

CHAPITRE III.

DES LOIS DE LA PROBABILITÉ QUI RÉSULTENT DE LA MULTIPLICATION INDÉFINIE
DES ÉVÉNEMENTS.

16. A mesure que les événements se multiplient, leurs probabilités respectives se développent de plus en plus; leurs résultats moyens et les bénéfices ou les pertes qui en dépendent convergent vers des limites dont ils approchent avec des probabilités toujours croissantes. La détermination de ces accroissements et de ces limites est une des parties les plus intéressantes et les plus délicates de l'analyse des hasards.

Considérons d'abord la manière dont les possibilités de deux événements simples, dont un seul doit arriver à chaque coup, se développent lorsqu'on multiplie le nombre de coups. Il est visible que l'événement dont la facilité est la plus grande doit probablement arriver plus souvent dans un nombre donné de coups, et l'on est porté naturellement à penser qu'en répétant les coups un très grand nombre de fois, chacun de ces événements arrivera proportionnellement à sa facilité, que l'on pourra ainsi découvrir par l'expérience. Nous allons démontrer analytiquement cet important théorème.

On a vu dans le n° 6 que, si p et $1-p$ sont les probabilités respectives de deux événements a et b , la probabilité que dans $x+x'$ coups l'événement a arrivera x fois et l'événement b , x' fois, est égale à

$$\frac{1.2.3\dots(x+x')}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots x'} p^x (1-p)^{x'};$$

c'est le $(x'+1)^{\text{ième}}$ terme du binôme $[p+(1-p)]^{x+x'}$. Considérons le

plus grand de ces termes que nous désignerons par k . Le terme antérieur sera $\frac{kp}{1-p} \frac{x'}{x'+1}$, et le terme suivant sera $k \frac{1-p}{p} \frac{x}{x'+1}$. Pour que k soit le plus grand terme, il faut que l'on ait

$$\frac{x}{x'+1} < \frac{p}{1-p} < \frac{x+1}{x'};$$

il est facile d'en conclure que, si l'on fait $x+x'=n$, on aura

$$(n+1)p-1 < x < (n+1)p;$$

ainsi x est le plus grand nombre entier compris dans $(n+1)p$; en faisant donc

$$x = (n+1)p - s,$$

ce qui donne

$$p = \frac{x+s}{n+1}, \quad 1-p = \frac{x'+1-s}{n+1}, \quad \frac{p}{1-p} = \frac{x+s}{x'+1-s},$$

s sera moindre que l'unité. Si x et x' sont de très grands nombres, on aura, à très peu près,

$$\frac{p}{1-p} = \frac{x}{x'},$$

c'est-à-dire que les exposants de p et de $1-p$ dans le plus grand terme du binôme sont à fort peu près dans le rapport de ces quantités; en sorte que, de toutes les combinaisons qui peuvent avoir lieu dans un très grand nombre n de coups, la plus probable est celle dans laquelle chaque événement est répété proportionnellement à sa probabilité.

Le terme $k^{\text{ième}}$, après le plus grand, est

$$\frac{1.2.3\dots n}{1.2.3\dots(x-t).1.2.3\dots(x'+t)} p^{x-t} (1-p)^{x'+t}.$$

On a, par le n° 33 du Livre I^{er},

$$1.2.3\dots n = n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-l)} = (x-l)^{l-x-\frac{1}{2}} \frac{e^{x-l}}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{1}{12(x-l)} - \dots \right],$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x'+l)} = (x'+l)^{-x'-l-\frac{1}{2}} \frac{e^{x'+l}}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{1}{12(x'+l)} - \dots \right].$$

Développons le terme $(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}}$. Son logarithme hyperbolique est

$$(l-x-\frac{1}{2}) \left[\log x + \log \left(1 - \frac{l}{x} \right) \right];$$

or on a

$$\log \left(1 - \frac{l}{x} \right) = -\frac{l}{x} - \frac{l^2}{2x^2} - \frac{l^3}{3x^3} - \frac{l^4}{4x^4} - \dots;$$

nous négligerons les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, et nous supposons que l ne surpasse point l'ordre n ; alors on pourra négliger les termes de l'ordre $\frac{l^4}{x^4}$, parce que x et x' sont de l'ordre n . On aura ainsi

$$(l-x-\frac{1}{2}) \left[\log x + \log \left(1 - \frac{l}{x} \right) \right]$$

$$= (l-x-\frac{1}{2}) \log x + l + \frac{l}{2x} - \frac{l^2}{2x^2} - \frac{l^3}{6x^3},$$

ce qui donne, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}} = e^{\frac{l}{2x} - \frac{l^2}{2x^2} - \frac{l^3}{6x^3}} (x-l)^{l-x-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{l}{2x} - \frac{l^2}{6x^2} \right);$$

on aura pareillement

$$(x'+l)^{-x'-l-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{l}{2x'} - \frac{l^2}{2x'^2} - \frac{l^3}{6x'^3}} (x'+l)^{-x'-l-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{l}{2x'} + \frac{l^2}{6x'^2} \right).$$

On a ensuite, par ce qui précède, $p = \frac{x+s}{n+1}$, s étant moindre que l'unité; en faisant donc $p = \frac{x-z}{n}$, z sera compris dans les limites $\frac{x}{n+1}$ et $-\frac{n-x}{n+1}$, et par conséquent il sera, abstraction faite du signe,

au-dessous de l'unité. La valeur de p donne $1-p = \frac{x'+z}{n}$; on aura donc, par l'analyse précédente,

$$p^{x-l}(1-p)^{x'+l} = \frac{x^{x-l} x'^{x'+l}}{n^n} \left(1 + \frac{nz}{x'} \right);$$

de là on tire

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x'+l)} p^{x-l}(1-p)^{x'+l}$$

$$= \frac{\sqrt{n} e^{-\frac{n^2}{2xx'}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{2xx'}} \left[1 + \frac{nz}{x'} + \frac{l(x'-x)}{2xx'} - \frac{l^2}{6x^2} + \frac{l^2}{6x'^2} \right].$$

On aura le terme antérieur au plus grand terme et qui en est éloigné à la distance l , en faisant l négatif dans cette équation; en réunissant ensuite ces deux termes, leur somme sera

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi} \sqrt{2xx'}} e^{-\frac{n^2}{2xx'}}.$$

L'intégrale finie

$$\sum \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi} \sqrt{2xx'}} e^{-\frac{n^2}{2xx'}},$$

prise depuis $l=0$ inclusivement, exprimera donc la somme de tous les termes du binôme $[p + (1-p)]^n$, comprise entre les deux termes, dont l'un a p^{x+l} pour facteur, et l'autre a p^{x-l} pour facteur, et qui sont ainsi équidistants du plus grand terme; mais il faut retrancher de cette somme le plus grand terme qui y est évidemment compris deux fois.

Maintenant, pour avoir cette intégrale finie, nous observerons que l'on a, par le n° 10 du Livre I^{er}, y étant fonction de l ,

$$\sum y = \frac{1}{e^{\frac{dy}{dl}} - 1} = \left(\frac{dy}{dl} \right)^{-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dl} \right)^{-2} + \frac{1}{12} \frac{dy}{dl} + \dots,$$

d'où l'on tire, par le même numéro,

$$\sum y = f y dl - \frac{1}{3} y + \frac{1}{12} \frac{dy}{dl} + \dots + \text{const.};$$

y étant ici égal à $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2xx'}}e^{-\frac{n^2}{2xx'}}$, les différentielles successives de y acquièrent pour facteur $\frac{nl}{2xx'}$ et ses puissances. Ainsi, l étant supposé ne pouvoir être au plus que de l'ordre $\sqrt{n}$, ce facteur est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et par conséquent ses différentielles, divisées par les puissances respectives de dl , décroissent de plus en plus; en négligeant donc, comme on l'a fait précédemment, les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$, on aura, en faisant commencer avec l les deux intégrales finies et infiniment petites, et désignant par Y le plus grand terme du binôme,

$$\Sigma y = fy dl - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}Y.$$

La somme de tous les termes du binôme $[p + (1-p)]^n$ compris entre les deux termes équidistants du plus grand terme du nombre l étant égale à $\Sigma y - \frac{1}{2}Y$, elle sera

$$fy dl - \frac{1}{2}y,$$

et si l'on y ajoute la somme de ces termes extrêmes, on aura, pour la somme de tous ces termes,

$$fy dl + \frac{1}{2}y.$$

Si l'on fait

$$t = \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{2xx'}},$$

cette somme devient

$$(o) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dt e^{-t^2} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2xx'}} e^{-t^2}.$$

Les termes que l'on a négligés étant de l'ordre $\frac{1}{n}$, cette expression est d'autant plus exacte que n est plus grand; elle est rigoureuse lorsque n est infini. Il serait facile, par l'analyse précédente, d'avoir égard aux termes de l'ordre $\frac{1}{n}$ et des ordres supérieurs.

On a, par ce qui précède, $x = np + z$, z étant un nombre plus petit que l'unité; on a donc

$$\frac{x+l}{n} - p = \frac{l+z}{n} = \frac{t\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}} + \frac{z}{n};$$

ainsi la formule (o) exprime la probabilité que la différence entre le rapport du nombre de fois que l'événement a doit arriver au nombre total des coups, et la facilité p de cet événement, est comprise dans les limites

$$(l) \quad \pm \frac{t\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}} + \frac{z}{n}.$$

$\sqrt{2xx'}$ étant égal à

$$n\sqrt{2p(1-p) + \frac{2z}{n}(1-2p) - \frac{2z^2}{n^2}},$$

on voit que l'intervalle compris entre les limites précédentes est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Si la limite de t , que nous désignerons par T , est supposée invariable, la probabilité déterminée par la fonction (o) reste la même à très peu près; mais l'intervalle compris entre les limites (l) diminue sans cesse à mesure que les coups se répètent, et il devient nul, lorsque leur nombre est infini.

Cet intervalle étant supposé invariable, lorsque les événements se multiplient, T croît sans cesse, et à fort peu près comme la racine carrée du nombre des coups. Mais, lorsque T est considérable, la formule (o) devient, par le n° 27 du Livre I^{er},

$$1 - \frac{e^{-T^2}}{2T\sqrt{\pi}} \frac{1}{1 + \frac{q}{2q}} + \frac{e^{-T^2}}{\sqrt{2n\pi} \left[p(1-p) + \frac{z}{n}(1-2p) - \frac{z^2}{n^2} \right]},$$

q étant égal à $\frac{1}{2T^2}$. Lorsqu'on fait croître T , e^{-T^2} diminue avec une ex-

trême rapidité, et la probabilité précédente s'approche rapidement de l'unité, à laquelle elle devient égale, lorsque le nombre des coups est infini.

Il y a ici deux sortes d'approximations : l'une d'elles est relative aux limites prises de part et d'autre de la facilité de l'événement a ; l'autre approximation se rapporte à la probabilité que le rapport des arrivées de cet événement au nombre total des coups sera renfermé dans ces limites. La répétition indéfinie des coups accroît de plus en plus cette probabilité, les limites restant les mêmes ; elle resserre de plus en plus l'intervalle de ces limites, la probabilité restant la même. Dans l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se change en certitude.

L'analyse précédente réunit à l'avantage de démontrer ce théorème celui d'assigner la probabilité que, dans un grand nombre n de coups, le rapport des arrivées de chaque événement sera compris dans des limites données. Supposons, par exemple, que les facilités des naissances des garçons et des filles soient dans le rapport de 18 à 17, et qu'il naisse dans une année 14 000 enfants ; on demande la probabilité que le nombre des garçons ne surpassera pas 7363, et ne sera pas moindre que 7037.

Dans ce cas, on a

$$p = \frac{18}{35}, \quad x = 7200, \quad x' = 6800, \quad n = 14000, \quad l = 163;$$

la formule (o) donne à fort peu près 0,994303 pour la probabilité cherchée.

Si l'on connaît le nombre de fois que sur n coups l'événement a est arrivé, la formule (o) donnera la probabilité que sa facilité p , supposée inconnue, sera comprise dans des limites données. En effet, si l'on nomme i ce nombre de fois, on aura, par ce qui précède, la probabilité que la différence $\frac{i}{n} - p$ sera comprise dans les limites $\pm \frac{T\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}} + \frac{z}{n}$; par conséquent, on aura la probabilité que p sera compris dans les

limites

$$\frac{i}{n} - \frac{T\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}} - \frac{z}{n}.$$

La fonction $\frac{T\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}}$ étant de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, on peut, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, y substituer i au lieu de x et $n-i$ au lieu de x' ; les limites précédentes deviennent ainsi, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$,

$$\frac{i}{n} - \frac{T\sqrt{2i(n-i)}}{n\sqrt{n}},$$

et la probabilité que la facilité de l'événement a est contenue dans ces limites est égale à

$$(o') \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dt e^{-t^2} + \frac{\sqrt{n} e^{-T^2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{2i(n-i)}}.$$

On voit ainsi que, à mesure que les événements se multiplient, l'intervalle des limites se resserre de plus en plus, et la probabilité que la valeur de p tombe dans ces limites approche de plus en plus de l'unité ou de la certitude. C'est ainsi que les événements, en se développant, font connaître leurs probabilités respectives.

On parvient directement à ces résultats, en considérant p comme une variable qui peut s'étendre depuis zéro jusqu'à l'unité, et en déterminant, d'après les événements observés, la probabilité de ses diverses valeurs, comme on le verra lorsque nous traiterons de la probabilité des causes déduites des événements observés.

Si l'on a trois ou un plus grand nombre d'événements $a, b, c, \dots$, dont un seul doit arriver à chaque coup, on aura, par ce qui précède, la probabilité que, dans un très grand nombre n de coups, le rapport du nombre x de fois qu'un de ces événements, a par exemple, arrivera, au nombre n , sera compris dans les limites $p \pm z$, z étant une très petite fraction, et l'on voit que, dans le cas extrême du nombre n infini, l'intervalle $2z$ de ces limites peut être supposé nul, et la probabilité

peut être supposée égale à la certitude, en sorte que les nombres des arrivées de chaque événement seront proportionnels à leurs facilités respectives.

Quelquefois les événements, au lieu de faire connaître directement les limites de la valeur de p , donnent celles d'une fonction de cette valeur; alors on en conclut les limites de p , par la résolution des équations. Pour en donner un exemple fort simple, considérons deux joueurs A et B, dont les adresses respectives soient p et $1-p$, et jouant ensemble à cette condition, que la partie soit gagnée par celui des deux joueurs qui, sur trois coups, aura vaincu deux fois son adversaire, le troisième coup n'étant pas joué, comme inutile, lorsque l'un des joueurs a vaincu dans les deux premiers coups.

La probabilité de A pour gagner la partie est la somme des deux premiers termes du binôme $[p + (1-p)]^3$; elle est par conséquent égale à $p^3 + 3p^2(1-p)$. Soit P cette fonction: en élevant le binôme $P + (1-P)$ à la puissance n , on aura, par l'analyse précédente, la probabilité que, sur le nombre n de parties, le nombre des parties gagnées par A sera compris dans des limites données. Il suffit pour cela de changer p en P dans la formule (o).

Si l'on nomme i le nombre des parties gagnées par A, la formule (o) donnera la probabilité que P sera compris dans les limites

$$\frac{i}{n} \mp \frac{T\sqrt{2i(n-i)}}{n\sqrt{n}}.$$

Soit donc p' la racine réelle et positive de l'équation

$$p^3 + 3p^2(1-p) = \frac{i}{n};$$

en désignant par $p' \mp \delta p$ les limites de p , les limites correspondantes de P seront à très peu près $3p'^2 - 2p'^3 \mp 6p'(1-p')\delta p$; en égalant ces limites aux précédentes, on aura

$$\delta p = \frac{T\sqrt{2i(n-i)}}{6p'(1-p')n\sqrt{n}};$$

ainsi la formule (o') donnera la probabilité que p sera compris dans les limites

$$p' \mp \frac{T\sqrt{2i(n-i)}}{6p'(1-p')n\sqrt{n}}.$$

Le nombre n des parties ne détermine pas le nombre des coups, puisqu'il peut y avoir des parties de deux coups, et d'autres de trois coups. On aura la probabilité que le nombre des parties de deux coups sera compris dans des limites données, en observant que la probabilité d'une partie à deux coups est $p^2 + (1-p)^2$; désignons cette fonction par P' . En élevant le binôme $P' + (1-P')$ à la puissance n , la formule (o) donnera la probabilité que le nombre des parties de deux coups sera compris dans les limites $nP' \pm l$; or le nombre des parties de deux coups étant $nP' \pm l$, le nombre des parties à trois coups sera $n(1-P') \mp l$; le nombre total des coups sera donc $3n - nP' \mp l$; la formule (o) donnera donc la probabilité que le nombre des coups sera compris dans les limites

$$2n(1+p-p^2) \mp T\sqrt{2nP'(1-P')}.$$

17. Considérons une urne A renfermant un très grand nombre n de boules blanches et noires, et supposons qu'à chaque tirage on tire une boule de l'urne, et qu'on la remplace par une boule noire. On demande la probabilité qu'après r tirages le nombre des boules blanches sera x .

Nommons $y_{x,r}$ cette probabilité. Après un nouveau tirage, elle devient $y_{x,r+1}$. Mais, pour qu'il y ait x boules blanches après $r+1$ tirages, il faut qu'il y ait ou $x+1$ boules blanches après le tirage r , et que le tirage suivant fasse sortir une boule blanche, ou x boules blanches après le tirage r et que le tirage suivant fasse sortir une boule noire. La probabilité qu'il y aura $x+1$ boules blanches après r tirages est $y_{x+1,r}$, et la probabilité qu'alors le tirage suivant fera sortir une boule blanche est $\frac{x+1}{n}$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{x+1}{n} y_{x+1,r}$; c'est la première partie de $y_{x,r+1}$. La probabilité qu'il y

aura x boules blanches après le tirage r est $y_{x,r}$, et la probabilité qu'alors il sortira une boule noire est $\frac{n-x}{n}$, parce que le nombre des boules noires de l'urne est $n-x$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{n-x}{n} y_{x,r}$; c'est la seconde partie de $y_{x,r+1}$. Ainsi l'on a

$$y_{x,r+1} = \frac{x+1}{n} y_{x+1,r} + \frac{n-x}{n} y_{x,r}.$$

Si l'on fait

$$x = nx', \quad r = nr', \quad y_{x,r} = y'_{x',r'},$$

cette équation devient

$$y'_{x',r'+1} = \left(x' + \frac{1}{n}\right) y'_{x'+\frac{1}{n},r'} + (1-x') y'_{x',r'};$$

n étant supposé un très grand nombre, on peut réduire en séries convergentes $y'_{x',r'+\frac{1}{n}}$ et $y'_{x'+\frac{1}{n},r'}$; on aura donc, en négligeant les carrés et les puissances supérieures de $\frac{1}{n}$,

$$\frac{1}{n} \frac{\partial y'_{x',r'}}{\partial r'} = \frac{x'}{n} \frac{\partial y'_{x',r'}}{\partial x'} + \frac{1}{n} y'_{x',r'};$$

l'intégrale de cette équation aux différences partielles est

$$y'_{x',r'} = c^{r'} \varphi(x' c^{r'}),$$

$\varphi(x' c^{r'})$ étant une fonction arbitraire de $x' c^{r'}$, qu'il faut déterminer par la valeur de $y'_{x',0}$.

Supposons que l'urne A ait été remplie de cette manière. On projette un prisme droit dont la base, étant un polygone régulier de $p+q$ côtés, est assez étroite pour que le prisme ne retombe jamais sur elle. Sur les $p+q$ faces latérales, p sont blanches et q sont noires, et l'on met dans l'urne A, à chaque projection, une boule de la couleur de la face sur laquelle le prisme retombe. Après n projections, le nombre des boules blanches sera à fort peu près, par le numéro précédent, $\frac{np}{p+q}$,

et la probabilité qu'il sera $\frac{np}{p+q} + l$ est, par le même numéro,

$$\frac{p+q}{\sqrt{2npq\pi}} c^{-\frac{(p+q)^2 l^2}{2npq}}.$$

Si l'on fait

$$x = \frac{np}{p+q} + l, \quad \frac{(p+q)^2}{2pq} = i^2,$$

cette fonction devient

$$\frac{i}{\sqrt{\pi n}} c^{-\frac{i^2}{n} \left(x - \frac{np}{p+q}\right)^2};$$

c'est la valeur de $y_{x,0}$, ou de $y'_{x',0}$; mais la valeur précédente de $y'_{x',r'}$ donne

$$y_{x,0} = \varphi\left(\frac{x}{n}\right);$$

on a donc

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{i}{\sqrt{n\pi}} c^{-in\left(\frac{x}{n} - \frac{p}{p+q}\right)^2};$$

partant,

$$y'_{x',r'} = \frac{ic^{r'}}{\sqrt{n\pi}} c^{-in\left(\frac{x c^{r'}}{n} - \frac{p}{p+q}\right)^2};$$

d'où l'on tire

$$y_{x,r} = \frac{ic^{\frac{r}{n}}}{\sqrt{n\pi}} c^{-\frac{n}{n} \left(x c^{\frac{r}{n}} - \frac{np}{p+q}\right)^2}.$$

La valeur de x la plus probable est celle qui rend nul $x c^{\frac{r}{n}} - \frac{np}{p+q}$, et par conséquent elle est égale à

$$\frac{np}{(p+q)c^{\frac{r}{n}}}.$$

la probabilité que la valeur de x sera contenue dans les limites

$$\frac{np}{(p+q)c^{\frac{r}{n}}} \pm \frac{\mu \sqrt{n}}{c^{\frac{r}{n}}}$$

est

$$2 \int \frac{i d\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2} d\mu,$$

l'intégrale étant prise depuis $\mu = 0$.

Cherchons maintenant la valeur moyenne du nombre des boules blanches contenues dans l'urne A, après r tirages. Cette valeur est la somme de tous les nombres possibles de boules blanches, multipliés par leurs probabilités respectives; elle est donc égale à

$$\frac{2np}{(p+q)c^n} \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} e^{-r\mu},$$

l'intégrale étant prise depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \infty$. Cette valeur est ainsi

$$\frac{np}{(p+q)c^n};$$

par conséquent, elle est la même que la valeur de x la plus probable.

Considérons maintenant deux urnes A et B renfermant chacune le nombre n de boules, et supposons que, dans le nombre total $2n$ des boules, il y en ait autant de blanches que de noires. Concevons que l'on tire en même temps une boule de chaque urne, et qu'ensuite on mette dans une urne la boule extraite de l'autre. Supposons que l'on répète cette opération un nombre quelconque r de fois, en agitant à chaque fois les urnes, pour en bien mêler les boules; et cherchons la probabilité qu'après ce nombre r d'opérations, il y aura x boules blanches dans l'urne A.

Soit $z_{x,r}$ cette probabilité. Le nombre des combinaisons possibles dans r opérations est n^{2r} ; car à chaque opération les n boules de l'urne A peuvent se combiner avec chacune des n boules de l'urne B, ce qui produit n^2 combinaisons; $n^{2r} z_{x,r}$ est donc le nombre des combinaisons dans lesquelles il peut y avoir x boules blanches dans l'urne A après ces opérations. Maintenant, il peut arriver que l'opération $(r+1)^{\text{ième}}$ fasse sortir une boule blanche de l'urne A, et y fasse rentrer une boule blanche; le nombre de cas dans lesquels cela peut arriver est le produit de $n^{2r} z_{x,r}$ par le nombre x des boules blanches de l'urne A, et par le nombre $n-x$ des boules blanches qui doivent être alors dans l'urne B, puisque le nombre total des boules blanches des deux urnes est n . Dans tous ces cas, il reste x boules blanches dans

l'urne A; le produit $x(n-x)n^{2r} z_{x,r}$ est donc une des parties de $n^{2r+2} z_{x,r+1}$.

Il peut arriver encore que l'opération $(r+1)^{\text{ième}}$ fasse sortir et rentrer dans l'urne A une boule noire, ce qui conserve dans cette urne x boules blanches. Ainsi $n-x$ étant, après l'opération $r^{\text{ième}}$, le nombre des boules noires de l'urne A, et x étant celui des boules noires de l'urne B, $(n-x)x n^{2r} z_{x,r}$ est encore une partie de $n^{2r+2} z_{x,r+1}$.

S'il y a $x-1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{\text{ième}}$ et que l'opération suivante en fasse sortir une boule noire et y fasse rentrer une boule blanche, il y aura x boules blanches dans l'urne A après l'opération $(r+1)^{\text{ième}}$. Le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est le produit de $n^{2r} z_{x-1,r}$ par le nombre $n-x+1$ des boules noires de l'urne A après le tirage $r^{\text{ième}}$, et par le nombre $n-x+1$ des boules blanches de l'urne B, après la même opération; $(n-x+1)^2 n^{2r} z_{x-1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2} z_{x,r+1}$.

Enfin, s'il y a $x+1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{\text{ième}}$, et que l'opération suivante en fasse sortir une boule blanche et y fasse rentrer une boule noire, il y aura encore, après cette dernière opération, x boules blanches dans l'urne. Le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est le produit de $n^{2r} z_{x+1,r}$ par le nombre $x+1$ des boules blanches de l'urne A, et par le nombre $x+1$ des boules noires de l'urne B après l'opération $r^{\text{ième}}$; $(x+1)^2 n^{2r} z_{x+1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2} z_{x,r+1}$.

En réunissant toutes ces parties et en égalant leur somme à $n^{2r+2} z_{x,r+1}$, on aura l'équation aux différences finies partielles

$$z_{x,r+1} = \left(\frac{x+1}{n}\right)^2 z_{x+1,r} + \frac{2x}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right) z_{x,r} + \left(1 - \frac{x-1}{n}\right)^2 z_{x-1,r}.$$

Quoique cette équation soit aux différences du second ordre par rapport à la variable x , cependant son intégrale ne renferme qu'une fonction arbitraire qui dépend de la probabilité des diverses valeurs de x dans l'état initial de l'urne A. En effet, il est visible que, si l'on connaît les valeurs de $z_{x,0}$ correspondantes à toutes les valeurs de x depuis

$x = 0$ jusqu'à $x = n$, l'équation précédente donnera toutes les valeurs de z_{x+1} , z_{x+2} , ..., en observant que, les valeurs négatives de x étant impossibles, $z_{x,r}$ est nul lorsque x est négatif.

Si n est un très grand nombre, cette équation se transforme dans une équation aux différences partielles, que l'on obtient ainsi. On a alors, à très peu près,

$$\begin{aligned} z_{x+1,r} &= z_{x,r} + \frac{\partial z_{x,r}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_{x,r}}{\partial x^2}, \\ z_{x-1,r} &= z_{x,r} - \frac{\partial z_{x,r}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_{x,r}}{\partial x^2}, \\ z_{x,r+1} &= z_{x,r} + \frac{\partial z_{x,r}}{\partial r}. \end{aligned}$$

Soient

$$x = \frac{n + \mu \sqrt{n}}{2}, \quad r = nr', \quad z_{x,r} = U;$$

l'équation précédente aux différences finies partielles deviendra, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n^2}$,

$$\frac{\partial U}{\partial r'} = 2U + 2\mu \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2}.$$

Pour intégrer cette équation, qui, comme on peut s'en assurer par la méthode que j'ai donnée pour cet objet, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de l'année 1773, n'est intégrable en termes finis qu'au moyen d'intégrales définies, faisons

$$U = \int \varphi dt e^{-\mu t},$$

φ étant fonction de t et de r' . On aura

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial U}{\partial \mu} &= 2e^{-\mu t} t \varphi - 2 \int e^{-\mu t} (\varphi dt + t d\varphi), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} &= \int e^{-\mu t} t^2 \varphi dt; \end{aligned}$$

l'équation aux différentielles partielles en U devient ainsi

$$\int e^{-\mu t} \frac{\partial \varphi}{\partial r'} dt = 2 \int e^{-\mu t} t \varphi + \int e^{-\mu t} dt \left(t^2 \varphi - 2t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

En égalant entre eux les termes affectés du signe f , on aura l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r'} = t^2 \varphi - 2t \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Le terme hors du signe f , égalé à zéro, donnera, pour l'équation aux limites de l'intégrale,

$$0 = t \varphi e^{-\mu t}.$$

L'intégrale de l'équation précédente aux différentielles partielles de φ est

$$\varphi = e^{\frac{1}{2} t^2} \psi \left(\frac{t}{e^{2r'}} \right),$$

$\psi \left(\frac{t}{e^{2r'}} \right)$ étant une fonction arbitraire de $\frac{t}{e^{2r'}}$; on a donc

$$U = \int dt e^{-\mu t + \frac{1}{2} t^2} \psi \left(\frac{t}{e^{2r'}} \right).$$

Soit

$$t = 2\mu + 2s\sqrt{-1}$$

l'expression de U prendra cette forme

$$(A) \quad U = e^{-\mu^2} \int ds e^{-s^2} \Gamma \left(\frac{s - \mu \sqrt{-1}}{e^{2r'}} \right).$$

Il est facile de voir que l'équation précédente, aux limites de l'intégrale, exige que les limites de l'intégrale relative à s soient prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$. En prenant le radical $\sqrt{-1}$ avec le signe $-$, on aurait pour U une expression de cette forme

$$U = e^{-\mu^2} \int ds e^{-s^2} \Pi \left(\frac{s + \mu \sqrt{-1}}{e^{2r'}} \right),$$

la fonction arbitraire $\Pi(s)$ pouvant être différente de $\Gamma(s)$. La somme de ces deux expressions de U sera sa valeur complète. Mais il est facile de s'assurer que, les intégrales étant prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$, l'addition de cette nouvelle expression de U n'ajoute rien à la généralité de la première, dans laquelle elle est comprise.

Développons maintenant le second membre de l'équation (A), suivant les puissances de $\frac{1}{c^{2r'}}$, et considérons un des termes de ce développement, tel que

$$\frac{\Pi^{(i)} c^{-p^i}}{c^{4ir'}} \int ds c^{-s} (s - \mu \sqrt{-1})^{2i};$$

ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5 \dots (2i-1)}{2^i} \sqrt{\pi} \frac{\Pi^{(i)} c^{-p^i}}{c^{4ir'}} \times \left[1 - \frac{i(2\mu)^2}{1.2} + \frac{i(i-1)(2\mu)^4}{1.2.3.4} - \frac{i(i-1)(i-2)(2\mu)^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \right].$$

Considérons encore un terme de ce développement, relatif aux puissances impaires de $\frac{1}{c^{2r'}}$, tel que

$$\frac{L^{(i)} \sqrt{-1} c^{-p^i}}{c^{(i+2)r'}} \int ds c^{-s} (s - \mu \sqrt{-1})^{2i+1}.$$

Ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5 \dots (2i+1) L^{(i)} \sqrt{\pi} \mu c^{-p^i}}{2^i c^{(i+2)r'}} \left[1 - \frac{i(2\mu)^2}{1.2.3} + \frac{i(i-1)(2\mu)^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right].$$

On aura donc ainsi l'expression générale de la probabilité U, développée dans une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{c^{2r'}}$, série qui devient très convergente lorsque r' est un nombre considérable. Cette expression doit être telle que $\int U dx$ ou $\frac{1}{2} \int U d\mu \sqrt{n}$ soit égale à l'unité, les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de x et de μ , c'est-à-dire depuis x nul jusqu'à $x = n$, et depuis $\mu = -\sqrt{n}$ jusqu'à $\mu = \sqrt{n}$; car il est certain que, l'une des valeurs de x devant avoir lieu, la somme des probabilités de toutes ces valeurs doit être égale à l'unité. En prenant l'intégrale $\int c^{-p^i} d\mu$ dans les limites de μ , on a le même résultat, à très peu près, qu'en la prenant depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$; la différence n'est que de l'ordre $\frac{c^{-n}}{\sqrt{n}}$, et vu l'extrême rapidité avec laquelle c^{-n} diminue à mesure que n augmente, on voit que cette

différence est insensible lorsque n est un grand nombre. Cela posé, considérons dans l'intégrale $\frac{1}{2} \int U d\mu \sqrt{n}$ le terme

$$\frac{1.3.5 \dots (2i-1) \frac{1}{2} \Pi^{(i)} \sqrt{n\pi}}{2^i c^{4ir'}} \int d\mu c^{-p^i} \left[1 - \frac{i(2\mu)^2}{1.2} + \frac{i(i-1)(2\mu)^4}{1.2.3.4} - \dots \right].$$

En étendant l'intégrale depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$, ce terme devient

$$\frac{1.3.5 \dots (2i-1) \frac{1}{2} \Pi^{(i)} \pi \sqrt{n}}{2^i c^{4ir'}} \left[1 - i + \frac{i(i-1)}{1.2} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} + \dots \right].$$

Le facteur $1 - i + \frac{i(i-1)}{1.2} - \dots$ est égal à $(1-1)^i$; il est donc nul, excepté dans le cas de $i=0$, où il se réduit à l'unité. Il est visible que les termes de l'expression de U qui renferment des puissances impaires de μ donnent un résultat nul dans l'intégrale $\frac{1}{2} \int U d\mu \sqrt{n}$, étendue depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$; car ces termes ont pour facteur c^{-p^i} , et l'on a généralement dans ces limites

$$\int \mu^{2i+1} d\mu c^{-p^i} = 0.$$

Il n'y a donc que le premier terme de l'expression de U, terme que nous représenterons par $H c^{-p^0}$, qui puisse donner un résultat dans l'intégrale $\frac{1}{2} \int U d\mu \sqrt{n}$, et ce résultat est $\frac{1}{2} H \sqrt{n\pi}$; on a donc

$$\frac{1}{2} H \sqrt{n\pi} = 1;$$

par conséquent,

$$H = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}.$$

L'expression générale de U a ainsi la forme suivante

$$(k) \quad U = \frac{2 c^{-p^0}}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{Q^{(1)}(1-2\mu^2)}{c^{4r'}} + \frac{Q^{(2)}(1-4\mu^2+\frac{1}{2}\mu^4)}{c^{8r'}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{L^{(1)}\mu}{c^{2r'}} + \frac{L^{(1)}\mu(1-\frac{2}{3}\mu^2)}{c^{6r'}} + \frac{L^{(2)}\mu(1-\frac{4}{3}\mu^2+\frac{1}{6}\mu^4)}{c^{10r'}} + \dots \right)$$

$Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, L^{(1)}, L^{(2)}, \dots$ étant des constantes indéterminées, qui dépendent de la valeur initiale de U.

Supposons que U devienne X lorsque r est nul, X étant une fonction donnée de μ . On a généralement ces deux théorèmes,

$$\begin{aligned} 0 &= Q^{(i)} \int \mu^{2q} d\mu U_i e^{-\mu^2}, \\ 0 &= L^{(i)} \int \mu^{2q+1} d\mu U_i e^{-\mu^2}, \end{aligned}$$

lorsque q est moindre que i ; U_i et U'_i étant des fonctions de μ , par lesquelles $\frac{2Q^{(i)} e^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi} e^{1/2r}}$ et $\frac{2L^{(i)} e^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi} e^{1/2(1+2i)r}}$ sont multipliés dans l'expression de U . Pour démontrer ces théorèmes, nous observerons que, par ce qui précède, $\frac{2Q^{(i)} e^{-\mu^2} U_i}{\sqrt{n\pi}}$ est égal à

$$(\sqrt{-1})^{2i} H^{(i)} e^{-\mu^2} \int ds e^{-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i};$$

il faut donc faire voir que l'on a

$$0 = \int \int \mu^{2q} ds d\mu e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i},$$

les intégrales étant prises depuis μ et s égaux à $-\infty$ jusqu'à μ et s égaux à $+\infty$. En intégrant d'abord par rapport à μ , ce terme devient

$$\begin{aligned} \frac{2q-1}{2} \int \int \mu^{2q-2} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} \\ + i \int \int \mu^{2q-1} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1}. \end{aligned}$$

En continuant d'intégrer ainsi par parties relativement à μ , on parvient enfin à des termes de la forme

$$h \int \int d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2p},$$

e n'étant pas zéro, et, par ce qui précède, ces termes sont nuls.

On prouvera de la même manière que l'on a

$$0 = L^{(i)} \int \mu^{2q+1} d\mu U'_i e^{-\mu^2}.$$

De là il suit que l'on a généralement

$$0 = \int U_i U_r d\mu e^{-\mu^2}, \quad 0 = \int U'_i U'_r d\mu e^{-\mu^2},$$

i et i' étant des nombres différents. Car si, par exemple, i' est plus grand

que i , toutes les puissances de μ dans U_i sont moindres que $2i'$; chacun des termes de U_i donnera donc, par ce qui précède, un résultat nul dans l'intégrale $\int U_i U_r d\mu e^{-\mu^2}$. Le même raisonnement a lieu pour l'intégrale $\int U'_i U'_r d\mu e^{-\mu^2}$.

Mais ces intégrales ne sont pas nulles, lorsque $i = i'$. On les obtiendra dans ce cas de cette manière. On a, par ce qui précède,

$$U_i = \frac{2^i (\sqrt{-1})^{2i} \int ds e^{-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i}}{1.3.5 \dots (2i-1) \sqrt{\pi}}.$$

Le terme qui a pour facteur μ^{2i} dans cette expression est

$$\frac{2^i (\sqrt{-1})^{2i} \mu^{2i}}{1.3.5 \dots (2i-1)}.$$

or on peut ne considérer que ce terme dans le premier facteur U_i de l'intégrale $\int U_i U_i d\mu e^{-\mu^2}$; car les puissances inférieures de μ , dans ce facteur, donnent un résultat nul dans l'intégrale. On a donc

$$\int U_i U_i d\mu e^{-\mu^2} = \frac{2^{2i}}{[1.3.5 \dots (2i-1)]^2 \sqrt{\pi}} \int \int \mu^{2i} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i}.$$

On a, en intégrant par rapport à μ , depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$,

$$\begin{aligned} \int \int \mu^{2i} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} \\ = \frac{2i-1}{2} \int \int \mu^{2i-2} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} \\ + \frac{2i}{2} \int \int \mu^{2i-1} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1}. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de cette équation est nul par ce qui précède; ce membre se réduit donc à son second terme. On trouve de la même manière que l'on a

$$\begin{aligned} \int \int \mu^{2i-1} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1} \\ = \frac{2i-1}{2} \int \int \mu^{2i-2} d\mu ds e^{-\mu^2-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-2}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite; on a donc

$$\int \mu^{2i} d\mu c^{-\mu^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2i\pi}{2^{2i}};$$

par conséquent,

$$\int U_i U_i d\mu c^{-\mu^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i\sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)}.$$

On trouvera de la même manière

$$\int U_i U_i' d\mu c^{-\mu^2} = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i\sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i+1)}.$$

On a évidemment

$$\int U_i U_i' d\mu c^{-\mu^2} = 0,$$

dans le cas même où i et i' sont égaux, parce que le produit $U_i U_i'$ ne contient que des puissances impaires de μ .

Cela posé, l'expression générale de U donne, pour sa valeur initiale, que nous avons désignée par X ,

$$X = \frac{2c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}} [1 + Q^{(1)}(1 - 2\mu^2) + \dots + L^{(0)}\mu + L^{(1)}\mu(1 - \frac{1}{2}\mu^2) + \dots].$$

Si l'on multiplie cette équation par $U_i d\mu$, et si l'on prend les intégrales depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$, on aura, en vertu des théorèmes précédents,

$$\int X U_i d\mu = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} Q^{(i)} \int U_i U_i d\mu c^{-\mu^2},$$

d'où l'on tire

$$Q^{(i)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1) \frac{1}{2} \sqrt{n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i} \int X U_i d\mu;$$

on trouvera, de la même manière,

$$L^{(i)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i+1) \sqrt{n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i} \int X U_i' d\mu.$$

On aura donc ainsi les valeurs successives de $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, L^{(0)}, L^{(1)}, \dots$, au moyen d'intégrales définies, lorsque X ou la valeur initiale de U sera donnée.

Dans le cas où X est égal à $\frac{2i}{\sqrt{n\pi}} c^{-\mu^2}$, l'expression générale de U

prend une forme très simple. Alors la fonction arbitraire $\Gamma\left(\frac{s - \mu\sqrt{-1}}{c^{2\mu^2}}\right)$ de la formule (A) est de la forme $k c^{-\frac{\mu^2}{c^{2\mu^2}}}$. Pour déterminer les constantes $\mathcal{C}$ et k , nous observerons qu'en supposant

$$\mathcal{C}' = \frac{\mathcal{C}}{c^{2\mu^2}},$$

on aura

$$U = k c^{-\frac{\mu^2}{1+\mathcal{C}'}} \int ds c^{-(1+\mathcal{C}')\left(s - \frac{\mathcal{C}'\mu\sqrt{-1}}{1+\mathcal{C}'}\right)}.$$

En faisant ensuite

$$\sqrt{1+\mathcal{C}'} \left(s - \frac{\mathcal{C}'\mu\sqrt{-1}}{1+\mathcal{C}'}\right) = s',$$

et observant que l'intégrale relative à s devant être prise depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$, l'intégrale relative à s' doit être prise dans les mêmes limites, on aura

$$U = \frac{k\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\mathcal{C}'}} c^{-\frac{\mu^2}{1+\mathcal{C}'}}.$$

En comparant cette expression à la valeur initiale de U , qui est

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}} c^{-\mu^2},$$

et observant que $\mathcal{C}$ est la valeur initiale de $\mathcal{C}'$, on aura

$$i^2 = \frac{1}{1+\mathcal{C}'},$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{C} = \frac{1-i^2}{i^2}, \quad \mathcal{C}' = \frac{1-i^2}{i^2 c^{2\mu^2}}.$$

On doit avoir ensuite

$$\frac{k\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\mathcal{C}}} = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}},$$

ce qui donne

$$k\sqrt{\pi} = \frac{2}{\sqrt{n\pi}},$$

valeur que l'on obtient encore par la condition que $\frac{1}{2} \int U d\mu \sqrt{n} = 1$, l'in-

tégrale étant prise depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$; on aura donc, pour l'expression de U, quel que soit μ ,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}(1+\delta^2)} e^{-\frac{\mu^2}{1+\delta^2}}.$$

On trouve, en effet, que cette valeur de U, substituée dans l'équation aux différentielles partielles en U, y satisfait.

δ^2 diminuant sans cesse quand μ' augmente, la valeur de U varie sans cesse et devient à sa limite, lorsque μ' est infini,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} e^{-\mu^2}.$$

Pour donner une application de ces formules, imaginons, dans une urne C, un très grand nombre m de boules blanches et un pareil nombre de boules noires. Ces boules ayant été mêlées, supposons que l'on tire de l'urne n boules, que l'on met dans l'urne A. Supposons ensuite que l'on mette dans l'urne B autant de boules blanches qu'il y a de boules noires dans l'urne A, et autant de boules noires qu'il y a de boules blanches dans la même urne. Il est clair que le nombre des cas dans lesquels il y aura x boules blanches, et par conséquent $n-x$ boules noires dans l'urne A, est égal au produit du nombre des combinaisons des m boules blanches de l'urne C, prises x à x , par le nombre des combinaisons des m boules noires de la même urne, prises $n-x$ à $n-x$. Ce produit est, par le n° 3, égal à

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-x+1)}{1.2.3\dots x} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+x+1)}{1.2.3\dots(n-x)}$$

ou à

$$\frac{(1.2.3\dots m)^2}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots(n-x).1.2.3\dots(m-x).1.2.3\dots(m-n+x)}.$$

Le nombre de tous les cas possibles est le nombre des combinaisons des $2m$ boules de l'urne C, prises n à n ; ce nombre est

$$\frac{1.2.3\dots 2m}{1.2.3\dots n.1.2.3\dots(2m-n)};$$

en divisant la fraction précédente par celle-ci, on aura, pour la probabilité de x ou pour la valeur initiale de U,

$$\frac{(1.2.3\dots m)^2.1.2.3\dots n.1.2.3\dots(2m-n)}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots(m-x).1.2.3\dots(n-x).1.2.3\dots(m-n+x).1.2.3\dots 2m}.$$

Maintenant, si l'on observe que l'on a à très peu près, lorsque s est un grand nombre,

$$1.2.3\dots s = s^{\frac{s}{2} + \frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{2}} \sqrt{2\pi},$$

on trouvera facilement, après toutes les réductions, en faisant

$$x = \frac{n + \mu\sqrt{n}}{2},$$

et en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$ qui ne sont pas multipliées par μ^2 ,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \sqrt{\frac{m}{2m-n}} e^{-\frac{\mu^2}{2m-n}}.$$

en faisant donc

$$i^2 = \frac{m}{2m-n},$$

on aura

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}} e^{-i^2\mu^2}.$$

Si le nombre m est infini, alors $i^2 = \frac{1}{2}$, et la valeur initiale de U est

$$U = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2}.$$

Sa valeur, après un nombre quelconque de tirages, est

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi(1+c^{\frac{1}{n}})}} e^{-\frac{\mu^2}{1+c^{\frac{1}{n}}}}.$$

Le cas de m infini revient à celui dans lequel les urnes A et B seraient remplies, en projetant n fois une pièce qui amènerait indifféremment

croix ou *pile*, et mettant dans l'urne A une boule blanche chaque fois que *croix* arriverait, et une boule noire chaque fois que *pile* arriverait, et faisant l'inverse pour l'urne B. Car il est visible que la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne C est alors $\frac{1}{2}$, comme celle d'amener *croix* ou *pile*.

En prenant l'intégrale $\int U dx$ ou $\frac{1}{2} \int U d\mu \sqrt{n}$ depuis $\mu = -a$ jusqu'à $\mu = a$, on aura la probabilité que le nombre des boules blanches de l'urne A sera compris dans les limites $\pm a\sqrt{n}$.

On peut généraliser le résultat précédent, en supposant l'urne A remplie, comme au commencement de ce numéro, par la projection d'un prisme de $p+q$ faces latérales, dont p sont blanches et q sont noires. On a vu qu'alors, si l'on fait

$$i^2 = \frac{(p+q)^2}{2pq},$$

on a, à l'origine ou lorsque r est nul,

$$U = \frac{i}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{i^2}{2} \left(x - \frac{np}{p+q}\right)^2}.$$

Supposons p et q très peu différents, en sorte que l'on ait

$$p = \frac{p+q}{2} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{n}}\right),$$

$$q = \frac{p+q}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{n}}\right),$$

on aura

$$i^2 = \frac{2}{1 - \frac{a^2}{n}}$$

ou, à très peu près, $i^2 = 2$; donc

$$U = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} e^{-\frac{2}{n} \left(x - \frac{n}{2} - \frac{a\sqrt{n}}{2}\right)^2}.$$

En faisant donc

$$x = \frac{n + \mu\sqrt{n}}{2},$$

on aura

$$U = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\mu - \alpha)^2}.$$

Supposons maintenant qu'après un nombre quelconque de tirages on ait

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\epsilon\pi}} e^{-\frac{(\mu - \alpha)^2}{\epsilon}},$$

ϵ et α étant des fonctions de r . Si l'on substitue cette valeur dans l'équation aux différences partielles en U , on aura

$$\begin{aligned} -\frac{d\epsilon}{dr} \left[1 - \frac{2(\mu - \alpha)^2}{\epsilon}\right] + 4 \frac{d\alpha}{dr} (\mu - \alpha) \\ = 4(6 - 1) \left[1 - \frac{2(\mu - \alpha)^2}{\epsilon}\right] - 8\alpha(\mu - \alpha), \end{aligned}$$

d'où l'on tire les deux équations suivantes :

$$\frac{d\epsilon}{dr} = -4, \quad \frac{d\alpha}{dr} = -2\alpha.$$

En les intégrant et observant qu'à l'origine de r , $\alpha = a$ et $\epsilon = 2$, on aura

$$\epsilon = 1 + e^{-4r}, \quad \alpha = a e^{-2r},$$

ce qui donne

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi(1 + e^{-4r})}} e^{-\frac{(\mu - a e^{-2r})^2}{1 + e^{-4r}}}.$$

Cherchons maintenant la valeur moyenne du nombre des boules blanches contenues dans l'urne A, après r tirages. Cette valeur est la somme des produits des divers nombres des boules blanches, multipliées par leurs probabilités respectives; elle est donc égale à l'intégrale

$$\int \frac{n + \mu\sqrt{n}}{2} U \frac{d\mu\sqrt{n}}{2},$$

prise depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$. En substituant pour U sa valeur

donnée par la formule (k), on aura, en vertu des théorèmes précédents, pour cette intégrale,

$$\frac{1}{2}n + \frac{\sqrt{n}}{4} L^{(0)} e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{n}}.$$

A l'origine où r est nul, cette valeur est $\frac{1}{2}n + \frac{\sqrt{n}}{4} L^{(0)}$; ainsi l'on aura $L^{(0)}$ au moyen du nombre des boules blanches que l'urne A contient à cette origine.

On peut obtenir fort simplement, de la manière suivante, la valeur moyenne du nombre des boules blanches, après r tirages. Imaginons que chaque boule blanche ait une valeur que nous représenterons par l'unité, les boules noires étant supposées n'avoir aucune valeur. Il est clair que le prix de l'urne A sera la somme des produits de tous les nombres possibles de boules blanches qui peuvent exister dans l'urne, multipliés par leurs probabilités respectives; ce prix est donc ce que nous avons nommé *valeur moyenne du nombre des boules blanches*. Nommons-le z , après le tirage $r^{\text{ième}}$. Au tirage suivant, s'il sort une boule blanche, ce prix diminue d'une unité; or, si l'on suppose que x est le nombre des boules blanches contenues dans l'urne après le tirage $r^{\text{ième}}$, la probabilité d'en extraire une boule blanche sera $\frac{x}{n}$; en nommant donc U la probabilité de cette supposition, l'intégrale $\int \frac{Ux dx}{n}$, étendue depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$, sera la diminution de z , résultante de la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne. Si l'on fait, comme ci-dessus, $\frac{r}{n} = r'$, et si l'on désigne la fraction très petite $\frac{1}{n}$ par dr' , cette diminution sera égale à $z dr'$; car z est égal à $\int Ux dx$, somme des produits des nombres des boules blanches par leurs probabilités respectives. Le prix de l'urne A s'accroît, si l'on extrait une boule blanche de l'urne B, pour la mettre dans l'urne A; or, x étant supposé le nombre des boules blanches de l'urne A, $n-x$ sera celui des boules blanches de l'urne B, et la probabilité d'extraire une boule blanche de cette dernière urne sera $\frac{n-x}{n}$; en multipliant cette proba-

bilité par la probabilité U de x , l'intégrale $\int U \frac{n-x}{n} dx$, prise depuis x nul jusqu'à $x=n$, sera l'accroissement de z . $\int U(n-x) dx$ est le prix de l'urne B; en nommant donc z' ce prix, $z' dr'$ sera l'accroissement de z ; on aura donc

$$dz = z' dr' - z dr'.$$

La somme des prix des deux urnes est évidemment égale à n , nombre des boules blanches qu'elles contiennent, ce qui donne $z' = n - z$; substituant cette valeur de z' dans l'équation précédente, elle devient

$$dz = (n - 2z) dr';$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$z = \frac{1}{2}n + \frac{L^{(0)}}{4e^{2r'}},$$

$L^{(0)}$ étant une constante arbitraire, ce qui est conforme à ce qui précède.

