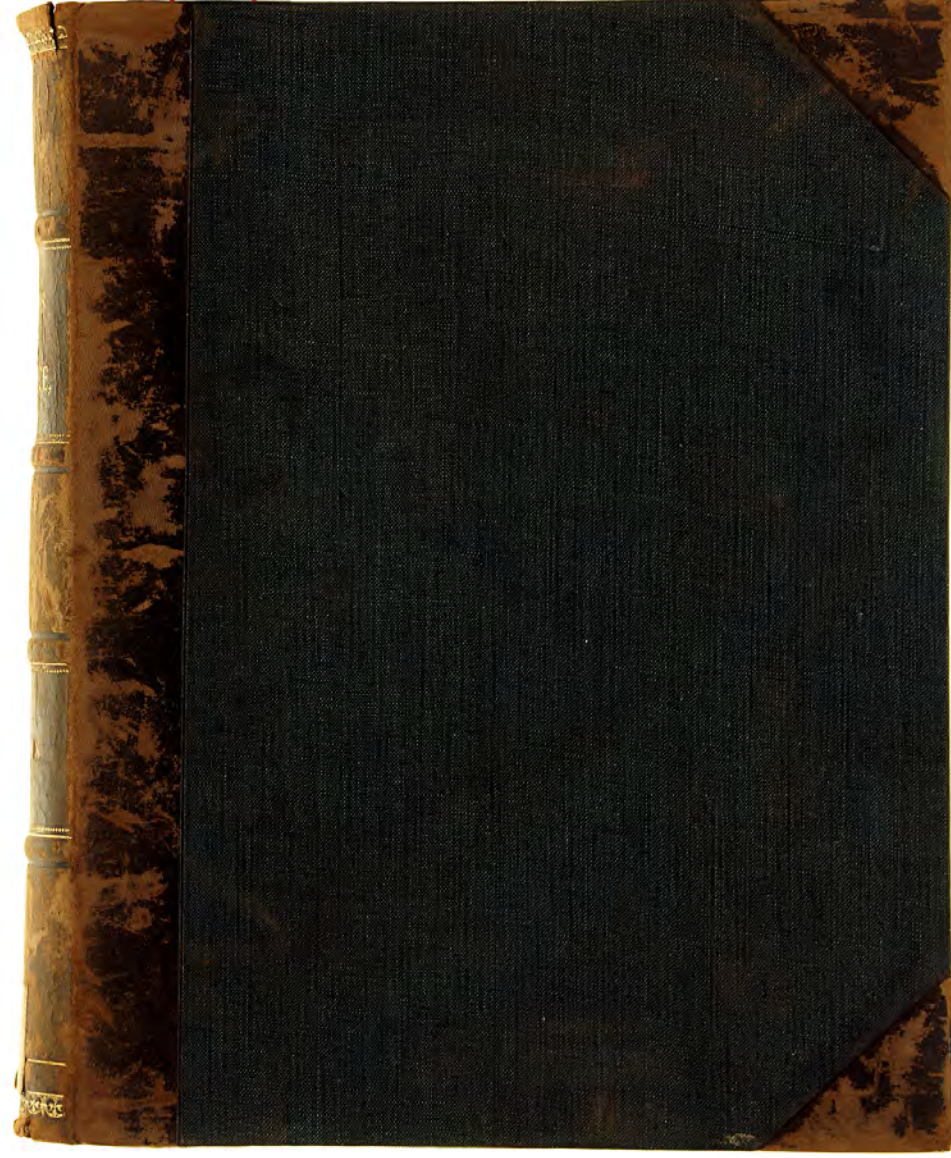




桑本文庫
洋書

物理
28
L
3.9

九州帝國大學理學部
8448
物理學教室

桑本文庫
洋書
0570

理學部 洋 邇及
022232002009037

九州大學藏書



物 3
28
L
3.

801885



物理
28
L
3.

ŒUVRES
COMPLÈTES
DE LAPLACE.

物理
28
L
3.



ŒUVRES
COMPLÈTES
DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPETUELS.

TOME NEUVIÈME.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC XCH

物 5
28
L
3.



MÉMOIRES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

ET DE

LA CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
DE L'INSTITUT DE FRANCE.

物 5
28
L
3.



TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE NEUVIEME VOLUME.

Recherches sur le Calcul intégral aux différences partielles.....	Pages 5
Recherches sur plusieurs points du système du monde.....	71
Suite des recherches sur plusieurs points du système du monde.....	187
Suite des recherches sur plusieurs points du système du monde.....	283
Mémoire sur l'usage du Calcul aux différences partielles dans la théorie des suites...	313
Mémoire sur la précession des équinoxes.....	339
Mémoire sur l'intégration des équations différentielles par approximation.....	357
Mémoire sur les probabilités.....	383

物
28
L
3.



RECHERCHES
SUR
LE CALCUL INTÉGRAL
AUX
DIFFÉRENCES PARTIELLES.

物
38
L
3.



RECHERCHES
SUR
LE CALCUL INTÉGRAL
AUX
DIFFÉRENCES PARTIELLES ⁽¹⁾.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1773; 1777.

I.

Je me propose de donner dans ce Mémoire une méthode pour intégrer, toutes les fois que cela est possible, les équations linéaires aux différences partielles; cette méthode est fondée sur la forme dont les intégrales de ces équations sont susceptibles : comme la recherche de cette forme tient à la métaphysique du calcul, on pourrait craindre ici l'obscurité qui souvent accompagne la métaphysique; je vais donc faire en sorte de présenter mes idées le plus clairement qu'il me sera possible, et de manière à ne laisser aucun nuage sur un objet aussi intéressant. L'illustre inventeur de ce calcul, M. d'Alembert, et plusieurs grands géomètres après lui s'en sont déjà occupés avec beaucoup de succès; mais leurs recherches, d'ailleurs très profondes, ne présentent, si j'ose le dire, que des procédés isolés qui, lorsqu'ils deviennent insuffisants pour intégrer une équation proposée, laissent justement lieu de douter s'il ne serait pas possible d'en obtenir l'intégrale par d'autres voies : la méthode suivante, au contraire, en embrassant tous

⁽¹⁾ Lu en 1773. Remis le 4 décembre 1776.

les cas d'intégration, réunit le double avantage de donner les intégrales complètes, lorsqu'elles sont possibles, ou de s'assurer qu'elles sont impossibles; j'espère d'ailleurs qu'elle ne laissera rien à désirer du côté de la simplicité et de la facilité de la mettre en usage.

II.

z étant fonction quelconque de plusieurs variables $x, y, \dots$, je suppose qu'on la différentie, en ne faisant varier que x , et que l'on désigne par $\frac{\partial z}{\partial x}$ le coefficient de dx dans cette différence (il ne faut pas confondre cette expression $\frac{\partial z}{\partial x}$ avec celle-ci $\frac{dz}{dx}$, qui signifie la différence entière de z , divisée par dx); que l'on représente encore par $\frac{\partial z}{\partial y}$ le coefficient de dy dans la différence de z ; une équation quelconque entre $z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ est aux différences partielles du premier ordre.

Pareillement, si l'on différentie z : 1^o deux fois de suite par rapport à x et par rapport à y , en regardant dx et dy comme constants, et que l'on désigne par $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ les coefficients de dx^2 et de dy^2 dans ces différences; 2^o une première fois par rapport à x , et une seconde fois par rapport à y , ou, ce qui, comme l'on sait, revient au même, une première fois par rapport à y , et une seconde fois par rapport à x , et que l'on désigne par $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ le coefficient de $dx dy$; si l'on a une équation quelconque entre $z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, elle sera aux différences partielles du second ordre, et ainsi de suite pour les ordres suivants.

Une semblable équation étant donnée, il s'agit d'en trouver l'intégrale, c'est-à-dire de trouver une fonction finie entre z, x et y , telle qu'elle satisfasse à cette équation de la manière la plus générale; le problème pris ainsi dans toute son étendue présente des difficultés bien supérieures à celles de l'intégration des équations aux différences ordinaires, en sorte qu'on peut regarder une équation aux différences partielles comme intégrée, lorsqu'elle est ramenée à l'intégration

d'une équation aux différences ordinaires, à peu près comme on est censé avoir l'intégrale de celle-ci, lorsqu'elle ne dépend plus que de l'intégration des fonctions différentielles.

Les équations aux différences ordinaires peuvent être considérées comme des cas très particuliers des équations aux différences partielles : il suffit pour cela de rendre nuls, dans ces dernières, les coefficients des différences de z , prises par rapport à y ; on aura, de cette manière, une équation entre $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots$, dans laquelle y pourra être considéré comme constant, et si cette équation est de l'ordre n , son intégrale renfermera n constantes arbitraires, qui seront fonctions quelconques de y .

De ce que, dans un grand nombre de cas particuliers, l'intégrale complète d'une équation aux différences partielles de l'ordre n renferme n fonctions arbitraires, on a exigé la même condition de l'intégrale complète d'une équation quelconque aux différences partielles; mais il arrive souvent qu'elle est impossible à remplir, et l'on en verra des exemples dans la suite. Il serait sans doute bien utile d'avoir une méthode pour s'assurer si une équation donnée est susceptible d'une intégrale complète, et dans ce cas de la déterminer; c'est là ce que je me propose de faire sur les équations aux différences partielles linéaires : j'appelle ainsi les équations dans lesquelles la variable z et ses différences ne sont élevées à d'autres puissances que l'unité, et ne se multiplient ou ne se divisent point les unes par les autres; j'ai choisi ce genre d'équations, de préférence à tout autre, parce qu'il se rencontre fréquemment dans l'application de l'analyse à la nature, principalement lorsqu'il s'agit de déterminer les oscillations infiniment petites du système d'un nombre infini de corpuscules, qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, et dont l'état primitif peut être quelconque (*).

(*) Ces recherches, à quelques additions près, ont été lues à l'Académie dans le courant de l'année 1773, et j'en ai donné, dans le Tome VI des *Savants étrangers*, quelques résultats, parmi lesquels se trouve l'intégration de l'équation (1) de l'article suivant (*).

(*) Œuvres de Laplace, T. VIII, p. 65 à 66.

III.

L'équation générale linéaire du premier ordre est

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon z + T,$$

α , ε et T étant fonctions quelconques de x et de y . M. d'Alembert en a donné, le premier, l'intégrale dans le Tome IV de ses *Opuscules*. Je vais intégrer la suivante qui la renferme

$$(1) \quad 0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y} + V,$$

V étant fonction de x , y et z .

J'observerai ici que je regarde une équation aux différences partielles comme intégrée lorsqu'elle est ramenée à l'intégration d'une équation aux différences ordinaires. Cela posé,

Je considère d'abord z comme fonction de x et de y , et ensuite comme fonction de x et d'une nouvelle variable u , ce qui donne, en différentiant,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)' dx + \frac{\partial z}{\partial u} du,$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ désignant le coefficient de dx , dans la différentiation de z , lorsque z est considéré comme fonction de x et de y ; et $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'$ désignant ce même coefficient lorsque z est regardé comme fonction de x et de u .

Si l'on considère présentement u comme fonction de x et de y , on aura

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy;$$

done

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)' dx + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} dy;$$

partant,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)' + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y};$$

L'équation (1) deviendra ainsi

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)' + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + V.$$

La variable u étant indéterminée, je puis la supposer telle que l'on ait

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y};$$

on aura ainsi

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)' + V,$$

équation qui sera réduite aux différences ordinaires, lorsque, après avoir déterminé u au moyen de celle-ci

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y},$$

on en aura tiré la valeur de y en x et en u , et on l'aura substituée dans V .

Il ne s'agit donc plus que de trouver une valeur qui satisfasse pour u à l'équation

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y};$$

or, puisque l'on a

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

on aura

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} (dy - \alpha dx);$$

soit N le facteur par lequel, multipliant $dy - \alpha dx$, on rend cette quantité une différentielle exacte, et que l'on fasse

$$N dy - \alpha N dx = d\theta,$$

on aura

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} d\theta;$$

partant, u est fonction de θ ; prenons θ pour cette fonction même, en

sorte que l'on ait $u = \theta$; θ étant fonction de x et de y , on aura y en fonction de x et de u ; cette valeur de y substituée dans V rendra cette quantité fonction de x , z et u . Soit V' cette fonction, on aura

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)' + V',$$

équation dont l'intégrale, en supposant u constant, peut être mise sous cette forme

$$S = C,$$

S étant fonction de x , z et u , et C étant une constante arbitraire qui peut être une fonction quelconque de u , ou, ce qui revient au même, de θ ; désignant donc par $\Gamma(\theta)$ une fonction arbitraire de θ , l'équation

$$S = \Gamma(\theta)$$

est l'intégrale complète de la proposée

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y} + V;$$

l'intégration de cette équation se trouve ainsi réduite à celle de deux équations aux différences ordinaires, puisque la recherche du facteur N dépend, comme l'on sait, de l'intégration de l'équation

$$dy - \alpha dx = 0.$$

Déterminons, d'après cette méthode, l'intégrale de l'équation linéaire

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon z + T;$$

pour cela, on intégrera d'abord celle-ci

$$0 = \frac{du}{\partial x} + \alpha \frac{du}{\partial y},$$

soit $u = \varphi(\theta)$ son intégrale; en faisant $\varphi(\theta) = \theta$, on aura $u = \theta$; d'où l'on tirera y en fonction de x et de u ; en substituant ces valeurs dans

ε et T , elles deviendront fonctions de x et de u ; soient ε' et T' ces fonctions, on aura

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)' + \varepsilon' z + T',$$

équation dont l'intégrale est, comme l'on sait, en regardant u comme constant,

$$z = e^{-\int \varepsilon' dx} (C - \int T' dx e^{\int \varepsilon' dx}),$$

le signe $\int$ se rapportant à la variabilité de x seul; or, la constante C pouvant être fonction quelconque de θ , on aura, pour l'intégrale de l'équation linéaire aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon z + T,$$

$$z = e^{-\int \varepsilon dx} \varphi(\theta) - e^{-\int \varepsilon dx} \int T' dx e^{\int \varepsilon dx};$$

d'où il suit que la forme de cette intégrale est

$$z = H + A \varphi(\theta),$$

A , H et θ étant des fonctions déterminées de x et de y .

IV.

On aurait pu trouver cette forme *a priori*, de la manière suivante.

Pour cela, j'observe que l'intégrale d'une équation aux différences partielles du premier ordre ne renferme qu'une fonction arbitraire que je représente par $\varphi(\theta)$; or il peut arriver que la quantité θ , dont la fonction arbitraire est composée, soit une fonction déterminée de x et de y , ou qu'elle soit indéterminée; examinons séparément ces deux cas.

PREMIER CAS. — Lorsque θ est fonction déterminée de x et de y .

L'intégrale peut alors être mise sous cette forme $z = M$, M étant fonction de x , y et de $\varphi(\theta)$; or, $\varphi(\theta)$ étant une fonction arbitraire, je puis la supposer égale à une fonction quelconque déterminée de θ .

plus à une fonction arbitraire infiniment petite, que je désigne par $i\Gamma(\theta)$, i étant un coefficient infiniment petit. Si l'on substitue cette valeur de $\varphi(\theta)$ dans M, et que l'on réduise cette quantité dans une suite ascendante par rapport à i , on aura une expression de cette forme

$$z = N + iN' + i^2N'' + \dots$$

En substituant cette valeur de z dans l'équation

$$(K) \quad 0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon z + T,$$

que je nommerai dorénavant, pour simplifier, l'équation (K), tous les termes homogènes par rapport à i doivent se détruire réciproquement; on aura donc

$$0 = \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha \frac{\partial N}{\partial y} + \varepsilon N + T,$$

$$0 = \frac{\partial N'}{\partial x} + \alpha \frac{\partial N'}{\partial y} + \varepsilon N',$$

$$0 = \frac{\partial N''}{\partial x} + \alpha \frac{\partial N''}{\partial y} + \varepsilon N'',$$

$$\dots\dots\dots$$

partant, l'équation

$$z = N + N'$$

satisfait à l'équation (K); de plus, elle en est l'intégrale complète, puisque N' renferme la fonction arbitraire $\Gamma(\theta)$.

On aura iN' en différentiant M par rapport à $\varphi(\theta)$, et supposant la différence de $\varphi(\theta)$ égale à $i\Gamma(\theta)$; d'où il est aisé de conclure que la fonction arbitraire $\Gamma(\theta)$ existe dans N' sous une forme linéaire; mais elle peut y être affectée des signes *différentiel* et *intégral*, en sorte que N' peut renfermer des termes de cette forme $H \frac{d^n \Gamma(\theta)}{d\theta^n}$, et si l'on représente par $\mu, \mu', \mu'', \dots$ des fonctions quelconques de x et de y , N' peut renfermer encore des termes de la forme

$$H \int L d\mu \int L' d\mu' \int L'' d\mu'' \dots \frac{d^n \Gamma(\theta)}{d\theta^n};$$

soit

$$\frac{d^n \Gamma(\theta)}{d\theta^n} = \Gamma^n(\theta),$$

et supposons d'abord que le terme précédent ne renferme qu'un seul signe $\int$, de manière qu'il soit $H \int L d\mu \Gamma^n(\theta)$; il est clair que, pour que l'intégration soit possible, $L \Gamma^n(\theta)$ doit être fonction de μ ; or on a

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu}{\partial y} dy;$$

on aura donc

$$H \int L d\mu \Gamma^n(\theta) = H \int L \frac{\partial \mu}{\partial x} dx \Gamma^n(\theta),$$

l'intégrale $\int L \frac{\partial \mu}{\partial x} dx \Gamma^n(\theta)$ étant prise en ne faisant varier que x , et en y ajoutant une constante qui sera fonction de y seul; on peut donc toujours réduire l'intégrale $\int L d\mu \Gamma^n(\theta)$ à une intégrale de l'une ou l'autre de ces deux formes $\int V dx \Gamma^n(\theta)$ ou $\int V dy \Gamma^n(\theta)$, ces intégrales étant prises en ne faisant varier que x ou y . On réduira pareillement la double intégrale $\int L d\mu \int L' d\mu' \Gamma^n(\theta)$ à l'une de ces quatre formes

$$\int V dx \int V' dx \Gamma^n(\theta), \quad \int V dy \int V' dy \Gamma^n(\theta),$$

$$\int V dx \int V' dy \Gamma^n(\theta), \quad \int V dy \int V' dx \Gamma^n(\theta);$$

or on peut réduire à de simples intégrales les doubles intégrales

$$\int V dx \int V' dx \Gamma^n(\theta) \quad \text{et} \quad \int V dy \int V' dy \Gamma^n(\theta);$$

car, si l'on fait $\int V dx = R$, on aura

$$\int V dx \int V' dx \Gamma^n(\theta) = R \int V' dx \Gamma^n(\theta) - \int V' R dx \Gamma^n(\theta);$$

on voit ainsi que, toutes les fois que, dans un terme, deux signes $\int$ consécutifs se rapportent à la même variable, ce terme peut se réduire; il résulte de là que le terme

$$H \int L d\mu \int L' d\mu' \int L'' d\mu'' \dots \frac{d^n \Gamma(\theta)}{d\theta^n}$$

peut être réduit à des termes de l'une ou l'autre de ces deux formes

$$H \int V dx \int V' dy \int V'' dx \dots \Gamma^s(\theta)$$

ou

$$H \int V dy \int V' dx \int V'' dy \dots \Gamma^s(\theta).$$

Présentement, si l'on fait $\int V dx = R$, on aura

$$H \int V dx \frac{d^s \Gamma(\theta)}{d\theta^s} = H R \Gamma^s(\theta) - H \int R \frac{d\theta}{dx} \frac{d^{s+1} \Gamma(\theta)}{d\theta^{s+1}};$$

on peut donc, en suivant ce procédé, augmenter d'une unité l'ordre de la différence de la fonction arbitraire enveloppée sous le signe $\int$; si l'on suppose conséquemment que $\frac{d^r \Gamma(\theta)}{d\theta^r}$ soit la plus haute différence de $\Gamma(\theta)$ dans N , on pourra réduire toutes les différences de $\Gamma(\theta)$ enveloppées sous le signe intégral à être de l'ordre r ; partant, si l'on fait

$$\frac{d^r \Gamma(\theta)}{d\theta^r} = \psi(\theta), \quad \frac{d^{r-1} \Gamma(\theta)}{d\theta^{r-1}} = \psi_1(\theta), \quad \frac{d^{r-2} \Gamma(\theta)}{d\theta^{r-2}} = \psi_2(\theta), \quad \dots$$

l'expression de z sera comprise dans la formule suivante :

$$(T) \left\{ \begin{aligned} z = & N + H \psi(\theta) + H' \psi_1(\theta) + H'' \psi_2(\theta) + \dots \\ & + L \int V dx \psi(\theta) + L' \int V' dx \psi(\theta) + \dots \\ & + I \int U dy \psi(\theta) + I' \int U' dy \psi(\theta) + \dots \\ & + P \int Q dx \int Q' dy \psi(\theta) + P' \int Q' dx \int Q'' dy \psi(\theta) + \dots \\ & + R \int S dy \int S' dx \psi(\theta) + \dots \\ & + \dots \end{aligned} \right.$$

SECOND CAS. — Lorsque θ est fonction indéterminée de x et de y .

Il peut arriver que, dans l'intégrale d'une équation aux différences partielles, la quantité θ , enveloppée sous le signe de la fonction arbitraire, soit elle-même indéterminée; par exemple, si, dans l'équation

aux différences partielles $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z^2}{\partial y^2}$, on fait $\frac{\partial z}{\partial y} = \theta$, on aura

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \theta^2 dx + \theta dy;$$

partant,

$$z = \theta^2 x + \theta y - \int d\theta(2\theta x + y);$$

d'où il suit que $2\theta x + y$ est fonction de θ ; soit donc

$$\int d\theta(2\theta x + y) = \varphi(\theta),$$

et que l'on fasse $\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} = \varphi'(\theta)$, on aura

$$z = \theta^2 x + \theta y - \varphi(\theta),$$

et θ se déterminera par l'équation

$$2\theta x + y = \varphi'(\theta),$$

en sorte que cette quantité est elle-même indéterminée; mais cela ne peut jamais avoir lieu dans l'intégrale d'une équation linéaire aux différences partielles, ou, lorsque cela arrive, il est toujours possible de réduire la quantité enveloppée sous la fonction arbitraire à être une fonction déterminée; car, si, dans l'équation qui sert à déterminer θ , l'on suppose à la fonction arbitraire $\varphi(\theta)$ une valeur quelconque déterminée, plus une valeur arbitraire infiniment petite, que je représente par $i\Gamma(\theta)$, i étant infiniment petit, on trouvera θ égal à une fonction finie et déterminée de x et de y , que j'exprime par ϖ , plus à une valeur infiniment petite et indéterminée dépendante de $i\Gamma(\theta)$; si l'on substitue présentement, dans l'expression de z , au lieu de θ et de $\varphi(\theta)$, ces valeurs, et qu'on la réduise dans une suite ascendante par rapport à i , on aura

$$z = N + iN' + i^2N'' + \dots,$$

N étant fonction de x , y et de la fonction arbitraire $\Gamma(\varpi)$; cette valeur de z , satisfaisant à l'équation (K), il est clair que tous les termes ho-

ogènes par rapport à i doivent se détruire réciproquement; d'où il est aisé de conclure que l'équation

$$z = N + N'$$

satisfait à l'équation (K), et qu'elle en est conséquemment l'intégrale complète, puisqu'elle renferme la fonction arbitraire $\Gamma(\varpi)$; or, la quantité ϖ étant une fonction déterminée de x et de y , ce cas rentre dans celui que nous avons considéré ci-dessus.

Pour éclaircir le raisonnement précédent par un exemple fort simple, considérons l'équation linéaire aux différences partielles

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial x};$$

si l'on fait

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

on aura

$$q = px, \quad dz = p dx + q dy;$$

partant,

$$dz = p dx + px dy$$

et, en intégrant,

$$z = px + \int p x \left(dy - \frac{dp}{p} \right);$$

donc px est fonction de $y - lp$; soit

$$\int p x \left(dy - \frac{dp}{p} \right) = \varphi(y - lp);$$

on aura

$$z = px + \varphi(y - lp)$$

et p sera déterminé par l'équation

$$px = \varphi'(y - lp),$$

en sorte que la quantité $y - lp$, enveloppée sous le signe de la fonction arbitraire, est ici indéterminée. Pour faire voir comment on peut la réduire à être déterminée, soit

$$\varphi(y - lp) = y - lp + i\Gamma(y - lp);$$

on aura

$$px = \varphi'(y - lp) = 1 + i\Gamma'(y - lp);$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{1}{x} + \frac{i\Gamma'(y - lp)}{x},$$

en représentant par $\Gamma'(y - lp)$ la différence de $\Gamma(y - lp)$, divisée par $d(y - lp)$; sur cela, j'observerai en passant que, dans la suite, je désignerai $\frac{d\Gamma(\theta)}{d\theta}$ par $\Gamma'(\theta)$, $\frac{d^2\Gamma(\theta)}{d\theta^2}$ par $\Gamma''(\theta)$, $\frac{d^3\Gamma(\theta)}{d\theta^3}$ par $\Gamma'''(\theta)$, ... Je représenterai semblablement $\int d\theta \Gamma(\theta)$ par $\Gamma_1(\theta)$, $\int d\theta \Gamma_1(\theta)$ par $\Gamma_2(\theta)$, $\int d\theta \Gamma_2(\theta)$ par $\Gamma_3(\theta)$, ... et la même notation aura lieu pour toutes les fonctions arbitraires.

Présentement, si l'on néglige les quantités de l'ordre i^2 , on pourra substituer, dans les termes multipliés par i , $\frac{1}{x}$ au lieu de p , et l'on aura

$$p = \frac{1}{x} + \frac{i\Gamma'(y + lx)}{x};$$

donc

$$\begin{aligned} z &= px + \varphi(y - lp) \\ &= px + y - lp + i\Gamma(y - lp) \\ &= 1 + y + lx + 2i\Gamma(y + lx) - l[1 + i\Gamma(y + lx)] \\ &= 1 + y + lx + i\Gamma(y + lx); \end{aligned}$$

partant, l'équation

$$z = 1 + y + lx + \Gamma(y + lx)$$

satisfait à celle-ci

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial x},$$

et, par conséquent, elle en est l'intégrale complète.

L'expression précédente de z peut être mise sous cette forme plus simple

$$z = \psi(y + lx);$$

pour voir maintenant d'une manière directe comment cette expression de z coïncide avec celle-ci

$$z = px + \varphi(y - lp),$$

on observera que l'équation

$$px = \varphi'(y - lp)$$

donne

$$y - lp = \Pi(px);$$

done

$$y - lp + lp x = lp x + \Pi(px)$$

ou

$$y + lx = lp x + \Pi(px),$$

d'où l'on tire

$$px = \Gamma(y + lx) = \varphi'(y - lp),$$

à cause de

$$px = \varphi'(y - lp);$$

partant,

$$y - lp = \Gamma(y + lx).$$

On voit donc que $y - lp$ et px sont fonctions de $y + lx$; donc z étant égal à $px + \varphi'(y - lp)$ est égal à une fonction quelconque de $y + lx$.

Il suit de là que la forme de l'équation (T) est la seule dont l'intégrale de l'équation (K) est susceptible; si l'on fait présentement

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = {}^1V, \text{ on aura}$$

$$\int V dx \psi(\theta) = {}^1V \psi_1(\theta) - \int \frac{\partial {}^1V}{\partial x} dx \psi_1(\theta);$$

$$\text{en faisant pareillement } \frac{\partial \psi}{\partial y} = {}^2V, \text{ on aura}$$

$$\int \frac{\partial {}^1V}{\partial x} dx \psi_1(\theta) = {}^2V \psi_2(\theta) - \int \frac{\partial {}^2V}{\partial x} dx \psi_2(\theta),$$

et ainsi de suite; on pourra réduire ainsi le second membre de l'équation (T) dans une série ordonnée par rapport à $\psi(\theta)$, $\psi_1(\theta)$, $\psi_2(\theta)$, ..., et l'on aura pour z une suite de cette forme

$$z = N + \Lambda \psi(\theta) + \Lambda' \psi_1(\theta) + \Lambda'' \psi_2(\theta) + \dots;$$

si l'on substitue cette valeur de z dans l'équation

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon z + T,$$

on aura

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha \frac{\partial N}{\partial y} + \varepsilon N + T + \Lambda \psi'(\theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \\ &+ \psi(\theta) \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \varepsilon \Lambda + \Lambda' \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \psi_1(\theta) \left[\frac{\partial \Lambda'}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \Lambda'}{\partial y} + \varepsilon \Lambda' + \Lambda'' \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

La fonction $\psi(\theta)$ étant arbitraire, il est clair qu'il n'existe aucune relation entre $\psi(\theta)$, $\psi_1(\theta)$, $\psi_2(\theta)$, ..., en sorte que, dans l'équation précédente, les coefficients de ces quantités doivent être séparément égaux à zéro; on aura donc

$$0 = \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha \frac{\partial N}{\partial y} + \varepsilon N + T,$$

$$0 = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \varepsilon \Lambda,$$

$$0 = \frac{\partial \Lambda'}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \Lambda'}{\partial y} + \varepsilon \Lambda',$$

On peut satisfaire à toutes ces équations, excepté aux trois premières, en faisant $\Lambda' = 0$, $\Lambda'' = 0$, ..., et l'on aura

$$0 = \frac{\partial N}{\partial y} + \alpha \frac{\partial N}{\partial y} + \varepsilon N + T,$$

$$0 = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \varepsilon \Lambda,$$

Il suffit de trouver pour N , θ et Λ des valeurs particulières qui satisfassent à ces trois équations: on aura ainsi, pour l'intégrale complète de l'équation (K),

$$z = N + \Lambda \psi(\theta);$$

物
38
1
3.

or cette forme est précisément la même que celle à laquelle nous sommes arrivés précédemment.

On peut observer ici que les fonctions arbitraires sont à peu près, dans les intégrales des équations aux différences partielles, ce que sont les constantes arbitraires dans les intégrales des équations aux différences ordinaires; or on sait que ces constantes y sont sous une forme linéaire lorsque l'équation est linéaire, et il est facile de s'en assurer *a priori* par un raisonnement analogue au précédent; car, si l'on considère l'équation

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha z + T,$$

α et T étant des fonctions quelconques de x , son intégrale sera

$$z = M,$$

M étant fonction de x et d'une constante arbitraire C ; si l'on fait $C = I + iH$, i étant un coefficient infiniment petit et H une constante quelconque, on aura, en réduisant M dans une suite ascendante par rapport à i ,

$$z = N + iHN' + i^2 H^2 N'' + \dots;$$

en substituant cette valeur de z dans l'équation

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha z + T,$$

tous les termes homogènes par rapport à i doivent se détruire réciproquement; on aura donc

$$0 = \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha N + T,$$

$$0 = \frac{\partial N'}{\partial x} + \alpha N',$$

$$\dots\dots\dots,$$

d'où il suit que l'équation

$$z = N + iHN'$$

satisfait à l'équation différentielle

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha z + T$$

et qu'elle en est l'intégrale complète, puisqu'elle renferme la constante arbitraire H ; on voit ainsi que le même principe qui donne les constantes arbitraires sous une forme linéaire, dans les intégrales des équations linéaires aux différences ordinaires, donne pareillement les fonctions arbitraires sous une forme linéaire, dans les intégrales des équations linéaires aux différences partielles.

V.

L'équation générale linéaire aux différences partielles du second ordre est

$$(L) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et T étant des fonctions quelconques de x et de y .

On peut la mettre sous une forme plus simple, en changeant les variables x et y en d'autres, π et θ , qui soient fonctions de x et de y ; en regardant conséquemment z comme fonction de ces nouvelles variables, on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \pi \partial \theta} \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial \pi} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \pi \partial \theta} \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \pi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \pi} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi^2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \pi \partial \theta} \frac{\partial \pi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta^2}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial \pi} \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

si les variables σ et θ sont telles que l'on ait

$$(2) \quad 0 = \frac{\partial \sigma^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^2}{\partial y^2},$$

$$(3) \quad 0 = \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta^2}{\partial y^2},$$

il est aisé de voir que l'équation (L) prendra cette forme

$$(V) \quad 0 = M \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \theta} + N \frac{\partial z}{\partial \sigma} + L \frac{\partial z}{\partial \theta} + Rz + T.$$

Il suit de là que toute équation linéaire aux différences partielles du second ordre est réductible à cette forme très simple

$$(Z) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \theta} + m \frac{\partial z}{\partial \sigma} + n \frac{\partial z}{\partial \theta} + lz + T,$$

m , n et l étant fonctions de σ et de θ ; il ne s'agit pour cela que de déterminer σ et θ , de manière que ces variables satisfassent aux équations (2) et (3) ou, ce qui revient au même, à celle-ci

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} (-\frac{1}{2} \alpha + \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^2 - \epsilon}),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} (-\frac{1}{2} \alpha - \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^2 - \epsilon});$$

or, en intégrant ces équations par l'article III, on trouvera pour σ et pour θ une infinité de valeurs, parmi lesquelles on peut choisir les plus simples; de ces valeurs, on tirera x et y , en fonctions de σ et de θ , et, en substituant ces expressions de x et de y dans l'équation (V), elle se transformera dans l'équation (Z), qui a toute la généralité de l'équation (L), et qui, à cause de la simplicité de sa forme, sera l'objet des recherches suivantes.

Si l'on applique maintenant à l'équation (Z) les raisonnements de l'article IV, on trouvera que son intégrale, toutes les fois qu'elle est

possible en termes finis, est nécessairement réductible à cette forme,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} z &= R + A \varphi(\mu) + A' \varphi_1(\mu) + A'' \varphi_2(\mu) + \dots \\ &+ B \int C d\sigma \varphi(\mu) + B' \int C' d\sigma \varphi(\mu) + \dots \\ &+ D \int E d\theta \varphi(\mu) + D' \int E' d\theta \varphi(\mu) + \dots \\ &+ F \int G d\sigma \int H d\theta \varphi(\mu) + \dots \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ a \psi(v) + a' \psi_1(v) + \dots \\ &+ b \int c d\sigma \psi(v) + \dots \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

$\varphi(\mu)$ et $\psi(v)$ étant deux fonctions quelconques arbitraires et indépendantes l'une de l'autre.

Pour déterminer les quantités μ et v , dont les fonctions arbitraires sont composées, on observera que, si l'on suppose $\psi(v) = 0$ et que l'on réduise l'expression précédente de z en série, comme dans l'article précédent, on aura

$$z = R + S \varphi(\mu) + S' \varphi_1(\mu) + \dots;$$

en substituant cette valeur de z dans l'équation (Z), on formera les suivantes :

$$0 = \frac{\partial^2 R}{\partial \sigma \partial \theta} + m \frac{\partial R}{\partial \sigma} + n \frac{\partial R}{\partial \theta} + lR + T,$$

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial \sigma} \frac{\partial \mu}{\partial \theta},$$

La seconde équation fait voir que μ est fonction de σ sans θ , ou de θ sans σ . On trouvera la même chose par rapport à v ; on peut donc supposer $\mu = \sigma$ et $\mu = \theta$; si l'on observe maintenant qu'un terme tel que $\int E d\theta \varphi(\sigma)$ se peut changer en $\varphi(\sigma) \int E d\theta$, et qu'ainsi ce terme est compris dans celui-ci $A \varphi(\theta)$, on trouvera que l'expression (1) de z

est réductible à cette forme

$$\begin{aligned} z = & R + A \varphi(\varpi) + A' \varphi_1(\varpi) + A'' \varphi_2(\varpi) + \dots \\ & + B \int C \varphi(\varpi) d\varpi + B' \int C' \varphi(\varpi) d\varpi + \dots \\ & + D \int E d\vartheta \int F \varphi(\varpi) d\varpi + D' \int E' d\vartheta \int F' \varphi(\varpi) d\varpi + \dots \\ & + G \int H d\varpi \int I d\vartheta \int K \varphi(\varpi) d\varpi + \dots \\ & + \dots \\ & + a \psi(\vartheta) + a' \psi_1(\vartheta) + \dots \\ & + b \int c \psi(\vartheta) d\vartheta + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

VI.

Les recherches précédentes sont fondées sur la transformation des variables x et y dans celles-ci, ϖ et ϑ ; mais il peut arriver qu'elle soit impossible dans deux cas qu'il est nécessaire de discuter.

Le premier a lieu lorsque $z = 0$ et $\xi = 0$; l'équation (L) de l'article précédent devient dans ce cas

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T,$$

et l'on a

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0,$$

ce qui indique que ϖ et ϑ sont fonctions de y seul, en sorte qu'il n'est pas possible alors d'avoir x en fonction de ϖ et de ϑ .

Le second cas a lieu lorsque $\xi = \frac{1}{2} \alpha^2$; on a dans ce cas

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \varpi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial y};$$

parlant, ϖ est fonction de ϑ ; les deux variables ϖ et ϑ ne sont donc point indépendantes l'une de l'autre, et, puisque x et y sont indépendants l'un de l'autre, ils ne peuvent être donnés chacun par une fonction de ϖ et de ϑ . Supposons conséquemment que, dans l'équation (L)

de l'article précédent, on laisse subsister y , et que l'on détermine ϖ de manière qu'il satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \varpi}{\partial y},$$

on aura x en fonction de ϖ et de y , et, si l'on considère z comme fonction de ϖ et de y , on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \varpi} \frac{\partial \varpi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varpi} \frac{\partial \varpi}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)',$$

$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)'$ étant le coefficient de dy , dans la différence de z , considéré comme fonction de ϖ et de y ; on aura ensuite

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} \frac{\partial \varpi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial \varpi} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \frac{\partial \varpi}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial y} \right)' \frac{d\varpi}{dx} + \frac{\partial z}{\partial \varpi} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} \frac{\partial \varpi^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)' + \frac{\partial z}{\partial \varpi} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial y} \right)' \frac{d\varpi}{dy}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (L) de l'article précédent, et que l'on considère que $\xi = \frac{1}{2} \alpha^2$ et $\frac{\partial \varpi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \varpi}{\partial y}$, on trouvera facilement qu'elle peut être mise sous cette forme

$$0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)' + \gamma' \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)' + \delta \frac{\partial z}{\partial \varpi} + \xi' z + T;$$

ainsi les deux cas que nous discutons ici conduisent l'un et l'autre à une équation aux différences partielles de cette forme

$$(H) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \xi z + T;$$

or on prouvera comme ci-dessus que, si l'intégrale de cette équation est possible en termes finis, que l'on suppose une des fonctions arbi-

traires nulle, et que l'on représente par $\varphi(\mu)$ l'autre fonction arbitraire, on aura au moins par une suite infinie

$$z = R + \Lambda \varphi(\mu) + \Lambda' \varphi_1(\mu) + \Lambda'' \varphi_2(\mu) + \dots;$$

en substituant cette valeur de z dans l'équation précédente, on formera les suivantes :

$$0 = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial R}{\partial x} + \delta \frac{\partial R}{\partial y} + \epsilon R + T,$$

$$0 = \Lambda \frac{\partial^2 \mu^2}{\partial x^2} \varphi''(\mu),$$

$$0 = \left\{ \begin{aligned} &2 \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \gamma \Lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} + \delta \Lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ &+ \Lambda \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \Lambda' \frac{\partial \mu^2}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \varphi'(\mu),$$

La deuxième de ces équations donne $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$; partant, μ est fonction de y seul; la troisième donne $\delta \Lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$; donc, si δ n'est pas nul, on a $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, en sorte que μ n'est point fonction de y ; ainsi μ n'étant fonction ni de x , ni de y , est nécessairement constant; d'où il résulte que l'intégrale complète de l'équation (H) est impossible, excepté dans le cas de $\delta = 0$, ce qui réduit cette équation (H) à une équation aux différences ordinaires entre z et x , dont l'intégrale renfermera deux constantes arbitraires qui seront fonctions quelconques de y .

Il est d'autant plus remarquable que l'intégrale complète de l'équation (H) soit impossible, même par une suite infinie, dans le cas où δ n'est pas nul, que cette équation est susceptible, au moins dans un grand nombre de cas, d'une infinité d'intégrales particulières. Pour en donner un exemple fort simple, supposons γ , δ et ϵ constants, et $T = 0$. Si l'on fait $z = \Lambda e^{mx+ny}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, l'équation (H) donnera

$$m^2 + \gamma m + \delta n + \epsilon = 0;$$

partant,

$$n = -\frac{m^2 + \gamma m + \epsilon}{\delta} \quad \text{et} \quad z = \Lambda e^{mx-y\frac{m^2 + \gamma m + \epsilon}{\delta}};$$

l'équation (H) étant linéaire, il est clair que l'on peut supposer

$$z = \Lambda e^{mx-y\frac{m^2 + \gamma m + \epsilon}{\delta}} + \Lambda_1 e^{m_1 x - y\frac{m_1^2 + \gamma m_1 + \epsilon}{\delta}} + \dots,$$

Λ , m , Λ_1 , m_1 , ... étant des quantités constantes quelconques. Il y a plus; si l'on fait $m = a + ib$, on aura, en réduisant en séries,

$$z = \Lambda e^{mx-y\frac{m^2 + \gamma m + \epsilon}{\delta}} = \Lambda e^{ax-y\frac{a^2 + \gamma a + \epsilon}{\delta}} \left\{ \begin{aligned} &1 + ib \left(x - y\frac{2a + \gamma + ib}{\delta} \right) \\ &+ \frac{b^2 \delta^2}{1.2} \left(x - y\frac{2a + \gamma + ib}{\delta} \right)^2 \\ &+ \dots \end{aligned} \right\}.$$

Si l'on substitue cette valeur de z dans l'équation (H), il est clair que tous les termes homogènes, par rapport à i , doivent se détruire réciproquement; d'où il suit que, cette équation étant linéaire, on peut, à la place des différentes puissances de ib , substituer des constantes arbitraires; on aura ainsi

$$z = \Lambda e^{ax-y\frac{a^2 + \gamma a + \epsilon}{\delta}} \left\{ \begin{aligned} &1 + C \left(x - y\frac{2a + \gamma}{\delta} \right) \\ &+ C' \left[-\frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{2} \left(x - y\frac{2a + \gamma}{\delta} \right)^2 \right] \\ &+ \dots \end{aligned} \right\},$$

Λ , a , C , C' , ... étant des constantes quelconques; on aura ainsi

$$\begin{aligned} z = & \Lambda e^{ax-y\frac{a^2 + \gamma a + \epsilon}{\delta}} \left[1 + C \left(x - y\frac{2a + \gamma}{\delta} \right) + \dots \right] \\ & + \Lambda_1 e^{a_1 x - y\frac{a_1^2 + \gamma a_1 + \epsilon}{\delta}} \left[1 + D \left(x - y\frac{2a_1 + \gamma}{\delta} \right) + \dots \right] \\ & + \dots \end{aligned}$$

On voit ainsi que l'équation (H) est susceptible d'une infinité d'intégrales particulières, sans pouvoir l'être d'une intégrale complète.

J'observerai, en passant, que la méthode précédente donne un

moyen extrêmement simple d'avoir une infinité d'intégrales particulières des équations aux différences partielles linéaires, d'une manière plus étendue que par les procédés connus; mais, mon objet étant ici de déterminer les intégrales complètes de ces équations, lorsqu'elles en sont susceptibles, je mets à m'occuper dans un autre Mémoire de la recherche des intégrales particulières.

VII.

Je reprends maintenant l'équation

$$(Z) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial z}{\partial \omega} + n \frac{\partial z}{\partial \theta} + lz + T,$$

dont l'intégrale est, comme on l'a vu,

$$\begin{aligned} z = & R + A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + A'' \varphi_2(\omega) + \dots \\ & + B \int C d\omega \varphi(\omega) + B' \int C' d\omega \varphi(\omega) + \dots \\ & + D \int E d\theta \int F d\omega \varphi(\omega) + \dots \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \alpha \psi(\theta) + \dots \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Je suppose, pour simplifier, l'une des fonctions arbitraires, par exemple $\psi(\theta)$, nulle, et que l'expression de z , considérée par rapport à la seule fonction arbitraire $\varphi(\omega)$, ne renferme point le signe $\int$, en sorte que l'on ait

$$z = R + A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + A'' \varphi_2(\omega) + \dots$$

Comme je démontrerai ci-après que ce cas embrasse tous ceux dans lesquels l'intégrale de l'équation (Z) est possible en termes finis, il est très important d'avoir une méthode pour l'intégrer; j'ose me flatter que la suivante mérite, par sa simplicité, l'attention des géomètres.

