THÉORIE ANALYTIQUE
DES PROBABILITÉS.

LIVRE PREMIER.

CALCUL DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES ÉLÉMENTS DES GRANDEURS.

1. Les grandeurs, considérées en général, s'expriment communément par les lettres de l'alphabet, et c'est à Viète qu'est due cette notation commode qui transporte à la langue analytique les alphabets des langues connues. L'application que Viète fit de cette notation à la Géométrie, à la théorie des équations et aux sections angulaires, forme une des époques remarquables de l'histoire des Mathématiques. Des signes très simples expriment les corrélations des grandeurs. La position d'une grandeur à la suite d'une autre suffit pour exprimer leur produit. Si ces grandeurs sont la même, ce produit est le carré ou la seconde puissance de cette grandeur. Mais, au lieu de l'écrire deux fois, Descartes imagina de ne l'écrire qu'une fois, en lui donnant le nombre 2 pour exposant, et il exprima les puissances successives, en augmentant successivement cet exposant d'une unité. Cette notation,

en ne la considérant que comme une manière abrégée de représenter ces puissances, semble peu de chose; mais tel est l'avantage d'une langue bien faite, que ses notations les plus simples sont devenues souvent la source des théories les plus profondes, et c'est ce qui a eu lieu pour les exposants de Descartes. Wallis, qui s'est attaché spécialement à suivre le fil de l'induction et de l'analogie, a été conduit par ce moyen à exprimer les puissances radicales par des exposants fractionnaires; et de même que Descartes exprimait par les exposants 2, 3, ... les puissances secondes, troisièmes, ... d'une grandeur, il exprima ses racines secondes, troisièmes, ... par les exposants fractionnaires $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... En général, il exprima par l'exposant $\frac{m}{n}$ la racine n d'une grandeur élevée à la puissance m. En effet, suivant la notation de Descartes, cette expression a lieu dans le cas où m est divisible par n, et Wallis, par analogie, l'étendit à tous les cas. Il remarqua ensuite que la multiplication des puissances d'une même grandeur revient à ajouter les exposants de ces puissances, qu'il faut retrancher dans leur division, en sorte que l'exposant $n - m$ indique le quotient de la puissance n d'une grandeur, divisée par sa puissance m; d'où il suit que ce quotient devenant l'unité, lorsque m est égal à n, toute grandeur ayant zéro pour exposant est l'unité même. Si m surpasse n, l'exposant $n - m$ devient négatif, et le quotient devient l'unité divisée par la puissance $m - n$ de la grandeur. Wallis supposa donc généralement que l'exposant négatif $-\frac{m}{n}$ exprime l'unité divisée par la racine $n^{\text{ième}}$ de la grandeur élevée à la puissance m.

Ce fut dans son Ouvrage intitulé *Arithmetica infinitorum* que Wallis exposa ces remarques qui le conduisirent à sommer x^n, x étant supposé formé d'une infinité d'éléments pris pour unité, ce qui, suivant les notations actuelles, revient à intégrer la différentielle $x^n dx$. Il fit voir que cette intégrale, prise depuis x nul, est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ce qui lui donna l'intégrale d'une suite formée de différentielles semblables. En considérant ainsi l'intégrale $\int dx\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^s$, lorsque n et s sont des nombres

entiers, et lorsqu'elle est prise depuis x nul jusqu'à $x = 1$, il trouva qu'elle est égale à $\frac{1.2.3...n}{(s+1)(s+2)...(s+n)}$. Si les indices n et s sont fractionnaires et égaux à $\frac{1}{2}$, cette intégrale exprime le rapport de la surface du cercle au carré de son diamètre. Wallis s'attacha donc à interpoler le produit précédent, dans le cas où n et s sont des nombres fractionnaires, problème entièrement nouveau à l'époque où cet illustre géomètre s'en occupa, et qu'il parvint à résoudre par une méthode fort ingénieuse qui contient les germes des théories des interpolations et des intégrales définies, dont les géomètres se sont tant occupés, et qui sont l'objet d'une grande partie de cet Ouvrage. Il obtint de cette manière l'expression du rapport de la surface du cercle au carré de son diamètre, par un produit d'une infinité de facteurs, qui donne des valeurs de plus en plus approchées de ce rapport, à mesure que l'on considère un plus grand nombre de ces facteurs, résultat l'un des plus singuliers de l'Analyse. Mais il est remarquable que Wallis, qui avait si bien considéré les indices fractionnaires des puissances radicales, ait continué de noter ces puissances comme on l'avait fait avant lui. On voit la notation des puissances radicales par les exposants fractionnaires employée pour la première fois dans les lettres de Newton à Oldenburg, insérées dans le *Commercium epistolicum*. En comparant par la voie de l'induction, dont Wallis avait fait un si bel usage, les exposants des puissances du binôme avec les coefficients des termes de son développement, dans le cas où ces exposants sont des nombres entiers, il détermina la loi de ces coefficients, et il l'étendit, par analogie, aux puissances fractionnaires et aux puissances négatives. Ces divers résultats, fondés sur la notation de Descartes, montrent l'influence d'une notation heureuse sur toute l'Analyse.

Cette notation a encore l'avantage de donner l'idée la plus simple et la plus juste des logarithmes, qui ne sont en effet que les exposants entiers et fractionnaires d'une même grandeur dont les diverses puissances représentent tous les nombres. Mais l'extension la plus importante que cette notation ait reçue est celle des exposants variables, ce

qui constitue le Calcul exponentiel, l'une des branches les plus fécondes de l'Analyse moderne. Leibnitz a indiqué le premier, dans les *Actes de Leipzig* pour 1682, les transcendantes à exposants variables, et par là il a complété le système des éléments dont une fonction finie peut être composée; car toute fonction finie explicite se réduit, en dernière analyse, à des grandeurs simples, ajoutées ou soustraites les unes des autres, multipliées ou divisées entre elles, élevées à des puissances constantes ou variables. Les racines des équations formées de ces éléments en sont des fonctions implicites. C'est ainsi que, c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, le logarithme de a est la racine de l'équation transcendante $c^x - a = 0$. On peut considérer encore les quantités logarithmiques comme des fonctions exponentielles dont les exposants sont infiniment petits. Ainsi $X \log X'$ est égal à $\frac{X'^{X\,dx} - 1}{dx}$. Toutes les modifications de grandeur que l'on peut concevoir aux exposants se trouvent donc représentées par les quantités exponentielles, algébriques et logarithmiques. Ces quantités et leurs fonctions embrassent, par conséquent, toutes les fonctions finies explicites, et les racines des équations formées de fonctions semblables embrassent toutes les fonctions finies implicites.

Ces quantités sont essentiellement distinctes : l'exponentielle a^x, par exemple, ne peut jamais être identique avec une fonction algébrique de x. Car toute fonction algébrique est réductible dans une série descendante de la forme $kx^n + k'x^{n-n'} + \ldots$; or il est facile de démontrer que, a étant supposé plus grand que l'unité et x étant infini, a^x est infiniment plus grand que kx^n, quelque grands que l'on suppose k et n. Pareillement, il est aisé de voir que, dans le cas de x infini, x est infiniment plus grand que $k(\log x)^n$. Les fonctions exponentielles, algébriques et logarithmiques d'une variable indéterminée ne peuvent donc pas rentrer les unes dans les autres; les quantités algébriques tiennent le milieu entre les exponentielles et les logarithmiques, les exposants, lorsque la variable est infinie, pouvant être considérés comme infinis dans les exponentielles, finis dans les quantités algébriques, et infiniment petits dans les quantités logarithmiques.

On peut encore établir en principe qu'une fonction radicale d'une variable ne peut pas être identique avec une fonction rationnelle de la même variable ou avec une autre fonction radicale. Ainsi $(1 + x^3)^{\frac{1}{2}}$ est essentiellement distinct de $(1 + x^3)^{\frac{4}{3}}$ et de $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$.

Ces principes, fondés sur la nature même des fonctions, peuvent être d'une grande utilité dans les recherches analytiques, en indiquant les formes dont les fonctions que l'on se propose de trouver sont susceptibles, et en démontrant leur impossibilité dans un grand nombre de cas; mais alors il faut être bien sûr de n'omettre aucune des formes possibles. Ainsi la différentiation laissant subsister les quantités exponentielles et radicales, et ne faisant disparaître les quantités logarithmiques qu'autant qu'elles sont multipliées par des constantes, on doit en conclure que l'intégrale d'une fonction différentielle ne peut renfermer d'autres quantités exponentielles et radicales que celles qui sont contenues dans cette fonction. Par ce moyen, j'ai reconnu que l'on ne peut pas obtenir en fonction finie, explicite ou implicite, de la variable x, l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \alpha x^2 + \varepsilon x^4}}$. J'ai démontré pareillement que les équations linéaires aux différences partielles du second ordre entre trois variables ne sont pas, le plus souvent, susceptibles d'être intégrées sous une forme finie, ce qui m'a conduit à une méthode générale pour les intégrer sous cette forme, lorsqu'elle est possible. Dans les autres cas, on ne peut obtenir une intégrale finie qu'au moyen d'intégrales définies.

Leibnitz ayant adapté au Calcul différentiel une caractéristique très commode, il imagina de lui donner les mêmes exposants qu'aux grandeurs; mais alors ces exposants, au lieu d'indiquer les multiplications répétées d'une même grandeur, indiquent les différentiations répétées d'une même fonction. Cette extension nouvelle de la notation cartésienne conduisit Leibnitz à ce théorème remarquable, savoir, que la différentielle $n^{\text{ième}}$ d'un produit $xyz\ldots$ est égale à $(dx + dy + dz + \ldots)^n$,

pourvu que, dans le développement de ce polynôme, on applique à la caractéristique d les exposants des puissances de dx, dy, dz, ..., et qu'ainsi l'on écrive $d^r x\, d^{r'} y\, d^{r''} z \ldots$, au lieu de $(dx)^r (dy)^{r'} (dz)^{r''} \ldots$, en ayant soin de changer $d^n x$, $d^n y$, $d^n z$, ..., en x, y, z, ... Ce grand géomètre observa de plus que ce théorème subsiste en y supposant n négatif, pourvu que l'on change les différentielles négatives en intégrales. Lagrange a suivi cette analogie singulière des puissances et des différences dans tous ses développements, et, par une suite d'inductions très fines et très heureuses, il en a déduit des formules générales aussi curieuses qu'utiles, sur les transformations des différences et des intégrales les unes dans les autres, lorsque les variables ont des accroissements finis divers, et lorsque ces accroissements sont infiniment petits. Son Mémoire sur cet objet, inséré dans le Recueil de l'Académie de Berlin pour l'année 1772, peut être regardé comme une des plus belles applications que l'on ait faites de la méthode des inductions. La théorie des fonctions génératrices étend à des caractéristiques quelconques la notation cartésienne; elle montre en même temps avec évidence l'analogie des puissances et des opérations indiquées par ces caractéristiques, et nous allons voir tout ce qui concerne les séries et l'intégration des équations linéaires aux différences en découler avec une extrême facilité.

CHAPITRE PREMIER.

DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES A UNE VARIABLE.

2. Soit y_x une fonction quelconque de x; si l'on forme la suite infinie

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \ldots + y_x t^x + y_{x+1} t^{x+1} + \ldots + y_\infty t^\infty,$$

on peut toujours concevoir une fonction de t qui, développée suivant les puissances de t, donne cette suite : cette fonction est ce que je nomme *fonction génératrice* de y_x.

La fonction génératrice d'une variable quelconque y_x est donc généralement une fonction de t qui, développée suivant les puissances de t, a cette variable pour coefficient de t^x; et réciproquement, la variable correspondante d'une fonction génératrice est le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction suivant les puissances de t; en sorte que l'exposant de la puissance de t indique le rang que la variable y_x occupe dans la série, que l'on peut concevoir prolongée indéfiniment à gauche, relativement aux puissances négatives de t.

Il suit de ces définitions que, u étant la fonction génératrice de y_x, celle de y_{x+r} est $\frac{u}{t^r}$; car il est visible que le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^r}$ est égal à celui de t^{x+r} dans u; par conséquent il est égal à y_{x+r}.

Le coefficient de t^x dans $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ est donc égal à $y_{x+1} - y_x$, ou à la différence des deux quantités consécutives y_{x+1} et y_x, différence que nous désignerons par Δy_x, Δ étant la caractéristique des différences finies. On a donc la fonction génératrice de la différence finie d'une quantité variable, en multipliant par $\frac{1}{t} - 1$ la fonction génératrice de

la quantité elle-même. La fonction génératrice de la différence finie de Δy_x, différence que l'on désigne par $\Delta^2 y_x$, est ainsi $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$; celle de la différence finie de $\Delta^2 y_x$, ou $\Delta^3 y_x$, est $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^3$, d'où l'on peut généralement conclure que la fonction génératrice de la différence finie $\Delta^i y_x$ est $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$.

Pareillement, le coefficient de t^x dans le développement de

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\frac{e}{t^3}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)$$

est

$$ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}+ey_{x+3}+\ldots+qy_{x+n};$$

en nommant donc ∇y_x cette quantité, sa fonction génératrice sera

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right).$$

Si l'on nomme $\nabla^2 y_x$ ce que devient ∇y_x lorsqu'on y change y_x dans ∇y_x; si l'on nomme pareillement $\nabla^3 y_x$ ce que devient $\nabla^2 y_x$ lorsqu'on y change ∇y_x dans $\nabla^2 y_x$, et ainsi de suite, leurs fonctions génératrices correspondantes seront

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^2,$$

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et généralement la fonction génératrice de $\nabla^i y_x$ sera

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^i.$$

De là il est facile de conclure généralement que la fonction génératrice de $\Delta^i \nabla^i y_{x+r}$ est

$$\frac{u}{t^r}\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^i\left(\frac{1}{t}-1\right)^i.$$

On peut généraliser encore ces résultats, en supposant que ∇y_x repré-

sente une fonction quelconque linéaire, finie ou infinie, de y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, ...; que $\nabla^2 y_x$ soit ce que devient ∇y_x lorsqu'on y change y_x dans ∇y_x; que $\nabla^3 y_x$ soit ce que devient $\nabla^2 y_x$ lorsqu'on y change ∇y_x dans $\nabla^2 y_x$, et ainsi de suite; u étant la fonction génératrice de y_x, us^i sera la fonction génératrice de $\nabla^i y_x$, s étant ce que devient ∇y_x, lorsqu'on y change y_x dans l'unité, y_{x+1} dans $\frac{1}{t}$, y_{x+2} dans $\frac{1}{t^2}$, ... Cela est encore vrai lorsque i est un nombre négatif ou même fractionnaire et incommensurable, en faisant toutefois à ce résultat des modifications convenables.

Représentons par Σ la caractéristique des intégrales finies, et nommons z la fonction génératrice de $\Sigma^i y_x$, u étant la fonction génératrice de y_x; $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$ sera, par ce qui précède, la fonction génératrice de y_x. Mais cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives de t, se réduire à u, qui ne renferme que des puissances positives de t, si l'on n'étend l'intégrale multiple $\Sigma_i y_x$ qu'aux valeurs positives de x; on aura donc alors

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^i=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}+\ldots+\frac{F}{t^i},$$

d'où l'on tire

$$z=\frac{ut^i+At^{i-1}+Bt^{i-2}+Ct^{i-3}+\ldots+F}{(1-t)^i},$$

A, B, C, ..., F étant des constantes arbitraires qui répondent aux i constantes arbitraires qu'introduisent les i intégrations successives de $\Sigma^i y_x$.

En faisant abstraction de ces constantes, la fonction génératrice de $\Sigma^i y_x$ est $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-i}$; en sorte que l'on obtient cette fonction génératrice en changeant i dans $-i$ dans la fonction génératrice de $\Delta^i y_x$: $\Delta^{-i} y_x$ est donc alors égale à $\Sigma^i y_x$, c'est-à-dire que les différences négatives se changent en intégrales. Mais, si l'on a égard aux constantes arbitraires, il faut, en passant des puissances positives de $\frac{1}{t}-1$ à ses puissances négatives, augmenter u de la série $\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}+\ldots$, prolongée jusqu'à ce que le nombre de ses termes soit égal à l'exposant

de ces puissances. On peut appliquer des considérations semblables à la fonction génératrice de $\nabla^i y_x$.

On voit par ce qui précède de quelle manière les fonctions génératrices se forment de la loi des variables correspondantes. Voyons maintenant comment les variables se déduisent de leurs fonctions génératrices; s étant une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, si l'on développe s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, et que l'on désigne par $\frac{k}{t^n}$ un terme quelconque de ce développement, le coefficient de t^x dans $\frac{ku}{t^n}$ sera ky_{x+n}; on aura donc le coefficient de t^x dans us^i, coefficient que nous avons désigné précédemment par $\nabla^i y_x$: 1° en substituant dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$; 2° en développant ce que devient alors s^i suivant les puissances de y_x, et en transportant à l'indice x l'exposant de la puissance de y_x, c'est-à-dire en écrivant y_{x+i} au lieu de $(y_x)^i$, y_{x+2} au lieu de $(y_x)^2$, etc., et en multipliant les termes indépendants de y_x, et qui peuvent être censés avoir $(y_x)^0$ pour facteur, par y_x. Lorsque la caractéristique ∇ se change en Δ, s est, par ce qui précède, égal à $\frac{1}{t} - 1$; on a donc alors

$$\Delta^i y_x = y_{x+i} - iy_{x+i-1} + \frac{i(i-1)}{1.2} y_{x+i-2} - \ldots.$$

Si, au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$, et que l'on désigne par $k\left(\frac{1}{t} - 1\right)_i^n$ un terme quelconque de ce développement, le coefficient de t^x dans $ku\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$ sera $k\Delta^n y_x$; on aura donc $\nabla^i y_x$: 1° en substituant, dans s, Δy_x au lieu de $\frac{1}{t} - 1$, ou, ce qui revient au même, $1 + \Delta y_x$ au lieu de $\frac{1}{t}$; 2° en développant ce que devient alors s^i suivant les puissances de Δy_x, et en appliquant à la caractéristique Δ les exposants des puissances de Δy_x, c'est-à-dire en écrivant Δy_x au lieu de $(\Delta y_x)^1$, $\Delta^2 y_x$ au lieu de $(\Delta y_x)^2$, etc., et en multipliant par $(\Delta y_x)^0$, ou, ce qui est la même chose, par y_x les termes indépendants de Δy_x.

Généralement, si l'on considère s comme une fonction de r, r étant une fonction de $\frac{1}{t}$, telle que le coefficient de t_x dans ur soit $\square y_x$, on aura $\nabla^i y_x$, en substituant, dans s, $\square y_x$, au lieu de r; en développant ensuite s^i suivant les puissances de $\square y_x$ et en appliquant à la caractéristique $\square$ les exposants de $\square y_x$, c'est-à-dire en écrivant $\square y_x$ au lieu de $(\square y_x)$, $\square^2 y_x$ au lieu de $(\square y_x)^2$, etc., et en multipliant par y_x les termes indépendants de $\square y_x$.

Le développement de $\nabla^i y_x$ par une série ordonnée suivant les variations successives $\square y_x$, $\square^2 y_x$, etc., se réduit donc à la formation de la fonction génératrice de y_x, au développement de cette fonction suivant les puissances d'une fonction donnée; enfin, au retour de la fonction génératrice ainsi développée, aux coefficients variables correspondants, les exposants des puissances du développement de la fonction génératrice devenant ceux de la caractéristique de ces coefficients. On voit ainsi l'analogie des puissances avec les différences, ou avec toute autre combinaison des coefficients variables consécutifs. Le passage de ces coefficients à leurs fonctions génératrices, et le retour de ces fonctions développées aux coefficients constituent le *Calcul des fonctions génératrices*. Les applications suivantes en feront connaître l'esprit et les avantages.

De l'interpolation des suites à une variable, et de l'intégration des équations différentielles linéaires.

3. Toute la théorie de l'interpolation des suites se réduit à déterminer, quel que soit i, la valeur de y_{x+i} en fonction des termes qui précèdent ou qui suivent y_x. Pour cela, on doit observer que y_{x+i} est égal au coefficient de t_{x+i} dans le développement de u, et par conséquent égal au coefficient de t^x dans le développement de $\frac{u}{t^i}$; or on a

$$\frac{u}{t^i} = u\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i = u\left\{1 + i\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{i(i-1)}{1.2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \ldots\right\}.$$

De plus, le coefficient de t^x, dans le développement de u, est y_x; ce coefficient dans le développement de $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ est Δy_x; dans le développement de $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$, il est égal à $\Delta^2 y_x$, et ainsi de suite; l'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x+i}=y_x+i\Delta y_x+\frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 y_x+\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_x+\ldots.$$

Cette équation, ayant lieu quel que soit i, en le supposant même fractionnaire, sert à interpoler les suites dont les différences successives vont en décroissant.

Si l'on a l'équation aux différences finies

$$\Delta^n y_x=0,$$

la série précédente se termine, et l'on a, quel que soit i, en faisant x nul,

$$y_i=y_0+i\Delta y_0+\frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{i(i-1)\ldots(i-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\Delta^{n-1}y_0.$$

C'est l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences, y_0, Δy_0, $\ldots$, $\Delta^{n-1}y_0$ étant les n constantes arbitraires de cette intégrale.

Toutes les manières de développer la puissance $\frac{1}{t^i}$ donnent autant de manières différentes d'interpoler les suites. Soit, par exemple,

$$\frac{1}{t}=1+\frac{\alpha}{t^r};$$

en développant $\frac{1}{t^i}$ suivant les puissances de α, par la formule (p) du n° **21** du second livre de la *Mécanique céleste*, on aura

$$\frac{u}{t^i}=u\left\{1+i\alpha+\frac{i(i+2r-1)}{1.2}\alpha^2+\frac{i(i+3r-1)(i+3r-2)}{1.2.3}\alpha^3+\frac{i(i+4r-1)(i+4r-2)(i+4r-3)}{1.2.3.4}\alpha^4+\ldots\right\}.$$

x étant égal à $t^r\left(\frac{1}{t}-1\right)$, le coefficient de t^x dans le développement de ux est, par le n° **2**, Δy_{x-r}; ce même coefficient dans ux^2 est $\Delta^2 y_{x-2r}$, et ainsi de suite. L'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x+i}=y_x+i\Delta y_{x-r}+\frac{i(i+2r-1)}{1.2}\Delta^2 y_{x-2r}+\frac{i(i+3r-1)(i+3r-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_{x-3r}+\ldots.$$

4. Voici maintenant une méthode générale d'interpolation, qui a l'avantage de s'appliquer, non seulement aux séries dont les différences des termes finissent par être nulles, mais encore aux séries dont la dernière raison des termes est celle d'une suite quelconque récurrente.

Supposons d'abord que l'on ait

$$t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2=z, \tag{1}$$

et cherchons la valeur de $\frac{1}{t^i}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z. Il est clair que $\frac{1}{t^i}$ est égal au coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$. Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $1-\theta t$, on aura celle-ci

$$\frac{1-\theta t}{1-\theta\left(\frac{1}{t}+t\right)+\theta^2}.$$

L'équation (1) donne

$$\frac{1}{t}+t=2+z,$$

ce qui change la fraction précédente dans celle-ci,

$$\frac{1-\theta t}{(1-\theta)^2-z\theta};$$

or on a

$$\frac{1}{(1-\theta)^2-z\theta}=\frac{1}{(1-\theta)^2}+\frac{z\theta}{(1-\theta)^3}+\frac{z^2\theta^2}{(1-\theta)^4}+\ldots;$$

d'ailleurs le coefficient de θ^r dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^s}$ est

$$\frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+r-1)}{1.2.3\ldots r},$$

d'où il suit que le coefficient de θ^i est : 1° $i+1$ dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^2}$; 2° $\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}$ dans le développement de $\frac{\theta}{(1-\theta)^3}$; 3° $\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4.5}$ dans le développement de $\frac{\theta^2}{(1-\theta)^4}$, et ainsi du reste; donc, si l'on nomme Z le coefficient de θ^i dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{(1-\theta)^2-z\theta},$$

on aura

$$Z=i+1+\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}z+\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4.5}z^2$$
$$+\frac{(i-2)(i-1)(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}{1.2.3.4.5.6.7}z^3+\ldots,$$

ou

$$Z=(i+1)\left\{1+\frac{[(i+1)^2-1]z}{1.2.3}+\frac{[(i+1)^2-1][(i+1)^2-4]z^2}{1.2.3.4.5}+\ldots\right\};$$

si l'on nomme ensuite Z′ le coefficient de θ^i dans le développement de

$$\frac{\theta}{(1-\theta)^2-z\theta},$$

on aura Z′ en changeant i en $i-1$ dans Z, ce qui donne

$$Z'=i\left[1+\frac{(i^2-1)z}{1.2.3}+\frac{(i^2-1)(i^2-4)z^2}{1.2.3.4.5}+\ldots\right].$$

on aura ainsi $Z-tZ'$ pour le coefficient de θ^i dans le développement de la fraction

$$\frac{1-\theta t}{(1-\theta)^2-z\theta};$$

ce sera par conséquent l'expression de $\frac{1}{t^i}$; partant,

$$\frac{u}{t^i}=u(Z-tZ').$$

Cela posé, le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^i}$ est y_{x+i}. Ce même coefficient, dans un terme quelconque de uZ tel que kuz^r ou $kut^r\left(\frac{1}{t}-1\right)^{2r}$, est, par le n° 2, $k\Delta^{2r}y_{x-r}$. Dans un terme quelconque de utZ', tel que $kutz^r$ ou $kut^{r+1}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{2r}$, ce coefficient est $k\Delta^{2r}y_{x-r-1}$; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$y_{x+i}=(i+1)\left\{\begin{array}{l}y_x+\frac{(i+1)^2-1}{1.2.3}\Delta^2y_{x-1}\\ \quad+\frac{[(i+1)^2-1][(i+1)^2-4]}{1.2.3.4.5}\Delta^4y_{x-2}+\ldots\end{array}\right\}$$
$$-i\left[y_{x-1}+\frac{i^2-1}{1.2.3}\Delta^2y_{x-2}+\frac{(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^4y_{x-3}+\ldots\right].$$

On peut donner les formes suivantes à l'expression précédente. Soit Z″ ce que devient Z′ lorsqu'on y change i dans $i-1$, et par conséquent ce que devient Z lorsqu'on y change i dans $i-2$. L'équation

$$\frac{1}{t^i}=Z-tZ'$$

donnera

$$\frac{1}{t^{i-1}}=Z'-tZ'';$$

par conséquent,

$$\frac{1}{t^i}=\frac{Z'}{t}-Z''.$$

En ajoutant ces deux valeurs de $\frac{1}{t^i}$ et prenant la moitié de leur somme,

on aura

$$\frac{1}{t^i} = \tfrac{1}{2}Z - \tfrac{1}{2}Z'' + \tfrac{1}{2}(1+t)\left(\frac{1}{t}-1\right)Z';$$

or on a

$$\tfrac{1}{2}Z - \tfrac{1}{2}Z'' = 1 + \frac{i^2}{1.2}z + \frac{i^2(i^2-1)}{1.2.3.4}z^2 + \frac{i^2(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6}z^3 + \ldots;$$

partant,

$$\frac{u}{t^i} = u\left[1 + \frac{i^2}{1.2}t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + \frac{i^2(i^2-1)}{1.2.3.4}t^2\left(\frac{1}{t}-1\right)^4 + \ldots\right] + \frac{i}{2}u(1+t)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{t}-1+\frac{i^2-1}{1.2.3}t\left(\frac{1}{t}-1\right)^3 \\ \quad + \frac{(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5}t^2\left(\frac{1}{t}-1\right)^5 + \ldots\end{array}\right\};$$

d'où l'on conclut, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\begin{aligned} y_{x+i} = {} & y_x + \frac{i^2}{1.2}\Delta^2 y_{x-1} + \frac{i^2(i^2-1)}{1.2.3.4}\Delta^4 y_{x-2} \\ & + \frac{i^2(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6}\Delta^6 y_{x-3} + \ldots \\ & + \frac{i}{2}(\Delta y_x + \Delta y_{x-1}) + \frac{i}{2}\frac{i^2-1}{1.2.3}(\Delta^3 y_{x-1} + \Delta^3 y_{x-2}) \\ & + \frac{i}{2}\frac{(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5}(\Delta^5 y_{x-2} + \Delta^5 y_{x-3}) + \ldots. \end{aligned}$$

Cette formule sert à interpoler entre un nombre impair $2x+1$ de quantités équidistantes; l'intervalle commun qui les sépare étant pris pour unité, y_x est la moyenne des grandeurs $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2x}$, et i est la distance de y_{x+i} à cette moyenne. L'expression précédente est alors symétrique relativement à ces grandeurs; car $\Delta^2 y_{x-1}$, par exemple, est égal à $y_{x+1} - 2y_x + y_{x-1}$, et $\Delta y_x + \Delta y_{x-1}$ est égal à $y_{x+1} - y_{x-1}$. Ainsi les quantités placées au-dessus et au-dessous de la moyenne y_x entrent de la même manière dans cette expression.

Si l'on change i en $i+1$ dans la dernière expression de $\frac{u}{t^i}$, et si l'on en retranche cette expression elle-même, on aura l'expression de

$\frac{u}{t^{i+1}} - \frac{u}{t^i}$ ou de $\frac{u}{t^i}\left(\frac{1}{t}-1\right)$; en divisant ensuite cette valeur par $\frac{1}{t}-1$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{u}{t^i} = {} & \frac{u}{2}(1+t)\left\{\begin{array}{l}1 + \frac{(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}{1.2}t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 \\ \quad + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}][(i+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{1.2.3.4}t^2\left(\frac{1}{t}-1\right)^4 + \ldots\end{array}\right\} \\ & + (i+\tfrac{1}{2})ut\left(\frac{1}{t}-1\right)\left\{\begin{array}{l}1 + \frac{(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}{1.2.3}t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 \\ \quad + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}][(i+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{1.2.3.4.5}t^2\left(\frac{1}{t}-1\right)^4 + \ldots\end{array}\right\}. \end{aligned}$$

En repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$\begin{aligned} y_{x+i} = {} & \tfrac{1}{2}(y_x + y_{x-1}) + \frac{(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}{1.2}\tfrac{1}{2}(\Delta^2 y_{x-1} + \Delta^2 y_{x-2}) \\ & + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}][(i+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{1.2.3.4}\tfrac{1}{2}(\Delta^4 y_{x-2} + \Delta^4 y_{x-3}) + \ldots \\ & + (i+\tfrac{1}{2})\left\{\begin{array}{l}\Delta y_{x-1} + \frac{(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}{1.2.3}\Delta^3 y_{x-2} \\ \quad + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}][(i+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{1.2.3.4.5}\Delta^5 y_{x-3} + \ldots\end{array}\right\}. \end{aligned}$$

Cette formule sert à interpoler entre un nombre pair $2x$ de quantités équidistantes, y_x et y_{x+1} étant les deux quantités moyennes. Elle est disposée d'une manière symétrique relativement aux quantités également distantes du milieu de l'intervalle qui sépare les quantités extrêmes : ce milieu est l'origine des valeurs de $i+\frac{1}{2}$, qui sont positives au-dessus et négatives au-dessous.

Toutes ces expressions de y_{x+i} sont identiques et telles que, si l'on conçoit une courbe parabolique dont i soit l'abscisse et y_{x+i} l'ordonnée, et dont l'équation soit celle qui donne l'expression de y_{x+i}, cette courbe passera par les extrémités des ordonnées $y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x-1}, y_{x-2}, \ldots$. On peut ainsi, en prenant les différences finies successives d'un nombre quelconque de coordonnées, faire passer une courbe parabolique par les extrémités de ces coordonnées.

5. Supposons généralement

$$(a) \qquad z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \ldots + \frac{p}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n};$$

on aura

$$\frac{1}{t^n} = \frac{z-a}{q} - \frac{b}{qt} - \frac{c}{qt^2} - \ldots - \frac{p}{qt^{n-1}},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^{n+1}} = \frac{z-a}{qt} - \frac{b}{qt^2} - \frac{c}{qt^3} - \ldots - \frac{p}{qt^n};$$

éliminant $\frac{1}{t^n}$ du second membre de cette équation au moyen de la proposée (a), on aura

$$\frac{1}{t^{n+1}} = -\frac{p(z-a)}{q^2} + \frac{pb+q(z-a)}{q^2 t} + \ldots$$

Cette expression de $\frac{1}{t^{n+1}}$ ne renferme que des puissances de $\frac{1}{t}$ d'un ordre inférieur à n. En la multipliant par $\frac{1}{t}$, on aura une expression de $\frac{1}{t^{n+2}}$, qui renfermera la puissance $\frac{1}{t^n}$; mais, en éliminant encore cette puissance au moyen de la proposée (a), on réduira l'expression de $\frac{1}{t^{n+2}}$ à ne contenir que des puissances de $\frac{1}{t}$ inférieures à n. En continuant ainsi, on parviendra à une expression de $\frac{1}{t^i}$, qui ne renfermera que des puissances de $\frac{1}{t}$ moindres que n, et qui sera par conséquent de la forme

$$\frac{1}{t^i} = \mathrm{Z} + \frac{1}{t}\mathrm{Z}^{(1)} + \frac{1}{t^2}\mathrm{Z}^{(2)} + \ldots + \frac{1}{t^{n-1}}\mathrm{Z}^{(n)},$$

Z, $\mathrm{Z}^{(1)}$, $\mathrm{Z}^{(2)}$, ... étant des fonctions rationnelles et entières de z, dans lesquelles la plus haute puissance de z ne surpasse pas $\frac{i}{n}$.

Cette manière de déterminer $\frac{1}{t^i}$ serait très pénible si i était un grand nombre; elle conduirait d'ailleurs difficilement à l'expression générale de cette quantité. On y parviendra directement de la manière suivante.

$\frac{1}{t^i}$ est égal au coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$. Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par

$$(a-z)\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q,$$

et si dans le numérateur on substitue au lieu de z sa valeur $a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots$, on aura

$$\frac{b\theta^{n-1}\left(1-\frac{\theta}{t}\right) + c\theta^{n-2}\left(1-\frac{\theta^2}{t^2}\right) + e\theta^{n-3}\left(1-\frac{\theta^3}{t^3}\right) + \ldots + q\left(1-\frac{\theta^n}{t^n}\right)}{\left(1-\frac{\theta}{t}\right)\left(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n\right)};$$

en divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $1-\frac{\theta}{t}$, elle devient

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} + \ldots + q \\ + \frac{\theta}{t}\left(c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} + \ldots + q\right) \\ + \frac{\theta^2}{t^2}\left(e\theta^{n-3} + \ldots + q\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t^{n-1}}q \end{array}\right\}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n}.$$

La recherche du coefficient de θ^i dans le développement de cette fraction se réduit à déterminer, quel que soit r, le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction

$$\frac{1}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n}.$$

Pour cela, considérons généralement la fraction $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, P et Q étant des fonctions rationnelles et entières de θ, la première étant d'un ordre inférieur à la seconde. Supposons que Q ait un facteur $\theta - \alpha$ élevé à la

puissance s, en sorte que l'on ait

$$Q = (\vartheta - \alpha)^s R,$$

R étant une fonction rationnelle et entière de ϑ. On pourra décomposer la fraction $\frac{P}{Q}$ en deux autres $\frac{A}{(\vartheta-\alpha)^s} + \frac{B}{R}$, A et B étant des fonctions rationnelles et entières de ϑ, la première de l'ordre $s-1$, et la seconde d'un ordre inférieur à celui de R; car il est visible qu'en substituant pour A et B des fonctions de cette nature, avec des coefficients indéterminés, en réduisant ensuite les deux fractions au même dénominateur, qui devient alors égal à Q, en égalant enfin la somme de leurs numérateurs à P, la comparaison des puissances semblables de ϑ donnera autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés. Cela posé, l'équation

$$\frac{A}{(\vartheta-\alpha)^s} + \frac{B}{R} = \frac{P}{(\vartheta-\alpha)^s R}$$

donne

$$A = \frac{P}{R} - \frac{B(\vartheta-\alpha)^s}{R}.$$

Si l'on considère A, B, P et R comme des fonctions rationnelles et entières de $\vartheta - \alpha$, A sera une fonction de l'ordre $s-1$, et par conséquent il sera égal au développement de $\frac{P}{R}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de $\vartheta - \alpha$, pourvu que l'on s'arrête à la puissance $s-1$ inclusivement. Soit donc

$$\frac{P}{R} = u_0 + u_1(\vartheta-\alpha) + u_2(\vartheta-\alpha)^2 + \ldots;$$

on aura

$$\frac{A}{(\vartheta-\alpha)^s} = \frac{u_0}{(\vartheta-\alpha)^s} + \frac{u_1}{(\vartheta-\alpha)^{s-1}} + \frac{u_2}{(\vartheta-\alpha)^{s-2}} + \ldots,$$

en rejetant les puissances positives de $\vartheta - \alpha$; $\frac{A}{(\vartheta-\alpha)^s}$ est, par conséquent, égal au coefficient de t^{s-1} dans le développement de la fonction

$$\frac{u_0 + u_1 t + u_2 t + \ldots}{\vartheta - \alpha - t}.$$

Si l'on nomme P′ et R′ ce que deviennent P et R lorsqu'on y change $\vartheta - \alpha$ en t, ou, ce qui revient au même, ϑ en $t + \alpha$, on aura

$$\frac{P'}{R'} = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots;$$

partant, $\frac{A}{(\vartheta-\alpha)^s}$ est égal au coefficient de t^{s-1} dans le développement de

$$\frac{P'}{R'(\vartheta - \alpha - t)};$$

il est donc égal à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \frac{P'}{R'(\vartheta-\alpha-t)},$$

pourvu que l'on suppose t nul après les différentiations. Maintenant le coefficient de ϑ^r dans

$$\frac{P'}{R'(\vartheta-\alpha-t)}$$

étant égal à

$$-\frac{P'}{R'(\alpha+t)^{r+1}},$$

ce même coefficient dans

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \frac{P'}{R'(\vartheta-\alpha-t)}$$

sera

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \frac{P'}{R'(\alpha+t)^{r+1}};$$

t étant supposé nul après les différentiations; cette dernière quantité est donc le coefficient de ϑ^r dans le développement de $\frac{A}{(\vartheta-\alpha)^s}$. Si l'on restitue, dans P′ et R′, $\vartheta - \alpha$ au lieu de t, ce qui les change en P et R, on aura

$$\frac{d^{s-1}\frac{P'}{R'(\alpha+t)^{r+1}}}{dt^{s-1}} = \frac{d^{s-1}\frac{P}{R\vartheta^{r+1}}}{d\vartheta^{s-1}},$$

pourvu que l'on suppose $\vartheta = \alpha$ après les différentiations, dans le second

membre de cette équation; la fonction

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)}\frac{d^{s-1}}{d\theta^{s-1}}\frac{P}{R\theta^{r+1}}$$

est donc, avec cette condition, le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{A}{(\theta-\alpha)^s}$.

Il suit de là que, si l'on suppose

$$Q=a(\theta-\alpha)^s(\theta-\alpha')^{s'}(\theta-\alpha'')^{s''}\ldots,$$

le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{P}{Q}$ sera

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)}\frac{d^{s-1}}{d\theta^{s-1}}\frac{P}{a\theta^{r+1}(\theta-\alpha')^{s'}(\theta-\alpha'')^{s''}\ldots}$$
$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s'-1)}\frac{d^{s'-1}}{d\theta^{s'-1}}\frac{P}{a\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^{s}(\theta-\alpha'')^{s''}\ldots}$$
$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s''-1)}\frac{d^{s''-1}}{d\theta^{s''-1}}\frac{P}{a\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^{s}(\theta-\alpha')^{s'}\ldots}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en faisant $\theta=\alpha$ dans le premier terme, $\theta=\alpha'$ dans le second terme, $\theta=\alpha''$ dans le troisième terme, et ainsi de suite.

Maintenant, soit

$$V=a(\theta-\alpha)(\theta-\alpha')(\theta-\alpha'')\ldots.$$

En développant la fraction

$$\frac{1}{V-z\theta^n}$$

dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z, on aura

$$\frac{1}{V}+\frac{z\theta^n}{V^2}+\frac{z^2\theta^{2n}}{V^3}+\frac{z^3\theta^{3n}}{V^4}+\ldots;$$

le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{1}{V^s}$ est, par ce

qui précède, égal à

$$(o)\qquad -\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)a^s}\frac{d^{s-1}}{d\theta^{s-1}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha')^s(\theta-\alpha'')^s\ldots}\\ +\dfrac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^s(\theta-\alpha'')^s\ldots}\\ +\dfrac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^s(\theta-\alpha')^s\ldots}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

pourvu qu'après les différentiations on suppose $\theta=\alpha$ dans le premier terme, $\theta=\alpha'$ dans le second terme, $\theta=\alpha''$ dans le troisième terme, etc. S'il n'y a qu'un seul facteur $\theta-\alpha$, la fonction renfermée entre les deux parenthèses se réduit à $\frac{1}{\theta^{r+1}}$, θ devant être changé en α après les différentiations, ce qui réduit la quantité (o) à

$$(-1)^s\frac{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots(r+s-1)}{1.2.3\ldots(s-1)a^s}\frac{1}{\alpha^{r+s}}.$$

Si dans l'expression de V quelques-uns des facteurs $\theta-\alpha$, $\theta-\alpha'$, ... sont élevés à des puissances plus hautes que l'unité; par exemple, si $\theta-\alpha$ est élevé à la puissance m, il sera élevé à la puissance $-ms$ dans $\frac{1}{V^s}$, et alors il faut changer le premier terme de la quantité (o) dans le suivant :

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(ms-1)a^s}\frac{d^{ms-1}}{d\theta^{ms-1}}\frac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha')^s(\theta-\alpha'')^s\ldots},$$

et dans les autres termes, il faut changer $(\theta-\alpha)^s$ dans $(\theta-\alpha)^{ms}$.

Représentons généralement par $Z_r^{(s-1)}$ la quantité (o); le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{1}{V-z\theta^n}$ sera

$$Z_t^{(0)}+Z_{t-n}^{(1)}z+Z_{t-2n}^{(2)}z^2+Z_{t-3n}^{(3)}z^3+\ldots;$$

on aura donc, pour le coefficient de θ^r dans le développement de la

deuxième fraction de la page 19, ou pour la valeur de $\frac{1}{t^i}$,

$$
(A)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{t^i} = b[Z^{(0)}_{i-n+1} + zZ^{(1)}_{i-2n+1} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+1} + z^3Z^{(3)}_{i-4n+1} + \dots] \\
\quad + c[Z^{(0)}_{i-n+2} + zZ^{(1)}_{i-2n+2} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+2} + z^3Z^{(3)}_{i-4n+2} + \dots] \\
\quad + e[Z^{(0)}_{i-n+3} + zZ^{(1)}_{i-2n+3} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+3} + z^3Z^{(3)}_{i-4n+3} + \dots] \\
\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\quad + \dfrac{1}{t}\left\{\begin{array}{l} c[Z^{(0)}_{i-n+1} + zZ^{(1)}_{i-2n+1} + z_1Z^{(2)}_{i-3n+1} + \dots] \\ + e[Z^{(0)}_{i-n+2} + zZ^{(1)}_{i-2n+2} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+2} + \dots] \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \\
\quad + \dfrac{1}{t^2}\left\{\begin{array}{l} e[Z^{(0)}_{i-n+1} + zZ^{(1)}_{i-2n+1} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+1} + \dots] \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \\
\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\quad + \dfrac{1}{t^{n-1}}q[Z^{(0)}_{i-n+1} + zZ^{(1)}_{i-2n+1} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+1} + \dots].
\end{array}\right.
$$

Présentement, si l'on désigne par ∇y_x la quantité

$$ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \dots + qy_{x+n},$$

par $\nabla^2 y_x$ ce que devient ∇y_x lorsqu'on y change y_x dans ∇y_x, par $\nabla^3 y_x$ ce que devient $\nabla^2 y_x$ lorsqu'on y change ∇y_x dans $\nabla^2 y_x$, et ainsi de suite, il est visible, par le n° 2, que le coefficient de t^x dans le développement de $\frac{uz^i}{t^r}$ sera $\nabla^r y_{x+r}$; en multipliant donc l'équation précédente par u et en ne considérant dans chaque terme que le coefficient de t^x, c'est-à-dire en repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$
(B)\quad \left\{\begin{array}{l}
y_{x+i} = y_x\ [bZ^{(0)}_{i-n+1} + cZ^{(0)}_{i-n+2} + eZ^{(0)}_{i-n+3} + \dots + qZ^{(0)}_i] \\
\quad + \nabla y_x\ [bZ^{(1)}_{i-2n+1} + cZ^{(1)}_{i-2n+2} + eZ^{(1)}_{i-2n+3} + \dots + qZ^{(1)}_{i-n}] \\
\quad + \nabla^2 y_x\ [bZ^{(2)}_{i-3n+1} + cZ^{(2)}_{i-3n+2} + eZ^{(2)}_{i-3n+3} + \dots + qZ^{(2)}_{i-2n}] \\
\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\quad + y_{x+1}\ [cZ^{(0)}_{i-n+1} + eZ^{(0)}_{i-n+2} + \dots + qZ^{(0)}_{i-1}] \\
\quad + \nabla y_{x+1}\ [cZ^{(1)}_{i-2n+1} + eZ^{(1)}_{i-2n+2} + \dots + qZ^{(1)}_{i-n-1}] \\
\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\quad + y_{x+2}\ [eZ^{(0)}_{i-n+1} + \dots + qZ^{(0)}_{i-2}] \\
\quad + \nabla y_{x+2}\ [eZ^{(1)}_{i-2n+1} + \dots + qZ^{(1)}_{i-n-2}] \\
\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\quad + qy_{x+n-1}Z^{(0)}_{i-n+1} + q\nabla y_{x+n-1}Z^{(1)}_{i-2n+1} + q\nabla^2 y_{x+n-1}Z^{(2)}_{i-3n+1} + \dots.
\end{array}\right.
$$

Cette formule servira à interpoler les suites dont la dernière raison des termes est celle d'une suite récurrente; car il est clair que, dans ce cas, ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, ... vont toujours en diminuant et finissent par être nuls dans l'infini.

6. La formule (B) s'arrête lorsque l'on a $\nabla^r y_x = 0$, r étant un nombre entier positif quelconque, et alors l'expression précédente de y_{x+i} devient l'intégrale de l'équation aux différences finies $\nabla^r y_i = 0$, ce qui est analogue à ce qu'on a vu dans le n° 3, relativement à l'équation $\Delta^r y_i = 0$. Supposons $\nabla y_i = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$0 = ay_i + by_{i+1} + cy_{i+2} + \dots + qy_{i+n};$$

si l'on fait x nul dans la formule (B) du numéro précédent, elle devient

$$
\begin{aligned}
y_i = {} & y_0(bZ^{(0)}_{i-n+1} + cZ^{(0)}_{i-n+2} + eZ^{(0)}_{i-n+3} + \dots + qZ^{(0)}_i) \\
& + y_1(cZ^{(0)}_{i-n+1} + eZ^{(0)}_{i-n+2} + \dots + qZ^{(0)}_{i-1}) \\
& + y_2(eZ^{(0)}_{i-n+1} + \dots + qZ^{(0)}_{i-2}) \\
& + \dots\dots\dots\dots \\
& + qy_{n-1}Z^{(0)}_{i-n+1};
\end{aligned}
$$

y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1} sont les n premières valeurs de y_i; ce sont les n constantes arbitraires que l'intégrale de l'équation $\nabla y_i = 0$ introduit.

La valeur de $Z^{(0)}_{i-n+1}$ est égale à

$$-\frac{1}{a\alpha^{i-n+2}(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')\dots} - \frac{1}{a\alpha'^{i-n+2}(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\alpha'')\dots} - \dots.$$

Ainsi, V étant égal à $a(\theta-\alpha)(\theta-\alpha')(\theta-\alpha'')\dots$, le premier de ces termes devient

$$-\frac{\alpha^{n-2}}{\alpha^i}\frac{dV}{d\theta},$$

pourvu que l'on change θ en α dans $\frac{dV}{d\theta}$; en n'ayant donc égard qu'au

terme multiplié par $\frac{1}{\alpha^i}$, l'expression précédente de y_i deviendra

$$y_i = -\frac{1}{\alpha^{i+1}\frac{dV}{d\theta}}\left\{\begin{array}{l} y_0(b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + e\alpha^{n-3} + \ldots + q) \\ + y_1(c\alpha^{n-1} + e\alpha^{n-2} + \ldots + q\alpha) \\ + y_2(e\alpha^{n-1} + \ldots + q\alpha^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + y_{n-1}q\alpha^{n-1} \end{array}\right\}.$$

En changeant successivement, dans le second membre de cette équation, α en α', α'', ..., et réciproquement, on aura autant de termes qui, ajoutés au précédent, formeront l'expression complète de y_i.

Nommons k la fonction comprise entre les deux parenthèses, en sorte que ce second membre soit $-\frac{k}{\alpha^{i+1}\frac{dV}{d\theta}}$. Si les deux racines α et α' sont égales, V sera de cette forme $(\theta-\alpha)^2 L$. On supposera que α et α', au lieu d'être rigoureusement égaux, diffèrent infiniment peu, et que l'on a $\alpha' = \alpha + d\alpha$. Alors la somme des deux termes de y_i relatifs aux racines α et α' sera

$$-\frac{1}{d\alpha}\left(\frac{k'}{\alpha'^{i+1}L'} - \frac{k}{\alpha^{i+1}L}\right),$$

k' étant ce que devient k lorsqu'on y change α en α'; L et L' étant ici ce que devient L lorsqu'on y change θ en α et α'. Cette quantité est donc égale à

$$-\frac{d\frac{k}{\alpha^{i+1}L}}{d\alpha};$$

mais on a

$$L = \frac{1}{2}\frac{d^2V}{d\theta^2},$$

θ devant être changé en α après les différentiations. La somme des termes de l'expression de y_i, relatifs aux deux racines égales, est donc

$$-\frac{1}{1.2}\frac{d}{d\alpha}\frac{k}{\alpha^{i+1}\frac{d^2V}{d\theta^2}}.$$

On trouvera de la même manière que, si V contient trois facteurs égaux, la somme des termes de l'expression de y_i relatifs à ces trois facteurs est

$$-\frac{1}{1.2.1.2.3}\frac{d^2}{d\alpha^2}\frac{k}{\alpha^{i+1}\frac{d^3V}{d\theta^3}},$$

et ainsi de suite. $Z_i^{(\theta)}$ étant, par ce qui précède, le coefficient de θ^i dans le développement de $\frac{1}{V}$, il en résulte que y_i est le coefficient de θ^i dans le développement de la fonction

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} y_0(b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + q) \\ + y_1(c\theta^{n-1} + e\theta^{n-2} + \ldots + q\theta) \\ + y_2(e\theta^{n-1} + \ldots + q\theta^2) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + y_{n-1}q\theta^{n-1} \end{array}\right\}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q}.$$

Cette fonction est donc la fonction génératrice de y_i ou de la variable principale de l'équation aux différences $\nabla y_i = 0$. La formule (B) du numéro précédent donnera pareillement la valeur de y_i ou l'intégrale complète de l'équation aux différences $\nabla^2 y_i = 0$; y^0, ∇y_0, y_1, ..., y_{n-1}, ∇y_{n-1} seront les $2n$ arbitraires de cette intégrale. Le cas des racines égales se résoudra de la même manière que ci-dessus. On aura par la même formule l'intégrale des équations aux différences $\nabla^3 y_i = 0$, $\nabla^4 y_i = 0$, ..., ce qui montre l'analogie qui existe entre l'interpolation des suites et l'intégration des équations aux différences.

Soit $y_i = y_i' + y_i''$, et supposons que u' soit la fonction génératrice de y_i', et u'' celle de y_i'', u étant celle de y_i; on aura $u = u' + u''$. Soit encore

$$u'' = \frac{\lambda}{z^s},$$

z ayant la signification que nous lui avons donnée dans le n° 5, et nommons X_i le coefficient de t^i dans le développement de λ; on aura, par le n° 2,

$$X_i = \nabla^s y_i''.$$

Maintenant on a, par le n° 5,

$$\frac{1}{z^s} = \frac{t^{ns}}{(at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + \ldots + q)^s};$$

or le coefficient de t^i, dans le développement du second membre de cette équation, est égal à celui de θ^{i-ns} dans le développement de

$$\frac{1}{(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + q)^s},$$

et, par le numéro précédent, ce coefficient est égal à $Z^{(s-1)}_{i-ns}$; donc le coefficient de t^i dans le développement de $\frac{\lambda}{z^s}$ sera

$$X_{i-ns}Z^{(s-1)}_0 + X_{i-ns-1}Z^{(s-1)}_1 + X_{i-ns-2}Z^{(s-1)}_2 + \ldots + X_0 Z^{(s-1)}_{i-ns}$$

ou $\Sigma X_r Z^{(s-1)}_{i-ns-r}$, l'intégrale étant prise relativement à r, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = i - ns$; ce sera la valeur de y''_i. Cela posé, si dans la formule (B) du numéro précédent on suppose $\nabla^s y_i = 0$, elle donnera, en observant que $y_i = y'_i + y''_i$,

$$(C)\quad \left\{\begin{array}{l}
y'_i + \Sigma X_r Z^{(s-1)}_{i-ns-r} = y_0\left(bZ^{(0)}_{i-n+1} + cZ^{(0)}_{i-n+2} + \ldots + qZ^{(0)}_i\right)\\
\qquad + \nabla y_0\left(bZ^{(1)}_{i-2n+1} + cZ^{(1)}_{i-2n+2} + \ldots + qZ^{(1)}_{i-n}\right)\\
\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\qquad + \nabla^{s-1} y_0\left(bZ^{(s-1)}_{i-sn+1} + cZ^{(s-1)}_{i-sn+2} + \ldots + qZ^{(s-1)}_{i-sn+n}\right)\\
\qquad + y_1\left(cZ^{(0)}_{i-n+1} + \ldots + qZ^{(0)}_{i-1}\right)\\
\qquad + \nabla y_1\left(cZ^{(1)}_{i-2n+1} + \ldots + qZ_{i-n-1}\right)\\
\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\qquad + \nabla^{s-1} y_1\left(cZ^{(s-1)}_{i-sn+1} + \ldots + qZ_{i-sn+n-1}\right)\\
\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\qquad + qZ^{(0)}_{i-n+1} y_{n-1} + qZ^{(1)}_{i-2n+1}\nabla y_{n-1} + \ldots\\
\qquad + qZ^{(s-1)}_{i-sn+1}\nabla^{s-1} y_{n-1},
\end{array}\right.$$

$y_0, \nabla y_0, \ldots, \nabla^{s-1} y_0, y_1, \nabla y_1, \ldots$ étant les ns arbitraires de l'intégrale de l'équation $\nabla^s y_i = 0$ ou

$$\nabla^s y'_i + \nabla^s y''_i = 0;$$

or, $\nabla^s y''_i$ étant égale à X_i, cette équation devient

$$0 = \nabla^s y'_i + X_i;$$

on aura donc, par la formule précédente, l'intégrale des équations linéaires aux différences finies dont les coefficients sont constants, dans le cas où elles ont un dernier terme fonction de i.

L'intégrale définie relative à $r\,\Sigma X_r Z^{(s-1)}_{i-ns-r}$ peut être facilement transformée dans une suite d'intégrales indéfinies relatives à i; car l'expression générale de $Z^{(s-1)}_{i-ns-r}$ est formée de ns termes de la forme $I r^k \alpha^r$, I étant une fonction de i indépendante de la variable r; l'intégrale précédente est donc composée d'intégrales de la forme $I\Sigma r^k \alpha^r X_r$; cette dernière intégrale devant être prise depuis r nul jusqu'à $r = i - ns$, elle est égale à l'intégrale indéfinie

$$I\Sigma(i-ns)^k \alpha^{i-ns+1} X_{i-ns+1},$$

prise depuis $i = ns$.

7. On peut donner à l'expression de $\frac{1}{t^i}$ une infinité d'autres formes dont plusieurs peuvent être utiles. Donnons-lui, par exemple, cette forme

$$\frac{1}{t^i} = Z^{(0)} + \left(\frac{1}{t} - 1\right)Z^{(1)} + \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 Z^{(2)} + \ldots + \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1} Z^{(n-1)}.$$

On déterminera ainsi les valeurs de $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ... On mettra d'abord l'équation

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots + \frac{q}{t^n}$$

sous cette forme, en y substituant $\left(\frac{1}{t} - 1 + 1\right)^r$ au lieu de $\frac{1}{t^r}$, et développant suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$,

$$z = a' + b'\left(\frac{1}{t} - 1\right) + c'\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \ldots + q\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n,$$

et l'on aura

$$a' = a + b + c + \ldots + q,$$
$$b' = b + 2c + 3e + \ldots + nq,$$
$$c' = c + 3e + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}q,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On multipliera ensuite, comme précédemment, le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$ par

$$(a-z)\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q,$$

en observant de substituer dans le numérateur : 1° au lieu de z,

$$a' + b'\left(\frac{1}{t}-1\right) + c'\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + \ldots;$$

2° au lieu de $a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots$, la quantité

$$\theta^n\left[a' + b'\left(\frac{1}{\theta}-1\right) + c'\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^2 + \ldots\right];$$

si l'on fait de plus, pour abréger,

$$\frac{1}{t}-1 = \frac{1}{t'},$$

on aura

$$\frac{b'\theta^{n-1}\left(1-\theta-\frac{\theta}{t'}\right) + c'\theta^{n-2}\left[(1-\theta)^2 - \frac{\theta^2}{t'^2}\right] + \ldots + q\left[(1-\theta)^n - \frac{\theta^n}{t'^n}\right]}{\left(1-\frac{\theta}{t}\right)(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n)};$$

en divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente par $1-\frac{\theta}{t}$, elle se réduit à celle-ci,

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} \theta^{n-1}\left[b' + c'\left(\frac{1}{\theta}-1\right) + e'\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^2 + \ldots + q\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^{n-1}\right] \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'}\left[c' + e'\left(\frac{1}{\theta}-1\right) + \ldots + q\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^{n-2}\right] \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'^2}\left[e' + \ldots + q\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^{n-3}\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{q\,\theta^{n-1}}{t'^{n-1}} \end{array}\right\}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n}.$$

De là il est aisé de conclure que, si l'on conserve à $Z_r^{(s-1)}$ la même signification que nous lui avons donnée dans le n° 5, et que l'on considère qu'en désignant q_i le coefficient de θ^i dans le développement d'une fonction quelconque de θ, ce même coefficient dans le développement de cette fonction multipliée par $\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^\mu$ sera, par le n° 2, égal à $\Delta^\mu q_i$, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^i} = {} & b'Z_{i-n+1}^{(0)} + b'zZ_{i-2n+1}^{(1)} + b'z^2Z_{i-3n+1}^{(0)} + \ldots \\
& + c'\Delta Z_{i-n+1}^{(0)} + c'z\Delta Z_{i-2n+1}^{(1)} + c'z^2\Delta Z_{i-3n+1}^{(2)} + \ldots \\
& + e'\Delta^2 Z_{i-n+1}^{(0)} + e'z\Delta^2 Z_{i-2n+1}^{(1)} + e'z^2\Delta^2 Z_{i-3n+1}^{(2)} + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + q\Delta^{n-1}Z_{i-n+1}^{(0)} + qz\Delta^{n-1}Z_{i-2n+1}^{(1)} + qz^2\Delta^{n-1}Z_{i-3n+1}^{(2)} + \ldots \\
& + \frac{1}{t'}\left\{\begin{array}{l} c'Z_{i-n+1}^{(0)} + c'zZ_{i-2n+1}^{(1)} + \ldots \\ + e'\Delta Z_{i-n+1}^{(0)} + e'z\Delta Z_{i-2n+1}^{(1)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \\
& + \frac{1}{t'^2}\left\{\begin{array}{l} eZ_{i-n+1}^{(0)} + e'zZ_{i-2n+1}^{(1)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{q}{t'^{n-1}}\left\{Z_{i-n+1}^{(0)} + zZ_{i-2n+1}^{(1)} + \ldots\right\}.
\end{aligned}$$

Présentement il est clair, par le n° 2, que le coefficient de t^x dans le développement de la fonction $\frac{uz^i}{t'^r}$ est $\Delta^r\nabla^i y_x$; l'équation précédente donnera donc, en multipliant ses deux membres par u et repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$\begin{aligned}
y_{x+i} = {} & y_x\left[b'Z_{i-n+1}^{(0)} + c'\Delta Z_{i-n+1}^{(0)} + c'\Delta^2 Z_{i-n+1}^{(0)} + \ldots + q\Delta^{n-1}Z_{i-n+1}^{(0)}\right] \\
& + \nabla y_x\left(b'Z_{i-2n+1}^{(1)} + c'\Delta Z_{i-2n+1}^{(1)} + e'\Delta^2 Z_{i-2n+1}^{(2)} + \ldots + q\Delta^{n-1}Z_{i-2n+1}^{(1)}\right) \\
& + \nabla^2 y_x\left(b'Z_{i-3n+1}^{(2)} + c'\Delta Z_{i-3n+1}^{(2)} + e'\Delta^2 Z_{i-3n+1}^{(2)} + \ldots + q\Delta^{n-1}Z_{i-3n+1}^{(2)}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \Delta y_x\left(c'Z_{i-n+1}^{(0)} + e'\Delta Z_{i-n+1}^{(0)} + \ldots + q\Delta^{n-2}Z_{i-n+1}^{(0)}\right) \\
& + \Delta\nabla y_x\left(c'Z_{i-2n+1}^{(1)} + e'\Delta Z_{i-2n+1}^{(1)} + \ldots + q\Delta^{n-2}Z_{i-2n+1}^{(1)}\right) \\
& + \Delta\nabla^2 y_x\left(c'Z_{i-3n+1}^{(2)} + e'\Delta Z_{i-3n+1}^{(2)} + \ldots + q\Delta^{n-2}Z_{i-3n+1}^{(2)}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + qZ_{i-n+1}^{(0)}\Delta^{n-1}y_x + qZ_{i-2n+1}^{(1)}\Delta^{n-1}\nabla y_x + qZ_{i-3n+1}^{(2)}\Delta^{n-1}\nabla^2 y_x + \ldots,
\end{aligned}$$

la caractéristique ∇ se rapportant à la variable x, et la caractéristique Δ se rapportant aux deux variables x et i.

8. Supposons, dans la formule précédente, x et i infiniment grands, de manière que l'on ait

$$i = \frac{x'}{dx'}, \qquad x = \frac{\varpi}{dx'};$$

y_{x+i} deviendra une fonction de $\varpi + x'$, fonction que nous désignerons par $\varphi(\varpi + x')$. Supposons, de plus,

$$a' = a'', \qquad b' = \frac{b''}{dx'}, \qquad c' = \frac{c''}{dx'^2}, \qquad \ldots, \qquad q = \frac{q''}{dx'^n};$$

l'équation

$$0 = a' + b'\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + c'\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 + \ldots$$

deviendra

$$0 = a'' + \frac{b''}{dx'}\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + \frac{c''}{dx'^2}\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 + \ldots + \frac{q''}{dx'^n}\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^n.$$

Cette dernière équation donne, pour $0 - 1$, n racines $f\,dx'$, $f'\,dx'$, $f''\,dx'$, ..., et par conséquent, pour 0, les n valeurs

$$\theta = 1 + f\,dx', \qquad \theta = 1 + f'\,dx', \qquad \theta = 1 + f''\,dx', \qquad \ldots$$

Maintenant, si l'on suppose $\theta = 1 + h\,dx'$, on aura, i étant supposé infini,

$$\frac{1}{\theta^i} = \frac{1}{(1 + h\,dx')^i} = 1 - ih\,dx' + \frac{i^2}{1.2}h^2\,dx'^2 - \ldots = e^{-hx'},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. D'ailleurs la quantité a est, par le numéro précédent, égale à $a' - b' + c' - \ldots$, et par conséquent égale à $a'' - \frac{b''}{dx} + \ldots \pm \frac{q^n}{dx^n}$, valeur qui se réduit

à son dernier terme, qui surpasse infiniment les autres; l'expression de $Z_r^{(i-1)}$ du n° 5 devient, en y changeant r dans $i - 1$,

$$Z_{i-1}^{(i-1)} = -\frac{dx'}{1.2.3\ldots(s-1)(\pm q'')^s}\frac{d^{i-1}}{dh^{i-1}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{-hx'}}{(h-f')^s(h-f'')^s\ldots} \\ + \dfrac{e^{-hx'}}{(h-f)^s(h-f'')^s\ldots} \\ + \dfrac{e^{-hx'}}{(h-f)^s(h-f')^s\ldots} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

la différence d^{i-1} étant prise en ne faisant varier que h et en substituant, après les différentiations, f au lieu de h dans le premier terme, f' au lieu de h dans le second terme, et ainsi de suite. Nommons $X^{(i-1)}dx'$ la quantité précédente; on aura, à l'infiniment petit près, μ étant un nombre fini,

$$Z_{i\pm\mu}^{(i-1)} = Z_{i-1}^{(i-1)} = X^{(i-1)}\,dx'.$$

D'ailleurs on a $y_x = \varphi(\varpi)$, et la caractéristique Δ des différences finies doit se changer dans la caractéristique d des différences infiniment petites, en sorte que l'équation

$$\nabla y_x = a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même, celle-ci

$$\nabla y_x = a'' + \frac{b''}{dx'}\Delta y_x + \frac{c''}{dx'^2}\Delta^2 y_x + \ldots,$$

devient, en y changeant dx' en $d\varpi$,

$$\nabla y_x = a'' + b''\frac{d\,\varphi(\varpi)}{d\varpi} + c''\frac{d^2\varphi(\varpi)}{d\varpi^2} + \ldots + q''\frac{d^n\varphi(\varpi)}{d\varpi^n}.$$

L'expression de y_{x+i}, trouvée dans le numéro précédent, deviendra

donc

$$\begin{aligned}
\varphi(\varpi+x') = \varphi(\varpi) &\left(b''X^{(0)} + c''\frac{dX^{(0)}}{dx'} + e''\frac{d^2X^{(0)}}{dx'^2} + \ldots + q''\frac{d^{n-1}X^{(0)}}{dx'^{n-1}}\right)\\
&+ \nabla\varphi(\varpi)\left(b''X^{(1)} + c''\frac{dX^{(1)}}{dx'} + e''\frac{d^2X^{(1)}}{dx'^2} + \ldots + q''\frac{d^{n-1}X^{(1)}}{dx'^{n-1}}\right)\\
&+ \nabla^2\varphi(\varpi)\left(b''X^{(2)} + c''\frac{dX^{(2)}}{dx'} + e''\frac{d^2X^{(2)}}{dx'^2} + \ldots + q''\frac{d^{n-1}X^{(2)}}{dx'^{n-1}}\right)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{d\varphi(\varpi)}{d\varpi}\left(c''X^{(0)} + e''\frac{dX^{(0)}}{dx'} + \ldots + q''\frac{d^{n-2}X^{(0)}}{dx'^{n-2}}\right)\\
&+ \frac{d\nabla\varphi(\varpi)}{d\varpi}\left(c''X^{(1)} + e''\frac{dX^{(1)}}{dx'} + \ldots + q''\frac{d^{n-2}X^{(1)}}{dx'^{n-2}}\right)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{d^2\varphi(\varpi)}{d\varpi^2}\left(e''X^{(0)} + \ldots + q''\frac{d^{n-3}X^{(0)}}{dx'^{n-3}}\right)\\
&+ \frac{d^2\nabla\varphi(\varpi)}{d\varpi^2}\left(e''X^{(1)} + \ldots + q''\frac{d^{n-3}X^{(1)}}{dx'^{n-3}}\right)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ q''\frac{d^{n-1}\varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}}X^{(0)} + q''\frac{d^{n-1}\nabla\varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}}X^{(1)}\\
&\qquad + q''\frac{d^{n-1}\nabla^2\varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}}X^{(2)} + \ldots.
\end{aligned}$$

Cette formule servira à interpoler les suites dont la dernière raison des termes est celle d'une équation linéaire aux différences infiniment petites à coefficients constants.