On peut étendre toute cette analyse au cas d'un nombre quelconque d'urnes; nous nous bornerons ici à chercher la valeur moyenne du nombre des boules blanches que chaque urne contient après r tirages.

Considérons un nombre e d'urnes, disposées circulairement, et renfermant chacune le nombre n de boules, les unes blanches, et les autres noires, n étant supposé un très grand nombre. Supposons qu'après r tirages, $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{e-1}$ soient les prix respectifs des diverses urnes. Chaque tirage consiste à extraire en même temps une boule de chaque urne et à la mettre dans la suivante, en partant de l'une d'elles dans un sens déterminé. Si l'on fait $\frac{r}{n} = r'$ et $\frac{1}{n} = dr'$, on aura, par le raisonnement que nous venons de faire relativement à deux urnes,

$$dz_i = (z_{i-1} - z_i) dr';$$

cette équation a lieu depuis $i=1$ jusqu'à $i=e-1$. Dans le cas de $i=e$, on a

$$dz_0 = (z_{e-1} - z_0) dr'.$$

En intégrant ces équations, et supposant qu'à l'origine les prix respectifs de chaque urne, ou les nombres des boules blanches qu'elles contiennent, soient

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{e-1},$$

on parvient à ce résultat, qui a lieu depuis $i = 0$ jusqu'à $i = e - 1$,

$$z_i = \frac{1}{e} S e^{(1 - \cos \frac{2\pi}{e})r} \left(\begin{aligned} &\lambda_0 \cos \left[\frac{2\pi i}{e} - ar' \right] \\ &+ \lambda_1 \cos \left[\frac{2\pi(i-1)}{e} - ar' \right] \\ &+ \lambda_2 \cos \left[\frac{2\pi(i-2)}{e} - ar' \right] \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \lambda_{e-1} \cos \left[\frac{2\pi(i-e+1)}{e} - ar' \right] \end{aligned} \right),$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de s , depuis $s = 1$ jusqu'à $s = e$, et a étant égal à $\sin \frac{2\pi}{e}$. Le terme de cette expression, correspondant à $s = e$, est indépendant de r' , et égal à $\frac{1}{e}(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{e-1})$, c'est-à-dire à la somme entière des boules blanches des urnes divisée par leur nombre. Ce terme est la limite de l'expression de z_i , d'où il suit qu'après un nombre infini de tirages les prix de chaque urne sont égaux entre eux.

CHAPITRE IV.

DE LA PROBABILITÉ DES ERREURS DES RÉSULTATS MOYENS D'UN GRAND NOMBRE D'OBSERVATIONS ET DES RÉSULTATS MOYENS LES PLUS AVANTAGEUX.

18. Considérons maintenant les résultats moyens d'un grand nombre d'observations dont on connaît la loi de facilité des erreurs. Supposons d'abord que, pour chaque observation, les erreurs puissent être également

$$-n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1, n.$$

La probabilité de chaque erreur sera $\frac{1}{2n+1}$. Si l'on nomme s le nombre des observations, le coefficient de $e^{i\sigma\sqrt{-1}}$ dans le développement du polynôme

$$(e^{-n\sigma\sqrt{-1}} + e^{-(n-1)\sigma\sqrt{-1}} + e^{-(n-2)\sigma\sqrt{-1}} + \dots + e^{-\sigma\sqrt{-1}} + 1 + e^{\sigma\sqrt{-1}} + \dots + e^{n\sigma\sqrt{-1}})^s$$

sera le nombre des combinaisons dans lesquelles la somme des erreurs est l . Ce coefficient est le terme indépendant de $e^{\sigma\sqrt{-1}}$ et de ses puissances dans le développement du même polynôme multiplié par $e^{-l\sigma\sqrt{-1}}$, et il est visiblement égal au terme indépendant de σ dans le même développement multiplié par $\frac{e^{l\sigma\sqrt{-1}} + e^{-l\sigma\sqrt{-1}}}{2}$ ou par $\cos l\sigma$; on aura donc, pour l'expression de ce coefficient,

$$\frac{1}{\pi} \int d\sigma \cos l\sigma (1 + 2 \cos \sigma + 2 \cos 2\sigma + \dots + 2 \cos n\sigma)^s,$$

l'intégrale étant prise depuis $\sigma = 0$ jusqu'à $\sigma = \pi$.

On a vu, dans le n° 36 du Livre I^{er}, que cette intégrale est

$$\frac{(2n+1)^s \sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)} 2s\pi} e^{-\frac{1}{2} \frac{n}{n(n+1)} s^2};$$

le nombre total des combinaisons des erreurs est $(2n+1)^s$; en divisant la quantité précédente par celle-ci, on aura

$$\frac{\sqrt{3}^s}{\sqrt{n(n+1)} 2s\pi} e^{-\frac{1}{2} \frac{n}{n(n+1)} s^2},$$

pour la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera l .

Si l'on fait

$$l = 2t \sqrt{\frac{n(n+1)s}{6}},$$

la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $+2T \sqrt{\frac{n(n+1)s}{6}}$ et $-2T \sqrt{\frac{n(n+1)s}{6}}$ sera égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T dt e^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=T$. Cette expression a lieu encore dans le cas de n infini. Alors, en nommant $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation, on aura $n=a$, et les limites précédentes deviendront $\pm \frac{2Ta\sqrt{s}}{\sqrt{6}}$; ainsi la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $\pm ar\sqrt{s}$ est

$$2 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_0^r dr e^{-\frac{1}{2} r^2};$$

c'est aussi la probabilité que l'erreur moyenne sera comprise dans les limites $\pm \frac{ar}{\sqrt{s}}$, car on a l'erreur moyenne en divisant par s la somme des erreurs.

La probabilité que la somme des inclinaisons des orbites de s co-

mètes sera comprise dans des limites données, en supposant toutes les inclinaisons également possibles, depuis zéro jusqu'à l'angle droit, est évidemment la même que la probabilité précédente; l'intervalle $2a$ des limites des erreurs de chaque observation est, dans ce cas, l'intervalle $\frac{\pi}{2}$ des limites des inclinaisons possibles: alors la probabilité que la somme des inclinaisons doit être comprise dans les limites $\pm \frac{\pi r \sqrt{s}}{4}$ est $2 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_0^r dr e^{-\frac{1}{2} r^2}$, ce qui s'accorde avec ce que l'on a trouvé dans le n° 13.

Supposons généralement que la probabilité de chaque erreur positive ou négative soit exprimée par $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$, x et n étant des nombres infinis. Alors, dans la fonction

$$1 + 2 \cos \varpi + 2 \cos 2\varpi + 2 \cos 3\varpi + \dots + 2 \cos n\varpi,$$

chaque terme, tel que $2 \cos x\varpi$, doit être multiplié par $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$; or on a

$$2 \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \cos x\varpi = 2 \varphi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x^2}{n^2} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) n^2 \varpi^2 + \dots$$

En faisant donc

$$x' = \frac{x}{n}, \quad dx' = \frac{1}{n},$$

la fonction

$$\varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2 \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \cos \varpi + 2 \varphi\left(\frac{2}{n}\right) \cos 2\varpi + \dots + 2 \varphi\left(\frac{n}{n}\right) \cos n\varpi$$

devient

$$2n \int dx' \varphi(x') - n^2 \varpi^2 \int x'^2 dx' \varphi(x') + \dots,$$

les intégrales devant être étendues depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=1$. Soit alors

$$h = 2 \int dx' \varphi(x'), \quad h'' = \int x'^2 dx' \varphi(x'), \quad \dots$$

La série précédente devient

$$nh \left(1 - \frac{h''}{h} n^2 \varpi^2 + \dots\right).$$

Maintenant la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm t$ est, comme il est facile de s'en assurer par les raisonnements précédents,

$$\frac{2}{\pi} \int f d\varpi \, dl \cos l\varpi \left\{ \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \cos \varpi + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right) \cos 2\varpi + \dots \right. \\ \left. + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right) \cos n\varpi \right\},$$

l'intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \pi$; cette probabilité est donc

$$(u) \quad 2 \frac{(nk)^t}{\pi} \int f d\varpi \, dl \cos l\varpi \left(1 - \frac{k^2}{n^2} \varpi^2 - \dots\right)^t.$$

Supposons

$$\left(1 - \frac{k^2}{n^2} \varpi^2 - \dots\right)^t = c^{-t};$$

en prenant les logarithmes hyperboliques, on aura, à très peu près, lorsque s est un grand nombre,

$$s \frac{k^2}{n^2} \varpi^2 = t^2,$$

ce qui donne

$$\varpi = \frac{t}{n} \sqrt{\frac{k}{k^2 s}}.$$

Si l'on observe ensuite que, nk ou $2 \int dx \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ exprimant la probabilité que l'erreur d'une observation est comprise dans les limites $\pm n$, cette quantité doit être égale à l'unité, la fonction (u) deviendra

$$\frac{2}{n\pi} \sqrt{\frac{k}{k^2 s}} \int f dt \, dc^{-t} \cos\left(\frac{lt}{n} \sqrt{\frac{k}{k^2 s}}\right),$$

l'intégrale relative à t devant être prise depuis t nul jusqu'à $t = \pi n \sqrt{\frac{k^2 s}{k}}$, ou jusqu'à $t = \infty$, n étant supposé infini. Or on a, par le n° 25 du Livre I^{er},

$$\int dt \cos\left(\frac{lt}{n} \sqrt{\frac{k}{k^2 s}}\right) c^{-t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} c^{-\frac{n}{2\sqrt{k^2 s}}},$$

en faisant donc

$$\frac{t}{n} = 2t' \sqrt{\frac{k^2 s}{k}},$$

la fonction (u) devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dt' e^{-t'^2}.$$

Ainsi, en nommant, comme ci-dessus, $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation, la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm ar\sqrt{s}$ est

$$\sqrt{\frac{k}{k^2 \pi}} \int dr e^{-\frac{r^2}{4k}}.$$

Si $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ est constant, alors $\frac{k}{k^2} = 6$, et cette probabilité devient

$$2 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int dr e^{-\frac{3}{2}r^2},$$

ce qui est conforme à ce que l'on a trouvé ci-dessus.

Si $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ ou $\varphi(x')$ est une fonction rationnelle et entière de x' , on aura, par la méthode du n° 15, la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $\pm ar\sqrt{s}$, exprimée par une suite de puissances $s, 2s, \dots$ de quantités de la forme $s - \mu \pm r\sqrt{s}$, dans lesquelles μ augmente en progression arithmétique, ces quantités étant continuées jusqu'à ce qu'elles deviennent négatives. En comparant cette suite à l'expression précédente de la même probabilité, on obtiendra d'une manière fort approchée la valeur de la suite, et l'on parviendra ainsi sur ce genre de suites à des théorèmes analogues à ceux que nous avons donnés dans le n° 42 du Livre I^{er}, sur les différences finies des puissances d'une variable.

Si la loi de facilité des erreurs est exprimée par une exponentielle négative qui puisse s'étendre jusqu'à l'infini, et généralement si les erreurs peuvent s'étendre à l'infini, alors a devient infini, et l'appli-

tion de la méthode précédente peut offrir quelques difficultés. Dans tous ces cas, on fera

$$\frac{x}{h} = x', \quad \frac{1}{h} = dx',$$

h étant une quantité quelconque finie, et en suivant exactement l'analyse précédente, on trouvera, pour la probabilité que la somme des erreurs des s observations est comprise dans les limites $\pm hr\sqrt{s}$,

$$\sqrt{\frac{k}{h^s \pi}} \int dx' e^{-\frac{h^2 x'^2}{1x^2}},$$

expression dans laquelle on doit observer que $\varphi\left(\frac{x}{h}\right)$ ou $\varphi(x')$ exprime la probabilité de l'erreur $\pm x$, et que l'on a

$$h = 2 \int dx' \varphi(x'), \quad h^2 = \int x'^2 dx' \varphi(x'),$$

les intégrales étant prises depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$.

19. Déterminons présentement la probabilité que la somme des erreurs d'un très grand nombre d'observations sera comprise dans des limites données, abstraction faite du signe de ces erreurs, c'est-à-dire, en les prenant toutes positivement. Pour cela, considérons la suite

$$\varphi\left(\frac{n}{n}\right) e^{-n\pi\sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) e^{-(n-1)\pi\sqrt{-1}} + \dots + \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + \dots \\ + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) e^{(n-1)\pi\sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{n}{n}\right) e^{n\pi\sqrt{-1}},$$

$\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ étant l'ordonnée de la courbe de probabilité des erreurs, correspondante à l'erreur $\pm x$, et x étant, ainsi que n , considéré comme formé d'un nombre infini d'unités. Si l'on élève cette suite à la puissance s , après avoir changé le signe des exponentielles négatives, le coefficient d'une exponentielle quelconque, telle que $e^{(l+\mu s)\pi\sqrt{-1}}$, sera la probabilité que la somme des erreurs, prises abstraction faite du

signe, est $l + \mu s$; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{2\pi} \int d\sigma e^{-(l+\mu s)\pi\sqrt{-1}} \left\{ \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) e^{\pi\sqrt{-1}} + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right) e^{2\pi\sqrt{-1}} + \dots \right. \\ \left. + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right) e^{n\pi\sqrt{-1}} \right\},$$

l'intégrale relative à σ étant prise depuis $\sigma = -\pi$ jusqu'à $\sigma = \pi$; car, dans cet intervalle, l'intégrale $\int d\sigma e^{-r\pi\sqrt{-1}}$ ou

$$\int d\sigma (\cos r\sigma - \sqrt{-1} \sin r\sigma)$$

disparaît, quel que soit r , pourvu qu'il ne soit pas nul.

On a, en développant par rapport aux puissances de σ ,

$$\left\{ \log \left\{ e^{-\mu s \pi \sqrt{-1}} \left[\varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) e^{\pi\sqrt{-1}} + \dots + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right) e^{n\pi\sqrt{-1}} \right] \right\} \right. \\ \left. = s \log \left\{ \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right) \right\} \right. \\ \left. + s \pi \sqrt{-1} \left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + n \varphi\left(\frac{n}{n}\right) \right] \right. \\ \left. - \pi^2 \left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 2^2 \varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + n^2 \varphi\left(\frac{n}{n}\right) \right] \right\} - \mu s \pi \sqrt{-1}.$$

En faisant donc

$$\frac{x}{n} = x', \quad \frac{1}{n} = dx',$$

on a

$$2 \int dx' \varphi(x') = k, \quad \int x' dx' \varphi(x') = k', \quad \int x'^2 dx' \varphi(x') = k'', \\ \int x'^3 dx' \varphi(x') = k''', \quad \int x'^4 dx' \varphi(x') = k^{IV}, \quad \dots$$

les intégrales étant prises depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 1$; le second membre de l'équation (1) devient

$$s \log k + s \log \left(1 + \frac{2k'}{k} n \pi \sqrt{-1} - \frac{k''}{k} n^2 \pi^2 - \dots \right) - \mu s \pi \sqrt{-1}.$$

L'erreur de chaque observation devant tomber nécessairement dans les

limites $\pm n$, on a $nk = 1$; la quantité précédente devient ainsi

$$s \left(\frac{2k'}{k} - \frac{\mu}{n} \right) n \sigma \sqrt{-1} - \frac{(hk'' - 2k'^2) s n^2 \sigma^2}{k^2} - \dots;$$

en faisant donc

$$\frac{\mu}{n} = \frac{2k'}{k}$$

et négligeant les puissances de σ supérieures au carré, cette quantité se réduit à son second terme, et la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega c^{-\frac{1}{2} \sigma \sqrt{-1} - \frac{hk'' - 2k'^2}{k^2} \sigma n^2 \sigma^2}.$$

Soient

$$\xi = \frac{k}{\sqrt{hk'' - 2k'^2}}, \quad \omega = \frac{\xi t}{n\sqrt{s}}, \quad \frac{t}{n} = r\sqrt{s}.$$

L'intégrale précédente devient

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{c^{-\frac{\xi^2 r^2}{4}}}{n\sqrt{s}} f \xi dt c^{-\left(t + \frac{t^2 \sqrt{-1}}{2n\sqrt{s}}\right)}.$$

Cette intégrale doit être prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, et alors la quantité précédente devient

$$\frac{\xi}{2\sqrt{\pi} n\sqrt{s}} c^{-\frac{\xi^2 r^2}{4}}.$$

En la multipliant par dt ou par $n dr \sqrt{s}$, l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \xi dr c^{-\frac{\xi^2 r^2}{4}}$$

sera la demi-probabilité que la valeur de L , et, par conséquent, la somme des erreurs des observations, est comprise dans les limites $\frac{2k'}{k} as \pm ar\sqrt{s}$, $\pm a$ étant les limites des erreurs de chaque observation, limites que nous désignons par $\pm n$, quand nous les concevons partagées dans une infinité de parties.

On voit ainsi que la somme des erreurs la plus probable, abstraction faite du signe, est celle qui répond à $r = 0$. Cette somme est $\frac{2k'}{k} as$.

Dans le cas où $\varphi(x)$ est constant, $\frac{2k'}{k} = \frac{1}{2}$; la somme des erreurs la plus probable est donc alors la moitié de la plus grande somme possible, somme qui est égale à sa . Mais, si $\varphi(x)$ n'est pas constant et diminue à mesure que l'erreur x augmente, alors $\frac{2k'}{k}$ est moindre que $\frac{1}{2}$, et la somme des erreurs, abstraction faite du signe, est au-dessous de la moitié de la plus grande somme possible.

On peut, par la même analyse, déterminer la probabilité que la somme des carrés des erreurs sera $t + \mu s$; il est facile de voir que cette probabilité a pour expression l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega c^{-(t+\mu s)\omega\sqrt{-1}} \left\{ \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{t}{n}\right) c^{2\omega\sqrt{-1}} + 2\varphi\left(\frac{2t}{n}\right) c^{4\omega\sqrt{-1}} + \dots \right. \\ \left. + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right) c^{n^2\omega\sqrt{-1}} \right\},$$

prise depuis $\omega = -\pi$ jusqu'à $\omega = \pi$. En suivant exactement l'analyse précédente, on aura

$$\mu = \frac{2n^2 k''}{k},$$

et en faisant

$$\xi' = \frac{k}{\sqrt{hk'' - 2k'^2}},$$

la probabilité que la somme des carrés des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\frac{2k''}{k} a^2 s \pm a^2 r \sqrt{s}$ sera

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \xi' dr c^{-\frac{\xi'^2 r^2}{4}}.$$

La somme la plus probable est celle qui répond à r nul; elle est donc $\frac{2k''}{k} a^2 s$. Si s est un très grand nombre, le résultat des observations s'écartera très peu de cette valeur, et par conséquent il fera connaître à très peu près le facteur $\frac{a^2 k''}{k}$.

20. Lorsque l'on veut corriger un élément déjà connu à fort peu près, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, on forme des équations de condition de la manière suivante. Soient z la correction de l'élément, et ξ l'observation; l'expression analytique de celle-ci sera une fonction de l'élément. En y substituant, au lieu de l'élément, sa valeur approchée, plus la correction z ; en réduisant en série par rapport à z et négligeant le carré de z , cette fonction prendra la forme $h + pz$; en l'égalant à la quantité observée ξ , on aura

$$\xi = h + pz.$$

z serait donc déterminé, si l'observation était rigoureuse; mais, comme elle est susceptible d'erreur, en nommant ε cette erreur, on a exactement, aux quantités près de l'ordre z^2 ,

$$\xi + \varepsilon = h + pz;$$

et en faisant $\xi - h = \alpha$,

$$\varepsilon = pz - \alpha.$$

Chaque observation fournit une équation semblable, que l'on peut représenter pour l'observation $(i+1)^{\text{ème}}$ par celle-ci

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)}z - \alpha^{(i)}.$$

En réunissant toutes ces équations, on a

$$(1) \quad S\varepsilon^{(i)} = zSp^{(i)} - S\alpha^{(i)},$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$, s étant le nombre total des observations. En supposant nulle la somme des erreurs, cette équation donne

$$z = \frac{S\alpha^{(i)}}{Sp^{(i)}};$$

c'est ce que l'on nomme ordinairement *résultat moyen des observations*.

On a vu, dans le n° 18, que la probabilité que la somme des er-

reurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm ar\sqrt{s}$ est

$$\sqrt{\frac{k}{k^2\pi}} \int dr e^{-\frac{kr^2}{2s}}.$$

Nommons $\pm u$ l'erreur du résultat z ; en substituant, dans l'équation (1), $\pm ar\sqrt{s}$ au lieu de $S\varepsilon^{(i)}$, et $\frac{S\alpha^{(i)}}{Sp^{(i)}} \pm u$ au lieu de z , elle donne

$$r = \frac{uSp^{(i)}}{a\sqrt{s}};$$

la probabilité que l'erreur du résultat z sera comprise dans les limites $\pm u$ est donc

$$\sqrt{\frac{k}{k^2\pi}} Sp^{(i)} \int \frac{du}{a} e^{-\frac{ka^2(Sp^{(i)})^2}{2k^2\pi s^2}}.$$

Au lieu de supposer nulle la somme des erreurs, on peut supposer nulle une fonction quelconque linéaire de ces erreurs, que nous représenterons ainsi,

$$(m) \quad m\varepsilon + m^{(1)}\varepsilon^{(1)} + m^{(2)}\varepsilon^{(2)} + \dots + m^{(s-1)}\varepsilon^{(s-1)},$$

$m, m^{(1)}, m^{(2)}, \dots$ étant des nombres entiers positifs ou négatifs. En substituant dans cette fonction (m) , au lieu de $\varepsilon, \varepsilon^{(1)}, \dots$, leurs valeurs données par les équations de condition, elle devient

$$zSm^{(i)}p^{(i)} - Sm^{(i)}\alpha^{(i)};$$

en égalant donc à zéro la fonction (m) , on a

$$z = \frac{Sm^{(i)}\alpha^{(i)}}{Sm^{(i)}p^{(i)}}.$$

Soit u l'erreur de ce résultat, en sorte que l'on ait

$$z = \frac{Sm^{(i)}\alpha^{(i)}}{Sm^{(i)}p^{(i)}} + u;$$

la fonction (m) devient

$$uSm^{(i)}p^{(i)}.$$

Déterminons la probabilité de l'erreur u , lorsque les observations sont en grand nombre.

Pour cela, considérons le produit

$$f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) e^{m_1 x \sqrt{-1}} \times f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) e^{m^{(2)} x \sqrt{-1}} \times \dots \times f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) e^{m^{(l)} x \sqrt{-1}},$$

le signe f s'étendant à toutes les valeurs de x , depuis la valeur négative extrême de x jusqu'à sa valeur positive extrême. $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ est, comme dans les numéros précédents, la probabilité d'une erreur x dans chaque observation; x étant supposé, ainsi que a , formé d'une infinité de parties prises pour unité. Il est clair que le coefficient d'une exponentielle quelconque $e^{l x \sqrt{-1}}$, dans le développement de ce produit, sera la probabilité que la somme des erreurs des observations, multipliées respectivement par $m, m^{(2)}, \dots$, c'est-à-dire la fonction (m) , sera égale à l ; en multipliant donc le produit précédent par $e^{-l x \sqrt{-1}}$, le terme indépendant de $e^{x \sqrt{-1}}$ et de ses puissances, dans ce nouveau produit, exprimera cette probabilité. Si l'on suppose, comme nous le ferons ici, la probabilité des erreurs positives la même que celle des erreurs négatives, on pourra, dans la somme $f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) e^{m x \sqrt{-1}}$, réunir les termes multipliés, l'un par $e^{m x \sqrt{-1}}$, et l'autre par $e^{-m x \sqrt{-1}}$; alors cette somme prend la forme $2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m x$. Il en est de même de toutes les sommes semblables. De là il suit que la probabilité que la fonction (m) sera égale à l est égale à

$$(i) \quad \frac{1}{2\pi} \int d\omega \left(e^{-l \omega \sqrt{-1}} \times 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m x \omega \times 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m^{(2)} x \omega \times \dots \times 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m^{(l-1)} x \omega \right),$$

l'intégrale étant prise depuis $\omega = -\pi$ jusqu'à $\omega = \pi$. On a, en réduisant les cosinus en séries,

$$f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m x \omega = f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} m^2 a^2 \omega^2 \int \frac{x^2}{a^2} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) + \dots$$

Si l'on fait $\frac{x}{a} = x'$ et si l'on observe que, la variation de x étant

l'unité, on a $dx' = \frac{1}{a}$, on aura

$$f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) = a \int dx' \varphi(x').$$

Nommons, comme dans les numéros précédents, k l'intégrale $2f dx' \varphi(x')$, prise depuis x' nul jusqu'à sa valeur positive extrême; nommons pareillement k'' l'intégrale $f x'^2 dx'$, prise dans les mêmes limites, et ainsi de suite; nous aurons

$$2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m x \omega = a k \left(1 - \frac{k''}{k} m^2 a^2 \omega^2 + \frac{k^{(4)}}{12 k^3} m^4 a^4 \omega^4 - \dots \right).$$

Le logarithme du second membre de cette équation est

$$- \frac{k''}{k} m^2 a^2 \omega^2 + \frac{k k^{(4)} - 6 k''^2}{12 k^2} m^4 a^4 \omega^4 - \dots + \log a k;$$

ak ou $2af dx' \varphi(x')$ exprime la probabilité que l'erreur de chaque observation sera comprise dans ses limites, ce qui est certain; on a donc $ak = 1$; ce qui réduit le logarithme précédent à

$$- \frac{k''}{k} m^2 a^2 \omega^2 + \frac{k k^{(4)} - 6 k''^2}{12 k^2} m^4 a^4 \omega^4 - \dots$$

De là il est aisé de conclure que le produit

$$2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m x \omega \times 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m^{(2)} x \omega \times \dots \times 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m^{(l-1)} x \omega$$

est

$$\left(1 - \frac{k k^{(4)} - 6 k''^2}{12 k^2} a^4 \omega^4 S m^{(4)} + \dots \right) e^{-\frac{k''}{k} a^2 \omega^2 S m^{(2)}};$$

l'intégrale précédente (i) se réduit donc à

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega \left(1 - \frac{k k^{(4)} - 6 k''^2}{12 k^2} a^4 \omega^4 S m^{(4)} + \dots \right) e^{-l \omega \sqrt{-1} - \frac{k''}{k} a^2 \omega^2 S m^{(2)}}.$$

En faisant $sa^2 \omega^2 = t^2$, cette intégrale devient

$$\frac{1}{2a\pi\sqrt{s}} \int dt \left(1 - \frac{k k^{(4)} - 6 k''^2}{12 k^2} \frac{S m^{(4)}}{s^2} t^4 + \dots \right) e^{-\frac{H\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}} - \frac{k''}{k} \frac{S m^{(2)}}{s} t^2};$$

$Sm^{(1)2}, Sm^{(1)4}, \dots$ sont évidemment des quantités de l'ordre s ; ainsi $\frac{Sm^{(1)4}}{s^2}$ est de l'ordre $\frac{1}{s^2}$; en négligeant donc les termes de ce dernier ordre vis-à-vis de l'unité, la dernière intégrale se réduit à

$$\frac{1}{2a\pi\sqrt{s}} \int dt c^{-\frac{t\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}} - \frac{k^2}{2} \frac{Sm^{(1)2}}{s}}.$$

L'intégrale relative à σ devant être prise depuis $\sigma = -\pi$ jusqu'à $\sigma = \pi$, l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -a\pi\sqrt{s}$ jusqu'à $t = a\pi\sqrt{s}$, et dans ces cas l'exponentielle sous le signe $\int$ est insensible à ces deux limites, soit parce que s est un grand nombre, soit parce que a est ici supposé divisé dans une infinité de parties prises pour unité; on peut donc prendre l'intégrale depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Faisons

$$t' = \sqrt{\frac{k^2}{h^2} \frac{Sm^{(1)2}}{s}} \left(t + \frac{t\sqrt{-1}k\sqrt{s}}{2ak^2 Sm^{(1)2}} \right);$$

la fonction intégrale précédente devient

$$\frac{e^{-\frac{k^2}{4k^2 a^2 Sm^{(1)2}}}}{2a\pi\sqrt{\frac{k^2}{h^2} \frac{Sm^{(1)2}}{s}}} \int dt' e^{-t'^2}.$$

L'intégrale relative à t' doit être prise, comme l'intégrale relative à t , depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = \infty$, ce qui réduit la quantité précédente à celle-ci,

$$\frac{e^{-\frac{k^2}{4k^2 a^2 Sm^{(1)2}}}}{2a\pi\sqrt{\frac{k^2}{h^2} \frac{Sm^{(1)2}}{s}}}.$$

Si l'on fait $t = ar\sqrt{s}$ et si l'on observe que, la variation de t étant l'unité, on a $a dr = 1$, on aura

$$\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{\frac{k^2}{h^2} \frac{Sm^{(1)2}}{s}}} \int dr c^{-\frac{k^2 r^2}{4k^2 Sm^{(1)2}}},$$

pour la probabilité que la fonction (m) sera comprise dans les limites zéro et $ar\sqrt{s}$, l'intégrale étant prise depuis r nul.

Nous avons besoin ici de connaître la probabilité de l'erreur u de l'élément déterminé en faisant nulle la fonction (m) . Cette fonction étant supposée égale à l ou à $ar\sqrt{s}$, on aura, par ce qui précède,

$$u Sm^{(1)} p^{(1)} = ar\sqrt{s};$$

en substituant cette valeur dans la fonction intégrale précédente, elle devient

$$\frac{Sm^{(1)} p^{(1)}}{2a\sqrt{\frac{k^2}{h^2} \frac{Sm^{(1)2}}{s}}} \int du c^{-\frac{ku^2 (Sm^{(1)} p^{(1)})^2}{4k^2 a^2 Sm^{(1)2}}};$$

c'est l'expression de la probabilité que la valeur de u sera comprise dans les limites zéro et u , c'est aussi l'expression de la probabilité que u sera compris dans les limites zéro et $-u$. Si l'on fait

$$u = 2at\sqrt{\frac{k^2}{h^2} \frac{Sm^{(1)2}}{s} \frac{1}{Sm^{(1)} p^{(1)}}},$$

la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dt e^{-t^2}.$$

Maintenant, la probabilité restant la même, t reste le même, et l'intervalle des deux limites de u se resserre d'autant plus que $a\sqrt{\frac{k^2}{h^2} \frac{Sm^{(1)2}}{s} \frac{1}{Sm^{(1)} p^{(1)}}}$ est plus petit. Cet intervalle restant le même, la valeur de t , et par conséquent la probabilité que l'erreur de l'élément tombe dans cet intervalle, est d'autant plus grande que la même quantité $a\sqrt{\frac{k^2}{h^2} \frac{Sm^{(1)2}}{s} \frac{1}{Sm^{(1)} p^{(1)}}}$ est plus petite; il faut donc choisir le système de facteurs $m^{(1)}$, qui rend cette quantité un minimum; et comme a, k, k^2 sont les mêmes dans tous ces systèmes, il faut choisir le système qui rend $\frac{\sqrt{Sm^{(1)2}}}{Sm^{(1)} p^{(1)}}$ un minimum.

On peut parvenir au même résultat de cette manière. Reprenons l'expression de la probabilité que u sera compris dans les limites zéro et u . Le coefficient de du dans la différentielle de cette expression est l'ordonnée de la courbe des probabilités des erreurs u de l'élément, erreurs représentées par l'abscisse u de cette courbe, que l'on peut étendre à l'infini de chaque côté de l'ordonnée qui répond à u nul. Cela posé, toute erreur, soit positive, soit négative, doit être considérée comme un désavantage ou une perte réelle, à un jeu quelconque; or, par les principes de la théorie des probabilités, exposés au commencement de ce Livre, on évalue ce désavantage en prenant la somme de tous les produits de chaque désavantage par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre en plus est donc la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité; elle est par conséquent égale à l'intégrale

$$\frac{\int u du S m^{(i)} p^{(i)} e^{-\frac{k u^2 (S m^{(i)} p^{(i)})}{2 k^2 u^2 + m^{(i)2}}}}{2 a \sqrt{\frac{k^2 \pi}{k} S m^{(i)2}}}$$

prise depuis u nul jusqu'à u infini; ainsi cette erreur est

$$a \sqrt{\frac{k^2}{k \pi} \frac{\sqrt{S m^{(i)2}}}{S m^{(i)} p^{(i)}}}.$$

Cette quantité, prise avec le signe $-$, donne l'erreur moyenne à craindre en moins. Il est visible que le système des facteurs $m^{(i)}$ qu'il faut choisir doit être tel que ces erreurs soient des minima et par conséquent tel que $\frac{\sqrt{S m^{(i)2}}}{S m^{(i)} p^{(i)}}$ soit un minimum.

Si l'on différentie cette fonction par rapport à $m^{(i)}$, on aura, en égalant sa différentielle à zéro, par la condition du minimum,

$$\frac{m^{(i)}}{S m^{(i)2}} = \frac{p^{(i)}}{S m^{(i)} p^{(i)}}.$$

Cette équation a lieu, quel que soit i , et, comme la variation de i ne fait point changer la fraction $\frac{S m^{(i)2}}{S m^{(i)} p^{(i)}}$, en nommant μ cette fraction, on

$$\text{aura} \quad m = \mu p, \quad m^{(1)} = \mu p^{(1)}, \quad \dots, \quad m^{(s-1)} = \mu p^{(s-1)},$$

et l'on peut, quels que soient $p, p^{(1)}, \dots$, prendre μ tel que les nombres $m, m^{(1)}, \dots$ soient des nombres entiers, comme l'analyse précédente le suppose. Alors on a

$$z = \frac{S p^{(i)} \alpha^{(i)}}{S p^{(i)2}},$$

et l'erreur moyenne à craindre devient

$$\pm a \sqrt{\frac{k^2}{k \pi} \frac{1}{S p^{(i)2}}}.$$

C'est, dans toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les facteurs $m, m^{(1)}, \dots$, la plus petite erreur moyenne possible.

Si l'on fait les valeurs de $m, m^{(1)}, \dots$ égales à ± 1 , l'erreur moyenne à craindre sera plus petite lorsque le signe $\pm$ sera déterminé, de manière que $m^{(i)} p^{(i)}$ soit positif, ce qui revient à supposer $1 = m = m^{(1)} = \dots$, et à préparer les équations de condition, de sorte que le coefficient de z dans chacune d'elles soit positif; c'est ce que l'on fait dans la méthode ordinaire. Alors le résultat moyen des observations est

$$z = \frac{S \alpha^{(i)}}{S p^{(i)}},$$

et l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins est

$$\pm a \sqrt{\frac{k^2 s}{k \pi} \frac{1}{S p^{(i)}}},$$

mais cette erreur surpasse la précédente, qui, comme on l'a vu, est la plus petite possible. On peut s'en convaincre d'ailleurs de cette manière. Il suffit de faire voir que l'on a l'inégalité

$$\frac{\sqrt{s}}{S p^{(i)}} > \frac{1}{\sqrt{S p^{(i)2}}}$$

ou

$$sSp^{(i)2} > (Sp^{(i)})^2.$$

En effet, $2pp^{(i)}$ est moindre que $p^2 + p^{(i)2}$, puisque $(p^{(i)} - p)^2$ est une quantité positive; on peut donc, dans le second membre de l'inégalité précédente, substituer, pour $2pp^{(i)}$, $p^2 + p^{(i)2} - f$, f étant une quantité positive. En faisant des substitutions semblables pour tous les produits semblables, ce second membre sera égal au premier, moins une quantité positive.

Le résultat

$$z = \frac{Sp^{(i)}x^{(i)}}{Sp^{(i)2}},$$

auquel correspond le minimum d'erreur moyenne à craindre, est celui que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; car, la somme de ces carrés étant

$$(pz - x)^2 + (p^{(1)}z - x^{(1)2} + \dots + (p^{(s-1)}z - x^{(s-1)})^2,$$

la condition du minimum de cette fonction, en faisant varier z , donne pour cette variable l'expression précédente; cette méthode doit donc être employée de préférence, quelle que soit la loi de facilité des erreurs, loi dont dépend le rapport $\frac{h''}{k}$.

Ce rapport est $\frac{1}{4}$, si $\varphi(x)$ est une constante; il est moindre que $\frac{1}{8}$, si $\varphi(x)$ est variable, et tel qu'il diminue à mesure que x augmente, comme il est naturel de le supposer. En adoptant la loi moyenne des erreurs, que nous avons donnée dans le n° 15 et suivant laquelle $\varphi(x)$ est égal à $\frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{a}{x}$, on a

$$\frac{h''}{k} = \frac{1}{18}.$$

Quant aux limites $\pm a$, on peut prendre pour ces limites les écarts du résultat moyen, qui feraient rejeter une observation.

Mais on peut, par les observations mêmes, déterminer le facteur $a\sqrt{\frac{k''}{k}}$ de l'expression de l'erreur moyenne. En effet, on a vu, dans le

numéro précédent, que la somme des carrés des erreurs des observations est à très peu près $2s\frac{a^2k''}{k}$, et que, si elles sont en grand nombre, il devient extrêmement probable que la somme observée ne s'écartera pas de cette valeur d'une quantité sensible; on peut donc les égaler; or la somme observée est égale à $Se^{(i)2}$ ou à $S(p^{(i)}z - x^{(i)})^2$, en substituant pour z sa valeur $\frac{Sp^{(i)}x^{(i)}}{Sp^{(i)2}}$; on trouve ainsi

$$2s\frac{a^2k''}{k} = \frac{Sp^{(i)2}Sx^{(i)2} - (Sp^{(i)}x^{(i)})^2}{Sp^{(i)2}}.$$

L'expression précédente de l'erreur moyenne à craindre sur le résultat z devient alors

$$\pm \frac{\sqrt{Sp^{(i)2}Sx^{(i)2} - (Sp^{(i)}x^{(i)})^2}}{Sp^{(i)2}\sqrt{2s\pi}},$$

expression dans laquelle il n'y a rien qui ne soit donné par les observations et par les coefficients des équations de condition.

21. Supposons maintenant que l'on ait deux éléments à corriger par l'ensemble d'un grand nombre d'observations. En nommant z et z' les corrections respectives de ces éléments, on formera, comme dans le numéro précédent, des équations de condition, qui seront comprises dans cette forme générale

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)}z + q^{(i)}z' - x^{(i)},$$

$\varepsilon^{(i)}$ étant, comme dans ce numéro, l'erreur de l'observation $(i+1)^{\text{me}}$. Si l'on multiplie respectivement par $m, m^{(1)}, \dots, m^{(s-1)}$ ces équations, et que l'on ajoute ensemble ces produits, on aura une première équation finale

$$Sm^{(i)}\varepsilon^{(i)} = z.Sm^{(i)}p^{(i)} + z'.Sm^{(i)}q^{(i)} - Sm^{(i)}x^{(i)}.$$

En multipliant encore les mêmes équations respectivement par $n, n^{(1)}, \dots, n^{(s-1)}$ et ajoutant ces produits, on aura une seconde équation finale

$$Sn^{(i)}\varepsilon^{(i)} = z.Sn^{(i)}p^{(i)} + z'.Sn^{(i)}q^{(i)} - Sn^{(i)}x^{(i)},$$

le signe S s'étendant ici, comme dans le numéro précédent, à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$.

Si l'on suppose nulles les deux fonctions $Sm^{(0)}\varepsilon^{(0)}$, $Sn^{(0)}\varepsilon^{(0)}$, fonctions que nous désignerons respectivement par (m) et (n) , les deux équations finales précédentes donneront les corrections z et z' des deux éléments. Mais ces corrections sont susceptibles d'erreurs, relatives à celle dont la supposition que nous venons de faire est elle-même susceptible. Concevons donc que les fonctions (m) et (n) , au lieu d'être nulles, soient respectivement l et l' , et nommons u et u' les erreurs correspondantes des corrections z et z' , déterminées par ce qui précède; les deux équations finales deviendront

$$l = u \cdot Sm^{(1)}p^{(1)} + u' \cdot Sm^{(1)}q^{(1)}, \\ l' = u \cdot Sn^{(1)}p^{(1)} + u' \cdot Sn^{(1)}q^{(1)}.$$

Il faut maintenant déterminer les facteurs m , $m^{(1)}$, ..., n , $n^{(1)}$, ..., de manière que l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément soit un minimum. Pour cela, considérons le produit

$$f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{(mx + n\varpi)^2}{a^2}} \times f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{(m^{(1)}x + n^{(1)}\varpi)^2}{a^2}} \times \dots \\ \times f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{(m^{(s-1)}x + n^{(s-1)}\varpi)^2}{a^2}},$$

le signe f se rapportant à toutes les valeurs de x , depuis $x = -a$ jusqu'à $x = a$; $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ étant, comme dans le numéro précédent, la probabilité de l'erreur x , ainsi que de l'erreur $-\varpi$. La fonction précédente devient, en réunissant les deux exponentielles relatives à x et à $-\varpi$,

$$2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(mx\varpi + n\varpi\varpi') \times 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(m^{(1)}x\varpi + n^{(1)}\varpi\varpi') \times \dots \\ \times 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(m^{(s-1)}x\varpi + n^{(s-1)}\varpi\varpi'),$$

le signe f s'étendant ici à toutes les valeurs de x , depuis $x = 0$ jus-

qu'à $x = a$, x étant supposé, ainsi que a , divisé dans une infinité de parties prises pour unité. Présentement, il est clair que le terme indépendant des exponentielles, dans le produit de la fonction précédente par $e^{-\frac{(mx + n\varpi)^2}{a^2}}$, est la probabilité que la somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par m , $m^{(1)}$, ..., ou la fonction (m) , sera égale à l , en même temps que la fonction (n) , somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par n , $n^{(1)}$, ..., sera égale à l' ; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint d\varpi d\varpi' e^{-\frac{(m\varpi + n\varpi')^2}{a^2}} \times \left\{ \begin{array}{l} 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(mx\varpi + n\varpi'\varpi) \times \dots \\ \times 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(m^{(1)}x\varpi + n^{(1)}\varpi'\varpi) \end{array} \right\},$$

les intégrales étant prises depuis ϖ et ϖ' égaux à $-\pi$, jusqu'à ϖ et ϖ' égaux à π . Cela posé :

En suivant exactement l'analyse du numéro précédent, on trouve que la fonction précédente se réduit à très peu près à

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint d\varpi d\varpi' e^{-\frac{(m\varpi + n\varpi')^2}{a^2}} \times \left\{ \begin{array}{l} 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(mx\varpi + n\varpi'\varpi) \times \dots \\ \times 2f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(m^{(1)}x\varpi + n^{(1)}\varpi'\varpi) \end{array} \right\},$$

k et k' ayant ici la même signification que dans le numéro cité. On voit encore, par le même numéro, que les intégrales peuvent s'étendre depuis $a\varpi = -\infty$, $a\varpi' = -\infty$, jusqu'à $a\varpi = \infty$ et $a\varpi' = \infty$. Si l'on fait

$$t = a\varpi + \frac{a\varpi' \cdot Sm^{(1)}n^{(1)}}{Sm^{(1)2}} + \frac{kl\sqrt{-1}}{2k^2a \cdot Sm^{(1)2}}, \\ t' = a\varpi' - \frac{k}{2k^2a} \frac{(lSm^{(1)}n^{(1)} - l'Sm^{(1)2})\sqrt{-1}}{Sm^{(1)2} - (Sm^{(1)}n^{(1)})^2},$$

si l'on fait ensuite

$$E = Sm^{(1)2} \cdot Sn^{(1)2} - (Sm^{(1)}n^{(1)})^2,$$

la double intégrale précédente devient

$$\frac{1}{4\pi^2 a^2} \iint d\varpi d\varpi' e^{-\frac{(m\varpi + n\varpi')^2}{a^2}} \times \int \int \frac{dt dt'}{4\pi^2 a^2} e^{-\frac{(kt + k't')^2}{a^2}} \times \frac{k^2 l^2 Sm^{(1)2} - k^2 l^2 E}{k^2 Sm^{(1)2} - k^2 E}.$$

En prenant les intégrales dans les limites infinies positives et négatives, comme celles relatives à $a\pi$ et $a\pi'$, on aura

$$\{o\} = \frac{1}{\frac{4k^2\pi}{k} a^2 \sqrt{E}} \cdot \frac{1}{c} \frac{\frac{1}{4k^2\pi} \{F(Sm^{(i)2} - 2F(Sm^{(i)}n^{(i)}) + F(Sm^{(i)2})\}}{k^2 a^2 \sqrt{E}}$$

Il faut maintenant, pour avoir la probabilité que les valeurs de l et de l' seront comprises dans des limites données, multiplier cette quantité par $dl dl'$, et l'intégrer ensuite dans ces limites. En nommant X cette quantité, la probabilité dont il s'agit sera donc $\iint X dl dl'$. Mais, pour avoir la probabilité que les erreurs u et u' des corrections des éléments seront comprises dans des limites données, il faut substituer dans cette intégrale, au lieu de l et de l' , leurs valeurs en u et u' . Or, si l'on différentie les expressions de l et de l' , en supposant l' constant, on a

$$\begin{aligned} dl &= du Sm^{(i)} p^{(i)} + du' Sm^{(i)} q^{(i)}, \\ o &= du Sn^{(i)} p^{(i)} + du' Sn^{(i)} q^{(i)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$dl = \frac{du(Sm^{(i)} p^{(i)} \cdot Sn^{(i)} q^{(i)} - Sn^{(i)} p^{(i)} \cdot Sm^{(i)} q^{(i)})}{Sn^{(i)} q^{(i)}}.$$

Si l'on différentie ensuite l'expression de l' , en supposant u constant, on a

$$dl' = du' Sn^{(i)} q^{(i)};$$

on aura donc

$$dl dl' = \{Sm^{(i)} p^{(i)} \cdot Sn^{(i)} q^{(i)} - Sn^{(i)} p^{(i)} \cdot Sm^{(i)} q^{(i)}\} du du'.$$

En faisant ensuite

$$\begin{aligned} F &= Sm^{(i)2} \{Sm^{(i)} p^{(i)2} - 2Sm^{(i)} n^{(i)} \cdot Sm^{(i)} p^{(i)} \cdot Sn^{(i)} q^{(i)} + Sm^{(i)2} \cdot (Sn^{(i)} p^{(i)})^2\}, \\ G &= Sm^{(i)2} \cdot Sm^{(i)} p^{(i)} \cdot Sm^{(i)} q^{(i)} + Sm^{(i)2} \cdot Sn^{(i)} p^{(i)} \cdot Sn^{(i)} q^{(i)} \\ &\quad - Sm^{(i)} n^{(i)} \cdot Sm^{(i)} p^{(i)} \cdot Sm^{(i)} q^{(i)} + Sm^{(i)} p^{(i)} \cdot Sn^{(i)} q^{(i)}, \\ H &= Sm^{(i)2} \cdot (Sn^{(i)} q^{(i)})^2 - 2Sm^{(i)} n^{(i)} \cdot Sm^{(i)} q^{(i)} \cdot Sn^{(i)} q^{(i)} + Sm^{(i)2} \cdot (Sn^{(i)} q^{(i)})^2, \\ I &= Sm^{(i)} p^{(i)} \cdot Sn^{(i)} q^{(i)} - Sn^{(i)} p^{(i)} \cdot Sm^{(i)} q^{(i)}, \end{aligned}$$

la fonction $\{o\}$ devient

$$\iint \frac{k}{4k^2\pi} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{du du'}{a^2} c^{-\frac{2(Fu^2 + 2Gnu' + Hn'^2)}{4k^2 a^2 E}}.$$

Intégrons d'abord cette fonction depuis $u' = -\infty$ jusqu'à $u' = \infty$. Si l'on fait

$$t = \frac{\sqrt{\frac{kH}{4k^2\pi}} (u' + \frac{Gu}{H})}{a\sqrt{E}},$$

et si l'on prend l'intégrale depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, on aura, en ne considérant que la variation de u' ,

$$\int \sqrt{\frac{k}{4k^2\pi}} \frac{du}{a} \frac{1}{\sqrt{H}} c^{-\frac{Hu^2}{4k^2 a^2 E} - \frac{FH - G^2}{4EH}}.$$

Or on a

$$\frac{FH - G^2}{E} = I^2;$$

l'intégrale précédente devient donc

$$\int \frac{1}{\sqrt{H}} \frac{du}{a} \sqrt{\frac{k}{4k^2\pi}} c^{-\frac{k}{4k^2} \frac{Hu^2}{a^2 H}}.$$

On aura, par le numéro précédent, l'erreur moyenne à craindre, en plus ou en moins, sur la correction du premier élément, en multipliant la quantité sous le signe f par $\pm u$, et prenant l'intégrale depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$, ce qui donne, pour cette erreur,

$$\pm \frac{a\sqrt{H}}{1\sqrt{\frac{k}{4k^2}}},$$

le signe + indiquant l'erreur moyenne à craindre en plus, et le signe - l'erreur moyenne à craindre en moins.

