

SUPPLÉMENTS.

PREMIER SUPPLÉMENT.

SUR L'APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA PHILOSOPHIE NATURELLE.

Les phénomènes de la nature sont le plus souvent enveloppés de tant de circonstances étrangères, un si grand nombre de causes perturbatrices y mêlent leur influence, qu'il est très difficile de les reconnaître. On ne peut y parvenir qu'en multipliant les observations ou les expériences, afin que les effets étrangers venant à se détruire réciproquement, les résultats moyens mettent en évidence ces phénomènes et leurs éléments divers. Plus les observations sont nombreuses et moins elles s'écartent entre elles, plus leurs résultats approchent de la vérité. On remplit cette dernière condition par le choix des méthodes, par la précision des instruments et par le soin que l'on met à bien observer. Ensuite on détermine par la théorie des probabilités les résultats moyens les plus avantageux ou ceux qui donnent le moins de prise à l'erreur. Mais cela ne suffit pas; il est de plus nécessaire d'apprécier la probabilité que les erreurs de ces résultats sont comprises dans des limites données. Sans cela, on n'a qu'une connaissance imparfaite du degré d'exactitude obtenu. Des formules propres à cet objet sont donc un vrai perfectionnement de la méthode des sciences, et qu'il est bien important d'ajouter à cette méthode. L'analyse qu'elles exigent est la plus délicate et la plus difficile de la théorie des probabilités. C'est une des choses que j'ai eue principalement en vue dans mon Ouvrage, dans lequel je suis parvenu à des formules de ce genre, qui ont l'avantage remarquable d'être indépendantes de la loi de probabilités des erreurs et de ne renfermer que des quantités données par les obser-

vations mêmes et par leurs expressions. Je vais en rappeler ici les principes.

Chaque observation a pour expression analytique une fonction des éléments que l'on veut déterminer; et, si ces éléments sont à peu près connus, cette fonction devient une fonction linéaire de leurs corrections. En l'égalant à l'observation même, on forme ce que l'on nomme *équation de condition*. Si l'on a un grand nombre d'équations semblables, on les combine, de manière à obtenir autant d'équations finales qu'il y a d'éléments dont on détermine ensuite les corrections, en résolvant ces équations. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition pour obtenir les équations finales? Quelle est la loi des erreurs dont les éléments que l'on en tire sont encore susceptibles? C'est ce que la théorie des probabilités fait connaître. La formation d'une équation finale, au moyen des équations de condition, revient à multiplier chacune de celles-ci par un facteur indéterminé et à réunir ces produits; mais il faut choisir le système de facteurs qui donne la plus petite erreur à craindre. Or il est visible que, si l'on multiplie les erreurs possibles d'un élément par leurs probabilités respectives, le système le plus avantageux sera celui dans lequel la somme de ces produits, tous pris positivement, est un minimum: car une erreur positive ou négative doit être considérée comme une perte. En formant donc cette somme de produits, la condition du minimum déterminera le système de facteurs qu'il faut choisir. On trouve ainsi que ce système est celui des coefficients des éléments dans chaque équation de condition, en sorte que l'on forme une première équation finale en multipliant respectivement chaque équation de condition par son coefficient du premier élément et en réunissant toutes ces équations ainsi multipliées. On forme une seconde équation finale en employant de même les coefficients du second élément, et ainsi de suite. De cette manière, les éléments et les lois des phénomènes, renfermés dans le recueil d'un grand nombre d'observations, se développent avec le plus d'évidence. J'ai donné, dans le n° 21 du Livre II de ma *Théorie analytique des Probabilités*, l'expression de l'erreur moyenne à

craindre sur chaque élément. Cette expression donne la probabilité des erreurs dont l'élément est encore susceptible, et qui est proportionnelle au nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, élevé à une puissance égale au carré de l'erreur pris en moins et divisé par le carré du double de cette expression et par le rapport de la circonférence au diamètre. Le coefficient du carré négatif de l'erreur dans cet exposant peut donc être considéré comme le module de la probabilité des erreurs, puisque l'erreur restant la même, la probabilité décroît avec rapidité quand il augmente, en sorte que le résultat obtenu pèse, si je puis ainsi dire, vers la vérité, d'autant plus que ce module est plus grand. Je nommerai, par cette raison, ce module *poids* du résultat. Par une analogie remarquable de ces poids avec ceux des corps comparés à leur centre commun de gravité, il arrive que, si un même élément est donné par divers systèmes, composés chacun d'un grand nombre d'observations, le résultat moyen le plus avantageux de leur ensemble est la somme des produits de chaque résultat partiel par son poids, cette somme étant divisée par la somme de tous les poids. De plus le poids total des divers systèmes est la somme de leurs poids partiels, en sorte que la probabilité du résultat moyen de leur ensemble est proportionnelle au nombre qui a l'unité pour logarithme hyperbolique, élevé à une puissance égale au carré de l'erreur, pris en moins et multiplié par la somme de tous les poids. Chaque poids dépend, à la vérité, de la loi de probabilité des erreurs dans chaque système, et presque toujours cette loi est inconnue; mais je suis heureusement parvenu à éliminer le facteur qui la renferme, au moyen de la somme des carrés des écarts des observations du système, de leur résultat moyen. Il serait donc à désirer, pour compléter nos connaissances sur les résultats obtenus par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, qu'on écrivit à côté de chaque résultat le poids qui lui correspond. Pour faciliter le calcul de ce poids, je développe son expression analytique, lorsque l'on n'a pas plus de trois éléments à déterminer. Mais, cette expression devenant de plus en plus compliquée à mesure que le nombre des éléments augmente, je donne un moyen fort simple pour

déterminer le poids d'un résultat, quel que soit le nombre des éléments. Quand on a ainsi obtenu l'exponentielle qui représente la loi de probabilité des erreurs, on aura la probabilité que l'erreur du résultat est comprise dans des limites données, en prenant, dans ces limites, l'intégrale du produit de cette exponentielle par la différentielle de l'erreur et en la multipliant par la racine carrée du poids du résultat divisé par la circonférence dont le diamètre est l'unité. De là il suit que, pour une même probabilité, les erreurs des résultats sont réciproques aux racines carrées de leurs poids, ce qui peut servir à comparer leur précision respective.

Pour appliquer cette méthode avec succès, il faut varier les circonstances des observations ou des expériences, de manière à éviter les causes constantes d'erreur. Il faut que les observations soient nombreuses et qu'elles le soient d'autant plus qu'il y a plus d'éléments à déterminer; car le poids du résultat moyen croît comme le nombre des observations divisé par le nombre des éléments. Il est encore nécessaire que les éléments suivent, dans ces observations, une marche différente; car, si la marche de deux éléments était rigoureusement la même, ce qui rendrait leurs coefficients proportionnels dans les équations de condition, ces éléments ne formeraient qu'une seule inconnue, et il serait impossible de les distinguer par ces observations. Enfin il faut que les observations soient précises. Cette condition, la première de toutes, augmente beaucoup le poids du résultat, dont l'expression a pour diviseur la somme des carrés de leurs écarts de ce résultat. Avec ces précautions, on pourra faire usage de la méthode précédente et mesurer le degré de confiance que méritent les résultats déduits d'un grand nombre d'observations.

1. Un grand avantage de cette méthode, qui permet d'en évaluer numériquement les expressions, est, comme nous l'avons dit, d'être indépendante de la loi de probabilité des erreurs des observations. Le facteur $\frac{2k''}{k} a^2 s$, qui dépend de cette loi, a été éliminé des formules des nos 19 et 21 du Livre II, en observant que ce facteur qui est la somme des

carrés de toutes les erreurs possibles des observations, multipliées par leurs probabilités respectives, et qui exprime ainsi la vraie moyenne de ces carrés, est très probablement égal à la somme des carrés des restes des équations de condition, lorsqu'on y a substitué les éléments déterminés par la méthode la plus avantageuse. L'importance de cette méthode dans la philosophie naturelle exige que l'incertitude qu'elle peut laisser soit dissipée, et la seule qui reste encore est relative à l'égalité dont je viens de parler. Je vais d'abord éclaircir ce point délicat de la théorie des probabilités et faire voir que l'égalité précédente peut être employée sans erreur sensible.

La somme des carrés des erreurs des observations, dont le nombre est s , étant supposée égale à $\frac{2k''}{k} a^2 s + a^2 r \sqrt{s}$, la probabilité que la valeur de r est comprise dans des limites données est, par le n° 19 cité,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^r dr e^{-\frac{r^2}{2}},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites. Représentons l'équation générale de condition des éléments $z, z', \dots$ par celle-ci

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)} z + q^{(i)} z' + \dots - \alpha^{(i)},$$

$\varepsilon^{(i)}$ étant l'erreur de l'observation. Les éléments $z, z', \dots$ étant déterminés par la méthode la plus avantageuse, désignons par $u, u', \dots$ leurs erreurs; nous aurons, en nommant $\varepsilon^{(i)}$ le reste de la fonction

$$p^{(i)} z + q^{(i)} z' + \dots - \alpha^{(i)}$$

lorsqu'on y a substitué pour $z, z', \dots$ leurs valeurs ainsi déterminées,

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i)} + p^{(i)} u + q^{(i)} u' + \dots,$$

ce qui donne

$$S \varepsilon^{(i)2} = S \varepsilon^{(i)2} + 2 S \varepsilon^{(i)} (p^{(i)} u + q^{(i)} u' + \dots) + S (p^{(i)} u + q^{(i)} u' + \dots)^2,$$

le signe intégral S s'étendant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$. Mais, par les conditions de la méthode la plus avan-

tageuse, on a

$$Sp^{(i)}t^{(i)} = 0, \quad Sq^{(i)}t^{(i)} = 0, \quad \dots;$$

on a donc

$$Se^{(i)2} = Se^{(i)2} + S(p^{(i)}u + q^{(i)}u' + \dots)^2;$$

en comparant cette valeur de $Se^{(i)2}$ à sa valeur précédente $\frac{2h''}{k}a^2s + a^2r\sqrt{s}$, on aura

$$a^2r\sqrt{s} = Se^{(i)2} - \frac{2h''}{k}a^2s = t\sqrt{s},$$

Faisons

$$Se^{(i)2} - \frac{2h''}{k}a^2s = t\sqrt{s},$$

$$u = \frac{v}{\sqrt{s}}, \quad u' = \frac{v'}{\sqrt{s}}, \quad u'' = \frac{v''}{\sqrt{s}}, \quad \dots;$$

nous aurons

$$a^2r = t + \frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2}{s\sqrt{s}}.$$

L'exponentielle $c^{-\frac{t^2}{2s}}$ devient ainsi

$$c^{-\frac{t^2}{2s}} \left[1 + \frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2}{s\sqrt{s}} \right];$$

ainsi la probabilité de t est proportionnelle à cette exponentielle.

L'analyse du n° 21 du Livre II conduit à ce théorème général, savoir que la probabilité de l'existence simultanée des quantités $u, u', u'', \dots$ est proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{-\frac{h}{4v^2a^2} S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2};$$

la probabilité de l'existence simultanée de $t, v, v', v'', \dots$ est donc proportionnelle à

$$c^{-\frac{t^2}{2s}} \left[1 + \frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2}{s\sqrt{s}} \right] - \frac{h}{4v^2a^2} S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2;$$

En substituant pour $\frac{4h''}{k}a^2s$ sa valeur $2Se^{(i)2} - 2t\sqrt{s}$, cette exponentielle

se réduit, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{s}$, à la fonction suivante :

$$\left[1 - \frac{t\sqrt{s}}{2(Se^{(i)2})^2} S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2 \right] c^{-\frac{t^2}{2s}} \left[1 + \frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2}{s\sqrt{s}} \right] - \frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2}{2Se^{(i)2}}.$$

Maintenant, pour avoir la probabilité que la valeur de v est comprise dans des limites données, il faut : 1° multiplier cette fonction par $dt dv dv' \dots$; 2° prendre l'intégrale du produit pour toutes les valeurs possibles de $t, v', v'', \dots$; et, par rapport à v , intégrer seulement dans les limites données; 3° diviser le tout par cette même intégrale prise par rapport à toutes les valeurs possibles de $t, v, v', \dots$. En regardant $Se^{(i)2}$ comme une donnée de l'observation, t ne varie qu'à raison de la valeur inconnue $\frac{2h''}{k}a^2s$, et cette valeur peut varier depuis zéro jusqu'à l'infini; t peut donc varier depuis $\frac{Se^{(i)2}}{\sqrt{s}}$ jusqu'à l'infini négatif; et, comme $Se^{(i)2}$ est de l'ordre s , t peut varier depuis l'infini négatif jusqu'à une valeur positive de l'ordre $\sqrt{s}$. L'exponentielle précédente devient, à cette limite de l'intégrale prise par rapport à t , de la forme $e^{-\frac{t^2}{2s}}$ et pourra être supposée nulle, à cause de la grandeur de s . Ainsi l'on peut prendre l'intégrale relative à t , depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Pareillement les intégrales relatives à $v', v'', \dots$ peuvent être prises dans les mêmes limites. Si l'on fait

$$t + \frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2}{s\sqrt{s}} = t',$$

l'intégrale relative à t' pourra être prise par rapport à t' depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = \infty$.

De là il est facile de conclure que la probabilité que v est compris dans des limites données est proportionnelle à l'intégrale

$$\int dv dv' \dots \left\{ 1 + \frac{[S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2]^2}{2(Se^{(i)2})^2 s} \right\} c^{-\frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2}{2Se^{(i)2}}},$$

les intégrales étant prises depuis $v', v'', \dots$ égaux à $-\infty$ jusqu'à leurs

valeurs infinies positives et par rapport à v dans les limites données, et étant divisée par la même intégrale étendue aux valeurs infinies positives et négatives de $v, v', v'', \dots$

La considération de la différence qui peut exister entre $\frac{2h''}{k}a^2s$ et $S\varepsilon^{(i)2}$ n'introduit donc dans l'expression de la probabilité dont il s'agit qu'un terme de l'ordre $\frac{1}{s}$, ordre que je me suis permis de négliger dans mon Ouvrage. Par là, l'intégrale précédente devient

$$\int dv dv' \dots c \frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \dots)^2}{2S\varepsilon^{(i)2}}.$$

Si l'on fait

$$p_i^{(i)} = p^{(i)} - \frac{q^{(i)}S p^{(i)} q^{(i)}}{S q^{(i)2}},$$

$$p_i^{(i)} = p^{(i)} - \frac{q^{(i)}S r^{(i)} q^{(i)}}{S q^{(i)2}},$$

$$t_i^{(i)} = t^{(i)} - \frac{q^{(i)}S t^{(i)} q^{(i)}}{S q^{(i)2}},$$

$$\dots\dots\dots,$$

l'exponentielle

$$c \frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + r^{(i)}v'' + \dots)^2}{2S\varepsilon^{(i)2}},$$

pourra être mise sous cette forme

$$c \frac{S(p_i^{(i)}v + r_i^{(i)}v'' + \dots)^2}{2S\varepsilon^{(i)2}} - \frac{S q^{(i)2}}{2S\varepsilon^{(i)2}} \left(v' + \frac{2S p^{(i)} q^{(i)} + v'' S r^{(i)} q^{(i)} + \dots}{S q^{(i)2}} \right)^2.$$

En multipliant cette quantité par dv' , et en l'intégrant depuis $v' = -\infty$ jusqu'à $v' = \infty$, on aura une quantité proportionnelle à

$$c \frac{S(p_i^{(i)}v + r_i^{(i)}v'' + \dots)^2}{2S\varepsilon^{(i)2}},$$

et dans laquelle la variable v' a disparu. En suivant le même procédé, on fera disparaître les variables $v'', v''', \dots$. On arrivera ainsi à une exponentielle de la forme $c^{-\frac{v^2 S p^{(i)2}}{2S\varepsilon^{(i)2}}}$, n étant le nombre des éléments. Si

l'on restitue, au lieu de v , sa valeur $u\sqrt{s}$, cette exponentielle devient

$$e^{-Pn^2},$$

en faisant

$$P = \frac{s S p^{(i)2}}{2 S \varepsilon^{(i)2}}.$$

u étant l'erreur de la valeur de z , P est ce que je nomme *poids* de cette valeur. La probabilité que cette erreur est comprise dans des limites données est donc

$$\frac{\int du \sqrt{P} e^{-P u^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites, et π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité. Mais il est plus simple d'appliquer le procédé dont nous venons de faire usage aux équations finales qui déterminent les éléments, pour les réduire à une seule, ce qui donne une méthode facile de résoudre ces équations.

2. Reprenons l'équation générale de condition, et, pour plus de simplicité, bornons-la aux six éléments $z, z', z'', z''', z^{iv}, z^{v}$; elle devient alors

$$(1) \quad \varepsilon^{(i)} = p^{(i)}z + q^{(i)}z' + r^{(i)}z'' + t^{(i)}z''' + \gamma^{(i)}z^{iv} + \lambda^{(i)}z^v - \alpha^{(i)}.$$

En la multipliant par $\lambda^{(i)}$ et réunissant tous les produits semblables, on aura

$$S\lambda^{(i)}\varepsilon^{(i)} = z S\lambda^{(i)}p^{(i)} + z' S\lambda^{(i)}q^{(i)} + \dots - S\lambda^{(i)}\alpha^{(i)},$$

le signe intégral S s'étendant à toutes les valeurs de i , depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$, s étant le nombre des observations employées. Par les conditions de la méthode la plus avantageuse, on a $S\lambda^{(i)}\varepsilon^{(i)}=0$; l'équation précédente donnera donc

$$z = -z^{iv} \frac{S\lambda^{(i)}\gamma^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}} - z^v \frac{S\lambda^{(i)}t^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}} - z'' \frac{S\lambda^{(i)}r^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}} \\ - z' \frac{S\lambda^{(i)}q^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}} - z \frac{S\lambda^{(i)}p^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}} + \frac{S\lambda^{(i)}\alpha^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (1) et si l'on fait

$$\gamma_i^{(i)} = \gamma^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)}\gamma^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$t_i^{(i)} = t^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)}t^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$r_i^{(i)} = r^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)}r^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$q_i^{(i)} = q^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)}q^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$p_i^{(i)} = p^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)}p^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$\alpha_i^{(i)} = \alpha^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)}\alpha^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

on aura

$$(2) \quad \varepsilon^{(i)} = p_i^{(i)}z + q_i^{(i)}z' + r_i^{(i)}z'' + t_i^{(i)}z''' + \gamma_i^{(i)}z'''' - \alpha_i^{(i)};$$

par ce moyen, l'élément z'' a disparu des équations de condition que représente l'équation (2). En multipliant cette équation par $\gamma_i^{(i)}$ et réunissant tous les produits semblables, en observant ensuite que l'on a

$$S\gamma_i^{(i)}\varepsilon^{(i)} = 0$$

en vertu des équations

$$0 = S\lambda^{(i)}\varepsilon^{(i)}, \quad 0 = S\gamma^{(i)}\varepsilon^{(i)}$$

que donnent les conditions de la méthode la plus avantageuse, on aura

$$0 = z S\gamma_i^{(i)}p_i^{(i)} + z' S\gamma_i^{(i)}q_i^{(i)} + z'' S\gamma_i^{(i)}r_i^{(i)} + z''' S\gamma_i^{(i)}t_i^{(i)} + z'''' S\gamma_i^{(i)}\gamma_i^{(i)} - S\gamma_i^{(i)}\alpha_i^{(i)};$$

d'où l'on tire

$$z'''' = -z'' \frac{S\gamma_i^{(i)}t_i^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}} - z' \frac{S\gamma_i^{(i)}r_i^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}} - z \frac{S\gamma_i^{(i)}q_i^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}} - z \frac{S\gamma_i^{(i)}p_i^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}} + \frac{S\gamma_i^{(i)}\alpha_i^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (2) et si l'on fait

$$t_i^{(i)} = t^{(i)} - \gamma_i^{(i)} \frac{S\gamma_i^{(i)}t^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}},$$

$$r_i^{(i)} = r^{(i)} - \gamma_i^{(i)} \frac{S\gamma_i^{(i)}r^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}},$$

$$q_i^{(i)} = q^{(i)} - \gamma_i^{(i)} \frac{S\gamma_i^{(i)}q^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}},$$

$$p_i^{(i)} = p^{(i)} - \gamma_i^{(i)} \frac{S\gamma_i^{(i)}p^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}},$$

$$\alpha_i^{(i)} = \alpha^{(i)} - \gamma_i^{(i)} \frac{S\gamma_i^{(i)}\alpha^{(i)}}{S\gamma_i^{(i)2}},$$

on aura

$$(3) \quad \varepsilon^{(i)} = p_i^{(i)}z + q_i^{(i)}z' + r_i^{(i)}z'' + t_i^{(i)}z''' - \alpha_i^{(i)}.$$

En continuant ainsi, on parviendra à une équation de la forme

$$(4) \quad \varepsilon^{(i)} = p_i^{(i)}z - \alpha_i^{(i)}.$$

Il résulte du n° 20 du Livre II que, si la valeur de z est déterminée par cette équation et que u soit l'erreur de cette valeur, la probabilité de cette erreur est

$$\sqrt{\frac{2S p_i^{(i)2}}{2S \varepsilon^{(i)2} \pi}} e^{-\frac{2S p_i^{(i)2} u^2}{2S \varepsilon^{(i)2}}},$$

$S\varepsilon^{(i)2}$ étant la somme des carrés des restes des équations de condition, lorsqu'on y a substitué les éléments déterminés par la méthode la plus avantageuse. Le poids P de cette erreur est donc égal à $\frac{2S p_i^{(i)2}}{2S \varepsilon^{(i)2}}$.

Il s'agit maintenant de déterminer $S p_i^{(i)2}$. Pour cela, on multipliera respectivement chacune des équations de condition représentées par l'équation (1), d'abord par le coefficient du premier élément, et l'on prendra la somme de ces produits; ensuite par le coefficient du second élément, et l'on prendra la somme de ces produits, et ainsi du reste. On aura, en observant que par les conditions de la méthode la plus

avantageuse $Sp^{(1)}_{\varepsilon^{(0)}} = 0$, $Sq^{(1)}_{\varepsilon^{(0)}} = 0$, ..., les six équations suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} \overline{p\alpha} = p^{(2)}z + \overline{pq} z' + \overline{pr} z'' + \overline{pt} z''' + \overline{p\gamma} z^{iv} + \overline{p\lambda} z^v, \\ \overline{q\alpha} = \overline{pq} z + q^{(2)}z' + \overline{qr} z'' + \overline{qt} z''' + \overline{q\gamma} z^{iv} + \overline{q\lambda} z^v, \\ \overline{r\alpha} = \overline{rp} z + \overline{rq} z' + r^{(2)}z'' + \overline{rt} z''' + \overline{r\gamma} z^{iv} + \overline{r\lambda} z^v, \\ \overline{t\alpha} = \overline{tp} z + \overline{tq} z' + \overline{tr} z'' + t^{(2)}z''' + \overline{t\gamma} z^{iv} + \overline{t\lambda} z^v, \\ \overline{\gamma\alpha} = \overline{\gamma p} z + \overline{\gamma q} z' + \overline{\gamma r} z'' + \overline{\gamma t} z''' + \gamma^{(2)}z^{iv} + \overline{\gamma\lambda} z^v, \\ \overline{\lambda\alpha} = \overline{\lambda p} z + \overline{\lambda q} z' + \overline{\lambda r} z'' + \overline{\lambda t} z''' + \overline{\lambda\gamma} z^{iv} + \lambda^{(2)}z^v, \end{cases}$$

où l'on doit observer que nous supposons

$$p^{(2)} = Sp^{(1)2}, \quad \overline{pq} = Sp^{(1)}q^{(1)}, \quad q^{(2)} = Sq^{(1)2}, \quad \overline{qr} = Sq^{(1)}r^{(1)}, \quad \dots$$

Si l'on multiplie pareillement les équations de condition représentées par l'équation (2) respectivement par les coefficients de z et que l'on ajoute ces produits, ensuite par les coefficients de z' en ajoutant encore ces produits, et ainsi de suite, on aura le système suivant d'équations, en observant que $Sp^{(1)}_{\varepsilon^{(0)}} = 0$, $Sq^{(1)}_{\varepsilon^{(0)}} = 0$, ..., par les conditions de la méthode la plus avantageuse,

$$(B) \quad \begin{cases} \overline{p_1\alpha_1} = p_1^{(2)}z + \overline{p_1q_1}z' + \overline{p_1r_1}z'' + \overline{p_1t_1}z''' + \overline{p_1\gamma_1}z^{iv}, \\ \overline{q_1\alpha_1} = \overline{p_1q_1}z + q_1^{(2)}z' + \overline{q_1r_1}z'' + \overline{q_1t_1}z''' + \overline{q_1\gamma_1}z^{iv}, \\ \overline{r_1\alpha_1} = \overline{p_1r_1}z + \overline{q_1r_1}z' + r_1^{(2)}z'' + \overline{r_1t_1}z''' + \overline{r_1\gamma_1}z^{iv}, \\ \overline{t_1\alpha_1} = \overline{p_1t_1}z + \overline{q_1t_1}z' + \overline{r_1t_1}z'' + t_1^{(2)}z''' + \overline{t_1\gamma_1}z^{iv}, \\ \overline{\gamma_1\alpha_1} = \overline{p_1\gamma_1}z + \overline{q_1\gamma_1}z' + \overline{r_1\gamma_1}z'' + \overline{t_1\gamma_1}z''' + \gamma_1^{(2)}z^{iv}, \end{cases}$$

où l'on doit observer que

$$\overline{p_1q_1} = Sp^{(1)}q_1^{(1)}, \quad p_1^{(2)} = Sp^{(1)2}, \quad \dots$$

En substituant, au lieu de $p^{(1)}_1$, $q^{(1)}_1$, ..., leurs valeurs précédentes, on a

$$\overline{p_1q_1} = Sp^{(1)}q^{(1)} - \frac{S\lambda^{(1)}p^{(1)}S\lambda^{(1)}q^{(1)}}{S\lambda^{(1)2}}$$

ou

$$\overline{p_1q_1} = \overline{pq} - \frac{\lambda p \lambda q}{\lambda^{(2)}};$$

on a pareillement

$$\begin{aligned} p_1^{(2)} &= p^{(2)} - \frac{\lambda p^2}{\lambda^{(2)}}, \\ q_1^{(2)} &= q^{(2)} - \frac{\lambda q^2}{\lambda^{(2)}}, \\ \overline{p_1r_1} &= \overline{pr} - \frac{\lambda p \lambda r}{\lambda^{(2)}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \overline{p_1\alpha_1} &= \overline{p\alpha} - \frac{\lambda p \lambda \alpha}{\lambda^{(2)}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ainsi les coefficients du système des équations (B) se déduisent facilement des coefficients du système des équations (A).

Les équations de condition représentées par l'équation (3) donneront semblablement le système suivant d'équations

$$(C) \quad \begin{cases} \overline{p_2\alpha_2} = p_2^{(2)}z + \overline{p_2q_2}z' + \overline{p_2r_2}z'' + \overline{p_2t_2}z''', \\ \overline{q_2\alpha_2} = \overline{p_2q_2}z + q_2^{(2)}z' + \overline{q_2r_2}z'' + \overline{q_2t_2}z''', \\ \overline{r_2\alpha_2} = \overline{p_2r_2}z + \overline{q_2r_2}z' + r_2^{(2)}z'' + \overline{r_2t_2}z''', \\ \overline{t_2\alpha_2} = \overline{p_2t_2}z + \overline{q_2t_2}z' + \overline{r_2t_2}z'' + t_2^{(2)}z''', \end{cases}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} p_2^{(2)} &= p_1^{(2)} - \frac{\gamma_1 p_1}{\gamma_1^{(2)}}, \\ \overline{p_2q_2} &= \overline{p_1q_1} - \frac{\gamma_1 p_1 q_1 \gamma_1}{\gamma_1^{(2)}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \overline{p_2\alpha_2} &= \overline{p_1\alpha_1} - \frac{\gamma_1 p_1 \gamma_1 \alpha_1}{\gamma_1^{(2)}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On aura pareillement le système d'équations

$$(D) \quad \begin{cases} \overline{p_3\alpha_3} = p_3^{(2)}z + \overline{p_3q_3}z' + \overline{p_3r_3}z'', \\ \overline{q_3\alpha_3} = \overline{p_3q_3}z + q_3^{(2)}z' + \overline{q_3r_3}z'', \\ \overline{r_3\alpha_3} = \overline{p_3r_3}z + \overline{q_3r_3}z' + r_3^{(2)}z'', \end{cases}$$

en faisant

$$\begin{aligned} p_3^{(2)} &= p_2^{(2)} - \frac{p_2 t_2}{t_2^{(2)}}, \\ p_2 q_3 &= p_2 q_2 - \frac{p_2 t_2 q_2 t_2}{t_2^{(2)}}, \\ p_3 \alpha_3 &= p_2 \alpha_2 - \frac{t_2 p_2 t_2 \alpha_2}{t_2^{(2)}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

on aura encore

$$(E) \quad \begin{cases} p_4 \alpha_4 = p_3^{(2)} z + p_4 q_4 z', \\ q_4 \alpha_4 = p_4 q_4 z + q_4^{(2)} z', \end{cases}$$

en faisant

$$\begin{aligned} p_4^{(2)} &= p_3^{(2)} - \frac{p_3 r_3}{r_3^{(2)}}, \\ p_4 q_4 &= p_3 q_3 - \frac{p_3 r_3 q_3 r_3}{r_3^{(2)}}, \\ p_4 \alpha_4 &= p_3 \alpha_3 - \frac{p_3 r_3 \alpha_3 r_3}{r_3^{(2)}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Enfin on aura

$$(F) \quad p_5 \alpha_5 = p_4^{(2)} z,$$

en faisant

$$p_5^{(2)} = p_4^{(2)} - \frac{p_4 q_4}{q_4^{(2)}}, \quad p_5 \alpha_5 = p_4 \alpha_4 - \frac{p_4 q_4 q_4 \alpha_4}{q_4^{(2)}};$$

$p_5^{(2)}$ est la valeur de $Sp_5^{(2)}$, et le poids P sera

$$\frac{Sp_5^{(2)}}{2S e^{(1/2)}}.$$

On voit par la suite des valeurs de $p^{(2)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots$ qu'elles vont en diminuant sans cesse, et qu'ainsi, pour le même nombre d'observations, le poids P diminue quand le nombre des éléments augmente.

Si l'on considère la suite des équations qui déterminent p_5, α_5 , on

voit que cette fonction, développée suivant les coefficients du système des équations (A), est de la forme

$$\overline{p}x + M\overline{q}x + N\overline{r}x + \dots,$$

le coefficient de $\overline{p}x$ étant l'unité. Il suit de là que si l'on résout les équations (A), en y laissant $\overline{p}x, \overline{q}x, \overline{r}x, \dots$ comme indéterminées, $\frac{1}{p_5^{(2)}}$ sera, en vertu de l'équation (F), le coefficient de $\overline{p}x$ dans l'expression de z . Pareillement, $\frac{1}{q_5^{(2)}}$ sera le coefficient de $\overline{q}x$ dans l'expression de z' ; $\frac{1}{r_5^{(2)}}$ sera le coefficient de $\overline{r}x$ dans l'expression de z'' ; et ainsi du reste; ce qui donne un moyen simple d'obtenir $p_5^{(2)}, q_5^{(2)}, \dots$; mais il est plus simple encore de les déterminer ainsi.

D'abord l'équation (F) donne la valeur de $p_5^{(2)}$ et de z . Si dans le système des équations (E) on élimine z au lieu de z' , on aura une seule équation en z' , de la forme

$$q_5 \alpha_5 = q_5^{(2)} z';$$

en faisant

$$q_5^{(2)} = q_4^{(2)} - \frac{p_4 q_4}{p_4^{(2)}}, \quad q_5 \alpha_5 = q_4 \alpha_4 - \frac{p_4 q_4 p_4 \alpha_4}{p_4^{(2)}}.$$

Si dans le système des équations (D) on élimine z au lieu de z'' , pour ne conserver à la fin du calcul que z' , on aura $r_5^{(2)}$ en changeant dans la suite des équations qui, à partir de ce système, déterminent $p_5^{(2)}$, la lettre p dans la lettre r , et réciproquement. On aura ainsi

$$\begin{aligned} r_4^{(2)} &= r_3^{(2)} - \frac{p_3 r_3}{p_3^{(2)}}, \\ r_4 q_4 &= r_3 q_3 - \frac{p_3 q_3 p_3 r_3}{p_3^{(2)}}, \\ q_4^{(2)} &= q_3^{(2)} - \frac{p_3 q_3}{p_3^{(2)}}, \\ r_5^{(2)} &= r_4^{(2)} - \frac{p_4 r_4}{q_4^{(2)}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Pour avoir $r_s^{(2)}$, on partira du système des équations (C), en changeant, dans la suite des valeurs de $p_s^{(2)}$, $p_3 q_3, \dots, r_s^{(2)}$, $q_3 r_3, \dots$, la lettre p dans la lettre z , et réciproquement.

On aura pareillement la valeur de $\gamma_s^{(2)}$, en partant du système des équations (B) et changeant dans la suite des valeurs de $p_s^{(2)}$, $p_s^{(2)}$, $\dots$, la lettre p dans la lettre γ , et réciproquement.

Enfin, on aura la valeur de $\lambda_s^{(2)}$ en changeant, dans la suite des valeurs de $p_s^{(2)}$, $p_s^{(2)}$, $\dots$, la lettre p dans la lettre λ , et réciproquement.

3. L'erreur dont la valeur de z est susceptible étant u , sa probabilité est, comme on l'a vu,

$$\frac{\sqrt{P} e^{-P u^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

En la multipliant par $u du$ et prenant l'intégrale depuis u nul jusqu'à u infini, on aura

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{P}}$$

pour l'erreur moyenne à craindre en plus dans la valeur de z . Cette expression affectée du signe — sera l'erreur moyenne à craindre en moins sur cette valeur. J'ai donné dans le n° 21 du Livre II l'expression analytique de ces erreurs moyennes, quel que soit le nombre des éléments. On aura donc, en la comparant à la précédente, la valeur de P , et il est facile de reconnaître l'identité de ces expressions. On trouve ainsi, dans le cas d'un seul élément,

$$P = \frac{s p^{(2)}}{2 s e^{(1)2}}.$$

Si l'on fait généralement, pour un nombre quelconque d'éléments,

$$P = \frac{s}{2 s e^{(1)2}} \frac{A}{B},$$

on trouve, pour deux éléments,

$$\begin{aligned} A &= p^{(2)} q^{(2)} - p q, \\ B &= q^{(2)}. \end{aligned}$$

En appliquant ces résultats aux équations (E), on aura la valeur de P relative à l'élément z .

On trouve, pour trois éléments,

$$A = p^{(2)} q^{(2)} r^{(2)} - p^{(2)} q r - q^{(2)} p r - r^{(2)} p q + 2 p q p r q r,$$

$$B = q^{(2)} r^{(2)} - q r.$$

Ces résultats appliqués aux équations (D) donneront la valeur de P relative à l'élément z .

En continuant ainsi, on aura, quel que soit le nombre des éléments, le poids relatif au premier élément z . En changeant dans son expression p en q et q en p , on aura le poids relatif au deuxième élément z' . En changeant, dans l'expression du poids du premier élément, p en r et r en p , on aura le poids relatif au troisième élément z'' , et ainsi de suite. Mais, lorsque le nombre des éléments surpasse trois, il est beaucoup plus simple de faire usage de la méthode du numéro précédent.

Nous observerons ici que l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément étant, par les n° 20 et 21 du Livre II, plus petite dans le système de facteurs qui constitue la méthode la plus avantageuse que dans tout autre système, la valeur de P y est la plus grande possible. Ainsi, pour une même erreur d'un élément dans cette méthode, la probabilité est plus petite que dans toute autre méthode, ce qui assure sa supériorité.

4. Toute mon analyse repose sur l'hypothèse que la facilité des erreurs est la même pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives; ce qui rend nulle l'intégrale du produit de l'erreur par sa probabilité et par sa différentielle, l'intégrale étant prise dans toute l'étendue des limites des erreurs, et l'origine des erreurs étant au milieu de l'intervalle qui sépare ces limites. Mais, si la loi de facilité est différente pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives,

alors l'intégrale précédente ne devient nulle que dans le cas où cette origine est au point de l'abscisse par où passe l'ordonnée du centre de gravité de la courbe, dont les ordonnées représentent la loi de facilité des erreurs représentées elles-mêmes par les abscisses. Pour tout autre point, l'erreur moyenne de l'observation est cette intégrale divisée par l'intervalle des limites; et, si l'on a un grand nombre d'observations, la moyenne des erreurs de ces observations sera, par ce que l'on a vu dans le Livre II, égale à très peu près à ce quotient. En faisant donc en sorte que la somme des erreurs soit nulle, on pourra supposer nulle l'intégrale dont nous venons de parler, et alors toute mon analyse subsiste et devient indépendante de l'hypothèse d'une égale facilité des erreurs positives et des erreurs négatives. On peut toujours obtenir cet avantage en ajoutant aux équations de condition un élément indéterminé dont le coefficient soit l'unité. C'est ce qui a lieu de soi-même dans les équations de condition relatives au mouvement des planètes en longitude; car la correction de l'époque y a pour coefficient l'unité. Mais, l'addition d'un élément affaiblissant, comme nous l'avons dit, la probabilité des erreurs, des autres éléments, probabilité qui, pour le même nombre d'observations, diminue quand le nombre des éléments qui s'appuient sur elles est plus grand, il ne faut recourir à cette addition que lorsque l'on peut craindre qu'une cause constante favorise plutôt les erreurs d'un signe que celles du signe contraire. Au reste, on s'en assurera facilement, en faisant la somme des restes positifs et celle des restes négatifs des équations de condition, lorsqu'on y aura substitué les valeurs des éléments déterminés par la méthode la plus avantageuse, sans l'addition dont on vient de parler et en voyant si l'excès de l'une de ces sommes sur l'autre indique une cause constante.