Si l'on a

$$\nabla^s\varphi(\varpi+x') = 0,$$

la formule se termine et donne la valeur de $\varphi(\varpi+x')$, ou l'intégrale de l'équation différentielle précédente; $\varphi(\varpi)$, $\frac{d\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, ...; $\nabla\varphi(\varpi)$, $\frac{d\nabla\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, ...; $\nabla^2\varphi(\varpi)$, $\frac{d\nabla^2\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, ... étant les ns arbitraires de l'intégrale.

Supposons que l'on ait l'équation différentielle

$$0 = \nabla^s\varphi(\varpi+x') - V_{x'},$$

$V_{x'}$ étant une fonction donnée de x'; il faut, par le n° 6, ajouter à l'expression précédente de $\varphi(\varpi+x')$ le terme $\int V_r X_{x'-r}^{(s-1)}\,dr$, $X_{x'}^{(s-1)}$ étant la même fonction de x' que $X^{(s-1)}$. L'intégrale relative à r doit être prise depuis $r=0$ jusqu'à $r=x'$. Cette intégrale définie peut, par le numéro cité, être transformée en intégrales indéfinies relatives à x'.

De la transformation des suites.

9. La théorie des fonctions génératrices peut servir encore à transformer les suites en d'autres qui suivent une loi donnée. Considérons la suite infinie

$$(V) \qquad y_0 + y_1\alpha + y_2\alpha^2 + \ldots + y_x\alpha^x + \ldots,$$

et nommons, comme ci-dessus, u la somme de la série infinie

$$y_0 + y_1\alpha t + y_2\alpha^2 t^2 + \ldots + y_x\alpha^x t^x + \ldots,$$

le coefficient de t^x dans le développement de la fraction $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$ sera égal à la somme de la suite proposée (V), prise depuis le terme $y_x\alpha^x$ inclusivement jusqu'à l'infini. Soit généralement z une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, et nommons $\Pi y_x\alpha^x$ le coefficient de t^x dans uz. Les coefficients de t^x dans uz^2, uz^3, ... seront $\Pi^2 y_x\alpha^x$, $\Pi^3 y_x\alpha^x$, ... Cela posé, on multipliera le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$ par $k-z$, et l'on prendra pour k ce que devient z lorsqu'on y fait t égal à l'unité; $k-z$ sera divisible alors par $1-\frac{1}{t}$. Soit

$$h + \frac{h^{(1)}}{t} + \frac{h^{(2)}}{t^2} + \frac{h^{(3)}}{t^3} + \ldots$$

le quotient de cette division ; on aura

$$\frac{u}{1-\frac{1}{t}} = \frac{u.h}{k}\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\frac{z^2}{k^2}+\ldots\right) + \frac{u.h^{(1)}}{kt}\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\ldots\right) + \frac{u.h^{(2)}}{kt^2}\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\ldots\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\mathrm{S}y_x\alpha^x = \frac{hy_x\alpha^x}{k} + \frac{h\Pi(y_x\alpha^x)}{k^2} + \frac{h\Pi^2(y_x\alpha^x)}{k^3} + \ldots + \frac{h^{(1)}y_{x+1}\alpha^{x+1}}{k} + \frac{h^{(1)}\Pi(y_{x+1}\alpha^{x+1})}{k^2} + \ldots + \frac{h^{(2)}y_{x+2}\alpha^{x+2}}{k} + \frac{h^{(2)}\Pi(y_{x+2}\alpha^{x+2})}{k^2} + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le signe S désigne la somme des termes depuis x inclusivement jusqu'à l'infini. Supposons maintenant

$$z = a + \frac{b}{\alpha t} + \frac{c}{\alpha^2 t^2} + \frac{e}{\alpha^3 t^3} + \ldots;$$

on aura

$$\Pi(y_x\alpha^x) = \alpha^x(ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + ey_{x+3} + \ldots).$$

En désignant par ∇y_x la quantité $ay_x + by_{x+1} + \ldots$, on aura

$$\Pi(y_x\alpha^x) = \alpha^x\nabla y_x,$$

et généralement on aura

$$\Pi^r(y_x\alpha^x) = \alpha^x\nabla^r y_x.$$

On a ensuite

$$k = a + \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^3} + \ldots,$$

ce qui donne

$$h = \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^3} + \ldots,$$

$$h^{(1)} = \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^3} + \ldots,$$

$$h^{(2)} = \frac{e}{\alpha^3} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on aura donc

$$\mathrm{S}y^x\alpha^x = \frac{\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^3}+\ldots}{k}\alpha^x\left(y_x+\frac{\nabla y_x}{k}+\frac{\nabla^2 y_x}{k^2}+\ldots\right) + \frac{\frac{c}{\alpha}+\frac{e}{\alpha^2}+\ldots}{k}\alpha^x\left(y_{x+1}+\frac{\nabla y_{x+1}}{k}+\frac{\nabla^2 y_{x+1}}{k^2}+\ldots\right) + \frac{\frac{e}{\alpha}+\ldots}{k}\alpha^x\left(y_{x+2}+\frac{\nabla y_{x+2}}{k}+\frac{\nabla^2 y_{x+2}}{k^2}+\ldots\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En faisant $x = 0$, on aura une transformée de la suite proposée, dont les termes suivront une autre loi, et si les quantités ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, ... vont en décroissant, cette suite sera convergente. Elle se terminera toutes les fois que l'on aura $\nabla^r y_x = 0$, ce qui aura lieu lorsque la proposée sera une suite récurrente. On aura donc ainsi la somme des suites récurrentes, à compter d'un terme quelconque $y_x\alpha^x$, et par conséquent on aura aussi la somme de leurs termes, comprise entre deux termes quelconques $y_x\alpha^x$ et $y_{x'}\alpha^{x'}$.

Théorèmes sur le développement des fonctions et de leurs différences en séries.

10. En appliquant à des fonctions particulières les principes généraux exposés dans le n° **1**, on aura une infinité de théorèmes sur le développement des fonctions en séries. Nous allons présenter ici les plus remarquables.

On a généralement

$$u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^n = u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n.$$

Or il est clair que le coefficient de t^x dans le premier membre de cette équation est la différence $n^{\text{ième}}$ de y_x, x variant de i; car ce coefficient dans $u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)$ est $y_{x+i}-y_x$ ou $'\Delta y_x$, en désignant par la caractéristique $'\Delta$ les différences finies, lorsque x varie de la quantité i; d'où il est facile de conclure que ce même coefficient, dans le développement de $u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^n$, est $'\Delta^n y_x$. D'ailleurs, si l'on développe $u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n$ suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$, les coefficients de t^x dans les développements de $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$, $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$, ... sont, par le n° **2**, Δy_x, $\Delta^2 y_x$, ...; en sorte que ce coefficient, dans $u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n$, est $[(1+\Delta y_x)^i-1]^n$, pourvu que dans le développement de cette quantité on applique à la caractéristique Δ les exposants de puissances de Δy_x, et qu'ainsi, au lieu d'une puissance quelconque $(\Delta y_x)^r$, on écrive $\Delta^r y_x$; on aura donc avec cette condition

$$(1) \qquad '\Delta^n y_x = [(1+\Delta y_x)^i-1]^n.$$

Si l'on désigne par la caractéristique $'\Sigma$ l'intégrale finie, lorsque x varie de i, $'\Sigma^n y_x$ sera, par le n° **2**, le coefficient de t^x dans le développement de la fonction $u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^{-n}$, en faisant abstraction des constantes arbitraires que l'intégration introduit; or on a

$$u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^{-n} = u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^{-n};$$

de plus, le coefficient de t^x dans $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-r}$ est $\Sigma^r y_x$, en faisant abstraction des constantes arbitraires; ce coefficient dans $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^r$ est $\Delta^r y_x$; on aura donc

$$(2) \qquad '\Sigma^n y_x = [(1+\Delta y_x)^i-1]^{-n},$$

pourvu que, dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique Δ les exposants des puissances de Δy_x, que l'on change les différences négatives en intégrales et que l'on substitue y_x au lieu de $\Delta^0 y_x$, et comme ce développement renferme l'intégrale $\Sigma^n y_x$, qui peut être censée renfermer n constantes arbitraires, l'équation (2) est encore vraie, en ayant égard aux constantes arbitraires.

On peut observer que cette équation se déduit de l'équation (1), en faisant dans celle-ci n négatif et en y changeant les différences négatives en intégrales, c'est-à-dire, en écrivant $'\Sigma^n y_x$ au lieu de $'\Delta^n y_x$ dans le premier membre; et généralement, dans le développement du second membre, $\Sigma^r y_x$ au lieu de $\Delta^{-r} y_x$.

Les équations (1) et (2) auraient également lieu, si x, au lieu de varier de l'unité dans Δy_x, variait d'une quantité quelconque ϖ, pourvu que la variation de x dans $'\Delta y_x$ soit égale à $i\varpi$. En effet, il est clair que, si dans y_x on fait $x=\frac{x'}{\varpi}$, x' variera de ϖ lorsque x variera de l'unité; Δy_x se changera dans $\Delta y_{x'}$, la variation de x' étant ϖ, et $'\Delta y_x$ se changera dans $'\Delta y_{x'}$, la variation de x' étant $i\varpi$. Maintenant si, après avoir substitué ces quantités dans les équations (1) et (2), on suppose ϖ infiniment petit et égal à dx', $\Delta y_{x'}$ se changera dans la différence infiniment petite $dy_{x'}$. Si de plus on fait i infini et $i\,dx'=\alpha$, α étant une quantité finie, la variation de x' dans $'\Delta y_{x'}$ sera α; on aura donc

$$(q) \qquad \begin{cases} '\Delta^n y_{x'} = [(1+dy_{x'})^i-1]^n, \\ '\Sigma^n y_{x'} = \dfrac{1}{[(1+dy_{x'})^i-1]^n}. \end{cases}$$

Or on a

$$\log(1+dy_{x'})^i = i\log(1+dy_{x'}) = i\,dy_{x'} = \alpha\frac{dy_{x'}}{dx'},$$

ce qui donne

$$(1+dy_{x'})^i = c^{\alpha\frac{dy_{x'}}{dx'}},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on a

donc

$$(3)\qquad {}'\Delta^n y_{x'} = \left(c^{\alpha\frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right)^n,$$

$$(4)\qquad {}'\Sigma^n y_{x'} = \frac{1}{\left(c^{\alpha\frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right)^n},$$

en ayant soin d'appliquer à la caractéristique d les exposants des puissances de $dy_{x'}$, de changer les différences négatives en intégrales et la quantité $d^0 y_{x'}$ en $y_{x'}$.

On peut donner à l'équation (3) cette forme singulière qui nous sera utile dans la suite,

$${}'\Delta^n y_{x'} = \left(c^{\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}}\right)^n.$$

En effet, elle donne

$${}'\Delta^n y_{x'} = c^{\frac{n\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'}}\left(c^{\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'}}\right)^n.$$

Considérons un terme quelconque du développement de

$$\left(c^{\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'}}\right)^n,$$

tel que $k\left(\frac{dy_{x'}}{dx'}\right)^r$. En le multipliant par $c^{\frac{n\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'}}$, et développant cette dernière quantité, on aura

$$k\frac{d^r}{dx'^r}\left[r_{x'} + \frac{n\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'} + \left(\frac{n\alpha}{2}\right)^2\frac{d^2 y_{x'}}{1\cdot 2\cdot dx'^2} + \ldots\right];$$

cette quantité est égale à $k\frac{d^r y_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'^r}$, d'où il est facile de conclure

$$c^{\frac{n\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'}}\left(c^{\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'}}{dx'}}\right)^n = \left(c^{\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}\frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}}\right)^n = {}'\Delta^n y_{x'}.$$

Si dans les équations (1) et (2) on suppose encore i infiniment petit et égal à dx, on aura

$${}'\Delta^n y_x = d^n y_x, \qquad {}'\Sigma^n y_x = \frac{1}{dx^n}\int^n y_x\, dx^n;$$

on a d'ailleurs

$$(1+\Delta y_x)^i = c^{dx\log(1+\Delta y_x)} = 1 + dx\log(1+\Delta y_x);$$

les équations (1) et (2) deviendront ainsi

$$(5)\qquad \frac{d^n y_x}{dx^n} = [\log(1+\Delta y_x)]^n,$$

$$(6)\qquad \int^n y_x\, dx^n = \frac{1}{[\log(1+\Delta y_x)]^n}.$$

On peut observer ici une analogie singulière entre les puissances positives et les différences et entre les puissances négatives et les intégrales. L'équation

$$(a)\qquad {}'\Delta y_x = c^{\alpha\frac{dy_x}{dx}} - 1$$

est la traduction du théorème connu de Taylor, lorsque, dans le développement de son second membre suivant les puissances de $\frac{dy_x}{dx}$, on applique à la caractéristique d les exposants de ces puissances. En élevant les deux membres de cette équation à la puissance n, et appliquant aux caractéristiques ${}'\Delta$ et d les exposants des puissances de ${}'\Delta y_x$ et de dy_x, on aura l'équation (3), d'où résulte l'équation (4) en changeant les différences négatives en intégrales.

L'équation précédente donne

$$c^{\alpha\frac{dy_x}{dx}} = 1 + {}'\Delta y_x.$$

En prenant les logarithmes de chaque membre, on aura

$$(r)\qquad \alpha\frac{dy_x}{dx} = \log(1+{}'\Delta y_x).$$

Supposant ensuite $\alpha = 1$, ce qui change ${}'\Delta y_x$ dans Δy_x, et élevant les deux membres de cette équation à la puissance n, on aura l'équation (5), pourvu que l'on applique les exposants des puissances aux caractéristiques. On aura l'équation (6) en faisant n négatif et changeant les puissances négatives en intégrales.

Si, dans l'équation précédente (r), on change α dans i, on aura

$$\frac{dy_x}{dx} = \log(1 + {}'\Delta y_x)^{\frac{1}{i}},$$

et si l'on y suppose $\alpha = 1$, on aura

$$\frac{dy_x}{dx} = \log(1 + \Delta y_x).$$

La comparaison de ces deux valeurs de $\frac{dy_x}{dx}$ donne

$$\log(1 + \Delta y_x) = \log(1 + {}'\Delta y_x)^{\frac{1}{i}},$$

d'où l'on tire

$${}'\Delta y_x = (1 + \Delta y_x)^i - 1.$$

En élevant chaque membre à la puissance n et appliquant les exposants des puissances aux caractéristiques, on aura l'équation (1), d'où résulte l'équation (2), en changeant les différences négatives en intégrales. Les équations (1), (2), (3), (4), (5) et (6) résultent donc du théorème de Taylor, mis sous la forme de l'équation (o), en transformant cette équation suivant les règles de l'Analyse, pourvu que dans les résultats on applique aux caractéristiques les exposants des puissances, que l'on change les différences négatives en intégrales et que l'on substitue la variable elle-même y_x au lieu de ses différences zéro.

Cette analogie des puissances positives avec les différences et des puissances négatives avec les intégrales devient évidente par la théorie des fonctions génératrices. Elle tient, comme on l'a vu, à ce que les produits de la fonction u, génératrice de y_x, par les puissances $\frac{1}{t^i} - 1$ sont les fonctions génératrices des différences finies successives de y_x, x variant d'une quantité quelconque i, tandis que les quotients de u, divisés par ces mêmes puissances, sont les fonctions génératrices des intégrales de y_x.

En considérant, au lieu du facteur $\frac{1}{t^i} - 1$ et de ses puissances, les puissances d'une fonction quelconque rationnelle et entière de $\frac{1}{t}$, on

peut en conclure des théorèmes analogues aux précédents, sur les *dérivées* successives des fonctions. Je nomme *dérivée* d'une fonction y_x toute quantité qui en dérive, telle que $ay_x + by_{x+1} + ey_{x+2} + \ldots$. En regardant ensuite cette fonction dérivée comme une nouvelle fonction que je désigne par y'_x, la quantité $ay'_x + by'_{x+1} + ey'_{x+2} + \ldots$ sera une seconde dérivée de la fonction y_x, et ainsi de suite. Lorsque la fonction $ay_x + by_{x+1} + \ldots$ devient $-y_x + y_{x+1}$, la dérivée devient une différence finie.

Maintenant on a

$$(q) \quad \begin{cases} u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{e}{t^2} + \frac{h}{t^3} + \ldots\right)^n \\ \quad = u\left[a + b\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{1}{dx}} + e\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{2}{dx}} + \ldots\right]^n; \end{cases}$$

on a ensuite généralement, par le n° 2, en désignant par ∇y_x la quantité $ay_x + by_{x+1} + ey_{x+2} + \ldots$, $\nabla^n y_x$ pour le coefficient de la fonction génératrice du premier membre de cette équation ; de plus on a

$$u\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{r}{dx}} = u\left[1 + \frac{r}{dx}\left(\frac{1}{t^{dx}} - 1\right) + \frac{r^2}{1.2.dx^2}\left(\frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^2 + \ldots\right].$$

Le second membre de cette équation est la fonction génératrice de

$$y_x + r\frac{dy_x}{dx} + \frac{r^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + \ldots$$

ou de $c^{r\frac{dy_x}{dx}}$, en appliquant à la caractéristique d les exposants de puissances de $\frac{dy_x}{dx}$, et écrivant y_x au lieu de $\left(\frac{dy_x}{dx}\right)^0$. De là on conclut que, sous les mêmes conditions, le second membre de l'équation (q) est la fonction génératrice de

$$\left(a + bc^{\frac{dy_x}{dx}} + ec^{\frac{2dy_x}{dx}} + hc^{\frac{3dy_x}{dx}} + \ldots\right)^n,$$

et qu'ainsi cette équation donne, en repassant des fonctions généra-

trices aux coefficients,

$$\nabla^n y_x = \left[a + bc^{\frac{dy_x}{dx}} + ec^{\frac{2dy_x}{dx}} + hc^{\frac{3dy_x}{dx}} + \ldots\right]^n. \tag{7}$$

On peut ainsi obtenir une infinité de résultats semblables. Nous nous bornerons au suivant, qui nous sera utile dans la suite : $u\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)^n$ est la fonction génératrice de

$$y_{x+\frac{n}{2}} - n y_{x+\frac{n}{2}-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{x+\frac{n}{2}-2} - \ldots,$$

ou de $\Delta^n y_{x-\frac{n}{2}}$. De plus, on a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)^n = u\left[\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{1}{2dx}} - \left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{-\frac{1}{2dx}}\right]^n,$$

d'où l'on tire, en repassant par l'analyse précédente des fonctions génératrices aux coefficients

$$\Delta^n y_{x-\frac{n}{2}} = \left(c^{\frac{dy_x}{2dx}} - c^{-\frac{dy_x}{2dx}}\right)^n.$$

11. Je n'ai considéré jusqu'ici qu'une seule fonction y_x de x; mais la considération du produit de plusieurs fonctions de la même variable conduit à divers résultats curieux et utiles d'analyse. Soit u une fonction de t, et y_x le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction; soit u' une fonction de t', et y'_x le coefficient de t'^x dans le développement de cette fonction; soit encore u'' une fonction de t'', et y''_x le coefficient de t''^x dans son développement, et ainsi de suite. Il est clair que $y_x y'_x y''_x \ldots$ sera le coefficient de $t^x t'^x t''^x \ldots$ dans le développement du produit $uu'u'' \ldots$; ce produit sera donc la fonction génératrice de $y_x y'_x y''_x \ldots$. La fonction génératrice de $y_{x+1} y'_{x+1} y''_{x+1} \ldots - y_x y'_x y''_x \ldots$, ou de $\Delta y_x y'_x y''_x \ldots$ sera ainsi

$$uu'u'' \ldots \left(\frac{1}{tt't'' \ldots} - 1\right),$$

et la fonction génératrice de $\Delta^n y_x y'_x y''_x \ldots$ sera

$$uu'u'' \ldots \left(\frac{1}{tt't'' \ldots} - 1\right)^n.$$

On prouvera, comme dans le n° 2, que la fonction génératrice de $\Sigma^n y_x y'_x y''_x \ldots$ sera

$$uu'u'' \ldots \left(\frac{1}{tt't'' \ldots} - 1\right)^{-n},$$

c'est-à-dire que l'on peut changer n en $-n$ dans la fonction génératrice de $\Delta^n y_x y'_x \ldots$, pourvu que l'on change Δ^{-n} dans Σ^n.

Appliquons ces résultats à deux fonctions y_x et y'_x. La fonction génératrice de $\Delta^n y_x y'_x$ sera $uu'\left(\frac{1}{tt'} - 1\right)^n$. On peut la mettre sous cette forme

$$uu'\left[\frac{1}{t} - 1 + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)\right]^n;$$

en la développant, elle devient

$$uu'\left[\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{n}{t}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{1.2.t^2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^2 + \ldots\right];$$

les fonctions

$$uu'\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n, \quad uu'\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'} - 1\right), \quad uu'\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^2, \quad \ldots$$

sont respectivement génératrices des produits $y'_x \Delta^n y_x$, $\Delta y'_x \Delta^{n-1} y_{x+1}$, $\Delta^2 y'_x \Delta^{n-2} y_{x+2}$, ... L'équation

$$uu'\left(\frac{1}{tt'} - 1\right)^n = uu'\left[\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{n}{t}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'} - 1\right) + \ldots\right]$$

donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\Delta^n y_x y'_x = y'_x \Delta^n y_x + n \Delta y'_x \Delta^{n-1} y_{x+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y'_x \Delta^{n-2} y_{x+2} + \ldots. \tag{8}$$

En changeant n dans $-n$, on aura

$$\Sigma^n y_x y'_x = y'_x \Sigma^n y_x - n \Delta y'_x \Sigma^{n+1} y_{x+1} + \frac{n(n+1)}{1.2} \Delta^2 y'_x \Sigma^{n+2} y_{x+2} - \ldots. \tag{9}$$

En général, on a

$$uu'u''\ldots\left(\frac{1}{tt't''\ldots}-1\right)^n = uu'u''\ldots\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)\ldots-1\right]^n,$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$(10)\qquad \Delta^n y_x y'_x y''_x \ldots = [(1+\Delta)(1+\Delta')(1+\Delta'')\ldots-1]^n,$$

pourvu que, dans chaque terme du développement du second membre de cette équation, on place immédiatement après chaque caractéristique Δ, Δ', Δ'', ..., respectivement y_x, y'_x, y''_x, ..., et qu'on multiplie ce terme par le produit des fonctions dont il ne contient point la caractéristique. Ainsi, dans le cas de trois variables, on écrira, au lieu de Δ^r, la quantité $y'_x y''_x \Delta^r y'_x$; au lieu de $\Delta^r \Delta^{rr}$, on écrira $y_x \Delta^r y_x \Delta^r y'_x$, au lieu de $\Delta^{rr}\Delta^{rrr}$, on écrira $y_x \Delta^{rr} y'_x \Delta^{rrr} y''_x$, et ainsi du reste.

En faisant n négatif, l'équation (10) subsiste encore, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales.

Dans le cas des différences infiniment petites, les caractéristiques Δ, Δ', Δ'', ... se changent en d, d', d'', ... L'équation (10) devient ainsi, en négligeant les différentielles d'un ordre supérieur relativement à celles d'un ordre inférieur,

$$d^n y_x y'_x y''_x \ldots = (d + d' + d'' + \ldots)^n.$$

Cette équation développée donne, relativement à deux fonctions y_x et y'_x,

$$d^n y_x y'_x = y'_x d^n y_x + n\, dy'_x d^{n-1} y_x + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 y'_x d^{n-2} y_x + \ldots.$$

En faisant n négatif, les différences négatives se changeant en intégrales, on aura

$$\int^n y_x y'_x dx^n = y'_x \int^n y_x dx^n - n\frac{dy'_x}{dx}\int^{n+1} y_x dx^{n+1} + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{d^2 y'_x}{dx^2}\int^{n+2} y_x dx^{n+2} - \ldots.$$

On a

$$uu'u''\ldots\left(\frac{1}{t^i t'^i t''^i \ldots}-1\right)^n = uu'u''\ldots\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^i\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)^i\ldots-1\right]^n.$$

En désignant donc par $'\Delta^n y_x y'_x y''_x \ldots$ la différence finie du produit $y_x y'_x y''_x \ldots$, lorsque x varie de i, l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients

$$(11)\qquad '\Delta^n y_x y'_x y''_x \ldots = [(1+\Delta)^i(1+\Delta')^i(1+\Delta'')^i\ldots-1]^n,$$

en observant les conditions prescrites ci-dessus relativement aux caractéristiques Δ, Δ', Δ'', ... et à leurs puissances. Cette dernière équation subsiste encore en faisant n négatif, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales.

Supposons

$$x = \frac{x'}{dx'}, \qquad i = \frac{\alpha}{dx'};$$

$y_x, y'_x, \ldots$ deviendront des fonctions de x', que nous désignerons par $y_{x'}, y'_{x'}, \ldots$; l'équation (11) donnera ainsi la suivante, en observant que les caractéristiques Δ, Δ', ... se changent en d, d', ..., et que l'on a

$$(1+dy_{x'})^{\frac{\alpha}{dx'}} = c^{\alpha\frac{dy_{x'}}{dx'}},$$

$$(12)\qquad '\Delta^n y_{x'} y'_{x'} y''_{x'} \ldots = \left(c^{\alpha\frac{dy_{x'}}{dx'}+\alpha\frac{dy'_{x'}}{dx'}+\alpha\frac{dy''_{x'}}{dx'}+\ldots}-1\right)^n,$$

équation qui subsiste encore en faisant n négatif et changeant les différences négatives en intégrales.

Ne considérons que deux variables y_x et y'_x, et supposons $y'_x = p^x$; on aura

$$(1+\Delta')^i = p^x + i\,\Delta p^x + \frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 p^x + \ldots.$$

Or on a généralement, x variant de l'unité,

$$\Delta^r p^x = p^x (p-1)^r;$$

on aura donc

$$(1+\Delta')^i = p^i p^x.$$

L'équation (11) deviendra ainsi

$$(13) \qquad {}'\Delta^n p^x y_x = p^x[p^i(1+\Delta y_x)^i - 1]^n;$$

en faisant n négatif, on aura

$$(14) \qquad {}'\Sigma^n p^x y_x = \frac{p^x}{[p^i(1+\Delta y_x)^i - 1]^n} + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots,$$

$a, b, \ldots$ étant des constantes arbitraires dues à l'intégration n fois répétée de $p^x y_x$. J'ajoute ici ces constantes au second membre de l'équation précédente, parce qu'elles ne sont implicitement renfermées dans son premier terme que lorsque $p = 1$.

Si l'on fait dans les deux équations précédentes $x = \frac{x'}{dx'}$, $i = \frac{\alpha}{dx'}$, $p = 1 + dx' \log h$, on aura

$$(15) \qquad {}'\Delta^n h^{x'} y_{x'} = h^{x'}\left(h^\alpha e^{\alpha \frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right)^n,$$

$$(16) \qquad {}'\Sigma^n h^{x'} y_{x'} = \frac{h^{x'}}{\left(h^\alpha e^{\alpha \frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right)^n} + a'x'^{n-1} + b'x'^{n-2} + \ldots.$$

Si dans les équations (13) et (14) on suppose i infiniment petit et égal à dx, ${}'\Delta^n p^x y_x$ se changera dans $d^n p^x y_x$, et ${}'\Sigma^n p^x y_x$ se changera dans $\frac{1}{dx^n}\int^n p^x y_x dx^n$; on aura ensuite

$$p^i(1+\Delta y_x)^i = e^{dx \log[p(1+\Delta y_x)]};$$

on aura donc

$$[p^i(1+\Delta y_x)^i - 1]^n = dx^n |\log[p(1+\Delta y_x)]|^n,$$

et les équations (13) et (14) deviendront

$$(17) \qquad \frac{d^n p^x y_x}{dx^n} = p^x |\log[p(1+\Delta y_x)]|^n,$$

$$(18) \qquad \int^n p^x y_x dx^n = \frac{p^x}{|\log[p(1+\Delta y_x)]|^n} + ax^{n-1} + bx^{n+2} + \ldots.$$

CHAPITRE II.

DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES A DEUX VARIABLES.

12. Nommons u une fonction de t et t'; supposons qu'en la développant suivant les puissances de t et t', elle donne la suite infinie

$$\begin{aligned} &y_{0,0} + y_{1,0}t + y_{2,0}t^2 + \ldots + y_{x,0}t^x + y_{x+1,0}t^{x+1} + \ldots + y_{\omega,0}t^\omega \\ &+ y_{0,1}t' + y_{1,1}tt' + y_{2,1}t^2t' + \ldots + y_{x,1}t^x t' + y_{x+1,1}t^{x+1}t' + \ldots + y_{\omega,1}t^\omega t' \\ &+ y_{0,2}t'^2 + y_{1,2}tt'^2 + y_{2,2}t^2t'^2 + \ldots + y_{x,2}t^x t'^2 + y_{x+1,2}t^{x+1}t'^2 + \ldots + y_{\omega,2}t^\omega t'^2 \\ &\ldots\ldots\ldots

$\nabla y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ dans $\nabla y_{x,x'}$; si l'on désigne encore par $\nabla^3 y_{x,x'}$ une fonction dans laquelle $\nabla^2 y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ dans $\nabla y_{x,x'}$, et ainsi de suite, la fonction génératrice de $\nabla^n y_{x,x'}$ sera

$$u\left(\begin{array}{c} A+\dfrac{B}{t}+\dfrac{C}{t^2}+\ldots \\ +\dfrac{B'}{t'}+\dfrac{C'}{tt'}+\ldots \\ +\dfrac{C''}{t'^2}+\ldots \\ +\ldots \end{array}\right)^n;$$

partant, la fonction génératrice de $\Delta^{t'}\Delta^{t''}\nabla^x y_{x,x'}$ sera la fonction génératrice précédente, multipliée par $\left(\frac{1}{t}-1\right)^t\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{t'}$.

s étant supposée une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$, si l'on développe s^i suivant les puissances de ces variables, et que l'on désigne par $\frac{k}{t^m t'^{m'}}$ un terme quelconque de ce développement, le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans $\frac{ku}{t^m t'^{m'}}$ étant $ky_{x+m,x'+m'}$, on aura celui de $t^x t'^{x'}$ dans us^i, ou, ce qui revient au même, on aura $\nabla^i y_{x,x'}$: 1° en substituant, dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, $y_{x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}$; 2° en développant ce que devient alors us^i suivant les puissances de y_x et de $y_{x'}$, et en appliquant respectivement aux indices x et x' les exposants de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant, au lieu d'un terme quelconque tel que $k(y_x)^m(y_{x'})^{m'}$, $ky_{x+m,x'+m'}$, et par conséquent $ky_{x,x'}$ au lieu du terme tout constant k, ou $k(y_x)^0(y_{x'})^0$.

Si, au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$ et de $\frac{1}{t'}-1$, et que l'on désigne par $k\left(\frac{1}{t}-1\right)^m\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{m'}$ un terme quelconque de ce développement, le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans $ku\left(\frac{1}{t}-1\right)^m\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{m'}$ étant $k\Delta^{m'}\Delta^{m't}y_{x,x'}$, on aura $\nabla^i y_{x,x'}$: 1° en substituant dans s, $\Delta y_{x,x'}$ au lieu

de $\frac{1}{t}-1$ et $'\Delta y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}-1$; 2° en développant alors s^i suivant les puissances de $\Delta y_{x,x'}$ et $'\Delta y_{x,x'}$, et en appliquant aux caractéristiques Δ et $'\Delta$ les exposants de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant, au lieu d'un terme quelconque tel que $k(\Delta y_{x,x'})^m({}'\Delta y_{x,x'})^{m'}$, celui-ci $k\Delta^{m'}\Delta^{m'}y_{x,x'}$, et par conséquent $ky_{x,x'}$ au lieu du terme constant k.

Soit Σ la caractéristique des intégrales finies relatives à x, et $'\Sigma$ celle des intégrales finies relatives à x'; soit de plus z la fonction génératrice de $\Sigma^{t'}\Sigma^{t''}y_{x,x'}$; on aura $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^t\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{t'}$ pour la fonction génératrice de $y_{x,x'}$. Cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives ou nulles de t et de t', se réduire à u; on aura ainsi, par le n° 2,

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^t\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{t'}=u+\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{t^3}+\ldots+\frac{q}{t^t}+\frac{a'}{t'}+\frac{b'}{t'^2}+\frac{c'}{t'^3}+\ldots+\frac{q'}{t'^{t'}},$$

$a, b, c, \ldots, q$ étant des fonctions arbitraires de t', et $a', b', c', \ldots, q'$ étant des fonctions arbitraires de t; partant

$$z=\frac{ut^t t'^{t'}+at^{t-1}t'^{t'}+bt^{t-2}t'^{t'}+\ldots+qt'^{t'}+a't^t t'^{t'-1}+b't^t t'^{t'-2}+\ldots+q't^t}{(1-t)^t(1-t')^{t'}}.$$

De l'interpolation des suites à deux variables, et de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles.

13. $y_{x+i,x'+i'}$ est évidemment égal au coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans le développement de $\frac{u}{t^i t'^{i'}}$; or on a

$$\frac{u}{t^i t'^{i'}}=u\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^{i'};$$

on aura donc, par le numéro précédent,

$$y_{x+i,x'+i'}=(1+\Delta y_{x,x'})^i(1+{}'\Delta y_{x,x'})^{i'};$$

en développant le second membre de cette équation, on aura

$$\begin{aligned} y_{x+i,x+i'} = y_{x,x'} &+ i\Delta y_{x,x'} + \frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 y_{x,x'} + \dots \\ &+ i'\Delta y_{x,x'} + ii'\Delta'\Delta y_{x,x'} + \dots \\ &+ \frac{i'(i'-1)}{1.2}\Delta'^2 y_{x,x'} + \dots \\ &+ \dots . \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'au lieu d'interpoler suivant les différences de la fonction $y_{x,x'}$, on veuille interpoler suivant d'autres lois. Pour cela, soit

$$\begin{aligned} z = \mathrm{A} &+ \frac{\mathrm{B}}{t} + \frac{\mathrm{C}}{t^2} + \frac{\mathrm{D}}{t^3} + \dots \\ &+ \frac{\mathrm{B}'}{t'} + \frac{\mathrm{C}'}{tt'} + \frac{\mathrm{D}'}{t^2 t'} + \dots \\ &+ \frac{\mathrm{C}''}{t'^2} + \frac{\mathrm{D}''}{tt'^2} + \dots \\ &+ \frac{\mathrm{D}'''}{t'^3} + \dots \\ &+ \dots . \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\begin{aligned} \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}'}{t'} + \frac{\mathrm{C}''}{t'^2} + \frac{\mathrm{D}'''}{t'^3} + \dots &= a, \\ \mathrm{B} + \frac{\mathrm{C}'}{t'} + \frac{\mathrm{D}''}{t'^2} + \dots &= b, \\ \mathrm{C} + \frac{\mathrm{D}'}{t'} + \dots &= c, \\ \dots\dots\dots\dots &, \end{aligned}$$

on aura pour z une expression de cette forme

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \dots + \frac{l}{t^n}.$$

Nous supposerons ici que le coefficient l de la puissance la plus élevée de $\frac{1}{t}$ est constant ou indépendant de t', et que cette puissance est égale ou plus grande que la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$ dans chacun des autres termes de z. Il est facile de conclure de l'équation précédente, comme dans le n° 5, les valeurs successives de $\frac{1}{t^{n+1}}$, $\frac{1}{t^{n+2}}$, $\frac{1}{t^{n+3}}$, ..., en fonction de a, b, c, ..., et z, et il est visible que, dans chaque terme de l'expression de $\frac{1}{t^i}$, la puissance la plus élevée de $\frac{1}{t}$ sera moindre que n, et la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$ ne surpassera pas i.

Considérons maintenant la formule (A) du n° 5, et supposons qu'en développant suivant les puissances de $\frac{1}{t}$ la quantité

$$\begin{aligned} &b\mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+1} + bz\mathrm{Z}^{(1)}_{i-2n+1} + \dots \\ &+ c\mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+2} + cz\mathrm{Z}^{(1)}_{i-2n+2} + \dots \\ &+ e\mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+3} + ez\mathrm{Z}^{(1)}_{i-2n+3} + \dots \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned} &\mathrm{M} + \mathrm{N}z + \dots + \frac{1}{t'}(\mathrm{M}^{(1)} + \mathrm{N}^{(1)}z + \dots) \\ &+ \frac{1}{t'^2}(\mathrm{M}^{(2)} + \mathrm{N}^{(2)}z + \dots) + \dots + \frac{1}{t'^i}\mathrm{M}^{(i)}; \end{aligned}$$

les puissances ultérieures de $\frac{1}{t'}$ disparaissent d'elles-mêmes dans ce développement, puisque l'expression de $\frac{1}{t^i}$ ne doit point les contenir. Supposons pareillement qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned} &c\mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+1} + cz\mathrm{Z}^{(1)}_{i-2n+1} + \dots \\ &+ e\mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+2} + ez\mathrm{Z}^{(1)}_{i-2n+2} + \dots \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \end{aligned}$$

on ait

$$\mathrm{M}_i + \mathrm{N}_i z + \dots + \frac{1}{t'}(\mathrm{M}^{(1)}_i + \mathrm{N}^{(1)}_i z + \dots) + \dots + \frac{1}{t'^{i-i}}\mathrm{M}^{(i-i)}_i.$$

Supposons encore qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned} &e\mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+1} + \dots \\ &+ \dots\dots\dots , \end{aligned}$$

on ait

$$M_2+N_2z+\ldots+\frac{1}{t^i}(M_2^{(i)}+N_2^{(i)}z+\ldots)+\ldots+\frac{1}{t^{i-2}}M_2^{(i-2)},$$

et ainsi de suite. La formule (A) du n° 5 donnera

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^i}&=M+Nz+\ldots\\&+\frac{1}{t^i}(M^{(i)}+N^{(i)}z+\ldots)\\&+\frac{1}{t^{i2}}(M^{(2)}+N^{(2)}z+\ldots)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{1}{t^{i}}M^{(i)}\\&+\frac{1}{t}\left\{\begin{array}{l}M_1+N_1z+\ldots\\+\frac{1}{t^i}(M_1^{(i)}+N_1^{(i)}z+\ldots)\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+\frac{1}{t^{i-1}}M_1^{(i-1)}\end{array}\right.\\&+\frac{1}{t^2}\left\{\begin{array}{l}M_2+N_2z+\ldots\\+\frac{1}{t^i}M_2^{(i)}+N_2^{(i)}z+\ldots\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+\frac{1}{t^{i-2}}M_2^{(i-2)}\end{array}\right.\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{1}{t^{n-1}}\left\{\begin{array}{l}M_{n-1}+N_{n-1}z+\ldots\\+\frac{1}{t^i}(M_{n-1}^{(i)}+N_{n-1}^{(i)}z+\ldots)\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+\frac{1}{t^{i-n+1}}M_{n-1}^{(i-n+1)}\end{array}\right.\end{aligned}.$$

Cela posé, si l'on nomme $\nabla y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{aligned}&Ay_{x,x'}+By_{x+1,x'}+Cy_{x+2,x'}+\ldots\\&+B'y_{x,x'+1}+C'y_{x+1,x'+1}+\ldots\\&+C''y_{x,x'+2}+\ldots\\&+\ldots,\end{aligned}$$

le coefficient $t^xt^{x'}$ dans le développement de $\frac{uz^k}{t^rt^{r'}}$ sera, par le numéro précédent, $\nabla^k y_{x+r,x'+r'}$; l'équation précédente donnera par conséquent, en la multipliant par u, et en passant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$\begin{aligned}y_{x+i,x'}=&\left\{\begin{array}{l}My_{x,x'}+N\nabla y_{x,x'}+\ldots\\+M^{(1)}y_{x,x'+1}+N^{(1)}\nabla y_{x,x'+1}+\ldots\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+M^{(i)}y_{x,x'+i}\end{array}\right.\\&+\left\{\begin{array}{l}M_1y_{x+1,x'}+N_1\nabla y_{x+1,x'}+\ldots\\+M_1^{(1)}y_{x+1,x'+1}+N_1^{(1)}\nabla y_{x+1,x'+1}+\ldots\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+M_1^{(i-1)}y_{x+1,x'+i-1}\end{array}\right.\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\left\{\begin{array}{l}M_{n-1}y_{x+n-1,x'}+N_{n-1}\nabla y_{x+n-1,x'}+\ldots\\+M_{n-1}^{(1)}y_{x+n-1,x'+1}+N_{n-1}^{(1)}\nabla y_{x+n-1,x'+1}+\ldots\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+M_{n-1}^{(i-n+1)}y_{x+n-1,x'+i-n+1}\end{array}\right.\end{aligned}.$$

14. Si l'on suppose $\nabla y_{x,x'}=0$, l'équation précédente donnera, en y faisant $x=0$,

$$\begin{aligned}y_{i,x'}=&My_{0,x'}+M^{(1)}y_{0,x'+1}+M^{(2)}y_{0,x'+2}+\ldots+M^{(i)}y_{0,x'+i}\\&+M_1y_{1,x'}+M_1^{(1)}y_{1,x'+1}+M_1^{(2)}y_{1,x'+2}+\ldots+M_1^{(i-1)}y_{1,x'+i-1}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+M_{n-1}y_{n-1,x'}+M_{n-1}^{(1)}y_{n-1,x'+1}+\ldots+M_{n-1}^{(i-n+1)}y_{n-1,x'+i-n+1},\end{aligned}$$

$M^{(r)}$, $M_1^{(r)}$, $M_2^{(r)}$, ... étant des fonctions de i et de r. L'expression précédente de $y_{i,x'}$ peut être mise sous cette forme très simple,

$$(\lambda)\qquad y_{i,x'}=\Sigma\left\{\begin{array}{l}M^{(r)}y_{0,x'+r}+M_1^{(r-1)}y_{1,x'+r-1}+M_2^{(r-2)}y_{2,x'+r-2}+\ldots\\+M_{n-1}^{(r-n+1)}y_{n-1,x'+r-n+1}\end{array}\right\},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = i$ par rapport au premier terme, depuis $r = 1$ jusqu'à $r = i$ par rapport au second terme, et ainsi de suite. Cette expression de $y_{i,x'}$ sera l'intégrale complète de l'équation $\nabla y_{i,x'} = 0$, ou

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mathrm{A} y_{i,x'} + \mathrm{B} y_{i+1,x'} + \mathrm{C} y_{i+2,x'} + \ldots + l y_{i+n,x'} \\ & + \mathrm{B}' y_{i,x'+1} + \mathrm{C}' y_{i+1,x'+1} + \ldots + \ldots \\ & + \mathrm{C}'' y_{i,x'+2} + \ldots + \ldots \\ & + \ldots + h y_{i,x'+n}. \end{aligned}$$

Il est visible que $y_{0,x'}, y_{1,x'}, y_{2,x'}, \ldots, y_{n-1,x'}$ sont les n fonctions arbitraires qu'introduit l'intégration de l'équation $\nabla y_{i,x'} = 0$. Pour les déterminer, il faut connaître immédiatement ou du moins pouvoir conclure des conditions du problème les n premiers rangs verticaux de la table suivante :

$$(Q)\quad \left|\begin{array}{llllllll} y_{0,0}, & y_{1,0}, & y_{2,0}, & y_{3,0}, & \ldots, & y_{i,0}, & y_{i+1,0}, & \ldots, \; y_{\infty,0}, \\ y_{0,1}, & y_{1,1}, & y_{2,1}, & y_{3,1}, & \ldots, & y_{i,1}, & y_{i+1,1}, & \ldots, \; y_{\infty,1}, \\ y_{0,2}, & y_{1,2}, & y_{2,2}, & y_{3,2}, & \ldots, & y_{i,2}, & y_{i+1,2}, & \ldots, \; y_{\infty,2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \; \ldots, \\ y_{0,x'}, & y_{1,x'}, & y_{2,x'}, & y_{3,x'}, & \ldots, & y_{i,x'}, & y_{i+1,x'}, & \ldots, \; y_{\infty,x'}, \\ y_{0,x'+1}, & y_{1,x'+1}, & y_{2,x'+1}, & y_{3,x'+1}, & \ldots, & y_{i,x'+1}, & y_{i+1,x'+1}, & \ldots, \; y_{\infty,x'+1}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \; \ldots\ldots, \\ y_{0,\infty}, & y_{1,\infty}, & y_{2,\infty}, & y_{3,\infty}, & \ldots, & y_{i,\infty}, & y_{i+1,\infty}, & \ldots, \; y_{\infty,\infty}. \end{array}\right.$$

Dans un grand nombre de problèmes, les n premiers rangs verticaux sont donnés par des équations aux différences finies linéaires, et par conséquent par une suite de termes de la forme $\mathrm{A} p^{x'}$. Supposons que l'expression de $y_{0,x'}$ continue le terme $\mathrm{A} p^{x'}$; la partie correspondante de $y_{i,x'}$ donnée par la formule (λ) sera

$$\mathrm{A} p^{x'} (\mathrm{M} + \mathrm{M}^{(1)} p + \mathrm{M}^{(2)} p^2 + \ldots + \mathrm{M}^{(i)} p^i);$$

mais la fonction

$$\mathrm{M} + \frac{\mathrm{M}^{(1)}}{t'} + \frac{\mathrm{M}^{(2)}}{t'^2} + \ldots + \frac{\mathrm{M}^{(i)}}{t'^i}$$

est le développement de

$$b \mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+1} + c \mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+2} + \ldots,$$

suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$; en changeant donc, dans cette dernière quantité, $\frac{1}{t'}$ en p, et nommant P ce qu'elle devient alors, on aura $\mathrm{A} \mathrm{P} p^{x'}$, pour la partie de $y_{i,x'}$ qui répond au terme $\mathrm{A} p^{x'}$. Il suit de là que, si la valeur de $y_{0,x'}$ est égale à $\mathrm{A} p^{x'} + \mathrm{A}' p'^{x'} + \mathrm{A}'' p''^{x'} + \ldots$, et que l'on nomme P', P'', ... ce que devient P, en y changeant p dans p', p'', ..., on aura, pour la partie correspondante de $y_{i,x'}$,

$$\mathrm{A} \mathrm{P} p^{x'} + \mathrm{A}' \mathrm{P}' p'^{x'} + \mathrm{A}'' \mathrm{P}'' p''^{x'} + \ldots.$$

On trouvera pareillement que, si la valeur de $y_{1,x'}$ est exprimée par $\mathrm{B} q^{x'} + \mathrm{B}' q'^{x'} + \mathrm{B}'' q''^{x'} + \ldots$ et si l'on nomme Q, Q', Q'', ... ce que devient la quantité

$$c \mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+1} + e \mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+2} + \ldots,$$

lorsqu'on y change successivement $\frac{1}{t'}$ en q, q', q'', ..., la partie correspondante de $y_{i,x'}$ sera

$$\mathrm{B} \mathrm{Q} q^{x'} + \mathrm{B}' \mathrm{Q}' q'^{x'} + \mathrm{B}'' \mathrm{Q}'' q''^{x'} + \ldots,$$

et ainsi de suite. La réunion de tous ces termes donnera l'expression de $y_{i,x'}$ la plus simple à laquelle on puisse parvenir.

15. La valeur de $y_{i,x'}$ donnée par la formule (λ) du numéro précédent dépendant de la connaissance de $\mathrm{M}^{(r)}$, $\mathrm{M}^{(r-1)}_1$, ..., il est visible que ces quantités seront connues, lorsque l'on aura le coefficient de $\frac{1}{t'^r}$ dans le développement de $\mathrm{Z}^{(0)}_i$; tout se réduit donc à déterminer ce coefficient. On a, par le n° 5,

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}^{(0)}_i = {} & - \frac{1}{a \alpha'^{i+1} (\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'') \ldots} \\ & - \frac{1}{a \alpha'^{i+1} (\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'') \ldots} \\ & - \frac{1}{a \alpha''^{i+1} (\alpha'' - \alpha)(\alpha'' - \alpha') \ldots} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

α, α', α'', ... étant fonctions de $\frac{1}{t'}$. Si l'on fait $\frac{1}{t'} = s$, et que l'on différentie l'expression précédente de $Z_i^{(0)}$, n fois de suite par rapport à s, on aura, avec l'équation précédente, $n+1$ équations, au moyen desquelles, en éliminant les puissances indéterminées $\frac{1}{\alpha^{i+1}}, \frac{1}{\alpha'^{i+1}}, \frac{1}{\alpha''^{i+1}}, \ldots$, on parviendra à une équation linéaire entre $Z_i^{(0)}, \frac{dZ_i^{(0)}}{ds}, \frac{d^2Z_i^{(0)}}{ds^2}, \ldots$, dont les coefficients seront fonctions de α, α', α'', ... et de leurs différentielles prises par rapport à s; or il est clair que α, α', α'', ... doivent entrer de la même manière dans ces coefficients, que l'on pourra ainsi obtenir en fonctions rationnelles et entières des coefficients de l'équation qui donne les valeurs de α, α', α'', ... et des différences de ces coefficients, et par conséquent en fonctions rationnelles de s. En faisant ensuite disparaître les dénominateurs de ces fonctions, on aura une équation linéaire entre $Z_i^{(0)}$ et ses différentielles, équation dont les coefficients seront des fonctions rationnelles et entières de s. Cela posé, considérons un terme quelconque de cette équation, tel que $ks^m \frac{d^p Z_i^{(0)}}{ds^p}$, et nommons λ_r le coefficient de $\frac{1}{t'^r}$ dans le développement de $Z_i^{(0)}$ suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$; ce coefficient dans le développement de $ks^m \frac{d^p Z_i^{(0)}}{ds^p}$ sera

$$k(r+p-m)(r+p-m-1)(r+p-m-2)\ldots(r-m+1)\lambda_{r+p-m}.$$

En repassant ainsi des fonctions génératrices à leurs coefficients, l'équation entre $Z_i^{(0)}$ et ses différences donnera une équation entre λ_r, λ_{r+1}, ... dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de r et dont l'intégrale sera la valeur de λ_r.

Il suit de là que l'intégration de toute équation linéaire aux différences finies partielles, dont les coefficients sont constants, dépend : 1° de l'intégration d'une équation linéaire aux différences finies dont les coefficients sont variables; 2° d'une intégrale *définie*. L'intégrale définie dont dépend la valeur de $y_{i,x'}$ dans la formule (λ) est relative à r, et doit s'étendre jusqu'à $r = i+1$.

Relativement à l'équation aux différences partielles du premier ordre

$$o = Ay_{i,x'} + By_{i+1,x'} + B'y_{i,x'+1},$$

on a

$$Z_i^{(0)} = -\frac{1}{a\alpha^{i+1}};$$

on a de plus

$$a = A + B's,$$

$$\alpha = -\frac{B}{a},$$

ce qui donne

$$Z_i^{(0)} = -\frac{(A+B's)^i}{(-B)^{i+1}};$$

d'où l'on tire cette équation différentielle

$$o = \frac{dZ_i^{(0)}}{ds}(A+B's) - iB'Z_i^{(0)},$$

ce qui donne l'équation aux différences finies

$$o = (r+1)A\lambda_{r+1} - (i-r)B'\lambda_r;$$

on a ensuite

$$M^{(r)} = B\lambda_r.$$

La formule (λ) du numéro précédent deviendra donc

$$y_{i,x'} = B\Sigma\lambda_r y_{0,x'+r},$$

l'intégrale finie étant prise depuis $r = o$ jusqu'à $r = i$. C'est l'intégrale complète de l'équation précédente aux différences partielles du premier ordre.

L'équation aux différences en λ_r donne en l'intégrant

$$\lambda_r = \frac{Hi(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r}\frac{B^r}{A^r},$$

H étant une constante arbitraire, et le dénominateur étant l'unité lorsque r est nul. Pour déterminer cette constante, on observera que le coefficient indépendant de $\frac{1}{t'}$ dans $Z_i^{(0)}$ est $-\frac{A^i}{(-B)^{i+1}}$; c'est la valeur de

λ_0 et par conséquent de H; on aura donc

$$y_{i,x'} = -\sum \frac{i(i-1)(i-2)\dots(i-r+1)}{1.2.3\dots r} \frac{A^{i-r}B^r}{(-B)^i} y_{0,x'+r}.$$

En passant du fini à l'infiniment petit, la méthode précédente donnera l'intégrale des équations linéaires aux différences infiniment petites partielles dont les coefficients sont constants : 1° en intégrant une équation linéaire aux différences infiniment petites; 2° au moyen d'une intégrale définie. Mais ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur cet objet que j'ai considéré ailleurs avec étendue.

On doit faire ici une remarque importante, relative au nombre des fonctions arbitraires que renferme l'expression générale de $y_{i,x'}$. Ce nombre, dans la formule (λ) du numéro précédent, est égal à n; mais il devient plus petit dans le cas où, la valeur de z du n° 13 ne renfermant que des puissances de $\frac{1}{t}$ moindres que n, la plus haute puissance n' de $\frac{1}{t'}$ a un coefficient constant ou indépendant de $\frac{1}{t}$. Alors, en suivant l'analyse précédente et déterminant à son moyen la valeur de $\frac{1}{t'^{x'}}$; comme nous avons déterminé celle de $\frac{1}{t^i}$, en repassant ensuite des fonctions génératrices à leurs coefficients, on parviendra à une formule analogue à la formule (λ); seulement, l'intégrale définie, au lieu de s'étendre jusqu'à $r = i+1$ devra s'étendre jusqu'à $r = x'+1$. Cette nouvelle expression de $y_{i,x'}$ ne dépendra plus que des n' fonctions arbitraires $y_{i,0}$, $y_{i,1}$, $y_{i,2}$, $\dots$, $y_{i,n'-1}$, et tandis que la première suppose la connaissance des n premiers rangs verticaux de la Table (Q) du n° 14, celle-ci n'exige que la connaissance des n' premiers rangs horizontaux de la même Table. Ainsi les n fonctions arbitraires $y_{0,x'}$, $y_{1,x'}$, $y_{2,x'}$, $\dots$, $y_{n-1,x'}$ de la formule (λ) n'équivalent qu'à n' fonctions arbitraires distinctes. En effet, l'équation proposée aux différences partielles donne $y_{i,n'}$ au moyen des valeurs de $y_{i\pm r,0}$, $y_{i\pm r,1}$, $\dots$, $y_{i\pm r,n'-1}$, r étant un nombre entier. Elle donne pareillement $y_{i,n'+1}$ au moyen de $y_{i\pm r,0}$, $y_{i\pm r,1}$, $\dots$, $y_{i\pm r,n'}$, et éliminant $y_{i\pm r,n'}$ au moyen de son expression, on a $y_{i,n'+1}$ au moyen de $y_{i\pm r,0}$, $y_{i\pm r,1}$, $\dots$, $y_{i\pm r,n'-1}$. En continuant ainsi, on voit que l'expression générale de $y_{i,x}$ ne dépend que des arbitraires $y_{i\pm r,0}$, $y_{i\pm r,1}$, $\dots$, $y_{i\pm r,n'-1}$; on peut donc, au moyen des n' premiers rangs horizontaux de la Table (Q), former tous ses rangs verticaux, qui sont, chacun, des fonctions de x' dans lesquelles i est invariable.

En passant du fini à l'infiniment petit, on voit avec évidence que le nombre des fonctions arbitraires des équations aux différentielles partielles peut être moindre que le plus haut degré de la différentielle dans ces équations.

16. Quoique les formules données dans les n^{os} 13 et 14 aient une grande généralité, il y a cependant quelques cas qui n'y sont pas compris. Ces cas ont lieu lorsque l'équation $z = 0$ donne l'expression de $\frac{1}{t^i}$ en $\frac{1}{t'}$ par une suite infinie, ce qui arrive toutes les fois que la plus haute puissance de $\frac{1}{t}$ est multipliée par une fonction rationnelle de $\frac{t}{t'}$. Pour avoir alors l'expression de $y_{x,x'}$ en termes finis, il est nécessaire de recourir à quelques artifices d'analyse que nous allons exposer, en les appliquant à l'équation suivante :

$$(a) \qquad z = \frac{1}{tt'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c.$$

Cette équation donne

$$\frac{1}{t} = \frac{\frac{a}{t'} + c + z}{\frac{1}{t'} - b},$$

par conséquent

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = \frac{u\left(\frac{a}{t'} + c + z\right)^x}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^x t'^{x'}}.$$

En développant le second membre de cette dernière équation, et repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura l'expression de $y_{x,x'}$, car cette quantité est le coefficient de $t^x t'^0$ dans le développement de la fonction génératrice $\frac{u}{t^x t'^{x'}}$; et le coefficient $t^0 t'^0$, dans un terme quelconque du développement du second membre, tel que

$u\frac{kz^k}{t^{x'+r}}$ est $k\nabla^k y_{0,x'+r}$, $\nabla y_{x,x'}$ étant le coefficient de la fonction génératrice uz, coefficient qui est ici égal à

$$y_{x+1,x'+1} - a y_{x,x'+1} - b y_{x+1,x'} - c y_{x,x'}.$$

Si l'on a $o = \nabla y_{x,x'}$, les coefficients des termes affectés de z disparaîtront, et alors on aura l'expression de $y_{x,x'}$ en fonction de $y_{0,x'}$, $y_{0,x'+1}$, $y_{0,x'+2}$, ... Cette expression sera l'intégrale de l'équation

$$(b) \qquad o = y_{x+1,x'+1} - a y_{x,x'+1} - b y_{x+1,x'} - c y_{x,x'}.$$

Pour avoir cette expression, z peut être considéré comme nul, puisque l'on ne doit avoir égard qu'aux termes indépendants de z; l'équation (a) devient ainsi

$$o = \frac{1}{tt'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c;$$

c'est ce que je nomme *équation génératrice* de l'équation (b) aux différences partielles. En effet on obtient cette dernière équation en multipliant la précédente par u et repassant des fonctions génératrices aux coefficients.

L'expression que l'on obtient par l'analyse précédente pour $y_{x,x'}$ est une suite infinie. On parviendra de cette manière à une expression finie. Reprenons la valeur de $\frac{u}{t^x t'^{x'}}$, et donnons lui cette forme

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = \frac{u\left(\frac{1}{t'} - b + b\right)^{x'}\left[c + ab + a\left(\frac{1}{t} - b\right)\right]^x}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^x}.$$

Si l'on développe le second membre de cette équation par rapport aux puissances de $\frac{1}{t'} - b$, on aura

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = u\left[\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + x' b\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} + \frac{x'(x'-1)}{1.2} b^2\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-2} + \ldots\right]$$
$$\times\left[a^x + x(c+ab)\frac{a^{x-1}}{\frac{1}{t'} - b} + \frac{x(x-1)}{1.2}(c+ab)^2\frac{a^{x-2}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^2} + \ldots\right].$$

Soit

$$V = a^x,$$
$$V^{(1)} = x' b a^x + x(c+ab)a^{x-1},$$
$$V^{(2)} = \frac{x'(x'-1)}{1.2} b^2 a^x + x' x b(c+ab)a^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}(c+ab)^2 a^{x-2},$$
$$V^{(3)} = \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{1.2.3} b^3 a^x + \frac{x'(x'-1)}{1.2} x b^2 (c+ab) a^{x-1}$$
$$+ x' \frac{x(x-1)}{1.2} b(c+ab)^2 a^{x-2}$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(c+ab)^3 a^{x-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on aura

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = u\left\{\begin{array}{l} V\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + V^{(1)}\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} + V^{(2)}\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-2} + \ldots + V^{(x')} \\ + \frac{V^{(x'+1)}}{\frac{1}{t'} - b} + \frac{V^{(x'+2)}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^2} + \ldots + \frac{V^{(x'+x)}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^x} \end{array}\right\}.$$

Or l'équation

$$\frac{1}{tt'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c = o$$

donne

$$\frac{1}{\frac{1}{t'} - b} = \frac{\frac{1}{t} - a}{c + ab},$$

partant

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = u\left\{\begin{array}{l} V\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + V^{(1)}\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} + \ldots + V^{(x')} \\ + \frac{V^{(x'+1)}}{c+ab}\left(\frac{1}{t} - a\right) + \frac{V^{(x'+2)}}{(c+ab)^2}\left(\frac{1}{t} - a\right)^2 + \ldots + \frac{V^{(x'+x)}}{(c+ab)^x}\left(\frac{1}{t} - a\right)^x \end{array}\right\}.$$

Pour repasser maintenant des fonctions génératrices aux coefficients, nous observerons : 1° que le coefficient de $t^o t'^o$ dans $\frac{u}{t^x t'^{x'}}$ est $y_{x,x'}$; 2° que

ce même coefficient, dans un terme quelconque, tel que $u\left(\frac{1}{t}-b\right)^r$ ou $ub^r\left(\frac{1}{bt}-1\right)^r$, est $br\,{}'\Delta^r\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)$, la caractéristique $'\Delta$ des différences se rapportant à la variabilité de x', et cette variable devant être supposée nulle après les différentiations; 3° que ce coefficient dans $u\left(\frac{1}{t}-a\right)^r$ est $a^r\Delta^r\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)$, la caractéristique Δ se rapportant à la variabilité de x, et cette variable devant être supposée nulle après les différentiations; on aura donc, avec ces conditions,

$$y_{x,x'}=\mathrm{V}b^{x'}\,{}'\Delta^{x'}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)+\mathrm{V}^{(1)}b^{x'-1}\,{}'\Delta^{x'-1}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)+\ldots+\mathrm{V}^{(x')}y_{0,0}$$
$$+\frac{a}{c+ab}\mathrm{V}^{(x'+1)}\Delta\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)+\frac{a^2}{(c+ab)^2}\mathrm{V}^{(x'+2)}\Delta^2\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)+\ldots$$
$$+\frac{a^x}{(c+ab)^x}\mathrm{V}^{(x'+x)}\Delta^x\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right);$$

c'est l'intégrale complète de l'équation (b) aux différences partielles. Il est clair que cette intégrale suppose que l'on connaît le premier rang horizontal et le premier rang vertical de la Table (Q) du n° **14**.

17. L'expression précédente de $y_{x,x'}$ offre cela de remarquable, savoir que les caractéristiques Δ et $'\Delta$ des différences finies ont pour exposants les variables x et x'. En voici un autre exemple. Considérons l'équation aux différences partielles

$$0=\Delta^n y_{x,x'}+\frac{a}{\alpha}\Delta^{n-1}\,{}'\Delta y_{x,x'}+\frac{b}{\alpha^2}\Delta^{n-2}\,{}'\Delta^2 y_{x,x'}+\ldots,$$

la caractéristique Δ se rapportant à la variable x dont l'unité est la différence, et la caractéristique $'\Delta$ se rapportant à la variable x' dont α est la différence. L'équation génératrice correspondante sera, par le numéro précédent,

$$0=\left(\frac{1}{t}-1\right)^n+\frac{a}{\alpha}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'^{\alpha}}-1\right)+\frac{b}{\alpha^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'^{\alpha}}-1\right)^2+\ldots.$$

Cette équation donne les n suivantes :

$$\frac{1}{t}-1=\frac{q}{\alpha}\left(1-\frac{1}{t'^{\alpha}}\right),$$
$$\frac{1}{t}-1=\frac{q'}{\alpha}\left(1-\frac{1}{t'^{\alpha}}\right),$$
$$\frac{1}{t}-1=\frac{q''}{\alpha}\left(1-\frac{1}{t'^{\alpha}}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$q, q', q'', \ldots$ étant les n racines de l'équation

$$0=z^n-az^{n-1}+bz^{n-2}-\ldots.$$

L'équation

$$\frac{1}{t}-1=\frac{q}{\alpha}\left(1-\frac{1}{t'^{\alpha}}\right)$$

donne

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}}=\frac{u}{t'^{x'}}\left(1+\frac{q}{\alpha}-\frac{q}{\alpha}\frac{1}{t'^{\alpha}}\right)^x$$
$$=\frac{u}{t'^{x'}}(-1)^x\left(\frac{q^x}{\alpha^x}\frac{1}{t'^{\alpha x}}-x\frac{q^{x-1}}{\alpha^{x-1}}\left(1+\frac{q}{\alpha}\right)\frac{1}{t'^{\alpha(x-1)}}\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right).$$

En repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$y_{x,x'}=(-1)^x\left[\frac{q^x}{\alpha^x}y_{0,x'+\alpha x}-x\frac{q^{x-1}}{\alpha^{x-1}}\left(1+\frac{q}{\alpha}\right)y_{0,x'+\alpha(x-1)}+\ldots\right].$$

Le second membre de cette équation peut être mis sous la forme

$$\left(1+\frac{\alpha}{q}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}}\left(-\frac{q}{\alpha}\right)^x\Delta^x\left[\left(\frac{q}{\alpha+q}\right)^{\frac{x'}{\alpha}}y_{0,x'}\right].$$

En désignant donc par la fonction arbitraire $\varphi(x')$ la quantité $\left(\frac{q}{\alpha+q}\right)^{\frac{x'}{\alpha}}y_{0,x'}$, l'expression de $y_{x,x'}$ deviendra

$$y_{x,x'}=\left(1+\frac{\alpha}{q}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}}\left(-\frac{q}{\alpha}\right)^x\Delta^x\varphi(x').$$

Cette valeur satisfait donc à l'équation proposée aux différences partielles. Il est visible que chacune des racines q', q'', ... fournit une valeur semblable, dans laquelle on peut introduire une autre arbitraire. Nous désignerons par $\varphi_1(x')$, $\varphi_2(x')$, ... ces nouvelles arbitraires. La réunion de toutes ces valeurs satisfera à l'équation proposée, parce qu'elle est linéaire, et cette réunion en sera l'intégrale complète, qui est ainsi

$$y_{x,x'} = \left(1+\frac{\alpha}{q}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}}\left(-\frac{q}{\alpha}\right)^{x}\Delta^{x}\varphi(x') + \left(1+\frac{\alpha}{q'}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}}\left(-\frac{q'}{\alpha}\right)^{x}\Delta^{x}\varphi_1(x') + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on suppose α infiniment petit et égal à dx'; si l'on observe d'ailleurs que

$$\left(1+\frac{dx'}{q}\right)^{x+\frac{x'}{dx'}} = c^{\frac{x'}{q}},$$

comme il est facile de s'en convaincre, en prenant les logarithmes de chaque membre de cette équation, on aura

$$y_{x,x'} = c^{\frac{x'}{q}}(-q)^{x}\left[\frac{d^x\varphi(x')}{dx'^x}\right] + c^{\frac{x'}{q'}}(-q')^{x}\left[\frac{d^x\varphi_1(x')}{dx'^x}\right] + \ldots;$$

c'est l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles finies et infiniment petites

$$0 = \Delta^n y_{x,x'} + a\Delta^{n-1}\left(\frac{dy_{x,x'}}{dx'}\right) + b\Delta^{n-2}\left(\frac{d^2y_{x,x'}}{dx'^2}\right) + \ldots.$$

Toutes les équations aux différences partielles que nous avons examinées jusqu'ici n'ont point de dernier terme indépendant de la variable principale. Si elles en avaient, on y aurait égard, et l'on intégrerait ces équations par la méthode que nous avons donnée pour cet objet, relativement aux équations aux simples différences, et qu'il est facile d'appliquer aux équations à différences partielles.

Théorèmes sur le développement en séries des fonctions de plusieurs variables.