Déterminons présentement les facteurs $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$, de manière que

cette erreur soit un minimum. En faisant varier $m^{(i)}$ seul, on a

$$d \log \frac{\sqrt{H}}{1} = dm^{(i)} \frac{-p^{(i)} S n^{(i)} q^{(i)} + q^{(i)} S n^{(i)} p^{(i)}}{1} \\ + dm^{(i)} \frac{\left\{ q^{(i)} S n^{(i)2} S m^{(i)} q^{(i)} - n^{(i)} S m^{(i)} q^{(i)} S n^{(i)} q^{(i)} \right\} \\ - q^{(i)} S m^{(i)} n^{(i)} S n^{(i)} q^{(i)} + m^{(i)} (S n^{(i)} q^{(i)})^2}{H}.$$

Il est facile de voir que cette différentielle disparaît, si l'on suppose, dans les coefficients de $dm^{(i)}$,

$$m^{(i)} = \mu p^{(i)}, \quad n^{(i)} = \mu q^{(i)},$$

μ étant un coefficient arbitraire indépendant de i , et au moyen duquel on peut rendre $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$ des nombres entiers; la supposition précédente rend donc nulle la différentielle de $\frac{\sqrt{H}}{1}$, prise par rapport à $m^{(i)}$. On verra de la même manière que cette supposition rend nulle la différentielle de la même quantité, prise par rapport à $n^{(i)}$. Ainsi cette supposition rend un minimum l'erreur moyenne à craindre sur la correction du premier élément; et l'on verra de la même manière qu'elle rend encore un minimum l'erreur moyenne à craindre sur la correction du second élément, erreur que l'on obtient en changeant dans l'expression de la précédente H en F. Dans cette supposition, les corrections des deux éléments sont

$$z = \frac{S q^{(i)2} S p^{(i)} \alpha^{(i)} - S p^{(i)} q^{(i)} S q^{(i)} \alpha^{(i)}}{S p^{(i)2} S q^{(i)2} - (S p^{(i)} q^{(i)})^2}, \\ z' = \frac{S p^{(i)2} S q^{(i)} \alpha^{(i)} - S p^{(i)} q^{(i)} S p^{(i)} \alpha^{(i)}}{S p^{(i)2} S q^{(i)2} - (S p^{(i)} q^{(i)})^2}.$$

Il est facile de voir que ces corrections sont celles que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations, ou du minimum de la fonction

$$S(p^{(i)} z + q^{(i)} z' - \alpha^{(i)})^2;$$

d'où il suit que cette méthode a généralement lieu, quel que soit le nombre des éléments à déterminer; car il est visible que l'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'éléments.

En substituant pour $a \sqrt{\frac{k''}{k\pi}}$ la quantité $\sqrt{\frac{S \varepsilon^{(i)2}}{2 \pi}}$, à laquelle on peut, par le n° 20, le supposer égal, $\varepsilon, \varepsilon^{(i)}, \dots$ étant ce qui reste dans les équations de condition après y avoir substitué les corrections données par la méthode des moindres carrés des erreurs, l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément est

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{S \varepsilon^{(i)2}}{2 \pi}} \sqrt{S q^{(i)2}}}{\sqrt{S p^{(i)2} S q^{(i)2} - (S p^{(i)} q^{(i)})^2}}.$$

L'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur le second élément est

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{S \varepsilon^{(i)2}}{2 \pi}} \sqrt{S p^{(i)2}}}{\sqrt{S p^{(i)2} S q^{(i)2} - (S p^{(i)} q^{(i)})^2}},$$

d'où l'on voit que le premier élément est plus ou moins bien déterminé que le second, suivant que $S q^{(i)2}$ est plus petit ou plus grand que $S p^{(i)2}$.

Si les r premières équations de condition ne renferment point q , et si les $s - r$ dernières ne renferment point p , alors $S p^{(i)} q^{(i)} = 0$, et les formules précédentes coïncident avec celle du numéro précédent.

On peut obtenir ainsi l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément déterminé par la méthode des moindres carrés des erreurs, quel que soit le nombre des éléments, pourvu que l'on considère un grand nombre d'observations. Soient $z, z', z'', \dots$ les corrections de chaque élément, et représentons généralement les équations de condition par la suivante :

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)} z + q^{(i)} z' + r^{(i)} z'' + \dots - \alpha^{(i)}.$$

Dans le cas d'un seul élément, l'erreur moyenne à craindre est, comme on l'a vu,

$$(a) \quad \pm \frac{\sqrt{\frac{S \varepsilon^{(i)2}}{2 \pi}}}{\sqrt{S p^{(i)2}}}.$$

Lorsqu'il y a deux éléments, on aura l'erreur moyenne à craindre sur

le premier élément en changeant, dans la fonction (a'), $Sp^{(0)2}$ dans $Sp^{(0)2} - \frac{(Sp^{(1)2}q^{(1)2})^2}{Sq^{(1)2}}$, ce qui donne, pour cette erreur,

$$(a') \quad \pm \frac{\sqrt{\frac{Sq^{(1)2}}{2.8\pi}} \sqrt{Sq^{(1)2}}}{\sqrt{Sp^{(1)2}Sq^{(1)2} - (Sp^{(1)2}q^{(1)2})^2}}.$$

Lorsqu'il y a trois éléments, on aura l'erreur à craindre sur le premier élément, en changeant, dans cette expression (a'), $Sp^{(0)2}$ dans $Sp^{(0)2} - \frac{(Sp^{(1)2}r^{(1)2})^2}{Sr^{(1)2}}$, $Sp^{(0)2}q^{(0)}$ dans $Sp^{(0)2}q^{(0)} - \frac{Sp^{(1)2}r^{(1)2}Sq^{(1)2}}{Sr^{(1)2}}$, et $Sq^{(0)2}$ dans $Sq^{(0)2} - \frac{(Sq^{(1)2}r^{(1)2})^2}{Sr^{(1)2}}$; ce qui donne pour cette erreur

$$(a'') \quad \pm \frac{\sqrt{\frac{Sq^{(1)2}}{2.8\pi}} \sqrt{Sq^{(1)2}Sr^{(1)2} - (Sq^{(1)2}r^{(1)2})^2}}{\sqrt{\left\{ \begin{array}{l} Sp^{(1)2}Sq^{(1)2}Sr^{(1)2} - Sp^{(1)2}(Sq^{(1)2}r^{(1)2})^2 - Sq^{(1)2}(Sp^{(1)2}r^{(1)2})^2 \\ - Sr^{(1)2}(Sp^{(1)2}q^{(1)2})^2 + 2Sp^{(1)2}q^{(1)2}Sp^{(1)2}r^{(1)2}Sq^{(1)2}r^{(1)2} \end{array} \right\}}}.$$

Dans le cas de quatre éléments, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, en changeant dans cette expression (a'), $Sp^{(0)2}$ dans $Sp^{(0)2} - \frac{(Sp^{(1)2}t^{(1)2})^2}{St^{(1)2}}$, $Sp^{(0)2}q^{(0)}$ dans $Sp^{(0)2}q^{(0)} - \frac{Sp^{(1)2}t^{(1)2}Sq^{(1)2}}{St^{(1)2}}$, etc.

En continuant ainsi, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, quel que soit le nombre des éléments. En changeant, dans l'expression de cette erreur, ce qui est relatif au premier élément, dans ce qui est relatif au second et réciproquement, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le second élément, et ainsi des autres.

De là résulte un moyen simple de comparer entre elles diverses Tables astronomiques, du côté de la précision. Ces Tables peuvent toujours être supposées réduites à la même forme, et alors elles ne diffèrent que par les époques, les moyens mouvements et les coefficients de leurs arguments; car, si l'une d'elles, par exemple, contient un argument qui ne se trouve point dans les autres, il est clair que cela revient à supposer, dans celles-ci, ce coefficient nul. Maintenant, si l'on comparait ces Tables à la totalité des bonnes observations, en les rectifiant par cette comparaison, ces Tables, ainsi rectifiées, satisferaient,

par ce qui précède, à la condition que la somme des carrés des erreurs qu'elles laisseraient subsister encore soit un minimum. Les Tables qui approcheraient le plus de remplir cette condition mériteraient donc la préférence, d'où il suit qu'en comparant ces diverses Tables à un nombre considérable d'observations, la présomption d'exactitude doit être en faveur de celle dans laquelle la somme des carrés des erreurs est plus petite que dans les autres.

22. Jusque'ici nous avons supposé les facilités des erreurs positives les mêmes que celles des erreurs négatives. Considérons maintenant le cas général dans lequel ces facilités peuvent être différentes. Nommons a l'intervalle dans lequel les erreurs de chaque observation peuvent s'étendre, et supposons-le partagé dans un nombre infini $n + n'$ de parties égales et prises pour l'unité, n étant le nombre des parties qui répondent aux erreurs négatives, et n' étant le nombre des parties qui répondent aux erreurs positives. Sur chaque point de l'intervalle a élevons une ordonnée qui exprime la probabilité de l'erreur correspondante, et désignons par $\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right)$ l'ordonnée correspondante à l'erreur x . Cela posé, considérons la suite

$$\begin{aligned} & \varphi\left(\frac{-n}{n+n'}\right) e^{-q n n' \sqrt{-1}} + \varphi\left[\frac{-(n-1)}{n+n'}\right] e^{-q(n-1)n' \sqrt{-1}} + \dots \\ & + \varphi\left(\frac{-1}{n+n'}\right) e^{-q n' \sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{0}{n+n'}\right) + \varphi\left(\frac{1}{n+n'}\right) e^{q n \sqrt{-1}} + \dots \\ & + \varphi\left(\frac{n'-1}{n+n'}\right) e^{q(n'-1)n \sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{n'}{n+n'}\right) e^{q n n' \sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Représentons cette suite par $f\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) e^{q x n' \sqrt{-1}}$, le signe f s'étendant à toutes les valeurs de x , depuis $x = -n$ jusqu'à $x = n'$. Le terme indépendant de $e^{q x n' \sqrt{-1}}$ et de ses puissances, dans le développement de la fonction

$$e^{-(t+p)q \sqrt{-1}} f\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) e^{q x n' \sqrt{-1}} f\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) e^{q t n \sqrt{-1}} \dots f\varphi\left(\frac{x}{n}\right) e^{q t' n' \sqrt{-1}},$$

sera, par le n° 21, la probabilité que la fonction

$$(m) \quad q^i + q^{(1)} e^{(1)} + \dots + q^{(s-1)} e^{(s-1)}$$

sera égale à $l + \mu$; cette probabilité est donc

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int d\varpi e^{-l\varpi\sqrt{-1}} e^{-\mu\varpi\sqrt{-1}} f\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) e^{q^i\varpi\sqrt{-1}} \times \dots,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$. Le logarithme de la fonction

$$(2) \quad e^{-\mu\varpi\sqrt{-1}} f\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) e^{q^i\varpi\sqrt{-1}} \times f\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) e^{q^{(1)}\varpi\sqrt{-1}} \dots$$

est

$$-\mu\varpi\sqrt{-1} + \log\left[f\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) e^{q^i\varpi\sqrt{-1}}\right] + \dots$$

n et n' étant supposés des nombres infinis, si l'on fait

$$\frac{x}{n+n'} = x', \quad \frac{1}{n+n'} = dx';$$

si, de plus, on suppose

$$h = f dx' \varphi(x'), \quad h' = f x' dx' \varphi(x'), \quad h'' = f x'^2 dx' \varphi(x'), \quad \dots,$$

les intégrales étant prises depuis $x' = -\frac{n}{n+n'}$ jusqu'à $x' = \frac{n'}{n+n'}$, on aura

$$f\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) e^{q^i\varpi\sqrt{-1}} = (n+n')k \left\{ 1 + \frac{h'}{h} q(n+n')\varpi\sqrt{-1} - \frac{h''}{2h} q^2(n+n')^2\varpi^2 + \dots \right\}.$$

L'erreur de chaque observation devant tomber dans les limites $-n$ et $+n'$, et la probabilité que cela aura lieu étant $f\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right)$ ou $(n+n')k$, cette quantité doit être égale à l'unité. De là il est facile de conclure que le logarithme de la fonction (2) est, en faisant $\mu' = \frac{\mu}{n+n'}$,

$$\left(\frac{h'}{h} S q^{(i)} - \mu'\right)(n+n')\varpi\sqrt{-1} - \frac{h h'' - h'^2}{2h^2} S q^{(i)2} (n+n')^2 \varpi^2 + \dots,$$

le signe S embrassant toutes les valeurs de i , depuis i nul jusqu'à $i = s-1$. On fera disparaître la première puissance de ϖ , en faisant

$$\mu' = \frac{h'}{h} S q^{(i)},$$

et si l'on ne considère que sa seconde puissance, ce que l'on peut faire par ce qui précède, lorsque s est un très grand nombre, on aura, pour le logarithme de la fonction (2),

$$-\frac{h h'' - h'^2}{2h^2} S q^{(i)2} (n+n')^2 \varpi^2.$$

En repassant des logarithmes aux nombres, la fonction (2) se transforme dans la suivante

$$e^{-\frac{h h'' - h'^2}{2h^2} (n+n')^2 \varpi^2 S q^{(i)2}};$$

l'intégrale (1) devient ainsi

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varpi e^{-l\varpi\sqrt{-1}} e^{-\frac{h h'' - h'^2}{2h^2} (n+n')^2 \varpi^2 S q^{(i)2}}.$$

Supposons

$$l = (n+n') r \sqrt{S q^{(i)2}},$$

$$t = \sqrt{\frac{(h h'' - h'^2) S q^{(i)2}}{2h^2}} (n+n') \varpi - \frac{r\sqrt{-1}}{2} \sqrt{\frac{2h^2}{h h'' - h'^2}}.$$

La variation de l étant l'unité, on aura

$$1 = (n+n') dr \sqrt{S q^{(i)2}};$$

l'intégrale précédente devient ainsi, après l'avoir intégrée depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$,

$$\frac{k dr}{\sqrt{2(h h'' - h'^2)} \pi} e^{-\frac{h h'' - h'^2}{2(h h'' - h'^2)} \frac{h^2 r^2}{2(h h'' - h'^2)}}.$$

Ainsi la probabilité que la fonction (m) sera comprise dans les limites

$$\frac{a h'}{h} S q^{(i)} \pm ar \sqrt{S q^{(i)2}},$$

est égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \frac{k \, dr}{\sqrt{2(kh^2 - h'^2)}} e^{-\frac{r^2}{2(kh^2 - h'^2)}},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul.

$\frac{ah'}{k}$ est l'abscisse de l'ordonnée qui passe par le centre de gravité de l'aire de la courbe des probabilités des erreurs de chaque observation; le produit de cette abscisse par $Sq^{(0)}$ est donc le résultat moyen vers lequel la fonction (m) converge sans cesse. Si l'on suppose $1 = q = q^{(1)} = \dots$, la fonction (m) devient la somme des erreurs, et alors $Sq^{(0)}$ devient s ; en divisant donc par s la somme des erreurs, pour avoir l'erreur moyenne, cette erreur converge sans cesse vers l'abscisse du centre de gravité, de manière qu'en prenant de part et d'autre un intervalle quelconque aussi petit que l'on voudra, la probabilité que l'erreur moyenne tombera dans cet intervalle finira, en multipliant indéfiniment les observations, par ne différer de la certitude que d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

23. Nous venons de rechercher le résultat moyen que des observations nombreuses et non faites encore doivent indiquer avec le plus d'avantage, et la loi de probabilité des erreurs de ce résultat. Considérons présentement le résultat moyen des observations déjà faites et dont on connaît les écarts respectifs. Pour cela, concevons un nombre s d'observations du même genre, c'est-à-dire telles que la loi des erreurs soit la même pour toutes. Nommons A le résultat de la première, $A + q$ celui de la seconde, $A + q^{(1)}$ celui de la troisième, et ainsi de suite; $q, q^{(1)}, q^{(2)}, \dots$ étant des quantités positives et croissantes, ce que l'on peut toujours obtenir par une disposition convenable des observations. Désignons encore par $\varphi(z)$ la probabilité de l'erreur z pour chaque observation, et supposons que $A + x$ soit le vrai résultat. L'erreur de la première observation est alors $-x$; $q - x, q^{(1)} - x, \dots$ sont les erreurs de la deuxième, de la troisième, etc. La probabilité de l'existence simultanée de toutes ces erreurs est le produit de leurs pro-

habilités respectives; elle est donc

$$\varphi(-x) \varphi(q-x) \varphi(q^{(1)}-x) \dots$$

Maintenant, x étant susceptible d'une infinité de valeurs, en les considérant comme autant de causes de l'événement observé, la probabilité de chacune d'elles sera, par le n° 1,

$$\frac{dx \varphi(-x) \varphi(q-x) \varphi(q^{(1)}-x) \dots}{\int dx \varphi(-x) \varphi(q-x) \varphi(q^{(1)}-x) \dots},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise pour toutes les valeurs dont x est susceptible. Nommons $\frac{1}{H}$ ce dénominateur. Cela posé, imaginons une courbe dont x soit l'abscisse, et dont l'ordonnée y soit

$$H \varphi(-x) \varphi(q-x) \varphi(q^{(1)}-x) \dots,$$

cette courbe sera celle des probabilités des valeurs de x . La valeur qu'il faut choisir pour résultat moyen est celle qui rend l'erreur moyenne à craindre un minimum. Toute erreur, soit positive, soit négative, devant être considérée comme un désavantage, ou une perte réelle au jeu, on a le désavantage moyen, en prenant la somme des produits de chaque désavantage par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre est donc la somme des produits de chaque erreur, abstraction faite du signe, par sa probabilité. Déterminons l'abscisse qu'il faut choisir pour que cette somme soit un minimum. Pour cela, donnons aux abscisses pour origine la première extrémité de la courbe précédente, et nommons x' et y' les coordonnées de la courbe, à partir de cette origine. Soit l la valeur qu'il faut choisir. Il est clair que, si le vrai résultat était x' , l'erreur du résultat l serait, abstraction faite du signe, $l - x'$, tant que x' serait moindre que l ; or y' est la probabilité que x' est le résultat vrai; la somme des erreurs à craindre, abstraction faite du signe, multipliées par leur probabilité, est donc pour toutes les valeurs de x' moindres que l , $\int (l - x') y' dx'$, l'intégrale étant prise depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = l$. On verra de la même manière que, pour les valeurs de x' supérieures à l , la somme des erreurs à craindre, mul-

tipliées par leur probabilité, est $f(x'-l)y'dx'$, l'intégrale étant prise depuis $x'=l$ jusqu'à l'abscisse x' correspondante à la dernière extrémité de la courbe; la somme entière des erreurs à craindre, abstraction faite du signe, et multipliées par leurs probabilités respectives, est donc

$$f(l-x')y'dx' + f(x'-l)y'dx'.$$

La différentielle de cette fonction, prise par rapport à l , est

$$dl f y' dx' - dl f y' dx';$$

car on a la différentielle de $f(l-x')y'dx'$, en différentiant d'abord la valeur de l sous le signe f , et en ajoutant à cette différentielle l'accroissement qui résulte de la variation de la limite de l'intégrale, limite qui se change en $l+dl$. Cet accroissement est égal à l'élément $(l-x')y'dx'$, à la limite où $x'=l$; il est donc nul, et $dl f y' dx'$ est la différentielle de l'intégrale $f(l-x')y'dx'$. On verra de la même manière que $-dl f y' dx'$ est la différentielle de l'intégrale $f(x'-l)y'dx'$. La somme de ces différentielles est nulle relativement à l'abscisse l , pour laquelle l'erreur moyenne à craindre est un minimum; on a donc, relativement à cette abscisse,

$$f y' dx' = f y' dx';$$

la première intégrale étant prise depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=l$, et la seconde étant prise depuis $x'=l$ jusqu'à la valeur extrême de x' .

Il suit de là que l'abscisse qui rend l'erreur moyenne à craindre un minimum est celle dont l'ordonnée divise l'aire de la courbe en deux parties égales. Ce point jouit encore de la propriété d'être celui en deçà duquel il est aussi probable que le vrai résultat tombe, qu'au delà, et par cette raison il peut encore être nommé *milieu de probabilité*. Des géomètres célèbres ont pris pour le milieu qu'il faut choisir celui qui rend le résultat observé le plus probable, et par conséquent l'abscisse qui répond à la plus grande ordonnée de la courbe; mais le milieu que nous adoptons est évidemment indiqué par la théorie des probabilités.

Si l'on met $\varphi(x)$ sous la forme d'exponentielle, et qu'on le désigne

par $e^{-\psi(x)}$, afin qu'il puisse également convenir aux erreurs positives et négatives, on aura

$$(1) \quad y = H e^{-\psi(x)} = H e^{-\psi(x-g)} = H e^{-\psi(x-g^{(1)})^2} = \dots$$

Si l'on fait $x = a + z$, et que l'on développe l'exposant de e par rapport aux puissances de z , y prendra cette forme

$$y = H e^{-M - 2Nz - Qz^2 - \dots},$$

expression dans laquelle on a

$$\begin{aligned} M &= \psi(a^2) + \psi(a-g)^2 + \psi(a-g^{(1)})^2 + \dots, \\ N &= a \psi'(a^2) + (a-g) \psi'(a-g)^2 + (a-g^{(1)}) \psi'(a-g^{(1)})^2 + \dots, \\ P &= \psi'(a^2) + \psi'(a-g)^2 + \psi'(a-g^{(1)})^2 + \dots + 2a^2 \psi''(a^2) \\ &\quad + 2(a-g)^2 \psi''(a-g)^2 + 2(a-g^{(1)})^2 \psi''(a-g^{(1)})^2 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$\psi(t)$ étant le coefficient de dt dans la différentielle de $\psi(t)$, $\psi'(t)$ étant le coefficient de dt dans la différentielle de $\psi'(t)$, et ainsi de suite.

Supposons le nombre s des observations très grand, et déterminons a par l'équation $N=0$ que donne la condition du maximum de y ; alors on a

$$y = H e^{-M - Qz^2 - \dots},$$

$M, P, Q, \dots$ sont de l'ordre s ; or, si z est très petit de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, Qz^2 devient de l'ordre $\frac{1}{s}$, et l'exponentielle $e^{-Qz^2 - \dots}$ peut se réduire à l'unité. Ainsi, dans l'intervalle depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{r}{\sqrt{s}}$, on peut supposer

$$y = H e^{-M - Pz^2}.$$

Au delà, et lorsque z est de l'ordre $s^{-\frac{m}{2}}$, m étant plus petit que l'unité, Pz^2 devient de l'ordre s^{1-m} ; par conséquent e^{-Pz^2} devient, ainsi que y , insensible; en sorte que l'on peut, dans toute l'étendue de la courbe,

supposer

$$\gamma = \Pi e^{-M-Pz^2}.$$

La valeur de a donnée par l'équation $N = 0$, ou

$$0 = a \psi'(a^2) + (a-q) \psi'(a-q)^2 + (a-q^{(1)}) \psi'(a-q^{(1)})^2 + \dots,$$

est alors l'abscisse x correspondante à l'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en parties égales. La condition que l'aire entière de la courbe doit représenter la certitude ou l'unité donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma dz = e^{-M-Pz^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$, ce qui donne

$$\Pi = \frac{e^M \sqrt{P}}{\sqrt{\pi}}.$$

L'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, en prenant a pour résultat moyen des observations, est $\pm \int zy dz$, l'intégrale étant prise depuis z nul jusqu'à z infini, ce qui donne pour cette erreur

$$\pm \frac{1}{2\sqrt{\pi P}}.$$

Mais l'ignorance entière où l'on est de la loi $e^{-\frac{1}{2}Pz^2}$ des erreurs de chaque observation ne permet pas de former l'équation

$$0 = a \psi'(a^2) + (a-q) \psi'(a-q)^2 + \dots$$

Ainsi, la connaissance des valeurs de $q, q^{(1)}, \dots$ ne donnant *a posteriori* aucune lumière sur le résultat moyen a des observations, il faut s'en tenir au résultat le plus avantageux déterminé *a priori*, et que l'on a vu être celui que fournit la méthode des moindres carrés des erreurs.

Cherchons la fonction $\psi(x^2)$ qui donne constamment la règle des milieux arithmétiques, admise par les observateurs. Pour cela, concevons que, sur les s observations, les i premières coïncident, ainsi que les $s-i$ dernières. L'équation $N = 0$ devient alors

$$0 = ia \psi'(a^2) + (s-i)(a-q) \psi'(a-q)^2.$$

La règle des milieux arithmétiques donne

$$a = \frac{s-i}{s} q;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$\psi' \left[\left(\frac{s-i}{s} \right)^2 q^2 \right] = \psi' \left(\frac{i^2}{s^2} q^2 \right).$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient $\frac{i}{s}$ et q , il est nécessaire que $\psi(t)$ soit indépendant de t , ce qui donne

$$\psi'(t) = k,$$

 k étant une constante. En intégrant, on a

$$\psi(t) = kt - L,$$

 L étant une constante arbitraire; partant,

$$e^{-\frac{1}{2}P(x^2)} = e^{L-kx^2}.$$

Telle est donc la fonction qui peut seule donner généralement la règle des milieux arithmétiques. La constante L doit être déterminée de manière que l'intégrale $\int dx e^{L-kx^2}$, prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, soit égale à l'unité; car il est certain que l'erreur x d'une observation doit tomber dans ces limites; on a donc

$$e^L = \sqrt{\frac{k}{\pi}},$$

par conséquent la probabilité de l'erreur x est $\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2}$.

A la vérité, cette expression donne l'infini pour la limite des erreurs, ce qui n'est pas admissible; mais, vu la rapidité avec laquelle ce genre d'exponentielles diminue à mesure que x augmente, on peut prendre k assez grand pour qu'au delà de la limite admissible des erreurs leurs probabilités soient insensibles et puissent être supposées nulles.

La loi précédente des erreurs donne, pour l'expression générale (1) de y ,

$$y = \sqrt{\frac{sh}{\pi}} e^{-kx^2},$$

en déterminant H de manière que l'intégrale entière $\int y dx$ soit l'unité, et faisant

$$x = \frac{Sg^{(i)}}{s} + u.$$

L'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en deux parties égales est celle qui répond à $u = 0$ et par conséquent à

$$x = \frac{Sg^{(i)}}{s};$$

c'est donc la valeur de x qu'il faut choisir pour résultat moyen des observations; or cette valeur est celle que donne la règle des milieux arithmétiques; la loi précédente des erreurs de chaque observation donne donc constamment les mêmes résultats que cette règle, et l'on a vu qu'elle est la seule loi qui jouisse de cette propriété.

En adoptant cette loi, la probabilité de l'erreur $\varepsilon^{(i)}$ de l'observation $(i+1)^{\text{ème}}$ est

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-k\varepsilon^{(i)2};$$

or on a vu dans le n° 20 que, z étant la correction d'un élément, cette observation fournit l'équation de condition

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)}z - \alpha^{(i)}.$$

La probabilité de la valeur de $p^{(i)}z - \alpha^{(i)}$ est donc

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-k(p^{(i)}z - \alpha^{(i)})^2};$$

la probabilité de l'existence simultanée des s valeurs $p - z$, $p^{(1)}z - \alpha^{(1)}$, ..., $p^{(s-1)}z - \alpha^{(s-1)}$ sera donc

$$\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}}\right)^{s-1} e^{-k \sum (p^{(i)}z - \alpha^{(i)})^2}.$$

Cette probabilité varie avec z ; on aura donc la probabilité d'une valeur quelconque de z en multipliant cette quantité par dz et divisant le produit par l'intégrale de ce produit, prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$. Soit

$$z = \frac{Sp^{(i)}\alpha^{(i)}}{Sp^{(i)2}} + u;$$

cette probabilité devient

$$du \sqrt{\frac{kSp^{(i)2}}{\pi}} e^{-k u^2 Sp^{(i)2}},$$

en sorte que, si l'on décrit une courbe dont le coefficient de du soit l'ordonnée et dont u soit l'abscisse, cette courbe, étendue depuis $u = -\infty$ jusqu'à $u = \infty$, peut être considérée comme la courbe des probabilités des erreurs u , dont le résultat

$$z = \frac{Sp^{(i)}\alpha^{(i)}}{Sp^{(i)2}}$$

est susceptible. L'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en deux parties égales est celle qui répond à $u = 0$, et par conséquent à z égal à $\frac{Sp^{(i)}\alpha^{(i)}}{Sp^{(i)2}}$; ce résultat est donc celui qu'il faut choisir; or il est le même que celui que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; la loi précédente des erreurs de chaque observation conduit donc aux mêmes résultats que cette méthode.

La méthode des moindres carrés des erreurs devient nécessaire lorsqu'il s'agit de prendre un milieu entre plusieurs résultats donnés, chacun, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations de divers genres. Supposons qu'un même élément soit donné : 1° par le résultat moyen des observations d'un premier genre et qu'il soit, par ces observations, égal à A ; 2° par le résultat moyen de s observations d'un deuxième genre et qu'il soit égal à $A + q$; 3° par le résultat moyen de s' observations d'un troisième genre et qu'il soit égal à $A + q'$, et ainsi du reste. Si l'on représente par $A + x$ l'élément vrai, l'erreur du résul-

tat des observations s sera $-x$; en supposant donc ξ égal à

$$\sqrt{\frac{k}{h^2} \frac{Sp^{(i)}}{2a}},$$

si l'on fait usage de la méthode des moindres carrés des erreurs pour déterminer le résultat moyen, ou à

$$\sqrt{\frac{k}{h^2} \frac{Sp^{(i)}}{2a\sqrt{2}}},$$

si l'on fait usage de la méthode ordinaire; la probabilité de cette erreur sera, par le n° 20,

$$\frac{\xi}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2/2}.$$

L'erreur du résultat des observations s' sera $q - x$, et, en désignant par ξ' pour ces observations ce que nous avons nommé ξ pour les observations s , la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{\xi'}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi'^2/2(x-q)^2}.$$

Pareillement, l'erreur du résultat des observations s'' sera $q' - x$, et en nommant pour elles ξ'' ce que nous avons nommé ξ pour les observations s , la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{\xi''}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi''^2/2(x-q')^2},$$

et ainsi de suite. Le produit de toutes ces probabilités sera la probabilité que $-x, q - x, q' - x, \dots$ seront les erreurs des résultats moyens des observations $s, s', s'', \dots$. En le multipliant par dx et prenant l'intégrale depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, on aura la probabilité que les résultats moyens des observations $s, s', s'', \dots$ surpasseront respectivement de $q, q', \dots$ le résultat moyen des observations s .

Si l'on prend l'intégrale dans des limites déterminées, on aura la probabilité que, la condition précédente étant remplie, l'erreur du premier résultat sera comprise dans ces limites; en divisant cette pro-

babilité par celle de la condition elle-même, on aura la probabilité que l'erreur du premier résultat sera comprise dans des limites données, lorsqu'on est certain que la condition a effectivement lieu; cette probabilité est donc

$$\frac{\int dx e^{-\xi^2 x^2 - \xi'^2 (x-q)^2 - \xi''^2 (x-q')^2 - \dots}}{\int dx e^{-\xi^2 x^2 - \xi'^2 (x-q)^2 - \xi''^2 (x-q')^2 - \dots}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans des limites données, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$. On a

$$\begin{aligned} & \xi^2 x^2 + \xi'^2 (x-q)^2 + \xi''^2 (x-q')^2 + \dots \\ &= (\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots) x^2 - 2x(\xi'^2 q + \xi''^2 q' + \dots) + \xi'^2 q^2 + \xi''^2 q'^2 + \dots \end{aligned}$$

Soit

$$x = \frac{\xi'^2 q + \xi''^2 q' + \dots}{\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots} + t;$$

la probabilité précédente deviendra

$$\frac{\int dt e^{-(\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots)t^2}}{\int dt e^{-(\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots)t^2}}.$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans des limites données, et celle du dénominateur étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Cette dernière intégrale est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots}}.$$

En faisant donc

$$t = t' \sqrt{\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \dots},$$

la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dt' e^{-t'^2}.$$

La valeur de t' la plus probable est celle qui répond à t' nul, d'où il suit que la valeur de x la plus probable est celle qui répond à $t = 0$; ainsi la correction du premier résultat, que l'ensemble de toutes les obser-

vations $s, s', s'', \dots$ donne avec le plus de probabilité, est

$$\frac{\delta'^2 q + \delta''^2 q' + \dots}{\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + \dots}$$

Cette correction, ajoutée au résultat A, donne, pour le résultat qu'il faut choisir,

$$\frac{A\delta^2 + (A + q)\delta'^2 + (A + q')\delta''^2 + \dots}{\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + \dots}$$

La correction précédente est celle qui rend un minimum la fonction

$$(\delta x)^2 + [\delta'(x - q)]^2 + [\delta''(x - q')]^2 + \dots$$

Or la plus grande ordonnée de la courbe des probabilités du premier résultat est, comme on vient de le voir, $\frac{\delta}{\sqrt{\pi}}$; celle de la courbe des probabilités du second résultat est $\frac{\delta'}{\sqrt{\pi}}$, et ainsi de suite; le milieu qu'il faut choisir entre les divers résultats est donc celui qui rend un minimum la somme des carrés de l'erreur de chaque résultat multipliée par la plus grande ordonnée de sa courbe de probabilité. Ainsi la loi du minimum des carrés des erreurs devient nécessaire, lorsque l'on doit prendre un milieu entre des résultats donnés chacun par un grand nombre d'observations.

24. On a vu précédemment que, de toutes les manières de combiner les équations de condition pour en former des équations finales linéaires, nécessaires à la détermination des éléments, la plus avantageuse est celle qui résulte de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations, du moins lorsque les observations sont en grand nombre. Si, au lieu de considérer le minimum des carrés des erreurs, on considérait le minimum d'autres puissances des erreurs, ou même de toute autre fonction des erreurs, les équations finales cesseraient d'être linéaires, et leur résolution deviendrait impraticable, si les observations étaient en grand nombre. Cependant il est un cas qui mérite une attention particulière, en ce qu'il donne le système dans

lequel la plus grande erreur, abstraction faite du signe, est moindre que dans tout autre système. Ce cas est celui du minimum des puissances infinies et paires des erreurs. Ne considérons ici que la correction d'un seul élément, et, z exprimant cette correction, représentons, comme précédemment, les équations de condition par la suivante,

$$\epsilon^{(i)} = p^{(i)}z - \alpha^{(i)},$$

i pouvant varier depuis zéro jusqu'à $s - 1$, s étant le nombre des observations. La somme des puissances $2n$ des erreurs sera $S(\alpha^{(i)} - p^{(i)}z)^{2n}$, le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i . On peut supposer dans cette somme toutes les valeurs de $p^{(i)}$ positives; car, si l'une d'elles était négative, elle deviendrait positive en changeant, comme on peut le faire, les signes des deux termes du binôme élevé à la puissance $2n$, auquel elle correspond. Nous supposons donc les quantités $\alpha = pz$, $\alpha^{(1)} = p^{(1)}z$, $\alpha^{(2)} = p^{(2)}z$, ..., disposées de manière que les quantités p , $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, ... soient positives et croissantes. Cela posé, si $2n$ est infini, il est clair que le plus grand terme de la somme $S(\alpha^{(i)} - p^{(i)}z)^{2n}$ sera la somme entière, à moins qu'il n'y ait un ou plusieurs autres termes qui lui soient égaux, et c'est ce qui doit avoir lieu dans le cas du minimum de la somme. En effet, s'il n'y avait qu'une seule quantité la plus grande, abstraction faite du signe, telle que $\alpha^{(i)} - p^{(i)}z$, on pourrait la diminuer en faisant varier z convenablement, et alors la somme $S(\alpha^{(i)} - p^{(i)}z)^{2n}$ diminuerait et ne serait pas un minimum. Il faut de plus que, si $\alpha^{(i)} - p^{(i)}z$ et $\alpha^{(r)} - p^{(r)}z$ sont, abstraction faite du signe, les deux quantités les plus grandes et égales entre elles, elles soient de signe contraire. En effet, la somme

$$(\alpha^{(i)} - p^{(i)}z)^{2n} + (\alpha^{(r)} - p^{(r)}z)^{2n}$$

devant être alors un minimum, sa différentielle

$$- 2n dz [p^{(i)}(\alpha^{(i)} - p^{(i)}z)^{2n-1} + p^{(r)}(\alpha^{(r)} - p^{(r)}z)^{2n-1}]$$

doit être nulle, ce qui ne peut être, lorsque n est infini, que dans le cas où $\alpha^{(i)} - p^{(i)}z$ et $\alpha^{(r)} - p^{(r)}z$ sont infiniment peu différents et de

signe contraire. S'il y a trois quantités les plus grandes, et égales entre elles, abstraction faite du signe, on verra de la même manière que leurs signes ne peuvent être les mêmes.

Maintenant, considérons la suite

$$(o) \quad \begin{cases} \alpha^{(s-1)} - p^{(s-1)}z, & \alpha^{(s-2)} - p^{(s-2)}z, & \alpha^{(s-3)} - p^{(s-3)}z, & \dots, & \alpha - pz, \\ -\alpha + pz, & \dots, & -\alpha^{(s-3)} + p^{(s-3)}z, & -\alpha^{(s-2)} + p^{(s-2)}z, & -\alpha^{(s-1)} + p^{(s-1)}z. \end{cases}$$

Si l'on suppose $z = -\infty$, le premier terme de la suite surpasse les suivants, et continue de les surpasser en faisant croître z , jusqu'au moment où il devient égal à l'un d'eux. Alors celui-ci, par l'accroissement de z , devient le plus grand de tous, et à mesure que l'on fait croître z , il continue toujours de surpasser ceux qui le précèdent. Pour déterminer ce terme, on formera la suite des quotients

$$\frac{\alpha^{(s-1)} - \alpha^{(s-2)}}{p^{(s-1)} - p^{(s-2)}}, \quad \frac{\alpha^{(s-2)} - \alpha^{(s-3)}}{p^{(s-2)} - p^{(s-3)}}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha^{(s-1)} - \alpha}{p^{(s-1)} - p}, \quad \frac{\alpha^{(s-1)} + \alpha}{p^{(s-1)} + p}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha^{(s-1)} + \alpha^{(s-2)}}{p^{(s-1)} + p^{(s-2)}}.$$

Supposons que $\frac{\alpha^{(s-1)} - \alpha^{(r)}}{p^{(s-1)} - p^{(r)}}$ soit le plus petit de ces quotients en ayant égard au signe, c'est-à-dire en regardant une quantité négative plus grande comme plus petite qu'une autre quantité négative moindre. S'il y a plusieurs quotients les plus petits et égaux, nous considérerons celui qui se rapporte au terme le plus éloigné du premier dans la suite (o); ce terme sera le plus grand de tous, jusqu'au moment où, par l'accroissement de z , il devient égal à l'un des suivants, qui commence alors à être le plus grand. Pour déterminer ce nouveau terme, on formera la nouvelle suite de quotients

$$\frac{\alpha^{(r)} - \alpha^{(r-1)}}{p^{(r)} - p^{(r-1)}}, \quad \frac{\alpha^{(r)} - \alpha^{(r-2)}}{p^{(r)} - p^{(r-2)}}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha^{(r)} - \alpha}{p^{(r)} - p}, \quad \frac{\alpha^{(r)} + \alpha}{p^{(r)} + p}, \quad \dots,$$

le terme de la suite (o) auquel répond le plus petit de ces quotients sera le nouveau terme. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'un des deux termes qui deviennent égaux et les plus grands soit dans la première moitié de la suite (o), et l'autre dans la seconde moitié. Soient $\alpha^{(i)} - p^{(i)}z$ et $-\alpha^{(j)} + p^{(j)}z$ ces deux termes; alors la valeur de z qui cor-

respond au système du minimum de la plus grande des erreurs, abstraction faite du signe, est

$$z = \frac{\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)}}{p^{(i)} + p^{(j)}}.$$

S'il y a plusieurs éléments à corriger, les équations de condition qui déterminent leurs corrections renferment plusieurs inconnues, et la recherche du système de correction, dans lequel la plus grande erreur est, abstraction faite du signe, plus petite que dans tout autre système, devient plus compliquée. J'ai considéré ce cas d'une manière générale dans le Livre III de la *Mécanique céleste*. J'observerai seulement ici qu'alors la somme des puissances $2n$ des erreurs des observations est, comme dans le cas d'une seule inconnue, un minimum lorsque $2n$ est infini; d'où il est facile de conclure que, dans le système dont il s'agit, il doit y avoir autant d'erreurs, plus une, égales, et les plus grandes, abstraction faite du signe, qu'il y a d'éléments à corriger. On conçoit que les résultats correspondants à $2n$ égal à un grand nombre doivent peu différer de ceux que donne $2n$ infini. Il n'est pas même nécessaire pour cela que la puissance $2n$ soit fort élevée, et j'ai reconnu par beaucoup d'exemples que, dans le cas même où cette puissance ne surpasse pas le carré, les résultats diffèrent peu de ceux que donne le système du minimum des plus grandes erreurs, ce qui est un nouvel avantage de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations.

Depuis longtemps, les géomètres prennent un milieu arithmétique entre leurs observations, et, pour déterminer les éléments qu'ils veulent connaître, ils choisissent les circonstances les plus favorables pour cet objet, savoir, celles dans lesquelles les erreurs des observations altèrent le moins qu'il est possible la valeur de ces éléments. Mais Cotes est, si je ne me trompe, le premier qui ait donné une règle générale pour faire concourir à la détermination d'un élément plusieurs observations, proportionnellement à leur influence. En considérant chaque observation comme une fonction de l'élément et regardant l'erreur de l'observation comme une différentielle infiniment petite, elle sera égale à la différentielle de la fonction, prise par rapport à cet

élément. Plus le coefficient de la différentielle de l'élément sera considérable, moins il faudra faire varier l'élément, pour que le produit de sa variation par ce coefficient soit égal à l'erreur de l'observation; ce coefficient exprimera donc l'influence de l'observation sur la valeur de l'élément. Cela posé, Cotes représente toutes les valeurs de l'élément, données par chaque observation, par les parties d'une droite indéfinie, toutes ces parties ayant une commune origine. Il conçoit ensuite, à leurs autres extrémités, des poids proportionnels aux influences respectives des observations. La distance de l'origine commune des parties au centre commun de gravité de tous ces poids est la valeur qu'il choisit pour l'élément.

Reprenons l'équation de condition du n° 20.

$$x^{(i)} = p^{(i)} z - \alpha^{(i)},$$

$x^{(i)}$ étant l'erreur de l'observation $(i+1)^{\text{ème}}$, et z étant la correction de l'élément déjà connu à fort peu près: $p^{(i)}$, que l'on peut toujours supposer positif, exprimera l'influence de l'observation correspondante.

$\frac{x^{(i)}}{p^{(i)}}$ étant la valeur de z résultante de l'observation, la règle de Cotes revient à multiplier cette valeur par $p^{(i)}$, à faire une somme de tous les produits relatifs aux diverses valeurs, et à la diviser par la somme de tous les $p^{(i)}$, ce qui donne

$$z = \frac{\sum x^{(i)}}{\sum p^{(i)}}.$$

C'était en effet la correction adoptée par les observateurs, avant l'usage de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations.

Cependant on ne voit pas que, depuis cet excellent géomètre, on ait employé sa règle, jusqu'à Euler, qui, dans sa première pièce de Jupiter et Saturne, me paraît s'être servi le premier des équations de condition pour déterminer les éléments du mouvement elliptique de ces deux planètes. Presqu'en même temps, Tobie Mayer en fit usage dans ses belles recherches sur la libration de la Lune, et ensuite pour former ses Tables lunaires. Depuis, les meilleurs astronomes ont suivi

cette méthode, et le succès des Tables qu'ils ont construites à son moyen en a constaté l'avantage.

Quand on n'a qu'un élément à déterminer, cette méthode ne laisse aucun embarras; mais, lorsque l'on doit corriger à la fois plusieurs éléments, il faut avoir autant d'équations finales formées par la réunion de plusieurs équations de condition, et au moyen desquelles on détermine par l'élimination les corrections des éléments. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition, pour former les équations finales? C'est ici que les observateurs s'abandonnaient à des tâtonnements arbitraires, qui devaient les conduire à des résultats différents, quoique déduits des mêmes observations. Pour éviter ces tâtonnements, M. Legendre eut l'idée simple de considérer la somme des carrés des erreurs des observations, et de la rendre un minimum, ce qui fournit directement autant d'équations finales, qu'il y a d'éléments à corriger. Ce savant géomètre est le premier qui ait publié cette méthode; mais on doit à M. Gauss la justice d'observer qu'il avait eu, plusieurs années avant cette publication, la même idée dont il faisait un usage habituel, et qu'il avait communiquée à plusieurs astronomes. M. Gauss, dans sa *Théorie du mouvement elliptique*, a cherché à rattacher cette méthode à la Théorie des Probabilités, en faisant voir que la même loi des erreurs des observations, qui donne généralement la règle du milieu arithmétique entre plusieurs observations, admise par les observateurs, donne pareillement la règle des moindres carrés des erreurs des observations, et c'est ce qu'on a vu dans le n° 23. Mais, comme rien ne prouve que la première de ces règles donne le résultat le plus avantageux, la même incertitude existe par rapport à la seconde. La recherche de la manière la plus avantageuse de former les équations finales est sans doute une des plus utiles de la Théorie des Probabilités: son importance dans la Physique et l'Astronomie me porta à m'en occuper. Pour cela, je considérai que toutes les manières de combiner les équations de condition, pour en former une équation finale linéaire, revenaient à les multiplier respectivement par des facteurs qui étaient nuls relativement aux équations

que l'on n'employait point, et à faire une somme de tous ces produits, ce qui donne une première équation finale. Un second système de facteurs donne une seconde équation finale, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait autant d'équations finales que d'éléments à corriger. Maintenant il est visible qu'il faut choisir les systèmes de facteurs, de sorte que l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur chaque élément soit un minimum; l'erreur moyenne étant la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité. Lorsque les observations sont en petit nombre, le choix de ces systèmes dépend de la loi des erreurs de chaque observation. Mais, si l'on considère un grand nombre d'observations, ce qui a lieu le plus souvent dans les recherches astronomiques, ce choix devient indépendant de cette loi, et l'on a vu, dans ce qui précède, que l'Analyse conduit alors directement aux résultats de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations. Ainsi cette méthode qui n'offrait d'abord que l'avantage de fournir, sans tâtonnement, les équations finales nécessaires à la correction des éléments, donne en même temps les corrections les plus précises, du moins lorsqu'on ne veut employer que des équations finales qui soient linéaires, condition indispensable, lorsque l'on considère à la fois un grand nombre d'observations; autrement, l'élimination des inconnues et leur détermination seraient impraticables.

CHAPITRE V.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA RECHERCHE DES PHÉNOMÈNES
ET DE LEURS CAUSES.

25. Les phénomènes de la nature se présentent le plus souvent accompagnés de tant de circonstances étrangères, un si grand nombre de causes perturbatrices y mêlent leur influence qu'il est très difficile, lorsqu'ils sont très petits, de les reconnaître. On ne peut alors y parvenir qu'en multipliant les observations, afin que, les effets étrangers venant à se détruire, le résultat moyen des observations ne laisse plus apercevoir que ces phénomènes. On conçoit, par ce qui précède, que cela n'a lieu rigoureusement que dans le cas d'un nombre infini d'observations. Dans tout autre cas, les phénomènes ne sont indiqués par les résultats moyens que d'une manière probable, mais qui l'est d'autant plus que les observations sont en plus grand nombre. La recherche de cette probabilité est donc très importante pour la Physique, l'Astronomie et généralement pour toutes les sciences naturelles. On va voir qu'elle rentre dans les méthodes que nous venons d'exposer. Dans le Chapitre précédent, l'existence du phénomène était certaine; son étendue seule a été l'objet du Calcul des Probabilités : ici l'existence du phénomène et son étendue sont l'objet de ce calcul.

Prenons pour exemple la variation diurne du baromètre, que l'on observe entre les tropiques, et qui devient sensible même dans nos climats, lorsque l'on choisit et que l'on multiplie convenablement les observations. On a reconnu qu'en général, vers 9^h du matin, le baro-

mètre est plus élevé que vers 4^h du soir; ensuite il remonte jusqu'à vers 11^h du soir, et il redescend jusque vers 4^h du matin, pour revenir à son maximum de hauteur vers 9^h. Supposons que l'on ait observé la hauteur du baromètre vers 9^h du matin et vers 4^h du soir, pendant le nombre s de jours, et, pour éviter la trop grande influence des causes perturbatrices, choisissons ces jours de manière que, dans l'intervalle de 9^h à 4^h, le baromètre n'ait pas varié au delà de 4^{mm}. Supposons ensuite qu'en faisant la somme des s hauteurs du matin et la somme des s hauteurs du soir, la première de ces sommes surpasse la seconde de la quantité q ; cette différence indiquera une cause constante qui tend à élever le baromètre vers 9^h du matin et à l'abaisser vers 4^h du soir. Pour déterminer avec quelle probabilité cette cause est indiquée, concevons que cette cause n'existe point, et que la différence observée q résulte des causes perturbatrices accidentelles et des erreurs des observations. La probabilité qu'alors la différence observée entre les sommes des hauteurs du matin et du soir doit être au-dessous de q est, par le n° 18, égale à

$$\sqrt{\frac{k}{4k^2\pi}} \int dr e^{-\frac{kr^2}{4\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = -\infty$ jusqu'à $r = \frac{q}{a\sqrt{s}}$, k et k^2 étant des constantes dépendantes de la loi de probabilité des différences entre les hauteurs du matin et du soir, et $\pm a$ étant les limites de ces différences, a étant ici égal à 4^{mm}. $\frac{k}{k^2}$ étant au moins égal à 6, comme on l'a vu dans le n° 20, $\frac{k}{4k^2}$ ne peut pas être supposé moindre que $\frac{3}{2}$; en faisant donc $s = 400$, et supposant l'étendue de la variation diurne de 1^{mm}, ce qui est à peu près ce que M. Ramond a trouvé dans nos climats, par la comparaison d'un très grand nombre d'observations, on aura $q = 400^{\text{mm}}$. Ainsi $r = 5$, et $\frac{kr^2}{4\pi}$ est au moins égal à 37,5; en faisant donc

$$t = \frac{kr^2}{4\pi},$$

la probabilité précédente devient au moins

$$1 - \frac{\int dt e^{-t}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = \sqrt{37,5}$ jusqu'à $t = \infty$. Cette intégrale est, à fort peu près, par le n° 27 du Livre I,

$$1 - \frac{e^{-37,5}}{2\sqrt{37,5}\pi},$$

et elle approche tellement de l'unité ou de la certitude, qu'il est extrêmement probable que, s'il n'existait point de cause constante de l'excès observé de la somme des hauteurs barométriques du matin sur celles des hauteurs du soir, cet excès serait plus petit que 400^{mm}; il indique donc avec une extrême vraisemblance l'existence d'une cause constante qui l'a produit.