Pour ne laisser aucun doute sur cet objet, je vais y appliquer le calcul. Il résulte du n° 22 du Livre II que la probabilité que la somme des erreurs des observations égale

$$\frac{ak'}{k}s + ar\sqrt{s}$$

est proportionnelle à l'exponentielle

$$e^{-\frac{k^2 r^2}{2(kk' - k^2)}}.$$

Cette somme est $Sz^{(0)}$, et, par le n° 1, on a

$$Sz^{(0)} = Sz^{(1)} + S(p^{(1)}u + q^{(1)}u' + \dots).$$

Par la nature des équations finales, on a $Sz^{(0)} = 0$; on a donc

$$\frac{ak'}{k}s + ar\sqrt{s} = S(p^{(1)}u + q^{(1)}u' + \dots).$$

Si l'on fait, comme dans ce numéro, $u = \frac{v}{\sqrt{s}}$, $u' = \frac{v'}{\sqrt{s}}$, ... on aura ainsi

$$r = -\frac{k'}{k}\sqrt{s} + \frac{1}{as}S(p^{(1)}v + q^{(1)}v' + \dots).$$

Ainsi $\frac{k'}{k}$ est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, et son carré est de l'ordre $\frac{1}{s}$; on peut donc le négliger, eu égard à $\frac{k^2}{k}$. La probabilité de l'existence simultanée de $r, v, v', \dots$ est ainsi proportionnelle à l'exponentielle

$$e^{-\frac{k}{2k^2}r^2 - \frac{S(p^{(1)}v + q^{(1)}v' + \dots)^2}{2Sv^2v'^2}}.$$

En la multipliant par $dr, dv', \dots$, en l'intégrant par rapport à $r, v', v'', \dots$, depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, on aura une quantité proportionnelle à la probabilité de v . En multipliant donc cette quantité par dv et en prenant l'intégrale dans des limites données, en la divisant ensuite par cette même intégrale prise depuis $v = -\infty$ jusqu'à $v = +\infty$, on aura la probabilité que la valeur de v est contenue dans ces limites. On voit ainsi que la considération des valeurs que k' peut avoir et dont dépend la différence de probabilité des erreurs positives et négatives n'a aucune influence sensible sur les résultats de la méthode générale exposée ci-dessus.

5. Appliquons maintenant cette méthode à un exemple. Pour cela, j'ai profité de l'immense travail que Bouvard vient de terminer sur les mouvements de Jupiter et de Saturne, dont il a construit des Tables très précises. Il a fait usage de toutes les oppositions observées par Bradley et par les astronomes qui l'ont suivi : il les a discutées de nouveau et avec le plus grand soin, ce qui lui a donné 126 équations de condition pour le mouvement de Jupiter en longitude et 129 équations pour le mouvement de Saturne. Dans ces dernières équations, Bouvard a fait entrer la masse d'Uranus comme indéterminée. Voici les équations finales qu'il a conclues par la méthode la plus avantageuse :

$$\begin{aligned} 7212'',600 &= 795938z - 12729398z'' \\ &+ 6788,2z''' - 1929,0z'''' + 696,13z'''' + 26022'', \\ -738297'',800 &= -12729398z + 424865729z' \\ &- 153106,5z'' - 39749,1z''' - 5459z'''' + 5722z''', \\ 237'',782 &= 6788,2z - 153106,5z' \\ &+ 7118720z'' - 3,2252z''' + 1,2484z'''' + 1,3371z''', \\ -40'',335 &= -1929,0z - 39749,1z' \\ &- 3,2252z'' + 57,1911z''' + 3,6213z'''' + 1,1128z''', \\ -343'',455 &= 696,13z - 5459z' \\ &+ 1,2484z'' + 3,6213z''' + 21,543z'''' + 46,310z''', \\ -1002'',900 &= 2602z + 5722z' \\ &+ 1,3371z'' + 1,1128z''' + 46,310z'''' + 129z'''. \end{aligned}$$

Dans ces équations, la masse d'Uranus est supposée $\frac{1+z}{19504}$; la masse de Jupiter est supposée $\frac{1+z'}{1067,09}$; z'' est le produit de l'équation du centre par la correction du périhélie employé d'abord par Bouvard; z''' est la correction de l'équation du centre; z'''' est la correction séculaire du moyen mouvement; z''''' est la correction de l'époque de la longitude au commencement de 1750. La seconde du degré décimal est prise pour unité.

Au moyen des équations précédentes renfermées dans le système (A), j'ai conclu les suivantes, renfermées dans le système (B) :

$$\begin{aligned} 27441'',68 &= 743454z - 12844814z' \\ &+ 6761,23z'' - 1981,45z''' - 237,97z''', \\ -693812'',58 &= -12844814z + 424611920z' \\ &- 153165,81z'' - 39798,46z''' - 7513,15z''', \\ 248'',1772 &= 6761,23z - 153165,81z' \\ &+ 71,8581z'' - 3,2367z''' + 0,7684z''', \\ -31'',6836 &= -1981,45z - 39798,46z' \\ &- 3,2367z'' + 57,1815z''' + 3,2218z''', \\ 16'',5783 &= -237,97z - 7513,15z' \\ &+ 0,7684z'' + 3,2218z''' + 4,9181z'''. \end{aligned}$$

De ces équations, j'ai tiré les quatre suivantes, renfermées dans le système (C),

$$\begin{aligned} 28243'',85 &= 731939,5z - 13208350z' + 6798,41z'' - 1825,56z''', \\ -668486'',70 &= -13208350z + 413134432z' - 1519930z'' - 34876,7z''', \\ 245'',5870 &= 6798,41z - 1519930z' + 71,7381z'' - 3,7401z''', \\ -42'',5434 &= -1825,56z - 34876,7z' - 3,7401z'' + 55,0710z'''. \end{aligned}$$

ces dernières équations donnent les suivantes, renfermées dans le système (D),

$$\begin{aligned} 26833'',55 &= 671414,7z - 14364341z' + 6674,43z'', \\ -695430'',0 &= -14364341z + 391046861z' - 154360,6z'', \\ 242'',6977 &= 6674,43z - 154360,6z' + 71,4841z''. \end{aligned}$$

Enfin j'ai conclu de là les deux équations suivantes, renfermées dans le système (E) :

$$4172'',95 = 48442z + 48020z', \quad -171455'',2 = 48020z + 57725227z'.$$

Je m'arrête à ce système, parce qu'il est facile d'en conclure les valeurs du poids P relatives aux deux éléments z et z' que je désirais par-

ticulièrement de connaître. Les formules du n° 3 donnent, pour z ,

$$P = \frac{s}{2S_{z'(1)2}} \left[48442 - \frac{(48020)^2}{57725227} \right]$$

et, pour z' ,

$$P = \frac{s}{2S_{z'(1)2}} \left[57725227 - \frac{(48020)^2}{48442} \right].$$

Le nombre s des observations est ici 129 et Bouvard a trouvé

$$S_{z'(1)2} = 31096;$$

on a donc, pour z ,

$$\log P = 2,0013595$$

et, pour z' ,

$$\log P = 5,0778634.$$

Les équations précédentes donnent

$$z' = -0,00305,$$

$$z = 0,08916.$$

La masse de Jupiter est $\frac{1}{1067,09}(1+z')$. En substituant pour z' sa valeur précédente, cette masse devient $\frac{1}{1070,35}$. La masse du Soleil est prise pour unité. La probabilité que l'erreur de z' est comprise dans les limites $\pm U$ est, par le n° 1,

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}} \int_{-U}^{+U} e^{-\frac{1}{2}Pu^2} du,$$

l'intégrale étant prise depuis $u = -U$ jusqu'à $u = U$. On trouve ainsi la probabilité que la masse de Jupiter est comprise dans les limites

$$\frac{1}{1070,35} \pm \frac{1}{100} \frac{1}{1067,09},$$

égale à $\frac{1000000}{1000001}$; en sorte qu'il y a un million à très peu près à parier contre un que la valeur $\frac{1}{1070,35}$ n'est pas en erreur d'un centième de sa valeur; ou, ce qui revient à fort peu près au même, qu'après un siècle

de nouvelles observations, ajoutées aux précédentes et discutées de la même manière, le nouveau résultat ne différera pas du précédent d'un centième de sa valeur.

Newton avait trouvé, par les observations de Pound, sur les elongations des satellites de Jupiter, la masse de cette planète égale à la 1067^e partie de celle du Soleil, ce qui diffère très peu du résultat de Bouvard.

La masse d'Uranus est $\frac{1+z}{19504}$. En substituant pour z sa valeur précédente, cette masse devient $\frac{1}{17907}$. La probabilité que cette valeur est comprise dans des limites

$$\frac{1}{17907} \pm \frac{1}{4} \frac{1}{19504}$$

est égale à $\frac{2508}{2509}$, et la probabilité que cette masse est comprise dans les limites

$$\frac{1}{17907} \pm \frac{1}{5} \frac{1}{19504}$$

est égale à $\frac{215,6}{216,6}$.

Les perturbations qu'Uranus produit dans le mouvement de Saturne étant peu considérables, on ne doit pas encore attendre des observations de ce mouvement une grande précision dans la valeur de sa masse. Mais, après un siècle de nouvelles observations, ajoutées aux précédentes et discutées de la même manière, la valeur de P augmentera de manière à donner cette masse avec une grande probabilité que sa valeur sera contenue dans d'étroites limites; ce qui sera de beaucoup préférable à l'emploi des elongations des satellites d'Uranus, à cause de la difficulté d'observer ces elongations.

Bouvard, en appliquant la méthode précédente aux 126 équations de condition que lui ont données les observations de Jupiter et en supposant la masse de Saturne égale à $\frac{1+z}{3534,08}$, a trouvé

$$z = 0,00620$$

et

$$\log P = 4,8856829.$$

Ces valeurs donnent la masse de Saturne égale à $\frac{1}{3512,3}$, et la probabilité que cette masse est comprise dans les limites

$$\frac{1}{3512,3} \pm \frac{1}{100} \frac{1}{3534,08}$$

est égale à $\frac{11327}{11328}$.

Newton avait trouvé, par les observations de Pound sur la plus grande elongation du quatrième satellite de Saturne, la masse de cette planète égale à $\frac{1}{3012}$, ce qui surpasse d'un sixième le résultat précédent. Il y a des millions de milliards à parier contre un que celui de Newton est en erreur, et l'on n'en sera point surpris si l'on considère la difficulté d'observer les plus grandes elongations des satellites de Saturne. La facilité d'observer celles des satellites de Jupiter a rendu, comme on l'a vu, beaucoup plus exacte la valeur que Newton a conclue des observations de Pound.

De la probabilité des jugements.

J'ai assimilé, dans le n° 50 du Livre II, le jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contradictoires au résultat des témoignages de plusieurs témoins de l'extraction du numéro d'une urne qui ne contient que deux numéros. Il y a cependant entre ces deux cas cette différence, savoir, que la probabilité du témoignage est indépendante de la nature de la chose attestée, parce que l'on suppose que le témoin n'a pu se tromper sur cette chose; au lieu qu'un objet en litige peut être environné d'obscurités telles, que les juges, en leur supposant toute la bonne foi désirable, peuvent être cependant d'avis contraires. La nature de l'affaire qui leur est soumise doit donc influer sur leur jugement. Je vais faire entrer cette considération dans les recherches suivantes, en l'appliquant aux jugements en matière criminelle.

Il faut sans doute aux juges, pour condamner un accusé, les plus fortes preuves de son délit. Mais une preuve morale n'est jamais qu'une probabilité, et l'expérience n'a que trop fait connaître les erreurs dont

les jugements criminels, ceux même qui paraissent être les plus justes, sont encore susceptibles. La possibilité de réparer ces erreurs est le plus solide argument des philosophes qui ont voulu proscrire la peine de mort. Nous devrions donc nous abstenir de juger, s'il nous fallait attendre l'évidence mathématique. Mais, lorsque les preuves ont une force telle que le produit de l'erreur à craindre par sa faible probabilité soit inférieure au danger qui résulterait de l'impunité du crime, le jugement est commandé par l'intérêt de la société. Ce jugement se réduit, si je ne me trompe, à la solution de la question suivante : La preuve du délit de l'accusé a-t-elle le haut degré de probabilité nécessaire pour que les citoyens aient moins à redouter les erreurs des tribunaux, s'il est innocent et condamné, que ses nouveaux attentats et ceux des malheureux qu'enhardirait l'exemple de son impunité, s'il était coupable et absous? La solution de cette question dépend de plusieurs éléments très difficiles à connaître. Telle est l'imminence du danger qui menacerait la société si l'accusé criminel restait impuni. Quelquefois, ce danger est si grand que le magistrat se voit obligé de renoncer aux formes sagement établies pour la sûreté de l'innocence. Mais ce qui rend presque toujours la question dont il s'agit insoluble est l'impossibilité d'apprécier exactement la probabilité du délit, et de fixer celle qui est nécessaire pour la condamnation de l'accusé. Chaque juge, à cet égard, est forcé de s'en rapporter à son propre tact. Il forme son opinion en comparant les divers témoignages et les circonstances dont le délit est accompagné aux résultats de ses réflexions et de son expérience; et, sous ce rapport, une longue habitude d'interroger et de juger les accusés donne beaucoup d'avantages pour saisir la vérité au milieu d'indices souvent contradictoires.

La question précédente dépend encore de la grandeur de la peine appliquée au délit; car on exige naturellement, pour prononcer la mort, des preuves beaucoup plus fortes que pour infliger une détention de quelques mois. C'est une raison de proportionner la peine au délit, une peine grave appliquée à un léger délit devant inévitablement faire absoudre beaucoup de coupables. Le produit de la probabilité

lité du délit par sa gravité étant la mesure du danger que l'absolution de l'accusé peut faire éprouver à la société, on pourrait penser que la peine doit dépendre de cette probabilité. C'est ce que l'on fait indirectement dans les tribunaux où l'on retient pendant quelque temps l'accusé contre lequel s'élèvent des preuves très fortes, mais insuffisantes pour le condamner. Dans la vue d'acquiescer de nouvelles lumières, on ne le remet point sur-le-champ au milieu de ses concitoyens, qui ne le reverraient pas sans de vives alarmes. Mais l'arbitraire de cette mesure et l'abus qu'on en peut faire l'ont fait rejeter dans les pays où l'on attache un très grand prix à la liberté individuelle.

Maintenant, quelle est la probabilité que la décision d'un tribunal qui ne peut condamner qu'à une majorité donnée sera juste, c'est-à-dire, conforme à la vraie solution de la question posée ci-dessus? Ce problème important bien résolu donnera le moyen de comparer entre eux les tribunaux divers. La majorité d'une seule voix dans un nombreux tribunal indique que l'affaire dont il s'agit est à peu près douteuse; la condamnation de l'accusé serait donc alors contraire aux principes d'humanité, protecteurs de l'innocence. L'unanimité des juges donnerait une très grande probabilité d'une décision juste; mais, en s'y astreignant, trop de coupables seraient absous. Il faut donc ou limiter le nombre des juges, si l'on veut qu'ils soient unanimes, ou accroître la majorité nécessaire pour condamner, lorsque le tribunal devient plus nombreux. Je vais essayer d'appliquer le calcul à cet objet, persuadé que les applications de ce genre, lorsqu'elles sont bien conduites et fondées sur des données que le bon sens nous suggère, sont toujours préférables aux raisonnements les plus spécieux.

La probabilité que l'opinion de chaque juge est juste entre comme élément principal dans ce calcul. Cette probabilité est évidemment relative à chaque affaire. Si, dans un tribunal de mille et un juges, cinq cent un sont d'une opinion, et cinq cents sont d'une opinion contraire, il est visible que la probabilité de l'opinion de chaque juge surpasse bien peu $\frac{1}{2}$; car, en la supposant sensiblement plus grande, une seule voix de différence serait un événement invraisemblable. Mais, si les juges sont

unanimes, cela indique dans les preuves ce degré de force qui entraîne la conviction. La probabilité de l'opinion de chaque juge est donc alors très près de l'unité ou de la certitude; à moins que des passions ou des préjugés communs n'égarent tous les juges. Hors de ces cas, le rapport des voix pour ou contre l'accusé doit seul déterminer cette probabilité. Je suppose ainsi qu'elle peut varier depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à l'unité, mais qu'elle ne peut être au-dessous de $\frac{1}{2}$. Si cela n'était pas, la décision du tribunal serait insignifiante comme le sort: elle n'a de valeur qu'autant que l'opinion du juge a plus de tendance à la vérité qu'à l'erreur. C'est ensuite par le rapport des nombres de voix favorables ou contraires à l'accusé que je détermine la probabilité de cette opinion.

Ces données suffisent pour avoir l'expression générale de la probabilité que la décision du tribunal jugeant à une majorité donnée est juste. Dans nos tribunaux spéciaux composés de huit juges, cinq voix sont nécessaires pour la condamnation d'un accusé: la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision surpasse alors $\frac{1}{4}$. Si le tribunal était réduit à six membres qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité de quatre voix, la probabilité de l'erreur à craindre serait alors au-dessous de $\frac{1}{4}$; il y aurait donc pour l'accusé un avantage à cette réduction du tribunal. Dans l'un et l'autre cas, la majorité exigée est la même et égale à deux. Ainsi, cette majorité demeurant constante, la probabilité de l'erreur augmente avec le nombre des juges. Cela est général, quelle que soit la majorité exigée, pourvu qu'elle reste la même. En prenant donc pour règle le rapport arithmétique, l'accusé se trouve dans une position de moins en moins avantageuse à mesure que le tribunal devient plus nombreux. Ce rapport est suivi dans la Chambre des pairs d'Angleterre. On y exige pour la condamnation une majorité de douze voix, quel que soit le nombre des juges. Si l'on a cru que, les voix opposées se détruisant réciproquement, les douze voix restantes représentent l'unanimité d'un jury de douze membres, exigée dans le même pays pour la condamnation d'un accusé, on a été dans une grande erreur. Le bon sens fait voir qu'il y a différence entre la décision d'un tribunal de deux cent douze juges, dont cent douze

condamnant l'accusé, tandis que cent l'absolvent, et celle d'un tribunal de douze juges unanimes pour la condamnation. Dans le premier cas, les cent voix favorables à l'accusé autorisent à penser que les preuves sont loin d'atteindre le degré de force qui entraîne la conviction. Dans le second cas, l'unanimité des juges porte à croire qu'elles ont atteint ce degré. Mais le simple bon sens ne suffit pas pour apprécier l'extrême différence de la probabilité de l'erreur dans ces deux cas. Il faut alors recourir au calcul, et l'on trouve à très peu près $\frac{1}{2}$ pour la probabilité de l'erreur dans le premier cas, et seulement $\frac{1}{8192}$ pour cette probabilité dans le second cas, probabilité qui n'est pas $\frac{1}{1000}$ de la première. C'est une confirmation du principe que le rapport arithmétique est défavorable à l'accusé quand le nombre des juges augmente. Au contraire, si l'on prend pour règle le rapport géométrique, la probabilité de l'erreur de la décision diminue quand le nombre des juges s'accroît. Par exemple, dans les tribunaux qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité des deux tiers des voix, la probabilité de l'erreur à craindre est à peu près $\frac{1}{2}$ si le nombre des juges est six : elle est au-dessous de $\frac{1}{2}$ si ce nombre s'élève à douze. Ainsi l'on ne doit se régler ni sur le rapport arithmétique, ni sur le rapport géométrique, si l'on veut que la probabilité de l'erreur ne soit jamais au-dessus ni au-dessous d'une fraction déterminée.

Mais à quelle fraction doit-on se fixer? C'est ici que l'arbitraire commence, et les tribunaux offrent à cet égard de grandes variétés. Dans les tribunaux spéciaux, où cinq voix sur huit suffisent pour la condamnation de l'accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement est $\frac{85}{256}$ ou au-dessous de $\frac{1}{2}$. La grandeur de cette fraction est effrayante; mais ce qui doit rassurer un peu est la considération que, le plus souvent, le juge qui absout un accusé ne le regarde pas comme innocent. Il prononce seulement qu'il n'est pas atteint par des preuves suffisantes pour qu'il soit condamné. On est surtout rassuré par la pitié que la nature a mise dans le cœur de l'homme, et qui dispose l'esprit à voir difficilement un coupable dans l'accusé soumis à son jugement. Ce sentiment, plus vif dans ceux qui n'ont point

l'habitude des jugements criminels, compense les inconvénients attachés à l'inexpérience des jurés. Dans un jury de douze membres, si la pluralité exigée pour la condamnation est de huit voix sur douze, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1023}{8192}$ ou un peu moindre que $\frac{1}{8}$: elle est à peu près $\frac{1}{2}$ si cette pluralité est de neuf voix. Dans le cas de l'unanimité, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1}{8192}$, c'est-à-dire plus de mille fois moindre que dans nos jurys.

La solution du problème que nous venons de considérer ne suffit pas pour fixer la majorité convenable, dans un tribunal d'un nombre quelconque de juges. Il faut, pour cela, connaître la probabilité du délit au-dessous de laquelle un accusé ne peut être condamné, sans que les citoyens aient plus à redouter les erreurs des tribunaux, que les attentats qui pourraient naître de l'impunité d'un coupable absous. Il faut ensuite déterminer la probabilité du délit résultante de la décision du tribunal et fixer la majorité de manière que ces probabilités soient égales. Mais il est impossible de les obtenir. La première est, comme nous l'avons dit, relative à la position dans laquelle la société se trouve, position variable, très difficile à bien définir et toujours trop compliquée pour être soumise au calcul. La seconde dépend d'une chose entièrement inconnue, la loi de probabilité de l'opinion de chaque juge dans l'estimation qu'il fait de la probabilité du délit. Vu notre ignorance de ces deux éléments du calcul, quoi de plus raisonnable que de partir de la solution du seul problème que nous puissions résoudre dans cette matière, celui de la probabilité de l'erreur de la décision d'un tribunal? Cette probabilité me paraît trop forte dans nos tribunaux, et je pense qu'à cet égard il convient de se rapprocher du jury anglais où elle n'est que $\frac{1}{8192}$. En la fixant à la fraction $\frac{1}{1024}$ et en déterminant la majorité nécessaire pour l'atteindre, on place l'accusé dans la position où il serait vis-à-vis d'un jury de neuf membres, dont on exigerait l'unanimité; ce qui me paraît garantir suffisamment l'innocence des erreurs des tribunaux, et la société des maux que produirait l'impunité des coupables. Il doit être extrêmement rare alors qu'un accusé soit condamné avec une probabilité moindre que celle

qui est nécessaire à sa condamnation; car la majorité qui le condamne déclare que la probabilité de son délit est au moins égale à cette probabilité nécessaire: la minorité qui l'absout déclare que la première de ces probabilités lui paraît inférieure à la seconde; mais il est naturel de croire que cette infériorité est peu considérable. Il devra donc rarement arriver que la probabilité moyenne qui résulte de l'ensemble des jugements des membres du tribunal soit inférieure à la probabilité requise pour la condamnation de l'accusé, si l'on réduit, par une majorité convenable, la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision, à la fraction $\frac{1}{1922}$. L'analyse fournit, pour avoir cette majorité, des formules que je vais exposer ici et qu'il est facile de réduire dans une Table dépendante du nombre des juges. Mais une pareille Table paraîtra trop arbitraire au commun des hommes qui préféreront toujours l'un ou l'autre des rapports arithmétique et géométrique qu'ils peuvent aisément concevoir.

1. Le juge ne doit pas, pour condamner un accusé, attendre l'évidence mathématique qu'il est impossible d'atteindre dans les choses morales. Mais, lorsque la probabilité du délit est telle que les citoyens aient plus à redouter les attentats qui pourraient naître de son impunité que les erreurs des tribunaux, l'intérêt de la société exige la condamnation de l'accusé. Je nomme a ce degré de probabilité, et je suppose que le juge qui condamne un accusé prononce par là que la probabilité de son délit est au moins a . Je nomme x la probabilité de cette opinion du juge, probabilité que je supposerai égale ou supérieure à $\frac{1}{2}$, et variant par des degrés infiniment petits, égaux à x et également probables *a priori*. Je suppose encore que le tribunal est composé de $p + q$ juges, dont p condamnent l'accusé et q l'absolvent. La probabilité que l'opinion du tribunal est juste sera proportionnelle à $x^p(1-x)^q$, et la probabilité qu'elle ne l'est pas sera proportionnelle à $(1-x)^p x^q$; la probabilité de la bonté du jugement sera donc, par le n° 1 du Livre II,

$$(a) \quad \frac{x^p(1-x)^q}{x^p(1-x)^q + (1-x)^p x^q}.$$

Il faut multiplier cette quantité par la probabilité de la valeur de x , prise de l'événement observé. Cet événement est que le tribunal s'est divisé en deux parties dont l'une, composée de p juges, condamne l'accusé, et dont l'autre, formée de q juges, l'absout. La probabilité de x est donc la fonction $x^p(1-x)^q + (1-x)^p x^q$ divisée par la somme de toutes les fonctions semblables relatives à toutes les valeurs de x , depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$; elle est par conséquent

$$\frac{[x^p(1-x)^q + (1-x)^p x^q] dx}{\int x^p dx (1-x)^q},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. En multipliant cette fonction par la fonction (a), on aura

$$\frac{x^p(1-x)^q dx}{\int x^p dx (1-x)^q}$$

pour la probabilité de la bonté du jugement relative à x . La même probabilité relative à toutes les valeurs de x est donc

$$(b) \quad \frac{\int x^p dx (1-x)^q}{\int x^p dx (1-x)^q},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Il suit de là que la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement est encore exprimée par la formule (b), pourvu que l'on prenne l'intégrale du numérateur depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$. On trouve ainsi cette dernière probabilité égale à

$$(c) \quad \frac{1}{2^{p+q+1}} \left\{ 1 + \frac{p+q+1}{1} + \frac{(p+q+1)(p+q)}{1,2} + \frac{(p+q+1)(p+q)(p+q-1)}{1,2,3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(p+q+1)(p+q)(p+q-1)\dots(p+2)}{1,2,3\dots q} \right\}.$$

Si l'on exige l'unanimité, q est nul, et cette expression devient $\frac{1}{2^{p+1}}$.

2. Déterminons présentement la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision d'un tribunal, lorsque p et q sont de

grands nombres; ce qui rend la formule (c) très difficile à évaluer en nombres. Il faut distinguer ici deux cas, l'un dans lequel $p - q$ est considérable, l'autre dans lequel $p - q$ est assez petit. Dans le premier cas, on fera usage de la formule (o) du n° 28 du Livre II qui donne pour la probabilité de l'erreur,

$$(e) \frac{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}{2^{p+q+\frac{1}{2}} p^{p+\frac{1}{2}} q^{q+\frac{1}{2}} (p-q) \sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{[(p+q)^2 - 13pq]}{12pq(p+q)} \right\},$$

π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité.

Dans le second cas, où $p - q$ est un petit nombre relativement à p , on trouvera facilement, par l'analyse du n° 19 du Livre II, la probabilité de l'erreur à craindre égale à

$$(f) \frac{\int dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis

$$t^2 = \frac{(p-q)^2(p+q)}{8pq}$$

jusqu'à l'infini.

Pour donner un exemple de chacune de ces formules, supposons un tribunal formé de 144 juges, et qu'il faille les $\frac{2}{3}$ pour la condamnation de l'accusé. Alors on a

$$p = 90, \quad q = 54,$$

et la formule (e) donne $\frac{1}{112}$ pour la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté de la décision du tribunal. Dans le cas de l'unanimité d'un jury de huit membres, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1}{12}$; l'accusé est donc alors dans une position plus favorable que vis-à-vis d'un semblable jury.

Supposons le tribunal formé de 212 juges et qu'une majorité de douze voix suffise pour la condamnation. Dans ce cas

$$p + q = 212, \quad p - q = 12,$$

et la formule (f) donne $\frac{1}{4,889}$ pour la probabilité de l'erreur à craindre.

(1816.)

Sur une disposition du Code d'instruction criminelle.

L'article 351 du Code d'instruction criminelle est ainsi conçu :

« Si néanmoins l'accusé n'est déclaré coupable qu'à une simple majorité, les juges délibéreront entre eux sur le même point; et si l'avis de la minorité des jurés est adopté par la majorité des juges, de telle sorte qu'en réunissant le nombre des voix, ce nombre excède celui de la majorité des jurés et de la minorité des juges, l'avis favorable à l'accusé prévaut. »

D'après cet article, sept jurés déclarant l'accusé coupable et cinq le déclarant non coupable, l'accusé est condamné lorsque trois seulement des cinq juges de la Cour d'assises se réunissent à la minorité des jurés. Cela paraît choquer à la fois les règles du sens commun et les principes d'humanité, protecteurs de l'innocence. La Cour d'assises intervient alors avec justice, parce que le délit de l'accusé n'est pas suffisamment établi par une simple majorité du jury, ce que le Calcul des Probabilités rend indubitable. Mais, quand l'avis de la Cour d'assises infirme celui de la majorité des jurés, loin de le confirmer, quand la différence de deux voix, qui ne donnait à cette majorité qu'une prépondérance insuffisante, est réduite à une seule voix, par l'adjonction des juges dont l'état et les lumières doivent inspirer la confiance (*), n'est-il pas injuste de condamner l'accusé?

(*) La différence d'une voix donne à la majorité une prépondérance d'autant moindre que le nombre des juges est plus considérable : le simple bon sens le fait voir sans le secours du calcul. Dans la question présente, la prépondérance de la majorité des jurés diminue donc non seulement par la réduction de deux voix à une, mais encore par l'accroissement du nombre des votants, qui s'élève de douze à dix-sept. Généralement, une différence constante entre la majorité et la minorité au-dessous de laquelle l'accusé ne puisse être condamné lui est d'autant moins favorable que le nombre des juges est plus grand : au contraire, le rapport constant des voix de la majorité à celles de la minorité lui devient plus favorable, à mesure que le nombre des juges augmente. Le rapport $\frac{1}{4}$, adopté par la Chambre des Pairs de France, est très favorable aux accusés devant un tribunal aussi nombreux. (On peut voir, sur cet objet, le Supplément à ma *Théorie analytique des Probabilités*, et la troisième édition de mon *Essai philosophique sur les Probabilités*.)

Je propose donc de réformer ainsi l'article cité :

« Si néanmoins l'accusé n'est déclaré coupable qu'à une simple majorité, les juges délibéreront entre eux sur le même point; et si l'avis de la minorité des jurés est adopté par la majorité des juges, cet avis prévaudra. »

Si cette réforme paraît juste, le devoir indispensable d'abroger promptement tout ce qui peut compromettre l'innocence ne permet pas d'attendre, pour la convertir en loi, la revision générale du Code criminel, revision qui demande beaucoup de réflexions et de temps. C'est pour remplir ce devoir autant qu'il m'est possible que je publie cet écrit.

15 novembre 1816.

DEUXIÈME SUPPLÉMENT.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS AUX OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

On détermine la longueur d'un grand arc, à la surface de la Terre, par une chaîne de triangles qui s'appuient sur une base mesurée avec exactitude. Mais, quelque précision que l'on apporte dans la mesure des angles, leurs erreurs inévitables peuvent, en s'accumulant, écarter sensiblement de la vérité la valeur de l'arc que l'on a conclue d'un grand nombre de triangles. On ne connaît donc qu'imparfaitement cette valeur, si l'on ne peut pas assigner la probabilité que son erreur est comprise dans des limites données. Le désir d'étendre l'application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle m'a fait rechercher les formules propres à cet objet.

Cette application consiste à tirer des observations les résultats les plus probables et à déterminer la probabilité des erreurs dont ils sont toujours susceptibles. Lorsque, ces résultats étant connus à peu près, on veut les corriger par un grand nombre d'observations, le problème se réduit à déterminer la probabilité d'une ou de plusieurs fonctions linéaires des erreurs partielles des observations, la loi de probabilité de ces erreurs étant supposée connue. J'ai donné, dans le Livre II de ma *Théorie analytique des Probabilités*, une méthode et des formules générales pour cet objet, et je les ai appliquées, dans le premier Supplément, à quelques points intéressants du Système du monde. Dans les questions d'Astronomie, chaque observation fournit, pour corriger les éléments, une équation de condition : lorsque ces équations sont très multipliées, mes formules donnent, à la fois, les corrections les

plus avantageuses et la probabilité que les erreurs, après ces corrections, seront contenues dans des limites assignées, quelle que soit d'ailleurs la loi de probabilité des erreurs de chaque observation. Il est d'autant plus nécessaire de se rendre indépendant de cette loi, que les lois les plus simples sont toujours infiniment peu probables, vu le nombre infini de celles qui peuvent exister dans la nature. Mais la loi inconnue que suivent les observations dont on fait usage introduit dans les formules une indéterminée qui ne permettrait point de les réduire en nombres, si l'on ne parvenait pas à l'éliminer. C'est ce que j'ai fait, au moyen de la somme des carrés des restes, lorsque l'on a substitué, dans chaque équation de condition, les corrections les plus probables. Les questions géodésiques n'offrant point de semblables équations, il a fallu chercher un autre moyen d'éliminer des formules de probabilité l'indéterminée dépendante de la loi de probabilité des erreurs de chaque observation partielle. La quantité dont la somme des angles de chaque triangle observé surpasse deux angles droits plus l'excès sphérique m'a fourni ce moyen, et j'ai remplacé par la somme des carrés de ces quantités la somme des carrés des restes des équations de condition. Par là, on peut déterminer numériquement la probabilité que le résultat final d'une longue suite d'opérations géodésiques n'excède pas une quantité donnée. En appliquant ces formules à la mesure d'une perpendiculaire à la méridienne, elles feront apprécier les erreurs, non seulement de l'arc total, mais encore de la différence en longitude de ses points extrêmes, conclue de la chaîne des triangles qui les unissent et des azimuts du premier et du dernier côté de cette chaîne. Si l'on diminue, autant qu'il est possible, le nombre des triangles et si l'on donne une grande précision à la mesure de leurs angles, deux avantages que procure l'emploi du cercle répétiteur et des réverbères, ce moyen d'avoir la différence en longitude des points extrêmes de la perpendiculaire sera l'un des meilleurs dont on puisse faire usage.

Pour s'assurer de l'exactitude d'un grand arc qui s'appuie sur une base mesurée vers une de ses extrémités, on mesure une seconde base

vers l'autre extrémité, et l'on conclut de l'une de ces bases la longueur de l'autre. Si la longueur ainsi calculée s'écarte très peu de l'observation, il y a tout lieu de croire que la chaîne des triangles est exacte à fort peu près, ainsi que la valeur du grand arc qui en résulte. On corrige ensuite cette valeur, en modifiant les angles des triangles, de manière que les bases calculées s'accordent avec les bases mesurées, ce qui peut se faire d'une infinité de manières. Celles que l'on a jusqu'à présent employées sont fondées sur des considérations vagues et incertaines. Les méthodes exposées dans le Livre II conduisent à des formules très simples, pour avoir directement la correction de l'arc total qui résulte des mesures de plusieurs bases. Ces mesures ont non seulement l'avantage de corriger l'arc, mais encore d'augmenter ce que j'ai nommé le *poûds* d'un résultat, c'est-à-dire de rendre la probabilité de ses erreurs plus rapidement décroissante, en sorte que les mêmes erreurs deviennent moins probables par la multiplicité des bases. J'expose ici les lois de probabilité des erreurs que fait naître l'addition de nouvelles bases. La mesure d'une seconde base sert pareillement à corriger la différence en longitude des points extrêmes d'une perpendiculaire à la méridienne et à augmenter le poids de la valeur de cette différence.

Avant que l'on apportât, dans les observations et dans les calculs, l'exactitude que l'on exige maintenant, on considérait les côtés des triangles géodésiques comme rectilignes, et l'on supposait la somme de leurs angles égale à deux angles droits. Legendre a remarqué le premier que les deux erreurs qu'on commet ainsi se compensent mutuellement, c'est-à-dire qu'en retranchant de chaque angle d'un triangle le tiers de l'excès sphérique, on peut négliger la courbure de ses côtés et les regarder comme rectilignes. Mais l'excès des trois angles observés sur deux angles droits se compose de l'excès sphérique et de la somme des erreurs de la mesure de chacun des angles. L'analyse des probabilités fait voir que l'on doit encore retrancher de chaque angle le tiers de cette somme, pour avoir la loi de probabilité des erreurs des résultats le plus rapidement décroissante. Ainsi, par la répar-

tion égale de l'erreur de la somme observée des trois angles du triangle considéré comme rectiligne, on corrige à la fois l'excès sphérique et les erreurs des observations. Le poids des angles ainsi corrigés augmente, en sorte que les mêmes erreurs deviennent, par cette correction, moins probables. Il y a donc de l'avantage à observer les trois angles de chaque triangle, et à les corriger comme on vient de le dire. Le simple bon sens fait pressentir cet avantage; mais le Calcul des probabilités peut seul l'apprécier et faire voir que, par cette correction, il devient le plus grand qu'il est possible.

Les formules dont je viens de parler sont relatives à des observations futures : ainsi, lorsqu'on les applique à des observations passées, on fait abstraction de toutes les données que la comparaison de ces observations peut fournir sur les erreurs, données dont on peut faire usage quand on connaît la loi de probabilité des erreurs des observations partielles. Si cette loi est exprimée par une constante moindre que l'unité, dont l'exposant soit le carré de l'erreur, alors mes formules conviennent aux observations passées comme aux observations futures, et elles satisfont à toutes les données de ces observations, comme je l'ai fait voir dans le n° 25 du Livre II. Dans le cas où les angles sont mesurés au moyen d'un cercle répéteur, chaque angle simple est le résultat moyen d'un grand nombre de mesures du même angle contenues dans l'arc total observé; l'erreur de l'angle est donc la moyenne des erreurs de toutes ces mesures; et, par le n° 18 du Livre II, la probabilité de cette erreur est exprimée par une constante, dont l'exposant est égal au carré de l'erreur. L'emploi du cercle répéteur réunit donc à l'avantage de donner une mesure précise des angles celui d'établir une loi de probabilité des erreurs qui satisfait à toutes les données des observations.

Pour appliquer avec succès les formules de probabilité aux observations géodésiques, il faut rapporter fidèlement toutes celles que l'on admettrait si elles étaient isolées, et n'en rejeter aucune par la seule considération qu'elle s'éloigne un peu des autres. Chaque angle doit être uniquement déterminé par ses mesures, sans égard aux deux

autres angles du triangle auquel il appartient; autrement, l'erreur de la somme des trois angles ne serait pas le simple résultat des observations, comme les formules de probabilité le supposent. Cette remarque me paraît importante, pour démêler la vérité au milieu des légères incertitudes que les observations présentent.