18. Si l'on applique aux fonctions de plusieurs variables la méthode du n° **11**, on aura sur le développement de ces fonctions en séries des théorèmes analogues à ceux du n° **10**. Considérons la fonction génératrice $u\left(\frac{1}{tt't''\ldots}-1\right)^n$, et donnons-lui cette forme

$$u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)\ldots-1\right]^n,$$

u étant supposé une fonction de t, t', t'', ..., dans le développement de laquelle $y_{x,x',x''\ldots}$ est le coefficient de $t^x t'^{x'} t''^{x''}\ldots$. Ce coefficient dans le développement de $u\left(\frac{1}{tt't''\ldots}-1\right)^n$ sera $\Delta^n y_{x,x',x''\ldots}$, x, x', x'', ... étant supposés varier de l'unité dans $y_{x,x',x''\ldots}$. Ce même coefficient, dans le développement de la fonction génératrice

$$u\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}\left(\frac{1}{t''}-1\right)^{r''}\ldots,$$

sera

$$'\Delta^r\,''\Delta^{r'}\,'''\Delta^{r''}\ldots y_{x,x',x''\ldots},$$

les caractéristiques $'\Delta$, $''\Delta$, $'''\Delta$, ... se rapportant respectivement aux variables x, x', x'', ...; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$\Delta^n y_{x,x',x''\ldots} = [(1+{}'\Delta y_{x,x',x''\ldots})(1+{}''\Delta y_{x,x',x''\ldots})(1+{}'''\Delta y_{x,x',x''\ldots})\ldots-1]^n,$$

pourvu que, dans le développement du second membre de cette équation, on applique aux caractéristiques $'\Delta$, $''\Delta$, ... les exposants des puissances de $'\Delta y_{x,x',x''\ldots}$, $''\Delta y_{x,x',x''\ldots}$, ...

En changeant n dans $-n$, la même équation subsiste encore, pourvu que l'on change, comme dans les n^os^ **10** et **11**, les caractéristiques Δ, $'\Delta$, $''\Delta$, ..., lorsqu'elles ont un exposant négatif, en intégrales finies

correspondantes, les signes Σ, $'\Sigma$, $''\Sigma$, ... étant les caractéristiques des intégrales, correspondantes aux caractéristiques Δ, $'\Delta$, $''\Delta$, ... des différences.

Il est clair que $u\left(\frac{1}{t^i t'^{i'} t''^{i''} \ldots} - 1\right)^n$ est la fonction génératrice de la différence finie $n^{\text{ième}}$ de $y_{x,x',x'',\ldots}$, x variant de i, x' variant de i', x'' variant de i'', ... Or on a

$$u\left(\frac{1}{t^i t'^{i'} t''^{i''} \ldots} - 1\right)^n = u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i \left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^{i'} \left(1+\frac{1}{t''}-1\right)^{i''} \ldots - 1\right]^n;$$

en désignant donc par $\overline{\Delta}$ la caractéristique des différences, lorsque x varie de i, x' de i', x'' de i'', ..., et par $\overline{\Sigma}$ la caractéristique intégrale correspondante, on aura

$$\overline{\Delta}^n y_{x,x',x'',\ldots} = [(1+{}'\Delta y_{x,x',x'',\ldots})^i (1+{}''\Delta y_{x,x',x'',\ldots})^{i'} \ldots - 1]^n,$$

$$\overline{\Sigma}^n y_{x,x',x'',\ldots} = \frac{1}{[(1+{}'\Delta y_{x,x',x'',\ldots})^i (1+{}''\Delta y_{x,x',x'',\ldots})^{i'} \ldots - 1]^n},$$

pourvu que, dans le développement du second membre de ces équations, on applique aux caractéristiques $'\Delta$, $''\Delta$, ... les exposants des puissances de ${}'\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ${}''\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ..., et que l'on change les différences négatives en intégrales. On peut ainsi se dispenser d'indiquer les arbitraires que l'intégrale finie $\overline{\Sigma}^n$ doit introduire, parce qu'elles sont censées renfermées dans les intégrales que donne le développement de son expression.

Les deux équations précédentes ont encore lieu en supposant que dans les différences ${}'\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ${}''\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ..., x, x', x'', ..., au lieu de varier de l'unité, varient d'une quantité quelconque ϖ, pourvu que, dans la différence $\overline{\Delta} y_{x,x',x'',\ldots}$, x varie de $i\varpi$, x' de $i'\varpi$, x'' de $i''\varpi$, ... Maintenant, si l'on suppose ϖ infiniment petit, les différences ${}'\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ${}''\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ... se changeront, la première dans $dx\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx}$, la seconde dans $dx'\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx'}$, ... De plus, si l'on fait i, i', i'', ... infiniment grands, et tels que l'on ait

$$i\,dx = \alpha, \qquad i'\,dx' = \alpha', \qquad \ldots,$$

on aura

$$(1+{}'\Delta y_{x,x',\ldots})^i = \left(1+dx\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx}\right)^{\frac{\alpha}{dx}} = e^{\alpha\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx}},$$

e étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On aura pareillement

$$(1+{}''\Delta y_{x,x',\ldots})^{i'} = e^{\alpha'\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx'}},$$

et ainsi de suite; partant

$$\overline{\Delta}^n y_{x,x',\ldots} = \left(e^{\alpha\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx}+\alpha'\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx'}+\ldots}-1\right)^n,$$

$$\overline{\Sigma}^n y_{x,x',\ldots} = \frac{1}{\left(e^{\alpha\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx}+\alpha'\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx'}+\ldots}-1\right)^n},$$

x variant de α, x' de α', ..., dans les deux premiers membres de ces équations.

Si, au lieu de supposer ϖ infiniment petit, on le suppose égal à l'unité, et i infiniment petit et égal à dx; si l'on suppose encore i', i'', ... infiniment petits et respectivement égaux à dx', dx'', ..., on aura

$$(1+{}'\Delta y_{x,x',\ldots})^i = (1+{}'\Delta y_{x,x',\ldots})^{dx} = 1+dx\log(1+{}'\Delta y_{x,x',\ldots});$$

on aura pareillement

$$(1+{}''\Delta y_{x,x',\ldots})^{i'} = 1+dx'\log(1+{}''\Delta y_{x,x',\ldots}),$$

.....

D'ailleurs $\overline{\Delta}^n y_{x,x',\ldots}$ se change alors dans $d^n y_{x,x',\ldots}$; on aura donc

$$d^n y_{x,x',\ldots} = [dx\log(1+{}'\Delta y_{x,x',\ldots}) + dx'\log(1+{}''\Delta y_{x,x',\ldots}) + \ldots]^n,$$

équation qui, en faisant n négatif, subsiste encore, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales. Ces divers résultats sont analogues à ceux que nous avons trouvés dans le n° **10**, relativement aux fonctions d'une seule variable, et l'on y retrouve l'analogie que nous avons observée entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales.

Considérations sur le passage du fini à l'infiniment petit.

19. Le passage du fini à l'infiniment petit consiste à négliger les différences infiniment petites par rapport aux quantités finies, et généralement les infiniment petits d'un ordre supérieur relativement à ceux d'un ordre inférieur. Cette omission semble ôter à ce passage la rigueur géométrique; mais, pour se convaincre de son entière exactitude, il suffit de le considérer comme le résultat de la comparaison des puissances homogènes d'une variable indéterminée, dans le développement des termes d'une équation qui subsiste, quelle que soit cette indéterminée; car il est clair que les termes affectés de la même puissance doivent se détruire mutuellement.

Pour rendre cela sensible par un exemple, considérons l'équation suivante que donne l'équation (q) du n° **10**, en y faisant $n = 1$,

$$'\Delta y_x = (1 + dy_x)^{\frac{\alpha}{dx}} - 1.$$

$'\Delta$ est la caractéristique des différences finies, x' variant de α, et d est la caractéristique des différences, x' variant de dx'. L'équation précédente développée donne, en appliquant, conformément à l'analyse du numéro cité, les exposants des puissances de $dy_{x'}$ à la caractéristique d,

$$'\Delta y_{x'} = \frac{\alpha}{dx'} dy_{x'} + \frac{\alpha^2 - \alpha\, dx'}{1.2.dx'^2} d^2 y_{x'} + \ldots;$$

$dy_{x'}$ est égal à $y_{x'+dx'} - y_{x'}$. Supposons qu'en développant la fonction de $x' + dx'$, représentée par $y_{x'+dx'}$, on ait

$$y_{x'+dx'} = y_{x'} + dx' y'_{x'} + dx'^2 z_{x'} + \ldots;$$

on aura

$$dy_{x'} = dx' y'_{x'} + dx'^2 z_{x'} + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$d^2 y_{x'} = dx' dy'_{x'} + dx'^2 dz_{x'} + \ldots$$

Développons pareillement $y'_{x'+dx'}$, $z_{x'+dx'}$, ... suivant les puissances

de dx', et supposons que l'on ait

$$y'_{x'+dx'} = y'_{x'} + dx' y''_{x'} + dx'^2 s_{x'} + \ldots,$$
$$z_{x'+dx'} = z_{x'} + dx' z'_{x'} + \ldots,$$

on aura

$$dy'_{x'} = dx' y''_{x'} + dx'^2 s_{x'} + \ldots,$$
$$dz_{x'} = dx' z'_{x'} + \ldots,$$

partant

$$d^2 y_{x'} = dx'^2 y''_{x'} + dx'^3 s_{x'} + \ldots + dx'^3 z'_{x'} + \ldots.$$

L'expression précédente de $'\Delta y_{x'}$ deviendra ainsi

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{l} '\Delta y_{x'} = \alpha y'_{x'} + \dfrac{\alpha^2}{1.2} y''_{x'} + \ldots \\ \qquad + dx' \left\{ \begin{array}{l} \alpha\,(z_{x'} - \frac{1}{2} y''_{x'} + \ldots) \\ + \alpha^2 (s_{x'} + \ z''_{x'} + \ldots) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \\ \qquad + dx'^2 \ldots, \end{array} \right.$$

dx' étant indéterminé; les termes indépendants de dx' doivent être égalés séparément entre eux; on a donc

$$\Delta y_{x'} = \alpha y_{x'} + \frac{\alpha^2}{1.2} y''_{x'} + \ldots.$$

Maintenant $y'_{x'}$ est le coefficient de dx' dans le développement de $y_{x'+dx'}$; c'est ce que l'on désigne dans le Calcul différentiel par $\frac{dy_{x'}}{dx'}$. Pareillement $y''_{x'}$ est le coefficient de dx' dans le développement de $y'_{x'+dx'}$; c'est ce que l'on désigne par $\frac{dy'_{x'}}{dx'}$, ou par $\frac{d^2 y_{x'}}{dx'^2}$, et ainsi de suite; en substituant donc, dans l'équation précédente, $y_{x'+\alpha} - y_{x'}$ au lieu de $'\Delta y_{x'}$, on aura le théorème suivant :

$$y_{x'+\alpha} = y_{x'} + \alpha \frac{dy_{x'}}{dx'} + \frac{\alpha^2}{1.2} \frac{d^2 y_{x'}}{dx'^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \frac{d^3 y_{x'}}{dx'^3} + \ldots.$$

Considéré comme résultat de la comparaison des termes indépendants

de dx', ce théorème ne laisse aucun doute sur son exactitude rigoureuse, et il est visible par l'analyse précédente que cette comparaison revient à négliger les termes multipliés par dx' et ses puissances, relativement aux quantités finies; cette omission n'ôte donc rien à la rigueur du Calcul différentiel. Mais on voit de plus, *a priori*, que les termes affectés de la même puissance de l'indéterminée dx' doivent se détruire mutuellement, ce que l'on peut vérifier *a posteriori*. Ainsi ce que l'on néglige comme infiniment petit est rigoureusement nul, en sorte que l'omission des infiniment petits, relativement aux quantités finies, n'est au fond qu'un moyen facile d'éliminer les termes superflus qui doivent disparaître dans le résultat final.

Ce rapprochement du Calcul aux différences finies et du Calcul différentiel met en évidence la rigueur des résultats de ce dernier calcul, et donne sa vraie métaphysique; mais ses applications à l'étendue, à la durée et au mouvement supposent de plus le principe des limites. On peut, par un rapprochement semblable, éclaircir divers points de l'Analyse infinitésimale, qui ont été des sujets de contestation parmi les géomètres : telle est la discontinuité des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations aux différences partielles. Ceux qui ont rejeté cette discontinuité se fondaient sur ce que l'analyse ordinaire des différences infiniment petites suppose que les différentielles successives d'une fonction doivent être infiniment petites relativement aux précédentes, ce qui n'a point lieu lorsque la fonction est discontinue. Pour éclaircir cette question délicate, il faut la considérer dans les différences finies, et observer ce qui arrive dans le passage de ces différences aux différences infiniment petites.

Prenons pour exemple l'équation suivante aux différences finies partielles :

$$(a) \qquad (y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'}) - (y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1}) = 0;$$

son équation génératrice est, par le n° **16**,

$$t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 - t'\left(\frac{1}{t'}-1\right)^2 = 0,$$

et, en suivant l'analyse donnée précédemment, il est facile d'en conclure que l'intégrale complète de l'équation proposée (a) est

$$y_{x,x'} = \varphi(x+x') + \psi(x-x'),$$

$\varphi(x+x')$ étant une fonction arbitraire de $x+x'$, et $\psi(x-x')$ étant une fonction arbitraire de $x-x'$. Il est facile d'ailleurs de s'assurer que cette valeur satisfait à la proposée, et qu'elle en est l'intégrale complète, puisqu'elle renferme deux fonctions arbitraires.

Supposons présentement que, dans la Table suivante

$$(Z) \qquad \begin{cases} y_{0,0}, & y_{1,0}, & y_{2,0}, & y_{3,0}, & \dots, & y_{n-1,0}, & y_{n,0}, \\ y_{0,1}, & y_{1,1}, & y_{2,1}, & y_{3,1}, & \dots, & y_{n-1,1}, & y_{n,1}, \\ y_{0,2}, & y_{1,2}, & y_{2,2}, & y_{3,2}, & \dots, & y_{n-1,2}, & y_{n,2}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ y_{0,\infty}, & y_{1,\infty}, & y_{2,\infty}, & y_{3,\infty}, & \dots, & y_{n-1,\infty}, & y_{n,\infty}, \end{cases}$$

on connaisse les deux premiers rangs horizontaux compris entre les deux colonnes verticales extrêmes

$$y_{0,0}, \quad y_{0,1}, \quad y_{0,2}, \quad \dots, \quad y_{0,\infty},$$
$$y_{n,0}, \quad y_{n,1}, \quad y_{n,2}, \quad \dots, \quad y_{n,\infty},$$

et que l'on connaisse de plus tous les termes de ces deux colonnes; on pourra déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$ qui tombent entre ces colonnes. Car, si l'on veut former le troisième rang horizontal, on observera que l'équation (a) donne

$$y_{x,x'+1} = y_{x+1,x} + y_{x-1,x} - y_{x,x'-1}.$$

En faisant, dans cette dernière équation, $x'=1$, et successivement $x=1$, $x=2$, $x=3$, $\dots$, $x=n-1$, on aura les valeurs de $y_{1,2}, y_{2,2}, y_{3,2}, \dots, y_{n-1,2}$, ou le troisième rang horizontal, au moyen des deux premiers rangs horizontaux. On formera de la même manière le quatrième rang horizontal, et ainsi de suite à l'infini. Mais, si l'on veut déterminer les valeurs de $y_{x,x'}$, qui tombent hors de la Table (Z), les conditions précédentes ne suffisent pas, et il faut leur en ajouter d'autres.

Reprenons l'intégrale

$$y_{x,x'} = \varphi(x+x') + \psi(x-x'),$$

et supposons que le second rang horizontal, qui détermine une des deux fonctions arbitraires, soit tel que l'on ait

$$\psi(x-x') = \varphi(x-x');$$

on aura

$$y_{x,x'} = \varphi(x+x') + \varphi(x-x').$$

En faisant $x' = 0$, on a

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} y_{x,0};$$

partant

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{2} y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x',0}.$$

Il est facile de voir que cette équation satisfait à l'équation proposée (a); mais elle n'en est qu'une intégrale particulière, qui répond au cas où le second rang horizontal se forme du premier, au moyen de l'équation

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2} y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2} y_{x-1,0}.$$

Tant que $x+x'$ sera égal ou moindre que n, et que $x-x'$ sera positif ou nul, on aura la valeur de $y_{x,x'}$ au moyen du premier rang horizontal. Mais, lorsque, x croissant, $x+x'$ deviendra plus grand que n, ou lorsque $x-x'$ deviendra négatif, il faudra déterminer les valeurs de $y_{x+x',0}$ et de $y_{x-x',0}$ au moyen des deux colonnes verticales extrêmes. Supposons que tous les termes de ces colonnes soient nuls, et que l'on ait ainsi $y_{0,x'} = 0$ et $y_{n,x'} = 0$. En faisant x nul dans l'équation

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{2} y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x',0},$$

on aura

$$y_{-x',0} = -y_{x',0}.$$

En faisant ensuite $x = n$ dans la même équation, on aura

$$y_{n+x',0} = -y_{n-x',0}.$$

Si l'on change ensuite, dans cette dernière équation, x' en $n+x'$, on aura

$$y_{2n+x',0} = -y_{-x',0} = y_{x',0};$$

en changeant encore x' dans $n+x'$, on aura

$$y_{3n+x',0} = y_{n+x',0} = -y_{n-x',0},$$

et généralement on aura

$$y_{2rn+x',0} = y_{x',0},$$
$$y_{(2r+1)n+x',0} = -y_{n-x',0}.$$

On pourra ainsi, au moyen de ces deux équations, continuer les valeurs de $y_{x,x'}$ à l'infini, du côté des valeurs positives de x, et l'on en conclura celles qui répondent à x négatif, au moyen de l'équation

$$y_{-x',0} = -y_{x',0}.$$

De là résulte la construction suivante. Représentons les valeurs de $y_{x,0}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, par les ordonnées menées aux angles d'un polygone dont l'abscisse soit x, et dont les deux extrémités, que je désigne par A et B, aboutissent aux points où $x = 0$ et $x = n$. On portera ce polygone depuis $x = n$ jusqu'à $x = 2n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avait depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, c'est-à-dire une position telle que les parties qui étaient au-dessus de l'axe des abscisses x se trouvent au-dessous, le point B restant d'ailleurs dans cette seconde position, à la même place que dans la première, et le point A répondant ainsi à l'abscisse $x = 2n$. On placera ensuite ce même polygone depuis $x = 2n$ jusqu'à $x = 3n$, en lui donnant une position contraire à la seconde et par conséquent semblable à la première, de manière que le point A, dans cette troisième position, conserve la place qu'il avait dans la seconde, et qu'ainsi le point B réponde à l'abscisse $x = 3n$. En continuant de placer ainsi ce polygone alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, les ordonnées menées aux angles de cette suite de polygones seront les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x positif.

Pareillement, on placera ce polygone depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avait depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, A restant d'ailleurs à la même place dans ces deux positions. On placera ensuite ce polygone depuis $x = -n$ jusqu'à

$x = -2n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, le point B conservant la même place, et ainsi de suite à l'infini. Les ordonnées de ces polygones représentent les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x négatif. On aura ensuite la valeur de $y_{x,x'}$ en prenant la demi-somme des deux ordonnées qui répondent aux abscisses $x + x'$ et $x - x'$.

Cette construction géométrique est générale, quelle que soit la nature du polygone que nous venons de considérer. Elle servira à déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$ comprises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, et depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$, pourvu que l'on ait $y_{0,x'} = 0$ et $y_{n,x'} = 0$, et que d'ailleurs le second rang horizontal de la Table (Z) soit tel, que l'on ait

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2} y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2} y_{x-1,0}.$$

On a, par ce qui précède,

$$y_{x,x+n} = \tfrac{1}{2} y_{x+x+n,0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x-n,0};$$

de plus,

$$y_{x+x+n,0} = -y_{n-x-x',0}, \qquad y_{x-x'-n,0} = -y_{n-x+x',0};$$

donc

$$y_{x,x+n} = -\tfrac{1}{2} y_{n-x-x',0} - \tfrac{1}{2} y_{n-x+x',0} = -y_{n-x,x'}.$$

Il suit de là que, dans la Table (Z), le $(n + x')^{\text{ième}}$ rang horizontal est le $x'^{\text{ième}}$ rang pris avec un signe contraire et dans un ordre renversé, en sorte que le terme $r^{\text{ième}}$ du rang $(n + x')^{\text{ième}}$ est le même que le terme $(n - r)^{\text{ième}}$ du $x'^{\text{ième}}$ rang pris avec un signe contraire. On a ensuite

$$y_{x,2n+x} = \tfrac{1}{2} y_{2n+x+x',0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x'-2n,0};$$

on a d'ailleurs, par ce qui précède,

$$y_{2n+x+x',0} = y_{x+x',0},$$

$$y_{x-x'-2n,0} = -y_{2n+x'-x,0} = -y_{x'-x} = y_{x-x'};$$

partant

$$y_{n,2n+x} = \tfrac{1}{2} y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x',0} = y_{x,x'},$$

d'où il suit que le $(2n + x')^{\text{ième}}$ rang horizontal est exactement égal au $x'^{\text{ième}}$ rang.

Considérons présentement les vibrations d'une corde tendue, dont la figure initiale soit quelconque, pourvu qu'elle soit très rapprochée dans tous ses points de l'axe des abscisses. Nommons x l'abscisse, t le temps, $y_{x,t}$ l'ordonnée d'un point quelconque de la corde après le temps t. Concevons de plus l'abscisse x partagée dans une infinité de parties égales à dx, et que nous prendrons pour unité, ce qui revient à considérer x comme un nombre infini. Cela posé, on aura, par les principes de dynamique,

$$\frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial t^2} = \frac{a^2}{dx^2} (y_{x+1,t} - 2y_{x,t} + y_{x-1,t}),$$

a étant un coefficient constant dépendant de la tension et de la grosseur de la corde. Si l'on fait $t = \frac{x'}{a}$, on aura $dt = \frac{dx'}{a}$, et $y_{x,t}$ deviendra une fonction de x et de x', que nous désignons par $y_{x,x'}$; or, la grandeur de dt étant arbitraire, on peut la supposer telle que la variation de x' soit égale à celle de x, que nous avons prise pour l'unité; l'équation précédente devient ainsi

$$y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1} = y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'},$$

x et x' étant ici des nombres infinis. Cette équation est la même que celle que nous venons de considérer; ainsi la construction géométrique que nous avons donnée précédemment peut être employée dans ce cas; le polygone dont les ordonnées des angles sont représentées par $y_{x,0}$ est ici la figure initiale de la corde; mais il faut pour cela supposer la longueur n divisée dans une infinité de parties égales à dx. Il faut de plus que la corde soit fixe à ses extrémités, afin que l'on ait $y_{0,x'} = 0$, $y_{n,x'} = 0$. D'ailleurs l'équation de condition

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2} y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2} y_{x-1,0}$$

ou, ce qui revient au même,

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \tfrac{1}{2} (y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

se change en celle-ci,

$$dt\,\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\,dx^2\,\frac{\partial^2 y_{x,0}}{\partial x^2};$$

ce qui donne

$$\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} = 0,$$

Or $\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t}$ est la vitesse initiale de la corde; cette vitesse doit donc être nulle à l'origine du mouvement. Toutes les fois que ces conditions auront lieu, la construction précédente donnera toujours le mouvement de la corde, quelle que soit sa figure initiale, pourvu cependant que, dans tous ses points, $y_{x+2,0} - 2y_{x+1,0} + y_{x,0}$ soit un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire que deux éléments contigus de la corde ne forment point un angle fini. Cette condition est nécessaire pour que l'équation différentielle du problème puisse subsister, et pour que celle-ci

$$dt\,\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} = \tfrac{1}{2}(y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

donne $\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} = 0$. Mais d'ailleurs il est évident, par ce qui précède, que la figure initiale de la corde peut être discontinue et formée d'un nombre quelconque d'arcs de courbes différentes, pourvu que ces arcs se touchent.

Les diverses situations de la corde dans son mouvement sont représentées par les rangs horizontaux de la table (Z), et comme les rangs qui correspondent aux valeurs de x', $x' + 2n$, $x' + 4n$, ... sont les mêmes par ce qui précède, il en résulte que la corde revient à la même situation après les temps t, $t + \frac{2n}{a}$, $t + \frac{4n}{a}$, ...

On voit encore, par la construction géométrique donnée ci-dessus, que, si l'on conçoit une suite de cordes liées entre elles et placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, comme dans cette construction, toutes ces cordes vibreront de la même manière, en sorte que, leurs figures initiales étant les mêmes, leurs figures seront constamment pareilles. On peut même ne fixer que les deux extrémités de cette suite, et laisser leurs nœuds entièrement libres;

car les éléments des deux cordes au point de leur jonction étant en ligne droite et également tendus, ce point n'a aucune tendance à se mouvoir et doit conséquemment rester immobile, ce que l'expérience confirme.

Cette analyse des cordes vibrantes établit d'une manière incontestable la possibilité d'admettre des fonctions discontinues dans ce problème, et l'on en doit généralement conclure que ces fonctions peuvent être employées dans tous les problèmes qui dépendent d'équations à différences partielles infiniment petites, pourvu qu'elles puissent subsister avec ces équations et avec les conditions du problème. On peut en effet considérer ces équations comme des cas particuliers d'équations aux différences finies, dans lesquelles on suppose que les variables deviennent infinies; or, rien n'étant négligé dans la théorie des équations aux différences finies partielles, il est visible que les fonctions arbitraires de leurs intégrales ne sont point assujetties à la loi de continuité, et que les constructions de ces équations au moyen de polygones ont lieu, quelle que soit la nature de ces polygones. Maintenant, lorsqu'on passe du fini à l'infiniment petit, ces polygones se changent dans des courbes qui, par conséquent, peuvent être discontinues; ainsi la loi de continuité n'est nécessaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales, ni dans les constructions géométriques qui les représentent. Il faut seulement observer que, si l'équation aux différentielles partielles en $y_{x,x'}$ est de l'ordre n, il ne doit point y avoir de saut entre deux valeurs consécutives de $\frac{\partial^{n-r} y_{x,x'}}{\partial x^s \partial x'^{n-r-s}}$, r et s étant des nombres entiers positifs, s pouvant être nul; c'est-à-dire que la différentielle de cette quantité doit être infiniment petite par rapport à cette quantité elle-même. Cette condition est indispensable pour que l'équation différentielle proposée puisse subsister, parce que toute équation différentielle partielle suppose que les différentielles partielles de $y_{x,x'}$ dont elle est formée, et divisées par les puissances respectives de dx et de dx', sont des quantités finies et comparables entre elles; mais rien n'oblige d'admettre la même condition relativement aux diffé-

rences de $y_{x,x}$ de l'ordre n ou d'un ordre supérieur. En prenant pour fonctions arbitraires les différences les plus élevées des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale d'une équation aux différences partielles, cette intégrale ne renfermera plus alors que des fonctions arbitraires et leurs intégrales successives qui sont continues, parce qu'en général l'intégrale $\int ds\varphi(s)$ est continue dans le cas même où la fonction $\varphi(s)$ ne l'est pas. La condition précédente se réduit donc à ce que la différence $(n-1)^{\text{ième}}$ de chaque fonction arbitraire soit continue, c'est-à-dire que sa différentielle soit infiniment plus petite. Il ne doit donc point y avoir de saut entre deux tangentes consécutives de la courbe qui représente la fonction arbitraire de l'intégrale d'une équation aux différentielles partielles du second ordre; ainsi, dans le problème des cordes vibrantes que nous venons de discuter, il est nécessaire et il suffit que deux éléments quelconques contigus de la figure initiale de la corde forment entre eux un angle infiniment peu différent de deux angles droits. Il ne doit point y avoir de saut entre deux rayons osculateurs consécutifs de la courbe qui représente la fonction arbitraire continue dans l'intégrale, si l'équation aux différences partielles est du troisième ordre, et ainsi de suite.

Considérations générales sur les fonctions génératrices.

20. Il est souvent inutile de connaître la fonction génératrice d'une quantité donnée par une équation aux différences finies, ordinaires ou partielles, parce que, l'Analyse offrant divers moyens pour développer les fonctions en séries, on peut ainsi obtenir d'une manière fort simple la valeur de la quantité cherchée. Il résulte du n° 5 que la quantité y_x, donnée par l'équation aux différences finies

$$0 = ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots + py_{x+n-1} + qy_{x+n},$$

est le coefficient de t^x dans le développement de la fonction

$$\frac{A + Bt + Ct^2 + \ldots + Ht^{n-1}}{at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + \ldots + pt + q},$$

A, B, C, ..., H étant des constantes arbitraires. En effet, si l'on compare cette fonction à celle-ci,

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x + y_{x+1} t^{x+1} + \ldots + y_\infty t^\infty,$$

on aura, en faisant disparaître le dénominateur et en vertu de l'équation aux différences en y_x,

$$\begin{aligned} A + Bt + Ct^2 + \ldots + Ht^{n-1} = {} & t^{n-1}(by_0 + cy_1 + \ldots) \\ & + t^{n-2}(cy_0 + ey_1 + \ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

en égalant ensuite les puissances homogènes de t, on aura les valeurs de A, B, C, ... au moyen des n valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$; on aura donc ainsi la fonction génératrice de y_x.

Si l'on suppose $\Sigma^i y_x = y'_x$, on aura $v_x = \Delta^i y'_x$, et alors l'équation

$$0 = ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots + qy_{x+n}$$

devient

$$0 = a\Delta^i y'_x + b\Delta^i y'_{x+1} + \ldots + q\Delta^i y'_{x+n},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$ay'_x + by'_{x+1} + \ldots + qy_{x+n} = Mx^{i-1} + Nx^{i-2} + \ldots,$$

M, N, ... étant des constantes arbitraires. Par le n° 2, u étant la fonction génératrice de y_x, celle de y'_x est

$$\frac{ut^i + A't^{i-1} + B't^{i-2} + \ldots}{(1-t)^i};$$

la fonction génératrice de y'_x ou de la quantité donnée par l'équation précédente en y'_x est donc

$$\frac{(A + Bt + Ct^2 + \ldots + Ht^{n-1})t^i + (A't^{i-1} + B't^{i-2} + \ldots)(at^n + bt^{n-1} + \ldots + q)}{(1-t)^i(at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + \ldots + pt + q)}.$$

Concevons maintenant que a, b, c, ... soient des fonctions rationnelles et entières de t' de l'ordre n, et que A, B, C, ... soient des fonctions arbitraires de la même quantité; y_x sera fonction de x et de t'.

En la développant par rapport aux puissances de t', nous nommerons $y_{x,x'}$ le coefficient de $t'^{x'}$ dans ce développement. Cela posé, si l'on suppose

$$\begin{aligned} a &= a' t'^n + b' t'^{n-1} + c' t'^{n-2} + \ldots, \\ b &= a'' t'^n + b'' t'^{n-1} + c'' t'^{n-2} + \ldots, \\ c &= a''' t'^n + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

l'équation différentielle précédente en y_x donnera, en comparant les coefficients de la puissance t'^{x+n}, l'équation suivante aux différences partielles en $y_{x,x'}$,

$$\begin{aligned} 0 = {} & a' y_{x,x'} + b' y_{x,x'+1} + c' y_{x,x'+2} + \ldots \\ & + a'' y_{x+1,x'} + b'' y_{x+2,x'+1} + \ldots \\ & + a''' y_{x+2,x'} + \ldots \\ & + \ldots; \end{aligned}$$

la fonction génératrice de la variable $y_{x,x'}$ de cette équation sera donc

$$\frac{A + Bt + Ct^2 + \ldots + Ht^{n-1}}{a' t^n t'^n + b' t^n t'^{n-1} + c' t^n t'^{n-2} + \ldots + a'' t^{n-1} t'^n + b'' t^{n-1} t'^{n-1} + \ldots + a''' t^{n-2} t'^n + \ldots + \ldots;}$$

A, B, C, ... étant des fonctions arbitraires de t', elles donneront, par leur développement, les fonctions arbitraires qui doivent entrer dans l'expression de $y_{x,x'}$.

On peut encore déterminer les fonctions génératrices des équations aux différences finies, dans lesquelles les coefficients sont variables. Considérons pour cela l'équation aux différences

$$\begin{aligned} 0 = {} & a\, y_x + b\, y_{x+1} + c\, y_{x+2} + \ldots + q\, y_{x+n} \\ & + x\,(a' y_x + b' y_{x+1} + c' y_{x+2} + \ldots + q' y_{x+n}) \\ & + x^2 (a'' y_x + b'' y_{x+1} + c'' y_{x+2} + \ldots + q'' y_{x+n}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on nomme u la fonction génératrice de y_x, on aura, en vertu de l'équation précédente,

$$\begin{aligned} & u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots + \frac{q}{t^n}\right) \\ & \quad + t\frac{d}{dt}\left[u\left(a' + \frac{b'}{t} + \frac{c'}{t^2} + \ldots + \frac{q}{t^n}\right)\right] \\ & \quad + t\frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\left[u\left(a'' + \frac{b''}{t} + \frac{c''}{t^2} + \ldots + \frac{q''}{t^n}\right)\right]\right\} \\ & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & = A + Bt + Ct^2 + \ldots + Ht^{n-1}, \end{aligned}$$

A, B, C, ..., H étant des constantes arbitraires, qui dépendent des valeurs de $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. En effet, si l'on substitue dans cette équation la valeur précédente de u en série, on voit qu'en vertu de l'équation différentielle proposée, tous les coefficients de la même puissance de t disparaissent lorsque cette puissance est égale ou plus grande que n, et la comparaison des puissances inférieures donne un nombre n d'équations, qui déterminent les constantes A, B, C, ..., au moyen des valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$.

L'équation différentielle précédente n'est intégrable généralement que dans le cas où elle est du premier ordre, et alors les coefficients de l'équation aux différences finies en y_x ne renferment que la première puissance de x; dans ce dernier cas, on peut obtenir la fonction génératrice u par des quadratures.

21. La connaissance des fonctions génératrices des équations différentielles donne l'expression des intégrales de ces équations au moyen de quadratures définies. Reprenons, pour cela, l'équation

$$u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x + y_{x+1} t^{x+1} + \ldots + y_\omega t^\omega.$$

Substituons dans ses deux membres $c^{x\varpi\sqrt{-1}}$ au lieu de t^x, c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et nommons U ce que devient alors u. En multipliant l'équation par

$e^{-x\varpi\sqrt{-1}}\,d\varpi$ et intégrant, on aura

$$\int \mathrm{U}\,d\varpi\, e^{-x\varpi\sqrt{-1}} = \int d\varpi \left\{ \begin{array}{r} y_0 e^{-x\varpi\sqrt{-1}} + y_1 e^{-(x-1)\varpi\sqrt{-1}} + \ldots \\ + y_x + y_{x+1} e^{\varpi\sqrt{-1}} + \ldots \end{array} \right\}.$$

Si l'on substitue, pour $e^{\pm r\varpi\sqrt{-1}}$, sa valeur $\cos r\varpi \pm \sqrt{-1}\sin r\varpi$, et si l'on prend l'intégrale depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$, 2π étant la circonférence, le second membre se réduit à $2\pi y_x$; on a donc

$$y_x = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{U}\,d\varpi\,(\cos x\varpi - \sqrt{-1}\sin x\varpi);$$

mais cette formule a l'inconvénient d'introduire des imaginaires dont on peut se débarrasser de la manière suivante.

Considérons l'équation

$$\begin{aligned} 0 = {} & a y_x + b y_{x+1} + \ldots + q y_{x+n} \\ & + x(a' y_x + b' y_{x+1} + \ldots + q' y_{x+n}), \end{aligned}$$

et supposons

$$y_x = \int t^{-x-1}\mathrm{T}\,dt,$$

T étant une fonction de t qu'il s'agit de déterminer, ainsi que les limites de l'intégrale. En substituant pour y_x cette valeur dans l'équation différentielle en y_x, et observant que l'on a

$$x\int t^{-x-1}\,dt\,\frac{\mathrm{T}}{t^r} = -t^{-x}\frac{\mathrm{T}}{t^r} + \int t^{-x}\,d\left(\frac{\mathrm{T}}{t^r}\right),$$

ce qui fait disparaître le coefficient variable x, on aura

$$(h) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 = -\mathrm{T}t^{-x}\left(a' + \dfrac{b'}{t} + \ldots + \dfrac{q'}{t^n}\right) \\ \quad + \displaystyle\int t^{-x-1}dt \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T}\left(a + \dfrac{b}{t} + \ldots + \dfrac{q}{t^n}\right) \\ + t\dfrac{d}{dt}\left[\mathrm{T}\left(a' + \dfrac{b'}{t} + \ldots + \dfrac{q'}{t^n}\right)\right] \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

En égalant à zéro la partie sous le signe $\int$, on aura

$$0 = \mathrm{T}\left(a + \frac{b}{t} + \ldots + \frac{q}{t^n}\right) + t\frac{d}{dt}\left[\mathrm{T}\left(a' + \frac{b'}{t} + \ldots + \frac{q'}{t^n}\right)\right].$$

Cette équation intégrée donne T en fonction de t. Elle est la même que l'équation différentielle en u du numéro précédent, en négligeant dans celle-ci le terme indépendant de u. La valeur de T est donc la partie de u qui est indépendante de ce terme.

Pour avoir les limites de l'intégrale $\int t^{-x-1}\mathrm{T}\,dt$, on égalera à zéro la partie hors du signe $\int$ dans l'équation (h), ce qui donne

$$0 = \mathrm{T}t^{-x}\left(a' + \frac{b'}{t} + \ldots + \frac{q'}{t^n}\right).$$

Cette équation est satisfaite en supposant t infini, et en le supposant égal à l'une des racines de l'équation

$$0 = a' + \frac{b'}{t} + \ldots + \frac{q'}{t^n};$$

on aura ainsi $n+1$ limites de l'intégrale $\int t^{-x-1}\mathrm{T}\,dt$; en multipliant ensuite chaque intégrale, comprise entre une de ces limites et les n autres limites, par une constante arbitraire, la somme de ces produits sera la valeur complète de y_x.

On peut étendre cette méthode aux équations à différences partielles finies et infiniment petites, comme nous le ferons voir dans la seconde partie de ce Livre.

On voit, par ce qui précède, l'analogie qui existe entre les fonctions génératrices des variables et les intégrales définies au moyen desquelles ces variables peuvent être exprimées. Pour la rendre encore plus sensible, considérons l'équation

$$y_x = \int \mathrm{T}\,dt\,t^{-x},$$

T étant une fonction de t, et l'intégrale étant prise dans des limites déterminées. On aura, x variant de α,

$$\Delta y_x = \int \mathrm{T}\,dt\,t^{-x}\left(\frac{1}{t^\alpha} - 1\right),$$

et, généralement,

$$\Delta^i y_x = \int \mathrm{T}\,dt\,t^{-x}\left(\frac{1}{t^\alpha} - 1\right)^i;$$

en faisant i négatif, la caractéristique Δ se change dans le signe intégral Σ. Si l'on suppose α infiniment petit et égal à dx, on aura

$$\frac{1}{t^{\alpha}} = 1 + dx \log \frac{1}{t};$$

on aura donc, en observant qu'alors $\Delta^i y_x$ se change dans $d^i y_x$,

$$\frac{d^i y_x}{dx^i} = \int \mathrm{T}\, dt\, t^{-x} \left(\log \frac{1}{t}\right)^i.$$

On trouvera de la même manière, et en adoptant les dénominations du n° 2,

$$\nabla^i y_x \int \mathrm{T}\, dt\, t^{-x} \left(a + \frac{b}{t} + \ldots + \frac{q}{t^n}\right)^i.$$

Ainsi la même analyse, qui donne les fonctions génératrices des dérivées successives des variables, donne les fonctions, sous le signe $\int$, des intégrales définies qui expriment ces dérivées. La caractéristique ∇^i n'exprime, à proprement parler, qu'un nombre i d'opérations consécutives : la considération des fonctions génératrices réduit ces opérations à des élévations d'un polynôme à ses diverses puissances, et la considération des intégrales définies donne directement l'expression de $\nabla^i y_x$, dans le cas même où l'on supposerait i un nombre fractionnaire.

Mais le grand avantage de cette transformation des expressions analytiques en intégrales définies est de fournir une approximation aussi commode que convergente de ces expressions, lorsqu'elles sont formées d'un grand nombre de termes et de facteurs ; c'est ce qui a lieu dans la théorie des probabilités, quand le nombre des événements que l'on considère est très grand. Alors le calcul numérique des résultats auxquels on est conduit par la solution des problèmes devient impraticable, et il est indispensable d'avoir pour ce calcul une méthode d'approximation d'autant plus convergente que ces résultats sont plus compliqués.

Leur expression en intégrales définies procure cet avantage, et celui de donner les lois suivant lesquelles la probabilité des résultats

indiqués par les événements approche de la certitude à mesure que les événements se multiplient, lois dont la connaissance est l'un des objets les plus intéressants de la théorie des probabilités. Ce fut à l'occasion d'un problème de ce genre, dont la solution dépendait de l'expression du terme moyen du binôme élevé à une grande puissance, que Stirling transforma cette expression dans une série très convergente ; son résultat peut être regardé comme une des choses les plus ingénieuses que l'on ait trouvées sur les suites. Il est surtout remarquable en ce que, dans une recherche qui semble n'admettre que des quantités algébriques, il introduit une quantité transcendante, savoir la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre. Mais la méthode de Stirling, fondée sur un théorème de Wallis et sur l'interpolation des suites, laissait à désirer une méthode directe qui s'étendit à toutes les fonctions composées d'un grand nombre de termes et de facteurs. Telle est la méthode dont je viens de parler, et que j'ai donnée d'abord dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1778 et ensuite, avec plus d'étendue, dans les Mémoires de la même Académie pour l'année 1782. Le développement de cette méthode va être l'objet de la seconde Partie de ce Livre, et complétera ainsi le Calcul des fonctions génératrices.

Les séries auxquelles cette méthode conduit renferment le plus souvent la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre, et c'est la raison pour laquelle Stirling l'a rencontrée dans le cas particulier qu'il a considéré ; mais quelquefois elles dépendent d'autres transcendantes dont le nombre est infini.

Les limites des intégrales définies que cette méthode réduit en séries convergentes sont, comme on vient de le voir, données par les racines d'une équation que l'on peut nommer *équation des limites*. Mais une remarque très importante dans cette analyse, et qui permet de l'étendre aux fonctions que la Théorie des Probabilités présente le plus souvent, est que les séries auxquelles on parvient ont également lieu dans le cas même où, par des changements de signe dans les coefficients de l'équation des limites, ses racines deviennent imaginaires. Ces pas-

sages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire, dont les premières applications ont paru, si je ne me trompe, dans les Mémoires cités, m'ont conduit, dans ces Mémoires, aux valeurs de plusieurs intégrales définies, qui offrent cela de remarquable, savoir qu'elles dépendent à la fois de ces deux transcendantes, le rapport de la circonférence au diamètre et le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On peut donc considérer ces passages comme des moyens de découvertes, pareils à l'induction dont les géomètres font depuis longtemps usage. Mais ces moyens, quoique employés avec beaucoup de précautions et de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations de leurs résultats. Leur rapprochement des méthodes directes servant à les confirmer et à faire voir la grande généralité de l'analyse, et pouvant par cette raison intéresser les géomètres, j'ai insisté particulièrement sur ces passages qu'Euler considérait en même temps que moi, et dont il a fait plusieurs applications curieuses, mais qui n'ont paru que depuis la publication des Mémoires cités.

SECONDE PARTIE.

THÉORIE DES APPROXIMATIONS DES FORMULES QUI SONT FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'INTÉGRATION PAR APPROXIMATION DES DIFFÉRENTIELLES QUI RENFERMENT DES FACTEURS ÉLEVÉS A DE GRANDES PUISSANCES.

22. On vient de voir que l'on peut toujours ramener à l'intégration de semblables différentielles les formules données par la théorie des fonctions génératrices. Nous allons donc nous occuper d'abord avec étendue de l'approximation de ce genre d'intégrales.

Si l'on désigne par u, u', u'', ... et φ des fonctions quelconques de x, et par s, s', s'', ... de très grands nombres, toute fonction différentielle qui renferme des fonctions élevées à de grandes puissances sera comprise dans le terme $\varphi\, dx\, u^s u'^{s'} u''^{s''} \ldots$. Pour avoir en série convergente son intégrale prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 0$, on fera

$$\varphi u^s u'^{s'} u''^{s''} \ldots = y,$$

et en désignant par Y ce que devient y lorsqu'on y change x en 0, on supposera

$$y = \mathrm{Y} e^{-t},$$

e étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On aura ainsi

$$t = \log \frac{\mathrm{Y}}{y}.$$

Si l'on considère x comme une fonction de t donnée par cette équation, on aura, en supposant dt constant,

$$x = \theta + t\frac{dx}{dt} + \frac{t^2}{1.2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t^3}{1.2.3}\frac{d^3x}{dt^3} + \ldots,$$

t devant être supposé nul après les différentiations, dans les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$. On a généralement

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{1}{dt}d\cdot\frac{1}{dt}d\cdot\frac{1}{dt}\ldots d\cdot\frac{dx}{dt},$$

la caractéristique différentielle se rapportant à tout ce qui la suit, et dt pouvant varier d'une manière quelconque dans le second membre de cette équation; de plus, si l'on différentie l'expression précédente de t en y, et si l'on désigne $-\frac{y\,dx}{dy}$ par υ, on aura $dt = \frac{dx}{\upsilon}$; on aura donc

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{\upsilon\, d\,\upsilon\, d\upsilon \ldots d\upsilon}{dx^{n-1}},$$

dx étant supposé constant dans le second membre de cette équation. Ainsi, en nommant U ce que devient υ lorsqu'on y change x en θ, la valeur de $\frac{d^n x}{dt^n}$ qui répond à $x = \theta$, ou, ce qui revient au même, à $t = 0$, sera égale à

$$\frac{\mathrm{U}\,d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}\ldots d\mathrm{U}}{d\theta^{n-1}};$$

on aura donc

$$x = \theta + \mathrm{U}t + \frac{\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{1.2.d\theta}t^2 + \frac{\mathrm{U}\,d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{1.2.3.d\theta^2}t^3 + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$dx = \mathrm{U}\,dt\left(1 + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}t + \frac{d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{1.2.d\theta^2}t^2 + \ldots\right);$$

par conséquent

$$\int y\,dx = \mathrm{U}\mathrm{Y}\int dt e^{-t}\left(1 + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}t + \frac{d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{1.2.d\theta^2}t^2 + \ldots\right).$$

Si l'on prend l'intégrale depuis $t = 0$ jusqu'à t infini, on aura généralement

$$\int t^n dt e^{-t} = 1.2.3\ldots n;$$

partant

$$\int y\,dx = \mathrm{U}\mathrm{Y}\left(1 + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta} + \frac{d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{d\theta^2} + \frac{d.\mathrm{U}\,d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{d\theta^3} + \ldots\right),$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini.

Nommons Y′ et U′ ce que deviennent y et υ lorsqu'on y change x en θ'; on aura pareillement

$$\int y\,dx = \mathrm{U}'\mathrm{Y}'\left(1 + \frac{d\mathrm{U}'}{d\theta'} + \frac{d\,\mathrm{U}'\,d\mathrm{U}'}{d\theta'^2} + \frac{d.\mathrm{U}'\,d\,\mathrm{U}'\,d\mathrm{U}'}{d\theta'^3} + \ldots\right),$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x = \theta'$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. En retranchant donc ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \int y\,dx = \mathrm{U}\mathrm{Y}\left(1 + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta} + \frac{d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{d\theta^2} + \frac{d.\mathrm{U}\,d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{d\theta^3} + \ldots\right) \\ \qquad - \mathrm{U}'\mathrm{Y}'\left(1 + \frac{d\mathrm{U}'}{d\theta'} + \frac{d\,\mathrm{U}'\,d\mathrm{U}'}{d\theta'^2} + \frac{d.\mathrm{U}'\,d\,\mathrm{U}'\,d\mathrm{U}'}{d\theta'^3} + \ldots\right), \end{cases}$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à $x = \theta'$, en sorte que la considération de t disparaît dans cette formule. Si θ et θ' étaient primitivement renfermés dans y, il ne faudrait faire varier que les quantités θ et θ' qu'introduisent dans U et U′, les changements de x en θ et θ' dans la fonction υ.

La formule (A) sera très convergente, si υ ou $-\frac{y\,dx}{dy}$ est une très petite quantité; or y étant, par la supposition, égal à $\varphi u^s u'^{s'} u''^{s''}, \ldots$, on a

$$\upsilon = -\frac{1}{\frac{s\,du}{u\,dx} + \frac{s'\,du'}{u'\,dx'} + \frac{s''\,du''}{u''\,dx''} + \ldots + \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}}.$$

Ainsi, dans le cas où $s, s', s'', \ldots$ sont de très grands nombres, υ sera fort petit, et si l'on fait $\frac{1}{s} = \alpha$, α étant une fraction très petite, la fonction υ sera de l'ordre α, et les termes successifs de la formule (A) seront respectivement des ordres α, α^2, α^3, ...

Cette formule cesserait d'être convergente, si la supposition de $x = \theta$ rendait très petit le dénominateur de l'expression de υ. Supposons, par exemple, que $(x-a)^\mu$ soit un facteur de ce dénominateur; il est clair que les termes successifs de la formule (A) sont respectivement divisés par $(\theta-a)^\mu$, $(\theta-a)^{2\mu+1}$, $(\theta-a)^{3\mu+2}$, ..., et deviendront très considérables, si θ est peu différent de a; la convergence de cette formule exige donc que $(\theta-a)^\mu$, $(\theta'-a)^\mu$ soient plus grands que α; elle ne peut conséquemment être employée dans l'intervalle où $(x-a)^\mu$ est égal ou moindre que α; mais, dans ce cas, on pourra faire usage de la méthode suivante.

23. Si l'on nomme Y ce que devient y lorsqu'on y change x en a, il est visible que $(x-a)^\mu$ étant un facteur de $-\frac{dy}{y\,dx}$, ou, ce qui revient au même, de $\frac{d\log\frac{Y}{y}}{dx}$, $(x-a)^{\mu+1}$ sera un facteur de $\log\frac{Y}{y}$. Soit donc

$$y = Y e^{-t^{\mu+1}},$$

$$\upsilon = \frac{x-a}{(\log Y - \log y)^{\frac{1}{\mu+1}}};$$

on aura

$$x = a + \upsilon t,$$

υ ne devenant point infini par la supposition de $x = a$. Si l'on désigne ensuite par U, $\frac{dU^2}{dx}$, $\frac{d^2U^3}{dx^2}$, ... ce que deviennent υ, $\frac{d\upsilon^2}{dx}$, $\frac{d^2\upsilon^3}{dx^2}$, ..., lorsqu'on y change x en a après les différentiations, on aura, par la formule (p) du n° **21** du Livre II de la *Mécanique céleste*,

$$x = a + U t + \frac{dU^2}{1.2.dx}t^2 + \frac{d^2U^3}{1.2.3\,dx^2}t^3 + \ldots,$$

ce qui donne

$$(B) \qquad \int y\,dx = Y\int dt\,e^{-t^{\mu+1}}\left(U + \frac{dU^2}{dx}t + \frac{d^2U^3}{1.2.dx^2}t^2 + \ldots\right);$$

cette formule pourra être employée dans tout l'intervalle où x diffère très peu de a; elle peut conséquemment servir de supplément à la formule (A) du numéro précédent; mais, au lieu d'être ordonnée, comme elle, par rapport aux puissances de α, elle ne l'est que par rapport aux puissances de $\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}$; car il est visible que, dans ce dernier cas, υ n'est que de l'ordre $\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}$.

Pour déterminer plus facilement les quantités U, $\frac{dU^2}{dx}$, ..., supposons

$$\log Y - \log y = (x-a)^{\mu+1}[A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \ldots].$$

Nous aurons, en changeant x en a après les différentiations,

$$A = -\frac{d^{\mu+1}\log y}{1.2.3\ldots(\mu+1)\,dx^{\mu+1}},$$

$$B = -\frac{d^{\mu+2}\log y}{1.2.3\ldots(\mu+2)\,dx^{\mu+2}},$$

.....

Nous aurons ensuite, quel que soit r,

$$\upsilon^r = [A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \ldots]^{-\frac{r}{\mu+1}},$$

d'où il est facile de conclure, en développant cette expression de υ^r et nommant $Q(x-a)^{r-1}$ le terme de ce développement qui a pour facteur $(x-a)^{r-1}$,

$$\frac{d^{r-1}U^r}{1.2.3\ldots(r-1)\,dx^{r-1}} = Q.$$

La formule (B) ne présente plus ainsi d'autres difficultés que celles qui résultent de l'intégration des quantités de la forme $\int t^n dt\,e^{-t^{\mu+1}}$, et l'on a généralement

$$\int t^n dt\,e^{-t^{\mu+1}} = -\frac{e^{-t^{\mu+1}}}{\mu+1}\left\{\begin{array}{l} t^{n-\mu} + \frac{n-\mu}{\mu+1}t^{n-2\mu-1} + \frac{(n-\mu)(n-2\mu-1)}{(\mu+1)^2}t^{n-3\mu-2} + \ldots \\ \quad + \frac{(n-\mu)(n-2\mu-1)\ldots(n-r\mu+\mu-r+2)}{(\mu+1)^{r-1}}t^{n-r\mu-r+1} \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{(n-\mu)(n-2\mu-1)\ldots(n-r\mu+1)}{(\mu+1)^r}\int t^{n-r\mu-r}dt\,e^{-t^{\mu+1}},$$

r étant égal au quotient de la division de n par $\mu+1$, si la division est possible, ou au nombre immédiatement inférieur, si elle ne l'est pas.

La détermination de l'intégrale $\int y\,dx$ dépend donc des intégrales de cette forme

$$\int dt\,c^{-t^{\mu+1}},\quad \int t\,dt\,c^{-t^{\mu+1}},\quad \ldots,\quad \int t^{\mu-1}\,dt\,c^{-t^{\mu+1}}.$$

Il n'est pas possible d'obtenir exactement ces intégrales par les méthodes connues, mais il sera facile dans tous les cas d'avoir leurs valeurs approchées.

24. Nous aurons principalement besoin, dans la suite, de la valeur de $\int y\,dx$, prise pour tout l'intervalle compris entre deux valeurs consécutives de x qui rendent y nul; nous allons conséquemment exposer les simplifications dont cette valeur est alors susceptible. La variable y ayant été supposée, dans le numéro précédent, égale à $Yc^{-t^{\mu+1}}$, il est visible que les deux valeurs de x qui rendent y nul rendent également nulle la quantité $c^{-t^{\mu+1}}$, ce qui exige que $\mu+1$ soit un nombre pair, et que l'une des valeurs de x réponde à $t=-\infty$ et l'autre à $t=\infty$; Y est donc alors le maximum de y compris entre ces valeurs. Soit $\mu+1=2i$; si l'on prend l'intégrale $\int t^{2n+1}\,dt\,c^{-t^{2i}}$ depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, sa valeur sera nulle; car il est clair que les éléments de cette intégrale qui répondent aux valeurs négatives de t sont égaux et de signe contraire à ceux qui répondent aux mêmes valeurs prises positivement. L'intégrale $\int t^{2n}\,dt\,c^{-t^{2i}}$ est égale à $2\int t^{2n}\,dt\,c^{-t^{2i}}$, cette dernière intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini, et dans ce cas, on a, par le numéro précédent,

$$\int t^{2n}\,dt\,c^{-t^{2i}}=\frac{(2n-2i+1)(2n-4i+1)\ldots(2n-2ri+1)}{(2i)^r}\int t^{2n-2r}\,dt\,c^{-t^{2i}},$$

r étant égal au nombre entier du quotient de la division de n par i. Soit donc, en prenant les intégrales depuis t nul jusqu'à t infini,

$$\begin{aligned}
k&=\int dt\,c^{-t^{2i}},\\
k^{(1)}&=\int t^2\,dt\,c^{-t^{2i}},\\
k^{(2)}&=\int t^4\,dt\,c^{-t^{2i}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
k^{(i-1)}&=\int t^{2i-2}\,dt\,c^{-t^{2i}};
\end{aligned}$$

la formule (B) du numéro précédent deviendra

$$\begin{aligned}
\int y\,dx=2k\quad & Y\left\{U+\frac{1}{2i}\frac{d^{2i}U^{2i+1}}{1.2.3\ldots 2i\,dx^{2i}}+\frac{2i+1}{4i^2}\frac{d^{4i}U^{4i+1}}{1.2.3\ldots 4i\,dx^{4i}}+\ldots\right\}\\
+2k^{(1)}\ & Y\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2U^3}{1.2.dx^2}+\dfrac{3}{2i}\dfrac{d^{2i+2}U^{2i+2}}{1.2.3\ldots(2i+2)\,dx^{2i+2}}\\ \qquad+\dfrac{3(2i+3)}{4i^2}\dfrac{d^{4i+2}U^{4i+3}}{1.2.3\ldots(4i+2)\,dx^{4i+2}}+\ldots\end{array}\right\}\\
+\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots

En faisant $sx^n = t^n$, elle devient

$$\int \frac{ds\, e^{-s}}{\frac{1}{s^n}} \int dt\, e^{-t^n},$$

et si l'on fait $s = t^n$, on aura

$$n \int dt\, e^{-t^n} \int t^{n-2} dt\, e^{-t^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}},$$

les intégrales étant prises depuis t nul jusqu'à t infini. Si l'on change n en $\frac{n}{r-1}$, cette équation devient

$$n^2 \int dt\, e^{-t^{\frac{n}{r-1}}} \int t^{\frac{n}{r-1}-2} dt\, e^{-t^{\frac{n}{r-1}}} = \frac{(r-1)^2 \pi}{\sin \frac{r-1}{n} \pi},$$

et si dans cette nouvelle équation on change t en t^{r-1}, on aura

$$(\mathrm{T}) \qquad n^2 \int t^{r-2} dt\, e^{-t^n} \int t^{n-r} dt\, e^{-t^n} = \frac{\pi}{\sin \frac{r-1}{n} \pi}.$$

On aura, au moyen de cette formule, en y faisant $n = 2i$, toutes les valeurs de k, $k^{(1)}$, ..., $k^{(i-1)}$, lorsque l'on en connaîtra la moitié, si i est pair, ou la moitié moins un demi, si i est impair.

En faisant $n = 2$ et $r = 2$, cette formule donne ce résultat remarquable

$$\int dt\, e^{-t^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

25. On peut, en vertu de la généralité de l'analyse, étendre les résultats précédents au cas où t est imaginaire. Considérons l'intégrale $\int dx \cos rx\, e^{-a^2x^2}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini. On peut la mettre sous cette forme

$$\tfrac{1}{2} \int dx\, e^{-a^2x^2 + rx\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2} \int dx\, e^{-a^2x^2 - rx\sqrt{-1}}.$$

L'intégrale $\int dx\, e^{-a^2x^2 + rx\sqrt{-1}}$ est égale à

$$e^{-\frac{r^2}{4a^2}} \int dx\, e^{-\left(ax - \frac{r\sqrt{-1}}{2a}\right)^2}.$$

Si l'on fait

$$t = ax - \frac{r\sqrt{-1}}{2a},$$

elle devient

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a} \int dt\, e^{-t^2};$$

ici l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -\frac{r\sqrt{-1}}{2a}$ jusqu'à t infini, parce que ces deux limites répondent à x nul et à x infini.

En faisant r négatif dans cette formule, on aura l'expression de l'intégrale $\int dx\, e^{-a^2x^2 - rx\sqrt{-1}}$; mais, dans ce cas, les limites de l'intégrale relative à t sont $t = \frac{r\sqrt{-1}}{2a}$ et t infini; la réunion de ces deux intégrales est donc égale à

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a} \int dt\, e^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$; car la première intégrale ajoute à la seconde ce qui lui manque pour former la moitié de l'intégrale prise entre les deux limites infinies; or cette dernière intégrale est $\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}}{a}$; on a donc

$$\int dx \cos rx\, e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

L'analyse qui vient de nous conduire à ce résultat est fondée sur le passage du réel à l'imaginaire; car on y traite les intégrales relatives à t et prises entre deux limites, dont une est imaginaire et l'autre est infinie, comme si ces limites étaient toutes réelles. Mais on peut parvenir à ce résultat de la manière suivante.

Nommons y l'intégrale $\int dx \cos rx\, e^{-a^2x^2}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini; on aura

$$\frac{dy}{dr} = -\int x\, dx \sin rx\, e^{-a^2x^2} = \frac{1}{2a^2} \sin rx\, e^{-a^2x^2} - \frac{r}{2a^2} \int dx \cos rx\, e^{-a^2x^2};$$

on aura donc, en prenant l'intégrale depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\frac{dy}{dr} + \frac{r}{2a^2}y = 0.$$

L'intégrale de cette équation est

$$y = \mathrm{B}e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

B étant une constante arbitraire que l'on déterminera en observant que, r étant nul, on a

$$y = \mathrm{B} = \int dx\, e^{-a^2x^2}.$$

Cette dernière intégrale est, par le numéro précédent, $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; donc $\mathrm{B} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; par conséquent

$$\int dx \cos rx . e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

ce qui est conforme au résultat trouvé ci-dessus par le passage du réel à l'imaginaire.

En différentiant $2n$ fois par rapport à r, on aura

$$\int x^{2n} dx \cos rx\, e^{-a^2x^2} = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\frac{d^{2n}}{dr^{2n}} e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

le signe + ayant lieu si n est pair, et le signe − si n est impair. Cette dernière équation, différentiée par rapport à r, donne

$$\int x^{2n+1} dx \sin rx . e^{-a^2x^2} = \mp\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\frac{d^{2n+1}}{dr^{2n+1}} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

En intégrant une fois par rapport à r l'expression de $\int dx \cos rx . e^{-a^2x^2}$, on aura

$$\int \frac{dx \sin rx}{x} e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int dr\, e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Lorsque a est nul, $\frac{r}{a}$ devient infini, et l'intégrale $\int \frac{dr}{2a} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}$, prise depuis r nul, devient $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; donc

$$\int \frac{dx \sin rx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

26. On peut de là conclure les valeurs de quelques intégrales définies singulières auxquelles j'ai été conduit, comme on le verra dans la suite, par le passage du réel à l'imaginaire.

Considérons la double intégrale

$$\iint 2\, dx\, y\, dy\, e^{-y^2(1+x^2)} \cos rx,$$

les intégrales étant prises depuis x et y nuls jusqu'à x et y infinis. En l'intégrant d'abord par rapport à y, elle devient

$$\int \frac{dx \cos rx}{1+x^2}.$$

Intégrons-la maintenant par rapport à x. On a, par le numéro précédent,

$$\int dx \cos rx\, e^{-y^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2y} e^{-\frac{r^2}{4y^2}},$$

ce qui donne

$$\iint 2y\, dy\, dx \cos rx . e^{-y^2(1+x^2)} = \sqrt{\pi}\int dy\, e^{-y^2-\frac{r^2}{4y^2}}.$$

Il s'agit maintenant d'avoir cette dernière intégrale, prise depuis y nul jusqu'à y infini.

Pour cela, donnons-lui cette forme

$$e^r \int dy\, e^{-\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2};$$

r étant supposé positif, la quantité $\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2$ a un minimum qui répond à $y = \sqrt{\frac{r}{2}}$, ce qui donne $2r$ pour ce minimum; soit donc

$$y = \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\sqrt{z^2+2r};$$

y devant s'étendre depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$, z doit s'étendre depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$. Cette valeur de y donne

$$dy = \tfrac{1}{2}dz + \tfrac{1}{2}\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+2r}}.$$

En prenant les intégrales depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$, on a

$$\int dz\, e^{-z^2}=\sqrt{\pi}, \qquad \int \frac{z\,dz\,e^{-z^2}}{\sqrt{z^2+2r}}=0;$$

on a donc

$$\int dy\, e^{-\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2}=\int dy\, e^{-z^2-2r}=e^{-2r}\int \tfrac{1}{2}\,dz\, e^{-z^2}=\frac{e^{-2r}\sqrt{\pi}}{2};$$

partant

$$\int dy\, e^{-y^2-\frac{r^2}{4y^2}}=\frac{e^{-r}\sqrt{\pi}}{2}.$$

On aura généralement, par la même analyse, l'intégrale

$$\int y^{2n}\,dy\, e^{-y^2-\frac{r^2}{4y^2}},$$

prise depuis y nul jusqu'à y infini, et par conséquent aussi, dans les mêmes limites, l'intégrale

$$\int x^{\pm\frac{n}{2}}dx\, e^{-ax-\frac{b}{x}},$$

a et b étant positifs et n étant impair. Cela posé, on aura

$$\int\int 2y\,dy\,dx\cos rx\,.\,e^{-y^2(1+x^2)}=\frac{\pi}{2e^r};$$

on a donc

$$\int \frac{dx\cos rx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2e^r}.$$

En différentiant par rapport à r, on a

$$\int \frac{x\,dx\sin rx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2e^r};$$

de là il est facile de conclure la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{(a+bx)\,dx\cos rx}{m+2nx+x^2},$$

prise depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=+\infty$, le dénominateur n'ayant point de facteurs réels en x du premier degré. Si l'on fait

$$x=-n+x'\sqrt{m-n^2},$$

cette intégrale devient, en supposant $\frac{a-bn}{\sqrt{m-n^2}}=a'$,

$$\int \frac{(a'+bx')\,dx'\left[\cos\left(rx'\sqrt{m-n^2}\right)\cos rn+\sin\left(rx'\sqrt{m-n^2}\right)\sin rn\right]}{1+x'^2}.$$

Cette intégrale doit être prise comme celle relative à x, depuis $x'=-\infty$ jusqu'à $x'=\infty$; or l'intégrale $\int \frac{x'dx'\cos\left(rx'\sqrt{m-n^2}\right)}{1+x'^2}$, prise dans ces limites, est nulle, parce que ses éléments négatifs détruisent ses éléments positifs correspondants ; il en est de même de l'intégrale $\int \frac{dx'\sin\left(rx'\sqrt{m-n^2}\right)}{1+x'^2}$; la fonction intégrale précédente se réduit donc à

$$\int \frac{\left[a'\cos rn\cos\left(rx'\sqrt{m-n^2}\right)+b\sin rn\sin\left(rx'\sqrt{m-n^2}\right)x'\right]dx'}{1+x'^2}.$$

On a, par ce qui précède,

$$\int \frac{dx'\cos\left(rx'\sqrt{m-n^2}\right)}{1+x'^2}=\pi e^{-r\sqrt{m-n^2}}.$$

En différentiant cette expression par rapport à r, on a

$$\int \frac{x'\,dx'\sin\left(rx'\sqrt{m-n^2}\right)}{1+x'^2}=\pi e^{-r\sqrt{m-n^2}};$$

on a donc

$$\int \frac{(a+bx)\,dx\cos rx}{m+2nx+x^2}=(a'\cos rn+b\sin rn)\,\pi e^{-r\sqrt{m-n^2}}.$$

On trouvera, par la même analyse,

$$\int \frac{(a+bx)\,dx\sin rx}{m+2nx+x^2}=(b\cos rn-a'\sin rn)\,\pi e^{-r\sqrt{m-n^2}}.$$

Si l'on différentie la première de ces deux équations $i-1$ fois par rapport à m et ensuite $2s$ fois par rapport à r, on aura l'expression de l'intégrale

$$(i) \qquad \int \frac{x^{2s}\,dx\,(a+bx)\cos rx}{(m+2nx+x^2)^i}.$$

Maintenant, M et N étant des fonctions rationnelles et entières de x,

le degré de la première étant supposé plus petit que celui de la seconde, et N étant supposé n'avoir aucun facteur réel du premier degré, on pourra, comme on sait, décomposer l'intégrale $\int \frac{M}{N} dx \cos rx$ en différents termes de la forme (i); on aura donc généralement l'expression de cette intégrale définie.