Le phénomène d'une variation diurne étant ainsi bien constaté, déterminons la valeur la plus probable de son étendue, et l'erreur que l'on peut commettre sur son évaluation. Supposons pour cela que cette valeur soit $\frac{q}{s} \pm \frac{ar}{\sqrt{s}}$; la probabilité que l'étendue de la variation diurne du matin au soir sera comprise dans ces limites est, par le n° 18,

$$2\sqrt{\frac{k}{4k^2\pi}} \int dr e^{-\frac{kr^2}{4\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$.

On peut éliminer $\frac{k^2}{k}$ en observant que, par le n° 20, cette fraction est à peu près égale à $\frac{S_{\xi(i)^2}}{2a^2s}$, $\pm \xi^{(i)}$ étant la différence de $\frac{q}{s}$ à l'étendue observée le $(i+1)^{\text{ème}}$ jour, et le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s-1$; en faisant donc

$$ar = t\sqrt{\frac{2S_{\xi(i)^2}}{s}},$$

la probabilité que l'étendue de la variation diurne du matin au soir est comprise dans les limites $\frac{q}{s} \pm \frac{t}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{2St^{(1/2)}}{s}}$ sera $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dt e^{-t^2}$, l'intégrale étant prise depuis t nul.

La variation diurne des hauteurs du baromètre dépend uniquement du Soleil; mais ces hauteurs sont encore affectées par les marées aériennes que produit l'attraction du Soleil et de la Lune sur notre atmosphère, et dont j'ai donné la théorie dans le Livre IV de la *Mécanique céleste*. Il est donc nécessaire de considérer à la fois ces deux variations, et de déterminer leurs grandeurs et leurs époques respectives, en formant des équations de condition analogues à celles dont les astronomes font usage, pour corriger les éléments des mouvements célestes. Ces variations étant principalement sensibles à l'équateur, et les causes perturbatrices y étant extrêmement petites, on pourra, au moyen d'excellents baromètres, les déterminer avec une grande précision, et je ne doute point que l'on ne reconnaisse alors, dans l'ensemble d'un très grand nombre d'observations, les lois qu'indique la théorie de la pesanteur dans les marées atmosphériques, et qui se manifestent d'une manière si frappante dans les observations des marées de l'Océan, que j'ai discutées avec étendue, dans le Livre cité de la *Mécanique céleste*.

On voit, par ce qui précède, que l'on peut reconnaître l'effet très petit d'une cause constante, par une longue suite d'observations dont les erreurs peuvent excéder cet effet lui-même. Mais alors il faut avoir soin de varier les circonstances de chaque observation, de manière que le résultat moyen de leur ensemble n'en soit point altéré sensiblement et soit presque entièrement l'effet de la cause dont il s'agit; il faut ensuite multiplier les observations, jusqu'à ce que l'analyse indique une très grande probabilité que l'erreur de ce résultat sera comprise dans des limites très rapprochées.

Supposons, par exemple, que l'on veuille reconnaître par l'observation la petite déviation à l'est, produite par la rotation de la Terre, dans la chute des corps. J'ai fait voir, dans le Livre X de la *Mécanique*

céleste, que si, du sommet d'une tour fort élevée, on abandonne un corps à sa pesanteur, il retombera sur un plan horizontal passant par le pied de la tour, à une petite distance à l'est du point de contact de ce plan avec une boule suspendue par un fil dont le point de suspension est celui du départ du corps. J'ai donné, dans le Livre cité, l'expression de cette déviation, et il en résulte qu'en faisant abstraction de la résistance de l'air, elle est uniquement vers l'est; qu'elle est proportionnelle au cosinus de la latitude et à la racine carrée du cube de la hauteur, et qu'à la latitude de Paris elle s'élève à 5^{mm}, 1, lorsque la hauteur de la tour est de 50^m. La résistance de l'air change ce dernier résultat; j'en ai donné pareillement l'expression dans ce cas, au Livre cité.

On a déjà fait un grand nombre d'expériences pour confirmer, par ce moyen, le mouvement de rotation de la Terre, qui d'ailleurs est démontré par tant d'autres phénomènes que cette confirmation devient inutile. Les petites erreurs de ces expériences très délicates ont souvent excédé l'effet que l'on voulait déterminer, et ce n'est qu'en multipliant considérablement les expériences que l'on peut ainsi constater son existence et fixer sa valeur. Nous allons soumettre cet objet à l'analyse des probabilités.

Si l'on prend pour origine des coordonnées le point de contact du plan et de la boule suspendue par un fil dont le sommet de suspension est celui du départ d'une balle que l'on fait tomber; si l'on marque ensuite sur ce plan les divers points où la balle va toucher le plan dans chaque expérience; en déterminant le centre commun de gravité de ces points, la ligne menée de l'origine des coordonnées à ce centre déterminera le sens et la quantité moyenne dont la balle s'est écartée de cette origine, et l'un et l'autre seront déterminés avec d'autant plus d'exactitude que les expériences seront plus nombreuses et plus précises.

Considérons maintenant comme axe des abscisses la ligne menée de l'origine des coordonnées à l'est, et désignons par x , $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n-1)}$, y , $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(n-1)}$ les coordonnées respectives des points déter-

minés par les expériences dont le nombre est s . En exprimant par X et Y les coordonnées du centre de gravité de tous ces points, on aura

$$X = S \frac{x^{(i)}}{s}, \quad Y = S \frac{y^{(i)}}{s},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$. Cela posé, en désignant par $\pm a$ les limites des erreurs de chaque expérience, dans le sens des x , la probabilité que l'écart moyen de la balle, du point origine des coordonnées, est compris dans les limites $X \pm \frac{ar}{\sqrt{s}}$, sera, par le n° 18,

$$2 \sqrt{\frac{k}{4k^2\pi}} \int dr e^{-\frac{r^2}{4k^2}},$$

k et k'' étant des constantes qui dépendent de la loi de facilité des erreurs de chaque expérience dans le sens des x .

Pareillement, $\pm a'$ étant les limites des erreurs de chaque expérience dans le sens des y , la probabilité que la valeur moyenne de la déviation dans le sens des y est comprise dans les limites $Y \pm \frac{a'r}{\sqrt{s}}$ sera

$$2 \sqrt{\frac{k}{4k^2\pi}} \int dr e^{-\frac{r^2}{4k^2}},$$

k et k'' étant des constantes dépendantes de la loi des erreurs des expériences dans le sens des y . Les fractions $\frac{k}{4k^2}$ et $\frac{k''}{4k^2}$ étant, par ce qui précède, plus grandes que $\frac{1}{2}$, on pourra juger du degré d'approximation et de probabilité des valeurs de X et de Y , et déterminer la probabilité de l'écart au sud et au nord, indiqué par les observations.

L'analyse précédente peut encore être appliquée à la recherche des petites inégalités des mouvements célestes, dont l'étendue est comprise dans les limites soit des erreurs des observations, soit des perturbations produites par les causes accidentelles. C'est à peu près ainsi que Tycho Brahe reconnut que l'équation du temps, relative au Soleil et

aux planètes, n'était point applicable à la Lune, et qu'il fallait en retrancher la partie dépendante de l'anomalie du Soleil, et même une quantité beaucoup plus grande, ce qui conduisit Flamsteed à la découverte de l'inégalité lunaire que l'on nomme *équation annuelle*. C'est encore dans les résultats d'un grand nombre d'observations que Mayer reconnut que l'équation de la précession, relative aux planètes et aux étoiles, n'était point applicable à la Lune; il évalua à 12" décimales environ la quantité dont il fallait alors la diminuer, quantité que Mason éleva ensuite à près de 24", par la comparaison de toutes les observations de Bradley, et que M. Bürg a réduite à 21", au moyen d'un bien plus grand nombre d'observations de Maskelyne. Cette inégalité, quoique indiquée par les observations, était négligée par le plus grand nombre des astronomes, parce qu'elle ne paraissait pas résulter de la théorie de la pesanteur universelle. Mais, ayant soumis son existence au Calcul des Probabilités, elle me parut indiquée avec une probabilité si forte, que je crus devoir en rechercher la cause. Je vis bientôt qu'elle ne pouvait résulter que de l'ellipticité du sphéroïde terrestre, que l'on avait négligée jusqu'alors dans la théorie du mouvement lunaire, comme ne devant y produire que des termes insensibles, et j'en conclus qu'il était extrêmement vraisemblable que ces termes devenaient sensibles par les intégrations successives des équations différentielles. Ayant déterminé ces termes par une analyse particulière, que j'ai exposée dans le Livre VII de la *Mécanique céleste*, je découvris d'abord l'inégalité du mouvement de la Lune en latitude, et qui est proportionnelle au sinus de sa longitude: par son moyen, je reconnus que la théorie de la pesanteur donne effectivement la diminution observée par les astronomes cités, dans l'inégalité de la précession, applicable au mouvement lunaire en longitude. La quantité de cette diminution et le coefficient de l'inégalité en latitude dont je viens de parler sont donc très propres à déterminer l'aplatissement de la Terre. Ayant fait part de mes recherches à M. Bürg qui s'occupait alors de ses *Tables de la Lune*, je le priai de déterminer avec un soin particulier les coefficients de ces deux inégalités. Par un concours remarquable, les coeffi-

cients qu'il a déterminés s'accordent à donner à la Terre l'aplatissement $\frac{1}{295}$, aplatissement qui diffère peu du milieu conclu des mesures des degrés du méridien et du pendule, mais qui, vu l'influence des erreurs des observations et des causes perturbatrices sur ces mesures, me paraît plus exactement déterminé par les inégalités lunaires. M. Burckhardt, qui vient de former de nouvelles Tables de la Lune, très précises, sur l'ensemble des observations de Bradley et de Maskelyne, a trouvé le même coefficient que M. Bürg pour l'inégalité lunaire en latitude : il trouve $\frac{1}{37}$ à ajouter au coefficient de l'inégalité en longitude, ce qui réduit l'aplatissement à $\frac{1}{397}$, par cette inégalité. La différence très légère de ces résultats prouve qu'en fixant à $\frac{1}{398}$ cet aplatissement, l'erreur est insensible.

L'Analyse des Probabilités m'a conduit pareillement à la cause des grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne. La difficulté d'en reconnaître la loi et de les ramener à la théorie de l'attraction universelle avait fait conjecturer qu'elles étaient dues aux actions passagères des comètes; mais un théorème auquel j'étais parvenu sur l'attraction mutuelle des planètes me fit rejeter cette hypothèse, en m'indiquant l'attraction mutuelle des deux planètes comme la vraie cause de ces irrégularités. Suivant ce théorème, si le mouvement de Jupiter s'accélère en vertu de quelque grande inégalité à très longue période, celui de Saturne doit se ralentir de la même manière, et ce ralentissement est à l'accélération de Jupiter comme le produit de la masse de cette dernière planète par la racine carrée du grand axe de son orbite est au produit semblable relatif à Saturne. Ainsi, en prenant pour unité le ralentissement de Saturne, l'accélération correspondante de Jupiter doit être 0,40884; or Halley avait trouvé, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, que l'accélération de Jupiter correspondait au ralentissement de Saturne, et qu'elle était 0,44823 de ce ralentissement. Ces résultats, si bien d'accord avec la théorie, me portèrent à penser qu'il existe, dans les mouvements de ces planètes, deux grandes inégalités correspondantes et de signe contraire, qui produisaient ces phénomènes. J'avais reconnu que l'action mutuelle

des planètes ne pouvait point occasionner dans leurs moyens mouvements des variations toujours croissantes ou périodiques, mais d'une période indépendante de leur configuration mutuelle; c'était donc dans le rapport des moyens mouvements de Jupiter et de Saturne que je devais chercher celle dont il s'agit. Or, en examinant ce rapport, il est facile de reconnaître que deux fois le moyen mouvement de Jupiter ne surpasse que d'une quantité très petite cinq fois celui de Saturne; ainsi les inégalités qui dépendent de cette différence, et dont la période est d'environ neuf siècles, peuvent devenir fort grandes par les intégrations successives qui leur donnent pour diviseur le carré du coefficient très petit du temps dans l'argument de ces inégalités. En fixant vers l'époque de Tycho Brahe l'origine de cet argument, je voyais que Halley avait dû trouver, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, les altérations qu'il avait observées, tandis que la comparaison des observations modernes entre elles devait présenter des altérations contraires et pareilles à celles que Lambert avait remarquées. L'existence des inégalités dont je viens de parler me parut donc extrêmement vraisemblable, et je n'hésitai point à entreprendre le calcul long et pénible, nécessaire pour m'en assurer complètement. Le résultat de ce calcul, non seulement les confirma, mais il me fit connaître beaucoup d'autres inégalités, dont l'ensemble a porté les Tables de Jupiter et de Saturne au degré de précision des observations mêmes.

On voit par là combien il faut être attentif aux indications de la nature, lorsqu'elles sont le résultat d'un grand nombre d'observations, quoique d'ailleurs elles soient inexplicables par les moyens connus. J'engage ainsi les astronomes à suivre avec une attention particulière l'inégalité lunaire à longue période, qui dépend principalement du mouvement du périée de la Lune, ajouté au double du moyen mouvement de ses nœuds; inégalité dont j'ai parlé dans le Livre VII de la *Mécanique céleste*, et que déjà les observations indiquent avec beaucoup de vraisemblance. Les cas précédents ne sont pas les seuls dans lesquels les observations ont redressé les analystes. Le mouvement du périée lunaire et l'accélération du mouvement de la Lune, qui n'étaient

point donnés d'abord par les approximations, ont fait sentir la nécessité de rectifier ces approximations. Ainsi l'on peut dire que la nature elle-même a concouru à la perfection analytique des théories fondées sur le principe de la pesanteur universelle, et c'est, à mon sens, une des plus fortes preuves de la vérité de ce principe admirable.

On peut encore, par l'Analyse des Probabilités, vérifier l'existence ou l'influence de certaines causes dont on a cru remarquer l'action sur les êtres organisés. De tous les instruments que nous pouvons employer pour connaître les agents imperceptibles de la nature, les plus sensibles sont les nerfs, surtout lorsque leur sensibilité est exaltée par des circonstances particulières. C'est à leur moyen que l'on a découvert la faible électricité que développe le contact de deux métaux hétérogènes, ce qui a ouvert un champ vaste aux recherches des physiciens et des chimistes. Les phénomènes singuliers, qui résultent de l'extrême sensibilité des nerfs dans quelques individus, ont donné naissance à diverses opinions sur l'existence d'un nouvel agent que l'on a nommé *magnétisme animal*, sur l'action du magnétisme ordinaire et l'influence du Soleil et de la Lune dans quelques affections nerveuses; enfin sur les impressions que peut faire naître la proximité des métaux ou d'une eau courante. Il est naturel de penser que l'action de ces causes est très faible, et peut facilement être troublée par un grand nombre de circonstances accidentelles; ainsi, de ce que, dans quelques cas, elle ne s'est point manifestée, on ne doit pas conclure qu'elle n'existe jamais. Nous sommes si éloignés de connaître tous les agents de la nature qu'il serait peu philosophique de nier l'existence des phénomènes, uniquement parce qu'ils sont inexplicables dans l'état actuel de nos connaissances. Seulement nous devons les examiner avec une attention d'autant plus scrupuleuse qu'il paraît plus difficile de les admettre, et c'est ici que l'Analyse des Probabilités devient indispensable pour déterminer jusqu'à quel point il faut multiplier les observations ou les expériences pour avoir en faveur de l'existence des agents qu'elles semblent indiquer une probabilité supérieure à toutes les raisons que l'on peut avoir d'ailleurs de la rejeter.

La même analyse peut être étendue aux divers résultats de la Médecine et de l'Économie politique, et même à l'influence des causes morales; car l'action de ces causes, lorsqu'elle est répétée un grand nombre de fois, offre dans ses résultats autant de régularité que les causes physiques.

On peut encore déterminer par l'Analyse des Probabilités, comparée à un grand nombre d'expériences, l'avantage et le désavantage des joueurs, dans les cas dont la complication rend impossible leur recherche directe. Tel est l'avantage de la main, au jeu du piquet: telles sont encore les possibilités respectives d'amener les différentes faces d'un prisme droit rectangulaire, dont la longueur, la largeur et la hauteur sont inégales, lorsque le prisme projeté en l'air retombe sur un plan horizontal.

Enfin on pourrait faire usage du Calcul des Probabilités pour rectifier les courbes ou carrer leurs surfaces. Sans doute, les géomètres n'emploieront pas ce moyen; mais, comme il me donne lieu de parler d'un genre particulier de combinaisons du hasard, je vais l'exposer en peu de mots.

Imaginons un plan divisé par des lignes parallèles, équidistantes de la quantité a ; concevons de plus un cylindre très étroit, dont $2r$ soit la longueur, supposée égale ou moindre que a . On demande la probabilité qu'en le projetant, il rencontrera une des divisions du plan.

Élevons sur un point quelconque d'une de ces divisions une perpendiculaire prolongée jusqu'à la division suivante. Supposons que le centre du cylindre soit sur cette perpendiculaire et à la hauteur y au-dessus de la première de ces deux divisions. En faisant tourner le cylindre autour de son centre et nommant φ l'angle que le cylindre fait avec la perpendiculaire, au moment où il rencontre cette division, 2φ sera la partie de la circonférence décrite par chaque extrémité du cylindre, dans laquelle il rencontre la division; la somme de toutes ces parties sera donc $4\int \varphi dy$, ou $4\varphi y - 4\int y d\varphi$; or on a $y = r \cos \varphi$; cette somme est donc

$$4\varphi y - 4r \sin \varphi + \text{const.}$$

Pour déterminer cette constante, nous observerons que l'intégrale doit s'étendre depuis y nul jusqu'à $y = r$, et par conséquent depuis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\varphi = 0$, ce qui donne

$$\text{const.} = 4r;$$

ainsi la somme dont il s'agit est $4r$. Depuis $y = a - r$ jusqu'à $y = a$, le cylindre peut rencontrer la division suivante, et il est visible que la somme de toutes les parties relatives à cette rencontre est encore $4r$: $8r$ est donc la somme de toutes les parties relatives à la rencontre de l'une ou de l'autre des divisions par le cylindre, dans le mouvement de son centre le long de la perpendiculaire. Mais le nombre de tous les arcs qu'il décrit en tournant en entier sur lui-même, à chaque point de cette perpendiculaire, est $2a\pi$; c'est le nombre de toutes les combinaisons possibles; la probabilité de la rencontre d'une des divisions du plan par le cylindre est donc $\frac{4r}{a\pi}$. Si l'on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport du nombre de fois où le cylindre rencontrera l'une des divisions du plan au nombre total des projections sera, par le n° 16, à très peu près, la valeur de $\frac{4r}{a\pi}$, ce qui fera connaître la valeur de la circonférence 2π . On aura, par le même numéro, la probabilité que l'erreur de cette valeur sera comprise dans des limites données, et il est facile de voir que le rapport $\frac{8r}{a\pi}$ qui, pour un nombre donné de projections, rend l'erreur à craindre la plus petite, est l'unité, ce qui donne la longueur du cylindre égale à l'intervalle des divisions, multiplié par le rapport de la circonférence à quatre diamètres.

Concevons maintenant le plan précédent divisé encore par des lignes perpendiculaires aux précédentes, et équidistantes d'une quantité b égale ou plus grande que la longueur $2r$ du cylindre. Toutes ces lignes formeront avec les premières une suite de rectangles dont b sera la longueur et a la hauteur. Considérons un de ces rectangles; supposons que dans son intérieur on mène à la distance r de chaque côté des lignes qui lui soient parallèles. Elles formeront d'abord un rectangle

intérieur, dont $b - 2r$ sera la longueur, et $a - 2r$ la hauteur; ensuite deux petits rectangles, dont r sera la hauteur, et $b - 2r$ la longueur; puis deux autres petits rectangles dont r sera la longueur et $a - 2r$ la hauteur; enfin, quatre petits carrés dont les côtés seront égaux à r .

Tant que le centre du cylindre sera placé dans le rectangle intérieur, le cylindre, en tournant sur son centre, ne rencontrera jamais les côtés du grand rectangle.

Lorsque le centre du cylindre sera placé dans l'intérieur d'un des rectangles dont r est la hauteur et $b - 2r$ la longueur, il est facile de voir, par ce qui précède, que le produit de $8r$ par la longueur $b - 2r$ sera le nombre des combinaisons correspondantes, dans lesquelles le cylindre rencontrera l'un ou l'autre des côtés b du grand rectangle. Ainsi $8r(b - 2r)$ sera le nombre total des combinaisons correspondantes aux cas dans lesquels, le centre du cylindre étant placé dans l'un ou l'autre de ces petits rectangles, le cylindre rencontre le contour du grand rectangle. Par la même raison, $8r(a - 2r)$ sera le nombre total des combinaisons dans lesquelles, le centre du cylindre étant placé dans l'intérieur des petits rectangles dont r et $a - 2r$ sont les dimensions, le cylindre rencontre le contour du grand rectangle.

Il nous reste à considérer les quatre petits carrés. Soit ABCD l'un d'eux. De l'angle A commun à ce carré et au grand rectangle, comme centre, et du rayon r , décrivons un quart de circonférence se terminant aux points B et D. Tant que le centre du cylindre sera compris dans le quart de cercle formé par cet arc, le cylindre, en tournant, rencontrera dans toutes ses positions le contour du grand rectangle; le nombre des combinaisons dans lesquelles cela aura lieu est donc égal au produit de 2π par la surface du quart de cercle, et par conséquent il est égal à $\frac{\pi^2 r^2}{2}$. Si le centre du cylindre est dans la partie du carré qui est au delà du quart de cercle, le cylindre, en tournant autour de son centre, pourra rencontrer l'un ou l'autre des deux côtés AB et AD prolongés, sans jamais les rencontrer tous deux à la fois. Pour déter-

miner le nombre des combinaisons relatives à cette rencontre, je conçois sur un point quelconque du côté AB, distant de x du point A, une perpendiculaire y dont l'extrémité soit au delà du quart de cercle. Je place le centre du cylindre sur cette extrémité, de laquelle j'abaisse quatre droites égales à r , et dont deux aboutissent sur le côté AB prolongé, si cela est nécessaire, et deux autres sur le côté AD pareillement prolongé. Je nomme 2φ l'angle compris entre les deux premières lignes, et $2\varphi'$ l'angle compris entre les deux secondes. Il est visible que le cylindre, en tournant sur son centre, rencontrera le côté AB prolongé tant qu'une de ses moitiés sera dans l'angle 2φ , et qu'il rencontrera le côté AD prolongé tant qu'une de ses moitiés sera dans l'angle $2\varphi'$; le nombre total des combinaisons dans lesquelles le cylindre rencontrera l'un ou l'autre de ces côtés est donc $4(\varphi + \varphi')$; ainsi ce nombre, relativement à la partie du carré extérieure au quart de cercle, est

$$4 \int (\varphi + \varphi') dx dy;$$

or on a évidemment

$$x = r \cos \varphi', \quad y = r \cos \varphi;$$

l'intégrale précédente devient ainsi

$$4r^2 \int \int (\varphi + \varphi') d\varphi d\varphi' \sin \varphi \sin \varphi',$$

et il est facile de voir que l'intégrale relative à φ' doit être prise depuis $\varphi' = 0$ jusqu'à $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, et que l'intégrale relative à φ doit être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\frac{1}{2}r^2(12 - \pi^2)$ pour cette intégrale. En lui ajoutant $\frac{\pi^2 r^2}{2}$, on aura le nombre des combinaisons relatives au carré, et en quadruplant ce nombre et le réunissant aux nombres précédents des combinaisons relatives à la rencontre du contour du grand rectangle par le cylindre, on aura, pour le nombre total des combinaisons,

$$8(a+b)r - 8r^2.$$

Mais le nombre total des combinaisons possibles est évidemment égal à 2π multiplié par la surface ab du grand rectangle; la probabilité de la rencontre des divisions du plan par le cylindre est donc

$$\frac{4(a+b)r - 4r^2}{ab\pi}.$$

CHAPITRE VI.

DE LA PROBABILITÉ DES CAUSES ET DES ÉVÉNEMENTS FUTURS,
TIRÉE DES ÉVÉNEMENTS OBSERVÉS.

26. La probabilité de la plupart des événements simples est inconnue : en la considérant *a priori*, elle nous paraît susceptible de toutes les valeurs comprises entre zéro et l'unité; mais, si l'on a observé un résultat composé de plusieurs de ces événements, la manière dont ils y entrent rend quelques-unes de ces valeurs plus probables que les autres. Ainsi, à mesure que le résultat observé se compose par le développement des événements simples, leur vraie possibilité se fait de plus en plus connaître, et il devient de plus en plus probable qu'elle tombe dans des limites qui, se resserrant sans cesse, finiraient par coïncider, si le nombre des événements simples devenait infini. Pour déterminer les lois suivant lesquelles cette possibilité se découvre, nous la nommerons x . La théorie exposée dans les Chapitres précédents donnera la probabilité du résultat observé, en fonction de x . Soit y cette fonction; si l'on considère les différentes valeurs de x comme autant de causes de ce résultat, la probabilité de x sera, par le troisième principe du n° 1, égale à une fraction dont le numérateur est y , et dont le dénominateur est la somme de toutes les valeurs de y ; en multipliant donc le numérateur et le dénominateur de cette fraction par dx , cette probabilité sera

$$\frac{y dx}{\int y dx},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. La probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x = \theta$ et $x = \theta'$ est par conséquent égale à

$$(1) \quad \frac{\int y dx}{\int y dx},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à $x = \theta'$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

La valeur de x la plus probable est celle qui rend y un maximum. Nous la désignerons par a . Si aux limites de x , y est nul, alors chaque valeur de y a une valeur égale correspondante de l'autre côté du maximum.

Quand les valeurs de x , considérées indépendamment du résultat observé, ne sont pas également possibles, en nommant z la fonction de x qui exprime leur probabilité, il est facile de voir, par ce qui a été dit dans le Chapitre 1^{er} de ce Livre, qu'en changeant dans la formule (1), y dans yz , on aura la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x = \theta$ et $x = \theta'$. Cela revient à supposer toutes les valeurs de x également possibles *a priori*, et à considérer le résultat observé comme étant formé de deux résultats indépendants, dont les probabilités sont y et z . On peut donc ramener ainsi tous les cas à celui où l'on suppose *a priori*, avant l'événement, une égale possibilité aux différentes valeurs de x , et, par cette raison, nous adopterons cette hypothèse dans ce qui va suivre.

Nous avons donné dans les n° 22 et suivants du Livre 1^{er} les formules nécessaires pour déterminer, par des approximations convergentes, les intégrales du numérateur et du dénominateur de la formule (1), lorsque les événements simples dont se compose l'événement observé sont répétés un très grand nombre de fois; car alors y a pour facteurs des fonctions de x élevées à de grandes puissances. Nous allons, au moyen de ces formules, déterminer la loi de probabilité des valeurs de x , à mesure qu'elles s'éloignent de la valeur a , la plus probable, ou qui rend y un maximum. Pour cela, reprenons la formule (c) du

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} f y dx &= Y \left(U + \frac{1}{2} \frac{d^2 U^3}{1.2. dx^2} + \frac{1.3}{2^2} \frac{d^4 U^5}{1.2.3.4. dx^4} + \dots \right) f dt e^{-t} \\ &+ \frac{Y}{2} e^{-T^2} \left[\frac{d U^3}{dx} - T \frac{d^2 U^3}{1.2. dx^2} + (T^2 + 1) \frac{d^3 U^4}{1.2.3. dx^3} - \dots \right] \\ &- \frac{Y}{2} e^{-T'^2} \left[\frac{d U^3}{dx} + T' \frac{d^2 U^3}{1.2. dx^2} + (T'^2 + 1) \frac{d^3 U^4}{1.2.3. dx^3} + \dots \right]; \end{aligned} \right.$$

e est égal à $\frac{x-a}{\sqrt{\log Y - \log y}}$, et $U, \frac{d U^3}{dx}, \frac{d^2 U^3}{dx^2}, \dots$ sont ce que deviennent $e, \frac{d e^2}{dx}, \frac{d^2 e^3}{dx^2}, \dots$ lorsqu'on y change, après les différentiations, x en a , a étant la valeur de x qui rend y un maximum : T est égal à ce que devient la fonction $\sqrt{\log Y - \log y}$, lorsqu'on change x en $a - \theta$ dans y , et T' est ce que devient la même fonction, lorsqu'on y change x dans $a + \theta'$. L'expression précédente de $f y dx$ donne la valeur de cette intégrale, dans les limites $x = a - \theta$ et $x = a + \theta'$, l'intégrale $f dt e^{-t}$ étant prise depuis $t = -T$ jusqu'à $t = T'$.

Le plus souvent, aux limites de l'intégrale $f y dx$, étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, y est nul; ou, lorsque y n'est pas nul, il devient si petit à ces limites, qu'on peut le supposer nul. Alors, on peut faire à ces limites T et T' infinis, ce qui donne pour l'intégrale $f y dx$, étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

$$f y dx = Y \left(U + \frac{1}{2} \frac{d^2 U^3}{1.2. dx^2} + \frac{1.3}{2^2} \frac{d^4 U^5}{1.2.3.4. dx^4} + \dots \right) \sqrt{\pi};$$

ainsi la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x = a - \theta$ et $x = a + \theta'$ est égale à

$$(3) \quad \frac{f dt e^{-t}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} e^{-T^2} \left[\frac{d U^3}{dx} - T \frac{d^2 U^3}{1.2. dx^2} + (T^2 + 1) \frac{d^3 U^4}{1.2.3. dx^3} - \dots \right] \\ &- \frac{1}{2} e^{-T'^2} \left[\frac{d U^3}{dx} + T' \frac{d^2 U^3}{1.2. dx^2} + (T'^2 + 1) \frac{d^3 U^4}{1.2.3. dx^3} + \dots \right] \end{aligned} \right\}}{\left(U + \frac{1}{2} \frac{d^2 U^3}{1.2. dx^2} + \frac{1.3}{2^2} \frac{d^4 U^5}{1.2.3.4. dx^4} + \dots \right) \sqrt{\pi}}.$$

On voit, par le n° 23 du Livre I^{er}, que, dans le cas où y a pour facteurs

des fonctions de x élevées à de grandes puissances de l'ordre $\frac{1}{x}$, x étant une fraction extrêmement petite, alors U est le plus souvent de l'ordre $\sqrt{x}$, ainsi que ses différences successives; $U, \frac{d U^3}{dx}, \frac{d^2 U^3}{dx^2}, \dots$ sont respectivement des ordres $\sqrt{x}, x, x^2, \dots$; d'où il suit que la convergence des séries de la formule (3) exige que T et T' ne soient pas d'un ordre supérieur à $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Si l'on suppose $\theta = \theta'$, alors on a à fort peu près $T = T'$, et la formule (3) se réduit, en négligeant les termes de l'ordre x , à l'intégrale $\frac{f dt e^{-t}}{\sqrt{\pi}}$, prise depuis $t = -T$ jusqu'à $t = T$; ce qui revient, en négligeant le carré de la différence $T'^2 - T^2$, à doubler l'intégrale précédente et à la prendre depuis t nul jusqu'à

$$t = \sqrt{\frac{T^2 + T'^2}{2}}.$$

Or on a

$$T^2 = \log Y - \log y,$$

et l'on peut supposer

$$\log y = \frac{1}{x} \log \varphi,$$

φ étant une fonction de x ou de $a - \theta$, qui ne renferme plus de facteurs élevés à de grandes puissances. En nommant donc $\Phi, \frac{d \Phi}{dx}, \frac{d^2 \Phi}{dx^2}, \dots$ ce que deviennent, lorsque θ est nul, $\varphi, \frac{d \varphi}{dx}, \frac{d^2 \varphi}{dx^2}, \dots$, en observant ensuite que la condition de Y ou Φ un maximum donne $\frac{d \Phi}{dx} = 0$, on aura

$$x T^2 = - \frac{\varphi^2}{2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{\varphi^3}{6 \Phi} \frac{d^3 \Phi}{dx^3} - \frac{\varphi^4}{8} \left[\frac{d^4 \Phi}{3 \Phi dx^4} - \left(\frac{d^2 \Phi}{\Phi dx^2} \right)^2 \right] + \dots$$

En changeant θ dans $-\theta$, on aura la valeur de $x T'^2$; on aura donc, en négligeant les termes de l'ordre x^2 ,

$$\frac{x(T^2 + T'^2)}{2} = - \frac{\varphi^2}{2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{dx^2};$$

partant,

$$\sqrt{\frac{T^2 + T'^2}{2}} = \frac{\theta}{\sqrt{x}} \sqrt{-\frac{d^2\Phi}{2\Phi dx^2}}.$$

Faisons

$$k = \sqrt{-\frac{d^2\Phi}{2\Phi dx^2}} = \sqrt{-\frac{x d^2Y}{2Y dx^2}},$$

$$\theta = \frac{t\sqrt{x}}{k},$$

la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites

$a \pm \frac{t\sqrt{x}}{k}$ sera

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t'^2} dt',$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$, et pouvant être obtenue d'une manière fort approchée par les formules du n° 27 du Livre I^{er}.

Il résulte de cette expression que la valeur de x la plus probable est a , ou celle qui rend l'événement observé le plus probable, et qu'en multipliant à l'infini les événements simples dont l'événement observé se compose, on peut à la fois resserrer les limites $a \pm \frac{t\sqrt{x}}{k}$, et augmenter la probabilité que la valeur de x tombera entre ces limites; en sorte qu'à l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se confond avec la certitude.

Si l'événement observé dépend d'événements simples de deux différents genres, en nommant x et x' les possibilités de ces deux genres d'événements, on verra, par les raisonnements précédents, que, y étant alors la probabilité de l'événement composé, la fraction

$$(4) \quad \frac{y dx dx'}{\int \int y dx dx'}$$

sera la probabilité des valeurs simultanées de x et de x' , les intégrales du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=1$. En nommant a et a' les valeurs de x et de x' qui

rendent y un maximum, et faisant $x=a+\theta$, $x'=a'+\theta'$, on trouvera, par l'analyse du n° 27 du Livre I^{er}, que si l'on suppose

$$\frac{\theta}{\sqrt{2Y}} \sqrt{-\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}} - \theta' \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial x'}}{2Y} \sqrt{\frac{-2Y}{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}} = t,$$

$$\frac{\theta'}{\sqrt{-2Y \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}} \sqrt{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial x'}\right)^2} = t',$$

la fraction (4) prendra cette forme

$$\frac{dt dt' e^{-t^2-t'^2}}{\int \int dt dt' e^{-t^2-t'^2}}.$$

Les intégrales du dénominateur doivent être prises depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, et depuis $t'=-\infty$ jusqu'à $t'=\infty$; car les intégrales relatives à x et x' de la fraction (4) étant prises depuis $x=0$ et $x'=0$ jusqu'à x et x' égaux à l'unité, et à ces limites, les valeurs de θ et de θ' étant $-a$ et $1-a$, $-a'$ et $1-a'$, les limites de t et de t' sont égales à ces dernières limites multipliées par des quantités de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{x}}$: ainsi l'exponentielle $e^{-t^2-t'^2}$ est excessivement petite à ces limites, et l'on peut, sans erreur sensible, étendre les intégrales du dénominateur de la fraction précédente jusqu'aux valeurs infinies positives et négatives des variables t et t' . Ce dénominateur devient ainsi égal à π ; et la probabilité que les valeurs de θ et de θ' sont comprises dans les limites

$$\theta'=0, \quad \theta' = \frac{t' \sqrt{-2Y \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}}{\sqrt{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial x'}\right)^2}},$$

$$\theta=0, \quad \theta = \frac{t \sqrt{2Y}}{\sqrt{-\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}} + \frac{t' \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial x'}}{\sqrt{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial x'}\right)^2}} \sqrt{\frac{-2Y}{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}}$$

est égale à

$$\frac{1}{\pi} \int \int dt dt' e^{-t-t'},$$

les intégrales étant prises depuis t et t' nuls.

On voit par cette formule que, dans le cas de deux genres différents d'événements simples, la probabilité que leurs possibilités respectives sont celles qui rendent l'événement composé le plus probable devient de plus en plus grande, et finit par se confondre avec la certitude; ce qui a lieu généralement pour un nombre quelconque de genres différents d'événements simples, qui entrent dans l'événement observé.

Si l'on conçoit une urne renfermant une infinité de boules de plusieurs couleurs différentes, et qu'après en avoir tiré un grand nombre n , p sur ce nombre aient été de la première couleur, q de la seconde, r de la troisième, etc.; en désignant par $x, x', x'', \dots$ les probabilités respectives d'amener dans un seul tirage une de ces couleurs, la probabilité de l'événement observé sera le terme qui a pour facteur $x^p x'^q x''^r \dots$, dans le développement du polynôme

$$(x + x' + x'' + \dots)^n,$$

où l'on a

$$x + x' + x'' + \dots = 1,$$

$$p + q + r + \dots = n;$$

on pourra donc supposer ici $y = x^p x'^q x''^r \dots$, et alors on a pour les valeurs de $x, x', x'', \dots$ qui rendent l'événement observé le plus probable

$$x = \frac{p}{n}, \quad x' = \frac{q}{n}, \quad x'' = \frac{r}{n}, \quad \dots$$

Ainsi les valeurs les plus probables sont proportionnelles aux nombres des arrivées des couleurs, et lorsque le nombre n est un grand nombre, les probabilités respectives des couleurs sont à très peu près égales aux nombres de fois qu'elles sont arrivées divisés par le nombre des tirages.

27. Pour donner une application de la formule précédente, considérons le cas où deux joueurs A et B jouent ensemble avec cette condition, que celui qui sur trois coups en aura gagné deux gagne la partie, et supposons que, sur un très grand nombre n de parties, A en ait gagné un nombre i . En nommant x la probabilité de A pour gagner un coup, et par conséquent $1-x$ la probabilité correspondante de B, la probabilité de A pour gagner une partie sera la somme des deux premiers termes du binôme $(x + 1-x)^3$, et la probabilité correspondante de B sera la somme des deux derniers termes. Ces probabilités sont donc $x^2(3-2x)$ et $(1-x)^2(1+2x)$; ainsi la probabilité que, sur n parties, A en gagnera i , et B, $n-i$, sera proportionnelle à $x^{2i}(3-2x)^{n-2i}(1-x)^{2(n-i)}(1+2x)^{n-i}$. En nommant donc y cette fonction, et a la valeur de x qui la rend un maximum, la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $a-\theta$ et $a+\theta$ sera

$$\frac{\int y dx}{\int y dx},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = a - \theta$ jusqu'à $x = a + \theta$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Si l'on fait

$$\frac{1}{n} = a, \quad \frac{i}{n} = i',$$

on aura, par le numéro précédent,

$$y = x^{2i'}(3-2x)^{n-2i'}(1-x)^{2(n-i')}(1+2x)^{n-i'}.$$

La condition du maximum de y ou de φ donne $d\varphi = 0$; par conséquent, a étant la valeur de x correspondante à ce maximum, on aura

$$0 = \frac{2i'}{a} - \frac{2i'}{3-2a} - \frac{2(1-i')}{1-a} + \frac{2(1-i')}{1+2a},$$

d'où l'on tire

$$i' = a^2(3-2a), \quad 1-i' = (1-a)^2(1+2a);$$

ensuite on a

$$-\frac{d^2\varphi}{2\varphi dx^2} = \frac{18}{(3-2a)(1+2a)} = h^2.$$

La probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $a \pm \frac{r}{\sqrt{n}}$ sera donc, par le numéro précédent, égale à

$$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(3-2a)(1+2a)}} \int dr e^{\frac{-18r^2}{(3-2a)(1+2a)}}.$$

On verra facilement que ce résultat s'accorde avec celui que nous avons trouvé dans le n° 16, par une analyse moins directe que celle-ci.

La partie finit en deux coups, si A ou B gagne les deux premiers coups, le troisième coup n'étant pas joué, parce qu'il devient inutile. Ainsi les nombres des parties gagnées par l'un et l'autre des joueurs n'indiquent pas le nombre des coups joués; mais ils indiquent que ce dernier nombre est contenu dans des limites données, avec une probabilité qui croît sans cesse, à mesure que les parties se multiplient. La recherche de ce nombre et de cette probabilité étant très propre à éclaircir l'analyse précédente, nous allons nous en occuper.

La probabilité que A gagnera une partie en deux coups est x^2 , x exprimant, comme ci-dessus, sa probabilité de gagner à chaque coup. La probabilité qu'il gagnera la partie en trois coups est $2x^2(1-x)$. La somme $x^2(3-2x)$ de ces deux probabilités est la probabilité que A gagnera la partie. Ainsi, pour avoir la probabilité que, sur i parties gagnées par le joueur A, s seront de deux coups, il faut élever à la puissance i le binôme

$$\frac{x^2}{x^2(3-2x)} + \frac{2x^2(1-x)}{x^2(3-2x)}$$

ou

$$\frac{1}{3-2x} + \frac{2(1-x)}{3-2x},$$

et le terme $i-s+1$ du développement de cette puissance sera cette probabilité qui est ainsi égale à

$$\frac{1.2.3...i.2^{i-s}(1-x)^{i-s}}{1.2.3...s.1.2.3...(i-s)(3-2x)^i}.$$

Le plus grand terme de ce développement est, par le n° 16, celui dans

lequel les exposants s et $i-s$ du premier et du second terme du binôme sont à très peu près dans le rapport de ces termes, ce qui donne

$$s = \frac{i}{3-2x}.$$

Nous nommerons s' cette quantité, et nous ferons

$$s = s' + l.$$

On aura, par le n° 16,

$$\sqrt{\frac{i}{2s'\pi(i-s')}} dl e^{\frac{-l^2}{2s'(i-s')}}.$$

pour la probabilité de s , correspondante à l'adresse x du joueur A.

On trouvera pareillement que, si l'on nomme z le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur B, sur le nombre $n-i$ de parties qu'il a gagnées, la valeur de z la plus probable sera $\frac{n-i}{1+2x}$, et qu'en désignant par z' cette quantité et faisant

$$z = z' + l,$$

la probabilité de z correspondante à x sera

$$\sqrt{\frac{n-i}{2z'\pi(n-i-z')}} dl e^{\frac{-l^2}{2z'(n-i-z')}}.$$

Le produit de ces deux probabilités est donc la probabilité correspondante à x , que le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur A, sera $s' + l$, tandis que le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur B, sera $z' + l$. Soit

$$q = \frac{i}{2s'(i-s')}, \quad q' = \frac{n-i}{2z'(n-i-z')};$$

on aura, pour cette probabilité composée,

$$\frac{\sqrt{qq'}}{\pi} dl e^{-q l^2 - q' l^2}.$$

Il faut multiplier cette probabilité par celle de x , qui, comme on l'a vu

dans le numéro précédent, est $\frac{y dx}{f y}$; le produit est

$$(e) \quad \frac{\sqrt{q q'}}{\pi} \frac{y dx}{f y} d l d l' c^{-q l' - q' l'}$$

L'intégrale du dénominateur doit être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et par le n° 27 du Livre I^{er}, cette intégrale est, à très peu près,

$$Y \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{-2Y}{d^2 Y}}.$$

Si l'on nomme X la fonction

$$\sqrt{q q'} c^{-q l' - q' l'}$$

et que l'on désigne par a' la valeur de x qui rend Xy un maximum, et par X' et Y' ce que deviennent X et y lorsqu'on y change x en a' , on aura, par le numéro précédent, en faisant $x = a' + \theta$,

$$y dx \sqrt{q q'} c^{-q l' - q' l'} = Y' X' d\theta c^{\frac{d^2 Y'}{2 X' Y' d x^2}}.$$

Il est facile de voir que a' ne diffère de la valeur a de x qui rend y un maximum, que d'une quantité de l'ordre α , que nous désignerons par $f\alpha$; en substituant dans Y , $a + f\alpha$ au lieu de a , pour en former Y' , et développant par rapport aux puissances de α , on verra que $\frac{dY}{da}$ étant nul, parce que Y est le maximum de y , Y' ne diffère de Y que de quantités de l'ordre α ; ainsi l'on a, aux quantités près d'un ordre inférieur à celui que l'on conserve, et en observant que $\frac{dX'}{X' d\alpha}$ et $\frac{d^2 X'}{X' d\alpha^2}$ peuvent être négligées par rapport à $\frac{dY'}{Y' d\alpha}$,

$$\frac{d^2 X' Y'}{2 X' Y' d\alpha^2} = \frac{d^2 Y}{2 Y d\alpha^2};$$

la fonction (e) devient par là

$$(e') \quad \frac{\sqrt{q q'}}{\pi \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{d^2 Y}{2 Y d\alpha^2}} d l d l' d\theta c^{-q l' - q' l' + \frac{d^2 Y'}{2 Y' d\alpha^2}}$$

On doit, dans cette fonction, supposer $x = a$, ce qui donne, en substituant pour i sa valeur $na^2(3 - 2a)$,

$$q = \frac{3 - 2a}{4na^2(1 - a)}, \quad q' = \frac{1 + 2a}{4na(1 - a)^2}.$$

Ensuite, x étant égal à $a' + \theta$, il est égal à $a + f\alpha + \theta$; en négligeant donc les quantités de l'ordre α , on aura

$$x = a + \theta.$$

Maintenant le nombre des parties de deux coups étant

$$\frac{i}{3 - 2a} + \frac{n - i}{1 + 2a} + l + l',$$

ce nombre sera

$$\frac{i}{3 - 2a} + \frac{n - i}{1 + 2a} + \left[\frac{2i}{(3 - 2a)^2} - \frac{2(n - i)}{(1 + 2a)^2} \right] \theta + l + l'.$$

Faisons

$$t = \left[\frac{2i}{(3 - 2a)^2} - \frac{2(n - i)}{(1 + 2a)^2} \right] \theta + l + l',$$

et désignons par q'' la quantité

$$-\frac{d^2 Y}{2 Y d\alpha^2} \left[\frac{2i}{(3 - 2a)^2} - \frac{2(n - i)}{(1 + 2a)^2} \right]^2,$$

qui, après toutes les réductions, se réduit à

$$\frac{9(3 - 2a)(1 + 2a)}{2n(1 - 2a)^2(3 - 2a + 2a^2)^2},$$

la fonction (e') deviendra

$$(e'') \quad \frac{\sqrt{q q' q''}}{\pi \sqrt{\pi}} d l d l' d l'' c^{-q l' - q' l' - q''(l - l' - l'')^2}.$$

En l'intégrant depuis $l = -\infty$ jusqu'à $l = \infty$, et depuis $l' = -\infty$ jusqu'à $l' = \infty$, on aura la probabilité que le nombre des parties de

deux coups sera égal à

$$\frac{i}{3-2a} + \frac{n-i}{1+2a} + t;$$

or on a

$$\int dl e^{-q'l - q' l^2 - q''(l-l')^2} = \int dl e^{-\frac{qq''}{q+q'}(l-l')^2 - q' l^2 - q' l} \left[l - \frac{q''}{q+q'}(l-l') \right].$$

Cette dernière intégrale, prise depuis $l = -\infty$ jusqu'à $l = \infty$, est, par ce qui précède,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q+q''}} e^{-\frac{qq''}{q+q'}(l-l')^2 - q' l^2 - q' l}.$$

En la multipliant par dl' et la mettant sous cette forme

$$\frac{\sqrt{\pi} dl'}{\sqrt{q+q''}} e^{-\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''} - \frac{qq'+qq''+q'q''}{q+q''} \left(l - \frac{qq''}{qq'+qq''+q'q''} \right)^2},$$

et l'intégrant depuis $l' = -\infty$ jusqu'à $l' = \infty$, on aura

$$\frac{\pi}{\sqrt{qq'+qq''+q'q''}} e^{-\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}}.$$

La fonction (t^*) intégrée par rapport à l et l' , dans les limites infinies positives et négatives de ces variables, devient ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}} dt e^{-\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}}.$$

Ainsi la probabilité que le nombre de parties de deux coups sera compris dans les limites

$$\frac{i}{3-2a} + \frac{n-i}{1+2a} \pm t = n[a^2 + (1-a)^2] \pm t$$

est égale au double de l'intégrale de la différentielle précédente, prise depuis t nul. On doit observer que q, q', q'' sont de l'ordre $\frac{1}{n}$, en sorte que la quantité $\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}$ est du même ordre. Représentons-la par

$\frac{k'^2}{n}$, et faisons $t = r\sqrt{n}$; on aura

$$(t^*) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int k' dr e^{-k'^2 r^2},$$

pour l'expression de la probabilité que le nombre de parties de deux coups sera compris dans les limites

$$n[a^2 + (1-a)^2] \pm r\sqrt{n},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul. L'intervalle de ces deux limites est $2r\sqrt{n}$, et le rapport de cet intervalle au nombre n de parties est $\frac{2r}{\sqrt{n}}$. Ce rapport diminue sans cesse à mesure que n augmente, et r peut en même temps croître indéfiniment, de sorte que l'intégrale précédente approche indéfiniment de l'unité.

Le nombre total des coups est le triple du nombre des parties de trois coups, plus le double du nombre des parties de deux coups, ou le triple du nombre total n des parties, moins le nombre des parties de deux coups; il est donc

$$2n(1+a-a^2) \mp r\sqrt{n}.$$

L'intégrale (t^*) est donc l'expression de la probabilité que le nombre des coups sera compris dans ces limites.