1. Concevons, sur une sphère, un arc de grand cercle $AA'A'' \dots$ et supposons que l'on ait formé autour la chaîne des triangles $ACC', CC'C'', C'C''C''', \dots$, dont les côtés $CC', C'C'', C''C''', \dots$ coupent cet arc en $A', A'', A''', \dots$. Je ne donne point de figure, parce qu'il est facile de la tracer d'après ces indications. Soient A l'angle CAA' , $A^{(1)}$ l'angle $C'A'A''$, $A^{(2)}$ l'angle $C''A''A'''$, ... Soient encore C l'angle ACC' , $C^{(1)}$ l'angle $CC'C''$, $C^{(2)}$ l'angle $C'C''C'''$, ... On aura

$$A + A^{(1)} + C - \alpha = \pi + t,$$

α étant l'erreur de l'angle observé C , t étant l'excès des angles du triangle sphérique ACA' sur π qui exprime deux angles droits ou la demi-circconférence dont le rayon est l'unité. On aura pareillement

$$A^{(1)} + A^{(2)} + C^{(1)} - \alpha^{(1)} = \pi + t^{(1)},$$

$\alpha^{(1)}$ étant l'erreur de l'angle observé $CC'C''$, et $t^{(1)}$ étant l'excès des angles du triangle sphérique $A'C'A''$ sur deux angles droits. On formera semblablement les équations

$$A^{(2)} + A^{(3)} + C^{(2)} - \alpha^{(2)} = \pi + t^{(2)},$$

$$A^{(3)} + A^{(4)} + C^{(3)} - \alpha^{(3)} = \pi + t^{(3)},$$

$$\dots\dots\dots;$$

d'où l'on tire facilement

$$\begin{aligned} A^{(2i)} &= A + C - C^{(1)} + C^{(2)} - C^{(3)} + \dots + C^{(2i-2)} - C^{(2i-1)} \\ &\quad - \alpha + \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} - \dots - \alpha^{(2i-2)} + \alpha^{(2i-1)} \\ &\quad - t + t^{(1)} - t^{(2)} + t^{(3)} - \dots - t^{(2i-2)} + t^{(2i-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{(2i-1)} &= \pi - A - C + C^{(1)} - C^{(2)} + C^{(3)} - \dots - C^{(2i-2)} \\ &\quad + \alpha - \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} - \alpha^{(3)} + \dots + \alpha^{(2i-2)} \\ &\quad + t - t^{(1)} + t^{(2)} - t^{(3)} + \dots + t^{(2i-2)}; \end{aligned}$$

en supposant donc A bien connu, l'erreur de l'angle $A^{(n)}$ est

$$\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)} + \alpha^{(n-3)} - \dots \pm \alpha,$$

le signe supérieur ayant lieu si n est impair, et le signe inférieur ayant lieu si n est pair. Les valeurs de $t, t^{(1)}, \dots$ sont fort petites et peuvent être déterminées avec précision.

Il s'agit maintenant d'avoir la probabilité que cette erreur sera contenue dans des limites données. Pour cela, je supposerai d'abord que la probabilité d'une erreur quelconque α est proportionnelle à $e^{-k\alpha^2}$, c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Cette supposition, la plus naturelle et la plus simple de toutes, résulte de l'emploi du cercle répéteur dans la mesure des angles des triangles. En effet, nommons $\varphi(q)$ la probabilité d'une erreur q dans la mesure d'un angle simple, cette probabilité étant supposée la même pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives. Supposons encore que s soit le nombre des angles simples contenus dans toutes les séries que l'on a faites pour déterminer cet angle. La probabilité que l'erreur du résultat moyen ou de l'angle conclu par ces séries sera $\pm \frac{r}{\sqrt{s}}$ est, par le n° 18 du Livre II, proportionnelle à

$$e^{-\frac{ks^2}{2r^2}},$$

k étant égal à $\int dq \varphi(q)$, l'intégrale étant prise depuis q nul jusqu'à q égal à sa plus grande valeur, que l'on peut toujours supposer infinie : en faisant $\varphi(q)$ discontinu et nul au delà de la limite de q , k est égal $\int q^2 dq \varphi(q)$. En supposant donc

$$r = \alpha \sqrt{s}, \quad h = \frac{ks}{2h^2},$$

$e^{-k\alpha^2}$ sera la probabilité de l'erreur α . On verra, à la fin de cet article, que les résultats suivants ont toujours lieu, quelle que soit la probabilité de α .

Soient ξ et γ les erreurs des deux angles $AC'C$ et CAC' du premier

triangle ACC' ; la probabilité des trois erreurs α, ξ et γ sera proportionnelle à

$$e^{-k\alpha^2 - k\xi^2 - k\gamma^2};$$

mais l'observation de ces angles donne la somme $\alpha + \xi + \gamma$ des trois erreurs; car la somme des trois angles devant être égale à deux angles droits plus la surface du triangle ACC' , si l'on nomme T l'excès des trois angles observés sur cette quantité, on aura

$$\alpha + \xi + \gamma = T;$$

l'exponentielle précédente devient ainsi

$$e^{-k\left(\xi + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right)^2 - \frac{3}{2}k\left(\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right)^2 - \frac{1}{2}k\gamma^2},$$

ξ étant susceptible de toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; il faut multiplier cette exponentielle par $d\xi$ et prendre l'intégrale dans ces limites, ce qui donne une intégrale qui a pour facteur

$$e^{-\frac{3}{2}k\left(\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right)^2 - \frac{1}{2}k\gamma^2};$$

la probabilité de α est donc proportionnelle à ce facteur. La valeur de α la plus probable est évidemment celle qui rend nulle la quantité $\alpha - \frac{1}{2}T$; il faut donc corriger les trois angles de chaque triangle du tiers de l'excès T de leur somme observée sur deux angles droits plus l'excès sphérique. C'est ce que l'on fait communément.

Nommons $\bar{\alpha}$ et $\bar{\xi}$ les quantités $\alpha - \frac{1}{2}T, \xi - \frac{1}{2}T$; la probabilité de $\bar{\alpha}$ sera donc proportionnelle à

$$e^{-\frac{3}{2}k\bar{\alpha}^2}.$$

Si l'on diminue l'angle C de $\frac{1}{2}T$, c'est-à-dire si l'on emploie les angles corrigés de chaque triangle, en nommant $\bar{C}, \bar{C}^{(1)}, \dots$ ce que devient, par ces corrections, les angles $C, C^{(1)}, \dots$, on aura

$$A^{(2i)} = A + \bar{C} - \bar{C}^{(1)} + \bar{C}^{(2)} - \dots - \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^{(1)} - \bar{\alpha}^{(2)} + \dots - t + t^{(1)} - \dots,$$

$$A^{(2i-1)} = \pi - A - \bar{C} + \bar{C}^{(1)} - \dots + \bar{\alpha} - \bar{\alpha}^{(1)} + \dots + t - t^{(1)} + \dots,$$

La probabilité que la quantité

$$\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)} - \dots \pm \alpha$$

ou l'erreur de l'angle $A^{(n)}$ sera comprise dans les limites $\pm r\sqrt{n}$, sera, par le n° 18 cité,

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}h}{\sqrt{\pi}} \int dr e^{-\frac{1}{2}hr^2}$$

On peut observer ici l'avantage que produit l'observation des trois angles de chaque triangle, par la correction de ces angles. Sans cette correction, l'erreur de l'angle $A^{(n)}$ serait

$$\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)} - \dots \pm \alpha,$$

et la probabilité que cette erreur est comprise dans les limites $\pm r\sqrt{n}$ serait

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{\pi}} \int dr e^{-hr^2},$$

probabilité moindre que la précédente dans laquelle le poids du résultat est $\frac{1}{2}h$, au lieu qu'il est ici h .

Déterminons maintenant la valeur de h . Parmi les données des observations, les quantités dont les sommes des angles de chaque triangle surpassent deux angles droits plus l'excès sphérique paraissent être les plus propres à faire connaître cette valeur. Par ce qui précède, la probabilité de l'existence simultanée de z et de T est proportionnelle à

$$e^{-\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}h z^2}.$$

En multipliant cette exponentielle par dz , et prenant l'intégrale depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$, l'intégrale aura pour facteur $e^{-\frac{1}{2}T^2}$, et ce facteur sera proportionnel à la probabilité de T ; cette probabilité sera donc

$$\frac{dT e^{-\frac{1}{2}T^2}}{\int dT e^{-\frac{1}{2}T^2}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $T = -\infty$ jusqu'à $T = \infty$. Elle sera ainsi proportionnelle à

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}T^2}.$$

Ici l'événement observé est que les sommes des angles du premier triangle, du deuxième, du troisième, etc. surpassent deux angles droits plus l'excès sphérique, respectivement, des quantités $T, T^{(1)}, \dots, T^{(n-1)}$, n étant le nombre des triangles; la probabilité de cet événement sera donc proportionnelle à

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}T^2}.$$

en faisant

$$\theta^2 = T^2 + T^{(1)2} + \dots + T^{(n-1)2},$$

Maintenant, si l'on considère les diverses valeurs de h comme causes de l'événement observé, la probabilité de h sera, par le principe de la probabilité des causes tirée des événements observés, égale à

$$\frac{h^{\frac{n}{2}} dh e^{-\frac{1}{2}\theta^2}}{\int h^{\frac{n}{2}} dh e^{-\frac{1}{2}\theta^2}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise pour toutes les valeurs de h , c'est-à-dire depuis $h = 0$ jusqu'à $h = \infty$. La valeur de h qu'il faut choisir est évidemment l'intégrale des produits des valeurs de h multipliées par leurs probabilités; cette valeur est donc

$$\frac{\int h^{\frac{n+2}{2}} dh e^{-\frac{1}{2}\theta^2}}{\int h^{\frac{n}{2}} dh e^{-\frac{1}{2}\theta^2}},$$

les intégrales étant prises depuis $h = 0$ jusqu'à $h = \infty$. L'intégrale du numérateur est égale à

$$\frac{3(n+2)}{2\theta^2} \int h^{\frac{n}{2}} dh e^{-\frac{1}{2}\theta^2}.$$

La fraction précédente devient ainsi $\frac{3(n+2)}{2\theta^2}$; c'est donc la valeur de h

qu'il faut adopter. Si l'on suppose n un grand nombre, cette valeur devient à fort peu près $\frac{3n}{2\theta^2}$. Cette quantité est la valeur de h qui rend l'événement observé le plus probable, la probabilité de cet événement, *a priori*, étant proportionnelle à $h^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{2}{3}h}$. En prenant pour h la quantité $\frac{3n}{2\theta^2}$, la probabilité que l'erreur de l'angle $A^{(0)}$ sera comprise dans les limites $\pm r\sqrt{n}$ est

$$\frac{3\sqrt{n}}{9\sqrt{\pi}} \int dr e^{-\frac{2}{3}r^2};$$

la probabilité qu'elle sera comprise dans les limites $\pm \frac{2}{3}\theta r'$ est donc

$$\frac{2 \int dr' e^{-r'^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis r' nul.

2. Supposons l'arc $AA'A'' \dots$ perpendiculaire au méridien du point A. Soient φ l'angle formé par ce méridien et par celui du point extrême $A^{(0)}$, et V le plus petit des angles que ce dernier méridien fait avec l'arc $AA' \dots$; on aura

$$\sin \varphi = \frac{\cos V}{\sin l},$$

l étant la latitude du point A. En désignant donc par $\delta\varphi$ et δV les erreurs des angles φ et V , on aura

$$\delta\varphi = -\frac{\delta V \sin V}{\sin l \cos \varphi}.$$

Si l'on a mesuré avec une grande exactitude l'angle que le dernier côté de la chaîne des triangles forme en $A^{(0)}$ avec la méridienne de ce point, il est facile de voir que

$$\delta V = \pm \delta A^{(0)},$$

$\delta A^{(0)}$ étant l'erreur de $A^{(0)}$; l'intégrale précédente en r' est donc la pro-

babilité que l'erreur $\delta\varphi$ de la longitude φ conclue des azimuts observés en A et $A^{(0)}$ sera comprise dans les limites $\pm \frac{2}{3}\theta r' \frac{\sin V}{\sin l \cos \varphi}$.

Il résulte de l'analyse exposée dans le Chapitre V du Livre III de la *Mécanique céleste* que, s'il existe une excentricité dans les parallèles terrestres, elle n'a aucune influence sensible sur la valeur de φ conclue de cette manière, pourvu que l'arc mesuré soit peu considérable. En mesurant donc, avec une grande précision, les angles des divers triangles et les amplitudes des points extrêmes, on aura fort exactement la différence en longitude de ces points, et l'on pourra, par la formule précédente, apprécier la probabilité des petites erreurs à craindre sur cette différence.

Déterminons présentement la probabilité que l'erreur de la mesure de la ligne $AA'A'' \dots$ sera comprise dans des limites données. Pour cela, supposons que dans les triangles CAC' , $C'CC''$, ... on ait corrigé les angles comme on le fait ordinairement, c'est-à-dire en retranchant de chacun le tiers de la quantité dont la somme des trois angles observés surpasse deux angles droits plus l'excès sphérique. Que l'on abaisse des sommets C, C', ... des perpendiculaires CI, C'I', C'I'', ... sur la ligne $AA'A'' \dots$; on aura, à très peu près,

$$AI = AC \cos IAC.$$

On aura ensuite, à fort peu près,

$$II' = CC' \cos A^{(1)}$$

et, généralement,

$$I^{(i)} I^{(i+1)} = C^{(i)} C^{(i+1)} \cos A^{(i+1)}.$$

En supposant donc que δ soit la caractéristique des erreurs, on aura

$$\frac{\delta I^{(i)} I^{(i+1)}}{I^{(i)} I^{(i+1)}} = \frac{\delta C^{(i)} C^{(i+1)}}{C^{(i)} C^{(i+1)}} - \delta A^{(i+1)} \tan A^{(i+1)}.$$

On a, par ce qui précède,

$$\delta A^{(i+1)} = \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} + \alpha^{(i-2)} - \dots \pm \alpha;$$

ensuite, on a, dans le $(i+1)^{\text{ème}}$ triangle,

$$C^{(i)} C^{(i+1)} = \frac{C^{(i)} C^{(i-1)} \sin C^{(i+1)} C^{(i-1)} C^{(i)}}{\sin C^{(i-1)} C^{(i+1)} C^{(i)}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^{(i)} C^{(i+1)}}{C^{(i)} C^{(i+1)}} &= \frac{\partial C^{(i)} C^{(i-1)}}{C^{(i)} C^{(i-1)}} + \frac{\partial C^{(i+1)} C^{(i-1)}}{C^{(i+1)} C^{(i-1)}} \cot C^{(i+1)} C^{(i-1)} C^{(i)} \\ &\quad - \frac{\partial C^{(i-1)} C^{(i+1)} C^{(i)}}{\cot C^{(i-1)} C^{(i+1)} C^{(i)}}; \end{aligned}$$

mais $\bar{\alpha}^{(i)}$ est, par ce qui précède, l'erreur de l'angle $C^{(i)}$ ou $C^{(i-1)} C^{(i)} C^{(i+1)}$, corrigé en en retranchant le tiers de l'excès de la somme des trois angles observés du triangle sur deux angles droits. Soit $\bar{\epsilon}^{(i)}$ l'erreur de l'angle $C^{(i-1)} C^{(i+1)} C^{(i)}$, ainsi corrigé; $-(\bar{\alpha}^{(i)} + \bar{\epsilon}^{(i)})$ sera l'erreur du troisième angle $C^{(i+1)} C^{(i-1)} C^{(i)}$. On aura donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^{(i)} C^{(i+1)}}{C^{(i)} C^{(i+1)}} &= \frac{\partial C^{(i)} C^{(i-1)}}{C^{(i)} C^{(i-1)}} - (\bar{\alpha}^{(i)} + \bar{\epsilon}^{(i)}) \cot C^{(i+1)} C^{(i-1)} C^{(i)} \\ &\quad - \bar{\epsilon}^{(i)} \cot C^{(i-1)} C^{(i+1)} C^{(i)}; \end{aligned}$$

ce qui donne, en observant que, dans le premier triangle, le côté $C^{(i-1)} C$ est AC que je suppose mesuré très exactement,

$$\frac{\partial C^{(i)} C^{(i+1)}}{C^{(i)} C^{(i+1)}} = -S[(\bar{\alpha}^{(i)} + \bar{\epsilon}^{(i)}) \cot C^{(i+1)} C^{(i-1)} C^{(i)} + \bar{\epsilon}^{(i)} \cot C^{(i-1)} C^{(i+1)} C^{(i)}],$$

le signe S servant à exprimer la somme de toutes les quantités qu'il renferme depuis $i=0$ jusqu'à i inclusivement. On aura donc ainsi la valeur de $\delta. I^{(i)} I^{(i+1)}$. En réunissant toutes ces valeurs, on aura, pour l'erreur entière de leur somme ou de la ligne mesurée, une expression de cette forme

$$(o) \quad p\bar{\alpha} + q\bar{\epsilon} + p^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + q^{(1)}\bar{\epsilon}^{(1)} + \dots$$

La probabilité des valeurs simultanées de $\bar{\alpha}$ et de $\bar{\epsilon}$ est, par ce qui précède, proportionnelle à

$$c^{-24(\bar{\epsilon} + \frac{1}{2}\bar{\alpha})^2 - \frac{2}{3}\bar{\alpha}^2}.$$

En faisant

$$\bar{\epsilon} + \frac{1}{2}\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\bar{\alpha}\sqrt{3},$$

l'exponentielle précédente devient

$$c^{-\frac{2}{3}\bar{\alpha}^2 - \frac{2}{3}\bar{\alpha}^2};$$

ainsi les lois de probabilité des valeurs de $\bar{\alpha}$ et de $\bar{\alpha}$ sont les mêmes. La fonction (o) prend alors cette forme

$$(o') \quad r\bar{\alpha} + r^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + r^{(2)}\bar{\alpha}^{(2)} + r^{(3)}\bar{\alpha}^{(3)} + \dots$$

La probabilité que l'erreur de cette fonction, et par conséquent de la fonction (o), est comprise dans les limites $\pm s$ est, par le n° 20 du Livre II,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2} dt,$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t égal à

$$s \sqrt{r^2 + r^{(1)2} + r^{(2)2} + \dots}.$$

On a évidemment

$$p\bar{\alpha} + q\bar{\epsilon} = (p - \frac{1}{2}q)\bar{\alpha} + \frac{1}{2}q\bar{\alpha}\sqrt{3};$$

ce qui donne, en l'égalant à $r\bar{\alpha} + r^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)}$,

$$r = \frac{1}{2}q\sqrt{3}, \quad r^{(1)} = p - \frac{1}{2}q;$$

la valeur de t sera donc, en y substituant pour h sa valeur $\frac{3n}{2\bar{\alpha}^2}$,

$$\frac{3s}{2\bar{\alpha}} \sqrt{p^2 - pq + q^2 + p^{(1)2} - p^{(1)}q^{(1)} + q^{(1)2} + \dots}.$$

La longueur de l'arc mesuré fait connaître celle du rayon osculateur de la surface au point A de départ. Soit $1+u$ le rayon mené du centre de gravité de la Terre à sa surface, u étant une fonction de la longitude et de la latitude, le demi-axe de la Terre étant pris pour unité; si l'on nomme R le rayon osculateur à ce point, dans le sens AA', on aura.

par le Chapitre cité du Livre III de la *Mécanique céleste*,

$$R = 1 + u - \left(\frac{du}{dl} \right) \tan l + \frac{\left(\frac{d^2 u}{dl^2} \right)}{\cos^2 l};$$

et si l'on nomme ε la longueur de l'arc mesuré $AA^{(1)}$, on aura, à fort peu près,

$$R = \frac{\varepsilon}{\varphi \cos l} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \tan^2 l \right);$$

ce qui donne, à fort peu près,

$$\delta R = \frac{\delta \varepsilon}{\varphi \cos l} - \frac{\varepsilon \delta \varphi}{\varphi^2 \cos l};$$

mais on a, par ce qui précède,

$$\delta \varepsilon = p \bar{\alpha} + q \bar{\varepsilon} + \dots,$$

$$\delta \varphi = \frac{\pm \delta A^{(n)}}{\sin l} = \frac{\pm (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^{(1)} + \bar{\alpha}^{(2)} - \dots)}{\sin l},$$

le signe inférieur ayant lieu si n est pair, et le signe supérieur si n est impair. En faisant donc

$$\bar{p} = \frac{p}{\varphi \cos l} \mp \frac{\varepsilon}{\varphi^2 \sin l \cos l}, \quad \bar{q} = \frac{q}{\varphi \cos l},$$

$$\bar{p}^{(1)} = \frac{p^{(1)}}{\varphi \cos l} \pm \frac{\varepsilon}{\varphi^2 \sin l \cos l}, \quad \bar{q}^{(1)} = \frac{q^{(1)}}{\varphi \cos l},$$

$$\dots, \dots,$$

la probabilité que l'erreur δR sera comprise dans les limites $\pm s$ sera

$$\frac{2 \int_0^s dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{3s}{2\bar{\varepsilon}} \sqrt{\frac{n}{p^2 - p\bar{q} + \bar{q}^2 + \bar{p}^{(1)2} - \bar{p}^{(1)}\bar{q}^{(1)} + \dots}}.$$

La différence en latitude des points extrêmes de la perpendiculaire

dépend, par le Chapitre cité de la *Mécanique céleste*, de l'excentricité des parallèles terrestres, qui introduit dans son expression la quantité

$$(u) - \varphi \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right) \tan l + \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) \right];$$

la partie de cette expression qui est indépendante de cette excentricité est proportionnelle à φ^2 ; ainsi la petite erreur dont φ est susceptible n'a point d'influence sensible sur la différence en latitude. En observant donc avec un grand soin cette différence, l'excentricité des parallèles terrestres doit se manifester, pour peu qu'elle soit sensible.

Si la ligne géodésique a été tracée dans le sens du méridien, l'azimut, à l'extrémité de l'arc mesuré, fera connaître l'excentricité des parallèles terrestres, et il est remarquable que cet azimut soit la fonction (u) , en y changeant φ dans la différence en latitude des points extrêmes de l'arc mesuré et en la multipliant par le sinus de la latitude divisé par le carré du cosinus de la latitude à l'origine de l'arc.

L'arc mesuré dans le sens du méridien fera connaître le rayon osculateur de la Terre dans ce sens, et, par les formules précédentes, on aura la probabilité des erreurs dont sa valeur est susceptible.

On obtiendra plus de précision dans tous les résultats en fixant vers le milieu de l'arc mesuré l'origine des angles; car alors les puissances supérieures de ces angles, que l'on néglige, deviennent beaucoup plus petites.

3. Supposons que, pour vérifier les opérations, on mesure, vers l'extrémité $A^{(n)}$ de l'arc $AA'A'' \dots$, une seconde base. L'expression de l'erreur de cette base, conclue de la chaîne des triangles et de la base mesurée au point A, sera, par ce qui précède, de la forme

$$(p) \quad l\bar{\alpha} + m\bar{\varepsilon} + l^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + m^{(1)}\bar{\varepsilon}^{(1)} + \dots;$$

soit λ cette erreur qui sera connue par la mesure directe de la seconde base. Si dans la fonction (p) on fait, comme précédemment,

$$\bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\bar{\alpha}\sqrt{3},$$

elle prend cette forme

$$f\alpha + f^{(1)}\bar{\alpha} + f^{(2)}\alpha^{(1)} + f^{(3)}\bar{\alpha}^{(1)} + \dots$$

En désignant par s la valeur de la fonction (o) ou de son équivalente (o') et observant que les probabilités de α et de $\bar{\alpha}$ suivent la même loi et sont proportionnelles à $c^{-\frac{1}{2}h\alpha^2}$ et $c^{-\frac{1}{2}h\bar{\alpha}^2}$, la probabilité de la fonction précédente sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{1}{2}h(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \alpha^{(1)2} + \bar{\alpha}^{(1)2} + \dots)}$$

En supposant la fonction égale à λ , cette exponentielle devient

$$c^{-\frac{1}{2}h\left[\left(\alpha - \frac{f\lambda}{F}\right)^2 + \left(\bar{\alpha} - \frac{f^{(1)}\lambda}{F}\right)^2 + \dots + \frac{\lambda^2}{F}\right]}$$

F exprimant la somme des carrés $f^2 + f^{(1)2} + f^{(2)2} + \dots$. Les valeurs de α , $\bar{\alpha}$, $\alpha^{(1)}$, ... les plus probables sont évidemment celles qui rendent un minimum l'exposant de cette exponentielle, ce qui donne

$$\alpha = \frac{f\lambda}{F}, \quad \bar{\alpha} = \frac{f^{(1)}\lambda}{F}, \quad \alpha^{(1)} = \frac{f^{(2)}\lambda}{F}, \quad \dots$$

Si l'on observe ensuite que l'on a, par ce qui précède,

$$f = \frac{1}{2}m\sqrt{3}, \quad f^{(1)} = l - \frac{1}{2}m, \\ \bar{f} = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{3} - \frac{1}{2}\bar{\alpha},$$

on aura

$$\alpha = \frac{(l - \frac{1}{2}m)\lambda}{F}, \quad \bar{\alpha} = \frac{(m - \frac{1}{2}l)\lambda}{F}, \\ \alpha^{(1)} = \frac{(l^{(1)} - \frac{1}{2}m^{(1)})\lambda}{F}, \quad \bar{\alpha}^{(1)} = \frac{(m^{(1)} - \frac{1}{2}l^{(1)})\lambda}{F}, \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots,$$

et F deviendra

$$l^2 - ml + m^2 + l^{(1)2} - m^{(1)}l^{(1)} + m^{(1)2} + \dots$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la fonction (o) , on aura la correction résultante de la mesure d'une seconde base, en l'affectant d'un signe

contraire. Mais on peut directement arriver à ce résultat, par le n° 21 du Livre II, d'après lequel on voit que, s étant la valeur de la fonction (o) , sa probabilité est proportionnelle à

$$\frac{\frac{1}{2}h(s - \lambda)(S r^{(i)} f^{(i)})}{S r^{(i)2} - (S r^{(i)} f^{(i)})^2} \cdot \frac{1}{S f^{(i)2}}$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ inclusive-ment. La valeur de s la plus probable est celle qui rend nul l'exposant de c , ce qui donne

$$s = \lambda \frac{S r^{(i)} f^{(i)}}{S f^{(i)2}}$$

il faut donc retrancher de l'arc mesuré $AA^{(1)} \dots AA^{(n)}$ cette valeur de s ; et, si l'on nomme u l'erreur de l'arc ainsi corrigé, la probabilité de u sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{1}{2}hu^2} \frac{1}{S r^{(i)2} - (S r^{(i)} f^{(i)})^2} \cdot \frac{1}{S f^{(i)2}}$$

On voit par cette expression que le poids du résultat est augmenté en vertu de la mesure de la seconde base; car, avant cette mesure, le coefficient de $-u^2$ était, par le numéro précédent,

$$\frac{\frac{1}{2}h}{S r^{(i)2}}$$

et, par cette mesure, le coefficient de $-u^2$ devient

$$\frac{\frac{1}{2}h}{S r^{(i)2} - (S r^{(i)} f^{(i)})^2} \cdot \frac{1}{S f^{(i)2}}$$

La même erreur devient donc moins probable par cette mesure et par la correction précédente de cet arc.

On peut observer ici que les valeurs précédentes de r , $r^{(1)}$, f et $f^{(1)}$ donnent

$$r^2 + r^{(1)2} = p^2 - pq + q^2, \\ f^2 + f^{(1)2} = l^2 - ml + m^2, \\ rf + r^{(1)}f^{(1)} = l(p - \frac{1}{2}q) + m(q - \frac{1}{2}p).$$

On pourra donc former aisément $Sr^{(2)}$ et $Sr^{(i)}f^{(i)}$ au moyen des coefficients de $\alpha, \bar{\alpha}, \alpha^{(i)}, \dots$ dans les fonctions (o) et (p).

Si l'on avait mesuré d'autres bases, on aurait, par l'analyse du n° 21 du Livre II, les corrections qu'il faudrait faire à l'arc mesuré, et la loi de ses erreurs.

La mesure d'une nouvelle base peut servir à corriger, non seulement l'arc mesuré, mais encore la différence en longitude de ses points extrêmes ou l'angle $A^{(0)}$. Il suffira de substituer à la fonction (o) celle-ci

$$\pm (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^{(1)} + \bar{\alpha}^{(2)} - \dots)$$

qui exprime l'erreur de $A^{(0)}$, le signe supérieur ayant lieu si n est impair, et l'inférieur si n est pair. Alors on a

$$p = \pm 1, \quad q = 0, \quad p^{(1)} = \mp 1, \quad q^{(1)} = 0, \quad \dots;$$

de là il est facile de conclure que, pour corriger l'angle $A^{(0)}$, il faut lui ajouter la quantité

$$\pm \frac{\lambda(l - l^{(1)} + l^{(2)} - \dots - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m^{(1)} - \dots)}{l^2 - ml + m^2 + l^{(1)2} - m^{(1)}l^{(1)} + m^{(1)2} + \dots}.$$

La probabilité que l'erreur de $A^{(0)}$ ainsi corrigé est dans les limites $\pm u$ sera

$$\frac{2 \int dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{u \sqrt{\frac{1}{2}} h}{\sqrt{n - \frac{(l - l^{(1)} + l^{(2)} - \dots - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m^{(1)} - \dots)^2}{l^2 - ml + m^2 + l^{(1)2} - m^{(1)}l^{(1)} + m^{(1)2} + \dots}}}.$$

4. Nous sommes parvenus aux résultats précédents en partant de la loi de probabilité de l'erreur α proportionnelle à $e^{-\lambda \alpha^2}$, et nous avons prouvé que cette loi de probabilité peut être admise à l'égard des angles mesurés avec le cercle répétiteur. Nous allons faire voir ici que ces résultats ont lieu généralement, quelle que soit la loi de probabilité de l'erreur α . Soit $\varphi(\alpha)$ cette loi. Nous la supposerons telle que les

mêmes erreurs positives et négatives soient également probables. Nous supposons, de plus, que $\varphi(\alpha)$ s'étend depuis $\alpha = -\infty$ jusqu'à $\alpha = +\infty$: cette supposition est toujours permise; car, si la probabilité devient nulle au delà de certaines limites, la fonction $\varphi(\alpha)$ est alors discontinue et nulle au delà de ces limites. Cherchons maintenant la probabilité des valeurs de la fonction (o) du n° 1. Cette fonction a été calculée en corrigeant les angles de chaque triangle du tiers de la somme observée de leurs erreurs. Supposons généralement que, dans le premier triangle, on corrige l'erreur α de $(i + \frac{1}{2})T$, l'erreur $\bar{\alpha}$ de $(i_1 + \frac{1}{2})T$, et par conséquent la troisième erreur de $(\frac{1}{2} - i - i_1)T$, en désignant par α et $\bar{\alpha}$ les erreurs α et $\bar{\alpha}$ ainsi corrigées, on aura

$$\alpha = \alpha + (i + \frac{1}{2})T, \quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha} + (i_1 + \frac{1}{2})T.$$

En désignant pareillement par $\alpha^{(1)}$ et $\bar{\alpha}^{(1)}$ les erreurs $\alpha^{(1)}$ et $\bar{\alpha}^{(1)}$ respectivement corrigées de $(i^{(1)} + \frac{1}{2})T^{(1)}$, $(i_1^{(1)} + \frac{1}{2})T^{(1)}$, on aura

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)} + (i^{(1)} + \frac{1}{2})T^{(1)}, \quad \bar{\alpha}^{(1)} = \bar{\alpha}^{(1)} + (i_1^{(1)} + \frac{1}{2})T^{(1)},$$

et ainsi de suite. La fonction (o) est, par le n° 1, égale à

$$p\bar{\alpha} + q\bar{\alpha} + p^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + q^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + \dots;$$

ensuite, on a

$$\alpha = \bar{\alpha} + \frac{1}{2}T = \alpha + (i + \frac{1}{2})T;$$

ce qui donne

$$\bar{\alpha} = \alpha + iT;$$

on a pareillement

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha} + i_1T, \quad \bar{\alpha}^{(1)} = \bar{\alpha}^{(1)} + i^{(1)}T, \quad \dots$$

La fonction (o) devient ainsi

$$p\bar{\alpha} + q\bar{\alpha} + p^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + q^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + \dots + S(pi + qi_1)T,$$

$S(pi + qi_1)T$ désignant la somme

$$(pi + qi_1)T + (p^{(1)}i^{(1)} + q^{(1)}i_1^{(1)})T^{(1)} + \dots$$

La correction de la fonction (o) relative aux valeurs de $i, i_1, i^{(1)}, \dots$ est

donc

$$-S(pi + qi)T,$$

et alors cette fonction ainsi corrigée devient

$$(\varepsilon) \quad p\underline{x} + q\underline{\varepsilon} + p^{(1)}\underline{\alpha}^{(1)} + q^{(1)}\underline{\varepsilon}^{(1)} + p^{(2)}\underline{\alpha}^{(2)} + \dots$$

Pour avoir la probabilité des valeurs de cette dernière fonction, nous observerons que la probabilité de l'existence simultanée des valeurs de $\underline{x}$, $\underline{\varepsilon}$ et T est

$$\frac{d\underline{x} d\underline{\varepsilon} dT \varphi(\underline{x}) \varphi(\underline{\varepsilon}) \varphi(T - \underline{x} - \underline{\varepsilon})}{\int \int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} dT \varphi(\underline{x}) \varphi(\underline{\varepsilon}) \varphi(T - \underline{x} - \underline{\varepsilon})},$$

les intégrales du dénominateur étant prises dans leurs limites infinies positives et négatives. Désignons par k l'intégrale $\int d\underline{x} \varphi(\underline{x})$, prise dans ces limites; il est facile de voir que ce dénominateur sera égal à k^3 . La fraction précédente devient ainsi

$$\frac{d\underline{x} d\underline{\varepsilon} dT}{k^3} \varphi(\underline{x}) \varphi(\underline{\varepsilon}) \varphi(T - \underline{x} - \underline{\varepsilon});$$

la probabilité de l'existence simultanée des valeurs de $\underline{x}$, $\underline{\varepsilon}$ et T sera donc

$$\frac{d\underline{x} d\underline{\varepsilon} dT}{k^3} \varphi[\underline{x} + (i + \frac{1}{2})T] \varphi[\underline{\varepsilon} + (i + \frac{1}{2})T] \varphi[(\frac{1}{2} - i - i)T - \underline{x} - \underline{\varepsilon}].$$

T étant supposé pouvoir varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on aura la probabilité des valeurs simultanées de $\underline{x}$ et de $\underline{\varepsilon}$ en intégrant la fonction précédente par rapport à T , dans les limites infinies. Nommons $\frac{d\underline{x} d\underline{\varepsilon}}{k^2} \psi(\underline{x}, \underline{\varepsilon})$ cette intégrale. On voit, par le n° 20 du Livre II, qu'en désignant par s la valeur de la fonction (ε) , la probabilité de s sera proportionnelle à

$$(H) \quad \int d\omega e^{-\mu\omega} \left\{ \begin{aligned} &\int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} \psi(\underline{x}, \underline{\varepsilon}) \cos(p\underline{x} + q\underline{\varepsilon})\omega \\ &\times \int \int d\underline{\alpha}^{(1)} d\underline{\varepsilon}^{(1)} \psi(\underline{\alpha}^{(1)}, \underline{\varepsilon}^{(1)}) \cos(p^{(1)}\underline{\alpha}^{(1)} + q^{(1)}\underline{\varepsilon}^{(1)})\omega \\ &\times \dots \dots \dots \end{aligned} \right\},$$

l'intégrale relative à ω étant prise depuis $\omega = -\pi$ jusqu'à $\omega = \pi$ et

les intégrales relatives à $\underline{x}$ et $\underline{\varepsilon}$ étant prises dans leurs limites infinies. Développons dans une série, ordonnée par rapport aux puissances de ω , la fonction comprise dans la parenthèse. Le logarithme de $\int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} \psi(\underline{x}, \underline{\varepsilon}) \cos(p\underline{x} + q\underline{\varepsilon})\omega$ est égal à

$$\log \int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} \psi(\underline{x}, \underline{\varepsilon}) - \frac{\frac{\omega^2}{2} \int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} \psi(\underline{x}, \underline{\varepsilon}) (p\underline{x} + q\underline{\varepsilon})^2}{\int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} \psi(\underline{x}, \underline{\varepsilon})} - \dots$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} \psi(\underline{x}, \underline{\varepsilon}) \\ = \int \int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} dT \varphi[\underline{x} + (i + \frac{1}{2})T] \varphi[\underline{\varepsilon} + (i + \frac{1}{2})T] \varphi[(\frac{1}{2} - i - i)T - \underline{x} - \underline{\varepsilon}]. \end{aligned}$$

Les intégrales étant prises dans leurs limites infinies, il est aisé de voir, par la théorie connue des intégrales multiples, que le second membre de cette équation est égal à

$$\int \int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} dT \varphi(\underline{x}) \varphi(\underline{\varepsilon}) \varphi(T),$$

T étant égal à $T - \underline{x} - \underline{\varepsilon}$; il est donc égal à k^3 .