On aura de la même manière la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{M}{N} dx \sin rx.$$

27. Reprenons maintenant la formule (B) du n° **23**. Le cas de $\mu + \nu = 2$ étant le plus ordinaire, nous allons exposer ici les formules qui y sont relatives. La formule (B) devient, dans ce cas,

$$(b) \qquad \int y\,dx = Y\sqrt{\pi}\left(U + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{1.3}{2^2}\frac{d^4U}{dx^4} + \frac{1.3.5}{2^3}\frac{d^6U}{dx^6} + \cdots\right);$$

ici l'on a

$$t = \sqrt{\log Y - \log y}, \qquad v = \frac{x-a}{\sqrt{\log Y - \log y}},$$

Y étant le maximum de y, et a étant la valeur de x qui correspond à ce maximum; U, $\frac{dU}{dx}$, $\cdots$ sont ce que deviennent v, $\frac{dv}{dx}$, lorsqu'on y change x en a. Cette formule donne, en l'intégrant depuis $t = T$ jusqu'à $t = T'$,

$$(c) \quad \begin{cases} \int y\,dx = Y\left[U + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{1.2.dx^2} + \frac{1.3}{2^2}\frac{d^4U}{1.2.3.4.dx^4} + \cdots\right]\int dt\, e^{-t^2} \\ \qquad + \frac{Y}{2}e^{-T^2}\left[\frac{dU}{dx} + \frac{T\,d^2U}{1.2.dx^2} + \frac{(T^2+1)\,d^3U}{1.2.3.dx^3} + \cdots\right] \\ \qquad - \frac{Y}{2}e^{-T'^2}\left[\frac{dU}{dx} + \frac{T'\,d^2U}{1.2.dx^2} + \frac{(T'^2+1)\,d^3U}{1.2.3.dx^3} + \cdots\right], \end{cases}$$

l'intégrale $\int dt\, e^{-t^2}$ étant prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = T'$, et l'intégrale $\int y\,dx$ étant prise depuis la valeur de x qui convient à $t = T$ jusqu'à celle qui convient à $t = T'$.

Si l'on suppose $T = -\infty$ et $T' = \infty$, on aura généralement

$$T^n e^{-T^2} = 0, \qquad T'^n e^{-T'^2} = 0.$$

On a d'ailleurs par le n° **24** $\int dt\, e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$; la formule précédente devient ainsi

$$(d) \qquad \int y\,dx = Y\sqrt{\pi}\left(U + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{1.2.dx^2} + \frac{1.3}{2^2}\frac{d^4U}{1.2.3.4.dx^4} + \cdots\right),$$

l'intégrale $\int y\,dx$ étant prise entre les valeurs de x qui rendent y nul, et Y étant le maximum de y, compris entre ces valeurs. Les différents termes de cette formule se détermineront facilement par le n° **23**, et l'on aura

$$U = \frac{1}{\sqrt{-\frac{d^2 \log y}{2\,dx^2}}},$$

x devant être changé en a, après les différentiations. On a

$$d^2 \log y = \frac{d^2y}{y} - \frac{dy^2}{y^2};$$

la supposition de $x = a$ fait disparaître dy; on aura donc

$$\frac{d^2 \log y}{dx^2} = \frac{d^2Y}{Y\,dx^2},$$

Y et $\frac{d^2Y}{dx^2}$ étant ce que deviennent y et $\frac{d^2y}{dx^2}$, lorsqu'on y change x en a. Ainsi, en ne considérant dans la formule (d) que le premier terme de la série, on aura à très peu près

$$\int y\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}\,Y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx^2}}}.$$

Cette expression de $\int y\,dx$ sera d'autant plus approchée que les facteurs de y seront élevés à de plus hautes puissances.

La formule (c) renferme l'intégrale indéfinie $\int dt\, e^{-t^2}$ prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = T'$, ce qui revient à la prendre depuis $t = 0$ jusqu'aux limites T et T', et à retrancher la première intégrale de la seconde. Il n'est pas possible d'obtenir en termes finis l'intégrale prise depuis t nul; mais on l'obtiendra d'une manière fort approchée, si T est

peu considérable, par la série suivante :

$$\int dt\, c^{-t^2} = \mathrm{T} - \frac{\mathrm{T}^3}{3} + \frac{1}{1.2}\frac{\mathrm{T}^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\frac{\mathrm{T}^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{\mathrm{T}^9}{9} - \ldots$$

Cette série a l'avantage d'être alternativement plus petite ou plus grande que l'intégrale, suivant que l'on s'arrête à un terme positif ou négatif. Ce genre de séries, que l'on peut nommer *séries-limites*, a ainsi l'avantage de faire connaître les limites des erreurs des approximations. On a encore

$$\int dt\, c^{-t^2} = \mathrm{T}c^{-\mathrm{T}^2}\left[1 + \frac{2\mathrm{T}^2}{1.3} + \frac{(2\mathrm{T}^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2\mathrm{T}^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots\right].$$

Ces deux séries finissent toujours par être convergentes, quelle que soit la valeur de T; mais leur convergence ne commence qu'à des termes éloignés du premier, si $2\mathrm{T}^2$ a une valeur considérable; il convient donc de ne les employer que pour des valeurs égales ou moindres que quatre. Pour de plus grandes valeurs, on pourra faire usage de la série suivante, qui donne la valeur de l'intégrale $\int dt\, c^{-t^2}$ depuis $t = \mathrm{T}$ jusqu'à t infini,

$$\int dt\, c^{-t^2} = \frac{c^{-\mathrm{T}^2}}{2\mathrm{T}}\left(1 - \frac{1}{2\mathrm{T}^2} + \frac{1.3}{2^2\mathrm{T}^4} - \frac{1.3.5}{2^3\mathrm{T}^6} + \ldots\right).$$

Cette série est encore une série-limite. En la retranchant de $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, valeur de l'intégrale $\int dt c^{-t^2}$ prise depuis t nul jusqu'à t infini, on aura la valeur de l'intégrale prise depuis t nul jusqu'à $t = \mathrm{T}$. Mais la série a l'inconvénient de finir par être divergente : on obvie à cet inconvénient, en la transformant en fraction continue, comme je l'ai fait dans le Livre X de la *Mécanique céleste*, où j'ai trouvé qu'en faisant $q = \frac{1}{2\mathrm{T}^2}$, on a, l'intégrale étant prise depuis $t = \mathrm{T}$ jusqu'à l'infini,

$$\int dt\, c^{-t^2} = \frac{c^{-\mathrm{T}^2}}{2\mathrm{T}} \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \cfrac{4q}{1 + \cfrac{5q}{1 + \ldots}}}}}}$$

Pour faire usage de cette expression, il faut réduire la fraction continue

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \ldots}}}$$

en fractions alternativement plus grandes et plus petites que la fraction entière. Les deux premières fractions sont $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1+q}$; les numérateurs des fractions suivantes sont tels que le numérateur de la fraction $i^{\text{ième}}$ est égal au numérateur de la fraction $(i-1)^{\text{ième}}$ plus au numérateur de la fraction $(i-2)^{\text{ième}}$, multiplié par $(i-1)q$; les dénominateurs se forment de la même manière. Ces fractions successives sont

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{1+q},\quad \frac{1+2q}{1+3q},\quad \frac{1+5q}{1+6q+3q^2},\quad \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2},\quad \ldots$$

Lorsque q ou $\frac{1}{2\mathrm{T}^2}$ sera égal ou moindre que $\frac{1}{4}$, ces fractions donneront d'une manière prompte et approchée la valeur de la fraction entière.

28. On peut facilement étendre l'analyse précédente aux doubles, triples, etc. intégrales. Pour cela, considérons la double intégrale $\int\int y\, dx\, dx'$, y étant une fonction de x et de x', qui renferme des facteurs élevés à de grandes puissances. Supposons que l'intégrale relative à x' doive être prise depuis une fonction X de x jusqu'à une autre fonction $\mathrm{X}' + \mathrm{X}$ de la même variable. En faisant $x' = \mathrm{X} + t\mathrm{X}'$, l'intégrale $\int\int y\, dx\, dx'$ se changera dans celle-ci, $\int\int y\mathrm{X}'\, dx\, dt$, l'intégrale relative à t devant être prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$: on peut donc réduire ainsi l'intégrale $\int\int y\, dx\, dx'$ à des limites constantes et indépendantes des variables qu'elle renferme. Nous supposerons qu'elle a cette forme, et que l'intégrale relative à x est prise depuis $x = \mathfrak{0}$ jusqu'à $x = \varpi$, et que l'intégrale relative à x' est prise depuis $x' = \mathfrak{0}'$ jusqu'à $x' = \varpi'$. Cela posé, en nommant Y ce que devient y lorsqu'on y change x et x' en $\mathfrak{0}$ et $\mathfrak{0}'$, on fera

$$y = \mathrm{Y}\, c^{-t-t'};$$

en supposant ensuite

$$x = \theta + u, \qquad x' = \theta' + u',$$

on réduira $\log \frac{Y}{y}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de u et de u', et l'on aura une équation de cette forme

$$Mu + M'u' = t + t',$$

dans laquelle M est la partie du développement en série de $\log \frac{Y}{y}$, qui renferme tous les termes multipliés par u, et M′ est l'autre partie qui renferme les termes multipliés par u' et qui sont indépendants de u. On partagera l'équation précédente dans les deux suivantes

$$Mu = t, \qquad M'u' = t',$$

d'où l'on tirera celle-ci, par le retour des suites,

$$u = Nt, \qquad u' = N't',$$

N étant une suite ordonnée par rapport aux puissances de t et de t', et N′ étant uniquement ordonnée par rapport aux puissances de t', et étant indépendante de t; ces deux suites sont très convergentes, si y renferme des facteurs très élevés. Maintenant on a $dx\,dx' = du\,du'$; de plus on a

$$du = \frac{\partial . Nt}{\partial t}\,dt + \frac{\partial . Nt}{\partial t'}\,dt',$$

$$du' = \frac{\partial . N't'}{\partial t'}\,dt';$$

mais, dans le produit $du\,du'$, la différentielle du est prise en faisant u' constant, ce qui rend t' constant ou $dt' = 0$; on a donc

$$du = \frac{\partial . Nt}{\partial t}\,dt;$$

par conséquent

$$du\,du' = \frac{\partial . Nt}{\partial t}\,\frac{\partial . N't'}{\partial t'}\,dt\,dt',$$

ce qui donne

$$\int\int y\,dx\,dx' = Y\int\int \frac{\partial . Nt}{\partial t}\,\frac{\partial . N't'}{\partial t'}\,dt\,dt'\,e^{-t-t'}.$$

Il est facile d'intégrer les divers termes du second membre de cette équation, puisqu'il ne s'agit que d'intégrer des termes de la forme $\int t^n dt e^{-t}$.

Si l'on prend l'intégrale relative à t', depuis t' nul jusqu'à t' infini, et que l'on nomme Q le résultat de l'intégration, on aura

$$\int y\,dx' = YQ,$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x' = \theta'$ jusqu'à la valeur de x' qui répond à t' infini. Si l'on change ensuite, dans Y et Q, θ' en ϖ', et que l'on nomme Y′ et Q′ ce que deviennent alors ces quantités, on aura

$$\int y\,dx' = Y'Q',$$

l'intégrale étant prise depuis $x' = \varpi'$ jusqu'à la valeur de x' qui répond à t' infini.

En nommant R et R′ les intégrales $\int Q\,dt$ et $\int Q'\,dt$ prises depuis t nul jusqu'à t infini, on aura

$$\int\int y\,dx\,dx' = YR - Y'R',$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x' = \theta'$ jusqu'à $x' = \varpi'$, et l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. Si dans Y, R, Y′, R′, on change θ en ϖ, et que l'on nomme Y_1, R_1, Y_1', R_1' ce que deviennent alors ces quantités, on aura

$$\int\int y\,dx\,dx' = Y_1R_1 - Y_1'R_1',$$

l'intégrale relative à x' étant prise entre les limites θ' et ϖ', et l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \varpi$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini; on aura donc

$$\int\int y\,dx\,dx' = YR - Y'R' - Y_1R_1 + Y_1'R_1',$$

l'intégrale relative à x étant prise entre les limites θ et ϖ, et l'intégrale relative à x' étant prise entre les limites θ' et ϖ'.

Cette formule répond à la formule (A) du n° **22**, qui n'est relative qu'à une seule variable; elle a, comme elle, l'inconvénient de ne pou-

voir s'étendre aux intervalles voisins du maximum de y. Il faut, pour ces intervalles, employer une méthode analogue à celle du n° 23. Ainsi, en supposant que, dans l'intervalle compris entre 0 et ϖ, y devienne un maximum relativement à x, en sorte que la condition de ce maximum ne fasse disparaître que la différentielle de y, prise par rapport à x, on fera

$$y = \mathrm{Y}\, e^{-t^2 - t'^2},$$

Y étant la valeur de y qui convient à ce maximum et à $x' = 0'$; et si, dans l'intervalle compris entre les limites des intégrations relatives à x et à x', y devient un maximum, on fera

$$y = \mathrm{Y}\, e^{-t^2 - t'^2}.$$

Comme nous aurons besoin principalement, dans la suite, de l'intégrale $\int\int y\, dx\, dx'$ prise entre les limites de x et de x' qui rendent y nul, nous allons discuter ce cas.

Considérons l'intégrale $\int\int y\, dx\, dx'$, y étant une fonction de x, x', qui renferme des facteurs élevés à de grandes puissances. Si l'on nomme a, a' les valeurs de x, x' qui répondent au maximum de y, et que l'on nomme Y ce maximum, on fera

$$y = \mathrm{Y}\, e^{-t^2 - t'^2};$$

en supposant ensuite

$$x = a + 0, \qquad x' = a' + 0',$$

on substituera ces valeurs dans la fonction $\log \frac{\mathrm{Y}}{y}$, et, en la développant dans une suite ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de $0, 0'$, on aura une équation de cette forme

$$\mathrm{M}\, 0^2 + 2\mathrm{N}\, 0 0' + \mathrm{P}\, 0'^2 = t^2 + t'^2.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$\mathrm{M}\left(0 + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\, 0'\right)^2 + \left(\mathrm{P} - \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}}\right) 0'^2 = t^2 + t'^2;$$

on fera donc

$$t = 0\sqrt{\mathrm{M}} + \frac{\mathrm{N}\, 0'}{\sqrt{\mathrm{M}}}, \qquad t' = 0'\sqrt{\mathrm{P} - \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}}}.$$

En différentiant ces équations, on aura des différentielles de cette forme

$$dt = \mathrm{L}\, d0 + \mathrm{I}\, d0',$$
$$dt' = \mathrm{L}'\, d0 + \mathrm{I}'\, d0'.$$

Maintenant on a

$$\int\int y\, dx\, dx' = \int\int y\, d0\, d0';$$

dans le produit $d0\, d0'$, $d0$ est pris en supposant $0'$ constant, et alors on a

$$dt = \mathrm{L}\, d0;$$

ensuite dt' doit être pris en regardant t constant dans le produit $dt\, dt'$; alors on a

$$0 = \mathrm{L}\, d0 + \mathrm{I}\, d0',$$
$$dt' = \mathrm{L}'\, d0 + \mathrm{I}'\, d0',$$

ce qui donne

$$dt' = \frac{\mathrm{L}\mathrm{I}' - \mathrm{L}'\mathrm{I}}{\mathrm{L}}\, d0';$$

on a donc

$$dt\, dt' = d0\, d0'(\mathrm{L}\mathrm{I}' - \mathrm{L}'\mathrm{I});$$

par ce moyen, l'intégrale $\int\int y\, d0\, d0'$ est transformée dans celle-ci :

$$\mathrm{Y}\int\int \frac{dt\, dt'\, e^{-t^2 - t'^2}}{\mathrm{L}\mathrm{I}' - \mathrm{L}'\mathrm{I}}.$$

Le dénominateur $\mathrm{L}\mathrm{I}' - \mathrm{L}'\mathrm{I}$ est une fonction de 0 et de $0'$ que l'on réduira en fonction de t et de t', au moyen des valeurs de t et de t' en 0 et $0'$. On obtiendra ainsi l'intégrale précédente dans une suite de termes de la forme $\int\int t^n t'^{n'} dt\, dt'\, e^{-t^2 - t'^2}$, les intégrales étant prises depuis t et t' égaux à $-\infty$, jusqu'à leurs valeurs infinies positives. Ces intégrales sont nulles lorsque l'un des deux nombres n et n' est impair, et dans le cas où ils sont tous deux pairs, n étant égal à $2i$, et n' à $2i'$, on a

$$\int\int t^{2i} t'^{2i'} dt\, dt'\, e^{-t^2 - t'^2} = \frac{1.3.5\ldots(2i-1).1.3.5\ldots(2i'-1)}{2^{i+i'}}\,\pi.$$

Si les puissances auxquelles les facteurs de y sont élevés sont très

grandes, alors on a, à très peu près,

$$M = -\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2\, 2Y}, \qquad 2N = -\frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial x'\, Y}, \qquad P = -\frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2\, 2Y},$$

$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial x'}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2}$ étant ce que deviennent $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial x'}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x'^2}$ lorsqu'on y change x et x' en a et a'; l'intégrale $\int\int y\, dx\, dx'$ devient ainsi, à fort peu près,

$$\frac{2\pi Y^2}{\sqrt{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial x'}\right)^2}}.$$

CHAPITRE II.

DE L'INTÉGRATION PAR APPROXIMATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES ET INFINIMENT PETITES.

29. On a vu, dans le n° 21, que les intégrales des équations linéaires aux différences entre une variable s, dont la différence est supposée constante, et une fonction y_s de cette variable, peuvent être mises sous la forme $y_s = \int x^s \varphi\, dx$, φ étant une fonction de x de la même nature que la fonction génératrice de l'équation proposée aux différences, et l'intégrale étant prise dans des limites déterminées de x. En supposant s un très grand nombre, on aura, par l'analyse précédente, une valeur très approchée de cette intégrale et par conséquent de y_s. Mais cette méthode d'approximation étant très importante dans la Théorie des Probabilités, nous allons la développer avec étendue.

Considérons l'équation aux différences finies

$$(1) \qquad S = A y_s + B \Delta y_s + C \Delta^2 y_s + \ldots,$$

A, B, C, ... étant des fonctions rationnelles et entières de s, auxquelles nous donnerons cette forme

$$\begin{aligned} A &= a + a^{(1)} s + a^{(2)} s(s-1) + a^{(3)} s(s-1)(s-2) + \ldots, \\ B &= b + b^{(1)} s + b^{(2)} s(s-1) + b^{(3)} s(s-1)(s-2) + \ldots, \\ C &= c + c^{(1)} s + c^{(2)} s(s-1) + c^{(3)} s(s-1)(s-2) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

Δy_s est la différence finie de y_s, s étant supposé varier de l'unité; $\Delta^2 y_s$,

$\Delta^2 y_s, \ldots$ sont les seconde, troisième, ... différences de y_s, et S est une fonction de s. Cela posé, représentons y_s par $\int x^s \varphi\, dx$, φ étant une fonction de x qu'il faut déterminer, ainsi que les limites de l'intégrale. En désignant x^s par δy, on aura

$$\Delta y_s = \int \delta y (x-1)\varphi\, dx, \qquad \Delta^2 y_s = \int \delta y (x-1)^2 \varphi\, dx, \quad \ldots;$$

on aura ensuite

$$s x^s = x \frac{d\delta y}{dx}, \qquad s(s-1)x^s = x^2 \frac{d^2 \delta y}{dx^2}, \qquad \ldots;$$

l'équation (1) aux différences devient ainsi

$$S = \int \varphi\, dx \left\{ \begin{array}{l} \delta y [a \quad + b \quad (x-1) + e \quad (x-1)^2 + \ldots] \\ + \dfrac{x\, d\delta y}{dx} \quad [a^{(1)} + b^{(1)}(x-1) + e^{(1)}(x-1)^2 + \ldots] \\ + \dfrac{x^2 d^2 \delta y}{dx^2} [a^{(2)} + b^{(2)}(x-1) + e^{(2)}(x-1)^2 + \ldots] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Au lieu de faire y_s égal à $\int x^s \varphi\, dx$, on peut le supposer égal à $\int c^{-sx} \varphi\, dx$; alors on a

$$\Delta y_s = \int c^{-sx}(c^{-x}-1)\varphi\, dx, \qquad \Delta^2 y_s = \int c^{-sx}(c^{-x}-1)^2 \varphi\, dx, \qquad \ldots.$$

De plus, si l'on désigne c^{-sx} par δy, on aura

$$s c^{-sx} = -\frac{d\delta y}{dx}, \qquad s^2 c^{-sx} = \frac{d^2 \delta y}{dx^2}, \qquad \ldots;$$

en mettant donc les coefficients de l'équation (1) sous cette forme,

$$\begin{aligned} A &= a + a^{(1)} s + a^{(2)} s^2 + \ldots, \\ B &= b + b^{(1)} s + b^{(2)} s^2 + \ldots, \\ C &= e + e^{(1)} s + e^{(2)} s^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

cette équation prendra la forme

$$S = \int \varphi\, dx \left\{ \begin{array}{l} \delta y [a \quad + b \quad (c^{-x}-1) + e \quad (c^{-x}-1)^2 + \ldots] \\ - \dfrac{d\delta y}{dx} [a^{(1)} + b^{(1)}(c^{-x}-1) + e^{(1)}(c^{-x}-1)^2 + \ldots] \\ + \dfrac{d^2 \delta y}{dx^2} [a^{(2)} + b^{(2)}(c^{-x}-1) + e^{(2)}(c^{-x}-1)^2 + \ldots] \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

En représentant généralement y_s par $\int \delta y \varphi\, dx$, les deux formes que l'équation (1) prend dans les suppositions de $\delta y = x^s$ et de $\delta y = c^{-sx}$ seront comprises dans la suivante

$$S = \int \varphi\, dx \left(M \delta y + N \frac{d\delta y}{dx} + P \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + Q \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \ldots \right),$$

M, N, P, Q, ... étant des fonctions de x indépendantes de la variable s, qui n'entre dans le second membre de cette équation qu'autant que δy et ses différences en sont fonctions.

Maintenant, pour y satisfaire, on intégrera par parties ses différents termes; or on a

$$\begin{aligned} &\int \frac{d\delta y}{dx} N\varphi\, dx = \delta y N\varphi - \int \delta y \frac{d(N\varphi)}{dx} dx, \\ &\int \frac{d^2 \delta y}{dx^2} P\varphi\, dx = \frac{d\delta y}{dx} P\varphi - \delta y \frac{d(P\varphi)}{dx} + \int \delta y \frac{d^2(P\varphi)}{dx^2} dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

l'équation précédente devient ainsi

$$\begin{aligned} S = &\int \delta y\, dx \left[M\varphi - \frac{d(N\varphi)}{dx} + \frac{d^2(P\varphi)}{dx^2} - \frac{d^3(Q\varphi)}{dx^3} + \ldots \right] \\ &+ C + \delta y \left[N\varphi - \frac{d(P\varphi)}{dx} + \frac{d^2(Q\varphi)}{dx^2} - \ldots \right] \\ &+ \frac{d\delta y}{dx} \left[P\varphi - \frac{d(Q\varphi)}{dx} + \ldots \right] \\ &+ \frac{d^2 \delta y}{dx^2} (Q\varphi - \ldots) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

C étant une constante arbitraire.

Puisque la fonction φ doit être indépendante de s et par conséquent de δy, on doit égaler séparément à zéro la partie de cette équation affectée du signe $\int$, ce qui partage l'équation précédente dans les deux suivantes :

$$(2)\qquad 0 = M\varphi - \frac{d(N\varphi)}{dx} + \frac{d^2(P\varphi)}{dx^2} - \frac{d^3(Q\varphi)}{dx^3} + \ldots,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} S = C + \delta y\left[N\varphi - \dfrac{d(P\varphi)}{dx} + \dfrac{d^2(Q\varphi)}{dx^2} - \ldots\right] \\ \quad + \dfrac{d\delta y}{dx}\left[P\varphi - \dfrac{d(Q\varphi)}{dx} + \ldots\right]; \\ \quad + \dfrac{d^2\delta y}{dx^2}(Q\varphi - \ldots) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La première de ces équations sert à déterminer la fonction φ, et la seconde détermine les limites dans lesquelles l'intégrale $\int \delta y \varphi\, dx$ est comprise.

On peut observer que l'équation (2) est l'équation de condition qui doit avoir lieu pour que la fonction différentielle

$$\left(M\delta y + N\frac{d\delta y}{dx} + P\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots\right)\varphi\, dx$$

soit une différentielle exacte, quel que soit δy; et dans ce cas l'intégrale de cette fonction est égale au second membre de l'équation (3); φ est donc le facteur en x seul qui doit multiplier l'équation

$$0 = M\delta y + N\frac{d\delta y}{dx} + P\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots$$

pour la rendre intégrable. Si φ était connu, on pourrait abaisser cette équation d'un degré, et, réciproquement, si cette équation était abaissée d'un degré, le coefficient de δy, dans sa différentielle divisée par $M\,dx$, donnerait une valeur de φ; cette équation et l'équation (2) sont conséquemment liées entre elles, de manière qu'une intégrale de l'une donne une intégrale de l'autre.

La valeur de φ étant supposée connue, on aura celle de y, au moyen

d'une intégrale définie. L'intégration de l'équation (1) aux différences finies est donc ainsi ramenée à l'intégration de l'équation (2) aux différences infiniment petites et à une intégrale définie.

Considérons présentement l'équation (3) et faisons d'abord $S = 0$. Si l'on suppose que δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\ldots$ deviennent nuls au moyen d'une même valeur de x, que nous désignerons par h, et qui soit indépendante de s, il est clair qu'en supposant C nul, cette valeur satisfera à l'équation (3), et qu'ainsi elle sera une des limites entre lesquelles on doit prendre l'intégrale $\int \delta y \varphi\, dx$. La supposition précédente a lieu visiblement dans les deux cas de $\delta y = x^s$ et de $\delta y = e^{-kx}$; dans le premier cas, l'équation $x = 0$, et dans le second cas, l'équation $x = \infty$ rendent nulles les quantités δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\ldots$. Pour avoir d'autres limites de l'intégrale $\int \delta y \varphi\, dx$, on observera que, ces limites devant être indépendantes de s, il faut, dans l'équation (3), égaler séparément à zéro les coefficients de δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\ldots$, ce qui donne les équations suivantes :

$$0 = N\varphi - \frac{d(P\varphi)}{dx} + \frac{d^2(Q\varphi)}{dx^2} - \ldots,$$

$$0 = P\varphi - \frac{d(Q\varphi)}{dx} + \ldots,$$

$$0 = Q\varphi - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces équations sont au nombre de i, si i est l'ordre de l'équation différentielle (2); on pourra donc éliminer, à leur moyen, toutes les constantes arbitraires de la valeur de φ, moins une, et l'on aura une équation finale en x, dont les racines seront autant de limites de l'intégrale $\int \delta y \varphi\, dx$. On cherchera par cette équation un nombre de valeurs différentes de x, égal au degré de l'équation différentielle (1). Soient q, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\ldots$ ces valeurs; elles donneront autant de valeurs différentes de φ, puisque les constantes arbitraires de φ, moins une, sont déterminées en fonctions de ces valeurs. On pourra ainsi représenter

les valeurs de φ correspondantes aux limites q, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, ... par $B\lambda$, $B^{(1)}\lambda^{(1)}$, $B^{(2)}\lambda^{(2)}$, ..., B, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, ... étant des constantes arbitraires, et l'on aura, pour la valeur complète de y_s,

$$y_s = B\int \delta y\,\lambda\,dx + B^{(1)}\int \delta y\,\lambda^{(1)}\,dx + B^{(2)}\int \delta y\,\lambda^{(2)}\,dx + \ldots,$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = q$, celle du second terme étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = q^{(1)}$, et ainsi du reste. On déterminera les constantes B, $B^{(1)}$, ... au moyen d'autant de valeurs particulières de y_s.

Supposons maintenant que, dans l'équation (3), S ne soit pas nul. Si l'on prend l'intégrale $\int \delta y\,\varphi\,dx$ depuis $x = h$ jusqu'à x égal à une quantité quelconque p, il est clair que l'on aura $C = 0$, et que S sera ce que devient la fonction

$$\delta y\left[N\varphi - \frac{d(P\varphi)}{dx} + \ldots\right] + \frac{d\delta y}{dx}(P\varphi - \ldots) + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

lorsqu'on y change x en p. Ainsi, pour le succès de la méthode précédente, il est nécessaire que S ait la forme de cette fonction. Faisons, par exemple, $\delta y = x^s$, et

$$S = p^s[l + l^{(1)}s + l^{(2)}s(s-1) + l^{(3)}s(s-1)(s-2) + \ldots];$$

en comparant cette valeur de S à la précédente, on aura

$$l = N\varphi - \frac{d(P\varphi)}{dx} + \ldots,$$
$$l^{(1)}p = P\varphi - \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

x devant être changé en p dans les seconds membres de ces équations, dont le nombre est égal au degré de l'équation différentielle (2). On pourra donc, à leur moyen, déterminer les constantes arbitraires de la valeur de φ, et si l'on désigne par ψ ce que devient φ lorsqu'on a ainsi déterminé ses arbitraires, on aura

$$y_s = \int x^s\,\psi\,dx.$$

De là et de ce que l'équation (1) est linéaire, il est facile de conclure que, si S est égal à

$$p^s[l + l^{(1)}s + l^{(2)}s(s-1) + \ldots] + p_1^s[l_1 + l_1^{(1)}s + l_1^{(2)}s(s-1) + \ldots] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en nommant ψ', ... ce que devient ψ lorsqu'on y change successivement p, l, $l^{(1)}$, ... en p_1, l_1, $l_1^{(1)}$, ..., en p_2, ..., on aura

$$y_s = \int x^s\,\psi\,dx + \int x^s\,\psi'\,dx + \ldots,$$

la première intégrale étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = p$, la seconde étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = p_1$, ... Cette valeur de y_s ne renferme aucune constante arbitraire; mais, en la joignant à celle que nous avons trouvée précédemment pour le cas de S nul, on aura l'expression complète de y_s.

30. Supposons maintenant que l'on ait un nombre quelconque d'équations linéaires aux différences finies entre un pareil nombre de variables y_s, y'_s, y''_s, ..., et dont les coefficients soient des fonctions rationnelles et entières de s. Faisons alors

$$y_s = \int x^s\varphi\,dx, \qquad y'_s = \int x^s\varphi'\,dx, \qquad y''_s = \int x^s\varphi''\,dx, \qquad \ldots,$$

ces diverses intégrales étant prises entre les mêmes limites déterminées et indépendantes de s. Nous aurons

$$\Delta y_s = \int x^s(x-1)\varphi\,dx, \qquad \Delta^2 y_s = \int x^s(x-1)^2\varphi\,dx, \qquad \ldots,$$
$$\Delta y'_s = \int x^s(x-1)\varphi'\,dx, \qquad \Delta^2 y'_s = \int x^s(x-1)^2\varphi'\,dx, \qquad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots$$

Les équations dont il s'agit pourront ainsi être mises sous les formes suivantes

$$S = \int x^s z\,dx, \qquad S' = \int x^s z'\,dx, \qquad S'' = \int x^s z''\,dx, \qquad \ldots,$$

S, S′, S″, … étant des fonctions de s seul, et z, z', z'', … étant des fonctions rationnelles et entières de la même variable, et de x, φ, φ', φ'', …, dans lesquelles φ, φ' … sont sous une forme linéaire.

Considérons d'abord l'équation

$$S = \int x^s z\, dx,$$

on a

$$z = Z + s\Delta Z + \frac{s(s-1)}{1.2}\Delta^2 Z + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\Delta^3 Z + \ldots,$$

la caractéristique Δ des différences finies étant relative à la variable s, et Z, ΔZ, … étant ce que deviennent z, Δz, … lorsqu'on y suppose $s = 0$. On aura donc

$$S = \int x^s dx \left[Z + s\Delta Z + \frac{s(s-1)}{1.2}\Delta^2 Z + \ldots \right].$$

Si l'on fait $x^s = \delta y$, on aura

$$sx^s = x\frac{d\delta y}{dx}, \qquad s(s-1)x^s = x^2\frac{d^2\delta y}{dx^2}, \qquad \ldots;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$S = \int dx \left(Z\,\delta y + x\,\Delta Z\frac{d\delta y}{dx} + \frac{x^2\Delta^2 Z}{1.2}\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots \right),$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties comme dans le numéro précédent, les deux équations suivantes

$$(a) \qquad 0 = Z - \frac{d(x\Delta Z)}{dx} + \frac{d^2(x^2\Delta^2 Z)}{1.2\,dx^2} - \ldots,$$

$$(b) \qquad \begin{cases} S = C + \delta y\left[x\Delta Z - \dfrac{d(x^2\Delta^2 Z)}{1.2.dx} + \ldots \right] \\ \qquad + \dfrac{d\delta y}{dx}\left(\dfrac{x^2\Delta^2 Z}{1.2} - \ldots \right) \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

C étant une constante arbitraire. L'équation

$$S' = \int x^s z'\, dx,$$

traitée de la même manière, donnera

$$(a') \qquad 0 = Z' - \frac{d(x\Delta Z')}{dx} + \frac{d^2(x^2\Delta^2 Z')}{1.2.dx^2} - \ldots,$$

$$(b') \qquad \begin{cases} S' = C' + \delta y\left[x\Delta Z' - \dfrac{d(x^2\Delta^2 Z')}{1.2.dx} + \ldots \right] \\ \qquad + \dfrac{d\delta y}{dx}\left(\dfrac{x^2\Delta^2 Z'}{1.2} - \ldots \right) \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les équations $S'' = \int x^s z''\, dx$, $S''' = \int x^s z'''\, dx$, … produiront des équations semblables, que nous désignerons par (a''), (b''); (a'''), (b'''); ….

Les équations (a), (a'), (a''), … détermineront les variables φ, φ', φ'', … en fonction de x, et les équations (b), (b'), (b''), … détermineront les limites dans lesquelles on doit prendre les intégrales $\int x^s z\, dx$, $\int x^s z'\, dx$, …. L'une de ces limites est $x = 0$. Pour avoir les autres, on supposera d'abord S, S′, S″, … nuls; les constantes C, C′, C″, … seront par conséquent nulles dans les équations (b), (b'), …, puisque la supposition de $x = 0$ rend nuls les autres termes de ces équations. En égalant ensuite séparément à zéro les coefficients de δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, … dans ces mêmes équations, on aura les suivantes :

$$0 = x\Delta Z - \frac{d(x^2\Delta^2 Z)}{1.2.dx} + \ldots,$$

$$0 = \frac{x^2\Delta^2 Z}{1.2} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$0 = x\Delta Z' - \frac{d(x^2\Delta^2 Z')}{1.2.dx} + \ldots,$$

$$0 = \frac{x^2\Delta^2 Z'}{1.2} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On éliminera, au moyen de ces équations, toutes les constantes arbitraires, moins une, des valeurs de φ, φ', φ'', …, et l'on arrivera à une équation finale en x, dont les racines seront les limites des intégrales

$\int x^s \varphi\, dx$, $\int x^s \varphi'\, dx$, ... On déterminera autant de ces limites qu'il est nécessaire pour que les valeurs de y_s, y'_s, ... soient complètes.

Supposons maintenant que S ne soit pas nul, et qu'il soit égal à

$$p^t[l + l^{(1)}s + l^{(2)}s(s-1) + \ldots].$$

En faisant C = o dans l'équation (b) et en y mettant x^t au lieu de δy, on aura

$$p^t[l + l^{(1)}s + l^{(2)}s(s-1) + \ldots] = x^t\left[x\,\Delta Z - \frac{d(x^2\,\Delta^2 Z)}{1.2.dx} + \ldots\right] + sx^t\left(\frac{x\Delta^2 Z}{1.2} - \ldots\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où l'on conclut d'abord $x = p$, en sorte que les intégrales $\int x^t \varphi\, dx$, $\int x^t \varphi'\, dx$, ... doivent être prises depuis $x = o$ jusqu'à $x = p$. La comparaison des coefficients de s, $s(s-1)$, ... donnera ensuite autant d'équations entre l, $l^{(1)}$, ... et les constantes arbitraires des expressions de φ, φ', ... L'égalité à zéro de ces mêmes coefficients, dans les équations (b'), (b''), ..., donnera de nouvelles équations entre ces arbitraires que l'on pourra ainsi déterminer au moyen de toutes ces équations; on aura, par ce procédé, les valeurs particulières de y_s qui satisfont au cas où, S', S'', ... étant nuls, S a la forme que nous venons de lui supposer, ou, plus généralement, est égal à un nombre quelconque de fonctions de la même forme.

Pareillement, si l'on suppose que, S, S'', ... étant nuls, S' est la somme d'un nombre quelconque de fonctions semblables, on déterminera les valeurs particulières de $y_s, y'_s, \ldots$ qui satisfont à ce cas, et ainsi du reste. En réunissant ensuite toutes ces valeurs à celles que l'on aura déterminées dans le cas où S, S', ... sont nuls, on aura les expressions complètes de $y_s, y'_s, \ldots$, correspondantes au cas où S, S', ... ont les formes précédentes.

Il est facile d'étendre cette méthode aux équations aux différences infiniment petites, ou en partie finies et en partie infiniment petites, et dans lesquelles les coefficients des variables principales et de leurs

différences sont des fonctions rationnelles de s, que l'on peut toujours rendre entières en faisant disparaître les dénominateurs. Si l'on désigne, comme ci-dessus, par y_s, y'_s, ... les variables principales de ces équations, et si l'on fait

$$y_s = \int x^t \varphi\, dx, \qquad y'_s = \int x^t \varphi'\, dx, \qquad \ldots,$$

on aura

$$\frac{dy_s}{ds} = \int x^t \varphi\, dx \log x, \qquad \frac{d^2 y_s}{ds^2} = \int x^t \varphi\, dx\, (\log x)^2, \qquad \ldots,$$

$$\Delta y_s = \int x^t (x-1)\varphi\, dx, \qquad \Delta^2 y_s = \int x^t (x-1)^2 \varphi\, dx, \qquad \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots,$$

$$\frac{dy'_s}{ds} = \int x^t \varphi'\, dx \log x, \qquad \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots.$$

Les équations proposées prendront ainsi les formes suivantes :

$$S = \int x^t z\, dx, \qquad S' = \int x^t z'\, dx, \qquad \ldots.$$

En les traitant par la méthode précédente, on déterminera les valeurs de φ, φ', ... en fonction de x, et les limites des intégrales $\int x^t \varphi\, dx$, $\int x^t \varphi'\, dx$, ...

En faisant

$$y_s = \int e^{-sx} \varphi\, dx, \qquad y'_s = \int e^{-sx} \varphi'\, dx, \qquad \ldots,$$

on parviendrait à des équations semblables. Dans plusieurs circonstances, ces formes de $y_s, y'_s, \ldots$ seront plus commodes que les précédentes.

31. La principale difficulté que présente l'application de la méthode précédente consiste dans l'intégration des équations différentielles linéaires qui déterminent φ, φ', φ'', ... en x. Les degrés de ces équations ne dépendent point de ceux des équations aux différences en $y_s, y'_s, \ldots$; ils dépendent uniquement des puissances les plus élevées de s dans leurs coefficients. En ne considérant donc qu'une seule variable y_s, l'équation différentielle en φ sera d'un degré égal au plus haut exposant de s dans les coefficients de l'équation aux différences en y_s. L'é-

quation différentielle en φ ne sera ainsi résoluble généralement que dans le cas où ce plus haut exposant est l'unité. Développons ce cas fort étendu.

Représentons l'équation différentielle en y_s par la suivante

$$o = V + sT,$$

V et T étant des fonctions linéaires de la variable principale y_s et de ses différences, soit finies, soit infiniment petites. Si l'on fait

$$y_s = \int \delta y \varphi \, dx,$$

δy étant égal à x^s ou à c^{-tx}, elle deviendra

$$o = \int \varphi \, dx \left(M \delta y + N \frac{d \delta y}{dx} \right),$$

M et N étant des fonctions de x; on aura donc, en intégrant par parties comme dans le numéro précédent, les deux équations suivantes :

$$o = M\varphi - \frac{d(N\varphi)}{dx},$$

$$o = C + N \varphi \delta y.$$

La première donne, en l'intégrant,

$$\varphi = \frac{H}{N} e^{\int \frac{M}{N} dx},$$

H étant une constante arbitraire. Supposons C nul dans la seconde équation; $x = o$ ou $x = \infty$ sera l'une des limites de l'intégrale $\int \delta y \varphi \, dx$, suivant que l'on prend x^s ou c^{-tx} pour δy. On déterminera les autres limites en résolvant l'équation $o = N \varphi \delta y$.

Appliquons à cette intégrale la méthode d'approximation du n° 23. Si l'on désigne par a la valeur de x donnée par l'équation

$$o = d(N \varphi \delta y),$$

et par Q ce que devient la fonction $N \varphi \delta y$, lorsqu'on y change x en a, on fera

$$N \varphi \delta y = Q c^{-t^2}.$$

ce qui donne

$$t = \sqrt{\log Q - \log(N\varphi) - \log \delta y}.$$

$\log \delta y$ est de l'ordre s; si l'on suppose s très grand, et si l'on fait $\frac{1}{s} = \alpha$, α sera un très petit coefficient. La quantité sous le radical prendra cette forme $\frac{(x-a)^2}{\alpha} X$, X étant une fonction de $x - a$ et de α; on aura donc, par le retour des suites, la valeur de x en t, par une série de cette forme

$$x = a + \alpha^{\frac{1}{2}} ht + \alpha h^{(1)} t^2 + \alpha^{\frac{3}{2}} h^{(2)} t^3 + \ldots.$$

Maintenant, y_s étant égal à $\int \delta y \varphi \, dx$, si l'on substitue dans cette intégrale au lieu de $\varphi \delta y$ sa valeur $\frac{Q c^{-t^2}}{N}$, elle deviendra $Q \int \frac{dx}{N} c^{-t^2}$; et si dans $\frac{dx}{N}$ on substitue pour x sa valeur précédente en t, on aura y_s par une suite de cette forme

$$y_s = \alpha^{\frac{1}{2}} Q \int dt . c^{-t^2} [l + \alpha^{\frac{1}{2}} l^{(1)} t + \alpha l^{(2)} t^2 + \alpha^{\frac{3}{2}} l^{(3)} t^3 + \ldots],$$

les limites de l'intégrale relative à t devant se déterminer par la condition qu'à ces limites la quantité $N \varphi \delta y$ ou son équivalente $Q c^{-t^2}$ soit nulle, d'où il suit que ces limites sont $t = -\infty$ et $t = \infty$; on aura donc, par le n° 24,

$$y_s = \alpha^{\frac{1}{2}} Q \sqrt{\pi} \left(l + \frac{1}{2} \alpha l^{(2)} + \frac{1.3}{2^2} \alpha^2 l^{(4)} + \frac{1.3.5}{2^3} \alpha^3 l^{(6)} + \ldots \right).$$

Cette expression a l'avantage d'être indépendante de la détermination des limites en x, qui rendent nulle la fonction $N \varphi \delta y$, en sorte qu'elle subsiste dans le cas même où cette fonction, égalée à zéro, n'a point de racines réelles; elle subsiste encore dans le cas de s négatif. Cette remarque, analogue à celle que nous avons faite dans le n° 25, et qui tient comme elle à la généralité de l'analyse, est très remarquable en ce qu'elle donne le moyen d'étendre la formule précédente à un grand nombre de cas auxquels la méthode qui nous y a conduits semble d'abord se refuser.

Cette formule ne renferme que la constante arbitraire H, et par con-

séquent elle n'est qu'une intégrale particulière de l'équation différentielle proposée en y_s, si cette équation est d'un ordre supérieur à l'unité. Pour avoir dans ce cas l'intégrale complète, il faudra chercher dans l'équation $o = d(N\varphi\delta y)$ autant de valeurs différentes de x qu'il y a d'unités dans cet ordre. Soient a, a', a'', ... ces valeurs; on changera successivement, dans l'expression précédente de y_s, a en a', a'', ..., et H en H', H'', ...; on aura autant de valeurs particulières qui renfermeront chacune une arbitraire, et dont la somme sera l'expression complète de y_s.

Quand les coefficients de la proposée en y_s renferment des puissances de s supérieures à l'unité, on peut quelquefois décomposer cette équation en plusieurs autres qui ne renferment que cette première puissance. Si l'on a, par exemple, l'équation

$$y_{s+1} = My_s,$$

M étant une fonction rationnelle et entière de s, on mettra cette fonction sous la forme

$$\frac{q(s+b)(s+b')(s+b'')\cdots}{(s+f)(s+f')(s+f'')\cdots};$$

on fera ensuite

$$z_{s+1} = q(s+b)z_s, \qquad z'_{s+1} = (s+b')z'_s, \qquad \cdots,$$
$$t_{s+1} = (s+f)t_s, \qquad t'_{s+1} = (s+f')t'_s, \qquad \cdots$$

Il est facile, par ce qui précède, de déterminer z_s, t_s, ... en intégrales définies, et de réduire ces intégrales en séries convergentes, lorsque s est un grand nombre. On aura ensuite

$$y_s = \frac{z_s z'_s \cdots}{t_s t'_s \cdots}.$$

Dans plusieurs cas où l'équation différentielle en φ, étant d'un ordre supérieur au premier, ne peut être intégrée rigoureusement, on peut déterminer φ par une approximation très convergente; en substituant ensuite cette valeur de φ dans l'intégrale $\int x^s \varphi\, dx$, on peut obtenir d'une manière fort approchée la valeur de cette intégrale.

32. L'analyse exposée dans les numéros précédents s'étend encore aux équations à différences partielles, finies et infiniment petites. Pour cela, considérons d'abord l'équation linéaire aux différentielles partielles dont les coefficients sont constants. En désignant par $y_{s,s'}$ la variable principale, s et s' étant les deux variables dont elle est fonction, et représentant cette équation par celle-ci, $V = o$, V étant une fonction linéaire de $y_{s,s'}$ et de ses différences partielles, on y supposera

$$y_{s,s'} = \int x^s x'^{s'} \varphi\, dx,$$

φ étant une fonction de x; alors l'équation $V = o$ prend cette forme

$$o = \int M x^s x'^{s'} \varphi\, dx,$$

M étant une fonction de x et de x', sans s ni s'. En égalant donc M à zéro, on aura la valeur de x' en x, et cette valeur, substituée dans l'intégrale $\int x^s x'^{s'} \varphi\, dx$, donnera l'expression générale $y_{s,s'}$, dans laquelle φ est une fonction arbitraire de x, les limites de l'intégrale étant indépendantes de x, mais d'ailleurs arbitraires. Si l'équation proposée $V = o$ est de l'ordre n, il faudra, au moyen de l'équation $M = o$, déterminer un nombre n de valeurs de x' en x. La somme des n valeurs de $\int x^s x'^{s'} \varphi\, dx$ qui en résulteront, et dans lesquelles on pourra mettre pour φ des fonctions arbitraires différentes de x, sera l'expression de $y_{s,s'}$.

Il résulte de ce que nous avons dit dans la première Partie de ce Livre que l'équation $M = o$ est l'équation génératrice de l'équation proposée $V = o$.

Considérons présentement l'équation aux différences partielles

$$o = V + sT + s'R,$$

dans laquelle V, T et R sont des fonctions quelconques linéaires de $y_{s,s'}$ et de ses différences partielles, soit finies, soit infiniment petites. Si l'on y suppose, comme ci-dessus,

$$y_{s,s'} = \int x^s x'^{s'} \varphi\, dx,$$

x' étant une fonction de x qu'il s'agit de déterminer, on aura une équation de cette forme

$$o = \int x^s x'^{s'} \varphi\, dx\,(M + Ns + Ps'),$$

M, N et P étant des fonctions de x et de x', sans s ni s'; or on a

$$\frac{d(x^s x'^{s'})}{dx} = x^s x'^{s'}\left(\frac{s}{x} + \frac{s'dx'}{x'dx}\right);$$

donc, si l'on détermine x' par cette équation

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{P\,dx}{Nx},$$

on aura

$$x^s x'^{s'}(Ns + Ps') = Nx\frac{d(x^s x'^{s'})}{dx};$$

par conséquent, si l'on désigne $x^s x'^{s'}$ par δy, et si l'on suppose que l'on a substitué dans M et N pour x' sa valeur en x, on aura

$$o = \int \varphi\, dx\left(M\delta y + Nx\frac{d\delta y}{dx}\right).$$

Cette équation, intégrée par parties, comme dans les numéros précédents, donne les deux suivantes :

$$o = M\varphi - \frac{d(Nx\varphi)}{dx},$$

$$o = Nx\varphi\,\delta y.$$

La première détermine φ en x, et la seconde donne les limites de l'intégrale $\int \delta y\,\varphi\, dx$.

Cette valeur de $y_{s,s'}$ ne renfermant point de fonction arbitraire, elle n'est qu'une intégrale particulière de l'équation proposée aux différences partielles. Pour la rendre complète, on observera que l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{P\,dx}{Nx},$$

qui détermine x' en x, est $x' = Q$, Q étant une fonction de x et d'une constante arbitraire que nous désignerons par u; en représentant donc

par ψ une fonction arbitraire de u, l'équation proposée aux différences partielles sera satisfaite par cette valeur de $y_{s,s'}$,

$$y_{s,s'} = \int\int x^s Q'^{s'} \psi\, dx\, du,$$

l'intégrale relative à x étant prise entre les limites déterminées par l'équation $o = N\varphi\,\delta y$, et l'intégrale relative à u étant prise entre des limites quelconques. Cette valeur de $y_{s,s'}$ sera donc l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences partielles, si celle-ci est du premier ordre; mais, si elle est d'un ordre supérieur, il faudra, au moyen de l'équation $o = N\varphi\,\delta y$, déterminer autant de valeurs de x en u qu'il y a d'unités dans cet ordre. La réunion des valeurs de $y_{s,s'}$ auxquelles on parviendra sera l'expression complète de $y_{s,s'}$.

CHAPITRE III.

APPLICATION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES A L'APPROXIMATION DE DIVERSES FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES.

Parmi les diverses fonctions auxquelles ces méthodes peuvent s'appliquer, je vais considérer les produits des nombres, les développements des polynômes et les différences infiniment petites et finies des fonctions, ces diverses quantités étant celles qui se présentent le plus souvent dans l'Analyse des hasards.

De l'approximation des produits composés d'un grand nombre de facteurs, et des termes des polynômes élevés à de grandes puissances.

33. Proposons-nous d'intégrer l'équation aux différences finies

$$0 = (s+1)y_s - y_{s+1}.$$

Si l'on y suppose

$$y_s = \int x^s \varphi\, dx,$$

on aura, en désignant x' par δy,

$$0 = \int \varphi\, dx \left[(1-x)\,\delta y + x \frac{d\,\delta y}{dx} \right],$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties, suivant la méthode précédente, les deux équations suivantes :

$$0 = \varphi(1-x) - \frac{d(x\varphi)}{dx},$$
$$0 = x^{s+1}\varphi.$$

La première équation donne, en l'intégrant,

$$\varphi = \mathrm{A}\, e^{-x};$$

et la seconde donne, pour déterminer les deux limites de l'intégrale $\int x^s \varphi\, dx$,

$$0 = x^{s+1} e^{-x};$$

ces limites sont par conséquent $x = 0$ et $x = \infty$. Ainsi l'on a

$$y_s = \mathrm{A} \int x^s dx\, e^{-x},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à x infini, et A étant une constante arbitraire.

Pour avoir cette intégrale en série, on déterminera, conformément à la méthode exposée dans le n° 23, la valeur de x qui rend $x^s e^{-x}$ un maximum ; cette valeur est s. On fera donc, suivant la méthode citée,

$$x^s e^{-x} = s^s e^{-s} e^{-t^2}.$$

En supposant $x = s + \theta$, cette équation devient

$$\left(1 + \frac{\theta}{s}\right)^s e^{-\theta} = e^{-t^2};$$

partant,

$$t^2 = -s \log\left(1 + \frac{\theta}{s}\right) + \theta = \frac{\theta^2}{2s} - \frac{\theta^3}{3s^2} + \frac{\theta^4}{4s^3} - \dots,$$

ce qui donne, par le retour des suites,

$$\theta = t\sqrt{2s} + \frac{2}{3}t^2 + \frac{t^3}{9\sqrt{2s}} + \dots;$$

par conséquent,

$$dx = d\theta = dt\sqrt{2s}\left(1 + \frac{4t}{3\sqrt{2s}} + \frac{t^2}{6s} + \dots\right);$$

la fonction $\int x^s dx\, e^{-x}$ deviendra donc

$$s^s e^{-s} \int dt\, e^{-t^2} \sqrt{2s}\left(1 + \frac{4t}{3\sqrt{2s}} + \frac{t^2}{6s} + \dots\right).$$

L'intégrale relative à x devant être prise depuis x nul jusqu'à x infini,

l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$. En intégrant comme dans le n° 31, on aura

$$y_s = \mathrm{A}\, s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12s} + \ldots\right).$$

On peut déterminer fort simplement le facteur $1 + \frac{1}{12s} + \ldots$ de cette manière. Désignons-le par

$$1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots,$$

ce qui donne

$$y_s = \mathrm{A}\, s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots\right).$$

En substituant cette valeur de y_s dans l'équation proposée

$$y_{s+1} = (s+1) y_s,$$

on aura

$$\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s+\frac{1}{2}} c^{-1} \left[1 + \frac{\mathrm{B}}{s+1} + \frac{\mathrm{C}}{(s+1)^2} + \ldots\right] = 1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots,$$

ou

$$\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots\right)\left(e^{1-\left(s+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{s}\right)} - 1\right) = -\frac{\mathrm{B}}{s^2} + \frac{\mathrm{B}-2\mathrm{C}}{s^3} - \ldots;$$

or on a

$$1 - \left(s+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{s}\right) = 1 - \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{3s^3} - \frac{1}{4s^4} + \ldots\right)$$
$$= -\frac{1}{12s^2} + \frac{1}{12s^3} - \ldots.$$

On aura donc, en observant que $c^{-\frac{1}{12s^2}+\ldots} = 1 - \frac{1}{12s} + \frac{1}{12}s^3 + \ldots$,

$$\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots\right)\left(-\frac{1}{12s^2} + \frac{1}{12s^3} - \ldots\right) = -\frac{\mathrm{B}}{s^2} + \frac{\mathrm{B}-2\mathrm{C}}{s^3} - \ldots,$$

ce qui donne, en comparant les puissances semblables de $\frac{1}{s}$,

$$\mathrm{B} = \frac{1}{12}, \qquad \mathrm{C} = \frac{1}{288}, \qquad \ldots;$$

donc

$$y_s = \mathrm{A}\, s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} + \ldots\right).$$

On déterminera la constante arbitraire A au moyen d'une valeur particulière de y_s, en supposant, par exemple, que, s étant égal à μ, on ait $y_s = \mathrm{Y}$; on aura

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A} \int x^\mu dx\, c^{-x},$$

ce qui donne

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{Y}}{\int x^\mu dx\, c^{-x}};$$

par conséquent,

$$(q) \qquad y_s = \frac{\mathrm{Y}\, s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi}}{\int x^\mu dx\, c^{-x}} \left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} + \ldots\right).$$

Voyons maintenant de quelle nature est la fonction y_s. Pour cela, il faut intégrer l'équation aux différences finies

$$y_{s+1} = (s+1) y_s.$$

On trouve facilement que son intégrale est

$$y_s = \mathrm{Y}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots s;$$

on aura donc, en comparant cette expression à la formule (q),

$$(q') \qquad (\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots s = \frac{s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} + \ldots\right)}{\int x^\mu dx\, c^{-x}}.$$

Si l'on fait $\mu = 0$, on aura $\int x^\mu dx c^{-x} = 1$; partant

$$1.2.3\ldots s = s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} + \ldots\right).$$

Si l'on fait $\mu = \frac{m}{n}$, m étant moindre que n, on aura

$$s = s' + \frac{m}{n},$$

s' étant un nombre entier; ainsi

$$s^{s+\frac{1}{2}}=\left(s'+\frac{m}{n}\right)^{s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}}=s'^{s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}}e^{\left(s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{m}{ns'}\right)};$$

or on a

$$\left(s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{m}{ns'}\right)=\left(s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{ns'}-\frac{m^2}{2n^2s'^2}+\ldots\right)$$
$$=\frac{m}{n}+\frac{m^2+mn}{2n^2s'}+\ldots.$$

On a d'ailleurs, en faisant $x=t^n$,

$$\int x^m dx e^{-x}=\frac{m}{n}\int x^{\frac{m}{n}-1}dx e^{-x}=m\int t^{m-1}dt e^{-t^n},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis $t=0$ jusqu'à t infini. En substituant ces valeurs dans la formule (q'), elle donnera

$$(q'')\quad\begin{cases}m(m+n)(m+2n)\ldots(m+s'n)\\ \quad=\dfrac{n^{s'}s'^{s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}}e^{-s'}\sqrt{2\pi}\left(1+\dfrac{n^2+6mn+6m^2}{12n^2s'}+\ldots\right)}{\int t^{m-1}dte^{-t^n}};\end{cases}$$

en sorte que la valeur approchée du produit des termes de la progression arithmétique m, $m+n$, $m+2n$, ... dépend des trois transcendantes e, π et $\int t^{m-1}dte^{-t^n}$.

Si dans cette équation on fait, pour plus de simplicité, $n=1$, ce qui change m en μ, et si l'on observe que $\int t^{\mu-1}dte^{-t}=\frac{1}{\mu}\int t^{\mu}dte^{-t}$, on aura

$$(1+\mu)(2+\mu)\ldots(s'+\mu)=s'^{s'+\mu+\frac{1}{2}}e^{-s'}\sqrt{2\pi}\,\frac{1+\dfrac{1+6\mu+6\mu^2}{12s'}+\ldots}{\int t^{\mu}dte^{-t}}.$$

En changeant μ dans $-\mu$, on aura

$$(1-\mu)(2-\mu)\ldots(s'-\mu)=s'^{s'-\mu+\frac{1}{2}}e^{-s'}\sqrt{2\pi}\,\frac{1+\dfrac{1-6\mu+6\mu^2}{12s'}+\ldots}{\int t^{-\mu}dte^{-t}}.$$

En multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura

$$(1-\mu^2)\left(\tfrac{1}{4}-\mu^2\right)\ldots(s'^2-\mu^2)=\frac{s'^{2s'+1}e^{-2s'}.2\pi\left(1+\dfrac{1+6\mu^2}{6s'}+\ldots\right)}{\int t^{-\mu}dte^{-t}\int t^{\mu}dte^{-t}}.$$

L'équation (T) du n° 24 donne

$$n^n\int t^{n+r-2}dte^{-t^n}\int t^{n-r}dte^{-t^n}=\frac{(r-1)\pi}{\sin\dfrac{r-1}{n}\pi}.$$

En faisant $n=1$ et $\mu=r-1$, on a

$$\int t^{\mu}dte^{-t}\int t^{-\mu}dte^{-t}=\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi};$$

on a donc

$$\sin\mu\pi=\tfrac{1}{2}\mu(1-\mu^2)\left(\tfrac{1}{4}-\mu^2\right)\ldots(s'^2-\mu^2)\left(1-\frac{1+6\mu^2}{6s'}+\ldots\right)s'^{-2s'-1}e^{2s'}.$$

Si l'on fait μ infiniment petit, cette équation donne

$$2\pi=1^2.2^2.3^2\ldots s'^2\left(1-\frac{1}{6s'}+\ldots\right)s'^{-2s'-1}e^{2s'};$$

divisant donc l'équation précédente par celle-ci, on aura

$$\sin\mu\pi=\mu\pi(1-\mu^2)\left(1-\frac{\mu^2}{4}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu^2}{s'^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{s'}+\ldots\right).$$

Si l'on fait s' infini, on a pour l'expression de $\sin\varphi$, φ étant égal à $\mu\pi$, le produit infini

$$\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots;$$

l'expression de $\sin\varphi$ est ainsi décomposable dans une infinité de facteurs, ce que l'on sait d'ailleurs.

En supposant φ imaginaire et égal à $\varphi'\sqrt{-1}$, $\sin\varphi$ devient $\frac{e^{-\varphi'}-e^{\varphi'}}{2\sqrt{-1}}$; on a donc

$$e^{\varphi'}-e^{-\varphi'}=2\varphi'\left(1+\frac{\varphi'^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi'^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi'^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{\varphi'^2}{s'^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi'^2}{s'\pi^2}+\ldots\right).$$

et en faisant s' infini, on voit que $e^{\varpi'} - e^{-\varpi'}$ est égal au produit infini

$$2\varphi'\left(1+\frac{\varphi'^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi'^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots.$$

On aura, par un procédé semblable, le produit continu de facteurs dont le terme général est une fonction rationnelle entière ou fractionnaire de s. Mais l'expression à laquelle on parviendra pourra contenir d'autres transcendantes dépendantes d'intégrales définies de la forme $\int x^{\mu} dx e^{-x}$.

On peut observer ici que, ces produits étant mis sous la forme $\int x^s \varphi dx$, leur différentiation par rapport à la variable s présente une idée claire, et alors on a pour cette différentielle $\int x^s \varphi dx \log x$.

Les expressions de y_s données par les formules (q) et (q') du numéro précédent ont encore lieu, suivant la remarque du n° 30, dans le cas où s et μ sont négatifs, quoique dans ce cas l'équation

$$0 = x^{s+1} e^{-x},$$

qui détermine les limites de l'intégrale définie qui représente la valeur de y_s, n'ait pas plusieurs racines réelles. Si, dans la formule (q) du numéro précédent, on change s dans $-s$ et μ dans $-\mu$, elle devient

$$y_{-s} = \frac{\Upsilon\sqrt{-1}\, e^s \sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}-\cdots\right)}{(-1)^s s^{s-\frac{1}{2}} \int \frac{dx e^{-x}}{x^{\mu}}},$$

Υ étant la valeur de y qui répond à $s = -\mu$. Toute la difficulté se réduit à intégrer $\int \frac{dx e^{-x}}{x^{\mu}}$. Pour y parvenir, il faut suivre le même procédé dont on a fait usage pour réduire en série l'intégrale $\int e^{-x} x^s dx$. On fera donc

$$x = -\mu + \varpi\sqrt{-1},$$

$-\mu$ étant la valeur de x donnée par l'équation

$$0 = d\frac{e^{-x}}{x^{\mu}};$$

on aura ainsi

$$\int \frac{dx e^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{e^{\mu}\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}} \int \frac{d\varpi\, e^{-\varpi\sqrt{-1}}}{(\mu - \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}.$$

L'intégrale relative à x devant s'étendre entre les deux limites qui rendent nulle la quantité $\frac{e^{-x}}{x^{\mu}}$, il est clair que l'intégrale relative à ϖ doit s'étendre depuis $\varpi = -\infty$ jusqu'à $\varpi = \infty$; en réunissant donc les deux quantités $\frac{e^{-\varpi\sqrt{-1}}}{(\mu - \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}$ et $\frac{e^{\varpi\sqrt{-1}}}{(\mu + \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}$, qui répondent aux mêmes valeurs de ϖ affectées de signes contraires, on aura

$$\int \frac{dx e^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{e^{\mu}\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}} \int d\varpi \left\{ \begin{array}{l} \cos\varpi \dfrac{(\mu + \varpi\sqrt{-1})^{\mu} + (\mu - \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}{(\mu^2+\varpi^2)^{\mu}} \\ \quad + \sqrt{-1}\sin\varpi \dfrac{(\mu - \varpi\sqrt{-1})^{\mu} - (\mu + \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}{(\mu^2+\varpi^2)^{\mu}} \end{array} \right\},$$

l'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \infty$. Si l'on développe les quantités sous le signe $\int$, les imaginaires disparaissent, et il ne reste qu'une fonction réelle que nous désignerons par $Q d\varpi$; on aura ainsi

$$\int \frac{dx e^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{e^{\mu}\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}} \int Q\, d\varpi ;$$

partant

$$y_{-s} = \frac{\Upsilon e^{s-\mu}\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}-\cdots\right)}{(-1)^{s-\mu} s^{s-\frac{1}{2}} \int Q\, d\varpi}.$$

Voyons présentement quelle fonction de s est y_{-s}. Pour cela, reprenons l'équation primitive

$$0 = (s+1)y_s - y_{s+1};$$

en y changeant s dans $-s$, et faisant $y_{-s} = u_s$, elle devient

$$0 = (s-1)u_s + u_{s-1},$$

équation dont l'intégrale est

$$u_s = \frac{(-1)^{s-\mu}\Upsilon}{\mu(1+\mu)(2+\mu)\cdots(s-1)} = y_{-s},$$

Y étant, comme ci-dessus, égal à $y_{-\mu}$. Si l'on compare cette expression de y_{-s} à la précédente, et si l'on observe que $s-\mu$ est un nombre entier et qu'ainsi l'on a $(-1)^{2s-2\mu}=1$, on aura

$$\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)\dots(s-1)}=\frac{\mu\sqrt{2\pi}\,c^{s-\mu}\left(1-\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}-\dots\right)}{s^{s-\frac{1}{2}}\int Q\,d\varpi}.$$

En divisant les deux membres de cette équation par s et les renversant ensuite, on aura

$$(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\dots s=\frac{s^{s+\frac{1}{2}}c^{\mu-s}}{\mu\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{1}{12s}+\dots\right)\int Q\,d\varpi.$$

Si l'on compare cette équation à la formule (q') du numéro précédent, on a ce résultat remarquable

$$\text{(O)}\qquad \int Q\,d\varpi=\frac{2\mu\pi c^{-\mu}}{\int x^{\mu}\,dx\,c^{-x}}.$$

Je suis parvenu à cette équation générale dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782, par l'analyse précédente, fondée, comme on voit, sur le passage du réel à l'imaginaire. En faisant successivement, dans Q, $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, ..., on aura les valeurs d'un nombre infini d'intégrales définies; ainsi, dans le cas de $\mu=1$, l'équation (O) donne

$$\int\frac{d\varpi\,(\cos\varpi+\varpi\sin\varpi)}{1+\varpi^2}=\frac{\pi}{c},$$

formule que j'ai donnée pareillement dans les Mémoires cités. Cette formule et toutes celles du même genre peuvent se vérifier par les formules du n° 26; car on a, par ce numéro,

$$\int\frac{d\varpi\cos\varpi}{1+\varpi^2}=\frac{\pi}{2c}=\int\frac{\varpi\,d\varpi\sin\varpi}{1+\varpi^2}.$$

Nous observerons ici, comme dans les Mémoires cités, que $\int\frac{dx\,c^{-x}}{x^{\mu}}$ étant égal à $\frac{c^{\mu}\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}}\int Q\,d\varpi$, on a, en substituant au lieu de $\int Q\,d\varpi$ sa valeur donnée par l'équation (O),

$$\int\frac{dx\,c^{-x}}{x^{\mu}}=\frac{2\mu\pi(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\int x^{\mu}\,dx\,c^{-x}}=\frac{2\pi(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\int x^{\mu-1}\,dx\,c^{-x}},$$

la première intégrale étant prise entre les deux valeurs imaginaires de x qui rendent nulle la quantité $\frac{c^{-x}}{x^{\mu}}$, et les deux autres intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini, ce qui donne un moyen facile de transformer dans celles-ci les intégrales $\int\frac{dx\sin x}{x^{\mu}}$ et $\int\frac{dx\cos x}{x^{\mu}}$.

