CHAPITRE VI.

DES FLUX PARTIELS QUI DÉPENDENT DE LA QUATRIÈME PUISSANCE INVERSE DE LA DISTANCE DE LA LUNE A LA TERRE.

On sait, par la théorie des probabilités, que le grand nombre des observations peut suppléer leur précision, pour reconnaître des inégalités beaucoup moindres que les erreurs dont elles sont susceptibles. J'ai donc pensé que les flux dépendants des différences de l'action de la Lune dans les nouvelles lunes à son action dans les pleines lunes et de son action dans les quadratures boréales à son action dans les quadratures australes pouvaient devenir sensibles dans l'ensemble des nombreuses observations des marées que M. Bouvard a discutées. Ces flux sont produits par les termes de l'expression de l'action lunaire qui sont divisés par la quatrième puissance de la distance de la Lune à la Terre. Les termes divisés par le cube de cette distance, les seuls que l'on ait considérés jusqu'ici ne donnent aucune différence entre les flux lunaires des nouvelles lunes et les flux lunaires des pleines lunes. Les termes divisés par la quatrième puissance de la distance lunaire sont, par le n° **23** du Livre III,

$$(p)\qquad \frac{5}{2}\frac{L'}{r'^4}\left\{\begin{aligned}&[\cos\theta\sin v'+\sin\theta\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi')]^3\\ &\quad-\frac{3}{5}[\cos\theta\sin v'+\sin\theta\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi')]\end{aligned}\right\}.$$

On peut, dans le développement de cette fonction, négliger les termes qui dépendent de l'angle $nt+\varpi-\psi'$, parce qu'il résulte du Chapitre précédent que les flux partiels relatifs à cet angle sont très-

petits dans le port de Brest et deviennent insensibles lorsqu'ils sont divisés par la distance r' de la Lune à la Terre. Nous allons d'abord considérer le terme dépendant de l'angle $3nt+3\varpi-3\psi'$. Ce terme est

$$\frac{5}{8}\frac{L'}{r'^4}\sin^3\theta\cos^3 v'\cos[3nt+3\varpi-3\psi-3(\psi'-\psi)].$$

En substituant pour $\sin v'$, $\cos v'$, $\sin\psi'$ et $\cos\psi'$ leurs valeurs données dans le Chapitre II, on voit que ce terme produit un flux partiel de la forme

$$G\cos[3nt+3\varpi-3\varphi-3(\varphi'-\varphi)-3Q],$$

G et Q étant des constantes que l'observation seule peut déterminer. Les autres flux partiels dépendants de l'angle $3nt+3\varpi-3\varphi$ sont multipliés par le carré du sinus de l'inclinaison ϵ' de l'orbite lunaire à l'équateur; ils sont peu considérables et produisent la différence entre les observations équinoxiales et les observations solsticiales. On y aurait égard en considérant l'inégalité

$$G\cos[3nt+3\varpi-3\varphi-3(\varphi'-\varphi)-3Q]$$

comme représentant l'inégalité relative aux équinoxes, et en la multipliant par $\cos^2 v'$ pour la rapporter aux solstices, ce qui diminuerait d'un cinquième à peu près la valeur de G dans les solstices; mais peut-être cette correction n'est pas suffisante. Dans les nouvelles lunes équinoxiales, $\varphi'-\varphi$ est nul. De plus, au moment de la haute mer du soir, $nt+\varpi-\varphi$ ou l'angle horaire du Soleil est λ; l'inégalité précédente devient ainsi

$$G\cos(3\lambda-3Q);$$

c'est la quantité que ce flux partiel ajoute à la hauteur de la pleine mer du soir à Brest. Pour avoir sa valeur dans la basse mer du matin qui la précède, il faut changer λ en $\lambda-\frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$-G\sin(3\lambda-3Q);$$

ce flux ajoute donc à l'excès de la haute mer du soir à Brest dans les nouvelles lunes, sur la basse mer qui précède, la quantité

$$G\cos(3\lambda - 3Q) + G\sin(3\lambda - 3Q).$$

On verra de la même manière que dans les pleines lunes, où $\varphi' - \varphi$ est égal à π, ce flux ajoute à cet excès une quantité contraire

$$-G\cos(3\lambda - 3Q) - G\sin(3\lambda - 3Q);$$

ce flux doit donc, s'il est sensible, se manifester dans la différence d'un grand nombre de ces excès dans les nouvelles lunes et dans les pleines lunes.

Ce même flux doit se manifester encore dans les observations des marées quadratures. Dans ces observations, on a déterminé l'excès de la hauteur de la pleine mer du matin sur la basse mer du soir; l'inégalité précédente devient, au moment de la pleine mer du matin,

$$G\cos\left[3\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right) - 3Q - 3(\varphi' - \varphi)\right],$$

et au moment de la basse mer du soir, elle devient

$$G\cos[3\lambda - 3Q - 3(\varphi' - \varphi)].$$

Dans le premier quartier, $\varphi' - \varphi$ est égal à $\frac{\pi}{2}$; l'excès de la haute mer du matin sur la basse mer du soir est donc

$$-G\cos(3\lambda - 3Q) + G\sin(3\lambda - 3Q).$$

Cet excès prend un signe contraire dans le second quartier, où

$$\varphi' - \varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

Dans les quadratures solsticiales, la Lune est près de l'équateur; dans les quadratures équinoxiales, elle est vers son maximum de déclinaison. La différence entre les marées quadratures du premier quartier et celles du second quartier doit donc être plus petite dans les équinoxes que dans les solstices.

L'excès d'une marée d'une nouvelle lune sur celle d'une pleine lune est

$$2G\sin(3\lambda - 3Q) + 2G\cos(3\lambda - 3Q);$$

nommons E cet excès. L'excès d'une marée du premier quartier sur une marée du second quartier est

$$2G\sin(3\lambda - 3Q) - 2G\cos(3\lambda - 3Q);$$

nommons E' cet excès. On aura

$$\tang(3\lambda - 3Q) = \frac{E + E'}{E - E'},$$

$$G = \frac{E}{2\sqrt{2}}\sqrt{1 + \left(\frac{E'}{E}\right)^2}.$$

Pour comparer ces résultats aux observations, M. Bouvard a fait la somme des hauteurs des pleines mers du soir au-dessus des basses mers du matin du jour de la syzygie et des trois jours suivants, dans les soixante-quatre nouvelles lunes équinoxiales qu'il avait considérées, et il a trouvé cette somme égale à 1583,594. Le même calcul, relatif aux soixante-quatre pleines lunes équinoxiales, lui a donné pour cette somme 1583,594 + 21,419. Les pleines mers des lunes solsticiales lui ont donné les sommes

$$1400{,}016, \quad 1400{,}016 + 10{,}175.$$

Ainsi les marées des pleines lunes ont excédé les marées des nouvelles lunes tant dans les équinoxes que dans les solstices, et, conformément à la théorie, cet excès a été plus grand dans les équinoxes que dans les solstices.

Les hauteurs des pleines mers quadratures du matin au-dessus des basses mers du soir du jour de la quadrature et des trois jours suivants ont donné, relativement aux quadratures équinoxiales du premier et du second quartier de la Lune, les sommes

$$710{,}850, \quad 710{,}850 - 5{,}605,$$

et, relativement aux quadratures solsticiales, les sommes

$$853{,}595, \quad 853{,}595 - 20{,}542.$$

Conformément à la théorie, la différence est plus grande dans les quadratures solsticiales que dans les quadratures équinoxiales; mais une partie de cet excès est due aux erreurs des observations. L'ensemble des différences dans les nouvelles et pleines lunes équinoxiales et solsticiales est $128\mathrm{E}$, et l'ensemble des différences dans les quadratures équinoxiales et solsticiales est $128\mathrm{E}'$; on a donc

$$\begin{aligned} 128\mathrm{E} &= -21{,}016 - 10{,}175, \\ 128\mathrm{E}' &= 5{,}605 + 20{,}542, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en degrés centésimaux,

$$\begin{aligned} 3\lambda - 3\mathrm{Q} &= 5^{\circ}{,}59, \\ \mathrm{G} &= -0^{\mathrm{m}}{,}11681. \end{aligned}$$

Un aussi petit flux exige un plus grand nombre d'observations pour être déterminé avec exactitude; mais son existence est indiquée par les observations précédentes avec une grande probabilité.

Considérons maintenant les termes de la fonction (p) dépendants de l'angle $2nt + 2\varpi - 2\psi'$; ces termes résultant du développement de la quantité

$$\frac{15}{2}\frac{\mathrm{L}'}{r'^4}\cos\theta' \sin v' \sin^2\theta \cos^2 v' \cos^2(nt + \varpi - \psi'),$$

ils correspondent aux termes de l'expression de l'action lunaire divisés par le cube de la distance r' de la Lune, qui, par le Chapitre II, sont le développement de la quantité

$$\frac{3}{2}\frac{\mathrm{L}'}{r'^3}\sin^2\theta \cos^2 v' \cos^2(nt + \varpi - \psi').$$

Si l'on suit l'analyse du Chapitre cité et si l'on observe que $\sin v'$ est égal à $\sin\epsilon' \sin\varphi'$, φ' étant la longitude de la Lune, comptée de l'intersection de son orbite avec l'équateur, on voit qu'il en résulte

dans la hauteur de la marée à Brest, soit dans les syzygies solsticiales, soit dans les quadratures équinoxiales, une quantité égale à $\pm \mathrm{F}$, le signe supérieur se rapportant à la déclinaison boréale de la Lune, et le signe inférieur à sa déclinaison australe. L'observation peut seule déterminer la constante F. Si les flux partiels avaient, relativement à la latitude $\frac{\pi}{2} - \theta$ du port, le même rapport que les forces, la valeur de F serait à la partie de la hauteur de la mer due à l'action de la Lune à peu près dans le rapport de $\frac{15}{2r'}\cos\theta \sin\epsilon'$ à $\frac{3}{2}$. Mais nous avons remarqué dans le Chapitre I que, chaque flux partiel étant la résultante de tous les flux semblables qui émanent de chaque point de la surface de la mer et qui reçoivent un nombre presque infini de modifications avant que de parvenir dans le port de Brest, la résultante n'a point avec la latitude de Brest le même rapport que les forces productrices de ce flux; elle peut même avoir un signe contraire à celui que ces forces indiquent, en sorte que l'observation peut seule le faire connaître. Pour cela, M. Bouvard a séparé, dans le calcul des syzygies solsticiales, les marées où la déclinaison de la Lune était australe des marées où la déclinaison de la Lune était boréale, et il a fait sur ces marées ainsi séparées le même calcul qu'il avait fait sur leur ensemble, et dont nous avons donné le résultat dans le Chapitre III; il a fait le même calcul relativement aux quadratures équinoxiales, et il a formé la Table suivante :

TABLE XVIII.

Marées syzygies solsticiales. Lune australe.

$$f = 326,701,\quad f' = 348,393,\quad f'' = 362,051,$$
$$f''' = 361,672,\quad f^{\text{iv}} = 350,733,\quad f^{\text{v}} = 329,636,$$
$$362,8222 - 5,5778(t - 2,5621)^2,$$
$$362,9096 = 2i\alpha',$$
$$5,5778 = 2i6'.$$

Marées syzygies solsticiales. Lune boréale.

$$f = 318,782,\quad f' = 342,724,\quad f'' = 352,605,$$
$$f''' = 350,299,\quad f^{\text{iv}} = 340,006,\quad f^{\text{v}} = 319,253,$$
$$353,1223 - 5,4316(t - 2,4784)^2,$$
$$353,2072 = 2i\alpha',$$
$$5,4316 = 2i6'.$$

Marées quadratures équinoxiales. Lune australe.

$$f = 199,704,\quad f' = 160,878,\quad f'' = 161,350,\quad f''' = 201,089,$$
$$156,2010 + 19,6412(t - 1,4882)^2,$$
$$155,3925 = 2i\alpha'',$$
$$19,6412 = 2i6''.$$

Marées quadratures équinoxiales. Lune boréale.

$$f = 194,418,\quad f' = 151,304,\quad f'' = 151,616,\quad f''' = 195,106,$$
$$146,0466 + 21,6510(t - 1,4945)^2$$
$$145,7077 = 2i\alpha'',$$
$$21,6510 = 2i6''.$$

On voit d'abord, par cette Table, que l'action de la Lune australe sur la mer l'emporte sur l'action de la Lune boréale. La valeur de 2F est donnée, soit par la différence des valeurs de $2i\alpha'$, relatives aux marées syzygies solsticiales, soit par la différence des valeurs de $2i\alpha''$, relatives aux marées quadratures. La première de ces différences donne

$$128\text{F} = -9,7024,$$

parce qu'il y a 128 syzygies solsticiales.

La seconde de ces différences donne

$$128\text{F} = -9,6848.$$

L'accord de ces valeurs de 128F ne permet pas de douter que l'action lunaire australe sur l'Océan l'emporte sur l'action lunaire boréale.

CHAPITRE VII.

DU FLUX ET REFLUX DE L'ATMOSPHÈRE.

1. Les observations dont j'ai fait usage correspondant à toutes les saisons, les flux lunaires partiels qui dépendent des déclinaisons de la Lune et de sa parallaxe disparaissent dans l'ensemble de ces observations. Le flux lunaire atmosphérique peut alors s'exprimer, comme celui de la mer, par la formule

$$R\cos[2nt + 2\varpi - 2mt - 2(m't - mt) - 2\lambda'],$$

R et λ' étant des constantes indéterminées. mt est le moyen mouvement du Soleil pendant le temps t, $m't$ est celui de la Lune, nt est la rotation de la Terre, ϖ est la longitude du lieu; tous ces angles sont comptés de l'équinoxe du printemps. $nt + \varpi - mt$ est l'angle horaire du Soleil, que nous ferons partir de midi. Cet angle réduit en temps, à raison de la circonférence entière pour un jour, sera le temps compté depuis midi; λ' sera ainsi l'heure du maximum du flux atmosphérique du soir; R dépend de l'action de la Lune sur l'atmosphère, soit directe, soit transmise par la mer.

Si l'on suppose que la syzygie arrive à midi, ce que l'on peut admettre ici sans erreur sensible comme le résultat moyen des heures de toutes les syzygies considérées, la formule précédente donne $R\cos 2\lambda'$ pour la hauteur du flux au midi du jour de la syzygie. En désignant par q le mouvement synodique de la Lune dans un jour, la hauteur du flux à 9 heures du matin du jour de la syzygie sera

$$-R\sin\left(2\lambda' - \frac{q}{4}\right);$$

à 3 heures du soir, elle sera

$$+R\sin\left(2\lambda' + \frac{q}{4}\right).$$

Soient donc A, A′, A″ les hauteurs observées du baromètre, le jour de la syzygie, à 9 heures du matin, à midi, à 3 heures du soir; on aura

$$C - R\sin\left(2\lambda' - \frac{q}{4}\right) = A,$$
$$C' + R\cos 2\lambda' = A',$$
$$C'' + R\sin\left(2\lambda' + \frac{q}{4}\right) = A'',$$

C, C′, C″ étant les hauteurs du baromètre qui auraient lieu sans l'action de la Lune. Ces équations subsistent également pour le jour de la quadrature, pourvu que l'on y change R en $-$R et A, A′, A″ dans B, B′, B″, ces trois dernières lettres exprimant respectivement les hauteurs du baromètre observées, le jour de la quadrature, à 9 heures du matin, à midi et à 3 heures du soir.

Ces six équations donnent les deux suivantes :

$$4R\cos\frac{q}{4}\sin 2\lambda' = A'' - A + B - B'',$$

$$4R\left(1 - \sin\frac{q}{4}\right)\cos 2\lambda' = 2A' - (A + A'') - 2B' + (B + B'').$$

Ces deux équations sont indépendantes des hauteurs absolues du baromètre; elles n'emploient que les différences $A - A'$, $A - A''$, $A' - A''$ du jour de la syzygie et les différences correspondantes du jour de la quadrature.

Le jour $i^{\text{ième}}$ après chaque syzygie et après chaque quadrature donne les deux équations suivantes :

$$4R\cos\frac{q}{4}\sin(2\lambda' + 2iq) = A''_i - A_i + B_i - B''_i,$$

$$4R\left(1 - \sin\frac{q}{4}\right)\cos(2\lambda' + 2iq) = 2A'_i - (A_i + A''_i) - 2B'_i + (B_i + B''_i).$$

$A_i, A'_i, \ldots, B_i, B'_i, \ldots$ sont les valeurs de $A, A', \ldots, B, B', \ldots$, relatives à ce $i^{\text{ième}}$ jour; i est négatif pour les jours qui précèdent la syzygie ou la quadrature.

On peut conclure des observations de chaque jour les valeurs de R et de λ'. Mais il y a des jours plus propres à déterminer l'une de ces inconnues. La méthode que j'ai désignée sous le nom de *méthode la plus avantageuse* combine toutes les équations de manière à donner les valeurs les plus probables des inconnues. Les deux équations du jour $i^{\text{ième}}$ donnent, en faisant

$$4R\sin 2\lambda' = x, \quad 4R\cos 2\lambda' = y,$$

les suivantes :

$$x\cos\frac{q}{4}\cos 2iq + y\cos\frac{q}{4}\sin 2iq = A''_i - A_i + B_i - B''_i,$$

$$y\left(1-\sin\frac{q}{4}\right)\cos 2iq - x\left(1-\sin\frac{q}{4}\right)\sin 2iq = 2A'_i - (A_i + A''_i) - 2B'_i + (B_i + B''_i).$$

$\sin\frac{q}{4}$ est une quantité très-petite et à fort peu près égale à $\frac{1}{19}$. Si l'on néglige son carré et si l'on nomme F_i la quantité

$$2A'_i - (A_i + A''_i) - 2B'_i + (B_i + B''_i)$$

augmentée de sa dix-neuvième partie, si l'on nomme pareillement E_i la quantité

$$A''_i - A_i + B_i - B''_i,$$

les deux équations précédentes deviendront

$$x\cos 2iq + y\sin 2iq = E_i,$$
$$y\cos 2iq - x\sin 2iq = F_i.$$

En faisant i successivement égal à $-1, 0, +1, +2$, on aura huit équations qui, résolues par le procédé de la méthode la plus avantageuse, détermineront x et y. Mais cette méthode exige que l'on connaisse la loi des écarts des hauteurs du baromètre de leur hauteur moyenne, dus aux causes irrégulières, pour les diverses heures du jour : ce que nous ignorons. Dans cet état d'incertitude, nous supposerons cette loi la

même pour les heures diverses, l'inexactitude de cette supposition n'ayant que peu d'influence sur les résultats cherchés. Alors, pour former les deux équations finales qui doivent donner x et y, il faut, suivant le procédé que j'ai donné dans le *Troisième Supplément* à ma *Théorie analytique des probabilités*, multiplier chacune des quatre équations relatives à la lettre E par 3 et par son coefficient de x; il faut multiplier chacune des équations relatives à la lettre F par son coefficient de y; enfin il faut ajouter tous ces produits, ce qui donne

$$x(8 + \Sigma\cos 4iq) + y\Sigma\sin 4iq = 3\Sigma E_i\cos 2iq - \Sigma F_i\sin 2iq,$$

le signe Σ exprimant la somme de toutes les quantités qu'il affecte et que l'on obtient en faisant successivement $i = -1$, $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$. En opérant de la même manière sur le coefficient de y, on aura la seconde équation finale

$$y(8 - \Sigma\cos 4iq) + x\Sigma\sin 4iq = 3\Sigma E_i\sin 2iq + \Sigma F_i\cos 2iq.$$

Toutes les syzygies et toutes les quadratures, depuis le 1er octobre 1815 jusqu'au 1er octobre 1823, ont donné, en réduisant la colonne de mercure du baromètre à zéro de température,

$$\begin{aligned}
A_{-1} &= 755^{\text{mm}},925, & A'_{-1} &= 755^{\text{mm}},712, & A''_{-1} &= 755^{\text{mm}},175,\\
B_{-1} &= 756,315, & B'_{-1} &= 756,034, & B''_{-1} &= 755,549,\\
A &= 756,195, & A' &= 755,788, & A'' &= 755,270,\\
B &= 756,072, & B' &= 755,692, & B'' &= 755,041,\\
A_1 &= 755,704, & A'_1 &= 755,416, & A''_1 &= 755,010,\\
B_1 &= 755,296, & B'_1 &= 755,015, & B''_1 &= 754,386,\\
A_2 &= 755,631, & A'_2 &= 755,407, & A''_2 &= 754,955,\\
B_2 &= 755,575, & B'_2 &= 755,322, & B''_2 &= 754,891.
\end{aligned}$$

De là on conclut

$$\begin{aligned}
E_{-1} &= +0^{\text{mm}},016, & E_0 &= +0^{\text{mm}},105, & E_1 &= +0^{\text{mm}},216, & E_2 &= +0^{\text{mm}},008,\\
F_{-1} &= +0,126, & F_0 &= +0,168, & F_1 &= -0,242, & F_2 &= +0,053.
\end{aligned}$$

On a ainsi les deux équations finales

$$10,18716.x + 0,99136.y = 1,076815,$$
$$4,51927.y + 0,99136.x = 0,027033,$$

d'où l'on tire

$$x = 0,10743, \quad y = -0,017591.$$

L'étendue 2R du flux lunaire est égale à $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$; elle est donc $0^{mm},05443$.

On a

$$\tang 2\lambda = \frac{x}{y},$$

ce qui donne, en degrés sexagésimaux,

$$\lambda = 49°39'.$$

Cette valeur, réduite en temps, donne, pour l'heure sexagésimale du plus haut flux lunaire du jour de la syzygie, $3^h 18^m 36^s$ du soir.

2. Déterminons maintenant la probabilité avec laquelle les observations précédentes indiquent un flux lunaire atmosphérique. Il résulte de ce que j'ai fait voir dans le n° **20** du Livre II de ma *Théorie analytique des probabilités* que, si l'on prend un très-grand nombre n de valeurs de la variation diurne du baromètre, que l'on divise leur somme par n pour avoir la valeur moyenne, que l'on nomme e la somme des carrés des différences de cette valeur moyenne à chacune de ces valeurs, si l'on nomme ensuite u l'erreur moyenne d'un nombre considérable s de valeurs de la variation diurne, la probabilité de u sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{n}{2e}su^2},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Le nombre n des observations diurnes comprises dans les observations précédentes est 1584, et l'on a trouvé, relativement à ces observations,

la valeur moyenne de la variation diurne égale à $0^{mm},8045$, et e égal à 5572,93, ce qui donne

$$\frac{n}{2e} = 0,142116,$$

le millimètre étant pris pour l'unité. La probabilité de u est ainsi proportionnelle à

$$c^{-0.142116.su^2}.$$

En supposant que s exprime le nombre des variations diurnes observées vers les syzygies, on a $s = 792$, et la probabilité de l'erreur moyenne u sera proportionnelle à

$$c^{-112.55.u^2},$$

s'il n'y a point de cause constante qui influe sur ces variations. La probabilité de l'erreur moyenne u' des 792 observations vers les quadratures sera pareillement proportionnelle à

$$c^{-112.55.u'^2}.$$

Soit z l'excès de u' sur u; la probabilité des erreurs simultanées u et u' sera proportionnelle à

$$c^{-112.55.[(u+z)^2+u^2]};$$

la probabilité de z sera donc proportionnelle à l'intégrale

$$\int du . c^{-112.55.[(u+z)^2+u^2]},$$

l'intégrale étant prise depuis u égal à l'infini négatif jusqu'à u égal à l'infini positif. En donnant à l'intégrale précédente cette forme

$$c^{-112,55\,\frac{z^2}{2}} \int du . c^{-112,55\,2.\left(u+\frac{z}{2}\right)^2},$$

on voit que la probabilité de z est proportionnelle à

$$c^{-\frac{112,55}{2}z^2}.$$

Les observations précédentes donnent pour z

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l} \mathrm{B}_{-1}-\mathrm{B}''_{-1}+\mathrm{B}-\mathrm{B}''+\mathrm{B}_1-\mathrm{B}''_1+\mathrm{B}_2-\mathrm{B}''_2 \\ +\mathrm{A}''_{-1}-\mathrm{A}_{-1}+\mathrm{A}''-\mathrm{A}+\mathrm{A}''_1-\mathrm{A}_1+\mathrm{A}''_2-\mathrm{A}_2 \end{array}\right),$$

d'où l'on tire

$$z = 0,0865.$$

La probabilité que les seules anomalies du hasard donneront une valeur de z plus petite est donc

$$\frac{\int dz.c^{-\frac{112.55}{2}z^2}}{\int dz.c^{-\frac{112.55}{2}z^2}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=0,0865$ et celle du dénominateur étant prise depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$. Si l'on fait

$$t = z\sqrt{\frac{112,55}{2}},$$

cette fraction devient

$$1-\frac{\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $t=0,0865.\sqrt{\frac{112,55}{2}}$ jusqu'à t infini et π étant le rapport de la circonférence au diamètre. Ainsi la probabilité que la valeur observée de z n'atteindrait pas 0,0865 par les seules chances du hasard est 0,843; il y a donc quelque invraisemblance à leur attribuer cette valeur; mais cette invraisemblance est si petite, que, pour affirmer quelque chose à cet égard, il faut multiplier considérablement les observations. Neuf fois plus d'observations donneraient

$$t = 0,0865.\sqrt{\frac{112,55}{2}.9}.$$

Si la valeur de z restait égale à 0,0865, la probabilité que cette valeur ne serait pas l'effet du hasard serait à fort peu près $\frac{337}{338}$; cette valeur indiquerait donc alors avec beaucoup de vraisemblance le flux lunaire atmosphérique.

REMARQUES

SUR LA PAGE 115 DU PREMIER VOLUME DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

J'ai dit, à la 6e ligne de cette page, que je ferais voir, dans la théorie du flux et du reflux de la mer, que la valeur de $\delta V'$ est à très-peu près la même pour toutes les molécules situées sur le même rayon terrestre. J'ai omis de le faire en exposant cette théorie; pour réparer cette omission, je vais considérer la partie de $\delta V'$ relative à l'attraction de la couche aqueuse. Cette partie est donnée par l'expression de ΔV de la page 39 du second Volume. Si l'on fait varier θ et ϖ, dans l'intérieur, des mêmes quantités αu et αv qu'à la surface, ce qui revient à considérer les molécules situées primitivement sur le même rayon comme restant constamment sur un même rayon, alors $\delta V'$ ne varie de l'intérieur à la surface qu'à raison de la variation αy du mouvement de la molécule dans le sens vertical, variation d'un ordre inférieur à celui de la variation αu de son mouvement horizontal dans le sens du méridien. Or il résulte de l'expression de ΔV que la variation αy de r a pour facteur une quantité de l'ordre de la profondeur de la mer; on peut donc négliger la variation qui en résulte dans $\delta V'$ et supposer $\delta V'$ le même à l'intérieur qu'à la surface, ce qui rend l'équation (M) commune à tous ces points. Comme cette équation donne, pour tous les points situés sur le même rayon, les mêmes valeurs de αu et de αv, on voit que la supposition des points restant sur le même rayon pendant la durée du mouvement satisfait aux conditions de ce mouvement; car il est facile d'appliquer à la force attractive des astres ce que nous venons de dire relativement à l'attraction de la couche aqueuse.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

LIVRE XIV.

JUILLET 1824.

LIVRE XIV.

DU MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES AUTOUR DE LEUR CENTRE DE GRAVITÉ.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA PRÉCESSION DES ÉQUINOXES.

Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet.

1. La plus ancienne observation de la position sidérale des solstices ou des équinoxes remonte au commencement du XIIe siècle avant notre ère. Tcheou-Kong, qui gouvernait alors la Chine pendant la minorité de son neveu, fixa la position du solstice d'hiver à 2 degrés chinois de *nu*, constellation chinoise qui commençait par ε du Verseau. Cette détermination, que l'on peut rapporter à l'an 1100 avant notre ère, ne diffère pas de 92 minutes centésimales du résultat des formules du Livre VI, différence qui paraîtra bien petite si l'on considère l'imperfection des moyens dont on pouvait alors faire usage pour obtenir un élément aussi délicat. La même tradition qui nous a transmis ce précieux résultat nous a pareillement transmis l'observation des ombres du gnomon aux solstices d'hiver et d'été, faite par le même prince. L'accord de l'obliquité de l'écliptique qu'elle donne pour cette époque avec les formules du Livre VI ne permet pas de révoquer en doute cette observation, regardée comme incontestable par le missionnaire Gaubil, l'homme le plus versé dans l'Astronomie chinoise, qu'il

avait approfondie pendant un long séjour à la Chine. Dans le v^e siècle avant notre ère, les astronomes chinois placèrent le solstice d'hiver au commencement de la constellation chinoise *nicou*, dont la première étoile était β du Capricorne. Il est fort vraisemblable, dit le savant et judicieux Gaubil, que ces astronomes, en comparant cette position du solstice d'hiver avec celle que Tcheou-Kong lui avait assignée et qui leur était bien connue, remarquèrent le mouvement rétrograde des solstices par rapport aux étoiles; mais rien dans l'Astronomie des Égyptiens, des Chaldéens et des Grecs n'indique que ces peuples aient eu connaissance des observations chinoises. Il faut descendre de huit siècles depuis Tcheou-Kong pour avoir des observations de leurs astronomes sur la position sidérale des équinoxes. Aristille et Timocharis, premiers observateurs de l'école d'Alexandrie, déterminèrent la position de plusieurs étoiles par rapport à l'équinoxe du printemps, et ce fut en comparant leurs observations aux siennes qu'Hipparque reconnut le changement de la position équinoxiale des étoiles, changement que les Égyptiens et les Chaldéens paraissent avoir ignoré. Les périodes que les Chaldéens assignaient aux mouvements sidéraux du Soleil, de la Lune, de ses nœuds et de son périgée, périodes que Geminus et Ptolémée nous ont transmises, supposent une année sidérale de $365^j\frac{1}{4}$, la même que l'année tropique admise généralement par les anciens astronomes; ils ne supposaient donc pas dans les étoiles un mouvement par rapport aux équinoxes. Ptolémée, qui pouvait mieux que nous connaître ce que l'on avait avant lui pensé sur cet objet, dit expressément qu'Hipparque soupçonna le premier ce mouvement, et qu'il y fut conduit uniquement par la comparaison de ses observations avec celles d'Aristille et de Timocharis. Hipparque reconnut que, depuis le temps de ces astronomes, les étoiles s'étaient avancées en longitude, comptée de l'équinoxe du printemps, de 1 degré sexagésimal par siècle, sans changer de latitude au-dessus de l'écliptique, ce qu'il expliqua en faisant mouvoir la sphère des étoiles autour des pôles de l'écliptique. Ptolémée confirma par ses propres observations la découverte d'Hipparque; mais, ayant conclu de ses observations défectueuses des équinoxes la même durée de l'année tropique qu'Hipparque avait donnée, il dut retrouver, et il retrouva en effet, le même mouvement des étoiles en longitude. Les astronomes arabes rectifièrent ce mouvement; ils remarquèrent l'inexactitude des équinoxes de Ptolémée. En comparant ceux qu'ils observèrent avec les équinoxes d'Hipparque, ils donnèrent une durée de l'année tropique plus exacte que celle qui fut depuis déterminée par Copernic, et ils en conclurent le vrai mouvement des étoiles en longitude.

Copernic, ayant substitué les mouvements réels de la Terre aux mouvements apparents des astres, expliqua la précession des équinoxes par un mouvement des pôles de la Terre autour des pôles de l'écliptique, ce qui maintenant est généralement admis; mais il ne s'occupa point de la cause de ce mouvement, se bornant à démêler, dans les mouvements apparents des astres, ce qui est dû aux mouvements réels de la Terre. Kepler, porté par une imagination active à la recherche des causes, essaya de découvrir celle de la précession des équinoxes; après diverses tentatives, il avoua l'inutilité de ses efforts.

Il était réservé à Newton de nous faire connaître la cause de ce phénomène, en la rattachant à sa découverte de la pesanteur universelle, dont il est l'un des plus curieux résultats et l'une des plus fortes preuves. Après avoir reconnu par sa théorie l'aplatissement de la Terre et la cause du mouvement des nœuds de l'orbite lunaire, Newton, considérant le renflement graduel du sphéroïde terrestre, des pôles à l'équateur, comme le système d'un nombre infini de satellites, vit bientôt que l'attraction solaire devait faire rétrograder les nœuds des orbites qu'ils décrivent, comme elle fait rétrograder les nœuds de la Lune, et que l'ensemble de ces mouvements devait produire un mouvement rétrograde dans l'intersection de l'équateur de la Terre avec l'écliptique. Voici comment il détermine ce mouvement.

Ce grand géomètre, supposant la Terre homogène, la conçoit formée 1° d'une sphère intérieure dont le diamètre est l'axe des pôles, 2° de l'excès du sphéroïde terrestre sur cette sphère. Il imagine d'abord cet excès réuni autour de l'équateur sous la forme d'un anneau détaché du globe, en conservant toujours son mouvement de rotation. Il trouve qu'alors ses nœuds auraient sur l'écliptique un mouvement rétrograde, qui serait au mouvement rétrograde des nœuds de l'orbe lunaire comme le jour sidéral est à la durée d'une révolution sidérale de la Lune, résultat exact et que l'on peut facilement déduire de l'expression différentielle de la précession des équinoxes donnée dans le n° 4 du Livre V, en y supposant, comme Newton l'a fait d'abord, l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur très-petite. Newton remarque ensuite que l'anneau, par son adhérence à l'équateur du globe terrestre, doit communiquer à la masse entière de ce globe une très-grande partie du mouvement rétrograde de ses nœuds, qui par là se trouve extrêmement affaibli. Mais de quelle manière cette communication doit-elle se faire? quel est le mouvement rétrograde qu'elle produit dans l'intersection de l'équateur et de l'écliptique? C'est dans la solution de ces deux questions que consiste la principale difficulté du problème.

Il était naturel que Newton fit usage, pour cet objet, de la règle suivante, qu'il a donnée dans le scolie qui termine l'exposition de la troisième loi du mouvement ou de l'égalité de l'action à la réaction, dans l'Ouvrage des *Principes* :

Si l'on estime l'action de l'agent par sa force multipliée par sa vitesse, et que l'on estime pareillement la réaction du corps résistant par les vitesses de chacune de ses parties, multipliées respectivement par les forces qu'elles ont pour résister en vertu de leur cohésion, de leur attrition, de leur poids et de leur accélération, l'action et la réaction se trouveront égales dans les effets de toutes les machines.

Pour appliquer cette règle à la question présente, il faut observer que la force imprimée à l'anneau par l'action solaire est égale à la masse de l'anneau multipliée par son mouvement de précession. Ainsi l'action de l'agent sur le corps résistant ou sur le globe terrestre est ici le produit de cette masse par son mouvement de précession, diminué de la précession qui lui reste et qui lui est commune avec le globe, et par sa vitesse, qui est celle de rotation de la Terre à l'équateur.

Chaque molécule du globe reçoit une force égale à son accélération multipliée par sa masse, et, en vertu de la cohésion des molécules, cette accélération est la précession terrestre multipliée par la distance de la molécule à l'axe des pôles, la moitié de cet axe étant prise pour unité. La vitesse de la molécule est la vitesse de rotation à l'équateur, multipliée par cette distance; la réaction du corps résistant est donc égale à la somme des produits de chaque molécule par le carré de sa distance à l'axe, par la précession terrestre et par la vitesse de rotation à l'équateur. Newton eût pu facilement déterminer cette somme; en égalant ensuite l'action de l'agent à la réaction du corps résistant, il aurait trouvé la précession terrestre égale à la précession primordiale de l'anneau multipliée par le rapport de la masse de l'anneau à celle de la Terre et par le facteur $\frac{5}{2}$. Au lieu de ce vrai facteur, Newton déduit de considérations inexactes le facteur l'unité divisée par $\frac{3}{32}$ du carré de la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. En supposant, comme Newton l'a fait d'abord, l'excès du sphéroïde terrestre sur la sphère dont le diamètre est l'axe des pôles réuni sous la forme d'un anneau à l'équateur, on obtient une précession plus grande que la véritable, car l'action du Soleil sur les molécules de cet excès, pour faire rétrograder les équinoxes, est plus petite et a moins d'énergie que dans cette hypothèse; il faut donc diminuer la précession qui en résulte. Newton, dans la première édition de son Ouvrage des *Principes*, la réduisait au quart; depuis, il ne l'a réduite qu'aux deux cinquièmes, ce qui est exact. Il la multiplie ensuite par le cosinus de l'inclinaison de l'écliptique à l'équateur, pour tenir compte de cette inclinaison, ce qui est encore exact. Ainsi la solution newtonienne du problème de la précession des équinoxes n'est en défaut que par le facteur erroné dont je viens de parler, facteur qui réduit la précession au-dessous de la moitié de sa vraie valeur. Il est vraisemblable que ce grand géomètre eût rectifié cette erreur capitale, mais bien excusable dans le premier inventeur, si, moins livré à des occupations d'un tout autre genre, il eût donné une attention plus particulière aux découvertes des géomètres du continent, telles que le principe par lequel Jacques Bernoulli a déterminé les oscillations des pendules composés, et le principe des vitesses virtuelles, publié sans démonstration par Jean Bernoulli, principes dont le premier a une grande analogie avec la règle énoncée ci-dessus et dont le second est une généralisation de cette règle. Mais alors la correction de son erreur lui eût fait éprouver quelque difficulté à concilier avec l'observation son résultat de la précession des équinoxes, qui par là devenait beaucoup trop grand. Pour avoir la précession totale, il faut ajouter la précession solaire à la précession lunaire, et, pour obtenir celle-ci, Newton multiplie la première par le rapport de l'action lunaire sur ce phénomène à l'action solaire. Ce rapport est le même que le rapport de ces actions sur les marées. Newton, dans la première édition de ses *Principes*, le trouvait, par les observations des marées, égal à $6\frac{1}{3}$. Il l'a réduit ensuite à 4,4815. L'incertitude des observations dont il a fait usage lui permettait de le diminuer encore, et l'on a vu, dans le Livre XIII, que des observations très-nombreuses des marées, faites chaque jour à Brest pendant seize années consécutives et discutées avec un soin particulier, donnent ce rapport égal à $2\frac{1}{3}$, ce qui rapproche considérablement de l'observation la formule newtonienne de la précession, corrigée de son erreur. Newton eût pu remarquer encore que l'hypothèse de l'homogénéité de la Terre est peu vraisemblable et qu'il est naturel de penser que les couches du sphéroïde terrestre croissent en densité à mesure qu'elles se rapprochent du centre. C'est ce qu'il supposait dans la première édition de ses *Principes;* mais il croyait que cette supposition rendait la Terre plus aplatie, et par conséquent augmentait la précession des équinoxes, ce qui est entièrement contraire aux résultats de l'Analyse, qui a fait voir qu'en rectifiant toutes ces erreurs la théorie de Newton devenait parfaitement conforme à l'observation.

Newton a remarqué l'inégalité de la nutation, produite par l'action du Soleil, et dont la période est de six mois. Mais il se contente d'observer qu'elle est très-petite. Il n'a point considéré les inégalités de la précession et de la nutation dépendantes du mouvement des nœuds de l'orbe lunaire. Dans la production de ces inégalités, l'action lunaire,

déjà insensible dans les inégalités de ce genre qui sont indépendantes de l'inclinaison de cet orbe, est multipliée par cette petite inclinaison, et il fallait une analyse délicate et très-épineuse pour reconnaître que les expressions de ces inégalités acquièrent par les intégrations un très-petit diviseur qui les rend sensibles. Ainsi la théorie, qui, perfectionnée, a sur beaucoup de points devancé l'observation, a été sur ce point devancée par elle. Bradley dut à une longue suite d'observations la découverte de la nutation de l'axe terrestre, découverte l'une des plus remarquables et des plus importantes de l'Astronomie, en ce qu'elle affecte toutes les observations des astres. Ce grand astronome, ayant reconnu, par la précision de ses observations, l'aberration des étoiles et sa cause, s'aperçut bientôt qu'elle ne suffisait pas pour représenter les observations de plusieurs années, et que ces observations indiquaient une inégalité, qu'il suivit pendant une période de dix-huit ans, après laquelle les étoiles lui parurent revenir à leur première position. Cette période, la même que celle du mouvement des nœuds de la Lune, lui fit penser que l'axe de la Terre avait un mouvement périodique dépendant de la longitude de ces nœuds. Machin lui proposa l'hypothèse du pôle vrai de la Terre décrivant uniformément autour du pôle moyen, pendant une période du mouvement des nœuds lunaires, un petit cercle, de manière que le pôle vrai fût le plus près de l'écliptique lorsque le nœud ascendant de l'orbe lunaire coïncide avec l'équinoxe du printemps. Bradley reconnut que, par là, ses observations étaient à fort peu près représentées, mais qu'elles le seraient un peu mieux encore si l'on substituait au cercle une ellipse peu aplatie. Machin n'a point fait connaître la théorie qui l'a conduit à son hypothèse, et qui, si elle eût été juste, lui aurait donné l'ellipticité de la courbe décrite par le pôle vrai de la Terre et soupçonnée par Bradley. Il aurait vu que le grand axe de cette ellipse, toujours tangent à la sphère céleste, passe constamment par le pôle moyen de la Terre et par celui de l'écliptique. Mais la découverte de ces résultats était alors au-dessus des moyens de l'Analyse et de la Mécanique; il fallait en inventer de nouveaux pour y arriver. L'honneur de cette invention était réservé à d'Alembert. Un an et demi après la publication de l'écrit dans lequel Bradley présenta sa découverte, d'Alembert fit paraître son *Traité de la précession des équinoxes,* Ouvrage aussi remarquable dans l'histoire de la Mécanique céleste et de la Dynamique que l'écrit de Bradley dans les annales de l'Astronomie.

D'Alembert détermine d'abord les résultantes des attractions du Soleil et de la Lune sur toutes les molécules du sphéroïde terrestre, qu'il suppose être un solide de révolution, résultantes auxquelles il applique en sens contraire la résultante de ces attractions sur le centre de la Terre, que l'on doit ici considérer comme immobile. Pour avoir la vraie situation de la Terre autour de ce point, d'Alembert choisit pour coordonnées l'inclinaison de l'axe du sphéroïde au plan de l'écliptique, l'angle que l'intersection de ces deux plans ou la ligne des équinoxes forme avec une droite fixe menée sur l'écliptique par le centre de la Terre, enfin l'arc compris entre un point déterminé de l'équateur terrestre et le point où cet équateur coupe l'écliptique à l'équinoxe du printemps. Les variations de ces coordonnées pendant un instant donnent la vitesse correspondante de chaque molécule du sphéroïde. D'Alembert, en appliquant ici son principe général de Dynamique, décompose cette vitesse en deux, l'une qui subsiste dans l'instant suivant, et l'autre qui est détruite et qui ne peut l'être que par les résultantes des attractions du Soleil et de la Lune. En déterminant ensuite les résultantes de ces vitesses détruites et en les supposant en équilibre avec les résultantes des attractions des deux astres, il parvient, au moyen des conditions de l'équilibre d'un nombre quelconque de forces, conditions qu'il a le premier établies, à trois équations différentielles du second ordre entre les trois coordonnées. L'une de ces équations est facile à intégrer; elle donne la vitesse de rotation du sphéroïde. D'Alembert n'intègre point les deux autres équations; il se contente de faire voir que la nutation du pôle terrestre observée par Bradley en est une conséquence nécessaire, et il détermine le rapport des deux axes de la petite ellipse décrite par le pôle vrai de la Terre et la loi du mouvement de ce pôle sur cette

ellipse, résultats précieux qui sont généralement adoptés dans les Tables astronomiques. En comparant aux observations les expressions analytiques de la nutation et de la précession, d'Alembert en conclut le rapport de l'action de la Lune à celle du Soleil; mais il observe qu'une très-petite différence dans la valeur de la nutation changerait sensiblement ce rapport et celui de la masse de la Lune à la masse de la Terre, que l'on conclut de ce rapport.

D'Alembert détermine ensuite les rapports de la précession et de la nutation avec la figure de la Terre, et les lois de la densité et de l'ellipticité de ses couches, depuis son centre jusqu'à sa surface; il en conclut que l'ellipticité $\frac{1}{174}$, qui résulte de la comparaison des degrés mesurés en Laponie en 1736 et à l'équateur, ne peut satisfaire à ces rapports. Ce grand géomètre croit cependant qu'il est possible de concilier avec ces mesures la théorie de l'attraction, en considérant que la Terre est recouverte en grande partie par la mer, dont les molécules, cédant à l'action des astres, ne doivent point, suivant lui, contribuer aux mouvements de l'axe terrestre; en sorte qu'il ne faut employer dans le calcul de ces mouvements que l'ellipticité du sphéroïde recouvert par l'océan, ellipticité qui peut être supposée moindre que celle de la surface de la mer. Mais, ayant soumis à une analyse exacte les oscillations d'un fluide qui recouvrirait le sphéroïde terrestre et la pression qu'il exerce sur la surface du sphéroïde, j'ai fait voir que ce fluide transmet à l'axe terrestre les mêmes mouvements que s'il formait une masse solide avec la Terre. M. Plana, par d'ingénieuses et savantes recherches sur les oscillations des fluides qui recouvrent les planètes, vient de confirmer ce résultat important, auquel j'avais donné, dans le Livre V, la plus grande généralité, en établissant, par le principe de la conservation des aires, que l'action des astres sur la mer, quelle que soit la manière dont elle recouvre le sphéroïde terrestre, produit sur la nutation et la précession les mêmes effets que si la mer venait à se consolider. La difficulté que la théorie de l'attraction présente sur cet objet subsiste donc si l'ellipticité de la Terre est $\frac{1}{174}$. Cet aplatissement ne peut encore se concilier, dans cette théorie, avec les observations du pendule de l'équateur aux pôles, qui donnent un aplatissement au-dessous de $\frac{1}{230}$. Mais une vérification du degré de Laponie, faite par M. Swanberg, astronome suédois, a montré que la mesure de ce degré, à laquelle on avait accordé trop de confiance, est fautive. La nouvelle mesure de M. Swanberg, comparée aux degrés mesurés en France, dans l'Inde et à l'équateur, donne un aplatissement au-dessous de $\frac{1}{300}$, et par là concilie avec la théorie de l'attraction les phénomènes de la précession et de la nutation et les observations du pendule. L'erreur de d'Alembert que nous venons de signaler n'est pas le seul exemple que l'histoire des Sciences nous offre de savants célèbres induits en erreur par trop de confiance dans des mesures fautives. Ce fut par la mesure inexacte de la hauteur du baromètre, faite par le P. Feuillée au sommet du pic de Ténériffe, que Daniel Bernoulli fut conduit à l'étrange hypothèse de l'accroissement de la chaleur à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère au-dessus de la surface de la Terre. Il importe donc au géomètre de ne s'appuyer que sur des observations très-exactes et vérifiées avec un soin particulier.

D'Alembert applique sa solution du problème de la précession des équinoxes aux deux cas que Newton avait considérés, celui où la Terre serait réduite à l'enveloppe qui recouvre une sphère dont le diamètre serait l'axe des pôles, et le cas où les molécules de cette enveloppe seraient réunies sous la forme d'un anneau à l'équateur. Il examine le cas où la Terre n'aurait point de mouvement de rotation. Je tiens de ce grand géomètre qu'il avait d'abord pensé que, la Terre étant supposée un solide de révolution, sa rotation ne devait avoir aucune influence sur les phénomènes de la précession et de la nutation, parce que, tous les méridiens étant semblables et se présentant successivement de la même manière au Soleil et à la Lune, l'action de ces astres sur l'axe terrestre est la même, soit que la Terre tourne sur elle-même, soit qu'elle ne tourne pas. C'était, en effet, conformément à cette idée qu'il avait précédemment considéré les oscillations de l'atmosphère, dans sa pièce *Sur la cause des vents*. Il parvint ainsi, sur la précession et sur la nutation, à des résultats contraires aux observations. Mais,

avant que de rien prononcer sur un objet de cette importance, il voulut revoir avec le plus grand soin ses calculs et soumettre à un nouvel examen les principes qui leur servaient de base, et spécialement celui de la non-influence de la rotation de la Terre sur les mouvements de l'axe terrestre. Ayant donc traité cette question en considérant le mouvement de rotation, il parvint à des résultats fort différents de ceux qu'il avait d'abord obtenus, et ces nouveaux résultats se trouvèrent parfaitement conformes aux observations de la précession et de la nutation.

D'Alembert détermine la position de l'axe instantané de rotation et la vitesse de rotation. N'ayant point intégré les équations différentielles qu'il avait trouvées, il n'a point considéré les inégalités du mouvement de l'axe terrestre qui dépendent de sa position et de son mouvement primitifs, inégalités que j'ai déterminées dans le nº 4 du Livre V. Les observations les plus précises n'ayant point fait reconnaître ces inégalités, il est naturel de penser que, si elles ont eu lieu primitivement, les fluides qui recouvrent le sphéroïde terrestre les ont à la longue anéanties par leur frottement et leurs chocs multipliés contre sa surface. On conçoit, en effet, que ces causes diminuent sans cesse la force vive du système de ces fluides et du sphéroïde; mais elles n'altèrent point la somme des aires que toutes les molécules de ce système décrivent sur le plan du maximum des aires. La diminution de la force vive doit donc avoir une limite, qu'elle finit par atteindre, ce qui ne peut arriver que dans le cas où ces fluides sont en repos sur la surface du sphéroïde, l'axe de rotation de la Terre étant immobile autour de son centre. J'ai prouvé dans le Livre XI qu'un tel axe est toujours possible, quelle que soit la manière dont l'océan recouvre le sphéroïde terrestre. Il devient, lorsque l'équilibre est établi, perpendiculaire au plan du maximum des aires, et la rotation de la Terre autour de cet axe doit être telle que la somme des aires décrites par chaque molécule de la Terre soit la même qu'à l'origine. Ainsi cette somme et le plan du maximum des aires, qui restent toujours l'un et l'autre les mêmes qu'à l'origine, s'il n'y a point d'action étrangère, déterminent la position de l'axe de rotation de la Terre et sa vitesse de rotation, lorsqu'elle parvient à l'état d'équilibre.

D'Alembert a étendu, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1754, sa solution du problème de la précession des équinoxes au cas où l'équateur et les parallèles terrestres seraient elliptiques, ce qui donne la solution générale de ce problème, lorsque dans l'action du Soleil et de la Lune on ne porte l'approximation que jusqu'aux termes divisés par le cube de leurs distances à la Terre. Enfin il a déterminé, par la même analyse, le mouvement d'un corps solide animé par des forces quelconques autour de son centre de gravité.

Euler a traité depuis les mêmes sujets avec beaucoup d'élégance, soit dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, soit dans son *Traité de la Mécanique des corps durs*. Son premier Mémoire sur la précession des équinoxes parut dans le Volume des *Mémoires* de cette Académie pour l'année 1749. Il n'y fait aucune mention du Traité de d'Alembert; mais, dans le Volume suivant, il reconnut expressément qu'il n'avait composé son Mémoire qu'après la lecture de l'Ouvrage du géomètre français. La méthode d'Euler est identique avec une seconde solution du problème de la précession des équinoxes, que d'Alembert avait donnée dans son Ouvrage, solution moins rigoureuse que la première, mais qui conduit fort simplement aux mêmes résultats.

C'est à Euler que l'on est redevable des équations générales du mouvement d'un corps solide animé par des forces quelconques, que j'ai développées dans le Chapitre VII du Livre I. La découverte des trois axes principaux de rotation, due à Segner, apporte d'utiles simplifications dans un sujet aussi compliqué, et les équations auxquelles Euler est parvenu me paraissent être les plus simples qu'il soit possible d'obtenir.

Plusieurs géomètres ont essayé de traiter synthétiquement le problème de la précession des équinoxes; mais leurs solutions inexactes, du moins pour la plupart, sont autant d'exemples de la supériorité de l'analyse sur la synthèse.

Les recherches de d'Alembert et d'Euler laissaient encore à consi-

dérer plusieurs points importants, que j'ai discutés dans le Livre V. L'un de ces points est l'influence de la fluidité de la mer, de ses courants et de ceux de l'atmosphère sur les mouvements de l'axe terrestre; j'ai reconnu, comme je l'ai dit précédemment, que cette influence est la même que si ces fluides formaient une masse solide adhérente au sphéroïde terrestre.

Un second point est l'influence de l'aplatissement de la Terre sur l'obliquité de l'écliptique et sur la longueur de l'année. Si le Soleil et la Lune agissaient seuls sur la Terre, l'inclinaison moyenne de l'équateur à l'écliptique serait constante. Mais l'action des planètes change continuellement la position de l'orbe terrestre, et il en résulte, dans son obliquité sur l'équateur, une diminution confirmée par toutes les observations anciennes et modernes. La même cause donne aux équinoxes un mouvement annuel direct d'environ $\frac{1}{10}$ de seconde centésimale. Ainsi la précession annuelle produite par l'action du Soleil et de la Lune est diminuée de cette quantité par l'action des planètes. Ces effets de l'action des planètes sont indépendants de l'aplatissement du sphéroïde terrestre. Mais l'action du Soleil et de la Lune sur ce sphéroïde doit les modifier et en changer les lois.

Rapportons à un plan fixe la position de l'orbite de la Terre et le mouvement de son axe de rotation. Il est clair que l'action du Soleil, supposé mû constamment sur cette orbite, produira dans cet axe, en vertu des variations de l'écliptique, un mouvement d'oscillation analogue à la nutation, avec cette différence que, la période de ces variations étant incomparablement plus longue que celle des variations du plan de l'orbe lunaire, l'étendue de l'oscillation correspondante dans l'axe de la Terre est beaucoup plus grande que celle de la nutation. L'action de la Lune produit dans ce même axe une oscillation semblable, parce que l'inclinaison moyenne de son orbe sur l'écliptique vraie est constante. Le déplacement de l'écliptique, en se combinant avec l'action du Soleil et de la Lune sur la Terre, produit donc dans son obliquité sur l'équateur une variation très-différente de ce qu'elle serait en vertu de ce seul déplacement. L'étendue entière de cette variation due à ce déplacement se trouve par là réduite environ au quart de sa valeur.

La variation du mouvement des équinoxes, produite par les mêmes causes, change la longueur de l'année tropique dans les différents siècles. Cette durée diminue quand ce mouvement augmente, ce qui a lieu présentement, et l'année actuelle est plus courte d'environ 13 secondes centésimales qu'au temps d'Hipparque. Mais cette variation dans la longueur de l'année a des limites qui sont encore restreintes par l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre. L'étendue de ces limites serait d'environ 500 secondes, par le déplacement seul de l'écliptique; elle est réduite à 120 secondes par cette action.

J'ai recherché, avec tout le soin qu'exige l'importance de l'objet dans l'Astronomie, si les inégalités séculaires des mouvements de la Terre et de la Lune pouvaient déplacer sensiblement l'axe de rotation sur la surface du sphéroïde terrestre et altérer le mouvement de rotation. J'ai reconnu que ces effets seront toujours insensibles. M. Poisson a confirmé depuis ce résultat important, par une savante analyse insérée dans le Tome VIII du *Journal de l'École Polytechnique*. Il restait à discuter une cause de variation du mouvement diurne de rotation, que les expériences faites sur la température des mines profondes m'ont paru indiquer. Ces expériences donnent un accroissement de température à mesure que l'on s'enfonce au-dessous de la surface de la Terre. Il est naturel d'en conclure que la Terre a une chaleur intérieure, croissante de la surface au centre, et qui diminue sans cesse par les pertes qu'elle éprouve à cette surface. En vertu de cette diminution, les parties de la Terre se resserrent, et, comme cette cause n'altère point l'aire décrite par le rayon vecteur de chaque molécule du sphéroïde terrestre projetée sur le plan de l'équateur, le mouvement de rotation doit par là s'accélérer. On a vu dans le Livre XI que l'effet de cette cause est jusqu'à présent insensible, en sorte que l'on peut regarder comme constante la durée du jour, que les astronomes ont prise pour étalon du temps.