Si, au lieu de connaître le nombre i des parties gagnées par le joueur A et le nombre total n de parties, on connaît le nombre t et le nombre total des coups, la même analyse pourra servir à déterminer le nombre inconnu n des parties. Pour cela, désignons par h le nombre total des coups; on aura, par ce qui précède, les deux équations

$$3n - \frac{i}{3-2a} - \frac{n-i}{1+2a} = h \pm r\sqrt{n},$$

$$\frac{t}{a} - \frac{i}{3-2a} = \frac{n-i}{1-a} - \frac{n-t}{1+2a}.$$

Ces équations donnent a et n en fonctions de $h \pm r\sqrt{n}$. Supposons

$$n = i \psi \left(\frac{h \pm r\sqrt{n}}{i} \right), \quad a = \Gamma \left(\frac{h \pm r\sqrt{n}}{i} \right);$$

on aura, en réduisant en série,

$$n = i \psi \left(\frac{h}{i} \right) \pm ir\sqrt{n} \frac{d\psi \left(\frac{h}{i} \right)}{dh} + \dots;$$

on substituera dans K , au lieu de n et de a , $i \psi \left(\frac{h}{i} \right)$ et $\Gamma \left(\frac{h}{i} \right)$; l'intégrale ($\pm$) est alors la probabilité que le nombre n des parties est compris dans les limites

$$i \psi \left(\frac{h}{i} \right) \pm ir \sqrt{i \psi \left(\frac{h}{i} \right)} \frac{d\psi \left(\frac{h}{i} \right)}{dh}.$$

28. C'est principalement aux naissances que l'analyse précédente est applicable, et l'on peut en déduire, non seulement pour l'espèce humaine, mais pour toutes les espèces d'êtres organisés, des résultats intéressants. Jusqu'ici les observations de ce genre n'ont été faites en grand nombre que sur l'espèce humaine; nous allons soumettre au calcul les principales.

Considérons d'abord les naissances observées à Paris, à Londres et dans le royaume de Naples. Dans l'espace des quarante années écoulées depuis le commencement de 1745, époque où l'on a commencé à distinguer à Paris, sur les registres, les naissances des deux sexes, jusqu'à la fin de 1784, on a baptisé dans cette capitale 393386 garçons et 377555 filles, les enfants trouvés étant compris dans ce nombre: cela donne à peu près $\frac{22}{21}$ pour le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles.

Dans l'espace des quatre-vingt-quinze années écoulées depuis le commencement de 1664 jusqu'à la fin de 1758, il est né à Londres 737629 garçons et 698958 filles, ce qui donne $\frac{12}{11}$ à peu près, pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Enfin, dans l'espace des neuf années écoulées, depuis le commence-

ment de 1774 jusqu'à la fin de 1782, il est né dans le royaume de Naples, la Sicile non comprise, 782352 garçons et 746821 filles, ce qui donne $\frac{22}{21}$ pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Les plus petits de ces nombres de naissances sont relatifs à Paris; d'ailleurs c'est dans cette ville que les naissances des garçons et des filles approchent le plus de l'égalité. Par ces deux raisons, la probabilité que la possibilité de la naissance d'un garçon surpasse $\frac{1}{2}$ doit y être moindre qu'à Londres et dans le royaume de Naples. Déterminons numériquement cette probabilité.

Nommons p le nombre des naissances masculines observées à Paris, q celui des naissances féminines, et x la possibilité d'une naissance masculine, c'est-à-dire la probabilité qu'un enfant qui doit naître sera un garçon; $1 - x$ sera la possibilité d'une naissance féminine, et l'on aura la probabilité que, sur $p - q$ naissances, p seront masculines, et q seront féminines, égale à

$$\frac{1.2.3\dots(p+q)}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots q} x^p (1-x)^q.$$

En faisant donc

$$y = x^p (1-x)^q,$$

la probabilité que la valeur de x est comprise dans des limites données sera, par le n° 26, égale à

$$\frac{\int y dx}{\int y dx},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, et celle du numérateur étant prise dans les limites données. Si l'on prend zéro et $\frac{1}{2}$ pour ces limites, on aura la probabilité que la valeur de x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$. La valeur qui correspond au maximum de y est $\frac{p}{p+q}$, et, vu la grandeur des nombres p et q , l'excès de $\frac{p}{p+q}$ sur $\frac{1}{2}$ est trop considérable pour employer ici la formule (c) du n° 27 du Livre I^{er}, dans l'approximation de l'intégrale $\int y dx$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à

$x = \frac{1}{2}$; il faut donc, dans ce cas, faire usage de la formule (A) du n° 22 du même Livre. Ici l'on a

$$v = -\frac{y dx}{dy} = -\frac{x(1-x)}{p-(p+q)x};$$

la formule citée (A) donne ainsi, pour l'intégrale $\int y dx$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2^{p+q+1}(p-q)} \left[1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} + \dots \right].$$

Quant à l'intégrale $\int y dx$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, on a, par le n° 26,

$$\int y dx = Y \left(U + \frac{1}{2} \frac{d^2 U^2}{dx^2} + \dots \right) \sqrt{\pi},$$

Y étant ce que devient y à son maximum, ou lorsqu'on y substitue

$\frac{p}{p+q}$ pour x; v est ici égal à $\frac{x - \frac{p}{p+q}}{\sqrt{\log Y - \log y}}$, et U, $\frac{d^2 U^2}{dx^2}$, ... sont ce que deviennent v, $\frac{d^2 v^2}{dx^2}$, ... lorsqu'on y fait, après les différentiations, $x = \frac{p}{p+q}$. On trouve ainsi, pour l'intégrale $\int y dx$ prise depuis x nul jusqu'à $x = 1$,

$$\int y dx = \frac{p^{\frac{p-1}{2}} q^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{(p+q)^2 - 13pq}{12pq(p+q)} + \dots \right];$$

la probabilité que la valeur de x ne surpasses pas $\frac{1}{2}$ est donc égale à

$$(o) \quad \frac{(p+q)^{\frac{p+q+\frac{1}{2}}{2}}}{(p-q)\sqrt{\pi} 2^{\frac{p+q+\frac{1}{2}}{2}} p^{\frac{p-1}{2}} q^{\frac{q-1}{2}}} \left[1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{(p+q)^2 - 13pq}{12pq(p+q)} - \dots \right].$$

Pour appliquer de grands nombres à cette formule, il faudrait avoir les logarithmes de p, q et p - q, avec douze décimales au moins : on peut y suppléer de cette manière. On a

$$\log \left[\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q} \right] = -p \log \left(1 + \frac{p-q}{p+q} \right) - q \log \left(1 - \frac{p-q}{p+q} \right).$$

Lorsque les logarithmes sont hyperboliques, le second membre de cette équation, réduit en série, devient

$$-(p+q) \left[\frac{\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^4}{3.4} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^6}{5.6} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^8}{7.8} + \dots \right].$$

On aura donc, par cette série très convergente, le logarithme hyperbolique de $\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q}$. En le multipliant par 0,43429448, on le convertira en logarithme tabulaire, et, en lui ajoutant le logarithme tabulaire de $\frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{2(p-q)\sqrt{2pq\pi}}$, on aura le logarithme tabulaire du facteur qui multiplie la série (o). Si l'on nomme $\frac{1}{\mu}$ ce facteur et si l'on fait

$$p = 393386, \quad q = 377555,$$

on trouve en logarithme tabulaire

$$\log \mu = 72,2511780,$$

et la série (o) devient

$$\frac{1}{\mu} (1 - 0,0030761 + \dots).$$

Cette quantité d'une petitesse excessive, retranchée de l'unité, donnera la probabilité qu'à Paris la possibilité des naissances des garçons surpasses celles des filles; d'où l'on voit que l'on doit regarder cette probabilité comme étant égale, au moins, à celle des faits historiques les plus avérés.

Si l'on applique la formule (o) aux naissances observées dans les principales villes de l'Europe, on trouve que la supériorité des naissances des garçons sur les naissances des filles, observée partout depuis Naples jusqu'à Pétersbourg, indique une plus grande possibilité des naissances des garçons, avec une probabilité extrêmement approchante de la certitude. Ce résultat paraît donc être une loi générale, du moins en Europe, et si, dans quelques petites villes, où l'on n'a observé qu'un nombre peu considérable de naissances, la nature

semble s'en écarter, il y a tout lieu de croire que cet écart n'est qu'apparent, et qu'à la longue les naissances observées dans ces villes offriraient, en se multipliant, un résultat semblable à celui des grandes villes. Plusieurs philosophes, trompés par ces anomalies, ont cherché la cause de phénomènes qui ne sont que l'effet du hasard; ce qui prouve la nécessité de faire précéder de pareilles recherches par celle de la probabilité avec laquelle les observations indiquent les phénomènes dont on veut déterminer la cause. Je prends pour exemple la petite ville de Vitteaux, dans laquelle, sur 415 naissances observées pendant cinq années, il est né 203 garçons et 212 filles; p étant ici moindre que q , l'ordre naturel paraît renversé. Voyons quelle est, d'après ces observations, la probabilité que les facilités des naissances des garçons surpassent dans cette ville celles des naissances des filles. Cette probabilité est $\frac{\int y dx}{\int y dx}$, l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. La formule (o), qui, retranchée de l'unité, donne cette fraction, devient ici divergente; nous emploierons alors la formule (3) du n° 26, qui se réduit à fort peu près à son premier terme $\frac{f dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$, l'intégrale étant prise depuis la valeur de t qui correspond à $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à la valeur de t qui correspond à $x = 1$. Or on a, par le numéro cité,

$$t^2 = \log Y - \log y,$$

y étant $x^p(1-x)^q$, et Y étant la valeur de y correspondante au maximum de y , qui a lieu lorsque $x = \frac{p}{p+q}$; la valeur de t^2 qui correspond

à $x = \frac{1}{2}$ est $-\log \left[\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p q^q} \right]$, ce logarithme étant hyperbolique, et étant donné, par ce qui précède, par une série très convergente. La valeur de t^2 qui correspond à $x = 1$ est $t^2 = \infty$; on a donc ainsi les deux limites de l'intégrale $\int dt e^{-t^2}$, intégrale qu'il sera facile d'obtenir par les formules que nous avons données pour cet objet. On trouve ainsi la probabilité qu'à Vitteaux les facilités des naissances des gar-

çons l'emportent sur celles des filles égale à 0,33; la supériorité de la facilité des naissances des filles est donc indiquée par ces observations, avec une probabilité égale à 0,67, probabilité beaucoup trop faible pour balancer l'analogie qui nous porte à penser qu'à Vitteaux, comme dans toutes les villes où l'on a observé un nombre considérable de naissances, la possibilité des naissances des garçons l'emporte sur celle des naissances des filles.

29. On a vu qu'à Londres le rapport observé des naissances des garçons à celles des filles est égale à $\frac{13}{11}$, tandis qu'à Paris celui des baptêmes des garçons à ceux des filles n'est que $\frac{25}{31}$. Cela semble indiquer une cause constante de cette différence. Déterminons la probabilité de cette cause.

Soient p et q les nombres des baptêmes des garçons et des filles, faits à Paris dans l'intervalle du commencement de 1745 à la fin de 1784; en désignant par x la possibilité du baptême d'un garçon, et faisant, comme dans le numéro précédent,

$$y = x^p(1-x)^q,$$

la valeur de x la plus probable sera celle qui rend y un maximum: elle est donc $\frac{p}{p+q}$; en supposant ensuite

$$x = \frac{p}{p+q} + \theta,$$

la probabilité de la valeur de θ sera, par le n° 26, égale à

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(p+q)^2}{2pq}} e^{-\frac{(p+q)^2}{2pq} \theta^2}.$$

En désignant par p' , q' et θ' ce que deviennent p , q et θ pour Londres, on aura

$$\frac{d\theta'}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(p'+q')^2}{2p'q'}} e^{-\frac{(p'+q')^2}{2p'q'} \theta'^2}.$$

pour la probabilité de θ ; le produit

$$\frac{d\theta d\theta'}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^2 (p'+q')^2}{4pq p'q'}} e^{-\frac{(p+q)^2}{2pq} \theta^2 - \frac{(p'+q')^2}{2p'q'} \theta'^2}$$

de ces deux probabilités sera donc la probabilité de l'existence simultanée de θ et de θ' . Faisons

$$\frac{p'}{p'+q'} + \theta' = \frac{p}{p+q} + \theta + t;$$

la fonction différentielle précédente devient

$$\frac{d\theta dt}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^2 (p'+q')^2}{4pq p'q'}} e^{-\frac{(p+q)^2}{2pq} \theta^2 - \frac{(p'+q')^2}{2p'q'} \left[\theta + t - \frac{pq - pq'}{(p+q)(p'+q')} \right]^2}$$

En l'intégrant pour toutes les valeurs possibles de θ et ensuite pour toutes les valeurs positives de t , on aura la probabilité que la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande à Londres qu'à Paris. Les valeurs de θ peuvent s'étendre depuis θ égal à $-\frac{p}{p+q}$ jusqu'à θ égal à $1 - \frac{p}{p+q}$; mais, lorsque p et q sont de très grands nombres, le fac-

teur $e^{-\frac{(p+q)^2}{2pq} \theta^2}$ est si petit à ces deux limites qu'on peut le regarder comme nul; on peut donc étendre l'intégrale relative à θ , depuis $\theta = -\infty$ jusqu'à $\theta = \infty$. On voit, par la même raison, que l'intégrale relative à t peut être étendue depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$. En suivant le procédé du n° 27 pour ces intégrations multiples, on trouvera facilement que, si l'on fait

$$k^2 = \frac{(p+q)^2 (p'+q')^2}{2pq(p+q)^2 + 2pq(p'+q')^2},$$

$$h = \frac{pq - pq'}{(p+q)(p'+q')},$$

$$\theta + \frac{2pqk^2}{(p+q)^2} (t-h) = t',$$

ce qui donne $d\theta = dt'$, la différentielle précédente, intégrée d'abord par

rapport à t' depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = \infty$, et ensuite depuis $t = 0$ jusqu'à t infini, donnera

$$\int_0^\infty \frac{k dt}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2(t-h)^2}$$

pour la probabilité qu'à Londres la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande qu'à Paris. Si l'on fait

$$k(t-h) = t'',$$

cette intégrale devient

$$\int_0^\infty \frac{dt''}{\sqrt{\pi}} e^{-t''^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t'' = -kh$ jusqu'à $t'' = \infty$, et il est visible qu'elle est égale à

$$1 - \int_{-\infty}^{-kh} \frac{dt''}{\sqrt{\pi}} e^{-t''^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t'' = kh$ jusqu'à t'' infini. De là il suit, par le n° 27 du Livre I^{er}, que, si l'on suppose

$$i^2 = \frac{pq'(p+q)^2 + pq(p'+q')^2}{(p+q)(p'+q')(pq - pq')^2},$$

la probabilité que la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande à Londres qu'à Paris a pour expression

$$[p] = 1 - \frac{ie^{-\frac{1}{2i^2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + \frac{i^2}{2i^2}} \frac{1}{1 + \frac{3i^2}{2i^2}} \frac{1}{1 + \frac{5i^2}{2i^2}} \dots$$

En faisant dans cette formule

$$p = 393386, \quad q = 377555,$$

$$p' = 737629, \quad q' = 698978,$$

elle devient

$$1 - \frac{1}{328269}.$$

Il y a donc 328 268 à parier contre un qu'à Londres la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande qu'à Paris. Cette probabilité approche tellement de la certitude, qu'il y a lieu de rechercher la cause de cette supériorité.

Parmi les causes qui peuvent la produire, il m'a paru que les baptêmes des enfants trouvés, qui font partie de la liste annuelle des baptêmes à Paris, devaient avoir une influence sensible sur le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles, et qu'ils devaient diminuer ce rapport, si, comme il est naturel de le croire, les parents des campagnes environnantes, trouvant de l'avantage à retenir près d'eux les enfants mâles, en avaient envoyé à l'hospice des Enfants-Trouvés de Paris, dans un rapport moindre que celui des naissances des deux sexes. C'est ce que le relevé des registres de cet hospice m'a fait voir avec une très grande probabilité. Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, on y a baptisé 163 499 garçons et 159 405 filles, nombre dont le rapport est $\frac{25}{24}$, et diffère trop du rapport $\frac{25}{24}$ des baptêmes des garçons et des filles à Paris, pour être attribué au simple hasard.

30. Déterminons, d'après les principes précédents, les probabilités des résultats fondés sur les Tables de mortalité ou d'assurance, construites sur un grand nombre d'observations. Supposons d'abord que, sur un nombre p d'individus d'un âge donné A , on ait observé qu'il en existe encore le nombre q à l'âge $A + a$; on demande la probabilité que, sur p' individus de l'âge A , il en existera $q' + z$ à l'âge $A + a$, la raison de p' et q' étant la même que celle de p à q .

Soit x la probabilité d'un individu de l'âge A , pour vivre à l'âge $A + a$; la probabilité de l'événement observé est alors le terme du binôme $x + (1 - x)^p$ qui a x^q pour facteur; cette probabilité est donc

$$\frac{1.2.3 \dots p}{1.2.3 \dots (p - q) 1.2.3 \dots q} x^q (1 - x)^{p - q};$$

ainsi la probabilité de la valeur de x , prise de l'événement observé,

est

$$\frac{x^q dx (1 - x)^{p - q}}{\int x^q dx (1 - x)^{p - q}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

La probabilité que, sur les p' individus de l'âge A , $q' + z$ vivront à l'âge $A + a$ est

$$\frac{1.2.3 \dots p'}{1.2.3 \dots (q' + z) 1.2.3 \dots (p' - q' - z)} x^{q' + z} (1 - x)^{p' - q' - z}.$$

En multipliant cette probabilité par la probabilité précédente de la valeur de x , le produit intégré depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ sera la probabilité de l'existence de $q' + z$ personnes à l'âge $A + a$. En nommant donc P cette probabilité, on aura

$$P = \frac{1.2.3 \dots p' \int x^{q' + z} dx (1 - x)^{p' - q' - z}}{1.2.3 \dots (q' + z) 1.2.3 \dots (p' - q' - z) \int x^q dx (1 - x)^{p - q}},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. On a, par le n° 28, à très peu près,

$$\begin{aligned} \int x^{q' + z} dx (1 - x)^{p' - q' - z} &= \sqrt{2\pi} \left[(q' + z) \left(1 + \frac{z}{q' + z} \right) \right]^{q' + z + \frac{1}{2}} \\ &\times \frac{\left[(p' - q' - z) \left(1 - \frac{z}{p' - q' - z} \right) \right]^{p' - q' - z + \frac{1}{2}}}{(p' + p')^{p' + p' + \frac{1}{2}}}, \\ \int x^q dx (1 - x)^{p - q} &= \sqrt{2\pi} \frac{q^{q - \frac{1}{2}} (p - q)^{p - q + \frac{1}{2}}}{p^{p + \frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Ensuite, par le n° 33 du Livre I^{er}, on a

$$\begin{aligned} 1.2.3 \dots p' &= p'^{p' + \frac{1}{2}} e^{-p'} \sqrt{2\pi}, \\ 1.2.3 \dots (q' + z) &= q'^{q' + z + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{z}{q'} \right)^{q' + z + \frac{1}{2}} e^{-q' - z} \sqrt{2\pi}, \\ 1.2.3 \dots (p' - q' - z) &= (p' - q')^{p' - q' - z + \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z}{p' - q'} \right)^{p' - q' - z + \frac{1}{2}} e^{-p' + q' + z} \sqrt{2\pi}; \end{aligned}$$

enfin on a $q' = \frac{qp'}{p}$. Cela posé, on trouve, après toutes les réductions,

$$P = \sqrt{\frac{p^3}{qp'(p-q)(p+p')2\pi}} \frac{\left(1 + \frac{z}{q+q'}\right)^{q+q'+z+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z}{p+p'-q-q'}\right)^{p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{z}{q}\right)^{q'+z+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z}{p'-q}\right)^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on prend le logarithme hyperbolique du second membre de cette équation, que l'on réduise ce logarithme en série ordonnée par rapport aux puissances de z , et que l'on néglige les puissances supérieures au carré, on aura, en repassant du logarithme à la fonction,

$$P = \sqrt{\frac{p^3}{qp'(p-q)(p+p')2\pi}} \left[1 + \frac{(2q-p)p^2z}{2qp'(p-q)(p+p')} \right] e^{\frac{-p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}.$$

p, q, p' étant supposés de très grands nombres de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, le coefficient de z est très petit de l'ordre α ; celui de $-z^2$ est très petit et du même ordre. Mais, si l'on suppose $\frac{z}{p}$ de l'ordre $\sqrt{\alpha}$, on pourra négliger, dans l'expression précédente, le terme dépendant de la première puissance de z , comme très petit de l'ordre $\sqrt{\alpha}$. De plus, ce terme se détruit lui-même, lorsque l'on a égard à la fois aux valeurs positives et négatives de z . En le négligeant donc, on aura

$$P = \sqrt{\frac{p^3}{qp'(p-q)(p+p')2\pi}} \int dz e^{-\frac{p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}.$$

pour l'expression de la probabilité que, sur p' individus de l'âge A , le nombre de ceux qui parviendront à l'âge $A+a$ sera compris dans les limites $q' \pm z$, l'intégrale étant prise depuis z nul.

Supposons maintenant que l'on ait trouvé par l'observation que, sur p individus de l'âge A , q vivaient encore à l'âge $A+a$, et r à l'âge $A+a+a'$; on demande la probabilité que, sur p' individus du même âge A , $\frac{qp'}{p} + z$ vivront à l'âge $A+a$, et $\frac{rp'}{p} + z'$ vivront à l'âge $A+a+a'$.

La probabilité que, sur p' individus de l'âge A , $\frac{qp'}{p} + z$ vivront à l'âge $A+a$ est, par ce qui précède,

$$\sqrt{\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')\pi}} e^{-\frac{p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}.$$

On aura la probabilité que, sur $\frac{qp'}{p} + z$ individus de l'âge $A+a$, $\left(\frac{qp'}{p} + z\right)\frac{r}{q} + u$ vivront à l'âge $A+a+a'$, en changeant dans la fonction précédente p' dans $\frac{qp'}{p} + z$, p en q , q en r et z en u ; ce qui donne, en négligeant z par rapport à $\frac{qp'}{p}$,

$$\sqrt{\frac{qp^2}{2rp'(q-r)(p+p')\pi}} e^{-\frac{qp^2u^2}{2rp'(q-r)(p+p')}}.$$

Le produit de ces deux probabilités est la probabilité de l'existence simultanée de z et de u . Or on a

$$\left(\frac{qp'}{p} + z\right)\frac{r}{q} + u = \frac{rp'}{p} + z',$$

ce qui donne

$$u = z' - \frac{rz}{q},$$

en faisant donc

$$\mathcal{C}z = \frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')},$$

$$\mathcal{C}'z' = \frac{qp^2}{2rp'(q-r)(p+p')}.$$

la probabilité P de l'existence simultanée des valeurs de z et de z' sera

$$P = \int \frac{\mathcal{C} dz}{\sqrt{\pi}} \frac{\mathcal{C}' dz'}{\sqrt{\pi}} e^{-\mathcal{C}z^2 - \mathcal{C}'z'^2 - 2\mathcal{C}\mathcal{C}'z z' \left(1 - \frac{r}{q}\right)}.$$

En suivant cette analyse, on trouve généralement que, si l'on fait

$$\varepsilon^2 = \frac{rp^2}{2sp'(r-s)(p+p')},$$

$$\varepsilon'^2 = \frac{sp^2}{2tp'(s-t)(p+p')},$$

la probabilité P que, sur p' individus de l'âge A, les nombres de ceux qui vivront aux âges $A+a$, $A+a+a'$, $A+a+a'+a''$, ... seront compris dans les limites respectives

$$\frac{qp'}{p}, \frac{qp'}{p} + z; \frac{rp'}{p}, \frac{rp'}{p} + z'; \frac{sp'}{p}, \frac{sp'}{p} + z''; \frac{tp'}{p}, \frac{tp'}{p} + z'''; \dots,$$

est

$$P = \int \frac{\varepsilon dz}{\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon' dz'}{\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon'' dz''}{\sqrt{\pi}} \dots e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{\varepsilon})^2 - \frac{1}{2}(\frac{z'}{\varepsilon'})^2 - \frac{1}{2}(\frac{z''}{\varepsilon''})^2 - \dots}.$$

On peut apprécier par cette formule les probabilités respectives des nombres d'une Table de mortalité, construite sur un grand nombre d'observations. La manière de former ces Tables est très simple. On prend sur les registres des naissances et des morts un grand nombre d'enfants que l'on suit pendant le cours de leur vie, en déterminant combien il en reste à la fin de chaque année de leur âge, et l'on inscrit ce nombre vis-à-vis de chaque année finissante. Mais, comme dans les deux ou trois premières années de la vie la mortalité est très rapide, il faut, pour plus d'exactitude, indiquer dans ce premier âge le nombre des survivants à la fin de chaque demi-année. Si le nombre p des enfants était infini, on aurait ainsi des Tables exactes qui représenteraient la vraie loi de la mortalité dans le lieu et à l'époque de leur formation. Mais, le nombre d'enfants que l'on choisit étant fini, quelque grand qu'il soit, les nombres de la Table sont susceptibles d'erreurs. Représentons par p' , q' , r' , s' , t' , ... ces divers nombres. Les vrais nombres, pour un nombre p' de naissances, sont $\frac{qp'}{p}$, $\frac{rp'}{p}$, $\frac{sp'}{p}$, $\frac{tp'}{p}$, ...

Si l'on fait $q' = \frac{qp'}{p} + z$, z sera l'erreur de q' ; pareillement, si l'on suppose $r' = \frac{rp'}{p} + z'$, z' sera l'erreur de r' , et ainsi de suite. L'expression précédente de P est donc la probabilité que les erreurs de q' , r' , s' , ... sont comprises dans les limites zéro et z , zéro et z' , zéro et z'' , etc. Les valeurs de ε , ε' , ... dépendent de p , q , r , ... qui sont inconnues; mais la supposition de p infini donne

$$\varepsilon^2 = \frac{p^2}{2qp'(p-q)}.$$

On peut substituer, sans erreur sensible, $\frac{q'}{p}$ au lieu de $\frac{q}{p}$, ce qui donne

$$\varepsilon^2 = \frac{p'}{2q'(p'-q')}.$$

On aura de la même manière

$$\varepsilon'^2 = \frac{q'}{2r'(q'-r')},$$

$$\varepsilon''^2 = \frac{r'}{2s'(r'-s')},$$

Si l'on ne veut considérer que l'erreur d'un des nombres de la Table, tel que s' , alors on intégrera l'expression de P, relativement à z'' , z''' , ... depuis les valeurs infinies négatives de ces variables jusqu'à leurs valeurs infinies positives, et alors on a

$$P = \int \frac{\varepsilon dz}{\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon' dz'}{\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon'' dz''}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{\varepsilon})^2 - \frac{1}{2}(\frac{z'}{\varepsilon'})^2 - \frac{1}{2}(\frac{z''}{\varepsilon''})^2 - \dots}.$$

Les intégrales relatives à z et z' doivent être prises depuis leurs valeurs infinies négatives jusqu'à leurs valeurs infinies positives; on trouvera ainsi, par le procédé dont nous avons souvent fait usage pour ce genre d'intégrations, que, si l'on suppose

$$\gamma^2 = \frac{p'}{2s'(p'-s')},$$

on aura

$$P = \int \frac{\gamma dz''}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^2 z''^2}.$$

La probabilité que l'erreur d'un nombre quelconque de la Table sera comprise dans les limites zéro et une quantité quelconque est donc indépendante, soit des nombres intermédiaires, soit des nombres subséquents.

Si l'on fait $\gamma z'' = t$, on aura

$$\frac{z''}{s'} = t \sqrt{\frac{2(p' - s')}{p's'}},$$

et la probabilité P que le rapport de l'erreur du nombre s' de la Table à ce nombre lui-même sera compris dans les limites $\pm t \sqrt{\frac{2(p' - s')}{p's'}}$ est

$$P = 2 \int \frac{dt}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul. On voit ainsi que, la valeur de t et par conséquent la probabilité P restant les mêmes, ce rapport augmente lorsque s' diminue; ainsi les nombres de la Table sont d'autant moins sûrs qu'ils sont plus éloignés du premier p' . On voit encore que ce rapport diminue à mesure que p' augmente, ou à mesure que l'on multiplie les observations; de manière que l'on peut, par cette multiplication, diminuer à la fois ce rapport et augmenter t , ce rapport devenant nul lorsque p' est infini, et P devenant alors égal à l'unité.

31. Appliquons l'analyse précédente à la recherche de la population d'un grand empire. L'un des moyens les plus simples et les plus propres à déterminer cette population est l'observation des naissances annuelles dont on est obligé de tenir compte pour déterminer l'état civil des enfants. Mais ce moyen suppose que l'on connaît, à très peu près, le rapport de la population aux naissances annuelles, rapport que l'on obtient en faisant sur plusieurs points de l'empire le dénombrement exact des habitants, et en le comparant aux naissances correspon-

dantes observées pendant quelques années consécutives; on en conclut ensuite, par une simple proportion, la population de tout l'empire. Le Gouvernement a bien voulu, à ma prière, donner des ordres pour avoir, avec précision, ces données. Dans trente départements, distribués sur la surface de la France, de manière à compenser les effets de la variété des climats, on a fait choix des communes dont les maires, par leur zèle et leur intelligence, pouvaient fournir les renseignements les plus précis. Le dénombrement exact des habitants de ces communes, pour le 22 septembre 1802, s'est élevé à 2 037 615 individus. Le relevé des naissances, des mariages et des morts, depuis le 22 septembre 1799 jusqu'au 22 septembre 1802, a donné, pour ces trois années,

Naissances.	Mariages.	Décès.
1 103 12 garçons.	46037	103659 mâles.
105287 filles.		99443 femelles.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, que ce relevé présente, est celui de 22 à 21, et les mariages sont aux naissances comme 3 à 14; le rapport de la population aux naissances annuelles est 28,352845. En supposant donc le nombre des naissances annuelles en France égal à un million, ce qui s'éloigne peu de la vérité, on aura, en multipliant par le rapport précédent, ce dernier nombre, la population de la France égale à 28352845 individus. Voyons l'erreur que l'on peut craindre dans cette évaluation.

Pour cela, concevons une urne qui renferme une infinité de boules blanches et noires dans un rapport inconnu. Supposons ensuite qu'ayant tiré au hasard un grand nombre p de ces boules, q aient été blanches, et que, dans un second tirage, sur un nombre inconnu de boules extraites, il y en ait q' de blanches. Pour en déduire ce nombre inconnu, on suppose son rapport à q' , le même que celui de p à q , ce qui donne $\frac{pq'}{q}$ pour ce nombre. Cherchons la probabilité que le nombre des boules extraites au second tirage est compris dans les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$. Nommons x le rapport inconnu du nombre des boules blan-

ches au nombre total des boules de l'urne. La probabilité de l'événement observé dans le premier tirage sera exprimée par le terme qui a pour facteur $x^q(1-x)^{p-q}$ dans le développement du binôme $[x + (1-x)]^p$, d'où il est facile de conclure, comme dans le numéro précédent, que la probabilité de x est

$$\frac{x^q dx (1-x)^{p-q}}{\int x^q dx (1-x)^{p-q}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Concevons maintenant que, dans le second tirage, le nombre total des boules extraites est $\frac{pq'}{q} + z$; la probabilité du nombre observé q' de boules blanches sera le terme du binôme $[x + (1-x)]^{\frac{pq'}{q} + z}$, qui a pour facteur $x^{q'}(1-x)^{\frac{pq'}{q} + z - q'}$; cette probabilité est donc

$$\frac{1.2.3 \dots \left(\frac{pq'}{q} + z\right)}{1.2.3 \dots q' . 1.2.3 \dots \left(\frac{pq'}{q} + z - q'\right)} x^{q'} (1-x)^{\frac{pq'}{q} + z - q'}.$$

En la multipliant par la probabilité précédente de x , en intégrant le produit depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et en le divisant par ce même produit multiplié par dz et intégré pour toutes les valeurs positives et négatives de z , on aura la probabilité que le nombre total des boules extraites est $\frac{pq'}{q} + z$. On trouvera ainsi, par l'analyse du numéro précédent, cette probabilité égale à

$$\sqrt{\frac{q^2}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} e^{-\frac{q^2 z^2}{2pq'(p-q)(q+q')}}.$$

En nommant donc P la probabilité que le nombre des boules extraites dans le second tirage est compris dans les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$, on aura

$$P = 1 - 2 \int dz \sqrt{\frac{q^2}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} e^{-\frac{q^2 z^2}{2pq'(p-q)(q+q')}}.$$

l'intégrale étant prise depuis $z=z$ jusqu'à z infini.

Maintenant, le nombre p des boules extraites dans le premier tirage peut représenter un dénombrement, et le nombre q des boules blanches qui y sont comprises peut exprimer le nombre des femmes qui, dans ce dénombrement, doivent devenir mères dans l'année, ou le nombre des naissances annuelles, correspondantes au dénombrement. Alors q' exprime le nombre des naissances annuelles observées dans tout l'empire, et d'où l'on conclut la population $\frac{pq'}{q}$. Dans ce cas, la valeur précédente de P exprime la probabilité que cette population est comprise dans les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$.

Nous supposons, conformément aux données précédentes,

$$p = 2037615, \quad q = \frac{110313 + 105287}{3};$$

nous supposons ensuite

$$q' = 1500000, \quad z = 500000;$$

la formule précédente donne alors

$$P = 1 - \frac{1}{1162}.$$

Il y a donc environ 1161 à parier contre un qu'en fixant à 42529267 la population correspondante à quinze cent mille naissances, on ne se trompera pas d'un demi-million.

La différence entre la certitude et la probabilité P diminue avec une très grande rapidité lorsque z augmente; elle serait insensible si l'on supposait $z = 700000$.

32. Considérons maintenant la probabilité des événements futurs, tirée des événements observés, et supposons qu'ayant observé un événement composé d'un nombre quelconque d'événements simples, on cherche la probabilité d'un résultat futur, composé d'événements semblables.

Nommons α la probabilité de chaque événement simple, y la proba-

bilité correspondante du résultat observé, et z celle du résultat futur; la probabilité de x sera, comme on l'a vu,

$$\frac{y dx}{\int y dx},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; $\frac{yz dx}{\int y dx}$ est donc la probabilité du résultat futur, prise de la valeur de x , considérée comme cause de l'événement simple. Ainsi, en nommant P la probabilité entière de l'événement futur, on aura

$$P = \frac{\int yz dx}{\int y dx},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Supposons, par exemple, qu'un événement étant arrivé m fois de suite, on demande la probabilité qu'il arrivera les n fois suivantes. Dans ce cas, x étant supposé représenter la possibilité de l'événement simple, x^m sera celle de l'événement observé, et x^n celle de l'événement futur, ce qui donne

$$y = x^m, \quad z = x^n,$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{m+1}{m+n+1}.$$

Supposons l'événement observé, composé d'un très grand nombre d'événements simples; soient a la valeur de x qui rend y un maximum, et Y ce maximum; soient a' la valeur de x qui rend yz un maximum, et Y' et Z' ce que deviennent y et z à ce maximum. On aura, par le n° 27 du Livre I^{er}, à très peu près,

$$f y dx = \frac{Y^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{d^2 Y}{dx^2}}},$$

$$f y z dx = \frac{(Y' Z')^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{d^2 (Y' Z')}{dx^2}}}.$$

Le résultat observé étant composé d'un très grand nombre d'événements simples, supposons que l'événement futur soit beaucoup moins composé. L'équation qui donne la valeur a' de x , correspondante au maximum de yz , est

$$0 = \frac{dy}{y dx} + \frac{dz}{z dx};$$

$\frac{dy}{y dx}$ est une quantité très grande, de l'ordre $\frac{1}{x}$, et, puisque le résultat futur est très peu composé par rapport au résultat observé, $\frac{dz}{z dx}$ sera d'un ordre moindre, que nous désignerons par $\frac{1}{x^{1-\lambda}}$. Ainsi, a étant la valeur de x qui satisfait à l'équation $0 = \frac{dy}{y dx}$, la différence entre a et a' sera très petite de l'ordre x^λ , et l'on pourra supposer

$$a' = a + x^\lambda \mu.$$

Cette supposition donne

$$Y' = Y + x^\lambda \mu \frac{dY}{dx} + \frac{x^{2\lambda} \mu^2}{1.2} \frac{d^2 Y}{dx^2} + \dots$$

Mais on a $\frac{dY}{dx} = 0$, et il est facile d'en conclure que $\frac{d^n Y}{dx^n}$ est d'un ordre égal ou moindre que $\frac{1}{x^n}$; le terme $\frac{x^{n\lambda} \mu^n}{1.2.3 \dots n} \frac{d^n Y}{dx^n}$ sera par conséquent au plus de l'ordre $x^{n(\lambda-\frac{1}{n})}$. Ainsi la convergence de l'expression de Y' en série exige que λ surpasse $\frac{1}{n}$, et dans ce cas Y' ne diffère de Y que de quantités de l'ordre $x^{2\lambda-1}$.

Si l'on nomme Z ce que devient z lorsqu'on y fait $x = a$, on s'assurera de la même manière que Z' peut se réduire à Z . Enfin on prouvera par un raisonnement semblable que $\frac{d^2 (Y' Z')}{dx^2}$ se réduit à très peu près à $Z \frac{d^2 Y}{dx^2}$. En substituant ces valeurs dans l'expression de P , on aura

$$P = Z,$$

c'est-à-dire que l'on peut alors déterminer la probabilité du résultat futur, en supposant x égal à la valeur qui rend le résultat observé le

plus probable. Mais il faut pour cela que le résultat futur soit assez peu composé pour que les exposants des facteurs de z soient d'un ordre de grandeur plus petit que la racine carrée des facteurs de y ; autrement, la supposition précédente exposerait à des erreurs sensibles.

Si le résultat futur est une fonction du résultat observé, z sera une fonction de y , que nous représenterons par $\varphi(y)$. La valeur de x qui rend $z\gamma$ un maximum est, dans ce cas, la même qui rend y un maximum; ainsi l'on a $a' = a$, et si l'on désigne $\frac{d\varphi(y)}{dy}$ par $\varphi'(y)$, l'expression de P deviendra, en observant que $\frac{dY}{dx} = 0$,

$$P = \frac{\varphi(Y)}{\sqrt{1 + \frac{Y \varphi'(Y)}{\varphi(Y)}}}.$$

Si $\varphi(y) = y^n$, en sorte que l'événement futur soit n fois la répétition de l'événement observé, on aura

$$P = \frac{Y^n}{\sqrt{n+1}}.$$

La probabilité P , calculée dans la supposition que la possibilité des événements simples est égale à celle qui rend le résultat observé le plus probable, est Y^n ; on voit ainsi que les petites erreurs qui résultent de cette supposition s'accumulent à raison des événements simples qui entrent dans le résultat futur, et deviennent très sensibles lorsque ces événements sont en grand nombre.

33. Depuis 1745, époque où l'on a commencé à distinguer à Paris sur les registres les baptêmes des garçons de ceux des filles, on a constamment observé que le nombre des premiers a été supérieur à celui des seconds. Déterminons la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant un temps donné, par exemple, dans l'espace d'un siècle.

Soient p le nombre observé des baptêmes des garçons, q celui des filles, $2n$ le nombre des baptêmes annuels, x la probabilité que l'en-

fant qui va naître et être baptisé sera un garçon. En élevant $x + (1-x)$ à la puissance $2n$ et développant cette puissance, on aura

$$x^{2n} + 2nx^{2n-1}(1-x) + \frac{2n(2n-1)}{1.2}x^{2n-2}(1-x)^2 + \dots$$

La somme des n premiers termes de ce développement sera la probabilité que chaque année le nombre des baptêmes des garçons l'emportera sur celui des baptêmes des filles. Nommons z cette somme; z' sera la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant le nombre i d'années consécutives; donc, si l'on désigne par P la probabilité entière que cela aura lieu, on aura, par le numéro précédent,

$$P = \frac{\int x^p dx \, z^i (1-x)^q}{\int x^p dx (1-x)^q},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Si l'on nomme a la valeur de x qui rend $x^p z^i (1-x)^q$ un maximum et que l'on désigne par Z , $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{d^2Z}{dx^2}$ ce que deviennent z , $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, lorsqu'on y change x en a , on aura, par le n° 26,

$$\int x^p dx \, z^i (1-x)^q = \frac{a^{p+1} (1-a)^{q+1} Z^i \sqrt{2\pi}}{\sqrt{p(1-a)^2 + qa^2 + ia^2(1-a)^2} \frac{d^2Z}{dx^2}}.$$

z étant la somme des n premiers termes de la fonction

$$x^{2n} \left[1 + 2n \frac{1-x}{x} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} \frac{(1-x)^2}{x^2} + \dots \right],$$

on a, par le n° 37 du Livre I^{er},

$$z = \frac{\int \frac{u^{n-1} du}{(1+u)^{2n+1}}}{\int \frac{u^{n-1} du}{(1+u)^{2n+1}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $u = \frac{1-x}{x}$ jusqu'à $u = \infty$,

et celle du dénominateur étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$. Soit $u = \frac{1-s}{s}$; cette valeur de z deviendra

$$z = \frac{\int s^n ds (1-s)^{n-1}}{\int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = x$, et celle du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$. De là on tire

$$\frac{dz}{z dx} = \frac{x^n (1-x)^{n-1}}{\int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = x$. On aura ensuite

$$\frac{d^2 z}{z dx^2} = \frac{dz}{z dx} \frac{n - (2n-1)x}{x(1-x)}.$$

En changeant x en a dans ces expressions, on aura celles de Z , $\frac{dZ}{Z dx}$, $\frac{d^2 Z}{Z dx^2}$.

Pour déterminer a , nous observerons que la condition du maximum de $x^p z^i (1-x)^q$ donne

$$0 = \frac{p}{a} - \frac{q}{1-a} + i \frac{dZ}{Z dx},$$

d'où l'on tire, en substituant pour $\frac{dZ}{Z dx}$ sa valeur précédente,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{ia^{n+1}(1-a)^n}{(p+q) \int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = a$. Pour conclure a de cette équation, nous observerons que la valeur de s qui rend $s^n (1-s)^{n-1}$ un maximum est à très peu près $\frac{1}{2}$, et par conséquent moindre que $\frac{p}{p+q}$, qui lui-même est plus petit que a . Ainsi, n étant supposé un grand nombre, on peut, sans erreur sensible, étendre l'intégrale de cette expression de a , depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$, le

terme qui en dépend étant très petit. Cela donne, par le n° 28,

$$\int s^n ds (1-s)^{n-1} = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} (n-1)^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{(2n-1)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n} \sqrt{n}}.$$

L'équation qui détermine a devient ainsi, à fort peu près,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{ia^{n+1}(1-a)^n \sqrt{n}}{(p+q) \sqrt{\pi}}.$$

Pour la résoudre, nous observerons que a diffère très peu de $\frac{p}{p+q}$, en sorte que, si l'on fait

$$a = \frac{p}{p+q} + \mu,$$

μ sera fort petit, et l'on aura, d'une manière très approchée,

$$(1) \quad \mu = i \sqrt{n} \frac{p \left[1 - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2 \right]^n}{(p+q)^2 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{n(p+q)(p-q)}{pq}} - \frac{(p+q)^{1/2} n p^2}{pq};$$

on aura ensuite, à très peu près,

$$a^p (1-a)^q = \left(\frac{p}{p+q} \right)^p \left(\frac{q}{p+q} \right)^q e^{-\frac{(p+q)^2}{1pq} \mu^2}.$$

En substituant dans le radical

$$\sqrt{p(1-a)^2 + qa^2 + ia^2(1-a)^2 \frac{dZ^2 - Z d^2 Z}{Z^2 dx^2}},$$

pour a sa valeur $\frac{p}{p+q} + \mu$, pour $\frac{dZ}{Z dx}$ sa valeur $\frac{(p+q)a-p}{ia(1-a)}$ ou $\frac{(p+q)\mu}{ia(1-a)}$, et pour $\frac{d^2 Z}{Z dx^2}$ sa valeur $\frac{dZ}{Z dx} \frac{n - (2n-1)a}{a(1-a)}$, ce radical devient à fort peu près

$$\sqrt{\frac{pq}{p+q}} \sqrt{1 + \frac{(p+q)\mu}{pq} [n(p-q) - p] + \frac{(p+q)^2}{pq} \mu^2 \left(2n + \frac{p+q}{i} \right)}.$$

Enfin on a, par le n° 28,

$$\int x^p dx (1-x)^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q \sqrt{\frac{pq}{p+q}} \frac{\sqrt{2\pi}}{p+q}.$$

Cela posé, l'expression de P deviendra à très peu près

$$(2) \quad P = \frac{Z^i e^{-\frac{(p+q)^2}{9pq} \mu^2}}{\sqrt{1 + \frac{(p+q)^2}{pq} [n(p-q) - p] + \frac{(p+q)^2 \mu^2}{pq} \left(2n + \frac{p+q}{i}\right)}}.$$

Il ne s'agit donc plus que de déterminer Z. On a

$$Z = \frac{\int s^n ds (1-s)^{n-1}}{\int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=a$, et celle du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$. Il est facile d'en conclure que l'on a

$$Z = 1 - \frac{\int s^n ds (1-s)^{n-1}}{\int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s=a$ jusqu'à $s=1$ et celle du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$; on aura ainsi, à fort peu près, par le n° 29,

$$(3) \quad Z = 1 - \frac{\int dt e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis

$$t^2 = \frac{2n-1}{2n(n-1)} \left[\frac{n(p-q)}{p+q} - \frac{p}{p+q} + (2n-1)\mu \right]^2,$$

jusqu'à $t^2 = \infty$.

Pour appliquer des nombres à ces formules, nous observerons que, par ce qui précède, dans l'intervalle du commencement de 1745 à la fin de 1784, on a par le n° 28, relativement à Paris,

$$p = 393386, \quad q = 377555.$$

En divisant par 40 la somme de ces deux nombres, on aura 19273,5 pour le nombre moyen des baptêmes annuels, ce qui donne $n=9636,75$; nous supposons de plus $i=100$. Au moyen de ces valeurs on déterminera celle de μ par l'équation (1); on déterminera ensuite la valeur de Z par l'équation (3); enfin l'équation (2) donnera la valeur de P. On trouvera ainsi

$$P = 0,782.$$

Il y avait donc à la fin de 1784, d'après ces données, près de quatre contre un à parier que, dans l'espace d'un siècle, les baptêmes de garçons à Paris l'emporteraient, chaque année, sur ceux des filles.

CHAPITRE VII.

DE L'INFLUENCE DES INÉGALITÉS INCONNUES QUI PEUVENT EXISTER
ENTRE DES CHANCES QUE L'ON SUPPOSE PARFAITEMENT ÉGALES.

34. J'ai déjà considéré cette influence dans le n° 1, où l'on a vu que ces inégalités augmentent la probabilité des événements composés de la répétition des événements simples. Je vais reprendre ici cet objet important dans les applications de l'analyse des probabilités.

Il résulte du numéro cité que si, au jeu de *croix* et *pile*, il existe une différence inconnue entre les possibilités d'amener l'un ou l'autre, en nommant α cette différence, en sorte que $\frac{1+\alpha}{2}$ soit la possibilité d'amener *croix*, et par conséquent $\frac{1-\alpha}{2}$ celle d'amener *pile*, celui des deux signes $+$ et $-$ que l'on doit adopter étant inconnu, la probabilité d'amener *croix* n fois de suite sera

$$\frac{(1+\alpha)^n + (1-\alpha)^n}{2^{n+1}}$$

ou

$$(1) \quad \frac{1}{2^n} \left[1 + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \alpha^4 + \dots \right].$$

Le jeu de *croix* et *pile* consiste, comme on sait, à projeter en l'air une pièce très mince, qui retombe nécessairement sur l'une de ses deux faces opposées que l'on nomme *croix* et *pile*. On peut diminuer la valeur de α , en rendant ces deux faces le plus égales qu'il est possible. Mais il est physiquement impossible d'obtenir une égalité parfaite, et

alors celui qui parie d'amener *croix* deux fois de suite ou *pile* deux fois de suite a de l'avantage sur celui qui parie que, dans deux coups, *croix* et *pile* alterneront, sa probabilité étant $\frac{1+\alpha^2}{2}$.

On peut diminuer l'influence de l'inégalité des deux faces de la pièce, en les soumettant elles-mêmes aux chances du hasard. Désignons par A cette pièce, et concevons une seconde pièce B semblable à la première. Supposons qu'après avoir projeté cette seconde pièce, on projette la pièce A pour former un premier coup, et déterminons la probabilité que dans n coups pareils consécutifs, la pièce A présentera les mêmes faces que la pièce B. Si l'on nomme p la probabilité d'amener *croix* avec la pièce A et q la probabilité d'amener *pile*; si l'on désigne ensuite par p' et q' les mêmes probabilités pour la pièce B, $pp' + qq'$ sera la probabilité que dans un coup la pièce A présentera les mêmes faces que la pièce B. Ainsi $(pp' + qq')^n$ sera la probabilité que cela aura lieu constamment dans n coups. Soit

$$p = \frac{1+\alpha}{2}, \quad q = \frac{1-\alpha}{2},$$

$$p' = \frac{1+\alpha'}{2}, \quad q' = \frac{1-\alpha'}{2};$$

on aura

$$(pp' + qq')^n = \frac{1}{2^n} (1 + \alpha\alpha')^n.$$

Mais, comme on ignore quelles sont les faces que les inégalités α et α' favorisent, la probabilité précédente peut être également ou $\frac{1}{2^n} (1 + \alpha\alpha')^n$ ou $\frac{1}{2^n} (1 - \alpha\alpha')^n$, suivant que α et α' sont de même signe ou de signes contraires. La vraie valeur de cette probabilité est donc, α et α' étant supposés positifs,

$$\frac{1}{2^{n+1}} [(1 + \alpha\alpha')^n + (1 - \alpha\alpha')^n]$$

ou

$$\frac{1}{2^n} \left[1 + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha^2 \alpha'^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \alpha^4 \alpha'^4 + \dots \right],$$

Si l'on compare cette formule à la formule (1), on voit qu'elle se rapproche plus qu'elle de $\frac{1}{2^n}$, ou de la probabilité qui aurait lieu si les faces des pièces étaient parfaitement égales. Ainsi l'inégalité de ces faces est par là corrigée en grande partie; elle le serait même en totalité, si α' était nul, ou si les deux faces de la pièce B étaient parfaitement égales.

p représentant la probabilité de *croix* avec la pièce A, et q celle de *pile*, la probabilité d'amener *croix* un nombre impair de fois dans n coups sera

$$\frac{1}{2}[(p+q)^n \mp (p-q)^n],$$

le signe $-$ ayant lieu si n est pair, et le signe $+$ ayant lieu si n est impair. Faisant $p = \frac{1+\alpha}{2}$, $q = \frac{1-\alpha}{2}$, la fonction précédente devient

$$\frac{1}{2}(1 \mp \alpha^n).$$

Si n est impair et égal à $2i+1$, cette fonction est

$$\frac{1}{2}(1 + \alpha^{2i+1});$$

mais, comme on peut y supposer également α positif ou négatif, il faut prendre la moitié de la somme de ses deux valeurs relatives à ces suppositions, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour sa véritable valeur; l'inégalité des faces de la pièce ne change donc point alors la probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener *croix* un nombre impair de fois. Mais, si n est pair et égal à $2i$, cette probabilité devient

$$(2) \quad \frac{1}{2}(1 - \alpha^{2i}),$$

$\pm \alpha$ étant l'inégalité inconnue de probabilité entre *croix* et *pile*; il y a donc du désavantage à parier d'amener *croix* ou *pile* un nombre impair de fois dans $2i$ coups, et par conséquent il y a de l'avantage à parier d'amener l'un ou l'autre un nombre pair de fois.

