ces retards, d'où il est aisé de conclure qu'une minute d'accroissement dans le demi-diamètre lunaire augmente de 134' le retard de la marée, depuis la marée du jour de la quadrature jusqu'à la troisième marée correspondante qui la suit. Par l'analyse de l'article précédent, cet accroissement ne doit être que le tiers du même accroissement dans les marées syzygies, accroissement que nous avons trouvé dans l'article XXX de 410', dont le tiers, 137', diffère très peu de 134'; ainsi la théorie est parfaitement d'accord avec les observations sur cet objet.

XXXVI.

Le retard des marées vers les quadratures offre un nouveau moyen de déterminer le rapport des forces lunaire et solaire. Pour cela, reprenons l'équation trouvée dans l'article XXXII

$$\tan 2(nt + m - \varphi - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3} \cos^2 v' \sin 2(\varphi' - \varphi)}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v' \cos 2(\varphi' - \varphi) - \frac{S}{r^3} \cos^2 v}$$

Si l'on nomme μ le retard de la marée du jour de la quadrature à la troisième marée correspondante qui la suit, ce retard étant moyen entre les retards vers les quadratures des équinoxes et vers les quadratures des solstices, l'équation précédente donnera

$$\tan \mu = \frac{\frac{L}{r^3} \sin U'}{\frac{L}{r^3} \cos U' - \frac{S}{r^3}}$$

μ étant évalué en arc de cercle, à raison de 15° par heure, et U' étant le moyen mouvement synodique de la Lune, dans l'intervalle de la marée du jour de la quadrature à la troisième marée correspondante qui la suit. L'équation précédente est d'autant plus exacte que le minimum de la marée tombe à peu près au milieu de cet intervalle. On aura donc

$$\frac{\frac{L}{r^3}}{\frac{S}{r^3}} = \frac{\tan \mu}{\tan \mu \cos U' - \sin U'}$$

Le retard μ est, par l'article précédent, de 3^h 42^m 31^s, 66; en le convertissant en degrés, à raison de 15° par heure, on aura

$$\mu = 55^\circ 37' 55''.$$

U' est le moyen mouvement synodique de la Lune vers les quadratures, dans l'intervalle de 3^h 3^m 42^m 32^s; d'où l'on conclut, en ayant égard à l'argument de la variation,

$$U' = 37^\circ 43' 45''.$$

ce qui donne

$$\frac{\frac{L}{r^3}}{\frac{S}{r^3}} = 2,6852.$$

Pour réduire ce rapport à la distance moyenne de la Lune à la Terre, il faut l'augmenter d'environ $\frac{1}{100}$, à cause de l'argument de la variation qui, dans les quadratures, augmente la distance lunaire. Il faut ensuite augmenter le nouveau rapport que l'on trouvera d'environ $\frac{1}{100}$, par la considération que nous avons faite à la fin de l'article XXXI; on aura ainsi, par les retards des marées quadratures,

$$\frac{\frac{L}{r^3}}{\frac{S}{r^3}} = 2,8440.$$

Les retards des marées syzygies nous ont donné, dans l'article XXXI,

3,1360 pour ce même rapport. En prenant un milieu entre ces deux rapports, on aura, par les retards des marées, tant vers les syzygies que vers les quadratures,

$$\frac{L}{\frac{L}{r^3}} = 2,99000,$$

ce qui diffère très peu du rapport 3,0007 trouvé dans l'article XXII par les hauteurs des marées. Le milieu entre ces deux derniers rapports est 2,9954; ainsi toutes les observations des hauteurs et des intervalles des marées nous conduisent à regarder la force lunaire comme étant triple à très peu près de la force solaire.

XXXVII.

Le rapport des forces du Soleil et de la Lune est important, non seulement dans la théorie des marées, mais encore dans l'Astronomie, en ce qu'il influe sur les phénomènes de la précession, de la nutation et sur l'équation lunaire des Tables du Soleil. Newton l'a fait égal à 4,4815, d'après les observations des hauteurs des marées; M. Daniel Bernoulli, dans sa pièce sur le flux et le reflux de la mer, l'a réduit à $\frac{2}{3}$, d'après les retards observés des marées vers les syzygies. Si l'on fait, avec Bradley, la nutation de l'axe terrestre de 9'', ce rapport doit être supposé égal à 2. En discutant avec un soin particulier la collection nombreuse des observations des marées faites à Brest au commencement de ce siècle, nous avons été conduits, par les deux moyens que Newton et M. Daniel Bernoulli ont employés séparément, au rapport de 3 à 1, pour celui des forces de la Lune et du Soleil. Ce rapport peut donc être regardé comme fort approché. Pour que l'on puisse juger de son degré d'approximation, nous allons déterminer, suivant les quatre rapports 2, $\frac{2}{3}$, 3, 4, les retards μ des marées dans les syzygies et dans les quadratures, du jour même de la phase au troisième jour qui la suit, et le minimum de leur hauteur,

en supposant leur maximum de 19^h, 249, comme nous l'avons trouvé dans l'article XIII.

TABLE VI.

Rapport de la force de la Lune à celle du Soleil.	Valeur de μ		Minimum de la marée totale.
	dans les syzygies.	dans les quadratures.	
2.....	h m 1.42 $\frac{1}{2}$	h m 4.28	p ⁱ 5,996
$\frac{2}{3}$	1.50	3.56 $\frac{1}{2}$	7,767
3.....	1.55 $\frac{1}{2}$	3.38	9,093
4.....	2. 3 $\frac{1}{2}$	3.17 $\frac{1}{2}$	10,946
Par les observations....	1.57	3.42 $\frac{1}{2}$	9,108

On voit par cette Table que les rapports 2, $\frac{2}{3}$ et 4 donnent des résultats si éloignés des observations, qu'il est impossible de les admettre, tandis que le rapport de 3 à 1 s'en approche beaucoup. La valeur observée de μ dans les syzygies semble l'indiquer un peu plus grand; mais cette valeur observée dans les quadratures l'indique plus petit, en sorte qu'il paraît n'avoir besoin d'aucune correction sensible. Voyons maintenant ce qui résulte de ce rapport pour les phénomènes de la précession et de la nutation.

Si l'on suppose la nutation totale de l'axe terrestre égale à $g'(1+\gamma)$, on aura

$$\frac{L}{\frac{L}{r^3}} = \frac{103189(1+\gamma)}{154143}.$$

[Voir les *Mémoires de l'Académie* pour l'année 1783, p. 24 (').]

En supposant donc $\frac{L}{r^3} = \frac{3S}{r^3}$, on trouvera 10'',083 pour la nutation de l'axe terrestre, en sorte qu'il faut porter à une seconde entière l'augmentation de $\frac{1''}{2}$ que plusieurs astronomes ont déjà faite au résultat de Bradley.

L'équation totale de la précession se détermine en divisant le double de la nutation totale par la tangente du double de l'obliquité de l'éclip-

(1) *Oeuvres de Laplace*, T. XI, p. 27.

tique, ce qui donne $18^{\circ},844$ pour l'équation de la précession. Si l'on nomme i le rapport du moyen mouvement sidéral de la Lune à celui du Soleil, et T la masse de la Terre, on a

$$\frac{L}{T} = \frac{3}{i^2 - 3},$$

d'où l'on tire

$$\frac{L}{T} = \frac{1}{58,57},$$

c'est-à-dire que la masse de la Lune est environ $\frac{1}{58}$ de celle de la Terre.

Le coefficient de l'équation lunaire des Tables du Soleil est

$$\frac{L}{L+T} \frac{r'}{r},$$

Si l'on suppose la parallaxe de la Lune de $57'$ dans les moyennes distances, et celle du Soleil de $8'',8$, on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{8'',8}{57'};$$

on aura ainsi $8'',9$ pour l'équation lunaire des Tables du Soleil.

Nous devons cependant observer ici que le rapport de $\frac{L}{T}$ à $\frac{S}{T}$ donné par les phénomènes des marées peut n'être pas exactement le même que celui qui doit être employé dans le calcul de la précession et de la nutation, car on a vu dans l'article VI que la masse L de la Lune doit être augmentée dans le rapport de B' à B dans le calcul des phénomènes des marées. Ce dernier rapport étant inconnu, la masse L ne peut être encore exactement déterminée par ces phénomènes; mais il est aisé de voir que ce rapport doit être fort peu différent de l'unité, en sorte que la masse L de la Lune conclue des phénomènes des marées peut être regardée comme étant fort approchée.

XXXVIII.

La différence des heures des marées des quadratures et des syzygies offre un nouveau moyen pour déterminer le temps dont la syzygie et

la quadrature précèdent le maximum et le minimum des marées. Pour cela, nommons a et a' les heures des marées du matin et du soir dans les syzygies; nommons pareillement b et b' les heures des marées du matin et du soir dans les quadratures; l'heure de la marée du matin dans les syzygies sera, par l'article XXVI, exprimée par la formule

$$T - K(\zeta + 12^h - a),$$

K étant égal à $\frac{h}{3d+h}$, et h étant le retard des marées du jour même de la syzygie au troisième jour qui la suit.

On aura donc

$$T - K(\zeta + 12^h - a) = a.$$

L'heure de la marée du matin dans les quadratures sera, par l'article XXXII, exprimée par la formule

$$6^h + T - K'(\zeta + 12^h - b),$$

K' étant égal à $\frac{h'}{3d+h'}$, et h' étant le retard des marées du jour même de la quadrature au troisième jour qui la suit; on aura donc

$$6^h + T - K'(\zeta + 12^h - b) = b.$$

En retranchant de cette équation la précédente, on aura

$$6^h = b - a - K(\zeta + 12^h - a) + K'(\zeta + 12^h - b).$$

La comparaison des deux marées du soir dans les syzygies et dans les quadratures donne pareillement

$$6^h = b' - a' - K(\zeta - a') + K'(\zeta - b').$$

Pour conclure avec précision, de ces deux équations, la valeur de ζ , on les ajoutera l'une à l'autre, et l'on tirera de leur somme

$$(o) \quad \zeta = \frac{12^h + a + a' - b - b' + K(12^h - a - a') - K'(12^h - b - b')}{2(K' - K)}.$$

On a, par les articles XXVII et XXXIII,

$$a = 3^h 20^m 30^s,$$

$$a' = 3^h 38^m 38^s,$$

$$b = 8^h 26^m 24^s,$$

$$b' = 8^h 57^m 14^s.$$

On a de plus, par les articles XXIX et XXXV,

$$h = 1^h 56^m 58^s, 5,$$

$$h' = 3^h 42^m 31^s, 7.$$

On trouvera, cela posé,

$$\zeta = 43^h 56^m 18^s.$$

Si l'on prend un milieu entre les valeurs de ζ données par les hauteurs des marées dans les articles XIII et XXII, on a

$$\zeta = 36^h 47^m.$$

La différence de cette valeur de ζ à la précédente est trop considérable pour pouvoir être attribuée aux erreurs des observations, surtout si l'on considère le peu de différence des valeurs de ζ données par les hauteurs des marées syzygies et par celles des marées quadratures.

En considérant l'équation (o), on voit que, pour diminuer la valeur de ζ , il suffit de supposer que l'heure des marées syzygies, à Brest, retarde de quelques minutes sur l'heure déterminée par la théorie, en partant de l'heure observée des marées quadratures. Or il est fort probable que plus les marées sont grandes à Brest, plus elles retardent sur l'heure donnée par la théorie. On conçoit, en effet, que l'entrée de la rade étant fort étroite relativement à son étendue, les grandes marées doivent employer plus de temps que les petites marées à se former dans le port. Peut-être encore les fortes marées emploient plus de temps que les faibles à parvenir dans nos ports. Si l'on nomme x ce retard des marées syzygies sur les marées quadratures, il faudra diminuer chacune des valeurs de a et de a' , données

par l'observation, de la quantité x , ce qui diminue de $\frac{(1-K)x}{K'-K}$ la valeur $43^h 56^m 18^s$ de ζ donnée par les intervalles des marées. Pour réduire cette valeur à $36^h 47^m$, il faut supposer $x = 9^m, 9754$, et alors les valeurs de ζ , données par les hauteurs et par les intervalles des marées, s'accordent entre elles.

Ce retard d'environ 10^m des marées syzygies sur les marées quadratures est confirmé par les observations des marées périgées et apogées, et il m'a donné l'explication d'un phénomène que m'ont présenté les marées de la Table III, article XVII. J'ai pris dans cette Table la somme des heures des marées syzygies, dans lesquelles le demi-diamètre lunaire surpasse $16'$, le matin et le soir du jour même de la syzygie et du troisième jour qui la suit, en réduisant ces heures à ce qu'elles auraient été si la syzygie fût arrivée à midi. Je n'ai point considéré la première syzygie de cette Table, parce que les marées du troisième jour n'ont point été observées dans la syzygie correspondante. J'ai trouvé pour la somme de ces heures :

Jour de la syzygie.		Troisième jour après la syzygie.	
Matin.	Soir.	Matin.	Soir.
35 ^h 28 ^m	39 ^h 29 ^m	60 ^h 13 ^m	64 ^h 2 ^m

J'ai pris les sommes des heures des marées correspondantes dans lesquelles le demi-diamètre lunaire est au-dessous de $15'$, en ne considérant point la seconde syzygie de la Table, et j'ai trouvé pour la somme de ces heures :

Jour de la syzygie.		Troisième jour de la syzygie.	
Matin.	Soir.	Matin.	Soir.
38 ^h 53 ^m	41 ^h 36 ^m	56 ^h 10 ^m	59 ^h 13 ^m 30 ^s

En retranchant les sommes relatives aux marées périgées des sommes correspondantes relatives aux marées apogées, on a les quatre différences

$$205^m, \quad 127^m, \quad -243^m, \quad -288^m, 5.$$

Ces différences doivent être, par l'article XXVIII, proportionnelles

aux intervalles du maximum des marées aux heures des marées qui leur correspondent. Soit donc ζ l'intervalle du maximum de la marée à l'heure de la syzygie supposée arriver à midi. L'heure de la marée du matin à Brest étant $3^h 26^m 30^s$ le jour de la syzygie, la distance du maximum à cette marée du matin est

$$\zeta + 12^h - 3^h 26^m 30^s.$$

L'heure de la marée du soir du même jour étant $3^h 38^m 38^s$, la distance du maximum à cette heure sera

$$\zeta - 3^h 38^m 38^s.$$

On a vu, dans l'article XXIX, qu'il faut ajouter $1^h 56^m 58^s$ aux heures des marées du jour de la syzygie pour avoir les heures correspondantes des marées du troisième jour qui la suit. On aura ainsi

$$65^h 17^m 28^s - \zeta \quad \text{et} \quad 77^h 35^m 36^s - \zeta$$

pour les distances du maximum, aux heures des marées du matin et du soir du troisième jour après la syzygie.

Les quatre nombres 205^m , 127^m , 243^m , $288^m, 5$ doivent donc être proportionnels aux quatre suivants :

$$\zeta + 8^h 29^m 30^s, \quad \zeta - 3^h 38^m 38^s, \quad 65^h 17^m 28^s - \zeta, \quad 77^h 35^m 36^s - \zeta;$$

mais, comme les erreurs des observations empêchent que ces proportions n'aient lieu exactement, nous en composerons une proportion moyenne, en faisant la somme des quatre premiers de ces huit nombres, qui est à la somme du troisième et du quatrième, moins la somme du premier et du second, comme la somme des quatre derniers est à la somme du septième et du huitième, moins la somme du cinquième et du sixième, ce qui donne

$$(p) \quad 863^m, 5 : 199^m, 5 :: 8873^m, 9 : 8272^m, 2 - 4\zeta,$$

d'où l'on tire

$$\zeta = 25^h 55^m, 5.$$

Cette valeur de ζ s'éloigne trop du résultat $36^h 47^m$ donné par les hau-

teurs des marées, pour que la différence puisse être attribuée aux erreurs des observations; il est assez remarquable qu'elle soit au-dessous de ce résultat, tandis que la valeur de ζ donnée par les intervalles des marées syzygies est au-dessus. Voyons si la même cause, au moyen de laquelle nous avons rapproché la valeur de ζ donnée par les intervalles des marées syzygies et quadratures du résultat $36^h 47^m$, rapproche de ce même résultat la valeur de ζ donnée par les intervalles des marées périgées et apogées.

Les marées périgées doivent, en vertu de cette cause, retarder sur les marées apogées; il est très naturel de supposer que ce retard est à celui des marées syzygies sur les marées quadratures comme l'excès des marées périgées sur les marées apogées est à l'excès des marées syzygies sur les marées quadratures. Nous venons de trouver le retard des marées syzygies sur les marées quadratures égal à $9^m, 9754$. L'excès moyen des marées périgées sur les marées apogées de la Table III est $5^m, 094$. L'excès des marées syzygies sur les marées quadratures est, par les Tables II et V, égal à $7^m, 384$; en nommant donc x^m le retard des marées périgées de la Table III sur les marées apogées correspondantes, dépendant de cette cause, on aura

$$x^m : 9^m, 9754 :: 5^m, 094 : 7^m, 384,$$

d'où l'on tire

$$x^m = 6^m, 882.$$

Il faut ainsi retrancher $11x^m$ ou $75^m, 7$ des quatre nombres

$$35^h 28^m, \quad 39^h 29^m, \quad 60^h 13^m, \quad 64^h 2^m,$$

et alors la proportion (p) se change dans celle-ci

$$863^m, 5 : -103^m, 29 :: 8873^m, 9 : 8272^m, 2 - 4\zeta,$$

ce qui donne

$$\zeta = 38^h 53^m.$$

Ce résultat se rapproche assez du résultat $36^h 47^m$ donné par les hauteurs des marées, pour que la différence soit dans les limites des erreurs des observations. Il confirme en même temps ce que nous

avons dit : savoir, que les hautes marées, à Brest, retardent sur l'heure déterminée par la théorie.

Le retard des marées périgées sur les marées apogées, dû aux circonstances locales, est le même pour les marées qui précèdent et pour celles qui suivent le maximum; il ne doit donc point influer sur le retard des marées du jour de la syzygie au troisième jour qui la suit, et nous devons, à cet égard, retrouver, par les observations, les résultats de la théorie.

Dans les marées périgées précédentes, la somme des marées du matin et du soir du troisième jour après la syzygie sur les marées du matin et du soir du jour de la syzygie est $49^h 18^m$.

Dans les marées apogées précédentes, la somme des retards des marées du matin et du soir du troisième jour après la syzygie sur les marées du matin et du soir du jour de la syzygie n'est que de $34^h 54^m, 5$, plus petite que la précédente de $14^h 23^m, 5$; nous nommerons (A) cette différence.

Suivant la théorie donnée dans l'article XXX, si l'on nomme q la demi-somme des retards, tant dans les marées périgées que dans les marées apogées, et α l'excès des demi-diamètres lunaires périgées sur les demi-diamètres lunaires apogées, divisé par la demi-somme des demi-diamètres, tant périgées qu'apogées, on aura $\frac{1}{2}\alpha q$ pour la différence (A). La Table III donne $21' 9''$ pour l'excès des onze demi-diamètres périgées sur les onze demi-diamètres apogées, et $173' 22''$ pour la demi-somme de vingt-deux demi-diamètres lunaires, ce qui donne

$$\alpha = \frac{21' 9''}{173' 22''},$$

on a, de plus, $q = 42^h 6^m, 2$, d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}\alpha q = 14^h 7^m, 5 = (A).$$

La différence de cette valeur (A) à la valeur observée, $14^h 23^m, 5$, est très petite et dans les limites des erreurs des observations; nous retrouvons donc ici le même accord que nous avons déjà trouvé, dans l'article XXX, sur le même objet.

Il suit, de ce que nous venons de voir, que l'on peut fixer, à très peu près, à $36^h 30^m$ le temps dont le maximum de la marée suit la syzygie à Brest. Ce temps détermine celui dont la marée solaire suit, dans ce port, le passage du Soleil au méridien; il détermine encore le temps dont la marée lunaire suit le passage de la Lune au méridien. En effet, T étant l'heure du maximum de la marée à Brest, on a, par ce qui précède, les quatre équations suivantes :

$$T - K (\zeta + 12^h - a) = a,$$

$$T - K (\zeta - a') = a',$$

$$6^h + T - K' (\zeta + 12^h - b) = b,$$

$$6^h + T - K' (\zeta - b') = b'.$$

En réunissant ces quatre équations, on aura

$$T = \frac{a + a' + b + b'}{4} + (K + K') \left(\frac{1}{2} \zeta + 3^h \right) - \frac{K}{4} (a + a') - \frac{K'}{4} (b + b') - 3^h;$$

en supposant ensuite $\zeta = 36^h 30^m$, on aura

$$T = 4^h 26^m 13^s.$$

Aux instants du maximum et du minimum de la marée, les marées lunaires et solaires coïncident; ainsi la marée solaire, à Brest, suit le passage du Soleil au méridien de $4^h 26^m 13^s$; et, si le Soleil agissait seul sur la mer, l'heure moyenne des marées, dans ce port, serait la même le matin et le soir, et de $4^h 26^m 13^s$.

Pour avoir le temps dont la marée lunaire suit le passage de la Lune au méridien, nous observerons que le maximum de la marée ayant lieu $36^h 30^m$ après la syzygie, la Lune est alors éloignée du Soleil dans l'écliptique de $18^\circ 32' 25''$. Le Soleil est, au même instant, éloigné du méridien de $66^\circ 33' 15''$; ainsi la Lune n'est éloignée du méridien que de $48^\circ 0' 50''$. L'instant moyen de la marée lunaire, à Brest, a donc lieu à $3^h 12^m 3^s$ lunaires, c'est-à-dire que, si la Lune agissait seule sur la mer, les marées arriveraient à $3^h 12^m 3^s$ lunaires ou à $3^h 18^m 48^s$ solaires après le passage de cet astre au méridien.

XXXIX.

Expression générale des hauteurs des marées à Brest.

Nous pouvons maintenant, au moyen des recherches précédentes, déterminer, relativement au port de Brest, toutes les arbitraires que renferme l'expression de la hauteur y de la mer, trouvée dans l'article VIII, et nous aurons la formule suivante :

$$\begin{aligned} y = & -0^{\text{h}} 0860 [p^2 (1 - 3 \sin^2 v) + 3p'^2 (1 - 3 \sin^2 v')] \\ & + 0^{\text{h}} 2211 [p^2 \sin v \cos v \cos(v - 53^{\circ} 33')] \\ & + 3p'^2 \sin v' \cos v' \cos(v + \varphi - \varphi' - 53^{\circ} 33')] \\ & + 2^{\text{h}} 4061 [p^2 \cos^2 v \cos 2(v - 66^{\circ} 33')] \\ & + 3p^2 \cos^2 v' \cos 2(v + \varphi - \varphi' - 66^{\circ} 33')]. \end{aligned}$$

Dans cette formule : 1° v est l'angle horaire du Soleil, c'est-à-dire l'angle que cet astre a décrit par son mouvement diurne, depuis son passage par le méridien supérieur jusqu'à l'instant pour lequel on calcule. 2° Les angles v , v' et $\varphi' - \varphi$ sont relatifs à l'instant qui précède de $36^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ celui que l'on considère; les déclinaisons boréales sont supposées positives, et les déclinaisons australes, négatives. 3° p est le rapport du demi-diamètre du Soleil, relatif à l'instant qui précède de $36^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ celui que l'on considère, à son demi-diamètre moyen; p' est le même rapport pour la Lune.

Les causes diverses qui modifient les oscillations de la mer sur les côtes empêchent la formule précédente de représenter exactement les observations. Ainsi l'instant de la basse mer déterminé par cette formule diffère d'environ 7^{m} à 8^{m} de l'instant observé, parce que la mer emploie 15^{m} de plus à descendre qu'à monter. On corrige cette différence, en augmentant d'environ $7^{\text{m}}, 5$ l'instant calculé de la basse mer.

Les causes dont nous venons de parler élèvent, à Brest, le niveau de la mer un peu plus dans les syzygies que dans les quadratures; elles retardent encore les marées à raison de leur grandeur; mais on

corrige à très peu près ce retard, en ajoutant ou en retranchant de l'heure de la marée, déterminée par la formule précédente, $1^{\text{m}} 20^{\text{s}}$ pour chaque pied dont la marée totale calculée par la même formule sera plus grande ou plus petite que 14 pieds.

XL.

Pour compléter la théorie des marées, il nous reste à donner des Tables, au moyen desquelles on puisse facilement déterminer l'heure des marées.

Dans nos ports de France, et généralement dans tous ceux dans lesquels la différence des deux marées d'un même jour dans les solstices est peu considérable relativement à la hauteur entière des marées, on peut concevoir que les phénomènes sont les mêmes qu'à l'extrémité d'un canal, à l'embouchure duquel les marées lunaires et solaires auraient lieu au moment du passage des astres au méridien, et emploieraient un intervalle de temps ζ à parvenir à son extrémité supposée plus orientale d'un nombre c d'heures que son embouchure. Nous venons de voir que, à Brest, ζ est de $36^{\text{h}} 30^{\text{m}}$, et il paraît que cette valeur est à peu près la même dans nos ports. Quant à la valeur de c qui, pour Brest, est de $3^{\text{h}} 56^{\text{m}} 13^{\text{s}}$, elle est fort variable dans les différents ports. Lorsque ζ est connu, les observations des heures des marées, dans les syzygies et dans les quadratures, donneront, par l'article XXXVIII, la valeur de T ou le temps dont la marée solaire suit le passage du Soleil au méridien; en nommant ensuite q le reste de la division de ζ par 12, on aura

$$c = T - q.$$

Maintenant, si l'on connaît l'heure des marées à l'embouchure du canal, en l'augmentant de $\zeta + c$, on aura ces phénomènes dans le port; il ne s'agit donc que de former une Table qui donne l'heure des marées dans un lieu où les marées partielles arrivent au moment du passage des astres au méridien. Si l'on nomme h le demi-diamètre du Soleil, H son demi-diamètre moyen, h' et H' les mêmes quantités pour

la Lune, on aura, par ce qui précède, au moment de la pleine mer,

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi') = \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^3 \cos^2 v \sin 2(\varphi - \varphi')}{2,89841 \left(\frac{h'}{H'}\right)^3 \cos^2 v' + \left(\frac{h}{H}\right)^3 \cos^2 v \cos 2(\varphi - \varphi')}$$

Pour réduire en Table la valeur de $nt + \varpi - \varphi'$, relativement aux diverses valeurs de $\varphi - \varphi'$, h , v , h' , v' , nous observerons que l'on peut simplifier l'expression de $\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi')$, en corrigeant les demi-diamètres h et h' de cette manière. On formera une Table des valeurs de la quantité

$$(Z) \quad \frac{2,89841 H' + H}{3,89841} (1 - \sqrt{\cos^2 v}),$$

de degré en degré, depuis $v = 0$ jusqu'à $v = 30^\circ$. Voici cette Table, dans laquelle le demi-diamètre moyen H' de la Lune est de $15'43'',5$, et le demi-diamètre moyen H du Soleil est de $16'1'',5$.

TABLE VII.

v .	Z .	v .	Z .	v .	Z .
1.....	0,10	11.....	11,65	21.....	42,46
2.....	0,38	12.....	13,86	22.....	46,60
3.....	0,87	13.....	16,27	23.....	50,94
4.....	1,54	14.....	18,97	24.....	55,46
5.....	2,41	15.....	21,66	25.....	60,19
6.....	3,47	16.....	24,65	26.....	65,10
7.....	4,72	17.....	27,82	27.....	70,21
8.....	6,16	18.....	31,19	28.....	75,51
9.....	7,80	19.....	34,76	29.....	81,01
10.....	9,63	20.....	38,51	30.....	86,70

On corrigera, au moyen de cette Table, le demi-diamètre h du Soleil, en en retranchant la quantité qui, dans la Table, répond à la déclinaison v du Soleil. On corrigera pareillement le demi-diamètre h' de la Lune, en retranchant la quantité qui, dans la Table, répond à la déclinaison de la Lune; on aura ainsi, à fort peu près,

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi') = \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^3 \sin 2(\varphi - \varphi')}{2,89841 \left(\frac{h'}{H'}\right)^3 + \left(\frac{h}{H}\right)^3 \cos 2(\varphi - \varphi')}$$

h et h' étant ici les demi-diamètres du Soleil et de la Lune, corrigés par ce qui précède. Les déclinaisons du Soleil et de la Lune disparaissent ainsi de l'expression de $\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi')$. A la rigueur, il faudrait retrancher du demi-diamètre du Soleil la quantité $h(1 - \sqrt{\cos^2 v})$; mais, cette quantité étant fort petite et la valeur de h différant très peu de $\frac{2,89841 H' + H}{3,89841}$, on peut, sans erreur sensible, substituer pour h cette valeur dans la quantité précédente. On doit appliquer la même réflexion à la correction du demi-diamètre de la Lune; et, comme l'influence de cet astre sur l'heure des marées est à celle du Soleil dans le rapport de 2,89841 à l'unité, j'ai employé les demi-diamètres H et H' , suivant ce rapport, dans le coefficient

$$\frac{2,89841 H' + H}{3,89841}.$$

Si l'on divise le numérateur et le dénominateur de l'expression de $\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi')$ par $\left(\frac{h}{H}\right)^3$, et si l'on considère que la différence des $\frac{h'H}{hH'}$ à $\frac{H + h' - h}{H'}$ est $\frac{(H - h)(h' - h)}{hH'}$ et qu'elle peut être négligée, vu la petitesse des deux facteurs $H - h$ et $h' - h$, on aura

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi') = \frac{\sin 2(\varphi - \varphi')}{2,89841 \left(\frac{H + h' - h}{H'}\right)^3 + \cos 2(\varphi - \varphi')}$$

expression dans laquelle, au lieu des cinq variables h , v , h' , v' et $\varphi - \varphi'$, il n'y a plus que deux variables $\varphi - \varphi'$ et $h' - h$.

On réduira en Table l'arc $nt + \varpi - \varphi'$, en déterminant, au moyen de l'équation précédente, cet arc depuis $\varphi - \varphi' = 0$ jusqu'à $\varphi - \varphi' = 90^\circ$. Pour cela, on fera, depuis $\varphi - \varphi' = 0$ jusqu'à $\varphi - \varphi' = 45^\circ$,

$$\cos 2A = \frac{\cos 2(\varphi - \varphi')}{2,89841 \left(\frac{H + h' - h}{H'}\right)^3},$$

et l'on aura

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \varphi') = \frac{\sin 2(\varphi - \varphi')}{5,79682 \left(\frac{H + h' - h}{H'}\right)^3 \cos^2 A}.$$

120 MÉMOIRE SUR LE FLUX ET REFLUX DE LA MER.

En changeant dans cette valeur $\cos^2 A$ en $\sin^2 A$, on aura la valeur de $\tan^2(nt + \varpi - \varphi')$, correspondante à $90^\circ - (\varphi - \varphi')$.

Voici présentement la Table dont nous venons de parler, calculée de 5° en 5° dans les sept suppositions de $h' - h = -120''$, $= -80''$, $= -40''$, $= 0$, $= 40''$, $= 80''$, $= 120''$.

TABLE VIII.

ARGUMENT. Ascension droite du Soleil, moins celle de la Lune.	Angle horaire de la Lune à l'instant de la pleine mer, lorsque $h' - h = 0$.	Ce qu'il faut ajouter à cet angle, lorsque			Ce qu'il faut retrancher de cet angle, lorsque		
		$h' - h = -120''$	$h' - h = -80''$	$h' - h = -40''$	$h' - h = 120''$	$h' - h = 80''$	$h' - h = 40''$
		$h' - h = 0$	$h' - h = 0$	$h' - h = 0$	$h' - h = 0$	$h' - h = 0$	$h' - h = 0$
0	180	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	175	1.14	0.7	0.15	0.24	0.7	0.13
10	170	2.26	0.15	0.31	0.49	0.13	0.25
15	165	3.37	0.22	0.47	1.14	0.20	0.38
20	160	4.46	0.29	1.2	1.39	0.27	0.51
25	155	5.50	0.37	1.19	2.5	0.33	1.3
30	150	6.49	0.45	1.36	2.33	0.39	1.15
35	145	7.42	0.53	1.53	3.0	0.46	1.27
40	140	8.27	1.0	2.9	3.27	0.53	1.39
45	135	9.2	1.8	2.26	3.55	0.59	1.50
50	130	9.24	1.15	2.42	4.24	1.6	2.0
55	125	9.31	1.21	2.56	4.51	1.9	2.7
60	120	9.19	1.25	3.9	5.14	1.11	2.10
65	115	8.46	1.27	3.14	5.28	1.11	2.9
70	110	7.48	1.23	3.9	5.27	1.6	2.0
75	105	6.24	1.13	2.50	4.59	0.57	1.43
80	100	4.34	0.56	2.11	3.56	0.43	1.16
85	95	2.23	0.30	1.12	2.13	0.23	0.41
90	90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

L'angle horaire devient négatif lorsque l'argument est compris depuis 90° jusqu'à 180° ; lorsque cet argument surpasse 180° , l'angle horaire est celui qui répond, dans la Table, à l'excès de l'argument sur 180° .

Pour calculer, au moyen de cette Table, l'heure de la marée à Brest, on déterminera à peu près l'instant du passage de la Lune au méridien supérieur ou inférieur pour un lieu plus occidental que ce port de $3^h 56^m 13^s$, et pour un temps antérieur d'environ $1\frac{1}{2}$. On détermi-

MÉMOIRE SUR LE FLUX ET REFLUX DE LA MER. 121

nera pour cet instant, au moyen des éphémérides, les valeurs de φ , v , h , φ' , v' , h' . On corrigera, au moyen de la Table VIII, les valeurs de h et de h' , et l'on formera la quantité $h' - h$. Si les demi-diamètres moyens employés dans le calcul de ces éphémérides diffèrent de ceux dont a fait usage dans la Table VII, on retranchera ces différences des valeurs de h et de h' données par ces éphémérides. La Table VIII donnera ensuite l'angle horaire de la Lune à l'instant de la pleine mer; il faudra augmenter cet angle de 180° , si l'on a considéré un passage de la Lune par le méridien inférieur. En retranchant l'argument $\varphi - \varphi'$ de cet angle horaire, on aura l'angle horaire du Soleil, que l'on convertira en temps, à raison de 15° par heure, ce qui donnera l'heure approchée de la pleine mer.

Pour corriger cette heure, on observera que l'argument $\varphi - \varphi'$ dans la Table VIII se rapporte à l'instant de la pleine mer, qui diffère un peu de l'heure supposée du passage de la Lune au méridien. On prendra la différence de l'heure trouvée pour la marée à l'heure supposée du passage, et l'on calculera la variation de l'argument $\varphi - \varphi'$ durant cet intervalle. On déterminera la variation de l'angle horaire de la Lune, correspondante à la variation de l'argument, et l'on retranchera la première variation de la seconde; cette différence, réduite en temps, sera la correction de l'heure de la marée.

Appliquons cette méthode à un exemple. Pour cela, déterminons l'heure de la marée du soir, à Brest, le 15 avril 1790. Ce port est plus occidental que Paris de $27^m 17^s$; ainsi le lieu plus occidental que Brest de $3^h 56^m 13^s$ est, à l'occident de Paris, de $4^h 23^m 30^s$. Je trouve par la *Connaissance des Temps* de 1790 que la Lune, dans ce lieu, a passé au méridien inférieur, le 13, à peu près à $1^h 44^m$, et l'on comptait alors, à Paris, $16^h 7^m$. Une erreur de quelques minutes sur le moment de ce passage a très peu d'influence sur le résultat du calcul; ainsi nous déterminerons les valeurs de φ , v , h , φ' , v' et h' pour le 13, à Paris, à 16^h . La *Connaissance des Temps* donne, pour ce moment,

$$\begin{aligned} \varphi &= 22^\circ 34', & v &= 9^\circ 29', & h &= 15^\circ 58', 5, \\ \varphi' &= 18^\circ 14', & v' &= 9^\circ 12', & h' &= 14^\circ 45'. \end{aligned}$$

Mais, comme le demi-diamètre moyen du Soleil de cette éphéméride est de $1^{\circ},5$ environ plus grand que celui de la Table VII, il faut retrancher cette quantité de h , ce qui le réduit à $15^{\circ}57'$. On aura, cela posé, au moyen de la Table VII,

$$h' - h = -72'.$$

On a ensuite

$$\varphi - \varphi' = 4^{\circ}20'.$$

Au moyen de ces données, on trouve, par la Table VIII, l'angle horaire de la Lune égal à $1^{\circ}16'$. Il faut lui ajouter 180° , parce que l'on a considéré un passage inférieur de la Lune; ainsi le véritable angle horaire de la Lune est $181^{\circ}16'$. En en retranchant l'argument $\varphi - \varphi'$, on aura l'angle horaire du Soleil égal à $176^{\circ}56'$, ce qui, réduit en temps, donne $11^{\text{h}}47^{\text{m}}44^{\text{s}}$, pour l'heure de la marée, dans le lieu plus à l'ouest que Paris de $4^{\text{h}}23^{\text{m}}30^{\text{s}}$; ainsi cette heure à Paris est $16^{\text{h}}11^{\text{m}}14^{\text{s}}$.