Si l'on fait d'abord $T = 0$, on aura

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial z}{\partial \omega} + n \frac{\partial z}{\partial \theta} + lz,$$

dont l'intégrale sera

$$z = A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + A'' \varphi_2(\omega) + \dots$$

Si l'expression de z ne renferme qu'un seul terme, en sorte que l'on ait $z = A \varphi(\omega)$, en substituant cette valeur de z dans l'équation différentielle, et en égalant séparément à zéro les coefficients de $\varphi'(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$, on aura les deux équations suivantes :

$$0 = \frac{\partial A}{\partial \theta} + m A,$$

$$0 = \frac{\partial^2 A}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial A}{\partial \omega} + n \frac{\partial A}{\partial \theta} + l A.$$

Si l'on fait

$$z^{(1)} = \frac{\partial z}{\partial \theta} + m z,$$

on aura

$$z^{(1)} = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} + m A \right) \varphi(\omega) = 0;$$

mais l'équation

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial z}{\partial \omega} + n \frac{\partial z}{\partial \theta} + lz$$

peut être mise sous cette forme

$$0 = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} + m z \right)}{\partial \omega} + n \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} + m z \right) + z \left(l - \frac{\partial m}{\partial \omega} - nm \right)$$

ou

$$0 = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \omega} + n z^{(1)} + z \left(l - \frac{\partial m}{\partial \omega} - nm \right);$$

donc, à cause de $z^{(1)} = 0$, on a

$$0 = l - \frac{\partial m}{\partial \omega} - nm;$$

et c'est l'équation de condition qui doit avoir lieu pour que l'on ait

$$z = A \varphi(\omega),$$

ou, ce qui revient au même, pour que l'expression de z ne renferme qu'un seul terme.

Si l'expression de z renferme deux termes, en sorte que l'on ait

$$z = \Lambda \varphi(\varpi) + \Lambda' \varphi_1(\varpi),$$

en substituant cette valeur de z dans l'équation différentielle, on aura les trois suivantes

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} + m \Lambda,$$

$$0 = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \varpi \partial \vartheta} + m \frac{\partial \Lambda}{\partial \varpi} + n \frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} + l \Lambda + \frac{\partial \Lambda'}{\partial \vartheta} + m \Lambda',$$

$$0 = \frac{\partial^2 \Lambda'}{\partial \varpi \partial \vartheta} + m \frac{\partial \Lambda'}{\partial \varpi} + n \frac{\partial \Lambda'}{\partial \vartheta} + l \Lambda';$$

si l'on fait

$$z^{(1)} = \frac{\partial z}{\partial \vartheta} + m z,$$

on aura

$$z^{(1)} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} + m \Lambda \right) \varphi(\varpi) + \left(\frac{\partial \Lambda'}{\partial \vartheta} + m \Lambda' \right) \varphi_1(\varpi) = \left(\frac{\partial \Lambda'}{\partial \vartheta} + m \Lambda' \right) \varphi_1(\varpi),$$

en sorte que l'expression de $z^{(1)}$ ne renfermera qu'un seul terme; présentement, l'équation

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \vartheta} + m \frac{\partial z}{\partial \varpi} + n \frac{\partial z}{\partial \vartheta} + l z$$

peut être mise, comme on l'a vu, sous cette forme

$$0 = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \varpi} + n z^{(1)} + z \left(l - \frac{\partial m}{\partial \varpi} - nm \right).$$

Soit

$$\mu = l - \frac{\partial m}{\partial \varpi} - nm,$$

on aura

$$0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \varpi} + \frac{n}{\mu} z^{(1)} + z;$$

en différentiant cette équation par rapport à ϑ , on aura

$$0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \varpi \partial \vartheta} - \frac{\partial \mu}{\mu^2} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \varpi} + \frac{n}{\mu} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta} + z^{(1)} \left(\frac{\partial n}{\mu} - n \frac{\partial \mu}{\mu^2} \right) + \frac{\partial z}{\partial \vartheta},$$

si l'on ajoute à cette dernière équation la précédente multipliée par m , on aura, à cause de $\frac{\partial z}{\partial \vartheta} + m z = z^{(1)}$,

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \varpi \partial \vartheta} + \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \varpi} \left(m - \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} \right) + n \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta} + z^{(1)} \left(\mu - n \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} + \frac{\partial n}{\partial \vartheta} + nm \right).$$

Soient

$$m - \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} = m^{(1)} \quad \text{et} \quad \mu + nm - n \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} + \frac{\partial n}{\partial \vartheta} = l^{(1)},$$

on aura

$$(Z) \quad 0 = \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \varpi \partial \vartheta} + m^{(1)} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \varpi} + n \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta} + l^{(1)} z^{(1)}.$$

On vient de voir que l'expression de $z^{(1)}$ ne renferme qu'un seul terme, et par ce qui précède l'équation de condition pour que cela ait lieu est

$$0 = l^{(1)} - \frac{\partial m^{(1)}}{\partial \varpi} - nm^{(1)};$$

c'est aussi l'équation de condition nécessaire pour que l'expression de z renferme deux termes.

Si l'expression de z renferme trois termes, en sorte que l'on ait

$$z = \Lambda \varphi(\varpi) + \Lambda' \varphi_1(\varpi) + \Lambda'' \varphi_2(\varpi),$$

en substituant au lieu de z cette valeur dans l'équation différentielle, on aura les suivantes

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} + m \Lambda,$$

$$0 = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \varpi \partial \vartheta} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots;$$

en faisant $z^{(1)} = \frac{\partial z}{\partial \vartheta} + m z$, on aura

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} + m \Lambda \right) \varphi(\varpi) + \left(\frac{\partial \Lambda'}{\partial \vartheta} + m \Lambda' \right) \varphi_1(\varpi) + \left(\frac{\partial \Lambda''}{\partial \vartheta} + m \Lambda'' \right) \varphi_2(\varpi) \\ &= \left(\frac{\partial \Lambda'}{\partial \vartheta} + m \Lambda' \right) \varphi_1(\varpi) + \left(\frac{\partial \Lambda''}{\partial \vartheta} + m \Lambda'' \right) \varphi_2(\varpi), \end{aligned}$$

en sorte que l'expression de $z^{(1)}$ dans l'équation (Z) ne renferme que deux termes; or, nous avons vu ci-dessus que, pour que l'expression de z ne renferme que deux termes, on doit avoir l'équation de condition

$$0 = l^{(1)} - \frac{\partial \mu^{(1)}}{\partial \vartheta} - nm^{(1)};$$

donc, si l'on change dans cette équation m en $m - \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta}$, et l en $\mu + nm - n \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} + \frac{\partial n}{\partial \vartheta}$, on aura l'équation de condition pour que l'expression de $z^{(1)}$ ne renferme que deux termes et, par conséquent, pour que l'expression de z en renferme trois.

Pareillement, si, dans cette nouvelle équation, on change m en $n - \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta}$, et l en $\mu + mn - n \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} + \frac{\partial n}{\partial \vartheta}$, on aura l'équation de condition pour que z renferme quatre termes, et ainsi de suite; en sorte qu'on aura facilement, par ce moyen, l'équation de condition nécessaire pour que z renferme un nombre quelconque de termes.

De là, je tire un moyen très simple d'avoir la valeur complète de z . Soit

$$z^{(1)} = \frac{\partial z}{\partial \vartheta} + m z;$$

l'équation

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \vartheta^2} + m \frac{\partial z}{\partial \vartheta} + n \frac{\partial z}{\partial \vartheta} + l z$$

donnera

$$0 = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta} + n z^{(1)} + z \left(l - \frac{\partial m}{\partial \vartheta} - nm \right);$$

d'où, en faisant

$$\mu = l - \frac{\partial m}{\partial \vartheta} - nm, \quad m^{(1)} = m - \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta}$$

et

$$l^{(1)} = \mu + nm - n \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} + \frac{\partial n}{\partial \vartheta},$$

on tirera

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \vartheta^2} + m^{(1)} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta} + n \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta} + l^{(1)} z^{(1)},$$

Soit

$$z^{(2)} = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta} + m^{(1)} z^{(1)},$$

et l'on aura

$$0 = \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \vartheta} + n z^{(2)} + z^{(1)} \left(l^{(1)} - \frac{\partial m^{(1)}}{\partial \vartheta} - nm^{(1)} \right);$$

d'où, en faisant

$$\mu^{(1)} = l^{(1)} - \frac{\partial m^{(1)}}{\partial \vartheta} - nm^{(1)}, \quad m^{(2)} = m^{(1)} - \frac{\partial \mu^{(1)}}{\partial \vartheta}$$

et

$$l^{(2)} = \mu^{(1)} + nm^{(1)} - n \frac{\partial \mu^{(1)}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial n}{\partial \vartheta},$$

on tirera

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(2)}}{\partial \vartheta^2} + m^{(2)} \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \vartheta} + n \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \vartheta} + l^{(2)} z^{(2)},$$

Soit

$$z^{(3)} = \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \vartheta} + m^{(2)} z^{(2)},$$

et l'on aura

$$0 = \frac{\partial z^{(3)}}{\partial \vartheta} + n z^{(3)} + z^{(2)} \left(l^{(2)} - \frac{\partial m^{(2)}}{\partial \vartheta} - nm^{(2)} \right);$$

d'où, en faisant

$$\mu^{(2)} = l^{(2)} - \frac{\partial m^{(2)}}{\partial \vartheta} - nm^{(2)}, \quad m^{(3)} = m^{(2)} - \frac{\partial \mu^{(2)}}{\partial \vartheta}$$

et

$$l^{(3)} = \mu^{(2)} + nm^{(2)} - n \frac{\partial \mu^{(2)}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial n}{\partial \vartheta},$$

on tirera

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(3)}}{\partial \vartheta^2} + m^{(3)} \frac{\partial z^{(3)}}{\partial \vartheta} + n \frac{\partial z^{(3)}}{\partial \vartheta} + l^{(3)} z^{(3)}.$$

En continuant ainsi, on aura

$$0 = \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \vartheta} + n z^{(r-1)} + z^{(r-2)} \left(l^{(r-2)} - \frac{\partial m^{(r-2)}}{\partial \vartheta} - nm^{(r-2)} \right);$$

d'où l'on tirera

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(r-1)}}{\partial \sigma \partial \theta} + m^{(r-1)} \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \sigma} + n \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \theta} + l^{(r-1)} z^{(r-1)};$$

on aura ensuite, en faisant $z^{(r)} = \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \theta} + m^{(r-1)} z^{(r-1)}$,

$$0 = \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \sigma} + n z^{(r)} + z^{(r-1)} \left(l^{(r-1)} - \frac{\partial m^{(r-1)}}{\partial \sigma} - nm^{(r-1)} \right).$$

Maintenant, puisque l'expression de z , considérée par rapport à la fonction arbitraire $\varphi(\sigma)$, se termine, on peut supposer, en n'ayant égard qu'à cette seule fonction, $z^{(r)} = 0$; partant,

$$0 = l^{(r-1)} - \frac{\partial m^{(r-1)}}{\partial \sigma} - nm^{(r-1)};$$

done

$$0 = \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \sigma} + n z^{(r)};$$

d'où l'on tire

$$z^{(r)} = e^{-fn d\sigma} \psi(\theta),$$

$\psi(\theta)$ étant une fonction quelconque arbitraire de θ ; ensuite l'équation

$$z^{(r)} = \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \theta} + m^{(r-1)} z^{(r-1)}$$

donne

$$z^{(r-1)} = e^{-fm^{(r-1)} d\theta} \left[\varphi(\sigma) + \int e^{fm^{(r-1)} d\theta} - fn d\sigma d\theta \psi(\theta) \right];$$

ayant ainsi $z^{(r-1)}$, on aura $z^{(r-2)}$ au moyen de l'équation

$$0 = \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \sigma} + n z^{(r-1)} + z^{(r-2)} \left(l^{(r-2)} - \frac{\partial m^{(r-2)}}{\partial \sigma} - nm^{(r-2)} \right),$$

ce qui donne

$$z^{(r-2)} = \frac{\frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \sigma} + n z^{(r-1)}}{nm^{(r-2)} + \frac{\partial m^{(r-2)}}{\partial \sigma} - l^{(r-2)}};$$

on aura pareillement

$$z^{(r-3)} = \frac{\frac{\partial z^{(r-2)}}{\partial \sigma} + n z^{(r-2)}}{nm^{(r-3)} + \frac{\partial m^{(r-3)}}{\partial \sigma} - l^{(r-3)}};$$

et ainsi de suite jusqu'à z ; l'expression de z que l'on trouvera de cette manière, renfermant les deux constantes arbitraires $\varphi(\sigma)$ et $\psi(\theta)$, sera complète.

J'observerai ici que, si les coefficients l, n, m étaient constants, on aurait

$$\mu = l - nm, \quad m^{(1)} = m \quad \text{et} \quad l^{(1)} = \mu + mn = l;$$

d'où il est facile de conclure que l'on aura généralement

$$m^{(r-1)} = m \quad \text{et} \quad l^{(r-1)} = l;$$

l'équation de condition trouvée ci-dessus donnera, dans ce cas,

$$0 = l - nm,$$

et comme on a la même équation, en considérant la fonction arbitraire $\psi(\theta)$, puisqu'il suffit alors de changer n en m , et réciproquement, il en résulte que, si cette équation n'est pas satisfaite, l'intégrale de l'équation proposée est impossible en termes finis, comme on le démontrera ci-après.

Je suppose maintenant que, dans l'équation

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \theta} + m \frac{\partial z}{\partial \sigma} + n \frac{\partial z}{\partial \theta} + lz + T,$$

T ne soit pas nul, on fera comme ci-dessus

$$z^{(1)} = \frac{\partial z}{\partial \theta} + m z,$$

et l'on aura

$$0 = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma} + n z^{(1)} + z \left(l - \frac{\partial m}{\partial \sigma} - nm \right) + T;$$

soit

$$l - \frac{\partial m}{\partial \sigma} - nm = \mu;$$

done

$$0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma} + \frac{n}{\mu} z^{(1)} + z + \frac{T}{\mu};$$

si l'on différentie cette équation par rapport à θ , que l'on ajoute à cette équation ainsi différentiée l'équation elle-même multipliée par m , et

que l'on fasse

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} - T \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} + m T = T^{(1)},$$

$$m - \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} = m^{(1)},$$

$$l^{(1)} = \mu + mn + \frac{\partial n}{\partial \vartheta} - n \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta},$$

on aura

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \varpi \partial \vartheta} + m^{(1)} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \varpi} + n \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta} + l^{(1)} z^{(1)} + T^{(1)};$$

on fera ensuite

$$z^{(2)} = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta} + m^{(1)} z^{(1)},$$

et l'on aura

$$0 = \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \varpi} + n z^{(2)} + z^{(1)} \left(l^{(1)} - \frac{\partial m^{(1)}}{\partial \varpi} - nm^{(1)} \right) + T^{(1)},$$

d'où l'on tirera, par la méthode précédente, l'équation

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(2)}}{\partial \varpi \partial \vartheta} + m^{(2)} \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \varpi} + n \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \vartheta} + l^{(2)} z^{(2)} + T^{(2)};$$

en continuant d'opérer ainsi, on parviendra aux équations suivantes :

$$0 = \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \varpi} + n z^{(r-1)} + z^{(r-2)} \left(l^{(r-2)} - \frac{\partial m^{(r-2)}}{\partial \varpi} - nm^{(r-2)} \right) + T^{(r-2)},$$

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(r-1)}}{\partial \varpi \partial \vartheta} + m^{(r-1)} \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \varpi} + n \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \vartheta} + l^{(r-1)} z^{(r-1)} + T^{(r-1)},$$

$$z^{(r)} = \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \vartheta} + m^{(r-1)} z^{(r-1)},$$

$$0 = \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \varpi} + n z^{(r)} + z^{(r-1)} \left(l^{(r-1)} - \frac{\partial m^{(r-1)}}{\partial \varpi} - nm^{(r-1)} \right) + T^{(r-1)}.$$

Maintenant, puisque l'expression de z se termine, on a

$$0 = l^{(r-1)} - \frac{\partial m^{(r-1)}}{\partial \varpi} - nm^{(r-1)};$$

donc

$$0 = \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \varpi} + n z^{(r)} + T^{(r-1)},$$

d'où l'on tirera

$$z^{(r)} = e^{-fn d\varpi} \left[\psi(\vartheta) - \int e^{fn d\varpi} T^{(r-1)} d\varpi \right];$$

ensuite l'équation

$$z^{(r)} = \frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \vartheta} + m^{(r-1)} z^{(r-1)}$$

donne

$$z^{(r-1)} = e^{-fm^{(r-1)} d\vartheta} \left\{ \varphi(\varpi) + \int e^{fm^{(r-1)} d\vartheta} - fn d\varpi d\vartheta \left[\psi(\vartheta) - \int e^{fn d\varpi} T^{(r-1)} d\varpi \right] \right\};$$

ayant ainsi $z^{(r-1)}$, on aura $z^{(r-2)}$ au moyen de l'équation

$$z^{(r-2)} = \frac{\frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \varpi} + n z^{(r-1)} + T^{(r-2)}}{\frac{\partial m^{(r-2)}}{\partial \varpi} + nm^{(r-2)} - l^{(r-2)}};$$

on aura pareillement

$$z^{(r-3)} = \frac{\frac{\partial z^{(r-2)}}{\partial \varpi} + n z^{(r-2)} + T^{(r-3)}}{\frac{\partial m^{(r-3)}}{\partial \varpi} + nm^{(r-3)} - l^{(r-3)}},$$

et ainsi de suite jusqu'à z ; on ferait les mêmes opérations par rapport à la fonction arbitraire $\psi(\vartheta)$, si, dans l'expression de z , la fonction arbitraire $\varphi(\varpi)$ était enveloppée sous le signe $\int$, la fonction $\psi(\vartheta)$ ne l'étant pas.

VIII.

La méthode précédente suppose l'intégration des équations aux différences partielles

$$(2) \quad \frac{\partial \varpi}{\partial x} = \frac{\partial \varpi}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} x + \sqrt{\frac{1}{4} x^2 - \varepsilon} \right),$$

$$(3) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} x - \sqrt{\frac{1}{4} x^2 - \varepsilon} \right),$$

ou, ce qui, par l'article III, revient au même, elle suppose l'intégration

des équations aux différences ordinaires

$$(4) \quad 0 = dy - dx \left(\frac{1}{2} \alpha - \sqrt{\frac{1}{2} \alpha^2 - \varepsilon} \right),$$

$$(5) \quad 0 = dy - dx \left(\frac{1}{2} \alpha + \sqrt{\frac{1}{2} \alpha^2 - \varepsilon} \right).$$

Elle suppose de plus que, ayant α et θ en fonctions de x et de y , au moyen de ces équations intégrées, on en peut conclure x et y en fonctions de α et de θ ; or, dans l'état actuel de l'Analyse, l'une et l'autre de ces suppositions est souvent impossible. Il serait cependant utile de pouvoir s'assurer alors si l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles est possible ou non en termes finis; on s'en assurera facilement par le procédé suivant.

Je reprends l'équation (L) de l'article V

$$(L) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T;$$

on a vu (même article) qu'elle pouvait se transformer dans celle-ci

$$0 = M \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \theta} + N \frac{\partial z}{\partial \alpha} + L \frac{\partial z}{\partial \theta} + R z + T';$$

de plus, il est facile de voir, par l'article cité ci-dessus, que l'on aura

$$M = 2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + 2 \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$N = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \delta \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$L = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} + \delta \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$R = \lambda \quad \text{et} \quad T' = T.$$

L'équation

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \theta} + m \frac{\partial z}{\partial \alpha} + n \frac{\partial z}{\partial \theta} + l z + T$$

donne ensuite

$$m = \frac{N}{M}, \quad n = \frac{L}{M}, \quad l = \frac{R}{M} \quad \text{et} \quad T = \frac{T'}{M}.$$

Soit présentement $K = 0$, l'équation de condition trouvée dans l'ar-

ticle précédent entre m , n , l et leurs différences prises par rapport à α et à θ , pour que la valeur de z , considérée par rapport à l'une des deux fonctions arbitraires, par exemple $z(\alpha)$, se termine après le deuxième terme; il s'agit de savoir si cette équation a lieu, sans avoir m , n et l en fonctions de α et de θ ; pour cela, on substituera dans les expressions précédentes de m , n et l , au lieu de $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, leurs valeurs que donnent les équations (2) et (3); on aura ainsi m , n et l en fonctions de

$$x, y, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}, \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2};$$

mais l'équation $K = 0$, renfermant les différences de m , n et l , prises par rapport à α et à θ , il faut connaître ces différences; supposons conséquemment qu'il s'agisse d'avoir la valeur de $\frac{\partial m}{\partial \alpha}$; on différenciera l'expression de m par rapport à x et par rapport à y , ce qui donnera

$$dm = \frac{\partial m}{\partial x} dx + \frac{\partial m}{\partial y} dy;$$

donc

$$\frac{\partial m}{\partial \alpha} = \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial m}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha};$$

on doit observer que les termes tels que

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \frac{\partial x}{\partial \alpha},$$

qui se rencontrent dans les quantités $\frac{\partial m}{\partial x}$ et $\frac{\partial m}{\partial y}$, peuvent être éliminés au moyen des équations (2) et (3), en sorte que ces quantités seront réduites à être fonctions de

$$x, y, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2};$$

mais θ étant supposé constant, on a

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy$$

ou

$$dy = -\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx}{\frac{\partial \vartheta}{\partial y}};$$

on a ensuite

$$d\varpi = \frac{\partial \varpi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varpi}{\partial y} dy = \frac{\partial \varpi}{\partial x} dx - \frac{\frac{\partial \varpi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx}{\frac{\partial \vartheta}{\partial y}},$$

donc

$$\frac{\partial x}{\partial \varpi} = \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial y}}{\frac{\partial \varpi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial \varpi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x}};$$

et changeant x en y , et réciproquement, on aura

$$\frac{\partial y}{\partial \varpi} = \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial x}}{\frac{\partial \varpi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \varpi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y}};$$

éliminant ensuite $\frac{\partial \varpi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ au moyen des équations (2) et (3), on aura $\frac{\partial m}{\partial \varpi}$ en fonction de

$$x, y, \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2}, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^3 \varpi}{\partial y^3};$$

on aura par un procédé semblable les valeurs de

$$\frac{\partial m}{\partial \vartheta}, \frac{\partial^2 m}{\partial \varpi^2}, \frac{\partial^2 m}{\partial \varpi \partial \vartheta}, \frac{\partial^2 m}{\partial \vartheta^2}, \dots, \frac{\partial m}{\partial \varpi}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \varpi}, \dots;$$

l'équation $K = 0$ deviendra ainsi fonction de

$$x, y, \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \dots,$$

et en réduisant tous les termes au même dénominateur, et faisant égale à zéro la somme de tous les numérateurs, on aura entre $x, y, \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \dots$ une équation rationnelle et entière par rapport aux

différences

$$\frac{\partial \varpi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \dots$$

Considérons présentement un terme quelconque

$$H \frac{\partial^a \varpi}{\partial y^a} \frac{\partial^{a-p} \varpi}{\partial y^{a-p}} \dots \frac{\partial^l \vartheta}{\partial y^l} \dots$$

de cette équation de condition que nous nommerons (K). H sera fonction de x et de y ; mais les équations (2) et (3), qui servent à déterminer ϖ et ϑ , en x et y , étant aux différences partielles du premier ordre, il est clair qu'on peut changer ϖ dans une fonction quelconque arbitraire de ϖ , et ϑ dans une fonction arbitraire de ϑ ; que l'on change conséquemment ϖ en $\varphi(\varpi)$, et ϑ en $\psi(\vartheta)$, le terme $H \frac{\partial^a \varpi}{\partial y^a} \dots$ en produira un de cette forme

$$H \frac{\partial \varpi^a}{\partial y^a} \frac{\partial \vartheta^l}{\partial y^l} \varphi^a(\varpi) \varphi^{a-p}(\varpi) \dots \psi^l(\vartheta) \dots,$$

lequel doit être séparément égal à zéro, puisque les fonctions $\varphi(\varpi)$ et $\psi(\vartheta)$ sont arbitraires; on aura donc $H = 0$, et, puisque x et y sont indépendants l'un de l'autre, l'équation $H = 0$ sera identique; d'où il suit que l'équation de condition (K) doit être telle, que les coefficients de chaque terme y soient identiquement égaux à zéro. Si les intégrales des équations (4) et (5) sont possibles, mais qu'il soit impossible, par les procédés connus, d'en tirer x et y en fonctions de ϖ et de ϑ , on aura facilement l'expression de z par les quadratures des courbes.

IX.

Pour éclaircir par un exemple la méthode de l'article VII, considérons l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{c \frac{\partial z}{\partial x}}{hx + fy} + \frac{e \frac{\partial z}{\partial y}}{hx + fy} + K \frac{z}{(hx + fy)^2} + T,$$

a, b, c, e, h, f et K étant constants; cette équation est d'autant plus

remarquable, qu'elle renferme les lois de la propagation du son, en y supposant $T=0$, et en déterminant d'une manière particulière les constantes $a, b, c, \dots$

Pour l'intégrer, on changera les variables x et y en d'autres ϖ et θ , telles que l'on ait

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} (-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}),$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} (-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}),$$

ce qui donne

$$\varpi = x(-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}) + y$$

et

$$\theta = x(-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}) + y,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{\varpi - \theta}{\sqrt{a^2 - 4b}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\varpi(a + \sqrt{a^2 - 4b}) - \theta(a - \sqrt{a^2 - 4b})}{2\sqrt{a^2 - 4b}};$$

on aura ensuite

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial \varpi} (-a + \sqrt{a^2 - 4b}) + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial \theta} (-a - \sqrt{a^2 - 4b}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} (2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - 4b} - 4b) \\ &\quad + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \theta} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} (2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 4b} - 4b), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varpi} + \frac{\partial z}{\partial \theta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} (-a + \sqrt{a^2 - 4b}) - a \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \theta} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} (-a - \sqrt{a^2 - 4b}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2};$$

partant, si l'on fait, pour simplifier,

$$\frac{2h + f(a + \sqrt{a^2 - 4b})}{2\sqrt{a^2 - 4b}} = h', \quad -\frac{2h + f(a - \sqrt{a^2 - 4b})}{2\sqrt{a^2 - 4b}} = f',$$

$$\frac{2e - ac + c\sqrt{a^2 - 4b}}{2(4b - a^2)} = e', \quad \frac{2e - ac - c\sqrt{a^2 - 4b}}{2(4b - a^2)} = e',$$

$$\frac{K}{4b - a^2} = K' \quad \text{et} \quad \frac{T}{4b - a^2} = T',$$

en supposant d'ailleurs que l'on ait substitué dans T, au lieu de x et de y , leurs valeurs en ϖ et θ , on aura

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \theta} + \frac{e'}{h'\varpi + f'\theta} \frac{\partial z}{\partial \varpi} + \frac{e'}{h'\varpi + f'\theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{K'z}{(h'\varpi + f'\theta)^2} + T';$$

soit encore $h'\varpi = \varpi'$ et $f'\theta = \theta'$, on aura

$$\frac{\partial z}{\partial \varpi} = h' \frac{\partial z}{\partial \varpi'}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = f' \frac{\partial z}{\partial \theta'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \theta} = f'h' \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi' \partial \theta'};$$

on aura ainsi

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi' \partial \theta'} + \frac{e'}{f'(\varpi' + \theta')} \frac{\partial z}{\partial \varpi'} + \frac{e'}{h'(\varpi' + \theta')} \frac{\partial z}{\partial \theta'} + \frac{K'z}{f'h'(\varpi' + \theta')^2} + \frac{T'}{f'h'};$$

L'équation proposée sera donc ainsi réduite à une équation de cette forme

$$(Z) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi' \partial \theta'} + \frac{a}{\varpi' + \theta'} \frac{\partial z}{\partial \varpi'} + \frac{b}{\varpi' + \theta'} \frac{\partial z}{\partial \theta'} + \frac{cz}{(\varpi' + \theta')^2} + T,$$

a, b, c étant des constantes qui ne signifient plus la même chose que précédemment. Pour l'intégrer, on fera, suivant la méthode de l'article VII,

$$z^{(1)} = \frac{\partial z}{\partial \theta'} + \frac{az}{\varpi' + \theta'},$$

et l'on arrivera à une équation de cette forme

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \varpi' \partial \theta'} + \frac{a^{(1)}}{\varpi' + \theta'} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \varpi'} + \frac{b^{(1)}}{\varpi' + \theta'} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta'} + \frac{c^{(1)}z^{(1)}}{(\varpi' + \theta')^2} + T^{(1)};$$

en faisant encore

$$z^{(2)} = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{a^{(1)}}{\varpi + \theta} z^{(1)}$$

et, continuant d'opérer ainsi, on arrivera à une équation de la forme suivante

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(r)}}{\partial \varpi \partial \theta} + \frac{a^{(r)}}{\varpi + \theta} \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \varpi} + \frac{b^{(r)}}{\varpi + \theta} \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \theta} + \frac{c^{(r)} z^{(r)}}{(\varpi + \theta)^2} + T^{(r)},$$

$a^{(r)}$, $b^{(r)}$ et $c^{(r)}$ étant des fonctions de r , qu'il s'agit de déterminer.

Soit

$$z^{(r+1)} = \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \theta} + \frac{a^{(r)}}{\varpi + \theta} z^{(r)},$$

et l'on aura

$$(\sigma) \quad 0 = \frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial \varpi} + \frac{b^{(r)}}{\varpi + \theta} z^{(r+1)} + z^{(r)} \frac{c^{(r)} + a^{(r)} - a^{(r)} b^{(r)}}{(\varpi + \theta)^2} + T^{(r)},$$

d'où l'on tire

$$0 = \frac{1}{c^{(r)} + a^{(r)} - a^{(r)} b^{(r)}} \left[\frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial \varpi} (\varpi + \theta)^2 + b^{(r)} z^{(r+1)} (\varpi + \theta) + T^{(r)} (\varpi + \theta)^2 \right] + z^{(r)}.$$

En différentiant cette équation par rapport à θ , et ajoutant à cette équation ainsi différenciée l'équation elle-même multipliée par $\frac{a^{(r)}}{\varpi + \theta}$, on aura, en observant que

$$\begin{aligned} z^{(r+1)} &= \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \theta} + \frac{a^{(r)}}{\varpi + \theta} z^{(r)}, \\ 0 &= \frac{\partial^2 z^{(r+1)}}{\partial \varpi \partial \theta} + \frac{a^{(r)} + 2}{\varpi + \theta} \frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial \varpi} + \frac{b^{(r)}}{\varpi + \theta} \frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial \theta} \\ &\quad + z^{(r+1)} (a^{(r)} + b^{(r)} + c^{(r)}) + \frac{\partial T^{(r)}}{\partial \theta} + T^{(r)} \frac{a^{(r)} + 2}{\varpi + \theta}; \end{aligned}$$

mais on a

$$0 = \frac{\partial^2 z^{(r+1)}}{\partial \varpi \partial \theta} + \frac{a^{(r+1)}}{\varpi + \theta} \frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial \varpi} + \frac{b^{(r+1)}}{\varpi + \theta} \frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial \theta} + \frac{c^{(r+1)}}{(\varpi + \theta)^2} z^{(r+1)} + T^{(r+1)};$$

donc, en comparant, on aura

$$a^{(r+1)} = a^{(r)} + 2, \quad b^{(r+1)} = b^{(r)}, \quad c^{(r+1)} = a^{(r)} + b^{(r)} + c^{(r)}$$

et

$$T^{(r+1)} = \frac{\partial T^{(r)}}{\partial \theta} + T^{(r)} \frac{a^{(r)} + 2}{\varpi + \theta};$$

l'équation aux différences finies $a^{(r+1)} = a^{(r)} + 2$ donne, en l'intégrant,

$$a^{(r)} = 2r + A,$$

A étant une constante arbitraire; pour la déterminer, j'observe que, r étant nul, on a

$$a^{(r)} = a;$$

donc

$$A = a \quad \text{et} \quad a^{(r)} = a + 2r;$$

l'équation

$$b^{(r+1)} = b^{(r)}$$

donne

$$b^{(r)} = b,$$

et l'équation

$$c^{(r+1)} = a^{(r)} + b^{(r)} + c^{(r)}$$

donne

$$c^{(r+1)} - c^{(r)} = a + b + 2r;$$

en intégrant, on a

$$c^{(r)} = A + (a + b - 1)r + r^2,$$

A étant une constante arbitraire; or, en faisant $r = 0$, on a

$$c^{(r)} = c;$$

donc

$$A = c \quad \text{et} \quad c^{(r)} = c + (a + b - 1)r + r^2.$$

Pour que l'expression de z soit possible en termes finis et délivrés du signe $\int$, par rapport à la fonction arbitraire $\varphi(\varpi)$, il faut qu'en supposant $T = 0$, et n'ayant égard qu'à la seule fonction arbitraire $\varphi(\varpi)$, on ait $z^{(r+1)} = 0$, r étant zéro ou un nombre entier positif; l'équation (σ) donnera, dans ce cas,

$$0 = c^{(r)} + a^{(r)} - a^{(r)} b^{(r)};$$

en substituant au lieu de $a^{(r)}$, $b^{(r)}$ et $c^{(r)}$ leurs valeurs, on aura

$$0 = a + c - ab + (1 + a - b)r + r^2;$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{b-a-1 \pm \sqrt{(b+a-1)^2 - 4c}}{2}.$$

Si l'une ou l'autre des valeurs de r est zéro ou un nombre entier positif, la proposée sera intégrable en termes finis et débarrassés du signe $\int$, par rapport à la fonction arbitraire $\varphi(\omega)$; en changeant a en b , et réciproquement b en a , dans cette expression de r , on aura

$$r = \frac{a-b-1 \pm \sqrt{(b+a-1)^2 - 4c}}{2},$$

et si l'une ou l'autre de ces expressions de r est zéro, ou un nombre entier positif, la proposée sera intégrable en termes finis et délivrés du signe $\int$, par rapport à la fonction arbitraire $\psi(\theta)$; mais si aucune des quatre valeurs de r n'est zéro, ou un nombre entier positif, on sera sûr alors que l'intégrale est impossible en termes finis, comme nous le démontrerons ci-après.

Supposons maintenant que l'on ait

$$0 = c^{(r)} + a^{(r)} - a^{(r)} b^{(r)},$$

l'équation (σ) donnera

$$0 = \frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial \omega} + \frac{b z^{(r+1)}}{\omega + \theta} + T^{(r)};$$

pour déterminer $T^{(r)}$, on observera que l'on a, par ce qui précède,

$$T^{(r+1)} = \frac{\partial T^{(r)}}{\partial \theta} + \frac{a + 2r + 2}{\omega + \theta} T^{(r)};$$

et si l'on fait successivement $r = 0, 1, 2, \dots$, on aura

$$T^{(1)} = \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{a+2}{\omega+\theta} T,$$

$$T^{(2)} = \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{a+4}{\omega+\theta} T^{(1)} = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{2(a+3)}{\omega+\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{(a+2)(a+3)}{(\omega+\theta)^2} T;$$

en continuant ce procédé, on aura l'expression de $T^{(r)}$; si l'on intègre

ensuite l'équation précédente, on aura

$$z^{(r+1)} = (\omega + \theta)^{-b} [\psi(\theta) - \int T^{(r)} (\omega + \theta)^b d\omega],$$

$\psi(\theta)$ étant une fonction arbitraire de θ ; l'équation

$$z^{(r+1)} = \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \theta} + \frac{a^{(r)}}{\omega + \theta} z^{(r)}$$

donnera

$$z^{(r)} = (\omega + \theta)^{-(a+r)} \left\{ \varphi(\omega) + \int d\theta (\omega + \theta)^{a+r-b} [\psi(\theta) - \int T^{(r)} (\omega + \theta)^b d\omega] \right\},$$

$\varphi(\omega)$ étant une fonction arbitraire de ω ; ayant ainsi $z^{(r)}$, on aura, par l'article VII,

$$z^{(r-1)} = \frac{\frac{\partial z^{(r)}}{\partial \omega} + \frac{b z^{(r)}}{\omega + \theta} + T^{(r-1)}}{ab - a - c + (b - a - 1)(r - 1) - (r - 1)^2},$$

$$z^{(r-2)} = \frac{\frac{\partial z^{(r-1)}}{\partial \omega} + \frac{b z^{(r-1)}}{\omega + \theta} + T^{(r-2)}}{ab - a - c + (b - a - 1)(r - 2) - (r - 2)^2},$$

et ainsi de suite jusqu'à z .

X.

J'ai supposé, article VII, que l'expression complète de z , considérée par rapport à l'une ou à l'autre des fonctions arbitraires $\varphi(\omega)$ et $\psi(\theta)$, était débarrassée du signe intégral; je vais présentement discuter les cas dans lesquels ces deux fonctions sont nécessairement enveloppées sous ce signe: si l'on fait, pour plus de simplicité, $T = 0$, on aura (article VII), en ne considérant que la seule fonction arbitraire $\varphi(\omega)$,

$$\begin{aligned} z &= A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + A'' \varphi_2(\omega) + \dots \\ &+ B \int C \varphi(\omega) d\omega + B' \int C' \varphi(\omega) d\omega + \dots \\ &+ D \int E d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Je suppose d'abord qu'il n'y ait que des termes affectés du simple

signe $\int$, on aura

$$z = A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + A'' \varphi_2(\omega) + \dots \\ + B \int C \varphi(\omega) d\omega + B' \int C' \varphi(\omega) d\omega + \dots$$

S'il n'existe qu'un seul terme affecté du signe $\int$, en sorte que le terme $B' \int C' \varphi(\omega) d\omega$ et les suivants soient nuls, en substituant au lieu de z cette valeur dans l'équation

$$(Z) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial z}{\partial \omega} + n \frac{\partial z}{\partial \theta} + lz,$$

on aura une équation de cette forme

$$(Y) \quad \begin{cases} 0 = \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial B}{\partial \omega} + n \frac{\partial B}{\partial \theta} + lB \right) \int C \varphi(\omega) d\omega \\ + \left(\frac{\partial B}{\partial \omega} + nB \right) \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega \\ + L \varphi'(\omega) + L' \varphi(\omega) + \dots \end{cases}$$

Si la quantité $\frac{\partial B}{\partial \omega} + nB$ n'est pas nulle, en faisant

$$K = \frac{\frac{\partial^2 B}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial B}{\partial \omega} + n \frac{\partial B}{\partial \theta} + lB}{\frac{\partial B}{\partial \omega} + nB}, \\ M = \frac{-L}{\frac{\partial B}{\partial \omega} + nB}, \quad M' = \frac{-L'}{\frac{\partial B}{\partial \omega} + nB}, \quad \dots,$$

on aura

$$(\lambda) \quad \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega + K \int C \varphi(\omega) d\omega = M \varphi'(\omega) + M' \varphi(\omega) + \dots$$

En différentiant cette équation par rapport à ω , on aura

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) + \frac{\partial K}{\partial \omega} \int C \varphi(\omega) d\omega + KC \varphi(\omega) = M \varphi''(\omega) + \left(\frac{\partial M}{\partial \omega} + M' \right) \varphi'(\omega) + \dots$$

Si $\frac{\partial K}{\partial \omega}$ n'était pas nul, il est clair que $\int C \varphi(\omega) d\omega$ serait donné en

quantités débarrassées du signe $\int$, ce qui ne peut être; donc $\frac{\partial K}{\partial \omega} = 0$; partant, K ne peut être fonction que de θ ; on peut ainsi le faire passer sous le signe $\int$ dans le terme $K \int C \varphi(\omega) d\omega$; l'équation (λ) devient alors

$$\int \left(\frac{\partial C}{\partial \theta} + KC \right) \varphi(\omega) d\omega = M \varphi'(\omega) + M' \varphi(\omega) + \dots$$

En la multipliant par $e^{\int K d\theta}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on aura

$$\int e^{\int K d\theta} d\theta \left(\frac{\partial C}{\partial \theta} + KC \right) \varphi(\omega) d\omega = M e^{\int K d\theta} \varphi'(\omega) d\theta + M' e^{\int K d\theta} \varphi(\omega) d\theta + \dots;$$

en intégrant cette équation par rapport à θ et faisant

$$\int M e^{\int K d\theta} d\theta = N, \quad \int M' e^{\int K d\theta} d\theta = N', \quad \dots,$$

on aura

$$\int e^{\int K d\theta} C \varphi(\omega) d\omega = N \varphi'(\omega) + N' \varphi(\omega) + \dots;$$

donc

$$\int C \varphi(\omega) d\omega = \frac{N}{e^{\int K d\theta}} \varphi'(\omega) + \dots,$$

équation impossible, puisque $\int C \varphi(\omega) d\omega$ ne peut être, par hypothèse, donné en quantités débarrassées du signe $\int$, par rapport à la fonction arbitraire $\varphi(\omega)$.

De là, il suit que l'on a

$$\frac{\partial B}{\partial \omega} + nB = 0;$$

or on doit avoir en même temps

$$0 = \frac{\partial^2 B}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial B}{\partial \omega} + n \frac{\partial B}{\partial \theta} + lB,$$

car autrement l'équation (Y) donnerait

$$\int C \varphi(\omega) d\omega = \frac{-L \varphi'(\omega) - L' \varphi(\omega) - \dots}{\frac{\partial^2 B}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial B}{\partial \omega} + n \frac{\partial B}{\partial \theta} + lB},$$

ce qui ne peut avoir lieu; maintenant, puisque l'on a

$$0 = \frac{\partial B}{\partial \omega} + n B$$

et

$$0 = \frac{\partial^2 B}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial B}{\partial \omega} + n \frac{\partial B}{\partial \theta} + l B,$$

il est clair que l'équation $z = B \psi(\theta)$ satisfera à l'équation (Z), en sorte que l'expression de z sera délivrée du signe $\int$, en n'ayant égard qu'à la fonction arbitraire $\psi(\theta)$.

Ce théorème important a également lieu, quel que soit le nombre des termes affectés du signe $\int$; et, quoique nous n'en ayons considéré qu'un seul, cependant la démonstration précédente s'étend au cas d'un nombre indéfini de termes semblables; mais, comme elle exige pour cela quelques artifices d'analyse assez délicats, je vais l'appliquer au cas dans lequel l'expression de z renferme deux termes nécessairement affectés du signe $\int$, par rapport à la fonction arbitraire $\varphi(\omega)$.

XI.

On aura pour lors

$$z = A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + A'' \varphi_2(\omega) + \dots + B \int C \varphi(\omega) d\omega + B' \int C' \varphi(\omega) d\omega;$$

en substituant cette valeur de z dans l'équation

$$(Z) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial z}{\partial \omega} + n \frac{\partial z}{\partial \theta} + l z,$$

on aura une équation de cette forme

$$(F) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = & \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial B}{\partial \omega} + n \frac{\partial B}{\partial \theta} + l B \right) \int C \varphi(\omega) d\omega \\ & + \left(\frac{\partial B}{\partial \omega} + n B \right) \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega \\ & + \left(\frac{\partial^2 B'}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial B'}{\partial \omega} + n \frac{\partial B'}{\partial \theta} + l B' \right) \int C' \varphi(\omega) d\omega \\ & + \left(\frac{\partial B'}{\partial \omega} + n B' \right) \int \frac{\partial C'}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega \\ & + L \varphi(\omega) + L' \varphi_1(\omega) + L'' \varphi_2(\omega) + \dots \end{aligned} \right.$$

or il peut arriver plusieurs cas que nous allons discuter séparément :

1° Les deux équations

$$0 = \frac{\partial B'}{\partial \omega} + n B',$$

$$0 = \frac{\partial^2 B'}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial B'}{\partial \omega} + n \frac{\partial B'}{\partial \theta} + l B'$$

peuvent avoir lieu en même temps; il est visible qu'alors l'équation $z = B' \psi(\theta)$ satisfait à l'équation (Z), et qu'ainsi l'intégrale de cette dernière équation, considérée par rapport à la fonction arbitraire $\psi(\theta)$, est délivrée du signe $\int$.