Enfin un troisième point de discussion est la nutation de l'orbe

lunaire, correspondante à la nutation de l'équateur terrestre. Il résulte du n° 10 du Livre II que, vu la grande distance du Soleil à la Terre et à la Lune, le centre de gravité du système de ces deux derniers corps est à très-peu près attiré par le Soleil comme si toutes les molécules de ce système étaient réunies à ce centre. De là il suit que la somme des aires décrites autour de ce point par le rayon vecteur de chaque molécule projetée sur le plan mené par le même point parallèlement à l'écliptique est toujours la même en temps égal, quelle que soit la manière dont ces molécules agissent et réagissent les unes sur les autres. Or, en vertu de la nutation de l'axe terrestre, la somme des aires décrites par les molécules du sphéroïde terrestre, autour du centre de gravité du système de la Terre et de la Lune, est assujettie à une inégalité semblable à la nutation; l'aire décrite par le rayon vecteur de la Lune doit donc être assujettie à une inégalité contraire, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que l'expression de la latitude de la Lune contient une inégalité proportionnelle au sinus de la longitude moyenne de la Lune, et dont le coefficient dépend, comme celui de la nutation, de l'aplatissement de la Terre. Je retrouve ainsi l'inégalité à laquelle je suis parvenu dans le Chapitre II du Livre VII, par la considération directe de l'action du sphéroïde terrestre sur la Lune.

J'avais négligé, dans le Livre V, la petite nutation dépendante du double de la longitude du nœud lunaire, parce qu'elle me paraissait devoir être insensible. Mais, comme on peut facilement la comprendre dans les Tables de la précession et de la nutation, j'en donne ici l'expression, qui confirme ce que j'avais dit à son égard.

Quelques astronomes ont pensé qu'il serait avantageux, dans le calcul de ces phénomènes, d'employer la longitude vraie du nœud de la Lune au lieu de sa longitude moyenne. Mais il est aisé de voir, par l'expression différentielle de la nutation, réduite en sinus et cosinus du temps, que la différence entre la longitude vraie du nœud de la Lune et sa longitude moyenne serait insensible dans l'intégrale, parce qu'elle n'acquiert point, par l'intégration, pour diviseur le très-petit coefficient du temps dans la valeur de la longitude du nœud; en employant donc la longitude vraie du nœud au lieu de sa longitude moyenne, on s'exposerait à une erreur qui pourrait devenir sensible.

Enfin, pour ne rien négliger sur un objet de cette importance dans l'Astronomie, j'ai considéré les termes dépendants des variations séculaires des mouvements de la Lune et ceux qui dépendent de la quatrième puissance de sa parallaxe et de celle du Soleil, et j'ai trouvé qu'ils sont insensibles.

Formules générales du mouvement de l'équateur terrestre.

2. Les expressions différentielles de ce mouvement, que j'ai données dans le nº 4 du Livre V, me paraissent être les plus simples auxquelles on puisse parvenir. Mais on peut leur donner la forme suivante, qui présente quelques résultats utiles que nous allons exposer.

Soient x', y', z' les coordonnées d'une molécule dm de la Terre, rapportées au centre de gravité de cette planète et à un plan fixe. Désignons par x'', y'', z'' les coordonnées de la même molécule, rapportées au même centre et au premier, au second et au troisième axe principal de la Terre, que nous supposerons être à très-peu près son axe de rotation. Nommons θ le complément de l'angle que ce troisième axe forme sur le plan fixe et ψ le complément de l'angle que la projection de cet axe sur ce plan forme avec l'axe des x'; ψ sera l'angle que ce dernier axe fait avec la ligne d'intersection du plan fixe et du plan formé par le premier et le second axe principal. Désignons encore par φ l'angle que cette ligne d'intersection fait avec le second axe principal. Cela posé, on aura, par le nº 26 du Livre I,

$$\begin{aligned} x' &= x''(\cos\theta\sin\psi\ \sin\varphi + \cos\psi\ \cos\varphi) \\ &\quad + y''(\cos\theta\sin\psi\ \cos\varphi - \cos\psi\ \sin\varphi) + z''\sin\theta\sin\psi, \\ y' &= x''(\cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\ \cos\varphi) \\ &\quad + y''(\cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\ \sin\varphi) + z''\sin\theta\cos\psi, \\ z' &= z''\cos\theta - y''\sin\theta\cos\varphi - x''\sin\theta\sin\varphi. \end{aligned}$$

Soient

$$\int(y''^2 + z''^2)dm = \mathrm{A}, \quad \int(x''^2 + z''^2)dm = \mathrm{B}, \quad \int(y''^2 + x''^2)dm = \mathrm{C};$$

on aura, par les propriétés des axes principaux,

$$\int x''y''dm = 0, \quad \int x''z''dm = 0, \quad \int y''z''dm = 0,$$

toutes ces intégrales étant étendues à la masse entière de la Terre. On aura, par la nature du centre de gravité,

$$\int x'\,dm = 0, \quad \int y'\,dm = 0, \quad \int z'\,dm = 0,$$
$$\int x''dm = 0, \quad \int y''dm = 0, \quad \int z''dm = 0.$$

Considérons l'action d'un astre L sur la molécule dm. Soient x, y, z les coordonnées de cet astre, rapportées au centre de la Terre et aux axes des x', des y' et des z'. Faisons

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

et

$$\frac{\mathrm{L}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = \mathrm{V};$$

dt étant l'élément du temps, supposons

$$\frac{d\mathrm{N}}{dt} = \int dm\left(x'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'} - y'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}\right),$$
$$\frac{d\mathrm{N}'}{dt} = \int dm\left(x'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'} - z'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}\right),$$
$$\frac{d\mathrm{N}''}{dt} = \int dm\left(y'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'} - z'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\right);$$

V est fonction de x, y, z, x', y', z'. En y substituant pour x', y', z' leurs valeurs précédentes, V devient fonction de neuf quantités x, y, z, x'', y'', z'', φ, ψ et θ, parmi lesquelles x'', y'', z'' sont invariables pour la même molécule. On a donc

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}dx' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}dy' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}dz' = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \psi}d\psi + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}d\theta,$$

en ne faisant varier que φ, ψ et θ dans les valeurs précédentes de x',

y', z'. Si l'on différentie ces valeurs, et qu'après les différentiations on fasse, pour plus de simplicité, ψ nul, on aura

$$\begin{aligned}
dx' &= d\varphi(z'\sin\theta - y'\cos\theta) + y'd\psi,\\
dy' &= x'\cos\theta\, d\varphi - x'd\psi + z'd\theta,\\
dz' &= -x'd\varphi\sin\theta - y'd\theta.
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente aux différences partielles, on aura, en comparant séparément les coefficients de $d\varphi$, $d\psi$ et $d\theta$, les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial\varphi} &= \cos\theta\left(x'\frac{\partial V}{\partial y'} - y'\frac{\partial V}{\partial x'}\right) + \sin\theta\left(z'\frac{\partial V}{\partial x'} - x'\frac{\partial V}{\partial z'}\right),\\
\frac{dV}{d\psi} &= y'\frac{\partial V}{\partial x'} - x'\frac{\partial V}{\partial y'},\\
\frac{dV}{d\theta} &= z'\frac{\partial V}{\partial y'} - y'\frac{\partial V}{\partial z'},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$z'\frac{\partial V}{\partial x'} - x'\frac{\partial V}{\partial z'} = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} + \cos\theta\dfrac{\partial V}{\partial\psi}}{\sin\theta}.$$

Maintenant, les variables φ, ψ et θ étant les mêmes pour toutes les molécules dm, il est clair que, si l'on fait

$$V' = \int V\,dm = L\int\frac{dm}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},$$

on aura

$$\begin{aligned}
\int dm\left(x'\frac{\partial V}{\partial y'} - y'\frac{\partial V}{\partial x'}\right) &= -\frac{\partial V'}{\partial\psi},\\
\int dm\left(x'\frac{\partial V}{\partial z'} - z'\frac{\partial V}{\partial x'}\right) &= -\frac{\dfrac{\partial V'}{\partial\varphi} - \cos\theta\dfrac{\partial V'}{\partial\psi}}{\sin\theta},\\
\int dm\left(y'\frac{\partial V}{\partial z'} - z'\frac{\partial V}{\partial y'}\right) &= -\frac{\partial V'}{\partial\theta}.
\end{aligned}$$

Les seconds membres de ces équations sont les valeurs de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$, présentées sous une autre forme.

Soient

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

les cosinus des angles que l'axe instantané de rotation de la Terre fait avec le troisième axe, le second et le premier de ses axes principaux; soit encore $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe instantané; on aura, par les nos **26** et **28** du Livre I, les équations

$$\begin{aligned}
C\,dp + (B-A)qr\,dt &= -\,dN\cos\theta - dN'\sin\theta,\\
A\,dq + (C-B)pr\,dt &= -(dN\sin\theta + dN'\cos\theta)\sin\varphi + dN''\cos\varphi,\\
B\,dr + (A-C)pq\,dt &= -(dN\sin\theta + dN'\cos\theta)\cos\varphi - dN''\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Substituant pour $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$ leurs valeurs précédentes, on aura

$$(F)\qquad \begin{cases}
C\dfrac{dp}{dt} + (B-A)qr = \dfrac{\partial V'}{\partial\varphi},\\[2mm]
A\dfrac{dq}{dt} + (C-B)pr = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\dfrac{\partial V'}{\partial\psi} + \cos\theta\dfrac{\partial V'}{\partial\varphi}\right) - \dfrac{\partial V'}{\partial\theta}\cos\varphi,\\[2mm]
B\dfrac{dr}{dt} - (C-A)pq = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\dfrac{\partial V'}{\partial\psi} + \cos\theta\dfrac{\partial V'}{\partial\varphi}\right) + \dfrac{\partial V'}{\partial\theta}\sin\varphi.
\end{cases}$$

C'est sous cette forme générale que M. Poisson a présenté les équations (G) du n° 4 du Livre V.

Si l'on développe V' ou

$$L\int\frac{dm}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

dans une série ordonnée suivant les puissances négatives de la distance r_1 de l'astre L au centre de la Terre, on aura, en ne portant l'approximation que jusqu'aux termes de l'ordre $\frac{1}{r_1^3}$,

$$V' = \frac{LT}{r_1} - \frac{L}{2}\int\frac{dm(x'^2+y'^2+z'^2)}{r_1^3} + \frac{3L}{2}\int\frac{dm(xx'+yy'+zz')^2}{r_1^5},$$

T étant la masse entière de la Terre. En substituant pour x', y', z' leurs valeurs précédentes, on trouvera

$$V' = \frac{LT}{r_1} + \frac{3L}{4r_1^3}(B-A)\left\{\begin{matrix}[X^2 - (Y\cos\theta - Z\sin\theta)^2]\cos 2\varphi \\ + 2X(Y\cos\theta - Z\sin\theta)\sin 2\varphi\end{matrix}\right\}$$
$$+ \frac{3L}{4r_1^3}(2C - A - B)\left[X^2 + (Y\cos\theta - Z\sin\theta)^2 - \frac{2}{3}r_1^2\right],$$

X, Y, Z étant les coordonnées x, y, z de l'astre L, rapportées, par la supposition de ψ nul, à l'équinoxe du printemps et aux deux axes perpendiculaires à la ligne des équinoxes, l'écliptique fixe d'une époque donnée étant prise pour le plan fixe.

Quoique cette expression ne renferme point explicitement l'angle ψ, elle le renferme implicitement, parce que les coordonnées X et Y en dépendent. Si l'on nomme R la projection du rayon r_1 sur l'écliptique et v l'angle que cette projection fait avec l'axe fixe d'où l'on compte les angles, on aura

$$X = R\cos(v+\psi), \quad Y = R\sin(v+\psi),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial X}{\partial \psi} = -Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial \psi} = X;$$

par conséquent,

$$\frac{\partial V'}{\partial \psi} = X\frac{\partial V'}{\partial Y} - Y\frac{\partial V'}{\partial X}.$$

Les équations (F) donneront ainsi

$$C\,dp + (B-A)qr\,dt = \frac{3L\,dt}{2r_1^3}(B-A)\left\{\begin{matrix}[(Y\cos\theta - Z\sin\theta)^2 - X^2]\sin 2\varphi \\ + 2X(Y\cos\theta - Z\sin\theta)\cos 2\varphi\end{matrix}\right\},$$

$$A\,dq + (C-B)pr\,dt = \frac{3L\,dt}{r_1^3}(C-B)\left\{\begin{matrix}(Y\cos\theta - Z\sin\theta)(Y\sin\theta + Z\cos\theta)\cos\varphi \\ - X(Y\sin\theta + Z\cos\theta)\sin\varphi\end{matrix}\right\},$$

$$B\,dr + (A-C)pq\,dt = \frac{3L\,dt}{r_1^3}(A-C)\left\{\begin{matrix}X(Y\sin\theta + Z\cos\theta)\cos\varphi \\ + (Y\cos\theta - Z\sin\theta)(Y\sin\theta + Z\cos\theta)\sin\varphi\end{matrix}\right\}.$$

Ces équations sont identiquement les équations (G) du nº 4 du Livre V. Elles donnent, en les intégrant, les valeurs de φ, ψ et θ au moyen des

équations suivantes, données dans le nº 26 du Livre I,

$$d\varphi - d\psi\cos\theta = p\,dt,$$
$$d\psi\sin\theta\sin\varphi - d\theta\cos\varphi = q\,dt,$$
$$d\psi\sin\theta\cos\varphi + d\theta\sin\varphi = r\,dt.$$

On peut substituer $\frac{d\varphi}{dt}$ au lieu de p dans les termes $(C-B)pr$ et $-(C-A)pq$ des équations (F); car, la différence $\frac{d\varphi}{dt} - p$ étant égale à $\frac{d\psi}{dt}\cos\theta$, et les valeurs de q et de r étant de l'ordre de $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$, on ne fait que négliger des termes de l'ordre des carrés et des produits des différentielles $d\psi$ et $d\theta$, et qui, de plus, ont les facteurs très-petits $C-A$ et $C-B$. Cela posé, si l'on multiplie la seconde des équations (F) par $\cos\varphi$, et qu'on retranche le produit de la troisième de ces équations multipliée par $\sin\varphi$, on formera la suivante :

$$\frac{A+B}{2}\cdot d\frac{r\sin\varphi - q\cos\varphi}{dt}$$
$$-\frac{A-B}{2}\cdot d\frac{q\cos\varphi + r\sin\varphi}{dt}$$
$$-C\frac{d\varphi}{dt}(r\cos\varphi + q\sin\varphi) = \frac{\partial V'}{\partial \theta}.$$

On a

$$r\sin\varphi - q\cos\varphi = \frac{d\theta}{dt},$$
$$r\cos\varphi + q\sin\varphi = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta,$$
$$r\sin\varphi + q\cos\varphi = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin 2\varphi - \frac{d\theta}{dt}\cos 2\varphi;$$

p serait égal à une constante n si la Terre était un solide de révolution, et, dans le cas général, la valeur de p est une constante n plus le produit de $A-B$ et de la force perturbatrice par $\sin 2\varphi$ et $\cos 2\varphi$; en négligeant donc ce produit et celui des différentielles $d\psi$ et $d\theta$, on pourra supposer $\frac{d\varphi}{dt} = n$ dans l'équation précédente, qui devient

$$\frac{A+B}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} - Cn\frac{d\psi}{dt}\sin\theta - \frac{A-B}{2}d\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin 2\varphi - \frac{d\theta}{dt}\cos 2\varphi\right) = \frac{\partial V'}{\partial \theta}.$$

Si le sphéroïde était de révolution, le terme qui a pour facteur $A-B$ disparaîtrait; dans tous les cas il est insensible, parce que, vu la rapidité du mouvement de rotation, les termes dépendants de $\sin 2\varphi$ et de $\cos 2\varphi$, déjà insensibles par eux-mêmes, acquièrent encore par les intégrations le grand diviseur $2n$. L'équation précédente devient ainsi

$$(i)\qquad \frac{A+B}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} - Cn\frac{d\psi}{dt}\sin\theta = \frac{\partial V'}{\partial\theta}.$$

On trouvera de la même manière, en multipliant la seconde des équations (F) par $\sin\varphi$ et en l'ajoutant à la troisième multipliée par $\cos\varphi$,

$$\frac{A+B}{2}d\frac{\frac{d\psi}{dt}\sin\theta}{dt} - \frac{A-B}{2}d\frac{\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos 2\varphi + \frac{d\theta}{dt}\sin 2\varphi}{dt} + Cn\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial V'}{\partial\psi} + \cos\theta\frac{\partial V'}{\partial\varphi}\right).$$

Si l'on néglige, comme nous venons de le faire, les termes multipliés par $A-B$ et par $\frac{d\psi}{dt}\cos 2\varphi$ ou par $\frac{d\theta}{dt}\sin 2\varphi$; si l'on observe, de plus, que la rapidité du mouvement de la Terre permet de négliger les termes dépendants de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$, et par conséquent $\frac{\partial V'}{\partial\varphi}$, l'équation précédente donnera

$$(i')\qquad \frac{A+B}{2}d\frac{\frac{d\psi}{dt}\sin\theta}{dt} + Cn\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V'}{\partial\psi}.$$

Si l'on n'a égard, dans les équations (i) et (i'), qu'aux termes de θ et ψ qui dépendent de l'action des astres, et si l'on considère que le mouvement des astres est fort lent par rapport au mouvement rapide de rotation de la Terre, on pourra négliger dans ces équations les secondes différentielles de θ et de ψ, ainsi que les produits de leurs premières différences, et alors on a

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\frac{\partial V'}{\partial\theta}}{Cn\sin\theta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{\partial V'}{\partial\psi}}{Cn\sin\theta}.$$

Si, dans l'expression de V' donnée ci-dessus, on néglige les termes multipliés par $\sin 2\varphi$ et par $\cos 2\varphi$, et si l'on suppose

$$P = \frac{3L}{r_1^5}(Y\cos\theta - Z\sin\theta)(Y\sin\theta + Z\cos\theta),$$

$$P' = \frac{3L}{r_1^5}X(Y\sin\theta + Z\cos\theta),$$

on aura

$$\frac{d\psi}{dt}\sin\theta = \frac{2C-A-B}{2nC}P,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2C-A-B}{2nC}P'.$$

Ces équations sont identiquement celles que j'ai données dans les nos 5 et 6 du Livre V. Elles sont les plus simples auxquelles on puisse parvenir.

Si l'on multiplie la première des équations (F) par p, la seconde par q et la troisième par r, qu'ensuite on les ajoute, et que, dans le second membre de l'équation résultante, on substitue pour p, q et r leurs valeurs, on aura

$$Cp\,dp + Aq\,dq + Br\,dr = \frac{\partial V'}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial V'}{\partial\psi}d\psi + \frac{\partial V'}{\partial\theta}d\theta,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$Cp^2 + Aq^2 + Br^2 = \text{const.} + 2d\int V'dt,$$

la caractéristique différentielle d se rapportant aux seules variations du mouvement du sphéroïde. Ainsi, en désignant par V'' la fonction $V' - \frac{LT}{r_1}$, on aura

$$Cp^2 + Aq^2 + Br^2 = \text{const.} + 2d\int V''dt.$$

Quelque loin que l'on porte l'approximation de la valeur de $\int V''dt$, tout ce qui dépend de la précession ψ des équinoxes, de l'inclinaison θ de l'axe terrestre à l'écliptique et de l'angle $nt+\varepsilon$, nt étant le mouvement de rotation de la Terre, ne peut avoir été introduit que par ces quantités, puisque les coordonnées des astres ne les renferment point.

On aura donc $d\int V'' dt$ en faisant tout varier dans cette intégrale, à l'exception des angles introduits par les inégalités du mouvement des astres, ce qui donne

$$d\int V'' dt = V'' - \int \left(\frac{dV''}{dt}\right)' dt,$$

la différence partielle $\left(\frac{dV''}{dt}\right)'$ étant uniquement relative à la variation du mouvement des astres. L'équation précédente devient ainsi

$$p^2 + q^2 + r^2 - \frac{2C - A - B}{2C}(q^2 + r^2) + \frac{A - B}{2C}(q^2 - r^2) = n^2 + \frac{2V''}{C} - \frac{2}{C}\int \left(\frac{dV''}{dt}\right)' dt.$$

On a, par ce qui précède,

$$q^2 + r^2 = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

$$q^2 - r^2 = \left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta\right]\cos 2\varphi - 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin\theta \sin 2\varphi;$$

ces termes sont du second ordre, en considérant comme des quantités du premier ordre celles qui sont de l'ordre l, lt étant la précession des équinoxes. En ne conservant donc que les quantités du premier ordre, qui sont multipliées par le sinus ou le cosiuus d'un angle croissant avec une grande lenteur ou dans lequel le coefficient du temps soit de l'ordre l, on voit que $q^2 + r^2$ et $q^2 - r^2$ ne renferment point de termes semblables. Ainsi, en n'ayant égard qu'à des quantités de ce genre, on peut supposer

$$p^2 + q^2 + r^2 = n^2 + \frac{2V''}{C} - \frac{2}{C}\int \left(\frac{dV''}{dt}\right)' dt.$$

Maintenant, ne considérons dans V'' que la partie qui est indépendante de $\sin 2\varphi$ et de $\cos 2\varphi$. Cette partie est, par ce qui précède,

$$\frac{3L}{4r_1^5}(2C - A - B)\left[X^2 + (Y\cos\theta - Z\sin\theta)^2 - \frac{2}{3}r_1^2\right].$$

Dans le cas d'un sphéroïde de révolution, dans lequel $A = B$, on a vu dans le n° 8 du Livre V, et il résulte, de la valeur donnée ci-dessus

de dp que p devient une constante et qu'ainsi $p^2 + q^2 + r^2$ ne contient point de quantités du premier ordre multipliées par le sinus d'un angle croissant avec une très-grande lenteur. Mais la supposition $A = B$ ne détruit point les quantités de ce genre qui pourraient exister dans le cas d'un sphéroïde quelconque, puisque cette supposition ne fait que changer $2C - A - B$ en $2(C - A)$. Il n'existe donc point de quantités semblables dans le cas d'un sphéroïde quelconque, à moins que, dans une seconde approximation, elles ne soient introduites dans la fonction

$$\frac{2V''}{C} - \frac{2}{C}\int \left(\frac{dV''}{dt}\right)' dt$$

par les valeurs de $\delta\varphi$, $\delta\theta$ et $\delta\psi$ dépendantes des sinus et cosinus de 2φ. Mais ces valeurs ayant acquis par les intégrations de grands diviseurs de l'ordre $4n^2$, comme il est facile de le conclure des équations différentielles données ci-dessus, ayant de plus le facteur $A - B$ qui est insensible jusqu'ici pour la Terre, et acquérant encore ce facteur dans les termes indépendants de φ qu'ils produisent dans la fonction précédente, nous nous dispenserons d'y avoir égard. D'ailleurs, il résulte de l'analyse citée de M. Poisson que ces valeurs ne produisent dans cette fonction aucun terme du premier ordre multiplié par le sinus ou cosinus d'un angle croissant avec une extrême lenteur. Les inégalités de l'intégrale

$$\int dt\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

ou de la rotation de la Terre sont donc insensibles.

Le sinus de l'angle formé par l'axe instantané de rotation et par l'axe principal étant

$$\frac{\sqrt{q^2 + r^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

il sera

$$\frac{1}{n}\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2},$$

et l'on voit, par les expressions précédentes de $\frac{d\psi}{dt}\sin\theta$ et de $\frac{d\theta}{dt}$, qu'il sera toujours insensible. Ces deux résultats sont très-importants, en ce qu'ils assurent l'uniformité de la rotation de la Terre et la stabilité des latitudes terrestres.

Je n'ai point eu égard, dans le Livre V, à l'inégalité dépendante du double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, par la raison qu'elle est très-petite relativement à la nutation. Cependant, vu la précision des observations modernes, et parce qu'il est facile de la comprendre dans une même Table avec la nutation, je vais ici la déterminer.

Pour cela, je rapporterai les coordonnées X, Y, Z au plan de l'écliptique vraie, en faisant abstraction des variations séculaires de cette écliptique, ce que l'on peut faire ici. En désignant par v' la longitude de la Lune, comptée de l'équinoxe du printemps, et par Λ la longitude de son nœud ascendant, on aura

$$X = r'_1\sqrt{1-\gamma^2\sin^2(v'-\Lambda)}\cos v',$$
$$Y = r'_1\sqrt{1-\gamma^2\sin^2(v'-\Lambda)}\sin v',$$
$$Z = r'_1\gamma\sin(v'-\Lambda),$$

r'_1 étant la distance de la Lune à la Terre, γ étant l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, inclinaison dont nous négligeons les puissances supérieures au carré. On aura, à très-peu près,

$$XY = \frac{r'^2_1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\cos(2v' - 2\Lambda)\right]\sin 2v'.$$

En substituant au lieu de v' sa valeur approchée

$$m't - \frac{1}{4}\gamma^2\sin(2v' - 2\Lambda),$$

on trouvera que XY contient le terme

$$\frac{r'^2_1}{4}\sin 2\Lambda;$$

l'expression de P′ contient donc le terme

$$\frac{3L'}{4r'^3_1}\sin\theta.\gamma^2\sin 2\Lambda.$$

Le terme

$$\frac{3L'}{r'^3_1}XZ\cos\theta$$

de la même expression contient le terme

$$-\frac{3L'}{2r'^3_1}\cos\theta.\gamma\sin\Lambda;$$

les deux inégalités dépendantes de $\cos\Lambda$ et de $\cos 2\Lambda$, dans l'expression de θ, ont donc des coefficients qui sont dans le rapport de

$$-\frac{1}{2}\gamma\cos\theta \quad \text{à} \quad \frac{1}{8}\gamma^2\sin\theta$$

ou dans le rapport de l'unité à $-\frac{1}{4}\gamma\tan\theta$. On trouve pareillement que le terme

$$\frac{3L'}{r'^3_1}Y^2\sin\theta\cos\theta$$

de l'expression de P produit le terme

$$-\frac{3L'}{8r'^3_1}\sin 2\theta.\gamma^2\cos 2\Lambda,$$

et que le terme

$$\frac{3L'}{r'^3_1}YZ(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

produit le terme

$$\frac{3L'}{2r'^3_1}\cos 2\theta.\gamma\cos\Lambda.$$

Les inégalités de la précession dépendantes de $\sin\Lambda$ et de $\sin 2\Lambda$ ont donc leurs coefficients dans le rapport de l'unité à $-\frac{1}{4}\gamma\tan 2\theta$.

De la nutation de l'orbe lunaire correspondante à la nutation de l'équateur terrestre.

3. Le centre de gravité du système formé de la Lune et de la Terre est attiré par le Soleil à très-peu près comme si toutes les molécules de ce système étaient réunies à ce centre, ce qui, par le n° **10** du Livre II,

résulte de la proximité de la Lune à la Terre relativement à sa distance au Soleil. De là il suit que la somme des aires tracées à chaque instant par le rayon vecteur de chaque molécule projetée sur l'écliptique autour de leur centre commun de gravité est constante. Soient donc X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité de la Terre rapportées au centre de gravité du système et au plan de l'écliptique; soient x', y', z' celles d'une molécule dm de la Terre, et x, y, z celles du centre de la Lune, rapportées toutes au centre de gravité de la Terre. On aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int dm\left[(X-x')\frac{dY-dy'}{dt}-(Y-y')\frac{dX-dx'}{dt}\right]\\ &\quad +L\left[(x-X)\frac{dy-dY}{dt}-(y-Y)\frac{dx-dX}{dt}\right]=\text{const.},\end{aligned}\right.$$

L étant la masse de la Lune. Mais on a, par la nature du centre de gravité,

$$\int x'dm=0,\quad \int y'dm=0,\quad \int z'dm=0.$$

Soit T la masse de la Terre; on aura

$$T=\int dm.$$

On a de plus, par la propriété du centre de gravité,

$$L(x-X)=TX,$$

ce qui donne

$$X=\frac{Lx}{T+L}.$$

On aura pareillement

$$Y=\frac{Ly}{T+L}.$$

L'équation (1) deviendra donc

$$\int dm\,\frac{x'dy'-y'dx'}{dt}+\frac{TL}{T+L}\,\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}=\text{const.}$$

La première des équations (C) du n° **26** du Livre I donne

$$(l)\quad A q\sin\theta\sin\varphi+Br\sin\theta\cos\varphi-Cp\cos\theta=-\int dm\,\frac{x'dy'-y'dx'}{dt},$$

et l'on a, en vertu des expressions de p, q et r du numéro précédent,

$$\begin{aligned} &A\sin\theta(q\sin\varphi+r\cos\varphi)+(B-A)\sin\theta.r\cos\varphi\\ &\quad =A\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta+\frac{B-A}{2}\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta+\frac{B-A}{2}\left\{\begin{aligned}&\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta\cos2\varphi\\ &+\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\sin2\varphi\end{aligned}\right\}.\end{aligned}$$

L'équation précédente (l) deviendra, en négligeant les termes multipliés par le sinus et le cosinus de 2φ, ce qui, par le numéro précédent, réduit p à la constante n,

$$(2)\quad nC\cos\theta-\frac{A+B}{2}\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta+\frac{TL}{T+L}\,\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}=\text{const.}$$

L'aire tracée dans l'instant dt par le rayon vecteur de la Lune est $\frac{1}{2}(x\,dy-y\,dx)$. En désignant par a le demi-grand axe de l'orbe lunaire, par e son excentricité et par γ l'inclinaison de cet orbe à l'écliptique, on a, en regardant cet orbe comme une ellipse variable,

$$x\,dy-y\,dx=a^2m'\,dt\cos\gamma.\sqrt{1-e^2},$$

$m't$ étant le moyen mouvement de la Lune. La partie de V' qui produit la nutation de l'équateur terrestre est, par le numéro précédent,

$$-\frac{3L}{4r_1'^3}(2C-A-B)\gamma\sin\theta\cos\theta\cos\Lambda,$$

Λ étant la longitude du nœud de l'orbe lunaire. J'ai donné, dans le n° 1 du *Supplément au Traité de Mécanique céleste*, les expressions différentielles des éléments d'une ellipse variable par une force perturbatrice R. Cette force est augmentée, par la considération de l'aplatissement de la Terre, de la fonction $-V'$, comme il est facile de le voir par le numéro cité. Il résulte encore, des expressions différentielles du demi-grand axe et de l'excentricité e, que la partie de V' dont je viens de parler ne produit aucun terme sensible dans ces expressions, en sorte que l'on peut supposer, relativement à cette partie, a et e constants. L'équation (2) donne donc, en y substituant pour $\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}$ sa valeur précédente, en désignant par $\delta\theta$ et $\delta\gamma$ les nutations de l'équateur terrestre et de l'orbe lunaire, et en observant que $\frac{d\psi}{dt}$ peut être négligé relativement à $\delta\theta$, qui par l'intégration a acquis pour diviseur le très-petit coefficient du temps dans l'expression du mouvement des nœuds de l'orbe lunaire, enfin en négligeant le carré e^2,

$$nC\,\delta\theta\,\sin\theta = -\frac{TL}{T+L}a^2 m'\,\delta\gamma\,\sin\gamma.$$

Telle est la relation fort simple qui existe entre les nutations de l'équateur terrestre et de l'orbe lunaire.

On a, par le n° 5 du Livre V,

$$nC\,\delta\theta\,\sin\theta = \frac{3m^2}{4}\frac{\lambda c'}{f'}(2C-A-B)\sin\theta\cos\theta\cos(f't+6),$$

c' étant l'inclinaison de l'orbe lunaire, que nous désignons ici par γ, et $-f't-6$ étant la longitude de son nœud ascendant. On a

$$m\lambda = \frac{L}{a^3},\quad \frac{T+L}{a^3} = m'^2;$$

on aura donc, en comparant les deux expressions précédentes de $\delta\theta$ et désignant $f't$ par $(g-1)m't$,

$$\delta\gamma = -\frac{3}{4a^2}\frac{2C-A-B}{(g-1)T}\sin\theta\cos\theta\cos[(g-1)m't+6].$$

On a, par le n° 2 du Livre V,

$$2C-A-B = \frac{4}{3}T\left(\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)D^2,$$

αh étant l'ellipticité du sphéroïde terrestre, $\alpha\varphi$ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, et D étant le rayon moyen du sphéroïde terrestre; on a donc

$$\delta\gamma = -\left(\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)\frac{D^2}{a^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{g-1}\cos[(g-1)m't+6].$$

Soient

$$H\sin(it+k) + H'\sin(i't+k') + \ldots$$

les inégalités de la latitude de la Lune dépendantes de l'aplatissement de la Terre, les angles $it+k$, $i't+k'$, ... étant rapportés, comme la longitude Λ du nœud ascendant de l'orbite lunaire, à l'équinoxe du printemps. La latitude lunaire étant

$$\gamma\sin(m't-\Lambda),$$

sa variation relative aux variations de ses éléments sera

$$\delta\gamma\sin(m't-\Lambda) - \gamma\,\delta\Lambda\cos(m't-\Lambda),$$

ou

$$\sin m't(\delta\gamma\cos\Lambda - \gamma\,\delta\Lambda\sin\Lambda) - \cos m't(\delta\gamma\sin\Lambda + \gamma\,\delta\Lambda\cos\Lambda).$$

En l'égalant à la fonction

$$H\sin(it+k) + H'\sin(i't+k') + \ldots,$$

mise sous cette forme

$$\begin{aligned}&\sin m't\{H\cos[(i-m')t+k] + H'\cos[(i'-m')t+k'] + \ldots\}\\ +&\cos m't\{H\sin[(i-m')t+k] + H'\sin[(i'-m')t+k'] + \ldots\},\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}\delta\gamma\cos\Lambda - \gamma\,\delta\Lambda\sin\Lambda &= H\cos[(i-m')t+k] + H'\cos[(i'-m')t+k'] + \ldots,\\ \delta\gamma\sin\Lambda + \gamma\,\delta\Lambda\cos\Lambda &= -H\sin[(i-m')t+k] - H'\sin[(i'-m')t+k'] - \ldots\end{aligned}$$

Si l'on multiplie la première de ces équations par $\cos\Lambda$ et qu'on l'ajoute à la seconde multipliée par $\sin\Lambda$, on aura

$$\delta\gamma = H\cos[\Lambda+(i-m')t+k] + H'\cos[\Lambda+(i'-m')t+k'] + \ldots.$$

En comparant cette valeur de $\delta\gamma$ à la précédente, on aura

$$\begin{aligned}&(i-m')t+k = 0,\\ &H = -\alpha\left(h-\frac{1}{2}\varphi\right)\frac{D^2}{a^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{g-1},\\ &H' = 0,\quad \ldots.\end{aligned}$$

Les inégalités lunaires en latitude, dues à l'aplatissement de la Terre, se réduisent ainsi à la suivante,

$$-\left(\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)\frac{D^2}{a^2}\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{g-1}\sin m't,$$

ce qui est conforme à ce que j'ai trouvé dans le Chapitre II du Livre VII.

Des inégalités de la précession et de la nutation de l'équateur terrestre dépendantes de la quatrième puissance des parallaxes du Soleil et de la Lune.

4. Si l'on nomme v la déclinaison d'un astre L, υ sa longitude comptée de l'équinoxe du printemps, ψ la distance de cet équinoxe à une ligne fixe sur l'écliptique, V′ la somme des produits de la masse L de l'astre par chaque molécule dm de la Terre, divisée par la distance de cette molécule au centre de L, enfin, si l'on nomme T la masse de la Terre et r la distance de son centre à celui de L, on aura, par le n° 35 du Livre III,

$$V' = \frac{TL}{r} + \frac{\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha h}{r^3}\,TL\left(\sin^2 v - \frac{1}{3}\right) + \frac{\alpha q}{r^4}\,TL\left(\sin^3 v - \frac{3}{5}\sin v\right) + \cdots,$$

en supposant que le rayon terrestre soit

$$1 - \alpha h\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right) + \alpha q\left(\mu^3 - \frac{3}{5}\mu\right) + \cdots,$$

μ étant le sinus de la latitude terrestre. Le terme

$$\frac{\alpha q\,TL}{r^4}\left(\sin^3 v - \frac{3}{5}\sin v\right)$$

est le terme que la considération de la quatrième puissance de la parallaxe de L ajoute à l'expression de V′ donnée ci-dessus. Pour en déterminer la valeur, nous observerons que, s étant la latitude de L, γ l'inclinaison de son orbite et A la longitude de son nœud ascendant, on a

$$\sin v = \cos\theta\sin s + \sin\theta\sin\upsilon\cos s,$$
$$\operatorname{tang} s = \operatorname{tang}\gamma\sin(\upsilon - A).$$

Ces équations donnent

$$\frac{\partial\sin v}{\partial\psi} = \sin\theta\cos\upsilon\cos s,$$
$$\frac{\partial\sin v}{\partial\theta} = \cos\theta\sin\upsilon\cos s - \sin\theta\sin s.$$

En effet, si F est formé d'angles rapportés à l'équinoxe mobile du printemps, et que i soit le nombre de ces angles pris positivement et i' le nombre des angles pris négativement, on a généralement

$$\frac{\partial\sin F}{\partial\psi} = (i - i')\cos F;$$

car, A étant un des angles de F, en lui donnant cette forme

$$A - \psi + \psi,$$

il est clair que par la variation de ψ l'angle $A - \psi$ reste invariable.

De là il est facile de conclure que le terme précédent, dépendant de $\frac{1}{r^4}$, ajoute à la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$, donnée ci-dessus, la quantité

$$\frac{3\alpha q\,TL\cos\upsilon\cos s}{nCr^4}\left(\sin^2 v - \frac{1}{5}\right);$$

en négligeant le carré de γ, cette fonction devient

$$\frac{3\alpha q\,TL}{nCr^4}\cos\upsilon\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\upsilon \\ \quad - \gamma\sin\theta\cos\theta[\cos(2\upsilon - A) - \cos A]\end{array}\right\}.$$

On voit d'abord que cette fonction ne contient point le sinus ou le cosinus de la longitude A du nœud, les seuls qui, affectés de γ, puissent devenir sensibles par l'intégration qui leur fait acquérir un très-petit diviseur. Ainsi le coefficient de la nutation ne reçoit aucune augmentation des termes dépendants de la quatrième puissance de la parallaxe lunaire, ce qui a également lieu pour la précession. La seule influence que puisse avoir cette puissance dépend de l'excentricité e

de l'orbe lunaire. En effet, r étant à peu près

$$r_1[1 - e\cos(v - \varpi)],$$

la fonction précédente donnera le terme

$$\frac{3\alpha q \mathrm{TL}}{4n\mathrm{C}r_1^3}\,\frac{1}{r_1}\,e\cos\varpi\left(\sin^2\theta - \frac{4}{5}\right).$$

En nommant it le mouvement du périgée lunaire, il en résultera dans la valeur de θ le terme

$$\frac{3\alpha q \mathrm{TL}}{4n\mathrm{C}r_1^3}\,\frac{1}{r_1}\,\frac{e\sin\varpi}{i}.$$

Le terme de V′, dépendant de $\frac{1}{r_1^2}$, produit, dans la valeur de θ, le terme

$$\left(\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)\frac{\mathrm{TL}}{4\mathrm{C}r_1^3}\cos\theta\,\frac{\gamma\cos\mathrm{A}}{f'},$$

$f't$ étant le mouvement rétrograde du nœud. Ainsi, en nommant b le coefficient de $\cos\mathrm{A}$ ou de la nutation, le coefficient de $\sin\varpi$ sera

$$(\mu) \qquad b\cdot\frac{3}{4}\,\frac{e}{\gamma}\,\frac{f'}{i}\,\frac{1}{r_1}\,\frac{\sin\theta - \frac{4}{5}}{\cos\theta}\,\frac{\alpha q}{\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\varphi},$$

coefficient insensible; car i est à peu près égal à $2f'$, $\frac{e}{\gamma}$ est environ $\frac{3}{5}$, et $\frac{1}{r_1}$ environ $\frac{1}{60}$, et les expériences du pendule prouvent que αq doit être beaucoup plus petit que $\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\varphi$, comme on peut le voir dans le Livre XI.

Relativement au Soleil, l'expression de $e\sin\varpi$ est, par le Chapitre VII du Livre II, composée de termes de la forme $c\sin(it + \varepsilon)$. Lagrange a donné, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1782, les valeurs numériques de c et de it, d'après des suppositions sur les masses des planètes, qui ne sont pas, sans doute, exactes, mais que l'on peut regarder comme suffisamment approchées pour

notre objet; il en résulte que la plus grande des valeurs de c est au-dessous de $\frac{1}{10}$, et que les valeurs annuelles de it diffèrent peu de $\pm 50''$ sexagésimales. En adoptant pour it cette valeur, en faisant c égal à $\frac{1}{10}$, observant ensuite que $\frac{1}{r_1}$ est environ $\frac{1}{24000}$ et que la formule (μ) doit être divisée par le rapport de l'action de la Lune à celle du Soleil, rapport égal à 2,3 à fort peu près, on trouve que la formule (μ) est au-dessous d'une demi-seconde sexagésimale multipliée par

$$\frac{\alpha q}{\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\varphi}.$$

De là il suit que ce genre d'inégalités sera toujours insensible.

CHAPITRE II.

DE LA LIBRATION DE LA LUNE.

Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet.

5. Les anciens avaient reconnu que la Lune nous présente toujours la même face dans son mouvement autour de la Terre; mais, loin de s'en étonner, ils regardaient ce phénomène comme naturel à tout corps qui circule autour d'un centre. Cette erreur, ou plutôt cette illusion, força Copernic, pour maintenir le parallélisme de l'axe terrestre, à donner à cet axe un mouvement annuel contraire au mouvement de la Terre dans son orbite et assujetti aux mêmes inégalités, ce qui compliquait beaucoup son système. Kepler remarqua le premier que l'axe de rotation d'un globe doit conserver toujours de lui-même une situation parallèle dans les divers mouvements du centre de ce globe. Par cette remarque, le système de Copernic est devenu plus simple, ce qui lui est arrivé constamment par les progrès successifs de l'observation, de l'Analyse et de la Dynamique, progrès qui l'ont enfin élevé au plus haut degré de simplicité et de certitude. En étendant la remarque de Kepler à la Lune, le phénomène suivant lequel cet astre nous présente toujours le même hémisphère, et qui semblait si naturel, devenait très-difficile à expliquer. Il fallait admettre une égalité rigoureuse entre la durée de la rotation de la Lune et la durée de sa révolution autour de la Terre, égalité dont il était impossible alors d'entrevoir la cause.

Galilée reconnut, par des considérations tirées de l'Optique, que l'hémisphère visible de la Lune varie sans cesse par le changement de sa parallaxe de hauteur et de sa latitude, et il s'en assura par l'observation.

Riccioli reconnut la libration en longitude, qu'il expliqua, ainsi qu'Hevelius, par la supposition que la Lune présente toujours la même face au centre de son orbite, ce qui ne donne que la moitié de cette libration si l'on considère l'orbite comme une ellipse, mais ce qui la donne tout entière si l'on considère, avec Riccioli, cette orbite comme un cercle excentrique. Newton, dans une Lettre écrite à Mercator en 1675, donna une explication semblable, en faisant mouvoir uniformément la Lune autour de son axe de rotation, pendant qu'elle se meut inégalement autour de la Terre; mais il supposait l'axe de rotation perpendiculaire à l'écliptique. Enfin, Dominique Cassini reconnut par l'observation que cet axe est incliné à l'écliptique et que ses nœuds coïncident toujours avec les nœuds de l'orbite lunaire, en sorte que les pôles de cette orbite, de l'écliptique et de l'équateur lunaire sont constamment sur un même cercle de latitude, le pôle de l'écliptique étant entre les deux autres. Cassini, par cette découverte, l'une des plus importantes qu'il ait faites, et qu'il publia en 1693 dans son *Traité de l'origine et des progrès de l'Astronomie*, compléta la théorie astronomique de la libration de la Lune.

En 1748, Tobie Mayer confirma la théorie de Cassini par une suite nombreuse d'observations, dont il calcula les résultats suivant un procédé fort ingénieux; seulement il trouva l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique moindre que Cassini; mais il assure que des observations faites du temps de ce grand astronome donnent l'inclinaison qu'il trouva en 1748.

Lalande, en 1764, parvint, au moyen de nouvelles observations, aux résultats de Mayer. MM. Bouvard et Arago voulurent bien, à ma prière, entreprendre en 1806 une nouvelle suite d'observations, qui fut continuée par MM. Bouvard et Nicollet, et qui, par le nombre et la précision des observations, surpasse les précédentes et confirme l'invariabilité de l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique et la coïncidence constante de ses nœuds avec ceux de l'orbe lunaire.

Newton parle de la libration de la Lune dans les propositions XVII et XXXVIII du Livre III de son Ouvrage des *Principes*. Dans la proposition XVII de la première édition, antérieurement à la publication du Traité de Cassini, il attribue la libration en latitude à l'inclinaison de l'axe de rotation de la Lune au plan de son orbite; dans la troisième édition, il l'attribue à la latitude de la Lune et à l'inclinaison de son axe sur l'écliptique, inclinaison que le Traité de Cassini avait fait connaître.

C'est dans la proposition XXXVIII du Livre III que Newton parle de la cause physique de la libration de la Lune. Il détermine d'abord la figure de la Lune, qu'il considère comme un ellipsoïde de révolution homogène et fluide. Il trouve que son grand axe doit être dirigé vers la Terre, et qu'il surpasse d'environ 60 mètres le diamètre de son équateur. Ce grand géomètre n'a point eu égard à la force centrifuge due au mouvement de rotation de la Lune, sans doute parce qu'il la jugeait insensible relativement aux forces résultantes de l'attraction terrestre. Mais elle est du même ordre, et elle change la figure de la Lune, supposée fluide et homogène, dans un ellipsoïde qui n'est pas de révolution et dont l'axe de rotation est le plus petit axe. L'axe moyen et le grand axe sont dans le plan de l'équateur, et le plus grand axe est dirigé vers la Terre; l'excès du plus grand sur le plus petit axe est quadruple de l'excès de l'axe moyen sur le plus petit axe et environ $\frac{1}{27640}$ de ce petit axe. « C'est ce qui fait », dit Newton, « que la Lune présente toujours le même côté à la Terre; car elle ne peut être en repos dans une autre position, mais elle doit retourner sans cesse à celle-là, en oscillant. » Cela suppose que le moyen mouvement de rotation de la Lune est rigoureusement égal à son moyen mouvement de révolution. Il y a une invraisemblance infinie à supposer que cette égalité rigoureuse a eu lieu à l'origine, en sorte que l'on peut regarder comme certain qu'il y a eu primitivement une très-petite différence

entre ces mouvements, et que l'attraction de la Terre a établi et maintient constamment entre eux une rigoureuse égalité. Newton n'a point considéré cet effet de l'attraction terrestre, qu'il aurait pu cependant reconnaître par un de ces concepts au moyen desquels il a souvent suppléé à l'état d'imperfection où était de son temps l'analyse de l'infini pour arriver à des résultats que cette analyse perfectionnée a confirmés et généralisés. Concevons que l'on transporte à chaque instant le mouvement du centre de gravité de la Lune à toutes ses parties et à la Terre; ce centre sera immobile et la Terre tournera autour de lui avec une vitesse angulaire que nous supposerons uniforme. Donnons au sphéroïde lunaire un mouvement moyen angulaire de rotation égal à cette vitesse. Si son grand axe eût été à l'origine sur le rayon mobile qui joint les centres de la Lune et de la Terre, et qu'au premier instant il l'eût exactement suivi, il ne s'en serait jamais écarté. Mais, s'il y avait eu au premier instant une très-petite différence entre les vitesses angulaires du rayon vecteur et de l'axe du sphéroïde, ces deux lignes se seraient successivement écartées l'une de l'autre; mais, à cause de l'extrême petitesse que nous supposons à cette différence, l'attraction terrestre, tendant sans cesse à ramener l'axe sur le rayon, aurait fini par la diminuer. On voit *a priori*, et un calcul fort simple prouve que l'axe doit alors osciller sans cesse de part et d'autre du rayon vecteur, dans des limites d'autant plus rapprochées que la différence primitive des vitesses de l'axe et du rayon aura été plus petite. La vitesse angulaire de rotation du grand axe ou de la Lune variera donc sans cesse; sa valeur moyenne sera la vitesse moyenne angulaire de révolution de la Lune, dont elle a pu différer primitivement d'une quantité arbitraire mais extrêmement petite, ce qui fait disparaître l'invraisemblance infinie d'une égalité rigoureuse à l'origine.

D'Alembert appliqua ses formules de la précession des équinoxes à la libration de la Lune. Mais ce grand géomètre, qui avait si bien senti l'influence de la rapidité du mouvement de rotation de la Terre sur les mouvements de nutation et de précession de son équateur, ne fit pas attention aux changements que la lenteur du mouvement de rotation de la Lune et surtout la circonstance de l'égalité de ce mouvement à celui de révolution doivent produire dans les mouvements de précession et de nutation, ce qui le conduisit à des résultats inexacts.

L'Académie des Sciences ayant proposé pour le sujet du prix de Mathématiques qu'elle devait décerner en 1764 la théorie de la libration de la Lune, Lagrange remporta ce prix. Sa Pièce est remarquable par une profonde analyse, et surtout par l'union du principe de Dynamique de d'Alembert avec le principe des vitesses virtuelles de Jean Bernoulli, ce qui réduit de la manière la plus générale et la plus simple la recherche des mouvements d'un système de corps à l'intégration des équations différentielles; alors l'objet de la Mécanique est rempli, et l'Analyse doit achever la solution des problèmes. C'est ce que Lagrange a fait voir en détail dans sa *Mécanique analytique*. Ce grand géomètre, dans sa Pièce, détermine d'abord la libration de la Lune en longitude. Il prouve que, dans le cas où il y aurait eu à l'origine une très-petite différence entre les mouvements de rotation et de révolution de la Lune, l'attraction terrestre a suffi pour établir entre ces mouvements une égalité rigoureuse. Cette différence primitive a fait naître un mouvement d'oscillation du grand axe du sphéroïde lunaire, dirigé vers la Terre, de part et d'autre du rayon vecteur de la Lune. Lagrange détermine les lois de ce mouvement, ainsi que les petites inégalités du mouvement de rotation correspondantes aux inégalités du mouvement de révolution. Passant ensuite à la libration de la Lune en latitude, il donne les équations différentielles de l'inclinaison de l'équateur lunaire et du mouvement de ses nœuds. Mais ayant négligé, en les intégrant, comme on le peut relativement à l'équateur terrestre, les différences secondes, ce qui, par ce qui précède, simplifie considérablement l'intégration de ces équations, il ne put expliquer le phénomène singulier de la coïncidence des nœuds de l'équateur et de l'orbite lunaire; seulement il trouva que cette coïncidence existe dans un cas particulier, qui fait entrevoir sa possibilité dans le cas général. Mais les inégalités arbitraires introduites par l'intégration complète des équations aux différences secondes peuvent

seules expliquer comment, dans le cas infiniment vraisemblable d'une très-petite différence initiale entre les positions des nœuds de l'orbite et de l'équateur lunaire, l'attraction terrestre établit et maintient la coïncidence de leurs nœuds moyens. Lagrange, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1780, reprit la théorie de la libration de la Lune, au moyen d'une très-belle analyse; il expliqua de la manière la plus heureuse la coïncidence des nœuds moyens de l'équateur et de l'orbite lunaire, et il détermina la loi des oscillations du nœud vrai de l'équateur lunaire autour de son nœud moyen.

Il restait, pour compléter la théorie de la Lune, à déterminer l'influence des grandes inégalités séculaires des mouvements de la Lune sur les phénomènes de sa libration : c'est ce que j'ai fait dans le Chapitre II du Livre V. Les inégalités séculaires de son mouvement de révolution, s'élevant à plusieurs circonférences, devraient à la longue présenter à la Terre toutes les parties de sa surface. Mais je démontre que l'attraction de la Terre sur le sphéroïde lunaire donne au mouvement de rotation de ce sphéroïde les inégalités séculaires de son mouvement de révolution et rend invisible à jamais l'hémisphère opposé à celui qu'elle nous présente. Je fais voir encore que cette même attraction maintient les mêmes inclinaisons moyennes de l'équateur et de l'orbite lunaires sur l'écliptique vraie, et la coïncidence de leurs nœuds au milieu des mouvements séculaires de cette écliptique. Ce résultat est analogue à celui que l'attraction du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre produit, en réduisant au quart environ les variations séculaires de l'obliquité de l'écliptique et de la longueur de l'année qui auraient lieu par l'action des planètes si la Terre était sphérique, et qui deviendraient insensibles, si le mouvement des équinoxes était aussi rapide que celui des nœuds de l'orbite lunaire.

En discutant avec un soin particulier les inégalités de la libration en latitude, M. Poisson a reconnu une petite inégalité qui dépend de la différence en longitude du nœud et du périgée lunaire. Un nouvel examen de la théorie de la libration m'a fait voir ensuite que rien de sensible n'avait été omis, en sorte que cette théorie ne laisse maintenant à désirer qu'une longue suite d'observations, au moyen desquelles on puisse déterminer avec précision les quantités inconnues que cette théorie renferme et surtout les rapports des moments d'inertie des trois axes principaux du sphéroïde lunaire. C'est dans cette vue que j'avais invité les astronomes de l'Observatoire Royal à vouloir bien entreprendre cette suite d'observations et à la comparer aux formules de la théorie. M. Nicollet a exécuté ce travail important, en y employant 174 observations faites par lui et par MM. Bouvard et Arago. L'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique, qu'il trouve en degrés sexagésimaux de $1^\circ 28' 45''$ et qui ne diffère que de $15''$ de celle que Mayer avait trouvée, est une donnée précieuse, en ce qu'elle détermine avec beaucoup d'exactitude les rapports des moments d'inertie du plus grand et du plus petit axe du sphéroïde lunaire. La plus sensible des inégalités de la libration est l'inégalité de la libration en longitude, dépendante du sinus de l'anomalie moyenne du Soleil. M. Nicollet trouve en secondes sexagésimales $4' 48'', 7$ pour le coefficient de cette inégalité, qui donne le rapport des moments d'inertie du plus grand axe et de l'axe moyen du sphéroïde lunaire. Mais, pour que l'on puisse compter sur ce rapport, il faut un nombre plus grand encore d'observations.

Remarques sur la théorie de la libration de la Lune.

6. Les formules que j'ai données dans le Chapitre II du Livre V me paraissent laisser peu de chose à désirer.

L'expression de la libration en latitude renferme une petite inégalité qui, pouvant devenir sensible dans des observations exactes, mérite d'être considérée. Pour la déterminer, nous transporterons à la Lune les expressions de dp, dq et dr du n° **2**, et nous observerons que, l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique étant très-petite, nous pouvons négliger son carré et son produit par le carré de l'inclinaison

de l'orbite lunaire. Cela posé, on aura, par le n° **2**,

$$A\,dq + (C - B)pr\,dt = \frac{3L\,dt}{r_1'^3}(C - B)\sin(\upsilon - \varphi)(\theta \sin\upsilon + \gamma \sin\upsilon),$$

$$B\,dr + (A - C)pq\,dt = \frac{3L\,dt}{r_1'^3}(A - C)\cos(\upsilon - \varphi)(\theta \sin\upsilon + \gamma \sin\upsilon).$$

L est ici la Terre, υ est sa longitude vue de la Lune et rapportée au nœud de l'orbite lunaire, en sorte que $\gamma \sin\upsilon$ est sa latitude vue pareillement de la Lune. Soient

$$\theta \sin\varphi = s, \quad \theta \cos\varphi = s'.$$

On aura, par le n° **2**,

$$p = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt},$$

$$q = -\frac{ds'}{dt} - sp,$$

$$r = \frac{ds}{dt} - s'p.$$

Les équations différentielles précédentes relatives à dq et dr deviendront, en y substituant m pour p et en négligeant les différentielles $s\frac{dp}{dt}$ et $s'\frac{dp}{dt}$, ce que l'on peut faire ici,

$$-\frac{d^2 s'}{dt^2} - \frac{A + B - C}{A} m \frac{ds}{dt} - \frac{C - B}{A} m^2 s'$$
$$= \frac{3L}{r_1'^3} \frac{C - B}{A} \sin(\upsilon - \varphi)[s' \sin(\upsilon - \varphi) + s \cos(\upsilon - \varphi) + \gamma \sin\upsilon],$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{A + B - C}{B} m \frac{ds'}{dt} + \frac{C - A}{B} m^2 s$$
$$= \frac{3L}{r_1'^3} \frac{A - C}{B} \cos(\upsilon - \varphi)[s' \sin(\upsilon - \varphi) + s \cos(\upsilon - \varphi) + \gamma \sin\upsilon].$$

$\upsilon - \varphi$ est, comme on le voit dans le Chapitre II du Livre V, un très-petit angle, en sorte qu'on peut le supposer nul et faire son cosinus égal à l'unité.