On peut diminuer ce désavantage en changeant le pari d'amener *croix* un nombre impair de fois en $2i$ coups, dans le pari d'amener dans le même nombre de coups un nombre impair de ressemblances

entre les faces des deux pièces A et B, projetées comme on l'a dit ci-dessus. En effet, la probabilité d'une ressemblance à chaque coup est, comme on l'a vu, $pp' + qq'$, et la probabilité d'une dissemblance est $pq' + p'q$. Nommons P la première de ces deux quantités et Q la seconde; la probabilité d'amener un nombre impair de ressemblances dans $2i$ coups sera

$$\frac{1}{2}[(P+Q)^{2i} - (P-Q)^{2i}].$$

Si l'on fait, comme précédemment,

$$p = \frac{1+\alpha}{2}, \quad q = \frac{1-\alpha}{2}, \quad p' = \frac{1+\alpha'}{2}, \quad q' = \frac{1-\alpha'}{2},$$

on aura

$$P = \frac{1+\alpha\alpha'}{2}, \quad Q = \frac{1-\alpha\alpha'}{2};$$

la fonction précédente devient ainsi

$$\frac{1}{2}(1 - \alpha^{2i}\alpha'^{2i}).$$

Cette fonction reste la même, quelque changement que l'on fasse dans les signes de α et de α' ; elle est donc la vraie probabilité d'amener un nombre impair de ressemblances; mais, α et α' étant de petites fractions, on voit qu'elle se rapproche de $\frac{1}{2}$ plus que la formule (2); le désavantage d'un nombre impair est donc par là diminué.

On voit par ce qui précède que l'on peut diminuer l'influence des inégalités inconnues entre des chances que l'on suppose égales, en les soumettant elles-mêmes au hasard. Par exemple, si l'on met dans une urne les numéros 1, 2, 3, ..., n suivant cet ordre, et qu'ensuite, après avoir agité l'urne pour bien mêler ces numéros, on en tire un; s'il y a entre les probabilités de sortie des numéros une petite différence dépendant de l'ordre suivant lequel ils ont été placés dans l'urne, on la diminuera considérablement en mettant dans une seconde urne ces numéros, suivant leur ordre de sortie de la première urne, et en agitant ensuite cette seconde urne, pour en bien mêler les numéros. Alors l'ordre suivant lequel on a placé les numéros dans la première urne aura extrêmement peu d'influence sur l'extraction du premier numéro

qui sortira de la seconde urne. On diminuerait encore cette influence, en considérant de la même manière une troisième urne, une quatrième, etc.

Considérons deux joueurs A et B jouant ensemble, de manière qu'à chaque coup celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie dure jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné tous les jetons de l'autre. Soient p et q leurs adresses respectives, a et b leurs nombres de jetons en commençant. Il résulte de la formule (H) du n° 10, en y faisant i infini, que la probabilité de A pour gagner la partie est

$$\frac{p^b(p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

Si l'on fait dans cette expression

$$p = \frac{1+\alpha}{2}, \quad q = \frac{1-\alpha}{2},$$

on aura, en prenant le signe supérieur, la probabilité relative au cas où A est plus fort que B, et, en prenant le signe inférieur, on aura la probabilité relative au cas où A est moins fort que B. Si l'on ignore quel est le plus fort des joueurs, la demi-somme de ces deux probabilités sera la probabilité de A, que l'on trouve ainsi égale à

$$(3) \quad \frac{\frac{1}{2}[(1+\alpha)^a - (1-\alpha)^a][(1+\alpha)^b + (1-\alpha)^b]}{(1+\alpha)^{a+b} - (1-\alpha)^{a+b}};$$

en changeant a en b et réciproquement, on aura la probabilité de B. Si l'on suppose α infiniment petit ou nul, ces probabilités deviennent $\frac{a}{a+b}$ et $\frac{b}{a+b}$; elles sont donc proportionnelles aux nombres des jetons des joueurs; ainsi, pour l'égalité du jeu, leurs mises doivent être dans ce rapport. Mais alors l'inégalité qui peut exister entre eux est favorable au joueur qui a le plus petit nombre de jetons; car, si l'on suppose a moindre que b , il est facile de voir que l'expression (3) est plus grande que $\frac{a}{a+b}$. Si les joueurs conviennent de doubler, de tripler, etc.

leurs jetons, l'avantage de A augmente sans cesse, et, dans le cas de a et b infinis, sa probabilité devient $\frac{1}{2}$ ou la même que celle de B.

P étant la probabilité d'un événement composé de deux événements simples dont p et $1-p$ sont les probabilités respectives, si l'on suppose que la valeur de p soit susceptible d'une inégalité inconnue z qui puisse s'étendre depuis $-\alpha$ jusqu'à $+\alpha$, en nommant q la probabilité de $p+z$, q étant fonction de z , on aura, pour la vraie probabilité de l'événement composé,

$$\frac{\int P' q dz}{\int q dz},$$

P' étant ce que devient P lorsqu'on y change p dans $p+z$, et les intégrales étant prises depuis $z = -\alpha$ jusqu'à $z = +\alpha$.

Si l'on n'a d'autres données pour déterminer z qu'un événement observé, formé des mêmes événements simples, en nommant Q la probabilité de cet événement, $p+z$ et $1-p-z$ étant les probabilités des événements simples, l'expression précédente donne, en y changeant q en Q, pour la probabilité de l'événement composé,

$$\frac{\int P' Q dz}{\int Q dz},$$

les intégrales étant prises ici depuis $z = -p$ jusqu'à $z = 1-p$; ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans le Chapitre précédent.

CHAPITRE VIII.

DES DURÉES MOYENNES DE LA VIE, DES MARIAGES ET DES ASSOCIATIONS
QUELCONQUES.

35. Supposons que l'on ait suivi sur un très grand nombre n d'enfants la loi de mortalité, depuis leur naissance jusqu'à leur extinction totale; on aura leur vie moyenne, en faisant une somme des durées de toutes leurs vies et en la divisant par le nombre n . Si ce nombre était infini, on aurait exactement la durée de la vie moyenne. Cherchons la probabilité que la vie moyenne des n enfants ne s'écartera de celle-ci que dans des limites données.

Désignons par $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ la probabilité de mourir à l'âge x , a étant la limite de x , a et x étant supposés renfermer un nombre infini de parties prises pour l'unité. Considérons la puissance

$$\left[\varphi\left(\frac{0}{a}\right) + \varphi\left(\frac{1}{a}\right)e^{-\varpi\sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{2}{a}\right)e^{-2\varpi\sqrt{-1}} + \dots + \varphi\left(\frac{x}{a}\right)e^{-x\varpi\sqrt{-1}} + \dots + \varphi\left(\frac{a}{a}\right)e^{-a\varpi\sqrt{-1}} \right]^n.$$

Il est visible que le coefficient de $e^{-(l+n\varpi)\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de cette puissance, est la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfants parviendront sera $l+n\varpi$; en multipliant donc par $e^{(l+n\varpi)\varpi\sqrt{-1}}$ la puissance précédente, le terme indépendant des puissances de $e^{\varpi\varpi\sqrt{-1}}$ dans le produit sera cette probabilité, qui, par consé-

quent, est égale à

$$(1) \frac{1}{2\pi} \int d\varpi e^{l\varpi\sqrt{-1}} \left\{ e^{n\varpi\sqrt{-1}} \left[\varphi\left(\frac{0}{a}\right) + \varphi\left(\frac{1}{a}\right)e^{-\varpi\varpi\sqrt{-1}} + \dots + \varphi\left(\frac{x}{a}\right)e^{-x\varpi\sqrt{-1}} + \dots + \varphi\left(\frac{a}{a}\right)e^{-a\varpi\sqrt{-1}} \right]^n \right\},$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$.

Si l'on prend dans cette intégrale le logarithme hyperbolique de la quantité sous le signe $\int$, élevée à la puissance n , on aura, en développant les exponentielles en séries, ce logarithme égal à

$$(2) n\mu\varpi\sqrt{-1} + n \log \left[f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) - \varpi\sqrt{-1} f x \varphi\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\varpi^2}{2} f x^2 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) + \dots \right];$$

le signe f se rapportant ici à toutes les valeurs de x , depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$. Si l'on fait $\frac{x}{a} = x'$, et si l'on observe que, la variation de x étant l'unité, on a $a dx' = 1$, on aura

$$f\varphi\left(\frac{x}{a}\right) = a \int dx' \varphi(x'),$$

$$f x \varphi\left(\frac{x}{a}\right) = a^2 \int x' dx' \varphi(x'),$$

$$f x^2 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) = a^3 \int x'^2 dx' \varphi(x'),$$

.....

les intégrales relatives à x' étant prises depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=1$. Nommons $k, k', k'', \dots$ ces intégrales successives; la probabilité que la durée de la vie d'un enfant sera comprise dans les limites zéro et a est $f\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ ou $a \int dx' \varphi(x')$; or cette probabilité est la certitude elle-même; on a donc $ak=1$. Cela posé, la fonction (2) devient

$$n\mu\varpi\sqrt{-1} + n \log \left(1 - \frac{k'}{k} a \varpi \sqrt{-1} - \frac{k''}{k} \frac{a^2 \varpi^2}{2} + \dots \right),$$

ou

$$\left(\frac{n\mu}{a} - \frac{nk'}{k} \right) a \varpi \sqrt{-1} - n \frac{kk''}{2k^2} a^2 \varpi^2 - \dots$$

Si l'on fait

$$\mu = \frac{ak'}{k} = \frac{a^2 k'}{ak} = a^2 k',$$

la première puissance de σ disparaît, et de plus, n étant supposé un très grand nombre, on peut s'arrêter à la seconde puissance de σ ; la fonction (1) devient ainsi, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{t\sigma\sqrt{-1} - n\frac{k\sigma^2 - l^2}{2k}} a^2 \omega^2.$$

Si l'on fait

$$\phi^2 = \frac{k^2}{2(kk'' - k'^2)}, \quad t = \frac{a\omega\sqrt{n}}{2\phi} - \frac{\phi l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}},$$

cette intégrale devient, en la prenant depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$,

$$\frac{\phi}{a\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{\phi^2 n}{a^2}},$$

En la multipliant par dl , et faisant $l = ar\sqrt{n}$, on aura

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \phi dr e^{-\phi^2 r^2}$$

pour la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfants parviendront sera comprise dans les limites $na^2 k' \pm ar\sqrt{n}$.

La quantité $a^2 k'$ ou $fx \varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ est la somme des produits de chaque âge par la probabilité d'y parvenir; elle est donc la vraie durée de la vie moyenne; ainsi la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfants cesseront de vivre, divisée par leur nombre, est comprise dans ces limites

$$\text{Vraie durée de la vie moyenne, plus ou moins } \frac{ar}{\sqrt{n}},$$

a pour expression

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \phi dr e^{-\phi^2 r^2}.$$

La valeur moyenne de r , en plus ou en moins, est, par le n° 20,

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \phi r dr e^{-\phi^2 r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à r infini. En la multipliant par $\frac{a}{\sqrt{n}}$, on aura l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, lorsqu'on prend pour durée moyenne de la vie la somme des âges qu'ont vécu les n enfants considérés ci-dessus, divisée par n , quotient que nous désignerons par G ; cette erreur est donc

$$\pm \frac{a}{2\phi\sqrt{n\pi}}.$$

On a, à très peu près,

$$a^2 k' = G,$$

et, comme $ak = 1$, on aura

$$\frac{k'}{k} = \frac{G}{a}.$$

Si l'on nomme ensuite H la somme des carrés des âges qu'ont vécu les n enfants, divisée par n , on trouvera, par l'analyse du n° 19,

$$\frac{k''}{k} a^2 = H;$$

ces valeurs donnent

$$\phi^2 = \frac{a^2}{2(H - G^2)};$$

l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur la durée de la vie devient ainsi

$$\pm \frac{\sqrt{H - G^2}}{\sqrt{2n\pi}}.$$

Il est clair que ces résultats ont également lieu relativement à la durée moyenne de ce qui reste à vivre, lorsque, au lieu de partir de l'époque de la naissance, on part d'une époque quelconque de la vie.

On peut facilement déterminer, au moyen des Tables de mortalité, formées d'année en année, la durée moyenne de ce qui reste à vivre à

une personne dont l'âge est d'un nombre entier A d'années. Pour cela, on ajoutera tous les nombres de la Table qui suivent celui qui correspond à l'âge A ; on divisera la somme par ce dernier nombre, et l'on ajoutera $\frac{1}{2}$ au quotient. En effet, si l'on désigne par (1), (2), (3), ... les nombres de la Table, correspondants à l'année A et aux années suivantes, le nombre des individus qui meurent dans la première année, à partir de l'année A , sera (1) - (2); mais, dans ce court intervalle, la mortalité peut être supposée constante; $\frac{1}{2}[(1) - (2)]$ est donc la somme des durées de leur vie, à partir de l'âge A . Pareillement $\frac{1}{2}[(2) - (3)]$, $\frac{1}{2}[(3) - (4)]$, ... sont les sommes des durées de la vie, à partir du même âge, de ceux qui meurent dans les deuxième, troisième, etc., années comptées depuis l'année A . La réunion de toutes ces sommes est $\frac{(1)}{2} + (2) + (3) + (4) + \dots$; et, en la divisant par (1), on aura la durée moyenne de ce qui reste à vivre à la personne de l'âge A . On formera ainsi une Table des durées moyennes de ce qui reste à vivre aux différents âges. On pourra même conclure ces durées les unes des autres, en observant que, si F désigne cette durée pour l'âge A , et F' la durée correspondante à l'âge $A + 1$, on a

$$F = \frac{(2)}{(1)} (F' + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}.$$

36. Déterminons maintenant la durée moyenne de la vie qui aurait lieu, si l'une des causes de mortalité venait à s'éteindre. Soit U le nombre des enfants qui, sur le nombre n de naissances, vivraient encore à l'âge x dans cette hypothèse, u étant celui des enfants vivants à cet âge sur le même nombre de naissances, dans le cas où cette cause de mortalité subsiste. Nommons $z \Delta x$ la probabilité qu'un individu de l'âge x périra de cette maladie dans l'intervalle de temps très court Δx ; $uz \Delta x$ sera, à très peu près, par le n° 25, le nombre des individus u qui périront de cette maladie dans l'intervalle de temps Δx , si ce nombre est considérable. Pareillement, si l'on désigne par $\varphi \Delta x$ la probabilité qu'un individu de l'âge x périra par les autres causes de mortalité dans l'intervalle Δx , $u\varphi \Delta x$ sera le nombre des individus qui périront

par ces causes, dans l'intervalle de temps Δx ; ce sera donc la valeur de $-\Delta u$: j'affecte Δu du signe $-$, parce que u diminue à mesure que x augmente; on a donc

$$-\Delta u = u \Delta x (\varphi + z).$$

On aura pareillement

$$-\Delta U = U \varphi \Delta x.$$

En éliminant φ de ces deux équations, on aura

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta u}{u} + z \Delta x.$$

Δx étant une quantité très petite, on peut transformer la caractéristique Δ dans la caractéristique différentielle d , et alors l'équation précédente devient

$$\frac{dU}{U} = \frac{du}{u} + z dx;$$

d'où l'on tire, en intégrant et observant qu'à l'âge zéro $U = u = n$,

$$(3) \quad U = u e^{\int z dx},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul. On peut obtenir cette intégrale, au moyen des registres de mortalité, dans lesquels on tient compte de l'âge des individus morts et des causes de leur mort. En effet, $uz \Delta x$ étant, par ce qui précède, le nombre de ceux qui, parvenus à l'âge x , ont péri dans l'intervalle de temps Δx , par la maladie dont il s'agit, on aura à très peu près l'intégrale $\int z dx$, en supposant Δx égal à une année, et en prenant depuis la naissance des n enfants que l'on a considérés, jusqu'à l'année x , la somme des fractions qui ont pour numérateur le nombre des individus que la maladie a fait périr chaque année, et pour dénominateur, le nombre des n enfants qui vivent encore au milieu de la même année. Ainsi l'on pourra transformer, au moyen de l'équation (3), une Table de mortalité ordinaire, dans celle qui aurait lieu si la maladie dont il s'agit n'existait pas.

La petite vérole a cela de particulier, savoir, que le même individu n'en est jamais deux fois atteint, ou du moins ce cas est si rare, que,

s'il existe, on peut en faire abstraction. Concevons que, sur un très grand nombre n d'enfants, u parviennent à l'âge x , et que, dans le nombre u , y n'aient point eu la petite vérole. Concevons encore que sur ce nombre y , $iy dx$ prennent cette maladie dans l'instant dx , et que, sur ce nombre, $iry dx$ périssent de cette maladie. En désignant, comme ci-dessus, par φ la probabilité de périr à l'âge x par d'autres causes, on aura évidemment

$$du = -u\varphi dx - iry dx.$$

On aura ensuite

$$dy = -y\varphi dx - iy dx.$$

En effet, y diminue par le nombre de ceux qui, dans l'instant dx , prennent la petite vérole, et ce nombre est, par la supposition, $iy dx$; y diminue encore par le nombre des individus compris dans y , qui périssent par d'autres causes, et ce nombre est $y\varphi dx$.

Maintenant, si de la première des deux équations précédentes, multipliée par y , on retranche la seconde multipliée par u , et si l'on divise la différence par y^2 , on aura

$$d\frac{u}{y} = \frac{u}{y} dx - ir dx,$$

ce qui donne, en intégrant depuis x nul, et observant qu'à cette origine $u = y = n$,

$$(4) \quad \frac{u}{y} = (1 - \int ir dx e^{-\int \varphi dx}) e^{\int \varphi dx},$$

cette équation fera connaître le nombre d'individus de l'âge x qui n'ont point encore eu la petite vérole. On a ensuite

$$z dx = \frac{ir y dx}{u},$$

$uz dx$ étant, comme ci-dessus, le nombre de ceux qui périssent dans le temps dx , de la maladie que l'on considère. En substituant, au lieu

de $\frac{y}{u}$, sa valeur précédente, on aura, après avoir intégré,

$$e^{\int \varphi dx} = \frac{1}{1 - \int ir dx e^{-\int \varphi dx}};$$

l'équation (3) donnera donc

$$(5) \quad U = \frac{u}{1 - \int ir dx e^{-\int \varphi dx}}.$$

Cette valeur de U suppose que l'on connaît par l'observation i et r . Si ces nombres étaient constants, il serait facile de les déterminer; mais, comme ils peuvent varier d'âge en d'âge, les éléments de la formule (3) sont plus aisés à connaître, et cette formule me semble plus propre à déterminer la loi de mortalité qui aurait lieu, si la petite vérole était éteinte. En lui appliquant les données que l'on a pu se procurer sur la mortalité causée par cette maladie, aux divers âges de la vie, on trouve que son extinction au moyen de la vaccine augmenterait de plus de trois années la durée de la vie moyenne, si d'ailleurs cette durée n'était point restreinte par la diminution relative des subsistances, due à un plus grand accroissement de population.

37. Considérons présentement la durée moyenne des mariages. Pour cela concevons un grand nombre n de mariages entre n garçons de l'âge a , et n filles de l'âge a' ; et déterminons le nombre de ces mariages subsistants après x années écoulées depuis leur origine. Nommons φ la probabilité qu'un garçon qui se marie à l'âge a parviendra à l'âge $a + x$; et ψ la probabilité qu'une fille qui se marie à l'âge a' parviendra à l'âge $a' + x$. La probabilité que leur mariage subsistera après sa $x^{\text{ième}}$ année sera $\varphi\psi$; donc, si l'on développe le binôme $[\varphi\psi + (1 - \varphi\psi)]^n$, le terme $n(\varphi\psi)^i(1 - \varphi\psi)^{n-i}$ de ce développement exprimera la probabilité que, sur les n mariages, i subsisteront après x années. Le plus grand terme du développement est, par le n° 16, celui dans lequel i est égal au plus grand nombre entier contenu dans $(n + 1)\varphi\psi$; et, par le même numéro, il est extrêmement probable que le nombre des mariages subsistants ne s'écartera que très peu en plus ou en moins de

ce nombre. Ainsi, en désignant par i le nombre des mariages subsistants, on pourra supposer, à très peu près,

$$i = n\varphi\psi.$$

$n\varphi$ est à fort peu près le nombre des n maris vivants à l'âge $a+x$. Les Tables de mortalité le feront connaître d'une manière fort approchée, si elles ont été formées sur des listes nombreuses de mortalité; car, si l'on désigne par p' le nombre des hommes vivants à l'âge a , sur l'ensemble de ces listes, et par q' le nombre des survivants à l'âge $a+x$, on aura, à fort peu près, par le n° 29,

$$n\varphi = \frac{nq'}{p'}.$$

Si l'on nomme pareillement p'' le nombre des femmes vivantes à l'âge a' et par q'' le nombre des survivantes à l'âge $a'+x$, on aura, à très peu près,

$$n\psi = \frac{nq''}{p''};$$

donc

$$i = \frac{nq'q''}{p'p''}.$$

On formera ainsi, d'année en année, une Table des valeurs de i . En faisant ensuite une somme de tous les nombres de cette Table, et en la divisant par n , on aura la durée moyenne des mariages faits à l'âge a pour les garçons et à l'âge a' pour les filles.

Cherchons maintenant la probabilité que l'erreur de la valeur précédente de i sera comprise dans des limites données. Supposons, pour simplifier le calcul, que les deux conjoints soient du même âge, et que la probabilité de la vie des hommes soit la même que celle des femmes; alors on a

$$a' = a, \quad q'' = q', \quad p'' = p', \quad \varphi = \psi;$$

et l'expression précédente de i devient

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2}.$$

Concevons que la valeur de i soit $\frac{nq'^2}{p'^2} + s$; s sera l'erreur de cette expression de i . On a vu, dans le n° 30, que si l'on a observé que, sur un très grand nombre p d'individus de l'âge a , q sont parvenus à l'âge $a+x$, la probabilité que, sur p' autres individus de l'âge a , $\frac{p'q}{p} + z$ parviendront à l'âge $a+x$, est

$$\sqrt{\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')\pi}} e^{-\frac{p^2 z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}.$$

Si l'on suppose p et q infinis, on aura évidemment

$$\varphi = \frac{q}{p},$$

et, si l'on fait

$$\frac{p'q}{p} + z = q',$$

on aura

$$\varphi = \frac{q'}{p'} - \frac{z}{p'},$$

ce qui donne à très peu près, en négligeant le carré $\frac{nz^2}{p'^2}$,

$$n\varphi^2 = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2};$$

ainsi la probabilité précédente de z est en même temps la probabilité de cette expression de $n\varphi^2$. Supposons maintenant $i = n\varphi^2 + t$; en considérant le binôme $[\varphi^2 + (1-\varphi^2)]^n$, la probabilité de cette expression de i est, par le n° 16,

$$\frac{1}{\sqrt{2n\pi\varphi^2(1-\varphi^2)}} e^{-\frac{t^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}.$$

Mais la valeur précédente de i devient, en y substituant pour $n\varphi^2$ sa valeur,

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + t;$$

la probabilité de cette dernière expression de i est égale au produit de

celles de i et de z , trouvées ci-dessus; elle est donc égale à

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{2p\varphi(1-\varphi)} - \frac{p}{2n\varphi(1-\varphi^2)}}}{2\pi\sqrt{np'\varphi^2(1-\varphi)^2(1+\varphi)}}.$$

Ayant supposé précédemment $i = \frac{nq'^2}{p'^2} + s$, on aura $s = l - \frac{2nq'z}{p'^2}$; en substituant donc pour l sa valeur tirée de cette équation et observant que l'on a à très peu près $\frac{q'}{p'} = \varphi$, on aura, pour la probabilité que la valeur de s sera comprise dans des limites données, l'expression intégrale

$$\frac{\int f dz ds e^{-\frac{z^2}{2\varphi(1-\varphi)p'} - \frac{(s + \frac{2nq'z}{p'^2})^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}}{2\pi\sqrt{np'\varphi^2(1-\varphi)^2(1+\varphi)}},$$

l'intégrale relative à z pouvant être prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$. De là, il est facile de conclure, par les méthodes exposées précédemment, que, si l'on fait

$$k^2 = \frac{p'}{2n\varphi^2(1-\varphi)[p' + (p' + 4n)\varphi]},$$

l'intégrale précédente devient

$$\int \frac{k dz}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2};$$

ainsi la probabilité que l'erreur de l'expression $i = \frac{nq'^2}{p'^2}$ sera $\pm s$ est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int k ds e^{-k^2 s^2},$$

l'intégrale étant prise depuis s nul.

L'analyse précédente s'applique également à la durée moyenne d'un grand nombre d'associations formées de trois individus ou de quatre individus, etc. Soit n ce nombre, et supposons que tous les associés soient du même âge a au moment de l'association; désignons par p le nombre des individus de la Table de mortalité de l'âge a , et par q le

nombre des individus de l'âge $a+x$; le nombre i des associations existantes après x années écoulées depuis l'origine des associations sera à fort peu près

$$i = \frac{nq^r}{p^r},$$

r étant le nombre des individus de chaque association. On trouvera par la même analyse la probabilité que ce nombre sera renfermé dans des limites données. La somme des valeurs de i correspondantes à toutes les valeurs de x , divisée par n , sera la durée moyenne de ce genre d'associations.

CHAPITRE IX.

DES BÉNÉFICES DÉPENDANTS DE LA PROBABILITÉ DES ÉVÉNEMENTS FUTURS.

38. Concevons que l'arrivée d'un événement procure le bénéfice v , et que sa non-arrivée cause la perte μ . Une personne A attend l'arrivée d'un nombre s d'événements semblables, tous également probables, mais indépendants les uns des autres; on demande quel est son avantage.

Soient q la probabilité de l'arrivée de chaque événement et par conséquent $1 - q$ celle de sa non-arrivée; si l'on développe le binôme $[q + (1 - q)]^t$, le terme

$$\frac{1, 2, 3, \dots, s}{1, 2, 3, \dots, i, 1, 2, 3, \dots, (s-i)} q^i (1-q)^{s-i}$$

de ce développement sera la probabilité que sur les s événements i arriveront. Dans ce cas, le bénéfice de A est iv , et sa perte est $(s-i)\mu$; la différence est $i(v + \mu) - s\mu$; en la multipliant par sa probabilité exprimée par le terme précédent et prenant la somme de ces produits pour toutes les valeurs de i , on aura l'avantage de A, qui, par conséquent, est égal à

$$-s\mu[q + (1-q)]^t + (v + \mu)S \frac{1, 2, 3, \dots, s}{1, 2, 3, \dots, i, 1, 2, 3, \dots, (s-i)} q^i (1-q)^{s-i},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i . On a

$$S \frac{1, 2, 3, \dots, s}{1, 2, 3, \dots, i, 1, 2, 3, \dots, (s-i)} q^i (1-q)^{s-i} = \frac{d}{dt} S \frac{1, 2, 3, \dots, s}{1, 2, 3, \dots, i, 1, 2, 3, \dots, (s-i)} q^i t^i (1-q)^{s-i} = \frac{d}{dt} [qt + (1-q)]^s,$$

pourvu que l'on suppose $t = 1$, après la différentiation, ce qui réduit ce dernier membre à qs ; l'avantage de A est donc $s[qv - (1-q)\mu]$. Cet avantage est nul, si $qv = \mu(1-q)$, c'est-à-dire, si le bénéfice de l'arrivée de l'événement, multiplié par sa probabilité, est égal à la perte causée par sa non-arrivée, multipliée par sa probabilité. L'avantage devient négatif et se change en désavantage, si le second produit surpasse le premier. Dans tous les cas, l'avantage ou le désavantage de A est proportionnel au nombre s des événements.

On déterminera par l'analyse du n° 16 la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans des limites données, si s est un grand nombre. Suivant cette analyse, la somme des divers termes du binôme $[q + (1-q)]^t$ compris entre les deux termes distants de $l + 1$, de part et d'autre du plus grand, est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dt e^{-t^2} + \frac{1}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}} e^{-\frac{t^2}{2sq(1-q)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{l}{\sqrt{2sq(1-q)}}$. L'exposant de q dans le plus grand terme est à très peu près, par le même numéro, égal à sq , et les exposants de q , correspondants aux termes extrêmes compris dans l'intervalle précédent, sont respectivement $sq - l$ et $sq + l$. Les bénéfices correspondants à ces trois termes sont

$$s[qv - (1-q)\mu] - l(v + \mu),$$

$$s[qv - (1-q)\mu],$$

$$s[qv - (1-q)\mu] + l(v + \mu);$$

en faisant donc $l = r\sqrt{s}$, la probabilité que le bénéfice réel de A n'excèdera pas les limites $s[qv - (1-q)\mu] \pm r\sqrt{s}(v + \mu)$ est égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dr e^{-\frac{r^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}} e^{-\frac{r^2}{2sq(1-q)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$, et le dernier terme pouvant être négligé. On voit par cette formule que si $qv - (1-q)\mu$ n'est pas nul,

le bénéfice réel augmente sans cesse et devient infiniment grand et certain dans le cas d'un nombre infini d'événements.

On peut étendre, par l'analyse suivante, ce résultat au cas où les probabilités des s événements sont différentes, ainsi que les bénéfices et les pertes qui y sont attachés. Soient $q, q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(s-1)}$ les probabilités respectives de ces événements; $v, v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(s-1)}$ les bénéfices que procurent leurs arrivées. On peut, pour simplifier, faire abstraction des pertes que causent leurs non-arrivées, en comprenant dans le bénéfice que procure l'arrivée de chaque événement la quantité que A perdrait par sa non-arrivée, et en retranchant ensuite de l'avantage total de A la somme de ces dernières quantités; car il est facile de voir que cela ne change point la position de A.

Cela posé, considérons le produit

$$(1 - q + q e^{\sigma \sqrt{-1}})(1 - q^{(1)} + q^{(1)} e^{v^{(1)} \sigma \sqrt{-1}}) \dots (1 - q^{(s-1)} + q^{(s-1)} e^{v^{(s-1)} \sigma \sqrt{-1}}).$$

Il est clair que la probabilité que la somme des bénéfices sera $f + l'$ est égale au coefficient de $e^{(f+l') \sigma \sqrt{-1}}$ dans le développement de ce produit; elle est donc égale à

$$(a) \quad \frac{1}{2\pi} \int d\sigma e^{-(f+l') \sigma \sqrt{-1}} (1 - q + q e^{\sigma \sqrt{-1}}) \dots (1 - q^{(s-1)} + q^{(s-1)} e^{v^{(s-1)} \sigma \sqrt{-1}}),$$

l'intégrale étant prise depuis $\sigma = -\pi$ jusqu'à $\sigma = \pi$, et les nombres $v, v^{(1)}, \dots$ étant supposés, comme on peut le faire, des nombres entiers. Prenons le logarithme du produit

$$(b) \quad e^{-f \sigma \sqrt{-1}} (1 - q + q e^{\sigma \sqrt{-1}}) \dots (1 - q^{(s-1)} + q^{(s-1)} e^{v^{(s-1)} \sigma \sqrt{-1}});$$

en le développant suivant les puissances de σ , il devient

$$(S q^{(i) v^{(i)}} - f) \sigma \sqrt{-1} - \frac{\sigma^2}{2} S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2} - \dots,$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$. La supposition de f égal à $S q^{(i) v^{(i)}}$ fait disparaître la première puissance de σ , et la considération de s , un très grand nombre, rend

insensibles les termes dépendants des puissances de σ , supérieures au carré. En repassant donc des logarithmes aux nombres dans le développement précédent, le produit (b) devient à très peu près

$$e^{-\frac{\sigma^2}{2} S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2}},$$

ce qui change l'intégrale (a) dans celle-ci

$$\frac{1}{2\pi} \int d\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2} S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2}}.$$

L'intégrale devant être prise depuis $\sigma = -\pi$ jusqu'à $\sigma = \pi$, et $S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2}$ étant un grand nombre de l'ordre s , il est clair que cette intégrale peut être étendue sans erreur sensible jusqu'aux valeurs infinies positives et négatives de σ . En faisant donc

$$\sigma \sqrt{\frac{S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2}}{2}} + \frac{l' \sqrt{-1}}{\sqrt{2 S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2}}} = t$$

et intégrant depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, l'intégrale (a) devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2}}} e^{-\frac{l'^2}{2 S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2}}}.$$

Si l'on multiplie cette quantité par $x dt$, et qu'ensuite on l'intègre depuis $l = 0$, cette intégrale sera l'expression de la probabilité que le bénéfice de A sera compris dans les limites $f \pm l$, ou $S q^{(i) v^{(i)}} \pm l$; en faisant ainsi

$$l' = r \sqrt{2 S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2}},$$

la probabilité que le bénéfice de A sera compris dans les limites

$$S q^{(i) v^{(i)}} \pm r \sqrt{2 S q^{(i)} (1 - q^{(i)}) v^{(i)2}}$$

est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dr e^{-r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$.

Maintenant il faut, par ce qui précède, changer dans les limites pré-

cédentes $\nu^{(i)}$ dans $\nu^{(i)} + \mu^{(i)}$ et en retrancher $S\mu^{(i)}$; la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans les limites

$$S[q^{(i)}\nu^{(i)} - (1 - q^{(i)})\mu^{(i)}] \pm r\sqrt{2Sg^{(i)}(1 - q^{(i)})(\nu^{(i)} + \mu^{(i)})^2}$$

est donc

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dr e^{-r^2}.$$

On voit par cette formule que, pour peu que l'espérance mathématique de chaque événement surpasse zéro, en multipliant les événements à l'infini, le premier terme de l'expression des limites étant de l'ordre s , tandis que le second n'est que de l'ordre $\sqrt{s}$, le bénéfice réel s'accroît sans cesse et devient à la fois infiniment grand et certain, dans le cas d'un nombre infini d'événements.

39. Considérons maintenant le cas où, à chaque événement, la personne A a un nombre quelconque de chances à espérer ou à craindre. Supposons, par exemple, qu'une urne renferme des boules de diverses couleurs, que l'on tire une boule de cette urne, en la remettant dans l'urne après le tirage, et que le bénéfice de A soit ν si la boule extraite est de la première couleur, qu'il soit ν' si la boule extraite est de la deuxième couleur, qu'il soit ν'' si la boule extraite est de la troisième couleur, et ainsi de suite, les bénéfices devenant négatifs lorsque A est forcé de donner au lieu de recevoir. Nommons $a, a', a'', \dots$ les probabilités que la boule extraite à chaque tirage sera de la première, ou de la deuxième, ou de la troisième, etc. couleur, et supposons que l'on ait ainsi s tirages; on aura d'abord

$$a + a' + a'' + \dots = 1.$$

En multipliant ensuite les termes du premier membre de cette équation, respectivement par $e^{\nu\sigma\sqrt{-1}}$, $e^{\nu'\sigma\sqrt{-1}}$, $e^{\nu''\sigma\sqrt{-1}}$, ..., le terme indépendant des puissances de $e^{\sigma\sqrt{-1}}$, dans le développement de la fonction

$$e^{-(l+2p)\sigma\sqrt{-1}}(a e^{\nu\sigma\sqrt{-1}} + a' e^{\nu'\sigma\sqrt{-1}} + a'' e^{\nu''\sigma\sqrt{-1}} + \dots)^s,$$

sera, par ce qui précède, la probabilité que, dans s tirages, le bénéfice de A sera $s\mu + l$; cette probabilité est donc égale à

$$(c) \quad \frac{1}{2\pi} \int d\sigma e^{-l\sigma\sqrt{-1}} [e^{-p\sigma\sqrt{-1}}(a e^{\nu\sigma\sqrt{-1}} + a' e^{\nu'\sigma\sqrt{-1}} + \dots)]^s,$$

l'intégrale relative à σ étant prise depuis $\sigma = -\pi$ jusqu'à $\sigma = \pi$. Si l'on développe par rapport aux puissances de σ le logarithme hyperbolique de la quantité élevée à la puissance s sous le signe f , et si l'on observe que $a + a' + a'' + \dots = 1$, on aura, pour ce logarithme,

$$\begin{aligned} & \sigma\sqrt{-1}(a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \dots - \mu) \\ & - \frac{\sigma^3}{3}[a\nu^3 + a'\nu'^3 + a''\nu''^3 + \dots - (a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \dots)^3] - \dots \end{aligned}$$

On fera disparaître la première puissance de σ , en faisant

$$\mu = a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \dots;$$

si l'on suppose ensuite

$$2k^2 = a\nu^2 + a'\nu'^2 + a''\nu''^2 + \dots - (a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \dots)^2,$$

et si l'on observe que, s étant supposé un grand nombre, on peut négliger les puissances de σ supérieures au carré, on aura, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$[e^{-p\sigma\sqrt{-1}}(a e^{\nu\sigma\sqrt{-1}} + a' e^{\nu'\sigma\sqrt{-1}} + a'' e^{\nu''\sigma\sqrt{-1}} + \dots)]^s = e^{-s k^2 \sigma^2},$$

ce qui change l'intégrale (c) dans celle-ci

$$\frac{1}{2\pi} \int d\sigma e^{-l\sigma\sqrt{-1} - s k^2 \sigma^2},$$

qui devient, en intégrant comme dans le numéro précédent,

$$\frac{1}{2k\sqrt{s\pi}} e^{-\frac{l^2}{4sk^2}}.$$

En la multipliant par $2dl$ et intégrant le produit depuis $l = 0$, on aura

la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans les limites

$$s(av + a'v' + a''v'' + \dots) \pm t;$$

en faisant donc

$$t = \alpha h r' \sqrt{s},$$

cette probabilité sera, en prenant l'intégrale depuis $r' = 0$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dr' e^{-r'^2}.$$

Nous avons supposé dans ce qui précède les probabilités des événements connues; examinons le cas où elles sont inconnues. Supposons que, sur m événements semblables attendus, n soient arrivés, et que A attende s pareils événements, dont chacun lui procure par son arrivée le bénéfice v , la non-arrivée lui causant la perte μ . Si l'on représente par $\frac{n}{m}s + z$ le nombre d'événements qui arriveront sur les s événements attendus, la probabilité que z sera contenu dans les limites $\pm kt$ sera par le n° 30

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dt e^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$, kt étant égal à

$$\frac{\alpha ns(m-n)\mu}{m^2} (m+s).$$

Mais, $\frac{n}{m}s + z$ étant le nombre des événements arrivés, le bénéfice réel de A est

$$\left[\frac{nv}{m} - \frac{(m-n)\mu}{m} \right] s + z(v + \mu);$$

l'intégrale précédente est donc la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans les limites

$$\left[\frac{nv}{m} - \frac{(m-n)\mu}{m} \right] s \pm kt(v + \mu).$$

k est de l'ordre $\sqrt{s}$, si m et n sont d'un ordre égal ou plus grand que s ;

ainsi, quelque petite que soit l'espérance mathématique relative à chaque événement, le bénéfice réel devient à l'infini, certain et infiniment grand, lorsque le nombre des événements passés est supposé infini, comme celui des événements futurs.

40. Nous allons maintenant déterminer les bénéfices des établissements fondés sur les probabilités de la vie humaine. La manière la plus simple de calculer ces bénéfices est de les réduire en capitaux actuels. Prenons pour exemple les rentes viagères. Une personne de l'âge A veut constituer sur sa tête une rente viagère h ; on demande le capital qu'elle doit pour cela donner à la caisse de l'établissement qui lui fait cette rente.

Si l'on nomme y_0 le nombre des individus de l'âge A dans la Table de mortalité dont on fait usage, et y_x le nombre des individus de l'âge $A + x$, la probabilité de payer la rente à la fin de l'année $A + x$ sera $\frac{y_x}{y_0}$; par conséquent, la valeur du paiement sera $\frac{hy_x}{y_0}$. Mais, si l'on désigne par r l'intérêt annuel de l'unité, en sorte que le capital 1 devienne $1 + r$ après un an, il deviendra $(1 + r)^x$ après x années; ainsi, le paiement $(1 + r)^x$ fait à la fin de la $x^{\text{ème}}$ année, réduit en capital actuel, devient l'unité, ou ce même paiement divisé par $(1 + r)^x$; le paiement $\frac{hy_x}{y_0}$ réduit en capital actuel est donc $\frac{hy_x}{y_0(1 + r)^x}$. La somme de tous les paiements faits pendant la durée de la vie de la personne qui constitue la rente et multipliés par leur probabilité équivaut donc à un capital actuel représenté par l'intégrale finie

$$\sum \frac{hy_x}{y_0(1 + r)^x},$$

la caractéristique Σ devant embrasser toutes les valeurs de la fonction qu'elle affecte.

On peut déterminer cette intégrale en formant toutes ces valeurs d'après la Table de mortalité, et en les ajoutant ensemble; on déduira ensuite les capitaux les uns des autres, en observant que, si l'on

nomme F le capital relatif à l'âge A et F' le capital relatif à l'âge $A+1$, on a

$$F = \frac{y_1}{y_0} \frac{F' + h}{1+r}.$$

Mais ce procédé se simplifie lorsque la loi de mortalité est connue, et surtout lorsqu'elle est donnée par une fonction rationnelle et entière de x , ce qui est toujours possible, en considérant les nombres de la Table de mortalité comme des ordonnées dont les âges correspondants sont les abscisses, et en faisant passer une courbe parabolique par les extrémités des deux ordonnées extrêmes et de plusieurs ordonnées intermédiaires. Les différences qui existent entre les diverses Tables de mortalité permettent de regarder ce moyen comme aussi exact que ces Tables, et même de s'en tenir à un petit nombre d'ordonnées.

Faisons

$$\frac{1}{1+r} = p, \quad \frac{y_x}{y_0} = u;$$

reprenons la formule (16) du n° 11 du Livre I^{er} qui donne

$$\Sigma p^x u = -\frac{p^x}{p e^{dx} - 1} + f,$$

f étant une constante arbitraire. Il faut, dans le développement du premier terme du second membre de cette équation par rapport aux puissances de $\frac{du}{dx}$, changer une puissance quelconque $\left(\frac{du}{dx}\right)^i$ dans $\frac{d^i u}{dx^i}$, et multiplier par u le premier terme, qui est indépendant de $\frac{du}{dx}$. On a ainsi

$$\Sigma p^x u = f - \frac{p^x u}{1-p} - \frac{p^{x+1}}{(1-p)^2} \frac{du}{dx} - \frac{(p+1)p^{x+1}}{1,2,(1-p)^3} \frac{d^2 u}{dx^2} + \dots$$

Pour déterminer f , on observera que l'intégrale $\Sigma p^x u$ est nulle lorsque $x=1$, et qu'elle se termine lorsque $x=n+1$, $A+n$ étant la limite de la vie; car alors elle embrasse les termes correspondants à tous les nombres 1, 2, 3, ..., n . Désignons donc par (u) , $\left(\frac{du}{dx}\right)$, ...,

u' , $\left(\frac{du}{dx}\right)$, ..., les valeurs de u , $\frac{du}{dx}$, ..., correspondantes à $x=1$ et à $x=n+1$; on aura

$$(o) \quad \Sigma \frac{h p^x y_x}{y_0} = h \left\{ \frac{p}{1-p} [(u) - p^n (u')] + \frac{p^2}{(1-p)^2} \left[\left(\frac{du}{dx}\right) - p^n \left(\frac{du'}{dx}\right) \right] + \frac{(p+1)p^2}{1,2,(1-p)^3} \left[\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) - p^n \left(\frac{d^2 u'}{dx^2}\right) \right] + \dots \right\}.$$

Si u ou $\frac{y_x}{y_0}$ est constant et égal à l'unité, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, alors la rente viagère doit être payée certainement pendant le nombre n d'années, et elle devient une annuité. Dans ce cas, $\frac{du}{dx}$ est nul, et la formule précédente donne $\frac{h p (1-p^n)}{1-p}$ pour le capital équivalent à l'annuité h .

Si $u = 1 - \frac{x}{n}$, alors la probabilité de la vie décroît en progression arithmétique, et la formule précédente donne

$$\frac{h p}{1-p} \left[1 - \frac{1-p^n}{n(1-p)} \right]$$

pour le capital équivalent à la rente viagère h , et ainsi de suite.

Supposons maintenant que l'on veuille constituer une rente viagère h sur plusieurs individus des âges A , $A+a$, $A+a+a'$, ..., de sorte que la rente reste au survivant. Désignons par y_x , y_{x+a} , $y_{x+a+a'}$, ... les nombres de la Table de mortalité, correspondants aux âges A , $A+a$, $A+a+a'$, ..., la probabilité qu'à le premier individu de vivre à l'âge $A+x$ étant $\frac{y_x}{y_0}$, la probabilité qu'à cet âge il aura cessé de vivre est $1 - \frac{y_x}{y_0}$. Pareillement, la probabilité qu'à le deuxième individu de vivre à l'âge $A+a+x$ ou à la fin de la x ème année de la constitution de la rente étant $\frac{y_{x+a}}{y_a}$, la probabilité qu'il aura cessé de vivre alors est $1 - \frac{y_{x+a}}{y_a}$; la probabilité que le troisième individu aura cessé de vivre, à la même époque de la constitution de la rente, est

$1 - \frac{y_{x+a+a'}}{y_{a+a'}}$, et ainsi de suite. La probabilité qu'aucun de ces individus n'existera à cette époque est donc

$$\left(1 - \frac{y_x}{y_0}\right) \left(1 - \frac{y_{x+a}}{y_a}\right) \left(1 - \frac{y_{x+a+a'}}{y_{a+a'}}\right) \dots$$

En retranchant ce produit de l'unité, la différence sera la probabilité qu'un de ces individus au moins sera vivant à la fin de la $x^{\text{ème}}$ année de la constitution de la rente. Nommons u cette probabilité; $\Sigma h p^x u$ sera le capital actuel équivalent à la rente viagère h . Mais on doit observer, en prenant cette intégrale, que les quantités $y_x, y_{x+a}, \dots$ sont nulles, lorsque leurs indices $x, x+a, \dots$ surpassent le nombre n , $A+n$ étant la limite de la vie.

Si y_x est une fonction rationnelle et entière de x , et d'exponentielles telles que $q^x, r^x, \dots$, on aura facilement, par les formules du Livre I^{er}, l'intégrale $\Sigma p^x u$; mais on peut dans tous les cas former, au moyen d'une Table de mortalité, tous les termes de cette intégrale, en prendre la somme et construire ainsi des Tables de rentes viagères sur une ou plusieurs têtes.

L'analyse précédente sert pareillement à déterminer la rente viagère que l'on doit faire à un établissement pour assurer à ses héritiers un capital après sa mort. Le capital équivalent à la rente viagère h , faite à une personne de l'âge A , est, par ce qui précède, $h S \frac{p^x y_x}{y_0}$, le signe S comprenant tous les termes inclusivement, depuis $x=1$ jusqu'à la limite de la vie de la personne. Nommons hq cette intégrale, et imaginons que l'établissement reçoive de cette personne la rente h , et lui donne en échange le capital hq . Concevons ensuite que la même personne place ce capital à intérêt perpétuel sur l'établissement lui-même, l'intérêt annuel de l'unité étant r ou $\frac{1-p}{p}$. Il est clair que l'établissement doit rendre le capital hq aux héritiers de la personne. Mais elle a fait pendant sa vie la rente h à l'établissement, et elle en a reçu la rente $\frac{h q (1-p)}{p}$; la rente qu'elle a faite réellement est donc $h \left[1 - \frac{q(1-p)}{p}\right]$;

c'est donc ce qu'elle doit donner annuellement à l'établissement pour assurer à ses héritiers le capital hq .

Je n'insisterai pas davantage sur ces objets, ainsi que sur ceux qui sont relatifs aux établissements d'assurance de tout genre, parce qu'ils ne présentent aucune difficulté. J'observerai seulement que tous ces établissements doivent, pour prospérer, se réserver un bénéfice et multiplier considérablement leurs affaires, afin que, leur bénéfice réel devenant presque certain, ils soient exposés le moins qu'il est possible à de grandes pertes qui pourraient les détruire. En effet, si le nombre des affaires est s et si l'avantage de l'établissement dans chacune d'elles est b , alors il devient extrêmement probable que le bénéfice réel de l'établissement sera sb , s étant supposé un très grand nombre.