Pour la corriger, nous observerons qu'elle surpasse de $11^{\text{m}}14^{\text{s}}$ l'heure pour laquelle nous avons déterminé les quantités φ et φ' : or, dans cet intervalle, la variation de l'argument $\varphi - \varphi'$ est $-5'$, et la variation correspondante de l'angle horaire de la Lune, donnée par la Table VIII, est $-1'$. Si, de cette dernière variation, on retranche la première, la différence $+4'$, réduite en temps, donnera 16^{s} pour la correction de l'heure de la marée. Cette heure, dans le lieu plus à l'ouest que Paris de $4^{\text{h}}23^{\text{m}}30^{\text{s}}$, sera donc $11^{\text{h}}48^{\text{m}}0^{\text{s}}$; en y ajoutant $40^{\text{h}}26^{\text{m}}13^{\text{s}}$, on aura l'heure de la marée, à Brest, à $52^{\text{h}}14^{\text{m}}13^{\text{s}}$, c'est-à-dire le 15 avril à $4^{\text{h}}14^{\text{m}}13^{\text{s}}$ du soir. Il y a une correction due à ce que la hauteur de la marée totale a surpassé 14^{p} . Elle a été trouvée de 16^{p} , et par conséquent de 2^{p} en excès; ce qui, à raison de $1^{\text{m}}\frac{1}{2}$ de retard par pied d'excédent de la marée sur 14^{p} , donne $2^{\text{m}}40^{\text{s}}$ qui, ajoutées à l'heure précédente, la portent à $4^{\text{h}}16^{\text{m}}53^{\text{s}}$. La mer, ce jour-là, fut observée pleine, de $4^{\text{h}}15^{\text{m}}$ à $4^{\text{h}}22^{\text{m}}$, ce qui s'accorde avec le résultat précédent, et ce qui prouve que, depuis près d'un siècle, les données dépendantes des circonstances locales n'ont pas sensiblement varié dans le port de Brest.

XLI.

De la loi suivant laquelle la marée monte et descend à Brest.

J'ai déjà remarqué, dans l'article I, que la mer, dans nos ports, emploie moins de temps à monter qu'à descendre. J'ai trouvé, par un grand nombre d'observations vers les syzygies, que la différence de ces temps est d'environ un quart d'heure à Brest. La comparaison d'un grand nombre d'observations des quadratures m'a conduit au même résultat, en sorte que les marées des syzygies et des quadratures ne m'ont présenté, à cet égard, aucune différence sensible.

Dans le recueil des observations des marées faites à Brest au commencement de ce siècle et dont j'ai tiré les résultats précédents, je n'ai point trouvé d'observations relatives à la loi suivant laquelle la mer s'élève et s'abaisse. On a bien voulu, à ma prière, en faire durant six jours vers les syzygies de l'équinoxe du printemps de cette année 1790. Ces observations se rapportent aux 29, 30 et 31 mars, et aux 13, 14, 15 avril suivants, la Lune ayant été pleine le 30 mars et nouvelle le 14. Dans ces observations, on a suivi chaque jour la hauteur de la mer, de quart d'heure en quart d'heure. Pour en tirer un résultat moyen, j'ai pris d'abord une hauteur moyenne entre les douze hauteurs correspondantes aux basses mers du matin et du soir dans les six jours d'observations; c'est à cette hauteur que j'ai fixé le zéro de l'échelle. J'ai pris ensuite un intervalle moyen entre les intervalles des basses mers du matin, aux secondes observations de chaque jour. J'ai pris semblablement, entre les six hauteurs correspondantes à ces observations, une hauteur moyenne dont j'ai retranché la hauteur moyenne de la basse mer.

J'ai pris encore un intervalle moyen entre les intervalles des basses mers du matin, aux troisièmes observations de chaque jour. J'ai pris semblablement, entre les six hauteurs correspondantes à ces observations, une hauteur moyenne dont j'ai retranché la hauteur moyenne de la basse mer.

En continuant ainsi, j'ai formé la Table suivante, dans laquelle j'ai fixé l'origine du temps au maximum de la marée, en sorte que les temps antérieurs à ce maximum sont négatifs. Pour avoir l'intervalle de ce maximum à l'instant moyen de la basse mer du matin, j'ai pris un milieu entre les intervalles de la basse mer du matin à la pleine mer de chaque jour. La première colonne de la Table marque le temps, la seconde colonne marque les hauteurs observées correspondantes aux temps. Pour abrégé, je n'ai marqué ces hauteurs que de demi-heure en demi-heure. La troisième colonne renferme les hauteurs calculées, en supposant la loi de décroissement des hauteurs de la marée, depuis le maximum, proportionnelle au cosinus du produit de 360° par la distance de l'instant pour lequel on calcule la hauteur à l'instant du maximum et divisé pour l'intervalle compris entre les deux basses mers. C'est, à très peu près, la loi de décroissement qui, suivant la théorie, doit avoir lieu vers les syzygies. Enfin, la quatrième colonne renferme l'excès des hauteurs calculées sur les hauteurs observées.

TABLE IX.

Temps des hauteurs observées.	Hauteurs		Différence.
	observées.	calculées.	
— 358,08	11,0	5,5	— 5,5
— 330,91 barre du matin	67,5	68,8	1,3
— 300,91	216,0	216,6	0,6
— 270,91	440,8	436,8	— 13,0
— 240,91	726,5	715,2	— 11,3
— 210,91	1041,5	1033,6	— 7,9
— 180,91	1379,5	1371,4	— 1,1
— 150,91	1696,2	1706,8	10,6
— 120,91	2007,0	2017,5	10,5
— 90,91	2269,7	2281,0	11,3
— 60,91	2471,2	2488,4	16,2
— 30,91	2665,8	2677,9	12,1
0,91	2663,2	2663,7	0,5
0,00 maximum	2663,8	2663,8	0,0
29,09	2669,2	2623,1	13,9
59,09	2468,7	2498,6	29,9
89,09	2262,5	2296,3	33,8
119,09	2002,3	2035,2	32,9
149,09	1720,7	1726,5	5,8
179,09	1423,5	1392,1	— 31,4
209,09	1114,5	1053,8	— 60,7
239,09	832,8	733,6	— 99,2
269,09	570,8	452,1	— 118,7
299,09	336,8	227,9	— 108,9
329,09	148,0	75,4	— 72,6
359,09	24,5	4,7	— 19,8
379,50 barre du soir	— 11,0		

Dans cette Table : 1^o l'intervalle entre les basses mers est de $12^h 17^m 58^s$, et, par l'article XXIX, il doit être de $12^h 18^m 20^s$, ce qui s'accorde aussi bien qu'on puisse le désirer. L'instant de la pleine mer est de 21^m environ plus près de la basse mer du matin que de la basse mer du soir, ce qui diffère peu d'un quart d'heure, que j'ai trouvé par la comparaison d'un grand nombre d'observations, pour l'excès du temps que la mer met à monter sur celui qu'elle met à descendre. 2^o Le niveau de la basse mer du soir est un peu au-dessous de celui de la basse mer du matin, comme cela doit être, parce que les

niveaux de la basse mer vont en baissant, à mesure que l'on approche du maximum de la marée, qui n'a eu lieu qu'après les observations de la Table précédente. 3° Il y a peu de différence, en général, entre les hauteurs calculées et les hauteurs observées, excepté vers la fin de la marée descendante, ce qui confirme ce que nous avons dit ci-dessus, savoir, que la marée sur les côtes ne s'abaissant que par sa pesanteur, cet abaissement doit être un peu plus lent que suivant la théorie.

Ayant reçu les observations précédentes, faites environ quatre-vingts ans après celles dont j'ai fait usage pour obtenir la formule de l'article XXXIX, j'ai été curieux d'y comparer cette formule, car il est possible que, par la suite des temps, les phénomènes des marées changent dans un port en vertu des changements que la nature et l'art peuvent opérer dans ce port. Mais je n'ai point remarqué, entre l'observation et le calcul, de différences qui ne puissent être attribuées aux erreurs des observations.

MÉMOIRE

SUR LES

MOUVEMENTS DES CORPS CÉLESTES

AUTOUR

DE LEURS CENTRES DE GRAVITÉ.



MÉMOIRE
SUR LES
MOUVEMENTS DES CORPS CÉLESTES
AUTEUR
DE LEURS CENTRES DE GRAVITÉ ⁽¹⁾.

*Mémoires de l'Institut national des Sciences et Arts, pour l'an IV de la République,
Tome 1^{re}; thermidor an VI.*

Je me propose de donner, dans ce Mémoire, une théorie complète des mouvements des corps célestes autour de leurs centres de gravité. Le plus remarquable de tous ces mouvements est celui de la Terre, d'où résulte la précession des équinoxes. C'est par la durée de la rotation de cette planète que les astronomes mesurent le temps; c'est à ses pôles et à son équateur qu'ils rapportent la position des astres; il importe donc de connaître exactement leurs variations périodiques et séculaires. J'ai pensé que, malgré les profondes recherches des géomètres sur cet objet, il pouvait être utile encore de le considérer de nouveau, en discutant avec un soin particulier toutes ces variations. Je ne m'occupe ici des mouvements des centres de gravité que pour donner une équation de condition assez remarquable, qui a lieu dans ces mouvements, et qui est un développement de l'équation aux différences partielles, sur laquelle j'ai fondé ailleurs la théorie de la figure des planètes. Je passe ensuite à la considération des mouvements d'un corps autour de son centre de gravité, et, pour cela, je fais usage des équations différentielles données par Euler dans le troisième Volume de sa *Mécanique*; elles me paraissent être les plus commodes et les plus simples que l'on puisse employer dans cette recherche. Pour les

⁽¹⁾ Lu le 1^{er} pluviôse an IV, et déposé au Secrétariat de l'Institut le 16 nivôse an V.
Oeuvres de L. — XII.

intégrer, il faut en développer les différents termes, en distinguant ceux qui peuvent devenir sensibles par les intégrations. Cette discussion est la partie la plus délicate de cette théorie. Il en résulte que, parmi les changements périodiques de l'axe de la Terre, le seul sensible est celui qui dépend de la longitude des nœuds de l'orbe lunaire, et que l'on nomme *nutation*. Il existe encore, dans l'expression de l'inclinaison de cet axe à l'écliptique, une petite inégalité d'une seconde à peu près dans son maximum, et dont l'argument est le double de la longitude du Soleil. Quelques astronomes ont introduit une nouvelle équation d'environ deux secondes, et qui dépend de la longitude de l'apogée de l'orbe lunaire; mais on verra, par l'analyse suivante, que cette équation doit être rejetée. Les variations séculaires de l'orbe terrestre en produisent de correspondantes dans la position de l'axe de la Terre, rapportée à un plan fixe; elles sont analogues à la nutation produite par le mouvement de l'orbe lunaire, avec cette différence que, la période des mouvements de l'orbe terrestre étant incomparablement plus grande que celle du mouvement des nœuds de la Lune, la nutation qui en résulte est beaucoup plus étendue. Le principal effet de cette nutation est de resserrer les limites des variations séculaires qui auraient lieu dans l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur et dans la durée de l'année tropique, si la Terre était exactement sphérique. Il en résulte encore une petite altération dans la longueur du jour moyen; mais elle sera toujours insensible aux observateurs, en sorte que l'on peut, sans craindre aucune erreur sensible, regarder la durée du jour comme étant toujours la même, et s'en servir pour la mesure du temps, résultat que je développe avec le détail qu'exige son importance dans l'Astronomie.

Les phénomènes du mouvement de l'axe de la Terre doivent répandre quelques lumières sur la figure de cette planète, puisqu'ils en dépendent; mais, pour cela, il est nécessaire de considérer cette figure de la manière la plus générale, et c'est ce que j'ai fait dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782⁽¹⁾. En combinant la théorie

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, T. X.

que j'ai présentée dans ces *Mémoires* avec les formules du mouvement de l'axe terrestre, je trouve que l'on ne peut pas supposer la Terre homogène, ni son aplatissement au-dessus de $\frac{1}{320}$, et que l'aplatissement $\frac{1}{320}$, qui résulte des mesures du pendule, satisfait aux phénomènes de la précession et de la nutation : d'où il suit que les termes de l'expression du rayon du sphéroïde terrestre, qui paraissent écarter sensiblement les degrés mesurés du méridien de la figure elliptique, ont une influence beaucoup moindre sur la grandeur de ce rayon et sur la variation de la pesanteur; en sorte que, dans le calcul des parallaxes, de la longueur du pendule et des mouvements de l'axe de la Terre, on peut supposer à cette planète une figure elliptique aplatie de $\frac{1}{320}$. Ces recherches supposent la Terre entièrement solide, et l'on peut croire que la fluidité de l'océan doit en changer les résultats. En soumettant à l'analyse les effets de sa pression et de son attraction sur le sphéroïde qu'il recouvre, la considération des équations de ses mouvements me conduit directement à ce théorème auquel je suis déjà parvenu d'une manière indirecte dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1777⁽¹⁾; savoir, que la *précession et la nutation sont exactement les mêmes que si la mer formait une masse solide avec la Terre*. J'ose me flatter que cette analyse pourra mériter l'attention des géomètres.

La théorie précédente des mouvements de l'axe de la Terre s'étend, au moyen de légères modifications, aux mouvements de l'axe de la Lune. Les belles recherches de Lagrange sur la libration de ce satellite ne laissent à désirer, sur cet objet, que ce qui concerne les variations séculaires de ce phénomène. Je présente ici la théorie de ces variations ainsi que quelques remarques sur la figure de la Lune. Enfin, en étendant la même analyse aux anneaux de Saturne, je fais voir que, malgré la différence des attractions qu'ils éprouvent de la part du Soleil et du dernier satellite de cette planète, l'action de Saturne les retient toujours, à très peu près, dans le plan de son équateur, s'il est doué d'un mouvement rapide de rotation; résultat

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, T. IX.

d'où j'avais conclu l'existence de ce mouvement, ainsi que la rotation des anneaux, avant que les observations eussent fait connaître ces mouvements divers.

I.

Le mouvement d'un corps libre consiste dans le mouvement de translation de son centre de gravité et dans le changement de sa position autour de ce point. La recherche du mouvement du centre de gravité se réduit à déterminer le mouvement d'un point sollicité par des forces données; et, relativement aux corps célestes, ces forces sont le résultat des attractions de sphéroïdes dont la figure est supposée connue. Soient dm une molécule d'un sphéroïde; x', y', z' les trois coordonnées orthogonales de cette molécule; dm sera de la forme $\varepsilon' dx' dy' dz'$, ε' étant fonction de x', y', z' . Soient encore x, y, z les coordonnées d'un point attiré par le sphéroïde; si l'on nomme V la somme de toutes les molécules du sphéroïde, divisées respectivement par leurs distances au point attiré, on aura

$$V = \int \frac{\varepsilon' dx' dy' dz'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}},$$

cette intégrale étant prise relativement à toute l'étendue du sphéroïde. Ses limites étant indépendantes de x, y, z , ainsi que les variables x', y', z' , il est clair qu'en différentiant l'expression de V par rapport à x, y, z , il suffira, dans cette différentiation, d'avoir égard au radical que renferme cette expression, et alors il est facile de voir que l'on a

$$(1) \quad 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

la fonction V a l'avantage de donner, par sa différentiation, l'attraction du sphéroïde parallèlement aux axes des x , des y et des z . Ces attractions, dirigées vers l'origine des coordonnées, sont

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z},$$

en nommant donc dt l'élément du temps, supposé constant, le mouvement du point attiré par le sphéroïde sera déterminé par les trois équations différentielles

$$(a) \quad \begin{cases} 0 = \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial x}, \\ 0 = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial y}, \\ 0 = \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial z}. \end{cases}$$

Considérons présentement une molécule dm' d'un corps attiré par le sphéroïde, et représentons par x, y, z les coordonnées de cette molécule. Si l'on nomme X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité du corps, et si l'on fait

$$\begin{aligned} x &= X + x'', \\ y &= Y + y'', \\ z &= Z + z'', \end{aligned}$$

en sorte que x'', y'', z'' soient les coordonnées de la molécule dm' rapportées à son centre de gravité; en les considérant comme indépendantes de X, Y et Z , on aura

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial X}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}, \quad \dots;$$

ainsi les forces dont la molécule dm' sera animée parallèlement aux axes des X , des Y et des Z seront

$$-\frac{\partial V}{\partial X}, \quad -\frac{\partial V}{\partial Y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial Z}.$$

Si l'on fait

$$dm' = \varepsilon'' dx'' dy'' dz'',$$

et

$$V' = \int \varepsilon'' V dx'' dy'' dz'',$$

l'équation (1) donnera

$$(2) \quad 0 = \frac{\partial^2 V'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial Z^2};$$

les sommes des forces relatives à toutes les molécules du corps et parallèles aux axes des X, des Y et des Z seront

$$-\frac{\partial V}{\partial X}, \quad -\frac{\partial V}{\partial Y} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial V}{\partial Z};$$

or, par les propriétés connues du centre de gravité, ce point est mu comme si, la masse du corps y étant réunie, toutes les forces dont chaque molécule est animée lui étaient immédiatement appliquées. En nommant donc E la masse du corps, on aura

$$(b) \quad \begin{cases} 0 = E \frac{d^2 X}{dt^2} - \frac{\partial V'}{\partial X}, \\ 0 = E \frac{d^2 Y}{dt^2} - \frac{\partial V'}{\partial Y}, \\ 0 = E \frac{d^2 Z}{dt^2} - \frac{\partial V'}{\partial Z}. \end{cases}$$

Changeons les coordonnées X, Y, Z en d'autres plus commodes pour les astronomes. Nommons r le rayon mené du point attiré à l'origine des coordonnées; soient ν l'angle que la projection de ce rayon sur le plan des X et des Y fait avec l'axe des X, et ϖ l'inclinaison de r sur le même plan, on aura

$$\begin{aligned} X &= r \cos \varpi \cos \nu, \\ Y &= r \cos \varpi \sin \nu, \\ Z &= r \sin \varpi. \end{aligned}$$

L'équation (2), rapportée à ces nouvelles coordonnées, devient

$$(3) \quad 0 = r^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V'}{\partial r} + \frac{\partial^2 V'}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial \varpi^2} - \frac{\sin \varpi}{\cos \varpi} \frac{\partial V}{\partial \varpi}.$$

En faisant ensuite

$$\begin{aligned} M &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{d^2 \varpi}{dt^2} \cos^2 \varpi - r \frac{d\varpi^2}{dt^2}, \\ N &= \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\nu}{dt} \cos^2 \varpi \right), \\ P &= r \frac{d^2 \varpi}{dt^2} + r^2 \frac{d^2 \varpi}{dt^2} \sin \varpi \cos \varpi + \frac{2r}{dt^2} \frac{dr}{dt} \frac{d\varpi}{dt}, \end{aligned}$$

les équations différentielles (b) donneront les suivantes

$$(c) \quad \frac{\partial V'}{\partial r} = EM, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = EN, \quad \frac{\partial V}{\partial \varpi} = EP.$$

Les valeurs de r , ν et ϖ renferment six arbitraires introduites par les intégrations. Considérons trois quelconques de ces arbitraires a , b et c ; on aura les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} \frac{dr}{da} + \frac{\partial^2 V'}{\partial r \partial \nu} \frac{d\nu}{da} + \frac{\partial^2 V'}{\partial r \partial \varpi} \frac{d\varpi}{da} &= E \frac{\partial M}{\partial a}, \\ \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} \frac{dr}{db} + \frac{\partial^2 V'}{\partial r \partial \nu} \frac{d\nu}{db} + \frac{\partial^2 V'}{\partial r \partial \varpi} \frac{d\varpi}{db} &= E \frac{\partial M}{\partial b}, \\ \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} \frac{dr}{dc} + \frac{\partial^2 V'}{\partial r \partial \nu} \frac{d\nu}{dc} + \frac{\partial^2 V'}{\partial r \partial \varpi} \frac{d\varpi}{dc} &= E \frac{\partial M}{\partial c}. \end{aligned}$$

On tirera de ces équations la valeur de $\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2}$, et, si l'on fait

$$\begin{aligned} m &= \frac{\partial \nu}{\partial b} \frac{\partial \varpi}{\partial c} - \frac{\partial \nu}{\partial c} \frac{\partial \varpi}{\partial b}, \\ n &= \frac{\partial \nu}{\partial c} \frac{\partial \varpi}{\partial a} - \frac{\partial \nu}{\partial a} \frac{\partial \varpi}{\partial c}, \\ p &= \frac{\partial \nu}{\partial a} \frac{\partial \varpi}{\partial b} - \frac{\partial \nu}{\partial b} \frac{\partial \varpi}{\partial a}, \end{aligned}$$

$$\epsilon = \frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial \nu}{\partial b} \frac{\partial \varpi}{\partial c} - \frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial \nu}{\partial c} \frac{\partial \varpi}{\partial b} + \frac{\partial r}{\partial b} \frac{\partial \nu}{\partial c} \frac{\partial \varpi}{\partial a} - \frac{\partial r}{\partial b} \frac{\partial \nu}{\partial a} \frac{\partial \varpi}{\partial c} + \frac{\partial r}{\partial c} \frac{\partial \nu}{\partial a} \frac{\partial \varpi}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial c} \frac{\partial \nu}{\partial b} \frac{\partial \varpi}{\partial a}.$$

on aura

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} = \frac{m \frac{\partial M}{\partial a} + n \frac{\partial M}{\partial b} + p \frac{\partial M}{\partial c}}{\epsilon}.$$

Si l'on fait pareillement

$$\begin{aligned} m' &= \frac{\partial r}{\partial c} \frac{\partial \varpi}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b} \frac{\partial \varpi}{\partial c}, \\ n' &= \frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial \varpi}{\partial c} - \frac{\partial r}{\partial c} \frac{\partial \varpi}{\partial a}, \\ p' &= \frac{\partial r}{\partial b} \frac{\partial \varpi}{\partial a} - \frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial \varpi}{\partial b}, \end{aligned}$$

on aura

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 V'}{\partial v^2} = \frac{m' \frac{\partial N}{\partial a} + n' \frac{\partial N}{\partial b} + p' \frac{\partial N}{\partial c}}{e}.$$

Enfin, si l'on fait

$$m'' = \frac{\partial r}{\partial b} \frac{\partial v}{\partial c} - \frac{\partial r}{\partial c} \frac{\partial v}{\partial b},$$

$$n'' = \frac{\partial r}{\partial c} \frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial c},$$

$$p'' = \frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b} \frac{\partial v}{\partial a},$$

on aura

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 V'}{\partial \omega^2} = m'' \frac{\partial P}{\partial a} + n'' \frac{\partial P}{\partial b} + p'' \frac{\partial P}{\partial c}.$$

L'équation (3), combinée avec les équations (c), donnera ainsi

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= mr^2 \cos^2 \omega \frac{\partial M}{\partial a} + nr^2 \cos^2 \omega \frac{\partial M}{\partial b} + pr^2 \cos^2 \omega \frac{\partial M}{\partial c} \\ &+ m' \frac{\partial N}{\partial a} + n' \frac{\partial N}{\partial b} + p' \frac{\partial N}{\partial c} \\ &+ m'' \cos^2 \omega \frac{\partial P}{\partial a} + n'' \cos^2 \omega \frac{\partial P}{\partial b} + p'' \cos^2 \omega \frac{\partial P}{\partial c} \\ &+ \varepsilon (2rM \cos^2 \omega - P \sin \omega \cos \omega). \end{aligned} \right.$$

Si l'origine des coordonnées X, Y, Z , au lieu d'être supposée fixe, est rapportée à un centre variable, dont X', Y', Z' soient les coordonnées, celles-ci étant indépendantes de X, Y, Z , les équations (b) auront encore lieu, pourvu que l'on y change V dans

$$V' = EX \frac{d^2 X'}{dt^2} - EY \frac{d^2 Y'}{dt^2} - EZ \frac{d^2 Z'}{dt^2}.$$

Les équations (2) et (3) subsisteront toujours après ce changement; l'équation (4) aura donc toujours lieu. Ce cas est celui du mouvement de la Lune autour de la Terre; l'origine des coordonnées X, Y, Z est alors au centre de gravité de la Terre; le point attiré est le centre de gravité de la Lune, et le sphéroïde attirant est l'ensemble des sphéroïdes du Soleil et de la Terre. En effet, la théorie de ce mouvement revient à supposer une masse infiniment petite à la Lune, en donnant

à la Terre une masse égale à la somme des masses de la Terre et de la Lune. Dans ce cas, les valeurs de X', Y', Z' sont indépendantes de X, Y, Z , comme on l'a supposé. L'équation (4) fournit, entre les inégalités de la parallaxe de la Lune et celles de son mouvement, tant en longitude qu'en latitude, une relation très propre à vérifier ces inégalités, et même la loi de la pesanteur universelle. Dans ce cas, on peut prendre, pour les trois constantes a, b, c , les longitudes moyennes de la Lune, de son périégée et de ses nœuds, à une époque donnée.

L'équation (4) peut servir encore à vérifier le calcul des perturbations d'une planète par l'action d'une autre planète dont on néglige les perturbations, ce qui est le cas ordinaire; mais je me propose de développer, dans une autre occasion, ces diverses applications de l'équation (4). Je reviens à l'objet principal de ce Mémoire, au mouvement des corps célestes autour de leurs centres de gravité.

II.

Supposons, pour fixer les idées, que le corps soit la Terre; nommons $90^\circ - \theta$ l'inclinaison de l'axe de l'équateur sur un plan fixe, par exemple sur celui de l'écliptique à une époque donnée. Soit ψ la longitude de l'extrémité d'une droite invariable prise sur ce plan, et passant par le centre de gravité de la Terre, cette longitude étant comptée de l'équinoxe mobile du printemps; soit encore φ la distance angulaire à cet équinoxe d'un axe principal pris dans le plan de l'équateur: il est clair que $d\psi$ sera la différentielle du mouvement rétrograde de l'équinoxe, et que $d\varphi$ sera la différentielle du mouvement de rotation de la Terre par rapport au même équinoxe. Des trois variations différentielles $d\psi$, $d\varphi$ et $d\theta$, il se compose un mouvement de rotation du corps autour d'un axe fixe pendant un instant; et, si l'on suppose

$$(C) \quad \begin{cases} d\varphi - d\psi \cos \theta = p dt, \\ d\psi \sin \theta \sin \varphi - d\theta \cos \varphi = q dt, \\ d\psi \sin \theta \cos \varphi + d\theta \sin \varphi = r dt, \end{cases}$$

dt étant l'élément du temps, $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ sera la vitesse angulaire de rotation du corps autour de son axe instantané de rotation, et les quantités

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

seront les cosinus des angles que l'axe instantané de rotation forme : 1° avec l'axe de l'équateur, que nous nommerons *premier axe principal*; 2° avec le second axe principal perpendiculaire aux deux premiers et formant, avec l'équinoxe de printemps, un angle égal à $90^\circ + \varphi$. Ces résultats sont démontrés dans plusieurs Ouvrages, et spécialement dans la *Mécanique analytique* de Lagrange.

Supposons que les trois axes principaux dont nous venons de parler soient les trois axes principaux de rotation du corps; soient A, B, C les moments d'inertie du corps relativement à ces axes. Nommons x', y', z' les trois coordonnées d'une molécule dm du corps, rapportées à ces axes, et P, Q, R les forces dont elle est animée parallèlement aux mêmes axes; si l'on fait

$$S dm dt (R y' - Q z') = dN,$$

$$S dm dt (P z' - R x') = dN',$$

$$S dm dt (Q x' - P y') = dN'',$$

le signe intégral S se rapportant à la molécule dm et devant s'étendre à la Terre entière, on aura

$$(D) \quad \begin{cases} dp + \frac{C-B}{A} r q dt = \frac{dN}{A}, \\ dq + \frac{A-C}{B} r p dt = \frac{dN'}{B}, \\ dr + \frac{B-A}{C} p q dt = \frac{dN''}{C}. \end{cases}$$

Ces trois équations, remarquables par leur simplicité, ont été données par Euler dans le troisième Volume de sa *Mécanique*; combinées avec les équations (c), elles me paraissent offrir la détermination la

plus générale et la plus simple que l'on puisse donner des mouvements des corps célestes autour de leurs centres de gravité.

III.

Considérons d'abord les moments d'inertie A, B, C; soit R le rayon mené du centre de gravité de la Terre à la molécule dm ; soit μ le cosinus de l'angle que R forme avec le premier axe principal; soit encore σ l'angle que forme le plan qui passe par le rayon R et par le premier axe principal avec le plan qui passe par le premier et par le second axe principal. $R\sqrt{1-\mu^2}$ sera la distance de la molécule au premier axe principal; $R\sqrt{1-(1-\mu^2)\cos^2\sigma}$ sera sa distance au second axe principal, et $R\sqrt{1-(1-\mu^2)\sin^2\sigma}$ sera sa distance au troisième axe principal. Ainsi le moment d'inertie d'un corps, relativement à un de ses axes, étant la somme des produits de chaque molécule du corps par le carré de sa distance à cet axe, et A, B, C étant les moments d'inertie de la Terre par rapport au premier, au second et au troisième axe principal, on aura

$$A = SR^3 dm (1 - \mu^2),$$

$$B = SR^3 dm [1 - (1 - \mu^2) \cos^2 \sigma],$$

$$C = SR^3 dm [1 - (1 - \mu^2) \sin^2 \sigma],$$

les intégrales devant s'étendre à la masse entière de la Terre. Maintenant on a

$$dm = R^2 dR d\mu d\sigma;$$

si l'on observe ensuite que les intégrales doivent être prises depuis $R=0$ jusqu'à la valeur de R à la surface de la Terre, valeur que nous désignerons par R' , depuis $\mu=-1$ jusqu'à $\mu=1$, et depuis $\sigma=0$ jusqu'à $\sigma=2\pi$, π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, on aura

$$A = \frac{1}{2} SR^3 d\mu d\sigma (1 - \mu^2),$$

$$B = \frac{1}{2} SR^3 d\mu d\sigma [1 - (1 - \mu^2) \cos^2 \sigma],$$

$$C = \frac{1}{2} SR^3 d\mu d\sigma [1 - (1 - \mu^2) \sin^2 \sigma].$$

Rappelons présentement un théorème remarquable sur les fonctions rationnelles et entières de μ , $\sqrt{1-\mu^2}\sin\sigma$ et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\sigma$. $Y^{(i)}$ étant une pareille fonction de l'ordre i , assujettie à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial^2 Y^{(i)}}{\partial \sigma^2} + i(i+1) Y^{(i)},$$

et $U^{(i)}$ étant une pareille fonction de l'ordre i , assujettie à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \sigma^2} + i'(i'+1) U^{(i)},$$

on a généralement, lorsque les deux nombres i et i' sont différents,

$$(E) \quad SY^{(i)} U^{(i')} d\mu d\sigma = 0,$$

les intégrales étant prises dans les limites précédentes.

Cela posé, concevons R^3 développé dans une série de fonctions semblables, en sorte que l'on ait

$$R^3 = U^{(0)} + U^{(2)} + U^{(4)} + U^{(6)} + \dots,$$

la fonction $1-\mu^2$ est égale à $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \mu^2$; la partie $\frac{2}{3}$ de cette fonction, et généralement toutes les quantités indépendantes de μ et de σ , sont de la forme $Y^{(0)}$; la partie $\frac{1}{3} - \mu^2$ est de la forme $Y^{(2)}$, puisqu'elle satisfait à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial Y^{(2)}}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial^2 Y^{(2)}}{\partial \sigma^2} + 6 Y^{(2)};$$

on aura donc, en vertu de l'équation (E),

$$A = \frac{1}{2} S d\mu d\sigma \left[\frac{2}{3} U^{(0)} + \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) U^{(2)} \right],$$

On a pareillement

$$1 - (1-\mu^2) \cos^2 \sigma = \frac{2}{3} + \left[\frac{1}{3} - (1-\mu^2) \cos^2 \sigma \right];$$

la fonction $\frac{2}{3}$ est de la forme $Y^{(0)}$; et la fonction $\frac{1}{3} - (1-\mu^2) \cos^2 \sigma$ est de la forme $Y^{(2)}$; on aura donc

$$B = \frac{1}{2} S d\mu d\sigma \left[\frac{2}{3} U^{(0)} + \left[\frac{1}{3} - (1-\mu^2) \cos^2 \sigma \right] U^{(2)} \right],$$

On trouvera de la même manière

$$C = \frac{1}{2} S d\mu d\sigma \left[\frac{2}{3} U^{(0)} + \left[\frac{1}{3} - (1-\mu^2) \sin^2 \sigma \right] U^{(2)} \right];$$

partant

$$A = \frac{1}{2} \pi U^{(0)} + \frac{1}{2} S U^{(2)} d\mu d\sigma \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right),$$

$$B = \frac{1}{2} \pi U^{(0)} + \frac{1}{2} S U^{(2)} d\mu d\sigma \left[\frac{1}{3} - (1-\mu^2) \cos^2 \sigma \right],$$

$$C = \frac{1}{2} \pi U^{(0)} + \frac{1}{2} S U^{(2)} d\mu d\sigma \left[\frac{1}{3} - (1-\mu^2) \sin^2 \sigma \right].$$

Si la fonction $U^{(2)}$ disparaît de l'expression de R^3 , on a

$$A = B = C;$$

or on sait que les trois moments d'inertie A, B, C étant égaux par rapport aux trois axes principaux, ils le sont relativement à tous les axes du corps, qui deviennent alors des axes principaux : la sphère n'est donc pas le seul corps qui jouisse de cette propriété. L'analyse précédente donne l'équation générale de tous les corps auxquels elle appartient.

La Terre étant supposée formée d'une infinité de couches variables du centre à la surface, le rayon R d'une quelconque de ces couches peut toujours être exprimé ainsi

$$R = a + \alpha a [Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \dots],$$

α étant un très petit coefficient constant et $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}$, ... étant des fonctions de la nature de celles dont nous venons de parler et qui peuvent de plus renfermer a d'une manière quelconque. En négligeant les quantités de l'ordre α^2 , on aura

$$R^3 = a^3 + 5\alpha a^2 [Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \dots];$$

partant, si l'on conçoit un solide homogène, d'une densité représentée par l'unité, et dont le rayon de la surface soit celui de la couche dont il s'agit, on aura, relativement à ce solide,

$$A = \frac{8\pi a^4}{15} + \alpha S a^3 Y^{(1)} d\mu d\varpi \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right),$$

$$B = \frac{8\pi a^4}{15} + \alpha S a^3 Y^{(2)} d\mu d\varpi \left[\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) \cos^2 \varpi \right],$$

$$C = \frac{8\pi a^4}{15} + \alpha S a^3 Y^{(2)} d\mu d\varpi \left[\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) \sin^2 \varpi \right].$$

En différenciant ces valeurs par rapport à a et en les multipliant ensuite par la densité de la couche dont le rayon est R , densité que nous désignerons par ρ , ρ étant une fonction quelconque de a , on aura les moments d'inertie de cette couche; et, pour avoir ceux de la Terre entière, il suffira d'intégrer les moments de la couche, par rapport à a , depuis $a = 0$ jusqu'à la valeur de a relative à la surface de la Terre, valeur que nous désignerons par l'unité. On aura ainsi

$$A = \frac{8\pi}{15} S \rho da^4 + \alpha S \rho d(a^3 Y^{(1)}) d\mu d\varpi \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right),$$

$$B = \frac{8\pi}{15} S \rho da^4 + \alpha S \rho d(a^3 Y^{(2)}) d\mu d\varpi \left[\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) \cos^2 \varpi \right],$$

$$C = \frac{8\pi}{15} S \rho da^4 + \alpha S \rho d(a^3 Y^{(2)}) d\mu d\varpi \left[\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) \sin^2 \varpi \right],$$

la différence $d(a^3 Y^{(2)})$ étant uniquement relative à la variable a .