On a ensuite

$$(u) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} \psi(\underline{x}, \underline{\varepsilon}) (p\underline{x} + q\underline{\varepsilon})^2 \\ &= \int \int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} dT \varphi(\underline{x}) \varphi(\underline{\varepsilon}) \varphi(T) (p\underline{x} + q\underline{\varepsilon})^2, \end{aligned} \right.$$

en substituant pour $\underline{x}$ et $\underline{\varepsilon}$ leurs valeurs en $\underline{x}$, $\underline{\varepsilon}$, et T dans la quantité $(p\underline{x} + q\underline{\varepsilon})^2$. Or il suit de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (\frac{3}{2} - i)\underline{x} - (i + \frac{1}{2})\underline{\varepsilon} - (i + \frac{1}{2})T, \\ \underline{\varepsilon} &= (\frac{3}{2} - i)\underline{\varepsilon} - (i + \frac{1}{2})\underline{x} - (i + \frac{1}{2})T. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans la quantité $(p\underline{x} + q\underline{\varepsilon})^2$, on pourra, dans son développement, négliger les termes dépendants des produits $\underline{x}\underline{\varepsilon}$, $\underline{x}T$ et $\underline{\varepsilon}T$, car la triple intégrale

$$(u) \quad \int \int \int d\underline{x} d\underline{\varepsilon} dT \varphi(\underline{x}) \varphi(\underline{\varepsilon}) \varphi(T) (p\underline{x} + q\underline{\varepsilon})^2$$

étant prise dans ses limites infinies, et la fonction $\varphi(\underline{x})$ étant supposée

la même pour les valeurs $+\alpha$ et $-\alpha$, il est clair que les éléments de cette intégrale dépendants de $+\alpha\epsilon$ seront détruits par les éléments négatifs dépendants de $-\alpha\epsilon$. Si l'on observe ensuite qu'en désignant $\int \alpha^2 dx \varphi(\alpha)$ par k'' , on a

$$\iint \alpha^2 dx d\epsilon d\Gamma \varphi(\alpha) \varphi(\epsilon) \varphi(\Gamma) = k^2 k'',$$

la fonction (u) deviendra

$$h^2 k'' [\tfrac{1}{2}(p^2 - pq + q^2) + 3(pi + qi)^2];$$

le logarithme de

$$\iint dx d\epsilon \psi(\alpha, \epsilon) \cos(p\alpha + q\epsilon)\omega$$

devient ainsi

$$\log h^2 = \frac{k''}{2k} \omega^2 [\tfrac{1}{2}(p^2 - pq + q^2) + 3(pi + qi)^2] - \dots$$

En repassant des logarithmes aux nombres et négligeant, conformément à l'analyse du n° 20 du Livre II, les puissances de ω supérieures au carré, l'intégrale (II) prendra cette forme

$$h^{2n} \int d\omega c^{-\frac{1}{2} \omega \sqrt{-1} - \frac{k'' \omega^2}{2k} [\tfrac{1}{2} S(p^2 - pq + q^2) + 3S(pi + qi)^2]},$$

$S(p^2 - pq + q^2)$ représentant la somme des quantités

$$p^2 - pq + q^2 + p^{(1)2} - p^{(1)}q^{(1)} + \dots;$$

$S(pi + qi)^2$ représentant la somme des quantités

$$(pi + qi)^2 + (p^{(1)}i^{(1)} + q^{(1)}i^{(1)})^2 + \dots,$$

et n étant le nombre des triangles. Donnons à l'intégrale précédente cette forme

$$h^{2n} \int d\omega c^{-\frac{1}{2} \omega \left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{Q}} \right) - \frac{\omega^2}{2Q}},$$

Q étant égal à

$$\frac{k''}{2k} [\tfrac{1}{2} S(p^2 - pq + q^2) + 3S(pi + qi)^2].$$

L'intégrale doit être prise depuis $\omega = -\pi$ jusqu'à $\omega = \pi$, et l'on a vu, dans le numéro cité du Livre II, qu'elle peut être étendue depuis

$\omega = -\infty$ jusqu'à $\omega = \infty$; alors l'intégrale précédente, ou la probabilité de s , devient proportionnelle à $c^{-\frac{s^2}{2Q}}$ ou à

$$c^{-\frac{3k''s^2}{2k[S(p^2 - pq + q^2) + \tfrac{1}{2}S(pi + qi)^2]}}.$$

Il faut maintenant déterminer la valeur de $\frac{k''}{k}$. Pour cela nous ferons, comme ci-dessus, usage des valeurs observées de T , $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ... Lorsque ces valeurs sont en grand nombre, la somme de leurs carrés divisée par leur nombre sera, à fort peu près, par ce que nous avons établi dans le Livre II, la valeur moyenne de T^2 ; en faisant donc

$$\bar{\theta}^2 = T^2 + T^{(1)2} + T^{(2)2} + \dots,$$

$\frac{\bar{\theta}^2}{n}$ sera cette valeur moyenne. Or on a cette valeur en multipliant chaque valeur possible de T^2 par sa probabilité et en prenant la somme de tous ces produits; l'expression de la valeur moyenne de T^2 sera donc

$$\frac{\iint \alpha^2 dx d\epsilon d\Gamma \cdot T^2 \varphi(\alpha) \varphi(\epsilon) \varphi(T - \alpha - \epsilon)}{\iint \alpha^2 dx d\epsilon d\Gamma \varphi(\alpha) \varphi(\epsilon) \varphi(T - \alpha - \epsilon)},$$

les intégrales étant prises dans leurs limites infinies. Soit, comme ci-dessus,

$$T' = T - \alpha - \epsilon;$$

la fraction précédente deviendra

$$\frac{\iint \alpha^2 \varphi(T' + \alpha + \epsilon)^2 dx d\epsilon d\Gamma \varphi(\alpha) \varphi(\epsilon) \varphi(T')}{\iint \alpha^2 dx d\epsilon d\Gamma \varphi(\alpha) \varphi(\epsilon) \varphi(T')},$$

toutes ces intégrales étant prises encore dans leurs limites infinies. Il est facile de voir, par l'analyse précédente, que le numérateur de cette fraction est égal à $3k^2 k''$, et que son dénominateur est égal à k^2 ; la fraction devient ainsi $\frac{3k''}{k}$; en l'égalant à $\frac{\bar{\theta}^2}{n}$, on aura

$$\frac{k''}{k} = \frac{\bar{\theta}^2}{3n}.$$

la probabilité de s est donc proportionnelle à

$$e^{-\frac{ns^2}{4\pi^2 [S(p^2 - pq + q^2) + \frac{1}{2}S(pi + qi)^2]}}.$$

Il est clair que les valeurs de i et de i_1 qui rendent cette probabilité le plus rapidement décroissante sont celles qui donnent $pi + qi_1 = 0$; et alors la correction précédente de l'arc mesuré devient nulle. Le cas de i et i_1 nuls donne donc la loi de probabilité des erreurs géodésiques, le plus rapidement décroissante, loi qui doit être évidemment adoptée.

De là, il est facile de conclure que la probabilité que la valeur de s sera comprise dans les limites $\pm s$ est égale à

$$\frac{2 \int_0^s dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{3s}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{S(p^2 - pq + q^2)}},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons déduit dans le n° 1 de la loi particulière de probabilité des erreurs α proportionnelle à $e^{-\lambda \alpha^2}$.

Exprimons, comme dans le n° 2, l'erreur d'une nouvelle base conclue de la première par la fonction

$$l\bar{\alpha} + m\bar{\varepsilon} + l^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + m^{(1)}\bar{\varepsilon}^{(1)} + \dots$$

En faisant, comme précédemment,

$$\bar{\alpha} = \alpha - iT, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon - i_1 T, \quad \bar{\alpha}^{(1)} = \alpha^{(1)} - i^{(1)} T^{(1)}, \quad \dots,$$

la correction de cette fonction, relative aux valeurs de $i, i_1, i^{(1)}, \dots$ sera $-S(l + mi_1)T$, et l'erreur de la nouvelle base ainsi corrigée sera

$$l\bar{\alpha} + m\bar{\varepsilon} + l^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + m^{(1)}\bar{\varepsilon}^{(1)} + \dots$$

Soit s' la valeur de cette fonction; la probabilité de l'existence simul-

tanée des valeurs s et s' des fonctions (ε) et (λ) sera, par le n° 21 du Livre II, proportionnelle à

$$\iint d\omega d\omega' e^{-2\pi\omega\sqrt{-1} - i^2\omega'\sqrt{-1} - Q\omega^2 - 2Q_1\omega\omega' - Q_2\omega'^2},$$

les intégrales étant prises depuis ω et ω' égaux à $-\infty$ jusqu'à ω et ω' égaux à $+\infty$. On voit ensuite, par l'analyse du numéro cité, que l'on a

$$\begin{aligned} & Q\omega^2 + 2Q_1\omega\omega' + Q_2\omega'^2 \\ &= \frac{\frac{1}{2}S \iint d\alpha d\varepsilon dT \varphi(\alpha) \varphi(\varepsilon) \varphi(T) [(p\alpha + q\varepsilon)\omega + (l\alpha + m\varepsilon)\omega']^2}{\iint d\alpha d\varepsilon dT \varphi(\alpha) \varphi(\varepsilon) \varphi(T)}, \end{aligned}$$

les intégrales relatives à α, ε et T étant prises dans leurs limites infinies; ce qui donne, en substituant pour α et ε leurs valeurs précédentes,

$$Q = \frac{1}{3} \frac{h''}{k} [S(p^2 - pq + q^2) + \frac{9}{2} S(pi + qi)^2],$$

$$Q_1 = \frac{1}{3} \frac{h''}{k} \left\{ S \left[\left(p - \frac{q}{2} \right) l + \left(q - \frac{p}{2} \right) m \right] + \frac{9}{2} S(pi + qi)(li + mi) \right\},$$

$$Q_2 = \frac{1}{3} \frac{h''}{k} [S(l^2 - ml + m^2) + \frac{9}{2} S(li + mi)^2];$$

d'où l'on conclut, par l'analyse du numéro cité, que la probabilité de l'existence simultanée des valeurs de s et de s' est proportionnelle à

$$e^{-\frac{(Q_1 s^2 - 2Q_1 s s' + Q_2 s'^2)}{4(QQ_1 - Q_2^2)}}$$

ou

$$e^{-\frac{Q_1 \left(s - s' \frac{Q_2}{Q_1} \right)^2}{4(QQ_1 - Q_2^2)} - \frac{s'^2}{4Q_2}}.$$

La mesure de la seconde base détermine la valeur de s' ; et, en la nommant λ comme ci-dessus, la probabilité de s sera proportionnelle à

$$e^{-\frac{Q_1 \left(s - \lambda \frac{Q_2}{Q_1} \right)^2}{4(QQ_1 - Q_2^2)}}.$$

La valeur de s la plus probable est celle qui rend nul l'exposant de e ;

ce qui donne

$$s = \lambda \frac{Q_1}{Q_2};$$

en faisant donc

$$s = \lambda \frac{Q_1}{Q_2} + u,$$

u sera l'erreur de l'arc mesuré et diminué de $\frac{\lambda Q_1}{Q_2}$, et la probabilité de cette erreur sera proportionnelle à

$$\frac{1}{c} \frac{Q_1 u^2}{(Q_2 - Q_1)^2}.$$

Les valeurs de $i, i_1, i_1^{(1)}, \dots$ doivent être déterminées par la condition que le coefficient de u^2 , dans cette exponentielle, soit un maximum; voyons donc quelles sont les valeurs de ces quantités qui rendent la fraction

$$\frac{Q_2}{QQ_2 - Q_1^2}$$

un maximum. Si l'on nomme Q' ce que devient l'expression de Q lorsqu'on y diminue l'intégrale finie $S(pi + qi)^2$ de l'élément $(pi + qi)^2$, on aura

$$Q' = Q - \frac{3}{2} \frac{h''}{k} (pi + qi)^2.$$

Si l'on nomme pareillement Q'_1 ce que devient l'expression de Q , lorsque l'on y diminue l'intégrale finie $S(pi + qi)(li + mi)$ de l'élément $(pi + qi)(li + mi)$, on aura

$$Q'_1 = Q - \frac{3}{2} \frac{h''}{k} (pi + qi)(li + mi).$$

Enfin, si l'on nomme Q'_2 ce que devient Q , lorsque l'on y diminue l'intégrale finie $S(li + mi)^2$ de l'élément $(li + mi)^2$, on aura

$$Q'_2 = Q - \frac{3}{2} \frac{h''}{k} (li + mi)^2.$$

La fraction

$$\frac{Q'_2}{Q'Q'_2 - Q_1^2}$$

surpasse la fraction

$$\frac{Q_2}{QQ_2 - Q_1^2},$$

car, en substituant dans la première, au lieu de Q' , Q'_1 et Q'_2 , leurs valeurs, et réduisant au même dénominateur son excès sur la seconde, le numérateur de cet excès devient

$$\frac{3}{2} \frac{h''}{k} [Q_2(pi + qi) - Q_1(li + mi)]^2.$$

Nommons encore Q'' ce que devient Q' lorsqu'on en retranche $\frac{3}{2} \frac{h''}{k} (p^{(1)}\tilde{p}^{(1)} + q^{(1)}\tilde{q}^{(1)})^2$; et, par conséquent, ce que devient l'expression de Q lorsque l'on y diminue l'intégrale $S(pi + qi)^2$ des deux éléments $(pi + qi)^2 + (p^{(1)}\tilde{p}^{(1)} + q^{(1)}\tilde{q}^{(1)})^2$. Nommons pareillement Q'_1 ce que devient Q'_1 , lorsqu'on en retranche

$$\frac{3}{2} \frac{h''}{k} (p^{(1)}\tilde{p}^{(1)} + q^{(1)}\tilde{q}^{(1)})(R^{(1)}\tilde{R}^{(1)} + m^{(1)}\tilde{m}^{(1)});$$

enfin, nommons Q'_2 ce que devient Q'_2 lorsque l'on en retranche

$$\frac{3}{2} \frac{h''}{k} (R^{(1)}\tilde{R}^{(1)} + m^{(1)}\tilde{m}^{(1)})^2;$$

on verra, par le même procédé, que la fraction

$$\frac{Q'_2}{Q'Q'_2 - Q_1^2}$$

surpasse la fraction

$$\frac{Q'_2}{Q'Q'_2 - Q_1^2}$$

et, par conséquent, la fraction

$$\frac{Q_2}{QQ_2 - Q_1^2}.$$

En continuant ainsi, on voit que cette dernière fraction devient à son maximum lorsque les intégrales finies $S(pi + qi)^2$, $S(pi + qi)(li + mi)^2$ et $S(li + mi)^2$ sont nulles dans les expressions de Q , Q_1 et Q_2 , ce qui

revient à supposer nulles les valeurs de $i, i_1, i^{(1)}, \dots$; cette supposition donne donc la loi de probabilité des valeurs de Q le plus rapidement décroissante, et alors on a

$$Q = \frac{g^2}{9n} S(p^2 - pq + q^2),$$

$$Q_1 = \frac{g^2}{9n} S\left[\left(p - \frac{q}{2}\right)l + \left(q - \frac{p}{2}\right)m\right],$$

$$Q_2 = \frac{g^2}{9n} S(l^2 - ml + m^2).$$

Le poids de l'erreur u devient ainsi

$$S(p^2 - pq + q^2) - \frac{-\frac{9n}{4g^2}}{S(l^2 - ml + m^2)} \left[S\left(p - \frac{q}{2}\right)l + S\left(q - \frac{p}{2}\right)m \right]^2.$$

Il est facile de voir que ce résultat coïncide avec le résultat analogue du n° 3.

Sur la probabilité des résultats déduits, par des procédés quelconques, d'un grand nombre d'observations.

La vraie marche des sciences naturelles consiste à remonter, par la voie de l'induction, des phénomènes aux lois et des lois aux forces. On redescend ensuite de ces forces à l'explication complète des phénomènes jusque dans leurs plus petits détails. L'inspection attentive d'un grand ensemble d'observations et leurs comparaisons multipliées font pressentir les lois qu'il recèle. L'expression analytique de ces lois dépend de coefficients constants que l'on nomme *éléments*. On détermine, par la théorie des probabilités, les valeurs les plus probables de ces éléments, et si, en les substituant dans les expressions analytiques, ces expressions satisfont à toutes les observations, dans les limites des erreurs possibles, on sera sûr que ces lois sont celles de la nature, ou du moins qu'elles en sont très peu différentes. On voit par

là combien est utile l'application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle, et combien il est essentiel d'avoir des méthodes pour tirer des observations les résultats les plus avantageux. Ces résultats sont évidemment ceux avec lesquels une même erreur est moins probable qu'avec tout autre résultat. Ainsi la condition qu'il faut remplir dans le choix d'un résultat est que la loi de probabilité de ses erreurs soit le plus rapidement décroissante. Avant l'application du Calcul des Probabilités à cet objet, chaque calculateur assujettissait les résultats des observations aux conditions qui lui paraissaient être les plus naturelles. Maintenant que l'on a des formules certaines pour obtenir le résultat le plus avantageux, il ne peut plus y avoir d'incertitude à cet égard, du moins lorsque l'on fait usage des facteurs. On peut, non seulement déterminer ce résultat, mais encore assigner la probabilité des erreurs des résultats obtenus par d'autres procédés et comparer ces procédés à la méthode la plus avantageuse. L'excessive longueur des calculs que cette méthode exige, lorsque l'on emploie un très grand nombre d'observations, ne permet pas alors d'en faire usage. Mais, en groupant convenablement les équations de condition et en appliquant cette méthode aux équations qui résultent de chacun de ces groupes, on peut à la fois simplifier considérablement les calculs et conserver une partie des avantages qui lui sont attachés, comme on le verra dans la suite. Quel que soit le procédé dont on fait usage, il est très utile d'avoir un moyen pour déterminer la probabilité des résultats auxquels on parvient, surtout lorsqu'il s'agit d'éléments importants. On aura facilement cette probabilité par la méthode suivante.

1. Considérons d'abord un cas fort simple, celui des angles mesurés au moyen du cercle répétiteur. Supposons qu'à la fin de chaque opération partielle on lise la division correspondante du cercle; on aura, en partant du point de départ, une suite de termes dont le premier sera l'angle même, le deuxième sera le double de cet angle, le troisième en sera le triple, et ainsi de suite. Désignons par $A_1, A_2, \dots, A_n$ ces diffé-

rents termes, et par $a_1, a_2, \dots, a_n$ les n angles partiels successivement mesurés. On aura

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_2 + a_1, \\ A_3 &= a_3 + a_2 + a_1, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

et, si l'on nomme y le véritable angle simple, on aura cette suite d'équations

$$(a) \quad \begin{cases} y - a_1 + x_1 = 0, \\ y - a_2 + x_2 = 0, \\ y - a_3 + x_3 = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ y - a_n + x_n = 0, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, \dots$ étant les erreurs des angles $a_1, a_2, a_3, \dots$. On aura, par le n° 20 du Livre II, le résultat le plus avantageux en multipliant par l'unité chacune des équations précédentes et en les ajoutant, ce qui donne

$$y = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

En supposant $x_1, x_2, \dots$ nuls, on aura le résultat de la méthode la plus avantageuse, et l'erreur de ce résultat sera $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

En désignant par u cette erreur, on voit, par le numéro cité, que la probabilité de u est proportionnelle à $c^{-\frac{knu^2}{2k^2}}$, k étant égal à $\int dx \varphi(x)$, et k^2 étant égal à $\int x^2 dx \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant la loi de probabilité des erreurs x des observations partielles, cette loi étant supposée la même pour les erreurs positives et négatives et pouvant s'étendre à l'infini; c est toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Svanberg, dans son excellent Ouvrage sur le degré de Laponie, expose, pour déterminer y , un nouveau procédé fondé sur les considérations suivantes. Chaque terme de la série $A_1, A_2, \dots$ peut donner sa valeur, qui peut être également déterminée par la différence $A_i - A_s$ de deux termes quelconques de cette série, s' étant plus grand que s .

Cette différence, divisée par $s' - s$, donne une valeur de y d'autant plus exacte que ce diviseur est plus grand. En la multipliant donc par ce diviseur, on la rendra prépondérante en raison de son exactitude. Si l'on fait ensuite une somme de ces produits et qu'on la divise par le nombre d'angles simples qu'elle contient, on aura une valeur de y qui, conclue de toutes les combinaisons des quantités $A_1, A_2, \dots$ en donnant à chacune de ces combinaisons l'influence qu'elle doit avoir, semble devoir approcher de la vérité le plus près qu'il est possible. Cela serait juste, en effet, si toutes ces valeurs de y étaient indépendantes. Mais leur dépendance mutuelle fait que les mêmes angles simples sont employés plusieurs fois et d'une manière différente pour chacun d'eux, ce qui doit changer les probabilités respectives des valeurs de y et, par conséquent, la probabilité de la valeur moyenne. C'est un nouvel exemple des illusions auxquelles on est exposé dans ces recherches délicates.

Le procédé dont il s'agit revient à former la somme des différences $A_{s'} - A_s$, s' étant plus grand que s et devant avec cette condition être étendu depuis $s' = 1$ jusqu'à $s' = n$; s doit être étendu depuis $s = 0$ jusqu'à $s = n - 1$, et l'on doit faire $A_0 = 0$. En divisant ensuite cette somme par le nombre d'angles simples qu'elle contient, on a la valeur de y . Il est aisé de voir que cette valeur est

$$y = \frac{n S A_n - 2 SS A_{n-1}}{n(n+1) \frac{(n+2)}{1.2.3}},$$

SA_n exprimant la somme des quantités $A_1, A_2, \dots, A_n$; $SS A_{n-1}$ est la somme des quantités

$$\begin{aligned} &A_1, \\ &A_1 + A_2, \\ &A_1 + A_2 + A_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ &A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}; \end{aligned}$$

l'angle a_i est contenu $n - i + 1$ fois dans SA_n , il est contenu

$\frac{(n-i)(n-i+1)}{1 \cdot 2}$ fois dans la fonction SSA_{n-1} ; il est donc contenu

$\frac{i(n-i+1)}{n(n+1)(n+2)}$ fois dans l'expression précédente de y . De là il suit

que ce procédé revient à multiplier les équations (a) respectivement par les facteurs

$$\frac{n}{n(n+1)(n+2)}, \frac{2(n-1)}{n(n+1)(n+2)}, \frac{3(n-2)}{n(n+1)(n+2)}, \dots;$$

et alors on trouve, par le n° 20 du Livre II, que la probabilité de l'erreur u dans l'expression précédente de y est proportionnelle à

$$e^{-\frac{h}{24^2} S M_i^2}.$$

M_i étant ici égal à $\frac{i(n-i+1)}{n(n+1)(n+2)}$; l'intégrale $S M_i^2$ devant comprendre

toutes les valeurs de M_i^2 depuis $i=1$ jusqu'à $i=n$ inclusivement. On a ainsi

$$S M_i^2 = \frac{6}{5} \frac{n^2 + 2n + 2}{n(n+1)(n+2)}.$$

n étant supposé fort grand, cette valeur de $S M_i^2$ se réduit à fort peu près à $\frac{6}{5n}$; la probabilité de l'erreur u est donc proportionnelle à

$$e^{-\frac{h}{24^2} u^2 \frac{6}{5n}}.$$

On vient de voir que, dans la méthode la plus avantageuse, la probabilité d'une pareille erreur du résultat est proportionnelle à

$$e^{-\frac{2hu^2}{24^2}}.$$

Ainsi, pour que les mêmes erreurs deviennent également probables, les observations doivent être, dans le procédé de Svanberg, plus nombreuses que dans le procédé ordinaire, suivant le rapport de six à cinq.

On pourrait croire que, le résultat obtenu par le procédé de Svanberg étant une nouvelle donnée des observations, sa combinaison avec le résultat de la méthode ordinaire doit donner un résultat plus exact, et dont la loi de probabilité des erreurs soit plus rapidement décroissante. Mais l'analyse prouve que cela n'est pas. Considérons, en effet, le système d'équations

$$(b) \begin{cases} p_1 y - a_1 + x_1 = 0, \\ p_2 y - a_2 + x_2 = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ p_n y - a_n + x_n = 0, \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots$ étant, comme ci-dessus, les erreurs des observations. La méthode la plus avantageuse prescrit de multiplier ces équations, respectivement, par $p_1, p_2, \dots$ et de les ajouter, ce qui donne

$$y = \frac{S p_i a_i}{S p_i^2} - \frac{S p_i x_i}{S p_i^2},$$

le signe S comprenant, comme ci-dessus, toutes les valeurs qu'il précède, depuis $i=1$ jusqu'à $i=n$ inclusivement. Le premier terme de cette expression sera la valeur de y donnée par la méthode la plus avantageuse, et son erreur sera $\frac{S p_i x_i}{S p_i^2}$; en la désignant par u , sa probabilité sera, par le n° 20 du Livre II, proportionnelle à

$$e^{-\frac{h}{24^2} u^2 S p_i^2}.$$

Si l'on multiplie les équations (b) respectivement par $m_1, m_2, m_3, \dots$, leur somme donnera

$$y = \frac{S m_i a_i}{S m_i p_i} - \frac{S m_i x_i}{S m_i p_i}$$

Le premier terme de cette expression sera la valeur de y relative au système de facteurs $m_1, m_2, \dots$, et $\frac{S m_i x_i}{S m_i p_i}$ sera l'erreur de cette valeur, erreur que nous désignerons par u' . Si l'on fait

$$l = S p_i x_i, \quad l' = S m_i x_i,$$

de là il est facile de conclure que l'on a

$$S m_i^2 = \frac{s}{S P_i^2} = \frac{n}{r S P_i^2};$$

la probabilité de u est donc proportionnelle à

$$e^{-\frac{k}{2k^2} \frac{r}{n} u^2 S P_i^2}.$$

Si l'on réunissait toutes les équations en un seul groupe, la probabilité de u serait proportionnelle à

$$e^{-\frac{k}{2k^2} \frac{r}{n} u^2 (S P_i)^2};$$

car alors r deviendrait l'unité, P_i deviendrait $S P_i$, $P_1, P_2, P_3, \dots$ seraient nuls. Le poids du résultat ou le coefficient de $-u^2$ serait donc, dans le premier cas,

$$\frac{k}{2k^2} \frac{r}{n} S P_i^2,$$

et, dans le second cas, il serait

$$\frac{k}{2k^2 n} (S P_i)^2.$$

Or la première de ces quantités surpasse la seconde; en effet,

$$(S P_i)^2 = (P_1 + P_2 + \dots + P_r)^2.$$

Si, dans le développement de ce dernier carré, on substitue, au lieu du produit $2P_1 P_2$, sa valeur $P_1^2 + P_2^2 - (P_1 - P_2)^2$, et ainsi des autres produits, on voit que ce carré est égal à $r S P_i^2$, moins une quantité positive; il y a donc de l'avantage à partager les équations de condition en plusieurs groupes auxquels on applique la méthode la plus avantageuse.

On voit encore qu'il y a de l'avantage à augmenter le nombre des groupes; car, si l'on suppose r pair et égal à $2r'$, le poids du résultat relatif au nombre r' de groupes sera proportionnel à

$$r'[(P_1 + P_2)^2 + (P_3 + P_4)^2 + \dots + (P_{2r'-1} + P_{2r'})^2];$$

et le poids du résultat relatif à $2r'$ groupes sera proportionnel à

$$2r'(P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_{2r'}^2).$$

Cette dernière quantité surpasse la précédente, comme on le voit en observant que

$$2(P_1^2 + P_2^2) > (P_1 + P_2)^2.$$

Si les équations de condition renferment plusieurs éléments inconnus, $y, y', \dots$ il y aura toujours de l'avantage à les partager en groupes pour appliquer aux équations résultantes de ces groupes la méthode la plus avantageuse. Plus on multipliera ces groupes, plus on augmentera le poids des résultats.

Mais, de quelque manière que l'on ait obtenu ces résultats, on pourra toujours déterminer, par le théorème suivant, la probabilité de leurs erreurs. Si l'on a, par un procédé quelconque, tiré des équations de condition l'équation $y - a = 0$, il est clair que l'on a multiplié les équations de condition, respectivement, par des facteurs $M_1, M_2, M_3, \dots$ tels que les inconnues ont disparu, à l'exception de y qui a l'unité pour facteur. L'erreur u du résultat $y = a$ est évidemment $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots$; la probabilité de cette erreur sera donc, par le n° 20 du Livre II, proportionnelle à

$$e^{-\frac{k}{2k^2} \frac{u^2}{S M_i^2}},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i depuis $i=1$ jusqu'à $i=n$, n étant le nombre des observations. Tout se réduit donc à déterminer, dans le procédé que l'on a suivi, les facteurs $M_1, M_2, \dots$

Si, par exemple, les équations de condition renferment deux inconnues y et y' et si, pour former les deux équations finales, on ajoute ensemble toutes ces équations : 1° en changeant les signes des équations dans lesquelles y a le signe $-$; 2° en changeant les signes des équations dans lesquelles y' a le signe $-$, on obtiendra, par ce procédé dont on a souvent fait usage, deux équations que nous représen-

terons par les suivantes :

$$P y + R y' - A = 0,$$

$$P_1 y + R_1 y' - A_1 = 0.$$

En multipliant la première de ces équations par

$$\frac{R_1}{PR_1 - P_1 R}$$

et la seconde par

$$\frac{-R}{PR_1 - P_1 R},$$

on aura, en les ajoutant,

$$y - \frac{AR_1 - A_1 R}{PR_1 - P_1 R} = 0.$$

Dans les équations de condition, x_i a été multiplié par ± 1 ; le signe — ayant lieu si, pour former les équations finales, on a changé les signes de l'équation $i^{\text{ème}}$. De là il est facile de conclure que, si l'on désigne par s le nombre des équations de condition dans lesquelles les coefficients de y et de y' ont le même signe, on aura

$$SM^2 = \frac{s(R_1 - R)^2 + (n-s)(R_1 + R)^2}{(PR_1 - P_1 R)^2}.$$

On simplifiera le calcul en préparant les équations de condition de manière que dans toutes le coefficient de y ait le signe +. On formera ensuite une première équation finale en ajoutant les s équations dans lesquelles le coefficient de y' a le signe +. On formera une seconde équation finale en ajoutant les $n-s$ équations dans lesquelles le coefficient de y' a le signe —. Soient

$$f y + g y' - h = 0,$$

$$f_1 y - g_1 y' - h_1 = 0$$

ces deux équations. En multipliant la première par $\frac{g_1}{fg_1 + f_1 g}$ et la se-

conde par $\frac{g}{fg_1 + f_1 g}$, on aura

$$y - \frac{hg_1 + h_1 g}{fg_1 + f_1 g} = 0,$$

et il est facile de voir que

$$SM^2 = \frac{sg_1^2 + (n-s)g^2}{(fg_1 + f_1 g)^2}.$$

Ces valeurs de y et de SM^2 coïncident avec les précédentes, comme il est aisé de le voir en observant que l'on a

$$P = f + f_1, \quad R = g - g_1, \quad A = h + h_1,$$

$$P_1 = f - f_1, \quad R_1 = g_1 + g, \quad A_1 = h - h_1.$$

Les équations de condition étant représentées généralement par la suivante

$$0 = x_i - a_i + p_i y + q_i y',$$

si on les multiplie respectivement par $m_i, m_2, \dots$ et qu'on les ajoute, on aura l'équation finale

$$0 = S m_i x_i - S m_i a_i + y S m_i p_i + y' S m_i q_i;$$

si l'on multiplie ensuite les mêmes équations, respectivement par $n_i, n_2, \dots$, on aura, en les ajoutant, l'équation finale

$$0 = S n_i x_i - S n_i a_i + y S n_i p_i + y' S n_i q_i.$$

En multipliant la première de ces équations par $\frac{S n_i q_i}{1}$ et la seconde par $-\frac{S m_i q_i}{1}$, 1 étant égal à

$$S m_i p_i S n_i q_i - S n_i p_i S m_i q_i,$$

on aura

$$0 = y - \frac{S m_i a_i S n_i q_i - S n_i a_i S m_i q_i}{1} + \frac{S m_i x_i S n_i q_i - S n_i x_i S m_i q_i}{1}.$$

Ce dernier terme est l'erreur de la valeur que l'on obtient pour y , en

supposant nuls $x_1, x_2, \dots$: on a donc alors

$$M_i = \frac{m_i S n_i q_i - n_i S m_i q_i}{1};$$

d'où il est facile de conclure

$$c = \frac{k}{24} \frac{h^2}{S n_i^2} = c = \frac{k}{24} \frac{h^2}{n_i^2},$$

en faisant

$$H = S m_i^2 (S n_i q_i)^2 - 2 S m_i n_i S m_i q_i S n_i q_i + S n_i^2 (S m_i q_i)^2,$$

résultat qui coïncide avec celui du n° 21 du Livre II, dans lequel nous avons prouvé que le maximum du coefficient de $-u^2$ dans cette exponentielle a lieu lorsque l'on suppose généralement $m_i = p_i$, $n_i = q_i$; cette supposition donne donc le résultat le plus avantageux ou celui dont le poids est un maximum.

On déterminera la valeur de $\frac{k}{24h^2}$ au moyen des carrés des restes qui ont lieu lorsque l'on substitue dans les équations de condition les valeurs déterminées pour y et y' . En désignant par ε_i ce reste dans la $i^{\text{ème}}$ équation de condition

$$0 = x_i - a_i + p_i y + q_i y',$$

et désignant par u et u' les erreurs de ces valeurs, on aura

$$0 = x_i + \varepsilon_i - p_i u - q_i u';$$

ce qui donne

$$S \varepsilon_i^2 = S x_i^2 - 2u S p_i x_i - 2u' S q_i x_i + u^2 S p_i^2 + 2uu' S p_i q_i + u'^2 S q_i^2.$$

On a, par le n° 19 du Livre II,

$$S x_i^2 = \frac{h^2}{k} n_i$$

ensuite, les valeurs u et u' cessent d'être vraisemblables, lorsqu'elles surpassent des quantités de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Les valeurs de $S p_i x_i$ et $S q_i x_i$ cessent d'être vraisemblables lorsqu'elles surpassent des quantités de

l'ordre $\sqrt{n}$; les valeurs de $-2u S p_i x_i$ et $-2u' S q_i x_i$ cessent donc d'être vraisemblables lorsqu'elles cessent d'être d'un ordre fini, n étant supposé infiniment grand. $S p_i^2$, $S p_i q_i$ et $S q_i^2$ étant de l'ordre n , les valeurs de $u^2 S p_i^2$, $2uu' S p_i q_i$, $u'^2 S q_i^2$ cessent d'être vraisemblables lorsqu'elles cessent d'être des quantités finies. On peut donc négliger toutes ces quantités et supposer, quel que soit le procédé dont on fait usage,

$$S \varepsilon_i^2 = \frac{h^2}{k} n,$$

ce qui donne

$$\frac{k}{24h^2} = \frac{n}{2 S \varepsilon_i^2}.$$

2. Les méthodes précédentes se réduisent à multiplier chaque équation de condition par un facteur et à ajouter tous ces produits pour former une équation finale. Mais on peut employer d'autres considérations pour obtenir le résultat cherché : par exemple, on peut choisir celle des équations de condition qui doit le plus approcher de la vérité. Le procédé que j'ai donné dans le n° 40 du Livre III de la *Mécanique céleste* est de ce genre. En supposant les équations (b) du numéro précédent préparées de manière que $p_1, p_2, p_3, \dots$ soient positifs et que les valeurs $\frac{a_1}{p_1}, \frac{a_2}{p_2}, \dots$ de y , données par ces équations dans la supposition de $x_1, x_2, \dots$ nuls, forment une série décroissante, le procédé dont il s'agit consiste à choisir l'équation de condition $r^{\text{ème}}$, telle que l'on ait

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1} &< p_r + p_{r+1} + \dots + p_n, \\ p_1 + p_2 + \dots + p_r &> p_{r+1} + p_{r+2} + \dots + p_n, \end{aligned}$$

et à supposer

$$y = \frac{a_r}{p_r}.$$

Cette valeur de y rend un minimum la somme de tous les écarts des autres valeurs, pris positivement; car, en nommant $x_1, x_2, \dots$ ces écarts, $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}$ seront positifs et $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ seront négatifs. Si l'on accroît la valeur précédente de y de la quantité infini-

ment petite δy , la somme des écarts positifs $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}$ diminuera de la quantité

$$\delta y(p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1});$$

mais la somme des écarts négatifs, pris avec le signe +, augmentera de la quantité

$$\delta y(p_{r+1} + p_{r+2} + \dots + p_n);$$

l'écart x_r deviendra $p_r \delta y$. La somme des écarts, pris tous positivement, sera donc augmentée de la quantité

$$\delta y(p_r + p_{r+1} + \dots + p_n - p_1 - p_2 - \dots - p_{r-1});$$

par les conditions auxquelles le choix de l'équation $r^{\text{ième}}$ est assujettie, cette quantité est positive. On verra, de la même manière, que si l'on diminue $\frac{a_r}{p_r}$ de δy , la somme des écarts pris positivement sera augmentée de la quantité positive

$$\delta y(p_1 + p_2 + \dots + p_r - p_{r+1} - p_{r+2} - \dots - p_n).$$

Ainsi, dans les deux cas d'un accroissement et d'une diminution de la valeur $\frac{a_r}{p_r}$ de y , la somme des écarts, pris positivement, est augmentée. Cette considération semble donner un grand avantage à la valeur précédente de y , qui, lorsqu'il s'agit de choisir un milieu entre les résultats d'un nombre impair d'observations, devient le résultat équidistant des extrêmes. Mais le Calcul des probabilités peut seul faire apprécier cet avantage; je vais donc l'appliquer à cette question délicate.

Les seules données dont nous ferons usage sont que l'équation de condition

$$0 = x_r - a_r + p_r y$$

donne, abstraction faite des erreurs, une valeur de y plus petite que les $r-1$ équations antérieures et plus grande que les $n-r$ équations postérieures; et que l'on a

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1} < p_r + p_{r+1} + \dots + p_n,$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r > p_{r+1} + p_{r+2} + \dots + p_n.$$

On a

$$y = \frac{a_1}{p_1} - \frac{x_1}{p_1} = \frac{a_r}{p_r} - \frac{x_r}{p_r};$$

ce qui donne

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{a_1}{p_1} - \frac{a_r}{p_r} + \frac{x_r}{p_r}.$$

Ainsi, $\frac{a_1}{p_1}$ surpassant $\frac{a_r}{p_r}$, $\frac{x_1}{p_1}$ surpasse $\frac{x_r}{p_r}$. Il en est de même de $\frac{x_2}{p_2}, \frac{x_3}{p_3}, \dots$

jusqu'à $\frac{x_{r-1}}{p_{r-1}}$. On verra de la même manière que $\frac{x_{r+1}}{p_{r+1}}, \frac{x_{r+2}}{p_{r+2}}, \dots, \frac{x_n}{p_n}$

sont moindres que $\frac{x_r}{p_r}$. Ainsi, les seules conditions auxquelles nous assujettirons les erreurs et les équations de condition sont les suivantes :

$$(c) \quad \begin{cases} s > r, & s < r, \\ \frac{x_s}{p_s} < \frac{x_r}{p_r}, & \frac{x_s}{p_s} > \frac{x_r}{p_r}; \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1} < p_r + p_{r+1} + \dots + p_n,$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r > p_{r+1} + p_{r+2} + \dots + p_n.$$

C'est uniquement d'après ces données des observations que nous allons déterminer la probabilité de l'erreur x_r . Nous n'aurons d'ailleurs aucun égard à l'ordre qu'observent entre elles les $r-1$ premières équations de condition et les $n-r$ dernières, ni aux valeurs des quantités $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Représentons, comme ci-dessus, par $\varphi(x)$ la loi de probabilité de l'erreur x des observations et, pour exprimer que cette probabilité est la même pour les erreurs positives et négatives, supposons $\varphi(x)$ fonction de x^2 .

Maintenant, si l'on suppose x_r positif, la probabilité que x_i surpassera $p_i \frac{x_r}{p_r}$ sera

$$\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} \int dx \varphi(x)}{k},$$

l'intégrale $\int dx \varphi(x)$ étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=p_i \frac{x_r}{p_r}$ et k étant, comme ci-dessus, cette intégrale prise depuis x nul jusqu'à x

infini. La probabilité que les quantités $\frac{x_1}{p_1}, \frac{x_2}{p_2}, \dots, \frac{x_{r-1}}{p_{r-1}}$ seront toutes plus grandes que $\frac{x_r}{p_r}$ est donc proportionnelle au produit des $r-1$ facteurs

$$1 - \frac{\int dx \varphi(x)}{k}, \quad 1 - \frac{\int dx \varphi(x)}{k}, \quad \dots;$$

l'intégrale du premier facteur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x = p_1 \frac{x_r}{p_r}$; l'intégrale du second facteur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x = p_2 \frac{x_r}{p_r}$; et ainsi de suite.