Pour le faire voir, supposons que s personnes de l'âge A constituent, chacune sur sa tête, une rente viagère h , et considérons une de ces personnes que nous désignerons par C . Si C meurt dans l'intervalle de la fin de l'année x écoulée depuis la constitution de sa rente à la fin de l'année $x+1$, l'établissement lui aura payé la rente h pendant x années, et la somme de ces paiements, réduite en capital actuel, sera $h(p + p^2 + \dots + p^x)$ ou $\Sigma h p^{x+1}$; or la probabilité que C mourra dans cet intervalle est $\frac{y_x - y_{x+1}}{y_0}$ ou $-\frac{\Delta y_x}{y_0}$; la valeur de la perte que l'établissement doit alors supporter est donc $-\frac{\Delta y_x}{y_0} \Sigma h p^{x+1}$. La somme de toutes ces pertes est

$$(r) \quad - \Sigma \left(\frac{\Delta y_x}{y_0} \Sigma h p^{x+1} \right);$$

c'est le capital que C doit verser à la caisse de l'établissement pour en recevoir la rente viagère h . On peut observer ici que l'on a

$$-\Delta y_x \Sigma p^{x+1} = -y_{x+1} \Sigma p^{x+1} + y_x \Sigma p^x + y_x p^x;$$

en intégrant le second membre de cette équation, la fonction (r) se réduit à

$$-\frac{y_x}{y_0} \Sigma h p^x + \frac{\Sigma h y_x p^x}{y_0} + \text{const.};$$

or Σp^x se réduit à zéro, lorsque $x = 1$, et lorsque $x = n + 1$, y_x est nul par ce qui précède; la fonction (r) ou le capital que C doit payer à l'établissement est donc $\frac{\Sigma h y_x p^x}{y_0}$, ce qui est conforme à ce qui précède.

Mais sous la forme de la fonction (r) on peut appliquer au bénéfice de l'établissement l'analyse du n° 39. En effet, on a dans ce cas, par le numéro cité,

$$ay + a'y' + a''y'' + \dots = -\Sigma \left(\frac{\Delta y_x}{y_0} \Sigma h p^{x+1} \right);$$

ensuite $a, a', \dots$ étant les valeurs successives de $-\frac{\Delta y_x}{y_0}$, on aura

$$ay^2 + a'y'^2 + \dots = \Sigma \left[-\frac{\Delta y_x}{y_0} (\Sigma h p^{x+1})^2 \right],$$

en sorte que

$$2k^2 = \Sigma \left[-\frac{\Delta y_x}{y_0} (\Sigma h p^{x+1})^2 \right] - \left[\Sigma \left(\frac{\Delta y_x}{y_0} \Sigma h p^{x+1} \right) \right]^2.$$

En supposant que chacune des s personnes qui constitue la rente h sur sa tête verse à la caisse de l'établissement, outre le capital correspondant à cette rente, une somme b , pour subvenir aux frais de l'établissement, on aura, par le n° 39,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dr' e^{-r'^2},$$

pour la probabilité que le bénéfice réel de l'établissement sera compris dans les limites

$$sb \pm 2kr'\sqrt{s}.$$

Ainsi, dans le cas d'un nombre infini d'affaires, le bénéfice réel de l'établissement devient certain et infini. Mais alors ceux qui traitent avec lui ont un désavantage mathématique qui doit être compensé par un avantage moral, dont l'appréciation va être l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE X.

DE L'ESPÉRANCE MORALE.

41. On a vu, dans le n° 2, la différence qui existe entre l'espérance mathématique et l'espérance morale. L'espérance mathématique résultante de l'attente probable d'un ou de plusieurs biens étant le produit de ces biens par la probabilité de les obtenir, elle peut être évaluée par l'analyse exposée dans ce qui précède. L'espérance morale se règle sur mille circonstances qu'il est presque impossible de bien évaluer. Mais nous avons donné dans le numéro cité un principe qui, s'appliquant aux cas les plus communs, conduit à des résultats souvent utiles, et dont nous allons développer les principaux.

D'après ce principe, x étant la fortune physique d'un individu, l'accroissement dx qu'elle reçoit produit à l'individu un bien moral réciproque à cette fortune; l'accroissement de sa fortune morale peut donc être exprimé par $\frac{h dx}{x}$, h étant une constante. Ainsi, en désignant par y la fortune morale correspondante à la fortune physique x , on aura

$$y = k \log x + \log h,$$

h étant une constante arbitraire que l'on déterminera au moyen d'une valeur de y correspondante à une valeur donnée de x . Sur cela, nous observerons que l'on ne peut jamais supposer x et y nuls ou négatifs dans l'ordre naturel des choses; car l'homme qui ne possède rien regarde son existence comme un bien moral qui peut être comparé à l'avantage que lui procurerait une fortune physique dont il est bien

difficile d'assigner la valeur, mais que l'on ne peut fixer au-dessous de ce qui lui serait rigoureusement nécessaire pour exister; car on conçoit qu'il ne consentirait point à recevoir une somme modique, telle que cent francs, avec la condition de ne prétendre à rien, lorsqu'il l'aurait dépensée.

Supposons maintenant que la fortune physique d'un individu soit a , et qu'il lui survienne l'expectative d'un des accroissements $x, \varepsilon, \gamma, \dots$ ces quantités pouvant être nulles ou même négatives, ce qui change les accroissements en diminutions. Représentons par $p, q, r, \dots$ les probabilités respectives de ces accroissements, la somme de ces probabilités étant supposée égale à l'unité. Les fortunes morales correspondantes de l'individu pourront être

$$k \log(a+x) + \log h, \quad k \log(a+\varepsilon) + \log h, \quad k \log(a+\gamma) + \log h, \quad \dots$$

En multipliant ces fortunes respectivement par leurs probabilités $p, q, r, \dots$, la somme de leurs produits sera la fortune morale de l'individu en vertu de son expectative; en nommant donc Y cette fortune, on aura

$$Y = hp \log(a+x) + hq \log(a+\varepsilon) + hr \log(a+\gamma) + \dots + \log h.$$

Soit X la fortune physique qui correspond à cette fortune morale, on aura

$$Y = k \log X + \log h.$$

La comparaison de ces deux valeurs de Y donne

$$X = (a+x)^p (a+\varepsilon)^q (a+\gamma)^r \dots$$

Si l'on retranche la fortune primitive a de cette valeur de X , la différence sera l'accroissement de la fortune physique qui procurerait à l'individu le même avantage moral qui résulte pour lui de son expectative. Cette différence est donc l'expression de cet avantage, au lieu que l'avantage mathématique a pour expression

$$px + q\varepsilon + r\gamma + \dots$$

De là résultent plusieurs conséquences importantes. L'une d'elles est que le jeu mathématiquement le plus égal est toujours désavantageux. En effet, si l'on désigne par a la fortune physique du joueur avant de commencer le jeu; par p sa probabilité de gagner, et par μ sa mise, celle de son adversaire doit être, pour l'égalité du jeu, $\frac{(1-p)\mu}{p}$; ainsi le joueur gagnant la partie, sa fortune physique devient $a + \frac{1-p}{p}\mu$, et la probabilité de cela est p . S'il perd la partie, sa fortune physique devient $a - \mu$, et la probabilité de cela est $1-p$; en nommant donc X sa fortune physique, en vertu de son expectative, on aura, par ce qui précède,

$$X = \left(a + \frac{1-p}{p}\mu\right)^p (a - \mu)^{1-p};$$

or cette quantité est plus petite que a , c'est-à-dire que l'on a

$$\left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{\mu}{a}\right)^p \left(1 - \frac{\mu}{a}\right)^{1-p} < 1$$

ou, en prenant les logarithmes hyperboliques.

$$p \log \left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{\mu}{a}\right) + (1-p) \log \left(1 - \frac{\mu}{a}\right) < 0.$$

Le premier membre de cette équation peut être mis sous la forme

$$f(1-p) \frac{d\mu}{a} \left(\frac{1}{1 + \frac{1-p}{p} \frac{\mu}{a}} - \frac{1}{1 - \frac{\mu}{a}} \right),$$

quantité qui est évidemment négative.

Il résulte encore de l'analyse précédente qu'il vaut mieux exposer sa fortune par parties à des dangers indépendants les uns des autres, que de l'exposer tout entière au même danger. Pour le faire voir, supposons qu'un négociant, ayant à faire venir par mer une somme 1, l'expose sur un seul vaisseau, et que l'observation ait fait connaître la probabilité p de l'arrivée d'un vaisseau du même genre dans le port; l'avantage mathématique du négociant, résultant de son expectative,

sera $p\epsilon$. Mais, si l'on représente par l'unité sa fortune physique, indépendamment de son expectative, sa fortune morale sera, par ce qui précède,

$$kp \log(1 + \epsilon) + \log h,$$

et son avantage moral sera, en vertu de son expectative,

$$(1 + \epsilon)^p - 1,$$

quantité plus petite que $p\epsilon$; car on a

$$(1 + \epsilon)^p < 1 + p\epsilon,$$

puisque $\log(1 + \epsilon)^p$ ou $p \log(1 + \epsilon)$ est moindre que $\log(1 + p\epsilon)$, ce qui est évident, lorsqu'on met ces deux logarithmes sous les formes $\int \frac{p \, d\epsilon}{1 + \epsilon}$ et $\int \frac{p \, d\epsilon}{1 + p\epsilon}$.

Supposons maintenant que le négociant expose la somme ϵ , par parties égales, sur r vaisseaux. Sa fortune physique deviendra $1 + \epsilon$, si tous les vaisseaux arrivent, et la probabilité de cet événement est p^r . Si $r - 1$ vaisseaux arrivent, la fortune physique du négociant devient $1 + \frac{(r-1)\epsilon}{r}$, et la probabilité de cet événement est $rp^{r-1}(1-p)$. Si $r - 2$ vaisseaux arrivent, la fortune physique du négociant devient $1 + \frac{r-2}{r}\epsilon$, et la probabilité de cet événement est $\frac{r(r-1)}{1.2} p^{r-2}(1-p)^2$, et ainsi de suite; la fortune morale du négociant est donc, par ce qui précède,

$$k \left\{ p^r \log(1 + \epsilon) + rp^{r-1}(1-p) \log\left(1 + \frac{r-1}{r}\epsilon\right) + \frac{r(r-1)}{1.2} p^{r-2}(1-p)^2 \log\left(1 + \frac{r-2}{r}\epsilon\right) + \dots \right\} + \log h,$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme

$$(a) \quad kp \int d\epsilon \left[\frac{p^{r-1}}{1 + \epsilon} + \frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1 + \frac{r-1}{r}\epsilon} + \frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2 \left(1 + \frac{r-2}{r}\epsilon\right)} + \dots \right] + \log h.$$

Si l'on retranche de cette expression celle de la fortune morale du né-

gociant lorsqu'il expose la somme ϵ sur un seul vaisseau, et que l'on obtient en faisant $r = 1$ dans la précédente, ce qui, abstraction faite de $\log h$, réduit celle-ci à $kp \int \frac{d\epsilon}{1 + \epsilon}$ qui est égal à

$$kp \int d\epsilon \left[\frac{p^{r-1}}{1 + \epsilon} + \frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1 + \frac{r-1}{r}\epsilon} + \frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2 \left(1 + \frac{r-2}{r}\epsilon\right)} + \dots \right] + \log h,$$

la différence sera

$$kp(1-p) \frac{r-1}{r} \int \frac{\epsilon \, d\epsilon}{1 + \epsilon} \left[\frac{p^{r-2}}{1 + \frac{r-1}{r}\epsilon} + \frac{(r-2)p^{r-3}(1-p)}{1 + \frac{r-2}{r}\epsilon} + \dots \right];$$

cette différence étant positive, on voit qu'il y a moralement de l'avantage à partager la somme ϵ sur plusieurs vaisseaux. Cet avantage s'accroît à mesure que l'on augmente le nombre r des vaisseaux, et, si ce nombre est très grand, l'avantage moral devient à peu près égal à l'avantage mathématique.

Pour le faire voir, reprenons la formule (a) et donnons-lui cette forme

$$(a') \quad kp \int f \, dx \, d\epsilon \, c^{-\left(1 + \frac{\epsilon}{r}\right)x} \left(pc^{-\frac{\epsilon x}{r}} + 1 - p \right)^{r-1} + \log h,$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Dans cet intervalle, le coefficient de dx sous les signes ff n'a ni maximum ni minimum; car sa différentielle prise par rapport à x est

$$-c^{-\left(1 + \frac{\epsilon}{r}\right)x} d\epsilon \left(pc^{-\frac{\epsilon x}{r}} + 1 - p \right)^{r-2} \left[p(1 + \epsilon) c^{-\frac{\epsilon x}{r}} + (1-p) \left(1 + \frac{\epsilon}{r} \right) \right];$$

cette différentielle est constamment négative depuis $x = 0$ jusqu'à x infini; ainsi le coefficient lui-même diminue constamment dans cet intervalle. C'est donc ici le cas de faire usage de la formule (A) du n° 22 du Livre I^{er}, pour avoir, par une approximation convergente, l'intégrale $\int y \, dx$, y étant égal à

$$c^{-\left(1 + \frac{\epsilon}{r}\right)x} \left(pc^{-\frac{\epsilon x}{r}} + 1 - p \right)^{r-1}.$$

La quantité que nous avons nommée v dans le numéro cité devient alors

$$v = -\frac{y dx}{dy} = \frac{p c^{-\frac{x}{r}} + 1 - p}{p(1+\varepsilon) c^{-\frac{x}{r}} + (1-p)\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)},$$

ce qui donne

$$U = \frac{1}{1 + p\varepsilon + (1-p)\frac{\varepsilon}{r}},$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{p(1-p)\varepsilon^2\left(1 - \frac{1}{r}\right)}{r\left[1 + p\varepsilon + (1-p)\frac{\varepsilon}{r}\right]^2},$$

$U, \frac{dU}{dx}, \dots$ étant ce que deviennent $v, \frac{dv}{dx}, \dots$, lorsque x est nul. Cela posé, la formule (A) citée donnera

$$\int dx c^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)x} \left(p c^{-\frac{x}{r}} + 1 - p\right)^{r-1}$$

$$= \frac{1}{1 + p\varepsilon + (1-p)\frac{\varepsilon}{r}} \left\{ 1 + \frac{p(1-p)\varepsilon^2\left(1 - \frac{1}{r}\right)}{r\left[1 + p\varepsilon + (1-p)\frac{\varepsilon}{r}\right]} + \dots \right\}.$$

La formule (α') devient ainsi, à très peu près, lorsque r est un grand nombre,

$$k \int \frac{p d\varepsilon}{1 + p\varepsilon} + \log h$$

ou

$$k \log(1 + p\varepsilon) + \log h.$$

Maintenant soit X la fortune physique correspondante à cette fortune morale; on a, par ce qui précède,

$$k \log X + \log h,$$

pour la fortune morale correspondante à X ; en comparant donc ces deux expressions, on aura

$$X = 1 + p\varepsilon.$$

Dans ce cas, l'avantage moral est $p\varepsilon$; il est donc égal à l'avantage mathématique.

Souvent l'avantage moral des individus est augmenté par le moyen des caisses d'assurance, en même temps que ces caisses produisent aux assureurs un bénéfice certain. Supposons, par exemple, qu'un négociant ait une partie ε de sa fortune sur un vaisseau dont la probabilité de l'arrivée est p , et qu'il assure cette partie, en donnant une somme à la compagnie d'assurance. Pour l'égalité parfaite entre les sorts mathématiques de la compagnie et du négociant, celui-ci doit donner $(1-p)\varepsilon$ pour prix de l'assurance. En représentant par l'unité la fortune du négociant, indépendamment de son expectative ε , sa fortune morale sera, par ce qui précède,

$$kp \log(1 + \varepsilon) + \log h,$$

dans le cas où il n'assure pas, et dans le cas où il assure, elle sera

$$k \log(1 + p\varepsilon) + \log h;$$

or on a

$$\log(1 + p\varepsilon) > p \log(1 + \varepsilon)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int \frac{p d\varepsilon}{1 + p\varepsilon} > \int \frac{p d\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

p étant moindre que l'unité; la fortune morale du négociant est donc augmentée, au moyen de son assurance. Il peut ainsi faire à la compagnie d'assurance un sacrifice propre à subvenir aux frais de l'établissement et au bénéfice qu'elle doit faire. Si l'on nomme α ce sacrifice, c'est-à-dire si l'on suppose que le négociant donne à la compagnie, pour prix de son assurance, la somme $(1-p)\varepsilon + \alpha$, on aura, dans le cas de l'égalité des fortunes morales, lorsque le négociant assure, et lorsqu'il n'assure point,

$$\log(1 - \alpha + p\varepsilon) = p \log(1 + \varepsilon),$$

ce qui donne

$$\alpha = 1 + p\varepsilon - (1 + \varepsilon)^p.$$

C'est tout ce que le négociant peut donner à la compagnie, sans désavantage moral; il aura donc un avantage moral, en faisant un sacrifice moindre que cette valeur de z , et en même temps, la compagnie aura un bénéfice qui, comme on l'a vu, devient certain, quand ses relations sont très nombreuses. On voit par là comment des établissements de ce genre, bien conçus et sagement administrés, peuvent s'assurer un bénéfice réel, en procurant des avantages aux personnes qui traitent avec eux. C'est en général le but de tous les échanges; mais ici, par une combinaison particulière, l'échange a lieu entre deux objets de même nature, dont l'un n'est que probable, tandis que l'autre est certain.

42. Le principe dont nous venons de faire usage pour calculer l'espérance morale a été proposé par Daniel Bernoulli, pour expliquer la différence entre le résultat du Calcul des Probabilités et l'indication du sens commun dans le problème suivant. Deux joueurs A et B jouent à *croix et pile*, avec la condition que A paye à B deux francs, si *croix* arrive au premier coup; quatre francs, s'il arrive au deuxième coup; huit francs s'il arrive au troisième coup, et ainsi de suite jusqu'au $n^{\text{ième}}$ coup. On demande ce que B doit donner à A en commençant le jeu.

Il est visible que l'avantage de B, relatif au premier coup, est un franc; car il a $\frac{1}{2}$ de probabilité de gagner deux francs à ce coup. Son avantage relatif au deuxième coup est pareillement un franc; car il a $\frac{1}{4}$ de probabilité de gagner quatre francs à ce coup, et ainsi de suite, en sorte que la somme de tous ses avantages relatifs aux n coups est n francs. Il doit donc, pour l'égalité mathématique du jeu, donner à A cette somme qui devient infinie, si l'on suppose que le jeu continue à l'infini.

Cependant personne, à ce jeu, ne risquera avec prudence une somme même assez modique, telle que cent francs. Pour peu que l'on réfléchisse à cette espèce de contradiction entre le calcul, et ce qu'indique le sens commun, on voit facilement qu'elle tient à ce que, si l'on suppose, par exemple, $n = 50$, ce qui donne 2^{50} pour la somme que B peut espérer au cinquantième coup, cette somme immense ne produit point

à B un avantage moral proportionnel à sa grandeur, de manière qu'il y a pour lui un désavantage moral à exposer un franc pour l'obtenir, avec la probabilité excessivement petite $\frac{1}{2^{50}}$ de réussir. Mais l'avantage moral que peut procurer une somme espérée dépend d'une infinité de circonstances propres à chaque individu et qu'il est impossible d'évaluer. La seule considération générale que l'on puisse employer à cet égard est que, plus on est riche, moins une somme très petite peut être avantageuse, toutes choses égales d'ailleurs. Ainsi la supposition la plus naturelle que l'on puisse faire est celle d'un avantage moral réciproque au bien de la personne intéressée. C'est à cela que se réduit le principe de Daniel Bernoulli, principe qui, comme on vient de le voir, fait coïncider les résultats du calcul avec les indications du sens commun, et qui donne le moyen d'apprécier avec quelque exactitude ces indications toujours vagues. Son application au problème dont on vient de parler va nous en fournir un nouvel exemple.

Nommons a la fortune de B avant le jeu, et x ce qu'il donne au joueur A. Sa fortune devient $a - x + 2$, si *croix* arrive au premier coup; elle devient $a - x + 2^2$, si *croix* arrive au deuxième coup, et ainsi de suite jusqu'au coup n , où elle devient $a - x + 2^n$, si *croix* n'arrive qu'au coup $n^{\text{ième}}$. La fortune de B devient $a - x$, si *croix* n'arrive point dans les n coups, après lesquels la partie est supposée finir; mais la probabilité de ce dernier événement est $\frac{1}{2^n}$. En multipliant les logarithmes de ces diverses fortunes par leurs probabilités respectives et par k , on aura, par ce qui précède, la fortune morale de B, en vertu des conditions du jeu, égale à

$$\frac{1}{2} k \log(a - x + 2) + \frac{1}{2^2} k \log(a - x + 2^2) + \dots \\ + \frac{1}{2^n} k \log(a - x + 2^n) + \frac{1}{2^n} k \log(a - x) + \log h.$$

Mais, avant le jeu, sa fortune morale était $k \log a + \log h$; en égalant donc ces deux fortunes, pour que B conserve toujours la même fortune

morale, et repassant des logarithmes aux nombres, on aura, $a - x$ étant supposé égal à a' , et faisant $\frac{1}{a'} = x$,

$$(o) \quad 1 + x = (1 + 2x)^{\frac{1}{2}} (1 + 2^2 x)^{\frac{1}{3}} \dots (1 + 2^n x)^{\frac{1}{n+1}};$$

les facteurs $(1 + 2x)^{\frac{1}{2}}, (1 + 2^2 x)^{\frac{1}{3}}$ vont en diminuant sans cesse, et leur limite est l'unité; car on a

$$(1 + 2^i x)^{\frac{1}{i}} > (1 + 2^{i+1} x)^{\frac{1}{i+1}}.$$

En effet, si l'on élève à la puissance 2^{i+1} les deux membres de cette inégalité, elle devient

$$1 + 2^{i+1} x + 2^{2i} x^2 > 1 + 2^{i+1} x,$$

et sous cette forme l'inégalité devient évidente. De plus, le logarithme de $(1 + 2^i x)^{\frac{1}{i}}$ est égal à $\frac{i \log 2}{2^i} + \frac{1}{2^i} \log \left(x + \frac{1}{2^i} \right)$, et il est visible que cette fonction est nulle dans le cas de i infini, ce qui exige que dans ce cas $(1 + 2^i x)^{\frac{1}{i}}$ soit l'unité.

Si l'on suppose n infini dans l'équation (o), on a le cas où la partie peut se prolonger à l'infini, ce qui est le cas le plus avantageux à B. a' et par conséquent x étant supposés connus, on prendra la somme des logarithmes tabulaires d'un assez grand nombre $i - 1$ des premiers facteurs du second membre, pour que $2^i x$ soit au moins égal à dix. La somme des logarithmes tabulaires des facteurs suivants, jusqu'à l'infini, sera, à très peu près, égale à

$$\frac{\log x}{2^{i-1}} + \frac{(i+1) \log 2}{2^{i-1}} + \frac{0,4342945}{3 \cdot 2^{i-2}}.$$

L'addition de ces deux sommes donnera le logarithme tabulaire de $a' + x$ ou de a . Ainsi l'on aura pour une fortune physique a , supposée à B avant le jeu, la valeur de x qu'il doit donner à A au commencement du jeu, pour conserver la même fortune morale. En supposant, par exemple, a' égal à cent, on trouve $a = 107^{\text{e}}, 89$, d'où il suit que, la

fortune physique de B étant primitivement $107^{\text{e}}, 89$, il ne doit alors risquer prudemment à ce jeu que $7^{\text{e}}, 89$, au lieu de la somme infinie que le résultat du calcul indique, lorsqu'on fait abstraction de toutes considérations morales. Ayant ainsi la valeur de a relative à $a' = 100$, il est facile d'en conclure de la manière suivante sa valeur relative à $a' = 200$; en effet on a, dans ce dernier cas,

$$a = (200 + 2)^{\frac{1}{2}} (200 + 2^2)^{\frac{1}{3}} \dots = 2 (100 + 1)^{\frac{1}{2}} (100 + 2)^{\frac{1}{3}} (100 + 4)^{\frac{1}{4}} \dots$$

Mais on vient de trouver

$$(100 + 2)^{\frac{1}{2}} (100 + 4)^{\frac{1}{3}} \dots = (107,89)^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$a = 2 \sqrt{101.107,89} = 208,78.$$

Ainsi la fortune physique de B étant primitivement 208,78, il ne peut risquer prudemment à ce jeu au delà de $8^{\text{e}}, 78$.

43. Nous allons maintenant étendre le principe exposé ci-dessus aux choses dont l'existence est éloignée et incertaine. Pour cela, considérons deux personnes A et B, qui veulent placer chacune, en viager, un capital q . Elles peuvent le faire séparément; elles peuvent s'associer et constituer une rente viagère sur leurs têtes, de manière que la rente soit réversible à celle qui survit à l'autre. Examinons quel est le parti le plus avantageux.

Supposons les deux personnes du même âge et ayant la même fortune annuelle que nous représenterons par l'unité, indépendamment du capital qu'elles veulent placer. Soit $\frac{1}{2}$ la rente viagère que ce capital leur produirait à chacune, si elles plaçaient leurs capitaux séparément, en sorte que leur fortune annuelle devienne $1 + \frac{1}{2}$. Nous exprimerons, conformément au principe dont il s'agit, leur fortune morale annuelle correspondante par $k \log(1 + \frac{1}{2}) + \log h$. Mais cette fortune n'aura lieu que probablement à la $x^{\text{ième}}$ année; ainsi, en désignant par y_x la probabilité que A vivra à la fin de la $x^{\text{ième}}$ année, on doit multiplier sa fortune morale annuelle relative à cette année par y_x ; en ajoutant

donc tous ces produits, leur somme, que nous désignerons par $[k \log(1 + \frac{\epsilon}{2}) + \log h] \Sigma y_x$, sera ce que je nomme ici *fortune morale viagère*.

Supposons maintenant que A et B placent la somme $2q$ de leurs capitaux sur leurs têtes, et que cela produise une rente viagère ϵ' , réversible au survivant. Tant que A et B vivront, chacun d'eux ne touchera que $\frac{1}{2}\epsilon'$ de rente viagère, et leur fortune morale annuelle sera $k \log(1 + \frac{1}{2}\epsilon') + \log h$. En la multipliant par la probabilité qu'ils vivront tous deux à la fin de l'année x , probabilité égale à $(y_x)^2$, la somme de ces produits pour toutes les valeurs de x sera la fortune morale viagère de A, relative à la supposition de leur existence simultanée; cette fortune est donc

$$\left[k \log \left(1 + \frac{\epsilon'}{2} \right) + \log h \right] \Sigma (y_x)^2.$$

La probabilité que A existera seul à la fin de la $x^{\text{ième}}$ année est $y_x - (y_x)^2$; sa fortune morale viagère relative à son existence après la mort de B, qui rend sa fortune morale annuelle égale à $1 + \epsilon'$, est donc

$$[k \log(1 + \epsilon') + \log h] \Sigma [y_x - (y_x)^2].$$

La somme de ces deux fonctions

$$k \log \left(1 + \frac{\epsilon'}{2} \right) \Sigma (y_x)^2 + k \log(1 + \epsilon') [\Sigma y_x - \Sigma (y_x)^2] + \log h \Sigma y_x$$

sera la fortune morale viagère de A dans l'hypothèse où A et B placent conjointement leurs capitaux.

Si l'on compare cette fortune à celle que nous venons de trouver dans le cas où ils placent séparément leurs capitaux, on voit qu'il y aura pour A de l'avantage ou du désavantage à placer conjointement, suivant que

$$\log \left(1 + \frac{\epsilon'}{2} \right) \Sigma (y_x)^2 + \log(1 + \epsilon') [\Sigma y_x - \Sigma (y_x)^2]$$

sera plus grand ou moindre que $\log(1 + \epsilon) \Sigma y_x$. Pour le savoir, il faut

déterminer le rapport de ϵ' à ϵ ; or on a, par le n° 40,

$$q = \epsilon \Sigma p^x y_x,$$

$\frac{1-p}{p}$ étant l'intérêt annuel de l'argent. On a ensuite, par le même numéro,

$$2q = \epsilon' \Sigma p^x [2y_x - (y_x)^2];$$

on a donc

$$\epsilon' = \frac{2\epsilon \Sigma p^x y_x}{\Sigma p^x [2y_x - (y_x)^2]}.$$

Les Tables de mortalité donneront les valeurs de Σy_x , $\Sigma (y_x)^2$, $\Sigma p^x y_x$, $\Sigma p^x (y_x)^2$; on pourra ainsi juger lequel des deux placements dont il s'agit est le plus avantageux.

Supposons ϵ et ϵ' de très petites fractions; la quantité $\log(1 + \frac{\epsilon}{2}) \Sigma y_x$ devient à très peu près $\frac{\epsilon}{2} \Sigma y_x$. La quantité

$$\log \left(1 + \frac{\epsilon'}{2} \right) \Sigma (y_x)^2 + \log(1 + \epsilon') [\Sigma y_x - \Sigma (y_x)^2]$$

devient

$$\frac{\epsilon'}{2} [2 \Sigma y_x - \Sigma (y_x)^2],$$

et, en substituant pour ϵ' sa valeur précédente, elle devient

$$\epsilon \frac{2 \Sigma y_x - \Sigma (y_x)^2}{2 \Sigma p^x y_x - \Sigma p^x (y_x)^2} \Sigma p^x y_x;$$

il y a donc de l'avantage à placer conjointement, si

$$[2 \Sigma y_x - \Sigma (y_x)^2] \Sigma p^x y_x$$

l'emporte sur

$$[2 \Sigma p^x y_x - \Sigma p^x (y_x)^2] \Sigma y_x,$$

ou si l'on a

$$\frac{\Sigma p^x (y_x)^2}{\Sigma p^x y_x} > \frac{\Sigma (y_x)^2}{\Sigma y_x};$$

c'est en effet ce qui a lieu généralement, p étant plus petit que l'unité.

L'avantage de placer conjointement les capitaux s'accroît par la considération que l'augmentation $\frac{\epsilon'}{2}$ de revenu arrive au survivant, à un

âge ordinairement avancé, dans lequel de plus grands besoins qui se font sentir la rendent beaucoup plus utile. Cet avantage s'accroît encore de toutes les affections qui peuvent attacher les deux individus l'un à l'autre, et qui leur font désirer le bien-être de celui qui doit survivre. Les établissements dans lesquels on peut ainsi placer ses capitaux et, par un léger sacrifice de son revenu, assurer l'existence de sa famille pour un temps où l'on doit craindre de ne plus suffire à ses besoins, sont donc très avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchans de la nature. Ils n'offrent point l'inconvénient que nous avons remarqué dans les jeux même les plus équitables, celui de rendre la perte plus sensible que le gain, puisqu'au contraire ils offrent les moyens d'échanger le superflu contre des ressources assurées dans l'avenir. Le Gouvernement doit donc encourager ces établissements et les respecter dans ses vicissitudes; car les espérances qu'ils présentent portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée.

CHAPITRE XI.

DE LA PROBABILITÉ DES TÉMOIGNAGES.

44. Je vais d'abord considérer un seul témoin. La probabilité de son témoignage se compose de sa véracité, de la possibilité de son erreur et de la possibilité du fait en lui-même. Pour fixer les idées, concevons que l'on ait extrait un numéro d'une urne qui en renferme le nombre n , et qu'un témoin du tirage annonce que le n° i est sorti. L'événement observé est ici le témoin annonçant la sortie du n° i . Soit p la véracité du témoin, ou la probabilité qu'il ne cherche point à tromper; soit encore r la probabilité qu'il ne se trompe point. Cela posé :

On peut former les quatre hypothèses suivantes. Ou le témoin ne trompe point et ne se trompe point; ou il ne trompe point et se trompe; ou il trompe et ne se trompe point; enfin, ou il trompe et se trompe à la fois. Voyons quelle est, *a priori*, dans chacune de ces hypothèses, la probabilité que le témoin annoncera la sortie du n° i .

Si le témoin ne trompe point et ne se trompe point, le n° i sera sorti; mais la probabilité de cette sortie est *a priori* $\frac{1}{n}$; en la multipliant par la probabilité pr de l'hypothèse, on aura $\frac{pr}{n}$ pour la probabilité entière de l'événement observé dans cette première hypothèse.

Si le témoin ne trompe point et se trompe, le n° i ne doit point être sorti, pour qu'il annonce sa sortie; la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$. Mais l'erreur du témoin doit porter sur l'un des numéros non sortis. Supposons qu'elle puisse également porter sur tous : la probabilité

qu'elle portera sur le n° i sera $\frac{1}{n-1}$; la probabilité que le témoin ne trompant point et se trompant annoncera le n° i est donc $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$. En la multipliant par la probabilité $p(1-r)$ de l'hypothèse elle-même, on aura $\frac{p(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette seconde hypothèse.

Si le témoin trompe et ne se trompe point, le n° i ne sera point sorti, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$; mais le témoin doit choisir, parmi les $n-1$ numéros non sortis, le n° i . Si l'on suppose que son choix puisse également porter sur chacun d'eux, $\frac{1}{n-1}$ sera la probabilité que son choix se fixera sur le n° i ; $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$ est donc la probabilité que le témoin annoncera le n° i . En la multipliant par la probabilité $(1-p)r$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p)r}{n}$ pour la probabilité entière de l'événement observé dans cette troisième hypothèse.

Enfin, si le témoin trompe et se trompe, la probabilité qu'il ne croira pas le n° i sorti sera $\frac{n-1}{n}$, et la probabilité qu'il le choisira parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croira pas sortis sera $\frac{1}{n-1}$; $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$ sera donc la probabilité qu'il annoncera la sortie du n° i . En la multipliant par la probabilité $(1-p)(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p)(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette quatrième hypothèse.

Cette hypothèse renferme un cas dans lequel le n° i est sorti, savoir le cas dans lequel, le n° i étant sorti, le témoin ne le croit pas sorti, et le choisit parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croit pas sortis. La probabilité de cela est le produit de $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n-1}$. En multipliant ce produit par la probabilité $(1-p)(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}$ pour la probabilité du cas dont il s'agit.

On peut arriver aux mêmes résultats de cette manière. Soient $a, b, c, d, i, \dots$ les n numéros. Puisque le témoin se trompe, il ne doit point croire sorti le numéro sorti, et puisqu'il trompe, il ne doit point annoncer comme sorti le numéro qu'il croit sorti. Mettons donc, à la première place le numéro sorti, à la deuxième le numéro que le témoin croit sorti, et à la troisième le numéro qu'il annonce. Parmi toutes les combinaisons possibles des numéros trois à trois, sans exclure celles où ils sont répétés, il n'y a de compatibles avec l'hypothèse présente que celles où le numéro qui occupe la deuxième place n'occupe ni la première, ni la troisième; telles sont les combinaisons $aba, abc, \dots$. Or il est facile de voir que le nombre des combinaisons qui satisfont aux deux conditions précédentes est $n(n-1)^2$; car la combinaison ab peut se combiner avec les $n-1$ numéros autres que b , et le nombre des combinaisons ab, ba, ac est $n(n-1)$. Maintenant les combinaisons dans lesquelles le n° i est annoncé sans être sorti sont de la forme $abi, bai, aci, \dots$, et le nombre de ces combinaisons est $(n-1)(n-2)$; ainsi la probabilité qu'une de ces combinaisons aura lieu est $\frac{n-2}{n(n-1)}$. Les combinaisons dans lesquelles le n° i étant sorti, il est annoncé, sont de la forme $iai, ibi, \dots$, et le nombre de ces combinaisons est visiblement $n-1$; la probabilité qu'une de ces combinaisons aura lieu est donc $\frac{1}{n(n-1)}$. Il faut multiplier toutes ces combinaisons par la probabilité $(1-p)(1-r)$ de l'hypothèse, et alors on aura les résultats précédents.

Maintenant, pour avoir la probabilité de la sortie du n° i , on doit faire une somme de toutes les probabilités précédentes, relatives à cette sortie, et la diviser par la somme de toutes ces probabilités, ce qui donne, pour cette probabilité,

$$\frac{pr}{n} + \frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)} \quad \text{ou} \quad \frac{pr + \frac{(1-p)(1-r)}{n-1}}{n + \frac{p(1-r)}{n} + \frac{(1-p)r}{n} + \frac{(1-p)(1-r)}{n}}$$

Si r est égal à l'unité, ou si le témoin ne se trompe point, la proba-

bilité de la sortie du n° i sera p , c'est-à-dire la probabilité de la véracité du témoin.

Si n est un très grand nombre, cette probabilité sera à très peu près pr ou la probabilité de la véracité du témoin, multipliée par la probabilité qu'il ne se trompe point.

Nous avons supposé que l'erreur du témoin, lorsqu'il se trompe, peut également tomber sur tous les numéros non sortis; mais cette supposition cesse d'avoir lieu, si quelques-uns d'eux ont plus de ressemblance que les autres avec le numéro sorti, parce que la méprise à leur égard est plus facile. Nous avons encore supposé que le témoin, lorsqu'il trompe, n'a pas de motif pour choisir un numéro plutôt qu'un autre, ce qui peut ne pas avoir lieu. Mais il serait très difficile de faire entrer dans une formule toutes ces considérations particulières.

45. Supposons maintenant que l'urne contienne $n - 1$ boules noires et une boule blanche, et qu'en ayant extrait une boule, un témoin du tirage annonce la sortie d'une boule blanche. Déterminons la probabilité de cette sortie. Nous formerons les mêmes hypothèses que nous venons de faire. Dans la première, la probabilité de la sortie de la boule blanche est, comme ci-dessus, $\frac{pr}{n}$. Dans la deuxième hypothèse, le témoin se trompant sans tromper, une boule noire doit être sortie, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$, et comme le témoin, supposé véridique, doit énoncer la sortie d'une boule blanche, par cela seul qu'il se méprend, la probabilité de cette annonce sera donc $\frac{n-1}{n}$, probabilité qu'il faut multiplier par la probabilité $p(1-r)$ de l'hypothèse, ce qui donne $\frac{p(1-r)(n-1)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse. Dans la troisième hypothèse, le témoin étant supposé tromper et ne point se tromper, une boule noire doit être sortie, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$. En la multipliant par la pro-

babilité $(1-p)r$ de cette hypothèse, on aura $\frac{(1-p)r(n-1)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Enfin, dans la quatrième hypothèse, le témoin, trompant et se trompant, ne peut annoncer la sortie de la boule blanche qu'autant qu'elle sera sortie. La probabilité de cette sortie est $\frac{1}{n}$. En la multipliant par la probabilité $(1-p)(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p)(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Présentement, si l'on réunit parmi les probabilités précédentes celles dans lesquelles la boule blanche est sortie, on aura la probabilité de cette sortie, en divisant leur somme par la somme de toutes les probabilités, ce qui donne

$$\frac{pr + (1-p)(1-r)}{pr + (1-p)(1-r) + [p(1-r) + (1-p)r](n-1)}$$

pour la probabilité de la sortie de la boule blanche; par conséquent

$$\frac{[p(1-r) + (1-p)r](n-1)}{pr + (1-p)(1-r) + [p(1-r) + (1-p)r](n-1)}$$

est la probabilité que le fait attesté par le témoin du tirage n'a pas eu lieu.

On peut observer ici que, si l'on nomme q la probabilité que le témoin énonce la vérité, on aura

$$q = pr + (1-p)(1-r);$$

car il est visible qu'il dit vrai, dans le cas dont il s'agit, soit qu'il ne trompe point et ne se trompe point, soit qu'il trompe et se trompe. Cette expression de q donne

$$1 - q = p(1-r) + (1-p)r.$$

En effet, la probabilité $1 - q$ qu'il n'énonce pas la vérité est la probabilité qu'il ne trompe point et se trompe, plus la probabilité qu'il

trompe et ne se trompe point. L'expression précédente de la probabilité que le fait attesté est faux devient ainsi

$$\frac{(1-q)(n-1)}{q + (1-q)(n-1)}.$$

Si le nombre $n-1$ des boules noires est très grand, cette probabilité devient à très peu près égale à l'unité ou à la certitude, pour peu que l'erreur ou le mensonge du témoin soit probable. Alors le fait qu'il atteste devient extraordinaire. Ainsi l'on voit comment les faits extraordinaires affaiblissent la croyance due aux témoins, le mensonge ou l'erreur devenant d'autant plus vraisemblable que le fait attesté est plus extraordinaire en lui-même.

46. Considérons présentement deux urnes A et B, dont la première contienne un grand nombre n de boules blanches, et la seconde le même nombre de boules noires. On tire de l'une de ces urnes une boule que l'on remet dans l'autre urne; ensuite on tire une boule de cette dernière urne. Un témoin du premier tirage atteste qu'une boule blanche est sortie; un témoin du second tirage atteste pareillement qu'il a vu extraire une boule blanche. Chacun de ces témoignages, considéré isolément, n'offre rien d'in vraisemblable. Mais la conséquence qui résulte de leur ensemble est que la même boule, sortie au premier tirage, a reparu au second, ce qui est un phénomène d'autant plus extraordinaire que n est un plus grand nombre. Voyons comment la valeur de ces témoignages en est affaiblie.

Nommons q la probabilité que le premier témoin énonce la vérité. On voit, par le numéro précédent, que dans le cas présent cette probabilité se compose de la probabilité que le témoin ne trompe point et ne se trompe point, ajoutée à la probabilité qu'il trompe et se trompe à la fois; car le témoin, dans ces deux cas, énonce la vérité. Soit q' la même probabilité relative au second témoin. On peut former ces quatre hypothèses: ou le premier et le second témoin disent la vérité; ou le premier dit la vérité, le second ne la disant pas; ou le second témoin

dit la vérité, le premier ne la disant point; ou enfin aucun des deux ne dit la vérité. Déterminons *a priori*, dans chacune de ces hypothèses, la probabilité de l'événement observé.

Cet événement est l'annonce de la sortie d'une boule blanche à chaque tirage. La probabilité qu'une boule blanche est sortie au premier tirage est $\frac{1}{2}$, puisque la boule extraite peut être également sortie de l'urne A ou de l'urne B. Dans le cas où elle a été extraite de l'urne A et mise dans l'urne B, $n+1$ boules sont contenues dans cette dernière urne, et la probabilité d'en extraire la boule blanche est $\frac{1}{n+1}$; le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{n+1}$ est donc la probabilité *a priori* de l'extraction d'une boule blanche dans les deux tirages consécutifs. En la multipliant par la probabilité qq' que les deux témoins disent la vérité, on aura

$$\frac{qq'}{2(n+1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans la première hypothèse.

Dans la seconde hypothèse, la boule a été extraite de l'urne A et mise dans l'urne B: la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. De plus, puisque le second témoin ne dit pas la vérité, une boule noire a été extraite de l'urne B, et la probabilité de cette extraction est $\frac{n}{n+1}$. En multipliant donc $\frac{1}{2}$ par $\frac{n}{n+1}$, et le produit par la probabilité $q(1-q')$ que le premier témoin dit la vérité tandis que le second ne la dit pas, on aura

$$\frac{q(1-q')n}{2(n+1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé dans la deuxième hypothèse.

Dans la troisième hypothèse, une boule noire a été extraite de l'urne B et mise dans l'urne A: la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. De plus, une boule blanche a été ensuite extraite de l'urne A, et la

probabilité de cette extraction est $\frac{n}{n+1}$; en multipliant donc $\frac{1}{2}$ par $\frac{n}{n+1}$, et le produit par la probabilité $(1-q)q'$ que le second témoin dit la vérité, tandis que le premier ne la dit pas, on aura

$$\frac{(1-q)q'n}{2(n+1)},$$

pour la probabilité relative à la troisième hypothèse.

Enfin, dans la quatrième hypothèse, une boule noire a d'abord été extraite de l'urne B, et la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. Ensuite cette boule noire, mise dans l'urne A, en a été extraite au second tirage, et la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{n+1}$; en multipliant donc le produit de ces deux probabilités par la probabilité $(1-q)(1-q')$ qu'aucun des témoins ne dit la vérité, on aura

$$\frac{(1-q)(1-q')}{2(n+1)}$$

pour la probabilité relative à la quatrième hypothèse.

Maintenant la probabilité du fait qui résulte de l'ensemble des deux témoignages, savoir, qu'une boule blanche extraite au premier tirage a reparu au second tirage, est visiblement égale à la probabilité relative à la première hypothèse divisée par la somme des probabilités relatives aux quatre hypothèses; cette probabilité est donc

$$\frac{qq'}{qq' + (1-q)(1-q') + [q(1-q') + q'(1-q)]n}.$$

Le phénomène de la réapparition d'une boule blanche au second tirage devient d'autant plus extraordinaire que le nombre n des boules de chaque urne est plus considérable, et alors la probabilité précédente devient très petite. On voit donc que la probabilité du fait résultant de l'ensemble des témoignages est extrêmement affaiblie, lorsqu'il est extraordinaire.

47. Considérons les témoignages simultanés : supposons deux témoins d'accord sur un fait, et déterminons sa probabilité. Pour fixer les idées, supposons que le fait soit l'extraction du n° i d'une urne qui en renferme le nombre n , en sorte que l'événement observé soit l'accord de deux témoins du tirage à énoncer la sortie du n° i . Nommons p et p' leurs véracités respectives, et supposons, pour simplifier, qu'ils ne se trompent point. Cela posé, on ne peut former que ces deux hypothèses : les témoins disent la vérité; les témoins trompent.

Dans la première hypothèse, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. En la multipliant par le produit des véracités p et p' des témoins, on aura $\frac{pp'}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Dans la seconde, le n° i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$; mais les deux témoins s'accordent à choisir le n° i parmi les $n-1$ numéros non sortis. Or le nombre des combinaisons différentes qui peuvent résulter de leur choix est $(n-1)^2$, et dans ce nombre ils doivent choisir celle où le n° i est combiné avec lui-même; la probabilité de ce choix est donc $\frac{1}{(n-1)^2}$. En la multipliant par la probabilité précédente $\frac{n-1}{n}$, et par les produits des probabilités $1-p$ et $1-p'$ que les témoins trompent, on aura $\frac{(1-p)(1-p')}{n(n-1)}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse.

Maintenant, on aura la probabilité de la sortie du n° i en divisant la probabilité relative à la première hypothèse par la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses; on aura donc, pour cette probabilité,

$$(o) \quad \frac{pp'}{pp' + \frac{(1-p)(1-p')}{n-1}}.$$

Si $n=2$, alors la sortie du n° i est aussi probable que sa non-sortie.

et la probabilité de sa sortie, résultante de l'accord des témoignages, est

$$\frac{pp'}{pp' + (1-p)(1-p')}.$$

C'est généralement la probabilité d'un fait attesté par deux témoins, lorsque l'existence du fait est aussi probable que sa non-existence. Si les deux témoins sont également véridiques, ce qui donne $p' = p$, cette probabilité devient

$$\frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}.$$

En général, si un nombre r de témoins également véridiques affirme l'existence d'un fait de ce genre, sa probabilité résultante des témoignages sera

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}.$$

Mais cette formule n'est applicable qu'au cas où l'existence du fait et sa non-existence sont en elles-mêmes également probables.

Si le nombre n des numéros de l'urne est très grand, la formule (o) devient à très peu près l'unité, et par conséquent la sortie du n° i est extrêmement probable. Cela tient à ce qu'il est très peu vraisemblable que les témoins, voulant tromper, s'accordent à énoncer le même numéro, lorsque l'urne en contient un grand nombre. Le simple bon sens indique ce résultat du calcul; mais on voit en même temps que la probabilité de la sortie du n° i est beaucoup diminuée, si les deux témoins, cherchant à tromper, ont pu s'entendre.

Supposons maintenant que le premier témoin affirme la sortie du n° i , et que le second témoin affirme la sortie du n° i' . On peut former alors les trois hypothèses suivantes : le premier témoin dit la vérité et le second trompe; dans ce cas le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$; de plus, le second témoin, qui trompe, doit choisir parmi les autres numéros non sortis le n° i' , et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. Le produit de ces deux probabilités par le produit des

probabilités p et $1-p'$, que le premier témoin ne trompe pas et que le second trompe, sera la probabilité de l'événement observé ou de l'énonciation de la sortie des n°s i et i' , dans cette hypothèse, probabilité qui est ainsi $\frac{p(1-p')}{n(n-1)}$.

Dans la seconde hypothèse, le premier témoin trompe et le second ne trompe pas. Alors le n° i' est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. De plus, le premier témoin choisit le n° i sur les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. En multipliant le produit de ces deux probabilités par le produit des probabilités $1-p$ et p' , que le premier témoin trompe et que le second ne trompe pas, on aura $\frac{(1-p)p'}{n(n-1)}$.

Enfin, dans la troisième hypothèse, les deux témoins trompent à la fois. Alors aucun des deux numéros i et i' n'est sorti. La probabilité de cet événement est $\frac{n-2}{n}$. De plus, le premier témoin doit choisir le n° i , et le second doit choisir le n° i' , parmi les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de cet événement composé est $\frac{1}{(n-1)^2}$. En multipliant le produit de ces deux probabilités par le produit des probabilités $1-p$ et $1-p'$ que le premier et le second témoin trompent, on aura $\frac{(n-2)(1-p)(1-p')}{n(n-1)^2}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Maintenant on aura la probabilité de la sortie du n° i , en divisant la probabilité relative à la première hypothèse par la somme des probabilités relatives aux trois hypothèses; la probabilité de cette sortie est donc

$$\frac{p(1-p')}{1 - pp' - \frac{(1-p)(1-p')}{n-1}}.$$

Si $n = 2$, c'est-à-dire si l'existence de chaque fait attesté par les deux témoins est *a priori* aussi probable que sa non-existence, alors la pro-

babilité précédente devient $\frac{1}{2}$, lorsque $p = p'$, ce qui est visible d'ailleurs, les deux témoignages se détruisant réciproquement. En général, si un fait de ce genre est attesté par r témoins et nié par r' témoins, tous également véridiques, il est facile de voir que sa probabilité sera

$$\frac{p^{r-r'}}{p^{r-r'} + (1-p)^{r-r'}},$$

c'est-à-dire la même que si le fait était attesté par $r - r'$ témoins.