Il résulte de ce que j'ai démontré dans les *Mémoires cités de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782⁽¹⁾, que, si l'on nomme $\alpha \varphi$ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, on a, pour la condition de l'équilibre des fluides répandus sur la surface de la Terre,

$$S \rho d(a^3 Y^{(2)}) = \frac{1}{3} [Y^{(2)} + \frac{1}{3} \varphi (\mu^2 - \frac{1}{3})] S \rho da^3,$$

la valeur de $Y^{(2)}$, dans le second membre de cette équation, étant relative à la surface de la Terre, et les intégrales étant prises depuis $a = 0$

(1) *Œuvres de Laplace*, T. X.

jusqu'à $a = 1$; on aura par conséquent

$$A = \frac{8\pi}{15} S \rho da^4 - \frac{8\alpha\pi}{27} \varphi S \rho da^4 + \frac{5\alpha}{3} S Y^{(2)} d\mu d\varpi \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) S \rho da^3,$$

$$B = \frac{8\pi}{15} S \rho da^4 + \frac{4\alpha\pi}{27} \varphi S \rho da^4 + \frac{5\alpha}{3} S Y^{(2)} d\mu d\varpi \left[\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) \cos^2 \varpi \right] S \rho da^3,$$

$$C = \frac{8\pi}{15} S \rho da^4 + \frac{4\alpha\pi}{27} \varphi S \rho da^4 + \frac{5\alpha}{3} S Y^{(2)} d\mu d\varpi \left[\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) \sin^2 \varpi \right] S \rho da^3.$$

La fonction $Y^{(2)}$ est de cette forme

$$\begin{aligned} H \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) &+ H' \mu \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varpi \\ &+ H'' \mu \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varpi \\ &+ H''' (1 - \mu^2) \sin 2\varpi \\ &+ H'''' (1 - \mu^2) \cos 2\varpi, \end{aligned}$$

et j'ai fait voir, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1783⁽¹⁾, que la considération des axes principaux de rotation rend nulles les constantes H' , H'' , H''' , en sorte que la fonction $Y^{(2)}$ se réduit à

$$H \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) + H'''' (1 - \mu^2) \cos 2\varpi.$$

Les variations de la pesanteur étant à très peu près proportionnelles au carré du sinus de la latitude, la valeur de H'''' doit être très petite; elle serait nulle, en effet, si la Terre était un solide de révolution. Mais, pour plus de généralité, nous la conserverons dans ces recherches: nous aurons ainsi

$$A = \frac{8\pi}{15} S \rho da^4 + \frac{16}{27} \alpha \pi (H - \frac{1}{3} \varphi) S \rho da^3,$$

$$B = \frac{8\pi}{15} S \rho da^4 - \frac{8}{27} \alpha \pi (H - \frac{1}{3} \varphi) S \rho da^3 - \frac{8\alpha\pi}{9} H'''' S \rho da^3,$$

$$C = \frac{8\pi}{15} S \rho da^4 - \frac{8}{27} \alpha \pi (H - \frac{1}{3} \varphi) S \rho da^3 + \frac{8\alpha\pi}{9} H'''' S \rho da^3.$$

IV.

Considérons présentement les valeurs de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ qui entrent dans les équations différentielles (D) de l'article II. Soient L la masse

(1) *Œuvres de Laplace*, T. XI.

d'un astre qui agit sur la Terre; x, y, z les coordonnées de son centre, rapportées au centre de gravité de la Terre et à ses trois axes principaux. Soit $r' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et nommons x', y', z' les coordonnées d'une molécule dm du sphéroïde terrestre; supposons enfin

$$V = -\frac{L(x x' + y y' + z z')}{r'^3} + \frac{L}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}.$$

Les forces attractives de L sur la molécule dm , décomposées parallèlement aux axes des x , des y et des z , en sens opposé à leur origine, et diminuées des mêmes forces attractives sur le centre de gravité de la Terre, que nous considérons ici comme immobile, seront

$$\frac{\partial V}{\partial x'}, \quad \frac{\partial V}{\partial y'}, \quad \frac{\partial V}{\partial z'}.$$

Ces trois forces sont celles que nous avons désignées par P, Q, R dans l'article II. On aura donc

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= S dm \left(y' \frac{\partial V}{\partial z'} - z' \frac{\partial V}{\partial y'} \right), \\ \frac{dN'}{dt} &= S dm \left(z' \frac{\partial V}{\partial x'} - x' \frac{\partial V}{\partial z'} \right), \\ \frac{dN''}{dt} &= S dm \left(x' \frac{\partial V}{\partial y'} - y' \frac{\partial V}{\partial x'} \right). \end{aligned}$$

Si l'on observe ensuite que l'on a

$$x' \frac{\partial V}{\partial y'} - y' \frac{\partial V}{\partial x'} = y' \frac{\partial V}{\partial x} - x' \frac{\partial V}{\partial y},$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= S dm \left(z' \frac{\partial V}{\partial y} - y' \frac{\partial V}{\partial z} \right), \\ \frac{dN'}{dt} &= S dm \left(x' \frac{\partial V}{\partial z} - z' \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{dN''}{dt} &= S dm \left(y' \frac{\partial V}{\partial x} - x' \frac{\partial V}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Les coordonnées x', y', z' étant très petites relativement à la distance r' de l'astre L au centre de gravité de la Terre, on peut déve-

lopper V dans une suite fort convergente ordonnée par rapport aux puissances réciproques de r' ; on aura ainsi, à fort peu près,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{3L}{r'^3} S dm (x x' + y y' + z z') (z y' - y z'), \\ \frac{dN'}{dt} &= \frac{3L}{r'^3} S dm (x x' + y y' + z z') (x z' - z x'), \\ \frac{dN''}{dt} &= \frac{3L}{r'^3} S dm (x x' + y y' + z z') (y x' - x y'). \end{aligned}$$

Or on a, par la nature des axes principaux de rotation,

$$\begin{aligned} S dm (x'^2 + y'^2) &= C, \\ S dm (x'^2 + z'^2) &= B, \\ S dm (y'^2 + z'^2) &= A; \end{aligned}$$

$$S x' y' dm = 0, \quad S x' z' dm = 0, \quad S y' z' dm = 0.$$

On aura ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{3L}{r'^3} (C - B) y z, \\ \frac{dN'}{dt} &= \frac{3L}{r'^3} (A - C) x z, \\ \frac{dN''}{dt} &= \frac{3L}{r'^3} (B - A) x y; \end{aligned}$$

les équations (D) deviendront conséquemment

$$(F) \quad \begin{cases} dp + \frac{C-B}{A} r q = \frac{3L dt}{r'^3} \frac{C-B}{A} y z, \\ dq + \frac{A-C}{B} r p = \frac{3L dt}{r'^3} \frac{A-C}{B} x z, \\ dr + \frac{B-A}{C} p q = \frac{3L dt}{r'^3} \frac{B-A}{C} x y. \end{cases}$$

Les équations (F) supposent que r' est fort grand par rapport au rayon du sphéroïde terrestre, ce qui est vrai relativement au Soleil et à la Lune; mais il est remarquable qu'elles seraient encore fort approchées dans le cas où, l'astre attirant étant fort près de la Terre, la figure

de cette planète serait elliptique. Pour le démontrer, nous observerons que l'on a, par l'article II,

$$x' = R\mu, \quad y' = R\sqrt{1-\mu^2}\cos\sigma, \quad z' = R\sqrt{1-\mu^2}\sin\sigma.$$

Si l'on nomme ν et λ ce que deviennent, par rapport à l'astre L, les quantités μ et σ relatives à la molécule dm du sphéroïde terrestre, on aura

$$x = r'\nu, \quad y = r'\sqrt{1-\nu^2}\cos\lambda, \quad z = r'\sqrt{1-\nu^2}\sin\lambda.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la fonction V, et qu'ensuite on la développe par rapport aux puissances de $\frac{R}{r'}$, on aura une série de cette forme

$$\frac{L}{r'} + \frac{LR^2}{r'^3}U^{(2)} + \frac{LR^3}{r'^3}U^{(3)} + \dots,$$

et il est facile de s'assurer que $U^{(2)}, U^{(3)}, \dots$ sont des fonctions telles, que l'on a généralement

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \sigma^2} + i(i+1)U^{(i)}.$$

Reprenons maintenant l'équation

$$\frac{dN}{dt} = S dm \left(z \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial z} \right);$$

on aura

$$\begin{aligned} z \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{LR^2}{r'^3} \left(z \frac{\partial U^{(2)}}{\partial y} - y \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{LR^3}{r'^3} \left(z \frac{\partial U^{(3)}}{\partial y} - y \frac{\partial U^{(3)}}{\partial z} \right) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Les différences partielles du second membre de cette équation étant prises par rapport à des variables indépendantes de μ et de σ , si l'on désigne généralement par $U^{(i)}$ la fonction

$$z \frac{\partial U^{(i)}}{\partial y} - y \frac{\partial U^{(i)}}{\partial z},$$

on aura

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \sigma^2} + i(i+1)U^{(i)},$$

en sorte que la fonction $U^{(i)}$ est de la même nature que les fonctions $Y^{(i)}$ et $U^{(i)}$; l'expression précédente de $\frac{dN}{dt}$ deviendra ainsi, en vertu de l'équation (E) de l'article précédent, en substituant pour dm sa valeur $R^2 dR d\mu d\sigma$, et pour R sa valeur $a + \alpha a(Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots)$,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{\alpha L}{r'^3} S \rho d(a^3 Y^{(2)}) d\mu d\sigma \left(z \frac{\partial U^{(2)}}{\partial y} - y \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\alpha L}{r'^3} S \rho d(a^3 Y^{(3)}) d\mu d\sigma \left(z \frac{\partial U^{(3)}}{\partial y} - y \frac{\partial U^{(3)}}{\partial z} \right) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

les différentielles $d(a^3 Y^{(2)}), d(a^3 Y^{(3)}), \dots$ étant relatives à la variable a . Or j'ai démontré, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782 ⁽¹⁾, que l'on a généralement, par la condition de l'équilibre des fluides qui recouvrent la Terre, et lorsque i surpasse 2,

$$S \rho d(a^{i+3} Y^{(i)}) = \frac{2i+1}{3} Y^{(i)} S \rho da^3,$$

les intégrales étant prises depuis $a = 0$ jusqu'à $a = r$, et $Y^{(i)}$ étant relatif à la surface de la Terre; on aura donc

$$\begin{aligned} \frac{\alpha L}{r'^3} S \rho d(a^3 Y^{(2)}) d\mu d\sigma \left(z \frac{\partial U^{(2)}}{\partial y} - y \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} \right) \\ = \frac{7\alpha L}{3r'^3} S Y^{(2)} d\mu d\sigma \left(z \frac{\partial U^{(2)}}{\partial y} - y \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} \right) S \rho da^3. \end{aligned}$$

Si la figure de la surface de la Terre est celle d'un ellipsoïde, $Y^{(2)}$ est nul, et alors l'expression de $\frac{dN}{dt}$ se réduit à son premier terme, non seulement à cause de la grandeur de r' , mais parce que les valeurs de $Y^{(3)}, Y^{(4)}, \dots$ sont nulles. Or, quoique la figure elliptique ne satisfasse pas exactement aux degrés mesurés des méridiens, cependant l'ac-

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, T. X.

cord des variations de la pesanteur avec cette figure indique que $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, ... sont très peu considérables par rapport à $Y^{(3)}$. On peut donc calculer les mouvements de l'axe de la Terre, en lui supposant une figure elliptique, sans craindre aucune erreur.

V.

Rapportons maintenant les coordonnées de l'astre L à un plan fixe, que nous supposons être celui de l'écliptique à une époque donnée. Soient X, Y, Z ces nouvelles coordonnées, l'axe des X étant la ligne menée du centre de la Terre à l'équinoxe du printemps, l'axe des Y étant la ligne menée du même centre au premier point du Cancer, et la ligne des Z étant la ligne menée de ce même centre au pôle boréal de l'écliptique; on aura

$$\begin{aligned}x &= Y \sin \theta + Z \cos \theta, \\y &= X \cos \varphi + Y \cos \theta \sin \varphi - Z \sin \theta \sin \varphi, \\z &= Y \cos \theta \cos \varphi - Z \sin \theta \cos \varphi - X \sin \varphi.\end{aligned}$$

Les équations différentielles (F) de l'article précédent deviendront ainsi

$$\begin{aligned}(G) \quad \left\{ \begin{aligned}dp + \frac{C-B}{A} r q dt &= \frac{3L dt (C-B)}{2 A r'^2} [\sin 2\varphi (Y^2 \cos^2 \theta + Z^2 \sin^2 \theta - X^2 - 2 YZ \sin \theta \cos \theta) \\&\quad + 2 \cos 2\varphi (XY \cos \theta - XZ \sin \theta)], \\dq + \frac{A-C}{B} r p dt &= \frac{3L dt (A-C)}{B r'^2} [\cos \varphi [(Y^2 - Z^2) \sin \theta \cos \theta + YZ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \\&\quad - \sin \varphi (XY \sin \theta + XZ \cos \theta)], \\dr + \frac{B-A}{C} p q dt &= \frac{3L dt (B-A)}{C r'^2} [\cos \varphi (XY \sin \theta + XZ \cos \theta) \\&\quad + \sin \varphi [(Y^2 - Z^2) \sin \theta \cos \theta + YZ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]].\end{aligned} \right.\end{aligned}$$

VI.

Intégrons présentement ces équations; si les deux moments d'inertie B et C étaient égaux, ce qui aurait lieu dans le cas où la Terre serait un sphéroïde de révolution, la première des équations (G) donnerait $dp = 0$, et, par conséquent, $p = n$, n étant une constante. Lorsqu'il y a une petite différence entre ces moments d'inertie, la valeur de p renferme des inégalités périodiques; mais elles sont insensibles. En effet, l'axe instantané de rotation s'éloignant toujours très peu du premier axe principal, q et r sont de très petites quantités, et l'on peut sans erreur sensible négliger le terme $\frac{C-B}{A} r q dt$ de la première des équations (G). Le second membre de la même équation se développe en sinus et cosinus d'angles croissant avec rapidité, puisque ses termes sont multipliés par le sinus et le cosinus de 2φ ; ces termes doivent donc être encore insensibles après les intégrations. On peut ainsi supposer, dans les deux dernières des équations (G), $p = n$, n étant la vitesse moyenne angulaire de la rotation de la Terre autour de son premier axe principal. Mais, comme la discussion de la valeur de p est très importante, à cause de son influence sur la durée du jour, nous reviendrons sur cet objet, après avoir déterminé les valeurs de q et de r .

Faisons, pour abrégér,

$$\begin{aligned}\frac{3L}{r'^2} [(Y^2 - Z^2) \sin \theta \cos \theta + YZ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] &= P, \\ \frac{3L}{r'^2} (XY \sin \theta + XZ \cos \theta) &= P';\end{aligned}$$

les deux dernières des équations (G) deviendront

$$\begin{aligned}dq + \frac{A-C}{B} n r dt &= \frac{A-C}{B} dt (P \cos \varphi - P' \sin \varphi), \\ dr + \frac{B-A}{C} n q dt &= \frac{B-A}{C} dt (P' \cos \varphi + P \sin \varphi).\end{aligned}$$

P et P' peuvent être développés en sinus et cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps; soient $k \cos(i\tau + \varepsilon)$ un terme quelconque de P, et $k' \sin(i\tau + \varepsilon)$ le terme correspondant de P'; on aura, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$\begin{aligned} dq + \frac{A-C}{B} nr dt &= \frac{A-C}{2B} dt [(k+k') \cos(\varphi + i\tau + \varepsilon) \\ &\quad + (k-k') \cos(\varphi - i\tau - \varepsilon)], \\ dr + \frac{B-A}{C} r q dt &= \frac{B-A}{2C} dt [(k+k') \sin(\varphi + i\tau + \varepsilon) \\ &\quad + (k-k') \sin(\varphi - i\tau - \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Pour intégrer ces équations, supposons

$$\begin{aligned} q &= M \sin(\varphi + i\tau + \varepsilon) + N \sin(\varphi - i\tau - \varepsilon), \\ r &= M' \cos(\varphi + i\tau + \varepsilon) + N' \cos(\varphi - i\tau - \varepsilon); \end{aligned}$$

nous aurons, en observant que $d\varphi$ est à très peu près égal à $n dt$,

$$\begin{aligned} M &= \frac{\frac{k+k'}{2}(A-C)[n(B+C-A) + iC]}{(n+i)^2 CB - n^2(B-A)(C-A)}, \\ M' &= \frac{\frac{k+k'}{2}(A-B)[n(B+C-A) + iB]}{(n+i)^2 CB - n^2(B-A)(C-A)}, \\ N &= \frac{\frac{k-k'}{2}(A-C)[n(B+C-A) - iC]}{(n-i)^2 CB - n^2(B-A)(C-A)}, \\ N' &= \frac{\frac{k-k'}{2}(A-B)[n(B+C-A) - iB]}{(n-i)^2 CB - n^2(B-A)(C-A)}. \end{aligned}$$

On a, par l'article II,

$$d\vartheta = r dt \sin \varphi - q dt \cos \varphi;$$

on aura donc

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{M'-M}{2} \sin(2\varphi + i\tau + \varepsilon) + \frac{N'-N}{2} \sin(2\varphi - i\tau - \varepsilon) \\ &\quad + \frac{N+N'-M-M'}{2} \sin(i\tau + \varepsilon). \end{aligned}$$

Nous pouvons négliger les deux premiers termes de cette expression de $\frac{d\vartheta}{dt}$, parce qu'ils sont insensibles en eux-mêmes, à cause du facteur $\frac{L(C-B)}{r^3}$ qui les multiplie, et que d'ailleurs ils n'augmentent point par l'intégration. Il n'en est pas ainsi du troisième terme, que l'intégration peut rendre sensible, si i est fort petit; dans ce cas, on peut négliger i relativement à n , et l'on a, à fort peu près,

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{B+C-2A}{2nA} k' \sin(i\tau + \varepsilon).$$

On a encore, par l'article II,

$$d\psi \sin \vartheta = r dt \cos \varphi + q dt \sin \varphi,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta &= \frac{M'-M}{2} \cos(2\varphi + i\tau + \varepsilon) + \frac{N'-N}{2} \cos(2\varphi - i\tau - \varepsilon) \\ &\quad + \frac{M+M'+N+N'}{2} \cos(i\tau + \varepsilon); \end{aligned}$$

et, en supposant i très petit, on aura, à très peu près,

$$\frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta = \frac{2A-B-C}{2nA} k \cos(i\tau + \varepsilon).$$

Si l'on désigne par $\Sigma k \cos(i\tau + \varepsilon)$ la somme des termes dans lesquels P peut se développer, et par $\Sigma k' \sin(i\tau + \varepsilon)$ la somme des termes dans lesquels P' peut se développer, Σ étant la caractéristique des intégrales finies, on aura

$$(H) \quad \begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{B+C-2A}{2nA} \Sigma k' \sin(i\tau + \varepsilon), \\ \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta = \frac{2A-B-C}{2nA} \Sigma k \cos(i\tau + \varepsilon). \end{cases}$$

En intégrant ces équations sans égard aux constantes arbitraires,

on aura les parties de θ et de ψ qui dépendent de l'action de l'astre L. Pour avoir les valeurs complètes de ces variables, il faut leur ajouter les quantités qui dépendent de l'état initial du mouvement. En n'ayant égard qu'à cet état, les équations (F) de l'article IV deviennent

$$dq + \frac{A-C}{B} n r dt = 0, \quad dr + \frac{B-A}{C} n q dt = 0;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$q = G \sin(\lambda t + \epsilon), \\ r = \frac{\lambda B}{n(C-A)} G \cos(\lambda t + \epsilon).$$

G et ϵ étant deux constantes arbitraires, et λ étant égal à

$$n \sqrt{\frac{(B-A)(C-A)}{BC}}.$$

Si l'on substitue pour q et r ces valeurs dans l'équation

$$\frac{d\theta}{dt} = r \sin \varphi - q \cos \varphi,$$

on aura, après avoir intégré,

$$\theta = h + \frac{n(C-A) - \lambda B}{2n(n+\lambda)(C-A)} G \cos(\varphi + \lambda t + \epsilon) \\ - \frac{\lambda B + n(C-A)}{2n(n-\lambda)(C-A)} G \cos(\varphi - \lambda t - \epsilon),$$

h étant une nouvelle arbitraire. Si la valeur de G était sensible, on le reconnaîtrait par les variations journalières de la hauteur du pôle; et, puisque les observations les plus précises n'y font remarquer aucune variation de ce genre, il résulte que G est insensible, et qu'ainsi l'on peut négliger les parties de θ et de ψ qui dépendent de l'état initial du mouvement de la Terre.

VII.

Reprenons maintenant les équations (H) de l'article précédent. La première donne, en l'intégrant et en observant que $\Sigma k' \sin(it + \epsilon)$ est le développement de la fonction P',

$$\theta = h + \frac{B+C-2A}{2nA} \int P' dt.$$

Les seuls astres qui influent d'une manière sensible sur les mouvements de l'axe de la Terre sont le Soleil et la Lune. Considérons d'abord l'action du Soleil.

Soient

v la longitude de cet astre, comptée sur son orbite, de l'équinoxe mobile du printemps;

γ l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe;

Λ la longitude de son nœud ascendant.

On aura

$$X = r' \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos v + r' \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(v - 2\Lambda),$$

$$Y = r' \cos^2 \frac{\gamma}{2} \sin v - r' \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin(v - 2\Lambda),$$

$$Z = r' \sin \gamma \sin(v - \Lambda),$$

d'où l'on tire

$$XY = \frac{r'^2}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \sin 2v + \frac{r'^2 \sin^2 \gamma}{4} \sin 2\Lambda - \frac{r'^2}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin(2v - 4\Lambda),$$

$$XZ = \frac{r'^2}{2} \sin \gamma \cos^2 \frac{\gamma}{2} \sin(2v - \Lambda) - \frac{r'^2}{4} \sin 2\gamma \sin \Lambda \\ + \frac{r'^2}{2} \sin \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin(2v - 3\Lambda);$$

on a, par la théorie du mouvement elliptique,

$$r'^2 dv = 2a^2 m dt \sqrt{1 - e^2},$$

mt étant le moyen mouvement du Soleil, a étant sa moyenne distance

à la Terre, et e étant l'excentricité de son orbite; on a, de plus,

$$\frac{L}{a^2} = m^2, \\ \frac{a}{r^2} = \frac{1 + e \cos(v - \Gamma)}{1 - e^2},$$

Γ étant la longitude de l'apogée solaire; on aura donc, relativement au Soleil,

$$\begin{aligned} P' dt &= -\frac{3L}{r^2} (XY \sin \theta + XZ \cos \theta) \\ &= -\frac{3m dv [1 + e \cos(v - \Gamma)]}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{XY}{r^2} \sin \theta + \frac{XZ}{r^2} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

Si l'on substitue pour $\frac{XY}{r^2}$ et $\frac{XZ}{r^2}$ leurs valeurs précédentes en v , on verra d'abord, après avoir développé $P' dt$ en sinus de l'angle v et de ses multiples, que les termes dépendants de la longitude Γ de l'apogée solaire renferment l'angle v et qu'ainsi ils ne peuvent devenir sensibles par l'intégration. Il n'en est pas ainsi des termes dépendants de la longitude du nœud; la fonction $\frac{XZ}{r^2}$ introduit dans $P' dt$ le terme

$$-\frac{3m dv}{8} \sin 2\gamma \sin \Lambda;$$

et, vu la lenteur des variations de γ et de Λ , ce terme peut devenir, par l'intégration, très sensible dans la valeur de θ ; on aura ainsi, à très peu près, en observant que γ et e sont fort petits et en ne conservant parmi les termes multipliés par ces quantités que ceux qui peuvent croître considérablement par les intégrations,

$$\int P' dt = -\frac{3m}{4} \sin \theta \cos 2v - \frac{3m^2}{2} \cos \theta \int \gamma dt \sin \Lambda.$$

La quantité $\gamma \sin \Lambda$ est le produit de l'inclinaison de l'orbe solaire par le sinus de la longitude de son nœud; or on sait, par la théorie des inégalités séculaires du mouvement des planètes, que ce produit est égal à un nombre fini de termes de la forme $c \sin(ft + \epsilon)$, c étant un petit coefficient et f étant pareillement très petit, en sorte que l'angle ft croît avec une extrême lenteur. Nous désignerons par

$\Sigma c \sin(ft + \epsilon)$ la somme de tous ces termes; nous aurons ainsi pour la partie de $\int P' dt$ dépendante de l'action du Soleil

$$\int P' dt = -\frac{3m}{4} \sin \theta \cos 2v + \frac{3m^2}{2} \cos \theta \sum \frac{c}{f} \cos(ft + \epsilon).$$

Considérons présentement l'action de la Lune. En désignant par L' sa masse et par a' sa moyenne distance à la Terre, en nommant de plus, relativement à cet astre, v' , m' , Γ' , e' , Λ' et γ' ce que nous avons nommé v , m , Γ , e , Λ et γ , relativement au Soleil, et faisant

$$\frac{L'}{a'^2} = \lambda m^2,$$

on trouvera, par l'analyse précédente,

$$\int P' dt = -\frac{3\lambda m^2}{4m'} \sin \theta \cos 2v' - \frac{3\lambda m^2}{2} \cos \theta \int \gamma' dt \sin \Lambda'.$$

La fonction $\frac{XY}{r^2}$ introduit encore dans l'intégrale $\int P' dt$ le terme

$$-\frac{3m^2\lambda}{4} \sin \theta \int \gamma'^2 dt \sin 2\Lambda'.$$

Ce terme croît considérablement par l'intégration; mais il est aisé de voir que, malgré cet accroissement, il reste encore insensible. En effet, son maximum est à celui du terme

$$-\frac{3\lambda m^2 \cos \theta}{2} \int \gamma' dt \sin \Lambda'$$

comme $\frac{1}{2} \gamma' \tan \theta$ est à l'unité; or on verra bientôt que le second de ces maxima est d'environ $10''$ relativement à l'orbe lunaire rapporté à l'écliptique; de plus, γ' est au-dessous de $\frac{1}{10}$: le premier maximum est donc insensible. Les seuls termes sensibles que l'action de la Lune produit dans l'intégrale $\int P' dt$, et par conséquent dans la valeur de θ , sont donc ceux auxquels nous avons eu égard. Quelques astronomes ont introduit dans cette valeur une petite inégalité dépendante de la longitude de l'apogée de l'orbe lunaire; mais on voit, par l'analyse précédente, que cette inégalité n'existe point. Le moyen mouvement de l'apogée lunaire étant à peu près double du mouvement des nœuds

de la Lune, un terme dépendant de l'angle $2\Lambda' - \Gamma$ pourrait devenir sensible par l'intégration, quoique multiplié par $e'\gamma^2$; mais l'analyse précédente nous montre encore qu'il n'existe point de terme semblable dans l'intégrale $\int P dt$.

Pour évaluer la fonction $\int \gamma' dt \sin \Lambda'$, nous observerons que, dans tous les changements qu'éprouve la position de l'orbe solaire, on a

$$\gamma' = \gamma \quad \text{et} \quad \Lambda' = \Lambda;$$

on a donc, eu égard aux variations de l'orbe solaire,

$$\int \gamma' dt \sin \Lambda' = - \sum \frac{c}{f} \cos(ft + \varepsilon).$$

Soient de plus c' l'inclinaison moyenne de l'orbe de la Lune sur celui du Soleil et $-f't - \varepsilon'$ la longitude de son nœud ascendant sur cet orbe, comptée de l'équinoxe mobile du printemps; on aura, en vertu de cette inclinaison,

$$\int \gamma' dt \sin \Lambda' = \frac{c'}{f'} \cos(f't + \varepsilon');$$

en réunissant donc ces deux termes, on aura, relativement à la Lune,

$$\int \gamma dt \sin \Lambda' = \frac{c}{f} \cos(f't + \varepsilon') - \sum \frac{c}{f} \cos(ft + \varepsilon),$$

et l'on aura pour les actions réunies du Soleil et de la Lune

$$\begin{aligned} \theta = h + \frac{3m}{8n} \sin \theta \frac{2\Lambda - B - C}{A} \left(\cos 2v + \frac{\lambda m}{m'} \cos 2v' \right) \\ - \frac{3m^2}{4n} \cos \theta \frac{2\Lambda - B - C}{A} (1 + \lambda) \sum \frac{c}{f} \cos(ft + \varepsilon) \\ + \frac{3\lambda c' m^2}{4n f'} \cos \theta \frac{2\Lambda - B - C}{A} \cos(f't + \varepsilon'). \end{aligned}$$

VIII.

Déterminons présentement la valeur de ψ et, pour cela, reprenons la seconde des équations (H) de l'article VI. En lui donnant cette forme

$$d\psi \sin \theta = \frac{2\Lambda - B - C}{2nA} P dt,$$

on a ⁽¹⁾, par l'article précédent, relativement au Soleil,

$$\begin{aligned} Y^2 - Z^2 = \frac{r'^2}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} (1 - \cos 2v) - \frac{r'^2}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} [\cos 2\Lambda - \cos(2v - 2\Lambda)] \\ - \frac{r'^2}{2} \sin^2 \gamma [1 - \cos(2v - 2\Lambda)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} YZ = \frac{r'^2 \sin 2\gamma}{4} \cos \Lambda - \frac{r'^2}{2} \sin \gamma \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos(2v - \Lambda) \\ + \frac{r'^2}{2} \sin \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(2v - 3\Lambda). \end{aligned}$$

On aura donc, par l'analyse du même article, en négligeant les carrés de e et de γ et les quantités qui ne deviennent point sensibles par l'intégration,

$$\begin{aligned} P dt = \frac{3m^2}{2} dt \sin \theta \cos \theta - \frac{3m}{4} \sin \theta \cos \theta d \sin 2v \\ + \frac{3m^2}{2} \gamma dt \cos \Lambda (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

$\gamma \cos \Lambda$ est le produit de l'inclinaison de l'orbe solaire par le cosinus de la longitude de son nœud, et l'on sait, par la théorie des inégalités séculaires du mouvement des planètes, que $\gamma \sin \Lambda$ étant représenté par $\Sigma c \sin(ft + \varepsilon)$, la fonction $\gamma \cos \Lambda$ sera exprimée par $\Sigma c \cos(ft + \varepsilon)$. Il faudra donc substituer cette valeur, au lieu de $\gamma \cos \Lambda$, dans l'expression de P .

On trouvera par la même analyse et par celle de l'article précédent que, relativement à la Lune, on a

$$\begin{aligned} P dt = \frac{3\lambda m^2 dt}{2} \sin \theta \cos \theta - \frac{3\lambda m^2}{4m'} \sin \theta \cos \theta d \sin 2v' \\ + \frac{3}{2} \lambda m^2 dt (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \Sigma c \cos(ft + \varepsilon) \\ + \frac{3}{2} \lambda m^2 dt (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) c' \cos(f't + \varepsilon'); \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Au lieu du terme $-\frac{r'^2}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} [\cos 2\Lambda - \cos(2v - 2\Lambda)]$, on trouve les deux termes

$$-\frac{1}{4} r'^2 \sin^2 \gamma [\cos 2\Lambda - \cos(2v - 2\Lambda)] + \frac{1}{2} r'^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} [1 - \cos(2v - 4\Lambda)].$$

La correction a été faite dans la *Mécanique céleste*.

(Note de l'Éditeur.)

on aura par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = & \frac{3m^2}{4n} \frac{2A-B-C}{A} (1+\lambda) \cos \theta \\ & - \frac{3m}{8n} \frac{2A-B-C}{A} \cos \theta \frac{1}{dt} \left(d \sin 2v + \frac{\lambda m}{m'} d \sin 2v' \right) \\ & + \frac{3m^2}{4n} \frac{2A-B-C}{A} (1+\lambda) \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta} \sum c \cos(ft + \epsilon) \\ & + \frac{3\lambda m^2}{4n} \frac{2A-B-C}{A} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta} c' \cos(f't + \epsilon'). \end{aligned}$$

Pour intégrer cette équation, nous observerons que la valeur de θ n'est pas constante et que ses variations séculaires deviennent, par l'intégration, sensibles dans le premier terme de cette expression $\frac{d\psi}{dt}$; or la seule partie de la valeur de θ , trouvée dans l'article précédent, qui puisse acquérir une valeur un peu grande par la suite des siècles est celle-ci

$$- \frac{3m^2}{4n} \cos \theta \frac{2A-B-C}{A} (1+\lambda) \sum f \cos(ft + \epsilon);$$

c'est donc la seule à laquelle il soit nécessaire d'avoir égard : ainsi, en faisant, pour abréger,

$$\frac{3m^2}{4n} \cos \theta \frac{2A-B-C}{A} (1+\lambda) = l,$$

le premier terme de l'expression de $\frac{d\psi}{dt}$ deviendra, en négligeant les quantités de l'ordre c^2 ,

$$l + l' \tanh h \sum f \cos(ft + \epsilon).$$

Il est inutile d'avoir égard à la variabilité de θ dans les autres termes

de cette expression, qui donne, après l'avoir intégrée,

$$\begin{aligned} \psi = & l t + \zeta + \sum \left[\left(\frac{l}{f} - 1 \right) \tanh h + \coth h \right] \frac{1}{f} \sin(ft + \epsilon) \\ & - \frac{l}{2m(1+\lambda)} \sin 2v - \frac{l\lambda}{2m'(1+\lambda)} \sin 2v' \\ & + \frac{l\lambda}{(1+\lambda)f'} \frac{\cos^2 h - \sin^2 h}{\sin h \cos h} c' \sin(f't + \epsilon'), \end{aligned}$$

ζ étant une constante arbitraire.

L'expression de θ de l'article précédent peut être mise sous cette forme

$$\begin{aligned} \theta = & h - \sum f \cos(ft + \epsilon) + \frac{l\lambda}{(1+\lambda)f'} c' \cos(f't + \epsilon') \\ & + \frac{l \tanh h}{2m(1+\lambda)} \left(\cos 2u + \frac{m}{m'} \lambda \cos 2u' \right). \end{aligned}$$

En réunissant ces valeurs de ψ et de θ avec celle-ci $p = n$, on aura tout ce qui est nécessaire pour déterminer, à chaque instant, les mouvements de la Terre autour de son centre de gravité.

IX.

Les valeurs de ψ et de θ sont relatives à un plan fixe; pour avoir ces valeurs par rapport à l'écliptique vraie, considérons le triangle sphérique formé par l'écliptique fixe, par l'écliptique vraie et par l'équateur. Il est aisé de voir que la différence des deux arcs interceptés entre l'équateur et le nœud ascendant de l'orbite solaire, dans ce triangle, est à très peu près égale au produit de $\cot \theta$ par l'inclinaison de l'orbite solaire à l'écliptique fixe et par le sinus de la longitude de son nœud; cette différence est donc égale à

$$\cot \theta \sum c \sin(ft + \epsilon);$$

or, si l'on nomme ψ' la distance de l'intersection de l'écliptique vraie et de l'équateur à la droite invariable prise sur le plan fixe, et d'où l'on compte l'angle ψ , on aura à très peu près $\psi - \psi'$ pour cette

même différence; on aura donc

$$\psi - \psi' = \cot \theta \Sigma c \sin(ft + \varepsilon),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \psi' = ft + \zeta + \sum \left(1 + \frac{l}{f} \operatorname{tang}^2 h \right) \left(\frac{l}{f} - 1 \right) \cot h c \sin(ft + \varepsilon) \\ + \frac{l\lambda}{(1+\lambda)f'} \frac{\cos^2 h - \sin^2 h}{\sin h \cos h} c' \sin(f't + \varepsilon') \\ - \frac{l}{2m(1+\lambda)} \sin 2v - \frac{l\lambda}{2m'(1+\lambda)} \sin 2v'. \end{aligned}$$

Si l'on nomme ensuite θ' l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'équateur, on trouvera facilement, en considérant le triangle sphérique précédent et en observant que $\theta' - \theta$ est fort petit,

$$\theta' - \theta = \Sigma c \cos(ft + \varepsilon);$$

on aura par conséquent

$$\begin{aligned} \theta' = h + \sum \left(1 - \frac{l}{f} \right) c \cos(ft + \varepsilon) \\ + \frac{l\lambda}{(1+\lambda)f'} c' \cos(f't + \varepsilon') \\ + \frac{l \operatorname{tang} h}{2m(1+\lambda)} \left(\cos 2v + \frac{m}{m'} \lambda \cos 2v' \right). \end{aligned}$$

La partie $\sum \frac{f-l}{f} c \cos(ft + \varepsilon)$ de cette expression exprime la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique vraie sur l'équateur. Si la Terre était sphérique, il n'y aurait point de précession en vertu de l'action du Soleil et de la Lune; on aurait ainsi $l = 0$, et la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique vraie serait $\Sigma c \cos(ft + \varepsilon)$. On voit donc que l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre change considérablement les lois de cette variation, qui deviendrait même presque nulle, si le mouvement de précession dû à cette action était très rapide relativement au mouvement de l'orbe solaire; car ce dernier mouvement dépend des angles $(f-l)t$, dont les coefficients $f-l$ seraient très petits par rapport à l et à f ; en sorte que la

fonction $\sum \frac{f-l}{f} c \cos(ft + \varepsilon)$ deviendrait presque insensible. Dans les suppositions les plus vraisemblables sur les masses des planètes, l'étendue entière de la variation de l'obliquité de l'écliptique est réduite, par l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre, à peu près au quart de la valeur qu'elle aurait sans cette action; mais cette différence ne se manifeste qu'après deux ou trois siècles. Pour le faire voir, développons la fonction $\sum \frac{f-l}{f} c \cos(ft + \varepsilon)$ par rapport aux puissances du temps; on aura, en ne considérant que sa première puissance,

$$\sum \frac{f-l}{f} c \cos \varepsilon - t \sum (f-l) c \sin \varepsilon.$$

Si la Terre était exactement sphérique, les coefficients $f-l$ resteraient les mêmes; la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique serait donc encore la même dans les temps voisins de l'instant pris pour époque.