34. Considérons maintenant l'équation générale

$$0=(a'+b's)y_{s+1}-(a+bs)y_s.$$

Si l'on fait

$$\frac{a}{b}=n,\qquad \frac{a'}{b'}=n'+1,\qquad \frac{b}{b'}=p,$$

elle prend cette forme

$$0=(n'+s+1)y_{s+1}-(n+s)py_s.$$

Supposons

$$y_s=\int x^{s-1}\varphi\,dx;$$

nous aurons, en intégrant par parties,

$$0=x^s\varphi(x-p)+\int x^{s-1}[\varphi\,dx\,(n'x-np)+(p-x)x\,d\varphi].$$

Cette équation donne, pour déterminer φ, la suivante

$$0=(n'x-np)\varphi\,dx+(p-x)x\,d\varphi,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\varphi=Ax^n(p-x)^{n'-n},$$

A étant une constante arbitraire. On aura ensuite, pour déterminer les limites de l'intégrale, l'équation

$$0=x^s\varphi(p-x)$$

ou

$$0=x^{n+s}(p-x)^{n'+1-n}.$$

Ces limites sont donc $x = 0$ et $x = p$, si $n + s$ et $n' + 1 - n$ sont des quantités positives. Ainsi l'on aura, en prenant l'intégrale dans ces limites,

$$y_s = \Lambda \int x^{n+s-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}.$$

On déterminera la constante A, au moyen d'une valeur particulière de y_s. Soit y_μ cette valeur; on aura

$$\Lambda = \frac{y_\mu}{\int x^{n+\mu-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}};$$

par conséquent,

$$y_s = \frac{y_\mu \int x^{n+s-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}}{\int x^{n+\mu-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}}.$$

Intégrons présentement l'équation proposée aux différences en y_s. Son intégrale est

$$y_s = \frac{(n+\mu)(n+\mu+1)\ldots(n+s-1)}{(n'+\mu+1)(n'+\mu+2)\ldots(n'+s)}\,y_\mu\,p^{s-\mu}.$$

Dans cette expression, comme dans toutes celles formées de produits, les facteurs du numérateur ne commencent que pour la valeur de s qui rend le dernier facteur égal au premier, ce qui a lieu ici lorsque s est égal à $\mu + 1$; il en est de même des facteurs du dénominateur. Pour la valeur de s égale à μ, le numérateur et le dénominateur se réduisent à l'unité qui est censée les multiplier l'un et l'autre. Si l'on compare les deux expressions précédentes de y_s, on aura

$$\frac{(n+\mu)(n+\mu+1)\ldots(n+s-1)}{(n'+\mu+1)(n'+\mu+2)\ldots(n'+s)}\,p^{s-\mu} = \frac{\int x^{n+s-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}}{\int x^{n+\mu-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}}.$$

Faisons $p - x = pu^2$; le second membre de cette équation deviendra

$$p^{s-\mu}\,\frac{\int u^{2n'-2n+1}\,du\,(1-u^2)^{n+s-1}}{\int u^{2n'-2n+1}\,du\,(1-u^2)^{n+\mu-1}},$$

les intégrales étant prises depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$, parce que ces limites répondent aux limites $x = p$ et $x = 0$. On a donc

$$\frac{(n+\mu)(n+\mu+1)\ldots(n+s-1)}{(n'+\mu+1)(n'+\mu+2)\ldots(n'+s)} = \frac{\int u^{2n'-2n+1}\,du\,(1-u^2)^{n+s-1}}{\int u^{2n'-2n+1}\,du\,(1-u^2)^{n+\mu-1}}.$$

Supposons $n = \frac{1}{2}$, $n' = 0$ et $\mu = 1$; si l'on observe que

$$\int du\,\sqrt{1-u^2} = \tfrac{1}{4}\pi,$$

on aura

$$\frac{(s+1)(s+2)\ldots 2s}{1.2.3\ldots s} = \frac{2^{2s+1}}{\pi}\int du\,(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}.$$

Le premier membre de cette équation est le coefficient du terme moyen, ou indépendant de a, du binôme $\left(\frac{1}{a}+a\right)^{2s}$; on aura donc, au moyen des méthodes précédentes, ce coefficient par une approximation rapide, lorsque s est un grand nombre. Pour cela, nous ferons

$$\frac{1}{s-\frac{1}{2}} = \alpha, \qquad 1-u^2 = c^{-\alpha t^2},$$

ce qui donne

$$u = \sqrt{1-c^{-\alpha t^2}}$$

et

$$\int du\,(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}} = \int du\,c^{-t^2}.$$

Supposons

$$\sqrt{1-c^{-\alpha t^2}} = \alpha^{\frac{1}{2}}t\left(1+\alpha q^{(1)}t^2+\alpha^2 q^{(2)}t^4+\alpha^3 q^{(3)}t^6+\ldots\right).$$

En prenant les différences logarithmiques des deux membres de cette équation, on aura

$$\frac{1+3\alpha q^{(1)}t^2+5\alpha^2 q^{(2)}t^4+7\alpha^3 q^{(3)}t^6+\ldots}{t+\alpha q^{(1)}t^3+\alpha^2 q^{(2)}t^5+\alpha^3 q^{(3)}t^7+\ldots} = \frac{\alpha t c^{-\alpha t^2}}{1-c^{-\alpha t^2}},$$

et ce dernier membre est égal à

$$\frac{1-\alpha t^2+\frac{\alpha^2}{1.2}t^4-\frac{\alpha^3}{1.2.3}t^6+\ldots}{t\left(1-\frac{\alpha t^2}{1.2}+\frac{\alpha^2 t^4}{1.2.3}-\frac{\alpha^3 t^6}{1.2.3.4}+\ldots\right)}.$$

On aura donc, en comparant cette quantité au premier membre et réduisant au même dénominateur, l'équation générale

$$0 = 2i\,q^{(i)} - \frac{2i-3}{1.2}\,q^{(i-1)} + \frac{2i-6}{1.2.3}\,q^{(i-2)} - \frac{2i-9}{1.2.3.4}\,q^{(i-3)} + \frac{2i-12}{1.2.3.4.5}\,q^{(i-4)} - \ldots,$$

$q^{(0)}$ étant égal à l'unité. Si l'on fait successivement dans cette équation $i=1$, $i=2$, $i=3$, ..., on aura les valeurs successives $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$, ..., et l'on trouvera

$$q^{(1)}=-\frac{1}{4}, \qquad q^{(2)}=\frac{5}{96}, \qquad \ldots.$$

On aura ensuite

$$\int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{1}{2}}\int dt\, e^{-t^2}(1+3\alpha q^{(1)}t^2+5\alpha^2 q^{(2)}t^4+7\alpha^3 q^{(3)}t^6+\ldots).$$

L'intégrale relative à u devant être prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$, l'intégrale relative à t doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; on aura donc, par le n° **24**,

$$\int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\pi}\left(1+\frac{1.3}{2}\alpha q^{(1)}+\frac{1.3.5}{2^2}\alpha^2 q^{(2)}+\frac{1.3.5.7}{2^3}\alpha^3 q^{(3)}+\ldots\right);$$

partant,

$$\frac{(s+1)(s+2)(s+3)\ldots 2s}{1.2.3\ldots s}$$
$$=\frac{2^{2s}}{\sqrt{(s-\frac{1}{2})\pi}}\left(1+\frac{1.3}{2}\alpha q^{(1)}+\frac{1.3.5}{2^2}\alpha^2 q^{(2)}+\frac{1.3.5.7}{2^3}\alpha^3 q^{(3)}+\ldots\right).$$

Ainsi l'on aura, par une suite très convergente, le terme moyen, ou indépendant de a, du binôme $\left(\frac{1}{a}+a\right)^{2s}$.

On parviendra plus simplement à ce résultat par la méthode suivante, qui peut s'étendre à un polynôme quelconque.

35. Nommons y_s le terme moyen, ou indépendant de a, du binôme $\left(\frac{1}{a}+a\right)^{2s}$, ou, ce qui revient au même, le terme indépendant de $e^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement du binôme $(e^{\varpi\sqrt{-1}}+e^{-\varpi\sqrt{-1}})^{2s}$. Si l'on multiplie ce développement par $d\varpi$ et qu'on l'intègre depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi=\frac{1}{2}\pi$, il est facile de voir que cette intégrale sera $\frac{1}{2}\pi y_s$, et qu'ainsi l'on a

$$y_s=\frac{2}{\pi}\int d\varpi\,(e^{\varpi\sqrt{-1}}+e^{-\varpi\sqrt{-1}})^{2s}.$$

En effet, en développant le binôme renfermé sous le signe $\int$, et substituant, au lieu de $e^{\pm 2r\varpi\sqrt{-1}}$, sa valeur $\cos 2r\varpi \pm \sqrt{-1}\sin 2r\varpi$, on aura le terme moyen du binôme, plus une suite de cosinus de l'angle 2ϖ et de ses multiples; en les multipliant par $d\varpi$ et les intégrant, cette suite se transformera dans une suite de sinus de l'angle 2ϖ et de ses multiples, sinus qui sont nuls aux deux limites $\varpi=0$ et $\varpi=\frac{1}{2}\pi$. Il ne restera ainsi dans l'intégrale que le terme moyen du binôme, multiplié par $\frac{1}{2}\pi$. Cela posé, si l'on substitue, au lieu du binôme $e^{\varpi\sqrt{-1}}+e^{-\varpi\sqrt{-1}}$, sa valeur $2\cos\varpi$, on aura

$$y_s=\frac{2^{2s+1}}{\pi}\int d\varpi\cos^{2s}\varpi;$$

en supposant $\sin\varpi=u$, on aura

$$y_s=\frac{2^{2s+1}}{\pi}\int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}},$$

l'intégrale étant prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$, ce qui coïncide avec ce que l'on a trouvé dans le numéro précédent.

Considérons maintenant le trinôme $\left(\frac{1}{a}+1+a\right)^s$, et nommons y_s le terme moyen, ou indépendant de a, dans le développement de ce trinôme. Ce terme sera le terme indépendant de $e^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement du trinôme $(e^{\varpi\sqrt{-1}}+1+e^{-\varpi\sqrt{-1}})^s$; on aura conséquemment, en appliquant ici le raisonnement qui précède,

$$y_s=\frac{1}{\pi}\int d\varpi(1+2\cos\varpi)^s,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$. La condition du maximum de la fonction $(1+2\cos\varpi)^s$ donne $\sin\varpi=0$, en sorte que les deux limites de l'intégrale, $\varpi=0$ et $\varpi=\pi$, répondent à des maxima de cette fonction; on partagera donc l'intégrale précédente dans les deux suivantes

$$\int d\varpi(1+2\cos\varpi)^s, \quad (-1)^s\int d\varpi(2\cos\varpi-1)^s,$$

la première de ces intégrales étant prise depuis ϖ nul jusqu'à la valeur

de ϖ qui rend nulle la quantité $2\cos\varpi + 1$, et la seconde intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à sa valeur qui rend nulle la quantité $2\cos\varpi - 1$.

Pour obtenir la première intégrale en série convergente, on fera

$$(1 + 2\cos\varpi)^s = 3^s e^{-t^2};$$

en supposant $\alpha = \frac{1}{s}$, extrayant la racine s de chaque membre, et développant $\cos\varpi$ et $e^{-\alpha t^2}$, on aura

$$3 - \varpi^2 + \frac{\varpi^4}{1.2} - \ldots = 3 - 3\alpha t^2 + \frac{3\alpha^2 t^4}{2} - \ldots,$$

d'où l'on tire, par le retour des suites,

$$\varpi = \alpha^{\frac{1}{2}} t\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha t^2}{8} + \ldots\right);$$

partant,

$$\int d\varpi (1 + 2\cos\varpi)^s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}} \int dt\, e^{-t^2}\left(1 - \frac{3t^2}{8s} + \ldots\right).$$

L'intégrale relative à t doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; on aura donc

$$\int d\varpi (1 + 2\cos\varpi)^s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}\left(1 - \frac{3}{16s} + \ldots\right).$$

On trouvera de la même manière

$$\int d\varpi (2\cos\varpi - 1)^s = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}\left(1 - \frac{5}{16s} + \ldots\right);$$

on aura donc

$$y_s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s\pi}}\left(1 - \frac{3}{16s} + \ldots\right) + \frac{(-1)^s}{2\sqrt{s\pi}}\left(1 - \frac{5}{16s} + \ldots\right);$$

s étant supposé un très grand nombre, cette quantité se réduit à très peu près à $\frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s\pi}}$. C'est l'expression fort approchée du terme moyen, ou indépendant de a, du binôme $\left(\frac{1}{a} + 1 + a\right)^s$.

On déterminera de la même manière le terme moyen d'un polynôme quelconque, élevé à une très haute puissance. Supposons d'abord le nombre des termes du polynôme impair et égal à $2n + 1$, et représentons ce polynôme par

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a} + 1 + a + \ldots + a^{n-1} + a^n.$$

En substituant $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ pour a, ce polynôme devient

$$1 + 2\cos\varpi + 2\cos 2\varpi + \ldots + 2\cos n\varpi;$$

or cette fonction est égale à $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$; la puissance s du polynôme est donc

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s.$$

Le terme moyen de cette puissance est le terme indépendant de ϖ dans son développement en cosinus de l'angle ϖ et de ses multiples. On aura évidemment ce terme en multipliant la puissance par $d\varpi$, en prenant ensuite l'intégrale depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$ et en la divisant par π. Ce terme est donc égal à

$$\frac{1}{\pi}\int d\varpi \left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s.$$

La condition du maximum de $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ donne l'équation

$$\tang\frac{2n+1}{2}\varpi = (2n+1)\tang\tfrac{1}{2}\varpi.$$

Il y a, depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \pi$, plusieurs maxima, alternativement positifs et négatifs. Le premier répond à ϖ nul et donne

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s = (2n+1)^s.$$

Pour avoir l'intégrale précédente, depuis ce maximum jusqu'au point où $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ est nul, ce qui a lieu d'abord lorsque $\varpi = \frac{2\pi}{2n+1}$, on fera

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s = (2n+1)^s e^{-t^2}.$$

En prenant les logarithmes et réduisant en série, relativement aux puissances de ϖ, la fonction

$$s\log\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi},$$

on aura

$$\frac{n(n+1)}{6}s\varpi^2 + \ldots = t^2,$$

ce qui donne

$$d\varpi = \frac{dt\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}} + \ldots;$$

l'intégrale précédente devient ainsi

$$\frac{(2n+1)^s}{\pi}\int\frac{dt\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}}e^{-t^2} + \ldots.$$

Elle doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; car à l'origine, ou lorsque ϖ est nul, t est nul, et à la limite, où $\varpi = \frac{2\pi}{2n+1}$, t est infini; cette intégrale devient donc, en ne considérant que le premier terme et négligeant les suivants, qui sont par rapport à lui de l'ordre $\frac{1}{s}$,

$$\frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)2s\pi}}.$$

Le second maximum est négatif, et répond à une valeur de $\frac{2n+1}{2}\varpi$ comprise entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$. En effet, l'équation du maximum

$$\operatorname{tang}\frac{2n+1}{2}\varpi = (2n+1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varpi$$

donne

$$\operatorname{tang}\frac{2n+1}{2}\varpi > \frac{2n+1}{2}\varpi.$$

Ainsi, $\frac{2n+1}{2}\varpi$ étant compris dans le second maximum entre π et 2π, $\operatorname{tang}\frac{2n+1}{2}\varpi$ surpasse π; par conséquent $\frac{2n+1}{2}\varpi$ surpasse $\pi + \frac{1}{4}\pi$; il est donc compris entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$. L'équation précédente du maximum donne

$$\frac{-\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi} = \frac{2n+1}{\sqrt{\cos^2\frac{1}{2}\varpi + (2n+1)^2\sin^2\frac{1}{2}\varpi}}.$$

Ce dernier membre est plus petit que

$$\frac{2n+1}{\frac{2n+1}{2}\varpi\frac{\sin\frac{1}{2}\varpi}{\frac{1}{2}\varpi}};$$

$\frac{1}{2}\varpi$ ne surpassant pas $\frac{1}{2}\pi$, il est facile de s'assurer que $\frac{\sin\frac{1}{2}\varpi}{\frac{1}{2}\varpi}$ n'est jamais moindre que sa valeur qui répond à $\varpi = \pi$, et qui est égale à $\frac{2}{\pi}$; le second membre dont il s'agit est donc généralement plus petit que

$$\frac{2n+1}{\frac{2n+1}{2}\varpi\frac{2}{\pi}}.$$

Relativement au second maximum, $\frac{2n+1}{2}\varpi$ étant compris entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$, ce membre sera plus petit que $(2n+1)^{\frac{2}{5}}$; ainsi la puissance s de $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ ne surpassera point $(2n+1)^s\left(\frac{2}{5}\right)^s$; elle sera donc, lorsque s est un très grand nombre, incomparablement plus petite que la même puissance correspondante au premier maximum, et qui est égale à $(2n+1)^s$.

On verra de la même manière que le troisième maximum est compris entre $\frac{2n+1}{2}\varpi = \frac{9}{4}\varpi$, et $\frac{2n+1}{2}\varpi = \frac{5}{2}\varpi$, et qu'à ce maximum la puis-

sance s de $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ ne surpasse pas $(2n+1)^s\left(\frac{2}{3}\right)^s$; que le quatrième maximum est compris entre $\frac{2n+1}{2}\varpi=\frac{13}{4}\pi$ et $\frac{2n+1}{2}\varpi=\frac{7}{2}\pi$, et qu'à ce maximum la puissance s de $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ ne surpasse point $(2n+1)^s\left(\frac{2}{13}\right)^s$, et ainsi de suite.

Maintenant, si, à partir de l'un quelconque de ces maxima, on fait

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s=\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}\right)^s e^{-t^2},$$

Π étant la valeur de ϖ qui correspond à ce maximum, et si l'on fait

$$\varpi=\Pi+\varpi',$$

on aura, en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation précédente entre ϖ et t,

$$s\log\sin\frac{2n+1}{2}(\Pi+\varpi')-s\log\sin\tfrac{1}{2}(\Pi+\varpi')$$

$$=s\left(\log\sin\frac{2n+1}{2}\Pi-\log\sin\tfrac{1}{2}\Pi\right)-t^2.$$

En développant le premier membre de cette équation suivant les puissances de ϖ', la comparaison de la première puissance donnera d'abord l'équation du maximum

$$\operatorname{tang}\frac{2n+1}{2}\Pi=(2n+1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi.$$

En ne considérant ensuite que la seconde puissance de ϖ', on aura

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)s\varpi'^2=t^2,$$

ce qui donne

$$d\varpi'=\frac{2\,dt}{\sqrt{n(n+1)2s}};$$

l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int d\varpi\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s,$$

prise entre les deux limites entre lesquelles $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ est nul de part et d'autre du maximum de cette fonction, est donc à très peu près

$$\frac{2}{\sqrt{2n(n+1)s\pi}}\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}\right)^s.$$

Cette expression a généralement lieu pour les intégrales relatives à tous les maxima qui suivent le premier; seulement il faut n'en prendre que la moitié relativement au dernier qui correspond à $\Pi=\pi$. Il résulte de ce qui précède que cette expression, par rapport au second maximum, est moindre, abstraction faite du signe, que

$$\frac{2}{\sqrt{2n(n+1)s\pi}}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{s}{2}}$$

que, relativement au troisième maximum, elle est moindre que

$$\frac{2}{\sqrt{2n(n+1)s\pi}}\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{s}{2}},$$

et ainsi de suite. Lorsque s est un très grand nombre, ces quantités décroissent avec une extrême rapidité, et elles sont incomparablement plus petites que la quantité relative au premier maximum, et qui, comme on l'a vu, est

$$\frac{(2n+1)^{\frac{s}{2}}\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)s\pi}};$$

on peut donc n'avoir égard qu'à cette dernière intégrale, et l'on voit que cela est rigoureux dans le cas de n infini; car l'équation de condition du maximum donne alors $\frac{2n+1}{2}\Pi=\frac{2r+1}{2}\pi$, r étant un nombre

entier, ce qui rend $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}$ fini, excepté lorsque Π est zéro, ce qui répond au premier maximum.

Si le polynôme est composé d'un nombre de termes pair et égal à $2n$, tel que

$$\frac{1}{a^{n-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{a^{n-\frac{3}{2}}}+\ldots+\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}+\ldots+a^{n-\frac{3}{2}}+a^{n-\frac{1}{2}},$$

en y substituant $e^{\varpi\sqrt{-1}}$ au lieu de a, il devient

$$2\cos\tfrac{1}{2}\varpi+2\cos\tfrac{3}{2}\varpi+\ldots+2\cos\frac{2n-1}{2}\varpi,$$

ou $\frac{\sin n\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$. Ce polynôme, élevé à une puissance entière et positive, ne peut avoir de terme moyen ou indépendant des cosinus de $\frac{1}{2}\varpi$ et de ses multiples, qu'autant que cette puissance est paire; représentons-la par $2s$: alors le terme moyen sera

$$\frac{1}{\pi}\int d\varpi\left(\frac{\sin n\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^{2s},$$

l'intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi=\pi$. Cette intégrale se compose de diverses intégrales partielles, relatives aux divers maxima de la fonction $\frac{\sin n\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$; mais on s'assurera facilement, par l'analyse précédente, que toutes ces intégrales, lorsque $2s$ est un très grand nombre et lorsque n est plus grand que l'unité, sont incomparablement plus petites que celle qui est relative au premier maximum, qui correspond à ϖ nul; et alors on trouve à très peu près le terme moyen de la puissance $2s$ du polynôme égal à

$$\frac{(2n)^{2s}\sqrt{3}}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)s\pi}}.$$

En rapprochant ce résultat du précédent, on voit que, si l'on nomme généralement n' le nombre des termes du polynôme et s' la puissance

à laquelle il est élevé, le terme moyen du développement sera, lorsqu'il y en a un,

$$\frac{n'^{s'}\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{n'^2-1}{2}s'\pi}},$$

et, pour qu'il y ait un terme moyen, $(n'-1)s'$ doit être un nombre pair, c'est-à-dire que l'un ou l'autre au moins des nombres $n'-1$ et s' doit être pair.

36. L'analyse précédente donne encore le coefficient de $a^{\pm l}$ dans le développement du polynôme

$$(a^{-n}+a^{-n+1}+\ldots+a^{-1}+1+a+\ldots+a^{n-1}+a^n)^s.$$

Pour l'obtenir, on observera que le coefficient de a^r dans le développement de ce polynôme est le même que celui de a^{-r}; en nommant donc A_r ce coefficient, en faisant $a=e^{\varpi\sqrt{-1}}$ et réunissant les deux termes du développement relatifs à a^r et a^{-r}, on aura $2A_r\cos r\varpi$ pour leur somme. Maintenant, si l'on multiplie ce polynôme ou sa valeur $\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s$ par $d\varpi\cos l\varpi$, et qu'on intègre le produit depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$, il est clair que tous les termes disparaîtront, excepté celui où r est égal à l; l'intégrale se réduira donc à $2A_l\int d\varpi\cos^2 l\varpi$, ce qui donne

$$A_l=\frac{1}{\pi}\int d\varpi\cos l\varpi\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s.$$

Pour intégrer cette fonction, on fera, comme ci-dessus,

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s=(2n+1)^t c^{-t'}.$$

En prenant les logarithmes et développant par rapport aux puissances de ϖ, on aura, par le retour des suites, pour ϖ, une expression de cette

forme,

$$\varpi = \frac{t\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}}(1 + At^2 + \ldots),$$

ce qui transforme l'intégrale précédente dans celle-ci

$$\frac{(2n+1)^s}{\pi}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}}\int dt \cos\left[\frac{lt\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}}\right]e^{-t^2}(1 + 3At^2 + \ldots),$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini. On peut facilement l'obtenir par le n° 26, et l'on trouve, en n'ayant égard qu'à son premier terme, pour sa valeur,

$$\frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1).2s\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}\frac{l^2}{n(n+1)s}}.$$

C'est la valeur cherchée du coefficient de a^{sl} dans le développement du polynôme, lorsque sa puissance s est très élevée.

Cherchons maintenant la somme de tous ces coefficients, depuis celui de a^{-l} inclusivement, jusqu'à celui de a^l inclusivement, l étant un grand nombre, mais d'un ordre inférieur à s. Pour cela, nous observerons que l'on a, par le n° 10,

$$\Sigma y_l = \frac{1}{e^{\frac{dy_l}{dl}} - 1} = \frac{1}{\frac{dy_l}{dl}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{dy_l}{dl} + \frac{1}{6}\left(\frac{dy_l}{dl}\right)^2 + \ldots\right]}$$
$$= \left(\frac{dy_l}{dl}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{dy_l}{dl}\right)^0 + \frac{1}{12}\frac{dy_l}{dl} + \ldots;$$

d'où l'on tire, par le numéro cité,

$$\Sigma y_l = \int y_l\,dl - \frac{1}{2}y_l + \frac{1}{12}\frac{dy_l}{dl} + \ldots + \text{const.}$$

En prenant l'intégrale depuis le terme correspondant à t nul inclusivement, on aura la somme des valeurs de y_l, depuis cette origine jusqu'au terme y_l exclusivement. La constante arbitraire sera égale alors à $\frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{12}\frac{dy_0}{dl} - \ldots$; ainsi la somme des valeurs de y_l, depuis l nul inclusivement jusqu'à y_l inclusivement, sera

$$\int y_l\,dl + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_l + \frac{1}{12}\frac{dy_l}{dl} - \frac{1}{12}\frac{dy_0}{dl} + \ldots.$$

Supposons maintenant

$$y_l = \frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)2s\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}\frac{l^2}{n(n+1)s}};$$

alors les différences de y_l seront successivement d'un ordre inférieur les unes aux autres; en ne considérant donc que les trois premiers termes de la série précédente, on aura

$$\int y\,dl + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_l$$

pour la somme des coefficients des termes du développement de la puissance s du polynôme, depuis l nul inclusivement jusqu'à y_l inclusivement. En doublant cette somme, et en retranchant de ce double le terme y_0, on aura pour la somme des coefficients, depuis celui du terme correspondant à a^{-l} inclusivement, jusqu'à celui du terme correspondant à a^l inclusivement,

$$\frac{(2n+1)^s\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s\pi}}\left(\int dl\,e^{-\frac{1}{4}\frac{l^2}{n(n+1)s}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\frac{l^2}{n(n+1)s}}\right).$$

37. Nous avons supposé dans les exemples précédents que les équations aux différences en y_s n'avaient point de dernier terme; donnons un exemple d'une équation jouissant d'un dernier terme, et pour cela considérons l'équation aux différences

$$p^s = sy_s + (s-i)y_{s+1}.$$

En faisant

$$y_s = \int x^{s-1}\varphi\,dx,$$

on aura

$$p^s = x^s\varphi(1+x) - \int x^s[(x+1)\,d\varphi + (i+1)\varphi\,dx],$$

ce qui donne d'abord, pour déterminer φ, l'équation

$$(1+x)\,d\varphi + (i+1)\varphi\,dx = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\varphi = \frac{A}{(1+x)^{i+1}},$$

A étant une constante arbitraire. Ensuite on a

$$p^s = x^s \varphi(1+x)$$

ou

$$p^s = \frac{A x^s}{(1+x)^i},$$

d'où l'on tire

$$x = p, \qquad A = (1+p)^i,$$

en sorte que

$$y_s = (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = p$. En ajoutant à cette valeur de y_s celle-ci

$$B(1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et B étant une arbitraire; on aura pour l'intégrale complète de la proposée

$$y_s = B \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}} + (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme

$$y_s = B' \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}} - (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

la première intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et la seconde étant prise depuis $x = p$ jusqu'à x infini.

Maintenant l'intégrale de la proposée

$$p^s = s y_s + (s-i) y_{s+1}$$

est

$$y_s = \frac{1.2.3\ldots(s-1)}{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+1)}\left[Q - \sum \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots s} p^s\right],$$

Q étant une arbitraire et $\sum$ étant la caractéristique des différences finies; en sorte que la fonction $\sum \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots s} p^s$ est égale à

$$1 + ip + \frac{i(i-1)}{1.2} p^2 + \ldots + \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+2)}{1.2.3\ldots(s-1)} p^{s-1},$$

c'est-à-dire à la somme des s premiers termes du binôme $(1+p)^i$. Si l'on compare cette expression de y_s à la précédente, on aura

$$B' \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}} - (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}} = \frac{1.2.3\ldots(s-1)}{i(i-1)\ldots(i-s+1)}\left[Q - \sum \frac{i(i-1)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots s} p^s\right].$$

Si l'on fait $s = 1$ dans cette équation et si l'on observe que le produit $1.2.3\ldots(s-1)$ se réduit alors à l'unité, comme on l'a vu dans le n° 34, on trouve, après les intégrations, $B' = Q$. Ainsi, B' étant une arbitraire, cette équation se partage dans les deux suivantes

$$\frac{1.2.3\ldots(s-1)}{i(i-1)\ldots(i-s+1)} = \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

$$\frac{1.2.3\ldots(s-1)}{i(i-1)\ldots(i-s+1)} \sum \frac{i(i-1)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots s} p^s = (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}};$$

d'où l'on tire

$$1 + ip + \frac{i(i-1)}{1.2} p^2 + \ldots + \frac{i(i-1)\ldots(i-s+2)}{1.2.3\ldots(s-1)} p^{s-1} = (1+p)^i \frac{\int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}}}{\int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = p$ jusqu'à x infini, et celle du dénominateur étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Lorsque s et i sont de grands nombres, il sera facile de réduire ces deux intégrales en séries convergentes, par les formules des n°s 22 et 23. On aura ainsi la somme de s premiers termes du binôme élevé à une grande puissance, par une approximation d'autant plus rapide que cette puissance sera plus haute.

Si l'on effectue les intégrations, l'équation précédente devient

$$1+ip+\frac{i(i-1)}{1.2}p^2+\ldots+\frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+2)}{1.2.3\ldots(s-1)}p^{s-1}$$
$$=(1+p)^{i-1}\left\{1+\frac{i-s+1}{1}\frac{p}{1+p}+\frac{(i-s+1)(i-s+2)}{1.2}\frac{p^2}{(1+p)^2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{(i-s+1)\ldots(i-1)}{1.2.3\ldots(s-1)}\frac{p^{s-1}}{(1+p)^{s-1}}\right\}.$$

Le second membre de cette équation est une transformation de la somme partielle des termes du binôme $(1+p)^i$, transformation qui peut être utile.

De l'approximation des différences infiniment petites et finies, très élevées, des fonctions.

38. Considérons une fonction quelconque de z, que nous représenterons par $\varphi(z)$. En y changeant z en $z+t$, désignons par y_s le coefficient de t^s dans le développement de cette fonction; nous aurons

$$\frac{d^s\varphi(z+t)}{dt^s}=1.2.3\ldots s.y_s,$$

t étant supposé nul après les différentiations, et, comme on a

$$\frac{d\varphi(z+t)}{dt}=\frac{d\varphi(z)}{dz},$$

en supposant t nul, on aura

$$\frac{d^s\varphi(z)}{dz^s}=1.2.3\ldots s.y_s.$$

Ainsi la recherche de la différence $s^{\text{ième}}$ de $\varphi(z)$ se réduit à développer la fonction $\varphi(z+t)$ en série.

Supposons que cette fonction de t soit une puissance d'un polynôme en t, que nous représenterons par

$$(a+bt+ct^2+\ldots)^\mu.$$

En exprimant par

$$y_0+y_1t+y_2t^2+\ldots+y_st^s+\ldots$$

son développement en série, on aura, en prenant les différences logarithmiques,

$$\frac{\mu(b+2ct+\ldots)}{a+bt+ct^2+\ldots}=\frac{y_1+2y_2t+\ldots+sy_st^{s-1}+\ldots}{y_0+y_1t+y_2t^2+\ldots+y_st^s+\ldots}.$$

Multipliant en croix et comparant les termes multipliés par t^{s-1}, on aura

$$asy_s+b(s-1)y_{s-1}+c(s-2)y_{s-2}+\ldots=\mu by_{s-1}+2\mu cy_{s-2}+\ldots.$$

Représentons par $\int x^{s-1}\varpi\,dx$ l'expression de y_s; cette équation devient

$$0=x^s\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)\varpi$$
$$-\int x^s\left[d\varpi\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)+\mu\varpi\,dx\left(\frac{b}{x^2}+\frac{2c}{x^3}+\ldots\right)\right].$$

En égalant séparément à zéro la partie de cette équation affectée du signe intégral, on a

$$0=d\varpi\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)+\mu\varpi\,dx\left(\frac{b}{x^2}+\frac{2c}{x^3}+\ldots\right);$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\varpi=\Lambda\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)^\mu,$$

Λ étant une constante arbitraire. La partie de l'équation précédente hors du signe intégral donnera ensuite, pour déterminer les limites de l'intégrale,

$$0=x^s\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)^{\mu+1};$$

ces limites sont donc $x=0$ et x égal aux diverses racines de l'équation

$$0=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots.$$

On aura donc, par les méthodes précédentes et par une approximation

très prompte, les coefficients des puissances très élevées de t dans le développement en série de la puissance

$$(a+bt+ct^2+\ldots)^\mu,$$

et par conséquent on aura les différentielles très élevées de la puissance

$$(a'+b'z+c'z^2+\ldots)^\mu,$$

qui se change dans la précédente en changeant z dans $z+t$ et faisant

$$\begin{aligned} a &= a' + b'z + c'z^2 + \ldots, \\ b &= b' + 2c'z + \ldots, \\ c &= c' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Appliquons cette analyse à un exemple.

z étant le sinus d'un angle θ, on aura

$$\frac{d^{i+1}\theta}{dz^{i+1}} = \frac{d^i}{dz^i}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Pour avoir l'expression du second membre de cette équation, nous observerons que l'on a, par ce qu'on vient de voir,

$$\frac{d^i}{dz^i}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1.2.3\ldots i.y_i,$$

y_i étant le coefficient de t^i dans le développement de $[1-(z+t)^2]^{-\frac{1}{2}}$. On aura ensuite

$$y_i = \mathrm{A}\int x^{i-1}dx\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

les limites de l'intégrale étant données par l'équation

$$x^i\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ces limites sont

$$x = -\frac{1}{1+z}, \qquad x = 0, \qquad x = \frac{1}{1-z}.$$

Comme x a trois valeurs, l'expression de y_i prend cette forme, par le n° 29,

$$y_i = \mathrm{A}\int x^{i-1}dx\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{A}'\int x^{i-1}dx\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

A et A′ étant des constantes arbitraires, et la première intégrale étant prise depuis $x = -\frac{1}{1+z}$ jusqu'à $x = 0$, et la seconde étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{1-z}$. Si l'on fait

$$x = \frac{z+\cos\varpi}{1-z^2},$$

l'expression précédente de y_i devient

$$y_i = \mathrm{B}\int \frac{d\varpi\,(z+\cos\varpi)^i}{(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}} + \mathrm{B}'\int \frac{d\varpi\,(z+\cos\varpi)^i}{(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}},$$

la première intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à ϖ égal à l'angle dont le cosinus est $-z$, et la seconde étant prise depuis ce dernier angle jusqu'à $\varpi = \pi$. Pour déterminer les arbitraires B et B′, on observera que

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad y_1 = \frac{z}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où il est facile de conclure

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}' = \frac{1}{\pi};$$

partant

$$y_i = \frac{1}{\pi(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}\int d\varpi\,(z+\cos\varpi)^i,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$. En prenant cette intégrale et observant que

$$\begin{aligned} \int d\varpi\cos^{2r}\varpi &= \frac{1}{2^{2r}}\int d\varpi\left(e^{\varpi\sqrt{-1}} + e^{-\varpi\sqrt{-1}}\right)^{2r} \\ &= \frac{1.2.3\ldots 2r}{2^{2r}(1.2.3\ldots r)^2}\pi = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots 2r}\pi, \end{aligned}$$

on aura

$$(a)\qquad y_s=\frac{1}{(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}}\left\{\begin{array}{l} z^s+\frac{1}{2}\dfrac{s(s-1)}{1.2}z^{s-2}+\dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}z^{s-4}\\ +\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\dfrac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)}{1.2.3.4.5.6}z^{s-6}+\ldots\end{array}\right\}.$$

Cette expression est fort composée, lorsque s est un grand nombre; mais alors on peut obtenir sa valeur d'une manière fort approchée, en appliquant à l'expression de y_s, sous forme d'intégrale définie, les méthodes exposées ci-dessus. La fonction sous le signe intégral ayant deux maxima, l'un à l'origine de l'intégrale et l'autre à son extrémité, nous la décomposerons dans les deux suivantes

$$y_s=\frac{1}{\pi(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}}\left[\int d\varpi\,(z+\cos\varpi)^s+(-1)^s\int d\varpi\,(\cos\varpi-z)^s\right],$$

la première intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à ϖ égal à l'angle dont le cosinus est $-z$, et la seconde intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à ϖ égal à l'angle dont z est le cosinus. Soit $\frac{1}{s}=\alpha$, et faisons

$$(z+\cos\varpi)^s=(1+z)^s e^{-t^2};$$

on aura, en prenant les logarithmes et réduisant $\cos\varpi$ en série,

$$\log\left[1-\frac{\varpi^2}{2(1+z)}+\frac{\varpi^4}{24(1+z)}-\ldots\right]=-\alpha t^2,$$

d'où il est facile de conclure

$$\varpi=\alpha^{\frac{1}{2}}t\sqrt{2(1+z)}\left[1-\frac{\alpha(2-z)}{12}t^2+\ldots\right];$$

on aura ainsi, en observant que l'intégrale doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini,

$$\int d\varpi\,(z+\cos\varpi)^s=\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{2}(1+z)^{s+\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\alpha(2-z)}{8}+\ldots\right].$$

En changeant z dans $-z$, on aura

$$\int d\varpi\,(\cos\varpi-z)^s=\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{2}(1-z)^{s+\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\alpha(2+z)}{8}+\ldots\right];$$

partant

$$(b)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_s=\dfrac{1}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2s\pi}}\left[1-\dfrac{\alpha(2-z)}{8}+\ldots\right]\\ +\dfrac{(-1)^s}{(1+z)^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2s\pi}}\left[1-\dfrac{\alpha(2+z)}{8}+\ldots\right];\end{array}\right.$$

dans le cas de s très grand, cette expression se réduit à fort peu près à ce terme très simple,

$$\frac{1}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2s\pi}}.$$

Si l'on multiplie l'expression (b) de y_s par le produit $1.2.3\ldots s$, produit qui, par le n° 33, est égal à

$$s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{\alpha}{12}+\ldots\right),$$

on aura à très peu près

$$\frac{d^{s+1}\theta}{dz^{s+1}}=\frac{d^s\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{dz^s}=\frac{s^s e^{-s}}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}}.$$

39. Lorsqu'une fonction y_s de s peut être exprimée par une intégrale définie de la forme $\int x^s\varphi\,dx$, les différences infiniment petites et finies d'un ordre quelconque n seront, par le n° 21,

$$\frac{d^n y_s}{ds^n}=\int x^s\varphi\,dx\,(\log x)^n,$$
$$\Delta^n y_s=\int x^s\varphi\,dx\,(x-1)^n.$$

Si, au lieu d'exprimer la fonction de s par l'intégrale $\int x^s\varphi\,dx$, on l'exprime par l'intégrale $\int e^{-sx}\varphi\,dx$, alors on a

$$\frac{d^n y_s}{ds^n}=(-1)^n\int x^n\varphi\,dx\,e^{-sx},$$
$$\Delta^n y_s=\int\varphi\,dx\,e^{-sx}(e^{-x}-1)^n.$$

Pour avoir les intégrales $n^{\text{ièmes}}$, soit finies, soit infiniment petites, il suffira de faire n négatif dans ces expressions. On peut observer qu'elles sont généralement vraies, quel que soit n, en le supposant même fractionnaire, ce qui donne le moyen d'avoir les différences et les intégrales correspondantes à des indices fractionnaires. Toute la difficulté se réduit à mettre sous la forme d'intégrales définies une fonction de s, ce que l'on peut faire par les n^{os} 29 et 30, lorsque cette fonction est donnée par une équation linéaire aux différences infiniment petites ou finies. Comme on est principalement conduit dans l'analyse des hasards à des expressions qui ne sont que les différences finies des fonctions, ou une partie de ces différences, nous allons y appliquer les méthodes précédentes et déterminer leurs valeurs en séries convergentes.

40. Considérons d'abord la fonction $\frac{1}{s^i}$. En la désignant par y_i, elle sera déterminée par l'équation aux différences infiniment petites

$$0 = s\frac{dy_i}{ds} + iy_i.$$

Si l'on suppose, dans cette équation,

$$y_i = \int c^{-sx}\varphi\, dx, \qquad c^{-sx} = \partial y,$$

elle deviendra

$$0 = \int \varphi\, dx \left(i\partial y + x\frac{d\partial y}{dx}\right),$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties, conformément à la méthode du n° 29, les deux équations

$$0 = i\varphi - \frac{d(x\varphi)}{dx},$$
$$0 = x\varphi\partial y.$$

La première donne, en l'intégrant,

$$\varphi = Ax^{i-1},$$

A étant une arbitraire. La seconde équation donne pour les limites de

l'intégrale $\int c^{-sx}\varphi\, dx$, $x = 0$ et $x = \infty$. On aura donc, dans ces limites,

$$\frac{1}{s^i} = A\int x^{i-1}\, dx\, c^{-sx}.$$

Pour déterminer la constante A, nous observerons que, s étant 1, le premier membre de cette équation se réduit à l'unité, ce qui donne

$$A = \frac{1}{\int x^{i-1}\, dx\, c^{-x}}, \qquad \text{partant} \qquad \frac{1}{s^i} = \frac{\int x^{i-1}\, dx\, c^{-sx}}{\int x^{i-1}\, dx\, c^{-x}};$$

on aura donc par le numéro précédent

$$(\mu) \qquad \Delta^n \frac{1}{s^i} = \frac{\int x^{i-1}\, dx\, c^{-sx}(c^{-x}-1)^n}{\int x^{i-1}\, dx\, c^{-x}},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

Pour développer cette expression en série, supposons

$$x^{i-1}c^{-sx}(c^{-x}-1)^n = a^{i-1}c^{-sa}(c^{-a}-1)^n c^{-t^2},$$

a étant la valeur de x qui répond au maximum du premier membre de cette équation. Si l'on fait $x = a + \theta$, on aura, en prenant les logarithmes de chaque membre, et en développant le logarithme du premier dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de θ,

$$h\theta^2 + h'\theta^3 + h''\theta^4 + \ldots = t^2,$$

les quantités a, h, h', h'', ... étant données par les équations suivantes :

$$0 = \frac{i-1}{a} - s - \frac{nc^{-a}}{c^{-a}-1},$$

$$h = \frac{i-1}{2a^2} - \frac{n}{2}\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} + \frac{n}{2}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^2,$$

$$h' = -\frac{i-1}{3a^3} + \frac{n}{6}\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} - \frac{n}{2}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^2 + \frac{n}{3}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^3,$$

$$h'' = \frac{i-1}{4a^4} - \frac{n}{24}\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} + \frac{7n}{24}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^2 - \frac{n}{2}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^3 + \frac{n}{4}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^4,$$

on aura donc, par le retour des suites,

$$\vartheta = \frac{t}{\sqrt{h}}\left(1 - \frac{h't}{2h\sqrt{h}} + \frac{5h'^2 - 4hh''}{8h^3}t^2 + \dots\right),$$

et cette suite sera d'autant plus convergente que le nombre n sera plus considérable. En substituant cette valeur de ϑ dans la fonction $f d\vartheta e^{-t^2}$, et prenant l'intégrale dans les limites $t = -\infty$ et $t = \infty$, limites qui correspondent aux limites $x = 0$ et $x = \infty$, on aura

$$\int x^{i-1}\,dx\,e^{-sx}(e^{-x}-1)^n = a^{i-1}e^{-sa}(e^{-a}-1)^n\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}}\left(1 + \frac{15h'^2 - 12hh''}{16h^3} + \dots\right).$$

On a d'ailleurs

$$\int x^{i-1}\,dx\,e^{-x} = \frac{1}{i}\int x^i\,dx\,e^{-x},$$

et lorsque i est très grand, on a, par le n° **32**,

$$\int x^i\,dx\,e^{-x} = i^{i+\frac{1}{2}}e^{-i}\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12i} + \dots\right);$$

en divisant donc l'une par l'autre les deux valeurs de

$$\int x^{i-1}\,dx\,e^{-sx}(e^{-x}-1)^n \quad \text{et} \quad \int x^{i-1}\,dx\,e^{-x},$$

on aura

$$\Delta^n \frac{1}{s^i} = \frac{\left(\frac{a}{i}\right)^{i-1}e^{i-sa}(e^{-a}-1)^n}{\sqrt{2hi}}\left\{1 + \frac{15h'^2 - 12hh''}{16h^3} - \frac{1}{12i} - \dots\right\}.$$

Pour avoir la différence finie $n^{\text{ième}}$ de la puissance positive s^i, il suffit, par le n° **30**, de changer dans cette équation i dans $-i$, et l'on aura

$$(\mu')\quad \begin{cases} \Delta^n s^i = (s+n)^i - n(s+n-1)^i + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(s+n-2)^i - \dots \\ \quad = \dfrac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1}e^{sa-i}(e^a-1)^n}{\sqrt{\frac{i(i+1)}{a^2} - ni\,\frac{e^a}{(e^a-1)^2}}}\left(1 + \dfrac{15l'^2 - 12ll''}{16l^3} + \dfrac{1}{12i} + \dots\right), \end{cases}$$

$a, l, l', l'', \dots$ étant données par les équations

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{ne^a}{e^a-1},$$

$$l = -\frac{i+1}{2a^2} - \frac{n}{2}\,\frac{e^a}{e^a-1} + \frac{n}{2}\left(\frac{e^a}{e^a-1}\right)^2,$$

$$l' = -\frac{i+1}{3a^3} + \frac{n}{6}\,\frac{e^a}{e^a-1} - \frac{n}{2}\left(\frac{e^a}{e^a-1}\right)^2 + \frac{n}{3}\left(\frac{e^a}{e^a-1}\right)^3,$$

$$l'' = -\frac{i+1}{4a^4} - \frac{n}{24}\,\frac{e^a}{e^a-1} + \frac{7n}{24}\left(\frac{e^a}{e^a-1}\right)^2 - \frac{n}{2}\left(\frac{e^a}{e^a-1}\right)^3 + \frac{n}{4}\left(\frac{e^a}{e^a-1}\right)^4,$$

.....

La série (μ') cesse d'être convergente lorsque a est une très petite fraction de l'ordre $\frac{1}{n}$; car il est visible que, les quantités $l, l', l'', \dots$ formant alors une progression croissante, chaque terme de la série est du même ordre que celui qui le précède. Pour déterminer dans quel cas a est très petit, reprenons l'équation

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{ne^a}{e^a-1}.$$

On peut la transformer dans la suivante, lorsque a est très petit,

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{n}{a}\left(1 + \frac{a}{2} + \dots\right),$$

d'où l'on tire à très peu près, dans la supposition de a très petit,

$$a = \frac{i+1-n}{s+\frac{n}{2}};$$

ainsi a sera fort petit toutes les fois que $i - n$ sera peu considérable relativement à $s + \frac{n}{2}$. Dans ce cas, on déterminera $\Delta^n s^i$ par la méthode suivante.

Reprenons l'équation

$$\Delta^n s^i = \frac{\int \frac{dx}{x^{i+1}}\,e^{-sx}(e^{-x}-1)^n}{\int \frac{dx}{x^{i+1}}\,e^{-x}},$$

dans laquelle se change la formule (y), lorsqu'on y fait i négatif et égal à $-i$. On peut mettre la fonction $(e^{-x}-1)^n$ sous cette forme

$$e^{-\frac{nx}{2}}\left(e^{-\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}}\right)^n=(-1)^n e^{-\frac{nx}{2}}x^n\left(1+\frac{1}{1.2.3}\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{x^4}{2^4}+\ldots\right)^n$$

$$=(-1)^n e^{-\frac{nx}{2}}x^n\left[1+\frac{nx^2}{24}+\frac{n(5n-2)}{15.16.24}x^4+\ldots\right];$$

on aura donc

$$\int\frac{dx}{x^{i+1}}e^{-sx}(e^{-x}-1)^n=(-1)^n\int\frac{dx}{x^{i+1-n}}e^{-\left(s+\frac{n}{2}\right)x}\left(1+\frac{nx^2}{24}+\ldots\right).$$

Si l'on fait

$$\left(s+\frac{n}{2}\right)x=x',$$

on aura généralement

$$\int\frac{dx}{x^r}e^{-\left(s+\frac{n}{2}\right)x}=\left(s+\frac{n}{2}\right)^{r-1}\int\frac{dx'e^{-x'}}{x'^r};$$

or on a trouvé dans le n° 33, par le passage du réel à l'imaginaire,

$$\int\frac{dx'e^{-x'}}{x'^r}=\frac{2\pi(-1)^{r-\frac{1}{2}}}{\int x'^{r-1}dx'e^{-x'}}=\frac{2\pi(-1)^{r-\frac{1}{2}}}{(r-1)(r-3)(r-5)\ldots};$$

partant on aura

$$(y'')\begin{cases}\Delta^n s^i=(i-n+1)(i-n+2)\ldots\left(s+\frac{n}{2}\right)^{i-n}\\ \quad\times\begin{cases}1+(i-n)(i-n-1)\dfrac{n}{24\left(s+\frac{n}{2}\right)^2}\\ \quad+(i-n)(i-n-1)(i-n-2)(i-n-3)\dfrac{n(5n-2)}{15.16.24\left(s+\frac{n}{2}\right)^4}\\ \quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}.\end{cases}$$

Cette série sera très convergente si $i-n$ est peu considérable relativement à $s+\frac{n}{2}$; elle peut d'ailleurs être employée dans le cas où i est

fractionnaire, comme il est facile de s'en convaincre. Quant au produit $(i-n+1)(i-n+2)\ldots i$, il est facile de l'obtenir en série convergente, par le n° 33.

La formule précédente est une application très simple de l'équation

$$\Delta^n y_s=\left(e^{\frac{dy_{s+\frac{n}{2}}}{ds}}-e^{-\frac{dy_{s+\frac{n}{2}}}{ds}}\right)^n,$$

que nous avons donnée dans le n° 10; car, en développant le second membre de cette équation et faisant $y_s=s^i$, on obtient directement cette formule que nous avons conclue des passages du réel à l'imaginaire, ce qui confirme la justesse de ces passages.

41. Les formules (y') et (y'') des numéros précédents supposent n égal ou moindre que i. En effet, si l'on considère l'expression

$$\Delta^n s^i=\frac{\int\frac{dx\,e^{sx}}{x^{i+1}}(e^{-x}-1)^n}{\int\frac{dx\,e^{-x}}{x^{i+1}}},$$

dont le développement a produit ces formules, on voit que, les limites des intégrales du numérateur et du dénominateur étant déterminées par le numéro précédent, en égalant à zéro le produit des quantités sous le signe intégral par x, ces limites seront toutes imaginaires lorsque i sera plus grand que n, au lieu que, dans le cas où i sera moindre que n, les limites de l'intégrale du numérateur seront réelles, tandis que celles du dénominateur seront imaginaires; il faut donc alors ramener ces dernières limites à l'état réel. Pour y parvenir, nous observerons que l'on a généralement

$$\int x^{i-1}dx\,e^{-x}=\frac{\int x^{i+r}dx\,e^{-x}}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+r)}.$$

Si l'on fait dans cette expression i négatif et égal à $-r-\frac{m}{n}$, m étant

moindre que n, on aura

$$\int \frac{dx\,c^{-x}}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{r+1}\int x^{-\frac{m}{n}}\,dx\,c^{-x}}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i};$$

or on a, par le n° 33, les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i = \frac{\int x^i\,dx\,c^{-x}}{\int x^{\frac{m}{n}}\,dx\,c^{-x}},$$

i étant ici positif : c'est l'expression de $\int \frac{dx\,c^{-x}}{x^{i+1}}$ dont on doit faire usage dans le cas que nous examinons ici. Si l'on fait $x = t^n$, on aura

$$\frac{n}{m}\int x^{\frac{m}{n}}\,dx\,c^{-x}\int x^{\frac{m}{n}}\,dx\,c^{-x} = n^2\int t^{n-m-1}\,dt\,c^{-t^n}\int t^{m-1}\,dt\,c^{-t^n},$$

et l'équation (T) du n° 24 donne, en y changeant r dans $m+1$,

$$n^2\int t^{n-m-1}\,dt\,c^{-t^n}\int t^{m-1}\,dt\,c^{-t^n} = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{n}\pi};$$

on aura donc

$$\int \frac{dx\,c^{-x}}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{r+1}\pi}{\sin\frac{m}{n}\pi\int x^i\,dx\,c^{-x}},$$

d'où l'on tire, en substituant cette valeur dans l'expression précédente de $\Delta^n s^i$,

$$(\mu^{m}) \qquad \Delta^n s^i = \frac{(-1)^{r+1}\sin\frac{m\pi}{n}}{\pi}\int x^i\,dx\,c^{-x}\int \frac{dx}{x^{i+1}}\,c^{-1x}(c^{-x}-1)^n,$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

Le procédé qui vient de nous conduire à cette équation est fondé sur les passages réciproques du réel à l'imaginaire; mais on peut y parvenir directement par l'analyse suivante, qui confirmera ainsi la justesse de ces passages.

Si l'on prend l'intégrale $\int \frac{dx\,c^{-1x}}{x^{i+1}}$ depuis $x = \alpha$ jusqu'à x infini, on aura, en faisant $i = r + \frac{m}{n}$, la fonction

$$\frac{(-1)^r c^{-1\alpha}}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i\,\alpha^{\frac{m}{n}}}\left(s^r - \frac{m}{n}\frac{s^{r-1}}{\alpha} + \frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{s^{r-2}}{\alpha^2} - \ldots + (-1)^r\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i\,\frac{1}{\alpha^r}\right)$$
$$+ \frac{(-1)^{r+1}s^{r+1}}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i}\int \frac{dx\,c^{-1x}}{x^{\frac{m}{n}}}.$$

Or on a généralement, lorsque α est infiniment petit,

$$\frac{\Delta^n c^{-1\alpha}s^{r-f}}{\alpha^f} = 0,$$

f étant zéro ou un nombre entier positif; car, si l'on développe $c^{-1\alpha}$ en série, et que l'on désigne par $k\alpha^q s^q$ un terme quelconque de cette série, on aura

$$k\alpha^{q-f}\Delta^n s^{q+r-f} = 0.$$

En effet, si q surpasse f, ce terme devient nul par la supposition de α infiniment petit. Si q est égal ou moindre que f, $q+r-f$ sera égal ou moindre que r, et, par conséquent, il sera plus petit que n, et alors, par la propriété connue des différences finies, $\Delta^n s^{q+r-f}$ sera nul. Il suit de là que $\Delta^n\int \frac{dx\,c^{-1x}}{x^{i+1}}$ ou $\int \frac{dx\,c^{-1x}(c^{-x}-1)^n}{x^{i+1}}$ se réduit à

$$\frac{(-1)^{r+1}\Delta^n s^{r+1}\int \frac{dx\,c^{-1x}}{x^{\frac{m}{n}}}}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à infini. Si l'on fait $x = \frac{x'}{s}$, on aura

$$\int \frac{dx\,c^{-1x}}{x^{\frac{m}{n}}} = s^{\frac{m}{n}-1}\int \frac{dx'\,c^{-x'}}{x'^{\frac{m}{n}}},$$

les intégrales étant prises depuis x et x' nuls jusqu'à x et x' infinis; on aura donc

$$\int \frac{dx\,e^{-sx}(e^{-x}-1)^n}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{r+1}\int \frac{dx'\,e^{-x'}}{x'^{\frac{m}{n}}}\,\Delta^n s^i}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i}.$$

En substituant pour $\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i$ sa valeur $\frac{\int x^i\,dx\,e^{-x}}{\int x^{\frac{m}{n}}\,dx\,e^{-x}}$, et observant que l'on a, par ce qui précède,

$$\frac{n}{m}\int x'^{-\frac{m}{n}}\,dx'\,e^{-x'}\int x^{\frac{m}{n}}\,dx\,e^{-x} = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{n}\pi},$$

on aura la formule (μ^m).

Si i est un très grand nombre, on aura, par le n° 33, l'intégrale

$$\int x^i\,dx\,e^{-x};$$

on aura ensuite, par ce qui précède, l'intégrale

$$\int \frac{dx\,e^{-sx}(e^{-x}-1)^n}{x^{i+1}};$$

ainsi l'on obtiendra, par une série très convergente, la valeur du second membre de la formule citée.

Supposons i infiniment petit, r sera nul, et $\frac{m}{n}$ sera une fraction infiniment petite; on aura donc

$$\sin\frac{m}{n}\pi = \frac{m}{n}\pi = i\pi,$$

$$\Delta^n\left(\frac{s^{(-1)}}{i}\right) = \Delta^n \log s.$$

La formule (μ^m) donnera ainsi

$$\Delta^n \log s = -\int \frac{e^{-sx}\,dx}{x}(e^{-x}-1)^n,$$

expression que l'on réduira facilement en série convergente, lorsque n est un grand nombre.

42. On a souvent besoin, dans l'analyse des hasards, de ne considérer dans l'expression de $\Delta^n s^i$ que la partie dans laquelle les quantités élevées à la puissance i sont positives. Nous allons déterminer la somme de tous ces termes. Pour cela, reprenons la formule (μ^m) du numéro précédent. Si l'on y substitue au lieu de $\Delta^n s^i$ sa valeur

$$(s+n)^i - n(s+n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(s+n-2)^i - \ldots,$$

et si l'on y change ensuite s dans $-s$, on aura, en ne continuant les deux séries du premier membre de l'équation suivante que jusqu'aux termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance i devient négative, et observant que le signe $+$ a lieu si n est pair et le signe $-$ si n est impair,

$$\begin{aligned}
&(1)^i\left[(n-s)^i - n(n-s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-s-2)^i - \ldots\right]\\
&\pm(-1)^i\left[s^i - n(s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(s-2)^i - \ldots\right]\\
&= \frac{(-1)^{r+1}}{\pi}\sin\frac{m\pi}{n}\int x^i\,dx\,e^{-x}\int \frac{dx}{x^{i+1}}\,e^{sx}(e^{-x}-1)^n.
\end{aligned}$$

Si l'on change dans la dernière intégrale x en $-2x'\sqrt{-1}$, elle devient, après toutes les réductions,

$$2^{n-i}(-1)^{\frac{n+i}{2}}\int x'^{n-i-1}\,dx'\left[\cos(2s-n)x' - \sqrt{-1}\sin(2s-n)x'\right]\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n,$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis x' nul jusqu'à x' infini. On aura donc

$$(o)\quad \left\{\begin{aligned}
&(1)^i\left[(n-s)^i - n(n-s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-s-2)^i - \ldots\right]\\
&\pm(-1)^i\left[s^i - n(s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(s-2)^i - \ldots\right]\\
&= \frac{(-1)^{r+1}}{\pi}\,2^{n-i}(-1)^{\frac{n+i}{2}}\sin\frac{m\pi}{n}\int x\,dx\,e^{-x}\\
&\quad\times\int x'^{n-i-1}\,dx'\left[\cos(2s-n)x' - \sqrt{-1}\sin(2s-n)x'\right]\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n.
\end{aligned}\right.$$

Supposons $r = n - 1$, ce qui donne $i = n - 1 + \frac{m}{n}$, et comparons séparément les parties réelles et les parties imaginaires de l'équation précédente. On a

$$(1)^i = (1)^{n-1}(1)^{\frac{m}{n}} = 1^{\frac{m}{n}};$$

or on a

$$1 = \cos 2l\pi + \sqrt{-1}\sin 2l\pi,$$

l étant un nombre entier; on aura donc

$$(1)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2lm\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2lm\pi}{n}.$$

Les valeurs correspondantes de $(-1)^{\frac{m}{n}}$ sont

$$\cos(2l+1)\frac{m\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin(2l+1)\frac{m\pi}{n}.$$

Maintenant $(1)^i$ devant être supposé égal à l'unité dans l'équation (o), il faut choisir l de manière que $\cos\frac{2lm\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2lm\pi}{n}$ soit 1, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{2lm\pi}{n} = 2f\pi,$$

f étant un nombre entier que nous pouvons supposer nul; alors on a

$$(-1)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{n};$$

mais on a

$$\pm(-1)^i = \pm(-1)^{n-1+\frac{m}{n}} = -(-1)^{\frac{m}{n}};$$

la partie imaginaire du premier membre de l'équation (o) est donc

$$-\sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{n}\left[s^i - n(s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(s-2)^i - \ldots\right].$$

Déterminons la partie imaginaire du second membre de l'équation (o). On a

$$(-1)^{r+n-1} = (-1)^{2n-2} = 1;$$

on a ensuite

$$(-1)^{\frac{n-i}{2}+r+1} = -\sqrt{-1}(-1)^{\frac{m}{2n}},$$

à cause de $r = n - 1$ et de $i = n - 1 + \frac{m}{n}$; or on a, par ce qui précède,

$$(-1)^{\frac{m}{2n}} = \cos\frac{m\pi}{2n} + \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{2n};$$

on aura donc, pour la partie imaginaire du second membre de l'équation (o),

$$-2^{n-1}\sqrt{-1}\,\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\pi}\int dx' x'^{-\frac{m}{n}}\cos\left[(2s-n)x' - \frac{m\pi}{2n}\right]\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n \int x^i dx c^{-x}.$$

Si l'on égale cette fonction à la partie imaginaire du premier membre de cette équation; si l'on observe de plus que

$$\begin{aligned}\int x^i dx c^{-x} &= \left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i\int x^{\frac{m}{n}} dx c^{-x}\\ &= \left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots inh,\end{aligned}$$

en faisant $k = \int t^{n+\frac{m}{n}-1} dt c^{-t^n}$, l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini; enfin, si l'on suppose $2s - n = z$, on aura

$$(p)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{(n+z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n(n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}} - \ldots}{\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots\left(n-1+\frac{m}{n}\right)}\\ \quad = \dfrac{nk2^n}{\pi}\int x'^{-\frac{m}{n}} dx' \cos\left(zx' - \frac{m\pi}{2n}\right)\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n.\end{array}\right.$$

Dans le premier membre de cette formule, la série doit être continuée jusqu'à ce que l'on arrive à une quantité négative élevée à la puissance $n - 1 + \frac{m}{n}$, z ne surpassant point n; dans le second membre, l'intégrale doit être prise depuis x' nul jusqu'à x' infini.

La comparaison des parties réelles des deux membres de l'équation (o) conduit au même résultat, et d'ailleurs elle prouve que, pour la coïncidence des deux résultats tirés de la comparaison des quantités

réelles entre elles et des quantités imaginaires entre elles, il est nécessaire de supposer, comme nous l'avons fait, $f = 0$.

On peut encore parvenir à la formule (p) au moyen de l'équation suivante :

$$i[\varphi(z+2,n)-\varphi(z,n)] = (n+z+2)\,\varphi'(z+2,n)+(n-z)\,\varphi'(z,n),$$

$\varphi'(z,n)$ étant le coefficient de dz dans la différentielle de $\varphi(z,n)$, et $\varphi(z,n)$ étant égal à

$$(n+z)^i - n(n+z-2)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+z-4)^i - \ldots,$$

tous les termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance i est négative devant être rejetés, et z ne surpassant point n, en sorte que la quantité élevée à la puissance i ne surpasse jamais $2n$. En résolvant cette équation aux différences infiniment petites et finies, par la méthode du n° 30, et déterminant convenablement les constantes arbitraires, on parvient à la forme (p).

Nous allons maintenant donner quelques applications de cette formule, qui vont nous conduire à plusieurs théorèmes curieux d'Analyse.

Supposons m nul; alors on a

$$k = \int t^{n+m-1} dt e^{-t} = \frac{1}{n};$$

la formule (p) devient ainsi

$$\frac{(n+z)^{n-1} - n(n+z-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+z-4)^{n-1} - \ldots}{1.2.3\ldots(n-1)2^n} = \frac{\int dx' \cos zx' \left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n}{\pi}.$$

On a

$$\log\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n = n\log\left(1 - \frac{1}{6}x'^2 + \frac{1}{120}x'^4 - \ldots\right),$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n = e^{-\frac{n}{6}x'^2}\left(1 - \frac{nx'^4}{180} + \ldots\right);$$

on aura donc, par le n° 26, en faisant $z = r\sqrt{n}$,

$$(q)\quad \begin{cases} \dfrac{\int dx' \cos zx' \left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n}{\pi} \\ = \sqrt{\dfrac{3}{2n\pi}}\, e^{-\frac{3}{2}r^2}\left[1 - \dfrac{3}{20n}(1 - 6r^2 + 3r^4) + \ldots\right] \\ = \dfrac{(n+r\sqrt{n})^{n-1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+r\sqrt{n}-4)^{n-1} - \ldots}{1.2.3\ldots(n-1)2^n}, \end{cases}$$

la série de ce dernier membre devant être arrêtée aux puissances des quantités négatives.

En différentiant cette équation par rapport à r, on aura, avec la condition de l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$\frac{n}{1.2.3\ldots(n-2)2^n}\left[(n+r\sqrt{n})^{n-2} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+r\sqrt{n}-4)^{n-2} - \ldots\right]$$
$$= -3r\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, e^{-\frac{3}{2}r^2}\left[1 - \frac{3}{20n}(5 - 10r^2 + 3r^4) + \ldots\right].$$

En continuant de différentier ainsi, on aura les valeurs des différences inférieures, pourvu cependant que le nombre de ces différentiations soit fort petit relativement au nombre n. On peut observer que ces équations subsistent, en y faisant r négatif; car $\cos zx'$ ou $\cos x'r\sqrt{n}$ est le même dans les deux cas de r positif et de r négatif.

On peut, en intégrant successivement l'équation (q), obtenir des théorèmes analogues sur les différences finies des puissances supérieures à n, en excluant toujours les puissances des quantités négatives. Ainsi on a, par une première intégration,

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+r\sqrt{n}-4)^n - \ldots}{1.2.3\ldots n.2^n}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int dr e^{-\frac{3}{2}r^2}\left[1 - \frac{3}{20n}(1 - 6r^2 + 3r^4) + \ldots\right]$$
$$= C + \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left[\int dr e^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{20n}r(1 - r^2)e^{-\frac{3}{2}r^2} + \ldots\right].$$

On déterminera la constante arbitraire C en faisant commencer avec r l'intégrale $\int dr c^{-\frac{3}{2}r^2}$, et en observant qu'alors, r étant nul, le dernier membre de l'équation se réduit à cette constante. Dans ce cas, le premier devient

$$n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n - \ldots.$$

Mais on a, comme on sait, sans l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^n - n(n-2)^n + \ldots \mp n(2-n)^n \pm (-n)^n = 1.2.3\ldots n.2^n,$$

le signe supérieur ayant lieu si n est pair, et le signe inférieur si n est impair. Dans les deux cas, on voit que la somme des termes dans lesquels les quantités élevées à la puissance n sont négatives est égale à la somme des autres termes; on a donc, avec l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n - \ldots = 1.2.3\ldots n.2^{n-1},$$

ce qui donne $C = \frac{1}{2}$; par conséquent,

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+r\sqrt{n}-4)^n - \ldots}{1.2.3\ldots n.2^n}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left[\int dr c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{20n}r(1-r^2)c^{-\frac{3}{2}r^2} + \ldots\right].$$

En intégrant de nouveau cette expression et déterminant convenablement la constante arbitraire, on trouve

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^{n+1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+r\sqrt{n}-4)^{n+1} - \ldots}{1.2.3\ldots(n+1)2^n\sqrt{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left\{r\int dr c^{-\frac{3}{2}r^2} + c^{-\frac{3}{2}r^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{60n}(1-3r^2)\right] + \ldots\right\} + \frac{1}{2}r.$$

43. On peut étendre les méthodes précédentes à la détermination de

la différence $n^{\text{ième}}$ d'une puissance quelconque d'une fonction rationnelle de s. Il suffit pour cela de réduire, par la méthode du n° 29, cette fonction à la forme $\int x^s \varphi dx$. Mais on a vu qu'alors on parvient, pour déterminer φ, à une équation différentielle d'un degré égal au plus haut exposant de s dans cette fonction, et qui le plus souvent n'est pas intégrable. On peut obvier à cet inconvénient au moyen de multiples intégrales, de la manière suivante.