48. Considérons présentement une chaîne traditionnelle de r témoins, et supposons que le fait transmis soit la sortie du $n^{\circ} i$ d'une urne qui renferme n numéros. Désignons par y_r sa probabilité. L'addition d'un nouveau témoin changera cette probabilité en y_{r+1} , probabilité qui sera formée : 1^o du produit de y_r par la véracité du nouveau témoin, véracité que nous désignerons par p_{r+1} ; 2^o du produit de la probabilité $1 - p_{r+1}$ que ce nouveau témoin trompe, par la probabilité $1 - y_r$ que le témoin précédent n'a pas dit la vérité, et par la probabilité $\frac{1}{n-1}$ que le nouveau témoin choisira le numéro sorti, dans le nombre des $n - 1$ numéros autres que celui qui lui a été indiqué par le témoin précédent; on aura donc

$$y_{r+1} = p_{r+1} y_r + \frac{1}{n-1} (1 - p_{r+1}) (1 - y_r),$$

équation dont l'intégrale est

$$y_r = \frac{1}{n} + C \frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1) \dots (np_r - 1)}{(n-1)^r},$$

C étant une constante arbitraire. Pour la déterminer, on observera que la probabilité du fait, d'après le premier témoignage, est, par ce qui précède, égale à p_1 ; on a donc $y_1 = p_1$, ce qui donne $C = \frac{n-1}{n}$; par tant

$$y_r = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1) \dots (np_r - 1)}{(n-1)^r}.$$

Si n est infini, on a

$$y_r = p_1 p_2 \dots p_r.$$

Si $n = 2$, c'est-à-dire si l'existence du fait est aussi probable que sa non-existence, on a

$$y_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2p_1 - 1)(2p_2 - 1) \dots (2p_r - 1).$$

En général, à mesure que la chaîne traditionnelle se prolonge, y_r approche indéfiniment de sa limite $\frac{1}{n}$, limite qui est la probabilité,

a priori, de la sortie du $n^{\circ} i$. Le terme $\frac{n-1}{n} \frac{np_1 - 1}{n-1} \dots$ de l'expression de y_r est donc ce que la chaîne des témoins ajoute à cette probabilité. On voit ainsi comment la probabilité s'affaiblit à mesure que la tradition se prolonge. A la vérité, les monuments, l'imprimerie et d'autres causes peuvent diminuer cet effet inévitable du temps; mais ils ne peuvent jamais entièrement le détruire.

Si l'on a deux chaînes traditionnelles, chacune de r témoins, si l'on suppose les témoins de ces chaînes également véridiques et si le dernier témoin de l'une des chaînes s'accorde avec le dernier de l'autre à affirmer la sortie du $n^{\circ} i$, on aura la probabilité de cette sortie, en substituant y_r pour p et p' dans la formule (a) du numéro précédent, qui devient par là

$$\frac{y_r^2}{y_r^2 + \frac{(1-y_r)^2}{n-1}}.$$

49. Considérons deux témoins dont p et p' soient les véracités respectives. On sait que tous deux ou du moins l'un d'eux, sans être contredit par l'autre qui, dans ce cas, n'a point prononcé, affirment que le $n^{\circ} i$ est sorti d'une urne qui en renferme le nombre n . En supposant toujours qu'on n'a extrait qu'un seul numéro, on demande la probabilité de la sortie du $n^{\circ} i$.

Soient r et r' les probabilités respectives que les témoins prononcent. On ne peut faire ici que les quatre hypothèses suivantes : 1^o les deux témoins prononcent et disent la vérité; 2^o les deux témoins prononcent

et trompent; 3° l'un des témoins prononce et dit la vérité, et l'autre témoin ne prononce pas; 4° l'un des témoins prononce et trompe, et l'autre ne prononce point.

Dans la première hypothèse, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. Il faut la multiplier par le produit des probabilités r et r' que les deux témoins ont prononcé, et par le produit des probabilités p et p' qu'ils disent la vérité; on aura ainsi

$$\frac{pp' \cdot rr'}{n}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Dans la deuxième, le n° i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$. Mais, si les deux témoins trompent sans s'entendre, la probabilité qu'ils s'accorderont à énoncer le même n° i est $\frac{1}{(n-1)^2}$. Il faut multiplier le produit de ces probabilités par la probabilité rr' que les deux témoins prononcent à la fois, et par la probabilité $(1-p)(1-p')$ qu'ils trompent tous deux. On aura ainsi

$$\frac{(1-p)(1-p')rr'}{n(n-1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans la deuxième hypothèse.

Dans la troisième, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. Il faut la multiplier par la probabilité $pr(1-r') + p'r'(1-r)$ que l'un des témoins prononce en disant la vérité, tandis que l'autre témoin ne prononce point. On aura ainsi

$$\frac{pr(1-r') + p'r'(1-r)}{n}$$

pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse.

Enfin, dans la quatrième, le n° i n'est pas sorti, et la probabilité de

cet événement est $\frac{n-1}{n}$; mais le témoin qui trompe doit le choisir dans les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. Il faut multiplier le produit de ces probabilités par la probabilité $(1-p)r(1-r') + (1-p')r'(1-r)$ que l'un des témoins prononçant trompe, tandis que l'autre témoin ne prononce point. On a ainsi

$$\frac{(1-p)r(1-r') + (1-p')r'(1-r)}{n}$$

pour la probabilité correspondante à la quatrième hypothèse.

Maintenant on aura la probabilité de la sortie du n° i , en divisant la somme des probabilités relatives à la première et à la troisième hypothèse par la somme des probabilités relatives à toutes les hypothèses, ce qui donne, pour cette probabilité,

$$\frac{pp'rr' + pr(1-r') + p'r'(1-r)}{pp'rr' + r(1-r') + r'(1-r) + \frac{(1-p)(1-p')rr'}{n-1}}$$

Ces exemples indiquent suffisamment la méthode d'assujettir au calcul des probabilités les témoignages.

50. On peut assimiler le jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contradictoires au résultat des témoignages de plusieurs témoins de l'extraction d'un numéro d'une urne qui ne contient que deux numéros. En exprimant par p la probabilité que le juge prononce la vérité, la probabilité de la bonté d'un jugement rendu à l'unanimité sera, par ce qui précède,

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}$$

r étant le nombre des juges. On peut déterminer p par l'observation du rapport des jugements rendus à l'unanimité par le tribunal au nombre total des jugements. Lorsque ce nombre est très grand, en le désignant par a , et par i le nombre des jugements rendus à l'unanimité, on aura

à fort peu près

$$p^r + (1-p)^r = \frac{i}{n};$$

la résolution de cette équation donnera la véracité p des juges. Cette équation se réduit à un degré de moitié moindre, en faisant $p = 1 + \sqrt{u}$. Elle devient alors

$$(1 + \sqrt{u})^r + (1 - \sqrt{u})^r = \frac{i}{n},$$

équation qui, développée, est du degré $\frac{r}{2}$ ou $\frac{r-1}{2}$, suivant que r est pair ou impair.

La probabilité de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité sera

$$1 - \frac{n}{i}(1-p)^r.$$

Si l'on suppose le tribunal formé de trois juges, on aura

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4i-n}{12n}}.$$

Nous adopterons le signe +; car il est naturel de supposer à chaque juge une plus grande probabilité pour la vérité que pour l'erreur. Si la moitié des jugements rendus par le tribunal a été rendue à l'unanimité, alors $\frac{i}{n} = \frac{1}{2}$, et l'on trouve $p = 0,789$. La probabilité d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité sera 0,981. Si ce jugement n'est rendu qu'à la pluralité, sa probabilité sera p ou 0,789.

En général, on voit que la probabilité $1 - \frac{n}{i}(1-p)^r$ de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité est d'autant plus grande que r est un plus grand nombre et que les valeurs de p et de $\frac{i}{n}$ sont plus grandes, ce qui dépend des lumières des juges. Il y a donc un grand avantage à former des tribunaux d'appel, composés d'un grand nombre de juges choisis parmi les personnes les plus éclairées.

ADDITIONS.

I.

Nous avons intégré, par une approximation très convergente, dans le n° 34 du Livre I^{er}, l'équation aux différences finies

$$0 = (n' + s + 1)y_{s+1} - (n + s)y_s.$$

Il est facile de conclure de notre analyse l'expression du rapport de la circonférence au rayon, en produits infinis, donnée par Wallis. En effet, cette analyse nous a conduit, dans le numéro cité, à l'expression générale

$$(a) \frac{(n+\mu)(n+\mu+1)\dots(n+s-1)}{(n'+\mu+1)(n'+\mu+2)\dots(n'+s)} = \frac{\int u^{2n'-2n+1} du (1-u^2)^{n+s-1}}{\int u^{2n'-2n+1} du (1-u^2)^{n+\mu-1}},$$

les intégrales étant prises depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$. En faisant d'abord $n' = 0$, $n = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$ et observant que $\int du (1-u^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\pi$, π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, on aura

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.5\dots(2s-1)}{4.6\dots 2s \int du (1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}}.$$

En supposant donc généralement

$$\frac{1}{\int du (1-u^2)^s} = y_s,$$

on aura

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.5\dots(2s-1)}{4.6\dots 2s} y_{s-\frac{1}{2}} = \frac{3.5\dots(2s+1)}{4.6\dots(2s+2)} y_{s+\frac{1}{2}} = \dots,$$

ce qui donne

$$y_{s-\frac{1}{2}} = \frac{2s+1}{2s+2} y_{s+\frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait ensuite, dans la formule (a), $n' = -\frac{1}{2}$, $n = 0$ et $\mu = 1$, elle donne

$$\frac{3.5 \dots (2s-1)}{2.4 \dots (2s-2)} = y_{s-1};$$

d'où l'on tire

$$y_{s-1} = \frac{2s}{2s+1} y_s,$$

équation qui coïncide avec la précédente entre $y_{s-\frac{1}{2}}$ et $y_{s+\frac{1}{2}}$, en y changeant s dans $s + \frac{1}{2}$, en sorte que cette équation a lieu, s étant entier ou égal à un entier plus $\frac{1}{2}$.

Les deux expressions de y_{s-1} et de $\frac{4}{\pi}$ donnent

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3 \ 5.5 \dots (2s-1)(2s-1)}{2.4 \ 4.6 \dots (2s-2)2s} \frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}};$$

les équations aux différences en y_s et $y_{s-\frac{1}{2}}$ donnent

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} = \frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)} \frac{y_{s+\frac{1}{2}}}{y_s} = \frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)} \frac{(2s+3)^2}{(2s+2)(2s+4)} \frac{y_{s+\frac{3}{2}}}{y_{s+1}} = \dots$$

Le rapport $\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}$ est plus grand que l'unité; il diminue sans cesse, à mesure que s augmente, et, dans le cas de s infini, il devient l'unité. En effet, ce rapport est égal à

$$\frac{\int du(1-u^2)^{s-1}}{\int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}}.$$

Or l'élément $du(1-u^2)^{s-1}$ est plus grand que l'élément $du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}$, ou $du(1-u^2)^{s-1}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}$; l'intégrale du numérateur de la fraction précédente surpasse donc celle du dénominateur; cette fraction est donc plus grande que l'unité. Lorsque s est infini, ces intégrales n'ont de valeur sensible que lorsque u est infiniment petit; car, u étant fini, le facteur $(1-u^2)^{s-1}$ devient une fraction ayant un exposant infiniment grand; on peut donc alors supposer $(1-u^2)^{\frac{1}{2}} = 1$, ce qui rend le rapport $\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}$ égal à l'unité.

Ce rapport est égal au produit d'une suite infinie de fractions, dont la première est $\frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)}$, et dont les autres s'en déduisent, en augmentant successivement s d'une unité; il devient $\frac{y_s}{y_{s-\frac{1}{2}}}$, en y changeant s dans $s + \frac{1}{2}$, et la fraction $\frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)}$ devient $\frac{(2s+2)^2}{(2s+1)(2s+3)}$; or on a, quel que soit s ,

$$\frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)} > \frac{(2s+2)^2}{(2s+1)(2s+3)};$$

on a donc cette inégalité

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} > \frac{y_s}{y_{s+\frac{1}{2}}}.$$

En y changeant s en $s - \frac{1}{2}$, on aura

$$\frac{y_{s-1}}{y_{s-\frac{3}{2}}} > \frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}.$$

Ces deux inégalités donnent

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} > \sqrt{\frac{y_s}{y_{s-1}}} < \sqrt{\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-\frac{3}{2}}}}.$$

Substituant au lieu des rapports $\frac{y_s}{y_{s-1}}$ et $\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-\frac{3}{2}}}$ leurs valeurs données par les équations aux différences en y_s , on aura

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} > \sqrt{1 + \frac{1}{2s}} < \sqrt{1 + \frac{1}{2s-1}};$$

on aura donc

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{4}{\pi} > \frac{3.3 \ 5.5 \dots (2s-1)(2s-1)}{2.4 \ 4.6 \dots (2s-2)2s} \sqrt{1 + \frac{1}{2s}}, \\ \frac{4}{\pi} < \frac{3.3 \ 5.5 \dots (2s-1)(2s-1)}{2.4 \ 4.6 \dots (2s-2)2s} \sqrt{1 + \frac{1}{2s-1}}. \end{cases}$$

Wallis publia en 1657, dans son *Arithmetica infinitorum*, ce beau théo-

rème, l'un des plus curieux de l'Analyse, par lui-même et par la manière dont l'inventeur y est parvenu. Sa méthode renfermant les principes de la théorie des intégrales définies, que les géomètres ont spécialement cultivée dans ces derniers temps, je pense qu'ils en verront avec plaisir une exposition succincte dans le langage actuel de l'Analyse.

Wallis considère la suite des fractions dont le terme général est $\frac{1}{\int dx (1-x^2)^s}$, n et s étant des nombres entiers, en commençant par zéro. En développant le binôme renfermé sous le signe intégral et intégrant chaque terme du développement, il obtient, pour une même valeur de n , les valeurs numériques de la fraction précédente, correspondantes à $s=0, s=1, s=2, \dots$, ce qui lui donne une série horizontale, dont s est l'indice. En supposant successivement $n=0, n=1, n=2, \dots$, il a autant de séries horizontales. Par là, il forme une Table à double entrée, dont s est l'indice horizontal et n l'indice vertical.

Dans cette Table, les séries horizontales et verticales sont les mêmes, en sorte que, en désignant par $y_{n,s}$ le terme correspondant aux indices n et s , on a cette équation fondamentale

$$y_{n,s} = y_{s,n}.$$

Wallis observe ensuite que la première série est l'unité; que la seconde est formée des nombres naturels; que la troisième est formée des nombres triangulaires, et ainsi de suite; de manière que le terme général $y_{n,s}$ de la série horizontale correspondante à n est

$$\frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{1.2.3\dots n};$$

cette fraction étant égale à

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(s+n)}{1.2.3\dots s},$$

on voit clairement que $y_{n,s}$ est égale à $y_{s,n}$.

Maintenant, si l'on parvenait à interpoler dans la Table précédente le terme correspondant à n et s égaux à $\frac{1}{2}$, on aurait le rapport du carré du diamètre à la surface du cercle; car le terme dont il s'agit est $\frac{1}{\int dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, ou $\frac{4}{\pi}$. Wallis cherche donc à faire cette interpolation. Elle est facile dans le cas où l'un des deux nombres n et s est un nombre entier. Ainsi, en faisant successivement s égal à un nombre entier moins $\frac{1}{2}$ dans la fonction $\frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{1.2.3\dots n}$, il obtient tous les termes des suites horizontales, correspondants aux valeurs de $s, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$; et en faisant n égal à un nombre entier moins $\frac{1}{2}$ dans la fonction $\frac{(n+1)(n+2)\dots(s+n)}{1.2.3\dots s}$, il obtient tous les termes des suites verticales, correspondants aux valeurs de $n, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$. Mais la difficulté consiste à trouver les termes correspondants à n et s , égaux tous deux à des nombres entiers moins $\frac{1}{2}$.

Wallis observe pour cela que l'équation

$$y_{n,s} = \frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{1.2.3\dots n}$$

donne

$$y_{n,s-1} = \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{1.2.3\dots n},$$

et qu'ainsi l'on a

$$(a) \quad y_{n,s} = \frac{s+n}{s} y_{n,s-1};$$

en sorte que chaque terme d'une série horizontale est égal au précédent, multiplié par la fraction $\frac{s+n}{s}$; d'où il suit que tous les termes d'une série horizontale, à partir de $s = -\frac{1}{2}$, s croissant successivement de l'unité, sont les produits de $y_{n,-\frac{1}{2}}$ par les fractions $\frac{2n+1}{1}, \frac{2n+3}{3}, \frac{2n+5}{5}, \dots$, et, à partir de $s=1$, ces termes sont les produits de $y_{n,0}$ par les fractions $\frac{n+1}{1}, \frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{3}, \dots$. Il suppose que les mêmes lois subsistent dans le cas de n fractionnaire et égal à $\frac{1}{2}$, en sorte que l'on

a tous les termes, à partir de $s = -\frac{1}{2}$, en multipliant $y_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ par la suite des fractions $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{6}{5}, \dots$. En désignant donc par $\square$ le terme correspondant à $n = \frac{1}{2}$ et $s = \frac{1}{2}$, terme qui, comme on l'a vu, est égal à $\frac{6}{\pi}$, on a

$$\square = \frac{2}{1} y_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}},$$

ce qui donne

$$y_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \square.$$

A partir de $y_{\frac{1}{2}, 0}$ ou de l'unité, il obtient les termes successifs de la série, correspondants à s entier, en multipliant successivement l'unité, par les fractions $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{6}{5}, \dots$. Il forme ainsi la série horizontale suivante qui correspond à $n = \frac{1}{2}$, et à s successivement égal à $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$,

$$(i) \quad \frac{1}{2} \square, 1, \square, \frac{3}{2}, \frac{4}{3} \square, \frac{5}{2}, \frac{6}{5} \square, \dots,$$

série qui représente celle-ci,

$$\frac{1}{\int dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\int dx (1-x^2)^0}, \frac{1}{\int dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}, \dots$$

La série (i) donne généralement, s étant un nombre entier,

$$y_{\frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2s}{2s-1} \square,$$

$$y_{\frac{1}{2}, s} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2s-1}{2s-2} \frac{1}{2} \square,$$

d'où l'on tire

$$(B) \quad \square = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2s-1)(2s-1)}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2s-2)2s} \frac{y_{\frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2}, s}}.$$

Wallis considère ensuite que, dans la série (i), le rapport de chaque terme à celui qui le précède d'une unité est plus grand que l'unité et diminue sans cesse, en sorte que l'on a

$$\frac{y_{\frac{1}{2}, s}}{y_{\frac{1}{2}, s-1}} > \frac{y_{\frac{1}{2}, s+1}}{y_{\frac{1}{2}, s}}.$$

Cela résulte en effet de l'équation

$$y_{\frac{1}{2}, s} = \frac{2s+1}{2s} y_{\frac{1}{2}, s-1}.$$

Il suppose que cela a également lieu pour tous les termes consécutifs de la série, en sorte que l'on a les deux inégalités

$$\frac{y_{\frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2}, s-1}} > \frac{y_{\frac{1}{2}, s}}{y_{\frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}}} < \frac{y_{\frac{1}{2}, s+1}}{y_{\frac{1}{2}, s}};$$

d'où il tire, comme on l'a fait ci-dessus,

$$\frac{y_{\frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2}, s-1}} > \sqrt{1 + \frac{1}{2s}} < \sqrt{1 + \frac{1}{2s-1}};$$

par là, il change la formule (B) dans la formule (A).

Cette manière de procéder par voie d'induction dut paraître et parut, en effet, extraordinaire aux géomètres accoutumés à la rigueur des anciens. Aussi voyons-nous que de grands géomètres contemporains de Wallis en furent peu satisfaits, et Fermat, dans sa correspondance avec Digby, fit des objections peu dignes de lui contre cette méthode qu'il n'avait pas suffisamment approfondie. Elle doit être, sans doute, employée avec une circonspection extrême : Wallis dit lui-même, en répondant à Fermat, que c'est ainsi qu'il s'en est servi, et, pour en confirmer l'exactitude, il l'appuie sur un calcul par lequel lord Brouncker avait trouvé, par le moyen de la formule (A), le rapport de la circonférence au diamètre, compris entre les limites

$$3,141592653569,$$

$$3,141592653696,$$

limites qui coïncident dans les dix premiers chiffres avec ce rapport que l'on a porté au delà de cent décimales. Nonobstant ces confirmations, il est toujours utile de démontrer en rigueur ce que l'on obtient par ces moyens d'invention. Wallis observe que les anciens en avaient,

sans doute, de semblables qu'ils n'ont point fait connaître, se contentant de donner leurs résultats appuyés de démonstrations synthétiques. Il regrette, avec raison, qu'ils nous aient celé leurs moyens d'y parvenir, et il dit à Fermat qu'on doit lui savoir gré de ne les avoir pas imités, et de n'avoir pas *détruit le pont après avoir passé le fleuve*. Il est digne de remarque que Newton, qui avait profité de cette méthode d'induction de Wallis et de ses résultats pour découvrir son théorème du binôme, ait mérité les reproches que Wallis fait aux anciens géomètres, en cachant les moyens qui l'avaient conduit à ses découvertes.

Reprenons la formule (B) de Wallis. Si l'on suppose

$$\frac{y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}} = u_s,$$

cette formule donnera

$$u_{s-1} = \frac{(2s-1)^2}{(2s-2)2s} u_s$$

ou

$$(I) \quad 0 = 2s(2s-2)(u_s - u_{s-1}) + u_s.$$

Soit

$$u_s = \Lambda^{(0)} + \frac{\Lambda^{(1)}}{s+1} + \frac{\Lambda^{(2)}}{(s+1)(s+2)} + \frac{\Lambda^{(3)}}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \dots$$

et considérons ce que produit, dans le second membre de l'équation (I), le terme

$$\frac{\Lambda^{(r)}}{(s+1) \dots (s+r)}.$$

En n'ayant égard qu'à ce terme dans u_s , on aura

$$u_s - u_{s-1} = \frac{-r\Lambda^{(r)}}{s(s+1)(s+2) \dots (s+r)};$$

le terme $2s(2s-2)(u_s - u_{s-1})$ de l'équation (I) devient ainsi

$$\frac{-4r\Lambda^{(r)}(s-1)}{(s+1) \dots (s+r)},$$

ou

$$\frac{-4r\Lambda^{(r)}}{(s+1) \dots (s+r-1)} + \frac{4r(r+1)\Lambda^{(r)}}{(s+1) \dots (s+r)}.$$

Le terme de u_s dépendant de $\Lambda^{(r+1)}$ produira des termes semblables, et ainsi des autres. En comparant donc dans l'équation (I) les termes qui ont le même dénominateur $(s+1) \dots (s+r)$, on aura

$$0 = 4r(r+1)\Lambda^{(r)} - 4(r+1)\Lambda^{(r+1)} + \Lambda^{(r)},$$

ce qui donne

$$\Lambda^{(r+1)} = \frac{(2r+1)^2 \Lambda^{(r)}}{4(r+1)}.$$

Il est visible, par ce qui précède, que u_s se réduit à l'unité lorsque s est infini, ce qui donne $\Lambda^{(0)} = 1$. De là on tire

$$u_s = 1 + \frac{1^2}{4(s+1)} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 1 \cdot 2(s+1)(s+2)} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(s+1)(s+2)(s+3)} + \dots = \frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}.$$

Le rapport du terme moyen du binôme $(1+t)^{2s}$ au binôme entier est

$$\frac{(s+1)(s+2) \dots 2s}{2^{2s} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}$$

ou

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2s}.$$

En nommant donc T ce terme moyen, la formule (B) donnera

$$T^2 = \frac{1}{s\pi u_s}.$$

Ce théorème et l'expression précédente de u_s en série sont dus à Stirling, et l'on voit comme ils se rattachent au théorème et à l'analyse de Wallis. Cette valeur de T^2 peut servir à déterminer par approximation le rapport de la circonférence au diamètre, ce qui était l'objet de Wallis; ou, ce rapport étant supposé connu, elle donne le terme moyen du binôme, ce qui était l'objet de Stirling.

II.

L'expression de $\Delta^n s^i$, donnée par la formule (μ') du n° 40 du Livre I^{er}, a été conclue de l'expression de $\Delta^n \frac{1}{s^i}$, en changeant dans celle-ci i en $-i$. Ce passage du positif au négatif est analogue aux inductions que Wallis et d'autres géomètres ont si heureusement employées. Tous ces moyens d'invention, qui tiennent à la généralité de l'Analyse, exigent dans leur usage une grande circonspection, et il est toujours bon d'en démontrer directement les résultats. C'est ce que nous allons faire relativement à la formule (μ').

Considérons l'intégrale

$$\int \frac{d\varpi e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}},$$

prise depuis $\varpi = -\infty$ jusqu'à $\varpi = \infty$. Cette intégrale est égale à

$$-\frac{\sqrt{-1}}{i} \frac{e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^i} + \frac{as}{i} \int \frac{d\varpi e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^i} + \text{const.}$$

Cette constante est

$$\frac{\sqrt{-1}}{i} \frac{e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1+\varpi\sqrt{-1})^i},$$

ϖ étant supposé infini. En la réunissant au terme

$$-\frac{\sqrt{-1}}{i} \frac{e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^i},$$

dans lequel on doit pareillement supposer ϖ infini, on aura

$$\frac{\sqrt{-1}}{i} \left\{ \frac{\cos(as\varpi) [(1-\varpi\sqrt{-1})^i - (1+\varpi\sqrt{-1})^i]}{(1+\varpi^2)^i} + \sqrt{-1} \sin(as\varpi) [(1-\varpi\sqrt{-1})^i + (1+\varpi\sqrt{-1})^i] \right\}.$$

Le numérateur de cette fraction est réel, ainsi que son dénomina-

teur, et il est visible qu'elle devient nulle, en y faisant ϖ infini; on a donc

$$\int \frac{d\varpi e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{as}{i} \int \frac{d\varpi e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^i}.$$

De là il est facile de conclure qu'en faisant $i = r - \frac{m}{n}$, r étant un nombre entier positif, on aura

$$\int \frac{d\varpi e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{a^r s^r}{i(i-1)\dots(1-\frac{m}{n})} \int \frac{d\varpi e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}}.$$

Soit $as\varpi = \varpi'$, et faisons $as = q$; nous aurons

$$a^r s^r \int \frac{d\varpi e^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}} = q^i \int \frac{d\varpi' e^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}},$$

les intégrales étant prises depuis ϖ et ϖ' égaux à $-\infty$ jusqu'à ϖ et ϖ' égaux à $+\infty$. Désignons par k l'intégrale

$$\int \frac{d\varpi' e^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}},$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dq} &= -\left(1-\frac{m}{n}\right) \int \frac{d\varpi' e^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{2-\frac{m}{n}}} \\ &= \frac{\sqrt{-1} e^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}} - \int \frac{d\varpi' e^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}} + \text{const.} \end{aligned}$$

On verra, comme ci-dessus, que ce dernier membre se réduit au terme affecté du signe intégral, terme qui est égal à $-k$; on a donc

$$\frac{dk}{dq} = -k,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$k = A e^{-q},$$

A étant une constante arbitraire indépendante de q . Il est visible que

cette équation suppose q positif; car, en faisant q infini positif ou négatif, k est infiniment petit. On a donc

$$\int \frac{d\omega e^{a\omega(1-\omega\sqrt{-1})}}{(1-\omega\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{\Lambda a^i s^i}{i(i-1)\dots\left(1-\frac{m}{n}\right)}.$$

Cette équation a lieu, quelle que soit la valeur de a , pourvu que as soit positif. En faisant $s=1$ et changeant a dans une autre constante a' , on aura

$$\int \frac{d\omega e^{a'\omega(1-\omega\sqrt{-1})}}{(1-\omega\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{\Lambda a'^i}{i(i-1)\dots\left(1-\frac{m}{n}\right)};$$

on aura donc

$$s^i = \frac{a'^i}{a^i} \frac{\int \frac{d\omega e^{a\omega(1-\omega\sqrt{-1})}}{(1-\omega\sqrt{-1})^{i+1}}}{\int \frac{d\omega e^{a'\omega(1-\omega\sqrt{-1})}}{(1-\omega\sqrt{-1})^{i+1}}},$$

ce qui donne

$$\Delta^a s^i = \frac{a'^i}{a^i} \frac{\int \frac{d\omega e^{a\omega(1-\omega\sqrt{-1})} (e^{a'(1-\omega\sqrt{-1})} - 1)^n}{(1-\omega\sqrt{-1})^{i+1}}}{\int \frac{d\omega e^{a'\omega(1-\omega\sqrt{-1})}}{(1-\omega\sqrt{-1})^{i+1}}}.$$

Pour avoir en séries les intégrales, nous supposons

$$\frac{e^{a\omega(1-\omega\sqrt{-1})} (e^{a'(1-\omega\sqrt{-1})} - 1)^n}{(1-\omega\sqrt{-1})^{i+1}} = e^{a\omega} (e^a - 1)^n e^{-\omega^2};$$

nous aurons, en prenant les logarithmes,

$$-as\omega\sqrt{-1} + n \log \left[1 + \frac{e^a}{e^a - 1} (e^{-a\omega\sqrt{-1}} - 1) \right] - (i+1) \log(1-\omega\sqrt{-1}) = -\omega^2.$$

Déterminons a de manière que, dans le développement du premier membre de cette équation, la première puissance de ω disparaisse, et supposons ce développement égal à

$$-fa^2\omega^2 - fa^3\omega^3 - fa^4\omega^4 - \dots = -\omega^2;$$

nous aurons d'abord

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{ne^a}{e^a - 1},$$

ensuite

$$f = \frac{i+1}{2a^2} + \frac{n}{2} \frac{e^a}{e^a - 1} - \frac{n}{2} \left(\frac{e^a}{e^a - 1} \right)^2,$$

$$f' = \sqrt{-1} \left[\frac{i+1}{3a^3} - \frac{n}{6} \frac{e^a}{e^a - 1} + \frac{n}{2} \left(\frac{e^a}{e^a - 1} \right)^2 - \frac{n}{3} \left(\frac{e^a}{e^a - 1} \right)^3 \right],$$

$$f'' = -\frac{i+1}{4a^4} - \frac{n}{24} \frac{e^a}{e^a - 1} + \frac{7n}{24} \left(\frac{e^a}{e^a - 1} \right)^2 - \frac{n}{2} \left(\frac{e^a}{e^a - 1} \right)^3 + \frac{n}{24} \left(\frac{e^a}{e^a - 1} \right)^4,$$

On a ensuite, par le retour des séries,

$$a\omega = \frac{t}{\sqrt{f}} \left(1 - \frac{f't}{2f\sqrt{f}} + \frac{5f'^2 - 4ff''}{8f^3} t^2 + \dots \right);$$

on a donc, en prenant les intégrales depuis ω et t égaux à $-\infty$ jusqu'à t et ω égaux à $+\infty$,

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega e^{a\omega(1-\omega\sqrt{-1})} (e^{a'(1-\omega\sqrt{-1})} - 1)^n}{(1-\omega\sqrt{-1})^n} \\ &= \frac{e^{as} (e^a - 1)^n}{a} \int \frac{e^{-t^2} dt}{\sqrt{f}} \left(1 - \frac{f't}{f\sqrt{f}} + 3 \frac{5f'^2 - 4ff''}{8f^3} t^2 + \dots \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}} \left(1 + \frac{15f'^2 - 12ff''}{16f^3} + \dots \right) \frac{e^{as} (e^a - 1)^n}{a}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose $s=1$, $n=0$ et si l'on change a en a' , on aura

$$a' = i+1, \quad f = \frac{1}{2(i+1)}, \quad f' = \frac{\sqrt{-1}}{3(i+1)^2}, \quad f'' = \frac{1}{4(i+1)^3}, \quad \dots;$$

on aura donc

$$\int \frac{d\omega e^{a'\omega(1-\omega\sqrt{-1})}}{(1-\omega\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{e^{a'i}}{i+1} \left(1 - \frac{1}{12i} + \dots \right) \sqrt{2(i+1)\pi}.$$

De là il est aisé de conclure

$$\Delta^n s^i = \frac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1} e^{as-i(c^a-1)^n}}{\sqrt{\frac{i(i+1)}{a^2} - in \frac{c^a}{(c^a-1)^2}}} \left(1 + \frac{15f'^2 - 12ff''}{16f^3} + \frac{1}{12i} + \dots\right),$$

formule qui coïncide avec la formule (μ') du n° 40 du Livre I^{er}.

Cette formule suppose a positif, et c'est ce qui a lieu lorsque $i+1$ surpasse n . En effet, si, dans l'équation

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a-1},$$

on suppose a infiniment petit, le second membre est positif et égal à $\frac{i+1-n}{a}$; ensuite, a étant positif et infini, ce second membre devient négatif et égal à $-s-n$; il y a donc une valeur positive de a qui satisfait à cette équation. Mais il n'y en a qu'une; car, s'il y en avait deux, la fonction $\frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a-1}$ aurait un maximum entre ces deux valeurs; on aurait donc à ce maximum

$$0 = -\frac{i+1}{a^2} + \frac{nc^a}{(c^a-1)^2},$$

ce qui ne se peut, a étant positif. En effet, $(c^a-1)^2$ est plus grand que $a^2 c^a$ ou $a^a - 1 > ac^a$, ce qui est visible; car on a

$$c^{\frac{a}{2}} - c^{-\frac{a}{2}} = a + \frac{a^3}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots > a;$$

on a donc

$$\frac{nc^a}{(c^a-1)^2} < \frac{n}{a^2} < \frac{i+1}{a^2}.$$

Ainsi la formule (μ') peut être employée, tant que $i+1$ surpasse n , ce qui est conforme à ce que l'on a dit dans le n° 41 du Livre I^{er}, d'après

la considération des passages du réel à l'imaginaire, passages que l'analyse précédente confirme.

III.

La formule (p) du n° 42 du Livre I^{er} est fort remarquable : elle peut se démontrer de la manière suivante, qui montre distinctement la raison pour laquelle la série des différences doit être arrêtée, lorsque la quantité sous l'exposant de la puissance devient négative.

Considérons l'intégrale

$$\int x^{-\frac{m}{n}} dx \cos\left(2x - \frac{m\pi}{2n}\right) \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n,$$

et donnons-lui cette forme

$$\cos \frac{m\pi}{2n} \int x^{-\frac{m}{n}} dx \cos 2x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n + \sin \frac{m\pi}{2n} \int x^{-\frac{m}{n}} dx \sin 2x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n,$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini. Supposons d'abord n pair et égal à $2i$; on aura, par les formules connues,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2i} = \frac{(-1)^i}{2^{2i-1} x^{2i}} \left\{ \cos nx - n \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)x - \dots \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \right\},$$

le signe $+$ ayant lieu, si i est pair, et le signe $-$, si i est impair. En multipliant cette équation par $\cos 2x$, on aura

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2i} \cos 2x = \frac{(-1)^i}{2^{2i} x^{2i}} \left\{ \cos(n \pm 2)x - n \cos(n-2 \pm 2)x \pm \dots \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \cos\left(\frac{1}{2} 2x\right) \right\},$$

où l'on doit observer que, par $\cos(n-2r \pm 2)x$, je comprends la somme des cosinus $\cos(n-2r+2)x$ et $\cos(n-2r-2)x$, $2r$ étant ici au plus égal à n ou $2i$. Multiplions le second membre de cette

équation par $x^{-\frac{m}{n}} dx$; on a généralement

$$\begin{aligned} & \int x^{-\frac{m}{n}} dx \cos(n-2r \pm z)x \\ &= \frac{\cos(n-2r \pm z)x}{\left(n + \frac{m}{n} - 1\right) x^{\frac{n+m}{n}-1}} + \frac{(n-2r \pm z) \sin(n-2r \pm z)x}{\left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \left(n + \frac{m}{n} - 2\right) x^{\frac{n+m}{n}-2}} \\ &+ \frac{(n-2r \pm z)^2 \cos(n-2r \pm z)x}{\left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \left(n + \frac{m}{n} - 2\right) \left(n + \frac{m}{n} - 3\right) x^{\frac{n+m}{n}-3}} \\ &- \dots \dots \dots \\ &+ \frac{(-1)^i (n-2r \pm z)^i}{\left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \dots \frac{m}{n}} \int dx x^{-\frac{m}{n}} \cos(n-2r \pm z)x. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \int x^{-\frac{m}{n}} dx \cos zx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \\ &= \frac{(-1)^i}{2^{2i} x^{\frac{n+m}{n}}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{x}{n + \frac{m}{n} - 1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos(n \pm z)x - n \cos(n-2 \pm z)x}{1.2} \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos(n-4 \pm z)x \\ & - \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{x^2}{\left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \left(n + \frac{m}{n} - 2\right)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(n \pm z) \sin(n \pm z)x}{1} \\ & - n(n-2 \pm z) \sin(n-2 \pm z)x \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{x^3}{\left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \left(n + \frac{m}{n} - 2\right) \left(n + \frac{m}{n} - 3\right)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(n \pm z)^2 \cos(n \pm z)x}{1} \\ & - n(n-2 \pm z)^2 \cos(n-2 \pm z)x \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \\ & - \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \\ &+ \frac{1}{2^{2i} \left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \dots \frac{m}{n}} \int dx x^{-\frac{m}{n}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(n \pm z)^n \cos(n \pm z)x}{1} \\ & - n(n-2 \pm z)^n \cos(n-2 \pm z)x \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-4 \pm z)^n \cos(n-4 \pm z)x \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{2} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1.2.3 \dots i} z^n \cos(\pm z)x \end{aligned} \right\} \\ &+ \text{const.} \end{aligned}$$

Cette constante doit être déterminée de manière que le second membre de cette équation soit nul lorsque x est nul : or on a, par ce qui précède,

$$\cos(n \pm z)x - n \cos(n-2 \pm z)x + \dots = (-1)^i 2^{2i} (\sin x)^n \cos zx.$$

En différenciant cette équation par rapport à x , on a

$$\begin{aligned} & -[(n \pm z) \sin(n \pm z)x - n(n-2 \pm z) \sin(n-2 \pm z)x + \dots] \\ &= (-1)^i 2^{2i} \frac{d[(\sin x)^n \cos zx]}{dx}; \end{aligned}$$

différenciant encore, on a

$$\begin{aligned} & -[(n \pm z)^2 \cos(n \pm z)x - n(n-2 \pm z)^2 \cos(n-2 \pm z)x + \dots] \\ &= (-1)^i 2^{2i} \frac{d^2[(\sin x)^n \cos zx]}{dx^2}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite : or on a, aux deux limites $x = 0$ et x infini,

$$\begin{aligned} & x^{-\frac{n+m}{n}+1} (\sin x)^n \cos zx = 0, \\ & x^{-\frac{n+m}{n}+1} \frac{d[(\sin x)^n \cos zx]}{dx} = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

On a donc, en intégrant depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\begin{aligned} & \int x^{-\frac{m}{n}} dx \cos zx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^{2i} \left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \dots \frac{m}{n}} \\ &\times \int x^{-\frac{m}{n}} dx \left\{ \begin{aligned} & \frac{(n \pm z)^n \cos(n \pm z)x}{1} \\ & - n(n-2 \pm z)^n \cos(n-2 \pm z)x \\ & + \dots \dots \dots \\ & \pm \frac{1}{2} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1.2.3 \dots i} z^n \cos(\pm z)x \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Maintenant on a, en faisant $(n - 2r \pm z)x = x'$,

$$\begin{aligned} f x^{-\frac{m}{n}} dx (n - 2r \pm z)^n \cos(n - 2r \pm z)x \\ = (n - 2r \pm z)^{n-1+\frac{m}{n}} f dx' x'^{-\frac{m}{n}} \cos x'. \end{aligned}$$

On a de plus, comme nous le démontrerons ci-après,

$$f x'^{-\frac{m}{n}} dx' \cos x' = k' \sin \frac{m\pi}{2n},$$

$$f x'^{-\frac{m}{n}} dx' \sin x' = k' \cos \frac{m\pi}{2n},$$

k' étant égal à $f t^{-\frac{m}{n}} dt e^{-t}$, l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini. Cela posé, on aura

$$\begin{aligned} f x^{-\frac{m}{n}} dx \cos zx \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \\ = \frac{k' \sin \frac{m\pi}{2n}}{2^n \left(n + \frac{m}{n} - 1 \right) \left(n + \frac{m}{n} - 2 \right) \dots \frac{m}{n}} \\ \times \left(\begin{aligned} & (n+z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n(n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2} (n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}} \\ & + \dots \\ & \pm \frac{1}{2} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1.2.3 \dots i} z^n \\ & + (n-z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n(n-z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} \\ & + \dots \\ & \pm \frac{1}{2} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1.2.3 \dots i} (-z)^{n-1+\frac{m}{n}} \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

Il est facile de voir, par l'analyse précédente, que, si $n - z - 2r$ est négatif, il faut changer la puissance $(n - z - 2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$ dans $(2r + z - n)^{n-1+\frac{m}{n}}$, parce que l'on a

$$\cos(n - z - 2r)x = \cos(2r + z - n)x.$$

On trouvera, par la même analyse,

$$\begin{aligned} f x^{-\frac{m}{n}} dx \sin zx \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \\ = \frac{1}{2^n \left(n + \frac{m}{n} - 1 \right) \dots \frac{m}{n}} f x^{-\frac{m}{n}} dx \left(\begin{aligned} & (n+z)^n \sin(n+z)x \\ & - n(n+z-2)^n \sin(n+z-2)x \\ & + \dots \\ & - (n-z)^n \sin(n-z)x \\ & + n(n-z-2)^n \sin(n-z-2)x \\ & - \dots \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

Or on a

$$f x^{-\frac{m}{n}} (n \pm z - 2r)^n dx \sin(n \pm z - 2r)x = (n \pm z - 2r)^{n-1+\frac{m}{n}} k' \cos \frac{m\pi}{2n}.$$

Si $(n - z - 2r)$ est négatif, on a

$$\begin{aligned} f x^{-\frac{m}{n}} (n - z - 2r)^n dx \sin(n - z - 2r)x \\ = - f x^{-\frac{m}{n}} dx (2r + z - n)^n \sin(2r + z - n)x \\ = - (2r + z - n)^{n-1+\frac{m}{n}} k' \cos \frac{m\pi}{2n}. \end{aligned}$$

De là on tire

$$(i) \left(\begin{aligned} & \cos \frac{m\pi}{2n} f x^{-\frac{m}{n}} dx \cos zx \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n + \sin \frac{m\pi}{2n} f x^{-\frac{m}{n}} dx \sin zx \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \\ & = \frac{k' \sin \frac{m\pi}{n} \left[(n+z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n(n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} + \frac{n(n-1)}{1.2} (n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}} - \dots \right]}{2^n \left(n + \frac{m}{n} - 1 \right) \left(n + \frac{m}{n} - 2 \right) \dots \frac{m}{n}}, \end{aligned} \right)$$

la série étant continuée jusqu'à ce que, dans la puissance $(n + z - 2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$, la quantité $n + z - 2r'$ devienne négative, $2r'$ pouvant ici s'étendre jusqu'à $2n$. En effet, il est visible que dans les expressions des deux termes du premier membre de l'équation (i), les termes relatifs à la puissance $(n + z - 2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$ sont les mêmes et s'ajoutent. Les termes relatifs à la puissance $(n - z - 2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$ sont les mêmes et de signes contraires, tant que $n - z - 2r$ est positif;

mais ils ont le même signe lorsque $n - z - 2r$ est négatif; et la puissance précédente doit, par ce qui précède, être changée dans $(2r + z - n)^{n-1+\frac{m}{n}}$. La somme des termes relatifs à cette puissance est

$$\frac{(-1)^r \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r} (z+2r-n)^{n-1+\frac{m}{n}}}{2^n \left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \dots \frac{m}{n}} k' \sin \frac{m\pi}{n};$$

or ce terme se rencontre dans la série du second membre de l'équation (i). Cette série contient le terme

$$\frac{(-1)^{r'} \frac{n(n-1)\dots(n-r'+1)}{1.2.3\dots r'} (n+z-2r')^{n-1+\frac{m}{n}}}{2^n \left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \dots \frac{m}{n}} k' \sin \frac{m\pi}{n},$$

$n + z - 2r'$ étant supposé positif. Si l'on fait $n - 2r' = 2r - n$, ce qui donne $r' = n - r$, ce terme devient égal au précédent; car alors on a $(-1)^{r'} = (-1)^r$ et

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r'+1)}{1.2.3\dots r'} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r}.$$

La formule (T) du n° 24 du Livre I^{er} donne

$$\frac{1}{r-1} \int t^{r-1} dt e^{-t} \int t^{1-r} dt e^{-t} = \frac{\pi}{\sin(r-1)\pi},$$

les intégrales étant prises depuis t nul jusqu'à t infini. Si l'on suppose $r - 1 = \frac{m}{n}$, on aura

$$\int t^{\frac{m}{n}} dt e^{-t} \int t^{-\frac{m}{n}} dt e^{-t} = \frac{\frac{m}{n} \pi}{\sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Ce que nous avons nommé k dans la formule (p) du n° 42 du Livre I^{er} est égal à $\int t^{r+m-1} dt e^{-t}$, et il est facile de voir que, les intégrales étant

prises depuis t nul jusqu'à t infini, on a

$$\int t^{n-1+m} dt e^{-t} = \frac{1}{n} \int t^n dt e^{-t};$$

on a donc

$$nkk' = \frac{\frac{m}{n} \pi}{\sin \frac{m\pi}{n}}.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (i) par $\frac{nk\pi}{n}$ et substituant dans le second membre ainsi multiplié, au lieu de $nk k'$, sa valeur $\frac{\frac{m}{n} \pi}{\sin \frac{m\pi}{n}}$, on aura la formule (p) citée.

La même analyse s'applique au cas où n est un nombre impair. Elle montre distinctement la raison pour laquelle la série des différences doit s'arrêter, lorsque la quantité élevée à la puissance $n - 1 + \frac{m}{n}$ devient négative.

Il nous reste maintenant à démontrer les formules

$$\int x^{-\frac{m}{n}} dx' \cos x' = k' \sin \frac{m\pi}{n},$$

$$\int x^{-\frac{m}{n}} dx' \sin x' = k' \cos \frac{m\pi}{n}.$$

Pour cela, considérons l'intégrale définie

$$\int \frac{dx e^{-\omega x}}{x^{\frac{m}{n}}} (\cos rx - \sqrt{-1} \sin rx),$$

cette intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini; ω étant moindre que l'unité. En la développant par les expressions connues de $\cos rx$ et de $\sin rx$, en séries, elle devient

$$\int \frac{dx e^{-\omega x}}{x^{\frac{m}{n}}} \left[1 - \frac{r^2 x^2}{1.2} + \frac{r^4 x^4}{1.2.3.4} - rx \sqrt{-1} \left(1 - \frac{r^2 x^2}{1.2.3} + \frac{r^4 x^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right) \right].$$

Or on a généralement, en prenant l'intégrale depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\int x^{i-\omega} dx e^{-ax} = \frac{(1-\omega)(2-\omega)\dots(i-\omega)}{a^i} \int \frac{dx e^{-ax}}{x^\omega}.$$

En faisant ensuite $ax = t$, on a

$$\int \frac{dx e^{-ax}}{x^\omega} = \frac{1}{a^{1-\omega}} \int t^{-\omega} dt e^{-t} = \frac{k'}{a^{1-\omega}},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis t nul jusqu'à t infini, et k' étant supposé exprimer l'intégrale $\int t^{-\omega} dt e^{-t}$, prise dans ces limites. On aura ainsi

$$\int x^{i-\omega} dx e^{-ax} = \frac{(1-\omega)(2-\omega)\dots(i-\omega)k'}{a^{i+1-\omega}};$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx e^{-ax}}{x^\omega} (\cos rx - \sqrt{-1} \sin rx) \\ &= \frac{k'}{a^{1-\omega}} \left\{ 1 - \frac{(1-\omega)(2-\omega)r^2}{1.2.a^2} + \frac{(1-\omega)(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)r^4}{1.2.3.4.a^4} - \dots \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{-1} \left[\frac{r}{a} - \frac{(1-\omega)(2-\omega)(3-\omega)r^3}{1.2.3.a^3} - \dots \right] \right\}. \end{aligned}$$

Si l'on fait $\frac{r}{a} = s$, le second membre de cette équation devient

$$\frac{k'}{a^{1-\omega}(1+s\sqrt{-1})^{1-\omega}}.$$

Soit A un angle dont s soit la tangente; on aura

$$\sin A = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}},$$

ce qui donne

$$\cos A - \sqrt{-1} \sin A = \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+s\sqrt{-1}};$$

d'où l'on tire, par le théorème connu,

$$\cos(1-\omega)A - \sqrt{-1} \sin(1-\omega)A = \frac{(1+s^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}{(1+s\sqrt{-1})^{1-\omega}}.$$

La tangente s est non seulement la tangente de l'angle A , mais encore celle du même angle, augmenté d'un multiple quelconque de la demi-circonférence; mais le premier membre de cette équation devant se réduire à l'unité, lorsque s est nul, il est clair que l'on doit prendre pour A le plus petit des angles qui ont s pour tangente.

Maintenant, cette équation donne, en y substituant $\frac{r}{a}$ au lieu de s ,

$$\frac{k'}{a^{1-\omega}(1+s\sqrt{-1})^{1-\omega}} = \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}} [\cos(1-\omega)A - \sqrt{-1} \sin(1-\omega)A];$$

on a donc

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx e^{-ax}}{x^\omega} (\cos rx - \sqrt{-1} \sin rx) \\ &= \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}} [\cos(1-\omega)A - \sqrt{-1} \sin(1-\omega)A]. \end{aligned}$$

En comparant séparément les quantités réelles et les imaginaires, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx \cos rx e^{-ax}}{x^\omega} &= \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}} \cos(1-\omega)A, \\ \int \frac{dx \sin rx e^{-ax}}{x^\omega} &= \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}} \sin(1-\omega)A. \end{aligned}$$

Si a est nul, $\frac{r}{a}$ est infini, et le plus petit angle, dont il est la tangente, est $\frac{\pi}{2}$; on a donc

$$\begin{aligned} \int \frac{dx \cos rx}{x^\omega} &= \frac{k'}{r^{1-\omega}} \sin \frac{\omega\pi}{2}, \\ \int \frac{dx \sin rx}{x^\omega} &= \frac{k'}{r^{1-\omega}} \cos \frac{\omega\pi}{2}. \end{aligned}$$

En supposant $r=1$ et $\omega = \frac{m}{n}$, on aura les équations qu'il s'agissait de démontrer.