$\sin(\upsilon - \varphi)$ contient à fort peu près, par le Chapitre II du Livre V, le terme $2e\sin(mt-\varpi)$, e étant l'excentricité de l'orbe lunaire, ϖ étant la longitude de son périgée, les angles mt et ϖ étant comptés du nœud ascendant de l'orbite lunaire. Le second membre de la première des deux équations précédentes contient donc le terme

$$3m^2\frac{C-B}{A}(\gamma+\theta).2e\sin(mt-\varpi)\sin mt,$$

et par conséquent celui-ci,

$$3m^2\frac{C-B}{A}(\gamma+\theta)e\cos\varpi.$$

On trouvera de la même manière que le second membre de la deuxième des mêmes équations contient le terme

$$3m^2\frac{A-C}{B}(\theta+\gamma)[3e\cos(mt-\varpi)\sin mt+2e\sin(mt-\varpi)\cos mt],$$

et par conséquent celui-ci,

$$3m^2\frac{A-C}{2B}(\theta+\gamma)e\sin\varpi;$$

ces deux équations deviennent ainsi, en ne considérant dans leurs seconds membres que ces termes,

$$-\frac{d^2s'}{dt^2}-\frac{A+B-C}{A}m\frac{ds}{dt}-\frac{C-B}{A}m^2s'=\quad 3m^2\frac{C-B}{A}(\gamma+\theta)e\cos\varpi,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{A+B-C}{B}m\frac{ds'}{dt}+\frac{C-A}{B}m^2s=-3m^2\frac{C-A}{2B}(\theta+\gamma)e\sin\varpi,$$

ϖ étant rapporté au nœud ascendant de l'orbite lunaire. La longitude du périgée de la Terre, vue de la Lune, est la longitude du périgée de la Lune vue de la Terre, moins la demi-circonférence de l'orbite lunaire. Si l'on suppose $it+L$ la longitude de ce dernier périgée, rapportée à un point fixe, et $O-g't$ la longitude du nœud rapportée au même point, on aura

$$\varpi=(i+g')t+L-O-\text{la demi-circonférence};$$

alors, $m\frac{C-A}{B}$ et $m\frac{C-B}{A}$ étant fort petits par rapport à $m(i+g')$, on aura, à fort peu près,

$$s=3m^2\frac{C-B}{A}\,\frac{(\gamma+\theta)e}{i+g'}\sin[(i+g')t+L-O],$$

$$s'=3m^2\frac{C-A}{2B}\,\frac{(\gamma+\theta)e}{i+g'}\cos[(i+g')t+L-O],$$

θ étant, par le Chapitre II du Livre V, égal à

$$-\frac{3m(A-C)\gamma}{3m(A-C)+2Ag'}.$$

On aura, par ce même Chapitre, pour les expressions complètes de s et de s',

$$s=\frac{3m(C-A)}{2Ag'-3m(C-A)}\gamma\sin(mt+g't-O)$$
$$+3m^2\frac{C-B}{A}\,\frac{(\gamma+\theta)e}{i+g'}\sin[(i+g')t+L-O],$$

$$s'=\frac{3m(C-A)}{2Ag'-3m(C-A)}\gamma\cos(mt+g't-O)$$
$$+3m^2\frac{C-A}{2B}\,\frac{(\gamma+\theta)e}{i+g'}\cos[(i+g')t+L-O].$$

M. Nicollet a trouvé, par la comparaison de 174 observations de la libration de la Lune en longitude et d'un même nombre d'observations de la libration en latitude, l'inclinaison θ de l'équateur lunaire à l'écliptique, en degrés sexagésimaux, égale à $1^\circ 28' 45''$, ce qui ne diffère que de $15''$ du résultat de Mayer, et il en a conclu

$$\frac{C-A}{C}=0{,}00059701.$$

Il a trouvé, par les mêmes observations, l'équation de la libration en longitude dépendante de l'anomalie du Soleil égale à

$$4'49'',7.\sin(\text{anomalie moyenne du Soleil}),$$

et il en a conclu

$$\frac{B-A}{C} = 0,000563916.$$

Mais cette valeur de $\frac{B-A}{C}$ n'est pas aussi sûre que celle de $\frac{C-A}{C}$, à cause de la petitesse de l'équation de la libration en longitude. Un nombre plus grand encore d'observations déterminera plus exactement cette valeur, et alors la théorie physique de la libration de la Lune sera complète.

CHAPITRE III.

DES ANNEAUX DE SATURNE.

Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet.

Galilée observa le premier l'anneau de Saturne. Il le vit, dans ses faibles lunettes, sous la forme de deux corps lumineux contigus à deux parties opposées de la surface de la planète. Quelquefois Saturne lui parut rond comme les autres planètes. Ces apparences singulières furent ensuite observées par d'autres astronomes. Enfin Huygens, les ayant suivies au moyen d'excellents objectifs qu'il avait construits lui-même, en découvrit les lois et la cause. Il fit voir que Saturne est environné d'un anneau large et d'une très-mince épaisseur, suspendu autour de lui à une petite distance et incliné à son orbite d'un douzième environ de la circonférence, ce qui lui donne une forme apparente elliptique. Cet anneau disparaît toutes les fois que le Soleil ou la Terre traverse son plan; il ne nous transmet alors de lumière que par ses bords, trop minces pour être aperçus. L'accord de cette théorie avec toutes les disparitions et toutes les réapparitions de l'anneau observées depuis Huygens ne laisse aucun doute sur sa réalité. Jacques Cassini reconnut la division de l'anneau en deux anneaux distincts. Short crut en apercevoir un plus grand nombre. Mais Herschel, avec ses puissants télescopes, qui lui ont toujours fait voir les bords éclairés de l'anneau lorsqu'il avait disparu pour les autres observateurs, n'y a vu, comme Cassini, que deux anneaux situés dans un même plan, séparés par un très-petit intervalle, et dont l'extérieur a moins de largeur et une lumière moins vive que l'intérieur. Dans le mois de juin 1790, il présenta à la Société Royale de Londres une série d'observations, d'où il conclut la durée de la rotation de l'anneau intérieur de Saturne d'environ dix heures et demie sexagésimales. Il avait présenté à la Société Royale, en novembre 1789, une suite d'observations qui lui donnaient la durée de la rotation de Saturne presque égale à celle de l'anneau, et plus petite seulement de seize minutes sexagésimales. Ces deux résultats ont été publiés dans le Volume des *Transactions Philosophiques* pour l'année 1790, et qui parut en 1791.

Maintenant, par quel mécanisme les anneaux de Saturne se maintiennent-ils suspendus autour de la planète? S'ils l'étaient par la seule force de cohésion, leurs diverses parties se détacheraient à la longue les unes des autres et finiraient par se précipiter sur Saturne ou par former autant de satellites, et, comme cela n'est point arrivé, il est naturel d'en conclure que leur suspension repose principalement sur les lois de l'équilibre des fluides. C'est ainsi que Maupertuis les a considérés, dans l'explication ingénieuse de ce phénomène qu'il a donnée dans son *Discours sur la figure des astres*. Il conçoit chaque molécule d'un anneau fluide sollicitée vers le centre de la planète et vers un point intérieur de la *figure génératrice* de l'anneau : je nomme ainsi la section de l'anneau par un plan mené perpendiculairement à son plan et passant par le centre de Saturne. En combinant ces deux tendances de la molécule avec la force centrifuge due à une rotation de l'anneau dans son plan autour du centre de Saturne, il détermine la figure que l'anneau doit prendre pour l'équilibre de toutes ses parties. Mais, dans la nature, chaque molécule de l'anneau ne tend point uniquement vers deux points; elle a un nombre infini de tendances vers les autres molécules de l'anneau et vers la planète. C'est en combinant toutes ces tendances avec la force centrifuge qu'il faut déterminer la figure d'équilibre de la section génératrice de l'anneau. Tel est le problème que je me suis proposé dans un Mémoire inséré dans le Volume des *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1787, qui parut au mois

de février 1789. J'ai prouvé, dans ce Mémoire et ensuite dans le Livre III, qu'un anneau fluide peut se maintenir en équilibre autour de Saturne en vertu de l'attraction mutuelle de ses molécules, combinée avec un mouvement de rotation, si la figure génératrice de l'anneau est une ellipse aplatie dont le grand axe est dirigé vers le centre de Saturne. La durée de la rotation doit être alors la même que celle de la révolution d'un satellite dont la distance au centre de Saturne serait celle du centre de la figure génératrice au même point; j'en avais conclu que cette durée était d'environ $\frac{5}{12}$ de jour, avant qu'Herschel l'eût reconnu par l'observation.

J'ai remarqué ensuite que, si l'anneau était parfaitement semblable dans toutes ses parties, les centres de la planète et de l'anneau se repousseraient mutuellement, pour peu qu'ils cessassent de coïncider, ce qui devrait nécessairement arriver par les attractions étrangères. Le centre de l'anneau décrirait donc alors une courbe convexe vers le centre de la planète, et l'anneau finirait par atteindre la surface de la planète, à laquelle il se réunirait. Il est donc nécessaire, pour la stabilité de son équilibre, que ses figures génératrices soient dissemblables et que son centre de gravité ne coïncide point avec son centre de figure. Dans ce cas, l'équilibre de la masse fluide ne sera point sensiblement troublé si les changements des ellipses génératrices ne deviennent sensibles qu'à des distances respectives beaucoup plus grandes que les grands axes de ces ellipses.

Les deux anneaux de Saturne, placés à des distances différentes de la planète, doivent, par l'action du Soleil, avoir des mouvements différents de précession, qui, si rien ne s'y opposait, changeraient continuellement la position respective de leurs plans; ces plans ne coïncideraient donc sensiblement que pendant de courts intervalles. Il est contre toute vraisemblance de supposer que les anneaux de Saturne ont été découverts dans un de ces intervalles; il est donc très-probable qu'il existe une cause qui maintient ces anneaux à peu près dans un même plan, quoique l'action du Soleil tende sans cesse à les en écarter. J'ai annoncé comme un résultat de la théorie de la pesanteur, dans le Volume cité de l'Académie des Sciences, que cette cause est l'aplatissement du sphéroïde de Saturne, produit par un mouvement rapide de rotation de cette planète, mouvement qu'Herschel a confirmé depuis par l'observation. L'Analyse fait voir que, en supposant les anneaux peu inclinés au plan de l'équateur de Saturne, cet aplatissement les maintient toujours à peu près dans ce plan, dont l'action du Soleil tend à les écarter. En même temps que ces anneaux tournent autour de leurs centres de gravité, ces centres se meuvent autour du centre de la planète. De là naissent, dans les positions respectives des plans des anneaux, des variations continuelles, qui produisent, dans la manière dont ils sont éclairés par le Soleil vers leurs apparitions et leurs disparitions et dans celle dont ils se présentent à l'observateur, des différences propres à expliquer les apparences singulières que l'on a quelquefois observées. Telle est la disparition d'une des anses avant l'autre, qui continue de paraître du même côté de la planète pendant une et même plusieurs périodes de la rotation de l'anneau. Tels sont encore ces points lumineux qui semblent immobiles, et qui ont porté quelques observateurs à douter de la rotation des anneaux, dont cependant la nécessité est démontrée par les lois de la Mécanique.

Suivant les observations d'Herschel, la durée de la rotation de l'anneau est de $0^{j},438$; celle de Saturne est de $0^{j},427$, presque égale à la précédente, mais un peu plus petite, comme cela doit être suivant l'hypothèse que j'ai proposée sur la formation des planètes, des satellites et des anneaux. Dans cette hypothèse, les satellites et les anneaux de Saturne ont été formés par les zones que l'atmosphère de la planète a successivement abandonnées à mesure qu'elle s'est resserrée en se refroidissant. Le mouvement de rotation de Saturne s'est accéléré de plus en plus, en vertu du principe des aires. La durée de la rotation d'une planète doit donc être, d'après cette hypothèse, plus petite que la durée de la révolution du corps le plus voisin qui circule autour d'elle, ce qui a lieu pareillement pour le Soleil relativement aux planètes, qui sont toutes les produits des zones abandonnées successivement par l'atmosphère solaire. Tout cela, confirmé par l'observation, augmente la probabilité que beaucoup de phénomènes singuliers du système solaire donnent à l'hypothèse dont il s'agit, comme on peut le voir dans l'*Exposition du système du monde*. On conçoit que, dans cette hypothèse, l'anneau intérieur de Saturne étant fort voisin de la planète, la durée de sa rotation ne doit surpasser que très-peu celle de la rotation de Saturne. En considérant combien la différence observée entre ces durées est petite, il est difficile de ne pas admettre que l'atmosphère de Saturne s'est étendue jusqu'à ses anneaux et qu'ils ont été formés par la condensation de ses couches.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

LIVRE XV.

DÉCEMBRE 1824.

LIVRE XV.

DU MOUVEMENT DES PLANÈTES ET DES COMÈTES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTICE HISTORIQUE DES TRAVAUX DES GÉOMÈTRES SUR CET OBJET.

1. Les anciens astronomes, et spécialement Hipparque et Ptolémée, déterminèrent les mouvements apparents des astres. Ils essayèrent de les représenter par des mouvements circulaires et uniformes, qu'ils jugeaient être les plus parfaits et devoir ainsi appartenir aux corps célestes, n'attribuant, par une bizarrerie de l'esprit humain, aucune imperfection des corps terrestres à ces mêmes astres, dont cependant ils subordonnaient l'existence à la Terre. La complication des cercles qu'ils avaient imaginés, et qu'ils multipliaient à chaque inégalité que l'observation faisait découvrir, avait frappé de bons esprits et leur avait inspiré des doutes sur le système de Ptolémée. Elle engagea Copernic à rechercher un moyen plus simple d'expliquer les mouvements célestes. Considérant que plusieurs anciens philosophes avaient fait tourner la Terre sur elle-même et autour du Soleil, il appliqua cette hypothèse aux phénomènes, et il reconnut que le mécanisme de l'univers en devenait beaucoup plus simple. Elle affranchissait la sphère des étoiles de l'inconcevable vitesse que sa révolution diurne donnait, dans le système de Ptolémée, à ces astres, dont on connaissait déjà le grand éloignement. Les mouvements rétrogrades des planètes n'étaient que

de simples apparences produites par leur mouvement réel, combiné avec celui de la Terre, et le mouvement général du ciel, d'où résulte la précession des équinoxes, se réduisait à un mouvement fort lent dans l'axe terrestre. Mais, pour expliquer les inégalités des mouvements réels, Copernic adopta l'ancienne hypothèse des mouvements circulaires et uniformes. Kepler, après avoir essayé longtemps et inutilement de représenter dans cette hypothèse les observations de Tycho Brahe sur la planète Mars, reconnut enfin qu'elle se meut dans une ellipse dont le centre du Soleil occupe un des foyers et que son rayon vecteur trace autour de ce point des aires proportionnelles au temps. Il étendit ces résultats à la Terre et aux autres planètes, et il découvrit que toutes leurs ellipses sont liées entre elles par ce beau rapport, savoir que les cubes des grands axes sont proportionnels aux carrés des temps des révolutions.

Quoique Kepler donne, dans la Préface de son Ouvrage *De stella Martis*, des idées justes sur l'attraction réciproque de la Lune et de la Terre et sur la tendance des eaux de la mer vers la Lune, et qu'il reconnaisse, dans ce même Ouvrage, que les inégalités elliptiques du mouvement des planètes sont dues à l'action du Soleil, il attribue cependant à une autre cause la périodicité des mouvements planétaires : il suppose que le Soleil, par sa rotation, envoie à chaque instant, dans le plan de son équateur, des espèces immatérielles douées d'une activité décroissante en raison des distances, et qui, en s'étendant, conservent le mouvement circulaire qu'elles avaient à la surface de cet astre et donnent aux planètes, qu'elles entraînent, leur mouvement de révolution. J'ai montré ailleurs comment la rotation du Soleil a pu imprimer à chaque planète son mouvement initial. Mais, pour le rendre presque circulaire, il est nécessaire de le combiner avec une tendance de la planète vers le Soleil. Borelli a eu, le premier, l'heureuse idée de cette combinaison, qu'il a étendue aux satellites relativement à leur planète. Newton, Halley, Wren et Hooke, en comparant cette idée aux théorèmes d'Huygens sur la force centrifuge et au rapport trouvé par Kepler entre les carrés des temps des révolutions des

planètes et les cubes des grands axes de leurs orbites, trouvèrent que, en supposant ces orbites circulaires, les tendances des planètes vers le Soleil étaient réciproques aux carrés de leurs distances à cet astre. En effet, la vitesse d'une planète étant alors la circonférence de son orbite, divisée par le temps de sa révolution, le carré de cette vitesse est proportionnel au carré du rayon de l'orbite divisé par le carré de ce temps, qui, d'après la loi de Kepler, est proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ du rayon; le carré de la vitesse est donc réciproque au rayon. Par les théorèmes d'Huygens, la force centrifuge d'un corps mû dans un cercle est égale au carré de sa vitesse divisé par le rayon; elle est donc, pour une planète, réciproque au carré de sa distance au Soleil; or cette force doit être balancée à chaque instant par la tendance de la planète vers le Soleil, pour que l'orbite se maintienne circulaire; cette tendance est donc réciproque au carré de la distance.

Mais les planètes ne se meuvent point exactement dans des orbes circulaires. On pouvait d'ailleurs douter qu'une planète, transportée sur l'orbite d'une autre planète, éprouverait la même tendance qu'elle vers le Soleil. Il était donc nécessaire de démontrer que la même planète, dans ses diverses distances au Soleil, tend vers lui réciproquement à leurs carrés, et que la tendance vers cet astre ne varie d'une planète à l'autre qu'à raison de la distance. Cette démonstration, alors très-difficile, fut vainement tentée par les trois géomètres qui, conjointement avec Newton, avaient déduit des théorèmes d'Huygens la tendance des planètes vers le Soleil, réciproque au carré de leur distance : elle commença la Mécanique céleste. Newton prouva d'abord que la loi des aires décrites par le rayon vecteur d'une planète indique nécessairement une tendance de la planète vers le centre du Soleil. Il fit voir ensuite, par une application délicate de sa méthode des fluxions, que l'ellipticité de l'orbite exige une tendance réciproque au carré du rayon vecteur. Enfin il conclut, de la loi du carré des temps des révolutions proportionnel au cube des grands axes, que la tendance vers le Soleil ne varie d'une planète à l'autre qu'à raison de la distance. Les trois lois de Kepler furent ainsi ramenées au seul principe d'une tendance des planètes vers le Soleil, réciproque au carré de leurs distances au centre de cet astre. Ce principe avait déjà été énoncé par Boulliau; son analogie avec l'émission de la lumière pouvait le faire soupçonner. Il paraît être la loi de toutes les forces qui sont perceptibles à des distances sensibles, telles que le magnétisme et l'électricité. Mais l'honneur d'une découverte appartient à celui qui, le premier, l'établit solidement par le calcul ou par des observations décisives, et c'est ce que Newton a fait incontestablement à l'égard de la pesanteur universelle.

Ce grand géomètre détermina les conditions de direction et de quantité de la vitesse initiale qui font décrire au mobile un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Quelles que soient ces conditions, il assigna une section conique dans laquelle le mobile peut et doit conséquemment se mouvoir; car, avec les mêmes conditions, il ne peut décrire qu'une seule courbe, ce qui répond au reproche que lui fit Jean Bernoulli, de n'avoir point démontré que les sections coniques sont les seules courbes qu'un corps peut décrire en vertu d'une loi d'attraction réciproque au carré de la distance. Newton remarqua que l'on peut, par sa méthode, déterminer la nouvelle section conique que le mobile décrirait si, à un instant quelconque, on lui imprimait une nouvelle force, et il en conclut que l'on pourrait suivre ainsi le mouvement du mobile dérangé continuellement par des actions étrangères. Lagrange en a déduit, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1786, les variations différentielles des éléments du mouvement elliptique; mais, Newton n'ayant point fait cette application délicate, on doit considérer sa remarque comme une des choses de son admirable Ouvrage qui ont été le germe des belles théories de ses successeurs.

Newton a étendu sa méthode au cas général d'un point sollicité par une force centrale, variable suivant une fonction quelconque de la distance. Il donne l'expression du carré de la vitesse du point, et il en conclut, au moyen des quadratures des courbes, la nature de la courbe décrite et le temps employé par le mobile à décrire ses diverses parties.

Il parvient à ce résultat singulier, savoir, qu'un point qui décrit une courbe en vertu d'une force centrale pourra décrire de la même manière cette courbe, supposée mobile, si l'on augmente la force centrale d'une quantité réciproque au cube du rayon vecteur. Alors les vitesses angulaires du point et de la courbe sont en raison constante. Newton déduit de ce théorème un procédé fort ingénieux pour avoir le mouvement des apsides dans une orbite presque circulaire, décrite en vertu d'une force centrale exprimée par une fonction quelconque de la distance. Ce procédé, réduit en formule générale, donne l'angle décrit par le mobile, en allant d'une apside à la suivante, égale à la demi-circonférence multipliée par la racine carrée d'une fraction dont le numérateur est le produit de l'expression de la force centrale par le carré du rayon vecteur, et dont le dénominateur est le coefficient de la différentielle du rayon vecteur dans la différentiation du produit de l'expression de la force centrale par le cube de ce rayon, cette fraction étant rapportée, après les différentiations, à la moyenne distance du mobile, à l'origine de la force centrale.

Newton applique son procédé au cas où, la force centrale étant réciproque au carré de la distance, une action étrangère la diminue d'une quantité proportionnelle au rayon vecteur. En supposant cette quantité $\frac{1}{357}$ de la force centrale dans les moyennes distances, ce qui a lieu, à fort peu près, relativement à l'action du Soleil sur la Lune, décomposée suivant le rayon vecteur lunaire, il trouve le mouvement de l'apogée plus petit de moitié que celui de l'apogée de la Lune. C'est ce qu'une première approximation donna ensuite aux géomètres qui appliquèrent, les premiers, l'analyse à la théorie de la Lune. Mais il est remarquable que Newton, dans la proposition IV du Livre III des *Principes*, cherchant à corriger la tendance de la Lune vers la Terre de l'effet de l'action solaire, suppose cet effet égal à $\frac{2}{357}$ de la pesanteur de ce satellite, c'est-à-dire tel qu'il résulte du mouvement observé de l'apogée lunaire.

Newton transporta facilement ses résultats au mouvement de deux points matériels A et B, qui s'attirent en raison de leurs masses et suivant une fonction quelconque de leur distance mutuelle. Il avait établi que le mouvement du centre de gravité d'un système de corps ne reçoit aucun changement par leur action réciproque; en imprimant donc à ces points une vitesse égale et contraire à la vitesse initiale de leur centre commun de gravité, ce qui ne change point leur mouvement relatif, ce centre devient immobile. Le point A est attiré vers lui par l'attraction du point B. En substituant ainsi, dans l'expression de l'attraction de ce dernier point, au lieu de la distance mutuelle des deux points, le rayon vecteur mené du centre de gravité au point A et multiplié par le rapport de la somme des masses A et B à la masse B, le mouvement de A autour du centre de gravité sera ramené au cas d'un point attiré suivant une fonction du rayon vecteur vers un centre de forces immobile.

Par la nature du centre de gravité, les deux points A et B sont toujours avec lui sur une même droite, et leurs distances à ce centre sont en raison constante soit entre elles, soit avec leur distance mutuelle. De là il suit que ces points décrivent dans le même temps des courbes semblables autour de leur centre de gravité et l'un autour de l'autre supposé immobile. Le cas de deux points matériels est celui de deux sphères dont les molécules s'attirent en raison des masses et réciproquement au carré des distances, Newton ayant démontré qu'alors ces corps s'attirent comme si leurs masses étaient réunies à leurs centres respectifs. Cette propriété très-remarquable de la loi de la nature contribue à la simplicité des mouvements célestes, parce que, le Soleil, les planètes et les satellites étant à très-peu près sphériques, leurs mouvements ne sont que très-peu troublés par leurs figures.

Le système de tous ces corps est constitué de manière que la masse du Soleil surpasse considérablement celles des planètes, en sorte que l'on peut, dans une première approximation, négliger, avec Newton, leur action les unes sur les autres et sur le Soleil. Alors elles obéissent exactement aux lois de Kepler. Le système d'une planète et de ses satellites est pareillement constitué de manière que la masse de la planète surpasse considérablement celles de ses satellites. En négligeant

donc, dans une première approximation, leur action les uns sur les autres et sur la planète, ils décriraient autour d'elle des orbes rigoureusement elliptiques, sans la force perturbatrice du Soleil. Heureusement, la distance de la planète au Soleil étant considérablement plus grande que celle des satellites à la planète, cette force est très-petite. Si cette distance était infinie, le Soleil, agissant également sur la planète et sur ses satellites, ne troublerait point leur mouvement relatif; la différence de ses actions sur ces différents corps est donc très-affaiblie par sa grande distance à la planète, et elle altère peu ce mouvement. Newton établit que le centre de gravité du système de la planète et de ses satellites décrit, à très-peu près, un orbe elliptique autour du Soleil, et il fait voir que la pesanteur du satellite vers la planète n'est que très-peu changée par l'action solaire; elle n'est diminuée que de $\frac{1}{360}$ au plus pour la Lune. En négligeant donc cette action et l'action mutuelle des satellites, chacun d'eux peut être censé décrire un orbe elliptique autour de sa planète.

Newton conclut de ce résultat les rapports des masses des planètes accompagnées de satellites à la masse du Soleil. Si l'on augmente la distance moyenne du satellite à sa planète, en sorte qu'elle soit égale à la moyenne distance de la planète au Soleil, le carré du temps de la révolution de ce satellite autour de sa planète sera, par la loi de Kepler, augmenté dans le rapport du cube de la seconde de ces distances au cube de la première. Mais il résulte des théorèmes de Huygens sur la force centrifuge que les masses de la planète et du Soleil sont réciproques aux carrés des temps des révolutions des corps qui circulent autour de chacun d'eux à la même distance. De là il est facile de conclure que le rapport de la masse de la planète à celle du Soleil est égal à une fraction dont le numérateur est le produit du cube de la moyenne distance du satellite à sa planète par le carré du temps de la révolution de la planète, et dont le dénominateur est le produit du cube de la moyenne distance de la planète au Soleil par le carré du temps de la révolution du satellite. Newton détermina de cette manière les rapports des masses de Jupiter, de Saturne et de la Terre à la masse du Soleil. La masse étant égale à la densité multipliée par le volume, les densités de ces quatre corps sont comme leurs masses divisées par les cubes de leurs diamètres apparents vus de la même distance, et les pesanteurs à leurs surfaces sont comme leurs masses divisées par les carrés de ces diamètres. Newton a conclu ainsi ces densités et ces pesanteurs respectives des mesures astronomiques de ces diamètres.

L'une des plus heureuses applications du principe de la pesanteur universelle est celle que Newton en fit aux comètes. Ces astres se montrent dans toutes les régions du ciel; ils se meuvent dans tous les sens et d'une manière très-compliquée, et finissent, après quelque temps, par disparaître. On avait essayé vainement, avant Newton, de déterminer la loi de leurs mouvements. Ce grand géomètre considéra que les comètes devaient être soumises, comme les planètes et les satellites, à l'attraction du Soleil, et qu'elles décrivaient par conséquent autour de lui des orbes elliptiques, avec la différence que, n'étant visibles pour nous que dans la partie de leurs orbes la plus voisine du Soleil, ces orbes, au lieu d'être presque circulaires, étaient fort allongés et pouvaient même être des paraboles ou des hyperboles. Pour vérifier ce beau résultat, il fallait le comparer aux observations; mais cette comparaison offrait des difficultés. A la vérité, le grand allongement des ellipses décrites par les comètes permet, du moins dans une première approximation, de considérer la partie visible de ces ellipses comme un arc de parabole, ce qui simplifie le problème : il reste cependant encore très-difficile. Newton le résolut par une méthode dans laquelle le génie inventeur ne brille pas moins que dans les autres parties de l'Ouvrage des *Principes*. Ce grand géomètre appliqua sa méthode à la fameuse comète de 1680, qui parut pendant un intervalle de temps considérable, et qui, reparaissant après avoir été perdue dans les rayons du Soleil, fut regardée par divers astronomes comme formant deux comètes distinctes. Newton fit voir qu'elles étaient identiques, et il représenta toutes les bonnes observations de la comète avec une précision qui ne laissait aucun doute sur la vérité

de sa théorie du mouvement de ces astres. Dans la troisième édition de son Ouvrage, Newton n'ajouta rien à sa méthode. Seulement il en présenta de nouvelles applications, faites principalement par Halley, qui soumit à cette théorie les observations de vingt-quatre comètes, parmi lesquelles il reconnut l'identité des comètes de 1531, 1607 et 1682. Il en conclut que cet astre décrit un orbe elliptique dans une période d'environ soixante-quinze ans, et qu'il devait reparaître à la fin de 1758 ou au commencement de 1759, ce que l'observation a confirmé. La même théorie a représenté exactement les observations de toutes les comètes qui ont paru depuis Newton, en sorte que chaque apparition de ces astres a fourni une nouvelle preuve de cette admirable théorie et du principe de la pesanteur universelle qui en est la base.

Plusieurs grands géomètres se sont occupés, depuis Newton, du problème de la détermination des orbites des comètes par les observations. Ils sont parvenus, sur cet objet, à des résultats intéressants, parmi lesquels on doit distinguer l'expression élégante et simple que Lambert a donnée du temps employé à décrire un arc parabolique, en fonction de cet arc et de la somme des rayons vecteurs extrêmes, expression qu'il a étendue aux arcs elliptiques et qui est démontrée dans le n° **27** du Livre II.

Les diverses solutions de ce problème employaient à la recherche des premières valeurs des éléments trois observations, assez rapprochées pour que l'on pût se permettre de négliger la troisième puissance de l'intervalle de temps qui sépare les deux observations extrêmes. Il me parut que, au lieu de faire porter l'approximation sur les valeurs analytiques, il serait à la fois plus exact et plus simple d'employer une analyse rigoureuse, et de ne faire porter l'approximation que sur les données des observations. C'est ce que j'ai fait par la méthode exposée dans les n°s **31** et suivants du Livre II. Les données dont je me sers sont la longitude et la latitude de la comète à l'époque de l'observation moyenne, et leurs différences premières et secondes, divisées par les puissances correspondantes de l'élément du temps. Au moyen de ces données, je détermine rigoureusement, par la seule considération des équations différentielles du mouvement de l'astre, sa distance périhélie et l'instant de son passage par le périhélie. Cette méthode a l'avantage de pouvoir employer, pour déterminer les données, toutes les observations faites dans l'intervalle des observations extrêmes, car, si cet intervalle est peu considérable, on peut étendre sans erreur sensible les mêmes données à ces observations et former ainsi, pour les obtenir, deux fois autant d'équations de condition qu'il y a d'observations. Je corrige ensuite, par trois observations éloignées entre elles, la distance périhélie et l'instant du passage, directement et sans avoir besoin de connaître les autres éléments de l'orbite. Persuadé que l'Analyse, lorsqu'elle est convenablement appliquée, peut toujours fournir aux astronomes les méthodes les plus faciles et les plus abrégées pour les calculs numériques, je me suis étudié à leur en offrir un exemple dans ce problème, l'un des plus difficiles de toute l'Astronomie. Les nombreuses applications qui ont été faites de cette méthode prouvent son utilité.

Newton n'a point considéré les perturbations que l'action des planètes sur le Soleil et sur elles-mêmes produit dans leur mouvement elliptique. Seulement, il fait voir que, en considérant le mouvement autour du Soleil de deux planètes qui s'attirent réciproquement au carré de la distance et qui sont attirées suivant la même loi, le mouvement elliptique de la planète inférieure et la proportionnalité des aires que son rayon vecteur décrit autour du Soleil seront moins troublés, si cet astre obéit à l'attraction des planètes, que s'il est immobile. Il observe encore que, l'action de Jupiter sur Saturne dans la conjonction de ces planètes étant à l'action du Soleil sur Saturne dans le rapport de l'unité à 211, elle ne doit point être négligée. « De là vient », dit-il, « que l'orbe de Saturne est dérangé si sensiblement dans chaque conjonction avec Jupiter, que les astronomes s'en aperçoivent. » Cependant la théorie analytique des mouvements de ces deux planètes, qui représente exactement toutes les observations, nous montre que le dérangement de Saturne dans sa conjonction avec Jupiter est presque insensible. Le dérangement correspondant de Jupiter est environ six

fois plus grand, quoique l'action de Saturne sur Jupiter ne soit à la pesanteur de Jupiter sur le Soleil que dans le rapport de l'unité à 500. Cette remarque, déjà faite par Euler, fait voir qu'il ne faut adopter qu'avec une extrême réserve les aperçus les plus vraisemblables, tant qu'ils ne sont point vérifiés par des preuves décisives.

Depuis la publication de l'Ouvrage des *Principes* jusqu'aux premiers travaux d'Euler sur les perturbations des planètes, les géomètres n'ont rien ajouté de remarquable aux grandes découvertes consignées dans cet Ouvrage. Ils ont traduit en Analyse les démonstrations de Newton, qui, probablement, était parvenu par cette méthode à ses résultats, que sa grande prédilection pour la synthèse lui a fait démontrer synthétiquement. Cependant les applications de l'Analyse aux découvertes newtoniennes ont préparé celles qu'Euler et ses contemporains en ont faites à la théorie des perturbations des mouvements célestes. Les recherches sur le Calcul intégral et sur la Mécanique, dont les géomètres s'étaient fort occupés dans l'intervalle dont je viens de parler, ont surtout contribué aux progrès de cette théorie, qui leur offrait les applications les plus importantes de l'Analyse infinitésimale, sans laquelle il eût été impossible de résoudre les questions difficiles du système du monde. C'est principalement dans la considération des équations différentielles et dans leur intégration que réside la puissance de cette Analyse. Newton ne paraît pas s'être occupé de leur calcul, si fécond en résultats, surtout depuis son extension aux équations à différences partielles. C'est à Leibnitz et aux Bernoulli qu'il doit ses premiers progrès. Ces illustres géomètres n'adoptèrent point la découverte de la gravitation universelle à sa naissance; mais leurs recherches, perfectionnées et appliquées par leurs disciples à cette découverte, l'ont élevée au plus haut point de perfection et de certitude.

Si l'on conçoit un système de corps sphériques dont toutes les molécules s'attirent proportionnellement à leurs masses et réciproquement au carré de la distance, on peut rapporter chacun de ces corps à trois axes fixes perpendiculaires entre eux et décomposer parallèlement à ces axes les attractions qu'il éprouve de la part des autres corps. En égalant ensuite les différences secondes des coordonnées, divisées par le carré de l'élément du temps supposé constant, à ces attractions ainsi décomposées, on aura les trois équations différentielles du second ordre qui déterminent le mouvement du corps. Chaque corps du système fournit trois équations semblables, en sorte que le nombre de ces équations est triple de celui des corps. Leurs intégrales complètes renferment donc six fois autant d'arbitraires qu'il y a de corps. Ces constantes sont déterminées par les coordonnées initiales de chaque corps et par ses vitesses initiales suivant ces coordonnées.

On a presque toujours besoin de rapporter les corps du système à un corps principal. Il suffit, pour cela, de retrancher les équations différentielles de son mouvement suivant chaque coordonnée des équations différentielles correspondantes du mouvement des autres corps, dont on aura ainsi les équations différentielles relatives à leurs mouvements autour du corps principal.

On n'a pu obtenir jusqu'ici que sept intégrales des équations différentielles du mouvement du système. Les trois premières sont finies et ne sont qu'une traduction du beau théorème de Newton sur le mouvement du centre de gravité d'un système de corps qui n'éprouvent point d'actions étrangères. Les quatre autres intégrales, données par les principes des aires et des forces vives, sont différentielles du premier ordre; elles sont une généralisation de la loi des aires proportionnelles aux temps et de l'expression du carré de la vitesse, que Newton a trouvées dans le mouvement du système de deux corps. Le problème de ce mouvement est ainsi ramené à l'intégration d'équations différentielles du premier ordre, qu'il est facile ensuite d'intégrer par les quadratures. C'est ce que Newton a développé avec une grande élégance, sous une forme synthétique. Mais, dans le cas d'un plus grand nombre de corps, le problème présente d'extrêmes difficultés. Heureusement la constitution du système solaire apporte des simplifications considérables qui permettent de résoudre ce problème par des approximations convergentes.

Les planètes, comme nous l'avons déjà dit, se meuvent autour du

Soleil, dans des orbes peu excentriques et peu inclinés à l'écliptique. De plus, leurs masses sont fort petites relativement à la masse de cet astre. En négligeant donc leur action sur le Soleil et sur elles-mêmes, on a, par une première approximation, le mouvement elliptique dont Newton a développé les lois. Si l'on considère ensuite cette action, en négligeant les carrés et les produits des masses planétaires, on a une seconde approximation, qui peut être ordonnée suivant les puissances et les produits des excentricités et des inclinaisons des orbites. En considérant de la même manière les carrés et les produits des masses des planètes, on obtient une troisième approximation, et ainsi de suite. Le mouvement des satellites autour de leur planète offre des simplifications semblables. L'action perturbatrice du Soleil est toujours peu considérable par rapport à l'action directe de la planète sur ces corps, quoique l'action du Soleil sur eux soit fort grande. Mais, leur distance à la planète étant très-petite relativement à la distance de la planète au Soleil, cet astre attire à peu près de la même manière la planète et ses satellites, en sorte que la force perturbatrice de leurs mouvements relatifs, qui n'est que la différence de ces diverses attractions du Soleil, est fort petite par rapport à l'attraction de la planète sur ses satellites. Malgré toutes ces simplifications, les divers problèmes de la théorie des perturbations des planètes et des satellites présentent de grandes difficultés, dont la solution exige des considérations délicates et minutieuses, soit pour choisir les coordonnées qui doivent donner dans les divers cas les approximations les plus convergentes, soit pour démêler dans le nombre infini des inégalités celles qui, quoique très-petites dans les équations différentielles, acquièrent par les intégrations de grandes valeurs et donnent ainsi la cause et les lois des singularités observées par les astronomes dans les mouvements célestes.

C'est à la première pièce d'Euler sur les mouvements de Jupiter et de Saturne qu'il faut rapporter les premières recherches sur les perturbations des mouvements planétaires. Cette pièce, couronnée par l'Académie des Sciences en 1748, fut remise au Secrétariat de cette Académie le 27 juillet 1747, quelques mois avant que Clairaut et d'Alembert communiquassent à l'Académie les recherches analogues qu'ils avaient faites sur le *problème des trois corps*, qu'ils nommèrent ainsi parce qu'ils avaient appliqué leurs solutions au mouvement de la Lune attirée par le Soleil et par la Terre. Mais les différences de leurs méthodes à celles d'Euler prouvent qu'ils n'avaient rien emprunté de sa pièce. Elle fut imprimée en 1749, année où parut l'Ouvrage de d'Alembert sur la précession des équinoxes, et qui par là est remarquable dans l'histoire de la Mécanique céleste.

Euler, ainsi que les géomètres qui se sont occupés les premiers de la théorie des perturbations, a choisi pour coordonnées celles que les astronomes employaient alors dans les Tables astronomiques, savoir, la longitude de la planète comptée d'une droite invariable prise sur un plan fixe, son rayon vecteur, l'inclinaison de l'orbite au même plan et la longitude de son nœud ascendant. Mayer a le premier introduit directement dans les Tables la latitude, au lieu de ces deux dernières coordonnées, ce qui est plus commode pour le calcul des perturbations et pour les calculs astronomiques. Euler donne entre les quatre coordonnées dont il fait usage et le temps, dont il suppose l'élément constant, quatre équations différentielles. Les deux premières, relatives à la longitude de la planète et à son rayon vecteur projeté sur le plan fixe, sont différentielles du second ordre. Les deux autres équations sont relatives à l'inclinaison de l'orbite et à la longitude de son nœud : elles sont différentielles du premier ordre. Euler ne donne point, dans sa pièce, l'analyse qui l'a conduit à ces équations. La Commission nommée par l'Académie pour juger cette pièce, et dont Clairaut et d'Alembert étaient membres, persuadée que la formation d'équations différentielles propres aux approximations et aux usages astronomiques était l'un des points les plus intéressants de la théorie des perturbations, témoigna ses regrets de ce que l'auteur se fût contenté de présenter ces équations sans les démontrer. L'analyse par laquelle il y est parvenu est exposée dans deux de ses Mémoires, dont le premier parut en 1749 dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour la même

année; le second parut en 1750 dans le Volume des *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg* pour les années 1747 et 1748. On y voit que le procédé d'Euler consiste à transformer les équations différentielles du second ordre, relatives aux coordonnées parallèles à trois axes fixes perpendiculaires entre eux, en quatre autres qui se rapportent aux coordonnées précédentes, et à combiner ces équations différentielles ainsi transformées, de manière à obtenir les équations différentielles qu'il a présentées dans sa pièce. Le premier des deux Mémoires cités est surtout remarquable en ce que ce grand géomètre y parvient aux équations différentielles du premier ordre de l'inclinaison et de la longitude du nœud en faisant varier les constantes arbitraires qui expriment ces deux éléments dans l'orbite invariable : c'est le premier essai de la méthode de la variation des constantes arbitraires.

Euler considère d'abord les perturbations indépendantes des excentricités et des inclinaisons. Pour cela, il développe les forces perturbatrices en sinus et cosinus d'angles croissants comme le temps. Mais ce développement, sans lequel la formation des Tables astronomiques des planètes devenait impossible, présentait une difficulté que ce grand géomètre a très-heureusement surmontée. Elle consiste à développer les puissances du radical, qui exprime la distance mutuelle des deux planètes, dans une série d'angles multiples de leur élongation. Euler donne des expressions élégantes des divers termes de ce développement et, de plus, une relation très-simple entre trois termes consécutifs, au moyen de laquelle on peut facilement conclure des deux premiers termes tous les suivants. Il fait la remarque importante que cette série, quoique peu convergente pour Jupiter et Saturne, le devient beaucoup par les diviseurs que ses divers termes acquièrent en vertu des intégrations.

Euler ne considère, dans sa pièce, que les perturbations du mouvement de Saturne par l'action de Jupiter. Il suppose d'abord les deux orbites dans un même plan, et il détermine les perturbations du rayon vecteur et de la longitude en faisant abstraction des excentricités des orbites. Les résultats auxquels il parvient sont peu différents de ceux que j'ai donnés dans le Livre VI. Il considère ensuite les inégalités dépendantes des excentricités des orbites. Ici, de graves erreurs de calcul, qui ne tiennent point à sa méthode, rendent ses résultats inexacts. Les deux seules inégalités de ce genre qu'Euler détermine, et qui sont en effet les plus grandes de cet ordre, ont pour argument, la première l'élongation de Saturne à Jupiter moins l'anomalie de Saturne, la seconde le double de cette élongation moins l'anomalie de Jupiter. Il trouve à cette dernière inégalité un signe contraire à son véritable signe. La comparaison des observations avec sa formule de la longitude de Saturne lui fit voir qu'elles s'en écartent considérablement, mais qu'elles s'en rapprochent beaucoup si l'on change le signe de cette inégalité. Soupçonnant alors qu'il s'était trompé dans son calcul, il le revit, mais sans en reconnaître l'erreur, et il en conclut que la loi newtonienne de l'attraction réciproque au carré des distances devait être modifiée. Dans le même temps, Clairaut tira la même conclusion en appliquant l'analyse différentielle au mouvement de l'apogée lunaire. Mais cet illustre géomètre, ayant porté plus loin les approximations, reconnut bientôt que la loi newtonienne donne le véritable mouvement de cet apogée. Dès lors tous les géomètres et Euler lui-même admirent cette loi sans aucune restriction, quoique plusieurs phénomènes astronomiques, tels que les grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne et l'accélération du moyen mouvement de la Lune, leur parussent inexplicables en vertu de cette loi : plutôt que de la modifier, ils préférèrent de recourir à des causes étrangères.

Euler détermine le mouvement de l'aphélie de Saturne, mais sa formule est inexacte. En considérant les inégalités dépendantes de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, l'intégration des équations différentielles lui donna une inégalité en longitude, dont le coefficient croît proportionnellement au temps et dont l'argument est la distance de Saturne à l'aphélie de Jupiter. L'apparition de cet arc de cercle l'embarrassa; mais, dans un Supplément à sa pièce, il reconnut que, cette inégalité atteignant son maximum dans le même temps, à peu près, que l'équation du centre de Saturne, elle pouvait être représentée par une diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite de cette planète. On verra bientôt par quel moyen ce grand analyste a fait disparaître cet arc.

Enfin Euler détermine les variations du nœud et de l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'orbite de Jupiter, supposée fixe. Il fait voir que l'inclinaison moyenne reste constante, mais que le nœud rétrograde sans cesse, et il donne l'expression exacte de ce mouvement rétrograde. En transportant ses formules au mouvement de l'orbite terrestre produit par l'action de Jupiter, il en conclut la variation correspondante de la latitude des étoiles, et il en forme une Table dont l'argument est la longitude de l'étoile. Ce grand géomètre n'ayant point eu égard à l'action de Vénus, dont l'influence sur ce phénomène est plus grande que celle de Jupiter, sa Table est incomplète; mais elle est la première de ce genre.

Cette pièce d'Euler étant le premier pas que l'on a fait dans la théorie des perturbations planétaires, j'ai cru devoir en donner une analyse étendue. L'auteur y a tracé la route la plus directe et la plus simple pour arriver aux divers résultats de cette théorie. Il a surmonté, par son génie et par son profond savoir en Analyse, des obstacles qui, dès les premiers pas, auraient arrêté la plupart des géomètres. Enfin, il a donné les formules des inégalités périodiques et séculaires du mouvement des planètes, dont plusieurs sont fautives, mais qu'il serait facile de rectifier en suivant ses méthodes analytiques.

L'Académie, en couronnant la pièce dont je viens de parler et voulant donner à la théorie dont elle est l'objet une plus grande perfection, proposa cette théorie pour le sujet du prix de Mathématiques qu'elle devait décerner en 1750. Aucune pièce digne du prix ne lui étant parvenue, elle remit le même sujet pour le prix de l'année 1752, qui fut adjugé à une seconde pièce d'Euler. Ce grand géomètre part des équations différentielles de sa première pièce, mais il les transforme en d'autres dans lesquelles l'élément de l'élongation de Saturne à Jupiter est supposé constant. Il considère simultanément les mouvements des deux planètes, et il détermine leurs inégalités indépendantes des excentricités. Passant ensuite aux inégalités dépendantes des excentricités, il cherche à obtenir des intégrales sans arcs de cercle, et pour cela il emploie un moyen très-ingénieux et peut-être le plus direct et le plus simple que l'on puisse imaginer. On sait que, si l'on néglige le carré de l'excentricité, la partie elliptique du rayon vecteur d'une planète se réduit au produit de l'excentricité par le cosinus de la distance de la planète à son aphélie. Euler conçoit, dans le rayon vecteur de Jupiter, deux termes semblables rapportés à deux aphélies différents, ce qui revient à supposer une double excentricité à l'orbite. La partie elliptique du mouvement de la planète en longitude est alors formée, comme dans le mouvement elliptique simple, des termes elliptiques du rayon vecteur, dans lesquels on change les cosinus en sinus, en leur donnant pour coefficients le double de ceux des cosinus, pris avec un signe contraire. Euler suppose les parties elliptiques du rayon vecteur et de la longitude de Saturne formées de termes semblables rapportés à ces deux aphélies. En substituant, dans l'équation différentielle du rayon vecteur de Jupiter, les termes relatifs à l'un de ces aphélies, la comparaison des mêmes cosinus lui donne une expression du mouvement de cet aphélie, qui contient le rapport de l'excentricité de l'orbite de Jupiter relative à cet aphélie à l'excentricité correspondante de l'orbite de Saturne. La même substitution dans l'équation différentielle du rayon vecteur de Saturne lui donne une seconde expression du mouvement de cet aphélie, pareillement dépendante du rapport des excentricités. De la comparaison de ces deux expressions il obtient, pour déterminer ce rapport, une équation du second degré, dont il choisit une des racines, qu'il substitue dans ces expressions pour avoir le mouvement de l'aphélie. En considérant de la même manière les parties elliptiques relatives à l'autre aphélie, Euler parvient à une autre équation du second degré, qui détermine le rapport des deux excentricités des orbites correspondantes à cet aphélie. Les racines de cette équation sont imaginaires; mais il les rend réelles et égales par un léger changement dans les valeurs des masses des planètes. On est étonné qu'un aussi profond analyste n'ait pas cherché ce que signifiait la racine qu'il négligeait et ce qui devait faire préférer l'autre racine. Mais, s'il eût bien fait son calcul, il aurait trouvé que les deux équations du second degré qu'il obtenait n'en forment qu'une, dont les deux racines sont réelles et donnent les rapports des excentricités correspondantes dans les deux orbites. Euler, malgré l'inexactitude de ses résultats, fit, par la considération d'une excentricité multiple des orbites, une découverte importante, dont le développement a démontré la stabilité du système du monde. Ce grand géomètre prouve que les excentricités et les positions des aphélies de Jupiter et de Saturne, déterminées par les astronomes, varient sans cesse, mais inégalement dans les différents siècles, et qu'elles se rétablissent dans une période d'environ trente mille ans. Il en conclut, dans la longitude des deux planètes, une grande inégalité séculaire, la même pour chaque planète, maintenant additive à leur longitude, et qui se rétablit dans la période précédente. Les observations semblaient indiquer, au contraire, une accélération dans le mouvement de Jupiter et un ralentissement dans celui de Saturne; mais les recherches ultérieures ont prouvé que cette inégalité introduite par Euler n'existe pas.

D'Alembert publia, en 1754, les deux premiers Volumes de ses *Recherches sur le système du monde*. Il y appliqua au mouvement des planètes, troublé par leur action mutuelle, les formules par lesquelles il avait calculé les mouvements de la Lune. Mais il n'a rien ajouté aux recherches d'Euler, si ce n'est la remarque de la relation qui existe entre les termes de la série dans laquelle Euler avait développé une puissance quelconque du radical qui exprime la distance mutuelle de deux planètes et les termes de la série de ce développement lorsqu'on diminue de l'unité cette puissance. On doit encore à ce grand géomètre, pour calculer les perturbations du mouvement d'une planète par l'action de ses satellites, perturbations qu'Euler n'avait point considérées, le moyen le plus simple, fondé sur le mouvement à très-peu près elliptique du centre commun de gravité de tous ces corps autour du Soleil. D'Alembert avait fait disparaître, par un moyen ingénieux, l'arc de cercle que sa méthode d'intégration introduisait dans l'expression du rayon vecteur de la Lune. Il pensa que le même moyen peut être appliqué au mouvement des planètes. Mais ce moyen ne réussit qu'autant que l'arc de cercle est introduit par le mouvement de l'apogée, ce qui a lieu pour la Lune. Si l'arc dépend de ce mouvement et d'une variation séculaire de l'excentricité, ce qui a lieu pour les planètes, le moyen proposé par d'Alembert ne réussit plus, et la question devient beaucoup plus difficile. On vient de voir par quel artifice Euler l'a résolue. D'Alembert, membre des Commissions nommées par l'Académie pour juger les pièces d'Euler, ne paraît pas avoir remarqué cet artifice; mais ce qui doit surprendre, c'est qu'Euler lui-même n'en ait pas senti l'importance et qu'il n'ait pas cherché à l'étendre au système entier des planètes.

En 1756, l'Académie des Sciences couronna une troisième pièce d'Euler sur les inégalités du mouvement des planètes, produites par leurs actions réciproques. La méthode que ce grand géomètre y expose est très-belle et fort importante dans la Mécanique céleste. Elle consiste à regarder les éléments du mouvement elliptique comme variables en vertu des forces perturbatrices. Ces éléments sont : 1° le grand axe de l'orbite qui donne, par la loi de Kepler, le rapport de la différentielle de la longitude moyenne à l'élément du temps; 2° l'époque de cette longitude; 3° l'excentricité de l'orbite; 4° la longitude de l'aphélie; 5° l'inclinaison de l'orbite à un plan fixe; 6° la longitude de son nœud. Euler se propose de déterminer les variations que les forces perturbatrices introduisent dans ces éléments. Il l'avait déjà fait, comme on l'a vu ci-dessus, par rapport à l'inclinaison et à la longitude du nœud de l'orbite. Pour cela, il considère qu'à la fin d'un instant infiniment petit l'expression de la tangente de la latitude peut être censée appartenir également au plan de l'orbite de cet instant et au plan de l'orbite de l'instant suivant. En différentiant l'expression de la latitude dans l'hypothèse des deux éléments constants, on a la différentielle relative à l'orbite invariable pendant un instant. En différentiant la même expression dans l'hypothèse où la longitude et les éléments varient, on a la différentielle relative à l'origine de l'instant suivant. En égalant ces deux différentielles, Euler obtient une équation entre les différentielles de l'inclinaison et de la longitude du nœud. Il différentie de nouveau la différentielle de la tangente de la latitude, obtenue dans la première hypothèse, ce qui lui donne entre les différentielles de ces éléments une seconde équation, dans laquelle il substitue, au lieu de la différence seconde de la tangente de la latitude, sa valeur donnée par les équations différentielles du mouvement de la planète.

La méthode suivie par Euler, pour déterminer les variations des autres éléments du mouvement elliptique, n'est pas aussi directe que la précédente; mais, au fond, elle revient au même. Le plan auquel ce grand géomètre rapporte d'abord les coordonnées est celui de l'orbite de la planète dont il considère les perturbations. Il suppose ce plan fixe, ce que l'on peut faire dans le calcul du rayon vecteur et de la longitude, du moins si l'on néglige le carré de la force perturbatrice. Il détermine les expressions différentielles de ces deux coordonnées, différentielles que l'on déduit immédiatement du principe des aires et du principe des forces vives. Ensuite il considère l'expression elliptique du rayon vecteur, qui, comme l'on sait, est égal au paramètre divisé par l'unité diminuée du produit de l'excentricité par le cosinus de l'anomalie rapportée à l'aphélie. Il différentie cette expression en supposant les éléments constants; en comparant ensuite cette différentielle à celle du rayon vecteur qu'il a trouvée en fonction des forces perturbatrices, il détermine le paramètre et l'excentricité de manière à faire coïncider ces différentielles, ce qui lui donne les expressions de ces deux éléments. Euler en conclut la différentielle du quotient de l'unité divisée par le grand axe. Il est facile de s'assurer qu'elle est une différence exacte des coordonnées de la planète troublée, résultat important auquel Lagrange est parvenu d'une manière directe et d'où il a conclu, comme nous le dirons bientôt, l'invariabilité des moyens mouvements planétaires. La différentielle de l'expression elliptique du rayon vecteur, prise en y faisant varier les éléments et l'anomalie, donne la différentielle de l'anomalie, qui, retranchée de la différentielle de la longitude, donne la différentielle de la longitude de l'aphélie. Euler ne considère point la variation de l'époque, ce qui rend incomplète sa théorie de la variation des éléments elliptiques.