Considérons généralement la fonction

$$\frac{1}{(s+p)^i(s+p')^{i'}(s+p'')^{i''}\ldots}.$$

Si dans l'intégrale $\int x^{i-1}dx c^{-(s+p)x}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini, on change $(s+p)x$ en x', elle devient $\frac{1}{(s+p)^i}\int x'^{i-1}dx' c^{-x'}$, la nouvelle intégrale étant prise dans les limites précédentes. La comparaison des deux intégrales donnera

$$\frac{1}{(s+p)^i} = \frac{\int x^{i-1}dx c^{-(s+p)x}}{\int x^{i-1}dx c^{-x}}.$$

Il suit de là que

$$\frac{1}{(s+p)^i(s+p')^{i'}(s+p'')^{i''}\ldots} = \frac{\int x^{i-1}x'^{i'-1}x''^{i''-1}\ldots dx\,dx'\,dx''\ldots c^{-px-p'x'-p''x''-\ldots-s(x+x'+x''+\ldots)}}{\int x^{i-1}dx c^{-x}\int x'^{i'-1}dx' c^{-x'}\int x''^{i''-1}dx'' c^{-x''}\ldots},$$

toutes les intégrales étant prises depuis $x, x', x'', \ldots$ nuls jusqu'à leurs valeurs infinies; on aura donc

$$\Delta^n \frac{1}{(s+p)^i(s+p')^{i'}\ldots} = \frac{\int x^{i-1}x'^{i'-1}\ldots dx\,dx'\ldots c^{-px-p'x'-\ldots-s(x+x'+\ldots)}(c^{-x-x'-\ldots}-1)^n}{\int x^{i-1}dx c^{-x}\int x'^{i'-1}dx' c^{-x'}\ldots}.$$

On réduira facilement en séries convergentes, par la méthode du n° 40, le numérateur et le dénominateur de cette expression, et si l'on change dans ces séries les signes de $i, i', \ldots$, on aura la valeur très

approchée de

$$\Delta^n (s+p)^i (s+p')^{i'} \dots,$$

n, i, i', ... étant supposés de très grands nombres. On trouvera par le numéro cité

$$\Delta^n (s+p)^i (s+p')^{i'} \dots = \frac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1} \left(\frac{i'}{a'}\right)^{i'+1} \dots c^{(s+p)a+(s+p')a'+\dots-i-i'-\dots}(c^{a+a'+\dots}-1)^n}{\sqrt{\left[\frac{i(i+1)}{a^2} - \frac{nic^{a+a'+\dots}}{(c^{a+a'+\dots}-1)^2}\right]\left[\frac{i'(i'+1)}{a'^2} - \frac{ni'c^{a+a'+\dots}}{(c^{a+a'+\dots}-1)^2}\right]\dots}},$$

a, a', ... étant déterminés par les équations

$$0 = \frac{i+1}{a} + s - p - \frac{nc^{a+a'+\dots}}{c^{a+a'+\dots}-1},$$

$$\frac{i'+1}{a'} = \frac{i+1}{a} + p' - p,$$

$$\frac{i''+1}{a''} = \frac{i+1}{a} + p'' - p,$$

.....

Le cas le plus ordinaire est celui dans lequel les exposants i, i', i'', ... sont égaux, et $s+p$, $s+p'$, ... forment une progression arithmétique. On peut obtenir alors, par la méthode suivante, la différence finie de leur produit élevé à une haute puissance.

Considérons la différence $\Delta^n [s(s-1)]^i$. Si l'on fait $s = s' + \frac{1}{2}$, elle devient

$$\Delta^n s'^{2i} \left(1 - \frac{1}{4s'^2}\right)^i.$$

En développant cette fonction en série, on a

$$\Delta^n s'^{2i} - \frac{i}{4} \Delta^n s'^{2i-2} + \frac{i(i-1)}{1.2.4^2} \Delta^n s'^{2i-4} - \dots.$$

Les formules du n° 40 donneront la valeur approchée de chacun des termes de cette série, et l'on voit, par ces formules, que, n et i étant de très grands nombres, $\Delta^n s^{2i-2}$ est d'un ordre moindre de deux unités que $\Delta^n s^{2i}$, d'où il suit que chaque terme de la série précédente est d'un

ordre inférieur d'une unité à celui qui le précède, ce qui montre la convergence de la série.

On arriverait au même résultat en résolvant, par approximation, l'équation différentielle du second ordre en φ, à laquelle conduit la méthode du n° 29. Lorsqu'on suppose

$$\left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i} = \int c^{-s'x} \varphi \, dx,$$

on a

$$2is' \int c^{-s'x} \varphi \, dx = \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right) \int c^{-s'x} x \varphi \, dx.$$

En faisant disparaître s' des coefficients de cette équation, par la méthode citée, dans les termes affectés du signe intégral, égalant ensuite à zéro la somme de ces termes et supposant ensuite, dans l'équation différentielle que l'on obtient ainsi, φ égal à une suite ascendante par rapport aux puissances de x, on aura une série convergente. On aura ensuite

$$\Delta^n \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i} = \int c^{-s'x} (c^{-x}-1)^n \varphi \, dx,$$

d'où l'on tirera une valeur en série de $\Delta^n \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i}$, et dans laquelle il suffira de changer le signe de i pour avoir la valeur de $\Delta^n \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{i}$.

Cette manière de résoudre par approximation l'équation différentielle en φ, et que nous avons indiquée à la fin du n° 30, peut servir dans un grand nombre de cas où cette équation n'est pas intégrable exactement.

Remarque générale sur la convergence des séries.

44. Nous terminerons cette Introduction par une observation importante sur la convergence des séries dont nous avons fait un si fréquent usage. Ces séries convergent très rapidement dans leurs premiers termes; mais souvent cette convergence diminue et finit par se changer en divergence. Elle ne doit pas empêcher l'usage de ces séries, en n'employant que leurs premiers termes, dans lesquels la conver-

gence est rapide; car le reste de la série, que l'on néglige, est le développement d'une fonction algébrique ou intégrale, très petite par rapport à ce qui précède. Pour rendre cela sensible par un exemple, considérons le développement en série, de l'intégrale $\int dt\, e^{-t^2}$, prise depuis $t = \mathrm{T}$ jusqu'à t infini. On a, par le n° 27,

$$\int dt\, e^{-t^2} = \frac{e^{-\mathrm{T}^2}}{2\mathrm{T}}\left(1 - \frac{1}{2\mathrm{T}^2} + \frac{1.3}{2^2\mathrm{T}^4} - \frac{1.3.5}{2^3\mathrm{T}^6} + \ldots\right).$$

Cette série finit par être divergente, quelque grande que soit la valeur que l'on suppose à T; mais alors on peut employer sans erreur sensible ses premiers termes. En effet, si l'on considère, par exemple, ses quatre premiers termes, le reste de la série sera $\frac{1.3.5.7}{2^4}\int \frac{dt\, e^{-t^2}}{t^8}$; or cette quantité, abstraction faite du signe, est plus petite que le terme $-\frac{1.3.5.e^{-\mathrm{T}^2}}{2^3\mathrm{T}^7}$ qui précède, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{e^{-\mathrm{T}^2}}{\mathrm{T}^7} < 7\int \frac{dt\, e^{-t^2}}{t^8};$$

car on a

$$7\int \frac{dt\, e^{-t^2}}{t^8} = \text{const.} - \frac{e^{-t^2}}{t^7} - 2\int \frac{dt\, e^{-t^2}}{t^6}.$$

En déterminant la constante de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $t = \mathrm{T}$, on aura $\frac{e^{-\mathrm{T}^2}}{\mathrm{T}^7}$ pour cette constante; on aura donc, en prenant l'intégrale depuis $t = \mathrm{T}$ jusqu'à t infini,

$$7\int \frac{dt\, e^{-t^2}}{t^8} = \frac{e^{-\mathrm{T}^2}}{\mathrm{T}^7} - 2\int \frac{dt\, e^{-t^2}}{t^6}.$$

La série précédente peut donc être employée tant qu'elle est convergente, puisque l'on est sûr que ce que l'on néglige est au-dessous du terme auquel on s'arrête.

Cette série jouit encore de cette propriété, savoir, qu'elle est alternativement plus grande et plus petite que sa valeur entière, suivant que l'on s'arrête à un terme positif ou à un terme négatif. On peut nommer, par cette raison, ce genre de séries, *séries limites*. Au reste, on a vu dans le n° 27 que, dans le cas où elles sont divergentes, on

peut, en les réduisant en fractions continues, obtenir des approximations toujours convergentes.

Ce que nous venons de dire sur la série précédente peut s'étendre à toutes celles que nous avons considérées et doit ôter toute inquiétude sur les usages que nous en avons faits. En effet, on peut toujours arrêter ces séries au point où elles cessent d'être convergentes, et représenter le reste par une intégrale. C'est ce que nous allons faire voir sur la formule la plus générale du développement des fonctions en séries.

On a, en prenant l'intégrale depuis $z = 0$,

$$\int dz\, \varphi'(x - z) = \varphi(x) - \varphi(x - z),$$

$\varphi'(x)$ étant la différentielle de $\varphi(x)$ divisée par dx. Si l'on désigne pareillement par $\varphi''(x)$ la différentielle de $\varphi'(x)$ divisée par dx, par $\varphi'''(x)$ la différentielle de $\varphi''(x)$ divisée par dx et ainsi de suite, on aura

$$\int dz\, \varphi'(x - z) = z\,\varphi'(x - z) + \int z\, dz\, \varphi''(x - z),$$
$$\int z\, dz\, \varphi''(x - z) = \tfrac{1}{2} z^2 \varphi''(x - z) + \int \tfrac{1}{2} z^2 dz\, \varphi'''(x - z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En continuant ainsi, on trouvera généralement

$$\int dz\, \varphi'(x - z) = z\,\varphi'(x - z) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(x - z) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(x - z) + \int \frac{z^n\, dz}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n+1)}(x - z).$$

En comparant cette expression à la précédente, on aura

$$\varphi(x) = \varphi(x - z) + z\,\varphi'(x - z) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(x - z) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(x - z) + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int z^n dz\, \varphi^{(n+1)}(x - z).$$

Faisons $x - z = t$, l'équation précédente prendra cette forme

$$\varphi(t + z) = \varphi(t) + z\,\varphi'(t) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(t) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(t) + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int z'^n dz'\, \varphi^{(n+1)}(t + z - z'),$$

l'intégrale étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = z$. Il est clair que, si l'on faisait dans cette intégrale $\varphi^{(n+1)}(t + z - z')$ constant, on aurait un trop grand résultat si l'on prenait la plus grande valeur de cette quantité, et un trop petit résultat en prenant sa plus petite valeur. Il y a donc dans l'intervalle de $z' = 0$ à $z' = z$ une valeur de z' telle qu'en supposant cette quantité constante, on aura un résultat exact. Soit u cette valeur; l'intégrale précédente devient ainsi

$$\frac{z^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(t+z-u),$$

ce qui donne

$$\varphi(t+z) = \varphi(t) + z\,\varphi'(t) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(t) + \frac{z^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(t+z-u),$$

$z - u$ étant compris entre zéro et z. On pourra ainsi juger de la convergence de la série et du degré d'approximation, lorsqu'on s'arrête à l'un de ses termes.

LIVRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROBABILITÉS.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE CETTE THÉORIE.

1. On a vu dans l'Introduction que la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend, pour nous, également possibles. La juste appréciation de ces cas divers est un des points les plus délicats de l'Analyse des hasards.

Si tous les cas ne sont pas également possibles, on déterminera leurs possibilités respectives, et alors la probabilité de l'événement sera la somme des probabilités de chaque cas favorable. En effet, nommons p la probabilité du premier de ces cas. Cette probabilité est relative à la subdivision de tous les cas en d'autres également possibles. Soient N la somme de tous les cas ainsi subdivisés, et n la somme de ces cas qui sont favorables au premier cas; on aura

$$p = \frac{n}{N}.$$

On aura pareillement

$$p' = \frac{n'}{N}, \qquad p'' = \frac{n''}{N}, \qquad \ldots,$$

en marquant d'un trait, de deux traits, ... les lettres p et n, relativement au second cas, au troisième, ... Maintenant la probabilité de

l'événement dont il s'agit est, par la définition même de la probabilité, égale à

$$\frac{n+n'+n''+\ldots}{N},$$

elle est donc égale à $p+p'+p''+\ldots$.

Lorsqu'un événement est composé de deux événements simples, indépendants l'un de l'autre, il est clair que le nombre de tous les cas possibles est le produit des deux nombres qui expriment tous les cas possibles relatifs à chaque événement simple, parce que chacun des cas relatifs à l'un de ces événements peut se combiner avec tous les cas relatifs à l'autre événement. Par la même raison, le nombre des cas favorables à l'événement composé est le produit des deux nombres qui expriment les cas favorables à chaque événement simple; la probabilité de l'événement composé est donc alors le produit des probabilités de chaque événement simple. Ainsi la probabilité d'amener deux fois de suite un as avec un dé est un trente-sixième, lorsque l'on suppose les faces du dé parfaitement égales, parce que le nombre de tous les cas possibles en deux coups est trente-six, chaque cas de la première projection pouvant se combiner avec les six cas de la seconde, et parmi tous ces cas un seul donne deux as de suite.

En général, si $p, p', p'', \ldots$ sont les possibilités respectives d'un nombre quelconque d'événements simples indépendants les uns des autres, le produit $p.p'.p''.\ldots$ sera la probabilité d'un événement composé de ces événements.

Si les événements simples sont liés entre eux de manière que la supposition de l'arrivée du premier influe sur la probabilité de l'arrivée du second, on aura la probabilité de l'événement composé, en déterminant : 1° la probabilité du premier événement; 2° la probabilité que, cet événement étant arrivé, le second aura lieu.

Pour démontrer ce principe d'une manière générale, nommons p le nombre de tous les cas possibles, et supposons que dans ce nombre il y en ait p' favorables au premier événement. Supposons ensuite que, dans le nombre p', il y en ait q favorables au second événement; il est

clair que $\frac{q}{p}$ sera la probabilité de l'événement composé. Mais la probabilité du premier événement est $\frac{p'}{p}$, la probabilité que, cet événement étant arrivé, le second aura lieu est $\frac{q}{p'}$; car alors, un des cas p' devant exister, on ne doit considérer que ces cas. Maintenant on a

$$\frac{q}{p}=\frac{p'}{p}\frac{q}{p'},$$

ce qui est la traduction en Analyse du principe énoncé ci-dessus.

En considérant comme événement composé l'événement observé joint à un événement futur, la probabilité de ce dernier événement, tirée de l'événement observé, est évidemment la probabilité que, l'événement observé ayant lieu, l'événement futur aura lieu pareillement; or, par le principe que nous venons d'exposer, cette probabilité multipliée par celle de l'événement observé, déterminée *a priori* ou indépendamment de ce qui est déjà arrivé, est égale à celle de l'événement composé déterminée *a priori;* on a donc ce nouveau principe, relatif à la probabilité des événements futurs, déduite des événements observés :

La probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement observé, est le quotient de la division de la probabilité de l'événement composé de ces deux événements, et déterminée *a priori*, par la probabilité de l'événement observé, déterminée pareillement *a priori*.

De là découle encore cet autre principe relatif à la probabilité des causes, tirée des événements observés.

Si un événement observé peut résulter de n causes différentes, leurs probabilités sont respectivement comme les probabilités de l'événement, tirées de leurs existence; et la probabilité de chacune d'elles est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, dans l'hypothèse de l'existence de la cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables, relatives à toutes les causes.

Considérons, en effet, comme événement composé l'événement observé, résultant d'une de ces causes. La probabilité de cet événement

composé, probabilité que nous désignerons par E, sera, par ce qui précède, égale au produit de la probabilité de l'événement observé, déterminée *a priori* et que nous nommerons F, par la probabilité que, cet événement ayant lieu, la cause dont il s'agit existe, probabilité qui est celle de la cause, tirée de l'événement observé, et que nous nommerons P. On aura donc

$$P = \frac{E}{F}.$$

La probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité de la cause par la probabilité que, cette cause ayant lieu, l'événement arrivera, probabilité que nous désignerons par H. Toutes les causes étant supposées *a priori* également possibles, la probabilité de chacune d'elles est $\frac{1}{n}$; on a donc

$$E = \frac{H}{n}.$$

La probabilité de l'événement observé est la somme de tous les E relatifs à chaque cause; en désignant donc par $S\frac{H}{n}$ la somme de toutes les valeurs de $\frac{H}{n}$, on aura

$$F = S\frac{H}{n};$$

l'équation $P = \frac{E}{F}$ deviendra donc

$$P = \frac{H}{SH},$$

ce qui est le principe énoncé ci-dessus, lorsque toutes les causes sont *a priori* également possibles. Si cela n'est pas, en nommant p la probabilité *a priori* de la cause que nous venons de considérer, on aura

$$E = Hp,$$

et, en suivant le raisonnement précédent, on trouvera

$$P = \frac{Hp}{SHp};$$

ce qui donne les probabilités des diverses causes, lorsqu'elles ne sont pas toutes également possibles *a priori*.

Pour appliquer le principe précédent à un exemple, supposons qu'une urne renferme trois boules dont chacune ne puisse être que blanche ou noire; qu'après avoir tiré une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage, et qu'après m tirages, on n'ait amené que des boules blanches. Il est visible que l'on ne peut faire *a priori* que quatre hypothèses; car les boules peuvent être ou toutes blanches, ou deux blanches et une noire, ou deux noires et une blanche, ou enfin toutes noires. Si l'on considère ces hypothèses comme autant de causes de l'événement observé, les probabilités de l'événement relatives à ces causes seront

$$1, \quad \frac{2^m}{3^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad 0.$$

Les probabilités respectives de ces hypothèses, tirées de l'événement observé, seront donc, par le troisième principe,

$$\frac{3^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{2^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{1}{3^m + 2^m + 1}, \quad 0.$$

On voit, au reste, qu'il est inutile d'avoir égard aux hypothèses qui excluent l'événement, parce que, la probabilité résultante de ces hypothèses étant nulle, leur omission ne change point les expressions des autres probabilités.

Si l'on veut avoir la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivants, on déterminera *a priori* les probabilités d'amener d'abord m boules blanches, ensuite m' boules noires. Ces probabilités sont, relativement aux hypothèses précédentes,

$$0, \quad \frac{2^m}{3^{m+m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m+m'}}, \quad 0,$$

et comme, *a priori*, les quatre hypothèses sont également possibles, la probabilité de l'événement composé sera le quart de la somme des quatre

probabilités précédentes, ou

$$\frac{1}{4}\,\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m+m'}}.$$

Les probabilités de l'événement observé, déterminées *a priori*, dans les quatre hypothèses précédentes, étant respectivement

$$\frac{3^m}{3^m},\quad \frac{2^m}{3^m},\quad \frac{1}{3^m},\quad 0,$$

le quart de leur somme, ou

$$\frac{1}{4}\,\frac{3^m+2^m+1}{3^m},$$

sera la probabilité de l'événement observé, déterminée *a priori*; en divisant donc la probabilité de l'événement composé par cette probabilité, on aura, par le second principe,

$$\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m'}(3^m+2^m+1)},$$

pour la probabilité d'amener m' boules noires dans les m' tirages suivants.

On peut encore déterminer cette probabilité par le principe suivant :

La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que, cette cause existant, l'événement futur aura lieu.

Ici les probabilités de chaque cause, tirées de l'événement observé, sont, comme on l'a vu,

$$\frac{3^m}{3^m+2^m+1},\quad \frac{2^m}{3^m+2^m+1},\quad \frac{1}{3^m+2^m+1},\quad 0;$$

les probabilités de l'événement futur, relatives à ces causes, sont respectivement

$$0,\quad \frac{1}{3^{m'}},\quad \frac{2^{m'}}{3^{m'}},\quad 1;$$

la somme de leurs produits respectifs, ou

$$\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m'}(3^m+2^m+1)},$$

sera la probabilité de l'événement futur, tirée de l'événement observé, ce qui est conforme à ce qui précède.

Si l'on suppose quatre boules dans l'urne, et qu'ayant amené une boule blanche au premier tirage, on cherche la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivants, on trouvera, par les principes exposés ci-dessus, cette probabilité égale à

$$\frac{3+2^{m'+1}+3^{m'}}{10.4^{m'}}.$$

Si le nombre des boules blanches égale celui des noires, la probabilité de n'amener que des boules noires dans m' tirages est $\frac{1}{2^{m'}}$. Elle surpasse la précédente lorsque m' est égal ou moindre que 5; mais elle lui devient inférieure lorsque m' surpasse 5, quoique la boule blanche extraite d'abord de l'urne indique une supériorité dans le nombre des boules blanches. L'explication de ce paradoxe tient à ce que cette indication n'exclut point la supériorité du nombre des boules noires; elle la rend seulement moins probable, au lieu que la supposition d'une égalité parfaite entre le nombre des blanches et celui des noires exclut cette supériorité; or cette supériorité, quelque petite que soit sa probabilité, doit rendre la probabilité d'amener de suite m' boules noires plus grande que le cas de l'égalité des couleurs, lorsque m' est considérable.

L'inégalité qui peut exister entre des choses que l'on suppose parfaitement semblables peut avoir sur les résultats du Calcul des Probabilités une influence sensible qui mérite une attention particulière. Considérons le jeu de *croix* et *pile*, et supposons qu'il soit également facile d'amener *croix* que *pile*; alors la probabilité d'amener *croix* au premier coup est $\frac{1}{2}$, et celle de l'amener deux fois de suite est $\frac{1}{4}$. Mais

s'il existe dans la pièce une inégalité qui fasse paraître une des faces plutôt que l'autre, sans que l'on connaisse la face que cette inégalité favorise, la probabilité d'amener *croix* au premier coup restera toujours $\frac{1}{2}$, parce que, dans l'ignorance où l'on est de la face que cette inégalité favorise, autant la probabilité de l'événement simple est augmentée si cette inégalité lui est favorable, autant elle est diminuée si cette inégalité lui est contraire. Mais la probabilité d'amener *croix* deux fois de suite est augmentée, malgré cette ignorance; car cette probabilité est égale à celle d'amener *croix* au premier coup, multipliée par la probabilité que, l'ayant amené au premier coup, on l'amènera au second; or son arrivée au premier coup est un motif de croire que l'inégalité de la pièce la favorise; elle augmente donc la probabilité de l'amener au second; ainsi le produit des deux probabilités est accru par cette inégalité. Pour soumettre cet objet au calcul, supposons que l'inégalité de la pièce accroisse de la quantité α la probabilité de l'événement simple qu'elle favorise. Si cet événement est *croix*, la probabilité sera $\frac{1}{2}+\alpha$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $(\frac{1}{2}+\alpha)^2$. Si l'événement favorisé est *pile*, la probabilité de *croix* sera $\frac{1}{2}-\alpha$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $(\frac{1}{2}-\alpha)^2$. Comme on n'a d'avance aucune raison de croire que l'inégalité favorise plutôt l'un que l'autre des événements simples, il est clair que, pour avoir la probabilité de l'événement composé *croix-croix*, il faut ajouter les deux probabilités précédentes et prendre la moitié de leur somme, ce qui donne $\frac{1}{4}+\alpha^2$ pour cette probabilité : c'est aussi la probabilité de *pile-pile*. On trouvera par le même raisonnement que la probabilité de l'événement composé *croix-pile* ou *pile-croix* est $\frac{1}{4}-\alpha^2$; par conséquent, elle est moindre que celle de la répétition du même événement simple.

Les considérations précédentes peuvent être étendues à des événements quelconques, p représentant la probabilité d'un événement simple, et $1-p$ celle de l'autre événement; si l'on désigne par P la probabilité d'un résultat relatif à ces événements, et que l'on suppose que p soit réellement $p \pm \alpha$, α étant une quantité inconnue, ainsi que

le signe qui l'affecte, la probabilité P du résultat sera

$$\mathrm{P}+\frac{1}{1.2}\alpha^2\frac{d^2\mathrm{P}}{dp^2}+\frac{1}{1.2.3.4}\alpha^4\frac{d^4\mathrm{P}}{dp^4}+\ldots.$$

En faisant $\mathrm{P}=p^n$, c'est-à-dire en supposant que le résultat relatif aux événements soit n fois la répétition du premier, la probabilité P deviendra

$$p^n+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2p^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\alpha^4p^{n-4}+\ldots.$$

Ainsi l'erreur inconnue, que l'on peut supposer dans la probabilité des événements simples, accroît toujours la probabilité des événements composés de la répétition du même événement.

2. La probabilité des événements sert à déterminer l'espérance et la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions; il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans une supposition qui n'est que vraisemblable. Dans la théorie des hasards, cet avantage est le produit de la somme espérée par la probabilité de l'obtenir; c'est la somme partielle qui doit revenir lorsqu'on ne veut point courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition de la somme entière se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette manière de la répartir est la seule équitable, quand on fait abstraction de toute circonstance étrangère, parce qu'avec un égal degré de probabilité on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage *espérance mathématique*, pour le distinguer de l'espérance morale qui dépend, comme lui, du bien espéré et de la probabilité de l'obtenir, mais qui se règle encore sur mille circonstances variables qu'il est presque toujours impossible de définir, et plus encore d'assujettir au calcul. Ces circonstances, il est vrai, ne faisant qu'augmenter ou diminuer la valeur du bien espéré, on peut considérer l'espérance morale elle-même comme le produit de cette valeur par la probabilité de l'obtenir; mais on doit alors distinguer, dans le bien espéré, sa valeur relative de sa valeur

absolue : celle-ci est indépendante des motifs qui le font désirer, au lieu que la première croit avec ces motifs.

On ne peut donner de règle générale pour apprécier cette valeur relative; cependant il est naturel de supposer la valeur relative d'une somme infiniment petite, en raison directe de sa valeur absolue, en raison inverse du bien total de la personne intéressée. En effet, il est clair qu'un franc a très peu de prix pour celui qui en possède un grand nombre, et que la manière la plus naturelle d'estimer sa valeur relative est de la supposer en raison inverse de ce nombre.

Tels sont les principes généraux de l'Analyse des Probabilités. Nous allons maintenant les appliquer aux questions les plus délicates et les plus difficiles de cette analyse. Mais, pour mettre de l'ordre dans cette matière, nous traiterons d'abord les questions dans lesquelles les probabilités des événements simples sont données; nous considérerons ensuite celles dans lesquelles ces possibilités sont inconnues et doivent être déterminées par les événements observés.

CHAPITRE II.

DE LA PROBABILITÉ DES ÉVÉNEMENTS COMPOSÉS D'ÉVÉNEMENTS SIMPLES DONT LES POSSIBILITÉS RESPECTIVES SONT DONNÉES.

3. Si l'on développe le produit $(1+p)(1+p')(1+p'')\ldots$, composé de n facteurs, ce développement renfermera toutes les combinaisons possibles des n lettres p, p', p'', ..., $p^{(n-1)}$, prises une à une, deux à deux, trois à trois, ... jusqu'à n, et chaque combinaison aura pour coefficient l'unité. Ainsi, la combinaison $pp'p''$ résultant du produit $(1+p)(1+p')(1+p'')$, multiplié par le terme 1 du développement des autres facteurs, son coefficient est évidemment l'unité. Maintenant, pour avoir le nombre total des combinaisons de n lettres prises x à x, on observera que chacune de ces combinaisons devient p^x, lorsqu'on suppose p', p'', ... égaux à p. Alors le produit des n facteurs précédents se change dans le binôme $(1+p)^n$; or le coefficient de p^x dans le développement de ce binôme est

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{1.2.3\ldots x};$$

cette quantité exprime donc le nombre des combinaisons des n lettres prises x à x. On aura le nombre total des combinaisons de ces lettres, prises une à une, deux à deux, ..., jusqu'à n à n, en faisant $p=1$, dans le binôme $(1+p)^n$, et en retranchant l'unité, ce qui donne 2^n-1 pour ce nombre.

Supposons que dans chaque combinaison on ait égard non seulement au nombre des lettres, mais encore à leur situation; on déterminera le

nombre des combinaisons, en observant que, dans la combinaison de deux lettres pp', on peut mettre p' à la seconde place, et ensuite à la première, ce qui donne les deux combinaisons pp', $p'p$. En introduisant ensuite une nouvelle lettre p'' dans chacune de ces combinaisons, on peut la mettre à la première, à la deuxième ou à la troisième place, ce qui donne 2.3 combinaisons. En continuant ainsi, on voit que, dans une combinaison de x lettres, on peut leur donner $1.2.3\ldots x$ situations différentes, d'où il suit que le nombre total des combinaisons de n lettres, prises x à x, étant, par ce qui précède,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{1.2.3\ldots x},$$

le nombre total des combinaisons, lorsqu'on a égard à la différente situation des lettres, sera cette même fonction, en supprimant son dénominateur.

On peut facilement, au moyen de ces formules, déterminer les bénéfices des loteries. Supposons que le nombre des numéros d'une loterie soit n, et qu'il en sorte r à chaque tirage; on veut avoir la probabilité qu'une combinaison de s de ces numéros sortira au premier tirage.

Le nombre total des combinaisons des numéros, pris r à r, est, par ce qui précède,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}.$$

Pour avoir, parmi ces combinaisons, le nombre de celles dans lesquelles les s numéros sont compris, on observera que, si l'on retranche ces numéros de la totalité des numéros, et que l'on combine $r-s$ à $r-s$ le reste $n-s$, le nombre de ces combinaisons sera le nombre cherché; car il est clair qu'en ajoutant les s numéros à chacune de ces combinaisons, on aura les combinaisons r à r des numéros, dans lesquelles sont ces s numéros. Ce nombre est donc

$$\frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-s)};$$

en le divisant par le nombre total des combinaisons r à r des n numéros, on aura pour la probabilité cherchée

$$\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}.$$

En divisant cette quantité par $1.2.3\ldots s$, on aura, par ce qui précède, la probabilité que les s numéros sortiront dans un ordre déterminé entre eux. On aura la probabilité que les s premiers numéros du tirage seront ceux de la combinaison proposée, en observant que cette probabilité revient à celle d'amener cette combinaison, en supposant qu'il ne sort que s numéros à chaque tirage, ce qui revient à faire $r=s$ dans la fonction précédente, qui devient ainsi

$$\frac{1.2.3\ldots s}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}.$$

Enfin on aura la probabilité que les s numéros choisis sortiront les premiers dans un ordre déterminé, en réduisant le numérateur de cette fraction à l'unité.

Les quotients des mises divisées par ces probabilités sont ce que la loterie doit rendre aux joueurs; l'excédent de ces quotients sur ce qu'elle donne est son bénéfice. En effet, si l'on nomme p la probabilité du joueur, m sa mise et x ce que la loterie doit lui rendre pour l'égalité du jeu, $x-m$ sera la mise de la loterie; car, ayant reçu la mise m et rendant x au joueur, elle ne met au jeu que $x-m$. Or, pour l'égalité du jeu, l'espérance mathématique de chaque joueur doit être égale à sa crainte; son espérance est le produit de la mise $x-m$ de son adversaire par la probabilité p de l'obtenir; sa crainte est le produit de sa mise m par la probabilité $1-p$ de la perte. On a donc

$$p(x-m)=(1-p)m,$$

c'est-à-dire que, pour l'égalité du jeu, les mises doivent être réciproques aux probabilités de gagner. Cette équation donne

$$x=\frac{m}{p};$$

ainsi ce que la loterie doit rendre est le quotient de la mise divisée par la probabilité du joueur pour gagner.

4. Une loterie étant composée de n numéros dont r sortent à chaque tirage, on demande la probabilité qu'après i tirages tous les numéros seront sortis.

Nommons $z_{n,q}$ le nombre des cas dans lesquels, après i tirages, la totalité des numéros $1, 2, 3, \ldots, q$ sera sortie. Il est clair que ce nombre est égal au nombre $z_{n,q-1}$ de cas dans lesquels les numéros $1, 2, 3, \ldots, q-1$ sont sortis, moins le nombre de cas dans lesquels, ces numéros étant sortis, le numéro q n'est pas sorti; or ce dernier nombre est évidemment le même que celui des cas dans lesquels les numéros $1, 2, 3, \ldots, q-1$ seraient sortis, si l'on ôtait le numéro q des n numéros de la loterie, et ce nombre est $z_{n-1,q-1}$; on a donc

$$(i) \qquad z_{n,q} = z_{n,q-1} - z_{n-1,q-1}.$$

Maintenant le nombre de tous les cas possibles dans un seul tirage étant $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}$, celui de tous les cas possibles dans i tirages est

$$\left[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}\right]^i.$$

Le nombre de tous les cas dans lesquels le numéro 1 ne sortira pas dans ces i tirages est le nombre de tous les cas possibles, lorsqu'on retranche ce numéro des n numéros de la loterie, et ce nombre est

$$\left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2.3\ldots r}\right]^i;$$

le nombre des cas dans lesquels le numéro 1 sera sorti dans i tirages est donc

$$\left[\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}\right]^i - \left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2.3\ldots r}\right]^i,$$

ou

$$\Delta\left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2.3\ldots r}\right]^i;$$

c'est la valeur de $z_{n,1}$. Cela posé, l'équation (i) donnera, en y faisant successivement $q = 2$, $q = 3$, ...,

$$z_{n,2} = \Delta^2\left[\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-r-1)}{1.2.3\ldots r}\right]^i,$$

$$z_{n,3} = \Delta^3\left[\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-r-2)}{1.2.3\ldots r}\right]^i,$$

.....,

et généralement

$$z_{n,q} = \Delta^q\left[\frac{(n-q)(n-q-1)\ldots(n-r-q+1)}{1.2.3\ldots r}\right]^i.$$

Ainsi la probabilité que les numéros $1, 2, 3, \ldots, q$ sortiront dans i tirages étant égale à $z_{n,q}$ divisé par le nombre de tous les cas possibles, elle sera

$$\frac{\Delta^q[(n-q)(n-q-1)\ldots(n-r-q+1)]^i}{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)]^i}.$$

Si l'on fait dans cette expression $q = n$, on aura, s étant ici la variable qui doit être supposée nulle dans le résultat,

$$\frac{\Delta^n[s(s-1)\ldots(s-r+1)]^i}{[n(n-1)\ldots(n-r+1)]^i}$$

pour l'expression de la probabilité que tous les numéros de la loterie sortiront dans i tirages.

Si n et i sont de très grands nombres, on aura, par les formules du n° 40 du Livre I^{er}, la valeur de cette probabilité au moyen d'une série très convergente. Supposons, par exemple, qu'il ne sorte qu'un numéro à chaque tirage; la probabilité précédente devient

$$\frac{\Delta^n s^i}{n^i}.$$

Proposons-nous de déterminer le nombre i de tirages dans lesquels cette probabilité est $\frac{1}{k}$, n et i étant de très grands nombres. En suivant

l'analyse du numéro cité, on déterminera d'abord a par l'équation

$$o = \frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a - 1},$$

ce qui donne

$$a = \frac{i+1}{n+s}\left\{1 - \frac{sc^{-a}}{1 - \frac{sc^{-a}}{n+s}}\right\}.$$

On a ensuite, par le n° 40 du Livre I^er^, lorsque c^{-a} est une quantité très petite de l'ordre $\frac{1}{i}$, comme cela a lieu dans la question présente, on a, dis-je, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, s étant supposé nul dans le résultat du calcul,

$$\frac{\Delta^n s^i}{n^i} = \frac{\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} e^{na-i}(1-e^{-a})^{n-i}}{\sqrt{1 - \frac{i+1}{n}e^{-a}}}.$$

Or on a, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} = e^{-1};$$

en supposant ensuite $e^{-a} = z$, on a

$$(1-e^{-a})^{n-i} = e^{(i-n)z}\left(1 + \frac{i-n}{2}z^2\right);$$

de plus, l'équation qui détermine a donne

$$i + 1 - na = (i+1)z,$$

d'où l'on tire

$$e^{na-i-1} = e^{-iz}(1-z);$$

on aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n s^i}{n^i} = e^{-nz}\left(1 + \frac{i-2n+1}{2n}z + \frac{i-n}{2}z^2\right).$$

Pour déterminer z, reprenons l'équation

$$a = \frac{i+1}{n} - \frac{i+1}{n}e^{-a};$$

on aura, par la formule (p) du n° 21 du Livre II de la *Mécanique céleste*,

$$z = e^{-a} = q + \frac{i+1}{n}q^2 + \frac{3\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}{1.2}q^3 + \frac{4^2\left(\frac{i+1}{n}\right)^3}{1.2.3}q^4 + \ldots,$$

q étant supposé égal à $e^{-\frac{i+1}{n}}$. Cette valeur de z donne

$$e^{-nz} = e^{-nq}[1 - (i+1)q^2];$$

par conséquent,

$$\frac{\Delta^n s^i}{n^i} = e^{-nq}\left(1 + \frac{i+1-2n}{2n}q - \frac{n+i+2}{2}q^2\right).$$

En égalant cette quantité à la fraction $\frac{1}{k}$, on aura

$$q = \frac{\log k}{n}\left(1 + \frac{i+1-2n}{2n^2} - \frac{n+i+2}{2n^2}\log k\right);$$

or on a

$$i + 1 = -n\log q;$$

on aura donc à très peu près, pour l'expression du nombre i de tirages, après lesquels la probabilité que tous les numéros seront sortis est $\frac{1}{k}$,

$$i = (\log n - \log\log k)\left(n - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\log k\right) + \tfrac{1}{2}\log k;$$

on doit observer que tous ces logarithmes sont hyperboliques.

Supposons la loterie composée de 10000 numéros, ou $n = 10000$, et $k = 2$, cette formule donne

$$i = 95767,4$$

pour l'expression du nombre de tirages, dans lesquels on peut parier un contre un, que les dix mille billets de la loterie sortiront; il y a donc un peu moins d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans

95767 tirages, et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 95768 tirages.

On déterminera par une analyse semblable le nombre des tirages dans lesquels on peut parier un contre un que tous les numéros de la loterie de France sortiront. Cette loterie est, comme on sait, composée de 90 numéros dont cinq sortent à chaque tirage. La probabilité que tous les numéros sortiront dans i tirages est alors, par ce qui précède,

$$\frac{\Delta^n[s'(s'-1)(s'-2)(s'-3)(s'-4)]^i}{[n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]^i},$$

n étant ici égal à 90, et s' devant être supposé nul dans le résultat du calcul. Si l'on fait $s=s'-2$, cette fonction devient

$$\frac{\Delta^n[s(s^2-1)(s^2-4)]^i}{[(n-2)[(n-2)^2-1][(n-2)^2-4]]^i},$$

ou, en développant en série,

$$\frac{(\Delta^n s^{5i}-5i\,\Delta^n s^{5i-2}+\ldots)}{(n-2)^{5i}}\left[1+\frac{5i}{(n-2)^2}+\ldots\right],$$

s devant être supposé égal à -2 dans le résultat du calcul.

On a, par le n° 40 du Livre I^er^, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^2}$ et supposant c^{-a} très petit de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$\frac{\Delta^n s^{5i}}{(n-2)^{5i}}=\frac{\left(\frac{5i+1}{a}\right)^{5i}\left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i}e^{(n-2)a-5i(1-e^{-a})^n}}{(n-2)^{5i}\sqrt{1+\frac{1}{5i}-\frac{na^2e^{-a}}{5i(1-e^{-a})^2}}},$$

a étant donnée par l'équation

$$a=\frac{(5i+1)(1-e^{-a})}{(n-2)\left(1+\frac{2e^{-a}}{n-2}\right)}.$$

On a ainsi, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n s^{5i}}{(n-2)^{5i}}=\frac{\left(1+\frac{2e^{-a}}{n-2}\right)^{5i}}{(1-e^{-a})^{5i}}(1-e^{-a})^n e^{1-(5i+1)e^{-a}-\frac{10ie^{-a}}{n-2}}\left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i}\left(1-\frac{1}{10i}+\frac{na^2e^{-a}}{10i}\right);$$

or on a

$$\left(1+\frac{2e^{-a}}{n-2}\right)^{5i}=e^{\frac{10ie^{-a}}{n-2}},$$

$$(1-e^{-a})^{-5i}=e^{5ie^{-a}}\left(1+\frac{5i}{2}e^{-2a}\right),$$

$$\left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i}=e^{-1}\left(1+\frac{1}{10i}\right);$$

on aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n s^{5i}}{(n-2)^{5i}}=(1-e^{-a})^n\left(1-e^{-a}+\frac{5i}{2}e^{-2a}+\frac{na^2e^{-a}}{10i}\right).$$

En substituant pour a sa valeur et observant que i est fort peu différent de $n-2$ dans le cas présent, comme on le verra ci-après, on a, à très peu près,

$$\frac{na^2e^{-a}}{10i}=\frac{5i+12}{2(n-2)}e^{-a}.$$

Je conserve, pour plus d'exactitude, le terme $\frac{12e^{-a}}{2(n-2)}$, quoique de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, à cause de la grandeur de son facteur 12; on aura donc

$$\frac{\Delta^n s^{5i}}{(n-2)^{5i}}=(1-e^{-a})^n\left[1+\frac{5i-2n+16}{2(n-2)}e^{-a}+\frac{5i}{2}e^{-2a}\right].$$

Si l'on change dans cette expression $5i$ dans $5i-2$, on aura celle de $\frac{\Delta^n s^{5i-2}}{(n-2)^{5i-2}}$; mais la valeur de a ne sera plus la même. Soit a' cette nouvelle valeur, on aura

$$a'=\frac{(5i-1)(1-e^{-a'})}{(n-2)\left(1+\frac{2e^{-a'}}{n-2}\right)},$$

ce qui donne, à très peu près,

$$a'=a-\frac{2}{n-2}.$$

Alors on a

$$1-e^{-a'}=1-e^{-a}-\frac{2e^{-a}}{n-2},$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$(1-e^{-a'})^n=(1-e^{-a})^n;$$

par conséquent on a, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$\frac{\Delta^n s^{3i-2}}{(n-2)^{3i-2}}=(1-e^{-a})^n.$$

On aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n[s(s^2-1)(s^2-4)]^i}{[n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]^i}$$
$$=(1-e^{-a})^n\left[1+\frac{5i-2n+16}{2(n-2)}e^{-a}+\frac{5i}{2}e^{-2a}\right].$$

Cette quantité doit, par la condition du problème, être égale à $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$1-e^{-a}=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{5i-2n+16}{2n(n-2)}e^{-a}-\frac{5i}{2n}e^{-2a}\right],$$

d'où l'on tire

$$e^{-a}=(1-\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}})\left[1+\frac{5i-2n+16}{2n(n-2)}+\frac{5i}{2n}e^{-a}\right];$$

par conséquent on a, en logarithmes hyperboliques,

$$a=\log\left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right)-\frac{5i-2n+16}{2n(n-2)}-\frac{5i}{2n}e^{-a};$$

or on a, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$a=\frac{5i+1}{(n-2)\sqrt[n]{2}};$$

on aura donc

$$i=\frac{n-2}{5}\sqrt[n]{2}\left[1-\frac{1}{2n}-\frac{16}{10in}-\frac{1}{2}(\sqrt[n]{2}-1)\right]\log\left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right).$$

En substituant pour n sa valeur 90, on trouve

$$i=85,53,$$

en sorte qu'il y a un peu moins d'un contre un à parier que tous les numéros sortiront dans 85 tirages, et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 86 tirages.

Un moyen fort simple et très approché d'obtenir la valeur de i est de supposer $\frac{\Delta^n s^i}{n^i}$, ou la série

$$1-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i-\ldots,$$

égale au développement

$$1-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i}-\ldots$$

du binôme $\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$. En effet les deux séries ont les deux premiers termes égaux respectivement. Leurs troisièmes termes sont aussi, à très peu près, égaux entre eux; car on a à fort peu près $\left(\frac{n-2}{n}\right)^i$ égal à $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i}$. En effet, leurs logarithmes hyperboliques sont, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{i}{n^2}$, égaux l'un et l'autre à $-\frac{i}{n}$. On verra de la même manière que les quatrièmes termes, les cinquièmes, ... sont très peu différents, lorsque n et i sont de très grands nombres; mais la différence s'accroît sans cesse à mesure que les termes s'éloignent du premier, ce qui doit à la fin en produire une sensible entre les séries elles-mêmes. Pour l'apprécier, déterminons la valeur de i conclue de l'égalité des deux séries. En égalant à $\frac{1}{k}$ le binôme $\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$, on aura

$$i=\frac{\log\left(1-\sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right)}{\log\left(\frac{n-1}{n}\right)},$$

ces logarithmes pouvant être, à volonté, hyperboliques ou tabulaires. Soit $\sqrt[n]{\frac{1}{k}}=1-z$. Nous aurons, en prenant les logarithmes hyperbo-

liques de chaque membre de cette équation

$$\frac{1}{n}\log k = -\log(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \ldots,$$

ce qui donne, à très peu près,

$$z = \frac{\log k}{n}\left(1 - \frac{\log k}{2n}\right);$$

on aura donc, en logarithmes hyperboliques,

$$\log\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right) = \log z = \log\log k - \log n - \frac{\log k}{2n}.$$

On a ensuite

$$\log\frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \ldots.$$

L'expression précédente de i devient ainsi, à très peu près,

$$i = n(\log n - \log\log k)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\log k;$$

l'excès de la valeur trouvée précédemment pour i sur celle-ci est

$$\frac{\log k}{2}(\log n - \log\log k);$$

cet excès devient infini, lorsque n est infini; mais il faut un très grand nombre pour le rendre bien sensible, et dans le cas de $n = 10000$ et de $k = 2$, il n'est encore que de trois unités.

Si l'on considère pareillement le développement

$$1 - n\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \ldots$$

de l'expression $\frac{\Delta^n[s'(s'-1)(s'-2)(s'-3)(s'-4)]^i}{[n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]^i}$, comme celui du binôme $\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n$, on aura, pour déterminer le nombre i de coups dans lesquels on peut parier un contre un que tous les numéros sortiront, l'équation

$$\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n = \frac{1}{2};$$

ce qui donne

$$i = \frac{\log\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}}{\log\frac{n}{n-5}}.$$

Ces logarithmes peuvent être tabulaires. En faisant $n = 90$, on trouve

$$i = 85{,}204,$$

ce qui diffère très peu de la valeur $i = 85{,}53$ que nous avons trouvée ci-dessus.

5. Une urne étant supposée renfermer le nombre x de boules, on en tire une partie ou la totalité, et l'on demande la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair.

La somme des cas dans lesquels ce nombre est l'unité égale évidemment x, puisque chacune des boules peut également être extraite. La somme des cas dans lesquels ce nombre égale 2 est la somme des combinaisons des x boules prises deux à deux, et cette somme est, par le n° 3, égale à $\frac{x(x-1)}{1.2}$. La somme des cas dans lesquels le même nombre égale 3 est la somme des combinaisons des boules prises trois à trois, et cette somme est $\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$, et ainsi de suite. Ainsi les termes successifs du développement de la fonction $(1+1)^x - 1$ représenteront tous les cas dans lesquels le nombre des boules extraites est successivement $1, 2, 3, \ldots$, jusqu'à x; d'où il est facile de conclure que la somme de tous les cas relatifs aux nombres impairs est $\frac{1}{2}(1+1)^x - \frac{1}{2}(1-1)^x$, ou 2^{x-1}, et que la somme de tous les cas relatifs aux nombres pairs est $\frac{1}{2}(1+1)^x + \frac{1}{2}(1-1)^x - 1$, ou $2^{x-1} - 1$. La réunion de ces deux sommes est le nombre de tous les cas possibles; ce nombre est donc $2^x - 1$; ainsi la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair est $\frac{2^{x-1}-1}{2^x-1}$, et la probabilité que ce nombre sera impair est $\frac{2^{x-1}}{2^x-1}$; il y a donc de l'avantage à parier avec égalité pour un nombre impair.

Si le nombre x est inconnu, et si l'on sait seulement qu'il ne peut

excéder n, et que ce nombre et tous les inférieurs sont également possibles, on aura le nombre de tous les cas possibles relatifs aux nombres impairs en faisant la somme de toutes les valeurs de 2^{x-1}, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, et il est facile de voir que cette somme est 2^n-1. On aura pareillement la somme de tous les cas possibles relatifs aux nombres pairs, en sommant la fonction $2^{x-1}-1$, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, et l'on trouve cette somme égale à 2^n-n-1; la probabilité d'un nombre pair est donc alors $\frac{2^n-n-1}{2^{n+1}-n-2}$, et celle d'un nombre impair est $\frac{2^n-1}{2^{n+1}-n-2}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme le nombre x de boules blanches, et le même nombre de boules noires; on demande la probabilité qu'en tirant un nombre pair quelconque de boules, on amènera autant de boules blanches que de boules noires, tous les nombres pairs pouvant être également amenés.

Le nombre des cas dans lesquels une boule blanche de l'urne peut se combiner avec une boule noire est évidemment $x.x$. Le nombre des cas dans lesquels deux boules blanches peuvent se combiner avec deux boules noires est $\frac{x(x-1)}{1.2}\frac{x(x-1)}{1.2}$, et ainsi de suite. Le nombre des cas dans lesquels on amènera autant de boules blanches que de boules noires est donc la somme des carrés des termes du développement du binôme $(1+1)^x$, moins l'unité. Pour avoir cette somme, nous observerons qu'elle est égale au terme indépendant de a, dans le développement de $\left(1+\frac{1}{a}\right)^x(1+a)^x$. Cette fonction est égale à $\frac{(1+a)^{2x}}{a^x}$. Le terme indépendant de a, dans son développement, est ainsi le coefficient du terme moyen du binôme $(1+a)^{2x}$; ce coefficient est $\frac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots x)^2}$; le nombre des cas dans lesquels on peut tirer de l'urne autant de boules blanches que de boules noires est donc

$$\frac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots x)^2}-1.$$

Le nombre de tous les cas possibles est la somme des termes impairs dans le développement du binôme $(1+1)^{2x}$, moins le premier, ou l'unité. Cette somme est $\frac{1}{2}(1+1)^{2x}+\frac{1}{2}(1-1)^{2x}$; le nombre des cas possibles est donc $2^{2x-1}-1$, ce qui donne pour l'expression de la probabilité cherchée

$$\frac{\frac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots x)^2}-1}{2^{2x-1}-1}.$$

Dans le cas où x est un grand nombre, cette probabilité se réduit par le n° 33 du Livre I^er^ à $\frac{2}{\sqrt{x\pi}}$, π étant toujours la demi-circonférence dont 1 est le rayon.

6. Considérons un nombre $x+x'$ d'urnes, dont la première renferme p boules blanches et q boules noires, la deuxième p' boules blanches et q' boules noires, la troisième p'' boules blanches et q'' boules noires, et ainsi de suite. Supposons que l'on tire successivement une boule de chaque urne. Il est clair que le nombre de tous les cas possibles au premier tirage est $p+q$; au second tirage, chacun des cas du premier pouvant se combiner avec les $p'+q'$ boules de la seconde urne, on aura $(p+q)(p'+q')$ pour le nombre de tous les cas possibles relatifs aux deux premiers tirages. Au troisième tirage, chacun de ces cas peut se combiner avec les $p''+q''$ boules de la troisième urne; ce qui donne $(p+q)(p'+q')(p''+q'')$ pour le nombre de tous les cas possibles relatifs à trois tirages, et ainsi du reste. Ce produit pour la totalité des urnes sera composé de $x+x'$ facteurs, et la somme de tous les termes de son développement dans lesquels la lettre p, avec ou sans accent, est répétée x fois, et par conséquent la lettre q, x' fois, exprimera le nombre des cas dans lesquels on peut tirer des urnes x boules blanches et x' boules noires.

Si p', p'', ... sont égaux à p, et si q', q'', ... sont égaux à q, le produit précédent devient $(p+q)^{x+x'}$. Le terme multiplié par $p^x q^{x'}$ dans le développement de ce binôme est

$$\frac{(x+x')(x+x'-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots x'}p^x q^{x'}, \text{ ou } \frac{1.2.3\ldots(x+x')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'}p^x q^{x'}.$$

Ainsi cette quantité exprime le nombre des cas dans lesquels on peut amener x boules blanches et x' boules noires. Le nombre de tous les cas possibles étant $(p+q)^{x+x'}$, la probabilité d'amener x boules blanches et x' boules noires est

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'}\left(\frac{p}{p+q}\right)^{x}\left(\frac{q}{p+q}\right)^{x'},$$

où l'on doit observer que $\frac{p}{p+q}$ est la probabilité de tirer une boule blanche de l'une des urnes, et que $\frac{q}{p+q}$ est la probabilité d'en tirer une boule noire.

Il est visible qu'il est parfaitement égal de tirer x boules blanches et x' boules noires de $x+x'$ urnes qui renferment chacune p boules blanches et q boules noires, ou d'une seule de ces urnes, pourvu que l'on remette dans l'urne la boule extraite à chaque tirage.

Considérons maintenant un nombre $x+x'+x''$ d'urnes dont la première renferme p boules blanches, q boules noires et r boules rouges, dont la seconde renferme p' boules blanches, q' boules noires et r' boules rouges, et ainsi de suite. Supposons que l'on tire une boule de chacune de ces urnes. Le nombre de tous les cas possibles sera le produit des $x+x'+x''$ facteurs,

$$(p+q+r)(p'+q'+r')(p''+q''+r'')\ldots.$$

Le nombre des cas dans lesquels on amènera x boules blanches, x' boules noires et x'' boules rouges sera la somme de tous les termes du développement de ce produit, dans lesquels la lettre p sera répétée x fois, la lettre q, x' fois et la lettre r, x'' fois. Si toutes les lettres accentuées p', q', ... sont égales à leurs correspondantes non accentuées, le produit précédent se change dans le trinôme $(p+q+r)^{x+x'+x''}$. Le terme de son développement, qui a pour facteur $p^x q^{x'} r^{x''}$, est

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x'')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''}p^x q^{x'} r^{x''};$$

ainsi, le nombre de tous les cas possibles étant $(p+q+r)^{x+x'+x''}$, la probabilité d'amener x boules blanches, x' boules noires et x'' boules rouges sera

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x'')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''}\left(\frac{p}{p+q+r}\right)^{x}\left(\frac{q}{p+q+r}\right)^{x'}\left(\frac{r}{p+q+r}\right)^{x''},$$

où l'on doit observer que $\frac{p}{p+q+r}$, $\frac{q}{p+q+r}$, $\frac{r}{p+q+r}$ sont les probabilités respectives de tirer de chaque urne une boule blanche, une boule noire et une boule rouge.

On voit généralement que, si les urnes renferment chacune le même nombre de couleurs, p étant le nombre des boules de la première couleur, q celui des boules de la seconde couleur, r, s, ... ceux des boules de la troisième, de la quatrième, ..., $x+x'+x''+x'''+\ldots$ étant le nombre des urnes, la probabilité d'amener x boules de la première couleur, x' boules de la seconde, x'' boules de la troisième, x''' boules de la quatrième, ... sera

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x''+x'''+\ldots)}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''.1.2.3\ldots x'''\ldots}\left(\frac{p}{p+q+r+s+\ldots}\right)^{x}$$
$$\times\left(\frac{q}{p+q+r+s+\ldots}\right)^{x'}\left(\frac{r}{p+q+r+s+\ldots}\right)^{x''}\left(\frac{s}{p+q+r+s+\ldots}\right)^{x'''}\ldots.$$

7. Déterminons maintenant la probabilité de tirer des urnes précédentes x boules blanches, avant d'amener soit x' boules noires, soit x'' boules rouges, ... Il est clair que, n exprimant le nombre des couleurs, cela doit arriver au plus tard après $x+x'+x''+\ldots-n+1$ tirages; car, lorsque le nombre des boules blanches extraites est égal ou moindre que x, celui des boules noires extraites moindre que x', celui des boules rouges extraites moindre que x'', ..., le nombre total des boules extraites, et par conséquent le nombre des tirages, est égal ou moindre que $x+x'+x''+\ldots-n+1$; on peut donc ne considérer ici que $x+x'+x''+\ldots-n+1$ urnes.

Pour avoir le nombre des cas dans lesquels on peut amener x boules blanches au $(x+i)^{\text{ième}}$ tirage, il faut déterminer tous les cas dans lesquels $x-1$ boules blanches seront sorties au tirage $x+i-1$. Ce

nombre est le terme multiplié par p^{x-1} dans le développement du polynôme $(p+q+r+\ldots)^{x+i-1}$, et ce terme est

$$\frac{1.2.3\ldots(x+i-1)}{1.2.3\ldots(x-1)1.2.3\ldots i}p^{x-1}(q+r+\ldots)^i.$$

En le combinant avec les p boules blanches de l'urne $x+i$, on aura un produit qu'il faudra encore multiplier par le nombre de tous les cas possibles relatifs aux $x'+x''+\ldots-n-i+1$ tirages suivants, et ce nombre est

$$(p+q+r+\ldots)^{x'+x''+\ldots-n-i+1};$$

on aura donc

$$(a)\quad \frac{1.2.3\ldots(x+i-1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots i}p^x(q+r+\ldots)^i(p+q+r+\ldots)^{x'+x''+\ldots-n-i+1},$$

pour le nombre des cas dans lesquels l'événement peut arriver précisément au tirage $x+i$. Il faut cependant en exclure les cas dans lesquels q est élevé à la puissance x', ceux dans lesquels r est élevé à la puissance x'', etc.; car dans tous ces cas il est déjà arrivé au tirage $x+i-1$, ou x' boules noires, ou x'' boules rouges, ou etc. Ainsi dans le développement du polynôme $(q+r+\ldots)^i$, il ne faut avoir égard qu'aux termes multipliés par $q^f r^{f'} s^{f''}\ldots$, dans lesquels f est moindre que x', f' est moindre que x'', f'' est moindre que x''', ... Le terme multiplié par $q^f r^{f'} s^{f''}\ldots$ dans ce développement est

$$\frac{1.2.3\ldots i}{1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'.1.2.3\ldots f''\ldots}q^f r^{f'} s^{f''}\ldots.$$

Tous les termes que l'on doit considérer dans la fonction (a) sont donc représentés par

$$(b)\quad \begin{cases}\dfrac{1.2.3\ldots(x+f+f'+\ldots-1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'\ldots}p^x q^f r^{f'}\ldots\\ \times(p+q+r+\ldots)^{x'+x''+\ldots-f-f'-\ldots-n+1},\end{cases}$$

parce que i est égal à $f+f'+\ldots$. Ainsi, en donnant, dans cette dernière fonction, à f toutes les valeurs entières depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$, à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x''-1$, et

ainsi de suite, la somme de tous ces termes exprimera le nombre des cas dans lesquels l'événement proposé peut arriver dans $x+x'+\ldots-n+1$ tirages. Il faut diviser cette somme par le nombre de tous les cas possibles, c'est-à-dire par $(p+q+r+\ldots)^{x+x'+x''+\ldots-n+1}$. Si l'on désigne par p' la probabilité de tirer une boule blanche d'une quelconque des urnes, par q' celle d'en tirer une boule noire, par r' celle d'en tirer une boule rouge, ..., on aura

$$p'=\frac{p}{p+q+r+\ldots},\quad q'=\frac{q}{p+q+r+\ldots},\quad r'=\frac{r}{p+q+r+\ldots},\quad \ldots;$$

la fonction (b), divisée par $(p+q+r+\ldots)^{x+x'+\ldots-n+1}$, deviendra ainsi

$$\frac{1.2.3\ldots(x+f+f'+\ldots-1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'\ldots}p'^x q'^f r'^{f'}\ldots.$$

La somme des termes que l'on obtiendra en donnant à f toutes les valeurs depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$, à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x'-1$, ..., sera la probabilité cherchée d'amener x boules blanches avant x' boules noires, ou x'' boules rouges, ou, etc.

On peut, d'après cette analyse, déterminer le sort d'un nombre n de joueurs A, B, C, ..., dont p', q', r', ... représentent les adresses respectives, c'est-à-dire leurs probabilités de gagner un coup lorsque, pour gagner la partie, il manque x coups au joueur A, x' coups au joueur B, x'' coups au joueur C, et ainsi de suite; car il est clair que, relativement au joueur A, cela revient à déterminer la probabilité d'amener x boules blanches avant x' boules noires, ou x'' boules rouges, ..., en tirant successivement une boule d'un nombre $x+x'+x''+\ldots-n+1$ d'urnes qui renferment chacune p boules blanches, q boules noires, r boules rouges, ..., p, q, r, ... étant respectivement égaux aux numérateurs des fractions p', q', r', ... réduites au même dénominateur.

8. Le problème précédent peut être résolu d'une manière fort simple par l'analyse des fonctions génératrices. Nommons $y_{x,x',x'',\ldots}$ la

probabilité du joueur A pour gagner la partie. Au coup suivant, cette probabilité se change dans $y_{x-1,x',x'',\ldots}$, si A gagne ce coup, et la probabilité pour cela est p'. La même probabilité se change dans $y_{x,x'-1,x'',\ldots}$, si le coup est gagné par le joueur B, et la probabilité pour cela est q'; elle se change dans $y_{x,x',x''-1,\ldots}$, si le coup est gagné par le joueur C, et la probabilité pour cela est r', et ainsi de suite; on a donc l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x',x'',\ldots} = p'y_{x-1,x',x'',\ldots} + q'y_{x,x-1,x'',\ldots} + r'y_{x,x',x''-1,\ldots} + \ldots.$$

Soit u une fonction de t, t', t'', ..., telle que $y_{x,x',x'',\ldots}$ soit le coefficient de $t^x t'^{x'} t''^{x''} \ldots$ dans son développement; l'équation précédente aux différences partielles donnera, en passant des coefficients aux fonctions génératrices,

$$u = u(p't + q't' + r't'' + \ldots),$$

d'où l'on tire

$$1 = p't + q't' + r't'' + \ldots;$$

par conséquent,

$$\frac{1}{t} = \frac{p'}{1 - q't' - r't'' - \ldots},$$

ce qui donne

$$\frac{u}{t^x} = \frac{up'^x}{(1 - q't' - r't'' - \ldots)^x} = up'^x \left\{ \begin{array}{l} 1 + x(q't' + r't'' + \ldots) \\ + \dfrac{x(x+1)}{1.2}(q't' + r't'' + \ldots)^2 \\ + \dfrac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(q't' + r't'' + \ldots)^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Maintenant le coefficient de $t^\alpha t'^{x'} t''^{x''} \ldots$ dans $\frac{u}{t^x}$ est $y_{x,x',x'',\ldots}$, et le même coefficient dans un terme quelconque du dernier membre de l'équation précédente, tel que $kup'^x t'^{\alpha'} t''^{\alpha''} \ldots$, est $kp'^x y_{\alpha,x'-\alpha',x''-\alpha'',\ldots}$; la quantité $y_{\alpha,x'-\alpha',x''-\alpha'',\ldots}$ est égale à l'unité, puisqu'alors il ne manque aucun coup au joueur A. De plus, il faut rejeter toutes les valeurs de $y_{\alpha,x'-\alpha',x''-\alpha'',\ldots}$, dans lesquelles α' est égal ou plus grand que x', α'' est égal ou plus grand que x'', et ainsi de suite, parce que ces termes ne peuvent être donnés par l'équation aux différences partielles, la partie étant

finie, lorsque l'un quelconque des joueurs B, C, ... n'a plus de coups à jouer; il ne faut donc considérer dans le dernier membre de l'équation précédente que les puissances de t' moindres que x', que les puissances de t'' moindres que x'', ... L'expression précédente de $\frac{u}{t^x}$ donnera ainsi, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x,x',x'',\ldots} = p'^x \left\{ \begin{array}{l} 1 + x(q' + r' + \ldots) \\ + \dfrac{x(x+1)}{1.2}(q' + r' + \ldots)^2 \\ + \dfrac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(q' + r' + \ldots)^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\},$$

pourvu que l'on rejette les termes dans lesquels la puissance de q' surpasse $x' - 1$, ceux dans lesquels la puissance de r' surpasse $x'' - 1$, etc. Le second membre de cette équation se développe dans une suite de termes compris dans la formule générale

$$\frac{1.2.3\ldots(x + f + f' + \ldots - 1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'\ldots} p'^x q'^f r'^{f'} \ldots.$$

La somme de ces termes relatifs à toutes les valeurs de f depuis f nul jusqu'à $f = x' - 1$, à toutes les valeurs de f' depuis f' nul jusqu'à $f' = x'' - 1$, ..., sera la probabilité $y_{x,x',x'',\ldots}$, ce qui est conforme à ce qui précède.

Dans le cas de deux joueurs A et B, on aura, pour la probabilité du joueur A,

$$p'^x \left[1 + xq' + \frac{x(x+1)}{1.2} q'^2 + \ldots + \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)} q'^{x'-1} \right].$$

En changeant p' en q' et x en x', et réciproquement, on aura

$$q'^{x'} \left[1 + x'p' + \frac{x'(x'+1)}{1.2} p'^2 + \ldots + \frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x-1)} p'^{x-1} \right]$$

pour la probabilité que le joueur B gagnera la partie. La somme de ces

deux expressions doit être égale à l'unité, ce que l'on voit évidemment en leur donnant les formes suivantes. La première expression peut, par le n° 37 du Livre I^er, être transformée dans celle-ci

$$p'^{x+x'-1}\left\{1+\frac{x+x'-1}{1}\frac{q'}{p'}+\frac{(x+x'-1)(x+x'-2)}{1.2}\frac{q'^2}{p'^2}+\ldots+\frac{(x+x'-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots(x'-1)}\frac{q'^{x'-1}}{p'^{x'-1}}\right\},$$

et la seconde peut être transformée dans celle-ci

$$q'^{x+x'-1}\left\{1+\frac{x+x'-1}{1}\frac{p'}{q'}+\frac{(x+x'-1)(x+x'-2)}{1.2}\frac{p'^2}{q'^2}+\ldots+\frac{(x+x'-1)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-1)}\frac{p'^{x-1}}{q'^{x-1}}\right\}.$$

La somme de ces expressions est le développement du binôme $(p'+q')^{x+x'-1}$, et par conséquent elle est égale à l'unité, parce que, A ou B devant gagner chaque coup, la somme $p'+q'$ de leurs probabilités pour cela est l'unité.

Le problème que nous venons de résoudre est celui que l'on nomme *problème des partis* dans l'Analyse des hasards. Le chevalier de Méré le proposa à Pascal, avec quelques autres problèmes sur le jeu de dés. Deux joueurs dont les adresses sont égales ont mis au jeu la même somme; ils doivent jouer jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné un nombre de fois donné son adversaire; mais ils conviennent de quitter le jeu, lorsqu'il manque encore x points au premier joueur pour atteindre ce nombre donné, et lorsqu'il manque x' points au second joueur. On demande de quelle manière ils doivent se partager la somme mise au jeu. Tel est le problème que Pascal résolut au moyen de son triangle arithmétique. Il le proposa à Fermat qui en donna la solution par la voie des combinaisons, ce qui occasionna entre ces deux grands géomètres une discussion, à la suite de laquelle Pascal reconnut la bonté de la méthode de Fermat, pour un nombre quelconque de joueurs. Malheureusement nous n'avons qu'une partie de leur correspondance, dans laquelle on voit les premiers éléments de la théorie des probabilités

et leur application à l'un des problèmes les plus curieux de cette théorie.