Pareillement, toutes les quantités $\frac{x_{r+1}}{p_{r+1}}, \frac{x_{r+2}}{p_{r+2}}, \dots, \frac{x_n}{p_n}$ étant supposées plus petites que $\frac{x_r}{p_r}$, on voit, par le même raisonnement, que la probabilité de cette supposition est proportionnelle au produit des $n-r$ facteurs

$$1 + \frac{\int dx \varphi(x)}{k}, \quad 1 + \frac{\int dx \varphi(x)}{k}, \quad \dots;$$

l'intégrale du premier facteur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x = p_{r+1} \frac{x_r}{p_r}$, celle du second facteur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x = p_{r+2} \frac{x_r}{p_r}$, et ainsi de suite. La probabilité de l'erreur x_r est $\varphi(x_r)$; ainsi la probabilité que l'erreur de la $r^{\text{ième}}$ observation sera x_r et que la valeur de y donnée par la $r^{\text{ième}}$ équation sera plus petite que les valeurs données par les équations précédentes, et surpassera les valeurs données par les équations suivantes, cette probabilité, dis-je, sera proportionnelle au produit des $n-1$ facteurs précédents et de $\varphi(x_r)$.

x étant supposé très petit, on a, aux quantités près de l'ordre x^3 ,

$$\int dx \varphi(x) = x \varphi(0) + \frac{1}{2} x^2 \varphi'(0),$$

$\varphi'(0)$ étant ce que devient $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ lorsque x est nul. Dans la question présente, $\varphi(x)$ étant une fonction de x^2 , on a $\varphi'(0) = 0$, et alors on a

$$\int dx \varphi(x) = x \varphi(0).$$

Les facteurs précédents deviendront ainsi, en faisant $\frac{x_r}{p_r} = \zeta$,

$$1 - p_1 \zeta \frac{\varphi(0)}{k},$$

$$1 - p_2 \zeta \frac{\varphi(0)}{k},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$1 - p_{r-1} \zeta \frac{\varphi(0)}{k},$$

$$1 + p_{r+1} \zeta \frac{\varphi(0)}{k},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$1 + p_n \zeta \frac{\varphi(0)}{k}.$$

Si l'on désigne par $\varphi''(0)$ la valeur de $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2}$ lorsque x est nul, $\varphi(x_r)$ devient

$$\varphi(0) + \frac{1}{2} p_r^2 \zeta^2 \varphi''(0).$$

La somme des logarithmes hyperboliques de tous ces facteurs est, aux quantités près de l'ordre ζ^3 , en divisant le facteur $\varphi(x_r)$ par $\varphi(0)$,

$$- \zeta \frac{\varphi(0)}{k} (p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1} - p_{r+1} - p_{r+2} - \dots - p_n)$$

$$- \frac{\zeta^2}{2} \left[\frac{\varphi(0)}{k} \right]^2 (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_r^2 + p_{r+1}^2 + \dots + p_n^2)$$

$$+ \frac{1}{2} p_r^2 \zeta^2 \left\{ \frac{\varphi''(0)}{k} + \left[\frac{\varphi(0)}{k} \right]^2 \right\}.$$

La probabilité de ζ est donc proportionnelle à la base e des logarithmes hyperboliques, élevée à une puissance dont l'exposant est la fonction précédente. On doit observer qu'en vertu des conditions auxquelles le choix de l'équation $r^{\text{ième}}$ est assujéti, la quantité

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1} - p_{r+1} - p_{r+2} - \dots - p_n$$

est, abstraction faite du signe, une quantité moindre que p_r , et

qu'ainsi, en supposant ζ de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, le nombre n des observations étant supposé fort grand, le terme dépendant de la première puissance de ζ , dans la fonction précédente, est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$; on peut donc le négliger, ainsi que le dernier terme de cette fonction. En désignant donc par Sp_i^2 la somme entière

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2,$$

la probabilité de ζ sera proportionnelle à

$$e^{-\frac{\zeta^2}{2} \left[\frac{\varphi(\omega)}{k} \right] Sp_i^2},$$

ζ ou $\frac{x_l}{p_l}$ étant l'erreur de la valeur $\frac{a_l}{p_l}$ donnée pour y par l'équation précédente. La valeur donnée par la méthode la plus avantageuse est, par le numéro précédent,

$$y = \frac{Sp_i a_l}{Sp_i^2},$$

et la probabilité d'une erreur ζ dans ce résultat est proportionnelle à

$$e^{-\frac{k}{2\omega^2} \zeta^2 Sp_i^2},$$

k' étant toujours l'intégrale $\int x^2 dx \varphi(x)$, prise depuis x nul jusqu'à x infini. Le résultat de la méthode que nous venons d'examiner, et que nous nommerons méthode de *situation*, sera préférable à celui de la méthode la plus avantageuse, si le coefficient de $-\zeta^2$, qui lui est relatif, surpasse le coefficient relatif à la méthode la plus avantageuse, parce qu'alors la loi de probabilité des erreurs y sera plus rapidement décroissante. Ainsi, la méthode de situation doit être préférée si l'on a

$$\left[\frac{\varphi(\omega)}{k} \right]^2 > \frac{k}{k'^2},$$

dans le cas contraire, la méthode la plus avantageuse est préférable. Si l'on a, par exemple,

$$\varphi(x) = e^{-kx^2},$$

k devient $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{h}}$ et k' devient $\frac{\sqrt{\pi}}{4h\sqrt{h}}$; ce qui donne $\frac{k}{k'} = 2h$. La quantité $\left[\frac{\varphi(\omega)}{k} \right]^2$ devient $\frac{4h}{\pi}$; or on a $2h > \frac{4h}{\pi}$; la méthode la plus avantageuse doit donc alors être préférée.

En combinant les résultats de ces deux méthodes, on peut obtenir un résultat dont la loi de probabilité des erreurs soit plus rapidement décroissante. Nommons toujours ζ l'erreur du résultat de la méthode de situation, et désignons par ζ' l'erreur du résultat de la méthode la plus avantageuse. Le premier de ces résultats est, comme on l'a vu, $\frac{a_l}{p_l}$, et le second est $\frac{Sp_i a_l}{Sp_i^2}$. Si l'on désigne $Sp_i x_l$ par l , $\frac{l}{Sp_i^2}$ sera l'erreur de ce dernier résultat; ainsi l'on aura $l = \zeta' Sp_i^2$. La probabilité de l'existence simultanée de l et de ζ est, par le n° 21 du Livre II, proportionnelle à

$$\int d\omega e^{-\frac{\omega^2}{2} \left[\frac{\varphi(\omega)}{k} \right] p_l \zeta} c p_l \zeta \omega \sqrt{-1} \int dx \varphi(x) c p_l x \omega \sqrt{-1} \int dx \varphi(x) c p_l x \omega \sqrt{-1} \dots$$

L'intégrale relative à ω étant prise depuis $\omega = -\pi$ jusqu'à $\omega = \pi$. L'intégrale relative à x , dans le facteur $\int dx \varphi(x) c p_l x \omega \sqrt{-1}$, doit être prise, par ce qui précède, depuis $x = p_l \zeta$ jusqu'à $x = \infty$. En développant ce facteur suivant les puissances de x , il devient

$$\int dx \varphi(x) + p_l \omega \sqrt{-1} \int x dx \varphi(x) - p_l^2 \frac{\omega^2}{2} \int x^2 dx \varphi(x) + \dots$$

En prenant l'intégrale dans les limites précédentes, on a, aux quantités près de l'ordre ζ^2 ,

$$\int dx \varphi(x) = k - p_l \zeta \varphi(\omega).$$

En négligeant pareillement les quantités des ordres $\zeta^2 \omega$, $\zeta^2 \omega^2$, ... on a

$$p_l \omega \sqrt{-1} \int x dx \varphi(x) = k' p_l \omega \sqrt{-1}, \quad -\frac{p_l^2}{2} \omega^2 \int x^2 dx \varphi(x) = -\frac{k''}{2} p_l^2 \omega^2,$$

k' étant l'intégrale $\int x dx \varphi(x)$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à x infini. Le

facteur dont il s'agit devient donc, en négligeant ω^2 , conformément à l'analyse du numéro cité du Livre II,

$$k - p_1 \zeta \varphi(0) + k' p_1 \omega \sqrt{-1} - \frac{k''}{2} p_1^2 \omega^2.$$

Son logarithme hyperbolique est

$$-p_1 \zeta \frac{\varphi(0)}{k} + \frac{k'}{k} p_1 \omega \sqrt{-1} - \frac{k''}{2k} p_1^2 \omega^2 - \frac{p_1^2}{2} \left[\zeta \frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k} \omega \sqrt{-1} \right]^2 + \log k.$$

En changeant p_1 successivement en $p_2, p_3, \dots, p_{r-1}$, on aura les logarithmes des facteurs suivants, jusqu'au facteur relatif à p_{r-1} .

Dans le facteur $\int dx \varphi(x) c^{p_{r+1} x \omega \sqrt{-1}}$, l'intégrale doit être prise depuis $x = -\infty$, jusqu'à $x = p_{r+1} \zeta$; alors $\int x dx \varphi(x)$ devenant $-k'$, le logarithme de ce facteur est

$$p_{r+1} \zeta \frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k} p_{r+1} \omega \sqrt{-1} - \frac{k''}{2k} p_{r+1}^2 \omega^2 - \frac{p_{r+1}^2}{2} \left[\zeta \frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k} \omega \sqrt{-1} \right]^2 + \log k.$$

On aura les logarithmes des facteurs suivants en changeant p_{r+1} successivement en $p_{r+2}, p_{r+3}, \dots, p_s$. Le facteur $\varphi(p_r \zeta) c^{p_r \zeta \omega \sqrt{-1}}$ est égal à

$$\left[\varphi(0) + \frac{p_r^2 \zeta^2}{2} \right] \varphi''(0) c^{p_r \zeta \omega \sqrt{-1}},$$

et son logarithme est

$$\frac{p_r^2 \zeta^2}{2} \frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)} + p_r \zeta \omega \sqrt{-1} + \log \varphi(0).$$

Maintenant, si l'on rassemble tous ces logarithmes, si l'on considère ensuite les conditions (c) auxquelles l'équation $r^{\text{ième}}$ est assujettie, enfin si l'on repasse des logarithmes aux nombres, on trouve, en négligeant ce qu'il est permis de négliger, que la probabilité de l'existence simultanée de l et de ζ est proportionnelle à

$$\int d\varphi c^{-l\omega\sqrt{-1} - \left\{ \left[\zeta \frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k} \omega \sqrt{-1} \right]^2 + \frac{k''}{k} \omega^2 \right\} \frac{s p_1^2}{2}}.$$

En faisant donc

$$F = \left(\frac{k''}{k} - \frac{k'^2}{k^2} \right) \frac{s p_1^2}{2},$$

la probabilité de l'existence simultanée de ζ et de ζ' sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{\zeta'}{2} \left[\frac{\varphi(0)}{k} \right]^2 s p_1^2 - \frac{\left[\zeta - \zeta' \frac{k'}{k} \frac{\varphi(0)}{k} \right]^2}{2k} s p_1^2} \int d\omega c^{-F \omega^2} \left\{ \omega - \frac{\left[\zeta - \zeta' \frac{k'}{k} \frac{\varphi(0)}{k} \right] \sqrt{-1} s p_1^2}{2F} \right\}.$$

Par l'analyse du n° 21 du Livre II, l'intégrale relative à ω peut être prise depuis $\omega = -\infty$ jusqu'à $\omega = \infty$, et alors la probabilité précédente devient proportionnelle à

$$c^{-\frac{\zeta'}{2} s p_1^2 \left[\frac{\varphi(0)}{k} \right]^2 - \frac{\left[\zeta - \zeta' \frac{k'}{k} \frac{\varphi(0)}{k} \right]^2}{2 \left(\frac{k''}{k} - \frac{k'^2}{k^2} \right)} s p_1^2}.$$

expression que l'on peut encore mettre sous cette forme

$$c^{-\frac{k}{2k^2} \zeta' s p_1^2 - \frac{k'}{k} \left[\frac{\zeta \frac{\varphi(0)}{k} - \zeta' \frac{k'}{k^2} \right]^2 s p_1^2}.$$

Si l'on nomme e l'excès de la valeur de y donnée par la méthode la plus avantageuse sur celle que donne la méthode de situation, on aura $\zeta = \zeta' - e$. Supposons

$$\zeta' = u + \frac{e \frac{\varphi(0)}{k} \left[\frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k^2} \right]}{\frac{k}{k''} - \frac{k'^2}{k^2} + \left[\frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k^2} \right]^2},$$

la probabilité de u sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{u^2}{2} s p_1^2 \left\{ \frac{k}{k''} + \frac{\frac{k''}{k} \left[\frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k^2} \right]^2}{\frac{k''}{k} - \frac{k'^2}{k^2}} \right\}}.$$

le résultat de la méthode la plus avantageuse doit donc être diminué de la quantité

$$\frac{e \frac{\varphi(0)}{k} \left[\frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k^2} \right]}{\frac{k}{k''} - \frac{k'^2}{k^2} + \left[\frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k^2} \right]^2}.$$

et la probabilité d'une erreur u , dans ce résultat ainsi corrigé, sera proportionnelle à l'exponentielle précédente. Le poids du nouveau résultat sera augmenté, si $\frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k^2}$ n'est pas nul; il y a donc de l'avantage à corriger ainsi le résultat de la méthode la plus avantageuse. L'ignorance où l'on est de la loi de probabilité des erreurs des observations rend cette correction impraticable; mais il est remarquable que, dans le cas où cette probabilité est proportionnelle à e^{-kx^2} , c'est-à-dire où l'on a $\varphi(x) = e^{-kx^2}$, la quantité $\frac{\varphi(0)}{k} - \frac{k'}{k^2}$ soit nulle. Alors le résultat de la méthode la plus avantageuse ne reçoit aucune correction du résultat de la méthode de situation, et la loi de probabilité des erreurs reste la même.

(Février 1818.)

TROISIÈME SUPPLÉMENT.

APPLICATION DES FORMULES GÉODÉSIQUES DE PROBABILITÉ
À LA MÉRIDienne DE FRANCE.

1. La partie de la méridienne qui s'étend de Perpignan à Formentera s'appuie sur une base mesurée près de Perpignan. Sa longueur est d'environ 466^{km}, et sa dernière extrémité est jointe à la base de Perpignan par une chaîne de vingt-six triangles. On peut craindre qu'une aussi grande longueur, qui n'a point été vérifiée par la mesure d'une seconde base vers son autre extrémité, ne soit susceptible d'une erreur sensible provenant des erreurs des vingt-six triangles employés à la mesurer. Il est donc intéressant de déterminer la probabilité que cette erreur n'excède pas 40^m ou 50^m. M. Damoiseau, lieutenant-colonel d'Artillerie, qui vient de remporter le prix proposé par l'Académie de Turin, sur le retour de la comète de 1759, a bien voulu, à ma prière, appliquer à cette partie de la méridienne mes formules de probabilité. Ici la méridienne ne coupe point tous les triangles, comme nous l'avons supposé pour plus de simplicité; mais il est facile de voir que l'on peut appliquer, aux angles formés par les prolongements des côtés des triangles avec la méridienne, ce que j'ai dit sur les angles que ces côtés formeraient s'ils étaient coupés par la méridienne. M. Damoiseau a trouvé ainsi qu'à partir de la latitude du signal de Busgarach, un peu plus au nord que Perpignan, jusqu'à Formentera, ce qui comprend un arc de la méridienne d'environ 466 006^m, et en prenant pour unité la base de Perpignan, on a (deuxième Supplément, n° 1)

$$p^2 - pq + q^2 + p^{(1)2} - p^{(1)}q^{(1)} + q^{(1)2} + \dots \\ + p^{(22)2} - p^{(22)}q^{(22)} + q^{(22)2} = 48350,606.$$

La probabilité qu'une erreur dans la mesure de cet arc est comprise dans les limites $\pm s$ devient, par les formules du même numéro,

$$\frac{2 \int dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à la valeur de t égale à

$$\frac{s}{\theta} \sqrt{\frac{n+1}{48350,606}},$$

$n+1$ étant le nombre des triangles employés, et θ^2 étant la somme des carrés des erreurs observées dans la somme des trois angles de chaque triangle; π est le rapport de la circonférence au diamètre. En prenant pour unité la seconde sexagésimale, on trouve

$$\theta^2 = 118,178.$$

Mais, le nombre des triangles employés n'étant que 26, il est préférable de déterminer par un plus grand nombre de triangles cette constante θ^2 qui dépend de la loi inconnue des observations partielles. Pour cela, on a fait usage des cent sept triangles qui ont servi à mesurer la méridienne depuis Dunkerque jusqu'à Formentera. L'ensemble des sommes d'erreurs observées des trois angles de chaque triangle est, en les prenant toutes positivement, égal à 173,82. La somme des carrés de ces erreurs est 445,217. En la multipliant par $\frac{26}{107}$, on aura, pour la valeur de θ^2 ,

$$\theta^2 = 108,184.$$

Cette valeur, qui diffère peu de la précédente, doit être préférée. Il faut réduire θ en parties du rayon pris pour unité, ce que l'on fera en le divisant par le nombre de secondes sexagésimales que ce rayon renferme. On aura ainsi

$$t = 869,797;$$

s est une fraction de la base de Perpignan prise pour unité. Cette base

est de 11706^m,40. En supposant donc l'erreur de 60^m, on aura

$$t = \frac{60 \times 869,797}{11706,40}.$$

Cela posé, on trouve, pour les probabilités que les erreurs de l'arc de la méridienne dont il s'agit sont comprises dans les limites $\pm 60^m$, $\pm 50^m$, $\pm 40^m$, les fractions suivantes :

$$\frac{1743695}{1743696}, \quad \frac{32345}{32346}, \quad \frac{1164}{1165}.$$

Il y a un contre un à parier que l'erreur tombe dans les limites $\pm 8^m, 0757$.

Si la Terre était un sphéroïde de révolution et si les angles de tous les triangles étaient exacts, on aurait exactement l'inclinaison du dernier côté de la chaîne des triangles sur sa méridienne, en supposant donnée cette inclinaison relativement à la base. La probabilité que l'erreur de la première de ces inclinaisons, provenant des erreurs des angles observés des triangles, est comprise dans les limites $\pm \frac{2}{3}\theta t$ est, par ce qui précède,

$$\frac{2 \int dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul : ces limites deviennent, en substituant pour θ sa valeur précédente, $\pm t 6', 8997$, les secondes étant sexagésimales. De là il suit qu'il y a un contre un à parier que l'erreur tombe dans les limites $\pm 3', 2908$. Si les observations azimutales étaient faites avec une grande précision, on déterminerait par ce moyen la probabilité qu'elles indiquent une excentricité dans les parallèles terrestres. Si l'on mesurait, sur la côte d'Espagne, une base de vérification égale à la base de Perpignan, et qu'on la joignit par deux triangles à la chaîne des triangles de la méridienne, on trouve, par le calcul, qu'il y a un contre un à parier que la différence, entre cette base et sa valeur conclue de la base de Perpignan, ne surpassera pas un tiers de mètre : c'est, à fort peu près, la différence de la mesure de la base de Perpignan à sa valeur conclue de la base de Melun.

On a vu, dans le numéro cité, que, les angles des triangles ayant été mesurés au moyen du cercle répétiteur, on peut supposer la probabilité d'une erreur x dans la somme observée des trois angles de chaque triangle proportionnelle à l'exponentielle e^{-kx^2} , k étant une constante. De là il suit que la probabilité de cette erreur est

$$\frac{dx \sqrt{k} e^{-kx^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

En multipliant cette différentielle par x et l'intégrant depuis x nul jusqu'à x infini, le double de cette intégrale sera la moyenne de toutes les erreurs prises positivement. En désignant donc par ε cette erreur moyenne, on aura

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{k\pi}}.$$

On aura la valeur moyenne des carrés de ces erreurs en multipliant par x^2 la différentielle précédente et en l'intégrant depuis $x = -\infty$ jusqu'à x infini. En nommant donc ε' cette valeur, on aura

$$\varepsilon' = \frac{1}{2k},$$

de là on tire

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon^2 \pi}{2}.$$

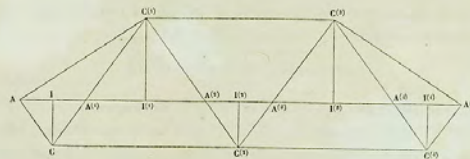
On peut ainsi obtenir θ^2 au moyen des erreurs, prises toutes en plus, des sommes observées des angles de chaque triangle. Dans les cent sept triangles de la méridienne, la somme de ces erreurs est 173,82; on peut ainsi prendre, pour ε , $\frac{173,82}{107}$; ce qui donne, pour 26 ε' ou pour θ^2 ,

$$\theta^2 = 13\pi \left(\frac{173,82}{107} \right)^2 = 107,78;$$

cela diffère très peu de la valeur 108,134 donnée par la somme des carrés des erreurs de la somme observée des angles de chacun des cent sept triangles. Cet accord est remarquable.

On peut apprécier l'exactitude relative des instruments dont on fait usage dans les observations géodésiques, par la valeur de ε' conclue d'un grand nombre de triangles. Cette valeur, conclue des cent sept triangles de la méridienne, est $\frac{445,217}{107}$ ou 4,1609. La même valeur, conclue des quarante-trois triangles employés par La Condamine dans la mesure des trois degrés de l'équateur, est $\frac{1718}{43}$ ou 39,953, et, par conséquent, près de dix fois plus grande que la précédente. Les erreurs également probables, relatives aux instruments employés dans ces deux opérations, sont proportionnelles aux racines carrées des valeurs de ε' . De là il suit que les limites $\pm 8^m,0937$, entre lesquelles nous venons de voir qu'il y a un contre un à parier que tombe l'erreur de l'arc mesuré depuis Perpignan jusqu'à Formentera, auraient été $\pm 25^m,022$ avec les instruments employés par La Condamine. Ces limites auraient surpassé $\pm 40^m$ avec les instruments employés par La Caille et Cassini dans leur mesure de la méridienne. On voit ainsi combien l'introduction du cercle répétiteur dans les opérations géodésiques a été avantageuse.

2. Pour donner un exemple très simple de l'application des formules géodésiques, je vais considérer la droite AA⁽³⁾, dont on a déterminé la



longueur par la chaîne des triangles CC⁽¹⁾C⁽²⁾, C⁽¹⁾C⁽²⁾C⁽³⁾, ... Je supposerai tous ces triangles égaux et isocèles, et tels que leurs bases CC⁽²⁾, C⁽¹⁾C⁽²⁾, ... soient parallèles à la ligne AA⁽³⁾. On aura, en abaissant sur

cette ligne les perpendiculaires CI, C⁽¹⁾I⁽¹⁾, ...

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)} &= CC^{(1)} \cos A^{(1)}, \\ C^{(1)}C^{(2)} &= \frac{CC^{(1)} \sin C^{(1)} CC^{(2)}}{\sin C^{(1)} C^{(2)} C}, \\ I^{(1)}I^{(2)} &= C^{(1)}C^{(2)} \cos A^{(2)}, \\ C^{(2)}C^{(3)} &= \frac{C^{(1)}C^{(2)} \sin C^{(2)} C^{(1)}C^{(3)}}{\sin C^{(2)} C^{(3)} C^{(1)}}, \end{aligned}$$

et généralement

$$\begin{aligned} I^{(i)}I^{(i+1)} &= C^{(i)}C^{(i+1)} \cos A^{(i+1)}, \\ C^{(i+1)}C^{(i+2)} &= \frac{C^{(i)}C^{(i+1)} \sin C^{(i+1)} C^{(i)}C^{(i+2)}}{\sin C^{(i+1)} C^{(i+2)} C^{(i)}}. \end{aligned}$$

Soient $\alpha^{(i)}$ et $\xi^{(i)}$ les erreurs des angles opposés aux côtés CC⁽ⁱ⁾ et C⁽ⁱ⁾C⁽²⁾ dans le premier triangle. Soient $\alpha^{(2)}$ et $\xi^{(2)}$ les erreurs des angles opposés aux côtés C⁽¹⁾C⁽²⁾ et C⁽¹⁾C⁽³⁾ du second triangle, et ainsi de suite. En désignant par δ une variation relative à ces erreurs, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\delta I^{(i)} I^{(i+1)}}{I^{(i)} I^{(i+1)}} &= \frac{\delta C^{(i)} C^{(i+1)}}{C^{(i)} C^{(i+1)}} - \delta A^{(i+1)} \tan A^{(i+1)}, \\ \frac{\delta C^{(i)} C^{(i+1)}}{C^{(i)} C^{(i+1)}} &= \frac{\delta C^{(i)} C^{(i-1)}}{C^{(i)} C^{(i-1)}} + \xi^{(i)} \cot C^{(i-1)} C^{(i-1)} C^{(i)} \\ &\quad - \alpha^{(i)} \cot C^{(i)} C^{(i+1)} C^{(i-1)}. \end{aligned}$$

On a encore, en supposant les angles A⁽ⁱ⁾ relatifs aux angles aigus que les côtés des triangles forment avec la ligne AA⁽¹⁾, ...

$$\delta A^{(i+1)} + \delta A^{(i)} + \delta C^{(i-1)} C^{(i+1)} = 0;$$

nous supposerons ici que les erreurs $\alpha^{(i)}$ et $\xi^{(i)}$ des angles C⁽ⁱ⁺¹⁾C⁽ⁱ⁻¹⁾C⁽ⁱ⁾, C⁽ⁱ⁾C⁽ⁱ⁺¹⁾C⁽ⁱ⁻¹⁾ du triangle C⁽ⁱ⁻¹⁾C⁽ⁱ⁾C⁽ⁱ⁺¹⁾ sont celles qui restent, lorsqu'on a retranché de chaque angle du triangle le tiers de la somme des erreurs des trois angles. Alors on a

$$\begin{aligned} \delta C^{(i-1)} C^{(i)} C^{(i+1)} &= -\alpha^{(i)} - \xi^{(i)}, \\ \text{ce qui donne} \quad \delta A^{(i+1)} &= -\delta A^{(i)} + \alpha^{(i)} + \xi^{(i)}; \end{aligned}$$

on aura donc

$$\begin{aligned} \delta A^{(i+1)} &= \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} + \alpha^{(i-2)} - \dots \mp \alpha^{(1)} \\ &\quad + \xi^{(i)} - \xi^{(i-1)} + \xi^{(i-2)} - \dots \mp \xi^{(1)} \pm \delta A^{(1)}, \end{aligned}$$

le signe supérieur ayant lieu si i est pair, et l'inférieur si i est impair.

On aura ensuite, en observant que

$$\cot C^{(i)} C^{(i-1)} C^{(i+1)} = \cot C^{(i)} C^{(i+1)} C^{(i-1)} = \cot A^{(i)}$$

et que A⁽ⁱ⁾ = A⁽¹⁾,

$$\frac{\delta C^{(i)} C^{(i+1)}}{C^{(i)} C^{(i+1)}} = \frac{\delta CC^{(1)}}{CC^{(1)}} + (\xi^{(i)} + \xi^{(i-1)} + \dots + \xi^{(1)} - \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} - \dots - \alpha^{(1)}) \cot A^{(1)};$$

on aura donc

$$\begin{aligned} \frac{\delta I^{(i)} I^{(i+1)}}{I^{(i)} I^{(i+1)}} &= \frac{\delta CC^{(1)}}{CC^{(1)}} + (\xi^{(i)} + \xi^{(i-1)} + \dots + \xi^{(1)} - \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} - \dots - \alpha^{(1)}) \cot A^{(1)} \\ &\quad - (\alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} + \dots \mp \alpha^{(1)} + \xi^{(i)} - \xi^{(i-1)} + \dots \mp \xi^{(1)} \pm \delta A^{(1)}) \tan A^{(1)}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'on ait mesuré une base AC située de manière que l'angle CAA⁽¹⁾ soit égal à l'angle CA⁽¹⁾A. Le premier de ces angles détermine la position de la ligne AA⁽¹⁾ par rapport à la base, et il est supposé connu. En nommant α et ξ les erreurs des angles CC⁽¹⁾A et CAC⁽¹⁾, on aura

$$\delta A^{(1)} = \alpha + \xi,$$

$$\frac{\delta CC^{(1)}}{CC^{(1)}} = \xi \cot CAC^{(1)} - \alpha \cot CCA^{(1)}.$$

Faisons

$$\cot CAC^{(1)} = \cot A + h,$$

$$\cot CCA^{(1)} = \cot A + h';$$

nous aurons, en désignant par b la base AC et par a la droite II⁽¹⁾,

$$h = \frac{b}{2a \sin A} - \frac{1}{\sin 2A},$$

$$h' = \frac{a}{2b \sin A \cos^2 A} - \frac{1}{\sin 2A}.$$

nous aurons ensuite

$$\begin{aligned}\partial A^{(i+1)} &= \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} + \dots \pm \alpha + \xi^{(i)} - \xi^{(i-1)} + \dots \pm \xi, \\ \frac{\partial I^{(i)} I^{(i+1)}}{I^{(i)} I^{(i+1)}} &= \{\xi^{(i)} + \xi^{(i-1)} + \dots + \xi - \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} - \dots - \alpha\} \cot A \\ &\quad - \{\alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} + \dots \pm \alpha + \xi^{(i)} - \xi^{(i-1)} + \dots \pm \xi\} \tan A + h\xi - h'\alpha.\end{aligned}$$

La variation de la longueur totale $\Pi^{(i+1)}$ sera donc

$$\begin{aligned}\partial \Pi^{(i+1)} &= [(i+1)(\xi - \alpha) + i(\xi^{(1)} - \alpha^{(1)}) + \dots + \{\xi^{(i)} - \alpha^{(i)}\}a \cot A \\ &\quad + (i+1)h\xi - (i+1)h'\alpha \\ &\quad - \{\alpha^{(i)} + \alpha^{(i-2)} + \alpha^{(i-4)} + \dots + \xi^{(i)} + \xi^{(i-2)} + \xi^{(i-4)} + \dots\}a \tan A].\end{aligned}$$

La quantité

$$p^2 - pq + q^2 + p^{(1)2} - p^{(1)}q^{(1)} + q^{(1)2} + \dots + p^{(i)2} - p^{(i)}q^{(i)} + q^{(i)2}$$

devient ainsi, en négligeant les termes de l'ordre i ,

$$\begin{aligned}\frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{2} a^2 \cot^2 A + 3(h+h')(i+1)^2 a^2 \cot A \\ + (h^2 + hh' + h'^2)(i+1)^2 a^2.\end{aligned}$$

Nommons Q cette quantité; la probabilité que l'erreur de la ligne $\Pi^{(i+1)}$ est comprise dans les limites $\pm s$ sera, par ce qui précède,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{f dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{3s}{2\theta} \sqrt{\frac{i+1}{Q}},$$

θ^2 étant la somme des carrés des erreurs de la somme des trois angles des $i+1$ triangles.

Supposons que l'on ait, comme pour la partie de la méridienne dont nous avons parlé précédemment, vingt-six triangles, ce qui donne $i=25$. Supposons encore que la longueur $\Pi^{(i+1)}$ soit celle de cette partie de la méridienne ou de 466006^m; alors on aura

$$a = \frac{466006}{26}.$$

En prenant pour unité la base mesurée près de Perpignan, qui est de 11706^m,40, et en supposant rectangles les triangles isocèles $CC^{(1)}C^{(2)}$, $C^{(1)}C^{(2)}C^{(3)}$, ..., ce qui donne $\tan A = \cot A = 1$, on trouve

$$Q = \{8207,6.$$

On a vu précédemment que les vingt-six triangles qui joignent la base de Perpignan à Formentera donnent

$$Q = \{8350,6;$$

ces deux valeurs de Q sont très peu différentes, et comme les erreurs également probables sont proportionnelles aux racines carrées de ces valeurs, on voit que l'on peut parier un contre un que les erreurs de la mesure entière sont comprises dans les limites $\pm 8^m,1$. Sous ce rapport, le cas que nous examinons représente parfaitement la mesure de l'arc du méridien depuis la base de Perpignan jusqu'à Formentera.

3. Supposons maintenant que l'on mesure, vers la dernière extrémité de la ligne $\Pi^{(i+1)}$, une base $C^{(i+1)}A^{(i+2)}$ égale à la base CA , et posée de manière que l'angle $C^{(i+1)}C^{(i)}A^{(i+2)}$ soit égal à l'angle $CC^{(1)}A$, et que l'angle $C^{(i)}A^{(i+2)}C^{(i+1)}$ soit égal à l'angle $CAC^{(1)}$. En désignant par $\alpha^{(i+1)}$ et $\xi^{(i+1)}$ les erreurs des angles $C^{(i+1)}C^{(i)}A^{(i+2)}$ et $C^{(i)}A^{(i+2)}C^{(i+1)}$, l'équation

$$C^{(i+1)}A^{(i+2)} = C^{(i+1)}C^{(i)} \frac{\sin C^{(i+1)}C^{(i)}A^{(i+2)}}{\sin C^{(i+1)}A^{(i+2)}C^{(i)}}$$

donnera

$$\frac{\partial C^{(i+1)}A^{(i+2)}}{C^{(i+1)}A^{(i+2)}} = \frac{\partial C^{(i)}C^{(i+1)}}{C^{(i)}C^{(i+1)}} + \alpha^{(i+1)} \cot CC^{(1)}A - \xi^{(i+1)} \cot CAC^{(1)},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^{(i+1)}A^{(i+2)}}{C^{(i+1)}A^{(i+2)}} &= \{\xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \dots + \xi^{(i)} - \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} - \dots - \alpha^{(i)}\} \cot A \\ &\quad + \xi(h + \cot A) - \alpha(h' + \cot A) \\ &\quad + \alpha^{(i+1)}(h' + \cot A) - \xi^{(i+1)}(h + \cot A).\end{aligned}$$

Ce que nous avons désigné dans le n° 2 du deuxième Supplément par

$l, l^{(1)}, \dots, m, m^{(1)}, \dots$ devient

$$\begin{aligned} l &= -(1+K')b, & m &= (1+h)b, \\ l^{(1)} &= -b, & m^{(1)} &= b, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ l^{(i)} &= -b, & m^{(i)} &= b \\ l^{(i+1)} &= (1+K')b, & m^{(i+1)} &= -(1+h)b; \end{aligned}$$

la quantité que nous avons désignée par $Sf^{(i)2}$ dans le numéro cité ou par

$$l^2 - ml + m^2 + l^{(1)2} - m^{(1)}l^{(1)} + m^{(1)2} + \dots$$

devient ici

$$3(i+2)b^2 + 6(h+h')b^2 + 2(h^2 + hh' + h'^2)b^2.$$

La quantité que nous avons nommée $Sr^{(i)}f^{(i)}$ dans le même numéro, ou

$$l(p - \frac{1}{2}q) + m(q - \frac{1}{2}p) + l^{(1)}(p^{(1)} - \frac{1}{2}q^{(1)}) + m^{(1)}(q^{(1)} - \frac{1}{2}p^{(1)}) + \dots,$$

devient, en négligeant les termes qui n'ont pas i pour coefficient,

$$\frac{3(i+1)(i+2)}{2}ab + 3(i+1)(h+h')ab + (i+1)(h^2 + hh' + h'^2)ab;$$

en représentant donc, comme ci-dessus, par λ l'excès de la base mesurée $C^{(i+1)}A^{(i+2)}$ sur la base calculée, et par s l'excès de la longueur vraie de la ligne $II^{(i+1)}$ sur cette longueur calculée, on aura

$$s = \frac{\lambda S r^{(i)} f^{(i)}}{S f^{(i)2}} = \frac{(i+1)\alpha\lambda}{2b};$$

il faut, par conséquent, ajouter à la longueur calculée de la ligne $II^{(i+1)}$ le produit de λ par le rapport de la moitié de cette ligne à la base b ; ce qui revient à calculer la première moitié de la ligne $II^{(i+1)}$ avec la base AC , et la seconde moitié avec la base $A^{(i+2)}C^{(i+1)}$. Ce procédé serait généralement exact, quelles que fussent la grandeur et la disposition des triangles qui unissent les deux bases, si les parties de $Sr^{(i)}f^{(i)}$ et de $Sf^{(i)2}$ correspondantes à ces moitiés étaient respectivement égales. C'est le procédé que nous adoptâmes dans la Commission qui fixa la

longueur du mètre; et, dans l'ignorance où nous étions alors de la vraie théorie de ces corrections, il était le plus convenable; mais il ne faisait pas connaître la correction des diverses parties de l'arc total $II^{(i+1)}$. Pour cela; il est nécessaire de corriger les angles de chaque triangle, ou de déterminer les corrections $\alpha, \epsilon, \alpha^{(1)}, \epsilon^{(1)}, \dots$ qui résultent de l'excès λ de la seconde base observée sur cette base calculée d'après la première. J'ai donné, dans le deuxième Supplément, ces corrections, en supposant la loi des erreurs des observations des angles proportionnelle à l'exponentielle $e^{-k(\alpha + \frac{1}{2}T)}$, k étant une constante, T étant la somme des erreurs des trois angles du triangle, $\alpha + \frac{1}{2}T, \epsilon + \frac{1}{2}T$ et $\frac{1}{2}T - \alpha - \epsilon$ étant les erreurs de chacun des angles. On a vu, dans le Supplément cité, que la supposition de cette loi de probabilité doit être admise lorsque les angles ont été mesurés avec le cercle répétiteur, et qu'alors on a

$$\alpha^{(i)} = \frac{l^{(i)} - \frac{1}{2}m^{(i)}}{F} \lambda, \quad \epsilon^{(i)} = \frac{m^{(i)} - \frac{1}{2}l^{(i)}}{F} \lambda,$$

en désignant par F la somme de toutes les quantités $l^2 - ml + m^2, l^{(1)2} - m^{(1)}l^{(1)} + l^{(1)2}, \dots$. Je vais démontrer ici que ces corrections ont lieu, quelle que soit la loi de probabilité des erreurs.