2° L'équation

$$0 = \frac{\partial B'}{\partial \omega} + n B'$$

ayant lieu, il peut arriver que celle-ci

$$0 = \frac{\partial^2 B'}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial B'}{\partial \omega} + n \frac{\partial B'}{\partial \theta} + l B'$$

n'ait point lieu; dans ce cas, l'équation (F) donnera pour $\int C' \varphi(\omega) d\omega$ une expression de cette forme

$$\begin{aligned} \int C' \varphi(\omega) d\omega = & Q \int C \varphi(\omega) d\omega \\ & + Q' \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega + M \varphi(\omega) + M' \varphi_1(\omega) + \dots; \end{aligned}$$

l'expression de z peut être ainsi mise sous cette forme

$$(\mu) \quad \left\{ \begin{aligned} z = & A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + A'' \varphi_2(\omega) + \dots \\ & + H \int C \varphi(\omega) d\omega + H' \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega. \end{aligned} \right.$$

3° L'équation

$$0 = \frac{\partial B'}{\partial \omega} + n B'$$

peut ne pas avoir lieu; en supposant dans ce cas

$$K = \frac{\frac{\partial^2 B'}{\partial \sigma \partial \theta} + m \frac{\partial B'}{\partial \sigma} + n \frac{\partial B'}{\partial \theta} + l B'}{\frac{\partial B'}{\partial \sigma} + n B'},$$

$$K' = \frac{\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial \theta} + m \frac{\partial B}{\partial \sigma} + n \frac{\partial B}{\partial \theta} + l B}{\frac{\partial B}{\partial \sigma} + n B'},$$

$$K'' = \frac{\frac{\partial B}{\partial \sigma} + n B}{\frac{\partial B}{\partial \sigma} + n B'},$$

$$M = - \frac{L}{\frac{\partial B'}{\partial \sigma} + n B'},$$

$$M' = - \frac{L'}{\frac{\partial B'}{\partial \sigma} + n B'},$$

$$\dots\dots\dots,$$

on aura

$$(A') \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{\partial C'}{\partial \theta} \varphi(\sigma) d\sigma + K \int C' \varphi(\sigma) d\sigma \\ + K' \int C \varphi(\sigma) d\sigma + K'' \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\sigma) d\sigma \\ = M \varphi'(\sigma) + M' \varphi(\sigma) + M'' \varphi_1(\sigma) + \dots; \end{array} \right.$$

en différentiant par rapport à π , on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial C'}{\partial \theta} \varphi(\sigma) + \frac{\partial K}{\partial \sigma} \int C' \varphi(\sigma) d\sigma + K C' \varphi(\sigma) + \frac{\partial K'}{\partial \sigma} \int C \varphi(\sigma) d\sigma \\ + K' C \varphi(\sigma) + \frac{\partial K''}{\partial \sigma} \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\sigma) d\sigma + K'' \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\sigma) \\ = M \varphi'(\sigma) + \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma} + M' \right) \varphi(\sigma) + \dots \end{aligned}$$

Si $\frac{\partial K}{\partial \sigma}$ n'est pas nul, on aura une valeur de $\int C' \varphi(\sigma) d\sigma$, qui, substi-

tuée dans l'expression de z , la rendra de cette forme

$$(A'') \quad \left\{ \begin{array}{l} z = A \varphi'(\sigma) + A' \varphi(\sigma) + A'' \varphi_1(\sigma) + A''' \varphi_2(\sigma) + \dots \\ + H \int C \varphi(\sigma) d\sigma + H' \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\sigma) d\sigma; \end{array} \right.$$

si l'on a $\frac{\partial K}{\partial \sigma} = 0$, K sera fonction de σ sans θ ; or, si dans ce cas $\frac{\partial K'}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial K''}{\partial \sigma}$ ne sont pas nuls, l'équation (A') sera de forme analogue à celle de l'équation (A) de l'article précédent; ainsi, en y appliquant le raisonnement que nous avons fait dans le même article sur l'équation (A), on prouvera que $\int C \varphi(\sigma) d\sigma$ peut être débarrassé du signe $\int$, ce qui est contre l'hypothèse; K , K' et K'' doivent donc être fonctions de θ seul; on aura, cela posé,

$$\int \left(\frac{\partial C'}{\partial \theta} + K C' \right) \varphi(\sigma) d\sigma + \int \left(K' C + K'' \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) \varphi(\sigma) d\sigma = M \varphi'(\sigma) + \dots$$

En multipliant cette équation par $e^{\int K d\theta} d\theta$, on aura

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial C'}{\partial \theta} + K C' \right) e^{\int K d\theta} \varphi(\sigma) d\sigma d\theta \\ + \int K' C e^{\int K d\theta} \varphi(\sigma) d\sigma d\theta + \int K'' \frac{\partial C}{\partial \theta} e^{\int K d\theta} \varphi(\sigma) d\sigma d\theta = M e^{\int K d\theta} \varphi'(\sigma) d\theta + \dots, \end{aligned}$$

et, en intégrant par rapport à θ , on a

$$\begin{aligned} \int C' e^{\int K d\theta} \varphi(\sigma) d\sigma + \int \varphi(\sigma) d\sigma \int K' C e^{\int K d\theta} d\theta \\ + \int \varphi(\sigma) K' C e^{\int K d\theta} d\sigma - \int \varphi(\sigma) d\sigma \int C \frac{\partial K''}{\partial \theta} e^{\int K d\theta} d\theta \\ = \varphi'(\sigma) \int M e^{\int K d\theta} d\theta + \dots \quad (A''). \end{aligned}$$

Soit

$$K' e^{\int K d\theta} - \frac{\partial K''}{\partial \theta} e^{\int K d\theta} = \frac{1}{1} \quad \text{et} \quad \int C \frac{d\theta}{1} = {}^1C,$$

(1) Il faudrait ajouter au premier membre de cette équation le terme

$$- \int \varphi(\sigma) d\sigma \int K' C K e^{\int K d\theta} d\theta.$$

on aura

$$C = 1 \frac{\partial^1 C}{\partial \theta}$$

et

$$\int \varphi(\omega) d\omega K^e C e^{f K \theta} = I K^e e^{f K \theta} \int \frac{\partial^1 C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega,$$

parce que $I K^e e^{f K \theta}$, étant fonction de θ seul, peut être mis hors du signe $\int$; partant

$$\int C' \varphi(\omega) d\omega = \frac{- \int^1 C \varphi(\omega) d\omega - I K^e e^{f K \theta} \int \frac{\partial^1 C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega + \varphi'(\omega) \int M e^{f K \theta} d\theta + \dots}{e^{f K \theta}}.$$

On a ensuite

$$\int C d\omega = 1 \int \frac{\partial^1 C}{\partial \theta} d\omega;$$

substituant ces quantités dans l'expression précédente de z , elle prendra la forme que donne l'équation (μ'), et comme cette forme renferme celle que donne l'équation (μ), il en résulte généralement que l'expression de z est débarrassée du signe $\int$, par rapport à la fonction arbitraire $\varphi(\theta)$, ou que, si cela n'est pas, elle est de la forme suivante, par rapport à la fonction arbitraire $\varphi(\omega)$,

$$z = A \varphi''(\omega) + A' \varphi'(\omega) + A'' \varphi(\omega) + A''' \varphi_1(\omega) + \dots \\ + H \int C \varphi(\omega) d\omega + H' \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega.$$

Cette valeur de z substituée dans l'équation (Z) produira une équation de cette forme

$$(G) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial H'}{\partial \omega} + n H' \right) \int \frac{\partial^1 C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega \\ & + \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial H'}{\partial \omega} + n \frac{\partial H'}{\partial \theta} + l H' + \frac{\partial H}{\partial \omega} + n H \right) \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega \\ & + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial H}{\partial \omega} + n \frac{\partial H}{\partial \theta} + l H \right) \int C \varphi(\omega) d\omega \\ & = L \varphi''(\omega) + L' \varphi'(\omega) + L'' \varphi(\omega) + \dots \end{aligned} \right.$$

Supposons d'abord que la quantité $\frac{\partial H'}{\partial \omega} + n H'$ ne soit pas nulle; en faisant

$$K = \frac{\frac{\partial^2 H'}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial H'}{\partial \omega} + n \frac{\partial H'}{\partial \theta} + l H' + \frac{\partial H}{\partial \omega} + n H}{\frac{\partial H'}{\partial \omega} + n H'},$$

$$K' = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial H}{\partial \omega} + n \frac{\partial H}{\partial \theta} + l H}{\frac{\partial H'}{\partial \omega} + n H'},$$

$$M = \frac{L}{\frac{\partial H'}{\partial \omega} + n H'},$$

$$\dots\dots\dots,$$

on aura

$$\int \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \varphi(\omega) d\omega + K \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega + K' \int C \varphi(\omega) d\omega \\ = M \varphi''(\omega) + M' \varphi'(\omega) + \dots;$$

en différentiant cette équation par rapport à ω , on aura

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \varphi(\omega) + \frac{\partial K}{\partial \omega} \int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega \\ + K \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) + \frac{\partial K'}{\partial \omega} \int C \varphi(\omega) d\omega + K' C \varphi(\omega) = M \varphi'''(\omega) + \dots$$

Si $\frac{\partial K}{\partial \omega}$ n'est pas nul, on aura $\int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega$ par une équation de cette forme

$$\int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega = 1 \int C \varphi(\omega) d\omega + I' \varphi'(\omega) + \dots,$$

et l'expression de z sera ainsi réduite à ne renfermer plus qu'un seul terme affecté du signe $\int$, ce qui est contre l'hypothèse.

Si, $\frac{\partial K}{\partial \omega}$ étant nul, $\frac{\partial K'}{\partial \omega}$ ne l'était pas, on aurait $\int C \varphi(\omega) d\omega$ en termes délivrés du signe $\int$, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc on a

$$\frac{\partial K}{\partial \omega} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial K'}{\partial \omega} = 0;$$

partant, K et K' sont fonctions de θ seul; on aura ainsi

$$\int \varphi(\omega) d\omega \left(\mu \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} + K \frac{\partial C}{\partial \theta} + K' C \right) = M \varphi''(\omega) + \dots$$

En multipliant cette équation par $\mu d\theta$, μ étant fonction de θ seul, on aura

$$(\lambda') \quad \int \varphi(\omega) d\omega \left(\mu \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} d\theta + \mu K \frac{\partial C}{\partial \theta} d\theta + \mu K' C d\theta \right) = \mu M \varphi''(\omega) d\theta + \dots;$$

or il est toujours possible, comme l'on sait, de prendre μ tel que

$$\mu \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} d\theta + \mu K \frac{\partial C}{\partial \theta} d\theta + \mu K' C d\theta$$

soit une différentielle exacte et égale à $d\left(\mu \frac{\partial C}{\partial \theta} + \alpha C\right)$, α étant fonction de θ seul; il suffit pour cela de déterminer μ et α , de manière que l'on ait

$$K\mu = \frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \alpha \quad \text{et} \quad K'\mu = \frac{\partial \alpha}{\partial \theta};$$

si l'on intègre l'équation (λ') par rapport à θ , on aura

$$\int \varphi(\omega) d\omega \left(\mu \frac{\partial C}{\partial \theta} + \alpha C \right) = \varphi''(\omega) \int M \mu d\theta + \dots,$$

donc

$$\int \frac{\partial C}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega = -\frac{\alpha}{\mu} \int C \varphi(\omega) d\omega + \varphi''(\omega) \frac{1}{\mu} \int M \mu d\theta + \dots;$$

l'expression de α se trouvera donc ainsi réduite à ne renfermer qu'un seul terme affecté du signe $\int$, ce qui est contre l'hypothèse.

Supposons maintenant que l'on ait

$$0 = \frac{\partial H'}{\partial \omega} + n H';$$

on aura pareillement

$$0 = \frac{\partial^2 H'}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial H'}{\partial \omega} + n \frac{\partial H'}{\partial \theta} + l H' + \frac{\partial H}{\partial \omega} + n H$$

et

$$0 = \frac{\partial^2 H}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial H}{\partial \omega} + n \frac{\partial H}{\partial \theta} + l H,$$

car il est visible que, si l'une ou l'autre de ces équations n'avait pas lieu, on pourrait, à l'aide de l'équation (G), réduire la valeur de α à ne renfermer qu'un seul terme affecté du signe $\int$, ce qui ne se peut.

Présentement, si l'on a les trois équations

$$0 = \frac{\partial H'}{\partial \omega} + n H',$$

$$0 = \frac{\partial^2 H'}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial H'}{\partial \omega} + n \frac{\partial H'}{\partial \theta} + l H' + \frac{\partial H}{\partial \omega} + n H,$$

$$0 = \frac{\partial^2 H}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial H}{\partial \omega} + n \frac{\partial H}{\partial \theta} + l H,$$

il est clair que l'équation

$$z = H' \psi(\theta) + H \psi_1(\theta)$$

satisfera à l'équation (Z); donc, toutes les fois que l'intégrale de l'équation (Z), considérée par rapport à la fonction arbitraire $\varphi(\omega)$, est susceptible de cette forme

$$z = A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + \dots + B \int C \varphi(\omega) d\omega + B' \int C' \varphi(\omega) d\omega,$$

son intégrale considérée par rapport à la fonction arbitraire $\psi(\theta)$ est susceptible de cette forme

$$z = H \psi(\theta) + H' \psi_1(\theta);$$

elle est ainsi délivrée du signe $\int$.

En suivant ce raisonnement, on prouvera généralement que si l'expression de z , considérée par rapport à $\varphi(\omega)$, est de cette forme

$$z = A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + \dots + B \int C \varphi(\omega) d\omega + B' \int C' \varphi(\omega) d\omega + \dots,$$

cette même expression, considérée par rapport à la fonction arbitraire $\psi(\theta)$, est de la forme suivante :

$$z = H \psi(\theta) + H' \psi_1(\theta) + H'' \psi_2(\theta) + \dots$$

XII.

Le raisonnement précédent peut s'appliquer encore au cas où l'expression de z renferme des termes nécessairement affectés du double signe $\int\int$, par rapport aux deux fonctions arbitraires $\varphi(\omega)$ et $\psi(\theta)$; pour le faire voir d'une manière fort simple, ne considérons que la seule fonction arbitraire $\varphi(\omega)$, en sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} z = & A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + A'' \varphi_2(\omega) + \dots \\ & + B \int C \varphi(\omega) d\omega + B' \int C' \varphi(\omega) d\omega + \dots \\ & + D \int E d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega + D' \int E' d\theta \int F' \varphi(\omega) d\omega + \dots \end{aligned}$$

Supposons qu'il n'y ait qu'un seul terme affecté du double signe $\int\int$, on aura

$$\begin{aligned} z = & A \varphi(\omega) + A' \varphi_1(\omega) + \dots \\ & + B \int C \varphi(\omega) d\omega + B' \int C' \varphi(\omega) d\omega + \dots + D \int E d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

En substituant cette valeur de z dans l'équation (Z), on aura une équation de cette forme

$$(R) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial D}{\partial \omega} + n \frac{\partial D}{\partial \theta} + l D \right) \int E d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega \\ & + \left(\frac{\partial D}{\partial \theta} + m D \right) \int \frac{\partial E}{\partial \omega} d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega \\ & + H \int L \varphi(\omega) d\omega + H' \int L' \varphi(\omega) d\omega + \dots \\ & + M \varphi'(\omega) + M' \varphi_1'(\omega) + \dots \end{aligned} \right.$$

Si la quantité $\frac{\partial D}{\partial \theta} + m D$ n'est pas nulle, en faisant

$$K = \frac{\frac{\partial^2 D}{\partial \omega \partial \theta} + m \frac{\partial D}{\partial \omega} + n \frac{\partial D}{\partial \theta} + l D}{\frac{\partial D}{\partial \theta} + m D},$$

$$P = - \frac{H}{\frac{\partial D}{\partial \theta} + m D},$$

$$P' = - \frac{H'}{\frac{\partial D}{\partial \theta} + m D},$$

$$N = - \frac{M}{\frac{\partial D}{\partial \theta} + m D},$$

on aura

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial E}{\partial \omega} d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega + K \int E d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega \\ & = P \int L \varphi(\omega) d\omega + \dots + N \varphi'(\omega) + \dots; \end{aligned}$$

cette équation différentiée par rapport à θ donne

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E}{\partial \omega} \int F \varphi(\omega) d\omega + \frac{\partial K}{\partial \theta} \int E d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega + K E \int F \varphi(\omega) d\omega \\ & = \frac{\partial P}{\partial \theta} \int L \varphi(\omega) d\omega + P \int \frac{\partial L}{\partial \theta} \varphi(\omega) d\omega + \dots + \frac{\partial N}{\partial \theta} \varphi'(\omega) + \dots \end{aligned}$$

Si $\frac{\partial K}{\partial \theta}$ n'était pas nul, il est clair que $\int E d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega$ serait donné en termes sans $\int$ et en termes affectés du simple signe $\int$, ce qui est contre l'hypothèse; on a donc

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0,$$

partant K est fonction de ω seul; on aura, cela posé,

$$\int \left(\frac{\partial E}{\partial \omega} + K E \right) d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega = P \int L \varphi(\omega) d\omega + \dots + N \varphi'(\omega) + \dots;$$

en multipliant cette équation par $e^{\int K d\omega} d\omega$, elle devient

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\partial E}{\partial \omega} + K E \right) e^{\int K d\omega} d\omega d\theta \int F \varphi(\omega) d\omega \\ & = P e^{\int K d\omega} d\omega \int L \varphi(\omega) d\omega + \dots + N e^{\int K d\omega} \varphi'(\omega) d\omega + \dots; \end{aligned}$$

en intégrant par rapport à ϖ , et faisant

$$V = \int EF d\vartheta, \quad R = \int P e^{i k d \varpi} d\varpi, \quad \dots$$

on a

$$\begin{aligned} & \int e^{i k d \varpi} E d\vartheta \int F \varphi(\varpi) d\varpi - \int V e^{i k d \varpi} \varphi(\varpi) d\varpi \\ &= R \int L \varphi(\varpi) d\varpi - \int RL \varphi(\varpi) d\varpi + \int N e^{i k d \varpi} \varphi(\varpi) d\varpi + \dots \end{aligned}$$

Donc

$$\int E d\vartheta \int F \varphi(\varpi) d\varpi = \frac{1}{e^{i k d \varpi}} \int V e^{i k d \varpi} \varphi(\varpi) d\varpi + \frac{R}{e^{i k d \varpi}} \int L \varphi(\varpi) d\varpi + \dots$$

d'où l'on voit que $\int E d\vartheta \int F \varphi(\varpi) d\varpi$ est donné en termes affectés du simple signe $\int$, ce qui ne se peut. Il résulte de là que, dans l'équation (R), on a

$$0 = \frac{\partial D}{\partial \vartheta} + m D,$$

mais on doit pareillement avoir

$$0 = \frac{\partial^2 D}{\partial \varpi \partial \vartheta} + m \frac{\partial D}{\partial \varpi} + n \frac{\partial D}{\partial \vartheta} + l D,$$

sans quoi $\int E d\vartheta \int F \varphi(\varpi) d\varpi$ serait donné en termes affectés du simple signe $\int$; présentement, si l'on a les deux équations

$$0 = \frac{\partial D}{\partial \vartheta} + m D$$

et

$$0 = \frac{\partial^2 D}{\partial \varpi \partial \vartheta} + m \frac{\partial D}{\partial \varpi} + n \frac{\partial D}{\partial \vartheta} + l D,$$

il est clair que l'équation

$$z = D \varphi(\varpi)$$

satisfera à l'équation différentielle (Z). On voit donc que le raisonnement de l'article X s'applique également au cas dans lequel l'expression de z renferme un terme affecté du simple signe $\int$; on prouvera, par un raisonnement analogue à celui de l'article XI, que, si l'expression de z renferme deux termes nécessairement affectés du double signe $\iint$, l'équation

$$z = D \varphi(\varpi) + D' \varphi'(\varpi)$$

satisfera à l'équation différentielle (Z). Et comme les mêmes raisonnements ont lieu, quel que soit le nombre des termes affectés du signe $\int$, et quel que soit le nombre de ces signes dans chaque terme, on doit en conclure généralement que, toutes les fois que l'intégrale complète de l'équation (Z) est possible en termes finis, elle est nécessairement débarrassée du signe $\int$, par rapport à l'une ou l'autre des fonctions arbitraires $\varphi(\varpi)$ ou $\psi(\vartheta)$ et, dans ce cas, on peut toujours obtenir cette intégrale, par la méthode de l'article VII. On voit ainsi que cette méthode donne généralement les intégrales complètes des équations linéaires aux différences partielles, lorsqu'elles sont possibles en termes finis; ayant une fois ces intégrales, il ne peut rester de difficulté que dans la détermination des fonctions arbitraires; or la méthode de l'article VII a encore l'avantage de donner un moyen très simple pour cet objet, dans un cas très général et qui paraît être celui de presque tous les problèmes physico-mathématiques.

XIII.

L'équation

$$(L) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T$$

étant donnée, son intégrale complète, si elle en est susceptible, renfermera deux fonctions arbitraires $\varphi(\varpi)$ et $\psi(\vartheta)$, de manière que l'une ou l'autre de ces fonctions y existera sans être affectée du signe $\int$; supposons que ce soit $\varphi(\varpi)$. Pour déterminer maintenant la nature des fonctions $\varphi(\varpi)$ et $\psi(\vartheta)$, supposons que l'on ait les valeurs de z et $\frac{\partial z}{\partial y}$ ou de z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ à l'origine de l'intégrale; cette origine est déterminée, ou parce que, à ce point, l'une des deux variables x ou y est constante ou nulle, ou parce que l'une est donnée en fonction de l'autre; supposons, conséquemment, que l'on ait à l'origine de l'intégrale

$$y = I(x), \quad z = II(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \Gamma(x).$$

$I(x)$, $II(x)$ et $\Gamma(x)$ seront des fonctions connues de x .

Si l'on transforme l'équation (L) dans la suivante

$$(Z) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \theta} + m \frac{\partial z}{\partial \sigma} + n \frac{\partial z}{\partial \theta} + l z + T,$$

il est clair : 1° que, σ et θ étant donnés en fonction de x et de y , l'équation donnée entre x et y à l'origine de l'intégrale en donnera une entre σ et θ à cette origine; 2° que l'équation

$$z = \Pi(x)$$

se changera dans celle-ci

$$z = \Sigma(\theta),$$

$\Sigma(\theta)$ étant une fonction connue de θ ; on aura donc à l'origine de l'intégrale

$$dz = d\theta \Sigma'(\theta),$$

$\Sigma'(\theta)$ étant la différence de $\Sigma(\theta)$ divisée par $d\theta$; mais on a

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \sigma} d\sigma,$$

et l'équation entre σ et θ donne

$$d\sigma = \Pi d\theta,$$

Π étant une fonction de θ ; donc

$$dz = d\theta \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} + \Pi \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) = d\theta \Sigma'(\theta)$$

ou

$$\Sigma'(\theta) = \frac{\partial z}{\partial \theta} + \Pi \frac{\partial z}{\partial \sigma};$$

3° que l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \Gamma(x)$$

se changera dans celle-ci

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \Delta(\theta);$$

or on a

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y};$$

d'ailleurs $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ étant connus en fonctions de x et de y seront donnés en fonctions de θ , à l'origine de l'intégrale; soit

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = M \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = N,$$

M et N étant fonctions de θ , on aura

$$\Delta(\theta) = M \frac{\partial z}{\partial \theta} + N \frac{\partial z}{\partial \sigma};$$

au moyen de cette équation et de celle-ci

$$\Sigma'(\theta) = \frac{\partial z}{\partial \theta} + \Pi \frac{\partial z}{\partial \sigma},$$

on aura $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$ en fonctions de θ , à l'origine de l'intégrale.

Présentement, si l'on suit le procédé de l'article VII, en faisant

$$z^{(1)} = \frac{\partial z}{\partial \theta} + m z,$$

on transformera l'équation (Z) dans celle-ci

$$(Z') \quad 0 = \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \sigma \partial \theta} + m^{(1)} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma} + n \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} + l^{(1)} z^{(1)} + T^{(1)};$$

or, connaissant $\frac{\partial z}{\partial \theta} + m z$ en fonction de θ , à l'origine de l'intégrale, si l'on nomme K cette fonction, on aura

$$z^{(1)} = K$$

à cette origine; on a ensuite

$$\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + m \frac{\partial z}{\partial \theta} + z \frac{\partial m}{\partial \theta};$$

ainsi, pour avoir $\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta}$ à l'origine de l'intégrale, il ne s'agit plus que d'avoir $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ à cette origine; or on a

$$d \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} d\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \theta} d\sigma = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \Pi \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \theta} \right) d\theta;$$

mais, si l'on nomme P la valeur de $\frac{\partial z}{\partial \theta}$, à l'origine de l'intégrale, P étant fonction connue de θ , on aura

$$d\frac{\partial z}{\partial \theta} = d\theta \frac{\partial P}{\partial \theta};$$

donc

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \Pi \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \theta};$$

l'équation (Z) donnera $\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \theta}$ en fonction de θ , à l'origine de l'intégrale; on aura ainsi à ce point la valeur de $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$, et partant aussi celle de $\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta}$ en fonction de θ . L'équation $z^{(1)} = K$ donne

$$dz^{(1)} = \frac{\partial K}{\partial \theta} d\theta;$$

or on a

$$dz^{(1)} = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} d\theta + \Pi \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma} d\theta;$$

donc

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} + \Pi \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma},$$

d'où l'on aura $\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma}$ en fonction de θ ; on aura, par conséquent, $z^{(1)}$, $\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta}$ en fonction de θ , à l'origine de l'intégrale.

Si l'on fait ensuite

$$z^{(2)} = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} + m^{(1)} z^{(1)},$$

on transformera l'équation (Z) dans la suivante

$$(Z') \quad 0 = \frac{\partial^2 z^{(2)}}{\partial \sigma \partial \theta} + m^{(1)} \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \sigma} + n \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \theta} + l^{(1)} z^{(2)} + T^{(2)};$$

et l'on aura, comme ci-dessus, $z^{(2)}$, $\frac{\partial z^{(2)}}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial z^{(2)}}{\partial \theta}$ en fonctions de θ à l'origine de l'intégrale; en continuant ainsi, on aura les valeurs de $z^{(r)}$ et de $\frac{\partial z^{(r)}}{\partial \theta}$ en fonctions de θ ; soit

$$z^{(r)} = \nabla(\theta),$$

on a (art. VII)

$$z^{(r)} = e^{-jn d\sigma} [\psi(\theta) - \int e^{jn d\sigma} T^{(r-1)} d\sigma];$$

mais, σ étant donné en fonction de θ , à l'origine de l'intégrale, on aura à ce point

$$e^{-jn d\sigma} \quad \text{et} \quad e^{-jn d\sigma} \int e^{jn d\sigma} T^{(r-1)} d\sigma,$$

en fonction de θ ; soit

$$e^{-jn d\sigma} = R \quad \text{et} \quad e^{-jn d\sigma} \int e^{jn d\sigma} T^{(r-1)} d\sigma = V,$$

on aura

$$\nabla(\theta) = R \psi(\theta) - V;$$

donc

$$\psi(\theta) = \frac{V + \nabla(\theta)}{R};$$

or V, $\nabla(\theta)$ et R étant des fonctions connues de θ , on aura la forme de la fonction arbitraire $\psi(\theta)$.

Pour avoir celle de la fonction arbitraire $\varphi(\sigma)$, on observera que l'on a

$$z^{(r-1)} = e^{-fm^{(r-1)} d\theta} [\varphi(\sigma) + \int e^{fm^{(r-1)} d\theta - fn d\sigma} d\theta [\psi(\theta) - \int e^{fn d\sigma} T^{(r-1)} d\sigma]];$$

or on a, à l'origine de l'intégrale, $z^{(r-1)}$ en fonction de θ , et à cause de la relation qui existe à ce point, entre σ et θ , on aura $z^{(r-1)}$ en fonction de σ ; on aura pareillement

$$e^{-fm^{(r-1)} d\theta} \quad \text{et} \quad e^{-fm^{(r-1)} d\theta} \int e^{fm^{(r-1)} d\theta - fn d\sigma} d\theta [\psi(\theta) - \int e^{fn d\sigma} T^{(r-1)} d\sigma]$$

en fonctions de σ ; nommons donc Q la première de ces quantités, — S la seconde, et faisons $z^{(r-1)} = F$, nous aurons

$$F = Q \varphi(\sigma) - S;$$

donc

$$\varphi(\sigma) = \frac{F + S}{Q},$$

équation au moyen de laquelle on connaîtra $\varphi(\sigma)$.

Pour donner un exemple de cette méthode, considérons l'équation

aux différences partielles

$$(V) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \theta} + \frac{a}{\varpi + \theta} \frac{\partial z}{\partial \varpi} + \frac{b}{\varpi + \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta},$$

laquelle est intégrable (art. IX) si l'une des quatre valeurs suivantes de r ,

$$r = b - 1, \quad r = -a, \quad r = a - 1, \quad r = -b,$$

est un nombre entier positif. Soit $a = -1$, et l'on aura (art. IX) $r = 1$; mais on a, par le même article,

$$0 = \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \varpi} + \frac{b}{\varpi + \theta} z^{(1)},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$z^{(2)} = (\varpi + \theta)^{-b} \psi(\theta);$$

on aura ensuite (même article)

$$z^{(1)} = \frac{\partial z^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{1}{\varpi + \theta} z^{(1)};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$z^{(1)} = \frac{1}{\varpi + \theta} [\varphi(\varpi) + \int (\varpi + \theta)^{1-b} \psi(\theta) d\theta];$$

on a enfin

$$z = \frac{\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \varpi} + \frac{b}{\varpi + \theta} z^{(1)}}{1 - b} = \frac{1}{(1 - b)(\varpi + \theta)} [\varphi'(\varpi) + (1 - b) \int (\varpi + \theta)^{-b} \psi(\theta) d\theta] - \frac{1}{(\varpi + \theta)^2} [\varphi(\varpi) + \int (\varpi + \theta)^{1-b} \psi(\theta) d\theta].$$

Pour déterminer présentement les fonctions arbitraires $\varphi(\varpi)$ et $\psi(\theta)$, supposons que, à l'origine de l'intégrale, on ait

$$\varpi = \theta, \quad z = \sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta}{2\theta};$$

on aura, à cette origine,

$$dz = \cos \theta d\theta = \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varpi} d\varpi;$$

partant,

$$\cos \theta = \frac{\sin \theta}{2\theta} + \frac{\partial z}{\partial \varpi},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial z}{\partial \varpi} = \cos \theta - \frac{\sin \theta}{2\theta};$$

on a donc ainsi, à l'origine de l'intégrale,

$$z = \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta}{2\theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varpi} = \cos \theta - \frac{\sin \theta}{2\theta}.$$

On a ensuite (art. IX), dans le cas présent,

$$z^{(1)} = \frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{z}{\varpi + \theta} \quad \text{et} \quad z^{(2)} = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{z^{(1)}}{\varpi + \theta},$$

d'où l'on tire, à l'origine de l'intégrale,

$$z^{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad z^{(2)} = \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta};$$

or on a

$$\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} - \frac{\frac{\partial z}{\partial \theta}}{\varpi + \theta} + \frac{z}{(\varpi + \theta)^2},$$

ce qui donne, à l'origine de l'intégrale,

$$\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2};$$

ainsi, pour avoir $\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \theta}$ et, par conséquent, $z^{(2)}$ à l'origine de l'intégrale,il ne s'agit que de connaître à ce point la valeur de $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$. Pour cela, on observera que

$$d \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} d\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \theta} d\varpi = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} d\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \theta} d\theta;$$

or on a

$$d \frac{\partial z}{\partial \theta} = d \frac{\sin \theta}{2\theta} = \frac{\cos \theta d\theta}{2\theta} - \frac{\sin \theta d\theta}{2\theta^2},$$

partant,

$$\frac{\cos \theta}{2\theta} - \frac{\sin \theta}{2\theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi \partial \theta};$$

l'équation (V) donne ensuite, à l'origine de l'intégrale,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial \sigma} - \frac{b}{2\theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\cos \theta}{2\theta} - \frac{\sin \theta}{4\theta^2} - \frac{b \sin \theta}{4\theta^2};$$

on aura donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{(b-1) \sin \theta}{4\theta^2} = z^{(2)};$$

or l'équation

$$z^{(2)} = (\sigma + \theta)^{-b} \psi(\theta)$$

donne, à l'origine de l'intégrale,

$$z^{(1)} = (2\theta)^{-b} \psi(\theta);$$

partant,

$$\psi(\theta) = \frac{(b-1) \sin \theta}{(2\theta)^{1-b}}.$$

Pour avoir maintenant $z(\sigma)$, on observera que l'équation

$$z^{(1)} = \frac{1}{\sigma + \theta} [\varphi(\sigma) + \int (\sigma + \theta)^{1-b} \psi(\theta) d\theta]$$

donne à l'origine de l'intégrale, où $z^{(1)} = 0$, comme on vient de le voir,

$$\varphi(\sigma) = \int (\sigma + \theta)^{1-b} (1-b) \frac{\sin \theta d\theta}{(2\theta)^{1-b}};$$

on aura ainsi $\varphi(\sigma)$, en intégrant le second membre de cette équation et en changeant ensuite dans l'intégrale θ en σ .

Il resterait présentement à donner des méthodes pour intégrer par approximation les équations aux différences partielles, et pour avoir leurs intégrales particulières, lorsque l'intégrale complète est impossible; mais l'un et l'autre de ces deux objets exige des recherches très délicates, que la longueur déjà trop grande de ce Mémoire m'oblige de remettre à un autre temps.

RECHERCHES

SUR PLUSIEURS POINTS

DU SYSTÈME DU MONDE.



RECHERCHES

sur plusieurs points

DU SYSTÈME DU MONDE.⁽¹⁾

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1775, 1778.

I.

Les objets que je me propose de traiter dans ce Mémoire sont : 1^o la loi de la pesanteur à la surface des sphéroïdes homogènes en équilibre; 2^o le phénomène du flux et du reflux de la mer, la précession des équinoxes et la nutation de l'axe de la Terre qui résultent de ce phénomène; 3^o les oscillations de l'atmosphère occasionnées par l'action du Soleil et de la Lune.

Sur la loi de la pesanteur à la surface des sphéroïdes homogènes en équilibre.

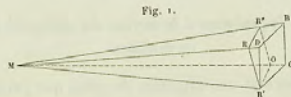
Ces recherches sont une extension de celles que j'ai données dans la seconde Partie des *Mémoires de l'Académie* pour l'année 1772, page 536⁽²⁾. En supposant en équilibre une masse fluide homogène dont toutes les parties s'attirent en raison réciproque du carré des distances et qui, en tournant autour d'un axe, forme un solide de révolution infiniment peu différent d'une sphère, j'ai démontré que si, à l'équateur de ce sphéroïde, on nomme P la pesanteur et xm le rapport

⁽¹⁾ Remis le 15 novembre 1777.

⁽²⁾ *Œuvres de Laplace*, t. VIII, p. 481.

de la force centrifuge à la pesanteur, α étant supposé infiniment petit, la pesanteur à un point quelconque du sphéroïde, dont θ est le complément de la latitude, sera $P(1 + \frac{1}{2}\alpha m \cos^2 \theta)$. Ce théorème est d'autant plus remarquable que j'ai fait voir, dans le même endroit, qu'il n'est nullement démontré que la figure elliptique soit la seule qui convienne à l'équilibre, qu'il y a peut-être une infinité d'autres figures qui y satisfont pareillement; mais que, sur tous ces sphéroïdes, la loi de la pesanteur est la même. Je me propose ici de généraliser ces recherches et de chercher la loi de la pesanteur, sans m'astreindre à la supposition que le sphéroïde est de révolution. Je suppose conséquemment une masse fluide homogène, dont toutes les parties s'attirent en raison réciproque du carré de la distance, tourner autour d'un axe quelconque, de manière que la force centrifuge soit infiniment petite relativement à la pesanteur; je suppose de plus tous les points de cette masse animés par des forces quelconques infiniment petites, et je vais déterminer *a priori*, et indépendamment de la connaissance de la figure du sphéroïde, la loi de la pesanteur à la surface, dans le cas de l'équilibre.

L'action d'une pyramide $MR'CBD$ (fig. 1), dont la base $R'CBD$ est infiniment petite, sur son sommet M , est égale à la section $RR'OR''$

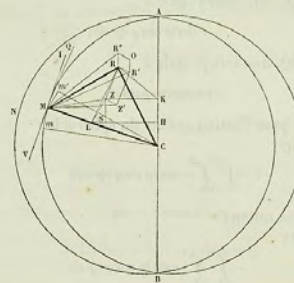


faite perpendiculairement à MR et divisée par MR ; en sorte que, si l'on nomme V cette section et r la droite MR , on aura $\frac{V}{r}$ pour l'action de la pyramide sur le point M ; cette proposition est trop facile à démontrer pour nous y arrêter.

Cela posé, considérons un sphéroïde quelconque AMB (fig. 2); soit tirée la droite MC , et par le point M les deux droites IMV et MQ , perpendiculaires, la première à MC dans le plan AMB , et la seconde au

plan AMB ; soit, de plus, R un point quelconque placé à la surface du sphéroïde, et dont Z est la projection sur le plan AMB ; que l'on fasse $MR = r$, l'angle $QMR = p$, et l'angle $IMZ = q$; en faisant varier le point R de manière que, l'angle p restant invariable ainsi que la

Fig. 2.



droite MR , l'angle q devienne $q + dq$, on aura un nouveau point R' , dont Z' sera la projection sur le plan AMB , et la droite RR' sera égale à ZZ' ; or on a

$$ZZ' = MZ dq \quad \text{et} \quad MZ = r \sin p;$$

donc

$$ZZ' = r \sin p dq = RR'.$$

Si l'on fait ensuite mouvoir le petit triangle MRR' , de manière que, q et r restant invariables, p devienne $p + dp$, le point en R viendra en R' et le point R' en O ; de plus, il est visible que la base $RR'OR''$ de la pyramide $MRR'OR''$ est égale à

$$r^2 \sin p dp dq,$$

et qu'elle est perpendiculaire sur MR , en sorte que l'action de cette pyramide sur le point M sera, par ce qui précède, égale à

$$r \sin p dp dq;$$

cette action, décomposée suivant les trois droites MC, MV et MQ, donnera :

1° Suivant MC, une action égale à

$$r \sin^2 p \sin q \, dp \, dq;$$

2° Suivant MV, une action égale à

$$-r \sin^2 p \cos q \, dp \, dq;$$

3° Suivant MQ, une action égale à

$$r \sin p \cos p \, dp \, dq.$$

On aura donc pour l'action entière du sphéroïde :

1° Suivant MC

$$\int_0^\pi \int_0^\pi r \sin^2 p \sin q \, dp \, dq;$$

je nomme A cette action;

2° Suivant MV

$$- \int_0^\pi \int_0^\pi r \sin^2 p \cos q \, dp \, dq;$$

je nomme B cette action;

3° Suivant MQ

$$\int_0^\pi \int_0^\pi r \sin p \cos p \, dp \, dq;$$

je nomme C cette action.

Il ne s'agit plus maintenant que de connaître r en fonction de p et de q .