Dans l'évaluation des forces attractives, Euler rapporte le mouvement de la planète troublée au plan de la planète perturbatrice; mais il observe que la projection de l'ellipse de la planète troublée sur ce plan est une ellipse dans laquelle, le Soleil n'étant plus au foyer, les lois de Kepler ne sont point observées autour de ce point, ce qui complique les calculs. Il juge donc avec raison que, dans le calcul des perturbations du rayon vecteur et de la longitude, il convient de rapporter le mouvement de la planète troublée au plan de son orbite. Il y a de l'avantage à rapporter ce mouvement au plan de l'orbite de la planète perturbatrice, dans le calcul des variations de l'inclinaison de l'orbite et de ses nœuds, et sur cet objet il parvient aux résultats de sa première pièce.

Plusieurs des formules de ce grand géomètre sont incomplètes; ainsi l'expression qu'il donne du mouvement de l'aphélie ne renferme point la partie de ce mouvement dépendante du rapport de l'excentricité de l'orbite de la planète perturbatrice à celle de l'orbite de la planète troublée. En général, dans cette pièce comme dans les deux précédentes, le mérite des méthodes fait regretter que leur auteur ait été souvent, par de nombreuses erreurs de calcul, conduit à des résultats fautifs, qui l'ont peut-être empêché lui-même de reconnaître les avantages de ces méthodes, sur lesquelles il n'est plus revenu.

Enfin, Euler termine sa pièce par une application étendue de ses formules au mouvement de la Terre. En partant de suppositions assez vraisemblables sur le rapport des masses des planètes à la masse du Soleil, il détermine la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique, qu'il trouve de 48″ sexagésimales, ce qui s'écarte fort peu des observations. Il a mis par là hors de doute la diminution séculaire de cette obliquité, que de savants astronomes regardaient alors comme incertaine.

C'est à fort peu près à ces trois pièces que se réduisent les travaux d'Euler sur la théorie des perturbations du mouvement des planètes. On n'a rien ajouté à cette théorie jusqu'aux recherches de Lagrange, publiées dans le Tome III des *Mélanges* de la Société Royale de Turin, qui parut en 1766. Lagrange y considère les objets traités par Euler dans sa deuxième et dans sa troisième pièce, savoir, la variation des éléments du mouvement elliptique et le moyen d'intégrer les équations différentielles du mouvement des planètes sans introduire d'arcs de cercle dans les intégrales. Lagrange ne parait pas avoir connu ces pièces d'Euler, qui n'ont été publiées qu'en 1769. Pour obtenir les variations différentielles des éléments du mouvement elliptique, Lagrange étend au rayon vecteur les mêmes considérations par lesquelles Euler, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1750, avait déduit de l'expression de la latitude les variations différentielles de l'inclinaison de l'orbite et du nœud. Il différentie l'expression elliptique du rayon vecteur, et il égale à zéro la partie de cette différentielle qui dépend des variations de l'excentricité et de la longitude de l'aphélie, ce qui lui donne une première équation entre les différentielles de ces éléments. La différentielle du rayon vecteur devient ainsi la même que dans l'ellipse invariable. Il la différentie de nouveau, et il obtient entre les variations des deux mêmes éléments une seconde équation, dans laquelle il substitue, au lieu de la différence seconde du rayon vecteur, sa valeur donnée par les équations différentielles du mouvement de la planète. Mais ces équations sont inexactes, parce qu'elles ne renferment point la variation du grand axe, à laquelle Lagrange n'a point eu égard, non plus qu'à la variation de l'époque.

Le moyen par lequel Lagrange obtient les intégrales du mouvement des planètes sans arcs de cercle, quoique beaucoup moins simple que celui d'Euler, est très-ingénieux. Il consiste à égaler chaque terme des équations différentielles des mouvements de Jupiter et de Saturne à une nouvelle variable, à différentier ces variables et leurs valeurs, et à combiner les équations qui en résultent avec les équations différentielles des coordonnées des planètes, de manière à obtenir, entre toutes ces variables, un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, qu'il intègre par un procédé fort simple. Il détermine ainsi les rayons vecteurs des deux planètes et il est conduit, par son analyse, aux deux excentricités qu'Euler avait imaginées pour chaque planète. Mais, son calcul étant exact, il ne trouve qu'une seule équation du second degré pour déterminer les rapports des excentricités des orbites des deux planètes, relatives au même aphélie. En appliquant cette méthode aux équations différentielles de la latitude, ce grand géomètre représente la latitude de chaque planète au moyen de deux inclinaisons rapportées à deux nœuds différents, et il détermine, par les racines d'une seule équation du second degré, les rapports des inclinaisons des orbites des deux planètes, relatives au même nœud. En développant ses formules en séries, il donne les expressions analytiques et numériques des variations séculaires des excentricités, des aphélies, des inclinaisons et des nœuds des orbites de Jupiter et de Saturne, expressions dont j'ai reconnu l'exactitude. Il parvient enfin à deux équations séculaires proportionnelles au carré du temps, l'une additive à la longitude moyenne de Jupiter, l'autre plus grande et soustractive de la longitude moyenne de Saturne. Euler, comme nous l'avons dit, trouvait ces inégalités les mêmes et toutes deux additives à la longitude. Mais le résultat de Lagrange, quoique plus conforme que celui d'Euler à ce que les observations semblaient indiquer, n'en est pas plus exact.

Je présentai en 1773, à l'Académie des Sciences, mes premières recherches sur le système du monde. Elles ont paru dans le Volume des *Mémoires des Savants étrangers* de la même année, qui n'a été publié qu'en 1776. Mon objet principal, dans ces recherches, a été de donner les expressions exactes des inégalités séculaires du mouvement des planètes. Frappé des différences qu'offraient à cet égard les expressions trouvées par Euler et Lagrange, et considérant qu'ils avaient négligé plusieurs quantités du même ordre que celles dont ils avaient tenu compte, je déterminai ces expressions avec l'attention la plus scrupuleuse. Celle du moyen mouvement était surtout importante

dans l'Astronomie; elle paraissait fort sensible dans le mouvement de Saturne. En substituant dans ma formule les valeurs numériques des quantités relatives à l'action de Jupiter sur cette planète, je fus surpris de trouver un résultat nul, et j'en conclus que l'action de Jupiter n'altère point le mouvement moyen de Saturne. Une substitution semblable, relative à l'action de Saturne sur Jupiter, me donna pareillement un résultat nul. L'égalité à zéro de ces deux résultats me fit soupçonner qu'elle ne tenait point aux valeurs propres des éléments de ces deux planètes et que l'expression analytique elle-même était identiquement nulle. Cette expression renferme un nombre considérable de termes, multipliés par les coefficients des angles multiples de l'élongation des deux planètes dans le développement des puissances du radical qui exprime leur distance mutuelle. On a vu que ces coefficients ont entre eux des rapports tels, que, si le premier et le second coefficient du développement de l'une de ces puissances sont donnés, on peut en conclure tous les autres. La formule analytique de l'inégalité séculaire du moyen mouvement pouvait être ainsi réduite à ne renfermer que ces deux coefficients. Je reconnus que, par cette réduction, chacun de ces coefficients disparaissait, et que la formule se réduisait à zéro. Il fut ainsi bien prouvé que l'action mutuelle des planètes ne produit aucune altération séculaire dans leurs moyens mouvements, du moins en négligeant les carrés et les produits des masses des planètes, et les produits de quatre dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites; car il est facile de s'assurer que les quantités de dimensions impaires de ces éléments ne peuvent entrer dans l'expression analytique de l'inégalité séculaire du moyen mouvement. Cela suffisait aux besoins de l'Astronomie et montrait qu'il fallait chercher ailleurs que dans l'action mutuelle des planètes la cause des inégalités séculaires que les observations paraissaient indiquer dans les mouvements de Jupiter et de Saturne.

En réduisant d'une manière semblable les expressions analytiques des inégalités séculaires de l'excentricité et de l'aphélie, je leur donnai la forme la plus simple.

Je discutai, dans le Mémoire qui contient ces recherches, le principe de la gravitation universelle et la manière dont il avait été employé par Newton et par ses successeurs. La propagation instantanée qu'ils supposaient à cette force me parut peu vraisemblable. Déjà Daniel Bernoulli avait soupçonné que le retard d'environ un jour et demi des plus grandes marées sur les instants des syzygies pouvait dépendre du temps que l'attraction de la Lune emploie à se transmettre à la mer. Une transmission aussi lente n'est pas, sans doute, admissible; mais cette transmission, quoique incomparablement plus prompte, peut cependant être successive, et il était intéressant d'en calculer les effets. Je trouvai que son effet le plus sensible serait une inégalité séculaire dans le moyen mouvement de la Lune, croissante comme le carré du temps, et que, pour expliquer par ce moyen l'inégalité déduite des observations par Mayer, il fallait supposer à l'attraction terrestre une vitesse de transmission près de huit millions de fois plus grande que celle de la lumière. Maintenant que nous connaissons la vraie cause de l'équation séculaire de la Lune, nous pouvons affirmer que la première de ces vitesses est au moins cinquante millions de fois plus grande que la seconde.

Lagrange envoya en 1774, à l'Académie des Sciences, un beau Mémoire sur les variations des inclinaisons et des nœuds des orbites planétaires, Mémoire qui parut dans le Volume de l'Académie de la même année. Ce grand géomètre y détermine les mouvements des orbites par la méthode de la variation des éléments; mais, au lieu de l'inclinaison et de la longitude du nœud, il considère deux autres variables, qui sont les produits de l'inclinaison par le sinus et par le cosinus de la longitude du nœud, et il détermine leurs expressions différentielles. Cette transformation des variables, dont il a fait ensuite un heureux usage dans sa théorie de la libration de la Lune, a l'avantage de réduire les équations différentielles qui déterminent les inclinaisons et les nœuds d'un système d'orbites à des équations différentielles linéaires à coefficients constants et dont le nombre est double de celui des planètes. Ayant ramené les variations séculaires de l'excentricité et de la longitude du périhélie à leur forme la plus simple, il me devint facile de leur appliquer une transformation analogue, en considérant, au lieu de ces deux variables, les produits de l'excentricité par le sinus et par le cosinus de la longitude du périhélie. J'en conclus les variations séculaires de ces nouvelles variables. Je considérai ensuite ces variations comme le développement en série de ces variables suivant les puissances du temps; or le coefficient de la première puissance du temps dans ce développement est la différentielle de la variable, divisée par l'élément du temps; j'égalai donc ce quotient au coefficient du temps dans l'expression de l'inégalité séculaire de la variable, ce qui me donna une équation linéaire du premier ordre entre les variables. L'autre variable me donna une équation pareille. En étendant la même considération à toutes les variables semblables d'un système quelconque de planètes, j'obtins, pour les déterminer, un nombre d'équations différentielles linéaires du premier ordre double de celui des planètes, et je fis ainsi disparaître les arcs de cercle introduits par l'intégration des équations différentielles suivant la méthode ordinaire, qui a l'avantage de conduire par la voie la plus simple aux approximations les plus convergentes et les plus appropriées aux usages astronomiques. Je publiai dans la première Partie des *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1772, et qui parut en 1776, ces résultats et cette nouvelle méthode de faire disparaître les arcs de cercle, puisée dans la nature même des séries. La forme très-simple des équations différentielles des éléments elliptiques auxquelles j'étais parvenu me fit reconnaître un des éléments les plus importants du système du monde, sa stabilité. Ces équations étant linéaires à coefficients constants, leur intégration donne l'expression finie de chacune des variables par une suite de sinus et cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, et dont les coefficients du temps dans chaque angle sont les racines d'une équation algébrique d'un degré égal au nombre des planètes. Si toutes les racines sont réelles et inégales, ces diverses expressions sont périodiques et les variables restent toujours fort petites; le système des planètes ne fait donc alors qu'osciller autour d'un état moyen, dans d'étroites limites. Mais, si quelques-unes des racines étaient imaginaires ou égales entre elles, les sinus et les cosinus correspondants se changeraient en exponentielles ou en arcs de cercle, qui, croissant indéfiniment avec le temps, donneraient aux variables de grandes valeurs et changeraient considérablement la forme des orbites. Heureusement, je suis parvenu d'une manière fort simple, exposée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1784, à faire voir que, quelles que soient les masses des planètes, pourvu qu'elles soient fort petites par rapport à la masse du Soleil, par cela seul qu'elles se meuvent toutes dans le même sens autour de cet astre et dans des orbes presque circulaires et peu inclinés entre eux, l'équation algébrique dont je viens de parler n'a que des racines réelles et inégales. En appliquant les mêmes raisonnements aux équations différentielles relatives à l'inclinaison et à la longitude du nœud, j'ai trouvé pareillement que les racines de l'équation algébrique dont dépendent leurs intégrales sont réelles et inégales, et qu'ainsi les inclinaisons des orbites sont toujours fort petites. De là il suit que le système des planètes est stable. Comme les systèmes des satellites satisfont à la condition que tous les satellites de chaque système se meuvent dans le même sens autour de leur planète, on peut affirmer, quoique leurs masses soient pour la plupart inconnues, que ces divers systèmes jouissent de la même stabilité que celui des planètes.

Je développai, dans la seconde Partie des *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1772, la méthode précédente de faire disparaître les arcs de cercle des intégrales, en faisant varier les éléments, et je l'étendis aux équations différentielles d'un ordre quelconque. Cette manière de faire varier les constantes arbitraires diffère de celle qu'Euler avait employée, en ce qu'elle n'embrasse que les inégalités dont la période est indépendante de la configuration mutuelle des planètes, ce qui apporte une grande simplicité dans les calculs. Elle s'étend à tous les cas où les éléments d'un système de corps éprouvent par des causes quelconques, telles que la résistance d'un milieu rare,

des altérations qui ne deviennent sensibles qu'après un long intervalle de temps.

Fontaine remarqua, le premier, qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque a autant d'intégrales de l'ordre inférieur qu'il y a d'unités dans son ordre. Lagrange, dans sa pièce sur les perturbations des comètes, qui remporta en 1780 le prix de l'Académie des Sciences, et dans les *Mémoires* de Berlin pour l'année 1782, considéra sous ce point de vue général les intégrales des équations différentielles du mouvement des planètes. Le mouvement d'une planète soumise à la seule attraction du Soleil est donné par trois équations différentielles du second ordre, dont les trois intégrales finies renferment, par conséquent, six constantes arbitraires, qui sont les éléments du mouvement elliptique. En différentiant ces intégrales, on a six équations, au moyen desquelles on peut, par l'élimination, déterminer chaque élément en fonction des coordonnées du mouvement de la planète et de leurs différentielles divisées par l'élément du temps. Lagrange conçoit que ces six équations différentielles du premier ordre ont également lieu dans l'ellipse invariable et dans l'ellipse troublée, mais que, dans ce dernier cas, les éléments sont variables. Pour avoir les différentielles des éléments, il fait tout varier en différentiant chacune de ces intégrales du premier ordre, et il substitue après la différentiation, au lieu de la différence seconde de chaque coordonnée, sa valeur donnée par les équations différentielles du mouvement de la planète troublée. Il obtient ainsi la différentielle de chaque élément. Ensuite il observe que, dans la substitution de la valeur de la différence seconde de chaque coordonnée, on peut ne considérer que la partie de cette valeur due aux forces perturbatrices, l'autre partie devant disparaître dans l'expression de la différentielle de l'élément, puisque cette expression serait identiquement nulle si ces forces n'existaient pas. Lagrange, dans sa pièce sur l'équation séculaire de la Lune, qui remporta en 1774 le prix de l'Académie des Sciences, exprima les forces attractives, décomposées suivant la direction des coordonnées, par les différences partielles d'une fonction prises par rapport à ces coordonnées. Si l'on rapporte le mouvement du point attiré au centre de gravité du système de corps, cette fonction est la somme des molécules attirantes, divisées respectivement par leurs distances au point attiré. Si l'on rapporte le mouvement au centre de l'un des corps du système, considéré comme immobile, il faut ajouter à cette somme la demi-somme des produits de chaque molécule perturbatrice attirante par le carré de sa distance au point attiré, diminué des carrés des distances de la molécule et du point au centre du corps supposé immobile, chacun de ces produits étant divisé par le cube de la distance de la molécule attirante à ce même centre. Je nommerai cette fonction *fonction perturbatrice*. La propriété dont elle jouit, d'exprimer par ses différences partielles les forces perturbatrices du mouvement du point attiré, simplifie extrêmement les calculs et donne à leurs résultats une forme qui fait voir facilement leurs rapports, surtout quand on considère une infinité de molécules attirantes ou attirées, comme dans les théories de la figure des planètes, du flux et du reflux de la mer, et de la précession des équinoxes. Son introduction dans la Mécanique céleste est, à cause de son utilité, une véritable découverte.

Lagrange, en appliquant la méthode précédente de la variation des éléments elliptiques à l'expression du quotient de l'unité divisée par le grand axe, reconnut que la différentielle de cette expression, prise en moins, est la différentielle exacte de la fonction perturbatrice, prise par rapport aux seules coordonnées de la planète troublée. Si l'on développe cette fonction dans une série de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, et si l'on néglige le carré des forces perturbatrices, on obtient cette différentielle en ne faisant varier, dans ces sinus et cosinus, que les angles qui se rapportent à la planète. Lagrange en conclut que l'expression du grand axe ne contient que des inégalités périodiques, et qu'ainsi la longitude moyenne que l'on en déduit par les lois de Kepler ne contient elle-même que des inégalités de ce genre et ne renferme point d'inégalités séculaires. Ce théorème, auquel j'étais parvenu en négligeant les produits de quatre dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, fut

ainsi non-seulement confirmé par ce grand géomètre de la manière la plus élégante et la plus simple, mais encore étendu à des excentricités et à des inclinaisons quelconques.

J'ai fait voir dans le Livre VI que, en ayant égard aux carrés et aux produits des masses de Jupiter et de Saturne, leurs grandes inégalités n'altèrent point ce résultat. M. Poisson est ensuite parvenu, par une savante analyse insérée dans le Tome VIII du *Journal de l'École Polytechnique*, à démontrer généralement que le carré de la force perturbatrice n'introduit que des quantités périodiques dans l'expression de la longitude moyenne, résultat important dans l'Astronomie, parce qu'une inégalité séculaire dans l'expression différentielle du grand axe, quoique multipliée par le carré des masses planétaires, donnerait, par la double intégration qu'elle subit dans l'expression de la longitude moyenne, une inégalité du même ordre que l'inégalité du mouvement elliptique dont l'argument est le double de l'anomalie. Ces recherches de M. Poisson et celles qu'il a publiées dans le même Volume sur la précession des équinoxes et sur l'uniformité de la rotation de la Terre lui ont acquis de justes droits à la reconnaissance des géomètres et des astronomes.

Le résultat précédent cesse d'avoir lieu si les moyens mouvements ont entre eux des rapports commensurables. Ce cas très-singulier se présente dans le système des satellites de Jupiter, et je l'ai discuté dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1784. La longitude moyenne du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est égale à la demi-circonférence. L'approximation avec laquelle les Tables des satellites de Jupiter par Wargentin donnent ce rapport me fit soupçonner qu'il est rigoureux. Il était contre toute vraisemblance de supposer que le hasard a placé originairement les trois premiers satellites aux distances et dans les positions convenables à ce rapport, et il était extrêmement probable qu'il est dû à une cause particulière. Je cherchai donc cette cause dans l'action mutuelle des satellites. L'examen approfondi de cette action me fit voir qu'elle a suffi pour rendre ce rapport rigoureux, s'il a été fort approché à l'origine, d'où je conclus qu'en déterminant de nouveau, par la discussion d'un très-grand nombre d'observations éloignées entre elles, les longitudes moyennes des trois premiers satellites, on trouverait qu'ils approchent encore plus de ce rapport que les Tables de Wargentin. Cette conséquence de la théorie a été confirmée, avec une précision remarquable, par les recherches que Delambre a faites sur les satellites de Jupiter, et les Tables qu'il a publiées sont rigoureusement assujetties à ce rapport. La petite différence qui a pu exister primitivement à cet égard a donné lieu à une inégalité d'une étendue arbitraire, qui se partage entre les trois satellites, et que j'ai désignée par le nom de *libration* des mouvements de ces satellites. Les deux constantes arbitraires de cette inégalité remplacent les deux arbitraires que ce rapport fait disparaître dans les moyens mouvements et dans les époques des longitudes moyennes, car le nombre des arbitraires que renferme la théorie du mouvement d'un système de corps est nécessairement sextuple du nombre de ces corps. La discussion des observations n'ayant point fait reconnaître cette inégalité, elle est fort petite et même insensible.

Dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour les années 1781 et suivantes, Lagrange détermina, par la méthode de la variation des éléments elliptiques, les inégalités séculaires et périodiques du mouvement des planètes, et il les réduisit en nombres, en donnant aux masses planétaires les valeurs qui lui parurent les plus vraisemblables. Cette méthode, déjà fort longue quand on considère la première puissance des excentricités et des inclinaisons, devient presque impraticable lorsqu'on veut l'étendre aux carrés et aux puissances supérieures de ces quantités, ce qui est indispensable dans la théorie des planètes. Mais elle peut être extrêmement simplifiée par les considérations suivantes.

On a vu que la différentielle de la puissance première inverse du grand axe prise en moins est égale à la différentielle de la fonction perturbatrice, prise en n'y faisant varier que les coordonnées de la planète troublée. En développant donc cette fonction dans une série de sinus

et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, il suffira, dans une première approximation où l'on néglige le carré de la force perturbatrice, de différentier chacun des termes de cette série par rapport au seul mouvement de la planète. On aura ensuite, par l'intégration de ces termes, l'expression de l'unité divisée par le grand axe; on en conclura, par les lois de Kepler, la différentielle de la longitude moyenne, qui, intégrée de nouveau, donnera cette longitude. On peut observer ici que cette double intégration donne à chaque terme du développement de la fonction perturbatrice, pour diviseur, le carré du coefficient du temps compris sous les signes *sinus* ou *cosinus*, ce qui rend ce terme fort grand lorsque ce coefficient est très-petit.

La facilité que donne l'expression très-simple de la différentielle du grand axe pour avoir la longitude me fit rechercher s'il est possible de donner aux différentielles des autres éléments elliptiques une forme aussi simple, dans laquelle les différences partielles de la fonction perturbatrice ne seraient prises que par rapport aux éléments, et dont les coefficients ne renfermeraient point le temps. En effet, il suffirait alors de différentier par rapport à ces éléments chaque terme du développement de la fonction perturbatrice, et ensuite de l'intégrer. Je parvins à obtenir les différentielles des éléments sous cette forme, par l'analyse que j'ai donnée dans le *Supplément à la Mécanique céleste*, et que je présentai, le 17 août 1808, au Bureau des Longitudes. Dans la même séance, Lagrange présenta une très-belle analyse, par laquelle il exprimait la différence partielle de la force perturbatrice, prise par rapport à chaque élément, par une fonction linéaire des différentielles des éléments divisées par la différentielle du temps, et dans laquelle les coefficients de ces différentielles ne renfermaient point le temps. En déterminant, au moyen de ces expressions, la différentielle de chaque élément, il parvint ensuite aux mêmes équations que j'avais trouvées. Ce grand géomètre a étendu son analyse au mouvement des corps solides, et généralement au mouvement d'un système de corps liés entre eux d'une manière quelconque. Ce travail des dernières années de sa vie est une de ses plus belles productions; il montre que l'âge n'avait point affaibli son génie. M. Poisson a publié sur cet objet plusieurs savants Mémoires, où il a été conduit, sur le mouvement des corps solides, à des équations de la même forme que pour les points libres, ce qui établit l'analogie de ces mouvements.

Les recherches sur Jupiter et Saturne, dont j'ai parlé ci-dessus, laissaient encore inconnue la cause des grandes irrégularités que les observations anciennes et modernes indiquaient dans les mouvements de ces deux planètes. Halley avait conclu, de la comparaison des observations anciennes avec les modernes, un ralentissement dans le moyen mouvement de Saturne et une accélération dans celui de Jupiter. Lambert avait obtenu un résultat contraire en comparant les observations du dernier siècle avec celles de Tycho Brahe. Enfin Lalande trouvait les retours de Saturne à l'équinoxe du printemps plus prompts que ses retours à l'équinoxe d'automne, quoique les positions de Jupiter et de Saturne, soit entre eux, soit à l'égard de leurs aphélies, fussent à peu près les mêmes. Cela portait à croire que des causes étrangères avaient altéré les mouvements de ces deux planètes; mais, en y réfléchissant, la marche de ces altérations me parut si bien d'accord avec ce qui devait résulter de leur action mutuelle que je ne balançai point à rejeter toute action extérieure au système planétaire.

C'est un résultat remarquable de l'action réciproque des planètes, que, si l'on n'a égard qu'aux inégalités dont les périodes sont très-longues, la somme des masses de chaque planète, divisées respectivement par les grands axes de leurs orbes considérés comme des ellipses variables, est à très-peu près constante. Nous avons dit précédemment que ces inégalités acquièrent par une double intégration, dans l'expression de la longitude, pour diviseur, le carré du très-petit coefficient du temps dans leur argument, ce qui peut les rendre considérables. De là il est facile de voir que la somme des produits des inégalités de ce genre qui résultent de l'action de Jupiter et de Saturne, multipliées respectivement par les masses de ces planètes, est nulle; ainsi, quand en vertu de ces inégalités le mouvement de Saturne se ralentit par l'action de Jupiter, celui de Jupiter doit s'accélérer par l'action de

Saturne, et le ralentissement doit être à l'accélération dans le rapport de la masse de Jupiter multipliée par la racine carrée de son grand axe à la masse de Saturne multipliée par la racine carrée de son grand axe, ce qui est à fort peu près conforme au résultat de Halley. Réciproquement, quand ces inégalités accélèrent le mouvement de Saturne, elles retardent celui de Jupiter dans le même rapport, ce qui s'accorde à peu près avec le résultat de Lambert. Cela indiquait avec une grande probabilité l'existence d'une inégalité à très-longue période dans les mouvements de ces deux planètes. Il me fut aisé de reconnaître une inégalité semblable dans les équations différentielles de ces mouvements. Ils approchent beaucoup d'être commensurables, et cinq fois le mouvement de Saturne est à fort peu près égal à deux fois celui de Jupiter. De là je conclus que les termes qui ont pour argument cinq fois la longitude moyenne de Saturne moins deux fois celle de Jupiter pouvaient devenir très-sensibles par les intégrations, quoiqu'ils fussent multipliés par les cubes et par les produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites. Je regardai donc ces termes comme une cause fort vraisemblable des variations observées dans les moyens mouvements de ces planètes. La probabilité de cette cause et l'importance de l'objet me déterminèrent à entreprendre le calcul long et pénible nécessaire pour m'en assurer. Le résultat de ce calcul confirma pleinement ma conjecture, en me faisant voir : 1° qu'il existe dans le mouvement de Saturne une grande inégalité de 8896 secondes centésimales dans son maximum, dont la période est de neuf cent vingt-neuf ans; 2° qu'il existe dans le mouvement de Jupiter une inégalité correspondante, dont la période est à très-peu près la même, mais qui, affectée d'un signe contraire, ne s'élève qu'à 3662 secondes. La grandeur des coefficients de ces inégalités et la durée de leur période ne sont pas toujours les mêmes; elles participent aux variations séculaires des éléments des orbites. J'ai déterminé avec un soin particulier ces coefficients et leurs variations séculaires. Le rapport presque commensurable des moyens mouvements de Jupiter et de Saturne donne naissance à d'autres inégalités très-sensibles. La plus considérable est celle qui affecte le mouvement de Saturne. Elle se confondrait avec l'équation du centre si cinq fois le moyen mouvement de cette planète était exactement égal à deux fois celui de Jupiter. C'est elle qui, dans le dernier siècle, a rendu les retours de Saturne à l'équinoxe du printemps plus prompts que ses retours à l'équinoxe d'automne, comme Lalande l'avait remarqué. En général, lorsque j'eus reconnu ces diverses inégalités et déterminé, avec plus de soin qu'on ne l'avait fait, celles que l'on avait déjà calculées, je vis toutes les observations anciennes et modernes représentées par ma théorie avec la précision qu'elles comportent. Elles semblaient, auparavant, inexplicables par la loi de la pesanteur universelle : elles en sont maintenant une des preuves les plus frappantes. Tel a été le sort de cette brillante découverte, que chaque difficulté qui s'est élevée est devenue pour elle un nouveau sujet de triomphe, ce qui est le plus sûr caractère du vrai système de la nature. Il restait à former des Tables de Jupiter et de Saturne fondées sur ma théorie, ce qui exigeait une discussion nouvelle des meilleures observations, et leur comparaison avec ma théorie, pour en déduire les éléments du mouvement elliptique. Delambre exécuta ce travail et les Tables qu'il construisit ne s'écartèrent pas d'une minute des observations bien faites et bien discutées. Il appliqua mes formules à la planète Uranus, que Herschel venait de découvrir, et il parvint à représenter par ses Tables, non-seulement les observations faites depuis cette découverte, mais encore quelques observations de Flamsteed, Mayer et Bradley, qui avaient observé cette planète, en la considérant comme une étoile. Désirant donner aux Tables de ces trois planètes la plus grande précision, j'ai revu avec un soin particulier leur théorie, et, M. Bouvard l'ayant comparée avec un grand nombre d'observations faites avec d'excellents instruments et par les meilleurs observateurs, il a construit de nouvelles Tables de ces trois planètes, qui ne s'écartent pas de ces observations au delà de 13 secondes sexagésimales. Dans les équations de condition qu'il a formées pour déterminer les éléments elliptiques, il a laissé comme indéterminées les corrections des masses de ces planètes,

que l'on avait conclues des observations de leurs satellites. En résolvant ces équations, il a déterminé ces corrections. Il a trouvé nulle, à fort peu près, celle de la masse de Jupiter. La correction de la masse de Saturne diminue d'un sixième environ la valeur que Newton en a donnée. Si l'on applique à ces résultats le Calcul des probabilités, on trouve qu'il est extrêmement probable que l'erreur n'est pas un centième de leur valeur. La correction de la masse d'Uranus, conclue des observations de ses satellites, est peu considérable. L'action de cette planète sur Saturne n'étant pas très-sensible, la valeur de sa masse est moins sûre que celle de la masse de Saturne; mais elle confirme la valeur déduite des observations des satellites d'Uranus, et qui, vu l'incertitude de ces observations, avait besoin d'être confirmée. Les Tables de M. Bouvard représentent aussi bien qu'on peut le désirer les observations anciennes de Jupiter et de Saturne et la conjonction de ces deux planètes observée par Ibn Junis dans l'année 1007. Cet accord prouve que, depuis les temps anciens jusqu'à nous, l'action des causes étrangères a été insensible.

En considérant le peu de différence qui existe entre cinq fois le moyen mouvement de Saturne et deux fois celui de Jupiter, on voit qu'un léger changement dans les distances moyennes primitives de ces deux planètes eût suffi pour la rendre nulle. Mais cela même n'était pas nécessaire à cet objet; car l'attraction mutuelle des deux planètes eût rendu cette différence constamment nulle, dans le cas où elle ne l'aurait pas été à l'origine, pourvu qu'elle eût été contenue dans d'étroites limites. On verra bientôt que ces limites sont, à peu près, plus ou moins quatre dixièmes de la différence observée, et que, pour faire tomber cette différence dans ces limites, il suffirait d'augmenter de $\frac{1}{330}$ la moyenne distance de Saturne au Soleil et de diminuer de $\frac{1}{1300}$ celle de Jupiter. Il s'en est donc fallu bien peu que les deux plus grosses planètes de notre système n'aient offert un phénomène analogue à celui des trois premiers satellites de Jupiter, mais qui eût été bien plus compliqué, par sa grande influence sur les variations séculaires des éléments de leurs orbites.

J'ai donné, dans le Livre VI, l'application de mes formules au système des planètes principales. Elles ont été appliquées aux quatre planètes télescopiques découvertes depuis le commencement de ce siècle. L'excentricité considérable des orbites de Pallas et de Junon rend les approximations peu convergentes. La recherche de nouvelles méthodes pour soumettre leurs perturbations au calcul sera utile à l'Astronomie et à l'Analyse.

Clairaut s'occupa, le premier, des perturbations des comètes. Il appliqua sa solution du problème des trois corps au retour de la comète de 1682. Cette comète avait été observée en 1531 et 1607. Halley avait déduit des observations les intervalles de ses passages au périhélie, de 1531 à 1607 et de 1607 à 1682, et il en avait conclu son retour vers la fin de 1758 ou au commencement de 1759. Clairaut se proposa de rechercher la différence entre ces intervalles et celui de son passage au périhélie en 1682 au passage prochain. Après d'immenses calculs, il annonça à l'Académie des Sciences, dans sa séance publique du 14 novembre 1758, que le dernier de ces intervalles devait surpasser le précédent d'environ six cent dix-huit jours, et que, en conséquence, la comète passerait à son périhélie vers le milieu d'avril 1759. Il observa en même temps que les petites quantités négligées dans ces approximations pouvaient avancer ou reculer ce terme d'un mois. Il remarqua d'ailleurs « qu'un corps qui passe dans des régions aussi éloignées et qui échappe à nos yeux pendant des intervalles aussi longs pourrait être soumis à des forces totalement inconnues, telles que l'action des autres comètes ou même de quelque planète trop distante du Soleil pour être jamais aperçue ».

Il eut la satisfaction de voir sa prédiction accomplie. La comète revint au périhélie le 12 mars 1759, dans les limites des erreurs dont il croyait son résultat susceptible. Après une revision de ses calculs, Clairaut a fixé ce passage au 4 avril, et il l'aurait avancé jusqu'au 24 mars, c'est-à-dire à douze jours seulement de l'observation, s'il eût employé la vraie valeur de la masse de Saturne. Cette différence paraîtra bien petite, si l'on considère les erreurs inévitables dans des

approximations aussi nombreuses et aussi compliquées, et l'influence de la planète Uranus, dont l'existence, au temps de Clairaut, n'était pas connue. On doit donc regarder ce travail de Clairaut comme une belle confirmation du principe de la pesanteur universelle. L'annonce de ce grand géomètre sur le retour de la comète de 1759 donna lieu à une vive discussion sur la manière d'apprécier son erreur. Quelques-uns voulaient la répartir sur la révolution entière de la comète. D'Alembert jugea, avec raison, que cette erreur devait se rapporter à la différence de l'intervalle entre les passages au périhélie de 1607 à 1682 à l'intervalle des passages au périhélie de 1682 à 1759. Il étendit aux comètes sa solution du problème des trois corps, mais sans en faire d'applications numériques. C'est principalement aux perturbations des comètes que la méthode de la variation des éléments elliptiques est appropriée. Cette méthode donne immédiatement ces éléments par des quadratures mécaniques, que l'on peut simplifier, surtout lorsque la comète est à une distance considérable de la planète perturbatrice. Lagrange a développé cette méthode dans la pièce qui remporta le prix de l'Académie des Sciences en 1780, et je l'ai présentée avec étendue dans le Livre IX. MM. Encke et Damoiseau ont calculé les perturbations de la singulière comète dont la période n'est que de mille deux cents jours, et M. Damoiseau, dans une pièce couronnée par l'Académie des Sciences de Turin, a calculé le retour prochain de la comète de 1759. L'Académie des Sciences de Paris vient de provoquer de nouvelles recherches sur ces deux objets, en les proposant pour le sujet du prix qu'elle doit décerner en 1826.

Les géomètres ont soumis au calcul les perturbations que l'action des comètes peut faire éprouver aux planètes et spécialement à la Terre. Cette action a été jusqu'à présent insensible, les perturbations produites par l'action des planètes et des satellites suffisant seules pour représenter les observations. Il en résulte que les masses des comètes sont extrêmement petites, ce que leur apparence nébuleuse confirme. La comète que l'on observe maintenant est une nébulosité sans queue, dont le diamètre est d'environ 2 minutes sexagésimales, et dans laquelle on ne distingue point de noyau. Cette masse de vapeurs n'exerce qu'une action insensible sur ses molécules extrêmes, qui, comme la masse entière, n'obéissent qu'à l'action du Soleil. La régularité avec laquelle son mouvement suit les lois du mouvement parabolique montre l'extrême rareté de la lumière et des autres fluides qui peuvent être répandus dans les espaces célestes, puisqu'ils n'opposent aucune résistance sensible au mouvement d'une nébulosité aussi rare. Mais cette résistance, quoique insensible pendant l'apparition d'une comète, peut devenir sensible pendant une longue suite de ses révolutions. Son principal effet est, par le Chapitre VIII du Livre X, de diminuer sans cesse les grands axes des orbites. On peut expliquer ainsi la courte durée de la révolution de la comète qui a reparu après un intervalle de mille deux cents jours, et qui doit reparaître sans cesse après un semblable intervalle, à moins que l'évaporation qu'elle éprouve à chacune de ses apparitions ne finisse par la rendre invisible.

CHAPITRE II.

CONSIDÉRATIONS SUR QUELQUES OBJETS DU LIVRE II.

Sur les variations des éléments du mouvement elliptique.

2. J'ai donné, dans le Chapitre VIII du Livre II, les expressions différentielles des éléments du mouvement elliptique. J'ai repris cet objet d'une manière encore plus générale dans le *Supplément à la Mécanique céleste*. Je vais ajouter ici quelques considérations à ce que j'ai dit dans ce *Supplément*, dont je conserverai les dénominations, et que je suppose que l'on ait sous les yeux.

Les équations (5) et (6) de la page 331 du Tome III supposent que l'on néglige les carrés et les puissances supérieures de p et de q, ce qui revient à les considérer comme infiniment petites. Mais il est facile d'étendre ces équations au cas où ils sont finis. Pour cela, imaginons sur la surface d'une sphère deux arcs AC et BC, se coupant en C, et dont le premier représente un plan infiniment peu incliné à l'orbite représentée par BC, C étant le nœud ascendant de cette orbite sur AC. Représentons encore par l'arc BAM un autre plan fixe formant avec AC l'angle aigu et fini CAB. Je ne donne point ici cette figure, parce qu'elle est simple et facile à tracer d'après les indications précédentes. Nommons γ' l'inclinaison de l'orbite BC sur BM ou le supplément de l'angle CBM. AC étant ce que j'ai nommé θ dans le *Supplément* cité et l'angle ACB étant ce que j'ai nommé γ, on aura, en désignant par π la demi-circonférence et par A l'angle CAB,

$$A + \pi - \gamma' + \gamma = \pi + \text{surface ABC}.$$

La surface ABC est, aux infiniment petits près du second ordre, égale à $\gamma(1-\cos\theta)$, et par conséquent égale à $\gamma - q$, q désignant dans le *Supplément* $\gamma\cos\theta$; on a donc

$$A + \pi - \gamma' + \gamma = \pi + \gamma - q,$$

ce qui donne, en différentiant,

$$dq = d\gamma'.$$

On a ensuite, en faisant $AB = f$,

$$\sin\gamma \sin\theta = \sin f \sin\gamma',$$

ce qui donne, en observant que γ et f sont infiniment petits et que $\gamma\sin\theta$ est ce que nous avons nommé p dans le *Supplément*,

$$dp = df \sin\gamma'.$$

Nommons présentement θ' la distance du nœud de l'orbite sur BAM au point fixe M, et faisons

$$p' = \sin\gamma' \sin\theta', \quad q' = \sin\gamma' \cos\theta';$$

on aura, en observant que $df = d\theta'$,

$$dp' = d\gamma' \cos\gamma' \sin\theta' + df \sin\gamma' \cos\theta',$$
$$dq' = d\gamma' \cos\gamma' \cos\theta' - df \sin\gamma' \sin\theta'.$$

L'expression précédente de dp donne

$$df = \frac{dp}{\sin\gamma'}.$$

On a ensuite, par ce qui précède, $d\gamma' = dq$; on aura donc

$$dp' = dq \cos\gamma' \sin\theta' + dp \cos\theta',$$
$$dq' = dq \cos\gamma' \cos\theta' - dp \sin\theta'.$$

Si l'on substitue, au lieu de dp et dq, leurs valeurs données par les équations (5) et (6) de la page 331 du Tome III, on aura

$$dp' = \frac{an\,dt}{\sqrt{1-e^2}}\left(\cos\gamma' \sin\theta' \frac{\partial R}{\partial p} - \cos\theta' \frac{\partial R}{\partial q}\right).$$

On a évidemment, en considérant successivement R comme fonction de p et de q et comme fonction de p' et de q',

$$\frac{\partial R}{\partial p} dp + \frac{\partial R}{\partial q} dq = \frac{\partial R}{\partial p'} dp' + \frac{\partial R}{\partial q'} dq'.$$

En substituant pour dp' et dq' leurs valeurs précédentes en dp et dq, et comparant séparément les coefficients de dp et de dq, on aura

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \frac{\partial R}{\partial p'} \cos\theta' - \frac{\partial R}{\partial q'} \sin\theta',$$
$$\frac{\partial R}{\partial q} = \frac{\partial R}{\partial p'} \cos\gamma' \sin\theta' + \frac{\partial R}{\partial q'} \cos\gamma' \cos\theta'.$$

Ces valeurs de $\frac{\partial R}{\partial p}$ et de $\frac{\partial R}{\partial q}$, substituées dans l'expression précédente de dp', donnent

$$dp' = -\frac{an\,dt}{\sqrt{1-e^2}} \cos\gamma' \frac{\partial R}{\partial q'}.$$

On trouvera de la même manière

$$dq' = \frac{an\,dt}{\sqrt{1-e^2}} \cos\gamma' \frac{\partial R}{\partial p'}.$$

Ces équations sont rigoureuses et peuvent être substituées aux équations (5) et (6) du *Supplément* cité.

On peut en conclure, de cette manière, les valeurs de $d\gamma'$ et de $d\theta'$. Pour cela, on observera que

$$\sin^2\gamma' = p'^2 + q'^2, \quad \tang\theta' = \frac{p'}{q'},$$

ce qui donne

$$d\gamma' \sin\gamma' \cos\gamma' = p'\,dp' + q'\,dq',$$
$$d\theta' \sin^2\gamma' = q'\,dp' - p'\,dq'.$$

Substituant au lieu de dp' et de dq' leurs valeurs précédentes, on aura

$$d\gamma' \sin\gamma' = -\frac{an\,dt}{\sqrt{1-e^2}}\left(p' \frac{\partial R}{\partial q'} - q' \frac{\partial R}{\partial p'}\right).$$

On a

$$\frac{\partial R}{\partial p'} dp' + \frac{\partial R}{\partial q'} dq' = \frac{\partial R}{\partial \theta'} d\theta' + \frac{\partial R}{\partial \gamma'} d\gamma'.$$

En substituant pour $d\theta'$ et $d\gamma'$ leurs valeurs précédentes, et en comparant séparément les coefficients de dp' et de dq', on aura

$$\frac{\partial R}{\partial p'} = \frac{\partial R}{\partial \theta'}\frac{\cos\theta'}{\sin\gamma'} + \frac{\partial R}{\partial \gamma'}\frac{\sin\theta'}{\cos\gamma'},$$
$$\frac{\partial R}{\partial q'} = -\frac{\partial R}{\partial \theta'}\frac{\sin\theta'}{\sin\gamma'} + \frac{\partial R}{\partial \gamma'}\frac{\cos\theta'}{\cos\gamma'},$$

d'où l'on tire

$$p'\frac{\partial R}{\partial q'} - q'\frac{\partial R}{\partial p'} = -\frac{\partial R}{\partial \theta'};$$

on a donc

$$d\gamma' = \frac{an\,dt}{\sin\gamma'\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \theta'}.$$

On trouvera de la même manière

$$d\theta' = -\frac{an\,dt}{\sin\gamma'\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \gamma'}.$$

En ajoutant ces deux équations multipliées respectivement par $d\theta'$ et $-d\gamma'$, on aura

$$0 = \frac{\partial R}{\partial \gamma'}d\gamma' + \frac{\partial R}{\partial \theta'}d\theta'.$$

Ainsi la fonction R est constante eu égard aux variations de θ' et de γ'.

Si l'on réunit ces équations aux équations (1), (2), (3), (4) du *Supplément* cité, et si l'on désigne ici par γ et θ ce que nous venons de désigner par γ' et θ', on aura les six équations suivantes :

$$(1) \qquad da = -2a^2\,dR,$$

$$(2) \qquad d\varepsilon = -\frac{an\,dt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial e} + 2a^2 n\,dt\frac{\partial R}{\partial a},$$

$$(3) \qquad de = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)dR + \frac{an\,dt\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial R}{\partial \varpi},$$

$$(4) \qquad d\varpi = -\frac{an\,dt\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$(5) \qquad d\gamma = \frac{an\,dt}{\sin\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \theta},$$

$$(6) \qquad d\theta = -\frac{an\,dt}{\sin\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \gamma}.$$

On doit observer que la différence partielle $\frac{\partial R}{\partial a}$ doit être prise ici sans faire varier n.

Dans la théorie des variations séculaires, il est plus simple d'employer, au lieu des quantités e, ϖ, γ, θ, les suivantes, h, l, p, q, en faisant

$$h = e\sin\varpi, \quad l = e\cos\varpi,$$
$$p = \gamma\sin\theta, \quad q = \gamma\cos\theta.$$

Si l'on néglige les carrés de e et de γ et leurs produits, eu égard à l'unité, si l'on substitue, pour n, $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$, et si l'on observe qu'en n'ayant égard qu'aux variations séculaires, on doit négliger dR ou le supposer nul, les équations (3), (4), (5) et (6) donneront les suivantes,

$$m\frac{dh}{dt}\sqrt{a} = -m\frac{\partial R}{\partial l},$$
$$m\frac{dl}{dt}\sqrt{a} = m\frac{\partial R}{\partial h},$$
$$m\frac{dp}{dt}\sqrt{a} = -m\frac{\partial R}{\partial q},$$
$$m\frac{dq}{dt}\sqrt{a} = m\frac{\partial R}{\partial p},$$

où l'on ne doit considérer, dans une première approximation, que la partie de R constante et dépendante de h, l, p et q. Cela posé, si l'on développe l'expression de R du n° **46** du Livre II, et si l'on désigne par F la quantité

$$\sum\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3mm'aa'(a,a')^1}{8(a'^2-a^2)^2}\left[h^2+l^2+h'^2+l'^2-(p'-p)^2-(q'-q)^2\right] \\ \quad -3mm'\dfrac{(a^2+a'^2)(a,a')^1+aa'(a,a')}{2(a'^2-a^2)^2}(hh'+ll')\end{array}\right\},$$

(a, a') étant la partie indépendante de θ dans le développement de $(a^2-2aa'\cos\theta+a'^2)^{\frac{1}{2}}$ suivant les cosinus de θ et de ses multiples, $(a, a')^1$ étant le coefficient de $\cos\theta$ dans ce développement, et la caractéristique Σ servant à exprimer la somme de toutes les quantités semblables à celle qu'elle précède, et que l'on peut former en considérant deux à deux les masses m, m', m'', ...; on aura les équations suivantes :

$$m\,\frac{dh}{dt}\sqrt{a} = -\frac{\partial F}{\partial l},$$
$$m\,\frac{dl}{dt}\sqrt{a} = \frac{\partial F}{\partial h},$$
$$m\,\frac{dp}{dt}\sqrt{a} = -\frac{\partial F}{\partial q},$$
$$m\,\frac{dq}{dt}\sqrt{a} = \frac{\partial F}{\partial p},$$
$$m'\,\frac{dh'}{dt}\sqrt{a'} = -\frac{\partial F}{\partial l'},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ces équations sont les équations (A) et (C) des nos **55** et **59** du Livre II. Lagrange a donné le premier les équations (C) relatives aux inclinaisons et aux nœuds des orbites, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1774. J'ai donné les équations (A) dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1772. Toutes ces équations sont linéaires et facilement intégrables par les méthodes connues. Leur forme symétrique et fort simple m'a fait voir que leurs intégrales ne renferment, par rapport au temps, ni exponentielles ni arcs de cercle, et qu'ainsi les excentricités et les inclinaisons des orbites sont fonctions de sinus et de cosinus d'angles croissants avec une grande lenteur et indépendants de la configuration mutuelle des planètes, en sorte que les orbites planétaires ont toujours été et seront toujours presque circulaires et peu inclinées entre elles, ce qui assure la stabilité du système planétaire. Il est facile de voir que les équations précédentes donnent

$$m\sqrt{a}\,(h\,dh + l\,dl) + m'\sqrt{a'}\,(h'\,dh' + l'\,dl') + \ldots = 0,$$
$$m\sqrt{a}\,(p\,dp + q\,dq) + m'\sqrt{a'}\,(p'\,dp' + q'\,dq') + \ldots = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$e^2 m\sqrt{a} + e'^2 m'\sqrt{a'} + \ldots = C,$$
$$\gamma^2 m\sqrt{a} + \gamma'^2 m'\sqrt{a} + \ldots = C',$$

C et C' étant deux constantes très-petites; il en résulte que e, e', ..., γ, γ', ... seront toujours des quantités très-petites.

Lagrange, dans la seconde édition de sa *Mécanique analytique*, observe que, si la masse m' est très-petite par rapport à m, comme Mars relativement à Jupiter, dont il n'est pas la centième partie, alors le terme $e'^2 m'\sqrt{a'}$ sera toujours du même ordre que $e^2 m\sqrt{a}$, quoique e' croisse considérablement et devienne même égal à l'unité. Il en conclut que l'on ne peut être alors assuré que e'^2 conservera toujours une petite valeur qu'en résolvant l'équation algébrique qui détermine les coefficients du temps dans les sinus et cosinus des expressions de h, l, h', l', ..., et en s'assurant que les racines de cette équation sont toutes réelles. Mais, si ce grand géomètre eût considéré ce que j'ai dit dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1784 et dans le no **57** du Livre II de la *Mécanique céleste*, il aurait vu que, sans recourir à cette résolution, je démontre que ces racines sont toutes réelles et inégales.

Sur le développement en série des puissances du radical qui exprime la distance mutuelle de deux planètes.

3. Si l'on nomme r et r' les rayons vecteurs de deux planètes, et θ l'angle au Soleil compris entre ces rayons, la distance mutuelle des deux planètes sera

$$\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2}.$$

r et r' diffèrent toujours peu des moyennes distances a et a' de ces planètes, en sorte qu'en désignant r par $a + \delta r$, r' par $a' + \delta r'$, on aura, en développant le radical dans une série ordonnée suivant les puissances et les produits de δr et $\delta r'$, une suite de termes multipliés par les puissances successivement décroissantes du radical

$$\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2}.$$

Supposons a' plus grand que a, et faisons $\frac{a}{a'} = \alpha$; ce radical devient

$$a'\sqrt{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}.$$

Considérons généralement la puissance

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s},$$

et supposons qu'en la développant dans une série ordonnée par rapport à $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, ... on ait la suite

$$\frac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\theta + b_s^{(2)}\cos 2\theta + \ldots + b_s^{(i)}\cos i\theta + \ldots;$$

on aura, par le n° 49 du Livre II,

$$(a) \qquad (i-s)\alpha b_s^{(i)} = (i-1)(1+\alpha^2)b_s^{(i-1)} - (i+s-2)\alpha b_s^{(i-2)}.$$

Cette équation aux différences finies peut être intégrée au moyen d'intégrales définies, par la méthode que j'ai donnée dans ma *Théorie analytique des probabilités*. En faisant, d'après cette méthode,

$$b_s^{(i)} = \int x^i \varphi\, dx,$$

φ étant une fonction de x, il faut déterminer φ et les limites de l'intégrale $\int x^i \varphi\, dx$, ce que l'on fera de cette manière.

On substituera cette valeur de $b_s^{(i)}$ dans l'équation aux différences finies (a), qui devient ainsi

$$0 = (i-s)\alpha\int x^i\varphi\, dx - (i-1)(1+\alpha^2)\int x^{i-1}\varphi\, dx + (i+s-2)\alpha\int x^{i-2}\varphi\, dx.$$

En intégrant par parties, on aura

$$\begin{aligned} 0 = {} & x^{i-1}\varphi[\alpha - (1+\alpha^2)x + \alpha x^2] \\ & + \int x^{i-2}\varphi\, dx[(s-1)\alpha + (1+\alpha^2)x - (s+1)\alpha x^2] \\ & - \int x^{i-1}\, d\varphi[\alpha - (1+\alpha^2)x + \alpha x^2]. \end{aligned}$$

Cette équation doit, suivant la méthode que j'ai citée, se partager en deux, en égalant séparément à zéro les termes compris sous le signe intégral, ce qui donne

$$0 = \varphi.[(s-1)\alpha + (1+\alpha^2)x - (s+1)\alpha x^2]\, dx - x\, d\varphi[\alpha - (1+\alpha^2)x + \alpha x^2],$$

$$0 = x^{i-1}\varphi.[\alpha - (1+\alpha^2)x + \alpha x^2].$$

La première de ces équations donne, en l'intégrant,

$$\varphi = \frac{\mathrm{H}x^{s-1}}{[\alpha - (1+\alpha^2)x + \alpha x^2]^s},$$

H étant une constante arbitraire. La seconde équation, qui sert à déterminer les limites de l'intégrale, donne, pour les limites de l'intégrale $\int x^i\varphi\, dx$,

$$0 = x^{i+s-2}[\alpha - (1+\alpha^2)x + \alpha x^2]^{1-s}.$$

On peut toujours supposer s moindre que l'unité, parce qu'ayant pour ce cas la valeur de $b_s^{(i)}$, on peut, par le n° 49 du Livre II, en conclure la valeur relative à tous les cas où s est augmenté ou diminué d'un nombre entier. Dans le cas des planètes, $s = \frac{1}{2}$, et l'équation des limites devient

$$0 = x^{i-\frac{3}{2}}[\alpha - (1+\alpha^2)x + \alpha x^2]^{\frac{1}{2}},$$

dont les racines sont, lorsque i est égal ou plus grand que 2,

$$x = 0, \quad x = \alpha, \quad x = \frac{1}{\alpha}.$$

Ainsi l'intégrale complète de l'équation (a) est alors

$$b_{\frac{1}{2}}^{(i)} = \mathrm{H}\int \frac{x^{i-\frac{1}{2}}\, dx}{\sqrt{(\alpha - x)(1-\alpha x)}} + \mathrm{H}'\int \frac{x^{i-\frac{1}{2}}\, dx}{\sqrt{(\alpha - x)(1-\alpha x)}},$$

la première intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$, et la seconde étant prise depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \frac{1}{\alpha}$; H et H′ sont deux arbitraires. Cette dernière intégrale introduit dans l'expression de $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ des puissances négatives de α, de l'ordre $\frac{1}{\alpha^i}$, ce qui n'a point lieu pour les planètes. On doit donc alors supposer H′ nul. Pour avoir l'intégrale

$$\mathrm{H}\int \frac{x^{i-\frac{1}{2}}\, dx}{\sqrt{(\alpha - x)(1-\alpha x)}},$$

nous ferons

$$x = \alpha(1-t^2);$$

l'intégrale précédente devient ainsi

$$2\mathrm{H}\alpha^i\int\frac{dt(1-t^2)^{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\alpha^2+\alpha^2t^2}},$$

cette dernière intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$; c'est l'expression de $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$. Soit

$$(1-t^2)^{i-\frac{1}{2}}=c^{-u^2},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on aura, en développant en série,

$$t^2=\frac{u^2}{i-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{u^2}{1.2.\left(i-\frac{1}{2}\right)}+\frac{u^4}{1.2.3.\left(i-\frac{1}{2}\right)^2}-\ldots\right],$$

ce qui donne

$$t=\frac{u}{\sqrt{i-\frac{1}{2}}}\left[1-\frac{u^2}{4\left(i-\frac{1}{2}\right)}+\ldots\right].$$

Lorsque i est un grand nombre, les termes qui suivent le premier dans le second membre deviennent successivement plus petits et sont des ordres $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i^2}$, ..., par rapport à lui. Nous ne considérerons ici que le premier, et alors l'expression précédente de $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ devient

$$\frac{2\mathrm{H}\alpha^i}{\sqrt{\left(i-\frac{1}{2}\right)(1-\alpha^2)}}\int du\,c^{-u^2}.$$

t nul donne u nul, et $t=1$ donne u infini. L'intégrale $\int du\,c^{-u^2}$ devient, comme l'on sait, dans ces limites, égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. On a donc, lorsque i est un grand nombre,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(i)}=\frac{\mathrm{H}\alpha^i\sqrt{\pi}}{\sqrt{\left(i-\frac{1}{2}\right)(1-\alpha^2)}}.$$

Pour déterminer H, nous observerons que, $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ étant le coefficient de $\cos i\theta$ dans le développement de $(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ ou de

$$\left(1-\alpha c^{\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\alpha c^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

on a

$$\tfrac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(i)}=\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots2i}\alpha^i\left[1+\frac{2i+1}{2i+2}\,\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)}\,\frac{1.3}{2.4}\alpha^4+\ldots\right].$$

Considérons $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ comme fonction de i et de α, et développons cette fonction suivant les puissances descendantes de i. Le premier terme du facteur

$$1+\frac{2i+1}{2i+2}\,\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)}\,\frac{1.3}{2.4}\alpha^4+\ldots$$

est

$$1+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1.3}{2.4}\alpha^4+\ldots,$$

ou

$$(1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le premier terme du facteur

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots2i}\quad\text{ou}\quad\frac{1.2.3\ldots2i}{2^{2i}(1.2.3\ldots i)^2},$$

développé suivant les puissances descendantes de i, peut être ainsi déterminé. On a, par les théorèmes connus, pour le premier terme du produit $1.2.3\ldots2i$, la quantité

$$(2i)^{2i+\frac{1}{2}}c^{-2i}\sqrt{2\pi},$$

et, pour le premier terme du produit $1.2\ldots i$, le terme

$$i^{i+\frac{1}{2}}c^{-i}\sqrt{2\pi};$$

le facteur précédent devient ainsi $\frac{1}{\sqrt{i\pi}}$. Le premier terme de la valeur de $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$, réduite en série par rapport aux puissances descendantes de i, est donc

$$\frac{2\alpha^i}{\sqrt{i\pi(1-\alpha^2)}}.$$

Mais, par ce qui précède, ce premier terme est

$$\frac{\mathrm{H}\alpha^i\sqrt{\pi}}{\sqrt{i(1-\alpha^2)}};$$

on a donc

$$\mathrm{H}=\frac{2}{\pi},\quad \text{et, par conséquent,}\quad b_{\frac{1}{2}}^{(i)}=\frac{4\alpha^i}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}}\int\frac{(1-t^2)^{i-\frac{1}{2}}\,dt}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2t^2}{1-\alpha^2}}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t égal à l'unité. α étant toujours moindre que l'unité, on voit que les valeurs de $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ deviennent de plus en plus petites, et qu'ainsi la série du développement de $(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ est très-convergente.