Le problème proposé par Pascal à Fermat revient à déterminer les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie; car il est clair que l'enjeu doit être partagé entre les joueurs proportionnellement à leurs probabilités. Ces probabilités sont les mêmes que celles de deux joueurs A et B, qui doivent atteindre un nombre donné de points, x étant le nombre de ceux qui manquent au joueur A, et x' étant le nombre de ceux qui manquent au joueur B, en imaginant une urne renfermant deux boules dont l'une est blanche et l'autre est noire, toutes deux portant le n° 1, la boule blanche étant pour le joueur A, et la boule noire pour le joueur B. On tire successivement une de ces boules, et on la remet dans l'urne après chaque tirage. En nommant $y_{x,x'}$ la probabilité que le joueur A atteindra, le premier, le nombre donné de points, ou, ce qui revient au même, qu'il aura x points avant que B en ait x', on aura

$$y_{x,x'}=\tfrac{1}{2}y_{x-1,x'}+\tfrac{1}{2}y_{x,x'-1};$$

car, si la boule que l'on extrait est blanche, $y_{x,x'}$ se change en $y_{x-1,x'}$, et si la boule extraite est noire, $y_{x,x'}$ se change en $y_{x,x'-1}$, et la probabilité de chacun de ces événements est $\frac{1}{2}$; on a donc l'équation précédente.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ dans cette équation aux différences partielles est, par le n° 20 du Livre I^er,

$$\frac{M}{1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t'},$$

M étant une fonction arbitraire de t'. Pour la déterminer, nous observerons que $y_{0,0}$ ne peut avoir lieu, puisque la partie cesse lorsque l'une ou l'autre des variables x et x' est nulle; M doit donc avoir pour facteur t'. De plus $y_{0,x'}$ est l'unité, quel que soit x', la probabilité du joueur A se changeant alors en certitude : or la fonction génératrice de l'unité est généralement $\frac{t'^i}{1-t'}$, car les coefficients des puissances de t'

dans le développement de cette fonction sont tous égaux à l'unité; dans le cas présent, $y_{0,x'}$ pouvant avoir lieu lorsque x' est ou 1, ou 2, ou 3, etc., t doit être égal à l'unité; la fonction génératrice de $y_{0,x'}$ est donc égale à $\frac{t'}{1-t'}$; c'est le coefficient de t^0 dans le développement de la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ ou dans

$$\frac{\mathrm{M}}{1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t'};$$

on a donc

$$\frac{\mathrm{M}}{1-\frac{1}{2}t'}=\frac{t'}{1-t'},$$

ce qui donne

$$\mathrm{M}=\frac{t'(1-\frac{1}{2}t')}{(1-t')},$$

par conséquent la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{t'(1-\frac{1}{2}t')}{(1-t')(1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t')}.$$

En la développant par rapport aux puissances de t, on a

$$\frac{t'}{1-t'}\left(1+\frac{1}{2}\frac{t}{1-\frac{1}{2}t'}+\frac{1}{2^2}\frac{t^2}{(1-\frac{1}{2}t')^2}+\frac{1}{2^3}\frac{t^3}{(1-\frac{1}{2}t')^3}+\ldots\right).$$

Le coefficient de t^x dans cette série est

$$\frac{1}{2^x}\frac{t'}{(1-t')(1-\frac{1}{2}t')^x};$$

$y_{x,x'}$ est donc le coefficient de $t^{x'}$ dans cette dernière quantité; or on a

$$\frac{\frac{t'}{(1-t')(1-\frac{1}{2}t')^x}}{1-t'}=\frac{t'+\frac{1}{2}xt'^2+\frac{1}{2^2}\frac{x(x+1)}{1.2}t'^3+\ldots+\frac{1}{2^{x'-1}}\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}t'^{x'}+\ldots}{1-t'}.$$

En réduisant en série le dénominateur de cette dernière fraction et multipliant le numérateur par cette série, on voit que le coefficient de $t^{x'}$ dans ce produit est ce que devient ce numérateur lorsqu'on y fait $t'=1$;

on a donc

$$y_{x,x'}=\frac{1}{2^x}\left\{\begin{array}{l}1+x\frac{1}{2}+\frac{x(x+1)}{1.2}\frac{1}{2^2}+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\frac{1}{2^3}+\ldots\\ \quad+\frac{x(x+1)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}\frac{1}{2^{x'-1}}\end{array}\right\},$$

résultat conforme à ce qui précède.

Concevons présentement qu'il y ait dans l'urne une boule blanche portant le n° 1, et deux boules noires, dont une porte le n° 1, et l'autre porte le n° 2, la boule blanche étant favorable à A, et les boules noires à son adversaire, chaque boule diminuant de son numéro le nombre de points qui manquent au joueur auquel elle est favorable. $y_{x,x'}$ étant toujours la probabilité que le joueur A atteindra le premier le nombre donné, on aura l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'}=\tfrac{1}{3}y_{x-1,x'}+\tfrac{1}{3}y_{x,x'-1}+\tfrac{1}{3}y_{x,x-2};$$

car, au tirage suivant, si la boule blanche sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x-1,x'}$; si la boule noire numérotée 1 sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x,x'-1}$, et si la boule noire numérotée 2 sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x,x-2}$, et la probabilité de chacun de ces événements est $\frac{1}{3}$.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{\mathrm{M}}{1-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}t'-\frac{1}{3}t'^2},$$

M étant une fonction arbitraire de t', qui doit, par ce qui précède, avoir pour facteur t', et dans le cas présent être égale à

$$\frac{t'}{1-t'}(1-\tfrac{1}{3}t'-\tfrac{1}{3}t'^2),$$

en sorte que la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{t'(1-\frac{1}{3}t'-\frac{1}{3}t'^2)}{(1-t')(1-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}t'-\frac{1}{3}t'^2)}.$$

Le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction est

$$\frac{1}{3^x}\frac{t'}{1-t'}\frac{1}{(1-\frac{1}{3}t'-\frac{1}{3}t'^2)^x},$$

et il résulte de ce que nous venons de dire que le coefficient de $t'^{x'}$ dans le développement de cette dernière quantité est égal à

$$\frac{1}{3^x}\left(t'+\frac{x\,t'^2(1+t')}{3}+\frac{x(x+1)}{1.2}\,\frac{t'^3(1+t')^2}{3^2}+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\,\frac{t'^4(1+t')^3}{3^3}+\ldots\right);$$

en rejetant du développement de cette série toutes les puissances de t' supérieures à $t'^{x'}$, et supposant dans ce que l'on conserve $t'=1$, ce sera l'expression de $y_{x,x'}$.

Il est facile de traduire ce procédé en formule. Ainsi, en supposant x' pair et égal à $2r+2$, on trouve

$$\begin{aligned}y_{x,x'}=&\frac{1}{3^x}\left[1+x\frac{2}{3}+\frac{x(x+1)}{1.2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+r-1)}{1.2.3\ldots r}\left(\frac{2}{3}\right)^r\right]\\&+\frac{x(x+1)\ldots(x+r)}{1.2.3\ldots(r+1)3^{x+r+1}}\left[1+(r+1)+\frac{(r+1)r}{1.2}+\ldots+\frac{(r+1)r\ldots2}{1.2.3\ldots r}\right]\\&+\frac{x(x+1)\ldots(x+r+1)}{1.2.3\ldots(r+2)3^{x+r+2}}\left[1+(r+2)+\ldots+\frac{(r+2)(r+1)\ldots4}{1.2.3\ldots(r-1)}\right]\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{x(x+1)\ldots(x+2r)}{1.2.3\ldots(2r+1)3^{x+2r+1}}.\end{aligned}$$

Si l'on suppose x' impair et égal à $2r+1$, on aura

$$\begin{aligned}y_{x,x'}=&\frac{1}{3^x}\left[1+x\frac{2}{3}+\frac{x(x+1)}{1.2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+r-1)}{1.2.3\ldots r}\left(\frac{2}{3}\right)^r\right]\\&+\frac{x(x+1)\ldots(x+r)}{1.2.3\ldots(r+1)3^{x+r+1}}\left[1+(r+1)+\frac{(r+1)r}{1.2}+\ldots+\frac{(r+1)r\ldots3}{1.2.3\ldots(r-1)}\right]\\&+\frac{x(x+1)\ldots(x+r+1)}{1.2.3\ldots(r+2)3^{x+r+2}}\left[1+(r+2)+\frac{(r+2)(r+1)}{1.2}+\ldots+\frac{(r+2)(r+1)\ldots5}{1.2.3\ldots(r-2)}\right]\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{x(x+1)\ldots(x+2r-1)}{1.2.3\ldots2r\,3^{x+2r}}.\end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas de $x=2$ et $x'=5$, on a

$$y_{2,5}=\frac{350}{729}.$$

Concevons encore qu'il y ait dans l'urne deux boules blanches distinguées, comme les deux boules noires, par les nos 1 et 2; la probabilité du joueur A sera donnée par l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'}=\tfrac{1}{4}y_{x-1,x'}+\tfrac{1}{4}y_{x-2,x}+\tfrac{1}{4}y_{x,x'-1}+\tfrac{1}{4}y_{x,x'-2}.$$

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est alors, par le n° 20 du Livre Ier,

$$\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}t}{1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2},$$

M et N étant deux fonctions arbitraires de t'. Pour les déterminer, on observera que $y_{0,x'}$ est toujours égal à l'unité, et qu'il faut exclure dans M la puissance nulle de t'; on a donc

$$\mathrm{M}=\frac{t'}{1-t'}\left(1-\tfrac{1}{4}t'-\tfrac{1}{4}t'^2\right).$$

Pour déterminer N, cherchons la fonction génératrice de $y_{1,x'}$. Si l'on observe que $y_{0,x'}$ est égal à l'unité, et que, le joueur A n'ayant plus besoin que d'un point, il gagne la partie, soit qu'il amène la boule blanche numérotée 1 ou la boule blanche numérotée 2, l'équation précédente aux différences partielles donnera

$$y_{1,x'}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}y_{1,x'-1}+\tfrac{1}{4}y_{1,x'-2}.$$

Supposons $y_{1,x'}=1-y'_{x'}$; on aura

$$y'_{x'}=\tfrac{1}{4}y'_{x'-1}+\tfrac{1}{4}y'_{x'-2}.$$

La fonction génératrice de cette équation est

$$\frac{m+nt'}{1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2},$$

m et n étant deux constantes. Pour les déterminer, on observera que $y_{1,0}=0$, et que par conséquent $y'_0=1$, ce qui donne $m=1$. La fonc-

tion génératrice de $y'_{x'}$ est donc

$$\frac{1+nt'}{1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2}.$$

On a ensuite évidemment $y_{1,1}=\frac{1}{2}$, ce qui donne $y'_1=\frac{1}{2}$; y'_1 est le coefficient de t' dans le développement de la fonction précédente, et ce coefficient est $n+\frac{1}{4}$; on a donc $n+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, ou $n=\frac{1}{4}$. La fonction génératrice de l'unité est $\frac{1}{1-t'}$, parce qu'ici toutes les puissances de t' peuvent être admises; on a ainsi

$$\frac{1}{1-t'}=\frac{1+\frac{1}{4}t'}{1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{1}{2}t'}{(1-t')(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)},$$

pour la fonction génératrice de $y_{1,x'}$. Cette même fonction est le coefficient de t dans le développement de la fonction génératrice de $y_{x,x'}$, fonction qui, par ce qui précède, est

$$\frac{\frac{t'}{1-t'}(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)+Nt}{1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2};$$

ce coefficient est

$$\frac{\frac{1}{4}t'}{(1-t')(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)}+\frac{N}{1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2};$$

en l'égalant à

$$\frac{\frac{1}{2}t'}{(1-t')(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)},$$

on aura

$$N=\frac{\frac{1}{4}t'}{1-t'}.$$

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est ainsi

$$\frac{t'(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)+\frac{1}{4}tt'}{(1-t')(1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2)}.$$

Si l'on développe en série la fonction

$$\frac{t'(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)+\frac{1}{4}tt'}{1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2}-t',$$

on aura

$$\frac{(2+t)tt'}{4}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{4}t'(1+t')+\frac{1}{4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{1}{4^3}t'^3(1+t')^3+\ldots\\ +\frac{t(1+t)}{4}\left[1+\frac{2}{4}t'(1+t')+\frac{3}{4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{4}{4^3}t'^3(1+t')^3+\ldots\right]\\ +\frac{t^2(1+t)^2}{4^2}\left[1+\frac{3}{4}t'(1+t')+\frac{3.4}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{3.4.5}{1.2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\ldots\right]\\ +\frac{t^3(1+t)^3}{4^3}\left[1+\frac{4}{4}t'(1+t')+\frac{4.5}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{4.5.6}{1.2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\ldots\right]\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Si l'on rejette de cette série toutes les puissances de t autres que t^x et toutes les puissances de t' supérieures à $t'^{x'}$, et si dans ce qui reste on fait $t=1$, $t'=1$, on aura l'expression de $y_{x,x'}$ lorsque x est égal ou plus grand que l'unité; lorsque x est nul, on a $y_{0,x'}=1$. Il est facile de traduire ce procédé en formule, comme on l'a fait pour le cas précédent.

Nommons $z_{x,x'}$ la probabilité du joueur B; la fonction génératrice de $z_{x,x'}$ sera ce que devient la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ lorsqu'on y change t en t', et réciproquement, ce qui donne, pour cette fonction,

$$\frac{t(1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2)+\frac{1}{4}tt'}{(1-t)(1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2)}.$$

En ajoutant les deux fonctions génératrices, leur somme se réduit à

$$\frac{t}{1-t}+\frac{t'}{1-t'}+\frac{tt'}{(1-t)(1-t')},$$

dans laquelle le coefficient de $t^xt'^{x'}$ est l'unité; ainsi l'on a

$$y_{x,x'}+z_{x,x'}=1,$$

ce qui est visible d'ailleurs, puisque la partie doit être nécessairement gagnée par l'un des joueurs.

9. Concevons dans une urne r boules marquées du n° 1, r boules marquées du n° 2, r boules marquées du n° 3, et ainsi de suite jusqu'au n° n. Ces boules étant bien mêlées dans l'urne, on les tire toutes suc-

cessivement; on demande la probabilité qu'il sortira au moins une de ces boules au rang indiqué par son numéro, ou qu'il en sortira au moins deux, ou au moins trois, etc.

Cherchons d'abord la probabilité qu'il en sortira au moins une. Pour cela, nous observerons qu'aucune boule ne peut sortir à son rang que dans les n premiers tirages; on peut donc ici faire abstraction des tirages suivants; or le nombre total des boules étant rn, le nombre de leurs combinaisons n à n, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles, est, par ce qui précède,

$$rn(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1);$$

c'est donc le nombre de tous les cas possibles dans les n premiers tirages.

Considérons une des boules marquées du n° 1, et supposons qu'elle sorte à son rang, ou la première. Le nombre des combinaisons des $rn-1$ autres boules prises $n-1$ à $n-1$ sera

$$(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1);$$

c'est le nombre des cas relatifs à la supposition que nous venons de faire, et, comme cette supposition peut s'appliquer aux r boules marquées du n° 1, on aura

$$r(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1)$$

pour le nombre des cas relatifs à l'hypothèse qu'une des boules marquées du n° 1 sortira à son rang. Le même résultat a lieu pour l'hypothèse qu'une quelconque des $n-1$ autres espèces de boules sortira au rang indiqué par son numéro. En ajoutant donc tous les résultats relatifs à ces diverses hypothèses, on aura

$$(a) \qquad nr(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1),$$

pour le nombre des cas dans lesquels une boule au moins sortira à son rang, pourvu toutefois que l'on en retranche les cas qui sont répétés.

Pour déterminer ces cas, considérons une des boules du n° 1, sortant la première, et une des boules du n° 2, sortant la seconde. Ce cas est compris deux fois dans le nombre précédent; car il est compris une fois dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotées 1 sortira à son rang, et une seconde fois dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotée 2 sortira à son rang; et, comme cela s'étend à deux boules quelconques sortant à leur rang, on voit qu'il faut retrancher du nombre des cas précédents le nombre de tous les cas dans lesquels deux boules sortent à leur rang.

Le nombre des combinaisons de deux boules de numéros différents est $\frac{n(n-1)}{1.2}r^2$; car le nombre des numéros étant n, leurs combinaisons deux à deux sont au nombre $\frac{n(n-1)}{1.2}$, et dans chacune de ces combinaisons on peut combiner les r boules marquées d'un des numéros avec les r boules marquées de l'autre numéro. Le nombre des combinaisons des $rn-2$ boules restantes, prises $n-2$ à $n-2$, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles, est

$$(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1);$$

ainsi le nombre des cas relatifs à la supposition que deux boules sortent à leur rang est

$$\frac{n(n-1)}{1.2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1);$$

en le retranchant du nombre (a), on aura

$$(a') \qquad \begin{cases} nr(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1) \\ -\frac{n(n-1)}{1.2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1), \end{cases}$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sortira à son rang, pourvu que l'on retranche encore de cette fonction les cas répétés, et qu'on lui ajoute ceux qui manquent.

Ces cas sont ceux dans lesquels trois boules sortent à leur rang. En nommant k ce nombre, il est répété trois fois dans le premier terme de

la fonction (a'); car il peut résulter, dans ce terme, des trois suppositions de chacune des trois boules sortant à son rang. Le nombre k est pareillement compris trois fois dans le second terme de la fonction; car il peut résulter de chacune des suppositions relatives à deux quelconques des trois boules sortant à leur rang. Ainsi, ce second terme étant affecté du signe $-$, le nombre k ne se trouve point dans la fonction (a'); il faut donc le lui ajouter pour qu'elle contienne tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang. Le nombre des combinaisons des n numéros pris trois à trois est $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, et, comme on peut combiner les r boules d'un des numéros de chaque combinaison avec les r boules du second numéro et avec les r boules du troisième numéro, on aura le nombre total des combinaisons dans lesquelles trois boules sortent à leur rang, en multipliant $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}r^3$ par $(rn-3)(rn-4)\ldots(rn-n+1)$, nombre qui exprime celui des combinaisons des $rn-3$ boules restantes, prises $n-3$ à $n-3$, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles. Si l'on ajoute ce produit à la fonction (a'), on aura

$$(a'')\quad\begin{cases} nr(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1) \\ -\frac{n(n-1)}{1.2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1) \\ +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}r^3(rn-3)(rn-4)\ldots(rn-n+1). \end{cases}$$

Cette fonction exprime le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang, pourvu que l'on en retranche encore les cas répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels quatre boules sortent à leur rang. En y appliquant les raisonnements précédents, on verra qu'il faut encore retrancher de la fonction (a'') le terme

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}r^4(rn-4)(rn-5)\ldots(rn-n+1).$$

En continuant ainsi, on aura, pour l'expression du nombre des cas dans

lesquels une boule au moins sort à son rang,

$$(A)\quad\begin{cases} nr(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1) \\ -\frac{n(n-1)}{1.2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1) \\ +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}r^3(rn-3)(rn-4)\ldots(rn-n+1) \\ -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}r^4(rn-4)(rn-5)\ldots(rn-n+1) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

la série étant continuée aussi loin qu'elle peut l'être. Dans cette fonction, chaque combinaison n'est point répétée : ainsi la combinaison de s boules sortant à leur rang ne s'y trouve qu'une fois; car cette combinaison est comprise s fois dans le premier terme de la fonction, puisqu'elle peut résulter de chacune des s boules sortant à son rang; elle est retranchée $\frac{s(s-1)}{1.2}$ fois dans le second terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons deux à deux des s boules sortant à leur rang; elle est ajoutée $\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}$ fois dans le troisième terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons de s lettres prises trois à trois, et ainsi de suite; elle est donc, dans la fonction (A), comprise un nombre de fois égal à

$$s-\frac{s(s-1)}{1.2}+\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}-\ldots,$$

et par conséquent égal à $1-(1-1)^s$, ou à l'unité. En divisant la fonction (A) par le nombre $rn(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1)$ de tous les cas possibles, on aura, pour l'expression de la probabilité qu'une boule au moins sortira à son rang,

$$(B)\quad\begin{cases} 1-\frac{(n-1)r}{1.2(rn-1)}+\frac{(n-1)(n-2)r^2}{1.2.3(rn-1)(rn-2)} \\ -\frac{(n-1)(n-2)(n-3)r^3}{1.2.3.4(rn-1)(rn-2)(rn-3)}+\ldots. \end{cases}$$

Cherchons maintenant la probabilité que s boules au moins sortiront

à leur rang. Le nombre des cas dans lesquels s boules sortent à leur rang est, par ce qui précède,

$$(b)\qquad \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)}{1.2.3\dots s}\,r^s(rn-s)(rn-s-1)\dots(rn-n+1),$$

pourvu que l'on retranche de cette fonction les cas qui sont répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels $s+1$ boules sortent à leur rang, car ils peuvent résulter, dans la fonction, de $s+1$ boules prises s à s; ces cas sont donc répétés $s+1$ fois dans cette fonction; par conséquent il faut les retrancher s fois. Or le nombre des cas dans lesquels $s+1$ boules sortent à leur rang est

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-s)}{1.2.3\dots(s+1)}\,r^{s+1}(rn-s-1)(rn-s-2)\dots(rn-n+1).$$

En le multipliant par s et le retranchant de la fonction (b), on aura

$$(b')\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)}{1.2.3\dots s}\,r^s(rn-s)(rn-s-1)\dots(rn-n+1)\\ \times\left[1-\dfrac{s(n-s)r}{(s+1)(rn-s)}\right].\end{array}\right.$$

Dans cette fonction, plusieurs cas sont encore répétés, savoir, ceux dans lesquels $s+2$ boules sortent à leur rang; car ils résultent, dans le premier terme, des $s+2$ boules sortant à leur rang et prises s à s; ils résultent, dans le second terme, des $s+2$ boules sortant à leur rang et prises $s+1$ à $s+1$, et de plus multipliés par le facteur s, par lequel on a multiplié le second terme. Ils sont donc compris dans cette fonction le nombre de fois $\frac{(s+2)(s+1)}{1.2}-s(s+2)$; ainsi il faut multiplier par l'unité, moins ce nombre de fois, le nombre des cas dans lesquels $s+2$ boules sortent à leur rang. Ce dernier nombre est

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-s-1)}{1.2.3\dots(s+2)}\,r^{s+2}(rn-s-2)(rn-s-3)\dots(rn-n+1);$$

le produit dont il s'agit sera donc

$$\frac{n(n-1)\dots(n-s-1)}{1.2.3\dots(s+2)}\,r^{s+2}(rn-s-2)\dots(rn-n+1)\,\frac{s(s+1)}{1.2}.$$

En l'ajoutant à la fonction (b'), on aura

$$(b'')\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{1.2.3\dots s}\,r^s(rn-s)(rn-s-1)\dots(rn-n+1)\\ \times\left\{1-\dfrac{s}{s+1}\,\dfrac{(n-s)r}{rn-s}\right.\\ \left.+\dfrac{s}{s+2}\,\dfrac{(n-s)(n-s-1)r^2}{1.2(rn-s)(rn-s-1)}\right\}.\end{array}\right.$$

C'est le nombre de tous les cas possibles dans lesquels s boules sortent à leur rang, pourvu que l'on en retranche encore les cas qui sont répétés. En continuant de raisonner ainsi, et en divisant la fonction finale par le nombre de tous les cas possibles, on aura, pour l'expression de la probabilité que s boules au moins sortiront à leur rang,

$$(C)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)r^{s-1}}{1.2.3\dots s(rn-1)(rn-2)\dots(rn-s+1)}\\ \times\left\{1-\dfrac{s}{s+1}\,\dfrac{(n-s)r}{rn-s}+\dfrac{s}{s+2}\,\dfrac{(n-s)(n-s-1)r^2}{1.2.(rn-s)(rn-s-1)}\right.\\ \left.-\dfrac{s}{s+3}\,\dfrac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)r^3}{1.2.3.(rn-s)(rn-s-1)(rn-s-2)}+\dots\right\}.\end{array}\right.$$

On aura la probabilité qu'aucune des boules ne sortira à son rang en retranchant la formule (B) de l'unité, et l'on trouvera, pour son expression,

$$\frac{(1.2.3\dots rn)-nr[1.2\,3\dots(rn-1)]+\dfrac{n(n-1)}{1.2}\,r^2[1.2.3\dots(rn-2)]-\dots}{1.2.3\dots rn}.$$

On a, par le n° 33 du Livre I^er^, quel que soit i,

$$1.2.3\dots i=\int x^i dx\,e^{-x},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. L'expression précédente peut donc être mise sous cette forme

$$(o)\qquad \frac{\int x^{rn-n}dx(x-r)^n e^{-x}}{\int x^{rn}dx\,e^{-x}}.$$

Supposons le nombre rn de boules de l'urne très grand; alors, en

appliquant aux intégrales précédentes la méthode du n° 24 du Livre I^er^, on trouvera à très peu près, pour l'intégrale du numérateur,

$$\frac{\sqrt{2\pi}\,X^{rn+2}\left(1-\frac{r}{X}\right)^{n+1}e^{-X}}{\sqrt{nX^2+n(r-1)(X-r)^2}},$$

X étant la valeur de x qui rend un maximum la fonction $x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}$. L'équation relative à ce maximum donne pour X les deux valeurs

$$X=\frac{rn+r}{2}\pm\frac{\sqrt{r^2(n-1)^2+4rn}}{2}.$$

On peut ne considérer ici que la plus grande de ces valeurs qui est, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{rn}$, égale à $rn+\frac{n}{n-1}$; alors l'intégrale du numérateur de la fonction (o) devient à peu près

$$\frac{\sqrt{2\pi}(rn)^{rn+\frac{1}{2}}e^{-rn}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}}.$$

L'intégrale du dénominateur de la même fonction est, par le n° 33, à fort peu près,

$$\sqrt{2\pi}(rn)^{rn+\frac{1}{2}}e^{-rn};$$

la fonction (o) devient ainsi

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{rn}-\frac{1}{rn^2}}};$$

rn étant supposé un très grand nombre, cette fonction se réduit à fort

peu près à cette forme très simple

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

C'est donc l'expression fort approchée de la probabilité qu'aucune des boules de l'urne ne sortira à son rang, lorsqu'il y a un grand nombre de boules. Le logarithme hyperbolique de cette expression étant

$$-1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\ldots,$$

on voit qu'elle va toujours croissant à mesure que n augmente; qu'elle est nulle, lorsque $n=1$, et qu'elle devient $\frac{1}{c}$, lorsque n est infini, c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Concevons maintenant un nombre i d'urnes renfermant chacune le nombre n de boules, toutes de couleurs différentes, et que l'on tire successivement toutes les boules de chaque urne. On peut, par les raisonnements précédents, déterminer la probabilité qu'une ou plusieurs boules de la même couleur sortiront au même rang dans les i tirages. En effet, supposons que les rangs des couleurs soient réglés d'après le tirage complet de la première urne, et considérons d'abord la première couleur; supposons qu'elle sorte la première dans les tirages des $i-1$ autres urnes. Le nombre total des combinaisons des $n-1$ autres couleurs dans chaque urne est, en ayant égard à leur situation entre elles, $1.2.3\ldots(n-1)$; ainsi le nombre total de ces combinaisons relatives aux $i-1$ urnes est $[1.2.3\ldots(n-1)]^{i-1}$; c'est le nombre des cas dans lesquels la première couleur est tirée la première à la fois de toutes ces urnes, et, comme il y a n couleurs, on aura

$$n[1.2.3\ldots(n-1)]^{i-1}$$

pour le nombre des cas dans lesquels une couleur au moins arrivera à son rang dans les tirages des $i-1$ urnes. Mais il y a dans ce nombre des cas répétés; ainsi les cas où deux couleurs arrivent à leur rang

dans ces tirages sont compris deux fois dans ce nombre; il faut donc les en retrancher. Le nombre de ces cas est, par ce qui précède,

$$\frac{n(n-1)}{1.2}[1.2.3\ldots(n-2)]^{i-1};$$

en le retranchant du nombre précédent, on aura la fonction

$$n[1.2.3\ldots(n-1)]^{i-1}-\frac{n(n-1)}{1.2}[1.2.3\ldots(n-2)]^{i-1}.$$

Mais cette fonction renferme elle-même des cas répétés. En continuant de les exclure comme on l'a fait ci-dessus relativement à une seule urne, en divisant ensuite la fonction finale par le nombre de tous les cas possibles, et qui est ici $(1.2.3\ldots n)^{i-1}$, on aura, pour la probabilité qu'une des $n-1$ couleurs au moins sortira à son rang dans les $i-1$ tirages qui suivent le premier,

$$\frac{1}{n^{i-2}}-\frac{1}{1.2[n(n-1)]^{i-2}}+\frac{1}{1.2.3[n(n-1)(n-2)]^{i-2}}-\ldots,$$

expression dans laquelle il faut prendre autant de termes qu'il y a d'unités dans n. Cette expression est donc la probabilité qu'au moins une des couleurs sortira au même rang dans les tirages des i urnes.

10. Considérons deux joueurs A et B, dont les adresses soient p et q, et dont le premier ait a jetons et le second b jetons. Supposons qu'à chaque coup celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne finisse que lorsqu'un des joueurs aura perdu tous ses jetons; on demande la probabilité que l'un des joueurs, A par exemple, gagnera la partie avant ou au $n^{\text{ième}}$ coup.

Ce problème peut être résolu avec facilité par le procédé suivant, qui est, en quelque sorte, mécanique. Supposons b égal ou moindre que a, et considérons le développement du binôme $(p+q)^b$. Le premier terme p^b de ce développement sera la probabilité de A pour gagner la partie au coup b. On retranchera ce terme du développement, et l'on en retranchera pareillement le dernier terme q^b, si $b=a$, parce qu'alors

ce terme exprime la probabilité de B pour gagner la partie au coup b. Ensuite on multipliera le reste par $p+q$. Le premier terme de ce produit aura pour facteur $p^b q$, et, comme l'exposant b ne surpasse que de $b-1$ l'exposant de q, il en résulte que la partie ne peut pas être gagnée par le joueur A, au coup $b+1$, ce qui est visible d'ailleurs; car, si A a perdu un jeton dans les b premiers coups, il doit, pour gagner la partie, gagner ce jeton plus les b jetons du joueur B, ce qui exige $b+2$ coups. Mais, si $a=b+1$, on retranchera du produit son dernier terme, qui exprime la probabilité du joueur B pour gagner la partie au coup $b+1$.

On multipliera de nouveau ce second reste par $p+q$. Le premier terme du produit aura pour facteur $p^{b+1}q$, et, comme l'exposant de p y surpasse de b celui de q, ce terme exprimera la probabilité de A pour gagner la partie au coup $b+2$. On retranchera pareillement du produit le dernier terme, si l'exposant de q y surpasse de a celui de p.

On multipliera de nouveau ce troisième reste par $p+q$, et l'on continuera ces multiplications jusqu'au nombre de fois $n-b$, en retranchant à chaque multiplication le premier terme, si l'exposant de p y surpasse de b celui de q, et le dernier terme, si l'exposant de q y surpasse de a celui de p. Cela posé, la somme des premiers termes ainsi retranchés sera la probabilité de A pour gagner la partie avant ou au coup n, et la somme des derniers termes retranchés sera la probabilité semblable relative au joueur B.

Pour avoir une solution analytique du problème, soit $y_{x,x'}$ la probabilité du joueur A pour gagner la partie, lorsqu'il a x jetons, et lorsqu'il n'a plus que x' coups à jouer pour atteindre les n coups. Cette probabilité devient, au coup suivant, ou $y_{x+1,x'-1}$, ou $y_{x-1,x'-1}$, suivant que le joueur A gagne ou perd le coup; or les probabilités respectives de ces deux événements sont p et q : on a donc l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'}=py_{x+1,x'-1}+qy_{x-1,x'-1}.$$

Pour intégrer cette équation, nous considérerons, comme précédemment, une fonction u de t et de t' génératrice de $y_{x,x'}$, en sorte que $y_{x,x'}$

soit le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans le développement de cette fonction. En repassant des coefficients aux fonctions génératrices, l'équation précédente donnera

$$u = u\left(\frac{pt'}{t} + qtt'\right),$$

d'où l'on tire

$$1 = \frac{pt'}{t} + qtt';$$

par conséquent,

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2pt'} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}{2p},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^x} = \frac{1}{(2p)^x}\left(\frac{1}{t'} \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x;$$

donc

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = \frac{u}{(2p)^x t'^{x'}}\left(\frac{1}{t'} \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x.$$

Cette équation peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = \frac{u}{2(2p)^x t'^{x'}}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x + \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x \\ \pm\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\,\dfrac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}.\end{array}\right.$$

L'expression précédente de $\frac{1}{t}$ donne

$$\pm\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} = \frac{2p}{t} - \frac{1}{t'};$$

on a donc

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = \frac{u}{2(2p)^x t'^{x'}}\left[\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x + \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x\right] + \frac{u\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2pt'}\right)}{2(2p)^{x-1}t'^{x'}}\,\frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}};$$

sous cette forme, l'ambiguïté du signe $\pm$ disparaît.

Maintenant, si l'on repasse des fonctions génératrices à leurs coefficients, et si l'on observe que $y_{0,x'}$ est nul, parce que le joueur A perd nécessairement la partie lorsqu'il n'a plus de jetons, l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x,x'} = \frac{1}{2^x p^{x-1}}\left[X^{(x-1)} y_{1,x+x'-1} + X^{(x-3)} y_{1,x+x'-3} + \ldots + X^{(x-2r-1)} y_{1,x+x'-2r-1} + \ldots\right],$$

la série du second membre s'arrêtant lorsque $x - 2r - 1$ a une valeur négative. $X^{(x-1)}$, $X^{(x-3)}$, ... sont les coefficients de $\frac{1}{t'^{x-1}}$, $\frac{1}{t'^{x-3}}$, ... dans le développement de la fonction

$$(i) \qquad \frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}.$$

Si l'on nomme u' le coefficient de t^x dans le développement de u, u' sera une fonction de t' et de x, génératrice de $y_{x,x'}$. Si l'on nomme pareillement T' le coefficient de t dans le développement de u, le produit de $\frac{T'}{2^x p^{x-1}}$ par la fonction (i) sera la fonction génératrice du second membre de l'équation précédente; cette fonction est donc égale à u'. Supposons $x = a + b$, alors $y_{x,x'}$ devient $y_{a+b,x'}$, et cette quantité est égale à l'unité; car il est certain que A a gagné la partie, lorsqu'il a gagné tous les jetons de B; u' est donc alors la fonction génératrice de l'unité; or x' est ici zéro ou un nombre pair, car le nombre des coups dans lesquels A peut gagner la partie est égal à b plus un nombre pair : en effet, A doit pour cela gagner tous les jetons de B, et de plus il doit regagner chaque jeton qu'il a perdu, ce qui exige deux coups. Ensuite, n exprimant un nombre de coups dans lequel A peut gagner la partie, il est égal à b plus un nombre pair; x', étant le nombre des coups qui manquent au joueur A pour arriver à n, est donc zéro ou un nombre pair. De là il suit que, dans le cas de $x = a + b$, u' devient $\frac{1}{1 - t'^2}$; on

a donc

$$\frac{\mathrm{T}'}{2^{a+b}p^{a+b-1}}\,\frac{\left(\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}-\left(\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}}{\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}=\frac{1}{1-t'^2},$$

ce qui donne la valeur de T'. En la multipliant par la fonction (i) divisée par $2^a p^{a-1}$ et dans laquelle on fait $x=a$, on aura la fonction génératrice de $y_{a,x}$ égale à

$$(o)\qquad \frac{2^b p^b t'^b\left[(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a-(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a\right]}{(1-t'^2)\left[(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}-(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}\right]}.$$

Dans le cas de $a=b$, elle devient

$$\frac{2^a p^a t'^a}{(1-t'^2)\left[(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a+(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a\right]}.$$

En développant la fonction

$$(q)\qquad (1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a+(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a$$

suivant les puissances de t'^2, le radical disparait, et le plus haut exposant de t' dans ce développement est égal ou plus petit que a. Mais, si l'on développe $(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a$ suivant les puissances de t'^2, le plus petit exposant de t' sera $2a$; la fonction (q) est donc égale au développement de $(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a$, en rejetant les puissances de t' supérieures à a.

Maintenant on a, par le n° 3 du Livre I^er^,

$$z^a=1-a\alpha+\frac{a(a-3)}{1.2}\alpha^2-\frac{a(a-4)(a-5)}{1.2.3}\alpha^3+\ldots,$$

z étant celle des racines de l'équation

$$z=1-\frac{\alpha}{z}$$

qui se réduit à l'unité lorsque α est nul. Cette racine est

$$\frac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2};$$

en supposant donc $\alpha=pqt'^2$, on aura

$$(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a=2^a\left[1-apqt'^2+\frac{a(a-3)}{1.2}p^2q^2t'^4-\frac{a(a-4)(a-5)}{1.2.3}p^3q^3t'^6+\ldots\right];$$

on aura ainsi

$$\frac{2^a p^a t'^a}{(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a+(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a}=\frac{p^a t'^a}{1-apqt'^2+\frac{a(a-3)}{1.2}p^2q^2t'^4-\frac{a(a-4)(a-5)}{1.2.3}p^3q^3t'^6+\ldots},$$

la série du dénominateur étant continuée exclusivement jusqu'aux puissances de t' supérieures à a. Ce second membre doit être, par ce qui précède, divisé par $1-t'^2$, pour avoir la fonction génératrice de $y_{a,x'}$; la quantité $y_{a,x'}$ est donc la somme des coefficients des puissances de t', en ne considérant dans le développement de ce membre par rapport aux puissances de t' que les puissances égales ou inférieures à x'. Chacun de ces coefficients exprimera la probabilité que A gagnera la partie au coup indiqué par l'exposant de la puissance de t'.

Si l'on nomme z_i le coefficient correspondant à t'^{a+2i}, on aura généralement

$$o=z_i-apqz_{i-1}+\frac{a(a-3)}{1.2}p^2q^2z_{i-2}-\ldots;$$

d'où il est facile de conclure les valeurs de $z_1, z_2, \ldots$, en observant que $z_{-1}, z_{-2}, \ldots$ sont nuls, et que $z_0=p^a$. La valeur de z_i étant égale à $y_{a,a+2i}-y_{a,a+2i-2}$, on aura celles de $y_{a,a}, y_{a,a+2}, y_{a,a+4}$, etc. L'équation aux différences partielles à laquelle on est immédiatement conduit se trouve ainsi ramenée à une équation aux différences ordinaires, qui détermine, en l'intégrant, la valeur de $y_{a,x'}$. Mais on peut obtenir cette

valeur par le procédé suivant, qui s'applique au cas général où a et b sont égaux ou différents entre eux.

Reprenons la fonction génératrice de $y_{a,x'}$ trouvée ci-dessus; $y_{a,x'}$ est le coefficient de $t^{x'-b}$ dans le développement de la fonction

$$2^b p^b \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}(1-t'^2)},$$

en supposant

$$\mathrm{P} = \frac{(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a - (1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a}{\sqrt{1-4pqt'^2}},$$

$$\mathrm{Q} = \frac{(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b} - (1-\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}}{\sqrt{1-4pqt'^2}}.$$

Il résulte du n° 5 du Livre I^er^ que, si l'on considère les deux termes

$$\frac{\mathrm{P}}{2t'^{2i}\mathrm{Q}}, \quad -\frac{\mathrm{P}}{(1-t'^2)t'^{2i+1}\dfrac{d\mathrm{Q}}{dt'}},$$

que l'on fasse ensuite successivement $t'=1$ et $t'=-1$ dans le premier terme, et t' égal successivement à toutes les racines de l'équation $\mathrm{Q}=0$ dans le second terme, la somme de tous les termes que l'on obtient de cette manière sera le coefficient de t'^{2i} dans le développement de la fraction

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}(1-t'^2)}.$$

Ce que le premier terme produit dans cette somme est

$$\frac{p^a-q^a}{2^b(p^{a+b}-q^{a+b})}.$$

Pour avoir les racines de l'équation $\mathrm{Q}=0$, nous ferons

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{pq}\cos\varpi},$$

ce qui donne

$$\mathrm{Q} = \frac{(\cos\varpi+\sqrt{-1}\sin\varpi)^{a+b} - (\cos\varpi-\sqrt{-1}\sin\varpi)^{a+b}}{\sqrt{-1}\sin\varpi(\cos\varpi)^{a+b-1}},$$

ou

$$\mathrm{Q} = \frac{2\sin(a+b)\varpi}{\sin\varpi(\cos\varpi)^{a+b-1}}.$$

Les racines de l'équation $\mathrm{Q}=0$ sont donc représentées par

$$\varpi = \frac{(r+1)\pi}{a+b},$$

r étant un nombre entier positif qui peut s'étendre depuis $r=0$ jusqu'à $r=a+b-2$. Lorsque $a+b$ est un nombre pair, $\frac{1}{2}\pi$ est une des valeurs de ϖ; il faut l'exclure, parce que, $\cos\varpi$ devenant nul alors, cette valeur de ϖ ne rend pas Q nul. Dans ce cas, l'équation $\mathrm{Q}=0$ n'a que $a+b-2$ racines; mais, comme le terme dépendant de la valeur $\varpi=\frac{1}{2}\pi$ est multiplié dans l'expression de $y_{a,x'}$ par une puissance positive de $\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}$, on peut conserver la valeur de r qui donne $\varpi=\frac{1}{2}\pi$, puisque le terme qui lui correspond dans l'expression de $y_{a,x'}$ disparaît.

Maintenant on a

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dt'} = \frac{d\mathrm{Q}}{d\varpi}\frac{d\varpi}{dt'},$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation $\sin(a+b)\varpi=0$,

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dt'} = \frac{4(a+b)\sqrt{pq}\cos(r+1)\pi}{\sin^2\varpi(\cos\varpi)^{a+b-3}} = \frac{4(a+b)\sqrt{pq}(-1)^{r+1}}{\sin^2\varpi(\cos\varpi)^{a+b-3}}.$$

Le terme

$$\frac{-\mathrm{P}}{(1-t'^2)t'^{2i+1}\dfrac{d\mathrm{Q}}{dt'}},$$

en observant que

$$\mathrm{P} = \frac{2\sin a\varpi}{\sin\varpi(\cos\varpi)^{a-1}},$$

devient ainsi

$$(h) \qquad \frac{(-1)^{r+1}2^{2i+2}(pq)^{i+1}\sin\dfrac{(r+1)\pi}{a+b}\sin\dfrac{(r+1)a\pi}{a+b}\left[\cos\dfrac{(r+1)\pi}{a+b}\right]^{b-2i+1}}{(a+b)\left[p^2-2pq\cos\dfrac{2(r+1)\pi}{a+b}+q^2\right]};$$

la somme de tous les termes que l'on obtient, en donnant à r toutes les valeurs entières et positives, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = a + b - 2$, sera ce que produit la fonction

$$\frac{-P}{(1-t'^2)\,t'^{2i+1}\,\frac{dQ}{dt'}};$$

nous désignerons cette somme par la caractéristique S placée devant la fonction (h).

Si l'on fait $r' + 1 = a + b - (r + 1)$, on aura

$$\sin\frac{(r'+1)\pi}{a+b} = \sin\frac{(r+1)\pi}{a+b},$$

$$\cos\frac{(r'+1)\pi}{a+b} = -\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b},$$

$$\cos\frac{2(r'+1)\pi}{a+b} = \cos\frac{2(r+1)\pi}{a+b},$$

$$\sin\frac{(r'+1)a\pi}{a+b} = (-1)^{a+1}\sin\frac{(r+1)a\pi}{a+b}.$$

De là il est facile de conclure que, dans la fonction (h), le terme relatif à $r + 1$ est le même que le terme relatif à $r' + 1$; on peut donc doubler ce terme, et n'étendre alors la caractéristique S qu'aux valeurs de r comprises depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \frac{a+b-2}{2}$, si $a + b$ est pair, ou $r = \frac{a+b-1}{2}$, si $a + b$ est impair. Cela posé, en observant que

$$\sin\frac{(r+1)a\pi}{a+b} = (-1)^r\sin\frac{(r+1)b\pi}{a+b},$$

on aura

$$(\mathrm{H})\quad \left\{\begin{array}{l} y_{a,b-2i} = \dfrac{p^b(p^a-q^a)}{p^{a+b}-q^{a+b}} \\ \qquad - \dfrac{2^{b+2i+2}\,p^b(pq)^{i+1}}{a+b}\,\mathrm{S}\,\dfrac{\sin\frac{2(r+1)\pi}{a+b}\sin\frac{(r+1)b\pi}{a+b}\left[\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}\right]^{b+2i}}{p^2 - 2pq\cos\frac{2(r+1)\pi}{a+b} + q^2}. \end{array}\right.$$

En changeant a en b, p en q, et réciproquement, on aura la probabilité que le joueur B gagnera la partie avant le coup $a + 2i$, ou à ce coup.

Supposons $a = b$; $\sin\frac{(r+1)a\pi}{a+b}$ deviendra $\sin\frac{1}{2}(r+1)\pi$. Ce sinus est nul, lorsque $r + 1$ est pair; il suffit donc alors de considérer, dans l'expression de $y_{a,a+2i}$, les valeurs impaires de $r + 1$. En les exprimant par $2s + 1$, et observant que $\sin\frac{(2s+1)\pi}{2} = (-1)^s$, on aura

$$y_{a,a+2i} = \frac{p^a}{p^a+q^a} - \frac{2^{a+2i+1}\,p^a(pq)^{i+1}}{a}\,\mathrm{S}\,\frac{(-1)^s\sin\frac{(2s+1)\pi}{a}\left[\cos\frac{(2s+1)\pi}{2a}\right]^{a+2i}}{p^2 - 2pq\cos\frac{(2s+1)\pi}{a} + q^2},$$

$2s + 1$ devant comprendre toutes les valeurs impaires contenues dans $a - 1$.

Si l'on change, dans cette expression, p en q, et réciproquement, on aura la probabilité du joueur B pour gagner la partie en $a + 2i$ coups. La somme de ces deux probabilités sera la probabilité que la partie sera finie après ce nombre de coups; cette dernière probabilité est donc

$$1 - \frac{2^{a+2i+1}}{a}(p^a+q^a)(pq)^{i+1}\,\mathrm{S}\,\frac{(-1)^s\sin\frac{(2s+1)\pi}{a}\left[\cos\frac{(2s+1)\pi}{2a}\right]^{a+2i}}{p^2 - 2pq\cos\frac{(2s+1)\pi}{a} + q^2}.$$

Si les adresses p et q sont égales, cette expression devient

$$1 - \frac{2}{a}\,\mathrm{S}\,\frac{(-1)^s\left[\cos\frac{(2s+1)\pi}{2a}\right]^{a+2i+1}}{\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a}}.$$

Lorsque $a + 2i$ est un grand nombre, on peut en conclure d'une manière fort approchée le nombre de coups nécessaire pour que la probabilité que la partie finira dans ce nombre de coups soit égale à une fraction donnée $\frac{1}{k}$. On aura alors

$$\frac{2}{a}\,\mathrm{S}\,\frac{(-1)^s\left[\cos\frac{(2s+1)\pi}{2a}\right]^{a+2i+1}}{\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a}} = \frac{k-1}{k};$$

$a+2i$ étant supposé un très grand nombre, fort supérieur au nombre a, il suffit de considérer le terme du premier membre qui correspond à s nul, et alors on a

$$a+2i+1=\frac{\log\left[\frac{a(k-1)}{2k}\sin\frac{\pi}{2a}\right]}{\log\left(\cos\frac{\pi}{2a}\right)},$$

ces logarithmes pouvant être à volonté hyperboliques ou tabulaires.

Si, dans les formules précédentes, on suppose a infini, b restant un nombre fini, on aura le cas dans lequel le joueur A joue contre le joueur B qui a primitivement le nombre b de jetons, jusqu'à ce qu'il ait gagné tous les jetons de B, sans que jamais celui-ci puisse gagner A, quel que soit le nombre des jetons qu'il lui gagne. Dans ce cas, la fonction génératrice (o) de $y_{a,x}$ se réduit à

$$\frac{2^b p^b t'^b}{(1-t'^2)(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^b},$$

car alors $(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a$ et $(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}$, développés, ne renferment que des puissances infinies de t', puissances que l'on doit négliger, quand on ne considère qu'un nombre fini de coups. On a par ce qui précède

$$(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^{-b}$$
$$=\frac{1}{2^b}\left\{1+bpqt'^2+\frac{b(b+3)}{1.2}p^2q^2t'^4+\frac{b(b+4)(b+5)}{1.2.3}p^3q^3t'^6+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{b(b+i+1)(b+i+2)\ldots(b+2i-1)}{1.2.3\ldots i}p^iq^it'^{2i}+\ldots\right\}.$$

En multipliant ce second membre par $\frac{2^b p^b t'^b}{1-t'^2}$, le coefficient de t'^{b+2i} sera

$$p^b\left[1+bpq+\frac{b(b+3)}{1.2}p^2q^2+\ldots+\frac{b(b+i+1)(b+i+2)\ldots(b+2i-1)}{1.2.3\ldots i}p^iq^i\right]:$$

c'est la valeur de $y_{a,b+2i}$, ou la probabilité que A gagnera la partie avant ou au coup $b+2i$.

Cette valeur serait très pénible à réduire en nombres, si b et $2i$ étaient de grands nombres; il serait surtout très difficile d'obtenir par son moyen le nombre de coups dans lesquels A peut parier un contre un de gagner la partie; mais on peut y parvenir facilement de cette manière.

Reprenons la formule (H) trouvée ci-dessus. Dans le cas de a infini, et p étant supposé égal ou plus grand que q, si l'on y suppose $\frac{r+1}{a}\pi=\varphi$ et $\frac{\pi}{a}=d\varphi$, elle devient

$$r_{a,b+2i}=1-\frac{2^{b+2i+2}p^b(pq)^{i+1}}{\pi}\int\frac{d\varphi\sin 2\varphi\sin b\varphi(\cos\varphi)^{b+2i}}{p^2-2pq\cos 2\varphi+q^2},$$

l'intégrale devant être prise depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Dans le cas de p moindre que q, la même expression a lieu, pourvu que l'on change le premier terme 1 dans $\frac{p^b}{q^b}$.

Si $p=q$, cette expression devient

$$1-\frac{2}{\pi}\int\frac{d\varphi\sin b\varphi(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi},$$

l'intégrale étant prise depuis φ nul jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Supposons maintenant que b et i soient de grands nombres. Le maximum de la fonction

$$\frac{\varphi(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}$$

répond à $\varphi=0$, ce qui donne 1 pour ce maximum. La fonction décroît ensuite avec une extrême rapidité, et, dans l'intervalle où elle a une valeur sensible, on peut supposer

$$\log\sin\varphi=\log\varphi+\log(1-\tfrac{1}{6}\varphi^2)=\log\varphi-\tfrac{1}{6}\varphi^2,$$
$$\log(\cos\varphi)^{b+2i+1}=(b+2i+1)\log(1-\tfrac{1}{2}\varphi^2+\tfrac{1}{24}\varphi^4)$$
$$=-\frac{b+2i+1}{2}\varphi^2-\frac{b+2i+1}{12}\varphi^4,$$

ce qui donne, en négligeant les sixièmes puissances de φ et ses qua-

trièmes puissances qui ne sont pas multipliées par $b+2i+1$,

$$\log\frac{(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}=-\log\varphi-\frac{b+2i+\frac{2}{3}}{2}\varphi^2-\frac{b+2i+\frac{2}{3}}{12}\varphi^4.$$

En faisant donc

$$a^2=\frac{b+2i+\frac{2}{3}}{2},$$

on aura

$$\frac{(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}=\frac{1-\frac{a^2}{6}\varphi^4}{\varphi}e^{-a^2\varphi^2};$$

partant,

$$\int\frac{d\varphi\sin b\varphi\,(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}=\int\frac{d\varphi\left(1-\frac{a^2}{6}\varphi^4\right)}{\varphi}\sin b\varphi\,e^{-a^2\varphi^2}.$$

Cette dernière intégrale peut être prise depuis $\varphi=0$ jusqu'à φ infini; car elle doit être prise depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; or, a^2 étant un nombre considérable, $e^{-a^2\varphi^2}$ devient excessivement petit, lorsqu'on y fait $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, en sorte qu'on peut le supposer nul, vu l'extrême rapidité avec laquelle cette exponentielle diminue, lorsque φ augmente. Maintenant on a

$$\frac{d}{db}\int\frac{d\varphi\left(1-\frac{a^2}{6}\varphi^4\right)}{\varphi}\sin b\varphi\,e^{-a^2\varphi^2}=\int d\varphi\left(1-\frac{a^2}{6}\varphi^4\right)\cos b\varphi\,e^{-a^2\varphi^2};$$

on a d'ailleurs, par le n° 25 du Livre I^er^,

$$\int d\varphi\cos b\varphi\,e^{-a^2\varphi^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

$$\int\varphi^4\,d\varphi\cos b\varphi\,e^{-a^2\varphi^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\frac{d^4\,e^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{db^4}$$

$$=\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^5}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\left(1-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^4}{12.a^4}\right),$$

d'où l'on tire, en supposant $\frac{b^2}{4a^2}=t^2$,

$$\frac{\int d\varphi\sin b\varphi\,(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}=\sqrt{\pi}\left[\int dt\,e^{-t^2}-\frac{te^{-t^2}}{8a^2}\left(1-\tfrac{2}{3}t^2\right)\right].$$

Ainsi la probabilité que A gagnera la partie dans le nombre $b+2i$ de coups est

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int dt\,e^{-t^2}-\frac{\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}^2}}{8a^2}\left(1-\tfrac{2}{3}\mathrm{T}^2\right)\right],$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à $t=\mathrm{T}$, T^2 étant égal à $\frac{b^2}{4a^2}$.

Si l'on cherche le nombre des coups dans lesquels on peut parier un contre un que cela aura lieu, on fera cette probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\int dt\,e^{-t^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}+\frac{\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}^2}}{8a^2}\left(1-\tfrac{2}{3}\mathrm{T}^2\right).$$

Nommons T' la valeur de t, qui correspond à

$$\int dt\,e^{-t^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

et supposons

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}'+q,$$

q étant de l'ordre $\frac{1}{a^2}$. L'intégrale $\int dt\,e^{-t^2}$ sera augmentée à très peu près de $qe^{-\mathrm{T}'^2}$, ce qui donne

$$qe^{-\mathrm{T}'^2}=\frac{\mathrm{T}'e^{-\mathrm{T}'^2}}{8a^2}\left(1-\tfrac{2}{3}\mathrm{T}'^2\right);$$

on aura donc

$$\mathrm{T}^2=\mathrm{T}'^2+\frac{\mathrm{T}'^2}{4a^2}\left(1-\tfrac{2}{3}\mathrm{T}'^2\right).$$

Ayant ainsi T^2 aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^4}$, l'équation

$$2a^2=b+2i+\tfrac{2}{3}=\frac{b^2}{2\mathrm{T}^2}$$

donnera, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^2}$,

$$b+2i=\frac{b^2}{2\mathrm{T}'^2}-\tfrac{7}{6}+\tfrac{1}{3}\mathrm{T}'^2.$$

Pour déterminer la valeur de T'^2, nous observerons qu'ici T' est plus

petit que $\frac{1}{2}$; ainsi l'équation transcendante et intégrale

$$\int dt e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

peut être transformée dans la suivante :

$$T' - \frac{1}{3}T'^3 + \frac{1}{1.2}\frac{1}{5}T'^5 - \frac{1}{1.2.3}\frac{1}{7}T'^7 + \ldots = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

En résolvant cette équation, on trouve

$$T'^2 = 0,2102497.$$

En supposant $b = 100$, on aura

$$b + 2i = 23780,14.$$

Il y a donc alors du désavantage à parier un contre un que A gagnera la partie dans 23780 coups, mais il y a de l'avantage à parier qu'il la gagnera dans 23781 coups.

11. Un nombre $n+1$ de joueurs jouent ensemble aux conditions suivantes. Deux d'entre eux jouent d'abord, et celui qui perd se retire après avoir mis un franc au jeu, pour n'y rentrer qu'après que tous les autres joueurs ont joué ; ce qui a lieu généralement pour tous les joueurs qui perdent, et qui par là deviennent les derniers. Celui des deux premiers joueurs qui a gagné joue avec le troisième, et, s'il le gagne, il continue de jouer avec le quatrième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il perde, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné successivement tous les joueurs. Dans ce dernier cas, la partie est finie. Mais, si le joueur gagnant au premier coup est vaincu par l'un des autres joueurs, le vainqueur joue avec le joueur suivant, et continue de jouer jusqu'à ce qu'il soit vaincu, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné de suite tous les joueurs ; le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'il y ait un joueur qui gagne de suite tous les autres, ce qui finit la partie, et alors le joueur qui la gagne emporte tout ce qui a été mis au jeu.

Cela posé, déterminons d'abord la probabilité que le jeu finira précisément au coup x; nommons z_x cette probabilité. Pour que la partie finisse au coup x, il faut que le joueur qui entre au jeu au coup $x-n+1$ gagne ce coup et les $n-1$ coups suivants; or il peut entrer contre un joueur qui n'a gagné qu'un seul coup : en nommant P la probabilité de cet événement, $\frac{P}{2^n}$ sera la probabilité correspondante que la partie finira au coup x. Mais la probabilité z_{x-1} que la partie finira au coup $x-1$ est évidemment $\frac{P}{2^{n-1}}$. Car il est nécessaire pour cela qu'il y ait un joueur qui ait gagné un coup, au coup $x-n+1$, et qui, jouant à ce coup, le gagne et les $n-2$ coups suivants; et la probabilité de chacun de ces événements étant P et $\frac{1}{2^{n-1}}$, la probabilité de l'événement composé sera $\frac{P}{2^{n-1}}$; on aura donc $z_{x-1} = \frac{P}{2^{n-1}}$, et, par conséquent,

$$\frac{P}{2^n} = \frac{1}{2}z_{x-1};$$

$\frac{1}{2}z_{x-1}$ est donc la probabilité que la partie finira au coup x, relative à ce cas.

Si le joueur qui entre au jeu au coup $x-n+1$ joue à ce coup contre un joueur qui a déjà gagné deux coups, en nommant P' la probabilité de ce cas, $\frac{P'}{2^n}$ sera la probabilité relative à ce cas que la partie finira au coup x. Mais on a

$$\frac{P'}{2^{n-2}} = z_{x-2};$$

car, pour que la partie finisse au coup $x-2$, il faut qu'au coup $x-n+1$ l'un des joueurs ait déjà gagné deux coups, et qu'il gagne ce coup et les $n-3$ coups suivants. On a donc

$$\frac{P'}{2^n} = \frac{1}{2^2}z_{x-2};$$

$\frac{1}{2^2}z_{x-2}$ est donc la probabilité que la partie finira au coup x, relative à ce cas; et ainsi de suite.

En rassemblant toutes ces probabilités partielles, on aura

$$z_x = \frac{1}{2} z_{x-1} + \frac{1}{2^2} z_{x-2} + \frac{1}{2^3} z_{x-3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} z_{x-n+1}.$$

La fonction génératrice de z_x est, par le Livre I^er^,

$$\frac{\psi(t)}{1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2^2}t^2 - \ldots - \frac{1}{2^{n-1}}t^{n-1}}$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2}\psi(t)(2-t)}{1 - t + \frac{1}{2^n}t^n}.$$

Pour déterminer $\psi(t)$, nous observerons que la partie ne peut finir au plus tôt qu'au coup n, et que la probabilité pour cela est $\frac{1}{2^{n-1}}$; car il faut que le vainqueur au premier coup gagne les $n-1$ coups suivants; $\psi(t)$ ne doit donc renfermer que la puissance n de t, et $\frac{1}{2^{n-1}}$ doit être le coefficient de cette puissance, ce qui donne $\psi(t) = \frac{t^n}{2^{n-1}}$; ainsi la fonction génératrice de z_x est

$$\frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)}{1 - t + \frac{1}{2^n}t^n}.$$

La somme des coefficients des puissances de t jusqu'à l'infini, dans le développement de cette fonction, est la probabilité que la partie doit finir après une infinité de coups; or on a cette somme en faisant $t = 1$ dans la fonction, ce qui la réduit à l'unité; il est donc certain que la partie doit finir.

On aura la probabilité que la partie sera finie au coup x ou avant ce coup, en déterminant le coefficient de t^x dans le développement de la fonction précédente, divisée par $1 - t$; la fonction génératrice de cette probabilité est donc

$$\frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)}{(1-t)\left(1 - t + \frac{1}{2^n}t^n\right)}.$$

Donnons à la fonction génératrice de z_x cette forme

$$\frac{1}{2^n}\frac{t^n(2-t)}{1-t}\left[1 - \frac{1}{2^n}\frac{t^n}{1-t} + \frac{1}{2^{2n}}\frac{t^{2n}}{(1-t)^2} - \ldots\right];$$

le coefficient de t^x dans $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$ est

$$\frac{1}{2^{rn}}\frac{(x-rn+1)(x-rn+2)\ldots(x-rn+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}(x-rn+2r-2);$$

on a donc

$$z_x = \frac{1}{2^n} - \frac{x-2n+1}{2^{2n}} + \frac{x-3n+1}{1.2.2^{3n}}(x-3n+4) - \frac{(x-4n+1)(x-4n+2)}{1.2.3.2^{4n}}(x-4n+6) + \ldots,$$

expression qui n'est relative qu'à x plus grand que n, et dans laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes qu'il y a d'unités entières dans le quotient $\frac{x}{n}$. Lorsque $x = n$, on a $z_x = \frac{1}{2^{n-1}}$.

En développant de la même manière la fonction génératrice de la probabilité que la partie finira avant ou au coup x, on trouvera pour l'expression de cette probabilité

$$\frac{x-n+2}{2^n} - \frac{x-2n+1}{1.2.2^{2n}}(x-2n+4) + \frac{(x-3n+1)(x-3n+2)}{1.2.3.2^{3n}}(x-3n+6) - \ldots,$$

cette expression ayant lieu dans le cas même de $x = n$.

Déterminons maintenant les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie au coup x. Soit $y_{0,x}$ celle du joueur qui a gagné le premier coup. Soient $y_{1,x}, y_{2,x}, \ldots, y_{n-1,x}$ celles des joueurs suivants, et $y_{n,x}$ celle du joueur qui a perdu au premier coup, et qui par là est devenu le dernier. Désignons les joueurs par (0), (1), (2), ..., $(n-1)$, (n). Cela posé, la probabilité $y_{r,x}$ du joueur (r) devient $y_{r-1,x-1}$, si au second coup le joueur (0) est vaincu par le joueur (1);

car il est visible que (r) se trouve alors, par rapport au vainqueur (1), dans la même position où était $(r-1)$ par rapport au vainqueur (0); seulement, il y a un coup de moins à jouer pour arriver au coup x, ce qui change x dans $x-1$. Présentement la probabilité que le joueur (0) sera vaincu par (1) est $\frac{1}{2}$; ainsi $\frac{1}{2}y_{r-1,x-1}$ est la probabilité du joueur (r) pour gagner la partie au coup x, relative au cas où (0) est vaincu par (1). Si (0) n'est vaincu que par (2), $y_{r,x}$ devient $y_{r-2,x-2}$, et la probabilité de cet événement étant $\frac{1}{4}$, on a $\frac{1}{4}y_{r-2,x-2}$ pour la probabilité du joueur (r) de gagner la partie au coup x, relative à ce cas. Si le joueur (0) n'est vaincu que par le joueur (r), $y_{r,x}$ devient $y_{0,x-r}$, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2^r}$; ainsi $\frac{1}{2^r}y_{0,x-r}$ est la probabilité du joueur (r) pour gagner la partie au coup x, relative à ce cas. Si le joueur (0) n'est vaincu que par le joueur $(r+1)$, $y_{r,x}$ se change dans $y_{n-1,x-r-1}$; car alors le joueur (r) se trouve, par rapport au vainqueur, dans la position primitive du joueur $(n-1)$ par rapport au joueur (0); seulement il ne reste que $x-r-1$ coups à jouer pour arriver au coup x. Or la probabilité que (0) ne sera vaincu que par le joueur $(r+1)$ est $\frac{1}{2^{r+1}}$; $\frac{1}{2^{r+1}}y_{n-1,x-r-1}$ est donc la probabilité de (r) pour gagner la partie au coup x, relative à ce cas. En continuant ainsi, et rassemblant toutes ces probabilités partielles, on aura la probabilité entière $y_{r,x}$ du joueur (r) pour gagner la partie, ce qui donne l'équation suivante :

$$y_{r,x}=\frac{1}{2}y_{r-1,x-1}+\frac{1}{2^2}y_{r-2,x-2}+\ldots+\frac{1}{2^r}y_{0,x-r}+\frac{1}{2^{r+1}}y_{n-1,x-r-1}$$
$$+\frac{1}{2^{r+2}}y_{n-2,x-r-2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}y_{r+1,x-n+1}.$$

Cette expression a lieu depuis $r=1$ jusqu'à $r=n-2$. Elle donne

$$\frac{1}{2}y_{r-1,x-1}=\frac{1}{2^2}y_{r-2,x-2}+\frac{1}{2^3}y_{r-3,x-3}+\ldots+\frac{1}{2^n}y_{r,x-n}.$$

En retranchant cette équation de la précédente, on aura celle-ci aux différences partielles,

$$(1)\qquad y_{r,x}-y_{r-1,x-1}+\frac{1}{2^n}y_{r,x-n}=0;$$

cette équation s'étend depuis $r=2$ jusqu'à $r=n-2$.

On a, par le raisonnement précédent, l'équation suivante :

$$y_{n-1,x}=\frac{1}{2}y_{n-2,x-1}+\frac{1}{2^2}y_{n-3,x-2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}y_{0,x-n+1}.$$

Mais l'expression précédente de $y_{r,x}$ donne

$$\frac{1}{2}y_{n-2,x-1}=\frac{1}{2^2}y_{n-3,x-2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}y_{0,x-n+1}+\frac{1}{2^n}y_{n-1,x-n}.$$

En retranchant cette équation de la précédente, on aura

$$y_{n-1,x}-y_{n-2,x-1}+\frac{1}{2^n}y_{n-1,x-n}=0;$$

ainsi l'équation (1) subsiste dans le cas de $r=n-1$.

Le raisonnement précédent conduit encore à cette équation

$$y_{n,x}=\frac{1}{2}y_{n-1,x-1}+\frac{1}{2^2}y_{n-2,x-2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}y_{1,x-n+1},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}y_{n,x-1}=\frac{1}{2^2}y_{n-1,x-2}+\ldots+\frac{1}{2^n}y_{1,x-n}.$$

En retranchant cette équation de celle-ci, que donne l'expression générale de $y_{r,x}$,

$$y_{1,x}=\frac{1}{2}y_{0,x-1}+\frac{1}{2^2}y_{n-1,x-2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}y_{2,x-n+1},$$

et faisant $\frac{1}{2}(y_{0,x}+y_{n,x})=\bar{y}_{0,x}$, on aura

$$y_{1,x}-\bar{y}_{0,x-1}+\frac{1}{2^n}y_{1,x-n}=0.$$

L'équation (1) subsiste donc encore dans le cas même de $r=1$, pourvu que l'on y change $y_{0,x}$ dans $\bar{y}_{0,x}$. On doit observer que $\bar{y}_{0,x}$ est la probabilité de gagner la partie au coup x de chacun des deux premiers

joueurs, au moment où le jeu commence; car cette probabilité devient, après le premier coup, $y_{0,x}$ ou $y_{a,x}$ suivant que le joueur gagne ou perd, et la probabilité de chacun de ces événements est $\frac{1}{2}$.