La fonction

$$\sum \left(1 + \frac{l}{f} \operatorname{tang}^2 h \right) (l-f) \cot h c \cos(ft + \varepsilon)$$

de l'expression de $\frac{d\psi'}{dt}$ donne la diminution séculaire de l'année moyenne, en réduisant cette fonction en temps, à raison de 360° pour une année. La diminution qui aurait lieu par le seul mouvement de l'écliptique, ou sans l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre, serait $\Sigma (l-f) \cot h c \cos(ft + \varepsilon)$. Cette action change donc encore l'étendue de cette variation dans la longueur de l'année, et elle la réduit à peu près au quart de la valeur qu'elle aurait sans cette action.

C'est ici le lieu de discuter les variations du jour, que les astronomes nomment *jour moyen*. Le moyen mouvement de la Terre dans son orbite est uniforme; si l'on conçoit sur cette orbite un second Soleil dont le mouvement et l'époque soient les mêmes que le moyen mouvement et l'époque du moyen mouvement du vrai Soleil; si l'on

conçoit, de plus, dans le plan de l'équateur, un troisième Soleil mù de manière qu'il coïncide avec le second Soleil toutes les fois que celui-ci passe par l'équinoxe moyen du printemps, et que sa distance à cet équinoxe soit toujours égale à la longitude moyenne du Soleil; l'intervalle de deux retours consécutifs de ce troisième Soleil au méridien sera ce que l'on appelle *jour moyen*. Si le mouvement de l'équinoxe sur l'écliptique vraie était uniforme, et si l'inclinaison de cette écliptique sur l'équateur était constante, le troisième Soleil se mouvrait toujours uniformément sur l'équateur; mais les variations séculaires du mouvement des équinoxes et de l'obliquité de l'écliptique introduisent, dans le mouvement de ce troisième Soleil, de petites inégalités séculaires que nous allons déterminer.

La vitesse de rotation de la Terre peut être supposée constante et égale à n ; de plus, son axe instantané de rotation ne s'écarte jamais du premier axe principal que d'une quantité insensible. Soient donc k la vitesse du troisième Soleil que nous imaginons mù dans le plan de l'équateur, et v sa distance à l'équinoxe du printemps rapporté à l'écliptique fixe; $n - k$ sera la vitesse du second axe principal relativement à ce Soleil, et l'on aura

$$d\varphi - dv = (n - k) dt.$$

Mais on a, par l'article II,

$$d\varphi = n dt + d\psi \cos \theta;$$

on aura donc

$$dv = k dt + d\psi \cos \theta.$$

Soit v' la distance du troisième Soleil à l'équinoxe réel, c'est-à-dire à l'intersection de l'équateur avec l'écliptique vraie; il est aisé de voir, par ce qui précède, que $v - v'$ est égal à $\frac{\Sigma c \sin(ft + \epsilon)}{\sin \theta}$, ce qui donne

$$dv' = dv - dt \frac{\Sigma c f \cos(ft + \epsilon)}{\sin \theta},$$

partant

$$dv' = k dt + d\psi \cos \theta - dt \frac{\Sigma c f \cos(ft + \epsilon)}{\sin \theta}.$$

Soient gt le mouvement sidéral du second Soleil sur l'écliptique vraie; $g + \frac{d\psi}{dt}$ sera sa vitesse angulaire relativement à l'équinoxe réel; mais on a

$$\frac{d\psi'}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \cot \theta \Sigma c f \cos(ft + \epsilon);$$

cette vitesse est donc égale à

$$g + \frac{d\psi}{dt} - \cot \theta \Sigma c f \cos(ft + \epsilon).$$

Elle doit être égale à $\frac{dv'}{dt}$; on pourra donc, au moyen de cette égalité, déterminer k , et l'on aura

$$k = g + (1 - \cos \theta) \frac{d\psi}{dt} + \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \Sigma c f \cos(ft + \epsilon).$$

En substituant pour $d\psi$ et θ leurs valeurs précédentes, on aura

$$\begin{aligned} k = & g + l(1 - \cos h) - \sin h \sum \frac{Pc}{f} \cos(ft + \epsilon) \\ & + (1 - \cos h) \sum \left[\left(\frac{P}{f} - l \right) \tan h + l \cot h \right] c \cos(ft + \epsilon) \left\{ \right. \\ & \left. + \frac{1 - \cos h}{\sin h} \sum c f \cos(ft + \epsilon) \right\}. \end{aligned}$$

La partie constante de k est $g + l(1 - \cos h)$; ainsi, dans la rigueur, le jour moyen est formé par un quatrième Soleil mù constamment dans l'équateur avec la vitesse $g + l(1 - \cos h)$; mais ce Soleil ne passerait pas par l'équinoxe réel en même temps que le second Soleil. En intégrant les termes variables de l'expression de k , on aura, pour l'équation des jours moyens,

$$\begin{aligned} & - \sin h \sum \frac{Pc}{f^2} \sin(ft + \epsilon) \\ & + (1 - \cos h) \sum \left[\left(\frac{P}{f^2} - \frac{l}{f} \right) \tan h + \frac{l}{f} \cot h \right] c \sin(ft + \epsilon) \\ & + \frac{1 - \cos h}{\sin h} \sum c \cos(ft + \epsilon). \end{aligned}$$

Cette équation, réduite en temps à raison de 360° pour un jour, ne s'élevant qu'à un petit nombre de minutes dans une période de plusieurs milliers de siècles, sa considération est entièrement inutile aux astronomes.

X.

La constance dans la durée des jours moyens dépend de l'uniformité du mouvement de rotation de la Terre autour de son premier axe principal, et de ce que l'axe instantané de rotation ne s'écarte jamais de ce premier axe que d'une quantité insensible. Le sinus de l'angle formé par ces deux axes est égal à $\frac{\sqrt{q^2 + r^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$; or il est visible, par ce qui précède, que q et r sont insensibles, et qu'ils n'ont d'influence sensible sur les valeurs de θ et de ψ que par les intégrations; on peut donc toujours confondre l'axe instantané de rotation avec le premier axe principal, et les pôles de rotation de la Terre répondent toujours, à très peu près, aux mêmes points de sa surface.

Il est aisé de voir que, p étant égal à $\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \cos \theta$, il exprime le mouvement de rotation de la Terre autour de son premier axe principal; il importe donc de s'assurer que les variations de la valeur de p sont insensibles. Pour cela, nous observerons que, si $B = C$, ce qui a lieu lorsque la Terre est un sphéroïde de révolution, la première des équations (F) de l'article IV donne $dp = 0$, et par conséquent p égal à une constante n ; mais ces équations n'étant qu'approchées, relativement à l'action de l'astre L , nous allons faire voir que l'équation $p = n$ a encore lieu en ayant égard à tous les termes dus à cette action. La première des équations (D) de l'article II donne

$$dp = \frac{dN}{A};$$

on a, de plus, par l'article IV,

$$\frac{dN}{dt} = S \, dm \left(z \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

Supposons

$$V' = \int \frac{L \, dm}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}};$$

nous aurons

$$\frac{dN}{dt} = z \frac{\partial V'}{\partial y} - y \frac{\partial V'}{\partial z}.$$

Si la Terre est un solide de révolution, V' est le même lorsque x et $\sqrt{y^2 + z^2}$ sont les mêmes; il est donc fonction de ces deux quantités, d'où il suit que $\frac{dN}{dt} = 0$, et par conséquent $p = n$. Voilà donc un cas fort étendu, dans lequel le mouvement de rotation de la Terre autour de son premier axe principal est rigoureusement uniforme.

Considérons maintenant le cas général dans lequel les trois moments d'inertie A , B , C sont inégaux entre eux. La force vive de la Terre est égale à $A p^2 + B q^2 + C r^2$; on a donc, par le principe de conservation des forces vives,

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = \text{const.} + 2 S \int \left(\frac{\partial V}{\partial x'} dx' + \frac{\partial V}{\partial y'} dy' + \frac{\partial V}{\partial z'} dz' \right) dm,$$

la caractéristique intégrale S étant relative à toutes les molécules de la Terre, et la caractéristique intégrale $\int$ se rapportant au temps t . Soit δV la variation de V , en ne faisant varier que les quantités relatives au mouvement de la Terre autour de son centre de gravité; on aura

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = \text{const.} + 2 S \int \delta V \, dm;$$

on a, à très peu près,

$$\begin{aligned} S V \, dm &= \frac{L}{r} + \frac{L x^2}{2 r^3} S (2 x'^2 - y'^2 - z'^2) \, dm \\ &\quad + \frac{L y^2}{2 r^3} S (2 y'^2 - x'^2 - z'^2) \, dm \\ &\quad + \frac{L z^2}{2 r^3} S (2 z'^2 - x'^2 - y'^2) \, dm \\ &= \frac{L}{r} + (B + C - 2 A) \frac{L x^2}{2 r^3} \\ &\quad + (C + A - 2 B) \frac{L y^2}{2 r^3} \\ &\quad + (B + A - 2 C) \frac{L z^2}{2 r^3}. \end{aligned}$$

Si l'on substitue pour x, y, z leurs valeurs données dans l'article V, on aura l'expression de $S \delta V dm$, en ne faisant varier par rapport à δ que les quantités φ, ψ et θ . On peut ici négliger dans $SV dm$ les termes dépendants de l'angle φ , parce qu'ils sont encore insensibles après les intégrations; on peut négliger pareillement les termes dépendants du moyen mouvement de l'astre L, car, soit $k \sin(mt + \epsilon + \psi)$ un de ces termes, il produira dans $S \delta V dm$ le terme $k \delta \psi \cos(mt + \epsilon + \psi)$, et $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ étant beaucoup moindre que m , ce terme sera insensible dans les intégrations. Il suffit donc de conserver dans $SV dm$ les termes qui ne sont assujettis qu'à des variations séculaires; on aura ainsi

$$SV dm = \frac{L}{8r^3} (2A - B - C) [2 - 3 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta \cos \theta \Sigma c \cos(ft + \epsilon)].$$

Pour avoir $S \delta V dm$, il faut différentier cette expression par rapport à θ et à ψ ; or on a, par l'article VIII, en ne considérant que les variations séculaires de θ ,

$$\delta \theta = \Sigma c \delta t \sin(ft + \epsilon).$$

On a, de plus,

$$\Sigma c \cos(ft + \epsilon) = \Sigma c \cos[(f - l)t + lt + \epsilon].$$

En différentiant cette fonction par rapport à ψ ou lt , on aura

$$- l \delta t \Sigma c \sin(ft + \epsilon)$$

pour sa différence. Ces valeurs étant substituées dans $S \delta V$, on aura, en négligeant le carré de c ,

$$S \delta V dm = 0,$$

et, par conséquent,

$$Ap^3 + Bq^3 + Cr^3 = \text{const.}$$

Ainsi, $Bq^3 + Cr^3$ étant toujours insensible, p est toujours, à très peu près, constant. On parviendrait au même résultat en considérant les équations (G) de l'article V: il suffirait de multiplier la première par $A dp$, la seconde par $B dq$ et la troisième par $C dr$. En les ajoutant ensuite, et substituant dans le second membre de leur somme, au

lieu de p, q, r , leurs valeurs données dans l'article II, on arriverait à l'équation

$$Ap dp + Bq dq + Cr dr = 0,$$

et l'on verrait, de plus, que l'on a séparément

$$Bq dq + Cr dr = 0,$$

en ne considérant que les inégalités séculaires.

Le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe instantané de rotation étant égal à

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

ou à

$$\frac{\sqrt{Ap^3 + Bq^3 + Cr^3 + (A - B)q^2 + (A - C)r^2}}{\sqrt{A}},$$

on voit que ce mouvement est uniforme et que les variations séculaires de θ et de ψ n'y produisent aucun changement sensible.

La rotation de la Terre peut donc être supposée uniforme, soit autour de son premier axe principal, soit autour de son axe instantané de rotation; et, de plus, ces deux axes ne font jamais entre eux qu'un angle insensible.

XI.

L'analyse précédente suppose la Terre entièrement solide; mais elle est recouverte en grande partie d'un fluide dont les oscillations peuvent influer sur les mouvements de l'axe terrestre; il importe donc d'examiner cette influence et de voir si les résultats que nous venons de trouver n'en sont point altérés. Pour cela, il faut déterminer ce que l'action de l'océan sur le sphéroïde qu'il recouvre ajoute aux valeurs de N, N', N'' de l'article II.

On a, par cet article,

$$\frac{dN}{dt} = S(Ry' - Qz') dm,$$

$$\frac{dN'}{dt} = S(Pz' - Rx') dm,$$

$$\frac{dN''}{dt} = S(Qx' - Py') dm.$$

Voyons quelles sont les quantités que l'action de l'océan produit dans ces expressions. Ce fluide agit sur le sphéroïde terrestre par sa pression et par son attraction : considérons séparément ces deux effets.

Dans l'état d'équilibre, la pression et l'attraction de l'océan ne produisent aucun mouvement dans l'axe de rotation de la Terre; il ne faut donc avoir égard qu'à l'action de la couche d'eau qui, par les attractions du Soleil et de la Lune, se dispose sur la surface d'équilibre qui terminerait l'océan sans ces attractions. Représentons par zy l'épaisseur de cette couche, et prenons pour unité de densité celle de la mer et pour unité de distance le rayon moyen du sphéroïde terrestre. Nous aurons ainsi à considérer l'action d'une couche aqueuse dont le rayon intérieur est 1 et dont le rayon extérieur est $1 + zy$. Si l'on nomme g la pesanteur, la pression d'une colonne de cette couche sur le sphéroïde qu'elle recouvre sera le produit de zy par la base de cette colonne.

Soit r le rayon mené du centre de gravité de la Terre au point de la surface du sphéroïde que cette colonne presse; soient μ le cosinus de l'angle que le rayon r forme avec l'axe de rotation, et σ l'angle que le plan mené par cet axe et par r forme avec l'axe des y' ; soit enfin $\lambda' = 0$ l'équation de la surface du sphéroïde que recouvre la mer, λ' étant une fonction des coordonnées x', y', z' qui déterminent la position d'un point de cette surface, on a

$$\begin{aligned} x' &= r\mu, \\ y' &= r\sqrt{1-\mu^2}\cos\sigma, \\ z' &= r\sqrt{1-\mu^2}\sin\sigma. \end{aligned}$$

La base de la petite colonne que nous venons de considérer peut être supposée égale à $r^2 d\mu d\sigma$. Cette pression est perpendiculaire à la surface du sphéroïde; en la décomposant en trois forces parallèles aux axes des x' , des y' et des z' , et supposées tendre à augmenter ces coordonnées, on aura pour ces forces

$$-\frac{\alpha g y r^2 d\mu d\sigma}{f} \frac{\partial \lambda'}{\partial x'}, \quad -\frac{\alpha g y r^2 d\mu d\sigma}{f} \frac{\partial \lambda'}{\partial y'}, \quad -\frac{\alpha g y r^2 d\mu d\sigma}{f} \frac{\partial \lambda'}{\partial z'},$$

f étant égal à $\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda'}{\partial z'}\right)^2}$. L'équation à la surface du sphéroïde est de cette forme

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + 2q,$$

q étant une fonction très petite de x', y', z' , dont nous négligeons le carré; on a donc

$$\lambda' = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 - 2q,$$

ce qui change les expressions des trois forces précédentes dans celles-ci :

$$\begin{aligned} &-\frac{2\alpha g y r^2 d\mu d\sigma}{f} \left(x' - \frac{\partial q}{\partial x'}\right), \\ &-\frac{2\alpha g y r^2 d\mu d\sigma}{f} \left(y' - \frac{\partial q}{\partial y'}\right), \\ &-\frac{2\alpha g y r^2 d\mu d\sigma}{f} \left(z' - \frac{\partial q}{\partial z'}\right). \end{aligned}$$

On aura ainsi, en n'ayant égard qu'à ces forces,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \sum \frac{2\alpha g y r^2 d\mu d\sigma}{f} \left(y' \frac{\partial q}{\partial z'} - z' \frac{\partial q}{\partial y'}\right), \\ \frac{dN'}{dt} &= \sum \frac{2\alpha g y r^2 d\mu d\sigma}{f} \left(z' \frac{\partial q}{\partial x'} - x' \frac{\partial q}{\partial z'}\right), \\ \frac{dN''}{dt} &= \sum \frac{2\alpha g y r^2 d\mu d\sigma}{f} \left(x' \frac{\partial q}{\partial y'} - y' \frac{\partial q}{\partial x'}\right). \end{aligned}$$

Rapportons les différences partielles $\frac{\partial q}{\partial x'}, \frac{\partial q}{\partial y'}, \frac{\partial q}{\partial z'}$ aux variables r, μ et σ . Pour cela, nous observerons que l'on a

$$\frac{\partial q}{\partial x'} dx' + \frac{\partial q}{\partial y'} dy' + \frac{\partial q}{\partial z'} dz' = \frac{\partial q}{\partial r} dr + \frac{\partial q}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial q}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Or on a

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad \mu = \frac{x'}{r}, \quad \tan \sigma = \frac{z'}{y'}.$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} dr &= \frac{x' dx' + y' dy' + z' dz'}{r}, \\ d\mu &= \frac{(y'^2 + z'^2) dx' - x' y' dy' - x' z' dz'}{r^3}, \\ \sqrt{d\sigma} &= \frac{y' dz' - z' dy'}{y'^2 + z'^2}. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation différentielle précédente en q et comparant séparément les coefficients de dx' , dy' et dz' , on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x'} &= \mu \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial q}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial q}{\partial y'} &= \sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\sin \sigma}{r \sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial q}{\partial \sigma} - \frac{\mu \sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma}{r} \frac{\partial q}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial q}{\partial z'} &= \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\cos \sigma}{r \sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial q}{\partial \sigma} - \frac{\mu \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma}{r} \frac{\partial q}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

On aura ainsi, en observant que, dans les valeurs précédentes de dN , dN' , dN'' , on peut supposer $r=1$ et $f=2$, en négligeant le carré de q ,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= S \alpha g y d\mu d\sigma \frac{\partial q}{\partial \sigma}, \\ \frac{dN'}{dt} &= S \alpha g y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial q}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{dN''}{dt} &= S \alpha g y d\mu d\sigma \left(-\frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial q}{\partial \sigma} - \sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \frac{\partial q}{\partial \mu} \right). \end{aligned}$$

Déterminons présentement les valeurs de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$ relatives à l'attraction de la couche aqueuse sur le sphéroïde terrestre. Il est clair que, si ce sphéroïde et l'océan qui le recouvre formaient une masse solide, il n'y aurait aucun mouvement dans cette masse, en vertu de l'attraction de toutes ses parties. L'effet de l'attraction de la couche aqueuse sur la mer est donc balancé par celui de l'attraction du sphéroïde terrestre et de la mer sur cette couche; d'où il suit que l'effet de l'attraction de la couche aqueuse est égal à la somme des effets de l'attraction de la Terre entière sur la couche et de l'attrac-

tion de la couche sur l'océan, et que cet effet peut être exprimé par cette somme prise avec un signe contraire.

La résultante de l'action de la Terre entière sur la petite colonne $xy d\mu d\sigma$ de la couche aqueuse et de la force centrifuge est perpendiculaire à la surface d'équilibre de la mer. On aura donc l'action de la Terre entière sur cette colonne en la concevant animée de cette résultante et de la force centrifuge prise avec un signe contraire. La première de ces deux forces est la pesanteur g qui doit être multipliée par la masse $xy d\mu d\sigma$ de la molécule. En supposant donc que l'équation de la surface de l'équilibre de la mer soit

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + 2q',$$

on aura, par ce qui précède, pour les parties de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ relatives à cette force,

$$\begin{aligned} S \alpha g y d\mu d\sigma \frac{\partial q'}{\partial \sigma}, \\ S \alpha g y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial q'}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial q'}{\partial \sigma} \right), \\ S \alpha g y d\mu d\sigma \left(-\frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial q'}{\partial \sigma} - \sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \frac{\partial q'}{\partial \mu} \right). \end{aligned}$$

Il faut, comme on vient de le dire, prendre ces quantités avec un signe contraire; en les réunissant ainsi aux valeurs précédentes de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$, et observant que $q' - q$ exprime la profondeur de la mer, profondeur que nous supposons très petite et que nous représenterons par γ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= -S \alpha g y d\mu d\sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}, \\ \frac{dN'}{dt} &= -S \alpha g y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{dN''}{dt} &= S \alpha g y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right). \end{aligned}$$

Il faut maintenant considérer l'effet de la force centrifuge prise avec

un signe contraire et le retrancher de ces valeurs de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$, ce qui revient à ajouter à ces valeurs l'effet de la force centrifuge. Si l'on désigne par n la vitesse de rotation de la Terre, la force centrifuge de la petite colonne $\alpha y d\mu d\sigma$ sera $n^2 \sqrt{1-\mu^2}$; en la multipliant par la masse de la colonne, on aura

$$\alpha n^2 y d\mu d\sigma \sqrt{1-\mu^2}$$

pour la force entière. Cette force est dirigée suivant le rayon du parallèle : en la décomposant en deux, l'une parallèle aux y' et l'autre parallèle aux z' , on aura

$$\alpha n^2 y d\mu d\sigma \sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma$$

pour la première, et

$$\alpha n^2 y d\mu d\sigma \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma$$

pour la seconde. On aura donc, pour les parties de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ relatives à la force centrifuge,

$$\frac{dN}{dt} = 0,$$

$$\frac{dN'}{dt} = -\alpha n^2 y d\mu d\sigma \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma,$$

$$\frac{dN''}{dt} = \alpha n^2 y d\mu d\sigma \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma.$$

Il nous reste à déterminer l'effet de l'action de la couche aqueuse sur l'océan. Pour cela, représentons par αU la somme des molécules de cette couche, divisées par leurs distances respectives à une molécule de l'océan, déterminée, soit par les quantités r , μ et σ , soit par les coordonnées x' , y' , z' ; $\alpha \frac{\partial U}{\partial x'}$, $\alpha \frac{\partial U}{\partial y'}$ et $\alpha \frac{\partial U}{\partial z'}$ seront les actions de la couche sur cette molécule, ces actions tendant à augmenter les coordonnées x' , y' , z' . La masse de la molécule est $r^2 dr d\mu d\sigma$. Les parties de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$, relatives à l'action de la couche aqueuse, seront

donc

$$\alpha x r^2 dr d\mu d\sigma \left(y' \frac{\partial U}{\partial z'} - z' \frac{\partial U}{\partial y'} \right),$$

$$\alpha x r^2 dr d\mu d\sigma \left(z' \frac{\partial U}{\partial x'} - x' \frac{\partial U}{\partial z'} \right),$$

$$\alpha x r^2 dr d\mu d\sigma \left(x' \frac{\partial U}{\partial y'} - y' \frac{\partial U}{\partial x'} \right).$$

Pour intégrer ces fonctions relativement à r , nous observerons que, la profondeur de la mer étant supposée très petite, on peut supposer ici

$$S r^2 dr = \gamma.$$

Si, de plus, on change les différences partielles $\frac{\partial U}{\partial x'}$, $\frac{\partial U}{\partial y'}$ et $\frac{\partial U}{\partial z'}$ en d'autres, relatives aux variables r , σ et μ , les fonctions précédentes deviendront, en les prenant avec un signe contraire,

$$-S \alpha y d\mu d\sigma \frac{\partial U}{\partial \sigma},$$

$$-S \alpha y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right)$$

$$S \alpha y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right).$$

Si l'on réunit ces valeurs aux expressions partielles de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$, trouvées ci-dessus, on aura, pour les expressions entières de ces quantités relatives à l'attraction et à la pression de l'océan,

$$\frac{dN}{dt} = -S \alpha g y d\mu d\sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} - S \alpha y d\mu d\sigma \frac{\partial U}{\partial \sigma},$$

$$\frac{dN'}{dt} = -S \alpha g y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right)$$

$$-S \alpha y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right)$$

$$-S \alpha n^2 y d\mu d\sigma \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma,$$

$$\frac{dN''}{dt} = S \alpha g y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right)$$

$$+ S \alpha y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right)$$

$$+ S \alpha n^2 y d\mu d\sigma \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma.$$

Les intégrales précédentes doivent être prises depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, et depuis $\sigma = 0$ jusqu'à $\sigma = 2\pi$. En intégrant par rapport à σ , on a

$$S \alpha g y d\sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} = \alpha g y \gamma - S \alpha g \gamma d\sigma \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \text{const.}$$

Il est clair que, aux deux limites de l'intégrale $\sigma = 0$ et $\sigma = 2\pi$, la fonction $\alpha g y \gamma$ est la même, puisque ces limites sont au même point de la surface du sphéroïde; on a donc

$$\alpha g y \gamma + \text{const.} = 0$$

et, par conséquent,

$$S \alpha g y d\mu d\sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} = - S \alpha g \gamma d\mu d\sigma \frac{\partial y}{\partial \sigma}.$$

En intégrant par rapport à μ , on a

$$S \alpha g y d\mu \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma = \alpha g y \gamma \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma + S \alpha g y \gamma \frac{\mu d\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} - S \alpha g \gamma d\mu \frac{\partial y}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma + \text{const.}$$

L'intégrale doit être prise depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$; or y et γ ne sont jamais infinis: ainsi, le radical $\sqrt{1-\mu^2}$ étant nul à ces limites, on a, à ces mêmes limites,

$$\alpha g y \gamma \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma + \text{const.} = 0$$

et, par conséquent,

$$S \alpha g y d\mu d\sigma \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} = S \alpha g y \gamma \frac{\mu d\mu d\sigma \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} - S \alpha g \gamma d\mu d\sigma \frac{\partial y}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma.$$

On trouve encore, en intégrant par rapport à σ ,

$$S \alpha g y d\mu d\sigma \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} = - S \alpha g \gamma \frac{d\mu d\sigma \mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + S \alpha g y \gamma d\mu d\sigma \frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}};$$

on aura donc

$$S \alpha g y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right) = - S \alpha g \gamma d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial y}{\partial \sigma} \right).$$

On trouvera pareillement

$$S \alpha g y d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right) = - S \alpha g \gamma d\mu d\sigma \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial y}{\partial \sigma} \right).$$

Les expressions précédentes de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ deviendront ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= S \alpha \gamma d\mu d\sigma \left(g \frac{\partial y}{\partial \sigma} - \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{dN'}{dt} &= S \alpha \gamma d\mu d\sigma \left[\sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma \left(g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) - \frac{\mu \cos \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \left(g \frac{\partial y}{\partial \sigma} - \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right) \right] \\ &\quad - S \alpha n^2 y d\mu d\sigma \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin \sigma, \\ \frac{dN''}{dt} &= - S \alpha \gamma d\mu d\sigma \left[\sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma \left(g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) + \frac{\mu \sin \sigma}{\sqrt{1-\mu^2}} \left(g \frac{\partial y}{\partial \sigma} - \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right) \right] \\ &\quad + S \alpha n^2 y d\mu d\sigma \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos \sigma. \end{aligned}$$

XII.

Déterminons maintenant l'influence de ces quantités sur les mouvements du sphéroïde terrestre autour de son centre de gravité. Pour cela, reprenons les équations (D) de l'article II; si l'on néglige, dans la première, la très petite quantité $\frac{C-B}{A} \tau p$, on aura

$$dp = \frac{dN}{A}.$$

On voit ainsi que les termes dépendants de très petits angles, que contient dN , peuvent, par l'intégration, en produire de très grands dans la valeur de p ; il est donc nécessaire d'avoir égard à ces termes.

Les deux dernières des équations (D) donnent, en négligeant les quantités fort petites $\frac{A-C}{B}rp$ et $\frac{A-B}{C}pq$,

$$dq = \frac{dN'}{B}, \quad dr = \frac{dN''}{C}.$$

Les équations (c) du même article donnent

$$\frac{d\theta}{dt} = r \sin \varphi - q \cos \varphi,$$

$$\frac{d\psi \sin \theta}{dt} = r \cos \varphi + q \sin \varphi;$$

en faisant donc

$$\frac{d\theta}{dt} = x'', \quad \frac{d\psi \sin \theta}{dt} = y'',$$

et, observant que $d\varphi$ est à très peu près égal à $n dt$, on aura

$$dx'' = dr \sin \varphi - dq \cos \varphi + n y'' dt,$$

$$dy'' = dr \cos \varphi + dq \sin \varphi - n x'' dt.$$

Si l'on substitue pour dq et dr leurs valeurs précédentes, dans lesquelles on peut changer B et C en A, on aura

$$dx'' = \frac{dN'}{A} \sin \varphi - \frac{dN''}{A} \cos \varphi + n y'' dt,$$

$$dy'' = \frac{dN''}{A} \cos \varphi + \frac{dN'}{A} \sin \varphi - n x'' dt.$$

Soient $H dt \cos(\dot{t} + \varepsilon)$ un terme quelconque de $\frac{dN'}{A} \sin \varphi - \frac{dN''}{A} \cos \varphi$, et $H' dt \sin(\dot{t} + \varepsilon)$ le terme correspondant de $\frac{dN''}{A} \cos \varphi + \frac{dN'}{A} \sin \varphi$; les termes correspondants de x'' et de y'' seront

$$y'' = \frac{iH' - nH}{n^2 - i^2} \cos(\dot{t} + \varepsilon),$$

$$x'' = \frac{nH' - iH}{n^2 - i^2} \sin(\dot{t} + \varepsilon);$$

les termes dépendants de très petits angles, ou, ce qui revient au

même, ceux dans lesquels i est fort petit, sont encore peu sensibles dans les valeurs de x'' et de y'' ; mais l'intégration les rend très sensibles dans les valeurs de θ et de ψ et l'on a vu que la précession et la nutation dépendent de termes semblables; il est donc essentiel d'y avoir égard. Ces termes sont produits par ceux de dN' et de dN'' qui dépendent d'angles très peu différents de nt , car, en les multipliant par $\sin \varphi$ et par $\cos \varphi$, il en résulte des termes dépendants d'angles très petits. Ainsi, dans le développement de dN' et de dN'' , on doit faire beaucoup d'attention à ces termes.

Les termes dans lesquels i est très peu différent de n deviennent fort grands dans les valeurs de x'' et de y'' , parce que le diviseur $i^2 - n^2$ est alors très petit. Ces termes résultent de ceux de dN' et de dN'' , qui renferment de très petits angles; il est donc essentiel d'y avoir égard. Les termes de dN' et de dN'' , qui dépendent d'angles très peu différents de $2nt$, en produisent dans x'' et y'' , qui dépendent d'angles très peu différents de nt . Soit $L dt \sin(2nt + vt + \varepsilon)$ un terme de dN'' dans lequel v est très petit; il en résultera dans $dN' \sin \varphi - dN'' \cos \varphi$ le terme $\frac{L}{2} dt \cos(nt + vt - \varepsilon)$, et, dans $dN' \cos \varphi + dN'' \sin \varphi$, il en résultera le terme $\frac{L}{2} dt \cos(nt + vt + \varepsilon)$, ce qui ne donne, dans x'' et y'' , que des quantités qui, n'ayant point v pour diviseur, sont encore insensibles. On verrait de même qu'un terme de dN' de la forme

$$L dt \cos(2nt + vt + \varepsilon)$$

ne produirait, dans x'' et y'' , que des quantités insensibles. Il ne faut donc avoir égard, dans les valeurs de dN' et dN'' , qu'aux termes dépendants de très petits angles ou d'angles très peu différents de nt .

Pour analyser ces différents termes, il est nécessaire de rappeler les équations différentielles du mouvement de l'océan. Considérons une molécule de sa surface, déterminée dans l'état d'équilibre par les coordonnées μ et σ ; concevons que, dans l'état de mouvement, elle soit élevée de la quantité xy au-dessus de la surface d'équilibre; que sa latitude soit diminuée de la quantité xu , et que l'angle σ soit augmenté de zv . Nommons encore v le complément de la déclinaison de

l'astre L; Π son ascension droite, et r' sa distance au centre de gravité de la Terre. Soit

$$f = \frac{3L}{2r'^3} [\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos (\Pi - \varphi - \omega)]^2;$$

on aura les trois équations suivantes (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1776, p. 178) ⁽¹⁾ :

$$(1) \quad \begin{cases} y = \frac{\partial(\gamma u \sqrt{1-\mu^2})}{\partial \mu} - \frac{\partial(\gamma v)}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n \frac{\partial v}{\partial t} \mu \sqrt{1-\mu^2} = \left(g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) \sqrt{1-\mu^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = - \left(g \frac{\partial y}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) \frac{\partial f}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial \mu^3}. \end{cases}$$

Si l'on ne considère que les termes dépendants d'angles croissants avec une extrême lenteur ou indépendants de φ , il est visible que la partie de f relative à ces angles est indépendante de ω ; les parties de y et de U relatives aux mêmes angles sont donc elles-mêmes indépendantes de ω ; en sorte que, en ne considérant que ces termes, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \omega} = 0$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= 0, \\ \frac{dN^s}{dt} \sin \varphi - \frac{dN^t}{dt} \cos \varphi &= -Sx\gamma d\mu d\omega \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \omega) \left(g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \right), \\ \frac{dN^s}{dt} \cos \varphi + \frac{dN^t}{dt} \sin \varphi &= -Sx\gamma d\mu d\omega \sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi + \omega) \left(g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \right). \end{aligned}$$

[Voir sur cela les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1775 ⁽²⁾.]

⁽¹⁾ Œuvres de Laplace, T. IX, p. 188.

⁽²⁾ Œuvres de Laplace, T. IX.

Il résulte de ce que j'ai fait voir dans les *Mémoires* cités que, relativement aux termes croissant avec une extrême lenteur, on peut supposer, à très peu près,

$$0 = g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Cette équation est d'autant plus exacte que ces termes varient avec plus de lenteur et qu'ils ont, par conséquent, plus d'influence sur les mouvements de l'axe de la Terre. On a donc, relativement à ces termes,

$$\begin{aligned} \frac{dN^s}{dt} \sin \varphi - \frac{dN^t}{dt} \cos \varphi &= -Sx\gamma d\mu d\omega \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \omega) \frac{\partial f}{\partial \mu}, \\ \frac{dN^s}{dt} \cos \varphi + \frac{dN^t}{dt} \sin \varphi &= -Sx\gamma d\mu d\omega \sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi + \omega) \frac{\partial f}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Si nous concevons que la mer forme une masse solide avec la Terre, il est visible, par ce qui précède, que les deux dernières équations subsisteront encore; ainsi, relativement aux termes de l'expression de y , qui croissent avec beaucoup de lenteur, les mouvements de l'axe de la Terre produits par l'action de l'océan sur le sphéroïde qu'il recouvre sont les mêmes que si ce fluide formait une masse solide avec la Terre.