Pour cela, je désigne cette loi par $\varphi(\alpha + \frac{1}{2}T)^2$: en la supposant la même pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives, son expression ne doit renfermer que des puissances paires de ces erreurs. La loi de probabilité des valeurs simultanées de α et de ϵ sera ainsi proportionnelle au produit

$$\varphi(\alpha + \frac{1}{2}T)^2 \varphi(\epsilon + \frac{1}{2}T)^2 \varphi(\frac{1}{2}T - \alpha - \epsilon)^2.$$

Si l'on développe ce produit, par rapport aux puissances de α et de ϵ , en s'arrêtant aux carrés et aux produits de ces quantités, on aura

$$\begin{aligned} & [\varphi(\frac{1}{2}T^2)]^2 + (\alpha^2 + \alpha\epsilon + \epsilon^2) \varphi(\frac{1}{2}T^2) \\ & \times \{ 2\varphi(\frac{1}{2}T^2) \varphi'(\frac{1}{2}T^2) - \frac{1}{4}T^2 [\varphi'(\frac{1}{2}T^2)]^2 + \frac{1}{4}T^2 \varphi'(\frac{1}{2}T^2) \varphi''(\frac{1}{2}T^2) \}, \end{aligned}$$

$\varphi(x)$ exprimant $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, et $\varphi''(x)$ exprimant $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$. T pouvant être supposé varier depuis $-\infty$ jusqu'à $T=\infty$, on multipliera la fonction précédente par dT et on l'intégrera dans ces limites; on aura ainsi pour la probabilité des valeurs simultanées de α et de ξ une quantité de la forme

$$H - H'(\alpha^2 + \alpha\xi + \xi^2).$$

Cette probabilité sera donc proportionnelle à

$$1 - \frac{H'}{H}(\alpha^2 + \alpha\xi + \xi^2).$$

La probabilité de l'existence simultanée de $\alpha, \xi, \alpha^{(1)}, \xi^{(1)}, \dots$ sera proportionnelle au produit des quantités

$$1 - \frac{H'}{H}(\alpha^2 + \alpha\xi + \xi^2), \\ 1 - \frac{H'}{H}(\alpha^{(1)2} + \alpha^{(1)}\xi^{(1)} + \xi^{(1)2}), \\ \dots\dots\dots$$

Le logarithme de ce produit est, s étant un nombre indéterminé,

$$- \frac{H'}{H} S(\alpha^{(s)2} + \alpha^{(s)}\xi^{(s)} + \xi^{(s)2}) - \dots;$$

ce produit est à son maximum si le terme précédent est à son minimum, ou si la fonction

$$S(\alpha^{(s)2} + \alpha^{(s)}\xi^{(s)} + \xi^{(s)2})$$

est la plus petite possible, les quantités $\alpha, \xi, \alpha^{(1)}, \dots$ satisfaisant d'ailleurs à l'équation

$$\lambda = l\alpha + m\xi + l^{(1)}\alpha^{(1)} + m^{(1)}\xi^{(1)} + \dots$$

On peut donner à cette fonction la forme

$$\frac{1}{2} S \left\{ \left(2\xi^{(s)} + \alpha^{(s)} - \frac{3m^{(s)}\lambda}{2F} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\alpha^{(s)} - \frac{(l^{(s)} - \frac{1}{2}m^{(s)})\lambda}{F} \right]^2 \right\} + \frac{3}{4} \frac{\lambda^2}{F};$$

cette fonction est évidemment à son minimum si l'on suppose

$$2\xi^{(s)} + \alpha^{(s)} - \frac{3m^{(s)}\lambda}{2F} = 0, \quad \alpha^{(s)} - \frac{(l^{(s)} - \frac{1}{2}m^{(s)})\lambda}{F} = 0;$$

d'où l'on tire généralement

$$\alpha^{(s)} = (l^{(s)} - \frac{1}{2}m^{(s)}) \frac{\lambda}{F}, \quad \xi^{(s)} = m^{(s)} \frac{\lambda}{F}.$$

Dans le cas que nous venons de considérer, on a

$$\alpha = -\frac{\lambda b}{F}(\frac{1}{2} + h' + \frac{1}{2}h), \quad \xi = \frac{\lambda b}{F}(\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h'), \\ \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \dots = \alpha^{(s)} = -\frac{\frac{1}{2}b\lambda}{F}, \quad \xi^{(1)} = \xi^{(2)} = \dots = \xi^{(s)} = \frac{\frac{1}{2}b\lambda}{F}, \\ \alpha^{(i+1)} = \frac{\lambda b}{F}(\frac{1}{2} + h' + \frac{1}{2}h), \quad \xi^{(i)} = -\frac{\lambda b}{F}(\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h');$$

ainsi par ces corrections tous les triangles autres que ceux qui ont une des bases pour un de leurs côtés resteront rectangles.

La probabilité de l'erreur $\pm u$ de la ligne $H^{(i+1)}$, corrigée par la seconde base, sera, par le numéro cité du deuxième Supplément,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt,$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{3u}{2\delta} \sqrt{\frac{i+1}{Q \frac{(S^{(i)} f^{(i)})^2}{S^{(i)2}}}}$$

qui devient ici

$$t = \frac{3u}{2\delta} \sqrt{\frac{i+1}{Q}};$$

en désignant par Q la fonction

$$\frac{(i+1)(i+2)(i+3)}{4} a^2 + \frac{3}{2}(i+1)^2 (h+h') a^2 + \frac{1}{2}(i+1)^2 (h^2 + hh' + h'^2) a^2.$$

Les erreurs également probables étant proportionnelles aux racines

carrières de Q et de Q', on voit qu'elles sont diminuées et à peu près réduites de moitié par la mesure d'une seconde base.

La probabilité d'une erreur $\pm \lambda$ dans la mesure d'une seconde base est, par le deuxième Supplément,

$$\frac{2f dt c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{3\lambda}{2\theta} \sqrt{\frac{i+1}{8f^{(i+2)}}},$$

et $f^{(i+2)}$ est égal à

$$3(i+1)b^2 + 6(h+h')b^2 + 2(h^2 + hh' + h'^2)b^2.$$

Dans le cas présent où $i = 25$, cette quantité devient

$$86,8030b^2;$$

les erreurs également probables dans les mesures de l'arc $\Pi^{(i+1)}$ et d'une nouvelle base égale à la première sont donc dans le rapport de $\sqrt{Q}$ à $\sqrt{86,8030}$; d'où il suit qu'il y a un contre un à parier que l'erreur d'une nouvelle base sera comprise dans les limites $\pm 0^m,34236$, ou à très peu près $\pm \frac{1^m}{3}$. Ce sont les mêmes limites qui résultent des angles des vingt-six triangles qui unissent la base de Perpignan à Formentera. Ainsi, sous ce rapport encore, le cas hypothétique, que nous venons d'examiner, s'accorde avec ce que donne cette chaîne de triangles.

4. Je vais maintenant considérer les distances zénithales des sommets des triangles et le nivellement qui en résulte. D'un même sommet tel que $C^{(2)}$, on peut observer les quatre points C, $C^{(1)}$, $C^{(3)}$, $C^{(4)}$. Nommons f la distance $CC^{(1)}$ et h la base $CC^{(2)}$ du triangle isocèle; tous les triangles étant supposés égaux, si l'on nomme $x^{(i)}$ la hauteur de $C^{(i)}$ au-dessus du niveau de la mer, la distance observée de $C^{(i-2)}$ au zénith de $C^{(i)}$ étant désignée par θ , la distance vraie sera à fort peu près, les

triangles pouvant être supposés horizontaux,

$$\theta + \frac{hu}{R} + \frac{h\varepsilon}{R},$$

u étant le facteur par lequel on doit multiplier l'angle $\frac{h}{R}$ pour avoir la réfraction terrestre au point $C^{(i)}$, R étant le rayon de la Terre et ε étant l'erreur de u . Je ne tiens compte ici que de cette erreur, comme étant beaucoup plus grande que celle de θ . Si l'on nomme pareillement θ' la distance zénithale de $C^{(i)}$, observée de $C^{(i-2)}$, la distance vraie sera

$$\theta' + \frac{hu}{R} + \frac{h\varepsilon}{R},$$

ε' étant l'erreur de u dans cette observation. On aura

$$\theta + \theta' + \frac{2hu}{R} + \frac{h}{R}(\varepsilon + \varepsilon') = \pi + \frac{h}{R};$$

on aura ensuite

$$x^{(i)} - x^{(i-2)} = \frac{h}{2}(\theta - \theta') + \frac{h^2}{2R}(\varepsilon - \varepsilon').$$

Si l'on nomme pareillement θ'' la distance zénithale de $C^{(i-1)}$ observée de $C^{(i)}$, la distance vraie sera

$$\theta'' + \frac{fu}{R} + \frac{f\varepsilon''}{R},$$

ε'' étant l'erreur de u dans cette observation. En nommant encore θ''' et ε''' les mêmes quantités relatives à la distance zénithale de $C^{(i)}$, observée de $C^{(i-1)}$, on aura

$$\theta'' + \theta''' + \frac{2fu}{R} + \frac{f}{R}(\varepsilon'' + \varepsilon''') = \pi + \frac{f}{R},$$

$$x^{(i)} - x^{(i-1)} = \frac{f}{2}(\theta'' - \theta''') + \frac{f^2}{2R}(\varepsilon'' - \varepsilon''').$$

Comme je ne me propose ici que d'examiner quel degré de confiance on doit accorder à ce genre de nivellement, je ferai $h = f$, ce qui revient à supposer tous les triangles équilatéraux. Je prendrai, de plus,

$\frac{h^2}{2R}$ pour unité de distance : en faisant ensuite $\varepsilon - \varepsilon' = \lambda^{(i)}$, $\varepsilon'' - \varepsilon' = \gamma^{(i)}$, on aura deux équations de la forme

$$(A) \quad \begin{cases} x^{(i)} - x^{(i-1)} = \gamma^{(i)} + p^{(i)}, \\ x^{(i)} - x^{(i-2)} = \lambda^{(i)} + q^{(i)}. \end{cases}$$

La première de ces équations s'étend depuis $i=1$ jusqu'à $i=n+1$, n étant le nombre des triangles. La seconde équation s'étend depuis $i=2$ jusqu'à $i=n+1$. Il faut maintenant conclure de ce système d'équations la valeur la plus avantageuse de $x^{(n+1)} - x^{(0)}$, l'élévation $x^{(0)}$ du point C au-dessus de la mer étant supposée connue. Pour cela, on multipliera la première des équations (A) par $f^{(i)}$ et la seconde par $g^{(i)}$, $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$ étant des constantes indéterminées. Dans le système de ces équations ajoutées toutes ensemble, le coefficient de $x^{(i)}$ sera $f^{(i)} - f^{(i+1)} + g^{(i)} - g^{(i+2)}$. En l'égalant à zéro et observant que $g^{(i+2)} - g^{(i)} = \Delta g^{(i+1)} + \Delta g^{(i)}$, Δ étant la caractéristique des différences finies, on aura, en intégrant,

$$f^{(i)} = a - g^{(i)} - g^{(i+1)},$$

a étant une constante. Mais, les valeurs de $g^{(i)}$ ne commençant à avoir lieu que lorsque $i=2$, cette expression de $f^{(i)}$ ne peut servir que lorsque $i=2$. Pour avoir la valeur de $f^{(1)}$, on observera que l'égalité à zéro du coefficient de $x^{(1)}$ donne

$$f^{(1)} = f^{(2)} + g^{(2)};$$

substituant, au lieu de $f^{(2)}$, $a - g^{(2)} - g^{(3)}$, on aura

$$f^{(1)} = a - g^{(2)}.$$

Ensuite, l'expression précédente de $f^{(i)}$ ne s'étend que jusqu'à $i=n$; mais, relativement à $i=n+1$, on doit observer que le coefficient de $x^{(n+1)}$ doit être l'unité, ce qui donne

$$f^{(n+1)} + g^{(n+1)} = 1$$

ou

$$f^{(n+1)} = 1 - g^{(n+1)};$$

l'égalité à zéro du coefficient de $x^{(n)}$ donne $f^{(n)} = f^{(n+1)} - g^{(n)}$, ou $f^{(n)} = 1 - g^{(n)} - g^{(n+1)}$. En comparant cette expression à celle-ci $f^{(n)} = a - g^{(n)} - g^{(n+1)}$, on aura $a=1$. L'erreur de la valeur de $x^{(n+1)}$ sera ainsi

$$f^{(1)}\gamma^{(1)} + f^{(2)}\gamma^{(2)} + \dots + f^{(n+1)}\gamma^{(n+1)} \\ + g^{(2)}\lambda^{(2)} + g^{(3)}\lambda^{(3)} + \dots + g^{(n+1)}\lambda^{(n+1)}.$$

Les valeurs de $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, ..., $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, ... étant évidemment assujetties à la même loi de probabilité, si l'on nomme s cette erreur et si l'on fait

$$H = f^{(1)2} + f^{(2)2} + \dots + f^{(n+1)2} \\ + g^{(2)2} + g^{(3)2} + \dots + g^{(n+1)2},$$

la probabilité de l'erreur s sera proportionnelle, par le n° 20 du Livre II, à une exponentielle de la forme

$$e^{-\frac{Ks^2}{H}},$$

K étant une constante dépendante de la loi de probabilité de $\gamma^{(i)}$ et $\lambda^{(i)}$.

Il faut maintenant déterminer les constantes de H , de manière que H soit un minimum. Or on a

$$H = (1 - g^{(2)})^2 + (1 - g^{(2)} - g^{(3)})^2 + \dots + (1 - g^{(n)} - g^{(n+1)})^2 + (1 - g^{(n+1)})^2 \\ + g^{(2)2} + g^{(3)2} + \dots + g^{(n+1)2};$$

en égalant à zéro le coefficient de la différentielle de $g^{(i)}$, on a

$$(1) \quad g^{(i+1)} + 3g^{(i)} + g^{(i-1)} = 2.$$

Cette équation a lieu depuis $i=3$ jusqu'à $i=n$. L'égalité à zéro du coefficient de $dg^{(2)}$ donne

$$g^{(3)} + 3g^{(2)} = 2,$$

et l'égalité à zéro du coefficient de $dg^{(n+1)}$ donne

$$3g^{(n+1)} + g^{(n)} = 2,$$

ce qui revient à considérer l'équation générale (1) comme ayant lieu

depuis $i = 2$ jusqu'à $i = n + 1$, et à supposer nuls $g^{(i)}$ et $g^{(n+2)}$. L'intégration de l'équation (1) aux différences finies donne

$$g^{(i)} = \frac{2}{5} + \Lambda l^{i-1} + \Lambda' l'^{i-1},$$

l et l' étant les deux racines $-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ de l'équation

$$y^2 + 3y + 1 = 0;$$

Λ et Λ' sont deux arbitraires telles que $g^{(i)}$ devienne nul lorsque $i = 1$ et lorsque $i = n + 2$. On a donc

$$\begin{aligned}\Lambda l^{n+1} + \Lambda' l'^{n+1} &= -\frac{2}{5}, \\ \Lambda + \Lambda' &= -\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

l^{n+1} est une quantité extrêmement grande lorsque n est un grand nombre et, l'^{n+1} étant $\frac{1}{l^{n+1}}$, on voit que Λ est alors une quantité excessivement petite et qu'ainsi $\Lambda' = -\frac{2}{5}$. On a ensuite

$$f^{(i)} = \frac{1}{5} - \Lambda l^{i-1}(1+l) - \Lambda' l'^{i-1}(1+l').$$

De là il est facile de conclure que l'on a, à très peu près et sans craindre $\frac{1}{25}$ d'erreur,

$$H = \frac{n+1}{5},$$

et qu'ainsi l'exponentielle proportionnelle à la probabilité de l'erreur s est

$$e^{-\frac{Hs^2}{n+1}};$$

on peut donc ainsi déterminer cette probabilité.

On a conclu la valeur de $x^{(n+1)}$ du système des équations (A) par le procédé suivant.

Le système des équations (A) donne

$$x^{(i)} - x^{(i-1)} = p^{(i)} + \gamma^{(i)};$$

d'où l'on tire

$$x^{(i)} = p^{(i)} + x^{(i-1)} + \gamma^{(i)},$$

On a ensuite les deux équations

$$\begin{aligned}x^{(2)} - x^{(1)} &= p^{(2)} + \gamma^{(2)}, \\ x^{(2)} - x^{(0)} &= q^{(2)} + \lambda^{(2)};\end{aligned}$$

ce qui donne

$$x^{(2)} = \frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(0)} + \frac{1}{2}(p^{(2)} + q^{(2)}) + \frac{1}{2}\gamma^{(2)} + \frac{1}{2}\lambda^{(2)}.$$

On a les deux équations

$$\begin{aligned}x^{(3)} - x^{(2)} &= p^{(3)} + \gamma^{(3)}, \\ x^{(3)} - x^{(1)} &= q^{(3)} + \lambda^{(3)};\end{aligned}$$

ce qui donne

$$x^{(3)} = \frac{1}{2}x^{(2)} + \frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}(p^{(3)} + q^{(3)}) + \frac{1}{2}\gamma^{(3)} + \frac{1}{2}\lambda^{(3)}.$$

En continuant ainsi, on aura $x^{(n+1)}$. Les quantités $\gamma^{(m)}$ et $\lambda^{(m)}$ ne commencent à être introduites dans cette expression que par les deux valeurs de $x^{(m)} = x^{(m-1)}$ et de $x^{(m)} = x^{(m-2)}$. Désignons par $k^{(r)}$ le coefficient de $\gamma^{(m)}$ dans l'expression de $x^{(m+r)}$; cette expression est

$$x^{(m+r)} = \frac{1}{2}x^{(m+r-1)} + \frac{1}{2}x^{(m+r-2)} + \frac{1}{2}(p^{(m+r)} + q^{(m+r)}) + \frac{1}{2}\gamma^{(m+r)} + \frac{1}{2}\lambda^{(m+r)};$$

en substituant pour $x^{(m+r)}$, $x^{(m+r-1)}$, $x^{(m+r-2)}$ les parties de leurs valeurs relatives à $\gamma^{(m)}$, la comparaison des coefficients de cette quantité donnera

$$k^{(r)} = \frac{1}{2}k^{(r-1)} + \frac{1}{2}k^{(r-2)};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$k^{(r)} = \Lambda + \Lambda' \left(-\frac{1}{2}\right)^{r-1},$$

Λ et Λ' étant deux arbitraires. Pour les déterminer, nous observerons que, r étant nul, on a $k^{(0)} = \frac{1}{2}$, et que, r étant 1, on a

$$k^{(1)} = \frac{1}{2}k^{(0)} = \frac{1}{4};$$

de là on tire

$$\Lambda = \frac{1}{2}, \quad \Lambda' = -\frac{1}{2};$$

ainsi, dans la valeur de $x^{(n+1)}$, où $r = n + 1 - m$, on aura, pour le coefficient $k^{(n+1-m)}$ de $\gamma^{(m)}$,

$$k^{(n+1-m)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-m};$$

le coefficient de $\lambda^{(n)}$ dans la même valeur sera évidemment le même. Ainsi l'expression de $x^{(n+1)}$ sera une quantité connue, plus la suite

$$k^{(n)}\gamma^{(1)} + k^{(n-1)}\{\gamma^{(2)} + \lambda^{(2)}\} + \dots + k^{(1)}\{\gamma^{(n+1)} + \lambda^{(n+1)}\}.$$

Désignons par s cette erreur et par H la somme des carrés des coefficients de $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \dots$; la probabilité de s sera proportionnelle à $c^{-\frac{Ks^2}{H}}$. On a, à très peu près,

$$H = \frac{2}{3}(n+1);$$

ainsi la probabilité de s est à très peu près proportionnelle à $c^{-\frac{Ks^2}{2(n+1)}}$; les erreurs également probables sont donc plus grandes dans ce procédé que suivant la méthode la plus avantageuse, et à peu près dans le rapport de $\sqrt{5}$ à $\sqrt{2}$; ce procédé approche donc beaucoup de l'exactitude de la méthode la plus avantageuse, et, comme le calcul en est fort simple, nous allons déterminer la probabilité des erreurs auxquelles il expose, dans le cas général où les divers triangles ne sont ni égaux ni équilatéraux.

Si l'on représente par $m^{(i)}$ le carré de $C^{(i-1)}C^{(i)}$ divisé par $2R$, et par $n^{(i)}$ le carré de $C^{(i-2)}C^{(i)}$ divisé pareillement par $2R$, le système des équations (A) se changera dans le suivant :

$$(A') \quad \begin{cases} x^{(i)} - x^{(i-1)} = p^{(i)} + m^{(i)}\gamma^{(i)}, \\ x^{(i)} - x^{(i-2)} = q^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)}. \end{cases}$$

Le procédé que nous venons d'examiner donne, en suivant l'analyse précédente, le coefficient de $\gamma^{(i)}$ dans l'expression de $x^{(n+1)}$ égal à

$$\frac{1}{3}m^{(i)} - \frac{1}{6}m^{(i)}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-i}.$$

Pareillement, le coefficient de $\lambda^{(i)}$, dans la même expression, est

$$\frac{1}{3}n^{(i)} - \frac{1}{6}n^{(i)}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-i};$$

de là il suit que la valeur de H est, à très peu près,

$$\frac{1}{3}S\{m^{(i)2} + n^{(i)2}\},$$

le signe intégral S s'étendant à toutes les valeurs de i jusqu'à $i = n+1$; la probabilité d'une erreur s , dans l'expression de $x^{(n+1)}$, est donc proportionnelle à

$$c^{-\frac{Ks^2}{S\{m^{(i)2} + n^{(i)2}\}}}.$$

Si l'on applique aux équations (A') l'analyse que nous avons donnée ci-dessus pour le cas de la méthode la plus avantageuse, on trouvera, en les multipliant respectivement par $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$, l'équation suivante

$$f^{(i)} = 1 - g^{(i)} - g^{(i+1)},$$

et cette équation aura lieu depuis $i = 1$ jusqu'à $i = n+1$, en supposant $g^{(i)}$ et $g^{(n+2)}$ nuls. On aura ensuite l'équation générale

$$m^{(i)2}g^{(i+1)} + \{n^{(i)2} + m^{(i)2} + n^{(i-1)2}\}g^{(i)} + m^{(i-1)2}g^{(i-1)} = m^{(i)2} + m^{(i-1)2}.$$

Cette équation a lieu depuis $i = 2$ jusqu'à $i = n+1$. En la combinant avec les équations $g^{(1)} = 0$, $g^{(n+2)} = 0$, on aura les valeurs de $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n+1)}$; $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(n+2)}$; on aura ensuite

$$H = S\{f^{(i)2}m^{(i)2} + g^{(i)2}n^{(i)2}\},$$

le signe S comprenant toutes les valeurs de $f^{(i)}m^{(i)2}$ et de $g^{(i)}n^{(i)2}$; la probabilité d'une erreur s dans la valeur de $x^{(n+1)}$ sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{Ks^2}{H}}.$$

5. Il faut maintenant déterminer la valeur de K . Pour cela, nous observerons que le facteur u est déterminé, par ce qui précède, au moyen de l'équation

$$u = \frac{\pi - \theta - \theta' + \frac{h}{R}}{2\frac{h}{R}},$$

et que l'erreur de cette expression est $\frac{\epsilon + \epsilon'}{2}$. Chaque double station fournit une valeur de u , et la moyenne de ces valeurs est la valeur qu'il

faut adopter. Si l'on nomme i le nombre de ces valeurs, l'erreur à craindre sera $S \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2i}$, le signe S se rapportant aux i quantités $\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2i}$ relatives à chaque double station. Soit s la somme $S \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}$; la probabilité de s sera, par le n° 20 du Livre II, proportionnelle à une exponentielle de la forme

$$e^{-\frac{Ks^2}{i}},$$

et, si l'on nomme q la somme des carrés des différences de chaque valeur partielle à sa valeur moyenne, on aura

$$K' = \frac{i}{2q}.$$

On a, par ce qui précède, la probabilité de l'erreur d'une valeur s' de la fonction $S \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}$ proportionnelle à l'exponentielle

$$e^{-\frac{Ks'^2}{i}},$$

le signe S s'étendant à i quantités de la forme $\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}$. Or, les erreurs ε et $-\varepsilon$ étant supposées également probables, il est visible que les mêmes valeurs de $S \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}$ et de $S \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}$ sont également probables; on a donc

$$4K = K',$$

ce qui donne

$$K = \frac{i}{8q}.$$

Les quarante-cinq premières valeurs de u , données dans le second Volume de la *Base du Système métrique* (p. 771), et qui sont fondées sur des observations faites dans les mois de l'année où l'on observe le plus souvent, donnent, pour sa valeur moyenne,

$$u = 0,07818,$$

et la somme q des carrés des différences de ces valeurs à la moyenne est 0,04900629; i étant ici égal à 45, on a

$$K = \frac{45}{0,39205032} = 114,781.$$

Si l'on suppose le nombre n de triangles égal à 25 et si l'on fait tous les côtés égaux à 20000^m, on aura 240000^m pour la distance de $x^{(26)}$ à $x^{(0)}$: c'est à peu près la distance de Paris à Dunkerque. Dans ce cas, la quantité $\frac{f^2}{2K}$, prise pour unité de distance, est 31^m,416. De là on conclut qu'il y a un contre un à parier que l'erreur sur la hauteur $x^{(26)}$ est comprise dans les limites $\pm 3^m, 1839$. Il y a neuf contre un à parier qu'elle est comprise dans les limites $\pm 7^m, 761$; on ne peut donc pas alors répondre avec une probabilité suffisante que cette erreur n'excèdera pas $\pm 8^m$.

La chaîne de triangles que nous venons de considérer est beaucoup plus favorable à la détermination de la hauteur de son dernier point que celle dont Delambre a fait usage, dans l'Ouvrage cité, pour déterminer la hauteur du Panthéon au-dessus du niveau de la mer. En considérant cette dernière chaîne, on voit que l'on ne peut pas répondre, avec une probabilité suffisante, que l'erreur sur cette hauteur n'excèdera pas $\pm 16^m$.

6. On voit, par ce qui précède, que les grands triangles, qui sont très propres à la mesure des degrés terrestres, le sont fort peu pour déterminer les hauteurs respectives des diverses stations. Ainsi, dans le cas d'une chaîne de triangles équilatéraux dont f est la longueur de chaque côté, les erreurs également probables de la différence de niveau des deux stations extrêmes étant proportionnelles à $\frac{f^2 \sqrt{n+1}}{2K}$, n étant le nombre des triangles, si l'on nomme a la distance de ces deux stations, on aura, en supposant $n+1$ pair,

$$a = \frac{1}{2}(n+1)f;$$

$\frac{f^2 \sqrt{n+1}}{2R}$ sera donc proportionnelle à $\frac{1}{(n+1)^2}$; les erreurs également probables seront donc proportionnelles à cette fraction. Ainsi, en quadruplant le nombre des triangles, elles deviendront huit fois plus petites; mais alors les erreurs dues aux observations des angles deviennent comparables aux erreurs dues à la variabilité des réfractions terrestres. Examinons comment on peut avoir égard à la fois à ces deux genres d'erreurs.

Considérons une suite de points C, C⁽¹⁾, C⁽²⁾, ... Soient h⁽⁰⁾ la distance de C à C⁽¹⁾; h⁽¹⁾ la distance de C⁽¹⁾ à C⁽²⁾; h⁽²⁾ la distance de C⁽²⁾ à C⁽³⁾, et ainsi de suite. Concevons que du point C⁽ⁱ⁾ on observe C⁽ⁱ⁺¹⁾, et réciproquement. La distance zénithale de C⁽ⁱ⁺¹⁾, observée de C⁽ⁱ⁾, sera, par ce qui précède,

$$\theta + \frac{h^{(i)} u}{R} + \frac{h^{(i)} \varepsilon}{R} + \alpha,$$

ε étant l'erreur de u et α étant celle de l'angle observé θ . La distance zénithale de C⁽ⁱ⁾, observée de C⁽ⁱ⁺¹⁾, sera

$$\theta' + \frac{h^{(i)} u}{R} + \frac{h^{(i)} \varepsilon'}{R} + \alpha',$$

ε' et α' étant les erreurs de u et de θ' dans l'observation faite au point C⁽ⁱ⁺¹⁾. On aura donc les deux équations

$$\begin{aligned} \theta + \theta' + \frac{2h^{(i)} u}{R} + \frac{h^{(i)} u}{R} (\varepsilon + \varepsilon') + \alpha + \alpha' &= \pi + \frac{h^{(i)}}{R}, \\ x^{(i+1)} - x^{(i)} &= \frac{\theta - \theta'}{2} h^{(i)} + \frac{h^{(i)2}}{2R} (\varepsilon - \varepsilon') + \frac{1}{2} h^{(i)} (\alpha - \alpha'). \end{aligned}$$

Désignons comme ci-dessus $\varepsilon - \varepsilon'$ par $\gamma^{(i)}$, et faisons $\alpha - \alpha'$ égal à $\lambda^{(i)}$; on aura, pour l'élévation $x^{(i+1)} - x^{(i)}$ du point C⁽ⁱ⁺¹⁾ au-dessus de C, une expression de cette forme

$$x^{(i+1)} - x^{(i)} = M + S \frac{h^{(i)2}}{2R} \gamma^{(i)} + S \frac{1}{2} h^{(i)} \lambda^{(i)},$$

le signe intégral S se rapportant à toutes les valeurs de i , depuis $i=0$ jusqu'à $i=n$. L'erreur de cette valeur de $x^{(n+1)}$ est

$$S \frac{h^{(i)2} \gamma^{(i)}}{2R} + S \frac{h^{(i)}}{2} \lambda^{(i)}.$$

Il faut maintenant déterminer la probabilité de cette erreur que nous désignerons par s . Soit généralement

$$s = S m^{(i)} \gamma^{(i)} + S n^{(i)} \lambda^{(i)};$$

la probabilité de s sera, par l'analyse du n° 20 du Livre II de la *Théorie analytique des Probabilités*, proportionnelle à

$$\begin{aligned} & \int d\omega dx dy \varphi(x) \psi(y) e^{-\pi \omega \sqrt{-1}} \\ & \times [\cos(m^{(0)}x + n^{(0)}y) \omega \cos(m^{(1)}x + n^{(1)}y) \omega \cos(m^{(2)}x + n^{(2)}y) \omega \dots]; \end{aligned}$$

$\varphi(x)$ est la loi de probabilité d'une valeur x de $\gamma^{(0)}$; $\psi(y)$ est la loi de probabilité d'une valeur y de $\lambda^{(0)}$. Les erreurs négatives et positives sont supposées également probables : les intégrales relatives à x et y sont prises depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, et l'intégrale relative à ω est prise depuis $\omega = -\pi$ jusqu'à $\omega = \pi$. En faisant

$$\begin{aligned} \int dx \varphi(x) &= k, & \int x^2 dx \varphi(x) &= k'', \\ \int dy \psi(y) &= \bar{k}, & \int y^2 dy \psi(y) &= \bar{k}'', \end{aligned}$$

les intégrales étant prises depuis x et y nuls jusqu'à x et y égaux à l'infini, l'analyse du numéro cité donnera la probabilité de s proportionnelle à

$$\frac{e^{-s^2}}{c} \frac{1}{k} S m^{(i)2} \omega + \frac{1}{\bar{k}} S n^{(i)2} \omega$$

Il est facile de conclure généralement de la même analyse que, si l'on fait

$$s = S m^{(i)} \gamma^{(i)} + S n^{(i)} \lambda^{(i)} + S r^{(i)} \delta^{(i)} + \dots,$$

$\gamma^{(i)}$, $\lambda^{(i)}$, $\delta^{(i)}$, ... étant des erreurs dérivant de sources différentes, la

probabilité de s est proportionnelle à l'exponentielle

$$\frac{-s^2}{c} - s m^{(2)} + \frac{1}{k} s n^{(2)} + \frac{1}{k} s r^{(2)} + \dots$$

en désignant par $\pi(x)$ la probabilité d'une erreur x due à la troisième source d'erreur, et faisant

$$2 \int dx \pi(x) = \bar{k}, \quad \int x^2 dx \pi(x) = \bar{k}''.$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini; et ainsi des autres erreurs.

Pour déterminer, dans la question présente, les constantes $\frac{4h''}{k}$ et $\frac{4\bar{k}''}{k}$, je supposerai d'abord la seconde nulle ou très petite, relativement à la première, comme on peut le faire dans les grandes triangulations de la méridienne. Dans ce cas, la probabilité d'une erreur s sera, en faisant $m^{(2)} = 1$, proportionnelle à

$$\frac{-s^2}{c} - \frac{1}{k} s n,$$

n étant le nombre des intervalles qui séparent les stations. La probabilité d'une valeur s' de $S \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}$ ou de $S \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}$, ce qui répond à une erreur $2s'$ dans la valeur de $S(\varepsilon - \varepsilon')$, sera proportionnelle à

$$\frac{-1}{c} \frac{s'^2}{k} - \frac{1}{k} s' n;$$

mais, par ce qui précède, cette probabilité est proportionnelle à

$$\frac{-1}{c^2} \frac{s'^2}{k};$$

on a donc

$$\frac{2q}{i} = \frac{h''}{k} \quad \text{ou} \quad \frac{4h''}{k} = \frac{8q}{i} = \frac{1}{174,781}.$$

Si l'on suppose maintenant $\frac{h''}{k}$ nul et $n^{(2)} = 1$, la probabilité d'une valeur s' de la somme $S \frac{\alpha' - \alpha''}{2}$ sera proportionnelle à

$$\frac{-1}{c} \frac{s'^2}{k} - \frac{1}{k} s' n,$$

et la probabilité d'une même valeur s' de $S(\alpha + \alpha' + \alpha'')$ sera proportionnelle à

$$\frac{-1}{c} \frac{s'^2}{k} - \frac{12}{k} s' n.$$

Si l'on suppose cette loi de probabilité la même que pour les erreurs de la somme des trois angles d'un triangle sphérique, dans les mesures géodésiques, et qui, par le n° 1 du deuxième Supplément, peut être supposée proportionnelle à

$$\frac{-1}{c} \frac{(i+1)}{19^2} \frac{s'^2}{k},$$

θ^2 étant la somme des carrés des excès observés dans la somme des erreurs des trois angles dans i triangles, on aura

$$\frac{4\bar{k}''}{k} = \frac{4\theta^2}{3(i+2)}.$$

On a, par ce que l'on a vu,

$$\frac{i+2}{\theta^2} = \frac{109}{445,217};$$

partant,

$$\frac{4\bar{k}''}{k} = \frac{4}{3} \frac{445,217}{109},$$

quantité qu'il faut diviser par le carré du nombre de secondes sexagésimales que ce rayon renferme, et alors on a

$$\frac{4\bar{k}''}{k} = \frac{1,2801}{10^{18}}.$$

Supposons les distances des stations consécutives égales à 1200^m; on

trouvera qu'il y a un contre un à parier que l'erreur sur la valeur de $x^{(n+1)}$ n'est pas au-dessus de $\pm 0^m,08553$ lorsque $n = 200$. Il y a mille contre un à parier que l'erreur n'est pas au-dessus de $\pm 0^m,413$.

Méthode générale du Calcul des probabilités, lorsqu'il y a plusieurs sources d'erreurs.

La considération des deux sources d'erreur indépendantes qui existent dans les opérations du nivellement m'a conduit à examiner le cas général des observations assujetties à plusieurs sources d'erreurs. Telles sont les observations astronomiques. La plupart sont faites au moyen de deux instruments, la lunette méridienne et le cercle, dont les erreurs ne doivent pas être supposées avoir la même loi de probabilité. Dans les équations de condition que l'on déduit de ces observations, pour obtenir les éléments des mouvements célestes, ces erreurs sont multipliées par des coefficients différents pour chaque source d'erreur et pour chaque équation. Les systèmes les plus avantageux de facteurs par lesquels il faut multiplier ces équations, pour avoir les équations finales qui déterminent les éléments, ne sont plus, comme dans le cas d'une source unique d'erreurs, les coefficients de chaque élément dans les équations de condition. La facilité avec laquelle l'analyse que j'ai donnée dans le Livre II de ma *Théorie des Probabilités* s'applique à ce cas général va montrer les avantages de cette analyse.

Supposons d'abord que l'on ait un système d'équations de condition représentées par celle-ci

$$p^{(i)}y = a^{(i)} + m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + \dots,$$

y étant un élément dont on cherche la valeur la plus avantageuse. Si l'on multiplie l'équation précédente par un facteur $f^{(i)}$, la réunion de tous ces produits donnera pour y l'expression

$$y = \frac{\sum a^{(i)} f^{(i)}}{\sum p^{(i)} f^{(i)}} + \frac{\sum m^{(i)} f^{(i)} \gamma^{(i)} + \sum n^{(i)} f^{(i)} \lambda^{(i)} + \dots}{\sum p^{(i)} f^{(i)}}.$$

L'erreur de y sera

$$\frac{\sum m^{(i)} f^{(i)} \gamma^{(i)} + \sum n^{(i)} f^{(i)} \lambda^{(i)} + \dots}{\sum p^{(i)} f^{(i)}}.$$

En désignant par s cette erreur, sa probabilité sera proportionnelle, par le numéro précédent, à l'exponentielle

$$\frac{e^{-\frac{1}{2} \sum p^{(i)} f^{(i)} s^2}}{\sum m^{(i)2} f^{(i)2} s^2 + \sum n^{(i)2} f^{(i)2} s^2 + \dots}$$

Il faut déterminer $f^{(i)}$ de manière que

$$\frac{\frac{4k''}{k} \sum m^{(i)2} f^{(i)2} + \frac{4k''}{k} \sum n^{(i)2} f^{(i)2} + \dots}{(\sum p^{(i)} f^{(i)})^2}$$

soit un minimum, car il est visible qu'alors la même erreur s devient moins probable que dans tout autre système de facteurs. Si l'on nomme A le numérateur de cette fraction, et si l'on fait varier $f^{(i)}$ d'une quantité dq , on aura, par la condition du minimum, en égalant à zéro la différentielle de cette fraction,

$$0 = \frac{\frac{k''}{k} m^{(i)2} f^{(i)} + \frac{k''}{k} n^{(i)2} f^{(i)} + \dots}{A} - \frac{p^{(i)}}{\sum p^{(i)} f^{(i)}},$$

ce qui donne pour $f^{(i)}$ une expression de cette forme

$$f^{(i)} = \frac{\mu p^{(i)}}{\frac{k''}{k} m^{(i)2} + \frac{k''}{k} n^{(i)2} + \dots}.$$

On peut faire ici $\mu = 1$, parce que, cette quantité étant indépendante de i , elle affecte également tous les multiplicateurs $f^{(i)}$; ainsi la quantité $f^{(i)}$, par laquelle on doit multiplier chaque équation de condition

pour avoir le résultat le plus avantageux, est

$$\frac{p^{(i)}}{\frac{h''}{k} m^{(i)2} + \frac{\bar{h}''}{k} n^{(i)2} + \dots}$$

et la probabilité d'une erreur s de ce résultat est proportionnelle à l'exponentielle

$$e^{-\frac{s^2}{c} \frac{p^{(i)}}{\frac{h''}{k} m^{(i)2} + \frac{\bar{h}''}{k} n^{(i)2} + \dots}}$$

On aura, par la même analyse et par le n° 22 du Livre II, les facteurs par lesquels on doit multiplier les équations de condition pour avoir les résultats les plus avantageux, quels que soient le nombre des éléments à déterminer et le nombre des genres d'erreurs; on aura pareillement les lois de probabilité des erreurs de ces résultats.