Pour cela, imaginons que le solide soit infiniment peu différent d'une sphère dont C soit le centre et CA le rayon. Soient $CA = a$ et l'angle $MCA = \theta$; concevons ensuite un plan fixe ANB, et soit σ l'angle qu'il forme avec le plan AMB, angle que je nommerai *longitude du point M*. Cela posé, MC ne diffère, par l'hypothèse, de AC que d'une quantité infiniment petite; soit $\alpha \mu$ cette quantité, en sorte que l'on ait

$$MC = a(1 + \alpha \mu),$$

α étant infiniment petit; μ sera une fonction de σ et de θ ; soient encore θ' l'angle RCA, et σ' la longitude du point R, on aura

$$RC = a(1 + \alpha \mu'),$$

μ' étant pareille fonction de σ' et de θ' que μ l'est de σ et de θ . Si des points R et Z on abaisse les perpendiculaires RL et ZL, sur MC, on aura

$$\overline{RL}^2 = \overline{ZL}^2 + \overline{RZ}^2;$$

or

$$ZL = r \sin p \cos q$$

et

$$RL = r \cos p;$$

done

$$\overline{RL}^2 = r^2 \sin^2 p \cos^2 q + r^2 \cos^2 p;$$

de plus

$$ML = r \sin p \sin q;$$

done

$$CL = a(1 + \alpha \mu) - r \sin p \sin q;$$

partant,

$$\overline{CR}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{RL}^2 = a^2(1 + \alpha \mu)^2 - 2a(1 + \alpha \mu)r \sin p \sin q + r^2 = a^2(1 + \alpha \mu')^2;$$

on aura donc, en négligeant les quantités de l'ordre α^2 , comme nous le ferons toujours dans la suite,

$$r^2 - 2ar(1 + \alpha \mu) \sin p \sin q = 2\alpha a^2(\mu' - \mu),$$

d'où l'on tire

$$r = a(1 + \alpha \mu) \sin p \sin q \pm \left[a \sin p \sin q (1 + \alpha \mu) + \frac{\alpha a (\mu' - \mu)}{\sin p \sin q} \right].$$

Il faut substituer dans μ' , au lieu de σ' et de θ' , les valeurs qui leur conviennent; or, en adoptant le signe $-$, on a

$$r = \frac{\alpha a (\mu' - \mu)}{\sin p \sin q},$$

ce qui indique que le point R est infiniment voisin du point M, et alors

on a, aux quantités près de l'ordre α ,

$$\varpi' = \varpi \quad \text{et} \quad \theta' = \theta;$$

d'où l'on tire, aux quantités près de l'ordre α^2 ,

$$\alpha\mu' = \alpha\mu;$$

partant,

$$r = 0,$$

ce qui, d'ailleurs, est visible *a priori*. En adoptant le signe +, on a

$$r = 2\alpha(1 + \alpha\mu) \sin p \sin q + \frac{\alpha a(\mu' - \mu)}{\sin p \sin q},$$

et c'est l'expression de MR; il faut, présentement, déterminer θ' et ϖ' en fonctions de p et de q . Pour cela, on abaissera des points R et Z les perpendiculaires RK et ZK sur AB; en négligeant les quantités de l'ordre α , comme cela est ici permis, θ' et ϖ' ne se trouvant que dans μ' qui est déjà multiplié par α , on aura

$$CK = a \cos \theta';$$

de plus, si l'on mène LH perpendiculairement sur AC et ZS perpendiculairement sur LH, on aura

$$CH = CL \cos \theta = (a - r \sin p \sin q) \cos \theta$$

et

$$ZS = KH = r \sin p \cos q \sin \theta;$$

donc

$$CK = CH + HK = a \cos \theta + r \sin p (\sin \theta \cos q - \cos \theta \sin q);$$

donc

$$\cos \theta' = \cos \theta + 2 \sin^2 p \sin q \sin(\theta - q);$$

on a ensuite

$$\sin(\varpi' - \varpi) = \frac{RZ}{RK} = \frac{r \cos p}{a \sin \theta'} = \frac{2 \sin p \cos p \sin q}{\sin \theta'};$$

on déterminera donc ϖ' et θ' au moyen des équations

$$\sin(\varpi' - \varpi) = \frac{2 \sin p \cos p \sin q}{\sin \theta'},$$

$$\cos \theta' = \cos \theta + 2 \sin^2 p \sin q \sin(\theta - q)$$

ou

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos^2 p + \sin^2 p \cos(\theta - 2q);$$

si l'on substitue maintenant, au lieu de r , sa valeur dans les expressions de A, B et C, on aura

$$A = \int_0^\pi \int_0^\pi [2\alpha \sin^2 p \sin^2 q (1 + \alpha\mu) + \alpha a(\mu' - \mu) \sin p] dp dq,$$

$$B = - \int_0^\pi \int_0^\pi \left[2\alpha \sin^2 p \sin q \cos q (1 + \alpha\mu) + \alpha a(\mu' - \mu) \sin p \frac{\cos q}{\sin q} \right] dp dq,$$

$$C = \int_0^\pi \int_0^\pi \left[2\alpha \sin^2 p \cos p \sin q (1 + \alpha\mu) + \alpha a(\mu' - \mu) \frac{\cos p}{\sin q} \right] dp dq;$$

les intégrales précédentes devant être prises depuis p et q égaux à zéro jusqu'à p et q égaux à π , il est clair qu'on peut négliger, dans le développement des différentielles, les termes dans lesquels $\cos p$ ou $\cos q$ se trouvent élevés à des puissances impaires; car soit $P \cos q dq$ un de ces termes, P étant fonction de $\sin q$ et de $\cos^2 q$, il est visible que P sera le même pour deux valeurs de q , équidistantes de $\frac{\pi}{2}$, mais dont l'une est au-dessus et l'autre au-dessous de ce point; donc, $\cos q$ étant le même pour ces deux valeurs, avec des signes contraires, $P \cos q dq$ sera aussi le même avec des signes contraires; en sorte que l'on aura, depuis $q = 0$ jusqu'à $q = \pi$,

$$\int_0^\pi P \cos q dp = 0;$$

on a ensuite

$$\int_0^\pi \sin^2 q dq = \frac{\pi}{2},$$

de plus

$$\int_0^\pi \sin^2 p dp = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$\int_0^\pi \int_0^\pi 2 \sin^2 p \sin^2 q dp dq = \frac{1}{2} \pi;$$

on a encore

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \, dp \, dq = 2\pi;$$

en faisant donc, pour plus de simplicité, $\alpha = 1$, on aura

$$A = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\mu + \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \mu' \sin p \, dp \, dq,$$

$$B = \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \frac{\cos q}{\sin q} (\mu - \mu') \, dp \, dq = -\alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \frac{\cos q}{\sin q} \mu' \, dp \, dq,$$

$$C = \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos p}{\sin q} (\mu' - \mu) \, dp \, dq = \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos p}{\sin q} \mu' \, dp \, dq;$$

si l'on intègre l'expression de B par rapport à p , on aura

$$B = \alpha \cos p \int_0^\pi \frac{\cos q}{\sin q} (\mu' - \mu) \, dq - \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \cos p \frac{\cos q}{\sin q} \frac{\partial \mu'}{\partial p} \, dp \, dq,$$

$\frac{\partial \mu'}{\partial p}$ désignant le coefficient de dp , dans la différentielle de μ' ; or, p étant supposé nul, on a $\varpi' = \varpi$ et $\theta' = \theta$, donc $\mu' = \mu$. Les mêmes équations ont encore lieu lorsque $p = \pi$; on a donc

$$\alpha \cos p \int_0^\pi \frac{\cos q}{\sin q} (\mu' - \mu) \, dq = 0;$$

partant,

$$B = -\alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \cos p \frac{\cos q}{\sin q} \frac{\partial \mu'}{\partial p} \, dp \, dq;$$

on a présentement

$$\frac{\partial \mu'}{\partial p} = \frac{\partial \mu'}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial p} + \frac{\partial \mu'}{\partial \varpi'} \frac{\partial \varpi'}{\partial p},$$

et l'équation

$$\cos \theta' = \cos \theta + 2 \sin^2 p \sin q \sin (\theta - q)$$

donne, en faisant varier θ' et p ,

$$\sin \theta' \, d\theta' = -4 \sin p \cos p \sin q \sin (\theta - q) \, dp.$$

Partant,

$$\frac{\partial \theta'}{\partial p} = -\frac{4 \sin p \cos p \sin q \sin (\theta - q)}{\sin \theta'};$$

en différentiant présentement l'équation

$$\sin (\varpi' - \varpi) = \frac{2 \sin p \cos p \sin q}{\sin \theta'};$$

par rapport à ϖ' et p , on aura

$$\cos (\varpi' - \varpi) \, d\varpi' = \frac{2 \sin q (\cos^2 p - \sin^2 p) \, dp}{\sin \theta'} - \frac{2 \sin p \cos p \sin q \frac{\partial \theta'}{\partial p} \cos \theta'}{\sin^2 \theta'};$$

partant,

$$\frac{d\varpi'}{dp} = \frac{2 (\cos^2 p - \sin^2 p) \sin q}{\sin^2 \theta' \cos (\varpi' - \varpi)} + \frac{8 \sin^2 p \cos^2 p \sin^2 q \sin (\theta - q) \cos \theta'}{\sin^3 \theta' \cos (\varpi' - \varpi)};$$

on aura donc

$$\frac{B}{2} = \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \left\{ \frac{\frac{\partial \mu'}{\partial \theta'} 2 \sin p \cos^2 p \cos q \sin (\theta - q)}{\sin \theta'} - \frac{\frac{\partial \mu'}{\partial \varpi'} \left[\frac{\cos p \cos q (\cos^2 p - \sin^2 p)}{\sin \theta' \cos (\varpi' - \varpi)} \right]}{\sin^2 \theta' \cos (\varpi' - \varpi)} + \frac{4 \sin^2 p \cos^2 p \sin q \cos q \sin (\theta - q) \cos \theta'}{\sin^3 \theta' \cos (\varpi' - \varpi)} \right\} dp \, dq,$$

d'où l'on tirera facilement

$$\frac{B}{2} = \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \left\{ \frac{\frac{\partial \mu'}{\partial \theta'} \sin p \cos^2 p [\sin \theta + \sin (\theta - 2q)]}{\sin \theta'} - \frac{\frac{\partial \mu'}{\partial \varpi'} \left[\frac{\cos p \cos q (\cos^2 p - \sin^2 p)}{\sin \theta' \cos (\varpi' - \varpi)} \right]}{\sin^2 \theta' \cos (\varpi' - \varpi)} + \frac{2 \sin^2 p \cos^2 p \sin q \cos q [\sin \theta + \sin (\theta - 2q)]}{\sin^3 \theta' \cos (\varpi' - \varpi)} \right\} dp \, dq;$$

si l'on différentie l'expression de A, par rapport à θ , on aura

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}\pi \frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \left(\frac{\partial \mu'}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu'}{\partial \varpi'} \frac{\partial \varpi'}{\partial \theta} \right) dp \, dq.$$

Or, en différentiant l'équation

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos^2 p + \sin^2 p \cos (\theta - 2q)$$

par rapport à θ' et θ , on a

$$\sin \theta' \, d\theta' = \sin \theta \cos^2 p \, d\theta + \sin^2 p \sin (\theta - 2q) \, d\theta,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta \cos^2 p + \sin^2 p \sin(\theta - 2q)}{\sin \theta'};$$

si l'on différentie ensuite l'équation

$$\sin(\varpi' - \varpi) = \frac{2 \sin p \cos p \sin q}{\sin \theta'}$$

par rapport à ϖ' et θ , on aura

$$\cos(\varpi' - \varpi) d\varpi' = - \frac{2 \sin p \cos p \sin q \cos \theta'}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} d\theta;$$

d'où l'on tire, en substituant au lieu de $\frac{\partial \theta'}{\partial \theta}$ sa valeur,

$$\frac{\partial \varpi'}{\partial \theta} = - \frac{2 \sin p \cos p \sin q \cos \theta'}{\sin^2 \theta' \cos(\varpi' - \varpi)} [\sin \theta \cos^2 p + \sin^2 p \sin(\theta - 2q)],$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = - \frac{1}{2} \pi \frac{\partial \mu}{\partial \theta}$$

$$+ \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \left\{ \frac{\partial \mu'}{\partial \theta'} \frac{\sin \theta \cos^2 p + \sin^2 p \sin(\theta - 2q)}{\sin \theta'} \sin p \right. \\ \left. - \frac{\partial \mu'}{\partial \varpi'} \frac{2 \sin^2 p \cos p \sin q \cos \theta'}{\sin^2 \theta' \cos(\varpi' - \varpi)} [\sin \theta \cos^2 p + \sin^2 p \sin(\theta - 2q)] \right\} dp dq;$$

partant,

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{1}{2} B = - \frac{1}{2} \pi \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \\ + \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi (\sin^2 p - \cos^2 p) \left\{ \frac{\partial \mu'}{\partial \theta'} \frac{\sin p \sin(\theta - 2q)}{\sin \theta'} \right. \\ \left. - \frac{\partial \mu'}{\partial \varpi'} \left[\frac{\cos p \cos q}{\sin \theta' \cos(\varpi' - \varpi)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2 \sin^2 p \cos p \sin q \cos \theta' \sin(\theta - 2q)}{\sin^2 \theta' \cos(\varpi' - \varpi)} \right] \right\} dp dq.$$

Maintenant on a

$$\frac{\partial \mu'}{\partial q} = \frac{\partial \mu'}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial q} + \frac{\partial \mu'}{\partial \varpi'} \frac{\partial \varpi'}{\partial q},$$

or, si l'on différentie l'équation

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos^2 p + \sin^2 p \cos(\theta - 2q),$$

par rapport à θ' et à q , on aura

$$\sin \theta' d\theta' = - 2 \sin^2 p \sin(\theta - 2q) dq;$$

partant

$$\frac{\partial \theta'}{\partial q} = - \frac{2 \sin^2 p \sin(\theta - 2q)}{\sin \theta'};$$

en différentiant ensuite l'équation

$$\sin(\varpi' - \varpi) = \frac{2 \sin p \cos p \sin q}{\sin \theta'},$$

par rapport à ϖ' et à q , on aura

$$\cos(\varpi' - \varpi) d\varpi' = \frac{2 \sin p \cos p \cos q}{\sin \theta'} dq - \frac{2 \sin p \cos p \sin q \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial q}}{\sin^2 \theta'} dq,$$

d'où l'on tirera, en substituant au lieu de $\frac{\partial \theta'}{\partial q}$ sa valeur,

$$\frac{\partial \varpi'}{\partial q} = \frac{2 \sin p \cos p \cos q}{\sin \theta' \cos(\varpi' - \varpi)} + \frac{4 \sin^3 p \cos p \sin q \cos \theta' \sin(\theta - 2q)}{\sin^2 \theta' \cos(\varpi' - \varpi)};$$

partant

$$\frac{\partial \mu'}{\partial q} = - \frac{\partial \mu'}{\partial \theta'} \frac{2 \sin^2 p \sin(\theta - 2q)}{\sin \theta'} \\ + \frac{\partial \mu'}{\partial \varpi'} \left[\frac{2 \sin p \cos p \cos q}{\sin \theta' \cos(\varpi' - \varpi)} + \frac{4 \sin^3 p \cos p \sin q \cos \theta' \sin(\theta - 2q)}{\sin^2 \theta' \cos(\varpi' - \varpi)} \right];$$

on aura donc

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{1}{2} B = - \frac{1}{2} \pi \frac{\partial \mu}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \alpha \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial \mu'}{\partial q} \frac{\sin^2 p - \cos^2 p}{\sin p} dp dq;$$

or, en intégrant par rapport à q , on a

$$\int \frac{\partial \mu'}{\partial q} dq = \mu' + H.$$

La constante arbitraire doit se déterminer par la condition que l'intégrale commence lorsque $q = 0$; et, dans ce cas, on a $\theta' = \theta$ et $\varpi' = \varpi$; donc $\mu' = \mu$; partant $H = -\mu$, et

$$\int \frac{\partial \mu'}{\partial q} dq = \mu' - \mu;$$

mais l'intégrale doit se terminer lorsque $q = \pi$; et, dans ce cas, on a $\theta' = \theta$ et $\varpi' = \varpi$, partant $\mu' = \mu$; donc

$$\int_0^\pi \frac{\partial \mu'}{\partial q} dq = 0,$$

ce qui donne

$$(a) \quad \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} \alpha \pi \frac{\partial \mu}{\partial \theta} = 0,$$

équation analogue à celle que j'ai donnée pour les sphéroïdes de révolution, dans les *Mémoires de l'Académie* déjà cités, page 545 (*).

On aura, en suivant la même analyse, une équation à peu près semblable entre A et C; mais, au lieu de recommencer les mêmes calculs, il est plus simple de tirer cette équation de l'équation (a). Pour cela, considérons un point m , infiniment voisin de M, placé en même temps à la surface du sphéroïde et dans le plan AMB; si l'on fait $MCm = d\theta$, et que l'on nomme 'A ce que devient A pour le point m , et ' μ ce que devient μ pour le même point, on aura

$$\frac{'A - A}{d\theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{'\mu - \mu}{d\theta} = \frac{\partial \mu}{\partial \theta};$$

l'équation (a) devient conséquemment

$$(\lambda) \quad 'A - A - \frac{1}{2} B d\theta + \frac{1}{2} \alpha \pi ('\mu - \mu) = 0.$$

Imaginons par les points M et C un plan QMC, perpendiculaire au plan AMB, et considérons un point m' , infiniment voisin de M, placé en même temps à la surface du sphéroïde et dans le plan QMC; soit $d\varphi$ l'angle MCm' , et soient A, et ' μ , ce que deviennent A et μ au point m' ; il est clair que, par la même raison que l'équation (λ) a lieu, celle-ci

$$(\lambda') \quad A_1 - A - \frac{1}{2} C d\varphi + \frac{1}{2} \alpha \pi (\mu_1 - \mu) = 0$$

doit avoir lieu; présentement, l'angle $m'CA$ ne diffère de l'angle MCA que d'un infiniment petit du second ordre, en sorte que, si l'on sup-

(*) Œuvres de Laplace, T. VIII, p. 491.

pose la longitude du point m' égale à $\varpi + d\varpi$, on aura

$$A_1 - A = \frac{\partial A}{\partial \varpi} d\varpi \quad \text{et} \quad \mu_1 - \mu = \frac{\partial \mu}{\partial \varpi} d\varpi;$$

de plus, en négligeant les quantités de l'ordre α , comme cela est ici permis, C étant infiniment petit de l'ordre α , on a $d\varphi = d\varpi \sin \theta$; l'équation (λ') deviendra donc

$$(a') \quad \frac{\partial A}{\partial \varpi} - \frac{1}{2} C \sin \theta + \frac{1}{2} \alpha \pi \frac{\partial \mu}{\partial \varpi} = 0;$$

et les équations (a) et (a') ont lieu, quelle que soit la figure du sphéroïde, pourvu qu'il diffère infiniment peu de la sphère.

Supposons maintenant que le sphéroïde ait un mouvement de rotation et, de plus, que toutes ses parties soient animées par des forces quelconques, et déterminons les équations de l'équilibre. D'abord, il est clair que l'axe de rotation peut être censé passer par le centre de gravité du sphéroïde; soit donc AB cet axe, C étant le centre de gravité de la masse entière; soit encore αf la force centrifuge à l'équateur du sphéroïde, ou lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$; cette force sera au point M égale à $\alpha f \sin \theta$, en négligeant les quantités de l'ordre α^2 , et elle donnera, suivant l'élément Mm du sphéroïde, une force égale à $\alpha f \sin \theta \cos \theta$; cette même force, décomposée suivant l'élément Mm' , sera nulle et, décomposée suivant MC, elle donnera une force égale à $-\alpha f \sin^2 \theta$; je lui donne le signe -, parce qu'elle agit en sens contraire de MC.

L'action A du sphéroïde sur le point M, décomposée suivant Mm , donnera une force égale à $A \cos CMm$; or on a

$$\cos CMm = -\alpha \frac{\partial \mu}{\partial \theta};$$

donc l'action A produira, suivant Mm , une force égale à

$$-\alpha A \frac{\partial \mu}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \alpha \pi \frac{\partial \mu}{\partial \theta},$$

en négligeant les quantités de l'ordre α^2 . Cette même force A, décom-

posée suivant Mm' , donnera une force égale à

$$-\frac{1}{2}\alpha\pi\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\varpi}}{\sin\theta}.$$

La force B, étant de l'ordre α , donnera suivant Mm , en négligeant les quantités de l'ordre α^2 , une force égale à B, et suivant Mm' une force nulle. Pareillement, la force C donnera suivant Mm une force nulle, et suivant Mm' une force égale à C. Supposons ensuite que le point M soit animé : 1° d'une force αM , dirigée de M vers V; 2° d'une force αN , dirigée de M vers Q; 3° d'une force αR , dirigée de M vers C; M, N et R étant des fonctions quelconques de ϖ et de θ , on aura pour la force entière, dont le point M est animé suivant Mm ,

$$\alpha f \sin \theta \cos \theta + \alpha M + B - \frac{1}{2}\alpha\pi\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\theta}}{\sin\theta};$$

et, comme cette force doit être nulle par la condition de l'équilibre, on aura l'équation

$$(a') \quad \alpha f \sin \theta \cos \theta + \alpha M + B = \frac{1}{2}\alpha\pi\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\theta}}{\sin\theta}.$$

On aura semblablement pour la force entière, dont le point M est animé suivant Mm' ,

$$\alpha N + C - \frac{1}{2}\alpha\pi\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\varpi}}{\sin\theta},$$

et, cette force devant être encore nulle dans le cas de l'équilibre, on aura l'équation

$$(a'') \quad \sin \theta (C + \alpha N) = \frac{1}{2}\alpha\pi\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\varpi}}{\sin\theta},$$

enfin, la force entière dont le point M est animé suivant MC est $A - \alpha f \sin^2 \theta + \alpha R$; or il est facile de s'assurer que la pesanteur au point M, ou, ce qui revient au même, que la résultante des trois forces, suivant MC, MV et MQ, ne diffère de la force, suivant MC, que

d'une quantité de l'ordre α^2 ; donc, si l'on nomme P la pesanteur au point M, on aura

$$(a''') \quad P = A - \alpha f \sin^2 \theta + \alpha R.$$

Si l'on différentie cette équation successivement par rapport à θ et à ϖ , on aura

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial A}{\partial \theta} d\theta + \alpha \frac{\partial R}{\partial \theta} d\theta - 2\alpha f \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varpi} d\varpi = \frac{\partial A}{\partial \varpi} d\varpi + \alpha \frac{\partial R}{\partial \varpi} d\varpi;$$

en substituant dans ces équations, au lieu de $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ et de $\frac{\partial A}{\partial \varpi}$, leurs valeurs que donnent les équations (a) et (a'), on aura

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{2}B d\theta - \frac{1}{2}\alpha\pi\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\theta}}{\sin\theta} d\theta + \alpha \frac{\partial R}{\partial \theta} d\theta - 2\alpha f \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varpi} d\varpi = \frac{1}{2}C \sin \theta d\varpi - \frac{1}{2}\alpha\pi\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\varpi}}{\sin\theta} d\varpi + \alpha \frac{\partial R}{\partial \varpi} d\varpi,$$

et, si l'on substitue, au lieu de B et de C, leurs valeurs que donnent les équations (a'') et (a''') de l'équilibre, on aura

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta = -\frac{1}{2}\alpha f \sin \theta \cos \theta d\theta - \frac{1}{2}\alpha M d\theta + \alpha \frac{\partial R}{\partial \theta} d\theta,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varpi} d\varpi = -\frac{1}{2}\alpha N \sin \theta d\varpi + \alpha \frac{\partial R}{\partial \varpi} d\varpi;$$

en ajoutant ces deux équations, on aura

$$dP = -\frac{1}{2}\alpha f \sin \theta \cos \theta d\theta - \frac{1}{2}\alpha (M d\theta + N \sin \theta d\varpi) + \alpha dR;$$

pour que cette équation et, par conséquent, pour que l'équilibre soient possibles, $M d\theta + N \sin \theta d\varpi$ doit être une différence exacte; soit dV cette différence, et l'on aura

$$P = P' + \frac{1}{2}\alpha f \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\alpha V + \alpha R,$$

P' étant une constante arbitraire ajoutée en intégrant, et cette équation exprime généralement la loi de la pesanteur à la surface du sphéroïde.

Lorsque les forces αM , αN et αR sont produites par les attractions de tant de corps que l'on voudra, placés près ou loin du sphéroïde, mais tels cependant : 1° que leur action sur le sphéroïde altère infiniment peu sa figure; 2° qu'ils participent au mouvement de rotation du sphéroïde, autrement il ne pourrait jamais y avoir équilibre, ou bien s'ils ne tournent point avec le sphéroïde, qu'ils soient en nombre infini, et distribués également et circulairement autour du sphéroïde, comme il est très naturel de présumer que toutes les parties de l'anneau de Saturne sont disposées autour de cette planète; $M d\theta + N d\omega \sin \theta$ sera toujours dans ce cas une différence exacte; car, soient S un de ces corps, r sa distance au point M , et h sa distance au point C ; r peut être considéré comme fonction de θ , ω et du rayon CM , que je nomme s ; présentement, l'action de S sur M est $\frac{S}{r^2}$; cette action, décomposée suivant MV est $\frac{S}{r^2 s} \frac{\partial r}{\partial \theta}$; cette même action décomposée suivant MQ est $\frac{S}{r^2 s \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \omega}$; enfin cette action décomposée suivant MC est $-\frac{S}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s}$. Pour être en droit de regarder le centre C comme immobile, il faut retrancher des forces précédentes l'action de S sur C , décomposée suivant les mêmes lignes, et, pour avoir cette action, il suffit de faire s infiniment petit dans les quantités précédentes; soient r' ce que devient r dans ce cas, et s' ce que devient s , on aura

$$\alpha M = \frac{S}{r^2 s} \frac{\partial r}{\partial \theta} - \frac{S}{r'^2 s'} \frac{\partial r'}{\partial \theta},$$

$$\alpha N = \frac{S}{r^2 s \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \omega} - \frac{S}{r'^2 s' \sin \theta} \frac{\partial r'}{\partial \omega}$$

et

$$\alpha R = \frac{S}{r^2 s} \frac{\partial r}{\partial s} - \frac{S}{r'^2 s'} \frac{\partial r'}{\partial s},$$

partant

$$\alpha M d\theta + \alpha N \sin \theta d\omega = \frac{S}{r^2 s} dr - \frac{S}{r'^2 s'} dr',$$

en ne considérant que ω et θ de variables; on aura donc

$$P = P' + \frac{1}{2} \alpha f \cos^2 \theta + \frac{S}{2rs} - \frac{S}{2r's'} + \frac{S}{r^2 s} \frac{\partial r}{\partial s} - \frac{S}{r'^2 s'} \frac{\partial r'}{\partial s}.$$

Supposons qu'en réduisant $\frac{1}{r}$, dans une suite ascendante par rapport à s , on ait

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + bs + b^{(1)} s^2 + \dots,$$

$b, b^{(1)}, \dots$ étant des fonctions de θ et de ω , on aura

$$-\frac{S}{2r's'} = -\frac{S}{2hs'} - \frac{Sb}{2} - \frac{Sb^{(1)}s'}{2} - \dots;$$

de plus, on aura

$$\frac{S}{r'^2 s'} \frac{\partial r'}{\partial s'} = -S \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial s'} = -Sb - 2Sb^{(1)}s' - \dots;$$

et, si l'on considère que le terme $-\frac{S}{2hs'}$, étant constant, peut être censé compris dans la constante arbitraire P' , on trouvera, en faisant $s' = 0$,

$$P = P' + \frac{1}{2} \alpha f \cos^2 \theta + \frac{S}{2rs} - \frac{3Sb}{2} - \frac{S}{r^2 s} \frac{\partial r}{\partial s};$$

désignant donc par $\sum \left(\frac{S}{2rs} - \frac{3Sb}{2} - \frac{S}{r^2 s} \frac{\partial r}{\partial s} \right)$ la somme des quantités $\frac{S}{2rs} - \frac{3}{2} Sb - \frac{S}{r^2 s} \frac{\partial r}{\partial s}$, relative à tant de corps que l'on voudra, on aura

$$P = P' + \frac{1}{2} \alpha f \cos^2 \theta + \sum \left(\frac{S}{2rs} - \frac{3}{2} Sb - \frac{S}{r^2 s} \frac{\partial r}{\partial s} \right).$$

Partant, si l'on connaissait la figure et la densité de l'anneau de Saturne, et sa position par rapport à l'axe de rotation de cette planète, on pourrait, en supposant la planète homogène, déterminer la loi de la pesanteur à sa surface; l'équation précédente réduit, comme l'on voit, le problème à la quadrature des courbes, parce qu'alors S devient infiniment petit et que la caractéristique intégrale Σ , relative aux différences finies, se change dans la caractéristique intégrale $\int$, relative aux différences infiniment petites.

II.

Sur le flux et le reflux de la mer, et sur la précession des équinoxes et la nutation de l'axe de la Terre qui résultent de ce phénomène.

Il ne s'agit point ici de chercher une nouvelle cause du flux et du reflux de la mer, mais de bien faire usage de celle que nous lui connaissons incontestablement, et qui, comme l'on sait, consiste dans l'inégale pesanteur des eaux de la mer et du centre de la Terre vers le Soleil et la Lune. Je me propose d'assujettir à une analyse plus rigoureuse qu'on ne l'a fait encore les effets de cette inégalité de pesanteur et les oscillations qui en résultent. Presque tous les géomètres qui se sont occupés jusqu'ici de cet objet ont supposé d'abord un astre immobile au-dessus d'une planète immobile et recouverte d'un fluide; ils ont cherché la figure que le fluide devait prendre pour être en équilibre; considérant ensuite le cas où l'astre a un mouvement réel ou apparent autour de la planète, ils ont supposé que la figure du fluide en équilibre, qu'ils avaient déterminée dans le cas de l'astre immobile, n'était point altérée par ce mouvement, dont tout l'effet, suivant eux, est de changer à chaque instant la position de cette figure relativement à la planète, en lui conservant toujours la même situation par rapport à l'astre. C'est ainsi que MM. Newton, Daniel Bernoulli et Maclaurin ont déterminé les effets des attractions du Soleil et de la Lune sur la mer; mais il est aisé de sentir le peu de conformité de ces suppositions avec ce qui a lieu dans la nature, et l'on doit aux grands géomètres que je viens de citer la justice d'observer qu'ils en ont eux-mêmes reconnu l'inexactitude et l'insuffisance pour expliquer plusieurs phénomènes des marées. Celui qui s'éloigne le plus de leur théorie est la différence très petite que l'observation donne entre les deux marées d'un même jour, quelle que soit la déclinaison des deux astres, tandis que, en suivant leur résultat, cette différence doit souvent être très considérable et beaucoup plus grande qu'aucune autre

inégalité des marées : or une théorie qui diffère à ce point de l'observation doit être entièrement abandonnée. Heureusement cela ne porte aucune atteinte au principe de la gravitation universelle, et il n'en résulte que la nécessité d'avoir égard, dans la détermination des oscillations de la mer, au mouvement de rotation de la Terre, et à ceux du Soleil et de la Lune dans leurs orbites. Cette recherche présente alors de bien plus grandes difficultés que celle de l'équilibre, et c'est vraisemblablement ce qui a déterminé les géomètres à se borner à ce dernier cas; j'en excepte, cependant, MM. Euler et d'Alembert; le premier de ces deux grands géomètres, après avoir fait sentir, dans sa pièce sur le flux et le reflux de la mer, la difficulté de soumettre à un calcul précis les oscillations des eaux de la mer et le peu de ressources que présentaient alors à cet égard l'Analyse et la théorie des fluides, s'est borné à déterminer ces oscillations dans l'hypothèse qui lui a paru la plus vraisemblable sur l'effort des eaux pour reprendre leur état d'équilibre lorsqu'elles s'en sont dérangées. C'est donc, à proprement parler, à M. d'Alembert qu'il faut rapporter les premières recherches exactes qui aient paru sur cet important objet; cet illustre auteur s'étant proposé dans son excellent Ouvrage qui a pour titre : *Reflexions sur la cause des vents*, de calculer les effets de l'action du Soleil et de la Lune sur notre atmosphère, y détermine d'une manière synthétique et fort belle les oscillations d'un fluide de peu de profondeur qui recouvre une planète immobile, au-dessus de laquelle répond un astre immobile; il cherche ensuite à déterminer ces oscillations dans le cas où, la planète étant toujours supposée immobile, l'astre se meut uniformément sur un parallèle à l'équateur, et il parvient, par une analyse aussi savante qu'ingénieuse, aux véritables équations de ce problème; mais la difficulté de les intégrer l'a forcé de recourir à des suppositions qui en rendent la solution incertaine; on trouvera dans ces recherches la solution rigoureuse de ce même problème, quelle que soit la densité du fluide et le mouvement de l'astre attirant dans l'espace. Au reste, je dois à M. d'Alembert la justice d'observer que, si j'ai été assez heureux pour ajouter quelque chose à ses excellentes *Reflexions sur la*

cause des vents, j'en suis principalement redevable à ces Réflexions elles-mêmes et aux belles découvertes de ce grand géomètre sur la Théorie des fluides et sur le Calcul intégral aux différences partielles, dont on voit les premières traces dans l'Ouvrage que je viens de citer. Si l'on considère combien les premiers pas sont difficiles en tout genre et surtout dans une matière aussi compliquée; si l'on fait attention aux progrès immenses de l'Analyse depuis l'impression de son Ouvrage, on ne sera pas surpris qu'il nous ait laissé quelque chose à faire encore et que, aidés par des théories que nous tenons de lui presque tout entières, nous soyons en état d'avancer plus loin dans une carrière qu'il a le premier ouverte.

Il semble que la solution du problème précédent renferme toute la théorie du flux et du reflux de la mer : car, quoique on y suppose la planète immobile, ce qui n'est pas vrai pour la Terre, cependant, le mouvement de rotation de cette planète paraissant n'avoir d'autre effet que de changer la position du Soleil et de la Lune par rapport aux eaux de la mer, on pourrait croire que, pour être en droit de regarder la Terre comme immobile, il suffit de transporter en sens contraire à ces deux astres son mouvement angulaire de rotation; mais, en réfléchissant avec attention sur la nature du problème, on aperçoit bientôt que le changement dans la position du Soleil et de la Lune par rapport à la mer n'est pas le seul effet qui résulte de la rotation de la Terre, et l'on s'en convaincra facilement par la remarque suivante, qui n'a point échappé à M. Maclaurin dans son excellente pièce sur le flux et le reflux de la mer, quoique ce savant auteur ne l'ait point soumise au calcul. Lorsqu'on suppose à la planète un mouvement de rotation commun au fluide, la vitesse d'une molécule du fluide étant supposée rester la même dans le sens du parallèle, son mouvement angulaire de rotation augmente ou diminue, suivant qu'elle s'éloigne ou qu'elle s'approche de l'équateur, en sorte qu'elle change de méridien par cela seul qu'elle change de parallèle : or ce changement pour les eaux de la mer est du même ordre que les mouvements immédiatement excités par l'action du Soleil et de la Lune.

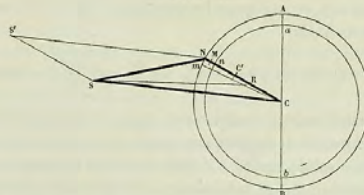
On voit par là l'imperfection de toutes les théories connues sur le flux et sur le reflux de la mer, et combien il était nécessaire de résoudre, avec plus de rigueur qu'on ne l'a fait encore, ce problème, l'un des plus intéressants et des plus compliqués de toute l'Astronomie physique; c'est à remplir cet objet, au moins autant qu'il m'a été possible, que sont destinées les recherches suivantes, et j'ose espérer que l'importance et la difficulté de la matière pourront leur mériter quelque attention de la part des géomètres; je devais naturellement m'attendre à ce que, ayant fait entrer dans ma solution toutes les circonstances essentielles du problème, mes résultats approcheraient beaucoup plus de l'observation que ceux de la théorie ordinaire, sur le peu de différence qui existe entre les deux marées d'un même jour : aussi ai-je eu la satisfaction de voir qu'ils donnent, dans les hypothèses les plus vraisemblables sur la profondeur de la mer, une infinité de moyens d'expliquer pourquoi cette différence est aussi peu considérable : je regarde l'explication de ce phénomène comme un des principaux avantages de mes recherches. Elles m'ont donné lieu de faire une remarque qui me paraît utile dans la théorie de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre; il ne suffit pas, dans cette théorie, de considérer l'action du Soleil et de la Lune sur la partie solide de cette planète : il faut encore avoir égard à l'action de ces deux astres sur les eaux de la mer. Imaginons, en effet, que la Terre soit un ellipsoïde de révolution recouvert par la mer; il est clair que, tant que le Soleil sera dans le plan de l'équateur, son action sur la Terre et sur les eaux qui la recouvrent étant égale et symétrique des deux côtés de l'équateur, il ne peut en résulter aucun dérangement dans la position de l'axe de rotation de la Terre; mais, si l'on suppose le Soleil décliner vers l'un ou vers l'autre pôle, son action ne sera plus la même sur les deux moitiés de la Terre formées par la section du plan de l'équateur; les eaux de la mer, distribuées différemment sur ces moitiés par l'action du Soleil, les attireront d'une manière différente et presseront inégalement leurs surfaces. On conçoit donc qu'alors il doit y avoir un dérangement dans la position de l'axe de la Terre, produit non seule-

ment par l'action directe du Soleil et de la Lune sur la partie solide de cette planète, mais encore par l'attraction et par la pression du fluide dont elle est recouverte; or le calcul m'a montré que les effets qui résultent de cette seconde cause sont du même ordre que ceux qui dépendent de la première, toutes les fois que la densité du fluide est comparable à la densité moyenne de la planète. J'ai cru que les géomètres ne seraient pas fâchés de voir la théorie de ces dérangements; je l'expose conséquemment ici avec tout le détail que peut exiger son importance; cette recherche m'a paru d'autant plus nécessaire, que tous ceux qui ont jusqu'à présent résolu le problème de la précession des équinoxes ont négligé d'avoir égard à l'action du Soleil et de la Lune sur la mer, et M. d'Alembert, à qui nous en devons la première solution rigoureuse, pense que cette action ne peut avoir aucune influence sur ce phénomène: je m'écarte d'autant plus volontiers du sentiment de cet illustre auteur, que cela n'affecte en rien sa belle méthode qui est un chef-d'œuvre de Dynamique, et à laquelle la mécanique des corps solides est redevable des découvertes intéressantes qui l'ont enrichie depuis trente ans. Il ne résulte même de l'action du Soleil et de la Lune sur la mer aucun changement dans les lois de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre; cette action n'influe que sur le rapport de la quantité de la nutation à celle de la précession, et son influence, qui pourrait être considérable dans une infinité d'hypothèses sur la profondeur et sur la densité de la mer, est très petite dans celles qui sont le plus conformes à la Nature; car on verra dans la suite qu'elle est proportionnelle à la différence des marées de dessus et de dessous, différence qui, suivant l'observation, est presque insensible. Le phénomène de la précession des équinoxes a cela de remarquable que l'on retrouve toujours les mêmes lois, quelques hypothèses que l'on emploie sur la profondeur de la mer et sur la figure de la Terre; c'est un théorème que je démontre ici rigoureusement, en supposant que le solide recouvert par les eaux est un sphéroïde de révolution peu différent d'une sphère, et divisé en deux parties égales et semblables par l'équateur; la rapidité du

mouvement de rotation de la Terre me donne lieu de croire que ce théorème est généralement vrai, quelle que soit la loi de la profondeur de la mer et la figure du solide qu'elle recouvre, pourvu qu'il diffère peu d'une sphère, et qu'il tourne à très peu près autour d'un de ses axes principaux de rotation; c'est là, si je ne me trompe, la raison pour laquelle la théorie est si bien d'accord sur ce point avec l'observation, tandis qu'elle s'en éloigne sensiblement sur la figure de la Terre.

Concevons une planète très peu différente d'une sphère, et recouverte d'un fluide d'une densité homogène; il est clair que, si la planète tourne sur son axe et que le fluide ne soit agité par aucune force extérieure, il prendra à la longue le mouvement de rotation de la planète, et parviendra enfin à être en équilibre. Supposons-le parvenu à cet état et qu'ensuite, par l'attraction d'un nombre quelconque d'astres,

Fig. 3.



il en soit dérangé de manière qu'il fasse des oscillations infiniment petites; il s'agit de déterminer la nature de ces oscillations. Pour cela, soient (fig. 3) $anbCa$ la planète et $ANBAanba$ le fluide qui la recouvre; considérons une molécule quelconque M du fluide, telle qu'à l'origine du mouvement l'on ait eu $CM = s$, l'angle $NCA = \theta$, et que la longitude de ce point ait été ω , C étant le centre de gravité de la planète, et le premier méridien, d'où l'on commence à compter les longitudes, étant supposé immobile, ou ne point participer au mouve-

ment de rotation de la planète; soit nt le mouvement angulaire de rotation commun au fluide et à la planète, t désignant le temps écoulé depuis l'origine du mouvement, et supposons qu'après ce temps θ se change en $\theta + \alpha u$, ϖ en $\varpi + nt + \alpha v$ et s en $s + \alpha r$, α étant une quantité infiniment petite; u , v et r seront fonctions de θ , ϖ , s et du temps t . Imaginons présentement au point M un prisme fluide rectangle dont les trois dimensions soient

$$ds + \alpha \frac{\partial r}{\partial s} ds, \\ (s + \alpha r) \left(d\theta + \alpha \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta \right)$$

et

$$(s + \alpha r) \left(d\varpi + \alpha \frac{\partial v}{\partial \varpi} d\varpi \right) \sin(\theta + \alpha u),$$

les quantités $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial \varpi}$ exprimant, suivant la notation reçue, les coefficients de ds , $d\theta$ et $d\varpi$, dans les différentielles de r , u et v ; la solidité de ce prisme sera, en négligeant les quantités de l'ordre α^2 et nommant Δ la densité du fluide,

$$(A) \quad \Delta ds d\theta d\varpi \left[s^2 \sin \theta \left(1 + \alpha \frac{\partial r}{\partial s} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \varpi} + \alpha u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + 2 \alpha r s \sin \theta \right].$$

Dans l'instant suivant, ce prisme se changera dans un solide d'une autre figure; mais il est aisé de s'assurer que, si l'on détermine la masse de ce nouveau solide, comme s'il était un prisme rectangle, on ne se trompera que de quantités infiniment petites du second ordre par rapport à celles que l'on considère; on peut donc, en négligeant ces quantités, supposer nulle la différentielle de la quantité (A), prise en ne faisant varier que le temps t ; d'où l'on tire, en intégrant par rapport à t ,

$$ds d\theta d\varpi \left[s^2 \sin \theta \left(1 + \alpha \frac{\partial r}{\partial s} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \varpi} + \alpha u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + 2 \alpha r s \sin \theta \right] \\ = \varphi(s, \varpi, \theta) ds d\theta d\varpi.$$

$\varphi(s, \varpi, \theta)$ étant une fonction de s , ϖ et θ sans t ; or on a à l'origine du

mouvement, ou lorsque $t = 0$, $r = 0$, $u = 0$ et $v = 0$; donc

$$\varphi(s, \varpi, \theta) = s^2 \sin \theta;$$

partant, on a

$$(1) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial s} s^2 r + s^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + \alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right).$$

III.

Imaginons présentement la position du point M déterminée par les trois coordonnées rectangulaires x , y , z , qui aient pour origine commune le centre C, de manière que l'axe des x soit l'axe Ca de rotation de la planète, que l'axe des y soit perpendiculaire à Ca dans le plan du premier méridien, et que l'axe de z soit perpendiculaire à ce plan; on aura

$$x = (s + \alpha r) \cos(\theta + \alpha u), \\ y = (s + \alpha r) \sin(\theta + \alpha u) \cos(\varpi + nt + \alpha v), \\ z = (s + \alpha r) \sin(\theta + \alpha u) \sin(\varpi + nt + \alpha v).$$

Cela posé, concevons la molécule M sollicitée par tant de forces attractives F, F', F'', ... que l'on voudra, et nommons f , f' , f'' , ... les distances des centres d'attraction à la molécule; f , f' , f'' , ... seront fonctions de ϖ , θ , s , du temps t et de constantes; soit encore p la pression du fluide au point M, p étant pareillement fonction de ϖ , θ , s et t ; si l'on désigne par la caractéristique δ les différences des quantités prises en regardant le temps t comme constant, on aura l'équation suivante :

$$(B) \quad 0 = F \delta f + F' \delta f' + F'' \delta f'' + \dots + \frac{\delta p}{\Delta} + \delta x \frac{d^2 x}{d\varpi^2} + \delta y \frac{d^2 y}{d\varpi^2} + \delta z \frac{d^2 z}{d\varpi^2}.$$

Cette équation est un corollaire du principe suivant de l'équilibre, qui peut être utile dans beaucoup d'autres circonstances :

Si un nombre quelconque de forces R, R', R'', ... agissent sur un point M, suivant des droites quelconques dont γ , γ' , γ'' , ... représentent les longueurs depuis le point M jusqu'à leurs origines, que l'on peut prendre

à volonté et vers lesquelles elles sont supposées tendre; γ , γ' , γ'' seront fonctions des quantités θ , ϖ et s , qui déterminent la position du point M; cela posé, dans le cas où ce point sollicité par ces forces est en équilibre, la somme des produits de chaque force, par l'élément de la direction, est nulle, ce qui donne l'équation suivante

$$0 = R \delta\gamma + R' \delta\gamma' + R'' \delta\gamma'' + \dots,$$

les différences $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$, ... étant prises en faisant mouvoir les droites γ , γ' , γ'' , ... autour de leurs origines, et en faisant varier les quantités θ , ϖ et s , relatives à la position du point M.

Si les différentielles $d\theta$, $d\varpi$ et ds n'ont aucun rapport entre elles, l'équation précédente étant vraie, quelles que soient ces différences, tiendra lieu de trois équations; mais, s'il existait entre θ , ϖ et s une équation quelconque, si, par exemple, le point M était forcé de se mouvoir sur une surface courbe, on pourrait alors éliminer de l'équation de l'équilibre une de ces différences, et cette équation ne tiendrait plus lieu que de deux autres; elle ne tiendrait lieu que d'une seule, s'il existait deux équations entre les trois variables θ , ϖ et s , par exemple, si le point M était forcé de se mouvoir le long d'une ligne courbe.

Voici maintenant comment, de ce principe, on peut conclure l'équation (B): pour cela, supposons que la molécule placée en M soit un parallélépipède infiniment petit, $dx dy dz$; la pression p du fluide sur ce parallélépipède, parallèlement aux x , est égale à la différence de pression sur les deux faces opposées, égales chacune à $dy dz$; elle sera donc $-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$, p étant ici considéré comme fonction de x , de y et de z , et le temps t étant regardé comme constant: en divisant cette pression par la masse $\Delta \cdot dx dy dz$ du parallélépipède, on aura $-\frac{\partial p}{\partial x}$ pour la force accélératrice dont il est sollicité parallèlement aux x , en vertu de la pression du fluide; on aura pareillement $-\frac{\partial p}{\partial y}$, $-\frac{\partial p}{\partial z}$

pour les forces accélératrices dans le sens des y et des z ; de plus, les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ du point M, parallèlement aux x , aux y et aux z , se changent dans l'instant suivant en

$$\frac{dx}{dt} + dt \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{dy}{dt} + dt \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{dz}{dt} + dt \frac{d^2z}{dt^2};$$

cela posé, il est visible, par les principes connus de Dynamique, que ce point doit être en équilibre en vertu des forces F , F' , F'' , ...

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z}, \\ & -\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -\frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}$$

et comme les six dernières de ces forces agissent en sens contraire de l'origine des x , des y et des z , l'équation précédente de l'équilibre donnera

$$(B) \quad 0 = F \delta f + F' \delta f' + F'' \delta f'' + \dots + \frac{\partial p}{\partial x} + \delta x \frac{d^2x}{dt^2} + \delta y \frac{d^2y}{dt^2} + \delta z \frac{d^2z}{dt^2};$$

si l'on substitue maintenant, au lieu de x , y , z , leurs valeurs en θ , ϖ , s , αr , αu , αv , on aura, en négligeant les quantités de l'ordre α^2 ,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha \left(\cos \theta \frac{d^2r}{dt^2} - s \sin \theta \frac{d^2u}{dt^2} \right) \delta(s \cos \theta) \\ & - \frac{n^2}{3} \delta[(s + \alpha r) \sin(\theta + \alpha u)]^2 \\ & + 2 \alpha n s \sin \theta \delta \alpha \left(\sin \theta \frac{dr}{dt} + s \cos \theta \frac{du}{dt} \right) \\ & + \alpha \left(\sin \theta \frac{d^2r}{dt^2} + s \cos \theta \frac{d^2u}{dt^2} \right) \delta(s \sin \theta) \\ & - 2 \alpha n s \sin \theta \frac{dv}{dt} \delta(s \sin \theta) + \alpha s^2 \sin^2 \theta \delta \alpha \frac{d^2v}{dt^2} \\ & = -F \delta f - F' \delta f' - \dots - \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

Les équations (1) et (2) appartiennent à tous les points de l'inté-

rieur du fluide, mais l'équation (2) prend une forme un peu différente à la surface extérieure. Pour la déterminer, nommons $\frac{p'}{\Delta}$ la force accélératrice résultante de la pression du fluide sur le point N placé à la surface extérieure; cette pression agit, comme l'on sait, dans la direction du rayon osculateur; soit ρ ce rayon, et l'on aura, par ce qui précède,

$$0 = F \partial f + F' \partial f' + \dots + \frac{p'}{\Delta} \partial \rho + \partial x \frac{d^2 x}{dt^2} + \partial y \frac{d^2 y}{dt^2} + \partial z \frac{d^2 z}{dt^2};$$

maintenant, si l'on suppose que les différentielles ∂x , ∂y , ∂z soient celles de la surface elle-même, on aura, par la nature du rayon osculateur, $\partial \rho = 0$; partant

$$0 = F \partial f + F' \partial f' + \dots + \partial x \frac{d^2 x}{dt^2} + \partial y \frac{d^2 y}{dt^2} + \partial z \frac{d^2 z}{dt^2};$$

l'équation (2) aura donc lieu pour tous les points de la surface extérieure du fluide, pourvu qu'on y suppose $\partial p = 0$ et que les différentielles ∂x , ∂y et ∂z soient celles de la surface elle-même.