Il nous reste à considérer les parties de $\frac{dN^s}{dt}$ et de $\frac{dN^t}{dt}$ qui dépendent d'angles très peu différents de nt ; on a

$$\begin{aligned} \frac{dN^s}{dt} \sin \varphi - \frac{dN^t}{dt} \cos \varphi &= S\alpha n^2 y d\mu d\omega \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \omega) \\ &\quad - Sx\gamma d\mu d\omega \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \omega) \left(g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) \\ &\quad + Sx\gamma d\mu d\omega \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cos(\varphi + \omega) \left(g \frac{\partial y}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \right). \end{aligned}$$

La première des équations (1) donne

$$\begin{aligned} S\alpha n^2 y d\mu d\omega \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \omega) \\ = S\alpha n^2 d\mu d\omega \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \omega) \left[\frac{\partial(\gamma u \sqrt{1-\mu^2})}{\partial \mu} - \frac{\partial \gamma v}{\partial \omega} \right]; \end{aligned}$$

en intégrant depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, on a

$$S \mu d\mu \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial(\gamma u \sqrt{1-\mu^2})}{\partial \mu} = -S \gamma u d\mu (1-2\mu^2);$$

on a pareillement, en intégrant depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 2\pi$,

$$S d\varpi \sin(\varphi + \varpi) \frac{\partial \gamma v}{\partial \varpi} = -S \gamma v d\varpi \cos(\varphi + \varpi),$$

partant

$$\begin{aligned} & S \alpha n^2 \gamma d\mu d\varpi \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \\ &= -S \alpha n^2 \gamma u d\mu d\varpi (1-2\mu^2) \sin(\varphi + \varpi) \\ &+ S \alpha n^2 \gamma v d\mu d\varpi \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi + \varpi). \end{aligned}$$

On peut supposer γu développé dans une suite de termes de la forme

$$M \sin(it + s\varpi + \varepsilon),$$

M étant fonction de μ seul et s étant un nombre entier positif ou négatif, les nombres fractionnaires étant exclus, parce que γu est le même lorsque $\varpi = 0$ et lorsque $\varpi = 2\pi$. Pareillement, γv peut être supposé développé dans une suite correspondante de termes de la forme

$$O \cos(it + s\varpi + \varepsilon),$$

O étant fonction de μ seul. Soient M' et O' les valeurs de M et de O relatives au même arc it et qui correspondent à $s=1$; on aura, en considérant l'ensemble des termes dépendants de it ,

$$\begin{aligned} & S \alpha n^2 \gamma d\mu d\varpi \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \\ &= -\alpha n^2 \pi S d\mu \cos(it + \varepsilon - \varphi) [(1-2\mu^2)M' - \mu \sqrt{1-\mu^2} O']. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie la seconde des équations (I) par

$$\alpha \gamma d\mu d\varpi \sin(\varphi + \varpi),$$

et qu'on l'ajoute à la troisième, multipliée par

$$\alpha \gamma d\mu d\varpi \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi + \varpi),$$

on aura

$$\begin{aligned} & S \alpha \gamma d\mu d\varpi \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sin(\varphi + \varpi) + 2n\mu^2 \frac{\partial u}{\partial t} \cos(\varphi + \varpi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi + \varpi) - 2n \frac{\partial v}{\partial t} \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \right] \\ &= S \alpha \gamma d\mu d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \left(g \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) \\ & \quad - S \alpha \gamma d\mu d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cos(\varphi + \varpi) \left(g \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi} - \frac{\partial U}{\partial \varpi} - \frac{\partial f}{\partial \varpi} \right). \end{aligned}$$

Si l'on substitue pour γu l'ensemble des termes relatifs à l'angle it , et si l'on observe qu'ici nous ne considérons que le cas dans lequel i diffère très peu de n , le premier membre de cette équation deviendra

$$-\alpha n^2 \pi S d\mu \cos(it + \varepsilon - \varphi) [(1-2\mu^2)M' - \mu \sqrt{1-\mu^2} O'];$$

on aura donc, en n'ayant égard qu'aux termes dans lesquels i est à très peu près égal à n ,

$$\begin{aligned} & S \alpha n^2 \gamma d\mu d\varpi \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \\ &= S \alpha \gamma d\mu d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \left(g \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) \\ & \quad - S \alpha \gamma d\mu d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cos(\varphi + \varpi) \left(g \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi} - \frac{\partial U}{\partial \varpi} - \frac{\partial f}{\partial \varpi} \right), \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{dN'}{dt} \sin \varphi - \frac{dN'}{dt} \cos \varphi &= S \alpha \gamma d\mu d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial f}{\partial \varpi} \cos(\varphi + \varpi) \\ & \quad - S \alpha \gamma d\mu d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial f}{\partial \mu} \sin(\varphi + \varpi). \end{aligned}$$

On trouvera de la même manière

$$\begin{aligned} \frac{dN'}{dt} \cos \varphi + \frac{dN'}{dt} \sin \varphi &= -S \alpha \gamma d\mu d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial f}{\partial \varpi} \sin(\varphi + \varpi) \\ & \quad - S \alpha \gamma d\mu d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial f}{\partial \mu} \cos(\varphi + \varpi). \end{aligned}$$

Il est facile de s'assurer, par ce qui précède, que ces valeurs de

$$\frac{dN'}{dt} \sin \varphi - \frac{dN'}{dt} \cos \varphi \quad \text{et de} \quad \frac{dN'}{dt} \cos \varphi + \frac{dN'}{dt} \sin \varphi$$

sont les mêmes que si la mer formait une masse solide avec la Terre, d'où résulte ce théorème remarquable, savoir, que les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre sont exactement les mêmes que si la mer formait une masse solide avec le sphéroïde qu'elle recouvre.

XIII.

Comparons maintenant la théorie aux observations, et voyons les conséquences qui en résultent sur la constitution du globe terrestre. Si, dans l'expression de θ de l'article VIII, on réduit

$$\sum \frac{cl}{f} \cos(ft + \varepsilon)$$

dans une série ordonnée par rapport aux puissances de t , on aura, en ne conservant que la première puissance,

$$\sum \frac{cl}{f} \cos(ft + \varepsilon) = \sum \frac{cl}{f} \cos \varepsilon - lt \Sigma c \sin \varepsilon.$$

Prenons pour plan fixe celui de l'écliptique au commencement de 1750, où nous fixerons l'origine du temps t . Le carré de l'inclinaison de l'écliptique vraie sur ce plan étant

$$[\Sigma c \sin(ft + \varepsilon)]^2 + [\Sigma c \cos(ft + \varepsilon)]^2,$$

on a

$$\Sigma c \sin \varepsilon = 0, \quad \Sigma c \cos \varepsilon = 0,$$

ce qui donne

$$\sum \frac{lc}{f} \cos(ft + \varepsilon) = \sum \frac{lc}{f} \cos \varepsilon.$$

En retranchant ce terme de la valeur de h , on aura l'inclinaison moyenne de l'équateur à l'écliptique au commencement de 1750;

mais, si l'on veut que h représente cette inclinaison moyenne, il faudra supposer

$$\sum \frac{lc}{f} \cos \varepsilon = 0,$$

et c'est ce que l'on peut toujours faire, car le terme

$$\sum \frac{lc}{f} \cos(ft + \varepsilon)$$

résultant de l'intégrale

$$\int dt \Sigma lc \sin(ft + \varepsilon),$$

on peut, en ajoutant à cette intégrale la constante

$$-\sum \frac{lc}{f} \cos \varepsilon,$$

la rendre nulle lorsque $t = 0$, ce qui revient à supposer

$$\sum \frac{lc}{f} \cos \varepsilon = 0.$$

On aura donc ainsi

$$\theta = h + \frac{l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \cos(f't + \varepsilon') + \frac{l \tanh h}{2m(1+\lambda)} \left(\cos 2v + \frac{m}{m'} \lambda \cos 2v' \right);$$

la valeur de θ' de l'article IX deviendra

$$\begin{aligned} \theta' = h - t \Sigma c f \sin \varepsilon + \frac{l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \cos(f't + \varepsilon') \\ + \frac{l \tanh h}{2m(1+\lambda)} \left(\cos 2v + \frac{m}{m'} \lambda \cos 2v' \right); \end{aligned}$$

enfin, les valeurs de ψ et de ψ' des articles VIII et IX deviennent

$$\begin{aligned} \psi = lt - \frac{l}{2m(1+\lambda)} \left(\sin 2v + \frac{m}{m'} \lambda \sin 2v' \right) \\ + \frac{l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \frac{\cos^2 h - \sin^2 h}{\sin h \cos h} \sin(f't + \varepsilon'), \\ \psi' = lt - t \cot h \Sigma c f \cos \varepsilon - \frac{l}{2m(1+\lambda)} \left(\sin 2v + \frac{m}{m'} \lambda \sin 2v' \right) \\ + \frac{l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \frac{\cos^2 h - \sin^2 h}{\sin h \cos h} \sin(f't + \varepsilon'). \end{aligned}$$

Le terme $-l\Sigma cf \sin \epsilon$ de l'expression de θ' exprime la diminution séculaire actuelle de l'obliquité de l'écliptique. Les observations laissent encore de l'incertitude sur cet objet; en prenant un milieu entre leurs résultats, on peut fixer cette diminution à $50''$ dans ce siècle: ainsi T représentant une année julienne, nous supposons

$$T\Sigma cf \sin \epsilon = 0'',5.$$

Cette équation donne, par la théorie des planètes,

$$T\Sigma cf \cos \epsilon = 0'',080333;$$

on aura donc la précession annuelle des équinoxes égale à

$$lT = 0'',080333 \cot h.$$

Delambre a trouvé, par une nouvelle discussion des observations, cette précession égale à $50'',1$; partant

$$lT = 0,080333 \cot h = 50'',1.$$

Substituons pour l sa valeur; mais, pour plus d'exactitude, conservons les carrés de l'excentricité et de l'inclinaison des orbites lunaire et solaire; on aura, par l'article VIII,

$$lT = \frac{3m^2}{4n} T \cos h \frac{2A - B - C}{A} \left[\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda \left(\cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \gamma \right)}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

e étant l'excentricité de l'orbite solaire, et e' étant l'excentricité de l'orbite lunaire.

Pour réduire en nombres cette valeur de lT , nous observerons que l'on a, par observations,

$$e = 0,016814, \quad e' = 0,0550368,$$

$$\gamma = 5^\circ 8' 49'', \quad h = 23^\circ 28' 20'';$$

la longueur de l'année sidérale est de $365,256384$, et celle du jour

sidéral est de $0,997269722$, ce qui donne

$$\frac{m}{n} = \frac{0,997269722}{365,256384}.$$

Enfin on a

$$mT = \frac{360^\circ,365,25}{365,256384},$$

et les observations des marées donnent

$$\lambda = 3;$$

on aura ainsi, en supposant $\lambda = 3(1+i)$,

$$lT = \frac{2A - B - C}{A} 9682'',69 (1 + i,0,74849),$$

ce qui donne

$$\frac{2A - B - C}{A} = \frac{0,00519329}{1 + i,0,74849};$$

on a, à fort peu près, par l'article III,

$$\frac{2A - B - C}{A} = \frac{2\alpha(H - \frac{1}{2}\alpha) S \rho a^2 da}{S \rho a^2 da}.$$

Il est fort remarquable que la valeur de H'' du même article n'entre point dans cette équation; d'où il suit que les mouvements de la Terre autour de son centre de gravité sont les mêmes que si elle était un ellipsoïde de révolution, dont αH est l'ellipticité; on a $\frac{1}{2}\alpha\gamma = \frac{1}{378}$; on aura donc

$$\alpha H = 0,0017301 + \frac{0,00259664}{1 + i,0,74849} \frac{S \rho a^2 da}{S \rho a^2 da}.$$

Il est très vraisemblable que la densité des couches du sphéroïde terrestre augmente de la surface au centre, et, dans ce cas, $\frac{S \rho a^2 da}{S \rho a^2 da}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$; en faisant donc $i = 0$, conformément aux observations des marées, la valeur de αH sera moindre que $0,0032881$, ou que $\frac{1}{304}$. Si la Terre est elliptique, αH exprime son ellipticité; on ne peut donc pas supposer cette ellipticité plus grande que $\frac{1}{304}$.

Dans l'hypothèse de l'homogénéité de la Terre, $zH = \frac{1}{2}z\varphi$, et l'équation précédente donne à peu près $\lambda = \frac{1}{2}$; cette valeur est trop éloignée de satisfaire aux phénomènes des marées pour pouvoir être admise; ainsi l'on doit rejeter l'hypothèse de la Terre homogène.

Les observations du pendule donnent $zH = \frac{1}{225}$ à peu près; elles s'accordent donc, aussi bien qu'on peut le désirer, avec le phénomène de la précession des équinoxes et avec ceux des marées. Les variations observées dans les degrés des méridiens ne semblent pas pouvoir se concilier avec cette valeur de zH , ni même avec l'hypothèse de l'ellipticité de la Terre; mais j'ai remarqué ailleurs que cela dépend de termes peu sensibles dans les expressions de la pesanteur et de la parallaxe, et qui sont entièrement insensibles dans les phénomènes de la précession et de la nutation de l'axe terrestre.

Le terme $\frac{D\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \cos(f't + \epsilon')$ des expressions de θ et de θ' , en y faisant $\lambda = 3$, devient $10'',036 \cos(f't + \epsilon')$, $f'T$ étant égal à $69\,631''$, et IT étant, par ce qui précède, égal à $50'',285$. Ce terme représente la nutation observée par Bradley, et que ce grand astronome a fixée par ses observations à $9''$. Maskelyne, par une discussion nouvelle de ces mêmes observations, l'a portée à $9''\frac{1}{2}$; et il me paraît nécessaire, d'après les phénomènes des marées, de l'augmenter encore d'une demi-seconde. L'étendue observée de la nutation peut servir à déterminer la valeur de λ : ainsi, dans les deux suppositions de $\lambda = \frac{1}{2}$ et de $\lambda = 3$, dont la différence est très sensible sur les phénomènes des marées, comme je l'ai fait voir dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1790 ⁽¹⁾, les coefficients de la nutation ne diffèrent pas entre eux d'une demi-seconde, d'où il suit que la valeur de λ est beaucoup mieux déterminée par les phénomènes des marées que par celui de la nutation.

Si la Terre est homogène, on a, par ce qui précède, $\lambda = \frac{1}{2}$, et le coefficient de la nutation se réduit à $8''$ à peu près; il est incontestablement plus grand par les observations: ainsi le phénomène de la

⁽¹⁾ Voir plus haut.

nutation concourt avec ceux des marées pour faire rejeter cette hypothèse.

Le terme correspondant des valeurs de ψ et de ψ' est

$$\frac{2D\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \cot 2h \sin(f't + \epsilon') = 18'',754 \sin(f't + \epsilon');$$

c'est l'équation de la précession.

Les expressions de θ et de θ' renferment encore le terme

$$\frac{l \tan h}{2m(1+\lambda)} \cos 2v,$$

qui est égal à $0'',87 \cos 2v$. Le terme correspondant des expressions de ψ et de ψ' est $-2'',00 \sin 2v$; vu la précision des observations modernes, il serait utile d'avoir égard à ces termes. On voit, par l'analyse précédente, que ces termes et ceux dus à la nutation et à l'équation de la précession sont les seuls dont on doive tenir compte, tous les autres étant insensibles.

La longueur de ce Mémoire m'oblige d'en renvoyer la suite au Volume suivant ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ La continuation de ce Mémoire ne se trouve dans aucun des Volumes suivants.



MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS SÉCULAIRES DES MOUVEMENTS DE LA LUNE,

DE SON APOGÉE ET DE SES NEUDS.



MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS SÉCULAIRES DES MOUVEMENTS DE LA LUNE,

DE SON APOGÉE ET DE SES NŒUDS ⁽¹⁾.

Mémoires de l'Académie des Sciences, 1^{re} Série, T. II; fructidor an VII (2).

J'ai annoncé à la première classe de l'Institut national, et j'ai publié depuis dans la *Connaissance des Temps* pour l'an VIII de l'ère française les résultats auxquels je suis parvenu sur les équations séculaires des mouvements de la Lune, par rapport aux étoiles, à ses nœuds et à son apogée, réservant pour nos Mémoires l'analyse qui m'a conduit à ces résultats. Je présente ici cette analyse; mais je vais la faire précéder de quelques réflexions sur la théorie lunaire.

Les géomètres ont imaginé diverses méthodes pour déterminer le mouvement de la Lune par la loi de la pesanteur universelle, et l'on sait que leurs calculs, combinés avec les observations, ont produit des Tables qui laissent très peu de chose à désirer du côté de la précision. Celles de Mayer, corrigées depuis par Mason, et comparées à 1137 observations de Bradley, s'en écartent rarement d'une demiminute; ce qui prouve que les inégalités périodiques de ces Tables sont bien déterminées, et qu'il n'en est aucune un peu sensible que l'on ait omise. Mais on voit avec peine que, si la théorie de la pesanteur a fait connaître la loi de ces inégalités, elle n'a pas suffi seule à

⁽¹⁾ Le 21 nivôse an VI.

⁽²⁾ *Mémoires de l'Institut national des Sciences et Arts, T. II.*

fixer leur valeur. A la vérité, cette détermination dépend d'approximations extrêmement compliquées, dans lesquelles on n'est jamais sûr que les quantités négligées sont très petites; et c'est là, sans doute, ce qui a porté Mayer à recourir, pour cet objet, aux observations. Mais il me semble que les géomètres pourraient obvier à cet inconvénient en discutant avec une attention scrupuleuse l'influence des intégrations successives sur les quantités que l'on néglige et en s'attachant à suivre la même méthode dans leurs recherches, ce qui rendrait les calculs déjà faits utiles à ceux qui, cherchant à perfectionner la théorie de la Lune, ajouteraient ainsi leurs travaux aux travaux de leurs prédécesseurs.

De toutes les méthodes proposées jusqu'à ce jour, celle de d'Alembert me paraît être la plus simple, et je suis persuadé que, en la présentant avec la clarté dont elle est susceptible, elle doit conduire aux résultats les plus exacts. Les approximations sont d'autant plus commodées et précises, que l'on développe moins de fonctions en séries, et que les séries sont ordonnées par rapport aux puissances de quantités très petites.

D'après ce principe, il est avantageux d'exprimer, comme dans la méthode dont je viens de parler, les coordonnées du mouvement lunaire en séries de sinus et de cosinus d'angles dépendants du mouvement vrai de la Lune. Si l'on veut avoir ensuite le mouvement vrai en temps moyen, on pourra y parvenir par une approximation très rapide, dans laquelle il sera facile de s'assurer de la petitesse des quantités négligées. Mais on trouverait peut-être quelque avantage à former des Tables de l'expression du temps en mouvement vrai de la Lune, puisque c'est le temps que l'on conclut de sa longitude vraie, dans l'usage des observations lunaires, pour déterminer les longitudes terrestres. J'envisagerai donc sous ce point de vue la théorie de la Lune dans les recherches suivantes, dont voici le résultat.

Les variations séculaires de l'excentricité de l'orbite terrestre en produisent de correspondantes dans le moyen mouvement de la Lune, qui s'accélère quand cette excentricité diminue, et qui se ralentit quand

elle augmente. J'ai déjà donné dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de l'année 1786 ⁽¹⁾ la formule de ces variations, à laquelle j'ai été conduit en appliquant aux satellites de Jupiter ma théorie de Jupiter et de Saturne. Plusieurs géomètres l'ont ensuite tirée de leurs méthodes; ce qui est aisé, lorsque les vérités sont une fois connues, et ce qui, dans le cas présent, était d'autant plus facile, que l'on peut y parvenir sans le secours de l'Analyse, ainsi que je l'ai fait voir dans mon *Exposition du système du monde*: en sorte que l'on aurait lieu d'être étonné que la cause de l'équation séculaire de la Lune ait échappé si longtemps aux efforts des géomètres, si l'on ne savait pas que les idées les plus simples sont presque toujours celles qui s'offrent les dernières à l'esprit humain.

J'ai observé dans les *Mémoires* cités que les mouvements des nœuds et de l'apogée de l'orbite lunaire sont pareillement assujettis à des inégalités séculaires. Dans la détermination de leur valeur, je n'ai eu égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, ce qui est d'une grande précision relativement à l'équation séculaire de ce mouvement; mais on sait que cette puissance ne donne que la moitié du mouvement de l'apogée de la Lune: l'autre moitié est principalement due aux termes dépendants de la seconde puissance de la force perturbatrice, et résulte de la combinaison des deux grandes inégalités, la *variation* et l'*éviction*. Cette remarque, l'une des plus importantes que l'on ait faites sur le système du monde, et dont on est redevable à Clairaut, nous prouve la nécessité d'avoir égard au carré de la force perturbatrice dans le calcul de l'équation séculaire du mouvement de l'apogée.

Pour cela, il est nécessaire d'analyser avec soin tous les termes dépendants des variations séculaires de l'excentricité de l'orbite terrestre qui entrent dans l'expression du mouvement de l'apogée lunaire, et dont les intégrations augmentent considérablement la valeur. Cette épineuse analyse conduit à une équation séculaire soustractive de la longitude moyenne de l'apogée, et qui est à l'équa-

⁽¹⁾ *Œuvres de Laplace*, T. XI.

Œuvres de L. — XII.

tion séculaire moyenne du mouvement de la Lune, à fort peu près, dans le rapport de 33 à 10; en sorte que le mouvement de l'apogée se ralentit lorsque celui de la Lune s'accélère. Dans les Mémoires cités de l'Académie, les termes dépendants de la première puissance de la force perturbatrice m'ont donné l'équation séculaire du mouvement de l'apogée égale aux trois quarts de celle du moyen mouvement; les termes dépendants du carré de la force perturbatrice, qui doublent le mouvement de l'apogée dû à la première puissance de cette force, augmentent donc dans une raison plus grande encore l'équation séculaire de ce mouvement.

L'équation séculaire de l'anomalie étant la somme de l'équation séculaire du moyen mouvement et de celle du mouvement de l'apogée, elle est égale à $\frac{43}{10}$ de l'équation séculaire du moyen mouvement, et, par sa grandeur, elle doit influer très sensiblement sur les observations anciennes.

J'ai considéré de la même manière l'équation séculaire du mouvement des nœuds de la Lune sur l'écliptique vraie. J'ai fait voir dans les Mémoires cités que, en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, le mouvement des nœuds de la Lune est assujettie à une équation séculaire additive à leur longitude moyenne et égale aux trois quarts de l'équation séculaire du moyen mouvement lunaire. Le mouvement des nœuds est dû principalement aux termes dépendants de la première puissance de la force perturbatrice; ces termes donnent un mouvement qui surpasse un peu le mouvement observé; mais l'inégalité principale de la latitude, en se combinant avec celle de la variation, produit dans l'expression du mouvement des nœuds un terme dépendant du carré de la force perturbatrice, et qui, en le diminuant, le fait coïncider, à fort peu près, avec l'observation. En ayant égard au carré de cette force, je trouve que l'équation séculaire des nœuds est $\frac{7}{10}$ de celle du moyen mouvement et additive à leur longitude moyenne; en sorte que le mouvement des nœuds se ralentit, comme celui de l'apogée, lorsque le moyen mouvement de la Lune s'accélère, et les équations séculaires de ces trois mouvements sont dans le rapport constant des trois nombres 7, 33 et 10.

Les variations séculaires de l'excentricité de l'orbite lunaire, de son inclinaison à l'écliptique vraie et de sa parallaxe sont insensibles.

Les siècles à venir développeront les grandes inégalités dont je viens de parler, et qui produiront, un jour, des variations au moins égales au quarantième de la circonférence, dans le mouvement séculaire de la Lune, et au douzième de la circonférence, dans le mouvement séculaire de son apogée. Ces inégalités ne vont pas toujours croissant; elles sont périodiques, comme celles de l'excentricité de l'orbite terrestre dont elles dépendent; mais elles ne se rétablissent qu'après des millions d'années: elles doivent, à la longue, altérer les périodes imaginées pour embrasser à la fois des nombres entiers de révolutions de la Lune, par rapport à ses nœuds, à son apogée et au Soleil; périodes qui diffèrent sensiblement dans les diverses parties de l'immense période de l'équation séculaire. La période luni-solaire de 600 ans, dont l'origine est inconnue, a été rigoureuse à une époque à laquelle on peut remonter par l'analyse, et qui serait celle de sa formation, si l'on était certain qu'elle fût exactement déterminée.

Déjà les observations ont fait reconnaître l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune telle, à fort peu près, que je l'ai conclue de la loi de la pesanteur universelle, et qu'elle a été employée dans les nouvelles Tables de la Lune, insérées dans la troisième édition de l'*Astronomie* de Lalande; mais on n'a point encore eu égard à l'équation séculaire de son anomalie. Pour constater son influence sur les observations anciennes, j'ai prié le citoyen Bouvard de comparer à ces Tables toutes les éclipses que Ptolémée nous a transmises et celles que les Arabes ont observées, dont un grand nombre vient d'être connu par les soins du citoyen Gaussin, qui les a extraites, avec beaucoup d'autres observations, d'un manuscrit arabe très intéressant d'Ibjunis. Ce travail du citoyen Bouvard, important pour la théorie de la Lune, ne laisse aucun doute sur l'existence de l'équation séculaire de l'anomalie. Son introduction nécessite un changement dans le mouvement de l'anomalie de la Lune: car il est visible que les astronomes n'ayant point eu égard au ralentissement de l'apogée, ils

ont dû trouver, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, son mouvement séculaire trop grand de quelques minutes, de même qu'ils trouvaient le moyen mouvement de la Lune trop petit, lorsqu'ils ne tenaient point compte de son équation séculaire. En déterminant ces mouvements par l'ensemble des vingt-sept anciennes éclipses connues depuis longtemps, on trouve qu'il faut augmenter de $4^{\circ},7$ par siècle le moyen mouvement synodique actuel de la Lune et de $8^{\circ},49''$ le moyen mouvement séculaire de son anomalie. On peut voir dans la *Connaissance des Temps* citée que, avec ces changements et l'équation séculaire de l'anomalie, les Tables satisfont à ces éclipses aussi bien qu'on peut l'attendre de l'imperfection de ces observations.

Les mouvements séculaires de la Lune par rapport au Soleil, à ses nœuds et à son apogée devenant de jour en jour plus rapides, leur accélération doit se manifester dans les Tables astronomiques à mesure qu'elles sont moins anciennes, et elle peut ainsi répandre des lumières sur le temps de la formation des Tables dont l'origine est inconnue. Considérons sous ce point de vue les Tables de la Lune insérées dans l'*Almageste* de Ptolémée. Les époques et les moyens mouvements de ces Tables sont le résultat d'immenses calculs faits par cet astronome et par Hipparque sur les éclipses de Lune. Malheureusement, le travail d'Hipparque ne nous est point parvenu; nous savons seulement, par le témoignage de Ptolémée, qu'Hipparque avait mis le plus grand soin à choisir les éclipses les plus propres à déterminer les éléments qu'il cherchait à connaître. Ptolémée, deux siècles et demi après, ne trouva rien à changer, par de nouvelles observations, au moyen mouvement de la Lune établi par Hipparque; il ne corrigea que très peu les mouvements des nœuds et de l'apogée: il y a donc tout lieu de croire que les éléments des mouvements lunaires des Tables de Ptolémée ont été déterminés par un très grand nombre d'éclipses, dont cet astronome n'a rapporté que celles qui lui paraissaient les plus conformes aux résultats moyens qu'Hipparque et lui avaient obtenus.

Les éclipses ne font bien connaître que le moyen mouvement syno-

dique de la Lune et ses distances à ses nœuds et à son apogée: on ne peut donc compter que sur ces éléments dans les résultats de Ptolémée: or cet astronome fixe à $70^{\circ}37'$ l'élongation moyenne de la Lune au Soleil, au commencement de l'ère de Nabonassar, à midi, temps moyen à Alexandrie; cette époque répond au 25 février de l'année 746 avant l'ère chrétienne, à $22^{\circ}8'39''$, temps moyen à Paris, supposé plus occidental qu'Alexandrie de $1^{\text{h}}51^{\text{m}}21^{\text{s}}$. Les Tables du Soleil et de la Lune, insérées dans la troisième édition de l'*Astronomie* de Lalande, donnent $68^{\circ}59'27''$ pour l'élongation moyenne de la Lune au Soleil à cette époque, sans avoir égard à l'équation séculaire de la Lune, et en partant du moyen mouvement lunaire actuel que Delambre a déterminé par un grand nombre d'observations de Dagelet, comparées à celle de Lahire. La différence $1^{\circ}37'33''$ entre ce résultat et celui de Ptolémée indique évidemment l'équation séculaire de la Lune. Celle que j'ai tirée de la loi de la pesanteur universelle devient $1^{\circ}46'20''$ à la première époque des Tables de Ptolémée, ce qui donne $70^{\circ}39'47''$ pour l'élongation correspondante de la Lune, suivant les Tables actuelles, en ayant égard à son équation séculaire, résultat qui ne surpasse que de $2'47''$ celui de Ptolémée. Si l'on augmente de $4^{\circ},7$ par siècle le mouvement synodique actuel, cette élongation devient $70^{\circ}37'54''$, plus grande seulement de $54''$ que celle de Ptolémée. On ne devait pas espérer un si parfait accord, vu l'incertitude qui reste sur les masses de Vénus et de Mars, dont l'influence sur la grandeur de l'équation séculaire de la Lune est sensible: le développement de cette équation est une des données les plus avantageuses que l'on puisse employer à la détermination de ces masses, et l'accord que je viens de trouver confirme les valeurs que je leur ai assignées.

L'accélération du mouvement de la Lune se manifeste encore dans les moyens mouvements des Tables de Ptolémée; elles donnent $23^{\circ}19'55''$ pour l'excès du moyen mouvement synodique de la Lune sur un nombre entier de circonférences, dans l'intervalle de 810 années égyptiennes. Le moyen mouvement synodique de nos Tables actuelles, augmenté par ce qui précède de $4^{\circ},7$ par siècle,

donne $235^{\circ}3'15''$ pour cet excès, plus grand que le précédent de $43'20''$. Ainsi l'équation séculaire de la Lune est prouvée à la fois par son elongation au Soleil à la première époque des Tables de Ptolémée et par le moyen mouvement synodique de ces Tables.

Considérons présentement le mouvement de l'apogée. Ptolémée fixe l'anomalie moyenne de la Lune à $268^{\circ}49'$ pour la même époque. Cette anomalie, suivant les Tables actuelles, était de $265^{\circ}15'1''$, plus petite que la précédente de $3^{\circ}33'59''$; cette différence augmente encore et devient $7^{\circ}9'59''$, en vertu de la correction que nous faisons au mouvement séculaire de l'anomalie; l'équation séculaire de ce mouvement est donc indiquée par cette différence. On a vu que cette équation est $\frac{1}{10}$ de celle du moyen mouvement et, par conséquent, de $7^{\circ}11'26''$ à la première époque des Tables de Ptolémée, ce qui ne diffère que de $1'27''$ du résultat donné par l'anomalie moyenne de ces Tables à la même époque.

L'accélération du mouvement de l'anomalie se manifeste encore dans le mouvement de l'anomalie moyenne des Tables de Ptolémée; elles donnent $222^{\circ}10'57''$ pour l'excès de ce mouvement, sur un nombre entier de circonférences, dans l'intervalle de 810 années égyptiennes. Les Tables actuelles donnent, en ayant égard aux corrections proposées ci-dessus, $224^{\circ}59'33''$ pour cet excès, plus grand que le précédent de $2^{\circ}48'36''$. Ainsi l'équation séculaire de l'anomalie est prouvée à la fois par l'anomalie moyenne des Tables de Ptolémée à leur première époque et par le mouvement qu'elles supposent à cette anomalie. Je remarquerai ici que ce mouvement, quoique plus faible d'environ $20'$ par siècle que celui qui résulte de la comparaison des observations modernes, est cependant plus considérable qu'au temps de Ptolémée. C'est la raison pour laquelle, malgré son accélération, les Arabes, et Tycho lui-même, ont, à très peu près, adopté dans leurs Tables ce mouvement de l'anomalie, que les observations modernes ont forcé d'abandonner.

Albatenius, l'un des plus célèbres astronomes arabes, et très exact observateur, corrigea les éléments des Tables lunaires de Ptolémée; il

trouva que le moyen mouvement synodique de ces Tables satisfaisait aux éclipses observées de son temps, c'est-à-dire environ 1620 années égyptiennes après leur première époque, ou vers l'an 873 de l'ère chrétienne; ces Tables donnent $323^{\circ}2'12''$ pour l'elongation moyenne de la Lune au Soleil après cet intervalle. Les Tables actuelles donnent $322^{\circ}50'14''$ pour cette même elongation, en augmentant de $4',7$ leur mouvement séculaire synodique; l'équation séculaire de la Lune est de $12'1''$ pour l'année 873; en l'ajoutant à l'elongation précédente, on a $323^{\circ}2'15''$ pour cette elongation corrigée par ce qui précède et par l'équation séculaire, ce qui ne diffère que de $3''$ du résultat des Tables de Ptolémée, et, par conséquent, des éclipses observées du temps d'Albatenius. Cet accord remarquable est une nouvelle confirmation de la valeur que j'ai assignée à l'équation séculaire de la Lune; ainsi cette équation est confirmée par les Tables de Ptolémée et par les observations d'Albatenius.

Les résultats de ces deux astronomes étant fondés sur la comparaison d'un très grand nombre d'éclipses dont ils n'ont rapporté qu'une très petite partie, on doit y avoir au moins autant de confiance qu'aux éclipses mêmes qu'ils nous ont conservées, et avec lesquelles ces résultats sont parfaitement d'accord: on peut donc en faire usage pour déterminer la correction séculaire du mouvement du nœud donné par nos Tables; car il est clair que les astronomes, n'ayant point eu égard à son équation séculaire ou à son ralentissement, ils ont dû trouver, par la comparaison des observations anciennes aux modernes, un mouvement séculaire trop rapide.

Ptolémée ne considère point séparément le mouvement des nœuds; il réduit directement en Tables la distance de la Lune au terme de sa plus grande latitude boréale, c'est-à-dire à la position de son nœud ascendant, augmenté de 90° , suivant l'ordre des signes: il fixe cette distance à $354^{\circ}15'$ au commencement de l'ère de Nabonassar. Suivant nos Tables, cette distance devait être de $352^{\circ}45'19''$, sans avoir égard aux équations séculaires; mais l'équation séculaire du nœud étant $\frac{1}{10}$ de celle du moyen mouvement, l'équation séculaire de la distance de

la Lune au terme de sa plus grande latitude est $\frac{3}{10}$ de celle du moyen mouvement, et par conséquent elle était de $30^{\circ}6'$ à la première époque des Tables de Ptolémée. En l'ajoutant à $352^{\circ}45'19''$, on a $353^{\circ}15'25''$ pour la distance de la Lune au terme de sa plus grande latitude boréale suivant nos Tables, et en ayant égard aux équations séculaires, cette distance est plus petite de $59'35''$, que suivant Ptolémée, ce qui indique que le mouvement séculaire du nœud de nos Tables est trop grand d'environ $2'20''$.

Albatenius trouva, par les éclipses observées de son temps, qu'il fallait diminuer de $27'$ la distance de la Lune au terme de sa plus grande latitude boréale conclue par les Tables de Ptolémée. 1620 années égyptiennes après l'époque de ces Tables, elles donnent $116^{\circ}40'47''$ pour cette distance, qui, par les observations d'Albatenius, n'était que de $116^{\circ}13'47''$. A cette dernière époque, cette distance était de $115^{\circ}43'14''$ suivant nos Tables, et en ayant égard aux équations séculaires de la Lune et de ses nœuds. La différence $30'33''$ divisée par 8,67, nombre des siècles écoulés entre cette époque et 1750, donne $3'30''$ pour la correction du mouvement séculaire du nœud de nos Tables, correction plus grande de $1'10''$ que celle qui vient d'être déterminée par les Tables de Ptolémée. La moyenne entre ces deux corrections est $2'55''$: c'est la quantité dont il me paraît qu'il faut diminuer le mouvement séculaire du nœud de nos Tables lunaires.

Un siècle après Albatenius, Ihjunis, non moins exact observateur, a rapporté dans le manuscrit dont j'ai déjà parlé un grand nombre d'éclipses observées par les Arabes et par lui-même, et que le citoyen Bouvard a comparées à nos Tables. En les réunissant aux vingt-sept éclipses anciennes qu'il avait précédemment calculées, il en a conclu que la correction du mouvement de l'élongation de la Lune au Soleil, donné par nos Tables, est insensible, et que la correction du mouvement séculaire de l'anomalie est de $8'5''$.

Les Tables d'Ihjunis, qui sont à la Bibliothèque nationale, donnent pour l'an 390 de l'hégire, ou, ce qui revient au même, pour le 30 novembre de l'an 1000, que l'on peut considérer comme l'époque de leur

formation, l'élongation moyenne de la Lune au Soleil, à midi, temps moyen au Caire, égale à $15^{\circ}55'16''$, et l'anomalie moyenne de la Lune égale à $339^{\circ}51'21''$. Les mêmes quantités, suivant nos Tables, et en ayant égard aux équations séculaires du moyen mouvement et de l'anomalie, sont $15^{\circ}56'28''$ et $340^{\circ}40',25''$. La différence entre nos Tables et celles d'Ihjunis est donc $1'12''$ à l'égard de l'élongation moyenne, ce qui est très peu considérable; elle est de $49'4''$ à l'égard de l'anomalie moyenne. En la divisant par 7, nombre des siècles écoulés entre 1000 et 1700, on a $7'$ pour la correction du mouvement séculaire de l'anomalie de nos Tables. Enfin les éclipses observées par Tycho et ses Tables donnent une plus forte correction.

Pour assurer encore plus l'existence des équations séculaires de la Lune, j'ai prié le citoyen Bouvard de comparer à nos Tables un grand nombre d'observations de la Lune de la fin du dernier siècle et de celui-ci : je ne rapporterai ici que ce qui concerne l'équation séculaire de l'anomalie, la plus considérable des trois, et à laquelle on n'avait point encore eu égard. La méthode la plus exacte et la plus simple de corriger l'anomalie consiste à comparer aux Tables un grand nombre de lieux de la Lune, observés avec soin dans l'intervalle d'un petit nombre d'années, et dans lesquels la Lune n'était qu'à 30° ou 40° de distance de son apogée ou de son périhélie; on détermine l'erreur moyenne des Tables, soit dans les observations apogées, soit dans les observations périhélie, et l'on retranche la seconde de la première de ces erreurs. On fait varier l'anomalie des Tables d'un même nombre de minutes dans chaque observation, et l'on détermine, dans cette supposition, la différence des erreurs des Tables dans les observations apogées et périhélie; une simple proportion fait connaître ensuite la vraie correction de l'anomalie des Tables, correction qui se rapporte à l'époque moyenne entre celles de toutes les observations; il est facile d'en conclure la correction de la longitude moyenne de la Lune, correspondante à la même époque. La différence des corrections de l'anomalie des Tables, à deux époques éloignées, donne la correction du mouvement de l'anomalie dans cet intervalle, en ayant égard à la dif-

férence correspondante des équations séculaires; on a, par conséquent, la correction du mouvement séculaire de cette anomalie. C'est ainsi que le citoyen Bouvard a comparé aux Tables un grand nombre d'observations du dernier siècle et de celui-ci, en ayant soin de considérer à la fois autant d'observations apogées que d'observations périégées. Voici les résultats qu'il a trouvés.