Supposons que l'on ait, entre deux éléments x et y , l'équation de condition

$$l^{(i)} x + p^{(i)} y = a^{(i)} + m^{(i)} \gamma^{(i)} + n^{(i)} \lambda^{(i)} + r^{(i)} \delta^{(i)} + \dots,$$

$\gamma^{(i)}, \lambda^{(i)}, \delta^{(i)}, \dots$ étant des erreurs dont les sources sont différentes. En multipliant d'abord cette équation par un système $f^{(i)}$ de facteurs, la réunion de ces produits donnera l'équation finale

$$x \text{ S } l^{(i)} f^{(i)} + y \text{ S } p^{(i)} f^{(i)} = \text{S } a^{(i)} f^{(i)} + \text{S } m^{(i)} f^{(i)} \gamma^{(i)} + \text{S } n^{(i)} f^{(i)} \lambda^{(i)} + \dots$$

En multipliant ensuite l'équation de condition par un autre système $g^{(i)}$ de facteurs, la réunion des produits donnera une seconde équation finale

$$x \text{ S } l^{(i)} g^{(i)} + y \text{ S } p^{(i)} g^{(i)} = \text{S } a^{(i)} g^{(i)} + \text{S } m^{(i)} g^{(i)} \gamma^{(i)} + \dots$$

On tire de ces deux équations finales

$$x = \frac{\text{S } a^{(i)} f^{(i)} \text{ S } p^{(i)} g^{(i)} - \text{S } a^{(i)} g^{(i)} \text{ S } p^{(i)} f^{(i)}}{\text{L}} + \frac{\text{S } m^{(i)} f^{(i)} \gamma^{(i)} \text{ S } p^{(i)} g^{(i)} - \text{S } m^{(i)} g^{(i)} \gamma^{(i)} \text{ S } p^{(i)} f^{(i)} + \dots}{\text{L}}$$

L étant égal à

$$\text{S } l^{(i)} f^{(i)} \text{ S } p^{(i)} g^{(i)} - \text{S } l^{(i)} g^{(i)} \text{ S } p^{(i)} f^{(i)}.$$

Le coefficient de $\gamma^{(i)}$ dans cette valeur est

$$\frac{m^{(i)} f^{(i)} \text{ S } p^{(i)} g^{(i)} - m^{(i)} g^{(i)} \text{ S } p^{(i)} f^{(i)}}{\text{L}}.$$

En changeant $m^{(i)}$ en $n^{(i)}, r^{(i)}, \dots$, on aura les coefficients correspondants de $\lambda^{(i)}, \delta^{(i)}, \dots$. En nommant donc s la valeur de la partie de x dépendante des erreurs $\gamma^{(i)}, \lambda^{(i)}, \delta^{(i)}, \dots$, la probabilité de cette valeur sera, par ce qui précède, proportionnelle à l'exponentielle

$$e^{-\frac{s^2}{c} \frac{1}{n}},$$

en faisant

$$\text{H} = \frac{\text{S } M^{(i)} f^{(i)2} (\text{S } p^{(i)} g^{(i)})^2 - 2 \text{S } M^{(i)} f^{(i)} g^{(i)} \text{ S } p^{(i)} f^{(i)} \text{ S } p^{(i)} g^{(i)} + \text{S } M^{(i)} g^{(i)2} (\text{S } p^{(i)} f^{(i)})^2}{\text{L}^2},$$

$M^{(i)}$ étant égal à

$$\frac{4 h''}{k} m^{(i)2} + \frac{4 \bar{h}''}{k} n^{(i)2} + \frac{4 \bar{h}''}{k} r^{(i)2} + \dots$$

Il faut maintenant déterminer $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$ de manière que H soit un minimum. Pour cela, on fera varier $f^{(i)}$, et l'on égalera à zéro le coefficient de sa différentielle; ce qui donnera, en nommant P le numérateur de l'expression de H,

$$0 = M^{(i)} f^{(i)} (\text{S } p^{(i)} g^{(i)})^2 - M^{(i)} g^{(i)} \text{ S } p^{(i)} f^{(i)} \text{ S } p^{(i)} g^{(i)} - p^{(i)} \text{ S } M^{(i)} f^{(i)} g^{(i)} \text{ S } p^{(i)} g^{(i)} + p^{(i)} \text{ S } M^{(i)} g^{(i)2} \text{ S } p^{(i)} f^{(i)} - \frac{\text{P}}{\text{L}} \{ l^{(i)} \text{ S } p^{(i)} g^{(i)} - p^{(i)} \text{ S } l^{(i)} g^{(i)} \}.$$

Il est facile de voir que l'on satisfait à cette équation en supposant

$$f^{(i)} = \frac{l^{(i)}}{M^{(i)}}, \quad g^{(i)} = \frac{p^{(i)}}{M^{(i)}};$$

et l'on doit en conclure que l'on satisferait, par la même supposition,

à l'équation correspondante que donnerait $dH = 0$, en y faisant varier $g^{(i)}$. On voit encore que les mêmes valeurs de $f^{(i)}$ et de $g^{(i)}$ satisfont aux équations semblables qui résultent de la considération de l'élément y .

Si l'on a, entre les éléments $x, y, z, \dots$ des équations de condition représentées par l'équation générale

$$l^{(i)}x + p^{(i)}y + q^{(i)}z + \dots = a^{(i)} + m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + r^{(i)}\delta^{(i)} + \dots,$$

$\gamma^{(i)}, \lambda^{(i)}, \delta^{(i)}, \dots$ étant des erreurs de divers genres, on trouvera par l'analyse précédente que les facteurs par lesquels on doit multiplier respectivement cette équation, pour former les équations finales qui donnent les valeurs des éléments les plus avantageuses, sont, pour la première équation finale, représentés par

$$\frac{l^{(i)}}{\frac{k''}{k}m^{(i)2} + \frac{\bar{k}''}{k}n^{(i)2} + \frac{\bar{\bar{k}}''}{k}r^{(i)2} + \dots}.$$

Ils sont représentés, pour la seconde équation finale, par

$$\frac{p^{(i)}}{\frac{k''}{k}m^{(i)2} + \frac{\bar{k}''}{k}n^{(i)2} + \frac{\bar{\bar{k}}''}{k}r^{(i)2} + \dots},$$

et ainsi de suite. En appliquant donc aux équations ainsi multipliées l'analyse du n° 2 du premier Supplément, on aura les valeurs des éléments les plus avantageuses et les lois de probabilités de leurs erreurs.

Pour donner un exemple de cette application, ne considérons que deux éléments x et y . Si l'on fait

$$M^{(i)} = \frac{k''}{k}m^{(i)2} + \frac{\bar{k}''}{k}n^{(i)2} + \frac{\bar{\bar{k}}''}{k}r^{(i)2} + \dots,$$

On multipliera l'équation de condition précédente par $\frac{p^{(i)}}{M^{(i)}}$, et l'on en tirera

$$x \frac{l^{(i)}p^{(i)}}{M^{(i)}} + y \frac{p^{(i)2}}{M^{(i)}} = \frac{a^{(i)}p^{(i)}}{M^{(i)}} + \frac{p^{(i)}}{M^{(i)}}(m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + \dots);$$

mais la condition de la méthode la plus avantageuse donne

$$0 = \frac{l^{(i)}}{M^{(i)}}(m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + \dots),$$

$$0 = \frac{p^{(i)}}{M^{(i)}}(m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + \dots);$$

on aura donc

$$y = \frac{\frac{a^{(i)}p^{(i)}}{M^{(i)}} - x \frac{l^{(i)}p^{(i)}}{M^{(i)}}}{\frac{p^{(i)2}}{M^{(i)}}}.$$

Substituant cette valeur de y dans l'équation générale de condition, et faisant

$$l_1^{(i)} = l^{(i)} - p^{(i)} \frac{\frac{l^{(i)}p^{(i)}}{M^{(i)}}}{\frac{p^{(i)2}}{M^{(i)}}},$$

$$a_1^{(i)} = a^{(i)} - p^{(i)} \frac{\frac{l^{(i)}p^{(i)}}{M^{(i)}}}{\frac{p^{(i)2}}{M^{(i)}}},$$

on aura

$$x = \frac{\frac{a_1^{(i)}l_1^{(i)}}{M^{(i)}}}{\frac{l_1^{(i)2}}{M^{(i)}}},$$

et la probabilité d'une erreur s de cette valeur sera proportionnelle à

$$\frac{-s^2}{4} \frac{l_1^{(i)4}}{M^{(i)}}.$$

Cette analyse suppose la connaissance des constantes $\frac{k''}{k}$ et $\frac{\bar{k}''}{k}$. Mais on

peut en obtenir, par les observations mêmes, des valeurs très approchées, de la manière suivante.

Concevons que l'on ait déterminé les éléments $x, y, z, \dots$ par la méthode suivant laquelle on forme les équations finales, en multipliant chaque équation de condition successivement par le coefficient correspondant de chaque élément. Si l'on substitue les valeurs des éléments ainsi déterminées dans l'équation de condition

$$l^{(i)}x + p^{(i)}y + \dots + a^{(i)} = m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + \dots,$$

on aura une équation de cette forme

$$R^{(i)} = m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + \dots$$

Supposons, pour plus de simplicité, que l'on n'ait que les deux genres d'erreurs $\gamma^{(i)}$ et $\lambda^{(i)}$; on multipliera d'abord l'équation précédente par $m^{(i)}$. En élevant ensuite chaque membre au carré et prenant la somme de toutes les équations ainsi formées, on aura

$$S m^{(i)2} R^{(i)2} = S \{ m^{(i)4} \gamma^{(i)2} + 2 m^{(i)3} n^{(i)} \gamma^{(i)} \lambda^{(i)} + n^{(i)2} m^{(i)2} \lambda^{(i)2} \}.$$

La valeur moyenne de $m^{(i)4} \gamma^{(i)2}$ est évidemment

$$\frac{m^{(i)4} \int \gamma^2 d\gamma \varphi(\gamma)}{\int d\gamma \varphi(\gamma)},$$

les intégrales étant prises depuis $\gamma = -\infty$ jusqu'à γ infini, ce qui donne $\frac{2k'' m^{(i)4}}{k}$. On a pareillement $\frac{2\tilde{k}''}{k} m^{(i)2} n^{(i)2}$ pour la valeur moyenne de $m^{(i)2} n^{(i)2} \lambda^{(i)2}$. On trouve de la même manière que la valeur moyenne de $2 m^{(i)3} n^{(i)} \gamma^{(i)} \lambda^{(i)}$ est nulle; on a donc, en substituant au lieu des quantités leurs valeurs moyennes, ce que l'on peut faire avec d'autant plus de précision que le nombre des observations est plus grand,

$$S m^{(i)2} R^{(i)2} = \frac{2k''}{k} S m^{(i)4} + \frac{2\tilde{k}''}{k} S m^{(i)2} n^{(i)2}.$$

On aura pareillement

$$S n^{(i)2} R^{(i)2} = \frac{2k''}{k} S m^{(i)2} n^{(i)2} + \frac{2\tilde{k}''}{k} S n^{(i)4};$$

de là on tire

$$\frac{4k''}{k} = \frac{2 S n^{(i)4} S m^{(i)2} R^{(i)2} - 2 S m^{(i)2} n^{(i)2} S n^{(i)2} R^{(i)2}}{S m^{(i)4} S n^{(i)4} - (S m^{(i)2} n^{(i)2})^2},$$

$$\frac{4\tilde{k}''}{k} = \frac{2 S m^{(i)4} S n^{(i)2} R^{(i)2} - 2 S m^{(i)2} n^{(i)2} S m^{(i)2} R^{(i)2}}{S m^{(i)4} S n^{(i)4} - (S m^{(i)2} n^{(i)2})^2};$$

en désignant donc par $2P$ et $2Q$ les numérateurs de ces deux expressions, les facteurs par lesquels on doit multiplier l'équation de condition seront

$$\frac{P^{(i)}}{m^{(i)2} P + n^{(i)2} Q},$$

$$\frac{P^{(i)}}{m^{(i)2} P + n^{(i)2} Q},$$

$$\dots\dots\dots$$

Il s'agit maintenant de faire voir que ces valeurs de $\frac{4k''}{k}$, $\frac{4\tilde{k}''}{k}$ sont fort approchées. Pour cela, ne considérons qu'un élément x : l'équation de condition

$$l^{(i)}x = a^{(i)} + m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)}$$

donnera

$$x = \frac{S a^{(i)} l^{(i)}}{S l^{(i)2}} + \frac{S l^{(i)} m^{(i)} \gamma^{(i)} + S l^{(i)} n^{(i)} \lambda^{(i)}}{S l^{(i)2}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation de condition, on aura

$$R^{(i)} = \frac{l^{(i)} S a^{(i)} l^{(i)} - a^{(i)} S l^{(i)2}}{S l^{(i)2}},$$

$$R^{(i)} + l^{(i)} \frac{S \{ l^{(i)} m^{(i)} \gamma^{(i)} + l^{(i)} n^{(i)} \lambda^{(i)} \}}{S l^{(i)2}} = m^{(i)} \gamma^{(i)} + n^{(i)} \lambda^{(i)};$$

mais il est facile de voir que les valeurs de $S l^{(i)} m^{(i)} \gamma^{(i)}$ et de $S l^{(i)} n^{(i)} \lambda^{(i)}$

sont nulles par la supposition des erreurs négatives aussi probables que les erreurs positives : on peut donc faire, comme ci-dessus,

$$R^{(i)} = m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)},$$

ce qu'il fallait établir.

QUATRIÈME SUPPLÉMENT.

1. U étant une fonction quelconque d'une variable t , si on la développe suivant les puissances de t , le coefficient de t^x , dans ce développement, sera une fonction de x que je désignerai par y_x ; U est ce que j'ai nommé *fonction génératrice* de y_x . Si l'on multiplie U par une fonction T de t , pareillement développée suivant les puissances ascendantes de t , le produit UT sera une nouvelle fonction génératrice d'une fonction de x , dérivée de la fonction y_x suivant une loi qui dépendra de la fonction T. Si T est égal à $\frac{1}{t} - 1$, il est facile de voir que la dérivée sera $y_{x+1} - y_x$, ou la différence finie de y_x . Désignons généralement, quel que soit T, cette dérivée par ∂y_x . Si l'on multiplie le produit UT par T, la dérivée du produit UT² sera une dérivée de ∂y_x semblable à la dérivée de ∂y_x en y_x ; on pourra donc désigner par $\partial^2 y_x$ cette seconde dérivée; d'où il est visible généralement que UTⁿ sera la fonction génératrice de $\partial^n y_x$.

Si l'on multiplie U par une autre fonction Z de t , pareillement développée suivant les puissances ascendantes de t , et si l'on désigne par la caractéristique Δ ce que nous avons nommé ∂ relativement à la fonction T, UZⁿ sera la fonction génératrice de $\Delta^n y_x$.

On peut concevoir T comme une fonction de Z. En développant cette fonction en série par rapport aux puissances ascendantes de Z, on aura une expression de T de cette forme

$$T = A^{(0)} + A^{(1)}Z + A^{(2)}Z^2 + \dots$$

En multipliant cette équation par U et repassant des fonctions géné-

ratrices aux coefficients, on aura

$$\partial y_x = A^{(0)} y_x + A^{(1)} \Delta y_x + A^{(2)} \Delta^2 y_x + \dots$$

On voit ainsi que la même équation, qui a lieu entre T et Z, a lieu entre leurs caractéristiques ∂ et Δ , pourvu que, dans le développement de cette équation suivant les puissances de ∂ et de Δ , on substitue, au lieu d'une puissance quelconque ∂^r , $\partial^r y_x$; au lieu d'une puissance Δ^n , $\Delta^n y_x$; au lieu d'un produit tel que $\partial^r \Delta^n$, $\partial^r \Delta^n y_x$; et que l'on multiplie par y_x les termes indépendants de ∂ et Δ . Ainsi, en supposant T égal à $\frac{1}{t} - 1$, $Z = \frac{1}{t'} - 1$, ∂y_x sera la différence finie de y_x , x variant de l'unité; Δy_x sera la différence finie de y_x , x variant de i ; on a ensuite

$$Z = (1 + T)^i - 1,$$

et, par conséquent,

$$Z^n = [(1 + T)^i - 1]^n;$$

ce qui donne

$$\Delta^n = [(1 + \partial)^i - 1]^n,$$

pourvu qu'après le développement on place y_x après les puissances des caractéristiques. Cette équation aura encore lieu en faisant n négatif, mais alors les différences se changent en intégrales. La considération des fonctions génératrices fait voir ainsi, de la manière la plus naturelle et la plus simple, l'analogie des puissances et des différences. On peut considérer cette théorie comme le calcul des caractéristiques.

Si l'on a $0 = \partial y_x$, on aura une équation aux différences finies : UT devient alors un polynôme qui ne renferme que des puissances de t plus petites que la plus haute de t dans T. Désignons par Q le polynôme en t le plus général de cette nature; on aura

$$U = \frac{Q}{T}.$$

Le coefficient de t^r dans le développement de U sera l'intégrale y_x de l'équation $0 = \partial y_x$; par cette raison, je nomme U fonction génératrice de cette équation.

Si l'on conçoit U fonction de deux variables t et t' , le coefficient du produit $t^r t'^{r'}$, dans le développement de U, sera une fonction de x et de x' que je désigne par $y_{x,x'}$; T étant une fonction développée des mêmes variables t et t' , le produit UT sera la fonction génératrice d'une dérivée de $y_{x,x'}$, que je désignerai par $\partial y_{x,x'}$; et il est facile d'en conclure que UT^n sera la fonction génératrice de $\partial^n y_{x,x'}$.

Si l'on a $0 = \partial y_{x,x'}$, on aura une équation aux différences finies partielles. Représentons cette équation par la suivante

$$\begin{aligned} 0 = & a y_{x,x} + b y_{x,x+1} + c y_{x,x+2} + \dots \\ & + a' y_{x+1,x} + b' y_{x+1,x+1} + \dots \\ & + a'' y_{x+2,x} + \dots \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

il est facile de voir que la fonction génératrice de l'équation proposée sera

$$\frac{A + Bt + Ct^2 + \dots + H t^{n-1} + A' + B't + C't^2 + \dots + H' t^{n-1}}{\left\{ \begin{array}{l} at^n t'^{n'} + bt^n t'^{n'-1} + ct^n t'^{n'-2} + \dots \\ + a' t^{n-1} t'^{n'} + b' t^{n-1} t'^{n'-1} + \dots \\ + a'' t^{n-2} t'^{n'} + \dots \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\}}$$

n et n' étant les plus grands accroissements de x et de x' , dans l'équation proposée aux différences partielles; A, B, C, ..., H sont des fonctions arbitraires de t ; A', B', C', ..., H' sont des fonctions arbitraires de t' . On déterminera toutes ces fonctions au moyen des fonctions génératrices de

$$\begin{aligned} & y_{0,x}, y_{1,x}, y_{2,x}, \dots, y_{n-1,x}, \\ & y_{x,0}, y_{x,1}, y_{x,2}, \dots, y_{x,n'-1}. \end{aligned}$$

Un des principaux avantages de cette manière d'intégrer les équations aux différences partielles consiste en ce que, l'analyse algébrique fournissant divers moyens pour développer les fonctions, on peut choisir celui qui convient le mieux à la question proposée. La solution

des problèmes suivants, par le comte de Laplace, mon fils, et les considérations qu'il y a jointes répandront un nouveau jour sur le calcul des fonctions génératrices.

2. Un joueur A tire d'une urne, renfermant des boules blanches et noires, une boule qu'il remet après le coup, avec la probabilité p d'amener une boule blanche et la probabilité q d'en extraire une noire; un second joueur B tire ensuite, d'une autre urne, une boule qu'il remet également après le tirage, avec les probabilités p' d'une boule blanche et q' d'une noire. Ces deux joueurs continuent ainsi à extraire alternativement, chacun de leur urne respective, une boule qu'ils ont toujours soin de remettre. Si l'un des joueurs amène une boule blanche, il compte un point; si, au contraire, il fait sortir une boule noire, il ne compte rien, et le tour de jouer passe simplement à l'autre. Les joueurs ayant réglé, par les conditions de leur jeu, le nombre de points que chacun doit atteindre le premier pour gagner la partie, et ayant commencé à jouer, il manque encore au joueur A le nombre x de points pour gagner, et x' au joueur B; et le tour de jouer appartient au joueur A. On demande, dans cette position, quelle est la probabilité de l'un et l'autre joueur pour gagner la partie.

Soit $z_{x,x'}$ la probabilité de second joueur B, et représentons par $Y_{x,x'}$ sa probabilité, s'il était le premier à jouer. Le joueur A, en commençant, peut amener une boule blanche, et la probabilité de B devient $Y_{x-1,x'}$; ou le premier joueur fait sortir une noire, et alors ne compte rien, et la probabilité du second se change en $Y_{x,x'}$; mais la probabilité du premier cas est p , celle du second q ; on aura donc l'équation

$$z_{x,x'} = p Y_{x-1,x'} + q Y_{x,x'}$$

par un raisonnement semblable, on aura encore celle-ci

$$Y_{x,x'} = p' z_{x,x'-1} + q' z_{x,x'}$$

d'où l'on tire

$$Y_{x-1,x'} = p' z_{x-1,x'-1} + q' z_{x-1,x'}$$

et conséquemment

$$z_{x,x'} = p(p' z_{x-1,x'-1} + q' z_{x-1,x'}) + q(p' z_{x,x'-1} + q' z_{x,x'}) \quad (1)$$

ou

$$z_{x,x'} = \frac{pq'}{1-qq'} z_{x-1,x'} + \frac{p'q}{1-qq'} z_{x,x'-1} + \frac{pp'}{1-qq'} z_{x-1,x'-1},$$

et en faisant

$$\frac{pq'}{1-qq'} = m, \quad \frac{p'q}{1-qq'} = m', \quad \text{et} \quad \frac{pp'}{1-qq'} = n,$$

il viendra

$$z_{x,x'} = m z_{x-1,x'-1} + m' z_{x,x'-1} + n z_{x-1,x'-1}.$$

La fonction génératrice de $z_{x,x'}$, dans cette équation aux différences partielles, est

$$\frac{A + A'}{1 - mt - m't - ntt'},$$

A étant une fonction arbitraire de t , et A' une autre fonction arbitraire de t' ; j'observe d'abord qu'en attribuant à la fonction A' le terme indépendant de t dans la fonction A, la fonction génératrice ci-dessus peut se mettre sous cette forme

$$\frac{A_1 t + A'_1}{1 - mt - m't - ntt'},$$

A et A'_1 étant de nouvelles fonctions arbitraires de t et de t' qu'il s'agit

(1) On arrive encore à cette équation aux différences partielles en considérant l'ensemble des deux tirages successifs de A et B comme un coup, et en examinant les différents cas qui peuvent se présenter après ce coup joué; or ils sont au nombre de quatre: 1° ou les deux joueurs amènent chacun une boule blanche, événement dont la probabilité est pp' ; alors la probabilité $z_{x,x'}$ se changera en celle-ci $z_{x-1,x'-1}$; 2° ou le premier joueur extrait une boule blanche et le second une noire; dans cette hypothèse, qui a pour probabilité pq' , $z_{x,x'}$ deviendra $z_{x-1,x'}$; 3° ou au contraire le premier joueur fait sortir une boule noire et le second une blanche; dans cette hypothèse, qui a pour probabilité $p'q$, $z_{x,x'}$ deviendra $z_{x,x'-1}$; 4° ou enfin l'un et l'autre joueur tirent une boule noire, événement dont la probabilité est qq' , et alors la probabilité $z_{x,x'}$ reste la même. On aura donc, par les principes connus des probabilités, l'équation

$$z_{x,x'} = pp' z_{x-1,x'-1} + pq' z_{x-1,x'} + p'q z_{x,x'-1} + qq' z_{x,x'}.$$

On obtient la fonction génératrice de $z_{x,x'}$, dans cette équation aux différences partielles, en appliquant à ce cas la règle générale qui vient d'être exposée.

de déterminer. Or, si l'on fait attention que $z_{0,x'}$ est nul, quel que soit x' , la probabilité du joueur A se changeant alors en certitude, on voit que le coefficient de t^0 dans le développement de la fonction génératrice par rapport aux puissances de t doit être nul, et l'on aura

$$\frac{\Lambda'_1}{1-m't'} = 0 \quad \text{ou} \quad \Lambda'_1 = 0.$$

De plus, $z_{x,0}$ est nul quand x est zéro, et égal à l'unité quand x est ou 1 ou 2, ou 3, ..., puisqu'alors la probabilité du joueur B se change en certitude; la fonction génératrice de $z_{x,0}$ est donc $\frac{t}{1-t}$; c'est le coefficient de t^0 dans le développement de la fonction génératrice suivant les puissances de t' ; on aura donc

$$\frac{\Lambda_1 t}{1-mt} = \frac{t}{1-t},$$

ce qui donne

$$\Lambda_1 t = \frac{t(1-mt)}{1-t};$$

par conséquent la fonction génératrice de $z_{x,x'}$ est

$$(a) \quad \frac{t(1-mt)}{(1-t)(1-mt-m't'-ntt')};$$

en la mettant sous cette forme

$$\frac{t}{1-t} \frac{1}{1 - \frac{m't'+nt}{1-mt}} t'$$

et la développant par rapport aux puissances de t' , on a

$$\frac{t}{1-t} \left[1 + \frac{(m't'+nt)}{1-mt} t' + \frac{(m't'+nt)^2}{(1-mt)^2} t'^2 + \frac{(m't'+nt)^3}{(1-mt)^3} t'^3 + \dots \right].$$

Le coefficient de $t^{x'}$ dans cette série est

$$\frac{t}{1-t} \left(\frac{m't'+nt}{1-mt} \right)^{x'},$$

et celui de t^x dans le développement de cette dernière fonction sera l'expression de $z_{x,x'}$. Or, si l'on réduit d'abord l'expression $t \left(\frac{m't'+nt}{1-mt} \right)^{x'}$ en une série ordonnée selon les puissances de t , et qu'on la multiplie ensuite par le développement de $\frac{1}{1-t}$, il est facile de voir que le coefficient de t^x dans ce produit est ce que devient la série en y faisant $t=1$ et s'arrêtant à la puissance x de t ; et l'on trouvera, pour la valeur de ce coefficient ou de $z_{x,x'}$,

$$z_{x,x'} = m^{x'} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{x'}{1} \frac{n}{m} + \frac{x'(x'-1)}{1.2} \frac{n^2}{m^2} + \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{1.2.3} \frac{n^3}{m^3} + \dots + \frac{x'(x'-1)\dots(x'-x+2)}{1.2\dots(x-1)} \frac{n^{x-1}}{m^{x-1}} \\ & + \frac{x'}{1} m \left[1 + \frac{x'}{1} \frac{n}{m} + \frac{x'(x'-1)}{1.2} \frac{n^2}{m^2} + \dots + \frac{x'(x'-1)\dots(x'-x+3)}{1.2\dots(x-2)} \frac{n^{x-3}}{m^{x-3}} \right] \\ & + \frac{x'(x'+1)}{1.2} m^2 \left[1 + \frac{x'}{1} \frac{n}{m} + \dots + \frac{x'(x'-1)\dots(x'-x+4)}{1.2\dots(x-3)} \frac{n^{x-4}}{m^{x-4}} \right] \\ & + \dots \\ & + \frac{x'(x'+1)\dots(x'+x-2)}{1.2\dots(x-1)} m^{x-1} \end{aligned} \right\}.$$

En désignant par $y_{x,x'}$ la probabilité du joueur A, on serait conduit, par les mêmes raisonnements, à une équation semblable aux différences partielles,

$$y_{x,x'} = m y_{x-1,x} + m' y_{x,x'-1} + n y_{x-1,x'-1},$$

qui donne pareillement pour la variable $y_{x,x'}$ une fonction génératrice de la forme

$$\frac{\Lambda_1 t + \Lambda'_1}{1-mt-m't'-ntt'},$$

Λ_1 et Λ'_1 étant, comme plus haut, des fonctions arbitraires de t et de t' que l'on déterminera par les mêmes considérations. En effet la fonction génératrice de $y_{0,x'}$ est $\frac{1}{1-t'}$, celle de $y_{x,0}$ est l'unité : on formera donc les équations

$$\frac{\Lambda'_1}{1-m't'} = \frac{1}{1-t'},$$

d'où l'on tire

$$\Lambda'_1 = \frac{1-m't'}{1-t'}.$$

et

$$\frac{A_1 t + 1}{1 - mt} = 1;$$

d'où l'on conclut

$$A_1 t = -mt.$$

La fonction génératrice de $v_{x,x'}$ sera donc

$$(b) \quad \frac{1 - m' t' - mt}{1 - mt - m' t' - n t t'},$$

laquelle, développée selon les puissances de t et de t' , donnera, par le coefficient de $t^x t'^{x'}$, l'expression de $v_{x,x'}$ qui sera d'une forme semblable à celle de $z_{x,x'}$, quoique un peu plus compliquée.

En ajoutant les deux fonctions génératrices (a) et (b), leur somme se réduit à celle-ci

$$\frac{1}{(1-t)(1-t')},$$

dans laquelle le coefficient de $t^x t'^{x'}$ est l'unité; ainsi l'on a

$$v_{x,x'} + z_{x,x'} = 1;$$

et effectivement, la partie doit être nécessairement gagnée par l'un des joueurs, car l'un et l'autre sont certains de pouvoir extraire chacun de leur urne les nombres déterminés de boules blanches.

Maintenant, supposons $p = 0$ et conséquemment $q = 1$, on a

$$m = 0, \quad m' = 1 \quad \text{et} \quad n = 0;$$

alors l'expression de $z_{x,x'}$ devient l'unité; ce qui est évident, puisque le joueur B, n'ayant plus de chances de perte, doit toujours finir par gagner.

Si, au contraire, on suppose $p = 1$ et $q = 0$, c'est-à-dire si le premier joueur A compte un point avant chaque tirage du joueur B, alors

$$m = q', \quad m' = 0 \quad \text{et} \quad n = p';$$

x' étant plus grand que x ou égal, l'expression $z_{x,x'}$ se réduit à zéro;

et, en effet, il est évidemment impossible que, dans ce cas, le joueur B puisse gagner la partie; mais, quand x est plus grand que x' , la valeur de $z_{x,x'}$ prend cette forme

$$z_{x,x'} = p' t' \left[1 + \frac{x'}{1} q' + \frac{x'(x'+1)}{1 \cdot 2} q'^2 + \dots + \frac{x'(x'+1) \dots (x'-2)}{1 \cdot 2 \dots (x'-x'+1)} q'^{x-x'+1} \right].$$

Dans cette supposition, le joueur B ne peut gagner qu'autant qu'il amènera x' boules blanches avant $x - x'$ boules noires; autrement, il est devancé par le joueur A qui compte un point à chaque coup: cette expression de $z_{x,x'}$ est donc la probabilité que le joueur B aura tiré x' boules blanches avant d'en avoir extrait $x - x'$ noires, et, par conséquent, la probabilité pour gagner, s'il faisait le pari avec le joueur A, qui compterait alors un point par la sortie de chaque boule noire tandis qu'il en compte un à la sortie d'une blanche, d'atteindre x' points avant que son adversaire en ait $x - x'$; ce qui est le *problème des partis* (*).

(*) La fonction génératrice de $z_{x,x'}$ se réduit dans ce cas à

$$\frac{t(1-q't)}{(1-t)(1-q't-p'tt')},$$

et l'équation aux différences partielles correspondante serait

$$z_{x,x'} = q' z_{x-1,x'} + p' z_{x-1,x'-1},$$

dans laquelle $z_{x,x'}$ est une fonction de x et de x' que nous désignerons par $\varphi(x, x')$; si l'on fait $x - x' = s$, on aura

$$\varphi(x, x') = \varphi(s + x', x'),$$

et, si l'on représente par $z_{s,x'}$ cette dernière fonction, il en résulte

$$z_{s,x'} = z_{s,x'}, \quad z_{s-1,x'} = z_{s-1,x'}, \quad z_{s-1,x'-1} = z_{s,x'-1};$$

et l'équation aux différences partielles se change en celle-ci

$$z_{s,x'} = q' z_{s-1,x'} + p' z_{s,x'-1},$$

équation à laquelle conduirait directement le problème des partis dans les conditions énoncées ci-dessus. En faisant attention que, par suite de cette transformation, $z_{s,0} = 1$ et $z_{0,x'} = 0$, et que $z_{0,0}$ ne peut avoir lieu, il est aisé de voir que la fonction génératrice de $z_{s,x'}$ sera

$$\frac{t(1-q't)}{(1-t)(1-q't-p'tt')},$$

dans le développement de laquelle le coefficient de $t^s t'^{x'}$ sera l'expression de $z_{s,x'}$.

Si l'on examine avec attention la forme de l'expression générale qui donne $z_{x,x'}$, on reconnaîtra que ce problème peut encore être résolu, et même avec simplicité, au moyen de la théorie des combinaisons : en effet, soient a le nombre des boules blanches contenues dans l'urne du joueur A, et b celui des noires; a' le nombre des boules blanches du joueur B, et b' celui des noires; en considérant, comme on l'a déjà fait, l'ensemble de deux tirages successifs de A et B comme un coup,

aa' sera le nombre des combinaisons dans lesquelles les joueurs amènent chacun une boule blanche;

ab' celui des combinaisons qui donneront une boule blanche à A et une noire à B;

$a'b$ celui des combinaisons qui donneront, au contraire, une boule noire à A et une blanche à B;

bb' celui des combinaisons dans lesquelles l'un et l'autre joueur tirent une boule noire;

Et la somme $aa' + ab' + a'b + bb'$ formera l'ensemble de toutes les combinaisons qui peuvent avoir lieu dans un coup. Les combinaisons où les joueurs amènent chacun une boule noire n'apportant aucun changement à leur position, nous pouvons en faire abstraction, et alors ne nous occuper que des coups où il sera amené au moins une boule blanche. Il est visible qu'en $x + x'$ coups semblables l'un des joueurs a nécessairement gagné, et la partie doit être décidée : or le nombre de toutes les combinaisons également possibles, suivant lesquelles ces $x + x'$ coups peuvent se présenter, sera

$$(aa' + ab' + a'b)^{x+x'};$$

la question se réduit donc à choisir dans toutes ces combinaisons celles qui font gagner le joueur B, c'est-à-dire celles dans lesquelles ce joueur aura x' boules blanches avant que le joueur A en ait amené x . Pour fixer les idées, supposons x' plus grand que x ; on peut former les hypothèses suivantes : ou le joueur B aura gagné au $x^{\text{ième}}$ coup, c'est-à-dire en tirant sans interruption une boule blanche à chaque coup, et alors le nombre des combinaisons précédentes qui se rappor-

tent à ce cas est évidemment

$$a'x' \left[b^{x'} + \frac{x'}{1} ab^{x'-1} + \frac{x'(x'-1)}{1.2} a^2 b^{x'-2} + \dots + \frac{x'(x'-1) \dots (x'-x+2)}{1.2 \dots (x-1)} a^{x-1} b^{x'-x+1} \right] (aa' + ab' + a'b)^{x'};$$

et en le divisant par $(aa' + ab' + a'b)^{x+x'}$, nombre total des combinaisons, on aura, pour la probabilité de cette hypothèse,

$$\frac{a'x' b^{x'}}{(aa' + ab' + a'b)^{x+x'}} \left[1 + \frac{x'}{1} \frac{a}{b} + \frac{x'(x'-1)}{1.2} \frac{a^2}{b^2} + \dots + \frac{x'(x'-1) \dots (x'-x+2)}{1.2 \dots (x-1)} \frac{a^{x-1}}{b^{x-1}} \right];$$

ou le joueur B aura gagné au $(x' + 1)^{\text{ième}}$ coup, c'est-à-dire en n'ayant tiré qu'une seule boule noire, par exemple en commençant, et alors le nombre des combinaisons favorables à cet événement est

$$b'a'x' \left[b^{x'} + \frac{x'}{1} ab^{x'-1} + \frac{x'(x'-1)}{1.2} a^2 b^{x'-2} + \dots + \frac{x'(x'-1) \dots (x'-x+3)}{1.2 \dots (x-2)} a^{x-2} b^{x'-x+2} \right] (aa' + ab' + a'b)^{x'-1};$$

mais ce nombre est le même, que la boule noire soit amenée au premier coup ou au deuxième, ..., ou au $x^{\text{ième}}$ coup; il faut donc le multiplier par x' pour avoir toutes les combinaisons relatives à cette hypothèse, dont la probabilité est, par ce moyen,

$$\frac{x'}{1} \frac{ab'a'x' b^{x'}}{(aa' + ab' + a'b)^{x+x'}} \left[1 + \frac{x'}{1} \frac{a}{b} + \frac{x'(x'-1)}{1.2} \frac{a^2}{b^2} + \dots + \frac{x'(x'-1) \dots (x'-x+3)}{1.2 \dots (x-2)} \frac{a^{x-2}}{b^{x-2}} \right];$$

ou le joueur B aura gagné au $(x' + 2)^{\text{ième}}$ coup, et l'on verrait de la même manière que la probabilité de cette hypothèse serait

$$\frac{x'(x'+1)}{1.2} \frac{a^2 b'^2 a'x' b^{x'}}{(aa' + ab' + a'b)^{x+x'}} \left[1 + \frac{x'}{1} \frac{a}{b} + \dots + \frac{x'(x'-1) \dots (x'-x+4)}{1.2 \dots (x-3)} \frac{a^{x-3}}{b^{x-3}} \right].$$

En continuant ainsi, on aura les probabilités de toutes les hypothèses successives qui peuvent se présenter dans la supposition du gain de

la partie par le joueur B, jusqu'à celle où il ne gagnerait qu'au $(x' + x - 1)^{\text{ième}}$ coup, événement dont la probabilité serait

$$\frac{x'(x'+1) \dots (x'+x-2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots (x-1)} \frac{a^{x-1} b^{x-x-1} a' x' b x'}{(aa' + ab' + a'b)x' + x - 1};$$

et effectivement, dans ce cas, il ne peut y avoir de coups où les joueurs amènent en même temps une boule blanche.