De la grande inégalité de Jupiter et de Saturne.

4. Il résulte du n° **65** du Livre II que, en considérant l'orbite troublée d'une planète comme une ellipse variable, si l'on nomme ζ la longitude moyenne de Jupiter, ζ' celle de Saturne, l'expression différentielle des grands axes donne les deux équations différentielles

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=q\sin(5\zeta'-2\zeta+\mathrm{A}),$$

$$\frac{d^2\zeta'}{dt^2}=q'\sin(5\zeta'-2\zeta+\mathrm{A}),$$

q, q', A étant fonctions des demi-grands axes des deux planètes, que nous désignerons par a pour Jupiter et par a' pour Saturne, des excentricités et des inclinaisons des orbites, des longitudes des périhélies et des nœuds, enfin des époques de la longitude. Nous regarderons ici ces quantités comme constantes, ce qui, pour notre objet, peut être supposé sans erreur sensible. En faisant donc

$$\mathrm{V}=5\zeta'-2\zeta+\mathrm{A},$$

nous aurons

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dt^2}=(5q'-2q)\sin\mathrm{V},$$

d'où l'on tire, en multipliant cette équation par $d\mathrm{V}$ et en l'intégrant,

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt}=\sqrt{c^2-(10q'-4q)\cos\mathrm{V}},$$

c étant une constante arbitraire. Relativement à Jupiter et à Saturne, c est égal à $5n'-2n$, nt et $n't$ étant les parties non périodiques de leurs longitudes moyennes.

Si c^2 surpasse $10q'-4q$ pris positivement, on pourra réduire en série convergente la quantité sous le radical, et alors on obtient, pour Jupiter et Saturne, la valeur qui résulte des formules du Livre VI. Mais, si c^2 est moindre que $10q'-4q$ pris positivement, l'angle V ne peut plus croître indéfiniment; il ne peut qu'osciller autour de l'un de ces deux points, zéro et la demi-circonférence. Ce changement de révolution en oscillation aura lieu si, en faisant varier n et n' de δn et $\delta n'$, on a

$$5n'-2n+5\,\delta n'-2\,\delta n=\sqrt{10q'-4q},$$

la quantité sous le radical étant prise positivement. Cette quantité peut être supposée sensiblement la même pour toutes les valeurs de δn et $\delta n'$, pourvu qu'elles soient fort petites relativement à n et n', parce que les demi-grands axes a et a', dont q et q' dépendent, restent alors à très-peu près les mêmes. Les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne sont, à fort peu près,

$$\frac{-q}{(5n'-2n)^2}\sin\mathrm{V},\quad \frac{-q'}{(5n'-2n)^2}\sin\mathrm{V}.$$

Dans les dernières Tables de M. Bouvard, ces inégalités sont, en secondes centésimales,

$$3662'',4.\sin\mathrm{V},\quad -8895'',7.\sin\mathrm{V},$$

ce qui donne

$$q=-(5n'-2n)^2.3662'',4,\quad q'=(5n'-2n)^2.8875'',7\quad (^1).$$

(1) Les deux nombres 8895",7 et 8875",7 devraient être identiques; ni l'un ni l'autre d'ailleurs n'est égal au nombre 8866",2 qu'on lit dans l'Introduction des Tables de Bouvard (*Tables de Jupiter, de Saturne et d'Uranus*, par M. A. Bouvard, 1821; p. III). V. P.

En réduisant les arcs en parties du rayon, on a

$$\sqrt{10q'-4q}=(5n'-2n).0,4042;$$

les deux limites de l'oscillation de $\frac{dV}{dt}$ sont donc

$$\pm(5n'-2n).0,4042.$$

Pour que la valeur de $\frac{dV}{dt}$ soit comprise dans ces limites, il faut que l'on ait

$$5n'-2n+5\,\delta n'-2\,\delta n<0,4042.(5n'-2n),$$

ce qui commence à exister lorsque l'on a

$$5\,\delta n'-2\,\delta n=-0,5958.(5n'-2n).$$

Alors le moyen mouvement de Saturne deviendrait exactement les deux cinquièmes de celui de Jupiter. Si l'on fait δn égal à $-\delta n'$, l'équation précédente donne

$$\delta n'=-\frac{0,5958}{7}(5n'-2n).$$

Or on a, à fort peu près, $5n'-2n=\frac{n'}{30}$; on aura donc

$$\frac{\delta n'}{n'}=-\frac{0,5958}{210}.$$

On a, par les lois de Kepler, $\frac{\delta n'}{n'}=-\frac{3}{2}\frac{\delta a'}{a'}$; on aura ainsi

$$\delta a'=\frac{a'}{530},$$

et, comme on a supposé $\delta n=-\delta n'$, on aura

$$\delta a=-\frac{a}{1320}.$$

Il eût donc suffi de faire varier de ces petites fractions les distances moyennes de ces deux planètes au Soleil pour rendre leurs moyens mouvements commensurables. La détermination de V aurait alors présenté des difficultés; mais il est inutile de nous en occuper.

Sur la détermination des orbites des comètes par les observations.

5. J'ai donné, dans les nos **28** et suivants du Livre II, une nouvelle méthode pour déterminer les orbites des comètes. Elle consiste à déterminer par les observations, en partant d'une époque fixe, la longitude et la latitude géocentriques de la comète, et leurs premières et secondes différences divisées par les puissances correspondantes de l'élément dt du temps supposé constant. On conclut ensuite rigoureusement, des équations différentielles du mouvement de la comète, sa distance périhélie et l'instant de son passage par le périhélie. Pour obtenir avec plus de précision les données dont je viens de parler, j'avais proposé d'employer plus de trois observations, en ayant soin d'augmenter l'intervalle des observations extrêmes, en raison du nombre des observations employées. Mais, indépendamment de la longueur du calcul, les erreurs des observations nuisent à l'exactitude que l'on peut attendre de la multiplicité des observations, et il me paraît préférable de n'en employer que trois, en fixant l'époque à l'observation intermédiaire, et en prenant les observations extrêmes assez peu distantes entre elles pour que, dans l'intervalle qui les sépare, les données précédentes puissent être supposées à fort peu près les mêmes.

Soient $\alpha_{,}$, α, α' les longitudes géocentriques de la comète dans la première, dans la deuxième et dans la troisième observation. Soient $\theta_{,}$, θ et θ' les latitudes géocentriques correspondantes. Désignons par i l'intervalle de la première à la deuxième observation, et par i' l'intervalle de la deuxième observation à la troisième. Prenons pour époque la deuxième observation et désignons par a, b, h, l les quatre différentielles $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Nous aurons, par les formules connues, les quatre équations

$$\alpha-\alpha_{,}=ia-\frac{i^2}{2}b,\quad \theta-\theta_{,}=ih-\frac{i^2}{2}l,$$

$$\alpha'-\alpha=i'a+\frac{i'^2}{2}b,\quad \theta'-\theta=i'h+\frac{i'^2}{2}l.$$

On doit observer ici que les intervalles i et i' sont égaux aux produits du nombre des jours qu'ils comprennent par l'arc que la Terre décrit dans un jour, en vertu de son mouvement moyen. En supposant donc que, dans les équations précédentes, i et i' soient ces nombres de jours, ces équations donneront, en y changeant a, b, h, l en a', b', h', l', les valeurs de ces dernières quantités en secondes. Si elles sont sexagésimales, on aura les logarithmes de a et de h en retranchant des logarithmes des nombres de secondes contenues dans a' et h' le logarithme 3,5500072. On aura les logarithmes de b et l en retranchant des logarithmes des nombres de secondes contenues dans b' et l' le logarithme 1,7855874.

On déterminerait avec plus d'exactitude les quatre inconnues a, b, h et l, en employant d'autres observations, pourvu qu'elles soient comprises entre les deux observations extrêmes précédentes. On aura, par ce qui précède, les équations relatives aux observations ajoutées. On formera ensuite, de toutes ces équations, par la méthode la plus avantageuse, quatre équations finales qui détermineront les inconnues a, b, h et l. Cela posé, les équations (L) du n° **35** du Livre II donnent les suivantes :

$$(a)\qquad r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta} - 2Rx\cos(\odot - \alpha) + R^2,$$

$$(a')\qquad ay = \frac{1}{2}R\sin(\odot - \alpha)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) - \frac{1}{2}bx,$$

$$(a'')\qquad \begin{cases} hy = -x\left(h^2\operatorname{tang}\theta + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}a^2\sin\theta\cos\theta\right) \\ \qquad + \frac{1}{2}R\sin\theta\cos\theta\cos(\odot - \alpha)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right), \end{cases}$$

$$(a''')\qquad \begin{cases} 0 = \frac{y^2}{\cos^2\theta} + a^2x^2 + \frac{h^2x^2}{\cos^4\theta} + \frac{2hyx\operatorname{tang}\theta}{\cos^2\theta} \\ \qquad + 2y\left[\frac{\sin(\odot - \alpha)}{R} - (R' - 1)\cos(\odot - \alpha)\right] \\ \qquad - 2ax\left[(R' - 1)\sin(\odot - \alpha) + \frac{\cos(\odot - \alpha)}{R}\right] + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r}. \end{cases}$$

Ces équations sont relatives au mouvement parabolique; r est le rayon vecteur de la comète, au moment de l'observation prise pour époque; R est le rayon vecteur de la Terre, sa moyenne distance au Soleil étant prise pour unité; $\odot$ est la longitude du Soleil à l'instant de l'époque; R' est le rayon vecteur de la Terre lorsqu'on augmente $\odot$ d'un angle droit; α et θ sont la longitude et la latitude géocentriques de la comète au moment de l'époque; x est la distance de la comète au centre de la Terre, projetée sur le plan de l'écliptique; enfin y désigne $\frac{dx}{dt}$.

Il y a, comme on voit, plus d'équations que d'inconnues, ce qui doit avoir lieu dans le mouvement parabolique, en vertu de la supposition du grand axe infini; il faut donc alors ou choisir entre les deux équations (a') et (a''), ou les combiner de la manière la plus avantageuse. J'avais proposé, dans le Livre II, d'employer l'équation (a') ou l'équation (a''), selon que b est plus grand ou plus petit que l. Mais depuis, m'étant fort occupé de l'influence des erreurs des observations sur leurs résultats, j'ai reconnu que le moyen le plus propre à diminuer ici cette influence consiste à combiner ces équations en multipliant l'équation (a') par a, l'équation (a'') par h et en ajoutant ces produits, ce qui donne l'équation suivante :

$$(a^{\text{iv}})\qquad \begin{cases} y = \frac{a\sin(\odot - \alpha) - h\sin\theta\cos\theta\cos(\odot - \alpha)}{2(a^2 + h^2)}R\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \\ \qquad - \frac{x\left(h^3\operatorname{tang}\theta + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}hl + \frac{1}{2}a^2h\sin\theta\cos\theta\right)}{a^2 + h^2}. \end{cases}$$

On combinera donc cette équation avec les équations (a) et (a''') pour avoir les valeurs de x, y, r. On fera une première supposition pour x, et l'équation (a) donnera la valeur correspondante de r; ensuite l'équation (a^{iv}) donnera la valeur de y. Ces valeurs, substituées dans l'équation (a'''), doivent y satisfaire, si la valeur de x a été bien choisie. Si cette équation n'est pas satisfaite, on prendra une seconde valeur de x, et ainsi de suite. Quelques essais feront bientôt connaître la vraie valeur de x. On en conclura, comme dans le n° **36** du Livre II, la distance périhélie et l'instant du passage de la comète par le périhélie. On formera la quantité

$$\frac{x}{\cos^2\theta}(y + hx\,\mathrm{tang}\,\theta) - \mathrm{R}y\cos(\odot - \alpha)$$
$$+ x\left[\frac{\sin(\odot-\alpha)}{\mathrm{R}} - (\mathrm{R}'-1)\cos(\odot-\alpha)\right] - \mathrm{R}ax\sin(\odot-\alpha) + \mathrm{R}(\mathrm{R}'-1).$$

En désignant par P cette quantité et par D la distance périhélie, on aura

$$\mathrm{D} = r - \tfrac{1}{2}\mathrm{P}^2;$$

le cosinus de l'anomalie, que nous nommerons v, sera donné par l'équation

$$\cos^2\tfrac{1}{2}v = \frac{\mathrm{D}}{r},$$

et l'on en conclura, par la Table du mouvement des comètes, le temps employé à parcourir l'angle v. En ajoutant ce temps à l'époque ou en l'en retranchant, suivant que P est négatif ou positif, on aura l'instant du passage au périhélie.

Ayant ainsi à peu près la distance périhélie de la comète et l'instant de son passage au périhélie, on les corrigera par la méthode du n° 37 du Livre II.

Pour faciliter l'usage de la méthode précédente, je vais présenter ici l'application que M. Bouvard en a faite à la comète que l'on observe maintenant.

On a choisi les trois observations suivantes, évaluées en mesures sexagésimales et en temps moyen à Paris, compté de minuit:

Août 1824.

Temps moyen.	Longitude observée.	Latitude observée.
$16^{\mathrm{j}},90801$	$\alpha_{,} = 237^\circ.29'.\ 3''$	$\theta_{,} = 55^\circ.18'.42''$ bor.
$22,90153$	$\alpha = 230.31.33$	$\theta = 57.42.22$ bor.
$28,87972$	$\alpha' = 224.\ 6.30$	$\theta' = 59.33.58$ bor.

En prenant pour époque moyenne l'observation du 22 août, les

nombres de jours i et i' seront

$$i = 5^{\mathrm{j}},99352,\quad i' = 5^{\mathrm{j}},97819.$$

On aura ainsi, relativement à la longitude, les deux équations

$$5,99352.a' - 17,96115.b' = -6^\circ,95834,$$
$$5,97819.a' + 17,86938.b' = -6^\circ,41750.$$

La résolution de ces équations donne

$$a' = -4021'',807,\quad b' = 52'',6188.$$

En retranchant du logarithme du nombre de secondes de cette valeur de $-a'$ le logarithme constant 3,5500072, on aura, pour le logarithme de la valeur de $-a$, 0,0544141. Retranchant du logarithme du nombre de secondes de cette valeur de b' le logarithme constant 1,7855874, on aura, pour le logarithme de la valeur de b, $\bar{1}$,9355515. α est ici $230^\circ31'33''$.

En considérant d'une manière semblable les équations relatives à la latitude, on formera les équations

$$5,99352.h' - 17,96115.l' = 2^\circ,39445,$$
$$5,97819.h' + 17,86938.l' = 1^\circ,85999,$$

d'où l'on tire

$$h' = 1278'',941,\quad l' = -53'',1516,$$

ce qui donne, pour les logarithmes de h et de $-l$,

$$\bar{1},5568434 \quad \text{et} \quad \bar{1},9399266,$$

et l'on a

$$\theta = 57^\circ42'22''.$$

Pour donner un exemple de la manière d'employer plus de trois observations, on a considéré les observations du 20 et du 25 août, qui donnent :

Temps moyen.	Longitude observée.	Latitude observée.
$20^{\mathrm{j}},93635$	$232^\circ.44'.56''$	$56^\circ.59'.\ 5''$ bor.
$25,90792$	$227.13.38$	$58.42.11$ bor.

On a formé les quatre équations suivantes, relatives à la longitude :

$$5,99352.a' - 17,96115.b' = -6^{\circ},95834,$$
$$1,96518.a' - 1,93097.b' = -2^{\circ},22305,$$
$$3,00639.a' + 4,51919.b' = -3^{\circ},29862,$$
$$5,97819.a' + 17,86938.b' = -6^{\circ},41750.$$

Pour réduire ces équations à deux équations finales, on a multiplié chacune de ces équations par son coefficient de a', et l'on a ajouté ces produits, ce qui a donné pour première équation

$$+84,56138.a' + 8,96778.b' = -94^{\circ},35563.$$

On a multiplié chacune des mêmes équations par son coefficient de b', et l'on a ajouté les produits, ce qui a donné pour équation finale

$$8,96778a' + 666,06906.b' = -0^{\circ},31145.$$

De ces deux équations finales on a conclu, comme ci-dessus,

$$\log(-a) = 0,0544923, \quad \log b = \bar{1},9343631.$$

Ces valeurs diffèrent très-peu des précédentes. La valeur de α est la même que ci-dessus.

En opérant d'une manière semblable sur les latitudes, on a trouvé

$$\log h = \bar{1},5563862, \quad \log(-l) = \bar{1},9397564.$$

La valeur de θ est la même que ci-dessus.

Ayant ainsi les valeurs de α, a, b, θ, h, l, on les a substituées dans les équations (a), (a^{iv}), (a''), en observant qu'à l'époque de l'observation du 22 août on a

$$\odot = 149^{\circ}38'37'',$$
$$\log R = 0,0046329,$$
$$\log(1 - R') = \bar{2},1097810.$$

On a formé ainsi les trois équations suivantes :

$$r^2 = 3,50341.x^2 - 0,32033.x + 1,021565,$$
$$r = 0,32913.x + \frac{0,39060}{r^3} - 0,37830,$$
$$0 = 3,50341.y^2 + 3,99184.xy + 2,87655.x^2 - 1,945969.y$$
$$+ 0,38431.x - \frac{2}{r} + 0,97889.$$

On a trouvé, après un petit nombre d'essais,

$$x = 0,41331, \quad y = -0,026789, \quad r = 1,21970,$$

d'où l'on a conclu

$$P = -0,577229,$$

et la distance périhélie égale à 1,053095, ce qui a donné, pour l'instant du passage au périhélie, sept. 29^j,10239, temps moyen compté de minuit à Paris.

Les valeurs précédentes de a, b, h, l, relatives à trois observations, ont donné la distance périhélie égale à 1,053650, et, pour l'instant du passage, sept. 29^j,04587, ce qui diffère peu des résultats fondés sur cinq observations.

LIVRE XVI.

DU MOUVEMENT DES SATELLITES.

DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTICE HISTORIQUE DES TRAVAUX DES GÉOMÈTRES ET DES ASTRONOMES SUR CET OBJET.

1. Les Chaldéens ont connu l'accélération du mouvement de la Lune lorsqu'elle va de son apogée à son périgée, et sa diminution en allant du périgée à l'apogée. Ils supposaient cette accélération et cette diminution constantes et de 18 minutes sexagésimales par jour, ce qui répond à une équation du centre d'environ $4^\circ 7'$. Nous ignorons l'inclinaison qu'ils supposaient à l'orbite lunaire. Ils avaient reconnu, par les observations des éclipses, les mouvements des nœuds et de l'apogée de cette orbite, et ils avaient formé la période remarquable de $6585^{j}\frac{1}{3}$, pendant lesquels la Lune fait 223 révolutions à l'égard du Soleil, 239 révolutions anomalistiques et 241 révolutions par rapport à ses nœuds. Ils ajoutaient $\frac{4}{135}$ de la circonférence à dix-huit circonférences pour avoir le mouvement sidéral du Soleil dans cet intervalle, ce qui suppose l'année sidérale de $365^{j}\frac{1}{4}$, la même que l'année tropique admise par les plus anciens astronomes. Il paraît donc que la précession des équinoxes était inconnue aux Chaldéens.

Hipparque perfectionna la période chaldéenne, en la comparant à un grand nombre d'éclipses. Il fixa l'inclinaison de l'orbite de la Lune et son équation du centre à 5 degrés dans ces phénomènes. Mais il remarqua que cette équation ne représentait point dans les quadratures ses observations, qui offraient alors de grandes anomalies. Ptolémée, suivant avec soin ces anomalies, fut conduit à la découverte de l'inégalité lunaire que l'on nomme *évection*, dont il détermina la valeur avec beaucoup d'exactitude.

Les astronomes n'ajoutèrent rien à la théorie de la Lune de Ptolémée jusqu'à Tycho Brahe, qui, en comparant cette théorie avec ses observations de la Lune dans les octants, reconnut l'inégalité de la variation, dont le maximum correspond à ces points. L'exactitude de ces observations lui fit encore reconnaître que l'équation du temps propre au Soleil n'était point applicable sans correction à la Lune, et qu'il fallait, pour ce dernier astre, la corriger d'une quantité dépendante de l'anomalie du Soleil. Les astronomes ont ensuite appliqué cette correction au mouvement de la Lune, en donnant à cet astre la même équation du temps qu'à tous les autres, ce qui ajoute à son mouvement l'inégalité connue sous le nom d'*équation annuelle*. On supposait, avant Tycho Brahe, l'inclinaison de l'orbite lunaire constante et le mouvement de ses nœuds uniforme. Ce grand astronome dut encore à la bonté de ses observations la connaissance des deux inégalités principales de ces éléments, d'où résulte la principale inégalité de la Lune en latitude.

Tel était l'état de la théorie de la Lune lorsque Newton entreprit d'appliquer à cette théorie le principe de la pesanteur universelle. Il publia ses recherches sur cet objet dans le troisième Livre des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, et je n'hésite point à les regarder comme une des parties les plus profondes de cet admirable Ouvrage [1]. Newton n'a point rattaché à son principe la plus grande

[1] On voit, dans la correspondance de Newton avec Halley, que Newton, fatigué de ses querelles avec Hooke, voulait supprimer ce troisième Livre; mais, heureusement pour les progrès de l'Astronomie, cédant aux instances de Halley, il consentit à le publier.

des inégalités lunaires, l'*évection*, qu'il considérait, avec Horrox, comme le résultat de deux inégalités, l'une dans l'excentricité de l'orbite, l'autre dans le mouvement de l'apogée. On voit cependant qu'il avait essayé de déterminer ces inégalités, ainsi que le moyen mouvement de l'apogée; mais, ces essais ne l'ayant point satisfait, il s'abstint de les publier. En effet, la détermination de ce mouvement a présenté aux géomètres de grandes difficultés.

Newton a été plus heureux par rapport à la variation. Pour l'obtenir, il détermine d'abord les forces dont la Lune est sollicitée par l'action du Soleil dans son mouvement relatif autour de la Terre. En faisant ensuite abstraction de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbe lunaire, il cherche la variation de l'aire décrite par le rayon vecteur de la Lune pendant l'élément de temps, supposé constant; il obtient la loi de cette variation depuis la syzygie jusqu'à la quadrature. Les carrés des vitesses de la Lune dans ces deux points sont, en négligeant le carré de la force perturbatrice, comme les carrés des aires instantanées, divisés respectivement par les carrés des rayons vecteurs. Les carrés des vitesses, divisés par les rayons de courbure, sont égaux aux forces centrifuges correspondantes. Aux deux points de la syzygie et de quadrature, ces forces sont dirigées suivant les rayons vecteurs, et elles sont égales et contraires aux forces lunaires décomposées suivant la direction de ces rayons.

De là Newton déduit le rapport des rayons de courbure aux mêmes points en fonction des rayons vecteurs correspondants. Pour avoir un second rapport, Newton considère l'orbite de la Lune comme une ellipse mobile, dont la Terre occupe le centre et dont le périgée suit le Soleil, de manière que le petit axe de l'ellipse correspond toujours à la syzygie et le grand axe à la quadrature. Cette considération est exacte, mais elle exigeait une démonstration. C'est ainsi que Newton, dans sa théorie de la figure de la Terre, a supposé sans démonstration que les méridiens sont elliptiques. Ces hypothèses de calcul, fondées sur des aperçus vraisemblables, sont permises aux inventeurs dans des recherches aussi difficiles; mais, étant liées mathématiquement au principe que l'on veut établir, on peut toujours craindre, tant que cette liaison n'est pas démontrée, qu'elles ne soient contradictoires à ce principe. Newton détermine, par sa méthode des fluxions, les rayons de courbure de l'orbite de la Lune, lorsque cet astre parvient aux extrémités des axes de l'ellipse mobile, ce qui lui donne un second rapport de ces rayons, en fonction des axes et par conséquent des rayons vecteurs correspondants à la syzygie et à la quadrature. En égalant ce rapport au précédent, il obtient le rapport des deux axes de l'ellipse, qu'il trouve être celui de 69 à 70. Ce rapport donne le rayon vecteur de l'ellipse dans un point quelconque; en divisant donc l'expression de la variation instantanée de l'aire par le carré de ce rayon, on a la différentielle de la longitude vraie de la Lune, et, en intégrant, on obtient cette longitude et par conséquent l'inégalité de la variation.

Le procédé de Newton, quoique moins direct, conduit au même résultat, qui lui donne l'inégalité de la variation égale à 35′10″ sexagésimales dans son maximum, ce qui est à très-peu près conforme aux observations.

Cette méthode de Newton est fort ingénieuse, et l'on verra, dans le Chapitre suivant, qu'en la traduisant en analyse, elle conduit facilement aux équations différentielles du mouvement lunaire.

Newton considère ensuite le mouvement du nœud ascendant et la variation de l'inclinaison de l'orbite lunaire. Pour cela, il décompose l'action perturbatrice du Soleil sur la Lune en deux forces : l'une est dirigée vers le centre de la Terre, et, par conséquent, étant dans le plan de l'orbite, elle ne dérange point la position de ce plan; l'autre force est parallèle à la ligne menée du Soleil à la Terre et dérange le plan de l'orbite. Newton la compose avec le mouvement de la Lune à la fin d'un instant, et, faisant passer un plan par la résultante et par le centre de la Terre, il détermine la position de ce plan, qui devient celui de l'orbite lunaire dans l'instant suivant. Il trouve ainsi le mouvement horaire du nœud égal au produit d'un facteur, à très-peu près constant, par le mouvement horaire de la Lune, par le produit des

sinus des deux angles qui expriment les distances du Soleil au nœud et du nœud à la Lune, et par le cosinus de la distance de la Lune au Soleil. En changeant dans cette fonction le mouvement horaire de la Lune dans la différentielle de ce mouvement, en développant en cosinus simples le produit des sinus et des cosinus, et ensuite en intégrant, on a facilement l'expression du moyen mouvement du nœud et ses inégalités. Ce procédé n'était point au-dessus de l'analyse connue de Newton; mais il ne l'a point donné, soit qu'alors on ne fût point familiarisé avec les développements en sinus et cosinus simples des produits de sinus et de cosinus et avec l'intégration de leurs différentielles, soit que Newton, s'étant proposé d'exposer toutes ses théories sous une forme synthétique, ait cherché les moyens d'y parvenir par la synthèse, soit enfin que, ayant trouvé ses résultats par l'analyse, il les ait traduits synthétiquement, ce qu'il paraît avoir fait dans plusieurs cas. La manière dont il a déterminé le mouvement moyen du nœud et son inégalité principale, quoique compliquée, est exacte et ingénieuse. Newton observe que, dans le cours de chaque mois, le mouvement du nœud s'accélère et se ralentit de manière qu'il a rétrogradé, à la fin du mois, d'une quantité dépendante seulement de sa distance au Soleil. Il parvient ainsi à séparer, dans l'expression du mouvement horaire du nœud, ce qui est indépendant de la position de la Lune dans son orbite de ce qui en dépend. Cette dernière partie ne devant produire que des inégalités dont la période est à peu près d'un demi-mois et qui disparaissent de l'expression de la latitude en se combinant avec les inégalités correspondantes de l'inclinaison, Newton la néglige et ne considère que la première partie du mouvement horaire du nœud. Il en conclut, par des considérations géométriques et par la quadrature des courbes, le moyen mouvement annuel du nœud et son inégalité principale dont l'argument est le double de la distance du Soleil au nœud. Il obtient de la même manière l'inégalité principale de l'inclinaison, qu'il trouve conforme, ainsi que l'inégalité du nœud, à celles que Tycho Brahe avait déduites de ses observations.

Tels sont les résultats dont Newton, dans la première édition de son

Ouvrage des *Principes*, a donné les démonstrations, auxquelles il n'a rien changé dans les éditions suivantes. Il y a seulement ajouté quelques équations, qu'il dit avoir déduites de sa théorie de la gravité, mais sans en donner les démonstrations. De ce nombre est l'équation annuelle de la Lune, pour laquelle il se contente d'observer que l'orbe lunaire se dilate par l'action du Soleil dans son périhélie, et se contracte par la diminution de cette action dans l'aphélie, et que la Lune se mouvant avec plus de lenteur dans un orbe plus dilaté, son mouvement doit retarder lorsque le Soleil est plus près de la Terre et s'accélérer lorsque cet astre est plus éloigné; d'où résulte, dans le mouvement lunaire, une inégalité annuelle de signe contraire à celle du Soleil et dont il trouve une valeur conforme aux observations. Newton donne encore, sans démonstration, quelques autres inégalités. Mais l'Analyse peut seule conduire à la détermination exacte de toutes les inégalités lunaires. Il fallait sans doute une force d'esprit extraordinaire pour obtenir sans son secours les résultats auxquels Newton est parvenu, et qui, quoique incomplets, suffisent pour établir que l'attraction du Soleil sur la Lune et sur la Terre est la vraie cause de toutes les anomalies du mouvement de la Lune.

Un avantage immense de la théorie et des aperçus de Newton sur ce mouvement a été la formation de nouvelles Tables de la Lune, Tables qui, par l'application de l'Analyse à cette théorie, ont acquis le haut degré de perfection nécessaire aux besoins de la Navigation et de la Géographie.

En 1747, Clairaut et d'Alembert présentèrent à l'Académie des Sciences les équations différentielles du mouvement d'un corps attiré par deux autres et leurs méthodes pour intégrer ces équations lorsque la force principale qui sollicite le corps est fort supérieure aux forces perturbatrices, ce qui est le cas de la Lune et des planètes. Ces deux illustres géomètres firent une application spéciale de leurs analyses au mouvement de la Lune, et ils en conclurent avec une grande facilité, non-seulement l'inégalité de la variation, que Newton avait obtenue d'une manière compliquée, quoique fort ingénieuse, mais encore

l'évection, qu'il avait tenté inutilement de rattacher à cette théorie, l'équation annuelle et beaucoup d'autres inégalités.

Dans le calcul des perturbations du mouvement de la Lune en longitude, Clairaut considère l'orbite comme située dans le plan de l'écliptique; il donne une expression élégante et simple du rayon vecteur de la Lune. La première partie de cette expression, indépendante de la force perturbatrice, est la valeur elliptique qui, sans cette force, subsisterait seule. L'autre partie dépend de cette force et renferme deux intégrales qui ne peuvent être rigoureusement déterminées qu'autant que l'on connait déjà le rayon vecteur. Mais on peut les avoir d'une manière approchée en substituant pour ce rayon sa partie elliptique. On obtient ainsi une valeur du rayon vecteur approchée aux quantités près de l'ordre du carré de la force perturbatrice. En substituant cette valeur dans les intégrales, on a une seconde valeur du rayon vecteur approchée aux quantités près de l'ordre du cube de la force perturbatrice, et ainsi de suite. Mais ce procédé introduit, dans l'expression de ce rayon, des arcs de cercles qui la rendraient bientôt inexacte. Pour obvier à cet inconvénient, Clairaut rapporte la partie elliptique du rayon vecteur à un apogée mobile. En substituant alors cette partie dans les intégrales, il n'a plus d'arcs de cercles; mais la valeur qu'il trouve pour le rayon vecteur contient un terme elliptique relatif à un apogée immobile. En déterminant convenablement les constantes introduites par le calcul, il fait disparaître ce terme, et, en comparant la valeur du rayon vecteur qu'il trouve ainsi avec celle qu'il a supposée, il obtient le mouvement de l'apogée. Une première approximation ne lui donna que la moitié du mouvement observé.

Newton était déjà parvenu à ce résultat singulier dans la Proposition 45 du premier Livre des *Principes*; mais, dans la théorie de la Lune qu'il a donnée dans le troisième Livre, il n'a point rappelé ce résultat, qui pouvait paraître infirmer cette théorie et qui, en effet, porta Clairaut à penser qu'elle devait être modifiée, en ajoutant à la loi de l'attraction un terme proportionnel à une puissance de la distance inverse, supérieure au carré, terme qui, insensible pour les planètes, ne deviendrait sensible qu'à des distances peu considérables, telles que la distance de la Lune. Cette conclusion de Clairaut fut vivement attaquée par Buffon, qui se fondait sur ce que, les lois primordiales de la nature devant être de la plus grande simplicité, leur expression ne doit dépendre que d'un seul module, et par conséquent ne renfermer qu'un terme. Cette considération doit nous porter sans doute à ne compliquer la loi de l'attraction que dans un besoin extrême; mais l'ignorance où nous sommes de la nature de cette force ne nous permet pas de prononcer avec assurance sur la simplicité de son expression. Quoi qu'il en soit, le métaphysicien eut raison vis-à-vis du géomètre, qui reconnut son erreur et fit la remarque importante que, en poussant plus loin l'approximation, la loi de l'attraction newtonienne donne à fort peu près le mouvement de l'apogée. Ce résultat, dont Clairaut fit part à l'Académie le 17 mai 1749, dissipa tous les doutes sur la loi de l'attraction, qu'Euler, trompé par une erreur de calcul, avait jugée contraire aux observations de Saturne, dans sa première pièce sur les mouvements de cette planète et de Jupiter.

Clairaut réunit les divers résultats de sa théorie de la Lune dans une pièce qui remporta le prix proposé en 1750 par l'Académie des Sciences de Pétersbourg. Cette pièce, imprimée d'abord en 1752 dans cette capitale, fut réimprimée à Paris en 1765, avec des Additions et de nouvelles Tables de la Lune, déjà fort rapprochées des observations, et qui faisaient naître l'espoir que l'on parviendrait un jour à déduire de la théorie seule des Tables aussi parfaites qu'on puisse les désirer.

D'Alembert, dans sa théorie de la Lune, choisit pour coordonnées le rayon vecteur lunaire projeté sur le plan de l'écliptique et le mouvement vrai de la Lune rapporté à ce plan. Il donne l'équation différentielle du second ordre du rayon vecteur projeté, dans laquelle l'élément de la longitude vraie est supposé constant et l'expression de l'élément du temps est fonction de cette longitude. Ces deux équations sont les mêmes que les deux premières des équations (L) du n° 1 du Livre VII. Au lieu de la troisième de ces équations, qui détermine la latitude, d'Alembert emploie, comme Newton, les variations différentielles du mouvement du nœud et de l'inclinaison de l'orbite. Pour intégrer l'équation différentielle du rayon vecteur projeté, il ne rapporte point, comme Clairaut, la partie elliptique de l'expression de ce rayon à un apogée mobile, mais il fait disparaître par un moyen ingénieux l'arc de cercle qu'introduirait la supposition d'un apogée immobile, ce qui le conduit, sans hypothèse, à la considération d'un apogée mobile. Une seconde approximation ayant presque doublé le mouvement de l'apogée donné par la première, et par là ayant accordé la théorie avec l'observation, il était à craindre que les approximations suivantes ne détruisissent cet accord. Il devenait donc important de porter encore plus loin ces approximations. C'est ce que d'Alembert a fait et il a trouvé que la théorie se rapprochait ainsi de plus en plus de l'observation.

Peu de mois avant que Clairaut et d'Alembert présentassent à l'Académie des Sciences leurs solutions du problème des trois corps, elle reçut la première pièce d'Euler sur Jupiter et Saturne, qui contient une solution du même problème, appliquée au mouvement de Saturne. Ce grand géomètre fit paraître cette solution dans les *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg* pour les années 1747 et 1748, et dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1750, et il en déduisit le mouvement du nœud de l'orbite lunaire et les inégalités de son inclinaison à l'écliptique. Il publia en 1753 un Ouvrage spécial sur la théorie de la Lune, dans lequel il prend pour coordonnées du mouvement lunaire le rayon vecteur projeté sur l'écliptique, l'anomalie vraie, et, au lieu de la latitude, il considère, comme Newton, le mouvement du nœud et l'inclinaison de l'orbite.

On peut varier la solution du problème des perturbations lunaires d'autant de manières qu'il y a de systèmes différents de coordonnées. Mais un des points les plus importants de cette solution est le choix du système qui donne les approximations les plus faciles et les plus convergentes, et qui fait le mieux démêler, dans le nombre infini des inégalités de la Lune, celles qui peuvent devenir sensibles en acquérant, par les intégrations successives, de petits diviseurs. Je ne balance point à regarder le système de coordonnées dont j'ai fait usage dans le Livre VII comme le plus avantageux sous ces rapports. La force perturbatrice du mouvement lunaire dépend des sinus et cosinus de son mouvement vrai et de son élongation au Soleil; leur réduction en sinus et cosinus d'angles dépendants du mouvement moyen de la Lune est pénible et peu convergente, à cause de la grandeur de son équation du centre et de ses principales inégalités. Il y a donc de l'avantage à éviter cette réduction et à déterminer d'abord la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie, ce qui peut être utile dans le cas où l'on cherche le temps correspondant à la longitude vraie. On détermine ensuite, par le retour des séries, la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne, et l'on n'a point à craindre dans ce retour le peu de convergence des approximations, que l'intégration des équations différentielles laisse toujours incertaine. A la vérité il faut, dans cette méthode, convertir le mouvement vrai du Soleil en fonction de la longitude vraie de la Lune. Mais, dans cette conversion, les grandes inégalités lunaires sont multipliées par le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune ou par $\frac{1}{13}$ environ, ce qui les rend fort petites.

Mayer publia en 1753, dans les *Mémoires de l'Académie de Gœttingue*, de nouvelles Tables de la Lune : pour les former, après avoir reconnu par la théorie les arguments des diverses inégalités lunaires, il détermina leurs coefficients par les observations. Il perfectionna ces Tables et la théorie qui l'avait guidé, et il les adressa, en 1755, au Bureau des Longitudes de Londres. Après sa mort, arrivée en 1762, sa veuve envoya au même Bureau une copie de ces Tables encore perfectionnées, et Bradley, les ayant comparées à beaucoup d'observations, les trouva si exactes, qu'on leur adjugea un prix de 3000 livres sterling. Elles ont été imprimées, ainsi que la théorie de l'auteur, en 1765. Dans cette théorie, Mayer prend pour coordonnées de la Lune son rayon vecteur, un angle dont la différentielle est proportionnelle à l'élément du temps, divisé par le carré du rayon vecteur, et la latitude, qu'il substitue au mouvement du nœud et à l'inclinaison de l'orbite, ce qui est plus direct et plus simple. Il a porté fort loin les approximations analytiques, et il a rectifié par les observations les coefficients, déjà fort approchés par sa théorie, des diverses inégalités lunaires. Mason perfectionna ces Tables en les assujettissant à un très-grand nombre d'observations de Bradley et en leur ajoutant quelques inégalités indiquées par la théorie. La comparaison des observations avec ses Tables lui donna une inégalité en longitude proportionnelle au sinus de la longitude du nœud de l'orbite, et dont il trouva le coefficient égal à $7'',7$ sexagésimales, inégalité que Mayer avait déjà reconnue, mais avec un coefficient plus petit et seulement de 4 secondes. Cette inégalité, ne paraissant pas résulter de la théorie de l'attraction, fut négligée par les astronomes.

Les Tables de Mayer, rectifiées par Mason, ont servi pendant plusieurs années au calcul des éphémérides destinées aux navigateurs; mais elles laissaient à désirer des Tables aussi parfaites, uniquement fondées sur la théorie. C'est ce qu'Euler tenta d'exécuter au moyen d'une nouvelle théorie de la Lune. Il y rapporte les coordonnées de la Lune à un axe mû sur l'écliptique autour du centre de la Terre, d'un mouvement égal au moyen mouvement de la Lune, et il donne les équations différentielles des trois coordonnées orthogonales rapportées à cet axe mobile et au plan de l'écliptique. Il les intègre par des approximations convergentes, et il réduit en Tables leurs intégrales, qui déterminent la position de la Lune à un instant quelconque. Mais, ces Tables étant moins commodes et moins précises que celles de Mason, les astronomes n'en ont point fait usage. Euler exposa sa nouvelle méthode dans deux pièces qu'il envoya à l'Académie des Sciences pour concourir aux prix qu'elle proposa sur la théorie de la Lune, en 1770 et en 1772; ensuite il la développa dans un Traité spécial fort étendu.

Lagrange envoya à l'Académie, pour le concours au prix de 1772, une pièce dans laquelle il considère le mouvement de la Lune sous un point de vue purement analytique. Il imagine trois corps qui s'attirent mutuellement, en raison de leurs masses et réciproquement au carré de leurs distances. Ces corps forment un triangle variable, mobile autour de leur centre commun de gravité. Il donne les équations différentielles de chaque côté de ce triangle et il en déduit la solution rigoureuse du problème des trois corps dans quelques cas particuliers. J'ai développé et généralisé ces résultats, dans le Chapitre VII du Livre X, par une méthode fort simple et indépendante de toute intégration.

Halley, comparant entre elles les observations anciennes d'éclipses, celles d'Albaténius et les observations modernes, soupçonna le premier l'accélération du moyen mouvement de la Lune. Dunthorne et Mayer ensuite en confirmèrent l'existence par une comparaison plus étendue des observations. En supposant cette accélération proportionnelle au carré du temps, ils en fixèrent à 10″ sexagésimales environ la quantité pour le premier siècle, à partir de 1700. L'Académie des Sciences, toujours animée du désir de perfectionner la théorie de la Lune, proposa, pour le sujet du prix de Mathématiques de 1774, la cause de cette équation séculaire. Elle couronna une pièce de Lagrange, dans laquelle l'auteur détermine l'influence de la figure de la Terre sur le mouvement de ce satellite : il prouve que son équation séculaire ne peut en résulter. Considérant ensuite que les géomètres avaient inutilement tenté de la déduire des attractions du Soleil et de la Terre supposés sphériques, il se crut d'autant plus fondé à la révoquer en doute, qu'il ne la jugea pas suffisamment établie par les observations. Mais son existence ne peut être contestée, surtout depuis la connaissance que M. Caussin nous a donnée des observations arabes, par sa traduction d'une partie de l'Astronomie d'Ibn-Jounis, manuscrit de la bibliothèque de Leyde, que le gouvernement batave voulut bien confier à l'Institut de France.

L'Académie des Sciences ayant proposé, pour le sujet du prix qu'elle devait décerner en 1762, la question de savoir si les planètes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur leurs mouvements, elle couronna une pièce de Bossut, dans laquelle l'auteur établit que cette résistance doit être beaucoup plus sensible sur le moyen mouvement de la Lune que sur celui des planètes, ce qui peut expliquer l'équation séculaire de la Lune. En réfléchissant sur la loi de l'attraction et sur la manière dont les géomètres l'avaient employée, j'observai qu'ils supposaient sa transmission d'un corps à l'autre instantanée. Je recherchai alors les effets qui pourraient naître d'une transmission successive : je trouvai qu'elle devait produire une équation séculaire dans le mouvement de la Lune et que, pour satisfaire aux observations, la propagation de la force attractive de la Terre devait être huit millions de fois plus prompte que celle de la lumière. Mais de nouvelles recherches sur cet important phénomène me conduisirent enfin à sa véritable cause.

En m'occupant de la théorie des satellites de Jupiter, je reconnus que la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de Jupiter devait produire des équations séculaires dans leurs mouvements moyens. Je m'empressai de transporter ce résultat à la Lune et je trouvai que la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe terrestre produit dans le moyen mouvement de la Lune l'équation séculaire déterminée par les astronomes. Je trouvai de plus que la même cause produit, dans les mouvements du nœud et du périgée de l'orbite de la Lune, des équations séculaires. Je communiquai ces recherches à l'Académie des Sciences le 19 novembre 1787; elles parurent en 1788 dans le Volume de cette Académie pour l'année 1786. Je les ai perfectionnées dans le Livre VII et j'ai trouvé que les termes qui dépendent du carré de la force perturbatrice, et qui doublent le mouvement du périgée lunaire déterminé par une première approximation, augmentent presque dans le même rapport l'équation séculaire de ce mouvement, en sorte que l'équation séculaire de l'anomalie moyenne est au moins quadruple de celle du moyen mouvement. Une équation aussi grande, et dont l'effet sur la longitude de la Lune apogée ou périgée est la moitié de l'effet de l'équation séculaire du moyen mouvement, doit être fort sensible dans les observations anciennes comparées à celles des Arabes et aux observations modernes. C'est ce que je reconnus facilement; je trouvai même que les équations séculaires, soit de la Lune, soit de son périgée, sont sensibles dans les moyens mouvements de la Lune et du périgée, conclus par Hipparque et Ptolémée des éclipses anciennes comparées avec elles-mêmes, en sorte que, si l'on ne connaissait pas d'ailleurs l'époque où ces astronomes ont vécu, on pourrait la retrouver, à un siècle ou deux près, par ces moyens mouvements. J'ai reconnu ainsi que les Tables de la Lune, rapportées de l'Inde par Legentil, loin de remonter, comme Bailly le pensait, à trois mille ans avant notre ère, sont moins anciennes que les Tables de Ptolémée.

M. Bouvard a comparé avec ma théorie toutes les observations anciennes et arabes et un grand nombre d'observations modernes. Ce travail utile, couronné en 1800 par l'Institut de France, ne laisse aucun doute sur l'existence des trois équations séculaires de la Lune et sur leur grandeur respective.

L'Académie royale des Sciences de Stockholm proposa en 1787, pour le sujet du prix qu'elle devait décerner en 1791, la cause des équations séculaires de la Lune, de Jupiter et de Saturne. Aucune pièce ne lui étant parvenue pour le concours, elle adjugea le prix à mes recherches qui, depuis trois ans, étaient publiées et qui lui parurent contenir la solution complète de la question proposée. Ce prix, décerné par une Société savante aussi célèbre, me flatta d'autant plus qu'il était inattendu.

La conformité de la théorie lunaire avec les observations établit plusieurs points importants du système du monde. On voit d'abord que la résistance des milieux éthérés et la transmission successive de la gravité n'ont point d'influence sensible sur les équations séculaires de la Lune, puisque l'attraction seule des corps célestes suffit pour représenter les observations. D'ailleurs, l'équation séculaire du périgée, bien constatée par les observations, suffit pour exclure l'une et l'autre de ces causes, puisqu'elles ne produisent aucun mouvement dans le périgée. C'est ainsi que les phénomènes, en se développant, nous dévoilent leurs véritables causes. Nous sommes donc certains que les milieux éthérés, depuis les observations les plus anciennes, n'ont point

sensiblement altéré les mouvements des planètes, car leur résistance serait beaucoup plus sensible sur le mouvement de la Lune, où nous venons de voir qu'elle est insensible.

Nous avons dit que, pour expliquer l'équation séculaire de la Lune au moyen de la transmission successive de la gravité, il fallait supposer la propagation de la force attractive huit millions de fois plus prompte que celle de la lumière. Ainsi, l'attraction des corps célestes représentant, au moins à très-peu près, l'équation séculaire observée, nous pouvons en conclure que la vitesse de la force attractive surpasse cinquante millions de fois la vitesse de la lumière; on peut donc la supposer infinie.

La constance de la durée du jour, élément essentiel de toutes les théories astronomiques, résulte encore des équations séculaires de la Lune. Si cette durée surpassait maintenant d'un centième de seconde centésimale celle du temps d'Hipparque, la durée du siècle actuel serait plus grande qu'alors de 365",25. Dans cet intervalle, la Lune décrit un arc de 534",6 centésimales. Le mouvement séculaire actuel de la Lune en paraîtrait donc augmenté de cette quantité, ce qui, en supposant que cet accroissement ait été, depuis Hipparque, proportionnel au temps, augmenterait de 13",51 centésimales son équation séculaire pour le premier siècle à partir du commencement de 1801, et dont la valeur résultant des attractions célestes est d'environ 32". Les observations ne permettent pas de supposer un accroissement aussi considérable. Il est donc certain que, depuis Hipparque, la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde. Si, par des causes quelconques inconnues, cette durée éprouvait quelque altération sensible, on le reconnaîtrait par le mouvement de la Lune, dont les observations, d'ailleurs si utiles, acquièrent, par cette considération, une nouvelle importance.

Le moyen mouvement du périgée lunaire, conclu de la théorie par une longue suite d'approximations, s'accorde tellement avec le mouvement observé, qu'à une distance même très-petite par rapport aux distances des planètes au Soleil la loi de l'attraction réciproque au carré des distances, si elle n'est pas rigoureuse, doit être au moins extrêmement approchée.

Ma théorie de la Lune, exposée dans le Livre VII, se rapproche plus des observations que celles qui l'avaient précédée. Elle renferme quelques inégalités nouvelles : telle est l'inégalité en latitude, dont l'argument est la longitude de la Lune. Cette inégalité et celle en longitude, dont l'argument est la longitude du nœud et que Mayer avait soupçonnée par les observations, dépendent de l'aplatissement de la Terre. Les comparaisons de leurs expressions analytiques avec un grand nombre d'observations s'accordent à donner l'aplatissement $\frac{1}{305}$, le même à fort peu près que les aplatissements qui résultent des mesures des degrés et du pendule; mais il a sur eux l'avantage d'être indépendant des attractions locales qui les modifient. En multipliant les observations lunaires propres à déterminer les inégalités dont il s'agit, on obtiendra l'aplatissement de la Terre avec une exactitude extrême.

Mayer avait déterminé la parallaxe solaire en comparant aux observations l'expression analytique de l'inégalité lunaire parallactique qui a pour facteur cette parallaxe. J'ai mis un soin particulier à déterminer cette expression; en la comparant aux observations, elle donne la valeur de la parallaxe solaire qui résulte des passages de Vénus sur le Soleil, observés en 1761 et 1769. Une conséquence importante de cet accord est que l'action du Soleil sur la Lune est à très peu près la même que son action sur la Terre, et que la différence, s'il y en a une, n'est pas la trois-millionième partie de cette action.

Newton chercha par l'expérience à reconnaître si la pesanteur terrestre imprime en temps égal la même vitesse à tous les corps placés au même lieu, quelle que soit leur nature. Pour cela, il mit successivement des corps de même poids et de diverse nature dans une même boîte fermée qui terminait un pendule, et il les y plaça de manière que le centre d'oscillation fût toujours le même. En faisant osciller le pendule, il observa la durée de ses oscillations et il trouva cette durée la même pour tous ces corps, ce qui lui fit voir que l'action de la

pesanteur donne à tous les corps une vitesse égale dans le même temps, ou du moins que la différence, s'il y en a une, est au-dessous d'un millième. Ces expériences de Newton ont été répétées par divers physiciens, et les nombreuses expériences faites pour déterminer la longueur du pendule à secondes ont établi, avec une grande précision, que cette durée est indépendante de la nature du corps oscillant. En appelant donc *masses égales* des masses qui, se choquant avec des vitesses égales et contraires, se feraient équilibre, deux corps de même poids, ou qui, placés aux extrémités de deux bras égaux d'un levier droit, se font équilibre, ont des masses égales, puisque la pesanteur tend à leur imprimer la même vitesse initiale.

En comparant le sinus verse de l'arc décrit par la Lune dans une seconde avec l'espace que la pesanteur fait décrire aux corps terrestres dans la première seconde de leur chute, Newton reconnut que la pesanteur à la surface de la Terre, diminuée en raison du carré de la distance, est la force qui retient la Lune dans son orbite. La parallaxe lunaire que j'ai conclue de ce principe s'accorde si bien avec la parallaxe observée, que l'on peut regarder comme nulle, ou du moins comme insensible, la modification de l'action de la Terre sur la Lune par la nature de la substance lunaire. On peut conclure également de cet accord que l'action de la Terre sur chaque molécule de la Lune n'est point altérée par l'interposition des couches lunaires, car il est facile de prouver qu'une légère altération de ce genre modifierait sensiblement le principe dont je viens de parler.

Newton étendit à l'attraction de tous les astres la propriété dont jouit l'attraction terrestre, d'imprimer à tous les corps placés à la même distance la même vitesse en temps égal. Il démontra que, relativement à l'attraction du Soleil sur les planètes, cette propriété résulte de la loi de Kepler suivant laquelle les carrés des temps des révolutions des planètes sont comme les cubes de leurs moyennes distances au Soleil. Il est facile, en effet, de voir que, si les actions du Soleil sur la Terre et sur Mars différaient d'un millième, le rayon vecteur des Tables de Mars en serait altéré d'un trois-millième, ce qui serait très-sensible dans les observations de cette planète en quadrature.

On verra dans la suite qu'une différence d'un millionième dans les actions du Soleil sur la Terre et sur la Lune changerait de plusieurs secondes la parallaxe du Soleil, conclue de la comparaison de l'inégalité parallactique lunaire observée avec sa valeur donnée par la théorie, et qui, comme je l'ai dit, s'accorde parfaitement avec les observations. Il est donc bien prouvé que l'attraction du Soleil imprimerait en temps égal la même vitesse à la Terre et à la Lune, placées à la même distance de cet astre. Cette attraction n'est donc point modifiée par la nature des substances qui composent la Terre et la Lune. Si, en pénétrant dans l'intérieur de ces corps, elle s'affaiblissait et s'éteignait comme la lumière en traversant l'atmosphère, cette extinction serait différente pour la Terre et pour la Lune, en vertu de la différence de leurs dimensions. Je trouve, par un calcul fort simple, qu'une très-petite extinction de l'attraction solaire produirait une différence sensible et inadmissible dans la valeur de l'inégalité parallactique. Ainsi l'interposition des corps n'altère point l'attraction d'une molécule sur une autre, ce qui confirme ce que nous venons de dire sur cet objet.

Enfin M. Bouvard, ayant formé des Tables très-exactes de Jupiter et de Saturne, fondées sur la théorie que j'ai donnée de ces planètes, et les ayant comparées à un très-grand nombre d'observations, a formé des équations de condition, dans lesquelles il a pris pour indéterminées les corrections des éléments elliptiques et des masses de Jupiter et de Saturne. Il en a conclu la masse de Jupiter, qu'il a retrouvée la même que Newton avait déterminée par les élongations des satellites de Jupiter, mesurées avec beaucoup de précision par Pound. Les grandes perturbations des mouvements de Saturne et de Jupiter prouvent donc que Jupiter agit sur Saturne comme sur ses propres satellites. Ainsi la propriété d'attirer également tous les corps placés à la même distance appartient à chaque partie de la matière. Les doutes qu'on a élevés sur cette propriété fondamentale de la loi d'at-

traction ne paraissent donc point fondés. Cette loi, que les géomètres ont essayé de modifier, soit par rapport à son décroissement quand la distance augmente, soit relativement à la propagation instantanée de la force attractive, soit enfin par rapport à la nature des corps, est telle que Newton l'a proposée, ou du moins les phénomènes n'y font reconnaître aucune modification sensible.