Il faut ensuite assujettir le mouvement des points de la surface intérieure du fluide à ce que les différences ∂x , ∂y et ∂z aient entre elles les mêmes rapports que les différentielles de l'équation à la surface du sphéroïde *anba*; il faut enfin satisfaire aux conditions primitives du mouvement du fluide.

IV.

Nous supposons ici que le fluide était primitivement en équilibre sur le sphéroïde; soit donc 1 le demi-axe Ca du sphéroïde, et $1 + q\lambda$ un rayon quelconque Cn, λ étant, pour plus de simplicité, fonction de θ seul et q étant extrêmement petit, en sorte que le sphéroïde soit un solide de révolution très peu différent de la sphère. Supposons ensuite que, dans l'état d'équilibre, la profondeur Nn du fluide soit $l\gamma$, l étant pareillement extrêmement petit et γ étant fonction de θ seul; le rayon CN était conséquemment, dans l'état d'équilibre, $1 + q\lambda + l\gamma$; nous nous permettrons dans la suite de négliger les quantités multipliées

par q ou par l , eu égard à celles du même genre qui ont un coefficient fini; de plus, comme n^2 représente à très peu près la force centrifuge à l'équateur du sphéroïde, nous supposons cette quantité très petite, en sorte que, si l'on nomme g la pesanteur à l'équateur, n^2 sera du même ordre que gq ou gl . Cela posé, il est clair que, pour les points du fluide contigus au sphéroïde, r est très petit par rapport à u et à v ; car, s étant pour tous ces points égal à $1 + q\lambda$, s se change en $1 + q\lambda + \alpha q u \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$, lorsque θ se change en $\theta + \alpha u$; donc alors

$$r = qu \frac{\partial \lambda}{\partial \theta},$$

en sorte que r est du même ordre que qu , et l'on peut conséquemment négliger r vis-à-vis de u . Voyons maintenant si cette supposition est permise pour tous les autres points du fluide, et si en l'admettant nous pouvons satisfaire, non seulement aux équations précédentes, mais encore aux conditions primitives du mouvement du fluide; car, si nous trouvons qu'elle y satisfait, non seulement elle sera permise, mais elle sera encore nécessaire, ainsi que les résultats auxquels elle pourra nous conduire, attendu que le fluide, en partant du même état et étant soumis aux mêmes forces accélératrices, n'a pas deux manières possibles de se mouvoir.

L'équation (2) prend, en vertu de cette supposition, la forme suivante :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha s^2 \partial \theta \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \frac{dv}{dt} \sin \theta \cos \theta \right) \\ & + \alpha s^2 \partial \varpi \left(\sin^2 \theta \frac{d^2 v}{dt^2} + 2n \sin \theta \cos \theta \frac{du}{dt} \right) \\ & - 2\alpha ns \partial s \sin^2 \theta \frac{dv}{dt} - \frac{n^2}{2} \partial [(s + \alpha r) \sin(\theta + \alpha u)]^2 \\ & = -F \partial f - F' \partial f' - \dots - \frac{\partial p}{\Delta}. \end{aligned} \right.$$

Toutes les forces accélératrices dont le fluide est animé se réduisent aux attractions de toutes les parties du fluide, du sphéroïde et des différents astres que l'on suppose circuler autour de la planète; en sorte

que, dans la question présente, F est fonction de f , F' est fonction de f' , et ainsi de suite; le second membre de l'équation précédente est, par conséquent, une différentielle exacte; le premier membre doit donc l'être pareillement, le temps t étant regardé comme constant. Partant, la quantité

$$s^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \frac{dv}{dt} \sin \theta \cos \theta \right) + s^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin^2 \theta \frac{d^2 v}{dt^2} + 2n \sin \theta \cos \theta \frac{du}{dt} \right) - 2ns \sin^2 \theta \frac{dv}{dt}$$

est elle-même une différence exacte, ce qui produit les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \sin \theta \cos \theta \frac{dv}{dt} \right)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(\sin^2 \theta \frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{du}{dt} \right)}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \left(s^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - 2ns^2 \sin \theta \cos \theta \frac{dv}{dt} \right)}{\partial s} = -2ns \frac{\partial \left(\sin^2 \theta \frac{dv}{dt} \right)}{\partial \theta}.$$

En intégrant ces équations par rapport à t , et observant que, à l'origine du mouvement, on a

$$u = 0, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad v = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = 0,$$

on aura

$$(4) \quad \frac{\partial \left(\frac{du}{dt} - 2nv \sin \theta \cos \theta \right)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(\sin^2 \theta \frac{dv}{dt} + 2nu \sin \theta \cos \theta \right)}{\partial \theta},$$

$$(5) \quad \frac{\partial \left(s^2 \frac{du}{dt} - 2ns^2 v \sin \theta \cos \theta \right)}{\partial s} = -2ns \frac{\partial (v \sin^2 \theta)}{\partial \theta},$$

et ces deux équations tiendront lieu de l'équation (3), parce que, p étant indéterminé, si ces équations sont satisfaites, on pourra déterminer p de manière que l'équation (3) soit pareillement satisfaite; mais, p disparaissant, comme on l'a vu, de l'équation à la surface supérieure, il faut, pour les points de cette surface, non seulement que les

équations (4) et (5) soient satisfaites, mais que l'équation (3) le soit encore, en y supposant $\partial p = 0$; voyons ce que devient alors cette équation.

V.

Soit G l'attraction du sphéroïde et du fluide à l'origine du mouvement sur un point m de la surface, pour lequel l'angle mCa était égal à $\theta + \alpha u$, le rayon Cm égal à $1 + q\lambda + l\gamma + \alpha qu \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \alpha lu \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}$, et la longitude égale à $\varphi + \alpha t + \alpha v$; soit encore ξ la droite suivant laquelle agit cette attraction; cette droite coïncide avec le rayon Cm , aux quantités près de l'ordre q , en sorte que si l'on fait, pour abréger, $Cm = s'$, on pourra supposer

$$\partial \xi = \partial s' + q \partial N,$$

N étant fonction de θ ; maintenant, dans l'équation (3), on a pour le cas de l'équilibre

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = 0;$$

de plus, comme il s'agit d'un point placé à la surface, il y faut supposer $\partial p = 0$; si donc l'on observe que dans ce cas $s + \alpha r = s'$ et que la somme des termes $F \partial f + F' \partial f' + \dots$ est égale à l'attraction du sphéroïde et du fluide multipliée par l'élément de sa direction et, par conséquent, égale à $G(\partial s' + q \partial N)$, on aura

$$\frac{n^2}{3} \partial [s' \sin(\theta + \alpha u)]^3 = G(\partial s' + q \partial N).$$

Lorsque le point N arrive pendant l'oscillation sur le rayon Cm , il ne se trouve point à la distance s' du centre C , mais à la distance $s + \alpha r$; la différence est $s + \alpha r - s'$ ou $\alpha \left(r - qu \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - lu \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right)$; soit

$$r - qu \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - lu \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = y;$$

en sorte que zy exprime la hauteur du point N du fluide au-dessus

de la surface d'équilibre, que nous regarderons comme le véritable niveau du fluide; l'attraction du sphéroïde et du fluide tels qu'ils étaient à l'origine du mouvement, sur le point N, ne diffère de G que d'une quantité de l'ordre xy . Soit $G + \alpha y H$ cette attraction; elle n'agit plus, comme précédemment, suivant la droite ζ , mais suivant une nouvelle droite ζ' , dont la direction coïnciderait avec celle du rayon Cm , si l'on avait $l = 0$ et $q = 0$, et qui serait égale à ζ , si l'on avait $xy = 0$; on peut donc supposer

$$\partial \zeta' = \partial s' + \alpha \partial y + q \partial N + \alpha q y \partial N';$$

l'attraction du fluide et du sphéroïde, tels qu'ils étaient à l'origine, sur le point N, placé à la distance $s + \alpha r$ du centre C, cette attraction, dis-je, multipliée par l'élément de sa direction, est conséquemment égale à $(G + \alpha y H)(\partial s' + \alpha \partial y + q \partial N + \alpha q y \partial N')$; donc, si l'on néglige les quantités des ordres xyq , $\alpha n^2 r$, $\alpha n^2 q u$ et si l'on observe en même temps que $\partial s'$ est de l'ordre $q \partial \theta$, et que G est, aux quantités près de l'ordre q , égal à la pesanteur g , on aura

$$(G + \alpha y H) \partial \zeta' - \frac{n^2}{2} \partial [(s + \alpha r) \sin(\theta + \alpha u)]^2 = \alpha g \partial y.$$

Après le temps t , le fluide n'a plus la même figure qu'à l'origine du mouvement, et l'attraction de la masse du fluide est visiblement égale à ce qu'elle était à l'origine, plus à l'attraction de la différence de deux sphéroïdes de même densité que le fluide, dont l'un aurait s' et l'autre $s + \alpha y$ pour rayon; cette attraction est, aux quantités près de l'ordre xyq , la même que la différence des attractions d'une sphère de même densité que le fluide, et dont le rayon est 1 , et d'un sphéroïde de pareille densité, et dont le rayon est $1 + \alpha y$; soit donc zyA cette différence d'attractions et ε la droite suivant laquelle elle agit; on aura pour l'attraction du sphéroïde et du fluide, après le temps t , multipliée par l'élément de sa direction,

$$(G + \alpha y H) \partial \zeta' + \alpha y A \partial \varepsilon.$$

Considérons maintenant un astre quelconque S, dont la distance au centre C soit h , et la distance au point N soit f , f étant fonction de $s + \alpha r$, $\theta + \alpha u$, $\sigma + \alpha t + v$, et des quantités qui déterminent la position de l'astre S; on aura $\frac{S}{f^2}$ pour l'action de cet astre sur le point N; en multipliant cette force par l'élément ∂f de sa direction, on aura $-S \partial \frac{1}{f}$ pour produit. Comme nous ne nous proposons pas ici de déterminer les oscillations absolues du fluide dans l'espace, mais ses oscillations sur le sphéroïde, nous supposons le centre C immobile; il faut conséquemment transporter en sens contraire au point N l'action de S sur C; pour cela, concevons que l'action à transporter soit celle de S sur un point R, éloigné du centre C de la distance $CR = a$; cette action, multipliée par l'élément de sa direction, sera $-S \partial \frac{1}{f}$, f étant ce que devient f lorsqu'on y change $s + \alpha r$ en a ; or l'action de S sur R, transportée au point N, est la même que l'action d'un second astre S', égal en tout au premier, et situé, par rapport à N, de la même manière que S l'est par rapport à R; en prenant donc C', tel que $C'N = CR$, C' pourra être considéré comme le centre des angles différentiels $\partial \theta$ et $\partial \sigma$, dans la différence $\partial \frac{1}{f}$; mais, si l'on transporte le centre de ces angles au point C, il est clair qu'il faut alors changer, dans $\partial \frac{1}{f}$, $\partial \theta$ en $\frac{(s + \alpha r) \partial \theta}{a}$, $\partial \sigma$ en $\frac{(s + \alpha r) \partial \sigma}{a}$ et ∂a en $\partial s + \alpha \frac{\partial r}{\partial s} \partial s$. Soit $(\partial \frac{1}{f})$ ce que devient alors $\partial \frac{1}{f}$; si l'on fait ensuite dans cette quantité $a = 0$, on aura $S(\partial \frac{1}{f})$ pour l'attraction de S sur C, transportée en sens contraire au point N, et multipliée par l'élément de sa direction; l'attraction de l'astre S produit donc, en vertu de la supposition du centre C immobile, les deux termes $+S \partial \frac{1}{f} - S(\partial \frac{1}{f})$, dans le second membre de l'équation (3).

Nous observons ici que, par la même raison pour laquelle nous avons transporté en sens contraire au point N l'action de S sur le centre C, on doit également transporter en sens contraire à ce même point l'at-

traction sur le point C d'un sphéroïde dont la densité est δ et le rayon $1 + zy$, moins l'attraction d'une sphère de même densité, et dont le rayon est 1, et comme cette dernière attraction est évidemment nulle, il suffit de transporter en sens contraire au point N l'action du sphéroïde précédent sur le point C; mais il est aisé de s'assurer *a priori* que cette action doit être nulle; car c'est un théorème connu et facile à démontrer, que si un nombre indéfini de corpuscules très voisins les uns des autres sont attirés par un astre éloigné, le centre de gravité du système de ces corpuscules est attiré de la même manière que s'ils étaient tous réunis à leur centre commun de gravité; on sait d'ailleurs que la position de ce centre ne change point par l'action mutuelle des corpuscules les uns sur les autres; en rapprochant ces deux théorèmes, il est aisé d'en conclure que le point C étant, à l'origine du mouvement, le centre de gravité du fluide et du sphéroïde qu'il recouvre, si on lui transporte à chaque instant en sens contraire l'action qu'il éprouve de la part de l'astre S que nous supposons ici à une distance considérable de la planète, ce point restera immobile et sera toujours le lien du centre de gravité du fluide et du sphéroïde; d'où il résulte que l'action du fluide sur ce point sera toujours nulle. On pourra d'ailleurs s'en assurer *a posteriori*, lorsque nous aurons déterminé la valeur de y . Nous négligeons encore l'attraction du fluide sur le sphéroïde qu'il recouvre et la pression qu'il exerce lorsqu'il est dérangé de son état d'équilibre. Ces deux forces doivent produire de petits changements dans la position de l'axe de rotation du sphéroïde et dans le mouvement même de rotation, ce qui peut influer sur les valeurs de u , v et y ; mais ces changements sont de l'ordre zyq , puisqu'ils seraient nuls si l'on avait $y = 0$ ou si le sphéroïde était une sphère; nous pouvons donc ici nous permettre de les négliger. Au reste, le calcul de ces altérations est très intéressant, puisqu'elles peuvent influer sur la nutation de l'axe de la Terre et sur la précession des équinoxes; nous le donnerons dans la suite de ces recherches.

Si l'on suppose maintenant dans l'équation (3) $\delta p = 0$, et que l'on considère qu'à la surface δs est de l'ordre $q\delta\theta$, et que l'on peut sup-

poser $s = 1$, on aura pour tous les points de cette surface

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha \delta \theta \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \frac{dv}{dt} \sin \theta \cos \theta \right) + \alpha \delta \omega \left(\sin^2 \theta \frac{d^2 v}{dt^2} + 2n \frac{du}{dt} \sin \theta \cos \theta \right) \\ = -\alpha g \delta y - \alpha y A \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \delta \omega \right) + S \left(\delta \frac{1}{f} - \delta \frac{1}{f'} \right). \end{cases}$$

Soient présentement v l'angle SCa , et φ la longitude de l'astre S; la différence des longitudes de l'astre et du point N sera donc $\varphi - \alpha - nt - \alpha v$; nommons ψ cette différence; cela posé, la distance perpendiculaire de l'astre au plan de l'équateur est $h \cos v$; sa distance à l'axe Ca est $h \sin v$; donc sa distance au méridien qui passe par le point N est $h \sin v \sin \psi$, et sa distance au plan qui, passant par le centre C, est perpendiculaire à l'équateur et au méridien du point N, est $h \sin v \cos \psi$; on aura les distances respectives du point N à ces mêmes plans, en changeant dans les quantités précédentes v en $\theta + \alpha u$, h en $s + \alpha r$, et en y supposant $\psi = 0$; on aura donc

$$f^2 = [h \cos v - (s + \alpha r) \cos(\theta + \alpha u)]^2 + h^2 \sin^2 v \sin^2 \psi \\ + [h \sin v \cos \psi - (s + \alpha r) \sin(\theta + \alpha u)]^2;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{h} \left\{ 1 + \frac{(s + \alpha r)}{h} [\cos v \cos(\theta + \alpha u) + \sin(\theta + \alpha u) \sin v \cos \psi] - \frac{(s + \alpha r)^2}{2h^2} \right. \\ \left. + \frac{3(s + \alpha r)^2}{2h^2} [\cos v \cos(\theta + \alpha u) + \sin(\theta + \alpha u) \sin v \cos \psi]^2 + \dots \right\};$$

si l'on change, dans cette expression de $\frac{1}{f}$, $s + \alpha r$ en a , on aura $\frac{1}{f'}$; donc, si l'on suppose h très grand, que l'on fasse

$$\frac{3S}{2h^2} = \alpha K,$$

et que l'on observe qu'à la surface δs est de l'ordre $q\delta\theta$, et que s est à très peu près égal à 1, on aura

$$S \left(\delta \frac{1}{f} - \delta \frac{1}{f'} \right) = \alpha K \delta [\cos \theta \cos v + \sin \theta \sin v \cos(\varphi - nt - \omega)]^2.$$

Il est aisé de voir que $-xy\Lambda \frac{\partial z}{\partial \theta}$ est l'attraction perpendiculaire à CN dans le plan du méridien, d'un sphéroïde dont le rayon est $1+xy$, et dont la densité est Δ , et que $-\frac{xy\Lambda}{\sin \theta} \frac{\partial z}{\partial \omega}$ est l'attraction du même sphéroïde, perpendiculairement au plan NCa, ou dans le sens du parallèle; nommant donc $\alpha B\Delta$ la première de ces attractions, et $\alpha C\Delta$ la seconde, on aura

$$-xy\Lambda \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \omega} d\omega \right) = \alpha B\Delta d\theta + \alpha C\Delta d\omega \sin \theta.$$

Les quantités B et C ont entre elles un rapport remarquable et qui nous sera utile dans la suite; nommons f la distance d'une molécule quelconque infiniment petite du sphéroïde que nous venons de considérer au point N; soit m la masse de cette molécule; son attraction sur le point N, perpendiculairement à CN dans le plan du méridien NCa, est

$$-\frac{m}{s+\alpha r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right),$$

et son attraction perpendiculairement au plan NCa est

$$-\frac{m}{(s+\alpha r) \sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \right);$$

soit b la première de ces attractions et c la seconde, on aura

$$\frac{\partial b}{\partial \omega} = \frac{\partial c \sin \theta}{\partial \theta};$$

cette équation ayant lieu, quelle que soit la position de la molécule m , il est clair que la même relation doit exister encore entre les deux attractions du sphéroïde entier, en sorte que l'on a

$$\frac{\partial B}{\partial \omega} = \frac{\partial C \sin \theta}{\partial \theta}.$$

En faisant les substitutions précédentes dans l'équation (γ), elle se

changera dans la suivante :

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \partial \theta \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \frac{dv}{dt} \sin \theta \cos \theta \right) + \partial \omega \left(\sin^2 \theta \frac{d^2 v}{dt^2} + 2n \frac{du}{dt} \sin \theta \cos \theta \right) \\ = -g \frac{\partial y}{\partial \theta} \partial \theta - g \frac{\partial y}{\partial \omega} \partial \omega + B \Delta \partial \theta + C \Delta \partial \omega \sin \theta \\ + K \partial \theta \left[\sin 2 \theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2nt - 2\omega) \right) \right. \\ \quad \left. + 2 \cos 2 \theta \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - nt - \omega) \right] \\ + K \partial \omega \sin \nu \cos \nu \sin 2 \theta \sin(\varphi - nt - \omega) \\ + K \partial \omega \sin^2 \nu \sin^2 \theta \sin(2\varphi - 2nt - 2\omega). \end{cases}$$

VI.

Reprenons l'équation (1) de l'article II; si l'on ne fait varier s que de la profondeur du fluide, cette profondeur étant supposée fort petite, on peut, en intégrant cette équation, considérer dans toute l'étendue de l'intégrale les quantités s et $s^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$ comme constantes et comme étant les mêmes qu'à la surface du fluide, ce qui donne, en intégrant l'équation depuis la surface du sphéroïde jusqu'à celle du fluide,

$$s^2 r + s^2 l \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - s^2 (r) = 0,$$

(r) étant ce que devient r à la surface du sphéroïde; or on a (r) = $qu \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$, donc

$$r = -l \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + qu \frac{\partial \lambda}{\partial \theta};$$

partant, y étant égal à $r - qu \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - lu \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}$, on a

$$(6) \quad y = -l \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lu \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}.$$

Rapprochons maintenant toutes les équations auxquelles nous devons satisfaire; nous aurons d'abord l'équation (6); de plus, comme dans l'équation (γ), les différentielles $\partial \omega$ et $\partial \theta$ sont entièrement indépen-

dantes, elle donnera les suivantes

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \frac{dv}{dt} \sin \theta \cos \theta \\ = -g \frac{\partial v}{\partial \theta} + B \Delta \\ + K \left\{ \sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v + \frac{1}{2} \sin^2 v \cos(2\varphi - 2nt - 2\omega) \right] \right. \\ \left. + 2 \cos 2\theta \sin v \cos v \cos(\varphi - nt - \omega) \right\} \end{cases}$$

ou, en substituant au lieu de y sa valeur,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \frac{dv}{dt} \sin \theta \cos \theta \\ = l_g \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2 l_g \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + l_g u \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} + l_g \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\ + l_g \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + l_g \gamma \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + l_g \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \frac{u \cos \theta}{\sin \theta} + B \Delta \\ + K \left\{ \sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v + \frac{1}{2} \sin^2 v \cos(2\varphi - 2nt - 2\omega) \right] \right. \\ \left. + 2 \cos 2\theta \sin v \cos v \cos(\varphi - nt - \omega) \right\}, \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 v}{dt^2} \sin^2 \theta + 2n \frac{du}{dt} \sin \theta \cos \theta = -g \frac{\partial v}{\partial \omega} + C \Delta \sin \theta \\ + K \sin v \cos v \sin 2\theta \sin(\varphi - nt - \omega) \\ + K \sin^2 v \sin^2 \theta \sin(2\varphi - 2nt - 2\omega); \end{cases}$$

ou, en substituant au lieu de y sa valeur,

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 v}{dt^2} \sin^2 \theta + 2n \frac{du}{dt} \sin \theta \cos \theta \\ = l_g \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \omega^2} + l_g \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial \theta} + l_g \gamma \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \omega} + l_g \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \omega} + C \Delta \sin \theta \\ + K \sin v \cos v \sin 2\theta \sin(\varphi - nt - \omega) \\ + K \sin^2 v \sin^2 \theta \sin(2\varphi - 2nt - 2\omega). \end{cases}$$

Il faut ensuite satisfaire pour tous les points du fluide aux deux équations

$$(4) \quad \frac{\partial \left(\frac{du}{dt} - 2nv \sin \theta \cos \theta \right)}{\partial \omega} = \frac{\partial \left(\sin^2 \theta \frac{dv}{dt} + 2nu \sin \theta \cos \theta \right)}{\partial \theta},$$

et

$$(5) \quad \frac{\partial \left(s^2 \frac{du}{dt} - 2ns^2 v \sin \theta \cos \theta \right)}{\partial \theta} = -2ns \frac{\partial v \sin^2 \theta}{\partial \theta}.$$

Il faut enfin satisfaire à ces conditions : que l'on ait à l'origine du mouvement $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$, $v = 0$ et $\frac{dv}{dt} = 0$.

VII.

Supposons d'abord que la planète et le fluide n'ont aucun mouvement de rotation et que, à l'origine du mouvement, leurs figures ont été sphériques; il faut faire alors dans les équations précédentes $n = 0$ et $\gamma = 1$, ce qui réduit les équations (6), (8) et (10) aux suivantes :

$$(11) \quad y = -l \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right),$$

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = l_g \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + l_g \frac{\partial^2 v}{\partial \omega \partial \theta} + l_g \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ + B \Delta + K \sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v + \frac{1}{2} \sin^2 v \cos(2\varphi - 2\omega) \right] \\ + 2K \cos 2\theta \sin v \cos v \cos(\varphi - \omega), \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d^2 v}{dt^2} \sin^2 \theta = l_g \frac{\partial^2 v}{\partial \omega^2} + l_g \frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial \theta} + l_g \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \omega} \\ + C \Delta \sin \theta + K \sin v \cos v \sin 2\theta \sin(\varphi - \omega) \\ + K \sin^2 v \sin^2 \theta \sin(2\varphi - 2\omega); \end{cases}$$

l'équation (4) donne, en y faisant $n = 0$ et en l'intégrant par rapport à t ,

$$(14) \quad \frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial v \sin^2 \theta}{\partial \theta},$$

et l'équation (5) donne

$$(15) \quad \frac{\partial s^2 u}{\partial s} = 0.$$

Supposons d'abord le fluide infiniment rare, ou $\Delta = 0$, et cherchons

les valeurs de u et de v qui peuvent satisfaire à ces équations; en considérant l'équation (12), il est assez naturel de croire que l'expression de u peut avoir la forme suivante

$$u = x \sin 2\theta + z \cos 2\theta;$$

x et z étant fonctions de ϖ et de t , sans θ , voyons conséquemment si cette supposition peut se soutenir et quelles sont les valeurs de u et de v qui en résultent.

En substituant la valeur précédente de u dans l'équation (14), on aura

$$\frac{\partial \cdot v \sin^2 \theta}{\partial \theta} = \sin 2\theta \frac{\partial x}{\partial \varpi} + \cos 2\theta \frac{\partial z}{\partial \varpi};$$

d'où l'on tire, en intégrant par rapport à θ ,

$$v \sin^2 \theta = -\frac{1}{2} \cos 2\theta \frac{\partial x}{\partial \varpi} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial z}{\partial \varpi} + H,$$

H étant une constante qui sera fonction de ϖ et de t , sans θ ; donc

$$v = \frac{\sin 2\theta}{2 \sin^2 \theta} \frac{\partial z}{\partial \varpi} - \frac{\cos 2\theta}{2 \sin^2 \theta} \frac{\partial x}{\partial \varpi} + \frac{H}{\sin^2 \theta}.$$

On peut mettre cette expression de v sous une forme un peu plus simple, en considérant que l'on a

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad 1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta,$$

et que l'on peut supposer

$$H = \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial \varpi} + H'.$$

H' ne renfermant point θ ; on aura ainsi

$$v = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial z}{\partial \varpi} + \frac{\partial x}{\partial \varpi} + \frac{H'}{\sin^2 \theta}.$$

Substituant maintenant ces valeurs de u et de v dans l'équation (12),

elle deviendra

$$\begin{aligned} \sin 2\theta \frac{d^2 x}{dt^2} + \cos 2\theta \frac{d^2 z}{dt^2} = & -6lgx \sin 2\theta - 4lgz \cos 2\theta + lg \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} \frac{\partial \cos \theta}{\sin \theta} \\ & + lgz \frac{\partial \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\cos 2\theta}{\partial \theta} - 2lg \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial H'}{\partial \varpi} \\ & + K \sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2\varpi) \right] \\ & + 2K \cos 2\theta \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - \varpi); \end{aligned}$$

il est aisé de voir que cette équation peut se simplifier par la supposition de $\frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} = -z$, et qu'alors la somme des deux termes

$$lg \frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} \frac{\partial \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{et} \quad lgz \frac{\partial \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos 2\theta \right)}{\partial \theta}$$

se réduit au terme

$$-2lgz \cos 2\theta;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$\begin{aligned} \sin 2\theta \left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} + 6lgx - K \left[\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2\varpi) \right] \right\} \\ + \cos 2\theta \left[\frac{d^2 z}{dt^2} + 6lgz - 2K \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - \varpi) \right] + 2lg \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial H'}{\partial \varpi} = 0; \end{aligned}$$

en égalant séparément à zéro les coefficients de $\sin 2\theta$ et de $\cos 2\theta$, on aura les trois équations suivantes :

$$(16) \quad 0 = \frac{d^2 x}{dt^2} + 6lgx - K \left[\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2\varpi) \right],$$

$$(17) \quad 0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + 6lgz - 2K \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - \varpi),$$

$$(18) \quad 0 = \frac{\partial H'}{\partial \varpi}.$$

Voyons maintenant si ces mêmes équations satisfont à l'équation (13). En y substituant, au lieu de u et de v , leurs valeurs et

supposant comme ci-dessus $\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} = -z$, elle devient

$$\begin{aligned} \sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \omega \partial t^2} + 3 l g \frac{\partial z}{\partial \omega} - K \sin \nu \cos \nu \sin(\varphi - \omega) \right] \\ + \sin^2 \theta \left[\frac{\partial^3 x}{\partial \omega \partial t^3} - \frac{l g}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} - 2 l g \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right. \\ \left. - 2 l g \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial x}{\partial \omega} - K \sin^2 \nu \sin(2\varphi - 2\omega) \right] \\ + \frac{d^2 H'}{dt^2} - \frac{l g}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 H'}{d\omega^2} = 0; \end{aligned}$$

en égalant à zéro le coefficient de $\sin 2\theta$, on aura

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega \partial t^2} + 6 l g \frac{\partial z}{\partial \omega} - 2 K \sin \nu \cos \nu \sin(\varphi - \omega) = 0,$$

équation qui résulte de l'équation (17), en la différentiant par rapport à ω ; si l'on égale pareillement à zéro le coefficient de $\sin^2 \theta$, on aura, en observant que $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$,

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \omega \partial t^3} - \frac{l g}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^3 x}{\partial \omega^3} + 4 \frac{\partial x}{\partial \omega} \right) + 6 l g \frac{\partial x}{\partial \omega} - K \sin^2 \nu \sin(2\varphi - 2\omega) = 0.$$

Si l'on suppose

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \omega^3} = -4 \frac{\partial x}{\partial \omega},$$

l'équation précédente donnera

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \omega \partial t^3} + 6 l g \frac{\partial x}{\partial \omega} - K \sin^2 \nu \sin(2\varphi - 2\omega) = 0;$$

or cette équation résulte de l'équation (16), en la différentiant par rapport à ω ; on aura enfin

$$0 = \frac{d^2 H'}{dt^2} + \frac{l g}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 H'}{d\omega^2};$$

or, on satisfera à cette équation et à l'équation (18) en supposant $H' = 0$.

VIII.

Reprenons les équations

$$(16) \quad 0 = \frac{d^2 x}{dt^2} + 6 l g x - K \left[\frac{1}{4} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{4} \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2\omega) \right],$$

$$(17) \quad 0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + 6 l g z - 2 K \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - \omega);$$

leurs intégrales renferment chacune deux constantes arbitraires, au moyen desquelles on peut remplir les conditions de

$$u = 0, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0,$$

à l'origine du mouvement; car il est aisé de voir, par ce qui précède, que ces conditions seront remplies si l'on a, à cette origine,

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dt} = 0;$$

mais, comme nous ne sommes arrivés aux équations (16) et (17) qu'en supposant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} = -z \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} = -4 \frac{\partial x}{\partial \omega},$$

il faut, avant que de les admettre, s'assurer si ces nouvelles équations sont compatibles avec elles: pour cela, différencions deux fois de suite l'équation (17) par rapport à ω ; en faisant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} = -z',$$

nous aurons l'équation suivante

$$0 = \frac{d^2 z'}{dt^2} + 6 l g z' - 2 K \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - \omega).$$

Cette équation est précisément la même que l'équation (17); de plus, les deux constantes arbitraires de son intégrale sont encore les

mêmes que celles de l'équation (17), car puisque, à l'origine du mouvement, on a

$$z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

on aura pareillement à cette origine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0$$

et

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \sigma^2 \partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz'}{dt} = 0;$$

donc, les constantes arbitraires de l'équation en z' sont déterminées par les mêmes conditions que celles de l'équation en z ; partant,

$$z = z' \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} = -z.$$

Pareillement, si l'on différencie l'équation (16) une fois par rapport à σ , et que l'on fasse

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = x',$$

on aura

$$0 = \frac{d^3 x'}{dt^3} + 6lgx' - K \sin^2 \nu \sin(2\varphi - 2\sigma);$$

si l'on différencie cette dernière équation deux fois de suite par rapport à σ , et que l'on fasse

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial \sigma^2} = -4x'',$$

on aura

$$0 = \frac{d^5 x''}{dt^5} + 6lgx'' - K \sin^2 \nu \sin(2\varphi - 2\sigma);$$

cette équation est la même que l'équation en x' ; de plus, les constantes arbitraires sont les mêmes, puisque, ayant à l'origine du mouvement

$$x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

on a à cette même origine

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{ou} \quad x' = 0,$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \sigma \partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx'}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \sigma^2} = 0 \quad \text{ou} \quad x'' = 0$$

et

$$\frac{\partial^4 x}{\partial \sigma^3 \partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx''}{dt} = 0;$$

on a donc

$$x' = x'';$$

partant,

$$\frac{\partial^3 x'}{\partial \sigma^2} = -4x' \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^3 x'}{\partial \sigma^2} = -4 \frac{\partial x}{\partial \sigma}.$$

Il résulte de là que les valeurs de u et de v ont été bien choisies, puisqu'elles satisfont aux équations (12), (13) et (14) et aux conditions primitives du mouvement; rassemblant donc les expressions précédentes, nous aurons

$$u = x \sin 2\theta + z \cos 2\theta,$$

$$v = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial z}{\partial \sigma} + \frac{\partial x}{\partial \sigma};$$

l'équation (11) donnera

$$y = l \left(3z \sin 2\theta - 3x \cos 2\theta - x - \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma^2} \right),$$

et l'on déterminera x et z au moyen des deux équations

$$(16) \quad 0 = \frac{d^3 x}{dt^3} + 6lgx - K \left[\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2\sigma) \right],$$

$$(17) \quad 0 = \frac{d^3 z}{dt^3} + 6lgz - 2K \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - \sigma).$$

Les équations précédentes servent à déterminer le mouvement du fluide à la surface; on aura celui de tous les points intérieurs, en considérant que l'équation (15) donne, en l'intégrant, $s^2 u$ égal à une fonction indépendante de s ; donc, s étant toujours très peu différent de l'unité, l'expression de u sera la même pour tous les points originaire-

ment situés sur le même rayon CN. Il est facile de conclure pareillement de l'équation (14) que la valeur de v est la même pour tous ces points; enfin l'équation (1) donne, en l'intégrant et en considérant que la profondeur du fluide est toujours fort petite,

$$r = -\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + q u \frac{\partial h}{\partial \theta},$$

σ étant la distance primitive du point du fluide que l'on considère à la surface du sphéroïde; la détermination du mouvement de tous les points du fluide se trouve ainsi réduite à l'intégration des équations (16) et (17); or la loi du mouvement de l'astre étant supposée connue, on aura h , v et φ en fonctions du temps t ; ainsi on pourra intégrer ces équations par les méthodes connues.

IX.

Nous avons supposé dans les articles précédents, la densité Δ du fluide égale à zéro, et cela nous était nécessaire pour connaître la figure qu'il peut prendre; supposons maintenant Δ quelconque; pour intégrer dans cette supposition les équations (12) et (13) de l'article VII, il est nécessaire de connaître $B\Delta$ et $C\Delta$; nous avons vu (art. V) que $\alpha B\Delta$ est l'attraction horizontale dans le sens du méridien d'un sphéroïde dont la densité est Δ , et le rayon $1 + \alpha y$, et que $\alpha C\Delta$ est l'attraction horizontale du même sphéroïde dans le sens du parallèle; or j'ai fait voir ci-dessus (voir les recherches précédentes *Sur la loi de la pesanteur à la surface des sphéroïdes homogènes*) ⁽¹⁾ que l'on a

$$\alpha B\Delta = -\alpha \Delta \int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \frac{\cos q}{\sin q} y' dp dq$$

et

$$\alpha C\Delta = \alpha \Delta \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos p}{\sin q} y' dp dq,$$

où l'on doit observer : 1° que y' est pareille fonction de θ' et de ϖ' ,

⁽¹⁾ Page 78.

que y' l'est de θ et de ϖ ; 2° que l'on a

$$\cos \theta' = \cos \theta + 2 \sin^2 p \sin q \sin(\theta - q) = \cos \theta \cos^2 p + \sin^2 p \cos(\theta - 2q)$$

et

$$\sin(\varpi' - \varpi) = \frac{2 \sin p \cos p \sin q}{\sin^2 \theta'};$$

3° enfin que les doubles intégrales précédentes doivent être prises depuis p et q égaux à zéro jusqu'à p et q égaux à π , et qu'ainsi l'on peut rejeter les termes de la forme $P \cos p dq dp$, P ne renfermant que des puissances paires de $\cos p$. Concevons, cela posé, que l'on ait, comme précédemment,

$$y = t \left(3z \sin 2\theta - 3x \cos 2\theta - x + \frac{\partial^2 x}{\partial \varpi^2} \right),$$

$$u = x \sin 2\theta + z \cos 2\theta$$

et

$$v = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial z}{\partial \varpi} + \frac{\partial x}{\partial \varpi};$$

x et z étant des fonctions de t et de ϖ sans θ , telles que l'on ait

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varpi^2} + z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \varpi^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial \varpi} = 0;$$

en intégrant ces deux dernières équations, on aura

$$z = a \sin(\varphi - \varpi) + b \cos(\varphi - \varpi)$$

et

$$x = c + a' \sin(2\varphi - 2\varpi) + b' \cos(2\varphi - 2\varpi);$$

a , b , c , a' , b' étant des fonctions de t sans ϖ ni θ ; en substituant ces valeurs de z et de x dans l'expression de y , on aura

$$y = 2tc(1 - 3 \cos^2 \theta) + 6t \sin \theta \cos \theta [a \sin(\varphi - \varpi) + b \cos(\varphi - \varpi)] \\ + 6t \sin^2 \theta [a' \sin(2\varphi - 2\varpi) + b' \cos(2\varphi - 2\varpi)].$$

Supposons, pour plus de généralité,

$$y = t(3 \cos^2 \theta - 1) \\ + [a \sin(\varphi - \varpi) + b \cos(\varphi - \varpi)] \sin \theta \cos \theta (f^{(1)} \sin^2 \theta + f^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + f^{(r)} \sin^{2r} \theta) \\ + [a' \sin(2\varphi - 2\varpi) + b' \cos(2\varphi - 2\varpi)] \sin^2 \theta (p^{(1)} \sin^2 \theta + p^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + p^{(r)} \sin^{2r} \theta),$$

on aura

$$y' = \varepsilon (3 \cos^2 \theta' - 1) \\ + [a \sin(\varphi - \varpi') + b \cos(\varphi - \varpi')] \sin \theta' \cos \theta' (f + f^{(1)} \sin^2 \theta' + \dots + f^{(r)} \sin^{2r} \theta') \\ + [a' \sin(2\varphi - 2\varpi') + b' \cos(2\varphi - 2\varpi')] \sin^3 \theta' (p + p^{(1)} \sin^2 \theta' + \dots + p^{(r)} \sin^{2r} \theta');$$

maintenant on a

$$\sin(\varphi - \varpi') = \sin(\varphi - \varpi) \cos(\varpi' - \varpi) - \cos(\varphi - \varpi) \sin(\varpi' - \varpi), \\ \cos(\varphi - \varpi') = \cos(\varphi - \varpi) \cos(\varpi' - \varpi) + \sin(\varphi - \varpi) \sin(\varpi' - \varpi), \\ \sin(2\varphi - 2\varpi') = \sin(2\varphi - 2\varpi) \cos(2\varpi' - 2\varpi) - \cos(2\varphi - 2\varpi) \sin(2\varpi' - 2\varpi), \\ \cos(2\varphi - 2\varpi') = \cos(2\varphi - 2\varpi) \cos(2\varpi' - 2\varpi) + \sin(2\varphi - 2\varpi) \sin(2\varpi' - 2\varpi);$$

donc

$$y' = \varepsilon (3 \cos^2 \theta' - 1) \\ + \{ [a \sin(\varphi - \varpi) + b \cos(\varphi - \varpi)] \cos(\varpi' - \varpi) + [b \sin(\varphi - \varpi) - a \cos(\varphi - \varpi)] \sin(\varpi' - \varpi) \} \\ \times \sin \theta' \cos \theta' (f + f^{(1)} \sin^2 \theta' + \dots + f^{(r)} \sin^{2r} \theta') \\ + \{ [a' \sin(2\varphi - 2\varpi) + b' \cos(2\varphi - 2\varpi)] \cos(2\varpi' - 2\varpi) + [b' \sin(2\varphi - 2\varpi) - a' \cos(2\varphi - 2\varpi)] \sin(2\varpi' - 2\varpi) \} \\ \times \sin^3 \theta' (p + p^{(1)} \sin^2 \theta' + \dots + p^{(r)} \sin^{2r} \theta').$$

On tirera facilement, des valeurs de $\cos \theta'$ et de $\sin(\varpi' - \varpi)$,

$$\cos(\varpi' - \varpi) = \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 p \sin q \cos(\theta - q)}{\sin^2 \theta'}, \\ \sin(2\varpi' - 2\varpi) = \frac{4 \sin \theta \sin p \cos^3 p \sin q + 4 \sin^3 p \cos p \sin q \sin(\theta - 2q)}{\sin^2 \theta'}, \\ \cos(2\varpi' - 2\varpi) = \frac{[\sin \theta \cos^3 p + \sin^3 p \sin(\theta - 2q)]^2 - 4 \sin^2 p \cos^2 p \sin^2 q}{\sin^2 \theta'};$$

on aura, cela posé, en négligeant les termes qu'il est permis de négliger d'après la remarque que nous avons faite ci-dessus,

$$C = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos p}{\sin q} y' dp dq \\ = [b \sin(\varphi - \varpi) - a \cos(\varphi - \varpi)] \int_0^\pi \int_0^\pi 2 \sin p \cos^2 p \cos \theta' (f + f^{(1)} \sin^2 \theta' + \dots + f^{(r)} \sin^{2r} \theta') dp dq \\ + [b' \sin(2\varphi - 2\varpi) - a' \cos(2\varphi - 2\varpi)] \int_0^\pi \int_0^\pi 4 \sin p \cos^4 p \sin \theta' (p + p^{(1)} \sin^2 \theta' + \dots + p^{(r)} \sin^{2r} \theta') dp dq \\ + [b' \sin(2\varphi - 2\varpi) - a' \cos(2\varphi - 2\varpi)] \int_0^\pi \int_0^\pi 4 \sin^3 p \cos^2 p \sin(\theta - 2q) (p + p^{(1)} \sin^2 \theta' + \dots + p^{(r)} \sin^{2r} \theta') dp dq;$$

Or on a généralement

$$\int_0^\pi \sin(\theta - 2q) \sin^{2p} \theta' dq \\ = \int_0^\pi \sin(\theta - 2q) \{1 - [\cos \theta \cos^2 p + \sin^2 p \cos(\theta - 2q)]^2\}^p dq = 0;$$

on a, de plus,

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \cos^3 p \cos^{2\mu+1} \theta' dp dq \\ = \int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \cos^3 p [\cos \theta \cos^2 p + \sin^2 p \cos(\theta - 2q)]^{2\mu+1} dp dq;$$

si l'on considère maintenant que

$$\int_0^\pi \cos^i(\theta - 2q) dq = 0$$

lorsque i est impair, que

$$\int_0^\pi \cos^i(\theta - q) dq = \frac{1.3.5 \dots i-1}{2.4.6 \dots i} \pi$$

lorsque i est un nombre pair, et que

$$\int_0^\pi \sin p \cos^{2i} p (1 - \cos^2 p)^i dp = 2 \frac{2.4.6 \dots 2s}{(2i+1)(2i+3)(2i+5) \dots (2i+2s+1)},$$

on trouvera

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \cos^2 p \cos^{2\mu+1} \theta' dp dq \\ = \frac{2\pi}{4\mu+5} \left\{ \begin{aligned} & \cos^{2\mu+1} \theta + \frac{2}{1} \frac{(2\mu+1)2\mu}{(4\mu+3)(4\mu+1)} \cos^{2\mu-1} \theta \\ & + \frac{3.4}{1.2} \frac{(2\mu+1)2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)}{(4\mu+3)(4\mu+1)(4\mu-1)(4\mu-3)} \cos^{2\mu-3} \theta \\ & + \frac{4.5.6}{1.2.3} \frac{(2\mu+1) \dots (2\mu-4)}{(4\mu+3) \dots (4\mu-7)} \cos^{2\mu-5} \theta \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

On aura pareillement

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \cos^2 p \cos^2 \theta' dp d\theta' = \frac{2\pi}{4\mu+5} \left\{ \cos^2 \theta' + \frac{2}{1} \frac{2\mu(2\mu-1)}{(4\mu+3)(4\mu+1)} \cos^2 \theta' + \frac{3.4}{1.2} \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)}{(4\mu+3)(4\mu+1)(4\mu-1)(4\mu-3)} \cos^2 \theta' + \dots \right\}$$

Si l'on substitue présentement, au lieu de $\sin^2 \theta'$, $1 - \cos^2 \theta'$, dans la valeur précédente de C, et que, après avoir intégré, on restitue $1 - \sin^2 \theta$ au lieu de $\cos^2 \theta$, on trouvera pour $C\Delta$ une expression de cette forme

$$C\Delta = [b \sin(\varphi - \omega) - a \cos(\varphi - \omega)] \cos \theta (\lambda + \lambda^{(1)} \sin^2 \theta + \lambda^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + \lambda^{(r)} \sin^{2r} \theta) + [b' \sin(2\varphi - 2\omega) - a' \cos(2\varphi - 2\omega)] \sin \theta (\lambda + \lambda^{(1)} \sin^2 \theta + \lambda^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + \lambda^{(r)} \sin^{2r} \theta),$$

$\lambda, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda, \lambda^{(1)}, \dots$ étant des coefficients constants que l'on déterminera facilement par ce qui précède, et l'on aura

$$\lambda^{(r)} = \frac{4\Delta\pi f^{(r)}}{4r+5} \quad \text{et} \quad \lambda^{(r)} = \frac{8\Delta\pi p^{(r)}}{4r+5};$$

ayant ainsi $C\Delta$, on aura sur-le-champ $B\Delta$, par la remarque de l'article V, car l'équation

$$\frac{\partial B}{\partial \omega} = \frac{\partial C \sin \theta}{\partial \theta},$$

que nous avons trouvée dans cet article, donne

$$B\Delta = \Delta \int_0^\pi \frac{\partial C \sin \theta}{\partial \theta} d\omega + H\Delta,$$

H étant une fonction de θ sans ω ; or B étant, comme on l'a vu, égal à

$$-\int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \frac{\cos q}{\sin q} dp dq, \text{ il est clair que l'on aura}$$

$$H = -\int_0^\pi \int_0^\pi \sin p \frac{\cos q}{\sin q} (3 \cos^2 \theta' - 1) dp dq;$$

d'où l'on tire

$$H = -\frac{1}{2}\pi \sin 2\theta.$$

Dans la question présente, nous avons

$$\varepsilon = +2lc, \quad r = 0, \quad f = 6l \quad \text{et} \quad p = 6l;$$

partant,

$$C\Delta = [b \sin(\varphi - \omega) - a \cos(\varphi - \omega)] \frac{1}{2}\pi \Delta l \cos \theta + [b' \sin(2\varphi - 2\omega) - a' \cos(2\varphi - 2\omega)] \frac{1}{2}\pi \Delta l \sin \theta$$

ou

$$C\Delta = \frac{1}{2}\pi \Delta l \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial \omega} + \sin \theta \frac{\partial x}{\partial \omega} \right);$$

donc

$$\alpha C\Delta = \frac{1}{2}\pi \alpha \Delta l v \sin \theta;$$

on aura pareillement

$$B\Delta = \frac{1}{2}\pi \Delta l c \sin 2\theta + \int_0^\pi \frac{\partial C \sin \theta}{\partial \theta} d\omega;$$

d'où l'on tirera facilement

$$\alpha B\Delta = \frac{1}{2}\pi \alpha \Delta l u;$$

les équations (12) et (13) deviendront ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= l g \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + l g \frac{\partial^2 v}{\partial \omega \partial \theta} + l g \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{u \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{2}\pi \Delta l u \\ &+ K \left[\sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v + \frac{1}{2} \sin^2 v \cos(2\varphi - 2\omega) \right] + 2 \cos 2\theta \sin v \cos v \cos(\varphi - \omega) \right], \\ \frac{d^2 v}{d\theta^2} \sin^2 \theta &= l g \frac{\partial^2 v}{\partial \omega^2} + l g \frac{\partial^2 v}{\partial \omega \partial \theta} + l g \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \omega} \\ &+ \frac{1}{2}\pi \Delta l v \sin^2 \theta + K \sin v \cos v \sin 2\theta \sin(\varphi - \omega) + K \sin^2 v \sin^2 \theta \sin(2\varphi - 2\omega); \end{aligned}$$

en intégrant ces équations par la méthode de l'article VII, on parviendra aux deux suivantes :

$$(19) \quad 0 = \frac{d^2 x}{d\theta^2} + (6lg - \frac{1}{2}\pi \Delta l)x - K \left[\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v + \frac{1}{2} \sin^2 v \cos(2\varphi - 2\omega) \right],$$

$$(20) \quad 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + (6lg - \frac{1}{2}\pi \Delta l)z - 2K \sin v \cos v \cos(\varphi - \omega),$$

équations qui ne diffèrent des équations (16) et (17) qu'en ce que g se

change en $g - \frac{1}{2}\pi\Delta$; d'où l'on voit qu'à cette différence près, lorsque le fluide a une densité quelconque, son mouvement se détermine précisément de la même manière que lorsqu'il est infiniment rare.