Cent soixante-huit observations de Bradley, faites en 1750, 1751, 1752, 1753, 1754, 1755, 1756, et dont l'époque moyenne répond au 17 décembre 1752, ont donné $-4^{\circ},6$ pour la correction de la longitude moyenne, et $-17^{\circ},9$ pour la correction de l'anomalie moyenne des Tables.

Quarante-huit observations de Maskelyne, faites en 1784 et 1785, et dont l'époque moyenne répond au 6 mai 1784, ont donné $-18^{\circ},3$ pour la correction de la longitude, et $+2^{\circ}19',6$ pour la correction de l'anomalie moyenne.

Soixante observations de Maskelyne, faites pendant les années II et III de l'ère française, et dont l'époque moyenne répond au 28 vendémiaire de l'an III, ont donné $-18^{\circ},8$ pour la correction de la longitude et $+3^{\circ}20',9$ pour la correction de l'anomalie.

On voit évidemment par ces résultats que le moyen mouvement de l'anomalie doit être augmenté. Les observations de Bradley, comparées à celles de Maskelyne, des années II et III de l'ère française, donnent environ $7'$ pour cette correction. Mais, comme l'influence des équations, ou négligées dans les Tables, ou susceptibles encore de corrections, est d'autant plus grande que les époques des observations que l'on compare sont plus rapprochées, le citoyen Bouvard a bien voulu, à ma prière, discuter un grand nombre d'observations de Flamsteed. Il en a choisi soixante-quatre faites au quart de cercle mural, dont il a déterminé la déviation à toutes les hauteurs. Dans chaque observation, la Lune a été comparée, soit en ascension droite, soit en déclinaison, à plusieurs étoiles dont la position a été bien déterminée pour 1750 par Bradley, Mayer et Lacaille. Pour avoir la position de ces étoiles à l'époque des observations de Flamsteed, le citoyen Bou-

vard a pris un milieu entre les déterminations de Bradley, Mayer et Lacaille, pour 1750, et entre celles de Maskelyne, Delambre et Zach, pour 1790; ensuite, au moyen du mouvement de ces étoiles dans l'intervalle de ces quarante ans, il les a rapportées, par une formule exacte et fort simple, à l'époque des observations de Flamsteed. Vu la précision des observations modernes et l'accord des divers astronomes que je viens de citer, entre eux, ce moyen paraît préférable à celui d'employer le Catalogue de Flamsteed. L'époque moyenne des soixante-quatre observations de cet astronome, discutées par le citoyen Bouvard, répond au 18 avril 1691; elles donnent $-14^{\circ},3$ pour la correction de la longitude de la Lune, et $-5^{\circ}21',7$ pour la correction de l'anomalie moyenne. En les comparant aux observations précédentes de Bradley, on trouve $8^{\circ},0$ pour la correction du mouvement séculaire de l'anomalie des Tables; en les comparant aux dernières observations citées de Maskelyne, on a $7^{\circ}45'$ pour cette correction.

Enfin, parmi les quarante-deux observations de Lahire, que Bailly a rapportées dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1763, il s'en trouve vingt-deux qui peuvent servir à notre objet, et dont l'époque moyenne répond au 1^{er} octobre 1784. Le citoyen Bouvard les ayant comparées aux Tables, elles lui ont donné $-6^{\circ}1',5$ pour la correction de l'anomalie moyenne. En les comparant aux observations de Maskelyne des années II et III de l'ère française, on trouve $7^{\circ}53'$ pour la correction du mouvement séculaire de l'anomalie des Tables. Je dois remarquer ici que Bailly avait déjà reconnu, par ces observations, qu'il fallait avancer d'environ $5'$ le lieu de l'apogée des Tables lunaires à leur époque.

Si l'on prend un milieu entre les résultats donnés par les observations anciennes et modernes, on voit qu'il faut augmenter d'environ $8\frac{1}{2}'$ le mouvement séculaire de l'anomalie de nos Tables, dont on peut fixer à $3^{\circ}20'$ la correction pour le commencement de l'an III de l'ère française. En augmentant ensuite cette correction d'une demi-seconde par mois pendant les dix années suivantes, on aura les corrections correspondantes dans lesquelles l'équation séculaire de l'anomalie se

trouvera comprise, et l'on sera ainsi dispensé d'y avoir égard dans cet intervalle. On voit encore qu'il faut diminuer de 19' l'époque de la longitude moyenne pour l'an III. Quant au moyen mouvement des Tables, les observations de Bradley, comparées à celles de Maskelyne, semblent y indiquer une diminution; mais les observations de Flamsteed, comparées à celles de Maskelyne, ne portent cette diminution qu'à 4",5 pour un intervalle de cent trois ans, ce qui est insensible; ainsi, en attendant qu'une plus ample discussion des observations ait éclairci ce point de la théorie lunaire, on peut conserver le mouvement séculaire des Tables. C'est en partant de ces corrections et en supprimant des Tables lunaires, ainsi que l'a fait dans les calculs cités le citoyen Bouvard, l'équation (XVIII) dépendante de la longitude du nœud de la Lune, équation qui n'est point donnée par la théorie, que l'on calcule présentement les lieux de la Lune pour la *Connaissance des Temps* de l'an XII; et je dois observer que les Tables ainsi corrigées représentent toutes les observations modernes avec un accord très remarquable, et qu'elles reprennent ainsi toute l'exactitude qu'elles avaient relativement aux observations du milieu de ce siècle, et qu'elles commençaient à perdre; en sorte que la précision de ces Tables, jointe à celle des instruments avec lesquels on observe à la mer les distances de la Lune au Soleil et aux étoiles, laisse maintenant très peu de chose à désirer pour la perfection de la théorie des longitudes.

L'incertitude que les observations laissent sur le mouvement séculaire de la Lune, et qui me paraît tenir, en partie, à celle qui reste encore sur le mouvement des équinoxes et sur le mouvement propre des étoiles, fait désirer que les astronomes comparent, le plus souvent qu'il sera possible, les différents corps du système solaire les uns aux autres et au Soleil. On sait que les moyens mouvements du Soleil et des planètes sont invariables; les observations de leurs conjonctions ou de leurs oppositions mutuelles et celles de leurs élongations respectives feront connaître les rapports de ces mouvements, directement et indépendamment des mouvements des équinoxes et des

étoiles. C'est ainsi que les mouvements de la Lune, par rapport au Soleil, à son apogée et à ses nœuds, sont donnés directement par les éclipses. On ne peut donc trop recommander ce genre d'observations aux astronomes.

Lorsque la cause de l'équation séculaire de la Lune était inconnue, on avait imaginé diverses hypothèses pour l'expliquer. Le plus grand nombre l'attribuait à la résistance de l'éther; la transmission successive de la gravité me paraissait offrir une explication plus naturelle de ce phénomène; mais alors on n'avait reconnu par les observations que l'accélération du moyen mouvement de la Lune. Maintenant que le ralentissement des mouvements de son apogée et de ses nœuds est bien constaté par les observations anciennes et modernes, il faut que la même cause explique à la fois et ce ralentissement et l'accélération du mouvement lunaire; or on verra ci-après que la résistance de l'éther accélère le moyen mouvement de la Lune, sans altérer ceux de son nœud et de son apogée; la même analyse conduit au même résultat, relativement à la transmission successive de la gravité. L'équation séculaire de la Lune n'est donc point l'effet de ces deux causes; et, quand même sa cause serait encore inconnue, cela seul suffirait pour les exclure. C'est ainsi que les phénomènes, en se développant, nous éclairent sur leurs véritables causes. Les trois équations séculaires des moyens mouvements de la Lune, de son apogée et de ses nœuds, satisfaisant exactement aux observations, il en résulte que la résistance de l'éther et la transmission successive de la gravité n'ont produit jusqu'ici aucune altération sensible dans les mouvements des corps célestes, car si elles avaient quelque influence sur l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune, elles la rapprocheraient de l'équation séculaire du mouvement de son apogée, et l'éloigneraient de celle du mouvement des nœuds; en sorte que ces trois équations ne seraient point dans le rapport constant des nombres 10, 33 et 7, rapport que donne la loi de la pesanteur, et que les observations confirment.

I.

Soient x, y, z les coordonnées du centre de gravité de la Lune, rapportées au centre de la Terre; soient x', y', z' celles du Soleil, rapportées à la même origine; soit S la masse de cet astre, la somme de celles de la Terre et de la Lune étant prise pour unité de masse; enfin désignons par R la fonction

$$S \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} = \frac{S(xx' + yy' + zz')}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La différentielle de R , prise par rapport à x et divisée par dx , exprimera la force perturbatrice du mouvement lunaire, parallèlement à l'axe des x ; on aura donc, par les principes connus de Dynamique, en regardant l'élément dt du temps comme constant,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial R}{\partial x};$$

on aura pareillement

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

C'est à l'intégration de ces trois équations différentielles que se réduit la détermination du mouvement lunaire. Ces équations donnent les suivantes, dans lesquelles aucune différence n'est supposée constante :

$$\begin{aligned} (a) \quad & d \frac{x dy - y dx}{dt} = \left(x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} \right) dt, \\ (b) \quad & d \frac{x dx + y dy}{dt} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt} + \frac{(x^2 + y^2) dt}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} \right) dt, \\ (c) \quad & \begin{cases} x d \frac{dz - z dx}{dt} + y d \frac{y dz - z dy}{dt} \\ = x dt \left(x \frac{\partial R}{\partial z} - z \frac{\partial R}{\partial x} \right) + y dt \left(y \frac{\partial R}{\partial z} - z \frac{\partial R}{\partial y} \right). \end{cases} \end{aligned}$$

Transformons les coordonnées en d'autres plus commodes pour les usages astronomiques, et, pour cela, nommons v l'angle que fait avec l'axe des x la projection du rayon vecteur de la Lune sur le plan fixe des x et des y . Soient $\frac{1}{u}$ cette projection, et s la tangente de la latitude de la Lune au-dessus de ce plan; on aura

$$x = \frac{\cos v}{u}, \quad y = \frac{\sin v}{u}, \quad z = \frac{s}{u}.$$

En marquant d'un accent, pour le Soleil, les lettres v, u et s , on aura

$$x' = \frac{\cos v'}{u'}, \quad y' = \frac{\sin v'}{u'}, \quad z' = \frac{s'}{u'}.$$

On aura ensuite

$$x dy - y dx = \frac{dv}{u^2};$$

d'ailleurs, on a

$$\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz = \frac{\partial R}{\partial u} du + \frac{\partial R}{\partial v} dv + \frac{\partial R}{\partial s} ds.$$

L'équation $x^2 + y^2 = \frac{1}{u^2}$ donne

$$du = -u^3(x dx + y dy);$$

celle-ci, tangée $= \frac{y}{x}$, donne

$$dv = u^3(x dy - y dx);$$

enfin, l'équation $s = uz$ donne

$$ds = u dz - z u^3(x dx + y dy);$$

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz = & -u^2 \frac{\partial R}{\partial u} (x dx + y dy) + u^3 \frac{\partial R}{\partial v} (x dy - y dx) \\ & + \frac{\partial R}{\partial s} [u dz - u^3 z (x dx + y dy)]; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en comparant les coefficients de dx, dy, dz ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} &= -xu^3 \frac{\partial R}{\partial u} - yu^3 \frac{\partial R}{\partial v} - xzu^3 \frac{\partial R}{\partial s}, \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= -yu^3 \frac{\partial R}{\partial u} + xu^3 \frac{\partial R}{\partial v} - yzu^3 \frac{\partial R}{\partial s}, \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= u \frac{\partial R}{\partial s},\end{aligned}$$

on a donc

$$x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial v};$$

l'équation (a) devient ainsi

$$d \frac{dv}{u^3 dt} = \frac{\partial R}{\partial v} dt.$$

Cette nouvelle équation, multipliée par $\frac{2 dv}{u^3 dt}$ et ensuite intégrée, donne

$$(d) \quad dt = \frac{dv}{u^3 \sqrt{h^2 + 2 \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2}}},$$

h étant une constante arbitraire. On en tirera le temps t en fonction de v ; mais il sera plus simple de faire usage de l'équation

$$(e) \quad 0 = \frac{d^2 t}{dv^2} + \frac{2 du dt}{u dv^2} + u^2 \frac{\partial R}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2},$$

que l'on conclut de la précédente, en supposant dv constant.

Si l'on substitue la valeur de dt dans les équations (b) et (c), et, au lieu de x, y, z , $\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$, leurs valeurs; elles donneront, en faisant dv constant,

$$(f) \quad 0 = \left(\frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) \left(h^2 + 2 \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right) - (1 + s^2) \frac{2}{u} \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{s}{u} \frac{\partial R}{\partial s} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{du}{u^2 dv},$$

$$(g) \quad 0 = \left(\frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) \left(h^2 + 2 \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right) - \frac{s}{u} \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{1 + s^2}{u^2} \frac{\partial R}{\partial s} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{ds}{u^2 dv}.$$

II.

Développons la valeur de R . Elle devient

$$R = \frac{S u'}{\sqrt{1 + s'^2}} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{[u u' \cos(v - v') + u u' s s' - \frac{1}{2} u'^2 (1 + s^2)]^2}{(1 + s'^2)^2 u^4} \right. \\ \left. + \frac{5}{2} \frac{[u u' \cos(v - v') + u u' s s' - \frac{1}{2} u'^2 (1 + s^2)]^3}{(1 + s'^2)^3 u^6} - \frac{(1 + s^2) u'^2}{2(1 + s'^2) u^2} \right\} + \dots$$

On peut, dans la théorie lunaire, s'en tenir à ces termes; on peut même, dans les termes multipliés par u'^4 , négliger les carrés et les produits de s et de s' : on aura ainsi, en ordonnant l'expression de R par rapport aux puissances de u' ,

$$R = \frac{S u'}{\sqrt{1 + s'^2}} + \frac{S u'^2}{4 u^2 (1 + s'^2)^{\frac{3}{2}}} [1 + 3 \cos(2v - 2v') + 12 s s' \cos(v - v') - 2 s^2 - 2 s'^2 - 2 s^2 s'^2] \\ + \frac{S u'^4}{8 u^4 (1 + s'^2)^{\frac{5}{2}}} [3 \cos(v - v') + 5 \cos(3v - 3v')].$$

Il suffit, dans la recherche qui nous occupe, de considérer les termes multipliés par u'^2 , ce qui donne

$$\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{s}{u} \frac{\partial R}{\partial s} = - \frac{S u'^2}{2 u^3 (1 + s'^2)^{\frac{3}{2}}} [1 + 3 \cos(2v - 2v') + 6 s s' \cos(v - v') - 2 s^2].$$

$$\frac{\partial R}{\partial v} = - \frac{3 S u'^2}{2 u^2 (1 + s'^2)^{\frac{3}{2}}} [\sin(2v - 2v') + 2 s s' \sin(v - v')],$$

$$\frac{\partial R}{\partial s} = - \frac{S u'^2}{u^2 (1 + s'^2)^{\frac{3}{2}}} [s - 3 s' \cos(v - v') + s'^2 s].$$

Pour développer ces valeurs en sinus et cosinus d'angles proportionnels à v , il faut déterminer u, u', v', s et s' en fonctions semblables. Pour cela, nous observerons que, si l'on suppose R nul dans les équations

tions différentielles de l'article précédent, elles deviennent

$$0 = \frac{d^2 u}{dv^2} + u - \frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad 0 = \frac{d^2 s}{dv^2} + s, \quad dt = \frac{dv}{hu^{\frac{3}{2}}},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$u = \frac{1}{h^2(1+\lambda^2)} [\sqrt{1+s^2} - e \cos(v-\varpi)], \\ s = \lambda \sin(v-\vartheta),$$

e , ϖ , λ et ϑ étant quatre constantes arbitraires, dont la première exprime, à très peu près, l'excentricité de l'orbite; la seconde exprime la longitude de l'apogée; la troisième exprime la tangente de l'inclinaison de l'orbite au plan fixe, et la quatrième exprime la longitude du nœud ascendant. Le demi grand axe de l'orbite, que nous désignerons par a , sera, en négligeant les quantités de l'ordre λ^4 ,

$$\frac{h^2(1+\lambda^2)}{1-e^2}.$$

L'équation $dt = \frac{dv}{hu^{\frac{3}{2}}}$ donnera, en l'intégrant et en supposant, pour plus de simplicité, $\frac{1}{a^3} = n$,

$$nt + \varepsilon = v + 2e \sin(v-\varpi) + \frac{1}{2}e^2 \sin(2v-2\varpi) + \frac{1}{4}\lambda^2 \sin(2v-2\vartheta) + \dots$$

Cette valeur de $nt + \varepsilon$ suppose l'ellipse lunaire immobile; mais on sait qu'en vertu de la force perturbatrice ses nœuds et son apogée sont en mouvement: alors, en désignant par $(1-c)v$ le mouvement de l'apogée, et par $(g-1)v$ le mouvement rétrograde de ses nœuds, on aura, pour premières valeurs approchées de $nt + \varepsilon$ et de u ,

$$nt + \varepsilon = v + 2e \sin(cv-\varpi) + \frac{1}{2}e^2 \sin(2cv-2\varpi) + \frac{1}{4}\lambda^2 \sin(2gv-2\vartheta), \\ u = \frac{1}{a(1-e^2)} [1 + \frac{1}{2}\lambda^2 - e \cos(cv-\varpi) - \frac{1}{2}\lambda^2 \cos(2gv-2\vartheta)].$$

Si l'on marque d'un accent, relativement au Soleil, les quantités relatives à la Lune, et si, pour plus de simplicité, on prend d'abord pour plan fixe celui de l'orbite solaire, ce que l'on peut faire, vu la lenteur

des variations de ce dernier plan, on aura

$$n't + \varepsilon' = v' + 2e' \sin(c'v' - \varpi') + \frac{1}{2}e'^2 \sin(2c'v' - 2\varpi'), \\ u' = \frac{1}{a'(1-e'^2)} [1 - e' \cos(c'v' - \varpi')].$$

L'origine du temps et celle de l'angle v étant arbitraires, nous pouvons supposer ε et ε' nuls, et alors, en faisant $\frac{n'}{n} = m$, la comparaison des valeurs de nt et $n't$ donnera

$$v' + 2e' \sin(c'v' - \varpi') + \frac{1}{2}e'^2 \sin(2c'v' - 2\varpi') \\ = mv + 2me \sin(cv - \varpi) + \frac{1}{2}me^2 \sin(2cv - 2\varpi) + \frac{1}{4}m\lambda^2 \sin(2gv - 2\vartheta);$$

d'où l'on tire, en observant que c' est très peu différent de l'unité,

$$v' = mv + 2me \sin(cv - \varpi) + \frac{1}{2}me^2 \sin(2cv - 2\varpi) + \frac{1}{4}m\lambda^2 \sin(2gv - 2\vartheta) \\ - 2e' \sin(c'mv - \varpi') - 2mee' \sin(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ - 2mee' \sin(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\ + \frac{1}{2}e'^2 \sin(2c'mv - 2\varpi').$$

On pourra, au moyen de ces valeurs de u' et de v' , développer les différents termes de l'expression de R en séries qui seront très convergentes, à cause de la petitesse de m et du peu d'excentricité de l'orbite terrestre; c'est en cela que consiste le principal avantage de la méthode qui coordonne les séries de la théorie lunaire par rapport aux sinus et aux cosinus d'angles proportionnels à v .

III.

Considérons le terme $\frac{S u'^2(1-2s'^2)}{2u^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$ de l'expression de $-\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{s}{a} \frac{\partial R}{\partial s}$.

Nous ne conserverons dans le développement de ce terme, parmi les quantités de l'ordre des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, que celles qui sont constantes et celles qui sont multipliées par les sinus ou cosinus d'angles dans lesquels le coefficient de v diffère peu de l'unité. Ces dernières quantités croissant beaucoup par l'intégration de l'équation différentielle (g) de l'article I, les termes du même ordre dans lesquels le coefficient de v est

très petit croissent beaucoup par l'intégration de l'expression différentielle du temps t ; mais ils n'entrent dans le développement de R qu'autant qu'ils affectent l'angle ν' , et alors ils sont multipliés par m , ce qui les rend fort petits; en sorte que l'on peut les négliger sans erreur sensible. Enfin nous conserverons les termes multipliés par $e'^2 \cos(cv - \varpi)$, parce que de ces termes dépend l'équation séculaire du mouvement de l'apogée. Nous aurons ainsi, en supposant, comme ci-dessus, s' nul,

$$\frac{8u^3(1-2s^2)}{2u^3(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8a^3}{2a^3}(1+\frac{3}{2}e'^2-\frac{1}{2}\lambda^2) + \frac{38a^3}{2a^3}(1+\frac{3}{2}e'^2)e\cos(cv-\varpi) \\ - \frac{38a^3}{2a^3}\left[e'\cos(c'mv-\varpi') + \frac{3-2m}{2}ee'\cos(cv-c'mv-\varpi+\varpi') \right. \\ \left. + \frac{3+2m}{2}ee'\cos(cv+c'mv-\varpi-\varpi')\right].$$

Nous avons observé qu'il est indispensable de porter, dans ces recherches, l'approximation jusqu'au carré de la force perturbatrice; or la valeur de u acquiert dans une première approximation, et en n'ayant égard qu'à la première puissance de cette force, une suite de termes que nous désignerons par δu , et qui est de la forme suivante :

$$\delta u = \frac{Q^{(1)}}{a} + \frac{Q^{(1)}}{a} \cos(2\nu - 2mv) \\ + \frac{Q^{(2)}}{a} e \cos(2\nu - cv - 2mv + \varpi) \\ + \frac{Q^{(3)}}{a} e' \cos(c'mv - \varpi') \\ + \frac{Q^{(4)}}{a} ee' \cos(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\ + \frac{Q^{(5)}}{a} ee' \cos(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ + \frac{Q^{(6)}}{a} ee' \cos(2\nu - cv - 2mv + c'mv + \varpi - \varpi') \\ + \frac{Q^{(7)}}{a} ee' \cos(2\nu - cv - 2mv - c'mv + \varpi + \varpi') \\ + \dots$$

Il nous suffit de considérer les termes précédents, parmi lesquels ceux qui sont multipliés par e acquièrent de grands diviseurs, en

vertu de l'intégration de l'équation différentielle en u . Cela posé, si l'on augmente u de δu , le terme $\frac{8u^3}{2u^3}$ prendra l'accroissement $-\frac{38u^3\delta u}{2u^3}$. Nous ne conserverons dans le développement de ce terme que les quantités multipliées par $e\cos(cv - \varpi)$, et, parmi celles-ci, il suffira de considérer celles qui sont multipliées par $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, ..., le terme $Q^{(5)}$ n'acquérant point de grands diviseurs par les intégrations. Nous aurons ainsi, pour le terme dû à la variation de $\frac{8u^3}{2u^3}$,

$$\frac{98a^3}{4a^3}(Q^{(1)} + Q^{(2)})e^2e\cos(cv - \varpi).$$

ν' subit encore une variation dans ce terme, à raison de l'expression du temps en fonction de l'angle ν ; mais, cette dernière variation étant multipliée par m dans l'expression de ν' , nous pouvons la négliger ici. On verra ci-après que $Q^{(1)}$ et $Q^{(2)}$ sont à fort peu près égaux et de signe contraire, ce qui rend à peu près nul le terme précédent; d'où il suit que la variation de $\frac{8u^3}{2u^3}$ ne produit aucun terme sensible, multiplié par $e^2e\cos(cv - \varpi)$.

IV.

Développons maintenant le terme $\frac{38u^3}{2u^3}\cos(2\nu - 2\nu')$ de l'expression de $-\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{s}{u}\frac{\partial R}{\partial s}$. En substituant pour u , u' et ν' leurs valeurs trouvées dans l'article II, on trouvera, après toutes les réductions, le terme $\frac{38u^3}{2u^3}\cos(2\nu - 2\nu')$ égal au produit de $\frac{38a^3}{2a^3}$ par la quantité

$$(1 - \frac{3}{2}e'^2)\cos(2\nu - 2mv) - \frac{1}{2}e'\cos(2\nu - 2mv - c'mv + \varpi') \\ + \frac{1}{2}e'\cos(2\nu - 2mv + c'mv - \varpi') \\ + \frac{3+4m}{2}(1 - \frac{3}{2}e'^2)e\cos(2\nu - 2mv - cv + \varpi) \\ + \frac{3-4m}{2}(1 - \frac{3}{2}e'^2)e\cos(2\nu - 2mv + cv - \varpi) \\ - \frac{2(1+2m)}{4}ee'\cos(2\nu - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\ + \frac{3+2m}{4}ee'\cos(2\nu - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\ + \dots$$

En nommant δu , $\delta u'$ et $\delta v'$ les variations de u , u' et v' , dues à la force perturbatrice, nous aurons, pour l'accroissement du terme précédent,

$$-\frac{9Su^3}{2u^3} \cos(2v-2v') + \frac{9Su^2}{2u^3} \delta u' \cos(2v-2v') + \frac{3Su^3}{u^3} \delta v' \sin(2v-2v').$$

Les deux derniers termes de cette fonction peuvent être négligés; car, quoique dans les expressions de $\delta u'$ et de $\delta v'$, les inégalités du mouvement lunaire soient comprises, cependant, comme elles y sont multipliées par m , elles perdent les grands diviseurs qu'elles avaient acquis par les intégrations. Quant au premier terme, en n'y conservant que ce qui est multiplié par $e \cos(cv-\varpi)$, on trouve qu'il se réduit à

$$-\frac{9Sa^2}{4a^3} [(1-\frac{1}{2}e^2)(Q^{(2)}+4Q^{(1)}) + \frac{1}{2}e^2Q^{(4)} - \frac{1}{2}e^2Q^{(1)}] e \cos(cv-\varpi).$$

V.

Développons semblablement le terme

$$\frac{\partial R}{\partial v} \frac{du}{u^2 dv} \quad \text{ou} \quad -\frac{3Su^2}{2u^3} \frac{du}{dv} \sin(2v-2v').$$

Ce terme est égal, à très peu près, à la différentielle de

$$\frac{Su^2}{2u^3} \sin(2v-2v'),$$

prise par rapport à ϖ et divisée par $d\varpi$, en supposant u' et v' constants; or on a le développement de $\frac{Su^2}{2u^3} \sin(2v-2v')$ en changeant les cosinus en sinus dans le développement précédent de

$$\frac{Su^2}{2u^3} \cos(2v-2v'),$$

et la condition de u' et de v' constants sera satisfaite, en ne différenciant point les termes de ce développement, multipliés par me . On

aura ainsi le terme $-\frac{3Su^2}{2u^3} \frac{du}{dv} \sin(2v-2v')$ égal au produit de $-\frac{3Sa^2}{4a^3}$ par la quantité

$$(1-\frac{1}{2}e^2)e \cos(2v-2mv-cv+\varpi) - \frac{1}{2}ee' \cos(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') + \frac{1}{2}ee' \cos(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') + \dots$$

La variation de ce terme, due aux forces perturbatrices, est, à très peu près,

$$-\frac{3Su^2}{2u^3} \frac{d^2u}{dv^2} \sin(2v-2v') + \frac{6Su^2}{u^3} \delta u \frac{du}{dv} \sin(2v-2v');$$

elle produit le terme

$$+\frac{3Sa^2}{4a^3} \left\{ (1-\frac{1}{2}e^2) [(2-2m-c)Q^{(2)}+8(1-m)Q^{(1)}] + \frac{1}{2}(2-m-c)e^2Q^{(4)} - \frac{1}{2}(2-3m-c)e^2Q^{(1)} \right\} e \cos(cv-\varpi).$$

VI.

Considérons enfin le terme $2 \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$ ou $-3S \int \frac{u^2 dv}{u^3} \sin(2v-2v')$. Ce terme développé devient

$$\frac{3Sa^2}{a^3} \left[\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{2-2m} \cos(2v-2mv) + \frac{2(1+m)(1-\frac{1}{2}e^2)}{2-2m-c} e \cos(2v-2mv-cv+\varpi) + \frac{(2+m)ee'}{2(2-m-c)} \cos(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') - \frac{(2+3m)7ee'}{2(2-3m-c)} \cos(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') + \dots \right].$$

La variation de ce terme, que l'on obtient, à fort peu près, en y substituant $u + \delta u$ au lieu de u , produit le terme

$$-\frac{6Sa^2}{a^3} [(1-\frac{1}{2}e^2)Q^{(2)} + \frac{1}{2}e^2Q^{(4)} - \frac{1}{2}e^2Q^{(1)}] e \cos(cv-\varpi).$$

VII.

Reprenons, cela posé, l'équation différentielle (*f*) de l'article I. Si l'on néglige la force perturbatrice, on a

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + u = \frac{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2};$$

et si, dans l'expression de δu , on ne considère que les termes dans lesquels le coefficient de v est peu différent de l'unité, on a, à fort peu près,

$$\frac{d^2 \delta u}{dv^2} + \delta u = 0.$$

Le terme $\left(\frac{d^2 u}{dv^2} + u\right) 2 \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$ se réduit ainsi à $\frac{2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^3}$.
L'équation différentielle (*f*) devient ainsi

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2 u}{dv^2} + u - \frac{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2} + \frac{8a^2}{2a^2} (1+e^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}e'^2) \\ & + \frac{38a^2}{2a^2} \left[1 + \frac{1}{2}e'^2 - 2(1+2m)(1-\frac{1}{2}e'^2)Q^{(1)} - \frac{9+2m+c}{2} (1-\frac{1}{2}e'^2)Q^{(2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{9+m+c}{4} e'^2 Q^{(4)} + \frac{7(9+3m+c)}{4} e'^2 Q^{(7)} \right] e \cos(cv-\varpi) \\ & - \frac{38a^2}{2a^2} \left[e' \cos(c'mv-\varpi') + \frac{3-2m}{2} ee' \cos(cv-c'mv-\varpi+\varpi') \right. \\ & \quad \left. + \frac{3+2m}{2} ee' \cos(cv+c'mv-\varpi-\varpi') \right] \\ & + \frac{38a^2}{2a^2} \frac{2-m}{1-m} (1-\frac{1}{2}e'^2) \cos(2v-2mv) \\ & + \frac{38a^2}{2a^2} \left[1+2m + \frac{4(1+m)}{2-c-2m} \right] (1-\frac{1}{2}e'^2) e \cos(2v-2mv-cv+\varpi) \\ & + \frac{38a^2}{2a^2} \left[\frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{2-c-m} \right] ee' \cos(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') \\ & - \frac{218a^2}{2a^2} \left[\frac{1+3m}{2} + \frac{2+3m}{2-c-3m} \right] ee' \cos(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\ & + \dots \end{aligned}$$

Nous avons négligé, dans cette équation, les termes multipliés par $e^3 \cos(cv-\varpi)$ ou par $\lambda^2 e \cos(cv-\varpi)$, quoique nous ayons conservé ceux qui sont multipliés par $e'^2 e \cos(cv-\varpi)$, et dont dépend l'équation séculaire de l'apogée; mais on verra ci-après que e et λ peuvent être supposés constants, au lieu que l'excentricité e' de l'orbite terrestre est variable. Nous ne conserverons, dans le développement de $(1+s^2)^{\frac{3}{2}}$, que la partie constante, qui est à très peu près égale à $1-\frac{1}{2}\lambda^2$, la considération des autres termes de ce développement étant inutile ici. La valeur que nous avons supposée à $u + \delta u$ devient ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} (1-\frac{1}{2}\lambda^2) - \frac{e}{a} \cos(cv-\varpi) \\ & + \frac{Q^{(0)}}{a} + \frac{Q^{(1)}}{a} \cos(2v-2mv) \\ & + \frac{Q^{(2)}}{a} e \cos(2v-2mv-cv+\varpi) \\ & + \frac{Q^{(3)}}{a} e' \cos(c'mv-\varpi') \\ & + \frac{Q^{(4)}}{a} ee' \cos(cv-c'mv-\varpi+\varpi') \\ & + \frac{Q^{(5)}}{a} ce' \cos(cv+c'mv-\varpi-\varpi') \\ & + \frac{Q^{(6)}}{a} ee' \cos(2v-2mv-cv+\varpi-\varpi') \\ & + \frac{Q^{(7)}}{a} ee' \cos(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\ & + \dots \end{aligned}$$

En la substituant pour u dans l'équation différentielle précédente, on aura d'abord

$$e^2 = 1 - \alpha,$$

α étant le coefficient de $\frac{e}{a} \cos(cv-\varpi)$ dans cette équation différentielle. On aura ensuite

$$\begin{aligned} Q^{(0)} = & -\frac{8a^2}{2a^2} (1+e^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}e'^2), \\ Q^{(1)} = & \frac{38a^2}{2a^2} \frac{(2-m)(1-\frac{1}{2}e'^2)}{(1-2m)(3-2m)(1-m)}. \end{aligned}$$

Pour déterminer avec précision les valeurs de $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, nous observerons que les coefficients de v , dans les angles dont elles multiplient les cosinus, sont peu différents de l'unité. Soit donc, en général,

$$\frac{Q}{a} \cos p v$$

un terme de δu , dans lequel p diffère peu de l'unité. Puisque la substitution de

$$\frac{1}{a} [1 - e \cos(c v - \varpi)]$$

pour u , dans les différents termes de l'équation différentielle (f) de l'article premier, a produit le terme

$$\frac{\alpha e}{a} \cos(c v - \varpi)$$

dans l'équation différentielle précédente; la substitution de

$$\frac{1}{a} [1 - e \cos(c v - \varpi) + Q \cos p v]$$

ajoutera, à très peu près, à la même équation, le terme

$$-\frac{\alpha Q}{a} \cos p v,$$

du moins en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, et cela sera d'autant plus exact que p diffèrera moins de c . Nous devons donc ajouter ce terme au second membre de cette équation; d'où il suit que si $\gamma \cos p v$ est le terme dépendant de $p v$, dans son second membre, on aura

$$\frac{Q}{a} = \frac{\gamma}{p^2 - c^2}.$$

La théorie de la Lune nous offre, parmi les quantités de l'ordre $\frac{1}{a^2}$, un terme dépendant de la distance de la Lune à l'apogée du Soleil, et, vu la lenteur du mouvement de cet apogée, la valeur de p relative à ce terme diffère extrêmement peu de l'unité. Sans la considération pré-

cedente, on trouverait

$$\frac{Q}{a} = \frac{\gamma}{p^2 - 1},$$

et alors la valeur de Q serait très considérable; mais la rapidité du mouvement de l'apogée de la Lune, relativement à celui de l'apogée du Soleil, rend $\frac{1}{p^2 - c^2}$ considérablement plus petit que $\frac{1}{p^2 - 1}$, et réduit le terme dont il s'agit à quelques secondes. On trouvera ainsi

$$Q^{(2)} = -\frac{3 S a^3 \left[1 + 2 m + \frac{4(1+m)}{2-c-m} \right]}{2 a^2 (2c+2m-2)(2-2m)} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \right),$$

$$Q^{(3)} = \frac{3 S a^3 (3-2m)}{4 a^2 m (2c-m)},$$

$$Q^{(5)} = -\frac{3 S a^3 (3+2m)}{4 a^2 m (2c+m)},$$

$$Q^{(6)} = -\frac{3 S a^3 \left(\frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{2-c-m} \right)}{2 a^2 (2c+m-2)(2-m)},$$

$$Q^{(7)} = \frac{21 S a^3 \left(\frac{1+3m}{2} + \frac{2+3m}{2-c-3m} \right)}{2 a^2 (2c+3m-2)(2-3m)},$$

VIII.

Substituons maintenant, au lieu de u , sa valeur dans l'équation

$$dv = a^2 dt \sqrt{h^2 + 2 \int \frac{\partial K}{\partial v} \frac{dv}{a^2}}.$$

Si l'on n'a égard qu'aux termes constants, on aura

$$dv = \left[1 - \frac{S a^3}{a^2} (1 + \frac{1}{2} e^2) \right] \frac{dt}{a^2}.$$

La quantité a étant égale à $\frac{h^2(1+\lambda^2)}{1-e^2}$, elle est constante, puisque λ et e sont à très peu près constants, comme on le verra bientôt. Par la théorie des planètes, le demi grand axe a' de l'orbite de la Terre est constant, mais son excentricité e' est variable. En désignant donc,

pour plus de simplicité, par t le moyen mouvement de la Lune, et observant que $\frac{S a^3}{a^3} = m^2$, on aura

$$v = t - \frac{3m^2}{2} \int e^{12} dt;$$

en sorte que l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune est égale à

$$-\frac{3m^2}{2} \int e^{12} dt.$$

Je nommerai E cette équation.