La théorie de la Lune nous donne encore, par ses deux inégalités dépendantes de l'aplatissement de la Terre, le moyen le plus précis d'avoir cet aplatissement. Ces inégalités, étant le résultat de la tendance du centre de la Lune vers chaque molécule du sphéroïde terrestre, prouvent que les tendances des centres des corps célestes les uns vers les autres sont les résultantes des attractions réciproques de toutes leurs molécules.

Désirant de voir toute l'Astronomie, fondée sur la seule loi de l'attraction, n'emprunter des observations que les données indispensables, j'obtins de l'Académie des Sciences qu'elle proposerait, pour le sujet du prix de Mathématiques qu'elle devait décerner en 1820, la formation, par la seule théorie, de Tables lunaires aussi exactes que celles qui ont été construites par le concours de la théorie et des observations. Je désirais encore que mes résultats sur les inégalités séculaires de la Lune fussent vérifiés et même perfectionnés par les géomètres. Ces vœux ont été remplis par les deux pièces que l'Académie a couronnées. L'une, de M. Damoiseau, était accompagnée de Tables lunaires qui, comparées à un grand nombre d'observations, les ont représentées aussi bien que les meilleures Tables employées par les astronomes. L'autre pièce, dont MM. Carlini et Plana sont les auteurs, est surtout remarquable par l'étendue et par la justesse de l'approximation avec laquelle ils ont déterminé les équations séculaires, et spécialement celle du périgée, qu'ils ont trouvée plus grande encore que suivant ma formule.

M. Bürg, en comparant les moyens mouvements de la Lune conclus des observations de Flamsteed, de Bradley et de Maskelyne, remarqua des différences qui lui parurent indiquer une inégalité à longue période. Il me fit part de cette remarque, d'après laquelle je reconnus que l'action solaire produit une inégalité proportionnelle au sinus de la longitude du périgée lunaire, plus deux fois celle du nœud, moins trois fois la longitude du périgée solaire, et dont la période est d'environ cent quatre-vingts ans. Son coefficient acquiert par l'intégration un très-petit diviseur, mais il a pour facteur le produit de l'excentricité de l'orbe lunaire par le carré du sinus de son inclinaison à l'écliptique, par le cube de l'excentricité de l'orbe solaire et par la parallaxe du Soleil; il paraît donc devoir être très-petit. Le grand nombre de termes dont il dépend rend sa détermination par la théorie presque impossible. M. Bürg, en adoptant cette inégalité dans ses Tables, détermina par les observations son coefficient, qu'il trouva d'environ 15 secondes sexagésimales. J'ai reconnu ensuite que l'ellipticité du sphéroïde terrestre produit une inégalité dont la période est à peu près la même que la précédente et qui est proportionnelle au cosinus de la longitude du périgée lunaire, plus deux fois celle du nœud, moins la longitude du périgée solaire. Mais le coefficient de cette inégalité paraît être aussi petit que celui de l'inégalité dont je viens de parler. Enfin, j'ai trouvé que, s'il existe une différence entre les deux hémisphères terrestres, elle doit produire une inégalité lunaire proportionnelle au cosinus de la longitude du périgée de la Lune, plus deux fois celle du nœud. J'avais indiqué cette inégalité à M. Burckhardt, qui l'a employée dans ses Tables, après avoir déterminé son coefficient par les observations; mais, en soumettant cette inégalité à l'analyse, j'ai vu qu'elle est insensible. Si les observations futures confirment cette anomalie du mouvement lunaire, il sera temps alors d'en rechercher la cause.

CHAPITRE II.

SUR LA THÉORIE LUNAIRE DE NEWTON.

2. Parmi les inégalités du mouvement de la Lune en longitude, Newton n'a développé que la *variation*. La méthode qu'il a suivie me paraît être une des choses les plus remarquables de l'Ouvrage des *Principes*. Je vais, en y appliquant l'Analyse, montrer son analogie avec les méthodes actuelles et faire voir qu'elle conduit aux équations différentielles du mouvement de la Lune, dont elle donne, dans le cas de la variation, les intégrales d'une manière indirecte, mais très-ingénieuse.

Newton considère d'abord l'aire décrite par le rayon vecteur de la Lune, et, pour simplifier le calcul, il fait abstraction de l'excentricité de l'orbe lunaire et de son inclinaison à l'écliptique. Il décompose l'action du Soleil sur la Lune en deux forces, l'une parallèle au rayon vecteur de la Lune, l'autre parallèle au rayon vecteur de la Terre. Newton observe que la première de ces forces ne produit aucun changement dans l'aire que le rayon vecteur de la Lune trace autour de la Terre. En retranchant ensuite de la seconde force l'action du Soleil sur la Terre, que l'on regarde ici comme immobile, il décompose la différence en deux forces, l'une dirigée suivant le rayon de l'orbe lunaire, l'autre perpendiculaire à ce rayon. Cette dernière force est la seule qui fasse varier l'aire décrite par le rayon vecteur de la Lune. Newton trouve pour son expression

$$3m^2 \sin(v'-v)\cos(v'-v),$$

m étant le rapport du moyen mouvement sidéral du Soleil à celui de la

Lune ou du mois sidéral à l'année sidérale; v' est la longitude du Soleil et v celle de la Lune. La force qui retient la Lune dans son orbite est prise pour unité de force, ainsi que le rayon moyen de l'orbite lunaire est pris pour unité de distance, ce qui donne la vitesse moyenne de la Lune égale à l'unité de vitesse, puisque, en vertu des théorèmes d'Huygens sur la force centrifuge, la force centrale de la Lune est égale au carré de sa vitesse divisé par le rayon de son orbite. En multipliant l'expression précédente par l'élément dt du temps, la somme de tous les produits, correspondante à un temps quelconque, sera l'accroissement de vitesse résultant de la force perpendiculaire au rayon. En le multipliant par $\frac{1}{2}dv$, on aura, aux quantités près de l'ordre du carré des forces perturbatrices, l'accroissement de l'aire décrite par le rayon vecteur de la Lune pendant l'instant dt. Newton détermine par un procédé particulier la somme des produits de dt par la force

$$3m^2 \sin(v' - v)\cos(v' - v).$$

Cette somme est à fort peu près l'intégrale de la différentielle

$$3m^2\, dv \sin(mv - v)\cos(mv - v),$$

en substituant mv pour v', ce que l'on peut faire quand on néglige l'excentricité de l'orbe terrestre, et en mettant dv pour dt, la vitesse moyenne $\frac{dv}{dt}$ étant prise pour unité. Cette intégrale, prise depuis la quadrature, où $v - mv$ est un angle droit, est

$$\frac{3m^2 \cos^2(v - mv)}{2(1 - m)}.$$

Cette expression, multipliée par $\frac{1}{2}dv$, donne l'accroissement de l'aire instantanée égal à

$$\frac{3m^2\, dv}{8(1 - m)} + \frac{3m^2\, dv \cos(2v - 2mv)}{8(1 - m)};$$

ainsi la variation de cette aire est

$$\frac{3m^2\, dv \cos(2v - 2mv)}{8(1 - m)}.$$

Cette variation est nulle dans les octants, où, par conséquent, l'aire instantanée a sa valeur moyenne; en prenant pour unité cette valeur, la valeur de l'aire instantanée sera, dans les autres points de l'orbite,

$$1 + \frac{3m^2}{4(1 - m)}\cos(2v - 2mv).$$

La valeur de l'aire instantanée est donc à sa valeur moyenne comme

$$\frac{4(1 - m)}{3m^2} + \cos(2v - 2mv) \quad \text{est à} \quad \frac{4(1 - m)}{3m^2},$$

et, à cause de m^2 égal à $\frac{1}{178,7}$, comme

$$220,46 + \cos(2v - 2mv) \quad \text{est à} \quad 220,46,$$

ce qui est le résultat de Newton.

Le carré de la vitesse de la Lune autour de la Terre est $\frac{r^2\, dv^2 + dr^2}{dt^2}$, en représentant par r son rayon vecteur. Mais si l'on fait, avec Newton, abstraction de l'excentricité de l'orbite, dr^2 devient de l'ordre du carré de la force perturbatrice et peut ainsi être négligé, en sorte que l'on peut supposer le carré de cette vitesse égal à $\frac{r^2\, dv^2}{dt^2}$. Mais l'aire décrite par le rayon vecteur pendant l'instant dt est $\frac{1}{2}r^2\, dv$. Le carré de cette aire divisé par dt^2 est $\frac{r^4\, dv^2}{4\, dt^2}$; il est donc le quart du carré de la vitesse, multiplié par r^2. Dans les syzygies et dans les quadratures, les carrés des aires instantanées sont, par ce qui précède, dans le rapport de

$$1 + \frac{3m^2}{2(1 - m)} \quad \text{à} \quad 1 - \frac{3m^2}{2(1 - m)};$$

en désignant donc par $1 - x$ le rayon vecteur r dans les syzygies et par $1 + x$ ce rayon vecteur dans les quadratures, les carrés des vitesses dans ces deux points seront, en négligeant le carré de x, dans le rapport de

$$1 + 2x + \frac{3m^2}{2(1 - m)} \quad \text{à} \quad 1 - 2x - \frac{3m^2}{2(1 - m)}.$$

Soient R et R' les rayons osculateurs de l'orbite lunaire dans ces deux points; les forces centrales seront, par les théorèmes d'Huygens sur la force centrifuge, dans le rapport de

$$\frac{1+2x+\dfrac{3m^2}{2(1-m)}}{R} \quad \text{à} \quad \frac{1-2x-\dfrac{3m^2}{2(1-m)}}{R'}.$$

Si l'on nomme k la somme des masses de la Terre et de la Lune, il est facile de voir que la force centrale, dans les syzygies, est

$$k(1+2x)-2m^2,$$

et qu'elle est, dans les quadratures,

$$k(1-2x)+m^2;$$

ces deux forces sont donc dans le rapport de

$$1+2x-\frac{2m^2}{k} \quad \text{à} \quad 1-2x+\frac{m^2}{k}.$$

k serait l'unité, sans la force perturbatrice, puisqu'il serait alors égal au carré de la vitesse, divisé par le rayon; k ne diffère donc de l'unité que de quantités de l'ordre m^2; ainsi, sans rechercher cette différence, nous pouvons, en négligeant le carré de la force perturbatrice, supposer les deux forces précédentes dans le rapport de

$$1+2x-2m^2 \quad \text{à} \quad 1-2x+m^2.$$

En égalant le rapport de ces forces à celui que nous avons donné ci-dessus, on aura

$$\frac{R'}{R}=1-3m^2\left(1+\frac{1}{1-m}\right).$$

Pour déterminer x, Newton considère l'orbe lunaire comme une ellipse dont la Terre occupe le centre et qui se meut d'un mouvement angulaire égal au mouvement apparent du Soleil, en sorte que son périgée soit constamment au-dessous de cet astre. Dans une pareille ellipse, si l'on prend, avec Newton, pour unité de distance le rayon vecteur dans les octants, ce rayon, dans un point quelconque de l'orbite, sera

$$1-x\cos 2(v-mv).$$

Newton en conclut que la courbure $\frac{1}{R}$, dans les syzygies, est à la courbure $\frac{1}{R}$, dans les quadratures, dans le rapport de

$$1-3x+(1+x)\frac{1-(1-m)^2}{(1-m)^2} \quad \text{à} \quad 1+3x+(1-x)\frac{1-(1-m)^2}{(1-m)^2},$$

ce qui donne

$$\frac{R'}{R}=1-2x[4(1-m)^2-1].$$

En égalant cette valeur de $\frac{R'}{R}$ à la précédente, on a

$$x=\frac{\dfrac{3m^2}{2}\left(1+\dfrac{1}{1-m}\right)}{4(1-m)^2-1}.$$

Cette expression de x, réduite en nombres, donne $\frac{69}{70}$ pour le rapport du petit axe au grand axe de l'ellipse supposée par Newton.

La valeur de x peut être conclue de la seule considération des syzygies. En effet, le carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure est dans les syzygies, par ce qui précède,

$$\frac{1+2x+\dfrac{3m^2}{2(1-m)}}{R}.$$

En l'égalant à la force centrale dans ces points, et qui, comme on l'a vu, est

$$k(1+2x)-2m^2,$$

on aura

$$\frac{1}{R}=k\left[1-\frac{3m^2}{2(1-m)}\right]-2m^2.$$

On trouve, suivant le procédé de Newton, pour déterminer la courbure de l'orbite dans les syzygies,

$$\frac{1}{R}=1-x[4(1-m)^2-1].$$

Pour déterminer k, on doit observer que Newton a pris pour unité le rayon vecteur de l'orbite dans les octants. Or, on trouve facilement qu'alors, dans ces points, le rayon de courbure et le carré de la vitesse sont égaux à l'unité, et que la force centrale, dirigée vers le centre de courbure, est $k - \frac{1}{2}m^2$; on a donc, par les théorèmes d'Huygens,

$$k - \frac{1}{2}m^2 = 1,$$

ce qui donne

$$k = 1 + \frac{1}{2}m^2.$$

La première expression de $\frac{1}{R}$ devient ainsi

$$\frac{1}{R} = 1 - \frac{3}{2}m^2\left(1 + \frac{1}{1-m}\right);$$

en l'égalant à la seconde, on a, comme ci-dessus,

$$x = \frac{\frac{3}{2}m^2\left(1 + \frac{1}{1-m}\right)}{4(1-m)^2 - 1}.$$

Dans ce procédé, il faut déterminer k, ce que l'on évite en considérant à la fois les syzygies et les quadratures.

Pour conclure de ces résultats l'inégalité de la variation, Newton observe que, dans une ellipse immobile où les aires tracées par le rayon vecteur partant du centre seraient proportionnelles aux temps, la tangente du mouvement vrai compté de l'extrémité du grand axe serait à la tangente du mouvement moyen comme le petit axe est au grand axe ou comme $1 - x$ est à $1 + x$. Ensuite, pour avoir égard à l'accroissement de l'aire depuis la quadrature jusqu'à la syzygie, Newton multiplie la tangente du mouvement vrai par le rapport de la racine carrée de l'aire instantanée dans la quadrature à la racine carrée de l'aire instantanée dans la syzygie, rapport qui, par ce qui précède, est $1 - \frac{3m^2}{4(1-m)}$. Ainsi la tangente du mouvement vrai est à très-peu près égale au produit de la tangente du mouvement moyen

par $1 - 2x - \frac{3m^2}{4(1-m)}$. Dans les octants, où le mouvement vrai est, en degrés sexagésimaux, égal à 45°, Newton trouve, en substituant pour x et pour m les valeurs qu'il a déterminées, le mouvement vrai de la Lune égal à 44°27′28″; en le soustrayant de 45°, la différence 32′32″ est la valeur du coefficient de l'inégalité de la variation. Mais Newton observe que, en vertu du mouvement apparent du Soleil, le mouvement lunaire de la quadrature à la syzygie, au lieu d'être 90°, est agrandi dans le rapport de la durée du mois synodique à la durée du mois sidéral, ce qui revient à diviser 90° par $1 - m$. Il en conclut que tous les angles autour de la Terre, et par conséquent l'inégalité de la variation, doivent être augmentés dans le même rapport, ce qui porte cette inégalité à 35′10″.

Pour avoir l'expression analytique de l'inégalité de la variation qui résulte du procédé de Newton, nommons δv cette inégalité. Nous aurons

$$\operatorname{tang}(v + \delta v) = \left[1 - 2x - \frac{3m^2}{4(1-m)}\right]\operatorname{tang} v,$$

v étant le moyen mouvement de la Lune compté de la quadrature. Cela donne, en négligeant le carré de δv,

$$\frac{\delta v}{\cos^2 v} = -\left[2x + \frac{3m^2}{4(1-m)}\right]\frac{\sin v}{\cos v}$$

ou

$$\delta v = -\frac{1}{2}\left[2x + \frac{3m^2}{4(1-m)}\right]\sin 2v.$$

Il faut, suivant Newton, substituer dans cette expression $v - mv$ au lieu de v et la diviser par $1 - m$, ce qui donne

$$\delta v = -\frac{\left[2x + \frac{3m^2}{4(1-m)}\right]\sin(2v - 2mv)}{2(1-m)}.$$

Si l'on fait partir l'angle $v - mv$ de la syzygie, il faut l'augmenter de 90°, ce qui revient à changer le signe de $\sin(2v - 2mv)$.

On peut obtenir cette expression plus simplement, de la manière suivante. On a, par ce qui précède,

$$r^2 d(v+\delta v) = dv\left[1+\frac{3m^2\cos(2v-2mv)}{4(1-m)}\right].$$

Substituant pour r sa valeur $1 - x\cos 2(v - mv)$, on aura

$$d\,\delta v = \left[2x + \frac{3m^2}{4(1-m)}\right]\cos(2v-2mv)\,dv,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\delta v = \frac{2x+\frac{3m^2}{4(1-m)}}{2(1-m)}\sin(2v-2mv);$$

ici l'angle $v - mv$ est compté de la syzygie.

Généralisons maintenant la méthode de Newton. Pour cela reprenons l'expression de Q du n° 1 du Livre VII. Cette expression donne $\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial v}$ pour la force qui anime la Lune, décomposée perpendiculairement au rayon r, et $-\frac{\partial Q}{\partial r}$ pour cette force décomposée suivant ce rayon et dirigée vers la Terre. La force $\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial v}$, multipliée par l'instant dt, donne l'accroissement de vitesse pendant l'instant dt perpendiculairement au rayon ; cet accroissement, multiplié par dt et par $\frac{1}{2}r$, donne $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial v}dt$ pour l'accroissement de l'aire instantanée $\frac{1}{2}r^2dv$, dt étant supposé constant ; on a donc

$$\frac{d.r^2dv}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial v}\,dt.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $\frac{r^2dv}{dt}$ et intégrant, on aura

$$(r^2dv)^2 = h^2dt^2\left(1+\frac{2}{h^2}\int\frac{\partial Q}{\partial v}r^2dv\right),$$

h étant une constante arbitraire, d'où l'on tire, en faisant $\frac{1}{r} = u$,

$$dt = \frac{dv}{hu^2\sqrt{1+\frac{2}{h^2}\int\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{dv}{u^2}}},$$

ce qui est la première des équations (L) du n° 1 du Livre VII.

Si l'on nomme ds l'élément de la courbe décrite par la Lune, $\frac{ds^2}{dt^2}$ sera le carré de sa vitesse ; en substituant pour dt sa valeur précédente, on aura, pour ce carré,

$$h^2u^4\frac{ds^2}{dv^2}\left(1+\frac{2}{h^2}\int\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{dv}{u^2}\right).$$

Soit R le rayon osculateur de l'orbite ; les formules connues du rayon de courbure donnent, en supposant dv constant,

$$\frac{1}{R} = dv^3\,\frac{\frac{d^2u}{dv^2}+u}{u^3ds^3};$$

ainsi le carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure est

$$u\frac{dv}{ds}h^2\left(\frac{d^2u}{dv^2}+u\right)\left(1+\frac{2}{h^2}\int\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{dv}{u^2}\right).$$

Il faut, par les théorèmes d'Huygens, égaler cette expression à la force lunaire décomposée suivant le rayon de courbure et dirigée vers le centre de courbure. On a vu que la force lunaire se décompose en deux, l'une dirigée vers la Terre et égale à $-\frac{\partial Q}{\partial r}$, l'autre perpendiculaire à r et égale à $\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial v}$. Si l'on décompose la force $-\frac{\partial Q}{\partial r}$ en deux, l'une parallèle à l'élément de la courbe et l'autre dirigée vers le centre de courbure, on aura pour celle-ci $-\frac{\partial Q}{\partial r}\frac{r\,dv}{ds}$ ou $u\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{dv}{ds}$. Pareillement la force $\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial v}$, décomposée suivant le rayon de courbure, sera $-\frac{du}{u\,ds}\frac{\partial Q}{\partial v}$. En réunissant ces deux forces dirigées vers le centre de courbure, on aura, pour la force lunaire dirigée vers ce point,

$$u\frac{dv}{ds}\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{du}{u\,ds}\frac{\partial Q}{\partial v};$$

en l'égalant au carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure, on aura

$$0 = \left(\frac{d^2u}{dv^2}+u\right)\left(1+\frac{2}{h^2}\int\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{dv}{u^2}\right) - \frac{1}{h^2}\frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{du}{h^2u^2dv}\frac{\partial Q}{\partial v},$$

équation qui coïncide avec la seconde des équations (L) du n° 1 du Livre VII, lorsqu'on néglige l'inclinaison de l'orbite lunaire.

3. Newton considère ensuite le mouvement des nœuds de l'orbe lunaire et la variation de son inclinaison à l'écliptique. Après avoir décomposé l'action du Soleil sur la Lune en deux, l'une dirigée suivant le rayon de l'orbe lunaire, l'autre parallèle au rayon mené du Soleil à la Terre, il retranche de celle-ci l'action du Soleil sur la Terre et il observe que leur différence est la seule force qui puisse altérer la position du plan de l'orbite lunaire, comme n'étant pas dans ce plan. Pour déterminer la variation des nœuds qui en résulte, Newton fait passer un plan par l'élément de l'arc que la Lune décrit dans un instant et par le rayon lunaire de la dernière extrémité de cet élément. Ce plan sera celui de l'orbite pendant cet instant; dans l'instant suivant, la différence des forces dont nous venons de parler fera dévier la Lune de ce plan. Si par l'extrémité du rayon lunaire on mène une petite droite pour représenter cette différence, en la composant avec la vitesse de la Lune dans le premier instant, on aura la direction de cette vitesse dans le second instant, et, faisant passer un plan par le rayon lunaire et par cette direction, on aura le nouveau plan de l'orbite. Newton détermine ensuite la différence de position des nœuds de ces deux plans, et il trouve que le mouvement horaire du nœud ascendant est égal à

$$-3m^2 v_1 \sin(v - \mathrm{N}) \sin(mv - \mathrm{N}) \cos(v - mv),$$

N étant la longitude du nœud et v_1 étant le mouvement horaire de la Lune. En désignant donc par N_1 le mouvement horaire du nœud, on a

$$\mathrm{N}_1 = -3m^2 v_1 \sin(v - \mathrm{N}) \sin(mv - \mathrm{N}) \cos(v - mv).$$

Dans l'état actuel de l'Analyse, on réduit le produit de ces sinus et cosinus en cosinus simples, ce qui donne

$$\mathrm{N}_1 = -\frac{3}{4} m^2 v_1 [1 + \cos(2v - 2mv) - \cos(2v - 2\mathrm{N}) - \cos(2mv - 2\mathrm{N})].$$

En changeant ensuite N_1 et v_1 en $d\mathrm{N}$ et dv, et désignant $-\frac{3}{4} m^2 v$ par iv, on aura à très-peu près, en intégrant,

$$\mathrm{N} = -\frac{3}{4} m^2 v - \frac{3m^2}{8(1 - m)} \sin(2v - 2mv)$$
$$+ \frac{3m^2}{8(1 - i)} \sin(2v - 2\mathrm{N}) + \frac{3m^2}{8(m - i)} \sin(2mv - 2\mathrm{N}).$$

Ce procédé n'était point au-dessus de l'Analyse connue de Newton; et s'il en eût fait usage, il aurait eu fort simplement l'inégalité annuelle du mouvement du nœud, que son petit diviseur rend très-sensible, et qui, par ce qui précède, est

$$\frac{3m^2}{8(m - i)} \sin(2mv - 2\mathrm{N}).$$

En substituant pour N sa valeur précédente dans l'expression de $d\mathrm{N}$, on aura le terme non périodique

$$\frac{3}{4} m^2 dv \frac{3m^2}{8(m - i)},$$

en sorte que le moyen mouvement du nœud sera

$$-\frac{3}{4} m^2 v \left[1 - \frac{3m^2}{8(m - i)}\right],$$

expression exacte aux quantités près de l'ordre m^4.

Newton, au lieu de décomposer l'expression du mouvement horaire en cosinus simples pour ne considérer que l'inégalité indépendante du mouvement de la Lune, emploie un procédé qui revient au même. Il observe que, dans le cours de chaque mois, le mouvement du nœud s'accélère et retarde, et que de là résulte un mouvement horaire médiocre qu'il trouve égal à

$$-\frac{3}{2} m^2 v_1 \sin^2(mv - \mathrm{N}),$$

ce qui donne

$$N_1 = -\frac{3}{4} m^2 v_1 [1 - \cos(2mv - 2N)],$$

N_1 étant ici le mouvement horaire médiocre. Cette expression de N_1 revient à négliger dans la précédente les termes dont la période est d'environ un mois. Newton néglige, en effet, les inégalités de ce genre, parce qu'elles disparaissent de l'expression de la latitude, en se combinant avec les inégalités semblables de l'inclinaison de l'orbite lunaire. En changeant N_1 et v_1 en dN et dv, on a

$$dN = -\frac{3}{2} m^2\, dv \sin^2(mv - N).$$

Supposons

$$mv - N = \varphi,$$

on aura

$$m\, dv = d\varphi + dN;$$

on aura donc

$$dN = -\frac{\frac{3}{2} m\, d\varphi \sin^2\varphi}{1 + \frac{3}{2} m \sin^2\varphi} = -\frac{3}{2} m\, d\varphi \sin^2\varphi + \frac{\frac{3}{2} m\, d\varphi \sin^4\varphi}{\frac{2}{3m} + \sin^2\varphi}.$$

En intégrant cette valeur de dN depuis φ nul jusqu'à φ égal à la circonférence 2π, on aura le mouvement moyen du nœud dans l'intervalle de deux retours consécutifs du Soleil au même nœud. L'intégrale de $-\frac{3}{2} m\, d\varphi \sin^2\varphi$ est $-\frac{3}{4} m . 2\pi$. Newton a déterminé l'intégrale de

$$\frac{\frac{3}{2} m\, d\varphi \sin^4\varphi}{\frac{2}{3m} + \sin^2\varphi}$$

par la méthode des suites, qui donne pour cette intégrale

$$\frac{27}{32} m^2 \left(1 - \frac{5m}{4}\right) \cdot 2\pi.$$

On a ainsi, pour le mouvement moyen du nœud dans l'intervalle de

deux retours consécutifs du Soleil au même nœud,

$$-\frac{3m}{4} \cdot 2\pi \left(1 - \frac{9m}{8} + \frac{45m^2}{32}\right).$$

En exprimant cette quantité par $-2F\pi$, il faut, suivant Newton, pour avoir le mouvement sidéral du nœud, la multiplier par $\frac{1}{1-F}$, ce qui donne, pour le moyen mouvement du nœud,

$$-\frac{3}{4} m^2 v \left(1 - \frac{3m}{8} + \frac{9m^2}{32}\right).$$

Newton ajoute à cette expression les termes de l'ordre m^4 qui résultent de ce que, en vertu de l'argument de la variation, le rayon vecteur de la Lune n'est pas constant et son mouvement n'est pas uniforme. Il trouve qu'il en résulte, dans le mouvement du nœud, la quantité

$$\frac{3}{4} m^2 v \left(2x + \frac{3}{4} m^2\right),$$

x désignant ce que nous lui avons fait désigner dans le numéro précédent, ce qui donne le mouvement du nœud, suivant Newton, égal à

$$-\frac{3}{4} m^2 v \left(1 - \frac{3m}{8} - 2x - \frac{15m^2}{32}\right).$$

L'expression de ce mouvement, donnée dans le n° **13** du Livre VII, et qui a été vérifiée par divers géomètres, est, aux quantités près de l'ordre m^5,

$$-\frac{3}{4} m^2 v \left(1 - \frac{3m}{8} - \frac{27}{32} m^2 - 2x\right);$$

la différence de ces deux expressions est très-petite.

Pour avoir l'inégalité du mouvement du nœud, Newton fait usage de l'expression précédente dN, qui, en l'intégrant et négligeant les quantités de l'ordre m^3, donne

$$N = -\frac{3}{4} m\varphi \left(1 - \frac{9}{8} m\right) + \frac{3}{8} m \left(1 - \frac{3m}{2}\right) \sin 2\varphi + \frac{9m^2}{128} \sin 4\varphi.$$

L'inégalité dépendante de $\sin 4\varphi$ est insensible; celle qui dépend de $\sin 2\varphi$ ou de $\sin(2mv - 2N)$ a été reconnue par Tycho. En réduisant en nombres son coefficient, on a celui que Tycho a déduit de ses observations.

Newton détermine ensuite la variation horaire de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, et il la trouve égale à

$$-3m^2\gamma v_1 \cos(v - N)\sin(mv - N)\cos(v - mv),$$

γ étant l'inclinaison de l'orbite. En changeant le mouvement horaire v_1 de la Lune en dv, en réduisant en sinus simples le produit des cosinus et du sinus, et en intégrant, on a, pour la variation de l'inclinaison, cette expression fort approchée

$$-\frac{3m^2\gamma\cos(2v - 2mv)}{8(i - m)} + \frac{3m^2\gamma\cos(2v - 2N)}{8(1 - i)} + \frac{3m^2\gamma\cos(2mv - 2N)}{8(m - i)},$$

γ étant l'inclinaison moyenne de l'orbite. Newton ne considère, comme il l'a fait pour le mouvement du nœud, que la partie de cette expression qui n'est relative qu'à la distance du Soleil au nœud; il trouve le mouvement horaire de l'inclinaison, relatif à cette partie, égal à

$$\frac{3m^2}{2} v_1 \gamma \sin(mv - N)\cos(mv - N),$$

d'où il conclut la principale inégalité de l'inclinaison.

Il observe que les deux autres inégalités, dont la période est d'un mois à peu près, en se combinant avec les deux inégalités correspondantes du mouvement du nœud, ne produisent aucune inégalité sensible dans la latitude. En effet, si l'on nomme δN et $\delta\gamma$ les variations du nœud et de l'inclinaison, la variation de la latitude sera

$$\delta\gamma \sin(v - N) - \gamma\,\delta N \cos(v - N).$$

En substituant pour $\delta\gamma$ et δN leurs termes périodiques trouvés ci-dessus, cette fonction devient

$$\frac{-3m^2\gamma}{8(1 - i)}\sin(v - N) + \frac{3m^2\gamma}{8}\left(\frac{1}{m - i} + \frac{1}{1 - m}\right)\sin(v - 2mv + N).$$

Le premier de ces termes se confond avec la première équation de latitude; le second forme la seconde équation de la latitude, dont le coefficient est augmenté d'une quantité de l'ordre m^2, par la considération des inégalités de l'inclinaison et du mouvement du nœud dont la période est d'un mois à peu près.

CHAPITRE III.

DES INÉGALITÉS LUNAIRES A LONGUES PÉRIODES, DÉPENDANTES DE LA FIGURE NON SPHÉRIQUE DE LA TERRE.

De l'inégalité lunaire à longue période, dépendante de la différence des deux hémisphères terrestres.

4. Cette inégalité a pour argument la longitude du périgée lunaire, plus deux fois la longitude du nœud; sa période est d'environ cent quatre-vingts ans. Pour la déterminer, je vais reprendre la formule (T) du n° 46 du Livre II, en lui donnant cette forme

$$(\mathrm{T}) \qquad d\,\delta v = \frac{2\,d^2(r\,\delta r) - d(dr\,\delta r) + dt^2\left(3\int \delta\,d\mathrm{R} + 2\,\delta.r\,\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\,\delta r\right)}{r^2\,dv},$$

l'angle v étant rapporté à l'orbite lunaire. Je supposerai ici que la caractéristique δ se rapporte à la différence des deux hémisphères terrestres.

On peut supposer dans cette formule $r^2 dv$ proportionnel à l'élément dt du temps. Cette proportionnalité a lieu dans la théorie de la Lune, en ayant même égard aux termes de l'ordre m dans les expressions de r et de dv, m exprimant, comme ci-dessus, le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune. Ces termes, que l'intégration a réduits à l'ordre m, ont des arguments qui ne diffèrent de v que de quantités de l'ordre m : tel est spécialement celui qui représente l'évection. Ils peuvent être considérés comme autant d'équations du centre, en sorte que, si l'on désigne par $mk\cos q$ le terme de

l'expression de r, le terme correspondant de l'expression de dv sera, aux quantités près de l'ordre m^2, égal à $-2mk\cos q$; ainsi, en négligeant les quantités de cet ordre, k disparait de l'expression de $r^2 dv$. Ces termes ne troublent donc point sensiblement la proportionnalité des aires aux temps. En prenant ainsi pour unité de distance la moyenne distance de la Lune à la Terre et pour mesure du temps t le moyen mouvement de la Lune, nous pourrons supposer $r^2 dv$ égal à dt. Par le n° 1 du *Supplément au Traité de Mécanique céleste*, δR peut être supposé nul relativement aux inégalités à longue période, et, par rapport à ces inégalités, on peut évidemment négliger le terme $2\,d^2(r\,\delta r)$. L'équation (T) devient ainsi

$$(a) \qquad d.\delta v = -\frac{d(dr\,\delta r)}{dt} + dt\left(2\,\delta.r\,\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\,\delta r\right).$$

Il faut maintenant déterminer la valeur de R. Si l'on nomme V la somme de toutes les molécules de la Terre divisées par leurs distances à son centre, on aura, par le n° 14 du Livre III, une expression pour V de cette forme

$$\frac{\mathrm{T}}{r} + \mathrm{H}^{(1)}\frac{\mathrm{D}}{r^2}\mathrm{U}^{(1)} + \mathrm{H}^{(2)}\frac{\mathrm{D}^2}{r^3}\mathrm{U}^{(2)} + \mathrm{H}^{(3)}\frac{\mathrm{D}^3}{r^4}\mathrm{U}^{(3)} + \ldots,$$

T étant la masse du sphéroïde terrestre, D son rayon moyen et $\mathrm{U}^{(i)}$ étant une fonction rationnelle et entière de μ et de ϖ, telle que l'on ait

$$0 = \frac{\partial.(1-\mu^2)\dfrac{\partial \mathrm{U}^{(i)}}{\partial \mu}}{\partial \mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}^{(i)}}{\partial \varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)\mathrm{U}^{(i)},$$

μ étant le sinus de la déclinaison de la Lune et ϖ étant la distance angulaire de son méridien à un méridien déterminé. En négligeant, comme on peut le faire ici, les sinus et cosinus d'angles dépendants de cette distance, on aura

$$\mathrm{U}^{(3)} = \mu^3 - \frac{3}{5}\mu.$$

Le terme divisé par r^4 dans l'expression de V dépend de la différence des deux hémisphères terrestres. Il prend, par le n° 46 du Livre II, un signe contraire dans l'expression de R, où il devient

$$-\mathrm{H}^{(3)}\frac{\mathrm{D}^3}{r^4}\left(\mu^3-\frac{3}{5}\mu\right).$$

En désignant par s la tangente de la latitude de la Lune, par $f\upsilon$ sa longitude vraie rapportée à l'écliptique et comptée de l'équinoxe mobile du printemps, et par λ l'obliquité de l'écliptique, on a

$$\mu=\frac{\sin\lambda\sin f\upsilon+s\cos\lambda}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui produit dans la fonction $\mu^3-\frac{3}{5}\mu$ le terme

$$\frac{-\sin^3\lambda\sin 3f\upsilon}{4(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

C'est le seul terme de cette fonction auquel nous devions avoir égard ici. En faisant donc

$$k=\frac{\mathrm{H}^{(3)}\mathrm{D}^3\sin^3\lambda}{4},$$

on aura, dans l'expression de R, le terme

$$\frac{k\sin 3f\upsilon}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}r^4}.$$

On peut observer ici que f est extrêmement près de l'unité et qu'il n'en diffère qu'à raison de la précession des équinoxes dont le mouvement est très-lent par rapport à υ.

Pour avoir l'expression de R, il faut y ajouter ce qui dépend de l'action du Soleil, et l'on verra facilement, en rapprochant l'expression de R du n° 46 du Livre II de l'expression Q des n^os 1 et 3 du Livre VII, que cette partie de R est la fonction

$$-\frac{m^2}{4}r^2[1-3s^2+3(1-s^2)\cos(2\upsilon-2m\upsilon)],$$

les angles υ et $m\upsilon$ étant ici rapportés à l'écliptique. En la désignant par $r^2\mathrm{Q}'$, la partie de R que nous devons considérer dans la question présente sera

$$r^2\mathrm{Q}'+\frac{k\sin 3f\upsilon}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}r^4}.$$

On aura ainsi

$$2r\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r}=4r^2\mathrm{Q}'-\frac{8k\sin 3f\upsilon}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}r^4}.$$

La caractéristique ne portant ici que sur les termes multipliés par k, si l'on néglige le carré de k, on aura

$$2\delta.r\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r}=4\delta.r^2\mathrm{Q}'-\frac{8k\sin 3f\upsilon}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}r^4}.$$

Mais, en n'ayant égard qu'aux inégalités à longues périodes, on peut, comme on l'a dit, supposer $\delta\mathrm{R}$ nul, ce qui donne

$$\delta.r^2\mathrm{Q}'=-\frac{k\sin 3f\upsilon}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}r^4};$$

on a donc

$$2\delta.r\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r}=-\frac{12k\sin 3f\upsilon}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}r^4};$$

la formule précédente (a) devient ainsi

$$d.\delta\upsilon=-\frac{d(dr\,\delta r)}{dt}-dt\left[\frac{12k\sin 3f\upsilon}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}r^4}+2\mathrm{Q}'r\,\delta r\right].$$

Il faut maintenant déterminer $r\,\delta r$. Pour cela, je reprends les équations (L) du n° 1 du Livre VII. En adoptant les dénominations du même Livre, la différence des deux hémisphères terrestres ajoute à la valeur de Q du numéro cité le terme

$$-\frac{ku^4\sin 3f\upsilon}{(1+s^2)^{\frac{7}{2}}},$$

r étant égal à $\frac{\sqrt{1+s^2}}{u}$. Ne considérons ici que cette partie de Q; on aura

$$\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{dv}{u^2} = -\frac{3ku^2\cos 3fv}{(1+s^2)^{\frac{7}{2}}}dv.$$

On a, par le n° **4** du Livre VII,

$$u = \frac{1}{h^2(1+\gamma^2)}\left[\sqrt{1+s^2} + e\cos(cv-\varpi)\right],$$

$$s = \gamma\sin(gv-\theta);$$

négligeant donc les termes qui doivent rester insensibles après les intégrations, on aura

$$2\int\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2} = -\frac{2k}{h^6}\left[\begin{array}{l}\sin 3fv + \frac{15\gamma^2}{8}\frac{\sin(3fv-2gv+2\theta)}{3f-2g}\\ \quad + \frac{9}{4}\frac{e\gamma^2\sin(3fv-2gv-cv+2\theta+\varpi)}{3f-2g-c}\end{array}\right].$$

En substituant pour u sa valeur approchée

$$\frac{1}{h^2(1+\gamma^2)}\left[1+\frac{1}{4}\gamma^2-\frac{1}{4}\gamma^2\cos(2gv-2\theta)\right],$$

le terme

$$\left(\frac{\partial^2u}{\partial v^2}+u\right).2\int\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}$$

de la seconde des équations (L) du n° **1** donnera ceux-ci :

$$-\frac{k}{h^8}\left[\frac{9}{2}\gamma^2\sin(3fv-2gv+2\theta)+\frac{9}{2}e\gamma^2\sin(3fv-2gv-cv+2\theta+\varpi)\right];$$

on trouve de plus

$$\frac{du}{h^2u^2\,dv}\frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{3k\gamma^2}{4h^8}\sin(3fv-2gv+2\theta),$$

$$-\frac{1}{h^2}\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{s}{h^2u}\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{15k\gamma^2}{4h^8}\sin(3fv-2gv+2\theta).$$

Tous ces termes réunis produisent, dans le second membre de la se-

conde des équations (L) citées, le terme

$$-\frac{9}{2h^8}\frac{ke\gamma^2\sin(3fv-2gv-cv+2\theta-\varpi)}{3f-2g-c}.$$

Il faut ajouter à ce membre le terme qui résulte de la variation de u relative à l'angle $3fv-2gv$, dans le développement de la force perturbatrice. Représentons cette variation par

$$\frac{1}{h^2(1+\gamma^2)}lk\sin(3fv-2gv+2\theta),$$

en sorte que la valeur précédente de u devienne

$$u = \frac{1}{h^2(1+\gamma^2)}\left[\sqrt{1+s^2}+e\cos(cv-\varpi)+lk\cos\left(3fv-2gv+2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. L'angle $3fv-2gv$ étant très-peu différent de cv, on peut considérer le terme

$$lk\cos\left(3fv-2gv+2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

comme étant relatif à une seconde équation du centre; ainsi, de même que le terme $e\cos(cv-\varpi)$ a produit, dans le second membre de l'équation (L′) du n° 9 du Livre VII, le terme

$$-(1-c^2)e\cos(cv-\omega),$$

le terme

$$lk\cos\left(3fv-2gv+2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

y produira le terme

$$-(1-c'^2)lk\cos\left(3fv-2gv+2\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

c' étant extrêmement peu différent de c. Il lui serait même égal, si l'on faisait abstraction de la puissance $[e\cos(cv-\omega)]^3$, qui provient du facteur $\frac{1}{u^3}$ qui multiplie l'action perturbatrice du Soleil dans le mouvement lunaire; car, en négligeant le carré de k et ses puissances supérieures et ne considérant que les termes multipliés par

$$e \cos(cv - \omega)$$

et par

$$lk \cos\left(3fv - 2gv + 2\theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

on a

$$\frac{1}{u^3} = h^6(1+\gamma^2)^3 \begin{bmatrix} -3e\left(1 + \frac{5}{2}e^2\right)\cos(cv - \varpi) \\ -3lk\cos\left(3fv - 2gv + 2\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

De là il est facile de conclure que l'on a, à très-peu près,

$$1 - c'^2 = (1 - c^2)\left(1 - \frac{5}{2}e^2\right).$$

Il faut donc ajouter, au second membre de l'équation (L′) du n° 9 du Livre VII, le terme

$$-(1 - c^2)\left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) lk \sin(3fv - 2gv + 2\theta).$$

Le terme

$$-\frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

que donne par son développement le second membre de la seconde des équations (L) du n° 1 du Livre VII, produit, dans le second membre de l'équation (L′) du même Livre, le terme $\frac{3s\,\delta s}{h^2}$, δs étant la variation de s, dépendante de k. La partie sensible de cette variation dépend de l'angle

$$3fv - gv - cv + \theta + \varpi,$$

parce que,

$$3fv - gv - cv$$

différant très-peu de gv, les termes relatifs à cet angle acquièrent un très-petit diviseur. Il faut, par la même raison, avoir égard aux termes de δs dépendants de l'angle $3fv - gv + \theta$. Ces termes produisent dans $\frac{3s\,\delta s}{h^2}$ des termes dépendants de l'angle $3fv - 2gv + 2\theta$ et qui ac-

quièrent, par l'intégration de l'équation (L′) du n° 9 du Livre VII, un très-petit diviseur.

Cela posé, en n'ayant égard qu'à la partie de Q dépendante de k, on a

$$\frac{1}{h^2u^2}\frac{ds}{dv}\frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{s}{h^2u}\frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{1+s^2}{h^2u^2}\frac{\partial Q}{\partial s}$$
$$= -\frac{3k}{h^6}\gamma e \cos(3fv - gv - cv + \theta + \varpi) - \frac{3k}{h^6}\gamma\cos(3fv - gv + \theta).$$

Il faut donc ajouter ces deux derniers termes au second membre de la troisième des équations (L) du n° 1 du Livre VII. Il faut ajouter encore à ce membre le terme qui résulte de la variation de s relative à l'angle $3fv - gv - cv$ dans le développement de la force perturbatrice. Représentons cette variation par

$$ik \cos(3fv - gv - cv + \theta + \varpi).$$

$3fv - gv - cv$ différant très-peu de gv, on peut considérer

$$ik \sin\left(3fv - gv - cv + \theta + \varpi - \frac{\pi}{2}\right)$$

comme appartenant à une seconde inclinaison de l'orbite. Ainsi, de même que le terme $\gamma \sin(gv - \theta)$ a produit dans l'équation (L″) du n° 13 du Livre VII le terme

$$(g^2 - 1)\gamma \sin(gv - \theta),$$

le terme

$$ik \sin\left(3fv - gv - cv + \theta + \varpi - \frac{\pi}{2}\right)$$

y produira le terme

$$(g'^2 - 1)\, ik \sin\left(3fv - gv - cv + \theta + \varpi - \frac{\pi}{2}\right),$$

g' étant extrêmement peu différent de g. On aura leur différence en observant qu'elle vient du terme multiplié par s^3 dans le développement du second membre de la troisième des équations (L) du n° 1 du

Livre VII, et spécialement de sa partie

$$-\frac{s}{h^2u}\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{1+s^2}{h^2u^2}\frac{\partial Q}{\partial s},$$

et il résulte, de l'expression de Q du n° **3** du Livre VII, que cette partie donne dans ce second membre le terme $-3m^2h^6s^3$, ce qui produit, dans le second membre de l'équation (L″) citée, le terme

$$-\frac{9}{4}h^6m^2\gamma^2.\gamma\sin(gv-\theta);$$

on a donc, en observant que h est à très-peu près l'unité,

$$g^2=g'^2-\frac{9}{4}m^2\gamma^2;$$

il faut donc ajouter à ce second membre le terme

$$\left(g^2-1+\frac{9}{4}m^2\gamma^2\right)ik\cos(3fv-gv-cv+\theta+\varpi).$$

La troisième des équations (L) citées donne ainsi, en ne considérant que les termes précédents dépendants de k,

$$\begin{aligned}0=\frac{d^2s}{dv^2}+s+\left(g^2-1+\frac{9}{4}m^2\gamma^2\right)ik\cos(3fv-gv-cv+\theta+\varpi)\\ -\frac{3k}{h^6}\gamma e\cos(3fv-gv-cv+\theta+\varpi)-\frac{3}{h^6}\gamma\cos(3fv-gv+\theta).\end{aligned}$$

Ayant représenté par $ik\cos(3fv-gv-cv+\theta+\varpi)$ le terme de s dépendant de l'angle $3fv-gv-cv$, l'équation précédente donnera

$$0=ik\left[g^2+\frac{9}{4}m^2\gamma^2-(3f-g-c)^2\right]-\frac{3k}{h^6}\gamma e.$$

Ainsi la variation de s relative à l'angle $3fv-gv-cv$ est, à fort peu près,

$$-\frac{3k}{h^6}\frac{\gamma e\cos(3fv-gv-cv+\theta+\varpi)}{2(3f-2g-c)-\frac{9}{4}m^2\gamma^2}.$$

γ et m sont des fractions du même ordre de petitesse, en sorte que $-\frac{9}{4}m^2\gamma^2$ est de l'ordre m^4; il semble donc qu'on peut le négliger par

rapport à $2(3f-2g-c)$; mais la circonstance particulière qui rend $1-c$ presque double de $g-1$ rend $2(3f-2g-c)$ fort petit et tel que, pour l'exactitude du calcul, il est nécessaire de conserver, à son égard, le terme $-\frac{9}{4}m^2\gamma^2$.

La partie de s relative à l'angle $3fv-gv$ est, à fort peu près,

$$-\frac{k\gamma}{h^6}\cos(3fv-gv+\theta);$$

le terme $\frac{3s\,\delta s}{h^2}$ donne ainsi les suivants :

$$\frac{9ke\gamma^2\sin(3fv-2gv-cv+2\theta+\varpi)}{4h^8\left(3f-2g-c-\frac{9}{8}m^2\gamma^2\right)}+\frac{3k\gamma^2}{2h^8}\sin(3fv-2gv+2\theta).$$

La seconde des équations (L) citées deviendra ainsi, en ne considérant que les termes qui ont pour diviseur $3f-2g-c$ ou qui peuvent l'acquérir,

$$\begin{aligned}0=\frac{d^2u}{dv^2}+u-\frac{9ke\gamma^2}{2h^8}\left(\frac{1}{3f-2g-c}-\frac{1}{2}\frac{1}{3f-2g-c-\frac{9}{8}m^2\gamma^2}\right)\sin(3fv-2gv-cv+2\theta+\varpi)\\ +\frac{3k\gamma^2}{2h^8}\sin(3fv-2gv+2\theta)-(1-c^2)\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)lk\sin(3fv-2gv+2\theta).\end{aligned}$$

Ayant représenté la partie de la variation δu de u, relative à l'angle $3fv-2gv+2\theta$, par

$$lk\sin(3fv-2gv+2\theta),$$

l'équation précédente donne

$$lk=\frac{3k\gamma^2}{4h^8\left[3f-2g-c-\frac{5}{4}e^2(1-c^2)\right]};$$

on aura donc

$$\begin{aligned}\delta u=\frac{3k\gamma^2\sin(3fv-2gv+2\theta)}{4h^8\left[3f-2g-c-\frac{5}{4}e^2(1-c^2)\right]}\\ +\frac{9ke\gamma^2}{4h^8}\frac{3f-2g-c-\frac{9}{4}m^2\gamma^2}{(3f-2g-c)\left(3f-2g-c-\frac{9}{8}m^2\gamma^2\right)}\sin(3fv-2gv-cv+2\theta+\varpi).\end{aligned}$$

En prenant ensuite pour unité la moyenne distance de la Lune à la Terre, on pourra, par le n° 6 du Livre VII, supposer $h = 1$, et alors on a, à fort peu près,

$$u = \sqrt{1+s^2} + e\cos(cv - \varpi);$$

on a ensuite

$$r = \frac{\sqrt{1+s^2}}{u}.$$

Le terme

$$\frac{12k\,dt\sin 3fv}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}r^4}$$

donne celui-ci, en substituant, pour dt, $\frac{dv}{u^2}$,

$$9ke\gamma^2\sin(3fv - 2gv - cv + 2\theta + \varpi).$$

On trouvera facilement

$$-2Q'dt.r\delta r = \frac{m^2}{2}[1 + 3\cos(2v - 2mv)]\left(\frac{s\,\delta s}{u^2} - \frac{\delta u}{u^3}\right)\frac{dv}{u^2}.$$

En substituant pour δu et δs leurs valeurs précédentes, et ne conservant que les termes qui ont des diviseurs de l'ordre $3f - 2g - c$, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{m^2}{2}\left(\frac{s\,\delta s}{u^2} - \frac{\delta u}{u^3}\right)\frac{du}{u^2}\\ &\quad = 3k\frac{m^2}{2}e\gamma^2\sin(3fv - 2gv - cv + 2\theta + \varpi)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{3f - 2g - c - \frac{9}{8}m^2\gamma^2}\\ &-\frac{\frac{3}{2}}{3f - 2g - c}\\ &+\frac{\frac{5}{8}}{3f - 2g - c - \frac{5}{4}e^2(1-c^2)}\end{aligned}\right\}.\end{aligned}$$

Les termes de l'ordre m^3 doublent à fort peu près, comme l'on sait, la valeur de c relative aux quantités de l'ordre m^2, ce qui rend très-petit le diviseur $3f - 2g - c$; il est donc utile, dans la présente recherche, d'avoir égard aux termes de l'ordre m^3. Pour cela, il faut

considérer la fonction

$$\frac{3m^2}{2}\cos(2v - 2mv)\left(\frac{s\,\delta s}{u^2} - \frac{\delta u}{u^3}\right)\frac{dv}{u^2},$$

qui fait partie de l'expression de $-2Q'dt.r\delta r$.

Si l'on suppose

$$\begin{aligned}u = 1 + e\cos(cv - \varpi) &+ A_1^{(1)}e\cos(2v - 2mv - cv + \varpi)\\ &+ B_1^{(0)}\gamma\cos(2v - 2mv - gv + \theta),\end{aligned}$$

$A_1^{(1)}$ et $B_1^{(0)}$ ayant les significations que je leur ai données dans le Livre VII, la fonction précédente donnera, dans l'expression de $d\delta v$, le terme

$$\frac{3}{16}m^2e\gamma^2\,dv.k\sin(3fv - 2gv - cv + 2\theta + \varpi)\left\{\begin{aligned}&\frac{\frac{15}{2}A_1^{(1)}}{3f - 2g - c - \frac{5}{4}e^2(1-c^2)}\\ &-\frac{3B_1^{(0)}}{3f - 2g - c - \frac{9}{8}m^2\gamma^2}\end{aligned}\right\}.$$

Considérons le terme $-\frac{d(dr\,\delta r)}{dt}$ de l'expression de $d\delta v$: on a

$$dr = e\,dv\sin(cv - \varpi), \quad \delta r = -\sqrt{1+s^2}\,\frac{\delta u}{u^2} + \frac{s\,\delta s}{u\sqrt{1+s^2}};$$

le terme $-\frac{d(dr\,\delta r)}{dt}$ donne ainsi le suivant :

$$\frac{3ke\gamma^2}{8}\,\frac{d\cos(3fv - 2gv - cv + 2\theta + \varpi)}{3f - 2g - c - \frac{5}{4}e^2(1-c^2)}.$$

L'expression de $d\delta v$ se rapporte au plan de l'orbite lunaire : pour la rapporter au plan même de l'écliptique, il faut, par le Chapitre II du Livre VII, lui ajouter ce que produit la fonction

$$\frac{1}{2}\left(s^2 - \frac{ds^2}{dv^2}\right)dv,$$

lorsqu'on y substitue, pour s,

$$\gamma \sin g\upsilon - \frac{3k}{h^6} \frac{\gamma e \cos(3f\upsilon - g\upsilon - c\upsilon + \theta + \varpi)}{2(3f - 2g - c) - \frac{9}{4} m^2 \gamma^2},$$

ce qui produit le terme

$$\frac{3ke\gamma^2}{2} \frac{[1 - g^2 - g(3f - 2g - c)] \sin(3f\upsilon - 2g\upsilon - c\upsilon + 2\theta + \varpi)}{2(3f - 2g - c) - \frac{9}{4} m^2 \gamma^2}.$$

Enfin, le terme

$$- \frac{12k\, dt \sin 3f\upsilon}{(1 + s^2)^{\frac{3}{2}} r^4},$$

de l'expression donnée ci-dessus de $d\delta\upsilon$, donne, en le transformant dans celui-ci

$$- \frac{12k\, d\upsilon . u^2 \sin 3f\upsilon}{(1 + s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et en y substituant, pour u,

$$\sqrt{1 + s^2} + e \cos(c\upsilon - \varpi),$$

le terme

$$- 9ke\gamma^2 \sin(3f\upsilon - 2g\upsilon - c\upsilon + 2\theta + \varpi).$$

En réunissant tous les termes de l'expression de $d\delta\upsilon$ rapportée à l'écliptique et en intégrant, on a

$$(8) \quad \delta\upsilon = \left\{ \begin{aligned} & - \frac{3ke\gamma^2 \cos(3f\upsilon - 2g\upsilon - c\upsilon + 2\theta + \varpi)}{3f - 2g - c} \left\{ \begin{aligned} & 3 - \frac{\frac{m^2}{2} - \frac{1}{4}[g^2 - 1 + (3f - 2g - c)g] - \frac{3B_1^{(0)}}{16}}{3f - 2g - c - \frac{9}{8} m^2 \gamma^2} \\ & + \frac{\frac{3}{4} m^2}{3f - 2g - c} - \frac{\frac{5}{16} m^2 + \frac{15}{32} A_1^{(1)}}{3f - 2g - c - \frac{5}{4} e^2(1 - e^2)} \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{\frac{3ke\gamma^2}{8} \cos(3f\upsilon - 2g\upsilon - c\upsilon + 2\theta + \varpi)}{3f - 2g - c - \frac{5}{4} e^2(1 - e^2)}. \end{aligned} \right.$$

Pour réduire cette formule en nombres, on peut observer que, par le

n° **14** du Livre III, le rayon d'une couche du sphéroïde terrestre étant exprimé par $a(1 + \alpha y)$, et y étant développé dans une suite de la forme $y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)} + \ldots, y^{(i)}$ étant assujetti à l'équation

$$0 = \frac{\partial . (1 - \mu^2) \frac{\partial y^{(i)}}{\partial \mu}}{\partial \mu} + \frac{\frac{\partial^2 y^{(i)}}{\partial \varpi^2}}{1 - \mu^2} + i(i + 1) y^{(i)},$$

on aura, par la formule (a) de ce même numéro

$$H^{(3)} D^3 U^{(3)} = \frac{4\pi}{7} \alpha \int \rho d . a^6 y^{(3)},$$

ρ étant la densité de la couche, la différentielle et l'intégrale étant relatives à la variable a, et cette intégrale étant prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a = D$. En prenant pour unité de distance, comme nous le faisons, la distance moyenne de la Lune à la Terre, et pour unité de vitesse la vitesse moyenne de la Lune, la masse de la Terre devient à fort peu près l'unité de masse; or cette masse est, à fort peu près, $\frac{4\pi}{3} \int \rho d . a^3$; on aura donc

$$H^{(3)} D^3 U^{(3)} = \frac{\frac{3}{7} \alpha \int \rho d . a^6 y^{(3)}}{\int \rho d . a^3}.$$

On peut négliger ici les termes de $y^{(3)}$ qui dépendent de ϖ, et supposer ainsi

$$y^{(3)} = p \left(\mu^3 - \frac{3\mu}{5} \right),$$

p étant une fonction de a; alors on a

$$H^{(3)} D^3 = \frac{\frac{3}{7} \alpha \int \rho d . a^6 p}{\int \rho d . a^3},$$

ce qui donne

$$k = \frac{3}{28} \alpha \frac{\int \rho d . a^6 p}{\int \rho d . a^3} \sin^3 \lambda.$$

Si la Terre est supposée homogène, ρ et p sont constants, et l'on a

$$3k = \frac{9}{28}\alpha p \mathrm{D}^2 \sin^2\lambda.$$

Nous sommes certains, par les mesures des degrés terrestres et du pendule, que αp n'est pas $\frac{1}{300}$; $3k$ est donc au-dessous de $\frac{1}{900}\mathrm{D}^2\sin^2\lambda$. Quelle que soit la constitution du sphéroïde terrestre, nous sommes certains que $3k$ est au-dessous de $\frac{1}{100}\mathrm{D}^2\sin^2\lambda$. On a, à fort peu près,

$$\frac{1}{3f-2g-c} = 2445;$$

on a ensuite, par le Livre VII,

$$\begin{aligned} c &= 0,99154801, \\ m &= 0,0748013, & e &= 0,05487293, \\ \lambda &= 0,0900807, & g &= 1,00402175, \\ \mathrm{A}_1^{(1)} &= 0,201816, & \mathrm{B}_1^{(0)} &= 0,0282636. \end{aligned}$$

De plus, l'obliquité de l'écliptique est, à fort peu près, 23°28′ en degrés sexagésimaux; en supposant donc

$$3k = \frac{1}{100}\mathrm{D}^2\sin^2\lambda,$$

et en observant que, par le n° 19 du Livre VII, on a

$$\mathrm{D} = 0,016655101,$$

on trouve que l'expression de δv, donnée par la formule (b), est insensible et au-dessous de $\frac{1}{1000}$ de seconde.