X.

Pour donner une application des formules précédentes, supposons que l'astre reste toujours à la même distance du centre C de la planète et sur le même parallèle, mais qu'il tourne autour de la planète avec un mouvement angulaire égal à mt ; K et v seront alors constants, et si, pour plus de simplicité, on prend pour premier méridien celui où l'astre se trouvait à l'origine du mouvement, ou lorsque $t = 0$, on aura $\varphi = mt$; soit de plus

$$6lg - \frac{1}{2}\pi\Delta l = a^2,$$

on aura, en intégrant les équations (19) et (20),

$$x = H \sin at + L \cos at + \frac{K}{a^2} \left(\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v \right) + \frac{K \sin^2 v}{2a^2 - 8m^2} \cos(2mt - 2\varpi),$$

$$z = M \sin at + N \cos at + \frac{2K \sin v \cos v}{a^2 - m^2} \cos(mt - \varpi);$$

H, L, M et N étant des constantes arbitraires qu'il faut déterminer par la supposition de

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

lorsque $t = 0$, ce qui donne les quatre équations suivantes

$$0 = L + \frac{K}{a^2} \left(\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v \right) + \frac{K \sin^2 v}{2a^2 - 8m^2} \cos 2\varpi,$$

$$0 = aH + \frac{mK \sin^2 v}{a^2 - 4m^2} \sin 2\varpi,$$

$$0 = N + \frac{2K \sin v \cos v}{a^2 - m^2} \cos \varpi,$$

$$0 = aM + \frac{2mK \sin v \cos v}{a^2 - m^2} \sin \varpi;$$

on aura ainsi

$$x = \frac{K}{a^2} \left(\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v \right) (1 - \cos at)$$

$$+ \frac{K \sin^2 v}{2a^2 - 8m^2} \left[\cos(2mt - 2\varpi) - \cos 2\varpi \cos at - \frac{2m}{a} \sin 2\varpi \sin at \right]$$

$$z = \frac{2K \sin v \cos v}{a^2 - m^2} \left[\cos(mt - \varpi) - \cos \varpi \cos at - \frac{m}{a} \sin \varpi \sin at \right],$$

ce qui donne

$$u = \frac{K}{a^2} \sin 2\vartheta \left(\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v \right) (1 - \cos at)$$

$$+ \frac{K \sin^2 v}{2a^2 - 8m^2} \sin 2\vartheta \left[\cos(2mt - 2\varpi) - \cos 2\varpi \cos at - \frac{2m}{a} \sin 2\varpi \sin at \right]$$

$$+ \frac{2K \sin v \cos v}{a^2 - m^2} \cos 2\vartheta \left[\cos(mt - \varpi) - \cos \varpi \cos at - \frac{m}{a} \sin \varpi \sin at \right]$$

$$v = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{2K \sin v \cos v}{a^2 - m^2} \left[\sin(mt - \varpi) + \sin \varpi \cos at - \frac{m}{a} \cos \varpi \sin at \right]$$

$$+ \frac{K \sin^2 v}{a^2 - 4m^2} \left[\sin(2mt - 2\varpi) + \sin 2\varpi \cos at - \frac{2m}{a} \cos 2\varpi \sin at \right]$$

$$y = \frac{6lK \sin v \cos v}{a^2 - m^2} \sin 2\vartheta \left[\cos(mt - \varpi) - \cos \varpi \cos at - \frac{m}{a} \sin \varpi \sin at \right]$$

$$+ \frac{3lK \sin^2 v}{a^2 - 4m^2} \sin^2 \vartheta \left[\cos(2mt - 2\varpi) - \cos 2\varpi \cos at - \frac{2m}{a} \sin 2\varpi \sin at \right]$$

$$- \frac{lK}{a^2} \left(\frac{1}{2} \sin^2 v - \cos^2 v \right) (1 + 3 \cos 2\vartheta) (1 - \cos at);$$

telles seraient les valeurs de u , v et y , si la planète n'avait aucun mouvement de rotation.

Si l'on suppose l'astre attirant au-dessus du pôle ou à l'origine de l'angle ϑ , on aura le cas que M. d'Alembert a traité dans ses excellentes *Recherches sur la cause des vents*; dans ce cas, $v = 0$; partant on a

$$u = \frac{K}{a^2} \sin 2\vartheta (\cos at - 1),$$

$$v = 0,$$

$$y = \frac{lK}{a^2} (1 + 3 \cos 2\vartheta) (1 - \cos at).$$

XI.

Le cas que nous venons de considérer serait à peu près celui du Soleil et de la Lune par rapport à la Terre, si cette planète n'avait pas de mouvement de rotation sur son axe; on aurait donc alors, par l'article précédent, les lois des oscillations des eaux de la mer, en la supposant partout de la même profondeur; mais on doit observer que les termes qui, dans ces expressions, sont indépendants de la position actuelle de l'astre attirant, ou, ce qui revient au même, de son aspect par rapport aux différents points du fluide, doivent s'anéantir à la longue en vertu du frottement et de la ténacité des parties fluides; ces termes sont évidemment ceux qui sont multipliés par $\sin \alpha t$ et par $\cos \alpha t$; en les négligeant, on aura

$$\begin{aligned} u &= \frac{K}{a^3} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right) \sin 2\theta \\ &\quad + \frac{K \sin^2 \nu}{2a^3 - 8m^2} \sin 2\theta \cos(2mt - 2\omega) + \frac{2K \sin \nu \cos \nu}{a^3 - m^2} \cos 2\theta \cos(mt - \omega), \\ v &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{2K \sin \nu \cos \nu}{a^3 - m^2} \sin(mt - \omega) + \frac{K \sin^2 \nu}{a^3 - 4m^2} \sin(2mt - 2\omega), \\ y &= \frac{IK}{a^3} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu) (1 + 3 \cos 2\theta) \\ &\quad + \frac{6IK \sin \nu \cos \nu}{a^3 - m^2} \sin 2\theta \cos(mt - \omega) + \frac{3IK \sin^2 \nu}{a^3 - 4m^2} \sin 2\theta \cos(2mt - 2\omega). \end{aligned}$$

On peut parvenir à ces mêmes expressions en supposant que les molécules fluides éprouvent une légère résistance proportionnelle à la vitesse; sur cela, nous observerons que cette supposition, qui semble limitée, a cependant toute la généralité possible; car, toutes les hypothèses de résistance que l'on peut physiquement admettre devant ramener à la longue le fluide à un même état de mouvement, il est indifférent, pour déterminer cet état, d'employer telle ou telle hypothèse de résistance; les résultats seront toujours les mêmes après un long intervalle de temps, et ils ne différeront entre eux que près de l'origine du

mouvement, lorsque le fluide n'est pas encore parvenu à son état de permanence.

La supposition d'une légère résistance, proportionnelle à la vitesse, introduit dans le second membre de l'équation (12) le terme $-\rho \frac{du}{dt}$, et dans le second membre de l'équation (13) le terme $-\rho \frac{dv}{dt} \sin^2 \theta$, ρ étant une très petite quantité constante, dépendante de l'intensité de la résistance; or, en suivant le calcul des articles VII, VIII et IX, il est aisé de voir qu'il ne résulte de changement, par l'introduction de ces nouveaux termes, qu'en ce que les équations (19) et (20) prennent la forme suivante

$$0 = \frac{d^2 x}{dt^2} + \rho \frac{dx}{dt} + a^2 x - K \left[\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cos(2mt - 2\omega) \right],$$

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + \rho \frac{dz}{dt} + a^2 z - 2K \sin \nu \cos \nu \cos(mt - \omega),$$

a^2 étant, comme précédemment, égal à $6lg - \frac{22}{3}\pi \Delta l$. Si l'on intègre ces deux équations, et qu'ensuite on néglige dans les intégrales les quantités périodiques multipliées par ρ , à cause de la petitesse de cette quantité, on aura

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{\rho}{2}t} \left(H \sin t \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}\rho^2} + L \cos t \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}\rho^2} \right) \\ &\quad + \frac{K}{a^3} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right) + \frac{K \sin^2 \nu}{2a^3 - 8m^2} \cos(2mt - 2\omega), \\ z &= e^{-\frac{\rho}{2}t} \left(M \sin t \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}\rho^2} + N \cos t \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}\rho^2} \right) \\ &\quad + \frac{2K \sin \nu \cos \nu}{a^3 - m^2} \cos(mt - \omega), \end{aligned}$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et H, L, M et N étant des constantes arbitraires qui dépendent des valeurs de $x, \frac{dx}{dt}, z$ et $\frac{dz}{dt}$ à l'origine du mouvement; or, quelles que soient ces valeurs, il est clair qu'après un temps considérable $e^{-\frac{\rho}{2}t}$ devient extrê-

mement petit; on pourra donc, après ce temps, supposer

$$x = \frac{K}{a^2} (\frac{1}{2} \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) + \frac{K \sin^2 \gamma}{2a^2 - 8m^2} \cos(2mt - 2\omega),$$

$$z = \frac{2K \sin \gamma \cos \gamma}{a^2 - m^2} \cos(mt - \omega);$$

d'où l'on tire les valeurs précédentes de u , v et y .

Si l'on supposait le globe recouvert d'un nombre n de fluides de densités différentes, et tels que la somme de leurs profondeurs fût très petite relativement au rayon du globe, on parviendrait facilement, en ayant égard aux attractions et aux pressions de ces différents fluides, à des équations différentielles dont on déterminerait les intégrales par la méthode que nous venons d'exposer dans les articles précédents; les valeurs de u , v et y auraient pour chaque fluide une forme analogue à celle que nous avons trouvée, et il n'y aurait de différence qu'en ce que les quantités x et z , relatives à chaque fluide, seraient déterminées par un nombre $2n$ d'équations différentielles du second ordre, dans lesquelles ces variables seraient mêlées les unes avec les autres, les x étant mêlées avec les x et les z avec les z ; mais toutes ces équations sont facilement intégrables par les méthodes connues. Je supprime ici tous les calculs que j'ai faits sur cette matière, parce qu'ils n'ont plus, d'après ce qui précède, d'autre difficulté que leur longueur; cette discussion étant d'ailleurs purement mathématique, je préfère exposer avec étendue une nouvelle méthode qui, par sa simplicité, peut mériter l'attention des géomètres, et qui me servira dans la suite pour déterminer les oscillations du fluide, lorsque la planète a un mouvement de rotation, ce qui est le cas de la nature.

XII.

Concevons un astre immobile au-dessus d'une planète pareillement immobile, et considérons comme le pôle de cette planète le point au-dessus duquel l'astre répond; si l'on fait abstraction du frottement et de la ténacité du fluide, il résulte des formules que nous avons don-

nées pour ce cas à la fin de l'article X, que ce fluide ferait éternellement des oscillations et que chacun de ses points reviendrait à sa position primitive, toutes les fois que, par l'accroissement successif de l'angle at , $\cos at$ redeviendrait égal à l'unité, c'est-à-dire lorsqu'on aurait at égal à un multiple de la circonférence; partant, la durée de chaque oscillation serait égale à $\frac{2\pi}{a}$; mais il est aisé de voir que le frottement et la ténacité des parties fluides doivent altérer sans cesse ces oscillations, en sorte qu'elles cesseront après un temps considérable, et le fluide finira par être en équilibre sous l'astre qui l'attire. Considérons-le dans cet état d'équilibre et voyons la figure qu'il doit prendre.

On aura, dans ce cas, $\frac{d^2 u}{dt^2} = 0$; de plus, l'astre étant supposé au pôle, on a $v = 0$; et comme le fluide, par l'action de cet astre, n'a éprouvé aucun déplacement en longitude, on a $\gamma = 0$; les équations (11) et (12) de l'article VII donneront ainsi, en supposant la densité Δ du fluide égale à zéro,

$$y = -\frac{l}{\sin \theta} \frac{\partial u \sin \theta}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad 0 = -g \frac{\partial y}{\partial \theta} - K \sin \theta,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$y = c + \frac{K}{2g} \cos 2\theta;$$

pour déterminer la constante arbitraire c , on observera que, la quantité du fluide restant toujours la même, on a

$$\int_0^\pi \int_0^\pi y \sin \theta d\theta d\omega = 0;$$

de là on tirera

$$c = \frac{K}{6g};$$

partant,

$$y = \frac{K}{6g} (1 + 3 \cos 2\theta);$$

l'équation

$$y = -\frac{l}{\sin \theta} \frac{\partial u \sin \theta}{\partial \theta}$$

donne ensuite, en l'intégrant,

$$u \sin \theta = -\frac{K}{6lg} \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 3\theta \right) + A;$$

pour déterminer la constante A, on observera que l'astre étant supposé au pôle, on doit avoir $u = 0$ pour tous les points du fluide situés au pôle: partant,

$$A = 0 \quad \text{et} \quad u = -\frac{K}{6lg} \sin 2\theta.$$

Supposons maintenant le fluide d'une densité quelconque, et concevons que dans cette supposition u soit égal à $e \sin 2\theta$, on aura, par l'article IX,

$$B\Delta = \frac{1}{2}\pi \Delta l e \sin 2\theta;$$

l'équation (12) donnera donc

$$0 = -g \frac{\partial y}{\partial \theta} - \left(K - \frac{1}{2}\pi \Delta l e \right) \sin 2\theta;$$

soit

$$K' = K - \frac{1}{2}\pi \Delta l e,$$

et l'on aura, comme précédemment,

$$y = \frac{K'}{6g} (1 + 3 \cos 2\theta) \quad \text{et} \quad u = -\frac{K'}{6lg} \sin 2\theta;$$

partant,

$$-\frac{K'}{6lg} = e \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{1}{2}\pi \Delta l e - K}{6lg} = e;$$

d'où l'on tire

$$e = -\frac{K}{a^2},$$

 a^2 étant égal à $6lg - \frac{1}{2}\pi \Delta l$; donc

$$u = -\frac{K}{a^2} \sin 2\theta \quad \text{et} \quad y = \frac{K}{a^2} (1 + 3 \cos 2\theta)$$

XIII.

Considérons présentement le cas dans lequel l'astre se meut uniformément sur le même parallèle, en conservant toujours la même distance au centre C de la planète, et voyons quel doit être alors l'effet du frottement et de la ténacité du fluide. Par la même raison pour laquelle nous venons de voir que les oscillations du fluide doivent s'anéantir à la longue, lorsque l'astre est immobile au-dessus du pôle, quels qu'aient été d'ailleurs la figure et le mouvement primitifs du fluide, il est visible que tous les termes qui, dans les expressions de u , v et y , dépendent de la position primitive de l'astre au-dessus de la planète, doivent disparaître après un temps considérable, en sorte qu'il sera impossible de reconnaître par l'observation, et la position de l'astre attirant, à l'origine du mouvement, et l'instant auquel on doit fixer cette origine. Ces expressions seraient donc encore les mêmes, si l'astre avait eu une position différente à l'origine du mouvement, ou si cette origine était plus reculée, ou même encore si à cette époque le mouvement et la figure du fluide eussent été entièrement différents. De là, il est aisé de conclure que u , v et y ne seront plus fonctions que de θ , des sinus et des cosinus de l'angle $mt - \varphi$; car, si elles renfermaient encore φ , il est clair que les expressions de ces quantités seraient différentes pour les différents points du fluide situés sous le même parallèle; or cette différence ne peut évidemment résulter que de la différence de la position primitive de l'astre; pareillement, si elles renfermaient encore le temps t écoulé depuis l'origine du mouvement, l'angle θ et les sinus et cosinus de l'angle $mt - \varphi$ et de ses multiples restant les mêmes, les valeurs de u , v et y seraient différentes, suivant que t serait un peu plus ou un peu moins grand, c'est-à-dire suivant que l'on avancerait ou que l'on reculerait l'époque de l'origine du mouvement. Il suit de là que, si l'on suppose comme ci-dessus $\varphi = mt$, on aura

$$\frac{du}{dt} = -m \frac{\partial u}{\partial \omega}, \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}, \quad \frac{dv}{dt} = -m \frac{\partial v}{\partial \omega}, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = m^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \omega^2},$$

les équations (11), (12) et (13) donneront conséquemment

$$\begin{aligned}
 y &= -l \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right), \\
 m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varpi^2} &= -g \frac{\partial y}{\partial \theta} + B \Delta \\
 &\quad + K \sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cos(2mt - 2\varpi) \right] \\
 &\quad + 2K \cos 2\theta \sin \nu \cos \nu \cos(mt - \varpi), \\
 m^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varpi^2} \sin^2 \theta &= -g \frac{\partial y}{\partial \varpi} + C \Delta \sin \theta \\
 &\quad + K \sin \nu \cos \nu \sin 2\theta \sin(mt - \varpi) \\
 &\quad + K \sin^2 \nu \sin^2 \theta \sin(2mt - 2\varpi).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

En différenciant la première de ces équations deux fois de suite par rapport à ϖ et en la multipliant par $m^2 \sin^2 \theta$, on aura

$$m^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \varpi^2} \sin^2 \theta = -lm^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 v}{\partial \varpi^2} - lm^2 \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \varpi^2} \frac{\sin \theta}{\partial \theta};
 \tag{2}$$

si l'on multiplie la seconde par $\sin \theta$ et qu'on la différencie une fois par rapport à θ , on aura

$$\begin{aligned}
 m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varpi^2} \frac{\sin \theta}{\partial \theta} &= -g \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \sin \theta - g \frac{\partial y}{\partial \theta} \cos \theta + \Delta \frac{\partial B \sin \theta}{\partial \theta} \\
 &\quad + K \frac{\partial \sin \theta \sin 2\theta}{\partial \theta} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cos(2mt - 2\varpi) \right] \\
 &\quad + 2K \frac{\partial \sin \theta \cos 2\theta}{\partial \theta} \sin \nu \cos \nu \cos(mt - \varpi);
 \end{aligned}$$

enfin, si l'on différencie la troisième une fois par rapport à ϖ , on aura

$$\begin{aligned}
 m^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varpi^2} \sin^2 \theta &= -g \frac{\partial^2 y}{\partial \varpi^2} + \Delta \sin \theta \frac{\partial C}{\partial \varpi} \\
 &\quad - K \sin \nu \cos \nu \sin 2\theta \cos(mt - \varpi) \\
 &\quad - 2K \sin^2 \nu \sin^2 \theta \cos(2mt - 2\varpi);
 \end{aligned}$$

en substituant les valeurs de $\frac{\partial^2 u}{\partial \varpi^2} \frac{\sin \theta}{\partial \theta}$ et de $\frac{\partial^2 v}{\partial \varpi^2}$, que donnent ces deux

dernières équations, dans l'équation (2), on aura

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \varpi^2} (m^2 \sin^2 \theta - lg) = lg \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta + lg \sin \theta \cos \theta \frac{\partial y}{\partial \theta} \right. \\
 \left. - \Delta l \sin \theta \frac{\partial B \sin \theta}{\partial \theta} - \Delta l \sin \theta \frac{\partial C}{\partial \varpi} \right. \\
 \left. - lK \sin \theta \frac{\partial \sin \theta \sin 2\theta}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right) \right. \\
 \left. + 12 lK \sin \nu \cos \nu \sin^2 \theta \cos \theta \cos(mt - \varpi) \right. \\
 \left. + 3 lK \sin^2 \nu \sin^2 \theta \cos(2mt - 2\varpi) \right).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Supposons d'abord $\Delta = 0$, et l'on aura pour déterminer y une équation aux différences partielles du second ordre, dont l'intégrale complète, si elle est possible, se déterminera facilement par la méthode que j'ai donnée pour cet objet dans les *Mémoires de l'Académie* pour l'année 1773⁽¹⁾; mais il n'est pas nécessaire ici, comme nous le verrons bientôt, de connaître cette intégrale complète, il suffit d'avoir une intégrale particulière. Pour cela, soit

$$y = \varepsilon + \lambda \cos(mt - \varpi) + \xi \cos(2mt - 2\varpi),$$

ε , λ et ξ étant fonctions de θ seul et de constantes; en substituant cette valeur de y dans l'équation précédente, on aura, pour déterminer ces fonctions, les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 0 &= g \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \sin \theta - K \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right) \frac{\partial \sin \theta \sin 2\theta}{\partial \theta}, \\
 -\lambda (m^2 \sin^2 \theta - lg) &= lg \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta + lg \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + 12 lK \sin \nu \cos \nu \sin^2 \theta \cos \theta, \\
 -4\xi (m^2 \sin^2 \theta - lg) &= lg \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta + lg \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + 3 lK \sin^2 \nu \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Pour satisfaire à ces équations, on fera

$$\varepsilon = a + b \cos 2\theta,$$

$$\lambda = c \sin 2\theta,$$

$$\xi = e \sin^2 \theta;$$

(1) Page 5 du présent volume.

a , b , c et e étant des coefficients constants, et l'on trouvera facilement

$$\begin{aligned} b &= \frac{K}{2g} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu), \\ c &= \frac{6/K \sin \nu \cos \nu}{6lg - m^2}, \\ e &= \frac{3/K \sin^2 \nu}{6lg - 4m^2}; \end{aligned}$$

partant, on aura

$$\begin{aligned} y &= a + \frac{K}{2g} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu) \cos 2\theta \\ &+ \frac{6/K \sin \nu \cos \nu}{6lg - m^2} \sin 2\theta \cos(mt - \omega) \\ &+ \frac{3/K \sin^2 \nu}{6lg - 4m^2} \sin^2 \theta \cos(2mt - 2\omega); \end{aligned}$$

pour déterminer la constante a , on observera que l'on doit avoir, comme on l'a vu dans l'article précédent,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y \sin \theta \, d\theta \, d\omega = 0;$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{K}{6g} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu).$$

XIV.

La valeur précédente de y satisfait à la vérité à l'équation (A), mais elle n'est pas la seule, car, si l'on nomme Y cette valeur et que l'on fasse $y = y' + Y$, on aura, pour déterminer y' , l'équation

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial \omega^2} (m^2 \sin^2 \theta - lg) = lg \frac{\partial^2 y'}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta + lg \frac{\partial y'}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta.$$

Soit $y' = R$ l'intégrale complète de cette équation, R devant être, par ce qui précède, fonction de θ , de $\sin(mt - \omega)$ et de $\cos(mt - \omega)$, on aura $y = R + Y$ pour l'expression complète de y dans le cas de $\Delta = 0$; d'où l'on voit que les oscillations du fluide peuvent être variées à l'in-

fini, et qu'il peut en avoir une infinité dépendantes des angles θ et $mt - \omega$, en ne supposant aucun astre attirant; mais il sera facile par cette considération même de les distinguer, car les valeurs de u , v et y , que l'on aurait dans ce cas, satisferaient aux équations différentielles (Γ) de l'article précédent, en supposant $K = 0$ et $\Delta = 0$ dans ces équations; il est visible de plus que tous les termes des expressions de u , v et y , qui dans ces mêmes suppositions satisfont à ces équations, subsisteraient encore quand il n'y aurait aucun astre; mais, dans ce cas, le frottement et la ténacité du fluide anéantiraient à la longue les oscillations qui en résultent, et, comme ces oscillations sont visiblement produites par les termes qui renferment le temps t , on doit rejeter de l'expression complète de y tous les termes qui, renfermant le temps t , satisfont aux équations (Γ) en supposant $K = 0$ et $\Delta = 0$ dans ces équations, et admettre tous ceux qui, renfermant pareillement le temps t , ne peuvent y satisfaire. Cela posé, il est clair que tous les termes de la quantité R qui dépendent du temps doivent être rejetés, puisqu'ils auraient encore lieu dans le cas où la masse de l'astre attirant serait nulle; la quantité R se réduit ainsi à une fonction de θ seul, que nous nommerons H , en sorte que l'on aura $y = H + Y$. Voyons présentement quels sont les termes qu'il faut encore rejeter de cette expression de y ; pour cela, supposons dans les équations (Γ),

$$K = 0, \quad \Delta = 0,$$

$$y = H + Y = H + \varepsilon + \lambda \cos(mt - \omega) + \xi \cos(2mt - 2\omega),$$

ε , λ et ξ étant des fonctions de θ que nous avons déterminées dans l'article précédent; la seconde des équations (Γ) donnera, en l'intégrant deux fois de suite par rapport à ω ,

$$\begin{aligned} m^2 u &= -\frac{g}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right) (mt - \omega) + H'(mt - \omega) + H'' \\ &+ g \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \cos(mt - \omega) + \frac{g}{4} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \cos(2mt - 2\omega), \end{aligned}$$

H' et H'' étant deux constantes arbitraires qui peuvent être fonctions

quelconques de θ ; la troisième des équations (I) donnera, en l'intégrant une fois par rapport à σ ,

$$m^2 \frac{\partial v}{\partial \sigma} \sin^2 \theta = -g(H + \varepsilon) + G - g\lambda \cos(mt - \sigma) - g\varepsilon \cos(2mt - 2\sigma),$$

G étant une constante arbitraire qui peut être fonction quelconque de θ ; si l'on substitue, au lieu de y , u et $\frac{\partial v}{\partial \sigma}$, ces valeurs dans l'équation

$$y = -l \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \sigma} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

et que l'on compare séparément les coefficients de $(mt - \sigma)^2$, $(mt - \sigma)$, $\cos(mt - \sigma)$ et $\cos(2mt - 2\sigma)$, on verra facilement que les valeurs trouvées dans l'article précédent, pour λ et ε , ne peuvent satisfaire aux équations de condition qui en résultent; d'où il suit que les deux termes $\lambda \cos(mt - \sigma)$ et $\varepsilon \cos(2mt - 2\sigma)$ sont uniquement dus à l'action de l'astre et qu'ils doivent conséquemment être admis. Partant, si dans l'expression

$$H + \varepsilon + \lambda \cos(mt - \sigma) + \varepsilon \cos(2mt - 2\sigma)$$

de y il y a quelques termes à rejeter, ils ne peuvent se rencontrer que parmi ceux de la quantité $H + \varepsilon$; pour déterminer ces termes, supposons $\Delta = 0$ et K quelconque dans la seconde des deux équations (I); si au lieu de y on y substitue $H + \varepsilon + \lambda \cos(mt - \sigma) + \varepsilon \cos(2mt - 2\sigma)$ et que l'on observe que la quantité u ne devant renfermer que des quantités périodiques, afin que zu reste toujours de l'ordre α , comme nous le supposons ici, $\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}$ ne doit renfermer aucun terme qui soit fonction de θ seul, on aura

$$-g \frac{\partial H}{\partial \theta} - g \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + K \sin 2\theta (\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu) = 0;$$

mais, par la nature de ε , on a

$$0 = -g \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + K \sin 2\theta (\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu);$$

partant, $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$, ce qui réduit H à une constante que l'on déterminera au moyen de l'équation

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} y \sin \theta \, d\theta \, d\sigma = 0,$$

d'où l'on tirera facilement $H = 0$; il suit de là que l'on doit conserver tous les termes de Y , et que cette intégrale particulière de l'équation (A), lorsqu'on y suppose $\Delta = 0$, est la plus générale qu'on puisse admettre dans la question présente.

Considérons maintenant le fluide comme ayant une densité quelconque Δ , si l'on suppose

$$y = a(1 + 3 \cos 2\theta) + c \sin 2\theta \cos(mt - \sigma) + e \sin^2 \theta \cos(2mt - 2\sigma),$$

on aura, par l'article IX,

$$B\Delta = -\frac{1}{2} \pi \Delta a \sin 2\theta + \frac{1}{2} \pi \Delta c \cos 2\theta \cos(mt - \sigma) + \frac{1}{2} \pi \Delta e \sin 2\theta \cos(2mt - 2\sigma),$$

$$C\Delta = \frac{1}{2} \pi \Delta c \cos \theta \sin(mt - \sigma) + \frac{1}{2} \pi \Delta e \sin \theta \sin(2mt - 2\sigma);$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (A) de l'article XIII, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma^2} (m^2 \sin^2 \theta - l g) \\ = l g \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta + l g \sin \theta \cos \theta \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ + \left[\frac{1}{2} \pi \Delta l a - l K (\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu) \right] \sin \theta \frac{\partial \sin 2\theta \sin 2\theta}{\partial \theta} \\ + (\frac{1}{2} \pi \Delta l c + 12 l K \sin \nu \cos \nu) \sin^2 \theta \cos \theta \cos(mt - \sigma) \\ + (3 l K \sin^2 \nu + \frac{1}{2} \pi \Delta l e) \sin^2 \theta \cos(2mt - 2\sigma); \end{aligned}$$

en substituant dans cette équation, au lieu de y sa valeur, on trouvera

$$a = \frac{K(\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu)}{6g - \frac{1}{2} \pi \Delta},$$

$$c = \frac{6 l K \sin \nu \cos \nu}{6 l g - \frac{1}{2} \pi \Delta l - m^2},$$

$$e = \frac{3 l K \sin^2 \nu}{6 l g - \frac{1}{2} \pi \Delta l - 4 m^2};$$

ayant ainsi y , on aura la vitesse de chaque molécule du fluide, en observant que cette vitesse dans le sens du méridien est $\alpha \frac{du}{dt}$ ou $-\alpha m \frac{\partial u}{\partial \varpi}$, et que, dans le sens du parallèle, cette vitesse est $\alpha \frac{dv}{dt} \sin \theta$ ou $-\alpha m \frac{\partial v}{\partial \varpi} \sin \theta$. Si l'on intègre présentement la seconde et la troisième des équations (I), en remarquant que u et v ne devant renfermer que des quantités périodiques, $\frac{\partial u}{\partial \varpi}$ et $\frac{\partial v}{\partial \varpi}$ ne doivent renfermer aucun terme qui soit fonction de θ seul, on aura

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{2mK \sin \nu \cos \nu}{6lg - \frac{1}{2}\pi \Delta l - m^2} \cos 2\theta \sin (mt - \varpi) \\ &\quad - \frac{mK \sin^2 \nu}{6lg - \frac{1}{2}\pi \Delta l - 4m^2} \sin 2\theta \sin (2mt - 2\varpi), \\ \frac{dv}{dt} \sin \theta &= \frac{2mK \sin \nu \cos \nu}{6lg - \frac{1}{2}\pi \Delta l - m^2} \cos \theta \cos (mt - \varpi) \\ &\quad + \frac{2mK \sin^2 \nu}{6lg - \frac{1}{2}\pi \Delta l - 4m^2} \sin \theta \cos (2mt - 2\varpi). \end{aligned}$$

Si l'on suppose maintenant que l'astre, au lieu de se mouvoir uniformément sur le même parallèle et à la même distance du centre de la planète, change lentement de parallèle et de distance, et que sa vitesse soit un peu variable ou, ce qui revient au même, si l'on suppose que h , v et m , au lieu d'être constants, sont très peu variables, de manière que leurs différences divisées par l'élément du temps soient, par exemple, de l'ordre l , il suffira de substituer, au lieu de ces quantités, leurs véritables valeurs variables; l'expression de y sera ainsi exacte aux quantités de l'ordre P , et celles de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et de $\frac{\partial v}{\partial t} \sin \theta$ le seront aux quantités près de l'ordre l ; on peut donc les employer sans craindre aucune erreur sensible; au reste, si l'on voulait avoir les petites corrections qui résultent de la variabilité des quantités h , v et m , on pourrait faire usage de la méthode que nous exposerons (art. XXI).

Si l'on compare les résultats auxquels nous venons de parvenir avec ceux que nous avons trouvés (art. XI), on verra qu'ils sont parfaite-

ment d'accord entre eux; les deux méthodes qui nous y ont conduit sont conséquemment exactes et pourraient, si cela était nécessaire, se servir de confirmation l'une à l'autre; la première, il est vrai, a sur la seconde l'avantage de s'étendre au cas où l'astre a un mouvement quelconque dans l'espace, mais celle-ci a, de son côté, l'avantage de donner directement le véritable mouvement que le fluide doit prendre à la longue, quels qu'aient été d'ailleurs sa figure et son mouvement primitifs, et, comme elle est beaucoup plus simple que la première, nous allons l'appliquer au cas de la nature, dans lequel la planète a un mouvement de rotation sur son axe.

XV.

Reprenons les équations (6), (7) et (9) de l'article VI et supposons, comme précédemment, $\varphi = mt$; si l'on fait $n - m = i$, on prouvera par les mêmes raisonnements de l'article XIII que, après un temps considérable, u , v et y ne seront plus fonctions que de l'angle θ , et des sinus et cosinus de l'angle $it + \varpi$, et qu'ainsi l'on aura

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= i \frac{\partial u}{\partial \varpi}, & \frac{d^2 u}{dt^2} &= i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varpi^2}, \\ \frac{dv}{dt} &= i \frac{\partial v}{\partial \varpi} & \text{et} & \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = i^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varpi^2}, \end{aligned}$$

on aura donc

$$(1) \quad \begin{cases} y = -ly \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lu \frac{\partial y}{\partial \theta}, \\ i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varpi^2} - 2ni \frac{\partial v}{\partial \varpi} \sin \theta \cos \theta \\ = -g \frac{\partial y}{\partial \theta} + B\Delta + K \left[\sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu + \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cos (2it + 2\varpi) \right] \right. \\ \quad \left. + 2 \cos 2\theta \sin \nu \cos \nu \cos (it + \varpi) \right], \\ i^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varpi^2} \sin^2 \theta + 2ni \frac{\partial u}{\partial \varpi} \sin \theta \cos \theta \\ = -g \frac{\partial y}{\partial \varpi} + C\Delta \sin \theta - K \sin \nu \cos \nu \sin 2\theta \sin (it + \varpi) \\ \quad - K \sin^2 \nu \sin^2 \theta \sin (2it + 2\varpi); \end{cases}$$

si l'on intègre par rapport à σ la dernière de ces équations, on aura

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{2nu \cos \theta}{i \sin \theta} - \frac{g y'}{i^2 \sin^2 \theta} + \frac{\Delta \int C d\sigma \sin \theta}{i^2 \sin^2 \theta} + \frac{2K}{i^2} \sin \nu \cos \nu \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos(\theta + \sigma) + \frac{K}{2i^2} \sin^2 \nu \cos(2\theta + 2\sigma) + H,$$

H étant une fonction de θ ajoutée en intégrant; soit

$$g y' - \Delta \int C d\sigma \sin \theta = g y',$$

et l'on aura

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{2nu \cos \theta}{i \sin \theta} - \frac{g y'}{i^2 \sin^2 \theta} + \frac{2K}{i^2} \sin \nu \cos \nu \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos(\theta + \sigma) + \frac{K}{2i^2} \sin^2 \nu \cos(2\theta + 2\sigma) + H;$$

or, si l'on nomme a et $a^{(1)}$ les parties des expressions de y' et de u , qui sont indépendantes de l'angle $\theta + \sigma$, et que l'on considère que v ne devant renfermer que des quantités périodiques (voir ci-après l'article XXI), $\frac{\partial v}{\partial \sigma}$ ne peut renfermer de termes qui soient fonctions de θ seul, on aura

$$H = \frac{2na^{(1)} \cos \theta}{i \sin \theta} + \frac{ga}{i^2 \sin^2 \theta};$$

partant,

$$(\prime) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= \frac{2n \cos \theta}{i \sin \theta} (a^{(1)} - u) + \frac{g(a - y')}{i^2 \sin^2 \theta} \\ &+ \frac{2K \cos \theta}{i^2 \sin \theta} \sin \nu \cos \nu \cos(\theta + \sigma) + \frac{K \sin^2 \nu}{2i^2} \cos(2\theta + 2\sigma); \end{aligned} \right.$$

si l'on observe présentement que l'équation

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma} = \frac{\partial C \sin \theta}{\partial \theta}$$

trouvée (art. V) donne, en l'intégrant,

$$B = \int \frac{\partial C \sin \theta}{\partial \theta} d\sigma,$$

on aura

$$-g \frac{\partial y}{\partial \theta} + B \Delta = -g \frac{\partial y'}{\partial \theta};$$

substituant donc, au lieu de $\frac{\partial v}{\partial \sigma}$ et de $g \frac{\partial y}{\partial \theta}$, leurs valeurs dans la première et dans la seconde des équations (I), on aura les deux suivantes

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= -l\gamma \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{l\gamma \cos \theta}{i \sin \theta} [(2n - i)u - 2na^{(1)}] - lu \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \frac{l g \gamma (y' - a)}{i^2 \sin^2 \theta} \\ &- \frac{2K l \gamma \cos \theta}{i^2 \sin \theta} \sin \nu \cos \nu \cos(\theta + \sigma) - \frac{l K \gamma \sin^2 \nu}{2i^2} \cos(2\theta + 2\sigma), \end{aligned} \right.$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + 4n^2 (u - a^{(1)}) \cos^2 \theta \\ &= -g \frac{\partial y'}{\partial \theta} + \frac{2ng \cos \theta}{i \sin \theta} (a - y') \\ &+ \frac{2K}{i} \sin \nu \cos \nu [(2n + 2i) \cos^2 \theta - i] \cos(\theta + \sigma) \\ &+ K \sin 2\theta (\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu) + K \sin^2 \nu \sin 2\theta \frac{n+i}{2i} \cos(2\theta + 2\sigma); \end{aligned} \right.$$

pour satisfaire à ces équations, faisons d'abord $\hat{z} = 0$, en sorte que l'on ait $y' = y$, et supposons

$$\begin{aligned} y &= a + b \cos(\theta + \sigma) + c \cos(2\theta + 2\sigma), \\ u &= a^{(1)} + b^{(1)} \cos(\theta + \sigma) + c^{(1)} \cos(2\theta + 2\sigma), \end{aligned}$$

$a, b, c, a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)}$ étant des fonctions de θ seul, qu'il s'agit de déterminer; en substituant ces valeurs dans les équations (21) et (22), et comparant séparément les coefficients de $\cos(\theta + \sigma)$ et de $\cos(2\theta + 2\sigma)$, on aura les six équations suivantes :

$$(L) \quad \left\{ \begin{aligned} a \sin \theta &= -l \frac{\partial \gamma a^{(1)} \sin \theta}{\partial \theta}, \\ g \frac{da}{d\theta} &= K \sin 2\theta (\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu), \\ b &= -l\gamma \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2n-i}{i} l\gamma b^{(1)} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - lb^{(1)} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \frac{l g b \gamma}{i^2 \sin^2 \theta} - \frac{2l K \gamma \cos \theta}{i^2 \sin \theta} \sin \nu \cos \nu, \\ b^{(1)} (4n^2 \cos^2 \theta - i^2) &= -g \frac{\partial b}{\partial \theta} - \frac{2ng b \cos \theta}{i \sin \theta} + \frac{2K}{i} \sin \nu \cos \nu [(2n + 2i) \cos^2 \theta - i], \\ c &= -l\gamma \frac{\partial c^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2n-i}{i} l\gamma c^{(1)} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - lc^{(1)} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \frac{l g c \gamma}{i^2 \sin^2 \theta} - \frac{l K \gamma \sin^2 \nu}{2i^2}, \\ 4c^{(1)} (n^2 \cos^2 \theta - i^2) &= -g \frac{\partial c}{\partial \theta} - \frac{2ng c \cos \theta}{i \sin \theta} + \frac{n+i}{2i} K \sin^2 \nu \sin 2\theta; \end{aligned} \right.$$

toute la difficulté de la détermination des oscillations du fluide se trouve ainsi réduite à satisfaire à ces équations.