Pour avoir l'équation séculaire de l'apogée, reprenons l'équation différentielle en u de l'article précédent, et supposons-y, comme ci-dessus,

$$u = \frac{1}{h^2} (1 - \frac{1}{2} \lambda^2) - \frac{c}{a} \cos(cv - \varpi) + \dots,$$

mais regardons e et ϖ comme variables, nous aurons

$$0 = \left[e \left(c - \frac{d\varpi}{dv} \right)^2 - \frac{d^2 e}{dv^2} - e(1-x) \right] \cos(cv - \varpi) + \left[2 \frac{de}{dv} \left(c - \frac{d\varpi}{dv} \right) - e \frac{d^2 \varpi}{dv^2} \right] \sin(cv - \varpi) + \dots,$$

d'où l'on tire, en égalant séparément à zéro le coefficient de $\sin(cv - \varpi)$,

$$\frac{2 de}{e} = \frac{d^2 \varpi}{c dv - d\varpi}$$

et, en intégrant,

$$e^2 = \frac{A}{c - \frac{d\varpi}{dv}},$$

A étant une constante arbitraire. L'excentricité e de l'orbe lunaire n'est donc pas rigoureusement constante; mais sa variation est insensible et n'influe point sensiblement sur les équations séculaires de la Lune, parce que e^2 s'y trouvant multiplié par $\frac{S a^3}{a^3}$ ou par m^2 , qui est une très petite fraction égale à $\frac{1}{179}$, on peut négliger le produit de $\frac{d\varpi}{dv}$ par cette fraction.

En égalant ensuite à zéro le coefficient de $\cos(cv - \varpi)$, on aura, à fort peu près,

$$c - \frac{d\varpi}{dv} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{d^2 e}{2 e dv^2};$$

on peut négliger le terme $\frac{d^2 e}{2 e dv^2}$, comme étant insensible par rapport à $\frac{d\varpi}{dv}$. Si l'on représente par c la partie constante de $1 - \frac{1}{2} x$, et si l'on désigne par $\frac{1}{2} \delta m^2$ le coefficient de e^2 dans la fraction $\frac{1}{2} x$, on aura

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{1}{2} \delta m^2 e^2,$$

d'où l'on tire, à fort peu près,

$$\varpi = \text{const.} + \frac{1}{2} \delta m^2 \int e^2 dt;$$

en sorte que le mouvement de l'apogée est assujéti à une équation séculaire égale à $-\delta E$, et, comme v est assujéti lui-même à l'équation séculaire E, l'équation séculaire de l'anomalie sera

$$(1 + \delta) E,$$

δ étant égal à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + & \frac{15 m^2 (2 - m) (1 + 2m)}{2(1 - 2m) (3 - 2m) (1 - m)} \\ & - \frac{15 m^2 \left[1 + 2m + \frac{4(1+m)}{2-c-2m} \right] (9 + 2m + c)}{8(2c + 2m - 2) (2 - 2m)} \\ & + \frac{147 m^2 \left(\frac{1+3m}{2} + \frac{2+3m}{2-c-3m} \right) (9 + 3m + c)}{16(2c + 3m - 2) (2 - 3m)} \\ & + \frac{3 m^2 \left(\frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{2-c-m} \right) (9 + m + c)}{16(2c + m - 2) (2 - m)}. \end{aligned}$$

Pour avoir les valeurs numériques de δ , nous observerons que l'on a

$$m = 0,0748013, \quad c = 0,99154774,$$

ce qui donne

$$\delta = 3,3024.$$

La détermination de ξ dépend, comme on voit, d'une analyse très délicate, et l'on peut craindre que les quantités négligées n'aient une influence sensible sur cette valeur. Ce qui doit nous rassurer à cet égard, c'est que la même analyse conduit à une valeur fort approchée du mouvement de l'apogée. En prenant pour unité le moyen mouvement de la Lune, celui de son apogée est, à très peu près, $\frac{1}{2}\alpha$, et l'on a $\frac{1}{2}\alpha = 0,0086113$. Les observations donnent 0,00845226 pour le mouvement de l'apogée, ce qui ne diffère pas de $\frac{1}{10}$ du résultat précédent; on peut donc croire que la valeur trouvée pour ξ a ce même degré de précision.

IX.

Considérons présentement le mouvement des nœuds. Pour cela, reprenons l'équation différentielle (g) de l'article I. Le mouvement de la Lune étant rapporté à un plan fixe peu incliné à l'écliptique vraie, si l'on néglige les carrés et les produits de s et de s' , cette équation devient

$$0 = \left(\frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) \left(h^2 + 2 \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right) + \frac{3S u^3}{2h^2 u^4} \left[s + s \cos(2v - 2v') - \frac{ds}{dv} \sin(2v - 2v') - 2s' \cos(2v - 2v') \right].$$

La valeur de s' est, par la théorie des planètes, de la forme

$$\lambda' \sin(v' - \theta'),$$

λ' et θ' variant avec une extrême lenteur. Soit donc

$$s = \lambda' \sin(v - \theta') + s_1;$$

on aura, en négligeant les quantités multipliées par $\frac{d\lambda'}{dv}$ et $\frac{d\theta'}{dv}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dv^2} + s &= \frac{d^2 s_1}{dv^2} + s_1, \\ s + s \cos(2v - 2v') - \frac{ds}{dv} \sin(2v - 2v') - 2s' \cos(2v - 2v') \\ &= s_1 + s_1 \cos(2v - 2v') - \frac{ds_1}{dv} \sin(2v - 2v'). \end{aligned}$$

L'équation différentielle en s deviendra ainsi

$$0 = \left(\frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) \left(1 + \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right) + \frac{3S u^3}{2h^2 u^4} \left[s_1 + s_1 \cos(2v - 2v') - \frac{ds_1}{dv} \sin(2v - 2v') \right].$$

$\lambda' \sin(v - \theta')$ serait la latitude de la Lune au-dessus du plan fixe, en la supposant mue sur le plan de l'écliptique vraie, et

$$s \text{ ou } \lambda' \sin(v - \theta') + s_1$$

est sa latitude au-dessus du plan fixe; s_1 est donc, à très peu près, sa latitude au-dessus du plan de l'écliptique vraie. Supposons, comme précédemment,

$$s_1 = \lambda \sin(gv - \theta),$$

le terme

$$\frac{3S u^3}{2h^2 u^4} [s_1 + s_1 \cos(2v - 2v') - \frac{ds_1}{dv} \sin(2v - 2v')]$$

devient

$$\begin{aligned} 3m^2 \lambda [(1 + \frac{3}{2}e'^2) \sin(gv - \theta) \\ - (1 - \frac{1}{2}e'^2) \sin(2v - 2mv - gv + \theta) \\ - \frac{1}{2}e' \sin(gv + c'mv - \theta - \omega') \\ - \frac{1}{2}e' \sin(gv - c'mv - \theta + \omega') \\ - \frac{1}{2}e' \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \omega') \\ + \frac{1}{2}e' \sin(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \omega') \\ + \dots \dots \dots]. \end{aligned}$$

Pour avoir la variation de ce terme, due à la force perturbatrice, nous supposons s_1 égal à $\lambda \sin(gv - \theta) + \delta s_1$; δs_1 sera de la forme

$$\begin{aligned} A^{(0)} \lambda \sin(2v - 2mv - gv + \theta) \\ + A^{(1)} \lambda e' \sin(gv + c'mv - \theta - \omega') \\ + A^{(2)} \lambda e' \sin(gv - c'mv - \theta + \omega') \\ + A^{(3)} \lambda e' \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \omega') \\ + A^{(4)} \lambda e' \sin(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \omega') \\ + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Cela posé, la variation du terme précédent produira le terme

$$-\frac{3}{2}m^2[(3-2m-g)(1-\frac{1}{2}e^2)\Lambda^{(0)}+3\Lambda^{(1)}e^2+3\Lambda^{(2)}e^2 \\ +\frac{1}{2}(3-m-g)\Lambda^{(3)}e^2-\frac{1}{2}(3-3m-g)\Lambda^{(4)}e^2]\lambda\sin(gv-\theta).$$

On verra ci-après que $\Lambda^{(1)}$ est à fort peu près égal à $-\Lambda^{(2)}$, ce qui réduit à zéro la quantité $3\Lambda^{(1)}e^2+3\Lambda^{(2)}e^2$. De plus, si l'on néglige la force perturbatrice, on a

$$0=\frac{d^2s_1}{dv^2}+s_1;$$

et si, parmi les termes de δs_1 , on ne conserve que ceux dans lesquels le coefficient de v diffère peu de l'unité, on a, à fort peu près,

$$0=\frac{d^2\delta s_1}{dv^2}+\delta s_1.$$

On peut donc négliger ici le terme $(\frac{d^2s_1}{dv^2}+s_1)2\int\frac{\partial R}{\partial v}\frac{dv}{u^2}$; l'équation différentielle en s_1 deviendra ainsi

$$0=\frac{d^2s_1}{dv^2}+s_1+\frac{3}{2}m^2[1+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}(3-2m-g)(1-\frac{1}{2}e^2)\Lambda^{(0)} \\ +\frac{1}{2}(3-m-g)\Lambda^{(1)}e^2 \\ +\frac{1}{2}(3-3m-g)\Lambda^{(4)}e^2]\lambda\sin(gv-\theta) \\ -\frac{3m^2\lambda}{2}[(1-\frac{1}{2}e^2)\sin(2v-2mv-gv+\theta) \\ +\frac{1}{2}e'\sin(gv+c'mv-\theta-\omega') \\ +\frac{1}{2}e'\sin(gv-c'mv-\theta+\omega') \\ +\frac{1}{2}e'\sin(2v-2mv-gv+c'mv+\theta-\omega') \\ -\frac{1}{2}e'\sin(2v-2mv-gv-c'mv+\theta+\omega') \\ +\dots\dots\dots].$$

En intégrant cette équation différentielle, on trouvera

$$\Lambda^{(0)}=\frac{3m^2(1-\frac{1}{2}e^2)}{2(2g+2m-2)(2-2m)}, \quad \Lambda^{(1)}=\frac{-gm^2}{4m(2g+m)}, \\ \Lambda^{(2)}=\frac{gm^2}{4m(2g-m)}, \quad \Lambda^{(3)}=\frac{3m^2}{4(2g+m-2)(2-m)}, \\ \Lambda^{(4)}=\frac{-21m^2}{4(2g+3m-2)(2-3m)}.$$

Si l'on y suppose ensuite $s_1=\lambda\sin(gv-\theta)$, en regardant λ et θ comme variables, et que l'on désigne par α' le coefficient de

$$\lambda\sin(gv-\theta)$$

dans cette même équation, la comparaison des coefficients de

$$\lambda\sin(gv-\theta) \quad \text{et de} \quad \lambda\cos(gv-\theta)$$

donnera les deux équations suivantes :

$$0=\frac{d^2\lambda}{dv^2}-\lambda\left(g-\frac{d\theta}{dv}\right)^2+\lambda(1+\alpha'),$$

$$0=\frac{2d\lambda}{dv}\left(g-\frac{d\theta}{dv}\right)-\lambda\frac{d^2\theta}{dv^2}.$$

En intégrant cette dernière équation, on a

$$\lambda^2=\frac{B}{g-\frac{d\theta}{dv}},$$

B étant une constante arbitraire. L'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie n'est donc pas rigoureusement constante; mais sa variation est insensible, et n'influe point sensiblement sur les équations séculaires de la Lune. On a ensuite, à fort peu près,

$$g-\frac{d\theta}{dv}=1+\frac{1}{2}\alpha'+\frac{d^2\lambda}{2\lambda dv^2}.$$

On peut négliger $\frac{d^2\lambda}{2\lambda dv^2}$ par rapport à $\frac{d\theta}{dv}$. Si l'on suppose ensuite que g exprime la partie constante de $1+\frac{1}{2}\alpha'$, et que $\frac{3}{2}\mathcal{E}'m^2$ soit le coefficient de e^2 dans α' , on aura

$$\theta=\text{const.}-\frac{3}{2}\mathcal{E}'m^2\int e^2 dt;$$

en sorte que le mouvement du nœud est assujéti à une équation séculaire additive à sa longitude moyenne, et égale à $\mathcal{E}'E$, $\mathcal{E}'$ étant

égal à

$$\frac{3}{4} + \frac{15m^2(3-2m-g)}{8(2g+2m-2)(2-2m)} - \frac{3m^2(3-m-g)}{32(2g+m-2)(2-m)} - \frac{147m^2(3-3m-g)}{32(2g+3m-2)(2-3m)}.$$

Nous devons ici faire une remarque importante. On a négligé précédemment les termes multipliés par

$$\frac{d\lambda'}{dv} \cos(v-\theta') \text{ et par } \lambda' \frac{d\theta'}{dv} \sin(v-\theta');$$

il faut prouver que l'on peut négliger ces termes, sans crainte d'erreur sensible. Soit $\varepsilon \lambda' \frac{d\theta'}{dv} \sin(v-\theta)$ un de ces termes, et conservons-le dans l'équation différentielle en s ; elle devient, en n'ayant égard qu'à ce terme,

$$0 = \frac{d^2 s_1}{dv^2} + s_1 + \alpha' \lambda \sin(gv-\theta) + \varepsilon \lambda' \frac{d\theta'}{dv} \sin(v-\theta').$$

En supposant dans cette équation $g=1$, $\theta=\theta'$ et $s_1 = \lambda \sin(v-\theta')$, on aura

$$0 = \left[(1+\alpha')\lambda - \left(1 - \frac{d\theta}{dv} \right)^2 \lambda + \frac{d^2 \lambda}{dv^2} + \varepsilon \frac{d\theta'}{dv} \lambda' \right] \sin(v-\theta') + \left[2 \frac{d\lambda}{dv} \left(1 - \frac{d\theta'}{dv} \right) - \lambda \frac{d^2 \theta'}{dv^2} \right] \cos(v-\theta').$$

Si l'on égale à zéro le coefficient de $\sin(v-\theta')$, on aura, à fort peu près,

$$\lambda = - \frac{\varepsilon \frac{d\theta'}{dv} \lambda'}{\alpha' + \frac{2d\theta'}{dv}};$$

or α' est incomparablement plus grand que $\frac{d\theta'}{dv}$, parce que la période du mouvement des nœuds de la Lune est incomparablement plus courte que celle des nœuds de l'orbite terrestre sur le plan fixe; λ est donc beaucoup moindre que λ' , et le terme $\varepsilon \frac{d\theta'}{dv} \lambda \sin(v-\theta')$ n'ajoute qu'un terme insensible à la valeur de s_1 . Il en est de même du terme

$\varepsilon \frac{d\lambda'}{dv} \cos(v-\theta')$ et des autres termes semblables. La rapidité du mouvement des nœuds de l'orbite lunaire les fait tous disparaître, à fort peu près, de la valeur de s_1 , et maintient l'inclinaison moyenne de cet orbite à l'écliptique vraie, toujours la même. La petitesse de cette valeur de λ rend insensible et permet de négliger, dans l'équation différentielle précédente, le terme multiplié par $\cos(v-\theta')$.

Déterminons présentement la valeur numérique de ε . Les observations donnent

$$g' = 1,00402185353,$$

d'où l'on tire

$$\varepsilon' = 0,6997598.$$

L'équation séculaire du mouvement des nœuds est donc, à fort peu près, $\frac{1}{10}$ de celle du moyen mouvement de la Lune.

X.

Il résulte de l'analyse précédente :

1° Que le moyen mouvement de la Lune est assujéti à une équation séculaire E, additive à sa longitude moyenne;

2° Que le mouvement de son apogée est assujéti à une équation séculaire soustractive de sa longitude moyenne, et égale à 3,3E, et qu'ainsi l'équation séculaire de l'anomalie de la Lune est égale à 4,3E, et additive;

3° Que le mouvement des nœuds de l'orbite lunaire est assujéti à une équation séculaire additive à leur longitude moyenne, et égale à 0,7E, et qu'ainsi la distance moyenne de la Lune à son nœud ascendant est assujéti à une équation séculaire additive, et égale à 0,3E;

4° Que la parallaxe moyenne de la Lune est soumise à une variation séculaire qui, par l'article VI, est égale à la variation séculaire du produit de $-\frac{1}{2}m^2c^2$ par 57', valeur moyenne de cette parallaxe. Dans les cas extrêmes, la variation de ce produit ne surpasse pas une demi-seconde : elle est donc insensible, et l'on peut regarder la parallaxe

moyenne de la Lune et sa moyenne distance à la Terre comme des quantités constantes;

5° Que l'excentricité de l'orbite lunaire et son inclinaison à l'écliptique vraie sont assujetties à des variations séculaires proportionnelles à celle de la parallaxe, et qui, par conséquent, seront toujours insensibles, ce qui est conforme aux observations.

Il nous reste à déterminer la valeur numérique de E. Je l'ai calculée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1786 (*), en partant des hypothèses les plus vraisemblables sur les masses de Vénus et de Mars, et l'on a vu précédemment avec quelle précision cette valeur satisfait aux observations anciennes. Si l'on nomme i le nombre des siècles écoulés depuis le commencement de 1700, j'ai trouvé

$$E = 11'', 135i^2 + 0'', 04398i^3 + \dots$$

la valeur de i devant être supposée négative pour les siècles antérieurs à 1700. Les deux premiers termes de cette série suffisent relativement aux plus anciennes observations, et je ne vois jusqu'à présent aucun changement à faire à cette expression de E.

XI.

Déterminons présentement les altérations produites par la résistance de l'éther. x', y', z' étant les coordonnées de la Terre rapportées au centre du Soleil, et x, y, z étant celles de la Lune rapportées au centre de la Terre, la vitesse absolue de la Lune autour du Soleil sera

$$\frac{\sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}}{dt}$$

Supposons que la résistance qu'elle éprouve soit proportionnelle au carré de cette vitesse, et qu'ainsi elle soit exprimée par

$$K \frac{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}{dt^2}$$

(*) *Œuvres de Laplace*, T. XI.

En la décomposant parallèlement aux axes des x , des y et des z , elle produira les trois forces suivantes :

$$-K \frac{dx' + dx}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2},$$

$$-K \frac{dy' + dy}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2},$$

$$-K \frac{dz' + dz}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}.$$

Mais, comme la Terre est supposée immobile dans la théorie lunaire, il faut transporter en sens contraire à la Lune la résistance que la Terre éprouve, et qui, décomposée parallèlement aux mêmes axes, donne les trois forces

$$-K' \frac{dx'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2},$$

$$-K' \frac{dy'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2},$$

$$-K' \frac{dz'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2},$$

K' étant un coefficient différent de K , et qui dépend de la résistance éprouvée par la Terre; les quantités $\frac{\partial R}{\partial x'}$, $\frac{\partial R}{\partial y'}$ et $\frac{\partial R}{\partial z'}$ de l'article I seront donc, en n'ayant égard qu'à ces résistances,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{K' dx'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} \\ &\quad - \frac{K(dx' + dx)}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{K' dy'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} \\ &\quad - \frac{K(dy' + dy)}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{K' dz'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} \\ &\quad - \frac{K(dz' + dz)}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}. \end{aligned}$$

Pour simplifier ces valeurs, nous observerons que dx, dy, dz sont très

petites relativement à dx' , dy' et dz' . En faisant donc

$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2},$$

et prenant pour le plan des x et des y celui de l'écliptique vraie, ce qui rend dz' nul, on aura

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{(K' - K) ds' dx'}{dt^3} - \frac{K ds' dx}{dt^3} - \frac{K(dx' dx + dy' dy)}{dt^3} \frac{dx'}{ds'}, \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{(K' - K) ds' dy'}{dt^3} - \frac{K ds' dy}{dt^3} - \frac{K(dx' dx + dy' dy)}{dt^3} \frac{dy'}{ds'}, \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= -\frac{K ds' dz}{dt^3};\end{aligned}$$

or on a par l'article I

$$\begin{aligned}-\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{s}{u} \frac{\partial R}{\partial s} &= \frac{1}{u} \left(x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial R}{\partial s} &= \frac{1}{u} \frac{\partial R}{\partial z},\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en négligeant l'excentricité de l'orbite terrestre,

$$\begin{aligned}-\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{s}{u} \frac{\partial R}{\partial s} &= \frac{(K' - K) dv'^2}{u^3 u'^3 dt^3} \sin(v - v') + \frac{K dv' du}{u^3 u' dt^3} \\ &\quad - \frac{K dv' dv}{2 v^3 u' dt^3} \sin(2v - 2v') + \frac{K dv' du}{u^3 u' dt^3} \sin^2(v - v'), \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= \frac{(K' - K) dv'^2}{u u'^3 dt^3} \cos(v - v') - \frac{K dv' dv'}{u^2 u' dt^3} \\ &\quad - \frac{K dv' dv}{u^2 u' dt^3} \cos^2(v - v') + \frac{K dv' dv}{2 u^3 u' dt^3} \sin(2v - 2v'), \\ \frac{\partial R}{\partial s} &= \frac{K s dv' du}{u^3 u' dt^3} - \frac{K dv' ds}{u^3 u' dt^3}.\end{aligned}$$

L'équation (f) de l'article I donnera donc, en négligeant les carrés de l'inclinaison et de l'excentricité de l'orbite lunaire, et en substituant

pour dt sa valeur trouvée dans le même article,

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d^2 u}{dv^2} + u - \frac{1}{h^2 + 2} \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \\ &\quad + (K' - K) \frac{u^2 dv'^2}{u'^3 dv^3} \sin(v - v') + (K' - K) \frac{u dv' dv'^2}{u'^2 dv^3} \cos(v - v') \\ &\quad - \frac{K u dv'}{2 v' dv} \sin(2v - 2v') - \frac{K du dv'}{u' dv^3} \cos(2v - 2v').\end{aligned}$$

On a ensuite, en observant que l'on peut substituer $\frac{dv}{hu^2}$ au lieu de dt , et $mdv + 2me dv \cos(v - \varpi)$ au lieu de dv' ,

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2} &= \int (K' - K) \frac{m^2 h^2 u dv}{u'^3} [1 + 4e \cos(v - \varpi)] \cos(v - v') \\ &\quad - \int \frac{1}{2} K m h^2 \frac{dv}{u'} [1 + 2e \cos(v - \varpi)] + \dots\end{aligned}$$

La valeur de K n'est pas constante : si l'on suppose la densité de l'éther proportionnelle à une fonction de la distance au Soleil, en nommant $\varphi(r)$ cette fonction pour une distance r , elle sera, relativement à la Lune,

$$\varphi\left(\frac{1}{u'}\right) + \frac{1}{u} \varphi'\left(\frac{1}{u'}\right) \cos(v - v'),$$

$\varphi'(r)$ étant la différentielle de $\varphi(r)$ divisée par dr : c'est la valeur qu'il faut substituer pour K , et alors on a, en ne conservant parmi les quantités périodiques que celles qui dépendent de l'angle $v - \varpi$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2} &= -\frac{h^2 m v}{2} \left[\frac{3}{u'} \varphi\left(\frac{1}{u'}\right) + \frac{m}{u'^2} \varphi'\left(\frac{1}{u'}\right) \right] \\ &\quad - \left[\frac{3}{u'} \varphi\left(\frac{1}{u'}\right) + \frac{2m}{u'^2} \varphi'\left(\frac{1}{u'}\right) \right] m h^2 e \sin(v - \varpi).\end{aligned}$$

En supposant donc

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{3m}{2u'} \varphi\left(\frac{1}{u'}\right) + \frac{m^2}{2u'^2} \varphi'\left(\frac{1}{u'}\right), \\ 6 &= \frac{6m}{u'} \varphi\left(\frac{1}{u'}\right) + \frac{9m^2}{2u'^2} \varphi'\left(\frac{1}{u'}\right),\end{aligned}$$

l'équation différentielle en u donnera

$$0 = \frac{d^2 u}{dv^2} + u - \frac{1}{h^2} (1 + 2\alpha v) - \frac{e\delta}{h^2} \sin(v - \varpi),$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$u = \frac{1}{h^2} (1 + 2\alpha v) - \frac{e}{h^2} (1 + \frac{1}{2}\delta v) \cos(v - \varpi).$$

On voit ainsi que la résistance de l'éther ne produit point d'équation sensible dans le mouvement de l'apogée; elle ne produit qu'une très petite altération dans l'excentricité de l'orbite.

Pour déterminer la variation qui en résulte dans le moyen mouvement de la Lune, reprenons l'expression de dt dans l'article I; expression qui devient, à fort peu près,

$$dt = \frac{dv}{hu^2} \left(1 - \frac{1}{h^2} \int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right).$$

En y substituant, pour u et pour $\int \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$, leurs valeurs précédentes, on aura, à très peu près,

$$dt = h^2 dv (1 - 3\alpha v + \dots)$$

et, par conséquent,

$$t = h^2 (v - \frac{3}{2}\alpha v^2 + \dots),$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{t}{h^2} + \frac{3\alpha t^2}{2h^4}.$$

Le mouvement de la Lune est donc assujéti, par la résistance de l'éther, à une équation séculaire proportionnelle au carré du temps.

L'équation (g) de l'article I donne

$$0 = \frac{d^2 s}{dv^2} + s - \delta v \frac{ds}{dv} + \dots,$$

δ' étant égal à

$$\frac{m}{2u'} \varphi\left(\frac{1}{u'}\right) + \frac{m^2}{2u'^2} \varphi'\left(\frac{1}{u'}\right);$$

en intégrant, on aura

$$s = \lambda \left(1 + \frac{\delta'}{2} v \right) \sin(v - \theta),$$

λ et θ étant deux arbitraires. Le mouvement des nœuds de la Lune n'est donc assujéti, par la résistance de l'éther, à aucune équation séculaire; mais l'inclinaison de l'orbite éprouve une légère altération par cette résistance.

Si l'on soumet à la même analyse les variations séculaires produites par la transmission successive de la gravité, on trouvera que ces variations ne peuvent être sensibles que dans le moyen mouvement de la Lune, et qu'elles n'altèrent ni le mouvement de l'apogée ni celui des nœuds. Ces deux mouvements offrent donc un moyen simple de reconnaître la véritable cause à laquelle on doit attribuer l'équation séculaire de la Lune; car s'ils varient sensiblement de siècle en siècle, il en résulte que cette équation n'est due ni à la résistance de l'éther, ni à la transmission successive de la gravité, et, si les altérations des trois mouvements de la Lune, par rapport au Soleil, à son apogée et à ses nœuds, sont telles que l'exige la loi de la pesanteur, elles n'ont point évidemment d'autre cause. Or, en comparant à nos Tables cinquante-deux éclipses observées par les Chaldéens, les Grecs et les Arabes, et dont vingt-cinq viennent d'être connues par les soins du citoyen Caussin, le citoyen Bouvard a trouvé 8' pour la correction du mouvement séculaire de l'anomalie de la Lune. Cette correction, confirmée par les époques et les moyens mouvements des Tables de Ptolémée et des Arabes, dépend, à la vérité, de l'équation séculaire de l'anomalie, dont il a fait usage d'après la théorie précédente; mais on a vu que la comparaison d'un très grand nombre d'observations de Lahire, Flamsteed, Bradley et Maskelyne donne, à très peu près, la même

234 MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS SÉCULAIRES, ETC.

correction. Un accord aussi remarquable établit incontestablement :
1^o l'existence de l'équation séculaire de l'anomalie de la Lune; 2^o l'approximation de la valeur que je lui ai assignée, et de l'analyse qui m'y a conduit; 3^o enfin, que les équations séculaires de la Lune ont uniquement pour cause la variation de l'excentricité de l'orbe terrestre.

MÉMOIRE

SUR LE

MOUVEMENT DES ORBITES

DES SATELLITES DE SATURNE ET D'URANUS.



MÉMOIRE

SUR LE

MOUVEMENT DES ORBITES

DES SATELLITES DE SATURNE ET D'URANUS ⁽¹⁾.

Mémoires de l'Académie des Sciences, 1^{re} Série, T. III; prairial an IX ⁽²⁾.

I.

Les anneaux de Saturne et ses six premiers satellites se meuvent, à très peu près, dans un même plan. Dominique Cassini pensait que l'orbite du dernier satellite est dans le plan des anneaux; mais Jacques Cassini, son fils, reconnut, en 1714, qu'elle s'en écarte sensiblement. Il résulte des observations qu'il fit alors qu'en rapportant cette orbite et les anneaux à l'orbite de la planète, le nœud de l'orbite du dernier satellite était de $15^{\circ}\frac{2}{3}$ moins avancé que le nœud des anneaux, et que son inclinaison n'était que de $22^{\circ}\frac{2}{3}$, tandis que l'inclinaison des anneaux était de 30° . Le citoyen Bernard ayant fait, en 1787, de nouvelles observations sur cet objet, Lalande a conclu de leur discussion qu'à cette époque le nœud de l'orbite était de $22^{\circ}\frac{1}{2}$ moins avancé que celui des anneaux; d'où il suit qu'en soixante-treize ans le nœud de l'orbite a rétrogradé de $6^{\circ}50'$, ou de $5^{\circ}37'$ par année. Mais l'incertitude de ce genre d'observations ne permet pas de compter sur ce résultat.

⁽¹⁾ Le 11 ventôse an VIII.

⁽²⁾ *Mémoires de l'Institut national des Sciences et Arts*, t. III.

et la rétrogradation du nœud est la seule chose que l'on puisse en conclure. Il m'a paru intéressant de connaître ce que la théorie de la pesanteur universelle donne à cet égard : c'est l'objet de ce Mémoire.

On sait, par la théorie des satellites de Jupiter, que chacun de leurs orbes se meut sur un plan fixe, passant par la ligne des nœuds de l'équateur et de l'orbite de la planète, entre ces deux derniers plans. L'inclinaison de ce plan fixe à l'équateur est d'autant plus grande que les satellites sont plus éloignés : elle est insensible pour le premier satellite, et s'élève à 25' pour le quatrième. Un effet semblable a lieu relativement aux satellites et aux anneaux de Saturne. J'ai prouvé, dans le Livre V de mon *Traité de Mécanique céleste*, que les anneaux sont maintenus par l'attraction de Saturne dans le plan de son équateur. La même attraction maintient dans ce plan les orbes des six premiers satellites; mais il n'en est pas ainsi du septième. Sa distance au centre de Saturne rend l'action du Soleil, pour changer le plan de son orbite, comparable à celle de Saturne, des anneaux et des satellites intérieurs. La recherche du mouvement que ces attractions diverses produisent dans son orbite est un problème dont la solution dépend d'une analyse délicate. Elle se simplifie en rapportant l'orbite à un plan déterminé, passant par la ligne des nœuds de l'équateur et de l'orbite de la planète entre ces deux derniers plans. Alors, elle se ramène à la rectification des sections coniques, et l'on en conclut facilement, par des suites très convergentes, l'inclinaison de l'orbite et le mouvement des nœuds sur ce plan. Ce mouvement est presque uniforme, et l'inclinaison est à peu près constante; mais l'inclinaison du plan déterminé à l'équateur et le mouvement annuel des nœuds dépendent de l'aplatissement de Saturne et des masses des anneaux et des satellites intérieurs. Des observations précises du dernier satellite, faites à de grands intervalles, doivent donc répandre beaucoup de lumière sur ces objets, et, par cette raison, elles méritent l'attention des astronomes. J'observerai ici que le mouvement annuel et rétrograde du nœud de l'orbite de ce satellite sur l'orbite de Saturne n'excède pas maintenant 3' 21".

Si l'on n'a égard qu'à l'action de Saturne et du Soleil, le plan fixe sur lequel se meut l'orbite du sixième satellite n'est pas incliné de 17' à l'équateur de Saturne; mais, si la masse du septième satellite surpassait de $\frac{1}{240}$ celle de Saturne, son action écarterait sensiblement l'orbite du sixième satellite du plan des anneaux. Puisque cela n'est pas, on doit en conclure que la masse du dernier satellite est au-dessous de cette fraction, ce qui paraîtra fort vraisemblable si l'on considère que la masse du plus gros satellite de Jupiter n'est pas de $\frac{1}{10000}$ de celle de la planète.

La même analyse appliquée aux satellites d'Uranus fait voir que son action seule peut maintenir les cinq premiers dans le plan de son équation. Elle est probablement insuffisante pour cet objet, relativement au sixième satellite; mais, si la masse du cinquième surpasse la vingt-millième partie de celle de la planète, alors son action réunie à celle d'Uranus suffit pour maintenir l'orbite du sixième dans le plan des autres orbites, conformément aux observations d'Herschel.

Lorsque l'on est parvenu à la véritable cause des phénomènes, on la compare avec intérêt aux tentatives plus ou moins heureuses faites auparavant pour l'expliquer. Jacques Cassini a donné, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1714, l'explication suivante de celui qui nous occupe.

« La situation des nœuds du cinquième satellite et l'inclinaison de son orbe, qui sont si différentes de celles des autres, semblent, dit-il, déranger l'économie du système des satellites qu'on avait cru jusqu'à présent avoir tous les mêmes nœuds et être dans un même plan. Cependant il paraît que l'on peut en rendre aisément la raison physique, si l'on fait attention à la grande distance de ce satellite au centre de Saturne, car l'effort qui entraîne les satellites suivant la direction du plan de l'anneau s'affaiblit en s'éloignant de Saturne, et est obligé de céder à un autre effort qui emporte Saturne et toutes les planètes suivant l'écliptique. Ces deux efforts agissent sur le cinquième satellite suivant des directions inclinées l'une à l'autre de 31°. Il résulte

qu'il doit suivre son cours suivant une direction moyenne, entre le plan de l'anneau et celui de l'écliptique. »

L'effort qui entraîne les satellites dans la direction du plan de l'anneau, et dont Cassini ignorait la cause, est l'attraction de Saturne, due à son renflement vers l'équateur, et l'attraction des anneaux. Quant à l'effort qui emporte Saturne et les planètes suivant l'écliptique, on sait maintenant qu'il n'existe point, et que le mouvement de ces corps, à peu près dans le plan de l'écliptique, est dû aux circonstances primitives de ce mouvement; mais, si l'on substitue à cet effort l'action du Soleil, alors l'explication de Cassini coïncide avec la véritable.

II.

Prenons pour plan fixe celui de l'orbite du septième satellite à une époque donnée; nommons s la tangente de la latitude du satellite au-dessus de ce plan; r le rayon projeté de l'orbite supposée circulaire, et ν l'angle décrit par la projection de ce rayon sur ce plan. On aura, par le n° 15 du Livre II de la *Mécanique céleste*, en observant que s est ici de l'ordre des forces perturbatrices, en négligeant les quantités de l'ordre du carré de ces forces et en prenant pour unité la masse de Saturne, ou, plus exactement, la somme des masses de cette planète, de son anneau et de ses six premiers satellites,

$$0 = \frac{d^2 s}{dt^2} + s - r \frac{\partial Q}{\partial s} + r^2 s \frac{\partial Q}{\partial r},$$

Q étant une fonction que nous allons déterminer.

Pour cela, considérons d'abord l'action du Soleil. Si l'on nomme x, y, z les coordonnées du satellite rapportées au centre de Saturne et au plan de l'orbite primitive du satellite; x', y', z' celles du Soleil, et r' sa distance au centre de Saturne, on aura, par le n° 14 du Livre II de la *Mécanique céleste*,

$$Q = -m' \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} + \frac{m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}},$$

quantité qui, à raison de la petitesse de r , relativement à r' , se réduit à

$$Q = \frac{m'}{r'} - \frac{1}{2} \frac{m' r^2 (1 + s^2)}{r'^3} + \frac{3}{2} \frac{m' (xx' + yy' + zz')^2}{r'^5};$$

on aura donc, en observant que z est à très peu près égal à rs , et en négligeant les termes de l'ordre de $\frac{m' r^2 s}{r'^3}$,

$$-r \frac{\partial Q}{\partial s} + r^2 s \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{3m' r^2 z'}{r'^3} (xx' + yy' + zz').$$

Si l'on conçoit que l'axe des x soit la ligne menée du centre de Saturne au nœud de l'anneau sur l'orbite, et que l'on nomme λ l'inclinaison du plan fixe à l'orbite de Saturne, on aura, en désignant par x'' et y'' les coordonnées du Soleil rapportées au plan de l'orbite de Saturne,

$$x' = x'', \quad y' = y'' \cos \lambda, \quad z' = -y'' \sin \lambda.$$

Si l'on nomme ν' le mouvement du Soleil vu de Saturne, et rapporté à l'orbite de cette planète, on aura

$$x'' = r' \cos \nu', \quad y'' = r' \sin \nu';$$

on a, de plus,

$$x = r \cos \nu, \quad y = r \sin \nu, \quad z = rs.$$

En ne conservant donc dans le développement de la fonction

$$-r \frac{\partial Q}{\partial s} + r^2 s \frac{\partial Q}{\partial r}$$

que les termes dépendants du sinus ou du cosinus de l'angle ν , et qui peuvent seuls produire, par l'intégration, des arcs de cercle dans l'expression de s , on aura, par l'action de m' ,

$$-r \frac{\partial Q}{\partial s} + r^2 s \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{3m' r^3}{2r'^3} \sin \lambda \cos \lambda \sin \nu.$$

Déterminons présentement la valeur de $-r \frac{\partial Q}{\partial s} + r^2 s \frac{\partial Q}{\partial r}$, relative à l'action de Saturne.