La somme de toutes ces probabilités donnera évidemment celle du joueur B pour gagner la partie.

Si l'on fait attention que

$$\frac{nb'}{aa' + ab' + a'b} = m, \quad \frac{a'b}{aa' + ab' + a'b} = m', \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{n}{m},$$

on retrouve l'expression de $z_{x,x'}$.

Concevons présentement qu'il y ait dans les urnes des boules blanches portant le n° 1, et d'autres boules, de la même couleur, qui portent le n° 2; chaque boule diminuant de son numéro, par sa sortie, le nombre de points qui manquent encore au joueur auquel elle est favorable. Le problème n'est plus susceptible d'être résolu généralement au moyen des combinaisons, au lieu que le calcul des fonctions génératrices continuera à fournir une expression générale dont le développement contiendra la solution complète de la question et pourra, dans certains cas, s'effectuer par des lois faciles à saisir, comme nous aurons occasion de le voir.

Soient p la probabilité du joueur A d'extraire une boule numérotée 1, p_1 celle d'extraire une boule numérotée 2, et q celle d'amener une boule noire; p' , p'_1 et q' les probabilités correspondantes pour le joueur B; et soit toujours $z_{x,x'}$ la probabilité de ce dernier joueur pour gagner la partie. En suivant la même marche que plus haut, on sera conduit à l'équation aux différences partielles

$$z_{x,x'} = m z_{x-1,x'} + m_1 z_{x-2,x'} + m' z_{x,x'-1} + m'_1 z_{x,x'-2} \\ + n z_{x-1,x'-1} + n_1 z_{x-2,x'-1} + n' z_{x-1,x'-2} + n'_1 z_{x-2,x'-2},$$

dans laquelle on fait

$$\frac{pq'}{1-qq'} = m, \quad \frac{p_1 q'_1}{1-qq'} = m_1, \quad \frac{p' q}{1-qq'} = m', \quad \frac{p'_1 q'_1}{1-qq'} = m'_1, \\ \frac{pp'}{1-qq'} = n, \quad \frac{p_1 p'_1}{1-qq'} = n_1, \quad \frac{pp'_1}{1-qq'} = n', \quad \frac{p_1 p'_1}{1-qq'} = n'_1;$$

la fonction génératrice de la variable $z_{x,x'}$, donnée par cette équation, sera

$$(c) \frac{A + Bt' + A' + B't}{1 - mt - m_1 t^2 - m' t' - m'_1 t'^2 - n t t' - n_1 t^2 t' - n' t t'^2 - n'_1 t^2 t'^2},$$

A et B étant des fonctions arbitraires de t , A' et B' des fonctions arbitraires de t' , lesquelles seront déterminées au moyen des fonctions génératrices de

$$z_{0,x'}, \quad z_{x,0}, \quad z_{1,x'}, \quad z_{x,1}$$

qui le sont elles-mêmes par les conditions du jeu.

On trouve, comme précédemment, que la fonction génératrice de $z_{0,x}$ est zéro et celle de $z_{x,0}$, $\frac{t}{1-t}$.

De l'équation générale, on déduit l'équation aux différences finies

$$z_{1,x'} = m' z_{1,x'-1} + m'_1 z_{1,x'-2},$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x' depuis $x' = 2$ inclusivement, et qui donne conséquemment, pour la fonction génératrice de $z_{1,x'}$,

$$\frac{a + b t'}{1 - m' t' - m'_1 t'^2},$$

a et b étant des constantes que l'on détermine au moyen des valeurs de $z_{1,0}$ et $z_{1,1}$; et comme $z_{1,0}$ est égal à l'unité, $z_{1,1}$ est égal à $m' + m'_1$, et est en même temps le coefficient de t' dans le développement de la fonction génératrice; il en résulte

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = m'_1;$$

la fonction génératrice de $z_{1,x'}$ est donc

$$\frac{1 + m'_1 t'}{1 - m' t' - m'_1 t'^2}.$$

Maintenant, si dans l'équation précédente on met $1 - y_{x,x}$ à la place de $z_{x,x}$, $y_{x,x}$ étant toujours la probabilité du premier joueur A, elle se reforme de la même manière par rapport à cette dernière variable, et l'on en déduirait pareillement l'équation aux différences finies

$$y_{x,1} = m y_{x-1,1} + m_1 y_{x-2,1}.$$

Mais on verrait en même temps qu'elle ne commence à avoir lieu que lorsque x surpasse 2; car, x étant 2, on aurait

$$y_{2,1} = m y_{1,1} + m_1 y_{0,1} + n_1 + n'_1.$$

Il ne faut donc l'employer qu'à partir de $x = 3$, et alors la fonction génératrice de $y_{x,1}$ est de la forme

$$\frac{a + bt + ct^2}{1 - mt - m_1 t^2},$$

a , b et c étant des constantes que l'on déterminera, comme précédemment, au moyen des valeurs de $y_{1,0}$, $y_{1,1}$, et $y_{1,2}$; or $y_{1,0}$ est l'unité; $y_{1,1}$ est égal à $1 - m' - m'_1$, et est le coefficient de t dans le développement de la fonction génératrice; $y_{2,1}$ a pour valeur, comme nous venons de le voir,

$$m(1 - m' - m'_1) + m_1 + n_1 + n'_1;$$

c'est le coefficient de t^2 dans le développement de la fonction. On en conclura

$$a = 1, \quad b = 1 - m - m' - m'_1 \quad \text{et} \quad c = n_1 + n'_1,$$

et la fonction génératrice de $y_{x,1}$ sera donc

$$\frac{1 + (1 - m - m' - m'_1)t + (n_1 + n'_1)t^2}{1 - mt - m_1 t^2};$$

conséquemment celle de $z_{x,1}$ est

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} - \frac{1 + (1 - m - m' - m'_1)t + (n_1 + n'_1)t^2}{1 - mt - m_1 t^2} \\ = \frac{(m' + m'_1)t + (n + n')t^2 + (n_1 + n'_1)t^2}{(1-t)(1 - mt - m_1 t^2)}. \end{aligned}$$

Reprenons actuellement la fonction génératrice (c); on peut toujours la ramener à cette forme

$$\frac{A_1 t + B_1 t^2 t' + A'_1 + B'_1 t t'}{1 - mt - m_1 t^2 - m' t' - m'_1 t'^2 - n t t' - n_1 t^2 t' - n' t t'^2 - n'_1 t^2 t'^2},$$

A_1 et B_1 étant les fonctions arbitraires de t , A'_1 et B'_1 les fonctions arbitraires de t' ; lesquelles on détermine aisément, en égalant d'abord le coefficient de t^0 dans le développement de cette fonction à la fonction génératrice de $z_{0,0}$ ou zéro, ensuite celui de t^0 à la fonction génératrice de $z_{x,0}$ ou $\frac{t}{1-t}$, puis celui de t à la fonction génératrice de $z_{1,0}$, et enfin celui de t' à la fonction génératrice de $z_{x,1}$, ce qui donnera successivement

$$A'_1 = 0, \quad A_1 = \frac{1 - mt - m_1 t^2}{1 - t}, \quad B'_1 = m'_1, \quad B_1 = \frac{m'_1 + n' + n'_1 t}{1 - t},$$

et, par conséquent, pour la fonction génératrice de $z_{x,x}$,

$$(d) \frac{(1 - mt - m_1 t^2)t + m'_1 t t' + n' t^2 t' + n'_1 t^2 t'^2}{(1 - t)(1 - mt - m_1 t^2 - m' t' - m'_1 t'^2 - n t t' - n_1 t^2 t' - n' t t'^2 - n'_1 t^2 t'^2)}.$$

Si l'on suppose p et p' nuls, alors on a

$$m = 0, \quad m' = 0, \quad n = 0, \quad n_1 = 0 \quad \text{et} \quad n' = 0,$$

et la fonction (d) prend cette forme

$$\frac{t t' (m'_1 + n'_1 t^2)}{(1 - t)(1 - m_1 t^2) \left[1 - \left(\frac{m'_1 + n'_1 t^2}{1 - m_1 t^2} \right) t'^2 \right]} + \frac{t}{(1 - t) \left[1 - \left(\frac{m'_1 + n'_1 t^2}{1 - m_1 t^2} \right) t'^2 \right]},$$

sous laquelle elle est susceptible des mêmes développements que la fonction (a). Il est à remarquer que l'on retrouvera le même coefficient pour

$$t^{2r} t'^{2r'}, \quad t^{2r-1} t'^{2r'}, \quad t^{2r} t'^{2r'-1}, \quad t^{2r-1} t'^{2r'-1};$$

ce qui se voit *a priori*, en faisant attention que les joueurs comptent toujours deux points à chaque boule blanche qu'ils font sortir.

Supposons que le joueur A ait seul des boules numérotées 1 et 2, et

que l'autre joueur n'ait que des boules blanches marquées 1, ou qui ne lui comptent qu'un point en sortant; alors

$$p'_i = 0$$

et, par suite,

$$m'_i = 0, \quad n'_i = 0, \quad n'_i = 0;$$

la fonction (d) devient

$$\frac{t(1 - mt - m_1 t^2)}{(1-t)(1 - mt - m_1 t^2 - m'_1 t' - n_1 t^2 t')} = \frac{t}{1-t} \frac{1}{1 - \frac{m'_1 + (n + n_1 t)t}{1 - (m + m_1 t)t} t'};$$

en la développant suivant les puissances de t' , le coefficient de t'^x sera

$$\frac{t[m'_1 + (n + n_1 t)t]^x}{(1-t)[1 - (m + m_1 t)t]^x},$$

expression qu'il s'agit maintenant de développer par rapport aux puissances de t pour avoir le coefficient de t^x ; or ce coefficient sera la somme de tous les coefficients des puissances de t inférieures ou égales à t^{x-1} , dans le développement de l'expression

$$\frac{[m'_1 + (n + n_1 t)t]^x}{[1 - (m + m_1 t)t]^x},$$

laquelle, en omettant les termes où les puissances de t en dehors des binômes sont supérieures à t^{x-1} , peut être mise sous cette forme

$$m'_1 x' \left(1 + \frac{x'}{1} \left(\frac{n + n_1 t}{m'_1} \right) t + \frac{x'(x'-1)}{1,2} \left(\frac{n + n_1 t}{m'_1} \right)^2 t^2 + \dots + \frac{x'(x'-1) \dots (x'-x+2)}{1,2 \dots (x-1)} \left(\frac{n + n_1 t}{m'_1} \right)^{x-1} t^{x-1} \right. \\ \left. + \frac{x'}{1} (m + m_1 t) t \left[1 + \frac{x'}{1} \left(\frac{n + n_1 t}{m'_1} \right) t + \dots + \frac{x'(x'-1) \dots (x'-x+3)}{1,2 \dots (x-2)} \left(\frac{n + n_1 t}{m'_1} \right)^{x-2} t^{x-2} \right] \right. \\ \left. + \frac{x'(x'+1)}{1,2} (m + m_1 t)^2 t^2 \left[1 + \dots + \frac{x'(x'-1) \dots (x'-x+4)}{1,2 \dots (x-3)} \left(\frac{n + n_1 t}{m'_1} \right)^{x-3} t^{x-3} \right] \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{x'(x'+1) \dots (x'+x-2)}{1,2 \dots (x-1)} (m + m_1 t)^{x-1} t^{x-1} \right)$$

Si l'on rejette encore de cette série toutes les puissances de t supé-

rieures à t^{x-1} , qui résulteront des développements des binômes, et si, dans ce qui reste, on fait $t = 1$, on aura l'expression de $z_{x,x}$.

Examinons encore le cas où le joueur A serait certain d'extraire à chaque coup une boule qui compterait à ce joueur un point, c'est-à-dire où l'on aurait

$$p = 1, \quad p_1 = 0, \quad q = 0,$$

et conséquemment

$$m = q', \quad m_1 = 0, \quad m'_1 = 0, \quad m'_1 = 0,$$

$$n = p', \quad n_1 = 0, \quad n'_1 = p'_1, \quad n'_1 = 0.$$

La fonction génératrice de $z_{x,x}$ ou la fonction (d) se réduirait alors à

$$\frac{t(1 - q' t) + p'_1 t^2 t'}{(1-t)(1 - q' t - p' t t' - p'_1 t t^2)},$$

et celle de $y_{x,x}$ serait, par suite,

$$\frac{1}{(1-t)(1-t')} - \frac{t(1 - q' t) + p'_1 t^2 t'}{(1-t)(1 - q' t - p' t t' - p'_1 t t^2)} \\ = \frac{1}{1-t'} + \frac{t t'}{(1-t')(1 - q' t - p' t t' - p'_1 t t^2)}.$$

Dans cette dernière expression, le premier terme représente la fonction génératrice de $y_{0,x}$, qui est égal à l'unité quel que soit x , et le second donnera, en le développant par rapport aux puissances de t et de t' , toutes les autres valeurs de $y_{x,x}$; or le coefficient de t^x sera

$$\frac{t'[q' + (p' + p'_1 t') t'^{x-1}]}{1 - t'};$$

d'où il résulte que, si l'on rejette du développement de la série

$$q' x' \left[t + \frac{(x-1)}{1} \left(\frac{p' + p'_1 t'}{q'} \right) t^2 + \frac{(x-1)(x-2)}{1,2} \left(\frac{p' + p'_1 t'}{q'} \right)^2 t^3 + \dots \right]$$

toutes les puissances de t' supérieures à t'^x , et si l'on fait dans ce qui reste $t = 1$, on aura, en supposant x' pair et égal à $2r + 2$, le coeffi-

cient de $t^x t^{x'}$, ou

$$Y_{x,x'} = q^{x-1} \left(1 + \frac{(x-1)}{1} \left(\frac{p'+p'_1}{q} \right) + \frac{(x-1)(x-2)}{1,2} \left(\frac{p'+p'_1}{q} \right)^2 + \dots + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-r)}{1,2,\dots,r} \left(\frac{p'+p'_1}{q} \right)^r \right. \\ \left. + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-r-1)}{1,2,\dots,(r+1)} \frac{p'^{r+1}}{q^{r+1}} \left[1 + \frac{(r+1)}{1} \frac{p'_1}{p'} + \frac{(r+1)r}{1,2} \frac{p'_1^2}{p'^2} + \dots + \frac{(r+1)r\cdot 2}{1,2,\dots,r} \frac{p'_1^{r-1}}{p'^{r-1}} \right] \right. \\ \left. + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-r-2)}{1,2,\dots,(r+2)} \frac{p'^{r+2}}{q^{r+2}} \left[1 + \frac{(r+2)}{1} \frac{p'_1}{p'} + \dots + \frac{(r+2)(r+1)\dots 4}{1,2,\dots,(r+1)} \frac{p'_1^{r-1}}{p'^{r-1}} \right] \right. \\ \left. + \dots + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-2r-1)}{1,2,\dots,(2r+1)} \frac{p'^{2r+1}}{q^{2r+1}} \right),$$

et, dans le cas de x' impair ou égal à $2r+1$,

$$Y_{x,x'} = q^{x-1} \left(1 + \frac{(x-1)}{1} \left(\frac{p'+p'_1}{q} \right) + \frac{(x-1)(x-2)}{1,2} \left(\frac{p'+p'_1}{q} \right)^2 + \dots + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-r)}{1,2,\dots,r} \left(\frac{p'+p'_1}{q} \right)^r \right. \\ \left. + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-r-1)}{1,2,\dots,(r+1)} \frac{p'^{r+1}}{q^{r+1}} \left[1 + \frac{(r+1)}{1} \frac{p'_1}{p'} + \frac{(r+1)r}{1,2} \frac{p'_1^2}{p'^2} + \dots + \frac{(r+1)r\cdot 3}{1,2,\dots,(r-1)} \frac{p'_1^{r-1}}{p'^{r-1}} \right] \right. \\ \left. + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-r-2)}{1,2,\dots,(r+2)} \frac{p'^{r+2}}{q^{r+2}} \left[1 + \frac{(r+2)}{1} \frac{p'_1}{p'} + \dots + \frac{(r+2)(r+1)\dots 5}{1,2,\dots,(r-2)} \frac{p'_1^{r-1}}{p'^{r-1}} \right] \right. \\ \left. + \dots + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-2r)}{1,2,\dots,2r} \frac{p'^{2r}}{q^{2r}} \right).$$

Il est visible que le joueur B ne peut espérer de gagner qu'autant que x est plus grand que $r+1$, soit que x' égale $2r+2$ ou $2r+1$; et effectivement, hors de cette supposition, les valeurs précédentes de $Y_{x,x'}$ deviennent toutes égales à l'unité.

Nous ferons aussi remarquer que le joueur A a nécessairement gagné la partie lorsque le joueur B aura tiré $x-r-1$ boules noires avant d'avoir atteint x' points; mais ce dernier joueur peut encore avoir perdu avant d'avoir amené la totalité de ce nombre de boules noires, ce qui fait que cette question n'est point susceptible de rentrer dans celle qui est traitée dans la Théorie analytique, à la suite du *problème des partis*, comme précédemment une supposition semblable nous a conduits à ce dernier problème.

3. Le problème des partis ayant été l'objet des recherches de deux

grands géomètres du XVII^e siècle ⁽¹⁾, et en quelque sorte le premier de ce genre soumis à des méthodes analytiques, on sera peut-être curieux de voir comment ce même problème se déduit encore, comme corollaire, d'une autre question de probabilité, dont la solution offrira d'ailleurs une nouvelle application de la méthode des fonctions génératrices.

On tire successivement d'une urne, qui contient une quantité déterminée de boules blanches et noires, une boule que l'on ne remet point après le coup, et l'on demande, après un certain nombre de tirages connus, quelle est la probabilité de compléter la sortie de tel nombre donné de boules blanches avant celle de tel autre nombre, également donné, de boules noires.

Soient a et a' les nombres de boules blanches et noires contenues primitivement dans l'urne, n le nombre de boules blanches que l'on se propose d'atteindre avant d'avoir extrait un autre nombre n' de boules noires; et supposons qu'après avoir tiré successivement de l'urne une boule sans la remettre, on ait amené $n-x$ boules blanches et $n'-x'$ boules noires, x et x' étant alors les nombres de boules blanches et noires qu'il reste à faire sortir pour décider la question. Représentons par $Y_{x,x'}$ la probabilité d'amener dans les tirages suivants x boules blanches avant x' boules noires, ou d'atteindre la totalité des n boules blanches avant d'avoir extrait n' noires; on aura, d'après les règles connues des probabilités, l'équation

$$Y_{x,x'} = \frac{a-n+x}{a+a'-n-n'+x+x'} Y_{x-1,x'} + \frac{a'-n'+x'}{a+a'-n-n'+x+x'} Y_{x,x'-1}.$$

Faisons

$$a-n+x=s, \quad a'-n'+x'=s' \quad \text{et} \quad Y_{x,x'}=u_{s,s'};$$

l'équation précédente devient

$$u_{s,s'} = \frac{s}{s+s'} u_{s-1,s'} + \frac{s'}{s+s'} u_{s,s'-1},$$

⁽¹⁾ Pascal et Fermat.

et, en supposant

$$u = \frac{1.2.3\dots s.1.2.3\dots s'}{1.2.3\dots (s+s')} z_{s,s'}$$

elle se ramène à cette forme

$$z_{s,s'} = z_{s-1,s'} + z_{s,s'-1},$$

équation aux différences partielles à coefficients constants, laquelle doit avoir lieu pour toutes les valeurs entières et positives de s et de s' , à partir de $s = a - n$ et de $s' = a' - n'$, et donne conséquemment pour la fonction génératrice de $z_{s,s'}$

$$t^{a-n} t'^{a'-n'} \frac{\Lambda + \Lambda'}{1-t-t'},$$

Λ étant une fonction arbitraire de t , et Λ' une fonction arbitraire de t' . On peut toujours transformer cette expression en celle-ci

$$t^{a-n} t'^{a'-n'} \frac{\Lambda_1 + \Lambda'_1 t'}{1-t-t'},$$

dans laquelle Λ_1 et Λ'_1 sont de nouvelles fonctions arbitraires de t et de t' . Pour les déterminer, nous observerons que, $y_{0,0}$ ne pouvant avoir lieu et $y_{x,0}$ étant égal à zéro, quelles que soient les valeurs entières et positives de x , on aura

$$0 = u_{s,a'-n'} = \frac{1.2.3\dots s.1.2\dots (a'-n')}{1.2.3\dots (a'-n'+s)} z_{s,a'-n'};$$

par conséquent la fonction génératrice de $z_{s,a'-n'}$ sera nulle, ce qui donne

$$t^{a-n} t'^{a'-n'} \frac{\Lambda_1}{1-t} = 0, \quad \text{et par suite} \quad \Lambda_1 = 0.$$

De plus, $y_{0,x}$ étant égal à l'unité pour toutes les valeurs de x depuis $x' = 1$, on aura semblablement

$$1 = u_{a-n,s} = \frac{1.2\dots (a-n).1.2.3\dots s'}{1.2.3\dots (a-n+s')} z_{a-n,s};$$

d'où l'on tire, pour la valeur de $z_{a-n,s}$ ou le coefficient de $t^{a-n} t'^s$ dans le

développement de sa fonction génératrice,

$$z_{a-n,s} = \frac{(a-n+1)(a-n+2)\dots(a-n+s')}{1.2.3\dots s'}.$$

ce qui donne

$$t^{a-n} t'^{a'-n'} \frac{\Lambda'_1 t'}{1-t'} = t^{a-n} t'^{a'-n'} \frac{(a-n+1)\dots(a+a'-n-n'+1)}{1.2.3\dots(a'-n'+1)} \\ \times \left[t' + \frac{(a+a'-n-n'+2)t'^2}{a'-n'+2} + \dots + \frac{(a+a'-n-n'+2)\dots(a+a'-n-n'+x')t'^{x'}}{(a'-n'+2)\dots(a'-n'+x')} + \dots \right].$$

Le second membre de cette équation multiplié par $\frac{1}{1-\frac{t}{1-t'}}$ sera donc

la fonction génératrice de $z_{s,s'}$; en la développant par rapport aux puissances de t et ensuite par rapport à celles de t' , il est aisé de voir que le coefficient de t^x ou de t^{a-n+x} est

$$t'^{a'-n'} \frac{(a-n+1)\dots(a+a'-n-n'+1)}{1.2.3\dots(a'-n'+1)} \\ \times \left[t' + \frac{(a+a'-n-n'+2)t'^2}{a'-n'+2} + \dots \right] \\ \times \left[1 + \frac{x}{1} t' + \frac{x(x+1)}{1.2} t'^2 + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+x'-1)}{1.2\dots(x'-1)} t'^{x'-1} + \dots \right],$$

et que celui de $t'^{x'}$ ou de $t'^{a'-n'+x'}$ dans cette dernière expression, ou $z_{s,s'}$, est égal à

$$\frac{a-n+1\dots(a+a'-n-n'+1)}{1.2.3\dots(a'-n'+1)} \\ \times \left[\frac{x(x+1)\dots(x+x'-2)}{1.2\dots(x'-1)} + \frac{a+a'-n-n'+2}{a'-n'+2} \frac{x(x+1)\dots(x+x'-3)}{1.2\dots(x'-2)} + \dots + \frac{(a+a'-n-n'+2)\dots(a+a'-n-n'+x')}{(a'-n'+2)\dots(a'-n'+x')} \right].$$

Maintenant, en multipliant cette valeur de $z_{s,s'}$ par

$$\frac{1.2.3\dots(a'-n'+x')}{(a'-n'+x'+1)\dots(a+a'-n-n'+x+x')},$$

on aura, après toutes les réductions, pour l'expression de $y_{x,x'}$,

$$y_{x,x'} = \frac{(a-n+x) \dots (a-n+1)}{(a+a'-n-n'+x+x') \dots (a+a'-n-n'+x'+1)} \\ \times \left[1 + \frac{x}{1} \frac{a'-n'+x'}{a+a'-n-n'+x'} + \frac{x(x+1)}{1.2} \frac{(a'-n'+x')(a'-n'+x'-1)}{(a+a'-n-n'+x')(a+a'-n-n'+x'-1)} + \dots \right] \\ + \frac{x(x+1) \dots (x+x'-2)}{1.2 \dots (x'-1)} \frac{(a'-n'+x') \dots (a'-n'+2)}{(a+a'-n-n'+x') \dots (a+a'-n-n'+2)}$$

Concevons actuellement $a-n$ et $a'-n'$ dans le rapport de p à q , en sorte que l'on ait $a-n=pk$ et $a'-n'=qk$, et imaginons que k devienne un très grand nombre ou l'infini; il est clair que la probabilité de la sortie d'une boule blanche ou d'une noire dans les tirages successifs deviendra constante et sera $\frac{p}{p+q}$ pour une boule blanche et $\frac{q}{p+q}$ pour une noire, et la probabilité $y_{x,x'}$ se réduira à cette expression

$$y_{x,x'} = \left(\frac{p}{p+q} \right)^x \left[1 + \frac{x}{1} \frac{q}{p+q} + \frac{x(x+1)}{1.2} \left(\frac{q}{p+q} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{x(x+1) \dots (x+x'-2)}{1.2 \dots (x'-1)} \left(\frac{q}{p+q} \right)^{x'-1} \right];$$

telle est la formule à laquelle conduit le *problème des partis*, et effectivement nous rentrons dans les conditions de ce problème par la supposition de k infini.

Si l'on suppose n égal à a et n' égal à a' , $y_{x,x'}$ exprimera alors la probabilité de la sortie de toutes les boules blanches restantes dans l'urne avant que toutes les noires aient été épuisées, et son expression se changera en celle-ci

$$\frac{1.2.3 \dots x}{(x+x') \dots (x'+1)} \left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x+1)}{1.2} + \dots + \frac{x(x+1) \dots (x+x'-2)}{1.2 \dots (x'-1)} \right],$$

laquelle se réduit elle-même à

$$\frac{x'}{x+x'}.$$

La probabilité d'extraire de l'urne la totalité des boules blanches

avant celle des noires est donc à la probabilité contraire en raison inverse du nombre des boules blanches à celui des noires.

On arrive à ce dernier résultat, d'une manière extrêmement simple, au moyen des combinaisons; en effet, la probabilité de la sortie de toutes les boules de l'urne, dans un ordre quelconque, par couleur, sera

$$\frac{x(x-1) \dots 2.1 x'(x'-1) \dots 2.1}{(x+x')(x+x'-1) \dots 3.2.1} = \frac{1.2.3 \dots x'}{(x+1) \dots (x+x')}.$$

Mais, pour que les boules blanches sortent en totalité les premières, il faut nécessairement qu'une boule de la couleur noire sorte la dernière: en combinant $x'-1$ à $x'-1$ les $x+x'-1$ rangs de sortie qui se trouvent avant le dernier, on formera autant de classements différents pour les boules de la couleur noire, et autant d'ordres de sortie par couleur, qui comprendront tous ceux où une boule noire sort en dernier lieu; or le nombre de ces combinaisons est

$$\frac{(x+x'-1)(x+x'-2) \dots (x+1)}{1.2 \dots (x'-1)},$$

et en le multipliant par la probabilité commune à chaque ordre de sortie par couleur, on aura la probabilité cherchée égale à

$$\frac{1.2.3 \dots x'}{(x+1) \dots (x+x')} \frac{(x+1) \dots (x+x'-1)}{1.2.3 \dots (x'-1)} = \frac{x'}{x+x'}.$$

Remarques sur les fonctions génératrices.

4. Soit u une fonction génératrice à une ou plusieurs variables; toute équation entre cette fonction et ses variables, linéaire par rapport à u , rationnelle par rapport aux variables, subsistera encore si l'on passe des fonctions génératrices aux coefficients, entre ces mêmes coefficients, et donnera lieu à une équation aux différences partielles; mais si, dans cette équation aux différences partielles, on repasse des coefficients aux fonctions génératrices, on n'arrivera plus à une équation rigoureusement exacte, à moins qu'on n'y rétablisse en même

temps les fonctions des variables qui ont pu disparaître dans le premier passage. Ainsi, dans une des questions que nous avons traitées plus haut, l'équation aux différences partielles

$$z_{x,x'} = m z_{x-1,x'} + m' z_{x,x'-1} + n z_{x-1,x'-1}$$

donnerait, en remontant simplement des coefficients aux fonctions génératrices, celle-ci

$$u = mu + m' u' + nu'',$$

laquelle n'est point exacte; car il est aisé de voir que, d'après les conditions du problème, il faudrait ajouter au second membre la fonction génératrice de $z_{x,0}$ moins cette même fonction multipliée par m . Cette fonction de t , qu'il est nécessaire de rétablir dans le second membre de l'équation pour la compléter, est précisément la fonction arbitraire que nous avons eu à déterminer dans la solution de cette question. En général, les fonctions à ajouter pour avoir encore une équation dans le passage des coefficients aux fonctions génératrices sont les mêmes que les fonctions arbitraires qui forment le numérateur de la fonction génératrice intégrale, avant qu'elle soit développée.

Faute d'avoir égard à ces fonctions, on peut tomber dans des erreurs graves, en se servant de ce moyen pour intégrer les équations aux différences partielles. Par cette même raison, la marche suivie dans la solution des problèmes des nos 8 et 10 du Livre II de la *Théorie analytique des Probabilités* n'est nullement rigoureuse, et semble impliquer contradiction en ce qu'elle établit une liaison entre les variables qui sont et doivent être toujours indépendantes. Sans entrer dans les considérations particulières qui ont pu la faire réussir ici, et qu'il est aisé de saisir, nous allons faire voir que la méthode d'intégration exposée au commencement de ce *Supplément* s'applique également à ces questions, et les résout avec non moins de simplicité.

Dans le problème du n° 8, on se propose de déterminer le sort d'un nombre n de joueurs A, B, C, ... dont $p, q, r, \dots$ représentent les probabilités respectives, c'est-à-dire leurs probabilités pour gagner un coup lorsque, pour gagner la partie, il manque x coups au joueur A,

x' coups au joueur B, x'' coups au joueur C, etc. En nommant $y_{x,x',x'',\dots}$ la probabilité du joueur A pour gagner la partie, on a l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x',x'',\dots} = p y_{x-1,x',x'',\dots} + q y_{x,x'-1,x'',\dots} + r y_{x,x',x''-1,\dots} + \dots$$

qui donne pour $y_{x,x',x'',\dots}$ cette fonction génératrice

$$\frac{P + Q + R + \dots}{1 - pt - qt' - rt'' - \dots},$$

dans laquelle P, Q, R, ... sont autant de fonctions arbitraires des variables $t, t', t'', \dots$ qu'il y a de ces variables, en ne comprenant point t dans la première, t' dans la deuxième, t'' dans la troisième, etc. Or, cette fonction peut être mise sous la forme

$$\frac{P' + Q' t + R' t t' + S' t t' t'' + \dots}{1 - pt - qt' - rt'' - st''' - \dots},$$

$P', Q', R', \dots$ étant, comme plus haut, des fonctions arbitraires, la première de toutes les variables à l'exception de t , la deuxième de toutes les variables en exceptant t' , la troisième également de toutes les variables hormis t'' , et ainsi de suite. Pour les déterminer, nous observerons que, dans $y_{x,x',x'',\dots}$, deux des indices $x, x', x'', \dots$ ou un plus grand nombre ne peuvent être nuls à la fois, puisque la partie cesse quand l'un des joueurs a atteint ses points; de plus, $y_{0,x',x'',\dots}$ est égal à l'unité, quels que soient $x', x'', \dots$; la fonction génératrice de cette expression, ou celle qui donne l'unité pour le coefficient d'un produit quelconque $t^{x'} t'^{x''} t''^{x'''} \dots$, est

$$\frac{t^x}{1-t} \frac{t'^{x'}}{1-t'} \frac{t''^{x''}}{1-t''} \dots;$$

par conséquent, on aura

$$P' = \frac{t^x}{1-t} \frac{t'^{x'}}{1-t'} \frac{t''^{x''}}{1-t''} \dots (1 - qt' - rt'' - st''' - \dots).$$

Toute valeur de $y_{x,x',x'',\dots}$ dans laquelle un autre indice que x est nul étant égale à zéro, la fonction génératrice correspondante devient nulle aussi; on aura donc successivement

$$Q' = 0, \quad R' = 0, \quad S' = 0, \quad \dots$$

Partant, la fonction génératrice de $y_{x,x',x'',\dots}$ sera

$$\frac{t'}{1-t'} \frac{t''}{1-t''} \dots \frac{1-qt'-rt''-\dots}{1-pt'-qt''-rt'''-\dots},$$

et le coefficient de t^x , dans le développement de cette fonction par rapport aux puissances de t ,

$$\frac{t'}{1-t'} \frac{t''}{1-t''} \dots \frac{p^x}{(1-qt'-rt''-\dots)^x};$$

d'où il est facile de tirer le coefficient de $t'^x t''^y \dots$, ou

$$y_{x,x',x'',\dots} = p^x \left(1 + \frac{x}{1} (q+r+\dots) + \frac{x(x+1)}{1,2} (q+r+\dots)^2 + \frac{x(x+1)(x+2)}{1,2,3} (q+r+\dots)^3 + \dots \right),$$

en ayant soin de rejeter les termes dans lesquels la puissance de q surpasse $x'-1$, ceux dans lesquels la puissance de r surpasse $x''-1$, ...

Dans le problème du n° 10, on considère deux joueurs A et B dont les adresses soient p et q , et dont le premier ait a jetons et le second b jetons; et l'on suppose qu'à chaque coup, celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne finisse que lorsqu'un des joueurs aura perdu tous ses jetons. On demande la probabilité que l'un des joueurs, A par exemple, gagnera la partie avant ou au $n^{\text{ième}}$ coup.

En représentant par $y_{x,x'}$ la probabilité de ce joueur pour gagner la partie lorsqu'il a x jetons et lorsqu'il n'a plus que x' coups à jouer

pour atteindre les n coups, on arrive, par les premiers principes des probabilités, à l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'} = p y_{x+1,x'-1} + q y_{x-1,x'+1},$$

qui donne, pour la fonction génératrice de $y_{x,x'}$,

$$\frac{\Lambda + \Lambda' + B't}{qt^2t' - t + pt'},$$

Λ étant une fonction arbitraire de t , Λ' et B' deux fonctions arbitraires de t' . Pour les déterminer plus commodément, nous transformerons cette fonction génératrice en celle-ci

$$\frac{\Lambda_1 t + \Lambda'_1 + B'_1 t t'}{qt^2 t' - t + pt'},$$

dans laquelle Λ_1 , Λ'_1 et B'_1 sont, comme plus haut, des fonctions arbitraires de t et de t' . Or $\frac{\Lambda'_1}{pt'}$ est le coefficient de t^0 dans le développement de la fonction par rapport aux puissances de t , ou la fonction génératrice de $y_{0,x'}$; mais, par les conditions du problème, $y_{0,x'}$ est nul quel que soit x' ; par conséquent sa fonction génératrice l'est aussi; Λ'_1 est donc égal à zéro.

Le coefficient de t^0 , dans le développement de la fonction génératrice par rapport à t' , est $-\Lambda_1$, ce qui est en même temps la fonction génératrice de $y_{x,0}$, quantité qui est nulle tant que x est moindre que la somme des jetons ou $a+b$, et qui devient l'unité quand $x = a+b$; Λ_1 est donc une fonction de t qui a pour facteur t^{a+b} , et dont on peut ne tenir aucun compte dans le numérateur de la fonction génératrice, car elle ne doit donner que des puissances de t supérieures à t^{a+b} , et nous n'avons en vue que d'avoir une fonction génératrice composée des puissances inférieures de t , puisque x ne peut s'étendre que depuis $x=0$ jusqu'à $x=a+b$.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$, ainsi limitée entre ces valeurs, se réduit donc à

$$\frac{B'_1 t t'}{qt^2 t' - t + pt'},$$

laquelle on peut mettre aisément sous cette forme

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{B_1}{p} t \frac{1}{\left(1 - \frac{\frac{1}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}}{2p} t\right) \left(1 - \frac{\frac{1}{t^2} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}}{2p} t\right)} \\ &= \frac{B_1}{p} \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}} \left(\frac{\frac{1}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}}{1 - \frac{\frac{1}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}}{2p} t} - \frac{\frac{1}{t^2} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}}{1 - \frac{\frac{1}{t^2} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}}{2p} t} \right); \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire, pour le coefficient de t^{a+b} , l'expression

$$\frac{B_1}{p} \frac{1}{(2p)^{a+b-1}} \frac{\left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^{a+b} - \left(\frac{1}{t^2} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^{a+b}}{2\sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}}.$$

Mais ce coefficient est la fonction génératrice de $y_{a+b, x}$, quantité qui est égale à l'unité; car il est certain que le joueur A a gagné la partie lorsqu'il a gagné tous les jetons de B: de plus, x doit être ici zéro ou un nombre pair, puisque le nombre de coups dans lesquels A peut gagner la partie est égal à b plus un nombre pair; et, en effet, il doit gagner tous les jetons de B, et encore regagner chaque jeton qu'il a perdu, ce qui exige deux coups. La série

$$y_{a+b, 0} t^0 + y_{a+b, 2} t^2 + y_{a+b, 4} t^4 + \dots,$$

qui représente le coefficient de t^{a+b} , est donc égale à $\frac{1}{1-t^2}$, et l'on en conclut

$$\frac{B_1}{p} = \frac{(2p)^{a+b-1}}{1-t^2} \frac{2\sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}}{\left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^{a+b} - \left(\frac{1}{t^2} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^{a+b}}.$$

Maintenant le coefficient de t^a , tiré du développement de la fonc-

tion (II), toujours par rapport aux puissances de t , sera

$$\frac{B_1}{p} \frac{1}{(2p)^{a-1}} \frac{\left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^a - \left(\frac{1}{t^2} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^a}{2\sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}},$$

et en substituant pour $\frac{B_1}{p}$ sa valeur, on aura ce coefficient ou la fonction génératrice de $y_{a, x}$ égale à

$$\frac{2^b p^b}{1-t^2} \frac{\left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^a - \left(\frac{1}{t^2} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^a}{\left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^{a+b} - \left(\frac{1}{t^2} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4pq}\right)^{a+b}}$$

ou

$$\frac{2^b p^b t^b}{1-t^2} \frac{(1 + \sqrt{1-4pq}t^2)^a - (1 - \sqrt{1-4pq}t^2)^a}{(1 + \sqrt{1-4pq}t^2)^{a+b} - (1 - \sqrt{1-4pq}t^2)^{a+b}},$$

ce qui est la formule (o) de la *Théorie analytique*.

(1825.)