La quantité γ ou, ce qui revient au même, la loi de la profondeur du fluide étant indéterminée dans ces équations, la supposition la plus naturelle que l'on puisse faire sur cette profondeur consiste à regarder le sphéroïde et le fluide comme ayant eu primitivement une figure elliptique; dans ce cas, on a

$$\gamma = 1 + \frac{q}{l} \sin^2 \theta,$$

q étant un coefficient constant; nous adopterons conséquemment cette valeur de γ dans la suite de ces recherches; cela posé, si l'on intègre la seconde des équations (L), on aura

$$a = \frac{K}{2g} \cos 2\theta (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu) + F,$$

F étant une constante que nous déterminerons dans la suite; en substituant cette valeur dans la première de ces équations, on aura en l'intégrant,

$$\gamma a^{(1)} \sin \theta = -\frac{1}{l} \int a d\theta \sin \theta;$$

partant,

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= -\frac{\int a d\theta \sin \theta}{\left(1 + \frac{q}{l} \sin^2 \theta\right) l \sin \theta} \\ &= -\frac{K (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu) (3 \cos \theta - \cos 3\theta) - 12gF \cos \theta + F'}{12gl \sin \theta \left(1 + \frac{q}{l} \sin^2 \theta\right)}, \end{aligned}$$

F' étant une nouvelle constante ajoutée en intégrant. Pour satisfaire maintenant à la troisième et à la quatrième des équations (L), supposons

$$\begin{aligned} b &= \sin \theta \cos \theta (f + f^{(1)} \sin^2 \theta + f^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + f^{(r)} \sin^{2r} \theta), \\ b^{(1)} &= e + e^{(1)} \sin^2 \theta + e^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + e^{(r)} \sin^{2r} \theta, \end{aligned}$$

$f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, e, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots$ étant des coefficients constants. En substituant ces valeurs de b et de $b^{(1)}$, dans la troisième des équations (L),

on aura d'abord, en comparant les coefficients de $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, l'équation suivante

$$(23) \quad \frac{2n-i}{l} e + \frac{gf}{l^2} - \frac{2K}{l^2} \sin \nu \cos \nu = 0;$$

en divisant ensuite tous les autres termes de l'équation par $\sin \theta \cos \theta$, on aura une équation de cette forme

$$\begin{aligned} f + f^{(1)} \sin^2 \theta + f^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + f^{(r)} \sin^{2r} \theta \\ = A + A^{(1)} \sin^2 \theta + A^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + A^{(r)} \sin^{2r} \theta, \end{aligned}$$

$A, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(r)}$ étant des fonctions de $f, f^{(1)}, \dots, e, e^{(1)}, \dots$ très faciles à déterminer, et l'on aura

$$A^{(r)} = \frac{qgf^{(r)}}{l^3} - \left(2r + \frac{3i-2n}{l}\right) qe^{(r)};$$

en comparant séparément les coefficients des différentes puissances de $\sin \theta$, on aura les $r+1$ équations suivantes

$$A = f, \quad A^{(1)} = f^{(1)}, \quad A^{(2)} = f^{(2)}, \quad \dots, \quad A^{(r)} = f^{(r)},$$

et cette dernière équation donne, en y substituant au lieu de $A^{(r)}$ sa valeur,

$$(24) \quad (qg - l^2) f^{(r)} = q(2rl^2 + 3l^2 - 2ni) e^{(r)}.$$

Si l'on substitue pareillement les valeurs précédentes de b et de $b^{(1)}$, dans la quatrième des équations (L), on aura une équation de cette forme

$$\begin{aligned} (4n^2 - l^2) e + [(4n^2 - l^2) e^{(1)} - 4n^2 e] \sin^2 \theta \\ + [(4n^2 - l^2) e^{(2)} - 4n^2 e^{(1)}] \sin^4 \theta + \dots \\ + [(4n^2 - l^2) e^{(r)} - 4n^2 e^{(r-1)}] \sin^{2r} \theta - 4n^2 e^{(r)} \sin^{2r+2} \theta \\ = B + B^{(1)} \sin^2 \theta + B^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + B^{(r+1)} \sin^{2r+2} \theta, \end{aligned}$$

$B, B^{(1)}, B^{(2)}, \dots$ étant des coefficients faciles à déterminer, et l'on trouvera

$$B = -\frac{2n+i}{l} gf + \frac{2n+i}{l} 2K \sin \nu \cos \nu$$

et

$$B^{(r+1)} = g f^{(r)} \left(2r + 2 + \frac{2n}{i} \right).$$

Si l'on compare maintenant les coefficients des puissances de $\sin \theta$, on aura

$$(4n^2 - i^2)e = B$$

ou

$$(4n^2 - i^2)e = -\frac{2n+i}{i} g f + \frac{2n+i}{i} 2K \sin \nu \cos \nu;$$

partant,

$$\frac{2n-i}{i} e + \frac{g f}{i^2} - \frac{2K}{i^2} \sin \nu \cos \nu = 0,$$

équation qui est la même que l'équation (23). On aura ensuite

$$\begin{aligned} (4n^2 - i^2)e^{(1)} - 4n^2 e &= B^{(1)}, \\ (4n^2 - i^2)e^{(2)} - 4n^2 e^{(1)} &= B^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ -4n^2 e^{(r)} &= B^{(r+1)} \end{aligned}$$

ou

$$-4n^2 e^{(r)} = g f^{(r)} \left(2r + 2 + \frac{2n}{i} \right).$$

Si l'on compare cette équation avec l'équation (24), on en tirera

$$g = \frac{2n^2}{g \left(2r^2 + 5r + 3 + \frac{n}{i} \right)};$$

on déterminera ensuite les $2r + 2$ quantités $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(r)}, e, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(r)}$ au moyen des équations (23) et (24), et des $2r$ équations

$$\begin{aligned} f &= A, & f^{(1)} &= A^{(1)}, & \dots, & f^{(r-1)} &= A^{(r-1)}, \\ (4n^2 - i^2)e^{(1)} - 4n^2 e &= B^{(1)}, \\ (4n^2 - i^2)e^{(2)} - 4n^2 e^{(1)} &= B^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ (4n^2 - i^2)e^{(r)} - 4n^2 e^{(r-1)} &= B^{(r)}. \end{aligned}$$

Pour satisfaire ensuite à la cinquième et à la sixième des équations (L),

supposons

$$\begin{aligned} c &= \sin^2 \theta (p + p^{(1)} \sin^2 \theta + p^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + p^{(r)} \sin^{2r} \theta), \\ c^{(1)} &= \sin \theta \cos \theta (\xi + \xi^{(1)} \sin^2 \theta + \xi^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + \xi^{(r-1)} \sin^{2r-2} \theta), \end{aligned}$$

$p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, \xi, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots$ étant des coefficients constants qu'il s'agit de déterminer. Si l'on substitue ces valeurs de c et de $c^{(1)}$ dans la cinquième des équations (L), et que l'on ordonne cette équation par rapport aux puissances de $\sin \theta$, on aura d'abord, en comparant les termes qui ne renferment point $\sin \theta$,

$$(25) \quad 0 = \frac{2n-2i}{i} \xi + \frac{gp}{i^2} - \frac{K \sin^2 \nu}{2i^2};$$

et si l'on divise tous les autres termes de l'équation par $\sin^2 \theta$, on aura une équation de cette forme

$$\begin{aligned} p + p^{(1)} \sin^2 \theta + p^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + p^{(r)} \sin^{2r} \theta \\ = D + D^{(1)} \sin^2 \theta + D^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + D^{(r)} \sin^{2r} \theta, \end{aligned}$$

$D, D^{(1)}, D^{(2)}$ étant des fonctions de $p, p^{(1)}, \dots$ et de $\xi, \xi^{(1)}, \dots$ très faciles à déterminer, et l'on trouvera

$$D^{(r)} = q \xi^{(r-1)} \frac{2ri - 2n + 3i}{i} + \frac{gqp^{(r)}}{i^2}.$$

En comparant les coefficients des différentes puissances de $\sin \theta$, on a

$$p = D, \quad p^{(1)} = D^{(1)}, \quad p^{(2)} = D^{(2)}, \quad \dots, \quad p^{(r)} = D^{(r)},$$

ou, en substituant au lieu de $D^{(r)}$ sa valeur,

$$(26) \quad p^{(r)} = q \xi^{(r-1)} \frac{2ri - 2n + 3i}{i} + \frac{gqp^{(r)}}{i^2};$$

si l'on substitue pareillement au lieu de c et de $c^{(1)}$ leurs valeurs dans la sixième des équations (L), en la divisant par $\sin \theta \cos \theta$ et l'ordonnant ensuite par rapport aux différentes puissances de $\sin \theta$, on aura une équation de cette forme

$$\begin{aligned} (4n^2 - i^2)\xi + [(4n^2 - 4i^2)\xi^{(1)} - 4n^2 \xi] \sin^2 \theta + \dots - 4n^2 \xi^{(r-1)} \sin^{2r} \theta \\ = E + E^{(1)} \sin^2 \theta + E^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + E^{(r)} \sin^{2r} \theta, \end{aligned}$$

$E, E^{(1)}, E^{(2)}, \dots$ étant des fonctions de p , faciles à déterminer, et l'on trouvera

$$E = \frac{n+i}{i} (K \sin^2 \nu - 2gp),$$

$$E^{(r)} = -gp^{(r)} \frac{2ri + 2i + 2n}{i}.$$

Si l'on compare maintenant les coefficients des différentes puissances de $\sin \theta$, on aura d'abord

$$(4n^2 - 4i^2)\xi = \frac{n+i}{i} (K \sin^2 \nu - 2gp),$$

d'où l'on tire

$$\frac{2n-2i}{i}\xi + \frac{gp}{i^2} - \frac{K \sin^2 \nu}{2i^2} = 0,$$

équation qui est la même que l'équation (25); on aura ensuite

$$\begin{aligned} (4n^2 - 4i^2)\xi^{(1)} - 4n^2\xi &= E^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ -4n^2\xi^{(r-1)} &= E^{(r)}, \end{aligned}$$

ou, en substituant au lieu de $E^{(r)}$ sa valeur,

$$2n^2\xi^{(r-1)} = gp^{(r)} \frac{ri + i + n}{i}.$$

Si l'on combine cette équation avec l'équation (26), on en tirera

$$q = \frac{2n^2}{g(2r^2 + 5r + 3 + \frac{n}{i})};$$

on déterminera ensuite les $2r+1$ coefficients $p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(r)}, \xi, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r-1)}$, au moyen des équations (25) et (26) et des $2r-1$ équations

$$\begin{aligned} p &= D, & p^{(1)} &= D^{(1)}, & \dots, & p^{(r-1)} &= D^{(r-1)}, \\ (4n^2 - 4i^2)\xi^{(1)} - 4n^2\xi &= E^{(1)}, \\ (4n^2 - 4i^2)\xi^{(2)} - 4n^2\xi^{(1)} &= E^{(2)}, \\ \dots\dots\dots \\ (4n^2 - 4i^2)\xi^{(r-1)} - 4n^2\xi^{(r-2)} &= E^{(r-1)}. \end{aligned}$$

La valeur de q , que nous venons de trouver, étant la même que celle que nous avons trouvée ci-dessus, lorsqu'il s'agissait de satisfaire à la troisième et à la quatrième des équations (L), il en résulte que les valeurs précédentes de $b, b^{(1)}, c$ et $c^{(1)}$ ont été bien choisies; si l'on reprend maintenant la valeur précédente de y , et que l'on considère que l'on a

$$\int_0^\pi \int_0^\pi y \sin \theta \, d\theta \, d\omega = 0,$$

on trouvera facilement que la constante arbitraire F de l'expression

de a est égale à $\frac{K}{6g} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu)$; partant, on a

$$\begin{aligned} y &= \frac{K}{6g} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu) (1 + 3 \cos 2\theta) \\ &+ \sin \theta \cos \theta \cos (it + \omega) (f + f^{(1)} \sin^2 \theta + \dots + f^{(r)} \sin^{2r} \theta) \\ &+ \sin^2 \theta \cos (2it + 2\omega) (p + p^{(1)} \sin^2 \theta + \dots + p^{(r)} \sin^{2r} \theta); \end{aligned}$$

on aura ensuite la vitesse horizontale $\propto \frac{du}{dt}$ du fluide dans le sens du méridien, en considérant que

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = i \frac{\partial u}{\partial \omega} &= -i \sin (it + \omega) (e + e^{(1)} \sin^2 \theta + e^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + e^{(r)} \sin^{2r} \theta) \\ &- 2i \sin (2it + 2\omega) \sin \theta \cos \theta (\xi + \xi^{(1)} \sin^2 \theta + \dots + \xi^{(r-1)} \sin^{2r-2} \theta); \end{aligned}$$

enfin l'équation ($\nearrow$) donnera la vitesse du fluide dans le sens du parallèle, en observant que cette vitesse est égale à $\propto \frac{dv}{dt} \sin \theta = \alpha i \frac{\partial v}{\partial \omega} \sin \theta$.

Si l'on applique maintenant à la valeur précédente de y la méthode de l'article XIV, on s'assurera facilement qu'elle doit être admise en entier, ainsi que les valeurs correspondantes que nous avons trouvées pour $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, et que ces valeurs sont les seules que l'on doive admettre dans la question présente; comme ce calcul ne présente aucune difficulté d'après ce que nous avons dit article XIV, nous ne nous y arrêtons pas.

XVI.

Considérons le cas dans lequel le fluide a une densité quelconque Δ , et supposons qu'alors l'expression de y ait la forme suivante

$$y = \varepsilon(3 \cos^2 \theta - 1) + \sin \theta \cos \theta \cos(it + \varpi) (f + f^{(1)} \sin^2 \theta + f^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + f^{(r)} \sin^{2r} \theta) + \sin^2 \theta \cos(2it + 2\varpi) (p + p^{(1)} \sin^2 \theta + p^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + p^{(r)} \sin^{2r} \theta),$$

$\varepsilon, f, f^{(1)}, \dots, p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots$ étant des coefficients constants qu'il s'agit de déterminer; il est facile de s'assurer que cette valeur de y satisfait à l'équation

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} y \sin \theta d\theta d\varpi = 0;$$

voyons ensuite si elle peut satisfaire aux équations (21) et (22) de l'article précédent; on a, par cet article,

$$y' = y - \frac{\Delta}{g} \int C d\varpi \sin \theta;$$

de plus, on a, par l'article IX,

$$C\Delta = -\sin(it + \varpi) \cos \theta (\lambda + \lambda^{(1)} \sin^2 \theta + \dots + \lambda^{(r)} \sin^{2r} \theta) - \sin(2it + 2\varpi) \sin \theta (\lambda' + \lambda'^{(1)} \sin^2 \theta + \dots + \lambda'^{(r)} \sin^{2r} \theta);$$

$\lambda, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda', \lambda'^{(1)}, \lambda'^{(2)}, \dots$ étant des fonctions de $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots$ que l'on déterminera par le même article; on aura donc

$$\int C\Delta d\varpi \sin \theta = G + \sin \theta \cos \theta \cos(it + \varpi) (\lambda + \lambda^{(1)} \sin^2 \theta + \dots + \lambda^{(r)} \sin^{2r} \theta) + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos(2it + 2\varpi) (\lambda' + \lambda'^{(1)} \sin^2 \theta + \dots + \lambda'^{(r)} \sin^{2r} \theta),$$

G étant une constante arbitraire qui peut être fonction de θ ; pour la déterminer, on observera que nous avons supposé dans l'article précédent,

$$B\Delta = \Delta \int \frac{\partial C \sin \theta}{\partial \theta} d\varpi;$$

d'où il suit que $\frac{\partial G}{\partial \theta}$ doit être égal à la partie de l'expression de $B\Delta$ qui

est fonction de θ seul; or nous avons vu, article IX, que cette partie est égale à $-\frac{12}{5}\pi \Delta \varepsilon \sin 2\theta$; donc

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = -\frac{12\pi}{5} \Delta \varepsilon \sin 2\theta;$$

parlant,

$$G = \frac{12}{5}\pi \Delta \varepsilon \cos 2\theta + F,$$

F étant une constante quelconque à laquelle nous sommes libres de donner ici telle valeur que nous voudrons. Nous la supposons, pour plus de simplicité, égale à $\frac{2}{3}\pi \Delta \varepsilon$, ce qui donne

$$G = \frac{14}{5}\pi \Delta \varepsilon (3 \cos^2 \theta - 1).$$

Faisons maintenant

$$\varepsilon \left(1 - \frac{4\Delta\pi}{5g}\right) = \varepsilon_1,$$

$$\begin{aligned} f - \frac{\lambda}{g} &= f_1, & p - \frac{\lambda'}{2g} &= p_1, \\ f^{(1)} - \frac{\lambda^{(1)}}{g} &= f_1^{(1)}, & p^{(1)} - \frac{\lambda'^{(1)}}{2g} &= p_1^{(1)}, \\ f^{(2)} - \frac{\lambda^{(2)}}{g} &= f_1^{(2)}, & & \\ & & & \\ f^{(r)} - \frac{\lambda^{(r)}}{g} &= f_1^{(r)}, & p^{(r)} - \frac{\lambda'^{(r)}}{2g} &= p_1^{(r)}, \end{aligned}$$

et nous aurons

$$y' = \varepsilon_1 (3 \cos^2 \theta - 1) + \sin \theta \cos \theta \cos(it + \varpi) (f_1 + f_1^{(1)} \sin^2 \theta + f_1^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + f_1^{(r)} \sin^{2r} \theta) + \sin^2 \theta \cos(2it + 2\varpi) (p_1 + p_1^{(1)} \sin^2 \theta + p_1^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + p_1^{(r)} \sin^{2r} \theta),$$

Supposons ensuite, comme précédemment,

$$u = a^{(1)} + \cos(it + \varpi) (e + e^{(1)} \sin^2 \theta + e^{(2)} \sin^4 \theta + \dots + e^{(r)} \sin^{2r} \theta) + \sin \theta \cos \theta \cos(2it + 2\varpi) (\delta + \delta^{(1)} \sin^2 \theta + \dots + \delta^{(r-1)} \sin^{2r-2} \theta),$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (21) et (22), et que l'on y fasse $\gamma = 1 + \frac{2}{l} \sin^2 \theta$, on aura d'abord, en comparant les termes

indépendants de l'angle $\dot{u} + \varpi$ dans l'équation (21),

$$z \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 1) = -l \frac{d, a^{(1)} \sin \theta \left(1 + \frac{q}{l} \sin^2 \theta\right)}{d\theta};$$

l'équation (22) donnera pareillement

$$z_1 = \frac{K}{3g} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu);$$

partant,

$$z = \frac{K}{3g \left(1 - \frac{4\Delta\pi}{5g}\right)} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu).$$

La comparaison des coefficients de $\cos(\dot{u} + \varpi)$ dans l'équation (21) donnera

$$(27) \quad \frac{2n-i}{i} e + \frac{gf_1}{i^2} - \frac{2K}{i^2} \sin \nu \cos \nu = 0,$$

et cette équation répond à l'équation (23) de l'article précédent; on aura ensuite

$$f = A_1, \quad f^{(1)} = A_1^{(1)}, \quad f^{(2)} = A_1^{(2)}, \quad \dots, \quad f^{(r)} = A_1^{(r)},$$

$A_1, A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots$ étant pareilles fonctions de $f_1, f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots$ que les quantités que nous avons nommées $A, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ le sont de $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$. On aura donc

$$A_1^{(r)} = \frac{gq}{i^2} f_1^{(r)} - \left(2r + \frac{3i-2n}{i}\right) q e^{(r)};$$

partant,

$$f^{(r)} = \frac{gq}{i^2} f_1^{(r)} - \left(2r + \frac{3i-2n}{i}\right) q e^{(r)};$$

or on a

$$f_1^{(r)} = f^{(r)} - \frac{\lambda^{(r)}}{g}$$

et, par l'article IX,

$$\lambda^{(r)} = \frac{4\Delta\pi f^{(r)}}{4r+5};$$

donc

$$f_1^{(r)} = f^{(r)} \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g}\right],$$

ce qui donne

$$(28) \quad f^{(r)} \left\{ g \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right] - i^2 \right\} = q(2r^2 + 3i^2 - 2ni) e^{(r)},$$

et cette équation répond à l'équation (24) de l'article précédent.

Si l'on compare les coefficients de $\cos(\dot{u} + \varpi)$ dans l'équation (22), on trouvera d'abord l'équation (27); on trouvera ensuite les équations suivantes

$$\begin{aligned} (4n^2 - i^2) e^{(1)} - 4n^2 e &= B_1^{(1)}, \\ (4n^2 - i^2) e^{(2)} - 4n^2 e^{(1)} &= B_1^{(2)}, \\ \dots\dots\dots \\ (4n^2 - i^2) e^{(r)} - 4n^2 e^{(r-1)} &= B_1^{(r)}, \\ &- 4n^2 e^{(r)} = B_1^{(r+1)}, \end{aligned}$$

$B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, \dots, B_1^{(r+1)}$ étant pareilles fonctions de $f_1, f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots, f_1^{(r)}$, que $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(r+1)}$ le sont de $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(r)}$; on aura donc

$$B_1^{(r+1)} = g f_1^{(r)} \left(2r + 2 + \frac{2n}{i} \right)$$

ou

$$B_1^{(r+1)} = g \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right] f^{(r)} \left(2r + 2 + \frac{2n}{i} \right);$$

partant,

$$-2n^2 e^{(r)} = g f^{(r)} \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right] \left(r + 1 + \frac{n}{i} \right).$$

Si l'on compare cette équation avec l'équation (28), on en tirera

$$q = \frac{2n^2}{g \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right] (2r^2 + 5r + 3 + \frac{n}{i})};$$

on déterminera ensuite les $2r+2$ quantités $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(r)}; e, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(r)}$ au moyen des équations (27) et (28), et des $2r$ équations

$$\begin{aligned} f = A_1, \quad f^{(1)} = A_1^{(1)}, \quad f^{(2)} = A_1^{(2)}, \quad \dots, \quad f^{(r-1)} = A_1^{(r-1)}; \\ (4n^2 - i^2) e^{(1)} - 4n^2 e &= B_1^{(1)}, \\ (4n^2 - i^2) e^{(2)} - 4n^2 e^{(1)} &= B_1^{(2)}, \\ \dots\dots\dots \\ (4n^2 - i^2) e^{(r)} - 4n^2 e^{(r-1)} &= B_1^{(r)}. \end{aligned}$$

Si l'on compare maintenant les coefficients de $\cos(2i + 2\pi)$ dans l'équation (21), on aura d'abord

$$(29) \quad 0 = \frac{2n-2i}{i} \xi + \frac{gp_1}{i^2} - \frac{K \sin^2 \theta}{2i^2},$$

et cette équation répond à l'équation (25) de l'article précédent; on aura ensuite

$$p = D_1, \quad p^{(1)} = D_1^{(1)}, \quad p^{(2)} = D_1^{(2)}, \quad \dots, \quad p^{(r)} = D_1^{(r)},$$

$D_1, D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, \dots, D_1^{(r)}$ étant pareilles fonctions de $p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(r)}$, que $D, D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(r)}$ le sont de $p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(r)}$; on aura donc

$$D_1^{(r)} = q \xi^{(r-1)} \frac{2ri-2n+3i}{i} + \frac{gp}{i^2} p_1^{(r)};$$

donc

$$p_1^{(r)} = q \xi^{(r-1)} \frac{2ri+3i-2n}{i} + \frac{gp}{i^2} p_1^{(r)};$$

or on a

$$p_1^{(r)} = p^{(r)} - \frac{l^{(r)}}{2g}$$

et, par l'article IX,

$$l^{(r)} = \frac{8\Delta\pi p^{(r)}}{4r+5};$$

donc

$$p_1^{(r)} = p^{(r)} \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right];$$

partant,

$$(30) \quad \left[i^2 - qg \left(1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right) \right] p^{(r)} = q \xi^{(r-1)} \frac{2ri-2n+3i}{i};$$

cette équation répond à l'équation (26).

Si l'on compare ensuite les coefficients de $\cos(2i + 2\pi)$ dans l'équation (22), on aura d'abord l'équation (29); ensuite on aura

$$\begin{aligned} (4n^2 - 4i^2) \xi^{(1)} - 4n^2 \xi &= E_1^{(1)}, \\ (4n^2 - 4i^2) \xi^{(2)} - 4n^2 \xi^{(1)} &= E_1^{(2)}, \\ \dots\dots\dots \\ -4n^2 \xi^{(r-1)} &= E_1^{(r)}. \end{aligned}$$

$E_1, E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \dots, E_1^{(r)}$ étant pareilles fonctions de $p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(r)}$, que $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(r)}$ le sont de $p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(r)}$; on aura donc

$$E_1^{(r)} = -gp_1^{(r)} \frac{2ri+2i+2n}{i} = -gp^{(r)} \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right] \frac{2ri+2i+2n}{i};$$

partant,

$$2n^2 \xi^{(r-1)} = gp^{(r)} \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right] \frac{ri+i+n}{i};$$

en combinant cette équation avec l'équation (30), on en tirera

$$q = \frac{2n^2}{g \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right] (2r^2+5r+3+\frac{n}{i})};$$

on déterminera ensuite les $2r+1$ coefficients $p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(r)}$; $\xi, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r-1)}$ au moyen des équations (29) et (30) et des $2r-1$ équations

$$\begin{aligned} p = D_1, \quad p^{(1)} = D_1^{(1)}, \quad p^{(2)} = D_1^{(2)}, \quad \dots, \quad p^{(r-1)} = D_1^{(r-1)}; \\ (4n^2 - 4i^2) \xi^{(1)} - 4n^2 \xi &= E_1^{(1)}, \\ (4n^2 - 4i^2) \xi^{(2)} - 4n^2 \xi^{(1)} &= E_1^{(2)}, \\ \dots\dots\dots \\ (4n^2 - 4i^2) \xi^{(r-1)} - 4n^2 \xi^{(r-2)} &= E_1^{(r-1)}. \end{aligned}$$

Les deux valeurs de q que nous venons de trouver dans cet article étant entièrement les mêmes, il en résulte que les valeurs précédentes de u et de y ont été bien choisies; nous pouvons conséquemment déterminer par la méthode précédente les oscillations du fluide, toutes les fois que sa profondeur sera égale à

$$l + \frac{2n^2 \sin^2 \theta}{g \left[1 - \frac{4\Delta\pi}{(4r+5)g} \right] (2r^2+5r+3+\frac{n}{i})};$$

l étant une constante quelconque très petite relativement au demi-axe du sphéroïde, et r étant un nombre entier quelconque, ce qui donne une infinité de cas dans lesquels la détermination rigoureuse du flux et du reflux de la mer est possible.

Si l'on nomme $\Delta^{(1)}$ la densité moyenne du sphéroïde, on aura à très peu près $g = \frac{1}{2}\pi\Delta^{(1)}$; la quantité précédente peut donc être mise sous la forme suivante :

$$l + \frac{2n^2 \sin^2 \theta}{g \left[1 - \frac{3\Delta}{(4r+5)\Delta^{(1)}} \right] (2r^2 + 5r + 3 + \frac{n}{i})}$$

Si $n = 0$, cette quantité se réduit à la constante l , et nous aurons le cas que nous avons discuté ci-dessus avec étendue.

XVII.

$\frac{n^2}{g}$ exprime, comme l'on sait, le rapport de la force centrifuge à l'équateur à la pesanteur; ce rapport est pour la Terre égal à $\frac{1}{288}$; la quantité précédente devient ainsi

$$l + \frac{2 \sin^2 \theta}{289 \left[1 - \frac{3\Delta}{(4r+5)\Delta^{(1)}} \right] (2r^2 + 5r + 3 + \frac{n}{i})};$$

on supposera donc la loi de la profondeur de la mer représentée par cette quantité, et l'on déterminera dans cette supposition les valeurs de y , $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ résultantes de l'action de la Lune. Les quantités h , v et m , au lieu d'être constantes comme nous l'avons supposé, sont un peu variables; mais on pourra substituer au lieu de m sa valeur moyenne dans la formule qui exprime la loi de la profondeur de la mer, et dans toutes les autres quantités on pourra, conformément à la remarque de l'article XIV, substituer au lieu de v , h et m leurs véritables valeurs variables; nous verrons dans la suite jusqu'à quel point cette supposition est exacte.

Lorsqu'on aura calculé l'effet de la Lune sur la mer, il suffira de changer dans les résultats les quantités relatives à la Lune dans celles qui sont relatives au Soleil, et en ajoutant la somme de ces effets on aura l'effet total résultant de l'action du Soleil et de la Lune sur la mer.

Il y a cependant une observation essentielle à faire et qui peut donner lieu à une difficulté qu'il est à propos de résoudre. La loi de la profondeur du fluide dépend de la valeur de i , et cette quantité dépend elle-même du mouvement de l'astre attirant dans l'espace; il résulte de là que, dans les mêmes hypothèses sur la profondeur de la mer, dans lesquelles on peut déterminer l'effet de la Lune, il est impossible, par la méthode précédente, de déterminer celui du Soleil. Pour répondre à cette difficulté, nous observerons que le mouvement angulaire du Soleil et de la Lune autour de la Terre, résultant de leur mouvement réel dans l'espace, est très petit relativement au mouvement de rotation de la Terre, puisque pour la Lune il n'en est que $\frac{1}{27}$ environ et que pour le Soleil il en est à peu près $\frac{1}{553}$; on peut donc supposer sans erreur sensible pour ces deux astres i ou $n - m = n$, en négligeant m par rapport à n , et alors la loi de la profondeur de la mer est entièrement indépendante des mouvements du Soleil et de la Lune. Pour avoir l'erreur qui résulte de la supposition de $i = n$, considérons le cas le plus défavorable dans lequel m est à peu près égal à $\frac{n}{27}$; on aura

$$i = \frac{26}{27}n;$$

la loi de la profondeur de la mer devient ainsi

$$l + \frac{2 \sin^2 \theta}{289 \left[1 - \frac{3\Delta}{(4r+5)\Delta^{(1)}} \right] (2r^2 + 5r + 4 + \frac{1}{27})}$$

ou, à peu près,

$$l + \frac{2 \sin^2 \theta}{289 \left[1 - \frac{3\Delta}{(4r+5)\Delta^{(1)}} \right] (2r^2 + 5r + 4) \left[1 - \frac{1}{26(2r^2 + 5r + 4)} \right]};$$

en sorte que ce que l'on néglige dans la supposition de $n = i$ est

$$\frac{\sin^2 \theta}{13.289 \left[1 - \frac{3\Delta}{(4r+5)\Delta^{(1)}} \right] (2r^2 + 5r + 4)^2},$$

quantité absolument insensible et qui ne va pas à $\frac{1}{2000}$ de lieue, dans le cas même où l'on suppose $\Delta = \Delta^{(1)}$, $r = 1$ et $\sin \theta = 1$.

Examinons présentement comment on peut concilier la loi précédente de la profondeur de la mer avec la figure de la Terre qui résulte des observations; pour cela, supposons que le sphéroïde que la mer recouvre soit un ellipsoïde tel que les densités et les ellipticités de ses différentes couches varient du centre à la surface. Soit $R\Delta$ la densité d'une couche dont le demi-axe est s ; soit ρ l'ellipticité de cette couche, et que l'on fasse

$$\Delta = \int R s^2 ds, \quad D = \int R d. s^2 \rho,$$

les intégrales étant prises depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$; soient encore a l'ellipticité de la surface du sphéroïde et h l'ellipticité que les observations donnent à la Terre, on aura $a + q = h$, et l'on trouvera, par les formules que M. Clairaut donne dans sa théorie de la figure de la Terre, en observant qu'ici la profondeur de la mer est supposée très petite,

$$a + q = h = \frac{6D - 6a + 15\Delta}{30\Delta - 6} \frac{n^2}{g}.$$

Si l'on nomme maintenant f le rapport de la densité moyenne de la Terre à celle de l'eau, qui paraît résulter des observations faites nouvellement dans les montagnes d'Ecosse, il est aisé de voir que l'on aura

$$f = \frac{\int R \Delta s^2 ds}{\int \Delta s^2 ds} = 3\Delta;$$

nous devons donc satisfaire aux trois équations suivantes

$$a + q = h, \quad f = 3\Delta,$$

$$h = \frac{6D - 6a + 15\Delta}{30\Delta - 6} \frac{n^2}{g};$$

de ces trois équations, on tirera

$$a = h - q, \quad \Delta = \frac{1}{3}f,$$

$$D = \frac{10fh - 6q - 5f \frac{n^2}{g}}{6};$$

la première de ces équations donne l'ellipticité du sphéroïde; quant aux deux autres, on peut y satisfaire d'une infinité de manières. Pour le faire voir, supposons $R = \mu \varphi(s)$, $\varphi(s)$ étant une fonction quelconque de s , et μ étant un coefficient constant quelconque; on satisfera à l'équation $\Delta = \frac{1}{3}f$, en prenant

$$\mu = \frac{f}{3 \int s^2 \varphi(s) ds},$$

et, comme la fonction $\varphi(s)$ est indéterminée, il en résulte qu'il y a une infinité de manières de satisfaire à cette équation.

On peut satisfaire pareillement d'une infinité de manières à l'équation

$$D = \frac{10fh - 6q - 5f \frac{n^2}{g}}{6};$$

car soit $\psi(s)$ une fonction quelconque de s ; on peut supposer

$$\int R d. r^2 \rho \quad \text{ou} \quad \mu \int \varphi(s) d. s^2 \rho = \psi(s);$$

il suffit pour cela de prendre

$$\rho = \frac{1}{s^2} \int \frac{d. \psi(s)}{\mu \varphi(s)} + C,$$

et de déterminer la constante arbitraire C de manière que l'on ait $\rho = a$ lorsque $s = 1$; or, la fonction $\psi(s)$ étant indéterminée, on peut faire en sorte, et cela d'une infinité de manières, qu'elle soit égale à $\frac{10fh - 6q - 5f \frac{n^2}{g}}{6}$ lorsque $s = 1$.

XVIII.

En considérant l'expression trouvée ci-dessus pour la profondeur de la mer, dans le cas où, par la méthode précédente, nous pouvons en déterminer les oscillations, il est aisé de voir que, si l'on suppose r un peu considérable, on aura à très peu près le cas où la mer a partout la

même profondeur; supposons, par exemple, $r=10$, et l'on aura, pour l'expression de la profondeur de la mer,

$$l + \frac{2 \sin^2 \theta}{289.254 \left(1 - \frac{3\Delta}{45\Delta^{(1)}}\right)},$$

quantité qui se réduit à très peu près à l , car le terme

$$\frac{2 \sin^2 \theta}{289.254 \left(1 - \frac{3\Delta}{45\Delta^{(1)}}\right)}$$

n'excède pas $\frac{1}{25}$ de lieue, dans le cas même où l'on suppose $\sin \theta = 1$ et $\Delta = \Delta^{(1)}$.

Pour éclaircir maintenant par un exemple la méthode des articles XV et XVI, nous allons considérer ici le cas de $r=1$ et déterminer les valeurs de y , $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt} \sin \theta$. Pour cela, nous observerons que dans ce cas on a

$$y = z(3 \cos^2 \theta - 1) + \sin \theta \cos \theta (f + f^{(1)} \sin^2 \theta) \cos(it + \varpi) + \sin^2 \theta (p + p^{(1)} \sin^2 \theta) \cos(2it + 2\varpi),$$

$$\frac{du}{dt} = i \frac{du}{d\varpi} = -i(e + e^{(1)} \sin^2 \theta) \sin(it + \varpi) - 2i\delta \sin \theta \cos \theta \sin(2it + 2\varpi);$$

et l'équation (γ) de l'article XV nous donnera

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{dv}{dt} &= i \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \varpi} \\ &= \cos \theta \cos(it + \varpi) \left[\frac{2K}{i^2} \sin \nu \cos \nu - \frac{2ne}{i} - \frac{gf_1}{i^2} - \sin^2 \theta \left(\frac{2ne^{(1)}}{i} + \frac{gf_1^{(1)}}{i^2} \right) \right] \\ &\quad + \sin \theta \cos(2it + 2\varpi) \left[\frac{K}{2i^2} \sin^2 \nu - \frac{2n}{i} \delta - \frac{gp_1}{i^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{2n\delta}{i} - \frac{gp_1^{(1)}}{i^2} \right) \right]; \end{aligned}$$

tout se réduit donc à déterminer z , f , $f^{(1)}$, $f_1^{(1)}$, p , p_1 , $p^{(1)}$, $p_1^{(1)}$, e , $e^{(1)}$ et δ .

On aura d'abord, par l'article XVI,

$$z = \frac{K}{3g \left(1 - \frac{4\Delta\pi}{5g}\right)} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu);$$

et, si l'on nomme $\Delta^{(1)}$ la densité moyenne de la planète, on aura, à cause de $g = \frac{4}{3}\pi\Delta^{(1)}$,

$$z = \frac{K}{3g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right)} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu);$$

on aura ensuite, par le même article, les quatre équations

$$\frac{2n-i}{i} e + \frac{gf_1}{i^2} - \frac{2K}{i^2} \sin \nu \cos \nu = 0,$$

$$f = A_1,$$

$$(4n^2 - i^2) e^{(1)} - 4n^2 e = B_1^{(1)},$$

$$-2n^2 e^{(1)} = \frac{n+2i}{i} g f_1^{(1)} \left(1 - \frac{4\pi\Delta}{9g}\right);$$

on trouvera, par l'article XV,

$$A = \frac{2n-3i}{i} (le^{(1)} + qe) + \frac{g}{i^2} (gf_1 + lf_1^{(1)}) - \frac{2q}{i^2} K \sin \nu \cos \nu,$$

$$B^{(1)} = \frac{n+i}{i} 2gf_1 - \frac{2n+3i}{i} g f_1^{(1)} - 4 \frac{n+i}{i} K \sin \nu \cos \nu;$$

donc A , et $B_1^{(1)}$ étant pareilles fonctions de f , et de $f_1^{(1)}$ que A et $B^{(1)}$ le sont de f et de $f^{(1)}$, on aura

$$A_1 = \frac{2n-3i}{i} (le^{(1)} + qe) + \frac{g}{i^2} (gf_1 + lf_1^{(1)}) - \frac{2q}{i^2} K \sin \nu \cos \nu,$$

$$B_1^{(1)} = \frac{n+i}{i} 2gf_1 - \frac{2n+3i}{i} g f_1^{(1)} - 4 \frac{n+i}{i} K \sin \nu \cos \nu;$$

de plus, on a, par l'article XVI,

$$f_1 = f - \frac{\lambda}{g} \quad \text{et} \quad f_1^{(1)} = f^{(1)} - \frac{\lambda^{(1)}}{g},$$

et l'on trouvera facilement, par l'article IX,

$$\frac{\lambda}{g} = \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} f + \frac{16\Delta}{105\Delta^{(1)}} f^{(1)},$$

$$\frac{\lambda^{(1)}}{g} = \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} f^{(1)},$$

ce qui donne

$$f_1 = f \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - \frac{16\Delta}{105\Delta^{(1)}} f^{(1)},$$

$$f_1^{(1)} = f^{(1)} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right);$$

partant, on aura les quatre équations

$$0 = \frac{2n-i}{i} c + \frac{gf}{i^2} \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - \frac{16\Delta}{105\Delta^{(1)}} \frac{gf^{(1)}}{i^2} - \frac{2K}{i^2} \sin \nu \cos \nu,$$

$$f = \frac{2n-3i}{i} (le^{(1)} + qc) + \frac{gp}{i^2} f \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - \frac{gq}{i^2} \frac{16\Delta}{105\Delta^{(1)}} f^{(1)}$$

$$+ \frac{lg}{i^2} f^{(1)} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right) - \frac{2qK}{i^2} \sin \nu \cos \nu,$$

$$(4n^2 - i^2) e^{(1)} - 4n^2 e = 2g \frac{n+i}{i} f \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - 2g \frac{n+i}{i} \frac{16\Delta}{105\Delta^{(1)}} f^{(1)}$$

$$- \frac{2n+3i}{i} \frac{gf^{(1)}}{i^2} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right) - 4K \frac{n+i}{i} \sin \nu \cos \nu,$$

$$- 2n^2 e^{(1)} = \frac{n+2i}{i} \frac{gf^{(1)}}{i^2} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right);$$

on tirera facilement de ces équations les valeurs de e , $e^{(1)}$, f et $f^{(1)}$; et si, pour abréger, l'on fait

$$\frac{n^2}{g} = \mu,$$

$$P = (2n-i) \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right) [2n^2(2n+3i) - (n+2i)(4n^2 - i^2)]$$

$$+ \frac{64\Delta n^2}{105\Delta^{(1)}} [(n+i)(2n-i) - 2n^2],$$

$$Q = 4n^2 \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) [(n+i)(2n-i) - 2n^2],$$

$$R = \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right) \{ (2n-3i)g[2n^2(2n+3i) - (n+2i)(4n^2 - i^2)]$$

$$+ 4n^2 l [2n^2 - (2n-3i)(n+2i)] \}$$

$$+ 4n^2 g [(2n-3i)(n+i) - 2n^2] \frac{16\Delta}{105\Delta^{(1)}},$$

$$S = 8n^2 i^2 \mu + 4n^2 g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) [(2n-3i)(n+i) - 2n^2],$$

on aura

$$f = \frac{8K}{g} n^2 \sin \nu \cos \nu \frac{(2n-i)(n+i)R - 2n^2 R + 2n^2 g P - (2n-3i)(n+i)gP}{RQ - PS},$$

$$f^{(1)} = \frac{8K}{g} n^2 \sin \nu \cos \nu \frac{(2n-i)(n+i)S - 2n^2 S + 2n^2 g Q - (2n-3i)(n+i)gQ}{RQ - PS};$$

on déterminera ensuite e et $e^{(1)}$ au moyen des équations

$$e = \frac{2K \sin \nu \cos \nu - gf \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) + gf^{(1)} \frac{16\Delta}{105\Delta^{(1)}}}{2ni - i^2},$$

$$e^{(1)} = -\frac{n+2i}{2i} \frac{f^{(1)}}{\mu} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right).$$

Si l'on suppose n infiniment petit, on aura $i = -m$; d'ailleurs g sera infiniment petit de l'ordre n^2 , en sorte que la profondeur de la mer sera partout égale à la constante l ; nous devons donc retrouver ici les mêmes résultats que nous avons trouvés pour ce cas, article XI; or on a, en faisant n infiniment petit,

$$P = -2m^2 \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right),$$

$$Q = -4m^2 n^2 \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right),$$

$$R = \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right) (24n^2 m^2 l - 6m^4 g),$$

$$S = \frac{8n^4 m^2}{g} - 12n^2 m^2 g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right);$$

d'où l'on tirera

$$f = \frac{12lK \sin \nu \cos \nu}{6lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - m^2},$$

$$f^{(1)} = \frac{4K \frac{n^2}{g} \sin \nu \cos \nu}{\left[6lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - m^2 \right] \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}} \right)}$$

et

$$e = \frac{2K \sin \nu \cos \nu}{6lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - m^2},$$

$$e^{(1)} = \frac{4K \sin \nu \cos \nu}{6lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - m^2},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé, article XI. Si l'on fait $i = n$, ce qui a lieu à peu près pour la Terre, on aura, en observant que $q = \frac{2n^2}{11g \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right)}$,

$$f = -\frac{8K \sin \nu \cos \nu}{7 - \frac{19\Delta}{15\Delta^{(1)}}},$$

$$f^{(1)} = 0,$$

$$e = \frac{22K \frac{g}{n^2} \sin \nu \cos \nu \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right)}{7 - \frac{19\Delta}{15\Delta^{(1)}}},$$

$$e^{(1)} = 0.$$

Cherchons présentement les valeurs de p , p_1 , $p^{(1)}$, $p_i^{(1)}$ et ϵ , on aura, par l'article XVI, les trois équations

$$\frac{2n-2i}{i} \epsilon + \frac{gp_1}{i^2} = \frac{K}{2i^2} \sin^2 \nu,$$

$$p = D_1,$$

$$2n^2 \epsilon = gp^{(1)} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right);$$

on trouvera facilement

$$D_1 = \frac{3i-2n}{i} \epsilon l + \frac{2n-4i}{i} \epsilon q + \frac{g}{i^2} (p_1 q + p_i^{(1)} l) - \frac{qK}{2i^2} \sin^2 \nu;$$

on a ensuite

$$p_1 = p - \frac{h}{2g}, \quad p_i^{(1)} = p^{(1)} - \frac{l^{(1)}}{2g},$$

et, par l'article IX, on aura

$$\frac{l}{2g} = \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} p + \frac{8\Delta}{35\Delta^{(1)}} p^{(1)}, \quad \frac{l^{(1)}}{2g} = \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}},$$

partant,

$$p_1 = p \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - \frac{8\Delta}{35\Delta^{(1)}} p^{(1)} \quad \text{et} \quad p_i^{(1)} = p^{(1)} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right);$$

les trois équations précédentes donneront ainsi les deux suivantes,

$$\frac{n-i}{i} \frac{g}{n^2} p^{(1)} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) + \frac{g}{i^2} p \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - \frac{g}{i^2} \frac{8\Delta}{35\Delta^{(1)}} p^{(1)} = \frac{K}{2i^2} \sin^2 \nu,$$

$$p = \frac{g}{2n^2} p^{(1)} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) \left(\frac{3i-2n}{i} l + \frac{2n-4i}{i} q\right) + \frac{g}{i^2} p^{(1)} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) + \frac{g}{i^2} p \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - \frac{8\Delta}{35\Delta^{(1)}} \frac{gg}{i^2} p^{(1)} - \frac{qK}{2i^2} \sin^2 \nu;$$

et si, pour abréger, on fait

$$P' = \frac{i^2 - nl}{n^2} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) + \frac{8\Delta}{35\Delta^{(1)}},$$

$$Q' = \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) \left(\frac{3i^2 - 2ni + 2n^2}{2n^2} l + \frac{ni - 2i^2}{n^2} q\right) - \frac{8\Delta q}{35\Delta^{(1)}},$$

on aura

$$p = \frac{\frac{K}{2g} \sin^2 \nu (Q' + gP')}{Q' \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - P' \left[\frac{i^2}{g} - q \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right)\right]},$$

$$p^{(1)} = \frac{\frac{K}{2g} \frac{i^2}{g} \sin^2 \nu}{Q' \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - P' \left[\frac{i^2}{g} - q \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right)\right]};$$

on déterminera ϵ au moyen de l'équation

$$\epsilon = \frac{g}{2n^2} p^{(1)} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right).$$

Si l'on suppose n infiniment petit, on aura

$$P' = \frac{m^2}{n^2} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right), \quad Q' = \frac{3m^2 l}{2n^2} \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right).$$

d'où l'on tirera

$$p = \frac{3IK \sin^2 \nu}{6lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - 4m^2},$$

$$p^{(1)} = \frac{2K \frac{n^2}{g} \sin^2 \nu}{\left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) \left[6lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - 4m^2\right]};$$

partant,

$$\varepsilon = \frac{K \sin^2 \nu}{6lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) - 4m^2},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé (art. XI). Si l'on fait $i = n$, on aura

$$P' = \frac{8\Delta}{35\Delta^{(1)}}, \quad Q' = \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) \left(\frac{1}{2}l - q\right) - \frac{8\Delta q}{35\Delta^{(1)}},$$

d'où l'on tirera

$$p = \frac{\left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) \left(\frac{1}{2}l - q\right) \frac{K}{2g} \sin^2 \nu}{\left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) \left(\frac{1}{2}l - q\right) - \frac{8\Delta}{35\Delta^{(1)}} \frac{n^2}{g}},$$

$$p^{(1)} = \frac{\frac{K}{2g} \sin^2 \nu \frac{n^2}{g}}{\left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) \left(\frac{1}{2}l - q\right) - \frac{8\Delta}{35\Delta^{(1)}} \frac{n^2}{g}};$$

la valeur de y sera donc, dans le cas où $i = n$ et $r = 1$,

$$y = \frac{K}{6g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right)} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu) (1 + 3 \cos 2\theta) - \frac{8K}{g} \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta - \frac{10\Delta}{7 - \frac{10\Delta}{15\Delta^{(1)}}} \cos (it + \varpi) + \frac{K}{2g} \sin^2 \nu \frac{\left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) \left(\frac{1}{2}l - q\right) + \frac{n^2}{g} \sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right) \left(1 - \frac{\Delta}{3\Delta^{(1)}}\right) \left(\frac{1}{2}l - q\right) - \frac{8\Delta}{35\Delta^{(1)}} \frac{n^2}{g}} \sin^2 \theta \cos (2it + 2\varpi).$$

XIX.