Soit V la somme des molécules de Saturne divisées par leurs di-

stances respectives au dernier satellite. V sera, par le n° 15 cité, la partie de Q relative à l'attraction de Saturne. En considérant cette planète comme un solide de révolution, ce que l'on peut supposer ici sans erreur sensible, et prenant pour unité son demi-axe, on aura, par le n° 35 du Livre III de la *Mécanique céleste*,

$$V = \frac{1}{r\sqrt{1+s^2}} + \frac{\frac{1}{2}\alpha\varphi - \frac{\alpha h}{r^3(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}}{r^3(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} (\mu^2 - \frac{1}{2}),$$

$\alpha\varphi$ étant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur de Saturne, αh étant son ellipticité, et μ étant le sinus de la déclinaison du satellite relativement à cet équateur. Si l'on nomme γ l'inclinaison de l'équateur au plan fixe ou à l'orbite primitive du satellite; si l'on nomme, de plus, ψ l'arc de cette orbite compris entre l'équateur et l'orbite de Saturne, $v - \psi$ sera le mouvement du satellite, rapporté à son orbite primitive et compté de l'intersection de cette orbite avec l'équateur de la planète. On trouve, par les formules de la Trigonométrie sphérique, que, si l'on néglige le carré de s , on a

$$\mu^2 = \sin^2 \gamma \sin^2 (v - \psi) - 2s \sin \gamma \cos \gamma \sin (v - \psi).$$

En substituant donc cette valeur de μ^2 dans V et négligeant les termes des ordres αs et s^2 , en ne conservant ensuite que les termes multipliés par le sinus ou le cosinus de $v - \psi$, on aura

$$-r \frac{\partial Q}{\partial s} + r^2 s \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\alpha\varphi - 2\alpha h}{r^2} \sin \gamma \cos \gamma \sin (v - \psi).$$

Il nous reste à considérer l'action des anneaux de Saturne et de ses six premiers satellites; or, si l'on considère un satellite intérieur dont la masse soit m'' , et dont le rayon de l'orbite soit r'' , cette orbite étant située dans le plan de l'équateur de Saturne, on trouvera, par ce qui précède, en supposant r'' très petit par rapport à r ,

$$-r \frac{\partial Q}{\partial s} + r^2 s \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{3m''r''^2}{2r^2} \sin \gamma \cos \gamma \sin (v - \psi).$$

En considérant donc les anneaux comme la réunion d'une infinité de

satellites, on aura, en vertu de leurs attractions et de celle des satellites intérieurs,

$$-r \frac{\partial Q}{\partial s} + r^2 s \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{B}{r^2} \sin \gamma \cos \gamma \sin (v - \psi);$$

B étant un coefficient constant dépendant des masses et de la constitution des anneaux et des satellites intérieurs. Soient, pour abréger,

$$K = \frac{3m'r''^2}{4r^2}, \quad K' = \frac{\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\varphi + \frac{1}{2}B}{r^2},$$

on aura

$$0 = \frac{d^2 s}{dt^2} + 2K \sin \lambda \cos \lambda \sin v - 2K' \sin \gamma \cos \gamma \sin (v - \psi);$$

d'où l'on tire, en intégrant et négligeant, comme on le peut ici, les constantes arbitraires,

$$s = K v \sin \lambda \cos \lambda \cos v - K' v \sin \gamma \cos \gamma \cos (v - \psi).$$

Concevons maintenant, par le centre de Saturne, un plan passant par les nœuds de l'équateur avec l'orbite de la planète, et formant l'angle θ avec le plan de l'équateur. Soient α l'inclinaison de l'orbite du satellite sur ce nouveau plan, et $v + \Gamma$ la distance du satellite au nœud de son orbite avec ce plan; enfin soit Π la distance de ce nœud au nœud de l'équateur avec l'orbite, que nous supposerons plus avancé en longitude. Si l'on fait varier α de $\partial\alpha$, Π étant supposé constant, il en résultera pour s une valeur égale à $\partial\alpha \sin (v + \Gamma)$. Si, α étant supposé constant, on fait varier Π de $\partial\Pi$, la valeur résultante pour s sera $\partial\Pi \sin \alpha \cos (v + \Gamma)$. On aura donc, en faisant tout varier à la fois,

$$\partial\alpha \sin (v + \Gamma) + \partial\Pi \sin \alpha \cos (v + \Gamma) = s.$$

En égalant cette valeur de s à la précédente, on aura

$$(1) \quad \begin{cases} \partial\alpha \sin (v + \Gamma) + \partial\Pi \sin \alpha \cos (v + \Gamma) \\ = K v \sin \lambda \cos \lambda \cos v - K' v \sin \gamma \cos \gamma \cos (v - \psi). \end{cases}$$

On a, en ne portant l'approximation que jusqu'à la première puis-

sance de v ,

$$\frac{\partial \varpi}{\partial v} = v \frac{\partial \varpi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v} = v \frac{\partial \Pi}{\partial v}.$$

Si l'on substitue, dans le second membre de l'équation (1),

$$\cos(v + \Gamma - \Gamma) \quad \text{au lieu de} \quad \cos v$$

et

$$\cos(v + \Gamma - \psi - \Gamma) \quad \text{au lieu de} \quad \cos(v - \psi);$$

si on les développe ensuite en sinus et cosinus de $v + \Gamma$, la comparaison de leurs coefficients à ceux du premier membre donnera

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varpi}{\partial v} = K \sin \lambda \cos \lambda \sin \Gamma - K' \sin \gamma \cos \gamma \sin(\psi + \Gamma), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v} \sin \varpi = K \sin \lambda \cos \gamma \cos \Gamma - K' \sin \gamma \cos \gamma \cos(\psi + \Gamma). \end{cases}$$

Les formules de la Trigonométrie sphérique donnent, en nommant A l'inclinaison de l'équateur de Saturne à son orbite,

$$\begin{aligned} \sin \lambda \sin \Gamma &= \sin(A - \theta) \sin \Pi, \\ \sin \lambda \cos \Gamma &= \sin \varpi \cos(A - \theta) + \sin(A - \theta) \cos \varpi \cos \Pi, \\ \cos \lambda &= \cos \varpi \cos(A - \theta) - \sin \varpi \sin(A - \theta) \cos \Pi, \\ \sin \gamma \sin(\psi + \Gamma) &= \sin \theta \sin \Pi, \\ \sin \gamma \cos(\psi + \Gamma) &= \sin \theta \cos \varpi \cos \Pi - \sin \varpi \cos \theta, \\ \cos \gamma &= \cos \theta \cos \varpi + \sin \theta \sin \varpi \cos \Pi. \end{aligned}$$

En faisant donc

$$K \sin(A - \theta) \cos(A - \theta) = K' \sin \theta \cos \theta,$$

ce qui donne, pour déterminer θ , l'équation

$$\tan 2\theta = \frac{K \sin 2A}{K' + K \cos 2A},$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varpi}{\partial v} &= -\frac{1}{2} [K \sin^2(A - \theta) + K' \sin^2 \theta] \sin \varpi \sin 2\Pi, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v} &= \frac{[K \cos^2(A - \theta) + K' \cos^2 \theta] \cos \varpi}{[K \sin^2(A - \theta) + K' \sin^2 \theta] \cos \varpi \cos^2 \Pi}. \end{aligned}$$

Soit, pour abréger,

$$\begin{aligned} K \cos^2(A - \theta) + K' \cos^2 \theta - \frac{1}{2} K \sin^2(A - \theta) - \frac{1}{2} K' \sin^2 \theta &= p, \\ \frac{1}{2} K \sin^2(A - \theta) + \frac{1}{2} K' \sin^2 \theta &= q; \end{aligned}$$

on aura

$$\frac{\partial \varpi}{\partial v} = -q \sin \varpi \sin 2\Pi,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = p \cos \varpi - q \cos \varpi \cos 2\Pi,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varpi \cos \varpi}{\sin \varpi} = \frac{-q d\Pi \sin 2\Pi}{p - q \cos 2\Pi}$$

et, en intégrant,

$$\sin \varpi = \frac{a}{\sqrt{p - q \cos 2\Pi}},$$

a étant une constante arbitraire. L'expression précédente de $\frac{\partial \Pi}{\partial v}$ donnera donc

$$dv = \frac{d\Pi}{\sqrt{(p - q \cos 2\Pi)(p - a^2 - q \cos 2\Pi)}},$$

équation différentielle dont l'intégration dépend de la rectification des sections coniques. On peut mettre cette équation sous une forme plus simple en faisant

$$\tan \Pi = \sqrt{\frac{p - q}{p + q}} \tan \Pi';$$

elle devient alors

$$dv = \frac{d\Pi'}{\sqrt{p^2 - q^2} \sqrt{1 - \frac{a^2 p}{p^2 - q^2} - \frac{a^2 q}{p^2 - q^2} \cos 2\Pi'}}.$$

Cette équation donnera, en l'intégrant par les méthodes connues, l'expression de v en Π' , et, par le retour des suites, on aura celle de Π en v .

On aura ensuite, en faisant $\frac{q}{p + \sqrt{p^2 - q^2}} = \epsilon$,

$$\Pi = \Pi' - \epsilon \sin 2\Pi' + \frac{\epsilon^2}{2} \sin 4\Pi' - \frac{\epsilon^3}{3} \sin 6\Pi' + \dots$$

III.

Pour appliquer des nombres à ces formules, il faut connaître les valeurs de K et de K' . Celle de K est facile à déterminer, car $\frac{m'}{r^2}$ est l'attraction du Soleil sur Saturne, et cette attraction est égale à la force centrifuge due au mouvement de Saturne dans son orbite : or cette force est égale au carré de la vitesse de Saturne, divisé par le rayon de l'orbite. En nommant donc T la durée de la révolution de Saturne, et π la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, la force centrifuge sera $\frac{4\pi^2 r'}{T^2}$; en l'égalant à $\frac{m'}{r^2}$, on aura

$$\frac{m'}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Si l'on nomme T la durée de la révolution du dernier satellite, on aura pareillement

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2};$$

on aura donc

$$K = \frac{3}{4} \frac{m' r^2}{r^2} = \frac{3}{4} \frac{T^2}{T^2}.$$

Les observations donnent

$$T = 79^{\text{h}} 32^{\text{m}} 9^{\text{s}},$$

$$T' = 10759^{\text{h}} 08^{\text{m}},$$

d'où l'on tire

$$K = 0,000040774.$$

La valeur de K' est égale à $\frac{\alpha h - \frac{1}{2} \alpha \varphi + \frac{1}{4} B}{r^2}$. Dans cette expression, le demi-axe de Saturne est pris pour unité, mais son aplatissement αh est inconnu, ainsi que la quantité $\frac{1}{4} B$, qui dépend de la masse des anneaux et des six premiers satellites. Il est donc impossible de déterminer exactement sa valeur, mais on peut connaître d'une manière approchée la partie de K' qui dépend de l'action de Saturne.

Pour cela, nous observons que, si l'on nomme t la durée de la rotation de Saturne, on aura

$$\alpha \varphi = \frac{T^2}{t^2 r^2}.$$

Les observations donnent

$$t = 0^{\text{h}} 42^{\text{m}} 8^{\text{s}}, \quad r = 59,154,$$

d'où l'on tire

$$\alpha \varphi = 0,16597.$$

Supposons que l'aplatissement de la Terre soit à la valeur de $\alpha \varphi$ qui lui correspond comme l'aplatissement de Saturne est à la valeur correspondante de $\alpha \varphi$. On a vu, dans le Livre III de la *Mécanique céleste*, que cette proportion a lieu, à fort peu près, pour Jupiter comparé à la Terre : $\alpha \varphi$ est égal à $\frac{4}{233}$ pour la Terre; en supposant donc que l'aplatissement de cette planète est $\frac{4}{233}$, conformément aux expériences du pendule, on aura

$$\alpha h - \frac{1}{2} \alpha \varphi = \frac{243}{670} \frac{T^2}{t^2 r^2}.$$

Ainsi, en n'ayant égard qu'à la partie de K' dépendante de l'action de Saturne, on aura

$$K' = K \frac{162}{335} \frac{T^2}{t^2 r^2} = 0,4219 K;$$

on ne peut donc pas supposer à K' une plus petite valeur.

A étant, par les observations, égal à 30° , cette valeur de K' donne

$$\theta = 21^{\circ} 36' 20''.$$

On aurait la vraie valeur de K' si l'on connaissait le mouvement annuel du nœud de l'orbite du satellite sur l'orbite de Saturne. Les équations (A) de l'article I donnent, en prenant pour plan fixe celui de l'orbite de Saturne, ce qui change α en λ et rend Γ nul :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = -K' \sin \gamma \cos \gamma \sin \psi,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial v} = K \cos \lambda - \frac{K' \sin \gamma \cos \gamma \cos \psi}{\sin \lambda}.$$

Suivant le citoyen Lalande, on avait, en 1787,

$$\lambda = 22^{\circ}42', \quad \gamma = 12^{\circ}14', \quad \psi = 64^{\circ}13'.$$

En employant la valeur précédente de K' , on aura

$$3'44'',5 - 24'',0$$

pour le mouvement annuel et rétrograde du nœud par rapport à l'équinoxe fixe, le premier de ces deux termes étant relatif à l'attraction solaire.

La diminution annuelle de l'inclinaison de l'orbite du satellite à l'orbite de Saturne, supposée fixe, est de $19'',1$. Les observations donnent $5'37''$ pour le mouvement annuel du nœud. Mais il suffit de considérer l'incertitude de ce genre d'observations, et particulièrement de celles de Cassini en 1714, pour reconnaître que leur différence d'avec la théorie tient aux erreurs dont elles sont susceptibles.

Le rapport de K' à K diminue comme la cinquième puissance de la distance du satellite au centre de Saturne. Ainsi, pour le sixième satellite, le rayon r étant 20,295, il faut multiplier la valeur précédente de K' par $\left(\frac{59,154}{20,295}\right)^5$ pour avoir la valeur de K' relative au sixième satellite. On aura ainsi

$$K' = 88,753 K,$$

ce qui donne $16'41''$ pour l'inclinaison θ du plan fixe que nous avons considéré à l'équateur de Saturne, inclinaison insensible pour nous. Et comme le satellite se meut à très peu près sur ce plan fixe, si l'arbitraire α est nulle ou très petite, on voit que l'action de Saturne peut maintenir à très peu près dans un même plan l'orbite du sixième satellite, et à plus forte raison celles des satellites plus intérieurs et ses anneaux, ce qui est conforme à ce que j'ai démontré dans le dernier Chapitre du Livre V de la *Mécanique céleste*.

Cependant, si la masse du dernier satellite surpassait $\frac{1}{200}$ de celle de Saturne, l'orbite du sixième pourrait, en vertu de son action, s'écarter sensiblement du plan de l'équateur. En effet, il est facile

de voir, par l'analyse de l'article I, que l'action du septième satellite introduit dans l'expression de s relative au sixième satellite un terme de la forme

$$K''v \sin \lambda' \cos \lambda' \cos (v - \psi),$$

K'' étant à peu près égal à $\frac{3}{4} \frac{mr^3}{r^2}$, m étant la masse du dernier satellite, r étant le rayon de son orbite et r' étant le rayon de l'orbite du sixième satellite. λ' est l'inclinaison de l'orbite du sixième à celle du septième, et ψ est l'arc de l'orbite du sixième satellite compris entre l'orbite du septième et celle de Saturne. Il est visible que ce terme produirait un déplacement sensible à l'équateur de Saturne, si le rapport de K'' à K' n'était pas une fraction peu considérable; or, en n'ayant égard qu'à l'action de Saturne, on a

$$K' = \frac{1}{2} 88,753 \left(\frac{15,9453}{10799,08} \right)^2, \quad K'' = \frac{3m}{4} \left(\frac{20,295}{59,154} \right)^3.$$

En supposant $K'' = K'$, on aura

$$m = 0,004828.$$

La masse du dernier satellite est donc au-dessous de cette valeur, et il y a lieu de penser qu'elle n'excède pas $\frac{1}{1000}$ de celle de Saturne; ce qui paraît vraisemblable, si l'on considère que la masse du plus gros satellite de Jupiter n'est pas $\frac{1}{10000}$ de celle de la planète.

IV.

Si l'on applique l'analyse précédente aux satellites d'Uranus, on trouve que l'action seule de cette planète ne suffit pas pour maintenir l'orbite de son dernier satellite dans le plan de son équateur. Quoique nous ignorions la durée de sa rotation, il n'est pas cependant vraisemblable qu'elle soit beaucoup moindre que celle de Jupiter et de Saturne.

Supposons qu'elle soit la même que celle de Saturne : l'équation

$$K' = K \frac{162}{335} \frac{T^2}{r^2 r^3},$$

trouvée dans l'article précédent, donnera, en observant qu'ici

$$T' = 30689 \text{ jours,}$$

et que, suivant Herschel, $r = 91.008$,

$$K' = 0.39815 K.$$

Le plan de l'équateur d'Uranus étant supposé perpendiculaire à très peu près à son orbite, si l'on fait

$$\frac{\pi}{2} - A' = A,$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, A' sera un très petit angle. Soit

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta',$$

θ' sera l'inclinaison du plan fixe à l'orbite, et l'on aura

$$\theta' = \frac{A'}{0.60185}.$$

Le plan fixe sur lequel se meut l'orbite du dernier satellite coïnciderait donc, à très peu près, avec celui de l'orbite de la planète, et ce satellite cesserait à la longue de se mouvoir dans le plan de l'équateur et des orbites des autres satellites; mais il peut être retenu dans ce dernier plan par l'action des satellites intérieurs. Pour le faire voir, nous observerons que, par l'article I, l'action du satellite intérieur m'' ajoute à la valeur de K' la quantité $\frac{3}{4} m'' \frac{r'^2}{r^2}$, en supposant $\frac{r'}{r}$ une très petite fraction. A la vérité, cette fraction est, à très peu près, $\frac{1}{2}$ par rapport au cinquième satellite; et alors ce que l'action de m'' ajoute à la valeur

de K' diffère sensiblement de $\frac{3}{4} m'' \frac{r'^2}{r^2}$; mais cette approximation est suffisante pour notre objet. Cela posé, reprenons l'équation

$$\tan 2\theta = \frac{K \sin 2A}{K' + K \cos 2A}.$$

A étant égal à $\frac{\pi}{2} - A'$, A' étant fort petit, on a

$$\tan 2\theta = \frac{K \sin 2A}{K' - K}.$$

Si K' surpasse sensiblement K , alors on a

$$\theta = \frac{A'}{K' - K}.$$

Nous venons de voir que, si l'on n'a égard qu'à l'action d'Uranus et du Soleil, K surpasse probablement K' ; mais, si l'on suppose

$$\frac{3}{4} m'' \frac{r'^2}{r^2} = K,$$

on aura

$$K' = 1.39815 K$$

et, par conséquent,

$$\theta = \frac{A'}{0.39815}.$$

K , relativement à Uranus, est égal à 0.000050115; de plus $\frac{r''}{r} = \frac{1}{2}$. On aura donc

$$m'' = 0.000026728,$$

la masse d'Uranus étant prise pour unité. Or cette masse du cinquième satellite et même une masse supérieure sont très admissibles. L'orbite du sixième satellite peut donc être retenu dans le plan de l'équateur de la planète par l'action des satellites intérieurs. Quant aux orbites de ces satellites, l'action seule d'Uranus suffit pour les maintenir dans le plan de son équateur; car le rapport de K' à K augmentant réciproquement comme la cinquième puissance du rayon

de l'orbite, on a, relativement au cinquième satellite,

$$K' = 12,7408 K,$$

ce qui donne

$$g = \frac{A'}{11,7408}.$$

V.

J'ai supposé, dans l'analyse précédente, l'équateur de Saturne et son orbite immobiles; or l'action du Soleil et du dernier satellite de cette planète fait rétrograder les nœuds de son équateur, et son orbite est en mouvement par l'action de Jupiter et d'Uranus; mais la lenteur de ces divers mouvements rend cette supposition admissible. En effet, le mouvement annuel et rétrograde de l'équateur de Saturne et celui de son orbite sur l'équateur s'élèvent à peine à deux ou trois secondes, et les limites de la variation de l'inclinaison de l'orbite à l'équateur sont toujours très petites. Reprenons, cela posé, l'équation trouvée dans l'article II,

$$\frac{d\sigma \cos \sigma}{\sin \sigma} = \frac{-q d\Pi \sin 2\Pi}{p - q \cos 2\Pi}.$$

En l'intégrant, on aura

$$\log \sin \sigma = \log a - \frac{1}{2} \log(p - q \cos 2\Pi) + \frac{1}{2} \int \frac{dp - dq \cos 2\Pi}{p - q \cos 2\Pi}.$$

Soient

$$dp = \alpha d\Pi \quad \text{et} \quad dq = \alpha' d\Pi,$$

α et α' étant de très petits coefficients, à raison de la lenteur des variations de la position de l'orbite sur l'équateur de Saturne; on aura

$$\sin \sigma = \frac{a}{\sqrt{p - q \cos 2\Pi}} e^{\frac{1}{2} \int \frac{\alpha - \alpha' \cos 2\Pi}{p - q \cos 2\Pi} d\Pi},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; d'où l'on voit que l'inclinaison σ est à très peu près la même que si p et q étaient constants. Un raisonnement semblable s'applique à l'expres-

sion de Π et nous montre que les variations très lentes des nœuds et de l'inclinaison de l'équateur de Saturne à son orbite n'altèrent point sensiblement les résultats précédents. L'équateur de Saturne entraîne dans son mouvement les orbites des six premiers satellites et des anneaux, de manière qu'ils coïncident toujours avec le plan de l'équateur.



Il est évident que la lune est un corps solide, et que sa surface est couverte de montagnes et de vallées. On a vu, par exemple, les montagnes de la lune, qui sont situées dans la partie orientale de son disque. Ces montagnes ont des hauteurs considérables, et leur forme est très variée. Elles sont souvent entourées de vallées profondes, et leur sommet est couronné de neiges éternelles. La lune est donc un monde très intéressant, et qui mérite d'être étudié de près.

La lune est un corps solide, et sa surface est couverte de montagnes et de vallées. On a vu, par exemple, les montagnes de la lune, qui sont situées dans la partie orientale de son disque. Ces montagnes ont des hauteurs considérables, et leur forme est très variée. Elles sont souvent entourées de vallées profondes, et leur sommet est couronné de neiges éternelles. La lune est donc un monde très intéressant, et qui mérite d'être étudié de près.

La lune est un corps solide, et sa surface est couverte de montagnes et de vallées. On a vu, par exemple, les montagnes de la lune, qui sont situées dans la partie orientale de son disque. Ces montagnes ont des hauteurs considérables, et leur forme est très variée. Elles sont souvent entourées de vallées profondes, et leur sommet est couronné de neiges éternelles. La lune est donc un monde très intéressant, et qui mérite d'être étudié de près.

MÉMOIRE

THÉORIE DE LA LUNE.

MÉMOIRE

DE LA

THÉORIE DE LA LUNE.

La lune est un corps solide, et sa surface est couverte de montagnes et de vallées. On a vu, par exemple, les montagnes de la lune, qui sont situées dans la partie orientale de son disque. Ces montagnes ont des hauteurs considérables, et leur forme est très variée. Elles sont souvent entourées de vallées profondes, et leur sommet est couronné de neiges éternelles. La lune est donc un monde très intéressant, et qui mérite d'être étudié de près.



MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DE LA LUNE⁽¹⁾.

Mémoires de l'Académie des Sciences, 1^{re} Série, T. III; prairial an IX (2).

Il existe dans l'orbe lunaire un mouvement de nutation analogue à celui de l'équateur terrestre, et dont la période est celle du mouvement des nœuds de la Lune. Le sphéroïde terrestre, par son attraction sur ce satellite, fait osciller l'orbite lunaire comme l'attraction de la Lune sur le sphéroïde terrestre fait osciller notre équateur. L'étendue de cette nutation dépend de l'aplatissement de la Terre et peut ainsi répandre un grand jour sur cet élément important. Il en résulte, dans la latitude de la Lune, une inégalité proportionnelle à sa longitude moyenne, et dont le coefficient est $-6''.5$, si l'aplatissement de la Terre est $\frac{1}{293}$. Ce coefficient augmente et s'élève à $-13''.5$, si cet aplatissement est $\frac{1}{278}$. Cette inégalité revient à supposer que l'orbite lunaire, au lieu de se mouvoir sur l'écliptique en conservant sur elle une inclinaison constante, se meut avec la même condition sur un plan passant par les équinoxes, entre l'équateur et l'écliptique, et incliné à ce dernier plan de $6''.5$ dans l'hypothèse de $\frac{1}{278}$ d'aplatissement, phénomène analogue à celui que j'ai remarqué dans les orbes des satellites de Jupiter. (Voir l'Exposition du système du monde, Livre IV, Chapitre VI.)

Déjà la comparaison d'un grand nombre d'observations avait indiqué à M. Burg, astronome allemand très distingué, une inégalité périodique

⁽¹⁾ Le 26 prairial an VIII.

⁽²⁾ *Mémoires de l'Institut national des Sciences et Arts*, t. III.

Oeuvres de L. — XII.

dans le mouvement des nœuds de la Lune, dont le maximum positif lui paraissait répondre à peu près aux années 1778 et 1795, et dont le maximum négatif répondait aux années 1768 et 1787, ce qui est conforme à la marche de l'inégalité que j'ai trouvée. Mais M. Burg n'a pas déterminé la loi de cette inégalité qui influe à la fois sur la position des nœuds de la Lune et sur l'inclinaison de son orbite. La découverte de cette loi est donc un nouveau bienfait de la théorie de la pesanteur universelle, qui, sur ce point comme sur beaucoup d'autres, a devancé les observations. M. Burg, dans sa pièce qui vient d'être couronnée par l'Institut national, m'avait engagé à rechercher la cause des anomalies qu'il avait remarquées, par les observations, dans les nœuds de la Lune : l'analyse m'a conduit à celle que je viens d'annoncer. Le citoyen Bouvard vient d'en comparer le résultat aux observations : 220 observations de Maskeline, dans lesquelles l'inégalité précédente était à son maximum positif, combinées avec 220 observations dans lesquelles elle était à son maximum négatif, lui ont donné $-7'',5$ à très peu près pour son coefficient, ce qui répond à $\frac{1}{254}$ d'aplatissement pour la Terre. Ce coefficient s'élèverait à $-13'',5$ si la Terre était homogène. Son homogénéité est donc exclue par les observations mêmes du mouvement de la Lune.

La considération de l'inégalité précédente m'a fourni une nouvelle détermination de l'inégalité de la Lune, dépendante de la longitude du nœud. Les observations avaient porté Mayer à admettre cette dernière inégalité, quoiqu'elle ne fût indiquée par aucune des théories de la Lune : il l'avait fixée à $4''$ dans son maximum. Mason, par la comparaison d'un grand nombre d'observations de Bradley, l'a trouvée de $7''$. Enfin M. Burg, par un très grand nombre d'observations de Maskeline, vient de la fixer à $6'',8$. L'existence de cette inégalité paraît donc incontestable. Je ne l'avais trouvée d'abord, par la théorie de la pesanteur, que de $2''$ au plus; mais, ayant reconnu, depuis, la nutation de l'orbite lunaire, j'ai vu qu'elle influe très sensiblement sur cette inégalité, et j'ai trouvé que son coefficient est à celui de l'inégalité précédente du mouvement en latitude, comme neuf fois et demie la

tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire est à l'unité. Cela donne $5'',6$ pour ce coefficient dans l'hypothèse de $\frac{1}{254}$ d'aplatissement pour la Terre. Il s'élèverait à $11'',5$, si cet aplatissement était $\frac{1}{228}$; et, comme toutes les observations donnent un coefficient plus petit, elles concourent, avec celles du mouvement de la Lune en latitude, pour exclure l'homogénéité de la Terre. Le coefficient $6'',8$, trouvé par M. Burg, répond à $\frac{1}{208}$ d'aplatissement, ce qui diffère peu de l'aplatissement $\frac{1}{254}$ donné par l'inégalité du mouvement en latitude. On voit donc que la comparaison d'un très grand nombre d'observations de la Lune, tant en longitude qu'en latitude, peut déterminer cet aplatissement avec autant de précision que les mesures directes; et il est remarquable que cet astre, par l'observation suivie de ses mouvements, nous découvre la figure de la Terre dont il fit connaître la rondeur aux premiers astronomes par ses éclipses. Il résulte encore de ses recherches que la pesanteur de la Lune vers la Terre n'est point exactement dirigée vers le centre de cette planète, et se compose des attractions de toutes ses parties, ce qui fournit une confirmation nouvelle de l'attraction réciproque des molécules de la matière.

Voici présentement l'analyse qui m'a conduit à ces résultats et qui est entièrement fondée sur les formules que j'ai données dans mon *Traité de Mécanique céleste*, auquel je renvoie pour les démonstrations de ces formules. Je conserverai toutes les dénominations de cet Ouvrage : je supposerai, ainsi que dans le n° 15 du Livre II, que les lettres $m, r, u, s, v, \dots$ se rapportent à la Lune; que les lettres $m', r', u', s', v', \dots$ se rapportent au Soleil; que le plan fixe auquel on rapporte leurs mouvements est celui de l'écliptique, et que M est la Terre. Je prendrai de plus, pour unité de masse, la somme $M + m$ des masses de la Terre et de la Lune. Cela posé, on aura, par le n° 14 du Livre II et par le n° 35 du Livre III,

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + m'u' + \frac{m'u'^2}{4u^2} [1 - 2s^2 + 3\cos(2v - 2v')] \\ + \frac{u^3}{(1+s^2)^2} (\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p) D'(\mu^2 - \frac{1}{2}),$$

αp exprimant ici l'aplatissement de la Terre, dont D exprime le rayon moyen, et $\alpha \varphi$ exprimant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur; μ est le sinus de la déclinaison de la Lune. En nommant λ l'obliquité de l'écliptique, on aura, à très peu près,

$$\mu = \sin \lambda \sin v + s \cos \lambda.$$

La valeur de Q contient donc le terme

$$2 D^2 u^2 s (\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p) \sin \lambda \cos \lambda \sin v,$$

et par conséquent l'expression de $\frac{\partial Q}{\partial s}$ contient le terme

$$2 D^2 u^2 (\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p) \sin \lambda \cos \lambda \sin v.$$

La troisième des équations (K) du n° 15 du Livre II donnera ainsi, par son développement, une équation de cette forme

$$0 = \frac{d^2 s}{dt^2} + (1 + 2i)s - \frac{2 D^2 u}{h^2} (\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p) \sin \lambda \cos \lambda \sin v + \dots,$$

— iv étant le mouvement rétrograde du nœud de la Lune. En l'intégrant, on voit que s contient le terme

$$\frac{D^2}{a^2 i} (\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p) \sin \lambda \cos \lambda \sin v,$$

$\frac{1}{a}$ et h^2 étant à fort peu près égaux à la moyenne distance a de la Lune à la Terre.

$\frac{D}{a}$ est la parallaxe horizontale de la Lune, que nous supposons de $57'$; on a

$$\alpha \varphi = \frac{1}{255}, \quad \lambda = 23^\circ 28' \quad \text{et} \quad i = 0,004022,$$

ce qui donne $-6'',5 \sin v$ pour l'inégalité précédente, en supposant $\alpha p = \frac{1}{255}$; elle serait $-13'',5 \sin v$, si l'on supposait $\alpha p = \frac{1}{255}$.

Considérons présentement l'inégalité du mouvement de la Lune en longitude. Pour cela, reprenons la formule (T) du n° 46 du Livre II.

Nous observerons que, dans cette formule,

$$R = \frac{1}{r} - Q,$$

ce qui donne, en considérant que $u = \frac{\sqrt{1+s^2}}{r}$,

$$R = -m' u' - \frac{m' u'^2 r^2}{4} [1 - 3s^2 + 3 \cos(2v - 2v')] \\ - (\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p) \frac{D^2}{r^3} 2s \sin \lambda \cos \lambda \sin v - \dots$$

Or on a, par ce qui précède,

$$s = \gamma \sin[(t+i)v - \theta] + \frac{D^2}{a^2 i} (\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p) \sin \lambda \cos \lambda \sin v.$$

R contient donc la fonction

$$\frac{1}{2} m' u'^2 r^2 \frac{D^2 \gamma}{a^2 i} (\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p) \sin \lambda \cos \lambda \cos(iv - \theta) \\ - (\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p) \frac{D^2 \gamma}{r^3} \sin \lambda \cos \lambda \cos(iv - \theta).$$

Si l'on désigne par nt et $n't$ les moyens mouvements de la Lune et du Soleil, t exprimant le temps, on a, en regardant l'orbite du Soleil comme circulaire,

$$m' u'^2 a^2 = \left(\frac{n'}{n}\right)^2.$$

On sait, de plus, par la théorie de la Lune, que i est à fort peu près égal à $\frac{3}{4} \left(\frac{n'}{n}\right)^2$; les termes précédents de R deviennent ainsi

$$\frac{D^2 \gamma}{a^2} (\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p) \left(\frac{r^3}{a^2} - \frac{a^4}{r^2}\right) \sin \lambda \cos \lambda \cos(int - \theta).$$

Maintenant on peut supposer que, dans la formule (T), la caractéristique ∂ se rapporte à la quantité $\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p$; nous ferons donc cette supposition; mais alors, pour avoir la valeur complète de ∂R , il faut avoir celle de ∂r , car le terme $-\frac{m' u'^2 r^2}{4}$ de l'expression de R donne

dans ∂R celui-ci $-\frac{m' u^3 r \partial r}{2}$, auquel il serait nécessaire d'avoir égard si ∂r contenait un terme de la forme $\frac{K}{i} \cos(int - \theta)$; car, $m' u^3 a^3$ étant égal à $\frac{1}{2} i$, il en résulterait dans ∂R un terme dépendant de $\cos(int - \theta)$, qui serait du même ordre que ceux auxquels nous venons d'avoir égard dans l'expression de R . Il importe donc de déterminer la valeur de ∂R .

Pour cela, reprenons l'équation (S) du n° 46 du Livre II. La caractéristique différentielle d se rapportant aux seules coordonnées de la Lune, elle se rapporte à l'angle $int - \theta$; en ne considérant donc que les termes dépendants de cet angle, on aura

$$\int \partial dR = \partial R,$$

et alors l'équation (S) prendra cette forme

$$0 = \frac{d^3 r \partial r}{d i^3} + \frac{r \partial r}{r^3} + \Pi \cos(int - \theta).$$

En l'intégrant, on voit que l'expression de ∂r ne contient point de termes dépendants de $\cos(int - \theta)$ qui aient i pour diviseur; il est donc inutile d'avoir égard au terme $-\frac{m' u^3 r \partial r}{2}$ de l'expression de ∂R . Cela posé, si l'on substitue dans la formule (T), au lieu de ∂R ,

$$\frac{D^2 \gamma}{a^3} \left(\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p \right) \left(\frac{r^3}{a^3} - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \lambda \cos \lambda \cos(int - \theta);$$

et, si après les différentiations relatives à ∂ on suppose $r = a$, on aura

$$d \partial v = \frac{10 D^2 \gamma n dt}{a^3} \left(\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p \right) \sin \lambda \cos \lambda \cos(int - \theta);$$

dv est ici l'angle compris entre les rayons vecteurs consécutifs r et $r + dr$; or, v exprimant la longitude de la Lune sur l'écliptique, on a, par le n° 46 du Livre II,

$$dv = d\varphi \left(1 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dv^2} \right).$$

En substituant donc pour s sa valeur

$$\gamma \sin[(1+i)v - \theta] + \frac{D^2}{a^2 i} \left(\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p \right) \sin \lambda \cos \lambda \sin v,$$

on aura, à très peu près,

$$d \partial v = d \partial v - \frac{D^2 \gamma n dt}{2 a^2} \left(\frac{1}{2} \alpha \varphi - \alpha p \right) \sin \lambda \cos \lambda \cos(int - \theta).$$

Substituant pour $d \partial v$ sa valeur et intégrant, on aura dans v , le terme

$$\frac{10}{2} \frac{D^2}{a^2 i} \left(\alpha p - \frac{1}{2} \alpha \varphi \right) \sin \lambda \cos \lambda \sin(\theta - int),$$

où l'on doit observer que l'angle $\theta - int$ exprime la longitude du neud.

Soit donc L cette longitude; cette inégalité est $5^{\circ},6 \sin L$ si $\alpha p = \frac{1}{333}$; elle s'élève à $11^{\circ},5 \sin L$ si $\alpha p = \frac{1}{336}$.