Des inégalités lunaires dépendantes de la partie elliptique du rayon terrestre.

5. J'ai déterminé ces inégalités dans le Chapitre II du Livre VII; je vais considérer ici quelques quantités auxquelles je n'avais point

eu égard. Le terme de l'expression de V donnée ci-dessus, qui dépend de la partie elliptique du rayon terrestre, est

$$\mathrm{H}^{(2)}\frac{\mathrm{D}^2}{r^3}\mathrm{U}^{(2)}.$$

On peut supposer ici, dans ce terme,

$$\mathrm{U}^{(2)} = \mu^2 - \frac{1}{3};$$

alors, en substituant pour μ sa valeur

$$\frac{\sin\lambda\sin fv + s\cos\lambda}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on aura dans V le terme

$$2\mathrm{H}^{(2)}\frac{\mathrm{D}^2}{r^3}\frac{\sin\lambda\cos\lambda . s\sin fv}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ce même terme, pris avec un signe contraire, fait partie de l'expression de R, en sorte que l'on pourra supposer ici

$$\mathrm{R} = r^2\mathrm{Q}' - 2\mathrm{H}^{(2)}\frac{\mathrm{D}^2}{r^3}\frac{\sin\lambda\cos\lambda . s\sin fv}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui donne

$$2\delta . r\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r} = 4\delta . r^2\mathrm{Q}' + 12\mathrm{H}^{(2)}\frac{\mathrm{D}^2}{r^3}\frac{\sin\lambda\cos\lambda . s\sin fv}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En n'ayant égard qu'à l'inégalité de δv dont la période est celle du retour du nœud lunaire au même équinoxe, on pourra supposer $\delta\mathrm{R}$ nul, et alors on a

$$\delta . r^2\mathrm{Q}' = 2\mathrm{H}^{(2)}\frac{\mathrm{D}^2}{r^3}\frac{\sin\lambda\cos\lambda . s\sin fv}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}};$$

on a donc

$$2\delta . r\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r} = 20\mathrm{H}^{(2)}\frac{\mathrm{D}^2}{r^3}\frac{\sin\lambda\cos\lambda . s\sin fv}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et la formule (a) du numéro précédent deviendra

$$d\,\delta v = -\frac{d(dr\,\delta r)}{dt} + \left[\frac{20\,\mathrm{H}^{(2)}\frac{\mathrm{D}^2}{r^3}\sin\lambda\cos\lambda.s\sin fv}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}} - 2\mathrm{Q}'r\,\delta r\right]dt.$$

Le terme

$$\frac{20\,\mathrm{H}^{(2)}\frac{\mathrm{D}^2}{r^3}\sin\lambda\cos\lambda.s\sin fv}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

donne celui-ci, en substituant, comme ci-dessus, $\frac{dv}{u^2}$ ou simplement dv pour dt, et faisant $r=1$,

$$10\,\mathrm{H}^{(2)}\mathrm{D}^2\sin\lambda\cos\lambda.\gamma\,dv\cos(gv - fv - \theta).$$

On a, par ce qui précède,

$$-2\mathrm{Q}' = \frac{m^2}{2}[1 - 3s^2 + 3(1-s^2)\cos(2v - 2mv)];$$

le terme $-2\mathrm{Q}'r\,\delta r\,dt$ donnera ainsi le suivant :

$$\text{(o)}\qquad \frac{m^2\,dv}{2}[1 + 3\cos(2v - 2mv)]\,r\,\delta r.$$

Il faut déterminer la partie de $r\,\delta r$ qui dépend de $\cos(gv - fv - \theta)$ et qui a pour diviseur $g-f$. Voulant ensuite avoir égard aux termes de l'ordre m^3, il faut déterminer la partie de $r\,\delta r$ de l'ordre m qui dépend de $\cos(2v - 2mv - gv + fv - \theta)$ et qui a le diviseur $g-1$, parce que cette partie, étant multipliée par $\cos(2v - 2mv)$, produit un terme de l'ordre m^3 dans la fonction (o). Il faut donc avoir égard aux mêmes parties dans les développements de $s\,\delta s$ et δu.

Développons d'abord δs. La partie de Q relative aux forces perturbatrices étant $-$ R, elle est égale à

$$-r^2\mathrm{Q}' + 2\mathrm{H}^{(2)}\mathrm{D}^2\frac{\sin\lambda\cos\lambda.u^3 s\sin fv}{(1+s^2)^2}.$$

En n'ayant égard qu'au second de ces termes, la partie utile de

$$-\frac{1}{h^2u^2}\frac{ds}{dv}\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial v} - \frac{s}{h^2u}\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial v} - \frac{1+s^2}{h^2u^2}\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial s}$$

se réduit, à très-peu près, à

$$-2\mathrm{H}^{(2)}\mathrm{D}^2\sin\lambda\cos\lambda\sin fv.$$

La troisième des équations (L) du n° 1 du Livre VII donne ainsi, en désignant par δs le terme de s qui dépend de fv,

$$0 = \frac{d^2\,\delta s}{dv^2} + g'^2\,\delta s - 2\mathrm{H}^{(2)}\mathrm{D}^2\sin\lambda\cos\lambda\sin fv,$$

g'^2 étant, comme dans le numéro précédent, égal à $g^2 + \frac{9}{4}m^2\gamma^2$; on a donc

$$\delta s = \frac{2\mathrm{H}^{(2)}\mathrm{D}^2\sin\lambda\cos\lambda\sin fv}{g^2 - f^2 + \frac{9}{4}m^2\gamma^2}.$$

On a, à très-peu près, $g^2 - f^2$ égal à $g^2 - 1$, et $g^2 - 1$ est assez grand par rapport à $\frac{9}{4}m^2\gamma^2$ pour que l'on puisse négliger ici ce dernier terme, en sorte que l'on a, aux quantités près de l'ordre m^2,

$$\delta s = \frac{k'\sin fv}{g-1},$$

en faisant

$$k' = \mathrm{H}^{(2)}\mathrm{D}^2\sin\lambda\cos\lambda.$$

Pour avoir le terme de s dépendant de $\sin(2v - 2mv - fv)$, on observera que l'on peut considérer l'expression précédente de δs comme étant relative à une inclinaison de l'orbite lunaire égale à $\frac{k'}{g-1}$, et dont $(1-f)v$ serait le mouvement du nœud. Or on a vu, dans le n° 7 du Livre VII, que l'inclinaison γ de l'orbite lunaire produit dans s, en vertu de l'action du Soleil, le terme

$$\mathrm{B}_1^{(0)}\gamma\sin(2v - 2mv - gv + \theta);$$

l'inclinaison $\frac{k'}{g-1}$ produira donc un terme semblable, que nous représenterons par

$$\overline{\mathrm{B}}^{(0)}\frac{k'}{g-1}\sin(2v - 2mv - fv),$$

et l'on voit, par le n° 7 cité, que l'on peut, en négligeant les quantités de l'ordre m^2, supposer $\overline{\mathrm{B}}^{(0)}$ égal à $\mathrm{B}_1^{(0)}$. Ce résultat, auquel conduit la considération de la partie $-r^2\mathrm{Q}'$ de l'expression de Q, nous dispense de considérer ici cette partie; nous pouvons ainsi faire

$$\delta s = \frac{k'}{g-1}[\sin fv + \mathrm{B}_1^{(0)}\sin(2v - 2mv - fv)].$$

Déterminons maintenant δu. Pour cela, reprenons la seconde des équations (L) du n° 1 du Livre VII. En faisant usage de la valeur précédente de Q et ne considérant que le dernier terme de cette valeur, l'intégrale

$$2\int \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial v}\frac{dv}{u^2}$$

donnera le terme

$$-\frac{2k'\cos(gv - fv - \theta)}{g-1}.$$

Ainsi la fonction

$$\left(\frac{d^2u}{dv^2} + u\right)\left(1 + \frac{2}{h^2}\int \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial v}\frac{dv}{u^2}\right)$$

du second membre de la seconde des équations (L) citées renferme le terme

$$-\frac{2k'\cos(gv - fv - \theta)}{g-1}.$$

Le développement de ce second membre renferme encore, comme on l'a dit dans le numéro précédent, le terme $3s\,\delta s$. Il faut ici substituer, pour s,

$$\gamma\sin(gv - \theta) + \mathrm{B}_1^{(0)}\gamma\sin(2v - 2mv - gv + \theta),$$

et, pour δs,

$$\frac{k'}{g-1}[\sin fv + \mathrm{B}_1^{(0)}\sin(2v - 2mv - fv)],$$

et alors ce terme donne les suivants :

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}\frac{\gamma k'}{g-1}\cos(gv - fv - \theta)\\ &-\frac{3}{2}\frac{k'\mathrm{B}_1^{(0)}\gamma}{g-1}\left[\begin{array}{l}\cos(2v - 2mv + gv - fv - \theta)\\ +\cos(2v - 2mv - gv + fv + \theta)\end{array}\right].\end{aligned}$$

La seconde des équations (L) citées donne donc, en négligeant les termes de l'ordre m^2,

$$\begin{aligned}\delta u = &-\frac{\gamma k'}{2(g-1)}\cos(gv - fv - \theta)\\ &-\frac{1}{2}\frac{\gamma k'}{g-1}\mathrm{B}_1^{(0)}\left[\begin{array}{l}\cos(2v - 2mv + gv - fv - \theta)\\ +\cos(2v - 2mv - gv + fv + \theta)\end{array}\right].\end{aligned}$$

On a, à très-peu près,

$$r\,\delta r = -\delta u + s\,\delta s;$$

en substituant pour δu et $s\,\delta s$ leurs valeurs précédentes, on aura

$$r\,\delta r = 0;$$

l'expression précédente de $d\,\delta u$ deviendra donc

$$d\,\delta v = -\frac{d(dr\,\delta r)}{dt} + 10k'\gamma\,dv\sin(gv - fv - \theta).$$

Il est facile de voir que $\frac{d(dr\,\delta r)}{dt}$ est ici nul, et qu'ainsi l'on a

$$d\,\delta v = 10k'\gamma\,dv\sin(gv - fv - \theta).$$

Cette valeur de $d\,\delta v$ se rapporte à l'orbite même de la Lune, et, pour la rapporter à l'écliptique, il faut, comme on l'a vu dans le numéro précédent, lui ajouter

$$\frac{1}{2}\delta\left(s^2 - \frac{ds^2}{dv^2}\right)dv.$$

Si l'on substitue, pour s,

$$\begin{aligned}&\gamma\sin(gv - \theta) + \mathrm{B}_1^{(0)}\gamma\sin(2v - 2mv - gv + \theta)\\ &+\frac{k'}{g-1}\sin fv + \frac{k'\mathrm{B}_1^{(0)}}{g-1}\sin(2v - 2mv - fv),\end{aligned}$$

on aura

$$\frac{1}{2}\left(s^2 - \frac{ds^2}{dv^2}\right) = -\frac{\gamma k'}{2}\left(1 - \frac{4m\mathrm{B}_1^{(0)2}}{g-1}\right)\cos(gv - fv - \theta).$$

On a, par le n° **14** du Livre VII, aux quantités près de l'ordre m^2,

$$B_1^{(0)} = \frac{3m}{8}, \quad g - 1 = \frac{3}{4} m^2;$$

on aura donc

$$\frac{1}{2}\delta\left(s^2 - \frac{ds^2}{dv^2}\right) = -\frac{1}{2}\gamma k'\left(1 - \frac{3m}{4}\right)\cos(gv - fv - \theta),$$

d'où l'on tire

$$d\,\delta v = \frac{19}{2}\gamma k'\left(1 + \frac{3m}{76}\right) dv \cos(gv - fv - \theta).$$

En considérant m, e et γ comme des quantités du premier ordre, on voit que ces expressions de δs et de $d\,\delta v$ sont approchées aux quantités près de l'ordre m^2. Si l'on rapproche la valeur de δs de celle qui résulte du second Chapitre du Livre VII, on a

$$k' = -\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right) D^2 \sin\lambda\cos\lambda,$$

$\alpha\rho$ étant l'ellipticité de la Terre, et $\alpha\varphi$ étant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur.

CHAPITRE IV.

SUR LA LOI DE L'ATTRACTION UNIVERSELLE.

6. Nommons T et L les masses de la Terre et de la Lune, r le rayon vecteur de la Lune, v sa longitude, s la tangente de sa latitude, x, y, z ses trois coordonnées rapportées au plan de l'écliptique et au centre de la Terre; désignons par m' la masse du Soleil, par r' sa distance au centre de la Terre, par x' et y' ses coordonnées rapportées à ce point et à l'écliptique, et par v' sa longitude. Les forces qui sollicitent la Lune et qui résultent des attractions de la Terre et du Soleil, décomposées parallèlement aux axes des x, des y et des z, sont, comme l'on sait, exprimées par les coefficients de dx, de dy et de dz dans la différentielle de la fonction

$$\frac{T}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}};$$

mais, la Terre étant supposée immobile, il faut transporter en sens contraire à la Lune son action et celle du Soleil sur la Terre. Ces actions, décomposées parallèlement aux axes des x, des y et des z, prises avec un signe contraire, sont exprimées par les coefficients de dx, dy, dz dans la différentielle de la fonction

$$-\frac{L}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{m'(xx'+yy')}{r'^3}.$$

Ainsi, en nommant V la fonction

$$\frac{T+L}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}} - \frac{m'(xx'+yy')}{r'^3},$$

les forces dont la Lune est animée dans son mouvement relatif autour de la Terre sont

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

en sorte que les trois équations différentielles de ce mouvement sont

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad o = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad o = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial z},$$

dt étant l'élément du temps, supposé constant.

Si l'on suppose que le Soleil attire différemment la Lune et la Terre, alors il faudra donner à m', dans le dernier terme de l'expression de V, une valeur différente de celle du second terme; en représentant donc par $\delta m'$ cette différence, il faudra ajouter à la fonction V le terme

$$-\frac{\delta m'(xx' + yy')}{r'^3}.$$

Examinons l'influence de ce terme sur le mouvement de la Lune. On a

$$x = \frac{r\cos v}{\sqrt{1+s^2}}, \quad y = \frac{r\sin v}{\sqrt{1+s^2}}, \quad z = \frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}.$$

La fonction V devient ainsi, en la réduisant en série par rapport aux puissances descendantes de r',

$$V = \frac{T+L}{r} + \frac{m'}{r'}\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^2} + \frac{3}{2}\frac{r^2\cos^2(v-v')}{r'^2(1+s^2)} \\ -\frac{3}{2}\frac{r^3\cos(v-v')}{r'^3(1+s^2)} + \frac{5}{2}\frac{r^3\cos^3(v-v')}{r'^3(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} + \ldots \end{array}\right\}$$
$$-\frac{\delta m' . r\cos(v-v')}{r'^2\sqrt{1+s'^2}}.$$

Le terme multiplié par $\cos(v - v')$ de cette série produit dans le mouvement lunaire l'inégalité que l'on nomme *inégalité parallactique*. Il résulte des diverses théories de la Lune, et spécialement de celle que j'ai donnée dans le Livre VII, que le coefficient de cette inégalité est, à fort peu près, proportionnel au coefficient de $\cos(v - v')$

dans le développement de V, en sorte que, si l'on nomme A le coefficient de cette inégalité, donné par ma théorie de la Lune, l'indéterminée $\delta m'$ en retranche une quantité qui est à A, à très-peu près, comme

$$\delta m' \frac{r}{r'^2} \quad \text{est à} \quad \frac{15}{8}\frac{m' r^3}{r'^4(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\frac{m' r^3}{r'^4};$$

en négligeant donc le carré de s, l'indéterminée $\delta m'$ diminuera le coefficient A de la quantité

$$\frac{8}{3}\frac{\delta m'}{m'}\frac{r'^2}{r^2}A.$$

En comparant le coefficient A à celui que les observations donnent, on en conclut le rapport $\frac{r}{r'}$ ou le rapport de la parallaxe solaire à la parallaxe lunaire, ce qui donne la parallaxe solaire, puisque la parallaxe lunaire est bien connue. Je trouve ainsi, en secondes sexagésimales, 8″,585 pour la parallaxe du Soleil, ce qui ne diffère pas de $\frac{1}{10}$ de seconde de la valeur de cette parallaxe déterminée par les passages de Vénus sur le Soleil, observés en 1761 et 1769. Il est donc bien certain que le coefficient A de ma théorie de la Lune ne diffère pas de la vérité de $\frac{1}{8}$ de seconde, et qu'ainsi la quantité

$$\frac{8}{3}\frac{\delta m'}{m'}\frac{r'^2}{r^2}A$$

est au-dessous de $\frac{A}{8}$, ce qui donne $\frac{\delta m'}{m'}$ moindre que $\frac{3}{64}\frac{r^2}{r'^2}$. On a, à très-peu près, $\frac{r}{r'} = \frac{1}{400}$; donc on a

$$\frac{\delta m'}{m'} < \frac{1}{3410000}.$$

Ainsi l'égalité d'action du Soleil sur la Terre et sur la Lune est prouvée par l'inégalité parallactique, d'une manière beaucoup plus précise encore que l'égalité de l'attraction terrestre sur les corps placés au même point de sa surface ne l'est par les expériences du pendule.

Je vais maintenant considérer l'influence qu'une diminution de l'attraction par l'interposition des corps aurait sur les phénomènes.

L'attraction d'une molécule se répand comme la lumière d'une molécule lumineuse, de manière que, si l'on conçoit une sphère immatérielle indéfinie dont elle soit le centre, l'attraction d'un instant, en parvenant aux couches de la sphère, restera toujours la même sur chaque couche; mais elle sera, pour chacun des points de la couche, affaiblie en raison du carré du rayon de cette couche. Si elle s'éteint, comme la lumière, par l'interposition d'un milieu, sa quantité répandue sur chaque couche, à mesure qu'elle y parvient, diminuera sans cesse, et sur un point quelconque de la couche elle diminuera dans un plus grand rapport que le carré de la distance à la molécule attirante.

Pour avoir la loi de cette diminution, je nommerai A la quantité de l'attraction de la molécule répandue sur la surface de la couche dont je désignerai le rayon par r. Sur la couche suivante, dont le rayon est $r + dr$, la quantité de cette attraction serait encore A, si une partie ne s'éteignait pas en passant d'une couche à l'autre. Or il est visible que cette extinction est proportionnelle à A; on aura donc

$$dA = -\alpha A\, dr,$$

α étant une constante, si le milieu reste le même, comme nous le supposerons ici. On a ainsi, en intégrant,

$$A = Hc^{-\alpha r},$$

H étant une constante arbitraire, et c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Si l'on divise A par la surface $4\pi r^2$ de la couche, π étant le rapport de la circonférence au diamètre, on aura l'attraction de la molécule sur un point placé à la distance r. En exprimant donc par dm la masse de la molécule, on pourra représenter par

$$\frac{dm}{r^2}c^{-\alpha r}$$

son action sur un point placé à la distance r.

Je supposerai αr assez petit pour que l'on ait, à très-peu près,

$$c^{-\alpha r} = 1 - \alpha r,$$

et alors l'attraction précédente devient

$$\frac{dm}{r^2}(1 - \alpha r).$$

Je vais maintenant déterminer d'après cette loi l'attraction d'une sphère homogène dont le rayon est R sur un point P extérieur dont r est la distance au centre de la sphère, et je supposerai r très-grand par rapport à R.

Soit f la distance à P d'une molécule dm de la sphère. Soit q la partie de f interceptée entre cette molécule et la surface de la sphère. Il est facile de voir que l'attraction de la molécule dm sur P sera

$$\frac{dm}{f^2}(1 - \alpha q).$$

Cette attraction, décomposée parallèlement à r, sera

$$\frac{dm \cos V}{f^2}(1 - \alpha q),$$

V étant l'angle que f forme avec r et qui est supposé très-petit. La somme de toutes les quantités $\frac{dm\cos V}{f^2}$ exprime l'attraction de la sphère entière sur le point P lorsque α est nul, et cette attraction est, comme l'on sait, égale à la masse de la sphère divisée par r^2; elle est donc

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{r^2},$$

π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité.

Pour avoir la somme de toutes les quantités $-\frac{\alpha q\, dm \cos V}{f^2}$, nous observerons que, α étant très-petit ainsi que V, et f différant extrêmement peu de r, on peut supposer ici $\cos V = 1$ et $f = r$, ce qui réduit la quantité précédente à celle-ci :

$$-\frac{\alpha q\, dm}{r^2}.$$

La ligne q peut être supposée parallèle à r; en nommant donc u la distance mutuelle de ces deux lignes, et ϖ l'angle formé par un plan fixe passant par r et par un autre plan passant par r et par q, on aura

$$dm = u\, du\, d\varpi\, dq,$$

ce qui donne

$$-\frac{\alpha}{r^2}\int q\, dm = -\frac{\alpha}{r^2}\int\int\int u\, du\, d\varpi\, q\, dq.$$

Les intégrales doivent être prises depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 2\pi$, depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 2Q$, $2Q$ étant la partie de la droite f comprise dans la sphère; enfin, depuis $u = 0$ jusqu'à $u = R$. Il est visible que $Q^2 = R^2 - u^2$; on aura ainsi

$$-\frac{\alpha}{r^2}\int q\, dm = -\frac{\alpha\pi R^4}{r^2}.$$

L'attraction de la sphère sur le point P sera donc

$$\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{r^2}\left(1 - \frac{3}{4}\alpha R\right).$$

La réaction étant toujours égale à l'action, il est facile de voir que l'action de P sur le centre de la sphère sera

$$\frac{P}{r^2}\left(1 - \frac{3}{4}\alpha R\right),$$

P étant la masse du point.

Imaginons maintenant que ce point soit le Soleil, et que la sphère dont nous venons de parler soit la Terre; concevons ensuite que la Lune soit une sphère homogène dont R′ soit le rayon;

$$\frac{P}{r^2}\left(1 - \frac{3}{4}\alpha' R'\right)$$

sera l'attraction du Soleil sur le centre de la Lune à la distance r du Soleil, α' étant pour la Lune ce qu'est α pour la Terre. La différence des actions du Soleil sur la Lune et sur la Terre sera donc

$$\frac{3P}{4r^2}(\alpha R - \alpha' R').$$

En faisant $\alpha' = \alpha$, cette différence devient

$$\frac{3P}{4r^2}\alpha(R - R').$$

On ne peut pas, par ce qui précède, supposer $\alpha(R - R')$ plus grand que $\frac{1}{1000000}$; αR est donc une fraction moindre que $\frac{1}{1000000}$, c'est-à-dire que la force attractive de la molécule placée au centre de la Terre sur un point de sa surface n'est pas diminuée de $\frac{1}{1000000}$ par l'interposition des couches terrestres.

L'attraction d'une molécule dm d'une sphère homogène dont le rayon est R sur un point de sa surface dont elle est distante de f est, par ce qui précède,

$$\frac{dm}{f^2}(1 - \alpha f);$$

l'attraction de la sphère entière sur ce point est donc la même que si la loi de l'attraction était $\frac{1}{f^2} - \frac{\alpha}{f}$. Par le Livre XII, on a, pour cette attraction,

$$\frac{4}{3}\pi R\left(1 - \frac{3}{4}\alpha R\right).$$

L'attraction de la Terre, que nous supposerons être la sphère dont il s'agit, sur ce point, placé à la distance r du centre de la Lune, sera, par ce qui précède,

$$\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{r^2}\left(1 - \frac{3}{4}\alpha R\right);$$

mais, relativement au centre de la Lune, dont le rayon est supposé R′, l'attraction de la Terre sera, par ce qui précède,

$$\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{r^2}\left(1-\frac{3}{4}\alpha R\right)\left(1-\frac{3}{4}\alpha' R'\right);$$

elle est donc diminuée, par l'interposition des couches lunaires, de sa valeur multipliée par la fraction $\frac{3}{4}\alpha' R'$. Si cette fraction n'était pas extrêmement petite, elle deviendrait sensible dans la parallaxe lunaire.

CHAPITRE V.

DU MOUVEMENT DES SATELLITES DE JUPITER.

Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet.

7. Galilée découvrit, le 7 janvier 1610, les quatre satellites de Jupiter. Il détermina ensuite, au moyen de leurs configurations, leurs distances au centre de Jupiter et les durées de leurs révolutions, ce que firent également plusieurs astronomes ses contemporains. Ces éléments, quoique déterminés par ce moyen imparfait, suffirent pour faire reconnaître à Kepler que le beau rapport qu'il avait trouvé entre les carrés des temps des révolutions des planètes et les cubes de leurs distances moyennes au centre de leurs mouvements existe dans le système des satellites de Jupiter. Mais ce fut par les observations de leurs éclipses que l'on découvrit les inégalités de leurs mouvements.

Le premier résultat qu'on ait obtenu par ce moyen est la propagation de la lumière. Römer observa que les éclipses du premier satellite avancent vers les oppositions de Jupiter, et retardent vers ses conjonctions. Il expliqua, en 1675, cette différence par la différence des temps que la lumière du satellite emploie à parvenir à l'observateur dans les diverses distances de Jupiter à la Terre. Cette explication de Römer éprouva quelques objections, fondées sur ce qu'elle ne paraissait pas indiquée par les éclipses des autres satellites, où il était difficile de la reconnaître parmi leurs nombreuses inégalités, qui n'étaient pas encore connues; mais ensuite elle fut généralement admise, et Bradley fonda sur elle sa théorie de l'aberration des astres.

Bradley indiqua le premier la principale inégalité du retour des éclipses du premier satellite, dont la période est de 437 jours. Il reconnut qu'il existe, dans les retours des éclipses du second satellite, une inégalité dont la période est la même.

Wargentin, dans les Mémoires d'Upsal pour l'année 1743, a développé ces inégalités, et il en a reconnu une pareille dans le mouvement du troisième satellite. Il avait encore remarqué, dans le mouvement de ce dernier astre, deux équations du centre; mais ensuite il les a réduites à une seule équation d'une excentricité variable. Enfin Bradley reconnut, en 1717, l'ellipticité de l'orbe du quatrième satellite. Telles sont les inégalités des satellites que les astronomes ont déterminées par les observations, avant que le principe de la pesanteur universelle eût été appliqué à leurs mouvements.

Le retour des éclipses et leurs durées dépendant surtout de la position des orbites des satellites sur celle de Jupiter, les astronomes se sont spécialement occupés de l'inclinaison de ces orbites et du mouvement de leurs nœuds; mais les variations de ces éléments sont si compliquées qu'ils n'ont donné que des moyens empiriques et très-imparfaits pour les représenter. Ils ont trouvé que l'on pouvait supposer fixes, à très-peu près, l'inclinaison et le nœud de l'orbite du premier satellite. L'inclinaison de l'orbite du second satellite leur a paru variable, dans une période de trente ans environ; le nœud leur a paru fixe ou n'avoir qu'un très-petit mouvement. Ils ont supposé l'inclinaison de l'orbite du troisième satellite variable dans une période d'environ cent trente-deux ans, et le nœud fixe. Enfin, ils ont supposé fixe l'inclinaison de l'orbite du quatrième satellite, et le mouvement du nœud direct et d'environ 4 minutes sexagésimales par année. L'incertitude de ces suppositions, que les observations ultérieures ont obligé de modifier, faisait sentir la nécessité d'éclairer tous ces phénomènes par l'application du principe de la pesanteur universelle, qui devait en recevoir une grande confirmation. Déjà Bradley et Wargentin

avaient attribué l'inégalité de 437 jours aux attractions mutuelles des trois premiers satellites; mais ce n'était de leur part qu'un simple aperçu dénué de tout calcul. Dans la proposition 66 du Livre I des *Principes*, Newton s'est occupé des perturbations du mouvement de plusieurs petits corps qui circulent autour d'un grand corps. Il trouve que le corps le plus intérieur se meut plus vite dans sa conjonction et dans son opposition au corps extérieur que dans les quadratures. Il a de plus étendu aux satellites, dans le Livre III, quelques-uns des résultats de sa théorie lunaire. Mais ce ne fut qu'en 1766 que l'on appliqua l'Analyse au mouvement des satellites de Jupiter, l'Académie des Sciences ayant proposé la théorie de ces mouvements pour le sujet du prix de Mathématiques de cette année.

Lagrange, auteur de la pièce couronnée, y donne les équations différentielles du mouvement de ces astres, en ayant égard à leur action mutuelle, à l'attraction du Soleil et à l'ellipticité du sphéroïde de Jupiter. Il les intègre d'abord en négligeant les excentricités et les inclinaisons des orbites, et il parvient aux inégalités dépendantes de l'élongation mutuelle des satellites, et d'où résultent, dans le retour des éclipses des trois premiers, les inégalités dont la période est de 437 jours, et que Bradley et Wargentin avaient découvertes. Lagrange considère ensuite les inégalités dépendantes des excentricités et des inclinaisons des orbites. Ici se présentait à l'analyste une grande difficulté, dont le dénouement donne l'explication des phénomènes singuliers observés par les astronomes, sans qu'ils en aient pu reconnaître les lois. Cette difficulté s'était déjà présentée à Euler et à Lagrange dans la théorie de Jupiter et de Saturne. J'ai développé, dans le Chapitre I du Livre précédent, la manière dont ces deux grands géomètres l'avaient résolue. La méthode dont Lagrange a fait usage pour cet objet, dans la théorie des satellites de Jupiter, est celle qu'il avait employée dans sa théorie de Jupiter et de Saturne. Elle consiste à regarder comme autant de variables les termes des équations différentielles, qui, par l'intégration, acquièrent des diviseurs de l'ordre des forces perturbatrices, et à former, entre les termes correspondants du rayon vecteur, de la longitude et ces nouvelles variables, autant d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. En les intégrant, Lagrange obtient, pour chaque satellite, quatre équations du centre. En appliquant la même analyse aux équations différentielles de la latitude, il obtient, pour chaque satellite, quatre équations principales de la latitude, et, pour les représenter, il imagine quatre plans, dont le premier se meut sur l'orbite de Jupiter, le second se meut sur le premier, le troisième sur le second, enfin le quatrième, qui est celui de l'orbite du satellite, se meut sur le troisième. Mais ce grand géomètre, ayant supposé que l'équateur de Jupiter est dans le plan de l'orbite de Jupiter, a fait disparaître par cette supposition les termes dus à l'inclinaison de cet équateur sur l'orbite de la planète, et dont dépendent principalement les singuliers phénomènes aperçus par les astronomes dans le mouvement des orbites des satellites.

Lorsque Lagrange s'occupait de ses recherches, Bailly appliquait au mouvement des satellites de Jupiter les formules que Clairaut avait données dans sa *Théorie de la Lune*. Il reconnut les inégalités dont la période était de 437 jours; mais cette théorie ne pouvait pas lui donner les quatre équations du centre que Lagrange avait obtenues par son analyse.

Mes premières recherches sur les satellites de Jupiter ont eu pour objet les rapports que présentent les trois premiers satellites de Jupiter, et qui consistent en ce que 1° le moyen mouvement du premier satellite, plus deux fois celui du troisième, est égal à trois fois celui du second; 2° la longitude moyenne du premier satellite, plus deux fois celle du troisième, est égale à trois fois la longitude du second, plus la demi-circonférence. L'approximation avec laquelle les mouvements observés de ces astres satisfont à ces lois, depuis leur découverte, en indiquait l'existence avec une vraisemblance extrême. J'en cherchai donc la cause dans l'action mutuelle des trois satellites. L'examen approfondi de cette action me fit voir qu'il a suffi qu'à l'origine les rapports des moyens mouvements séculaires aient approché de la première de ces lois dans de certaines limites, pour que cette

action ait établi ces deux lois et les maintienne en vigueur. Si, par exemple, à un instant quelconque, que l'on peut toujours prendre pour l'origine des mouvements, l'angle formé par le moyen mouvement séculaire du premier satellite, moins trois fois celui du second, plus deux fois celui du troisième, a été compris entre les limites, plus ou moins vingt circonférences, l'action mutuelle des trois satellites a fini par rendre cet angle nul. Or on voit, dans le n° 29 du Livre VIII, que Delambre a trouvé, par un très-grand nombre d'éclipses observées, qu'en 1700 ce même angle n'a pas excédé 2 secondes sexagésimales; la première des deux lois précédentes est donc rigoureuse. Il en résulte, suivant la théorie, que l'angle formé par la longitude moyenne du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est ou nul ou égal à la demi-circonférence, et l'on conclut, des distances moyennes de ces trois corps au centre de Jupiter, que le second cas est celui qui a lieu dans la nature. C'est, en effet, ce que l'observation confirme; car on voit, par le numéro cité du Livre VIII, que Delambre a trouvé qu'en 1750 cet angle était au-dessous de 64 secondes sexagésimales. Ce savant astronome a donc assujetti ses Tables aux deux lois précédentes, qui ne sont altérées ni par les équations séculaires des satellites, ni par la résistance des milieux éthérés. Ces équations séculaires se modifient par l'action mutuelle de ces astres, de manière que l'équation séculaire du premier satellite, plus deux fois celle du troisième, est égale à trois fois celle du second. En vertu de ces lois, les inégalités du retour des éclipses, dont la période est de 437 jours, seront toujours les mêmes.

Ces lois déterminent deux des dix-huit constantes arbitraires que renferme nécessairement la théorie du mouvement des trois premiers satellites; il faut donc qu'elles soient remplacées par deux autres arbitraires. Elles le sont, en effet, par une oscillation de l'angle formé par la longitude du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, angle que je nomme, par cette raison, *libration* des trois premiers satellites. Cette oscillation est analogue à celle d'un pendule qui ferait une oscillation en 1135 jours.

l'étendue de l'oscillation et l'instant où elle commence sont les deux arbitraires qui remplacent celles que les lois précédentes font disparaître. Mais Delambre n'a pu reconnaître par les observations l'existence de cette oscillation, ce qui prouve qu'elle est insensible. Il est vraisemblable que, à l'origine, des causes particulières l'ont anéantie, ainsi que la libration du grand axe du sphéroïde lunaire, qui remplace les deux arbitraires que l'égalité des mouvements moyens de rotation et de révolution de la Lune fait disparaître.

Les recherches précédentes ont paru dans le volume des *Mémoires de l'Académie des Sciences* de l'année 1784, qui a été publié en 1787; elles m'ont fait reprendre toute la théorie des satellites de Jupiter, que les travaux des astronomes et des géomètres laissaient, comme on l'a vu, très-imparfaite. Il était nécessaire, pour en tirer des Tables exactes de leurs mouvements, d'y faire entrer un grand nombre de considérations nouvelles, soit pour démêler toutes les inégalités qui deviennent sensibles par les intégrations, soit pour reconnaître l'influence réciproque de ces diverses inégalités. C'est ainsi qu'en appliquant à ces astres les formules très-simples des variations séculaires des éléments elliptiques que j'avais trouvées auparavant, j'ai reconnu l'influence qu'avaient sur ces variations les grandes inégalités dont la période dans le retour des éclipses est de 437 jours. J'ai reconnu pareillement l'influence de la libration des trois premiers satellites sur leurs inégalités à longues périodes, telles que l'inégalité dépendante de l'équation du centre de Jupiter.

Un des éléments les plus importants de la théorie des éclipses des satellites est la position de leurs orbites sur celle de Jupiter. Il est indispensable, pour la déterminer, d'avoir égard à l'inclinaison de l'équateur de cette planète, inclinaison dont les phénomènes singuliers observés par les astronomes dépendent principalement. L'analyse m'a conduit à ce résultat remarquable : Pour avoir la position de l'orbite d'un satellite sur celle de Jupiter, on doit imaginer cinq plans dont le premier, fixe à très-peu près, passe entre l'équateur et l'orbe de Jupiter, par leur intersection, et en conservant sur eux une inclinaison

à très-peu près constante; le second plan se meut uniformément sur le premier, auquel il est toujours incliné d'une quantité constante; le troisième plan se meut de la même manière sur le second; le quatrième plan se meut semblablement sur le troisième; enfin, le cinquième plan, qui est celui de l'orbite même du satellite, se meut de la même manière sur le quatrième. Ces plans fixes ne sont pas les mêmes pour les quatre satellites; celui de chaque satellite est d'autant moins incliné à l'équateur que le satellite est plus près de la planète. La même chose a lieu pour la Lune. Son inégalité en latitude, dépendante de l'aplatissement de la Terre, vient de ce que le plan de son orbite, au lieu de se mouvoir uniformément sur l'écliptique, se meut uniformément sur un plan incliné d'environ 8 secondes sexagésimales sur l'écliptique, et qui passe constamment par les équinoxes, entre l'écliptique et l'équateur. C'est encore ainsi que l'anneau de Saturne et ses premiers satellites sont retenus, à fort peu près, dans le plan de l'équateur de cette planète.

L'axe du cône d'ombre dans lequel les satellites de Jupiter sont plongés pendant leurs éclipses étant le prolongement du rayon vecteur de cette planète, il est visible que, pour calculer ces éclipses, il faut connaître la position de ce rayon et, par conséquent, le mouvement de Jupiter. Delambre a construit, d'après ma théorie de Jupiter et de Saturne, des Tables de ce mouvement, que M. Bouvard a encore perfectionnées.

Après avoir formé les expressions analytiques des mouvements des satellites de Jupiter, il restait à déterminer par les observations trente et une inconnues, savoir : les vingt-quatre constantes arbitraires introduites par les intégrations, les masses de ces astres, l'aplatissement de Jupiter, l'inclinaison de l'équateur de Jupiter à l'orbite de cette planète et la position des nœuds de cet équateur. Ce travail immense a été exécuté par Delambre, qui a discuté pour cet objet toutes les observations d'éclipses des satellites de Jupiter, dont le nombre était d'environ six mille. Il a construit de nouvelles Tables de ces astres, dont tout empirisme est banni; leur exactitude les a fait généralement adopter, et elles sont un des principaux titres de ce savant illustre à la reconnaissance des astronomes.

Depuis la publication de ces Tables, j'ai recherché l'influence que les grandes inégalités de Jupiter ont sur le mouvement de ses satellites. Je vais présenter ici l'analyse que j'ai employée et les résultats que j'ai obtenus.

CHAPITRE VI.

DE L'INFLUENCE DES GRANDES INÉGALITÉS DE JUPITER SUR LES MOUVEMENTS DE SES SATELLITES.

8. Pour déterminer cette influence, je reprends l'expression des perturbations en longitude, donnée par la formule (2) du n° **2** du Livre VIII. Il est facile de voir que, dans cette expression, le terme

$$\frac{2a}{\mu}\int n\,dt\,r\frac{\partial R}{\partial r}$$

est le seul qui puisse donner une inégalité sensible, dépendante de la grande inégalité de Jupiter. Dans ce terme, a est la distance moyenne du satellite à Jupiter, nt est son moyen mouvement, r est son rayon vecteur, et μ est la masse de Jupiter. Par le n° **1** du même Livre, l'expression de R contient le terme $\frac{-Sr^2}{4r^{\text{IV}3}}$, S étant la masse du Soleil et r^{IV} étant le rayon vecteur de Jupiter. C'est le seul terme à considérer ici; on a donc

$$\frac{2a}{\mu}\int n\,dt\,r\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{-aS}{\mu}\int\frac{n\,dt\,r^2}{r^{\text{IV}3}}.$$

La partie de la variation de r^{IV} dépendante de la grande inégalité de Jupiter est, par le n° **23** du Livre X,

$$-0{,}002008.\cos(n^{\text{IV}}t+\varepsilon^{\text{IV}}-x),$$
$$-0{,}000264.\cos(x+48^\circ{,}27);$$

$n^{\text{IV}}t+\varepsilon^{\text{IV}}$ est la longitude moyenne de Jupiter, et l'on a

$$x = 5n^{\text{V}}t+5\varepsilon^{\text{V}}-2n^{\text{IV}}t-2\varepsilon^{\text{IV}}-61^\circ{,}77.$$

$n^{\mathrm{v}}t + \varepsilon^{\mathrm{v}}$ est la longitude moyenne de Saturne, et les degrés sont centésimaux. Nous pouvons donc ici réduire l'expression du rayon vecteur de Jupiter, du n° 23 du Livre cité, à la suivante,

$$\begin{aligned} r^{\mathrm{iv}} = 5{,}208735 &- 0{,}249994 . \cos(n^{\mathrm{iv}}t + \varepsilon^{\mathrm{iv}} - \varpi^{\mathrm{iv}}), \\ &- 0{,}002008 . \cos(n^{\mathrm{iv}}t + \varepsilon^{\mathrm{iv}} - x), \\ &- 0{,}000264 . \cos(x \quad + 48^{\circ}{,}27). \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{\mu}{a^3} = n^2,$$

$$\frac{\mathrm{S}}{a^{\mathrm{iv}3}} = n^{\mathrm{iv}2};$$

le terme $-\frac{a\mathrm{S}}{\mu}\int\frac{n\,dt\,r^2}{r^{\mathrm{iv}3}}$ donne donc le suivant

$$\frac{-3n^{\mathrm{iv}2}}{n(5n^{\mathrm{v}} - 2n^{\mathrm{iv}})}\left\{\begin{aligned} &\frac{0{,}000264}{5{,}208735}\sin(x + 48^{\circ}{,}27) \\ &\quad + \frac{2.0{,}249994.0{,}002008}{(5{,}208735)^2}\sin(x - \varpi^{\mathrm{iv}}) \end{aligned}\right\},$$

ce qui donne, relativement au quatrième satellite, l'inégalité

$$-44'',334 . \sin(x + 23^{\circ}{,}41).$$

Les trois premiers satellites sont assujettis à des inégalités semblables; mais leur période étant fort longue, leurs coefficients sont modifiés par l'action mutuelle de ces corps, et ils deviennent, relativement au premier, au second et au troisième,

$$-0'',994, \quad -12'',847, \quad -18'',774 \quad (^1).$$

(1) *Voir*, à la fin du Volume, une Note relative à quelques erreurs signalées par M. Adams dans le présent Chapitre.

CHAPITRE VII.

DES SATELLITES DE SATURNE ET D'URANUS.

9. Huygens découvrit, en 1655, le sixième des satellites de Saturne. Quelques années après, Dominique Cassini découvrit successivement le troisième, le quatrième, le cinquième et le septième. Enfin Herschel découvrit, en 1789, le premier et le second. On a déterminé les moyens mouvements de ces astres et leurs distances moyennes au centre de Saturne, et l'on a reconnu, entre les cubes de ces distances et les carrés des temps des révolutions, le beau rapport que Kepler avait trouvé entre les mêmes quantités relatives aux planètes. Mais comme on n'a pas à l'égard de ces astres le secours des observations de leurs éclipses, on est loin de connaître toutes les inégalités de leurs mouvements; seulement on a reconnu que l'orbe du sixième satellite est elliptique. M. Bessel, dans le *Journal de Gotha* pour l'année 1811, a trouvé son excentricité égale à 0,0488759. Tous ces corps ont paru se mouvoir dans le plan de l'anneau, à l'exception du sixième et principalement du septième. Jacques Cassini a observé que l'orbite du septième s'écarte très-sensiblement de ce plan. Il a publié, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1714, ses observations, d'après lesquelles il a estimé que cette orbite est inclinée au plan de l'anneau d'environ 15 à 16 degrés sexagésimaux, et que ses nœuds avec l'écliptique s'écartent vers l'Occident de 17 degrés des nœuds de l'anneau. Il a terminé son Mémoire par le passage suivant, que je rapporte à cause de son analogie avec la véritable explication de ce phénomène :

« La situation des nœuds du cinquième satellite (¹) et l'inclinaison de son orbe, qui sont si différentes de celles des autres, semblent déranger l'économie du système des satellites qu'on avait cru jusqu'à présent avoir, tous, les mêmes nœuds et être à peu près dans un même plan. Cependant il paraît qu'on peut en rendre aisément la raison physique, si l'on fait attention à la grande distance de ce satellite au centre de Saturne; car l'effort qui entraîne les satellites suivant la direction du plan de l'anneau s'affaiblit en s'éloignant de Saturne, et est obligé de céder à un autre effort qui emporte Saturne et toutes les planètes suivant l'écliptique. Ces deux efforts agissant sur le cinquième satellite suivant des directions inclinées l'une à l'autre de 31 degrés, il résulte qu'il doit faire son cours suivant une direction moyenne entre le plan de l'anneau et celui de l'écliptique. Il paraît même que, selon ce raisonnement, les plans des orbes des autres satellites doivent un peu décliner du plan de l'anneau, quoique beaucoup moins que celui du cinquième satellite, ce qui nous a paru s'accorder à quelques observations. »

Cassini n'assigne point les causes des deux efforts qu'il suppose, mais la théorie de la pesanteur universelle donne ces deux causes. La première est l'attraction de la protubérance de l'équateur de Saturne, produite par la rotation de cette planète. Cette attraction maintient l'anneau et les premiers satellites à peu près dans le plan de cet équateur, et s'affaiblit très-rapidement quand les distances moyennes des satellites sont plus grandes. La seconde cause est l'attraction du Soleil sur les satellites, qui tend à les abaisser sur le plan de l'orbite de leur planète. En vertu de ces causes, l'orbite de chaque satellite se meut sur un plan qui passe entre l'équateur et l'orbite de Saturne par leur intersection, et qui s'écarte d'autant plus du plan de l'anneau que le satellite est plus éloigné.

M. Bessel, dans le *Journal* cité, a trouvé l'inclinaison de l'orbite du sixième satellite plus petite que celle de l'anneau d'environ 2 degrés.

(¹) Maintenant le septième.

J'ai déterminé, dans le Livre VIII, l'inclinaison et le mouvement du nœud de l'orbe du septième satellite, en employant principalement les observations faites par Bernard, à Marseille, en 1787. Mais ces observations et toutes celles que l'on a faites sur ces satellites sont imparfaites et peu nombreuses. Les astronomes se sont peu occupés de ce genre d'observations, qui cependant offrent beaucoup d'intérêt par elles-mêmes et par la lumière qu'elles doivent répandre sur les masses de l'anneau et des satellites et sur l'aplatissement du sphéroïde de Saturne.

Herschel découvrit en 1787 six satellites à la planète Uranus, qu'il avait découverte en 1781. Les deux premiers qu'il ait vus sont, dans l'ordre des distances, le second et le quatrième. Ces deux satellites ont été aperçus par d'autres astronomes; ainsi leur existence ne doit laisser aucun doute. L'existence des quatre autres ne paraît pas aussi certaine. Les heureux essais que l'on vient de faire pour augmenter le pouvoir des lunettes astronomiques donnent lieu d'espérer que l'on aura bientôt les moyens de suivre, avec autant d'exactitude que de facilité, les mouvements de ces astres. Ils paraissent se mouvoir dans un plan presque perpendiculaire à l'écliptique, ce qui indique dans la planète un mouvement rapide de rotation autour d'un axe presque parallèle à l'écliptique.

Ces satellites obéissent à la loi de Kepler, suivant laquelle les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des moyennes distances. C'est ce que l'on a vérifié par l'observation à l'égard des deux satellites premièrement découverts. On en a conclu la masse d'Uranus égale à $\frac{1}{19504}$ de celle du Soleil. M. Bouvard a trouvé cette masse égale à $\frac{1}{17918}$, au moyen des perturbations du mouvement de Saturne par l'action d'Uranus. La différence de ces deux valeurs paraîtra bien peu considérable si, d'une part, on considère l'incertitude des mesures des plus grandes élongations de ces satellites et l'ignorance où nous sommes des excentricités de leurs orbites, et si, d'une autre part, on considère la petitesse des perturbations dues à l'action d'Uranus.

SUPPLÉMENT

AU V^{e} VOLUME

DU

TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR M. LE MARQUIS DE LAPLACE.

(IMPRIMÉ SUR LE MANUSCRIT TROUVÉ DANS SES PAPIERS.)

1827

SUPPLÉMENT

AU V^e VOLUME

DU

TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR L'AUTEUR.

(IMPRIMÉ SUR LE MANUSCRIT TROUVÉ DANS SES PAPIERS.)

En publiant mon *Traité de Mécanique céleste,* j'ai désiré que les Géomètres en vérifiassent les résultats, et spécialement ceux qui me sont propres. Les résultats de la théorie du Système du Monde sont, pour la plupart, si distants des premiers principes que leur vérification est nécessaire pour en assurer l'exactitude. Les Géomètres qui s'en occupent font donc une chose utile à l'Astronomie. Je dois, comme savant et comme auteur, beaucoup de reconnaissance à ceux qui ont bien voulu prendre mon Ouvrage pour texte de leurs discussions, et qui par là m'ont fourni l'occasion d'éclaircir quelques points délicats traités dans cet Ouvrage. Ce sont ces éclaircissements et quelques recherches nouvelles qui sont l'objet de ce Supplément.

Sur le développement en série du radical qui exprime la distance mutuelle de deux planètes.

1. En considérant cet objet dans les n^{os} 3 du Livre XI et du Livre XV de la *Mécanique céleste,* je me suis spécialement proposé de faire voir, par un exemple intéressant, l'utilité des méthodes que j'ai exposées

avec étendue dans ma *Théorie analytique des probabilités*, l'une pour obtenir en intégrales définies les variables données par des équations linéaires aux différences finies à coefficients variables, l'autre pour avoir, par des approximations rapides et convergentes, les intégrales définies fonctions de très-grands nombres. C'est surtout dans le développement des fonctions en séries que ces méthodes sont utiles pour avoir les *limites* des termes de ces développements, et pour reconnaître si les séries qui en résultent sont convergentes. Je nomme *limites* les valeurs dont les termes du développement approchent sans cesse à mesure que leur rang est plus considérable, et qui coïncident avec elles dans l'infini.

Si l'on nomme r et r' les distances de deux corps qui s'attirent à un même point fixe, et θ l'angle compris entre ces distances, la distance mutuelle de ces deux corps sera

$$\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2}.$$

On sait combien le développement du radical

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2}}$$

est important dans les théories de la figure et des perturbations des planètes.

Or, supposant $r' > r$ et faisant $\frac{r}{r'} = \alpha$, on peut développer le radical $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ soit par rapport aux puissances de α, soit par rapport aux cosinus de l'angle θ et de ses multiples. Le premier de ces développements est nécessaire dans la théorie de la figure des planètes, et le second dans la théorie des perturbations. Dans le n° 3 du Livre XI cité, j'ai exprimé par une intégrale définie le terme général du premier développement, et j'ai donné une limite de cette expression, qui devient de plus en plus compliquée, à mesure que le nombre des termes augmente. Dans le n° 3 du Livre XV, j'ai cherché à exprimer pareillement par une intégrale définie le terme général du second développement.

Si l'on désigne par $\alpha^i p^{(i)}$ le terme général du radical $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ développé suivant les puissances de α, on a, par le n° **23** du Livre III de la *Mécanique céleste*,

$$(1)\quad p^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\left[\cos^i\theta - \frac{i(i-1)}{2(2i-1)}\cos^{i-2}\theta + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4(2i-1)(2i-3)}\cos^{i-4}\theta - \ldots\right];$$

lorsque i est un grand nombre, cette expression contient un grand nombre de termes; mais j'ai prouvé, dans le numéro cité du Livre XI, qu'alors elle se réduit, à très-peu près, à

$$\frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{1}{4}\pi\right]}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi i\sin\theta}},$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. Je vais ici confirmer ce résultat singulier par une autre méthode.

On a, par les nos **8** et **9** du Livre III de la *Mécanique céleste*,

$$(2)\qquad 0 = i(i+1)p^{(i)} + \frac{d^2p^{(i)}}{d\theta} + \frac{dp^{(i)}}{d\theta^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta};$$

exprimons l'intégrale de cette équation par

$$p^{(i)} = u\cos a\theta + u'\sin a\theta,$$

u et u' étant fonctions de θ, et a étant supposé égal à $[i(i+1)]^{\frac{1}{2}}$. En substituant cette valeur dans l'équation (2), et comparant séparément les coefficients de $\sin a\theta$ et de $\cos a\theta$, on aura

$$2\frac{du}{d\theta} + u\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{d^2u'}{d\theta^2} + \frac{du'}{d\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{a},$$

$$2\frac{du'}{d\theta} + u'\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{a}.$$

Ces équations donnent, en négligeant les termes divisés par a et en les intégrant,

$$u = \mathrm{H}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta, \quad u' = \mathrm{H}'\sin^{-\frac{1}{2}}\theta,$$

H et H′ étant deux constantes arbitraires.