Maintenant, la fonction génératrice de l'équation (1) est, par le n° 20 du Livre I^er^,

$$(a) \qquad \frac{\varphi(t)}{1-tt'+\frac{1}{2^n}t^n},$$

t étant relatif à la variable x, et t' étant relatif à la variable r, en sorte que $y_{r,x}$ est le coefficient de $t'^r t^x$ dans le développement de cette fonction; $\varphi(t)$ est une fonction de t qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, nous ferons

$$\mathrm{T}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}t^n};$$

la fonction génératrice de $y_{r,x}$ sera le coefficient de t'^r dans le développement de la fonction (a); elle sera donc

$$\varphi(t)\,t^x\mathrm{T}^{r+1}.$$

La probabilité que la partie finira précisément au coup x est évidemment la somme des probabilités de chaque joueur pour la gagner à ce coup; elle est donc

$$2\widetilde{y}_{0,x}+y_{1,x}+y_{2,x}+\ldots+y_{n-1,x};$$

par conséquent la fonction génératrice de cette probabilité est

$$\mathrm{T}\,\varphi(t)\,(2+t\mathrm{T}+t^2\mathrm{T}^2+\ldots+t^{n-1}\mathrm{T}^{n-1})$$

ou

$$\mathrm{T}\,\varphi(t)\,\frac{2-t\mathrm{T}-t^n\mathrm{T}^n}{1-t\mathrm{T}}.$$

En l'égalant à la fonction génératrice de cette probabilité, que nous avons trouvée ci-dessus et qui est

$$\frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)}{1-t+\frac{1}{2^n}t^n},$$

on aura

$$\varphi(t)=\frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)(1-t\mathrm{T})}{\mathrm{T}(2-t\mathrm{T}-t^n\mathrm{T}^n)\left(1-t+\frac{1}{2^n}t^n\right)}.$$

Ainsi la fonction génératrice de l'équation (1) aux différences partielles est

$$\frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)(1-t\mathrm{T})}{\mathrm{T}(2-t\mathrm{T}-t^n\mathrm{T}^n)\left(1-t+\frac{1}{2^n}t^n\right)\left(1-tt'+\frac{1}{2^n}t^n\right)};$$

la fonction génératrice de $y_{r,x}$ est donc

$$\frac{\frac{1}{2^n}t^{n+r}(2-t)(1-t\mathrm{T})\mathrm{T}^r}{(2-t\mathrm{T}-t^n\mathrm{T}^n)\left(1-t+\frac{1}{2^n}t^n\right)}.$$

Le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction est la probabilité du joueur (r) de gagner la partie au coup x. On pourra ainsi déterminer cette probabilité par ce développement. La somme de tous ces coefficients jusqu'à x infini est la probabilité du joueur (r) de gagner la partie; or on a cette somme en faisant $t=1$ dans la fonction précédente, ce qui donne $\mathrm{T}=\frac{2^n}{1+2^n}$; nommons p cette dernière quantité, et désignons par y_r la probabilité de (r) de gagner la partie; on aura

$$y_r=\frac{(1-p)p^r}{2-p-p^n}.$$

Cette expression s'étend depuis $r=0$ jusqu'à $r=n-1$, pourvu qu'on y change y_0 dans $\widetilde{y}_0$, $\widetilde{y}_0$ exprimant la probabilité de gagner la partie des deux premiers joueurs au moment où ils entrent au jeu.

Maintenant, chaque joueur perdant déposant un franc au jeu, déterminons l'avantage des différents joueurs. Il est clair qu'après x coups, il y avait x jetons au jeu; l'avantage du joueur (r) relatif à ces x jetons est le produit de ces jetons par la probabilité $y_{r,x}$ de gagner la partie au coup x; cet avantage est donc $xy_{r,x}$. La valeur de $xy_{r,x}$ est le coeffi-

cient de $t^{x-1}\,dt$ dans la différentielle de la fonction génératrice de $y_{r,x}$; en divisant donc cette différentielle par dt et en y supposant ensuite $t=1$, on aura la somme de toutes les valeurs de $xy_{r,x}$ jusqu'à x infini; c'est l'avantage du joueur (r). Mais il faut en retrancher les jetons qu'il met au jeu à chaque coup qu'il perd; or $y_{r,x}$ étant sa probabilité de gagner la partie au coup x, $2^n y_{r,x-n+1}$ sera sa probabilité d'entrer au jeu au coup $x-n+1$, puisque cette dernière probabilité, multipliée par la probabilité $\frac{1}{2^n}$ qu'il gagnera ce coup et les $n-1$ coups suivants est sa probabilité de gagner la partie au coup x. En supposant donc qu'il perde autant de fois qu'il entre au jeu, la somme de toutes les valeurs de $2^n y_{r,x-n+1}$ jusqu'à x infini, serait le désavantage du joueur (r); et comme la somme de toutes les valeurs de $y_{r,x-n+1}$ est égale à la somme de toutes les valeurs de $y_{r,x}$ ou y_r, on aurait $2^n y_r$ ou $\frac{2^n(1-p)p^r}{2-p-p^n}$ pour le désavantage du joueur (r). Mais il ne perd pas chaque fois qu'il entre au jeu, parce qu'il peut entrer au jeu et gagner la partie; il faut donc ôter de $2^n y_r$ la somme de toutes les valeurs de y_x ou y_r, et alors le désavantage de (r) est $\frac{(2^n-1)(1-p)p^r}{2-p-p^n}$. Pour avoir l'avantage entier de (r), il faut retrancher cette dernière quantité de la somme des valeurs de $xy_{r,x}$; en désignant donc par S cette somme, l'avantage du joueur (r) sera

$$S-\frac{(2^n-1)(1-p)p^r}{2-p-p^n},$$

S étant, comme on l'a vu, la différentielle de la fonction génératrice de $y_{r,x}$ divisée par dt, et dans laquelle on suppose ensuite $t=1$. Dans cette supposition, on a

$$T=p,\qquad \frac{dT}{dt}=-np(1-p).$$

Désignons par Y_r l'avantage de (r), on trouvera

$$Y_r=\frac{np+1-n}{2-p-p^n}p^r\left[(1-p)r+\frac{p^{n+1}+n(1-p)p^n-p}{2-p-p^n}\right].$$

Cette équation servira depuis $r=0$ jusqu'à $r=n-1$, pourvu que l'on y change Y_0 dans $\overline{Y}_0$, $\overline{Y}_0$ étant l'avantage des deux premiers joueurs, au moment où ils entrent au jeu.

Si, au commencement de la partie, chacun des joueurs dépose au jeu une somme a, l'avantage du joueur (r) en sera augmenté de $(n+1)a$, multiplié par la probabilité y_r, que ce joueur gagnera la partie; mais il faut en ôter la mise a de ce joueur; il faut donc, pour avoir alors son avantage, augmenter l'expression précédente de Y_r de la quantité

$$\frac{(n+1)a(1-p)p^r}{2-p-p^n}-a.$$

Lorsque l'avantage de (r) devient négatif, il se change en désavantage.

12. Soit q la probabilité d'un événement simple à chaque coup; on demande la probabilité de l'amener i fois de suite dans le nombre x de coups.

Nommons z_x la probabilité que cet événement composé aura lieu précisément au coup x. Pour cela, il est nécessaire que l'événement simple n'arrive point au coup $x-i$, et qu'il arrive dans les i coups suivants, l'événement composé n'étant point arrivé précédemment. Soit alors P la probabilité que l'événement simple n'arrivera point au coup $x-i-1$. La probabilité correspondante qu'il n'arrivera point au coup $x-i$ sera $(1-q)P$, et la probabilité correspondante que l'événement composé aura lieu précisément au coup x sera $(1-q)Pq^i$. Ce sera la partie de z_x correspondante à ce cas. Mais la probabilité que l'événement composé arrivera au coup $x-1$ est évidemment Pq^i; on a donc

$$P=\frac{z_{x-1}}{q^i};$$

ainsi la valeur partielle de z_x, relative à ce cas, est $(1-q)z_{x-1}$.

Considérons maintenant les cas où l'événement simple arrivera au coup $x-i-1$. Nommons P' la probabilité qu'il n'arrivera pas au

coup $x-i-2$; la probabilité qu'il arrivera dans ce cas au coup $x-i-1$ sera $q\mathrm{P}'$, et la probabilité qu'il n'arrivera pas au coup $x-i$ sera $(1-q)q\mathrm{P}'$; la valeur partielle de z_x relative à ce cas sera donc $(1-q)q\mathrm{P}'q^i$. Mais la probabilité que l'événement composé arrivera précisément au coup $x-2$ est $\mathrm{P}'q^i$: c'est la valeur de z_{x-2}, ce qui donne

$$\mathrm{P}'=\frac{z_{x-2}}{q^i};$$

$(1-q)qz_{x-2}$ est donc la valeur partielle de z_x relative au cas où l'événement simple arrivera au coup $x-i-1$, sans arriver au coup $x-i-2$.

On trouvera de la même manière que $(1-q)q^2z_{x-3}$ est la valeur partielle de z_x relative au cas où l'événement simple arrivera aux coups $x-i-1$ et $x-i-2$, sans arriver au coup $x-i-3$; et ainsi de suite.

En réunissant toutes ces valeurs partielles de z_x, on aura

$$z_x=(1-q)(z_{x-1}+qz_{x-2}+q^2z_{x-3}+\ldots+q^{i-1}z_{x-i}).$$

Il est facile d'en conclure que la fonction génératrice de z_x est

$$\frac{q^i(1-qt)t^i}{1-t+(1-q)q^it^{i+1}},$$

car cette fonction génératrice est

$$\frac{\varphi(t)}{1-(1-q)(t+qt^2+\ldots+q^{i-1}t^i)},$$

ou

$$\frac{\varphi(t)(1-qt)}{1-t+(1-q)q^it^{i+1}}.$$

La fonction $\varphi(t)$ doit être déterminée par la condition qu'elle ne doit renfermer que la puissance i de t, puisque l'événement composé ne peut commencer à être possible qu'au coup i; de plus, le coefficient de cette puissance est la probabilité q^i que cet événement aura lieu précisément à ce coup.

En divisant la fonction génératrice précédente par $1-t$, on aura

$$\frac{q^i(1-qt)t^i}{(1-t)^2\left[1+\frac{(1-q)q^it^{i+1}}{1-t}\right]}$$

pour la fonction génératrice de la probabilité que l'événement composé aura lieu avant ou au coup x.

En développant cette fonction, on aura, pour le coefficient de t^{x+i}, la série

$$q^i[(1-q)x+1]-(1-q)q^{2i}\frac{x-i}{1.2}[(1-q)(x-i-1)+2]$$
$$+(1-q)^2q^{3i}\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{1.2.3}[(1-q)(x-2i-2)+3]$$
$$-(1-q)^3q^{4i}\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{1.2.3.4}[(1-q)(x-3i-3)+4]$$
$$+\ldots\ldots\ldots

Mais si B perd au coup $x-i+1$ et aux $i-1$ coups suivants, A gagnera la partie au coup x, et la probabilité de cela est Pq^i; $\frac{q^i y'_{x-i}}{(1-q)^{i-1}}$ est donc la partie de y_x relative au premier cas.

Dans le second cas, si l'on nomme P′ sa probabilité, $P'(1-q)^{i-2}$ sera la probabilité y'_{x-2} de B pour gagner la partie au coup $x-2$. La probabilité de A pour gagner la partie au coup x, relative à ce cas, est $P'q^i$; on a donc $\frac{q^i y'_{x-2}}{(1-q)^{i-2}}$ pour cette probabilité.

En continuant ainsi, on aura

$$y_x = \frac{q^i}{(1-q)^i}[(1-q)y'_{x-1} + (1-q)^2 y'_{x-2} + \ldots + (1-q)^{i-1} y'_{x-i+1}].$$

Si l'on change q en $1-q$, y_x en y'_x, et réciproquement, on aura

$$y'_x = \frac{(1-q)^i}{q^i}(q y_{x-1} + q^2 y_{x-2} + \ldots + q^{i-1} y_{x-i+1}).$$

Maintenant, u étant fonction génératrice de y_x, celle de y'_x sera, par tout ce qui précède,

$$kqut(1 + qt + qt^2 + \ldots + q^{i-2}t^{i-2}),$$

k étant égal à $\frac{(1-q)^i}{q^i}$. Mais l'expression précédente de y'_x ne commençant à avoir lieu que lorsque $x = i+1$, parce que pour des valeurs plus petites de x, y_{x-1}, y_{x-2}, ... sont nuls, il faut, pour compléter l'expression précédente de la fonction génératrice de y'_x, lui ajouter une fonction rationnelle et entière de t, de l'ordre i, et dont les coefficients des puissances de t soient les valeurs de y'_x, lorsque x est égal ou plus petit que i. Or y'_x est nul, lorsque x est moindre que i; et lorsqu'il est égal à i, y'_x est $(1-q)^i$, parce qu'il exprime alors la probabilité de B pour gagner la partie après i coups; la fonction à ajouter est donc $(1-q)^i t^i$; ainsi la fonction génératrice de y'_x est

$$kqut[1 + qt + \ldots + q^{i-2}t^{i-2}] + (1-q)^i t^i.$$

Si l'on nomme u' cette fonction, l'expression de y_x en y'_{x-1}, y'_{x-2}, ...

donnera pour la fonction génératrice de y_x, en changeant dans celle de y'_x, k dans $\frac{1}{k}$, q dans $1-q$,

$$\frac{1}{k}(1-q)u't[1 + (1-q)t + \ldots + (1-q)^{i-2}t^{i-2}] + q^i t^i.$$

Cette quantité est donc égale à u, d'où l'on tire, en y substituant pour u sa valeur précédente,

$$u = \frac{q^i t^i (1-qt)[1-(1-q)^i t^i]}{1 - t + q(1-q)^i t^{i+1} + (1-q)q^i t^{i+1} - q^i(1-q)^i t^{2i}}.$$

En changeant q en $1-q$, on aura la fonction u' génératrice de y'_x. Si l'on divise ces fonctions par $1-t$, on aura les fonctions génératrices des probabilités respectives de A et de B, pour gagner la partie avant ou au coup x.

Si l'on suppose $t=1$ dans u, on aura la probabilité que A gagnera la partie; car il est clair qu'en développant u suivant les puissances de t, et en supposant ensuite $t=1$, la somme de tous les termes de ce développement sera celle de toutes les valeurs de y_x. On trouve ainsi la probabilité de A pour gagner la partie égale à

$$\frac{[1-(1-q)^i]q^{i-1}}{(1-q)^{i-1} + q^{i-1} - q^{i-1}(1-q)^{i-1}};$$

la probabilité de B est donc

$$\frac{(1-q)^{i-1}[1-q^i]}{(1-q)^{i-1} + q^{i-1} - q^{i-1}(1-q)^{i-1}}.$$

Supposons maintenant que les joueurs, à chaque coup qu'ils perdent, déposent un franc au jeu, et déterminons leur sort respectif. Il est clair que le gain du joueur A sera x, s'il gagne la partie au coup x, puisqu'il y aura x francs déposés au jeu; ainsi la probabilité de cet événement étant y_x par ce qui précède, $\mathrm{S}.xy_x$ sera l'expression de l'avantage de A, le signe S s'étendant à toutes les valeurs possibles de x. La fonction génératrice de y_x étant u ou $\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}$, T′ étant le numérateur de l'expression précédente de u, et T étant son dénominateur, il est facile de voir que

l'on aura $\mathrm{S}xy_x$ en différentiant $\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}$, et en supposant ensuite $t=1$ dans cette différentielle, ce qui donne, avec cette condition,

$$\mathrm{S}xy'_x=\frac{d\mathrm{T}'}{\mathrm{T}\,dt}-\frac{\mathrm{T}'\,d\mathrm{T}}{\mathrm{T}^2\,dt}.$$

Pour avoir le désavantage de A, on observera qu'à chaque coup qu'il joue, la probabilité qu'il perdra, et par conséquent qu'il déposera un franc au jeu, est $1-q$; sa perte est donc le produit de $1-q$ par la probabilité que le coup sera joué; or la probabilité que le coup x sera joué est $1-\mathrm{S}y_{x-1}-\mathrm{S}y'_{x-1}$; la fonction génératrice de l'unité est ici $\frac{t}{1-t}$, et celle de $\mathrm{S}y_{x-1}+\mathrm{S}y'_{x-1}$ est $\frac{\mathrm{T}'t+\mathrm{T}''t}{\mathrm{T}(1-t)}$; T'' étant ce que devient T' lorsqu'on y change q en $1-q$ et réciproquement; ainsi la fonction génératrice du désavantage de A est

$$\frac{(1-q)\,t\,(\mathrm{T}-\mathrm{T}'-\mathrm{T}'')}{(1-t)\,\mathrm{T}}.$$

Le numérateur et le dénominateur de cette fonction sont divisibles par $1-t$; de plus, on aura la somme de tous les désavantages de A, ou son désavantage total, en faisant $t=1$ dans cette fonction génératrice; le désavantage total est donc, par les méthodes connues, et en observant que $\mathrm{T}'+\mathrm{T}''=\mathrm{T}$ lorsque $t=1$,

$$-\frac{(1-q)\,(d\mathrm{T}-d\mathrm{T}'-d\mathrm{T}'')}{\mathrm{T}\,dt},$$

t étant supposé égal à l'unité après les différentiations. Si l'on retranche cette expression de celle de l'avantage total de A, on aura, pour l'expression du sort de ce joueur,

$$\frac{q\,d\mathrm{T}'+(1-q)\,(d\mathrm{T}-d\mathrm{T}'')}{\mathrm{T}\,dt}-\frac{\mathrm{T}'\,d\mathrm{T}}{\mathrm{T}^2\,dt}.$$

Le sort de B sera

$$\frac{(1-q)\,d\mathrm{T}''+q\,(d\mathrm{T}-d\mathrm{T}')}{\mathrm{T}\,dt}-\frac{\mathrm{T}''\,d\mathrm{T}}{\mathrm{T}^2\,dt},$$

t étant supposé l'unité après les différentiations, ce qui donne

$$\mathrm{T}=q(1-q)[q^{i-1}+(1-q)^{i-1}-q^{i-1}(1-q)^{i-1}],$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}=(i+1)\,q(1-q)[q^{i-1}+(1-q)^{i-1}]-2iq^i(1-q)^i-1,$$

$$\mathrm{T}'=(1-q)\,q^i[1-(1-q)^i],$$

$$\frac{d\mathrm{T}'}{dt}=i(1-q)\,q^i[1-2(1-q)^i]-qq^i[1-(1-q)^i].$$

On aura T'' et $\frac{d\mathrm{T}''}{dt}$ en changeant, dans ces deux dernières expressions, q dans $1-q$.

13. Une urne étant supposée contenir $n+1$ boules, distinguées par les n^{os} 0, 1, 2, 3, ..., n, on en tire une boule que l'on remet dans l'urne après le tirage. On demande la probabilité qu'après i tirages la somme des nombres amenés sera égale à s.

Soient t_1, t_2, t_3, ..., t_i les nombres amenés au premier tirage, au second, au troisième, ...; on doit avoir

$$t_1+t_2+t_3+\ldots+t_i=s. \tag{1}$$

t_2, t_3, ..., t_i étant supposés ne pas varier, cette équation n'est susceptible que d'une combinaison. Mais, si l'on fait varier à la fois t_i et t_2, et si l'on suppose que ces variables puissent s'étendre indéfiniment depuis zéro, alors le nombre des combinaisons qui donnent l'équation précédente sera

$$s+1-t_3-t_4-\ldots-t_i;$$

car t_1 peut s'étendre depuis zéro, ce qui donne

$$t_2=s-t_3-t_4-\ldots-t_i,$$

jusqu'à $s-t_3-t_4-\ldots-t_i$, ce qui donne $t_2=0$, les valeurs négatives des variables t_1, t_2 devant être exclues.

Maintenant, le nombre $s+1-t_3-t_4-\ldots-t_i$ est susceptible de plusieurs valeurs, en vertu des variations de t_3, t_4, ... Supposons

d'abord $t_1, t_2, \ldots$ invariables, et que t_2 puisse s'étendre indéfiniment depuis zéro; alors, si l'on fait

$$s+1-t_2-t_3-\ldots-t_i=x,$$

en intégrant cette variable dont la différence finie est l'unité, on aura $\frac{x(x-1)}{1.2}$ pour son intégrale; mais, pour avoir la somme de toutes les valeurs de x, il faut, comme l'on sait, ajouter x à cette intégrale; cette somme est donc $\frac{x(x+1)}{1.2}$. Il faut y faire x égal à sa plus grande valeur, que l'on obtient en faisant t_2 nul dans la fonction $s+1-t_2-t_3-\ldots-t_i$: ainsi le nombre total des combinaisons relatives aux variations de t_1, t_2 et t_3 est

$$\frac{(s+2-t_3-t_4-\ldots-t_i)(s+1-t_3-t_4-\ldots-t_i)}{1.2}.$$

En faisant encore dans cette fonction

$$s+2-t_3-t_4-\ldots-t_i=x,$$

elle devient $\frac{x(x-1)}{1.2}$; en l'intégrant depuis $x=0$ et en ajoutant la fonction elle-même à cette intégrale, on aura $\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}$; la valeur de x nulle répond à $t_3=s+2-t_4-\ldots-t_i$, et sa plus grande valeur répond à t_3 nul, et par conséquent elle est égale à $s+2-t_4-\ldots-t_i$; en substituant donc pour x cette valeur dans l'intégrale précédente, on aura

$$\frac{(s+3-t_4-t_5-\ldots-t_i)(s+2-t_4-t_5-\ldots-t_i)(s+1-t_4-t_5-\ldots-t_i)}{1.2.3}$$

pour la somme de toutes les combinaisons relatives aux variations de t_1, t_2, t_3, t_4. En continuant ainsi, on trouvera généralement que le nombre total des combinaisons qui donnent l'équation (1), dans la supposition où les variables $t_1, t_2, \ldots, t_i$ peuvent s'étendre indéfiniment depuis zéro, est

$$(a) \qquad \frac{(s+i-1)(s+i-2)(s+i-3)\ldots(s+1)}{1.2.3\ldots(i-1)};$$

mais, dans la question présente, ces variables ne peuvent pas s'étendre au delà de n. Pour exprimer cette condition, nous observerons que, l'urne renfermant $n+1$ boules, la probabilité d'extraire l'une quelconque d'entre elles est $\frac{1}{n+1}$; ainsi la probabilité de chacune des valeurs de t_1, depuis zéro jusqu'à n, est $\frac{1}{n+1}$. La probabilité des valeurs de t_1, égales ou supérieures à $n+1$, est nulle; on peut donc la représenter par $\frac{1-l^{n+1}}{n+1}$, pourvu que l'on fasse $l=1$ dans le résultat du calcul; alors la probabilité d'une valeur quelconque de t_1 peut être généralement exprimée par $\frac{1-l^{n+1}}{n+1}$, pourvu qu'on ne fasse commencer l, que lorsque t_1 aura atteint $n+1$, et qu'on le suppose à la fin égal à l'unité; il en est de même des probabilités des autres variables. Maintenant, la probabilité de l'équation (1) est le produit des probabilités des valeurs de $t_1, t_2, t_3, \ldots$; cette probabilité est donc $\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i$; le nombre des combinaisons qui donnent cette équation, multipliées par leurs probabilités respectives, est ainsi le produit de la fraction (a) par $\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i$, ou

$$(b) \qquad \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)}\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i;$$

mais il faut, dans le développement de cette fonction, n'appliquer l^{n+1} qu'aux combinaisons dans lesquelles une des variables commence à surpasser n: il faut n'appliquer l^{2n+2} qu'aux combinaisons dans lesquelles deux des variables commencent à surpasser n, et ainsi du reste. Si dans l'équation (1) on suppose qu'une des variables, t_1, par exemple, surpasse n, en faisant $t_1=n+1+t'_1$, cette équation devient

$$s-n-1=t'_1+t_2+t_3+\ldots,$$

la variable t'_1 pouvant s'étendre indéfiniment. Si deux des variables telles que t_1 et t_2 surpassent n, en faisant

$$t_1=n+1+t'_1, \qquad t_2=n+1+t'_2,$$

l'équation devient

$$s - 2n - 2 = t'_1 + t'_2 + t_3 + \ldots,$$

et ainsi de suite. On doit donc, dans la fonction (a) que nous avons dérivée de l'équation (1), diminuer s de $n+1$, relativement au système des variables $t'_1, t_2, t_3, \ldots$. On doit le diminuer de $2n+2$, relativement au système des variables $t'_1, t'_2, t_3, \ldots$, et ainsi du reste. Il faut par conséquent, dans le développement de la fonction (b) par rapport aux puissances de l, diminuer, dans chaque terme, s de l'exposant de la puissance de l; en faisant ensuite $l = 1$, cette fonction devient

$$(c)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(s+1)(s+2)\ldots(s+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} - \dfrac{i(s-n)(s-n+1)\ldots(s+i-n-2)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} \\ \quad + \dfrac{i(i-1)}{1.2}\,\dfrac{(s-2n-1)(s-2n)\ldots(s+i-2n-3)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} - \ldots, \end{array} \right.$$

la série devant être continuée jusqu'à ce que l'un des facteurs $s-n$, $s-2n-1$, $s-3n-2$, ... devienne nul ou négatif.

Cette formule donne la probabilité d'amener un nombre donné s, en projetant i dés d'un nombre $n+1$ de faces chacun, le plus petit nombre marqué sur ces faces étant 1. Il est visible que cela revient à supposer dans l'urne précédente tous les nombres des boules augmentés de l'unité, et alors la probabilité d'amener le nombre $s+i$ dans i tirages est la même que celle d'amener le nombre s dans le cas que nous venons de considérer; or, en faisant $s+i=s'$, on a $s = s'-i$; la formule (c) donnera donc, pour la probabilité d'amener le nombre s' en projetant les i dés,

$$\frac{(s'-1)(s'-2)\ldots(s'-i+1)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} - \frac{i(s'-n-2)(s'-n-3)\ldots(s'-i-n)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i}$$
$$+ \frac{i(i-1)}{1.2}\,\frac{(s'-2n-3)(s'-2n-4)\ldots(s'-i-2n-1)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} - \ldots.$$

La formule (c), appliquée au cas où s et n sont des nombres infinis, se transforme dans la suivante :

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)n}\left[\left(\frac{s}{n}\right)^{i-1} - i\left(\frac{s}{n}-1\right)^{i-1} + \frac{i(i-1)}{1.2}\left(\frac{s}{n}-2\right)^{i-1} - \ldots\right].$$

Cette expression peut servir à déterminer la probabilité que la somme des inclinaisons à l'écliptique d'un nombre i d'orbites sera comprise dans des limites données, en supposant que, pour chaque orbite, toutes les inclinaisons depuis zéro jusqu'à l'angle droit soient également possibles. En effet, si l'on conçoit que l'angle droit $\frac{1}{2}\pi$ soit divisé en un nombre infini n de parties égales, et que s renferme un nombre infini de ces parties, en nommant φ la somme des inclinaisons des orbites, on aura

$$\frac{s}{n} = \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi}.$$

En multipliant donc l'expression précédente par ds ou par $\frac{n\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi}$, et en l'intégrant depuis $\varphi - \varepsilon$ jusqu'à $\varphi + \varepsilon$, on aura

$$(o)\quad \frac{1}{1.2.3\ldots i}\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\varphi+\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^i - i\left(\dfrac{\varphi+\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-1\right)^i + \dfrac{i(i-1)}{1.2}\left(\dfrac{\varphi+\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-2\right)^i - \ldots \\ -\left(\dfrac{\varphi-\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^i + i\left(\dfrac{\varphi-\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-1\right)^i - \dfrac{i(i-1)}{1.2}\left(\dfrac{\varphi-\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-2\right)^i + \ldots \end{array} \right\};$$

c'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites sera comprise dans les limites $\varphi - \varepsilon$ et $\varphi + \varepsilon$.

Appliquons cette formule aux orbites des planètes. La somme des inclinaisons des orbites des planètes à celle de la Terre était de $91^\circ,4187$ au commencement de 1801 : il y a dix orbites, sans y comprendre l'écliptique; on a donc ici $i = 10$. Nous ferons ensuite

$$\varphi - \varepsilon = 0,$$
$$\varphi + \varepsilon = 91^\circ,4187.$$

La formule précédente devient ainsi, en observant que $\frac{1}{2}\pi$ ou le quart de la circonférence est de 100°,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 10}(0,914187)^{10}.$$

C'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites serait comprise dans les limites zéro et $91^\circ,4187$, si toutes les inclinaisons étaient également possibles. Cette probabilité est donc

0,00000011235. Elle est déjà très petite; mais il faut encore la combiner avec la probabilité d'une circonstance très remarquable dans le système du monde, et qui consiste en ce que toutes les planètes se meuvent dans le même sens que la Terre. Si les mouvements directs et rétrogrades sont supposés également possibles, cette dernière probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; il faut donc multiplier 0,00000011235 par $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, pour avoir la probabilité que tous les mouvements des planètes et de la Terre seront dirigés dans le même sens, et que la somme de leurs inclinaisons à l'orbite de la Terre sera comprise dans les limites zéro et 91°,4187; on aura ainsi $\frac{1,0972}{(10)^{10}}$ pour cette probabilité, ce qui donne $1-\frac{1,0972}{(10)^{10}}$ pour la probabilité que cela n'a pas dû avoir lieu, si toutes les inclinaisons, ainsi que les mouvements directs et rétrogrades, ont été également faciles. Cette probabilité approche tellement de la certitude, que le résultat observé devient invraisemblable dans cette hypothèse; ce résultat indique donc, avec une très grande probabilité, l'existence d'une cause primitive qui a déterminé les mouvements des planètes à se rapprocher du plan de l'écliptique ou, plus naturellement, du plan de l'équateur solaire et à se mouvoir dans le sens de la rotation du Soleil. Si l'on considère ensuite que les dix-huit satellites observés jusqu'ici font leur révolution dans le même sens, et que les rotations observées au nombre de treize dans les planètes, les satellites et l'anneau de Saturne, sont encore dirigées dans le même sens; enfin, si l'on considère que la moyenne des inclinaisons des orbes de ces astres et de leurs équateurs à l'équateur solaire est fort éloignée d'atteindre un demi-angle droit, on verra que l'existence d'une cause commune, qui a dirigé tous ces mouvements dans le sens de la rotation du Soleil et sur des plans peu inclinés à celui de son équateur, est indiquée avec une probabilité bien supérieure à celle du plus grand nombre des faits historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute.

Voyons maintenant si cette cause a influé sur le mouvement des comètes. Le nombre de celles qu'on a observées jusqu'à la fin de 1811,

en comptant pour la même les diverses apparitions de celle de 1759, s'élève à cent, dont cinquante-trois sont directes, et quarante-sept sont rétrogrades. La somme des inclinaisons des orbites des premières est de 2657°,993, et celle des inclinaisons des autres orbites est de 2515°,684: l'inclinaison moyenne de toutes ces orbites est donc de 51°,73677: par conséquent la somme de toutes les inclinaisons est $\frac{i.\pi}{4}+i.1°,73677$, i étant ici égal à 100. On voit déjà que l'inclinaison moyenne surpassant le demi-angle droit, les comètes, loin de participer à la tendance des corps du système planétaire, pour se mouvoir dans des plans peu inclinés à l'écliptique, paraissent avoir une tendance contraire. Mais la probabilité de cette tendance est très petite. En effet, si l'on suppose, dans la formule (o),

$$\varphi=\frac{i.\pi}{4},\qquad \varepsilon=i.1°,73677,$$

elle devient

$$(p)\quad \frac{1}{1.2.3\ldots i.2^i}\left\{\begin{array}{l}\left(i+\frac{4i.1°,73677}{\pi}\right)^i-i\left(i+\frac{4i.1°,73677}{\pi}-2\right)^i\\ +\frac{i(i-1)}{1.2}\left(i+\frac{4i.1°,73677}{\pi}-4\right)^i-\ldots\\ -\left(i-\frac{4i.1°,73677}{\pi}\right)^i+i\left(i-\frac{4i.1°,73677}{\pi}-2\right)^i\\ -\frac{i(i-1)}{1.2}\left(i-\frac{4i.1°,73677}{\pi}-4\right)^i+\ldots\end{array}\right\},$$

π étant 200°. C'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites des i comètes doit être comprise dans les limites $\pm i.1°,73677$. Le nombre des termes de cette formule et la précision avec laquelle il faudrait avoir chacun d'eux en rendent le calcul impraticable; il faut donc recourir aux méthodes d'approximation développées dans la seconde Partie du Livre I^{er}. On a, par le n° 42 du même Livre,

$$\frac{(i+r\sqrt{i})^i-i(i+r\sqrt{i}-2)^i+\frac{i(i-1)}{1.2}(i+r\sqrt{i}-4)^i-\ldots}{1.2.3\ldots i.2^i}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int dr\,e^{-\frac{3}{2}r^2}-\frac{3}{20\,i}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}r(1-r^2)e^{-\frac{3}{2}r^2},$$

les puissances des quantités négatives étant ici exclues, comme elles le sont dans la formule précédente; en faisant donc

$$r\sqrt{i} = \frac{4i.1^{o},73677}{200^{o}},$$

la formule (p) devient

$$2\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int dr c^{-\frac{3}{2}r^{2}} - \frac{3}{10i}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}r(1-r^{2})c^{-\frac{3}{2}r^{2}}$$

l'intégrale étant prise depuis r nul. On trouve ainsi 0,474 pour la probabilité que l'inclinaison des 100 orbites doit tomber dans les limites $50^{o} \pm 1^{o},17377$; la probabilité que l'inclinaison moyenne doit être inférieure à l'inclinaison observée est donc 0,737. Cette probabilité n'est pas assez grande pour que le résultat observé fasse rejeter l'hypothèse d'une égale facilité des inclinaisons des orbites, et pour indiquer l'existence d'une cause primitive qui a influé sur ces inclinaisons, cause que l'on ne peut s'empêcher d'admettre dans les inclinaisons des orbes du système planétaire.

La même chose a lieu par rapport au sens du mouvement. La probabilité que, sur 100 comètes, 47 au plus seront rétrogrades, est la somme des 48 premiers termes du binôme $(p+q)^{100}$, en faisant dans le résultat du calcul $p = q = \frac{1}{2}$. Mais la somme des 50 premiers termes, plus la moitié du 51^{e} ou du terme moyen, est la moitié du binôme entier, ou de $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{100}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{1}{2} - \frac{100.99\ldots51}{1.2.3\ldots50.2^{100}}\left(\frac{1}{2}+\frac{50}{51}+\frac{50.49}{51.52}\right) \quad \text{ou} \quad = \frac{1}{2} - \frac{1.2.3\ldots100.1594}{(1.2.3\ldots50)^{2}.2^{100}.663}.$$

En vertu du théorème

$$1.2.3\ldots s = s^{s+\frac{1}{2}}c^{-s}\left(1+\frac{1}{12s}+\ldots\right)\sqrt{2\pi},$$

on a, à très peu près,

$$1.2.3\ldots100 = (100)^{100+\frac{1}{2}}c^{-100}\left(1+\frac{1}{1200}\right)\sqrt{2\pi},$$

$$2^{100}(1.2.3\ldots50)^{2} = 100^{100+1}c^{-100}\left(1+\frac{1}{300}\right)\pi.$$

La probabilité précédente devient ainsi

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{50\pi}}\frac{1197.1594}{1200,663} = 0,3046.$$

Cette probabilité est beaucoup trop grande pour indiquer une cause qui ait favorisé, dans l'origine, les mouvements directs. Ainsi la cause qui a déterminé le sens des mouvements de révolution et de rotation des planètes et des satellites ne paraît pas avoir influé sur le mouvement des comètes.

14. La méthode du numéro précédent a l'avantage de s'étendre au cas où le nombre des boules de l'urne qui portent le même numéro n'est pas égal à l'unité, mais varie suivant une loi quelconque. Concevons, par exemple, qu'il n'y ait qu'une boule portant le n° 0, qu'une boule portant le n° 1, et ainsi de suite jusqu'au n° r inclusivement. Supposons de plus qu'il y ait deux boules portant le n° $r+1$, deux boules portant le n° $r+2$, et ainsi de suite jusqu'au n° n inclusivement. Le nombre total des boules de l'urne sera $2n-r+1$, la probabilité d'en extraire un des numéros inférieurs à $r+1$ sera donc $\frac{1}{2n-r+1}$, et la probabilité d'en extraire le n° $r+1$ ou l'un des numéros supérieurs sera $\frac{2}{2n-r+1}$: nous la représenterons par $\frac{1+l^{r+1}}{2n-r+1}$; mais nous ferons $l=1$ dans le résultat du calcul. Quoiqu'il n'y ait point de numéros au delà du n° n, nous pouvons cependant considérer dans l'urne des numéros supérieurs à n, jusqu'à l'infini, pourvu que nous donnions à leur extraction une probabilité nulle; nous pourrons donc représenter cette probabilité par $\frac{1+l^{r+1}-2l^{n+1}}{2n-r+1}$, en faisant $l=1$ dans le résultat du calcul. Par cet artifice, nous pourrons représenter généralement la probabilité d'un numéro quelconque par l'expression précédente, pourvu que nous ne fassions commencer l^{r+1} que lorsqu'un des numéros commencera à surpasser r, et que nous ne fassions commencer l^{n+1} que lorsqu'un des numéros commencera à surpasser n. Cela posé, on

trouvera, en appliquant ici les raisonnements du numéro précédent, que la probabilité d'amener le nombre s dans i tirages est égale à

$$\frac{(s+i-1)(s+i-2)(s+i-3)\dots(s+1)}{1.2.3\dots(i-1)(2n-r+1)^i}(1+l^{r+1}-2l^{n+1})^i,$$

pourvu que, dans le développement de cette fonction suivant les puissances de l, on diminue dans chaque terme s de l'exposant de la puissance de l, qu'on suppose ensuite $l=1$ et qu'on arrête la série lorsque l'on parvient à des facteurs négatifs.

15. Appliquons maintenant cette méthode à la recherche du résultat moyen que doit donner un nombre quelconque d'observations dont les lois de facilité des erreurs sont connues. Pour cela, nous allons résoudre le problème suivant :

Soient i quantités variables et positives t, t_1, t_2, …, t_{i-1}, dont la somme soit s, et dont la loi de possibilité soit connue ; on propose de trouver la somme des produits de chaque valeur que peut recevoir une fonction donnée $\psi(t, t_1, t_2, \dots)$ de ces variables, multipliée par la probabilité correspondante à cette valeur.

Supposons, pour plus de généralité, que les fonctions qui expriment les possibilités des variables t, t_1, … soient discontinues, et représentons par $\varphi(t)$ la possibilité de t, depuis $t=0$ jusqu'à $t=q$, par $\varphi'(t)+\varphi(t)$ sa possibilité depuis $t=q$ jusqu'à $t=q'$, par $\varphi''(t)+\varphi'(t)+\varphi(t)$ sa possibilité depuis $t=q'$ jusqu'à $t=q''$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Désignons ensuite les mêmes quantités relatives aux variables t_1, t_2, … par les mêmes lettres, en écrivant respectivement au bas les nombres 1, 2, 3, …, en sorte que q_1, q'_1, …; $\varphi_1(t_1)$, $\varphi'_1(t_1)$, … correspondent, relativement à t_1, à ce que q, q', …, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, … sont respectivement à t, et ainsi de suite. Dans cette manière de représenter les possibilités des variables, il est clair que la fonction $\varphi(t)$ a lieu depuis $t=0$ jusqu'à t infini ; que la fonction $\varphi'(t)$ a lieu depuis $t=q$ jusqu'à t infini, et ainsi de suite. Pour reconnaître les valeurs de t, t_1, t_2, …, lorsque ces diverses fonctions commencent à avoir lieu, nous

multiplierons, conformément à la méthode exposée dans les numéros précédents, $\varphi(t)$ par l^0 ou l'unité, $\varphi'(t)$ par l^q, $\varphi''(t)$ par $l^{q'}$, … ; nous multiplierons pareillement $\varphi_1(t_1)$ par l'unité, $\varphi'_1(t_1)$ par l^{q_1}, et ainsi de suite ; les exposants des puissances de l indiqueront alors ces valeurs. Il suffira ensuite de faire $l=1$ dans le dernier résultat du calcul. Au moyen de ces artifices très simples, on peut facilement résoudre le problème proposé.

La probabilité de la fonction $\psi(t, t_1, t_2, \dots)$ est évidemment égale au produit des probabilités de t, t_1, t_2, …, en sorte que, si l'on substitue pour t sa valeur $s-t_1-t_2-\dots$, que donne l'équation

$$t+t_1+t_2+\dots+t_{i-1}=s,$$

le produit de la fonction proposée par sa probabilité sera

$$\text{(A)}\quad \left\{\begin{array}{l} \psi(s-t_1-t_2-\dots, t_1, t_2, \dots) \\ \quad\times[\varphi(s-t_1-t_2-\dots)+l^q\varphi'(s-t_1-t_2-\dots)+l^{q'}\varphi''(s-t_1-t_2-\dots)+\dots] \\ \quad\times[\varphi_1(t_1)+l^{q_1}\varphi'_1(t_1)+l^{q'_1}\varphi''_1(t_1)+\dots] \\ \quad\times[\varphi_2(t_2)+l^{q_2}\varphi'_2(t_2)+l^{q'_2}\varphi''_2(t_2)+\dots] \\ \quad\times\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

On aura donc la somme de tous ces produits : 1° en multipliant la quantité précédente par dt_1 et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_1 est susceptible ; 2° en multipliant cette intégrale par dt_2 et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_2 est susceptible, et ainsi de suite jusqu'à la dernière variable t_{i-1} ; mais ces intégrations successives exigent quelques attentions particulières.

Considérons un terme quelconque de la quantité (A), tel que

$$l^{q+q_1+q_2+\dots}\psi(s-t_1-t_2-\dots, t_1, t_2, \dots)\varphi'(s-t_1-t_2-\dots)\varphi'_1(t_1)\varphi''_2(t_2)\dots;$$

en le multipliant par dt_1, il faut intégrer pour toutes les valeurs possibles de t_1 ; or la fonction $\varphi'(s-t_1-t_2-\dots)$ n'a lieu que lorsque t, dont la valeur est $s-t_1-t_2-\dots$, égale ou surpasse q ; la plus grande valeur que t_1 puisse recevoir est donc $s-q-t_2-t_3-\dots$. De plus,

$\varphi'_1(t_1)$ n'ayant lieu que lorsque t_1 est égal ou plus grand que q_1, cette quantité est la plus petite valeur que t_1 puisse recevoir; il faut donc prendre l'intégrale dont il s'agit depuis $t_1 = q_1$ jusqu'à

$$t_1 = s - q - t_2 - t_3 - \ldots;$$

ou, ce qui revient au même, depuis $t_1 - q_1 = 0$ jusqu'à

$$t_1 - q_1 = s - q - q_1 - t_2 - t_3 - \ldots.$$

On trouvera de la même manière qu'en multipliant cette nouvelle intégrale par dt_2, il faudra l'intégrer depuis $t_2 - q'_2 = 0$ jusqu'à

$$t_2 - q'_2 = s - q - q_1 - q'_2 - t_3 - \ldots.$$

En continuant d'opérer ainsi, on arrivera à une fonction de

$$s - q - q_1 - q'_2 - \ldots,$$

dans laquelle il ne restera aucune des variables t, t_1, t_2, ... Cette fonction doit être rejetée, si $s - q - q_1 - q'_2 - \ldots$ est nul ou négatif; car il est visible que, dans ce cas, le système des fonctions $\varphi'(t)$, $\varphi'_1(t_1)$, $\varphi'_2(t_2)$, ... ne peut pas être employé. En effet, les plus petites valeurs de t_1, t_2, ... étant, par la nature de ces fonctions, égales à q_1, q'_2, ..., la plus grande valeur que t puisse recevoir est $s - q_1 - q'_2 - \ldots$; ainsi la plus grande valeur de $t - q$ est

$$s - q - q_1 - q'_2 - \ldots;$$

or la fonction $\varphi'(t)$ ne peut être employée qu'autant que $t - q$ est positif.

De là résulte une solution très simple du problème proposé. Que l'on substitue : 1° $q + t$ au lieu de t dans $\varphi'(t)$, $q' + t$ au lieu de t dans $\varphi''(t)$, $q'' + t$ au lieu de t dans $\varphi^{(n)}(t)$ et ainsi de suite; 2° $q_1 + t_1$ au lieu de t_1 dans $\varphi'_1(t_1)$, $q'_1 + t_1$ au lieu de t_1 dans $\varphi''_1(t_1)$, ...; 3° $q_2 + t_2$ au lieu de t_2 dans $\varphi'_2(t_2)$, $q'_2 + t_2$ au lieu de t_2 dans $\varphi''_2(t_2)$, ..., et ainsi de suite; 4° enfin, $k + t$ au lieu de t, $k_1 + t_1$ au lieu de t_1, et ainsi du reste, dans $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$; la fonction (A) deviendra

$$(A') \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(k + s - t_1 - t_2 - t_3 - \ldots, k_1 + t_1, k_2 + t_2, \ldots) \\ \quad \times [\varphi(s - t_1 - t_2 - t_3 - \ldots) + l^{q} \varphi'(s + q - t_1 - t_2 - \ldots) \\ \qquad + l^{q'} \varphi''(s + q' - t_2 - t_3 - \ldots) + \ldots] \\ \quad \times [\varphi_1(t_1) + l^{q_1} \varphi'_1(q_1 + t_1) + l^{q'_1} \varphi''_1(q'_1 + t_1) + \ldots] \\ \quad \times [\varphi_2(t_2) + l^{q_2} \varphi'_2(q_2 + t_2) + \ldots]. \end{array} \right.$$

En multipliant cette fonction par dt_1, on l'intégrera depuis t_1 nul jusqu'à $t_1 = s - t_2 - t_3 - \ldots$. On multipliera ensuite cette première intégrale par dt_2, et on l'intégrera depuis t_2 nul jusqu'à $t_2 = s - t_3 - t_4 - \ldots$. En continuant ainsi, on parviendra à une dernière intégrale, qui sera fonction de s, et que nous désignerons par $\Pi(s)$, et cette fonction sera la somme cherchée de toutes les valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$, multipliées par leurs probabilités respectives. Mais pour cela il faut avoir soin de changer dans un terme quelconque, multiplié par une puissance de l, telle que $l^{q+q_1+q_2+\ldots}$, k dans la partie de l'exposant de la puissance relative à la variable t, et qui dans ce cas est q; et, si cette partie manque, il faut supposer k égal à zéro. Il faut pareillement changer k_1 dans la partie de l'exposant relative à la variable t_1, et ainsi de suite; il faut diminuer s de l'exposant entier de la puissance de l, et écrire ainsi, dans le cas présent, $s - q - q_1 - q'_2 - \ldots$, au lieu de s, et rejeter le terme, si s, ainsi diminué, devient négatif. Enfin il faut supposer $l = 1$.

Si $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, ..., $\varphi_1(t_1)$, ... sont des fonctions rationnelles et entières des variables t, t_1, t_2, ... de leurs exponentielles et de sinus et cosinus, toutes les intégrations successives seront possibles, parce qu'il est de la nature de ces fonctions de se reproduire par les intégrations. Dans les autres cas, les intégrations pourront n'être pas possibles; mais l'analyse précédente réduit alors le problème aux quadratures. Le cas des fonctions rationnelles et entières offre quelques simplifications que nous allons exposer.

Supposons que l'on ait

$$\varphi(t) + l^q\varphi'(q+t) + l^{q'}\varphi''(q'+t) + \ldots = A + Bt + Ct^2 + \ldots,$$
$$\varphi_1(t_1) + l^{q_1}\varphi_1'(q_1+t_1) + l^{q_1'}\varphi_1''(q_1'+t_1) + \ldots = A_1 + B_1t_1 + C_1t_1^2 + \ldots,$$
$$\varphi_2(t_2) + l^{q_2}\varphi_2'(q_2+t_2) + l^{q_2'}\varphi_2''(q_2'+t_2) + \ldots = A_2 + B_2t_2 + C_2t_2^2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et désignons par $Ht^nt_1^{n_1}t_2^{n_2}\ldots$ un terme quelconque de

$$\psi(h+t, h_1+t_1, h_2+t_2, \ldots);$$

il est facile de s'assurer que la partie de $\Pi(s)$ correspondante à ce terme est

$$\text{(B)}\quad \left\{\begin{array}{l} 1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n_1.1.2.3\ldots n_2\ldots Hs^{i+n+n_1+n_1+\ldots-1} \\ \times[A + (n+1)Bs + (n+1)(n+2)Cs^2 + \ldots] \\ \times[A_1 + (n_1+1)B_1s + (n_1+1)(n_1+2)C_1s^2 + \ldots] \\ \times[A_2 + (n_2+1)B_2s + (n_2+1)(n_2+2)C_2s^2 + \ldots] \\ \times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

pourvu que, dans le développement de cette quantité, au lieu d'une puissance quelconque a de s, on écrive $\frac{s^a}{1.2.3\ldots a}$. On aura ensuite la partie correspondante de la somme entière des valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$, multipliées par leurs probabilités respectives, en changeant un terme quelconque de ce développement, tel que $H\lambda t^\mu s^\alpha$ dans $H\lambda(s-\mu)^\alpha$, et en substituant dans H, au lieu de k, la partie de l'exposant μ qui est relative à la variable t, au lieu de k, la partie relative à t_1, et ainsi du reste.

Si dans la formule (B) on suppose $H = 1$, et $n, n_1, n_2, \ldots$ nuls, on aura la somme des valeurs de l'unité multipliées par leur probabilité respective; or il est visible que cette somme n'est autre chose que la somme de toutes les combinaisons dans lesquelles l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-1} = s$$

a lieu, multipliées par leur probabilité; elle exprime conséquemment

la probabilité de cette équation. Si, dans les hypothèses précédentes, on suppose de plus que la loi de probabilité est la même pour les r premières variables $t, t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$, et que, pour les $i-r$ dernières, elle soit encore la même, mais différente, que pour les premières, on aura

$$A = A_1 = A_2 = \ldots = A_{r-1},$$
$$B = B_1 = B_2 = \ldots = B_{r-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_r = A_{r+1} = \ldots = A_{i-1}$$
$$B_r = B_{r+1} = \ldots = B_{i-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et la formule (B) se changera dans la suivante :

$$\text{(C)}\qquad s^{i-1}(A + Bs + 2Cs^2 + \ldots)^r(A_r + B_rs + 2C_rs^2 + \ldots)^{i-r}.$$

Cette formule servira à déterminer la probabilité que la somme des erreurs d'un nombre quelconque d'observations, dont la loi de facilité des erreurs est connue, sera comprise dans des limites données.

Supposons, par exemple, que l'on ait $i-1$ observations dont les erreurs pour chaque observation puissent s'étendre depuis $-h$ jusqu'à $+g$, et qu'en nommant z l'erreur de la première de ces observations, la loi de facilité de cette erreur soit exprimée par $a + bz + cz^2$. Supposons ensuite que cette loi soit la même pour les erreurs $z_1, z_2, \ldots, z_{i-2}$ des autres observations, et cherchons la probabilité que la somme de ces erreurs sera comprise dans les limites p et $p+e$.

Si l'on fait

$$z = t - h, \qquad z_1 = t_1 - h, \qquad z_2 = t_2 - h, \qquad \ldots,$$

il est clair que $t, t_1, t_2, \ldots$ seront positifs et pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à $h+g$; de plus, on aura

$$z + z_1 + z_2 + \ldots + z_{i-2} = t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2} - (i-1)h;$$

donc la plus grande valeur de la somme $z + z_1 + z_2 + \ldots + z_{i-2}$ étant, par la supposition, égale à $p+e$, et la plus petite étant égale à p, la

plus grande valeur de $t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2}$ sera $(i-1)h + p + e$, et la plus petite sera $(i-1)h + p$; en faisant ainsi

$$(i-1)h + p + e = s$$

et

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2} = s - t_{i-1},$$

t_{i-1} sera toujours positif et pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e. Cela posé, si l'on applique à ce cas la formule (C), on aura $q = h + g$. D'ailleurs, la loi de facilité des erreurs z étant $a + bz + cz^2$, on en conclura la loi de facilité de t, en y changeant z en $t - h$. Soit

$$a' = a - bh + ch^2, \qquad b' = b - 2ch;$$

on aura $a' + b't + ct^2$ pour cette loi; ce sera donc la fonction $\varphi(t)$. Mais, comme, depuis $t = h + g$ jusqu'à t infini, la facilité des valeurs de t est nulle par l'hypothèse, on aura

$$\varphi'(t) + \varphi(t) = 0,$$

ce qui donne

$$\varphi'(t) = -(a' + b't + ct^2);$$

donc, si l'on fait

$$a'' = a' + b'(h+g) + c(h+g)^2,$$
$$b'' = b' + 2c(h+g),$$

on aura

$$\varphi(t) + l^q \varphi'(q+t) = a' + b't + ct^2 - l^{h+g}(a'' + b''t + ct^2),$$

et cette équation aura encore lieu en y changeant t en t_1, t_2, ..., puisque la loi de facilité des erreurs est supposée la même pour toutes les observations.

Quant à la variable t_{i-1}, on observera que la probabilité de l'équation

$$z + z_1 + \ldots + z_{i-2} = \mu$$

étant, quel que soit μ, égale au produit des probabilités de z, z_1, z_2, ..., la probabilité de l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2} = s - t_{i-1}$$

sera égale au produit des probabilités de t, t_1, t_2, ...; la loi de probabilité de t_{i-1} est donc constante et égale à l'unité, et, comme cette variable ne doit s'étendre que depuis $t_{i-1} = 0$ jusqu'à $t_{i-1} = e$, on aura

$$q_{i-1} = e, \qquad \varphi_{i-1}(t_{i-1}) = 1, \qquad \varphi'_{i-1}(t_{i-1}) + \varphi_{i-1}(t_{i-1}) = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi'_{i-1}(t_{i-1}) = -1,$$

ce qui donne

$$\varphi_{i-1}(t_{i-1}) + l^{q_{i-1}} \varphi'_{i-1}(q_{i-1} + t_{i-1}) = 1 - l^e;$$

la formule (C) deviendra donc

$$(C') \qquad s^{i-1}[a' + b's + 2cs^2 - l^{h+g}(a'' + b''s + 2cs^2)]^{i-1}(1 - l^e).$$

Soit

$$(a' + b's + 2cs^2)^{i-1} = a^{(1)} + b^{(1)}s + c^{(1)}s^2 + f^{(1)}s^3 + \ldots,$$
$$(a' + b's + 2cs^2)^{i-2}(a'' + b''s + 2cs^2) = a^{(2)} + b^{(2)}s + c^{(2)}s^2 + \ldots,$$
$$(a' + b's + 2cs^2)^{i-3}(a'' + b''s + 2cs^2) = a^{(3)} + b^{(3)}s + c^{(3)}s^2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La formule précédente (C') donnera, en y changeant un terme quelconque, tel que $\lambda l^\mu s^\alpha$, en $\frac{\lambda(s-\mu)^\alpha}{1.2.3\ldots\alpha}$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)} \left\{ \begin{array}{l} a^{(1)}[s^{i-1} - (s-e)^{i-1}] \\ + \frac{b^{(1)}}{i}[s^i - (s-e)^i] \\ + \frac{c^{(1)}}{i(i+1)}[s^{i+1} - (s-e)^{i+1}] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -(i-1)\left\{ \begin{array}{l} a^{(2)}[(s-h-g)^{i-1} - (s-h-g-e)^{i-1}] \\ + \frac{b^{(2)}}{i}[(s-h-g)^i - (s-h-g-e)^i] \\ + \frac{c^{(2)}}{i(i+1)}[(s-h-g)^{i+1} - (s-h-g-e)^{i+1}] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \\ + \frac{(i-1)(i-2)}{1.2}\left\{ \begin{array}{l} a^{(3)}[(s-2h-2g)^{i-1} - (s-2h-2g-e)^{i-1}] \\ + \frac{b^{(3)}}{i}[(s-2h-2g)^i - (s-2h-2g-e)^i] \\ + \frac{c^{(3)}}{i(i+1)}[(s-2h-2g)^{i+1} - (s-2h-2g-e)^{i+1}] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Il faut rejeter de cette expression les termes dans lesquels la quantité élevée sous le signe des puissances est négative.

Supposons maintenant que, z, z_1, z_2, ... représentant toujours les erreurs de $i-1$ observations, la loi de facilité, tant de l'erreur z que de l'erreur négative $-z$, soit $\mathfrak{G}(h-z)$, et que h et $-h$ soient les limites de ces erreurs. Supposons de plus que cette loi soit la même pour toutes les observations, et cherchons la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites p et $p+e$.

Si l'on fait $z=t-h$, $z_1=t_1-h$, ..., il est clair que t, t_1, ... seront toujours positifs et pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à $2h$; mais ici la loi de facilité est discontinue en deux points. Depuis $t=0$ jusqu'à $t=h$, elle est exprimée par $\mathfrak{G}t$. Depuis $t=h$ jusqu'à $t=2h$, elle est exprimée par $\mathfrak{G}(2h-t)$; enfin elle est nulle depuis $t=2h$ jusqu'à t infini. On a donc

$$q=h, \qquad q'=2h;$$

on a ensuite

$$\varphi(t)=\mathfrak{G}t,$$
$$\varphi'(t)+\varphi(t)=(2h-t)\mathfrak{G},$$
$$\varphi''(t)+\varphi'(t)+\varphi(t)=0,$$

ce qui donne

$$\varphi'(t)=(2h-2t)\mathfrak{G}, \qquad \varphi''(t)=(t-2h)\mathfrak{G}.$$

Ainsi l'on a dans ce cas

$$\varphi(t)+l^q\varphi'(q+t)+l^{q'}\varphi''(q'+t)=\mathfrak{G}t(1-l^h)^2,$$

équation qui a encore lieu en y changeant t en t_1, t_2, ... Présentement on a

$$z+z_1+z_2+\ldots+z_{i-2}=t+t_1+t_2+\ldots+t_{i-2}-(i-1)h;$$

donc la somme des erreurs z, z_1, ... devant être, par hypothèse, renfermée dans les limites p et $p+e$, la somme des valeurs de t, t_1, ..., t_{i-2} sera comprise dans les limites $(i-1)h+p$ et $(i-1)h+p+e$; en sorte que, si l'on fait

$$t+t_1+t_2+\ldots+t_{i-2}=s-t_{i-1},$$

s étant supposé égal à $(i-1)h+p+e$, t_{i-1} pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e, et l'on verra, comme dans l'exemple précédent, que sa facilité doit être supposée égale à l'unité dans cet intervalle, et qu'elle doit être supposée nulle au delà de cet intervalle; ainsi l'on a

$$q_{i-1}=e \qquad \text{et} \qquad \varphi_{i-1}(t_{i-1})+l^{q_{i-1}}\varphi'_{i-1}(t_{i-1})=1-l^e.$$

Cela posé, si l'on observe que, $2\mathfrak{G}\int dz(h-z)$ étant la probabilité que l'erreur d'une observation est comprise dans les limites $-h$ et $+h$, ce qui est certain, on a $\mathfrak{G}=\frac{1}{h^2}$; la formule (C) donnera, pour l'expression de la probabilité cherchée,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(2i-2)h^{2i-2}}\left\{\begin{array}{l} s^{2i-2}-(s-e)^{2i-2} \\ -(2i-2)[(s-h)^{2i-2}-(s-h-e)^{2i-2}] \\ +\frac{(2i-2)(2i-3)}{1.2}[(s-2h)^{2i-2}-(s-2h-e)^{2i-2}] \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

en ayant soin de rejeter tous les termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance $2i-2$ est négative.

Nous allons encore appliquer cette analyse au problème suivant. Si l'on conçoit un nombre i de points rangés en ligne droite, et sur ces points des ordonnées, dont la première soit au moins égale à la seconde, celle-ci au moins égale à la troisième, et ainsi de suite, et que la somme de ces i ordonnées soit constamment égale à s, en supposant s partagé dans une infinité de parties, on peut satisfaire aux conditions précédentes, d'une infinité de manières. On propose de déterminer la valeur de chacune des ordonnées, moyenne entre toutes les valeurs qu'elle peut recevoir.

Soit z la plus petite ordonnée, ou l'ordonnée $i^{\text{ième}}$; soit $z+z_1$ l'ordonnée $(i-1)^{\text{ième}}$; soit $z+z_1+z_2$ l'ordonnée $(i-2)^{\text{ième}}$, et ainsi de suite jusqu'à la première ordonnée qui sera $z+z_1+\ldots+z_{i-1}$. Les quantités z, z_1, z_2, ... seront ou nulles ou positives, et leur somme $iz+(i-1)z_1+(i-2)z_2+\ldots+z_{i-1}$ sera, par les conditions du pro-

blème, égale à s. Soit

$$iz = t, \qquad (i-1)z_1 = t_1, \qquad (i-2)z_2 = t_2, \qquad \ldots, \qquad z_{i-1} = t_{i-1};$$

on aura

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-1} = s;$$

les variables $t, t_1, t_2, \ldots$ pourront s'étendre jusqu'à s. L'ordonnée $r^{\text{ième}}$ sera

$$\frac{t}{i} + \frac{t_1}{i-1} + \ldots + \frac{t_{i-r}}{r}.$$

Il faut déterminer la somme de toutes les variations que cette quantité peut recevoir, et la diviser par le nombre total de ces variations, pour avoir l'ordonnée moyenne. La formule (B) donne très facilement cette somme, en observant qu'ici

$$\psi(t, t_1, t_2, \ldots) = \frac{t}{i} + \frac{t_1}{i-1} + \ldots + \frac{t_{i-r}}{r},$$

et on la trouve égale à

$$\frac{s^i}{1.2.3\ldots i}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-2} + \ldots + \frac{1}{r}\right).$$

En divisant cette quantité par le nombre total des combinaisons, qui ne peut être qu'une fonction de i et de s et que nous désignerons par N, on aura, pour la valeur moyenne de l'ordonnée $r^{\text{ième}}$,

$$\frac{s^i}{1.2.3\ldots i\,\mathrm{N}}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \ldots + \frac{1}{r}\right).$$

Pour déterminer N, nous observerons que toutes les valeurs moyennes doivent ensemble égaler s, ce qui donne

$$\mathrm{N} = \frac{s^{i-1}}{1.2.3\ldots(i-1)};$$

la valeur moyenne de l'ordonnée $r^{\text{ième}}$ est donc

$$(\varepsilon) \qquad \frac{s}{i}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \ldots + \frac{1}{r}\right).$$

Supposons qu'un effet observé n'ait pu être produit que par l'une des

i causes A, B, C, ..., et qu'une personne, après avoir apprécié leurs probabilités respectives, écrive sur un billet les lettres qui indiquent ces causes, dans l'ordre des probabilités qu'elle leur attribue, en écrivant la première la lettre indiquant la cause qui lui semble la plus probable. Il est clair que l'on aura, par la formule précédente, la valeur moyenne des probabilités qu'il peut supposer à chacune d'elles, en observant qu'ici la quantité s, que l'on doit répartir sur chacune des causes, est la certitude ou l'unité, puisque la personne est assurée que l'effet doit résulter de l'une d'elles. La valeur moyenne de la probabilité qu'elle attribue à la cause qu'elle a placée sur son billet au rang $r^{\text{ième}}$ est donc

$$\frac{1}{i}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \ldots + \frac{1}{r}\right).$$

De là il suit que, si un tribunal est appelé à décider sur cet objet, et que chaque membre exprime son opinion par un billet semblable au précédent, alors, en écrivant sur chaque billet, à côté des lettres qui indiquent les causes, les valeurs moyennes qui répondent au rang qu'elles ont sur le billet, en faisant ensuite une somme de toutes les valeurs qui correspondent à chaque cause sur les divers billets, la cause à laquelle répondra la plus grande somme sera celle que le tribunal jugera la plus probable.

Cette règle n'est point applicable aux choix des assemblées électorales, parce que les électeurs ne sont point astreints, comme les juges, à répartir une même somme prise pour unité sur les divers partis entre lesquels ils doivent se déterminer; ils peuvent supposer à chaque candidat toutes les nuances de mérite comprises entre le mérite nul et le maximum de mérite, que nous désignerons par a; l'ordre des noms sur chaque billet ne fait qu'indiquer que l'électeur préfère le premier au second, le second au troisième, etc. On déterminera ainsi les nombres qu'il faut écrire sur le billet à côté des noms des candidats.

Soient $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_i$ les mérites respectifs des i candidats dans l'opinion de l'électeur, t, étant le mérite qu'il suppose à celui des can-

didats qu'il a mis au premier rang, t_2 étant le mérite qu'il suppose au second, et ainsi de suite. L'intégrale $\int t_r dt_1 dt_2 \ldots dt_i$ exprimera la somme des mérites que l'électeur peut attribuer au candidat r, pourvu que l'on intègre d'abord par rapport à t_i, depuis $t_i = 0$ jusqu'à $t_i = t_{i-1}$, ensuite par rapport à t_{i-1}, depuis t_{i-1} jusqu'à t_{i-2}, et ainsi de suite, jusqu'à l'intégrale relative à t_1, que l'on prendra depuis t_1 nul jusqu'à $t_1 = a$. Car il est visible qu'alors t_i ne surpasse jamais t_{i-1}, t_{i-1} ne surpasse jamais t_{i-2}, ... En divisant l'intégrale précédente par celle-ci $\int dt_1 dt_2 \ldots dt_i$ qui exprime la somme totale des combinaisons dans lesquelles la condition précédente est remplie, on aura l'expression moyenne du mérite que l'électeur peut attribuer au candidat $r^{\text{ième}}$. En exécutant les intégrations, on trouve $\frac{i-r+1}{i+1} a$ pour cette expression.

De là il suit que l'on peut écrire sur le billet de chaque électeur i à côté du premier nom, $i-1$ à côté du second, $i-2$ à côté du troisième, ... En réunissant ensuite tous les nombres relatifs à chaque candidat sur les divers billets, celui des candidats qui aura la plus grande somme doit être présumé le candidat qui, aux yeux de l'Assemblée électorale, a le plus grand mérite, et doit par conséquent être choisi.

Ce mode d'élection serait sans doute le meilleur, si des considérations étrangères au mérite n'influaient point souvent sur le choix des électeurs, même les plus honnêtes, et ne les déterminaient point à placer aux derniers rangs les candidats les plus redoutables à celui qu'ils préfèrent, ce qui donne un grand avantage aux candidats d'un mérite médiocre. Aussi l'expérience l'a-t-elle fait abandonner aux établissements qui l'avaient adopté.

Supposons que les erreurs d'une observation puissent s'étendre dans les limites $+a$ et $-a$, mais qu'ignorant la loi de probabilité de ces erreurs on ne l'assujettisse qu'à la condition de leur donner une probabilité d'autant plus petite qu'elles sont plus grandes, la probabilité des erreurs positives étant supposée la même que celle des erreurs négatives correspondantes, toutes choses qu'il est naturel d'admettre. La

formule (ε) donnera encore la loi moyenne des erreurs. Pour cela on concevra l'intervalle a partagé dans un nombre infini i de parties représentées par dx, en sorte que $i = \frac{a}{dx}$; on fera ensuite $r = \frac{x}{dx}$; la formule (ε) devient ainsi

$$\frac{s\,dx}{a} \int \frac{dx}{x},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = x$ jusqu'à $x = a$. Dans la question présente $s = \frac{1}{2}$; car l'erreur devant tomber dans les limites $-a$ et $+a$, la probabilité qu'elle tombera dans les limites zéro et a est $\frac{1}{2}$; c'est la quantité s qu'il faut répartir sur tous les points de l'intervalle a; la formule (ε) devient donc alors

$$\frac{dx}{2a} \log \frac{a}{x}.$$

Ainsi la loi moyenne des probabilités des erreurs positives x, ou négatives $-x$, est

$$\frac{1}{2a} \log \frac{a}{x}.$$