Il est aisé de voir, par les articles XV et XVI, que l'on aura généralement, quelle que soit la loi de la profondeur de la mer,

$$y = H + M \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta \cos (it + \varpi) + N \sin^2 \nu \sin^2 \theta \cos (2it + 2\varpi),$$

H, M et N étant fonctions de θ ; pour avoir la plus grande élévation et le plus grand abaissement des eaux, il faut faire $\frac{dy}{dt} = 0$, ce qui donne

$$0 = M \cos \nu \cos \theta \sin (it + \varpi) + 2N \sin \nu \sin \theta \sin (2it + 2\varpi);$$

or on a

$$\sin (2it + 2\varpi) = 2 \sin (it + \varpi) \cos (it + \varpi);$$

l'équation précédente se partage ainsi dans les deux suivantes

$$0 = \sin (it + \varpi),$$

$$0 = M \cos \nu \cos \theta + 4N \sin \nu \sin \theta \cos (it + \varpi);$$

la première de ces équations se rapporte à la plus grande élévation, qui a lieu, par conséquent, lorsque $it + \varpi$ est égal à zéro ou à 180° , c'est-à-dire lorsque l'astre passe au méridien; la seconde équation est relative aux plus grands abaissements et donne

$$\cos (it + \varpi) = - \frac{M \cos \nu \cos \theta}{4N \sin \nu \sin \theta}.$$

Il suit de là que la valeur de y , dans la marée de dessus, est

$$y = H + M \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta + N \sin^2 \nu \sin^2 \theta,$$

et que cette valeur, dans le plus grand abaissement des eaux, est

$$y = H - \frac{M^2}{8N} \cos^2 \nu \cos^2 \theta - N \sin^2 \nu \sin^2 \theta;$$

la différence de ces deux valeurs est la différence de la haute à la basse mer, que l'observation donne immédiatement; on aura donc pour cette

différence

$$\frac{2}{N} \left(N \sin \nu \sin \theta + \frac{M}{4} \cos \nu \cos \theta \right)^2;$$

la valeur de y , dans la marée de dessous, est

$$y = \Pi - M \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta + N \sin^2 \nu \sin^2 \theta;$$

la différence des deux marées de dessus et de dessous est conséquemment

$$2M \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta,$$

et le rapport de cette différence à la différence de la haute à la basse mer est

$$\frac{NM \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta}{\left(N \sin \nu \sin \theta + \frac{M}{4} \cos \nu \cos \theta \right)^2};$$

cette quantité que nous nommerons (A) est nulle lorsque l'astre ou lorsque le lieu de l'observation sont dans l'équateur; mais, si le rapport de M à N était un peu grand, la quantité (A) serait considérable dans nos ports, lorsque le Soleil et la Lune seraient dans leurs plus grandes déclinaisons australes. Cherchons ce rapport dans la théorie ordinaire: cette théorie revient à supposer m infiniment petit dans la valeur de y de l'article XI et à changer m en $-i$, dans les angles $mt - \varpi$ et $2mt - 2\varpi$; on aura donc, en observant que $a^2 = 6lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right)$, dans cette valeur

$$\begin{aligned} y = & \frac{K}{6g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right)} (\cos^2 \nu - \frac{1}{2} \sin^2 \nu) (1 + 3 \cos 2\theta) \\ & + \frac{2K}{g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right)} \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta \cos (it + \varpi) \\ & + \frac{K}{2g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right)} \sin^2 \nu \sin^2 \theta \cos (2it + 2\varpi), \end{aligned}$$

ce qui donne $M = 4N$, partant,

$$(A) = \frac{4 \sin \nu \cos \nu \sin \theta \cos \theta}{(\sin \nu \sin \theta + \cos \nu \cos \theta)^2} = \frac{\sin 2\nu \sin 2\theta}{\cos^2(\theta - \nu)};$$

dans nos ports et dans les grandes déclinaisons australes du Soleil et de la Lune, (A) serait négatif et plus grand que -2 ; or cette valeur de (A) est très considérable et beaucoup plus grande que suivant toutes les observations qui donnent pour (A) une quantité presque insensible.

Dans le cas où, en supposant la Terre immobile, on transporterait en sens contraire à l'astre attirant son mouvement angulaire de rotation, on trouverait par l'article XI

$$\frac{M}{N} = \frac{24lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - 16i^2}{6lg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - i^2};$$

ce rapport serait très petit si la profondeur l de la mer différait très peu de $\frac{4i^2}{6g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right)}$, et l'on pourrait expliquer ainsi pourquoi la dif-

férence des deux marées d'un même jour est aussi peu considérable; mais, d'un autre côté, N étant égal à $\frac{3Kl}{6g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - 4i^2}$, la hauteur

des marées serait alors extrêmement grande, ce qui paraît contraire aux observations faites nouvellement dans la mer du Sud, suivant lesquelles le plus grand effet de l'action du Soleil et de la Lune pour élever les eaux de la mer n'excède pas 2 pieds.

Voyons maintenant si, en ayant égard au mouvement de rotation de la Terre, il ne serait pas possible de satisfaire aux observations, et pour cela cherchons directement la loi de la profondeur de la mer, dans laquelle on aurait $M = 0$.

Reprenons les équations (21) et (22) de l'article XV; soit $b^{(1)}$ le coefficient de $\cos(it + \varpi)$ dans l'expression de u ; puisque, par l'hypothèse, le coefficient de ce cosinus est nul dans l'expression de y , il est clair qu'il sera pareillement nul dans l'expression de y' . Cela posé, si dans les équations (21) et (22) on suppose $i = n$, ce qui est à peu près vrai pour la Terre, et que l'on n'y considère que les coefficients

de $\cos(\tilde{u} + \pi)$, on aura, par la comparaison de ces coefficients, les deux équations suivantes

$$0 = -\gamma \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \vartheta} + \gamma b^{(1)} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} - b^{(1)} \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} - \frac{2K}{n^2} \gamma \sin \nu \cos \nu \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta},$$

$$n^2 b^{(1)} (4 \cos^2 \vartheta - 1) = 2K \sin \nu \cos \nu (4 \cos^2 \vartheta - 1);$$

cette seconde équation donne

$$b^{(1)} = \frac{2K}{n^2} \sin \nu \cos \nu;$$

substituant cette valeur de $b^{(1)}$ dans la première, on en tirera $\frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} = 0$;

partant $l\gamma$ est égal à une constante que l'on peut représenter par l .
Il suit du calcul précédent non seulement que, dans la supposition de $M = 0$, la profondeur de la mer est constante, mais encore que, cette profondeur étant constante, on a $M = 0$, car, en supposant

$$M = 0, \quad b^{(1)} = \frac{2K}{n^2} \sin \nu \cos \nu \quad \text{et} \quad l\gamma = l,$$

on satisfait aux équations (21) et (22), et l'on prouvera, par les raisonnements de l'article XIV, que dans la question présente il n'y a que ce seul moyen d'y satisfaire dont on doit faire usage. Il est d'autant plus remarquable que l'on ait toujours $M = 0$, lorsque la profondeur de la mer est constante, que si l'on suppose la Terre immobile, en transportant en sens contraire à l'astre son mouvement angulaire de rotation, la valeur que l'on trouve pour M peut être très considérable et qu'elle ne devient nulle que dans le seul cas où l'on a

$$l = \frac{4\Omega^2}{6g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}}\right)},$$

ce qui fait voir d'une manière très sensible combien il est différent de supposer la Terre immobile, ou d'avoir égard à son mouvement de rotation.

En comparant les coefficients de $\cos(2\tilde{u} + 2\pi)$ dans les équations (21) et (22), et supposant toujours $l\gamma = l$, on trouvera faci-

lement que la supposition de $N = 0$ ne peut y satisfaire et que, ainsi, non seulement $(A) = 0$, lorsque la profondeur de la mer est constante, mais que cette équation indique nécessairement une profondeur constante et, comme dans la nature cette équation a lieu à très peu près, il paraît naturel d'en conclure que, si l'on en excepte le voisinage des côtes, la mer a partout à peu près la même profondeur. On peut même déterminer par la théorie précédente la loi des petites variations de la profondeur de la mer, en supposant, toutefois, les observations exactes. Cette détermination est fondée sur une remarque qui nous sera très utile dans la suite, et qui consiste en ce que l'on peut toujours avoir la valeur de M , dans le cas où le sphéroïde que recouvre la mer est un ellipsoïde de révolution. Pour cela, supposons d'abord la densité du fluide nulle, et considérons la troisième et la quatrième des équations (L) de l'article XV; si l'on y fait $i = n$, ce qui a lieu à peu près pour la Terre, elles se changeront dans les deux suivantes

$$b = -l\gamma \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \vartheta} + l\gamma b^{(1)} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} - lb^{(1)} \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} + \frac{lgb\gamma}{n^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{2lK\gamma \cos \vartheta}{n^2 \sin \vartheta} \sin \nu \cos \nu,$$

$$n^2 b^{(1)} (4 \cos^2 \vartheta - 1) = -g \frac{\partial b}{\partial \vartheta} - 2gb \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} + 2K \sin \nu \cos \nu (4 \cos^2 \vartheta - 1);$$

pour satisfaire à ces équations, soit

$$b = f \sin \vartheta \cos \vartheta;$$

la seconde équation donnera

$$n^2 b^{(1)} (4 \cos^2 \vartheta - 1) = -gf (4 \cos^2 \vartheta - 1) + 2K \sin \nu \cos \nu (4 \cos^2 \vartheta - 1);$$

partant,

$$b^{(1)} = \frac{-gf + 2K \sin \nu \cos \nu}{n^2}.$$

Observons présentement que, dans le cas où le sphéroïde recouvert par la mer est un ellipsoïde de révolution, on a

$$\gamma = 1 + \frac{q}{l} \sin^2 \vartheta,$$

q étant une quantité quelconque positive ou négative; si l'on substitue ces valeurs de γ , b et $b^{(1)}$, dans la première des deux équations précédentes, on trouvera

$$f = \frac{2q}{n^2} (g - 2K \sin \gamma \cos \gamma);$$

partant,

$$f = \frac{4Kq \sin \gamma \cos \gamma}{2qg - n^2}.$$

On prouvera facilement, par la méthode de l'article XIV, que ces deux valeurs de b et de $b^{(1)}$ sont les seules que l'on doive admettre dans la question présente.

Si l'on a égard à la densité Δ du fluide, on trouvera par l'article XVI

$$b^{(1)} = \frac{-g \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) + 2K \sin \gamma \cos \gamma}{n^2},$$

$$f = \frac{4Kq \sin \gamma \cos \gamma}{2qg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - n^2};$$

on observera ici que M est égal à $\frac{f}{\sin \gamma \cos \gamma}$, et que, ainsi, l'on a, quel que soit q ,

$$M = \frac{4Kq}{2qg \left(1 - \frac{3\Delta}{5\Delta^{(1)}} \right) - n^2};$$

cette valeur de M est d'autant plus remarquable, que d'elle seule dépend, comme nous le verrons dans la suite, l'effet de l'attraction et de la pression des eaux de la mer sur la précession des équinoxes et la nutation de l'axe terrestre, et qu'elle nous met ainsi en état de déterminer généralement cet effet, dans le cas où la Terre est un ellipsoïde quelconque de révolution recouvert par la mer.

Nous venons de voir que, pour satisfaire aux observations, q doit être très petit, et dans ce cas le dénominateur de l'expression M est une quantité négative; or, si l'on s'en rapporte aux observations dont M. Cassini fait mention dans les *Mémoires de l'Académie* pour l'année 1714, page 256, la marée du soir à Brest est un peu plus

grande que celles du matin dans les syzygies d'été, et un peu moindre dans les syzygies d'hiver, ce qui suppose que M est une très petite quantité positive; d'où il suit que la profondeur de la mer est un peu plus grande aux pôles qu'à l'équateur; mais cette conséquence étant fondée sur des observations fort délicates, puisque la différence des deux marées d'un même jour est toujours fort petite, on ne peut la regarder comme certaine que lorsqu'on aura un plus grand nombre d'observations faites en différents endroits.

La variation de la profondeur de la mer étant fort petite, on peut, sans erreur sensible, calculer la valeur de N comme si l'on avait $r = \infty$ ou, ce qui revient à très peu près au même, comme si r était égal à un nombre un peu considérable, tel que 10, 11 ou 12, et l'on aura ainsi la loi des hauteurs des marées suivant les différentes latitudes; mais, comme il est impossible de comparer sur ce point la théorie avec les observations, parce que les causes locales, telles que la situation des côtes, la pente des rivages, etc. produisent dans la hauteur des marées des différences prodigieuses à latitudes égales, il est entièrement inutile de calculer cette valeur de N ; il nous suffit d'avoir montré comment il est possible de concilier la théorie avec l'observation, sur le peu de différence qui existe entre les deux marées d'un même jour. L'explication de ce phénomène nous conduit à déterminer le temps des plus grandes marées dans nos ports; il est difficile de se refuser au grand nombre d'observations qui établissent directement que les plus grandes marées arrivent dans les équinoxes, et cela paraît être une suite du peu de différence qui existe entre les deux marées d'un même jour; car, si cette différence était exactement nulle, on aurait

$$y = H + N \sin^2 \gamma \sin^2 \theta \cos(2it + 2\alpha);$$

la différence de la haute à la basse mer serait $2N \sin^2 \theta \sin^2 \gamma$, laquelle est à son maximum lorsque $\sin \gamma = 1$, ou lorsque l'astre est dans l'équateur; or on a observé que, dans nos ports, plus cette différence est grande, plus la hauteur absolue de la mer est considérable (*Mémoires de l'Académie*, année 1712, p. 94); d'où il suit que les

plus grandes marées arrivent dans les équinoxes. Pour ce qui regarde les autres phénomènes des marées, comme leur explication est ici la même que dans la théorie ordinaire, nous renvoyons, à cet égard, à l'excellente pièce de M. Daniel Bernoulli, sur le flux et le reflux de la mer.

XX.

La considération des équations (4) et (5) de l'article VI nous donne facilement la vitesse d'un point quelconque pris dans l'intérieur du fluide; car elles nous montrent que cette vitesse est fonction de θ , σ , t et s , et qu'ainsi, la profondeur du fluide étant supposée très petite, la vitesse est la même pour tous les points pour lesquels θ et σ sont les mêmes; connaissant donc, par ce qui précède, cette vitesse à un point quelconque de la surface extérieure, on aura celle de tous les points du fluide, situés sur le même rayon.

Supposons maintenant que l'on veuille déterminer la pression du fluide sur le sphéroïde qu'il recouvre; nommons (p) la pression du fluide dans le cas de l'équilibre sur le point n de la surface du sphéroïde, pour lequel l'angle $\angle nCA = \theta + \alpha u$ (fig. 3, p. 93); soit, dans cette même supposition, Q l'attraction du fluide et du sphéroïde sur ce point, et $\delta\sigma$ l'élément de la direction suivant laquelle elle agit; l'équation (3) de l'article IV nous donnera

$$-\frac{n^2}{2} \delta[(s + \alpha r) \sin(\theta + \alpha u)]^2 = -Q \delta\sigma - \frac{\delta(p)}{\Delta};$$

soit présentement la pression $p = (p) + \alpha p'$; il est aisé de voir que l'action de l'astre attirant et l'attraction de la différence d'une sphère, dont le rayon est 1 et dont la densité est la même que celle du fluide, et d'un sphéroïde de même densité et dont le rayon est $1 + \alpha x$, il est aisé de voir, dis-je, que ces attractions multipliées par les éléments de leurs directions, donnent sensiblement les mêmes produits pour le point n placé à la surface du sphéroïde que pour le point N placé à la surface du fluide; l'équation (3) se changera conséquemment dans la

suivante, en observant qu'à la surface du sphéroïde δs est de l'ordre $q \delta\theta$, et en négligeant ce qu'il est permis de négliger,

$$\begin{aligned} & \alpha \delta\theta \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \frac{dv}{dt} \sin\theta \cos\theta \right) + \alpha \delta\sigma \left(\sin^2\theta \frac{d^2 v}{dt^2} + 2n \sin\theta \cos\theta \frac{du}{dt} \right) \\ & = -\alpha y A \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \delta\theta + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \delta\sigma \right) + S \left(\frac{\partial}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial f'} \right) - \alpha \frac{\partial p'}{\Delta}; \end{aligned}$$

mais les quantités $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ étant les mêmes, comme nous venons de le voir, au point n qu'au point N , l'équation (γ) de l'article V donne

$$\begin{aligned} & \alpha \delta\theta \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \frac{dv}{dt} \sin\theta \cos\theta \right) + \alpha \delta\sigma \left(\sin^2\theta \frac{d^2 v}{dt^2} + 2n \sin\theta \cos\theta \frac{du}{dt} \right) \\ & = -\alpha y A \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \delta\theta + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \delta\sigma \right) + S \left(\frac{\partial}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial f'} \right) - \alpha g \delta y; \end{aligned}$$

on aura donc $\frac{\partial p'}{\Delta} = g \delta y$ et, en intégrant, $p' = \Delta g y + G$, G étant une constante arbitraire qui peut être fonction de t , sans θ ni σ ; si l'on observe cependant que, par les mêmes raisons pour lesquelles nous avons vu précédemment que y , u et v doivent être fonctions de θ et de l'angle $\theta + \sigma$, p' ne peut être pareillement que fonction de ces deux quantités, on en conclura que G , ne renfermant point σ , ne peut renfermer le temps t , et qu'ainsi cette quantité doit être indépendante de t , θ et σ .

Au moyen de cette valeur de p' et de celle que nous avons trouvée précédemment pour y , on pourra déterminer la précession des équinoxes et la nutation de l'axe de la Terre qui résultent de l'action du Soleil et de la Lune sur la mer; nous allons nous occuper de cette recherche intéressante, mais il ne sera pas inutile de faire auparavant quelques réflexions sur le degré de précision de la théorie précédente.

XXI.

Nous avons supposé, dans cette théorie, h , t et v constants; supposons, maintenant, que l'on veuille avoir égard à la variabilité de ces

quantités; on reprendra les équations (6), (7) et (9) de l'article VI :

$$(6) \quad y = -l\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lu \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} - 2n \frac{dv}{dt} \sin \theta \cos \theta \\ = -g \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \Delta B \\ + K \sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma + \frac{1}{2} \sin^2 \gamma \cos(2\gamma - 2nt - 2\omega) \right] \\ + 2K \cos 2\theta \sin \gamma \cos \gamma \cos(\gamma - nt - \omega), \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 v}{dt^2} \sin^2 \theta + 2n \frac{du}{dt} \sin \theta \cos \theta \\ = -g \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} + \Delta C \sin \theta + K \sin \gamma \cos \gamma \sin 2\theta \sin(\gamma - nt - \omega) \\ + K \sin^2 \gamma \sin^2 \theta \sin(2\gamma - 2nt - 2\omega). \end{cases}$$

Prenons pour premier méridien celui qui est perpendiculaire au plan de l'écliptique; soit s la latitude de l'astre au-dessus du plan de l'écliptique, s étant toujours une très petite quantité dont nous négligerons le carré et les puissances supérieures; soit encore $90^\circ - \varepsilon$ l'angle que forme le plan de l'écliptique avec celui de l'équateur, et nommons z le mouvement vrai de l'astre rapporté à l'écliptique, en prenant pour origine l'équinoxe du printemps; φ exprimera la distance de l'astre au premier méridien comptée sur l'équateur, et si l'on fait passer un plan par le centre de la Terre, par celui de l'astre et par le point de l'équinoxe, l'angle que formera ce plan avec l'équateur sera $90^\circ - \varepsilon + \frac{s}{\sin z}$; or, en considérant le triangle sphérique formé par ce plan, par l'équateur et par le méridien de l'astre, on trouvera par la Trigonométrie sphérique

$$\frac{\cos\left(\varepsilon - \frac{s}{\sin z}\right)}{\cos \gamma} = \frac{1}{\sin z};$$

partant, on aura

$$\cos \gamma = \cos \varepsilon \sin z + s \sin \varepsilon;$$

d'où l'on tire

$$\sin \gamma = \sqrt{\cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \sin^2 z - 2s \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin z};$$

on aura ensuite

$$\frac{1}{\sin\left(\varepsilon - \frac{s}{\sin z}\right)} = \frac{\sin z \sin \varphi}{\cos z \cos \varphi},$$

d'où l'on tire

$$\cos \varphi = \frac{\sin \varepsilon \sin z - s \cos \varepsilon}{\sqrt{\cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \sin^2 z - 2s \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin z}},$$

$$\sin \varphi = \frac{-\cos z}{\sqrt{\cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \sin^2 z - 2s \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin z}};$$

partant,

$$\sin \gamma \cos \gamma \sin \varphi = -(\cos \varepsilon \sin z + s \sin \varepsilon) \cos z$$

et

$$\sin \gamma \cos \gamma \cos \varphi = (\sin \varepsilon \sin z - s \cos \varepsilon) (\cos \varepsilon \sin z + s \sin \varepsilon);$$

on a présentement

$$\alpha K = \frac{3S}{2h^3}$$

et

$$\cos(\varphi - nt - \omega) = \sin \varphi \sin(nt + \omega) + \cos \varphi \cos(nt + \omega);$$

substituant donc, au lieu de h , s et z , leurs valeurs en temps moyen dans la quantité

$$K \sin \gamma \cos \gamma \cos(\varphi - nt - \omega),$$

on aura une suite de termes de cette forme

$$K' \cos(nt + mt + \omega + \Lambda).$$

On substituera la somme de tous ces termes au lieu de

$$K \sin \gamma \cos \gamma \cos(\varphi - nt - \omega),$$

dans l'équation (7), et comme la quantité

$$K \sin \gamma \cos \gamma \sin(\varphi - nt - \omega)$$

de l'équation (9) résulte de la différentiation de la quantité

$$K \sin \gamma \cos \gamma \cos(\varphi - nt - \omega)$$

par rapport à ϖ , il est clair que chaque terme tel que

$$K' \cos(nt + mt + \varpi + \Lambda)$$

de l'expression de

$$K \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - nt - \varpi)$$

donnera le terme

$$-K' \sin(nt + mt + \varpi + \Lambda),$$

dans l'expression de

$$K \sin \nu \cos \nu \sin(\varphi - nt - \varpi),$$

et ce sera la somme de tous ces termes qu'il faudra substituer au lieu de cette quantité dans l'équation (9).

On a pareillement

$$\cos(2\varphi - 2nt - 2\varpi) = \sin 2\varphi \sin(2nt + 2\varpi) + \cos 2\varphi \cos(2nt + 2\varpi);$$

de plus, on a par ce qui précède

$$\sin^2 \nu \sin 2\varphi = -2 \cos z (\sin z \sin z - s \cos z),$$

$$\sin^2 \nu \cos 2\varphi = \sin^2 z \sin^2 z - \cos^2 z - 2s \sin z \cos z \sin z;$$

on aura donc, au lieu de

$$K \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2nt - 2\varpi),$$

une suite de termes de cette forme

$$K' \cos(2nt + 2mt + 2\varpi + 2\Lambda),$$

et comme on a

$$K \sin^2 \nu \sin(2\varphi - 2nt - 2\varpi) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varpi} K \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2nt - 2\varpi),$$

le terme

$$K' \cos(2nt + 2mt + 2\varpi + 2\Lambda)$$

donnera le terme

$$-K' \sin(2nt + 2mt + 2\varpi + 2\Lambda),$$

dans la quantité

$$K \sin^2 \nu \sin(2\varphi - 2nt - 2\varpi)$$

de l'équation (9).

Enfin la quantité

$$\frac{1}{2} K (\sin^2 \nu - 2 \cos^2 \nu) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} K (1 - 3 \cos^2 \nu)$$

donnera une suite de termes de la forme

$$K' \cos(mt + \Lambda).$$

Considérons maintenant un terme quelconque de l'équation (7), tel que

$$2K' \cos 2\theta \cos(nt + mt + \varpi + \Lambda),$$

et supposons, pour plus de simplicité, la densité du fluide nulle; on pourra facilement y avoir égard ensuite, comme nous l'avons fait précédemment. Le correspondant du terme

$$2K' \cos 2\theta \cos(nt + mt + \varpi + \Lambda)$$

sera, dans l'équation (9),

$$-K' \sin 2\theta \sin(nt + mt + \varpi + \Lambda);$$

en n'ayant égard qu'à ces termes, on supposera, conformément à la méthode précédente,

$$y = a \cos(nt + mt + \varpi + \Lambda),$$

$$u = b \cos(nt + mt + \varpi + \Lambda)$$

et

$$v = c \sin(nt + mt + \varpi + \Lambda),$$

a , b et c étant fonctions de θ seul; en substituant ces valeurs de y , u et v dans les équations (6), (7) et (9), on aura les trois suivantes

$$a = -l\gamma \left(\frac{\partial b}{\partial \theta} + c + b \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lb \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

$$-(n+m)^2 b - 2n(n+m)c \sin \theta \cos \theta = -g \frac{\partial a}{\partial \theta} + 2K' \cos 2\theta,$$

$$-(n+m)^2 c \sin^2 \theta - 2n(n+m)b \sin \theta \cos \theta = ga - K' \sin 2\theta.$$

Lorsque m est très petit par rapport à n , on peut, sans craindre aucune erreur sensible, déterminer a , b et c , comme si l'on avait $m = 0$; d'où il suit qu'alors les parties des expressions de y , u et v , qui dépendent

des quantités

$$2K \cos 2\theta \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - nt - \omega)$$

et

$$K \sin \nu \cos \nu \sin 2\theta \sin(\varphi - nt - \omega),$$

seront à très peu près les mêmes que celles que l'on aurait en regardant φ , ν et K comme constants dans l'intégration, et en substituant ensuite, au lieu de ces quantités, leurs véritables valeurs variables, ainsi que nous l'avons prescrit dans l'article XVII.

Considérons un autre terme quelconque de l'équation (7), tel que

$$\frac{1}{2} K' \sin 2\theta \cos(2nt + 2m't + 2\omega + 2\Lambda'),$$

dont le correspondant dans l'équation (9) est

$$-K' \sin^2 \theta \sin(2nt + 2m't + 2\omega + 2\Lambda');$$

on supposera, en n'ayant égard qu'à ce terme,

$$y = a' \cos(2nt + 2m't + 2\omega + 2\Lambda'),$$

$$u = b' \cos(2nt + 2m't + 2\omega + 2\Lambda'),$$

$$v = c' \sin(2nt + 2m't + 2\omega + 2\Lambda'),$$

et l'on aura, pour déterminer a' , b' et c' , les trois équations

$$a = -l\gamma \left(\frac{\partial b'}{\partial \theta} + 2c' + b' \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lb' \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

$$-4(n+m')^2 b' - 4n(n+m')c' \sin \theta \cos \theta = -g \frac{\partial a'}{\partial \theta} + \frac{1}{2} K' \sin 2\theta,$$

$$-4(n+m')^2 c' \sin^2 \theta - 4n(n+m')b' \sin \theta \cos \theta = 2ga' - K' \sin^2 \theta;$$

on voit facilement encore que, si m' est très petit par rapport à n , les parties des expressions de y , u et v qui dépendent des quantités

$$\frac{1}{2} K \sin 2\theta \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2nt - 2\omega)$$

et

$$K \sin^2 \nu \sin^2 \theta \sin(2\varphi - 2nt - 2\omega)$$

sont à très peu près les mêmes que celles que l'on aurait en regardant φ , ν et K comme constants durant l'intégration, et en substituant ensuite, au lieu de ces quantités, leurs valeurs variables.

Relativement au Soleil, les quantités m , m' , ... sont très petites par rapport à n , parce que le mouvement moyen du Soleil dans son orbite n'est que la $\frac{1}{365}$ partie environ du mouvement de rotation de la Terre; ainsi les parties des expressions de y , u et v qui dépendent des quantités

$$\frac{1}{2} K \sin 2\theta \sin^2 \nu \cos(2\varphi - 2nt - 2\omega),$$

$$K \sin^2 \nu \sin^2 \theta \sin(2\varphi - 2nt - 2\omega),$$

$$2K \cos 2\theta \sin \nu \cos \nu \cos(\varphi - nt - \omega),$$

$$K \sin \nu \cos \nu \sin 2\theta \sin(\varphi - nt - \omega),$$

qui se trouvent dans les équations (7) et (9), sont à très peu près les mêmes pour le Soleil que celles que nous avons déterminées par la théorie précédente. L'approximation est un peu moins exacte pour la Lune, parce que son mouvement est plus rapide; mais, comme il n'est encore que $\frac{1}{27}$ de celui de rotation de la Terre, on peut la regarder comme suffisamment exacte.

Il nous reste présentement à considérer les termes de la forme

$$K' \sin 2\theta \cos(mt + \Lambda),$$

que donne le développement de la quantité

$$K \sin 2\theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right).$$

On supposera, comme précédemment,

$$y = a \cos(mt + \Lambda),$$

$$u = b \cos(mt + \Lambda)$$

et

$$v = c \sin(mt + \Lambda),$$

et l'on aura, pour déterminer a , b , c , les équations

$$a = -l\gamma \left(\frac{\partial b}{\partial \theta} + b \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lb \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

$$-m^2 b - 2nmc \sin \theta \cos \theta = -g \frac{\partial a}{\partial \theta} + K' \sin 2\theta,$$

$$-m^2 c \sin^2 \theta - 2nmb \sin \theta \cos \theta = 0.$$

Si l'on supposait la Terre immobile, en transportant en sens contraire à l'astre son mouvement angulaire de rotation, il faudrait faire $n = 0$ dans les équations précédentes; on aurait alors $c = 0$, et en négligeant les quantités de l'ordre m^2 , ce qui est permis, à cause de la lenteur du mouvement de l'astre dans son orbite, on aurait les deux équations

$$a = -l\gamma \left(\frac{\partial b}{\partial \theta} + b \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lb \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

$$0 = -g \frac{\partial a}{\partial \theta} + K' \sin 2\theta;$$

d'où il résulte que les parties des expressions de γ , u et v qui dépendent de la quantité

$$K \sin 2\theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right)$$

seraient alors à très peu près les mêmes que celles que l'on aurait en regardant ν et K comme constants; mais il n'en est pas ainsi lorsqu'on a égard au mouvement de rotation de la Terre: dans ce cas, on a

$$c = -\frac{2n}{m} b \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

et l'on déterminera a et b au moyen des deux équations

$$a = -l\gamma \left(\frac{\partial b}{\partial \theta} + b \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lb \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

$$b(4n^2 \cos^2 \theta - m^2) = -g \frac{\partial a}{\partial \theta} + K' \sin 2\theta,$$

en sorte que a et b ne sont plus ici les mêmes que dans la supposition de $n = 0$; la valeur de c , et par conséquent celle de v , sera fort grande, si m est très petit par rapport à n , ce qui a lieu pour le Soleil, car on verra facilement, par ce qui précède, que mt est égal au double du moyen mouvement du Soleil, qui est très petit par rapport à $2nt$, en sorte que $\frac{2n}{m}$ est fort grand et à peu près égal à 365; mais le terme le plus considérable de v est celui qui dépend de l'inclinaison de l'orbite

lunaire, car il est facile de s'assurer que la quantité

$$K \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right)$$

produira un terme de cette forme

$$K' p \sin 2\theta \cos(m't + A').$$

p étant la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbite de la Lune et $m't$ représentant le mouvement moyen de son nœud; or ce mouvement étant environ dix-huit fois moindre que celui du Soleil, on aura, à peu près,

$$\frac{2n}{m'} = 36.365,$$

partant

$$c = -36.365 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b;$$

à la vérité, la tangente p étant fort petite, b et a seront eux-mêmes peu considérables, et la valeur de c en sera beaucoup diminuée; malgré cette diminution, le terme $c \sin(m't + A')$ restera encore le plus considérable de l'expression de v .

Il résulte de là que les parties des expressions de γ , u et v qui dépendent de la quantité

$$K \sin 2\theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right)$$

sont bien différentes de celles que l'on a en regardant K et ν comme constants; mais on doit observer qu'à cause de la lenteur avec laquelle les angles $mt, m't, \dots$ croissent, on ne peut se dispenser, dans la détermination des quantités a, b et c , d'avoir égard à la résistance que les eaux de la mer éprouvent, et en vertu de laquelle elles se remettraient bientôt dans leur état d'équilibre si l'action du Soleil et de la Lune venait à cesser. Supposons ici que cette résistance soit proportionnelle à la vitesse, il faut alors ajouter au premier membre de l'équation (7) la quantité $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$, et, au premier membre de l'équation (9), la quantité $\rho \frac{\partial v}{\partial t} \sin^2 \theta$, ρ étant un coefficient constant dépendant de l'intensité de la résistance. Pour avoir ensuite les parties des expressions

de y , u et v qui dépendent du terme $K' \sin 2\theta \cos(mt + A)$, on fera

$$y = a \cos(mt + A) + a' \sin(mt + A),$$

$$u = b \cos(mt + A) + b' \sin(mt + A),$$

$$v = c \sin(mt + A) + c' \cos(mt + A),$$

et, en substituant ces valeurs dans les équations (6), (7) et (9), on aura, pour déterminer les six quantités a , a' , b , b' , c , c' , les six équations suivantes :

$$a = -l\gamma \left(\frac{\partial b}{\partial \theta} + b \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lb \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

$$a' = -l\gamma \left(\frac{\partial b'}{\partial \theta} + b' \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lb' \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

$$-m^2 b + \rho m b' - 2 n m c \sin \theta \cos \theta = -g \frac{\partial a}{\partial \theta} + K' \sin 2\theta,$$

$$-m^2 b' - \rho m b + 2 n m c' \sin \theta \cos \theta = -g \frac{\partial a'}{\partial \theta},$$

$$-m^2 c \sin^2 \theta - \rho m c' \sin^2 \theta - 2 n m b \sin \theta \cos \theta = 0,$$

$$-m^2 c' \sin^2 \theta + \rho m c \sin^2 \theta + 2 n m b' \sin \theta \cos \theta = 0;$$

si ρ est beaucoup plus grand que m , les quatre dernières de ces équations donneront, en négligeant les quantités de l'ordre m ,

$$c = -\frac{2n}{\rho} b' \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad c' = -\frac{2n}{\rho} b \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

$$0 = -g \frac{\partial a'}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad -g \frac{\partial a}{\partial \theta} + K' \sin 2\theta = 0.$$

On satisfera donc à toutes les équations précédentes, en faisant

$$b' = 0, \quad c = 0, \quad a' = 0$$

et en déterminant a , b , c au moyen des équations

$$a = -l\gamma \left(\frac{\partial b}{\partial \theta} + b \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - lb \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

$$0 = -g \frac{\partial a}{\partial \theta} + K' \sin 2\theta,$$

$$c = -\frac{2n}{\rho} b \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

On voit ainsi que les valeurs de a et b se détermineront comme si l'on avait $m = 0$, et qu'ainsi la partie de l'expression de y qui dépend de la quantité

$$K \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right)$$

est alors à peu près la même que celle que l'on trouve en regardant K et ν comme constants.

La supposition de ρ beaucoup plus grand que m paraît être vraie par rapport au Soleil, car on peut supposer ρ proportionnel au temps qui serait nécessaire pour que la mer reprît son état d'équilibre si l'action du Soleil et de la Lune venait à cesser; or il est très vraisemblable que ce temps serait beaucoup moindre qu'une année; d'où il suit que la valeur entière de y , que nous avons déterminée par la théorie précédente, peut être regardée comme fort approchée par rapport au Soleil. Cette même supposition de ρ beaucoup plus grand que m pourrait n'être pas exacte par rapport à la Lune, et alors la partie de l'expression de y qui dépend de la quantité

$$K \left(\frac{1}{2} \sin^2 \nu - \cos^2 \nu \right)$$

pourrait être sensiblement différente de celle que l'on trouve en supposant K et ν constants; il paraît impossible de la déterminer par la théorie, parce qu'on ignore la loi de la résistance en vertu de laquelle la mer tend sans cesse à se remettre en équilibre; heureusement cette quantité n'influe que sur les hauteurs absolues de la mer, suivant les différentes déclinaisons de la Lune, et ne change rien aux autres phénomènes des marées, en sorte que, si l'on suppose, en vertu de l'action de la Lune,

$$y = a + b \sin \nu \cos \nu \cos(it + \omega) + c \sin^2 \nu \cos(2it + 2\omega),$$

b et c seront à peu près les mêmes que par la théorie précédente, et il ne peut rester d'incertitude que sur la valeur de a ; nous croyons cependant que cette valeur ne s'éloigne pas beaucoup de celle que donne notre théorie.

La considération d'une résistance proportionnelle à la vitesse peut servir à lever une difficulté que l'on pourrait faire sur ce que nous avons supposé, article XV, que $\frac{\partial v}{\partial m}$ ne renferme aucun terme constant, c'est-à-dire indépendant du temps t . En considérant, en effet, les articles II et III, on voit que, pour l'exactitude de nos calculs, il suffit que y , u et $\frac{\partial v}{\partial m}$ ne renferment que des termes constants ou périodiques, en sorte que v peut, sans nuire à cette exactitude, renfermer un terme proportionnel au temps; mais, si l'on reprend les équations (I) de l'article XV, on verra facilement que la supposition d'une résistance proportionnelle à la vitesse introduit, dans le premier membre de la seconde de ces équations, le terme $\rho t \frac{\partial u}{\partial m}$, et, dans le premier membre de la troisième de ces équations, le terme $\rho t \frac{\partial v}{\partial m} \sin^2 \theta$; or il est impossible de satisfaire alors à cette dernière équation, en supposant que $\frac{\partial v}{\partial m}$ renferme un terme constant, sans que $\frac{\partial u}{\partial m}$ ou $\frac{\partial y}{\partial m}$ en renferme.

On peut faire une remarque entièrement semblable sur toutes les manières de satisfaire aux équations (I) de l'article XV, différentes de celle que nous avons employée: il est clair, en effet, que la supposition d'une légère résistance proportionnelle à la vitesse ne fera que changer extrêmement peu les valeurs que nous avons trouvées ci-dessus pour y , u et v ; or, dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle à la vitesse, le fluide n'a qu'une manière possible de se mouvoir; car, si l'on suppose, par exemple, qu'il en existe deux, et que l'on nomme y' , u' et v' ce que sont y , u et v dans la première et y'' , u'' et v'' ce que sont y , u et v dans la seconde, les équations du problème étant linéaires, il est clair que $y'' - y'$, $u'' - u'$ et $v'' - v'$ satisferont pour y , u et v à ces mêmes équations, en y supposant $K = 0$, c'est-à-dire en supposant l'astre attirant anéanti; mais il est évident que, dans ce cas, le fluide doit à la longue se mettre en équilibre, ce qui donne

$$y'' - y' = 0, \quad u'' - u' = 0 \quad \text{et} \quad v'' - v' = 0.$$

Donc le fluide n'a qu'une façon possible de se mouvoir dans l'hypothèse d'une légère résistance proportionnelle à la vitesse; or, en négligeant les termes de l'ordre de cette résistance, on aura pour y , u et v les valeurs que nous avons trouvées précédemment, ce qui peut servir de confirmation aux raisonnements de l'article XIV.