Si l'on fait

$$u = \mathrm{H}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta + \frac{\mathrm{X}}{a}, \quad u' = \mathrm{H}'\sin^{-\frac{1}{2}}\theta + \frac{\mathrm{X}'}{a},$$

les équations différentielles précédentes donneront les valeurs de X et de X′. En continuant ainsi, on aura les valeurs de u et de u', et par conséquent celle de $p^{(i)}$, développées suivant les puissances de $\frac{1}{a}$. Nous ne considérerons ici que les termes indépendants de $\frac{1}{a}$, et alors on aura

$$p^{(i)} = \mathrm{C}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\cos(a\theta + \varepsilon),$$

C et ε étant deux constantes arbitraires qu'il faut déterminer. Pour cela, je suppose $\theta = \frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité; j'observe ensuite que, si l'on néglige les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$, on a $a = i + \frac{1}{2}$; on a donc alors

$$p^{(i)} = \mathrm{C}\cos\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right].$$

On voit, par l'équation (1), que, i étant impair et θ étant $\frac{\pi}{2}$, la valeur de $p^{(i)}$ est nulle; on a donc $\varepsilon = -\frac{1}{4}\pi$, et, par conséquent, on a, quel que soit θ,

$$p^{(i)} = \mathrm{C}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\cos\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right].$$

Pour déterminer la constante C, j'observe que, si l'on suppose i pair et égal à $2s$, l'équation (1) donne, lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$p^{(i)} = \pm\frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots 2s} = \pm\frac{1.2.3\ldots 2s}{2^{2s}(1.2.3\ldots s)^2},$$

le signe supérieur ayant lieu si s est pair, et l'inférieur si s est impair. On a, à très-peu près, par les formules connues, lorsque s est un grand

nombre,

$$1.2.3\ldots s = s^{s+\frac{1}{2}}c^{-s}\sqrt{2\pi},$$

$$1.2.3\ldots 2s = (2s)^{2s+\frac{1}{2}}c^{-2s}\sqrt{2\pi}.$$

On aura ainsi

$$p^{(i)} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}i\pi}},$$

ce qui donne

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}i\pi}}.$$

L'expression générale de $p^{(i)}$ est donc

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}i\pi\sin\theta}}\cos\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{1}{4}\pi\right].$$

Sur le développement des coordonnées elliptiques.

2. L'excentricité des orbes elliptiques planétaires étant peu considérable, on développe le plus souvent le rayon vecteur et l'anomalie vraie en séries ordonnées suivant ses puissances. Mais si l'excentricité, qui, dans les orbes elliptiques, ne surpasse jamais l'unité, en devenait fort approchante, on conçoit que les séries pourraient cesser d'être convergentes. Il importe donc de connaître si, parmi les valeurs comprises entre zéro et l'unité que l'excentricité peut avoir, il en est une au-dessus de laquelle ces séries seraient divergentes, et, dans ce cas, de la déterminer. Prenons pour unité le demi-grand axe de l'ellipse; désignons par e son excentricité, par t l'anomalie moyenne comptée du périgée, et par R le rayon vecteur; on aura, par le n° **22** du Livre II de la *Mécanique céleste*,

$$\begin{aligned}\mathrm{R} = 1 + \frac{e^2}{2} - e\cos t \\ - \frac{e^2}{1.2}\cos 2t \\ - \frac{e^3}{1.2.2^2}(3\cos 3t - 3\cos t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{e^4}{1.2.3.2^3}(4^2\cos 4t-4.2^2\cos 2t)\\
&-\frac{e^5}{1.2.3.4.2^4}\left(5^3\cos 5t-5.3^3\cos 3t+\frac{5.4}{1.2}\cos t\right)\\
&-\frac{e^6}{1.2.3.4.5.2^5}\left(6^4\cos 6t-6.4^4\cos 4t+\frac{6.5}{1.2}\cdot 2^4\cos 2t\right)\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Le terme général de cette expression est

$$
-\frac{e^i}{1.2.3\ldots(i-1)2^{i-1}}\left\{
\begin{aligned}
&i^{i-2}\cos it-i(i-2)^{i-2}\cos(i-2)t\\
&\quad+\frac{i(i-1)}{1.2}(i-4)^{i-2}\cos(i-4)t\\
&\quad-\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}(i-6)^{i-2}\cos(i-6)t\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\},
$$

la série étant continuée jusqu'à ce que l'on arrive à un facteur $(i-2r)^{i-2}$ dans lequel $i-2r$ soit négatif. Si l'on fait t égal à un angle droit, ce terme devient nul lorsque i est impair, et, dans le cas de i pair, il devient, abstraction faite du signe, égal à

$$
(a)\qquad \frac{e^i}{1.2.3\ldots(i-1)2^{i-1}}\left[i^{i-2}+\frac{i}{1}(i-2)^{i-2}+\frac{i(i-1)}{1.2}(i-4)^{i-2}+\ldots\right],
$$

et il est alors le plus grand possible. Déterminons sa valeur lorsque i est un très-grand nombre.

Il est facile de voir que les termes de la série

$$
(a')\qquad i^{i-2}+\frac{i}{1}(i-2)^{i-2}+\frac{i(i-1)}{1.2}(i-4)^{i-2}+\ldots
$$

vont d'abord en croissant, et qu'ils ont un maximum après lequel ils diminuent. A ce maximum, deux termes consécutifs sont, à très-peu près, égaux. Soit

$$
\frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r}(i-2r)^{i-2}
$$

le terme maximum. Le terme qui le précède sera

$$
\frac{i(i-1)\ldots(i-r+2)}{1.2.3\ldots(r-1)}(i-2r+2)^{i-2};
$$

en égalant donc ces deux termes, on aura

$$
\frac{i-r+1}{r}(i-2r)^{i-2}=(i-2r+2)^{i-2}.
$$

Cette équation donne la valeur de r et, par conséquent, le rang que le terme le plus grand occupe dans la série. Si l'on prend les logarithmes des deux membres, on a

$$
\log\frac{i-r+1}{r}=(i-2)\log\left(1+\frac{2}{i-2r}\right),
$$

ou

$$
(b)\qquad \log\frac{i-r}{r}+\log\left(1+\frac{1}{i-r}\right)=(i-2)\log\left(1+\frac{2}{i-2r}\right);
$$

or on a, lorsque i et r sont de très-grands nombres,

$$
\begin{aligned}
\log\left(1+\frac{1}{i-r}\right)&=\frac{1}{i-r}-\frac{1}{2(i-r)^2}+\ldots,\\
\log\left(1+\frac{2}{i-2r}\right)&=\frac{2}{i-2r}-\frac{2}{(i-2r)^2}+\ldots;
\end{aligned}
$$

l'équation (b) deviendra donc, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$
\log\frac{i-r}{r}=\frac{2i}{i-2r},
$$

ce qui donne

$$
\frac{i-r}{r}=c^{\frac{2i}{i-2r}},
$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. En faisant $r=\omega i$, on aura

$$
(c)\qquad \frac{1-\omega}{\omega}=c^{\frac{2}{1-2\omega}}.
$$

Si l'on nomme p le terme maximum

$$\frac{i(i-1)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r}(i-2r)^{i-2},$$

le terme qui en est éloigné du rang t sera

$$p\,\frac{(i-r)(i-r-1)\ldots(i-r-t+1)}{(r+1)(r+2)\ldots(r+t)}\left(\frac{i-2r-2t}{i-2r}\right)^{i-2};$$

son logarithme sera donc

$$\begin{aligned}&\log p+t\log(i-r)+\log\left(1-\frac{1}{i-r}\right)+\log\left(1-\frac{2}{i-r}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{t-1}{i-r}\right)\\&\quad-t\log r-\log\left(1+\frac{1}{r}\right)-\log\left(1+\frac{2}{r}\right)-\ldots-\log\left(1+\frac{t}{r}\right)\\&\quad+(i-2)\log\left(1-\frac{2t}{i-2r}\right).\end{aligned}$$

En développant en séries ces logarithmes et négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{t^2}$, on aura

$$\begin{aligned}&\log p+t\log\frac{i-r}{r}-\frac{1+2+3+\ldots+(t-1)}{i-r}-\frac{1+2+3+\ldots+t}{r}\\&\quad-(i-2)\left[\frac{2t}{i-2r}+\frac{2t^2}{(i-2r)^2}\right].\end{aligned}$$

Par la nature de r, on a, à très-peu près, par ce qui précède,

$$\log\frac{i-r}{r}+\frac{1}{i-r}=(i-2)\left[\frac{2}{i-2r}-\frac{2}{(i-2r)^2}\right];$$

la fonction précédente deviendra donc

$$\log p-(1+2+3+\ldots+t)\,\frac{i}{r(i-r)}-\frac{(i-2)2.t(t+1)}{(i-2r)^2}.$$

En ne conservant ainsi, parmi les termes de l'ordre $\frac{1}{t}$, que ceux qui sont multipliés par t^2, et observant que

$$1+2+3+\ldots+t=\frac{t^2+t}{2},$$

cette fonction prendra la forme

$$\log p-\frac{i^3t^2}{2r(i-r)(i-2r)^2},$$

ce qui donne, pour le terme placé à la distance t du terme p,

$$p.c^{-\frac{i^3t^2}{2r(i-r)(i-2r)^2}}.$$

Il est facile de s'assurer que cette même valeur a lieu, à très-peu près, pour le terme placé avant p à la même distance. La somme de tous ces termes sera la série entière (a'). On aura, comme on sait, cette somme, à très-peu près, égale à

$$p.\int dt\,c^{-\frac{i^3t^2}{2r(i-r)(i-3r)^2}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, ce qui donne, par les méthodes connues, la série (a') égale à

$$p.\sqrt{\pi}\,\frac{i-2r}{i}\sqrt{\frac{2r(i-r)}{i}},$$

π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité. On a

$$p=\frac{1.2.3\ldots i.(i-2r)^{i-2}}{1.2.3\ldots(i-r).1.2.3\ldots r}.$$

La série (a) devient ainsi, abstraction faite du signe,

$$\frac{i(i-2r)^{i-2}\sqrt{\pi}}{1.2.3\ldots(i-r).1.2.3\ldots r}\cdot\frac{i-2r}{i}\sqrt{\frac{2r(i-r)}{i}}\cdot\frac{e^i}{2^{i-1}}.$$

On a, à très-peu près, par les théorèmes connus,

$$1.2.3\ldots(i-r)=(i-r)^{i-r+\frac{1}{2}}c^{-(i-r)}\sqrt{2\pi},$$

$$1.2.3\ldots r=r^{r+\frac{1}{2}}c^{-r}\sqrt{2\pi}.$$

La série (a) devient donc

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{i}}(i-2r)^{i-1}\left(\frac{ec}{2}\right)^i}{r^r(i-r)^{i-r}\sqrt{2\pi}},$$

ou

$$(d) \qquad \frac{2}{i\sqrt{i}.(1-2\omega)\sqrt{2\pi}}\left[\frac{ec(1-2\omega)}{2\omega^\omega(1-\omega)^{1-\omega}}\right]^i,$$

ω étant donné par l'équation (c).

On doit observer ici que la valeur de ω donnée par cette équation n'est pas rigoureuse. Nous avons négligé, pour former cette équation, les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$, et, de plus, nous avons supposé que le terme maximum p était égal à celui qui le précède, ce qui n'est qu'approché. De là il suit que la valeur exacte de ω est celle que donne l'équation (c), plus une correction de l'ordre $\frac{1}{i}$, que nous désignerons par $\frac{q}{i}$. Mais cette correction disparait d'elle-même par la condition de p maximum. En effet, si l'on nomme D la fonction

$$\frac{ec(1-2\omega)}{2\omega^\omega(1-\omega)^{1-\omega}},$$

et D' cette même fonction lorsqu'on y change ω dans $\omega+\frac{q}{i}$, on aura

$$\log D'^i = i\log\left[\left(1+\frac{q}{i}\frac{dD}{D\,d\omega}+\frac{q^2}{2i^2}\frac{d^2D}{D\,d\omega^2}+\ldots\right)D\right].$$

En repassant des logarithmes aux nombres et négligeant ensuite les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$, on aura

$$D'^i = D^i c^{q\frac{dD}{D\,d\omega}}.$$

On a

$$\frac{dD}{D\,d\omega} = -\frac{2}{1-2\omega}+\log\frac{1-\omega}{\omega},$$

et l'équation (c) donne $\log\frac{1-\omega}{\omega}=\frac{2}{1-2\omega}$; on a donc, aux quantités

près de l'ordre $\frac{1}{i}$, $D'^i = D^i$, d'où il est facile de conclure que, par le changement de ω dans $\omega+\frac{q}{i}$, la formule (d) reste la même. Si la quantité

$$\frac{ec(1-2\omega)}{2\omega^\omega(1-\omega)^{1-\omega}}$$

surpasse l'unité, la fonction (d) devient infinie lorsque i est infini; l'expression du rayon vecteur devient donc alors divergente. La valeur de l'excentricité, déduite de l'équation

$$e=\frac{2\omega^\omega(1-\omega)^{1-\omega}}{(1-2\omega)c},$$

est, par conséquent, la limite des valeurs de l'excentricité qui font converger l'expression du rayon vecteur développé suivant les puissances de l'excentricité. En substituant, au lieu de c, sa valeur $\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)^{\frac{1-2\omega}{2}}$ donnée par l'équation (c), cette expression de e devient

$$e=\frac{2\sqrt{\omega(1-\omega)}}{1-2\omega}.$$

L'équation (c) donne, à peu près,

$$\omega = 0,08307,$$

d'où l'on tire

$$e = 0,66195.$$

L'équation précédente de la limite de l'excentricité e donne, à cette limite,

$$1-2\omega=\frac{1}{\sqrt{1+e^2}},$$

d'où il est facile de conclure

$$\frac{1-\omega}{\omega}=\frac{(1+\sqrt{1+e^2})^2}{e^2};$$

l'équation (c) donnera donc

$$(m) \qquad 1+\sqrt{1+e^2}=e.c^{\sqrt{1+e^2}};$$

les valeurs de e supérieures à celle que cette équation donne rendent l'expression en série du rayon vecteur R divergente lorsque t est un angle droit. Pour toutes les valeurs inférieures, cette série est convergente, quel que soit t. En effet, le terme général de l'expression de R, développée en série ordonnée par rapport aux puissances de l'excentricité, est, comme on l'a vu,

$$-\frac{e^i}{1.2.3\ldots(i-1).2^{i-1}}[i^{i-2}\cos it-i(i-2)^{i-2}\cos(i-2)t+\ldots].$$

La plus grande valeur de ce terme, abstraction faite du signe, ne peut surpasser

$$\frac{e^i}{1.2.3\ldots(i-1).2^{i-1}}\left[i^{i-2}+i(i-2)^{i-2}+\frac{i(i-1)}{1.2}(i-4)^{i-2}+\ldots\right].$$

On vient de voir que cette valeur, lorsque i est infini, devient nulle par un facteur moindre que l'unité élevé à la puissance i, lorsque l'excentricité e est au-dessous de celle qui résulte de l'équation aux limites; la série est donc convergente, quel que soit t. Je vais maintenant établir qu'alors la série de l'expression de l'anomalie vraie, développée de la même manière, est pareillement convergente.

3. L'anomalie excentrique étant u, et v l'anomalie vraie, on a, par le n° 20 du Livre II de la *Mécanique céleste*,

$$t=u-e\sin u,$$
$$\mathrm{R}=1-e\cos u,$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{\mathrm{R}};$$

or on a, par la loi des aires proportionnelles au temps,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{R}^2};$$

on a donc

$$\frac{dv}{dt}=\left(\frac{du}{dt}\right)^2\sqrt{1-e^2}.$$

L'expression en série de u, du n° **22** du Livre cité, donne

$$\frac{du}{dt}=1+e\cos t+\frac{e^2}{1.2.2}2^2\cos 2t+\frac{e^3}{1.2.3.2^2}(3^3\cos 3t-3\cos t)+\ldots.$$

Le terme général de cette série est

$$\frac{e^i}{1.2.3\ldots i.2^{i-1}}\left[i^i\cos it-i(i-2)^i\cos(i-2)t\right.$$
$$\left.+\frac{i(i-1)}{1.2}(i-4)^i\cos(i-4)t-\ldots\right],$$

et, dans aucun cas, il ne peut surpasser

$$\frac{e^i}{1.2.3\ldots i.2^{i-1}}\left[i^i+i(i-2)^i+\frac{i(i-1)}{1.2}(i-4)^i+\ldots\right].$$

En suivant exactement l'analyse de l'article précédent, on trouve ce dernier terme égal à

$$(e) \qquad \frac{2}{\sqrt{i}}\,\frac{1-2\omega}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{ec(1-2\omega)}{2\omega^{\omega}(1-\omega)^{1-\omega}}\right]^i,$$

ω étant donné par l'équation (c) de l'article précédent.

Maintenant, si l'on désigne par A la série

$$1+e+\frac{2^2e^2}{1.2.2}+\ldots+\frac{e^{i'}}{1.2.3\ldots i'.2^{i'-1}}\left[i'^{i'}+i'(i'-2)^{i'}+\frac{i'(i'-1)}{1.2}(i'-4)^{i'}+\ldots\right]+\ldots,$$

la série étant continuée jusqu'à $i'=i$, il est facile de voir que l'expression en série de $\frac{du}{dt}$ sera moindre que le développement en série de la fonction

$$(o) \qquad \mathrm{A}+\frac{2(1-2\omega)q^ie^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)},$$

en désignant par q la quantité

$$\frac{(1-2\omega)c}{2\omega^{\omega}(1-\omega)^{1-\omega}}.$$

Car il est visible que le coefficient d'une puissance quelconque e^s dans le développement de la fonction (o) est positif, et qu'il est plus grand, abstraction faite du signe, que le coefficient de la même puissance dans le développement de $\frac{du}{dt}$. L'expression de $\frac{dv}{dt}$ ou de $\left(\frac{du}{dt}\right)^2\sqrt{1-e^2}$ est donc moindre que

$$\left[\mathrm{A}+\frac{2(1-2\omega)q^ie^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)}\right]^2\sqrt{1-e^2};$$

or le développement de $\sqrt{1-e^2}$ est moindre que celui de $\frac{1}{1-e^2}$; le développement de $\frac{dv}{dt}$ est moindre que celui de

$$(p)\qquad \frac{\left[\mathrm{A}+\frac{2(1-2\omega)q^ie^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)}\right]^2}{1-e^2};$$

c'est-à-dire que le coefficient d'une puissance quelconque e^s dans le développement de cette fonction est positif et plus grand, abstraction faite du signe, que le coefficient de la même puissance dans le développement de $\frac{dv}{dt}$.

Donnons à la fonction (p) cette forme

$$\frac{\mathrm{A}^2}{1-e^2}+\frac{4\mathrm{A}(1-2\omega)q^ie^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)(1-e^2)}+\frac{2(1-2\omega)^2q^{2i}e^{2i}}{\pi(1-qe)^2(1-e^2)}.$$

Le terme $\frac{\mathrm{A}^2}{1-e^2}$, développé en série, donne une série convergente. Car, quelque grand que l'on suppose i, pourvu qu'il soit fini, A^2 sera composé d'un nombre fini de termes. En désignant par $me^{i'}$ l'un de ces termes, $\frac{me^{i'}}{1-e^2}$, développé en série, donnera une série convergente, e étant supposé moindre que l'unité. Ainsi $\frac{\mathrm{A}^2}{1-e^2}$ donnera un nombre fini de séries convergentes, et, dans leur somme, le terme dépendant de e^s deviendra nul lorsque s est infini.

Le terme

$$\frac{4\mathrm{A}(1-2\omega)q^ie^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)(1-e^2)}$$

donnera un nombre fini de termes de la forme

$$\frac{ne^i}{(1-qe)(1-e^2)};$$

or la fraction

$$\frac{1}{(1-qe)(1-e^2)}$$

se décompose dans les trois suivantes

$$\frac{1}{2(1-q)}\,\frac{1}{1-e}+\frac{1}{2(1+q)}\,\frac{1}{1+e}-\frac{q^2}{1-q^2}\,\frac{1}{1-qe}.$$

Chacune d'elles, développée en série, donne une série convergente; car, par la supposition, qe est moindre que l'unité. On voit donc que le terme

$$\frac{4\mathrm{A}(1-2\omega)q^ie^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)(1-e^2)}$$

donne une série convergente. Pareillement le terme

$$\frac{2(1-2\omega)^2q^{2i}e^{2i}}{\pi(1-qe)^2(1-e^2)}$$

donne une série convergente, comme il est facile de le voir en décomposant la fraction

$$\frac{1}{(1-qe)^2(1-e^2)}$$

en fractions partielles; $\frac{dv}{dt}$, développé en série ordonnée par rapport aux puissances de l'excentricité, donne, par conséquent, une série convergente lorsque qe est moindre que l'unité. Il est facile d'en conclure que l'expression de $v-t$, ainsi développée, forme une série convergente; car, l'intégration de dv faisant acquérir des diviseurs à ses termes, on voit que, quel que soit t, $v-t$ sera moindre que

$$\frac{\left[\mathrm{A}+\frac{2(1-2\omega)q^ie^i}{\sqrt{2\pi}(1-qe)}\right]^2}{1-e^2},$$

qui, comme on vient de le voir, forme une série convergente.

Il résulte de ce qui précède que la condition nécessaire pour la convergence des séries qui expriment le rayon vecteur et l'anomalie vraie, développés suivant les puissances de l'excentricité, est que l'excentricité soit moindre que

$$\frac{2\sqrt{\omega(1-\omega)}}{1-2\omega},$$

ω étant donné par l'équation

$$\frac{1-\omega}{\omega} = c^{\frac{2}{1-2\omega}}.$$

Les deux séries sont alors convergentes; c'est ce qui a lieu pour toutes les planètes, même pour les planètes télescopiques. Les valeurs supérieures de l'excentricité font diverger la série du rayon vecteur, et alors il faut recourir à d'autres développements. Tel est le cas de la comète à courte période.

4. On développe encore les expressions de l'anomalie vraie et du rayon vecteur suivant les sinus et cosinus multiples de l'anomalie moyenne. Soit alors

$$v = t + a^{(1)}\sin t + a^{(2)}\sin 2t + \ldots + a^{(i)}\sin it + \ldots,$$

$a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ étant des fonctions de l'excentricité. On peut facilement démontrer que la série est toujours convergente. En effet, on a

$$\int (v-t)\,dt\sin it = \pi a^{(i)},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t égale 2π. Or on a dans ces limites, en intégrant par parties,

$$\int dt(v-t)\sin it = \frac{1}{i}\int dt\left(\frac{dv}{dt}-1\right)\cos it = -\frac{1}{i^2}\int dt\sin it\,\frac{d^2v}{dt^2};$$

on aura donc

$$a^{(i)} = -\frac{1}{i^2\pi}\int dt\sin it\,\frac{d^2v}{dt^2}.$$

L'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{R^2}$$

donne

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{2\sqrt{1-e^2}}{R^3}\cdot\frac{dR}{dt}.$$

Au périhélie et à l'aphélie, $\frac{dR}{dt}$ est nul; $\frac{dR}{R^3}dt$ est positif, en allant du premier de ces points au second, et négatif du second au premier. Soit k sa plus grande valeur positive; $-k$ sera sa plus grande valeur négative. En supposant donc que les valeurs de $\sin it$ soient positives et égales à l'unité depuis le périhélie jusqu'à l'aphélie, et négatives et égales à -1 depuis l'aphélie jusqu'au périhélie, on voit que l'intégrale $dt\sin it\int\frac{\frac{dR}{dt}}{R^3}$, prise depuis t nul jusqu'à t égal à 2π, sera moindre, abstraction faite du signe, que $2k\pi$. De là il suit que $a^{(i)}$, abstraction faite du signe, est moindre que

$$\frac{4k\sqrt{1-e^2}}{i^2}.$$

Ce terme devient nul lorsque i est infini. De plus, la série de l'expression précédente de v, à partir de i supposé très-grand, est moindre que

$$\frac{4k\sqrt{1-e^2}}{i};$$

quantité qui devient nulle lorsque i est infini. Cette série est donc convergente.

Considérons de la même manière l'expression de R développée dans une série ordonnée par rapport aux cosinus de t et de ses multiples. Soit

$$R = b^{(0)} + b^{(1)}\cos t + \ldots + b^{(i)}\cos it + \ldots;$$

on aura

$$\pi b^{(i)} = \int R\,dt\cos it,$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t égal à 2π, ce qui donne

$$\pi b^{(i)} = -\frac{1}{i^2}\int dt\cos it\,\frac{d^2R}{dt^2}.$$

Les formules du mouvement elliptique donnent

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{1 - e^2 - R}{R^3}.$$

Cette dernière quantité est toujours négative ([1]). Désignons par $-k'$ son maximum, et supposons $\cos it$ égal à l'unité; on aura, abstraction faite du signe, $\pi b^{(i)}$ moindre que $\frac{2k'\pi}{i^2}$, d'où il suit que la série de l'expression de R est convergente.

On peut, en suivant la méthode exposée dans le numéro précédent, déterminer la valeur approchée de $b^{(i)}$ lorsque i est un grand nombre. Pour cela, j'observe que l'expression de R, développée en série par rapport aux puissances de l'excentricité, et que nous avons rapportée dans le n° **2**, donne

$$b^{(i)} = -\frac{e^i i^{i-2}}{1.2.3\ldots i.2^{i-1}}\left[i - \frac{i+2}{1(i+1)}\left(\frac{ei}{2}\right)^2 + \frac{i+4}{1.2(i+1)(i+2)}\left(\frac{ei}{2}\right)^4 - \frac{i+6}{1.2.3.(i+1)(i+2)(i+3)}\left(\frac{ei}{2}\right)^6 + \ldots\right].$$

Le terme général de cette expression est

$$\pm\frac{e^i i^{i-2}}{1.2.3\ldots i.2^{i-1}}\,\frac{(i+2r)\left(\frac{ei}{2}\right)^{2r}}{1.2.3\ldots r(i+1)(i+2)\ldots(i+r)}.$$

Si l'on observe que, r étant un très-grand nombre, on a, à fort peu près,

$$1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots(i+r) = r^{r+\frac{1}{2}}(i+r)^{i+r+\frac{1}{2}}c^{-i-2r}.2\pi,$$

on peut donner à ce terme la forme

$$\pm\frac{e^i c^i i^{i-2}(i+2r)}{2^i\pi(i+r)^i\sqrt{r(i+r)}}\left[\frac{e^2 i^2 c^2}{4r(i+r)}\right]^r,$$

[1] La quantité $1 - e^2 - R$ n'est pas toujours négative, puisque R varie de la valeur $1 - e$ qui rend cette expression positive à la valeur $1 + e$ qui la rend négative; mais cette assertion inexacte n'empêche pas la conclusion d'être juste. V. P.

quantité qui devient nulle lorsque r est infini. La série de l'expression de $b^{(i)}$ est donc convergente.

Pour avoir sa valeur approchée, je considère la série

$$(m)\qquad i + \frac{i+2)}{1(i+1)}\left(\frac{ei}{2}\right)^2 + \frac{i+4}{1.2(i+1)(i+2)}\left(\frac{ei}{2}\right)^4 + \ldots,$$

dont le terme général est

$$\frac{(i+2r)\left(\frac{ei}{2}\right)^{2r}}{1.2.3\ldots r.(i+1)(i+2)\ldots(i+r)}.$$

On aura, par la méthode exposée dans le n° **2**, la somme de cette série fort approchée lorsque i est un très-grand nombre. Nommons p le terme précédent, et supposons qu'il soit le plus grand des termes de la série. Pour avoir le rang qu'il y occupe, on l'égalera, suivant la méthode citée, au terme qui le précède, ce qui donne

$$(i+2r-2)r(i+r) = (i+2r)\frac{i^2 e^2}{4},$$

d'où l'on tire, à fort peu près,

$$r = \frac{i\sqrt{1+e^2} - i}{2}.$$

Le terme qui suit p, d'un rang supérieur de t, est

$$\frac{p\,\frac{i+2r+2t}{i+2r}\left(\frac{ei}{2}\right)^{2t}}{(r+1)(r+2)\ldots(r+t)(i+r+1)(i+r+2)\ldots(i+r+t)}.$$

En appliquant ici l'analyse du n° **2**, il est facile de voir que le logarithme de ce terme est, à très-peu près,

$$\log p + \frac{2t}{i+2r} + 2t\log\frac{ei}{2} - t\log r - \frac{1+2+3+\ldots+t}{r} - t\log(i+r) - \frac{1+2+3+\ldots+t}{i+r}.$$

Mais on a, à très-peu près,

$$\log r(i+r) = 2\log\frac{ei}{2};$$

en ne conservant donc, conformément à la méthode citée, parmi les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$, que ceux qui sont multipliés par t^2, et observant que

$$1+2+3+\ldots+t = \frac{t^2+t}{2},$$

le logarithme du terme placé à la distance t du terme maximum sera

$$\log p - \frac{(i+2r)t^2}{2r(i+r)};$$

ce terme sera donc

$$p.c^{-\frac{(i+2r)t^2}{2r(i+r)}}.$$

Il est facile de voir que ce sera aussi l'expression du terme qui précède p du même intervalle t. La somme de la série (m) sera donc, à très-peu près,

$$p\int dt\, c^{-\frac{(i+2r)t^2}{2r(i+r)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, ce qui donne cette somme égale à

$$p\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{r(i+r)}{i+2r}}.$$

Si dans l'expression précédente de p on substitue, au lieu du produit

$$1.2.3\ldots r(i+1)(i+2)\ldots(i+r),$$

sa valeur très-approchée

$$\frac{[r(i+r)]^r(i+r)^i.2\pi c^{-i-2r}\sqrt{r(i+r)}}{1.2.3\ldots i},$$

on aura

$$p = \frac{1.2.3\ldots i(i+2r)c^{i+2r}}{2\pi\sqrt{r(i+r)}(i+r)^i},$$

ce qui, en observant que $i+2r$ est égal à $i\sqrt{1+e^2}$ et que $i+r$ est égal à

$$\frac{i\sqrt{1+e^2}+i}{2},$$

donne, pour la somme de la série (m),

$$\frac{1.2.3\ldots i(1+e^2)^{\frac{1}{4}}.2^i c^{i\sqrt{1+e^2}}\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi}.i^i\left(\sqrt{1+e^2}+1\right)^i}.$$

En changeant e^2 dans $-e^2$ dans cette expression, on aura la valeur fort approchée de la série

$$i - \frac{i+2}{1(i+1)}\left(\frac{ei}{2}\right)^2 + \frac{(i+4)\left(\frac{ei}{2}\right)^4}{1.2(i+1)(i+2)} - \frac{(i+6)\left(\frac{ei}{2}\right)^6}{1.2.3(i+1)(i+2)(i+3)} + \ldots.$$

Ces passages du positif au négatif, comme du réel à l'imaginaire, ne doivent être employés qu'avec une grande circonspection. Mais ici, e^2 étant indéterminé, on peut les employer sans crainte. J'en ai reconnu d'ailleurs l'exactitude par une autre analyse. On a ainsi

$$b^{(i)} = -\frac{2(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{i\sqrt{i}\sqrt{2\pi}}\,\frac{c^{i\sqrt{1-e^2}}e^i}{\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)^i}.$$

Lorsque i est infini, cette valeur de $b^{(i)}$ reste toujours infiniment petite, quel que soit e, pourvu qu'il n'excède pas l'unité.

Sur le flux et reflux lunaire atmosphérique.

5. J'ai donné, à la fin du Livre XIII de mon *Traité de Mécanique céleste*, la théorie du flux et reflux lunaire atmosphérique. J'ai conclu les éléments de ce phénomène d'une longue suite d'observations du baromètre faites à l'Observatoire Royal pendant sept années consécutives, chaque jour à neuf heures du matin, à midi, et le soir à trois heures et à neuf heures. L'ensemble de ces observations, réduites par M. Bouvard à zéro de température, a donné cinquante-cinq millièmes de millimètre pour l'étendue entière du flux lunaire, depuis son maxi-

mum jusqu'à son minimum, et trois heures dix-neuf minutes sexagésimales pour l'heure de son maximum du soir, le jour de la syzygie. Mais j'ai reconnu par le Calcul des probabilités que cette heure et l'existence même du phénomène sensible à Paris n'ont qu'un faible degré de probabilité. Le système d'observations suivi à l'Observatoire Royal, déjà adopté dans quelques autres Observatoires, et que l'on doit désirer de voir répandu généralement, est dû à M. Ramond, qui l'a employé dans les nombreuses observations qu'il a faites à Clermont, chef-lieu du département du Puy-de-Dôme. Il l'a exposé, ainsi que les résultats qu'il en a déduits sur la variation diurne du baromètre, dans plusieurs Mémoires lus à l'Institut, et qui peuvent être regardés comme une des choses les plus intéressantes que l'on ait faites en Météorologie. M. Bouvard a confirmé ces résultats dans ses recherches, qu'il vient de perfectionner en ajoutant quatre années d'observations à celles des sept années qu'il avait considérées, et en discutant avec une attention scrupuleuse les observations de ces onze années, dans la réduction desquelles il a eu égard à la dilatation de l'échelle du baromètre.

Ce travail immense m'a fait reprendre ma théorie du flux lunaire atmosphérique. J'ai déterminé avec un soin spécial les facteurs par lesquels on doit multiplier les diverses équations de condition pour obtenir les résultats les plus avantageux, dans lesquels l'erreur moyenne à craindre, en plus ou en moins, est un minimum. Ces facteurs ne sont point ceux que donne le procédé connu sous le nom de *Méthode des moindres carrés,* procédé qui n'est qu'un cas particulier de la méthode la plus avantageuse, et dont il diffère dans la plupart des questions où il a été employé. En effet, lorsqu'il s'agit, par exemple, de corriger les éléments elliptiques du mouvement des planètes, on forme des équations de condition, en égalant chaque longitude observée à la longitude calculée par ces éléments augmentés, chacun, de sa correction. On forme ainsi un grand nombre d'équations de condition. Ensuite on multiplie chacune d'elles par le coefficient de la première correction, et l'on ajoute toutes ces équations ainsi multipliées, ce qui

donne une première équation finale. En opérant de la même manière relativement à la seconde correction, à la troisième, etc., on forme autant d'équations finales qu'il y a de corrections, que l'on détermine en résolvant ces équations. Mais la longitude n'est point le résultat d'une observation directe; elle est déduite de deux observations faites avec des instruments différents, dont l'un donne l'ascension droite de l'astre, et dont l'autre donne sa déclinaison. La loi de probabilité des erreurs de chacun de ces instruments peut n'être pas la même; de plus, ces erreurs ont, suivant la position de l'astre, une influence différente sur la longitude. La méthode des moindres carrés, dont plusieurs géomètres ont donné des preuves très-peu satisfaisantes, ne donne point ici les facteurs les plus avantageux; elle n'a plus que l'avantage d'offrir un moyen régulier de former les équations finales. J'ai présenté, dans le troisième *Supplément* à ma *Théorie analytique des Probabilités*, l'expression générale des facteurs les plus avantageux.

M. Bouvard, ayant appliqué mes formules à toutes les observations qu'il a considérées, en a conclu que l'étendue entière du flux lunaire est de dix-huit millièmes de millimètre, et que l'heure du plein flux lunaire, le soir du jour de la syzygie, est deux heures huit minutes. Ces nouveaux résultats sont différents des premiers; mais, quoiqu'ils soient fondés sur 298 syzygies et autant de quadratures, dans chacune desquelles on a considéré le second et le premier jour avant la phase, le jour même de la phase et les deux jours suivants, ils n'ont cependant qu'un faible degré de probabilité, en sorte que l'on doit jusqu'ici regarder comme incertaine l'existence sensible à Paris du flux lunaire atmosphérique. Le même nombre d'observations, faites avec le même soin à l'équateur et discuté de la même manière, indiquerait ce phénomène avec une grande probabilité. Il est vraisemblable que de pareilles observations, faites dans un port où les marées sont très-grandes, tel que celui de Saint-Malo, manifesteraient le flux atmosphérique produit par l'élévation et par la dépression de l'atmosphère, dues à l'élévation et à la dépression alternatives de la surface de la mer.

M. Ramond a remarqué, le premier, que la variation diurne du baromètre de neuf heures du matin à trois heures du soir n'était pas la même dans toutes les saisons; M. Bouvard a confirmé ce résultat. Il a trouvé : 1° la variation moyenne des trois mois de novembre, décembre et janvier égale à $0^{mm},557$; 2° celle des trois mois suivants égale à $0^{mm},940$; 3° celle des trois mois de mai, juin et juillet égale à $0^{mm},752$; 4° celle des trois autres mois égale à $0^{mm},802$; ce qui donne $0^{mm},762$ pour la variation moyenne de l'année entière. Ces différences dépendent-elles des anomalies du hasard, ou indiquent-elles des causes régulières? C'est ce que le Calcul des probabilités peut seul faire connaître. Il était donc intéressant de l'appliquer à cet objet. J'ai trouvé qu'il y a une très-grande probabilité que des causes régulières ont produit le minimum $0^{mm},557$ de la variation et son maximum $0^{mm},940$, mais que les différences entre les variations $0^{mm},752$, $0^{mm},802$ et la moyenne $0^{mm},762$ de l'année peuvent, sans invraisemblance, être attribuées aux anomalies du hasard.

Les 132 mois d'observations que M. Bouvard a discutées pour avoir la variation diurne du baromètre présentent ce phénomène remarquable, savoir, que la variation moyenne de neuf heures du matin à trois heures du soir a été positive pour chacun de ces mois. Je trouve, par le Calcul des probabilités, que ce phénomène, loin d'être extraordinaire, est, *a priori*, vraisemblable.

6. Je nomme λ l'heure sexagésimale du flux et reflux lunaire atmosphérique du soir, le jour de la syzygie, supposée arriver à midi, cette heure étant convertie en arc, à raison de la circonférence pour un jour. Je nomme R la hauteur du baromètre au-dessus de sa hauteur moyenne, au moment du flux, produite par l'action de la Lune sur l'atmosphère. Je fais

$$4R\sin\lambda = x,\quad 4R\cos\lambda = y.$$

Soient A_i, A'_i, A''_i les hauteurs observées du baromètre à neuf heures sexagésimales du matin, à midi et à trois heures du soir, le jour $i^{ième}$ à partir de la syzygie, i étant nul pour le jour de la syzygie, positif pour

les jours qui le suivent, et négatif pour les jours qui le précèdent. Soient pareillement B_i, B'_i, B''_i les hauteurs observées du baromètre, à neuf heures du matin, midi et trois heures du soir, le jour $i^{ième}$ à partir de la quadrature. Je suis parvenu, dans le Chapitre VII du Livre XIII de la *Mécanique céleste*, aux deux équations suivantes :

$$(O)\qquad x\cos 2iq + y\sin 2iq = E_i,\quad y\cos 2iq - x\sin 2iq = F_i,$$

dans lesquelles q est le moyen mouvement synodique de la Lune dans un jour, et l'on a

$$E_i = A''_i - A'_i + B_i - B'_i,$$
$$F_i = (2A'_i - A_i - A''_i - 2B'_i + B_i + B''_i)\left(1 + \frac{1}{19}\right);$$

les équations (O) donnent

$$(u)\qquad x = E_i\cos 2iq - F_i\sin 2iq.$$

On peut former autant d'équations semblables qu'il y a de syzygies et que i a de valeurs. En nommant donc n le nombre de syzygies, n étant un grand nombre; en nommant s' le nombre des valeurs de i, on aura ns' valeurs de x, d'où il faut conclure la valeur la plus avantageuse, c'est-à-dire celle dans laquelle l'erreur moyenne à craindre, en plus ou en moins, est la plus petite.

On doit pour cela multiplier chacune des ns' équations que représente l'équation (u) par un facteur convenable. J'ai fait voir dans le troisième *Supplément* à ma *Théorie analytique des Probabilités* que, si l'on a entre les éléments $x, y, z, \ldots$ un grand nombre d'équations de condition représentées par la suivante,

$$(i)\qquad l^{(s)}x + p^{(s)}y + q^{(s)}z + \ldots = a^{(s)} + m^{(s)}\gamma^{(s)} + n^{(s)}\lambda^{(s)} + r^{(s)}\delta^{(s)} + \ldots,$$

le facteur le plus avantageux par lequel cette équation doit être multipliée est

$$\frac{1}{\frac{k''}{k}m^{(s)2} + \frac{\bar{k}''}{\bar{k}}n^{(s)2} + \frac{\bar{\bar{k}}''}{\bar{\bar{k}}}r^{(s)2} + \ldots},$$

$k, k'', \bar{k}, \overline{k''}, \ldots$ dépendant des lois de probabilité des erreurs $\gamma^{(s)}, \lambda^{(s)}, \ldots$, de la manière suivante. Si $\varphi(\gamma^{(s)})$ est la loi de probabilité de l'erreur $\gamma^{(s)}$, cette loi étant supposée la même pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives, on a

$$k = 2\int d\gamma^{(s)}\,\varphi(\gamma^{(s)}), \quad k'' = \int d\gamma^{(s)}\,\gamma^{(s)2}\,\varphi(\gamma^{(s)}),$$

les intégrales étant prises depuis zéro jusqu'à l'infini; pareillement, si $\psi(\lambda^{(s)})$ est la loi de probabilité des erreurs $\lambda^{(s)}$, on a

$$\bar{k} = 2\int d\lambda^{(s)}\,\psi(\lambda^{(s)}), \quad \overline{k''} = \int d\lambda^{(s)}\,\lambda^{(s)2}\,\psi(\lambda^{(s)}),$$

et ainsi du reste. Dans la question présente, $\gamma^{(s)}, \lambda^{(s)}, \ldots$ sont les erreurs des observations désignées par les lettres $A_i^{(s)}, A_i'^{(s)}, A_i''^{(s)}, B_i^{(s)}, \ldots$, observations qui se rapportent au $i^{\text{ième}}$ jour depuis la $s^{\text{ième}}$ syzygie. La loi des erreurs des observations étant supposée la même pour toutes ces observations, on aura

$$k = \bar{k} = \bar{\bar{k}} = \ldots, \quad k'' = \overline{k''} = \ldots;$$

le facteur précédent deviendra donc

$$\frac{1}{\dfrac{k''}{k}\left(m^{(s)2} + n^{(s)2} + r^{(s)2} + \ldots\right)}.$$

En désignant par $\gamma_i^{(s)}, \lambda_i^{(s)}, \delta_i^{(s)}, \overline{\gamma_i^{(s)}}, \overline{\lambda_i^{(s)}}, \overline{\delta_i^{(s)}}$ les erreurs des observations $A_i^{(s)}, A_i'^{(s)}, A_i''^{(s)}, B_i^{(s)}, B_i'^{(s)}, B_i''^{(s)}$, et par $\overline{m^{(s)}}, \overline{n^{(s)}}, \overline{r^{(s)}}$, relativement aux trois dernières de ces observations, ce que représentent $m^{(s)}, n^{(s)}, r^{(s)}$ relativement aux trois premières, on aura

$$m^{(s)} = -\cos 2iq + \left(1 + \frac{1}{19}\right)\sin 2iq,$$

$$n^{(s)} = -2\left(1 + \frac{1}{19}\right)\sin 2iq,$$

$$r^{(s)} = \cos 2iq + \left(1 + \frac{1}{19}\right)\sin 2iq,$$

$$\overline{m^{(s)}} = -m^{(s)}, \quad \overline{n^{(s)}} = -n^{(s)}, \quad \overline{r^{(s)}} = -r^{(s)};$$

le facteur précédent devient ainsi

$$\frac{1}{\dfrac{4k''}{k}\left(1 + 2{,}324\sin^2 2iq\right)}.$$

En réunissant toutes les valeurs de x multipliées par ce facteur, on aura

$$\frac{x}{1 + 2{,}324\sin^2 q} = \frac{\cos 2iq\,\dfrac{SE_i^{(s)}}{n} - \sin 2iq\,\dfrac{SF_i^{(s)}}{n}}{1 + 2{,}324\sin^2 2iq},$$

$E_i^{(s)}$ et $F_i^{(s)}$ étant les valeurs de E_i et de F_i relatives à la $s^{\text{ième}}$ syzygie et à la $s^{\text{ième}}$ quadrature à laquelle on la compare. Le signe S indiquant la somme des quantités qu'il précède, pour toutes les syzygies dont le nombre est n, $\dfrac{SE_i^{(s)}}{n}$ et $\dfrac{SF_i^{(s)}}{n}$ seront donc les moyennes des valeurs de $E_i^{(s)}$ et $F_i^{(s)}$, moyennes que l'on obtiendra en substituant dans les expressions de E_i et de F_i, au lieu de $A_i, A_i', A_i'', B_i, \ldots$, leurs valeurs moyennes. L'équation précédente deviendra ainsi

$$\frac{x}{1 + 2{,}324\sin^2 2iq} = \frac{E_i\cos 2iq - F_i\sin 2iq}{1 + 2{,}324\sin^2 2iq};$$

cette équation produit autant d'équations que i a de valeurs. Si l'on réunit ces équations, on aura

$$x\sum\frac{1}{1 + 2{,}324\sin^2 2iq} = \sum\frac{E_i\cos 2iq - F_i\sin 2iq}{1 + 2{,}324\sin^2 2iq},$$

le signe Σ exprimant la somme des valeurs du terme qu'il précède. On aura ainsi, pour la valeur de x la plus avantageuse,

$$x = \frac{\displaystyle\sum\frac{E_i\cos 2iq - F_i\sin 2iq}{1 + 2{,}324\sin^2 2iq}}{\displaystyle\sum\frac{1}{1 + 2{,}324\sin^2 2iq}}.$$

Les équations (O) donnent

$$y = F_i\cos 2iq + E_i\sin 2iq;$$

on aura donc la valeur de y la plus avantageuse en changeant, dans l'expression précédente de x, $\cos 2iq$ dans $\sin 2iq$ et $\sin 2iq$ dans

$-\cos 2iq$, ce qui donne

$$y = \frac{\sum \frac{E_i \sin 2iq + F_i \cos 2iq}{1 + 2,324 \cos^2 2iq}}{\sum \frac{1}{1 + 2,324 \cos^2 2iq}}.$$

M. Bouvard a conclu de ces formules

$$x = 0,031758, \quad y = 0,01534,$$

et l'étendue entière $2R$ du flux lunaire atmosphérique égale à $0,01763$.

7. Je vais présentement déterminer la loi de probabilité des erreurs de ces deux valeurs de x et de y. Il résulte des formules que j'ai données dans ma *Théorie analytique des Probabilités* que, si $\gamma, \lambda, \delta, \ldots$ sont des erreurs indépendantes, mais assujetties à la même loi de probabilité, la probabilité que l'erreur de la fonction

$$m\gamma + n\lambda + r\delta + \ldots$$

sera égale à une quantité quelconque l est proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{\frac{-kl^2}{4k''H}},$$

H étant la somme des carrés de $m, n, r, \ldots$ et c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Si dans la valeur précédente de x on désigne par γ, λ, δ les erreurs des observations $A_i^{(s)}, A_i'^{(s)}, A_i''^{(s)}$, il est facile de voir que les coefficients de ces erreurs sont

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{19}\right)(\sin 2iq - \cos 2iq)\frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}}{n\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}},$$

$$\frac{-2\left(1 + \frac{1}{19}\right)\sin 2iq \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}}{n\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}},$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{19}\right)(\sin 2iq + \cos 2iq)\frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}}{n\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}}.$$

La somme des carrés de ces coefficients est

$$2\frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}\,\frac{1}{n^2\left(\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}\right)^2}.$$

La somme des carrés des coefficients des erreurs des observations $B_i^{(s)}$, $B_i'^{(s)}$, $B_i''^{(s)}$ est égale à la précédente. En ajoutant donc ces deux sommes, on aura

$$4\frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}\,\frac{1}{n^2\left(\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}\right)^2}.$$

Chaque syzygie fournit une quantité semblable; la somme de toutes ces quantités sera donc, pour les n syzygies, la quantité précédente multipliée par le nombre n des syzygies. Cette somme sera donc, relativement à toutes les syzygies, et relativement à toutes les valeurs de i, c'est-à-dire relativement à toutes les observations,

$$\frac{4}{n\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq}}.$$

Ainsi la probabilité que l sera l'erreur de x peut être supposée égale à

$$H c^{\frac{-l^2 n}{16\frac{k''}{k}}\sum \frac{1}{1+2,324 \sin^2 2iq}},$$

H étant une constante qu'il faut déterminer. Pour cela, j'observe que, si l'on intègre cette différentielle depuis $l = -\infty$ jusqu'à $l = \infty$, l'intégrale doit être l'unité, puisqu'il est certain que la valeur de l est comprise dans ces limites; en faisant donc

$$g^2 = \frac{nk}{16k''}\sum \frac{1}{1 + 2,324 \sin^2 2iq},$$

on doit avoir

$$H\int_{-\infty}^{+\infty} dl.c^{-g^2l^2} = 1.$$

Mais on a, par un théorème connu,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\,dl.c^{-g^2l^2} = \sqrt{\pi},$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité ; on a donc

$$\mathrm{H} = \frac{g}{\sqrt{\pi}}.$$

Ainsi la probabilité que l'erreur de la valeur de x sera comprise dans des limites données est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int g\, dl \,.\, c^{-g^2 l^2},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites.

On trouve, de la même manière, que la probabilité que l'erreur de la valeur de y sera comprise dans des limites données est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int g'\, dl \,.\, c^{-g'^2 l^2},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites, et g'^2 étant égal à

$$\frac{nk}{16k''} \sum \frac{1}{1 + 2{,}324 \cos^2 2iq}.$$

Il faut maintenant déterminer par les observations la valeur numérique de $\frac{k}{k''}$. Pour cela, j'observe que, par ma *Théorie analytique des probabilités*, si l'on nomme e la somme des carrés des différences des variations journalières, de neuf heures du matin à trois heures du soir, d'un grand nombre s de jours à leur variation moyenne, on a, avec une très-grande vraisemblance,

$$\frac{2k''}{k} s = e,$$

ce qui donne

$$\frac{k}{k''} = \frac{2s}{e}.$$

Le calcul de $\frac{k}{k''}$ devient pénible lorsque s est très-considérable ; mais on peut le simplifier de la manière suivante :

Je conçois le nombre s de jours partagé en groupes de jours, par exemple, dans un nombre i de mois moyens, et je suppose s assez grand

pour que i soit lui-même un grand nombre. Je désigne par $\bar{k}$ et $\bar{k}''$, relativement à ces mois, ce que j'ai nommé k et k'' relativement aux jours. Soit encore E la somme des carrés des différences des erreurs des variations moyennes de chacun de ces mois à la variation moyenne de tous ces mois. On aura, par ce qui précède,

$$\frac{\bar{k}}{\bar{k}''} = \frac{2i}{\mathrm{E}}.$$

Mais la probabilité de l'erreur u de la variation moyenne de tous ces jours ou de tous ces mois est, par la théorie citée, proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{\frac{-su^2}{4\frac{k''}{k}}}.$$

Elle est encore proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{\frac{-iu^2}{4\frac{\bar{k}''}{\bar{k}}}}.$$

En comparant ces exponentielles, on aura

$$\frac{k}{k''} = \frac{i}{s} \frac{\bar{k}}{\bar{k}''} = \frac{2i^2}{s\mathrm{E}}.$$

Le calcul de E est beaucoup plus simple que celui de e, et c'est ainsi que la valeur numérique de $\frac{k}{k''}$ a été déterminée. Il y avait pour cela quelques précautions à prendre. La variation diurne du baromètre n'est pas la même à Paris dans tous les mois ; elle est la plus petite dans ceux de novembre, décembre et janvier, et la plus grande dans les trois mois suivants. Dans les six autres mois, elle diffère peu de la variation moyenne de l'année. Il y a donc des causes régulières de ces phénomènes, et que l'on ne doit pas confondre avec les causes irrégulières de la variation diurne. Les causes régulières agissant de la même manière sur la variation diurne des syzygies et sur celle des quadratures, elles n'influent point sur les valeurs de x et de y, qui ne dépendent que des différences de ces variations; les valeurs de E_i et de F_i ne dépendent que de ces différences. Il faut donc, pour avoir la loi de probabilité des erreurs dont ces valeurs sont susceptibles, ne considérer que les variations diurnes dépendantes des seules causes irrégulières, et qui paraissent être celles des mois de mai, juin, juillet, août, septembre et octobre; ce sont celles dont on a fait usage pour avoir la valeur de $\frac{k}{k''}$. On a trouvé ainsi, en prenant le millimètre carré pour unité, $E = 2{,}565118$, d'où l'on tire

$$\frac{k}{k''} = 4 \times 0{,}42884.$$

On a ensuite

$$\sum \frac{1}{1 + 2{,}324 \sin^2 2iq} = 3{,}29667,$$

$$\sum \frac{1}{1 + 2{,}324 \cos^2 2iq} = 1{,}97904.$$

Pour déterminer le flux lunaire, j'observe que l'on a $n = 298$, d'où l'on tire

$$g^2 = 3{,}29667 \times 298 \times 0{,}42884 \frac{1}{4},$$

$$g'^2 = 1{,}97904 \times 298 \times 0{,}42884 \frac{1}{4},$$

et, en supposant que la valeur de x soit le résultat des causes accidentelles, la probabilité qu'elle sera comprise dans les limites $\pm 0{,}031758$ sera

$$\frac{\int g\, dl . c^{-g^2 l^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise, relativement à l, dans ces mêmes limites. On trouve, au moyen des données précédentes, $0{,}3617$ pour cette probabilité. Si cette probabilité était fort approchante de l'unité, elle indiquerait, avec une grande vraisemblance, que la valeur de x n'est pas due aux seules anomalies du hasard, et qu'elle est en partie l'effet d'une cause constante qui ne peut être que l'action de la Lune sur l'atmosphère. Mais la différence considérable entre cette probabilité

et la certitude, représentée par l'unité, montre que, malgré le très-grand nombre d'observations employées, cette action n'est indiquée qu'avec une faible vraisemblance, en sorte que l'on peut regarder son existence sensible à Paris comme incertaine. La valeur de y, considérée de la même manière, donne encore plus d'incertitude sur cette existence.

8. Je vais soumettre au Calcul des probabilités quelques singularités que la variation diurne du baromètre a présentées à M. Bouvard. Ce savant astronome a trouvé, par onze années d'observations barométriques faites tous les jours à neuf heures du matin et à trois heures du soir, que la variation moyenne diurne du baromètre dans cet intervalle a été $0^{mm},557$ pour les trois mois de novembre, décembre et janvier; $0^{mm},940$ pour les trois mois de février, mars et avril; $0^{mm},752$ pour les trois mois de mai, juin et juillet; enfin $0^{mm},789$ pour les trois mois d'août, septembre et octobre. Il a trouvé $0^{mm},802$ pour la variation moyenne de l'année. Déterminons la probabilité des différences de ces variations en les supposant dues aux anomalies du hasard.

Si l'on nomme u l'erreur de la variation conclue par une moyenne de onze années ou de cent trente-deux mois, la probabilité de cette erreur sera proportionnelle à

$$c^{\frac{-132\bar{k}}{4\bar{k}''}u^2},$$

comme il est facile de s'en assurer par le n° **20** du Livre II de ma *Théorie analytique des probabilités*. Pareillement, si l'on nomme u' l'erreur de la variation conclue par une moyenne des mois de février, mars et avril pendant onze années, la probabilité de u' sera proportionnelle à

$$c^{\frac{-33\bar{k}}{4\bar{k}''}u'^2};$$

la probabilité de l'existence simultanée de u et de u' sera donc proportionnelle à

$$c^{\frac{-33\bar{k}}{4\bar{k}''}(4u^2 + u'^2)}.$$

Soit $u' = u + z$; la probabilité de l'existence simultanée de u et de z sera ainsi proportionnelle à

$$c^{\frac{-33\bar{k}}{4\bar{k}''}\left[5\left(u+\frac{1}{5}z\right)^2+\frac{4}{5}z^2\right]}.$$

En multipliant cette exponentielle par du et intégrant le produit depuis $u = -\infty$ jusqu'à $u = \infty$, on aura une quantité proportionnelle à la probabilité de la valeur de z correspondante à l'ensemble de toutes les valeurs de u, et cette exponentielle sera proportionnelle à

$$c^{\frac{-33\bar{k}}{4\bar{k}''}\cdot\frac{4}{5}z^2}.$$

En faisant donc

$$h^2 = \frac{33\bar{k}}{4\bar{k}''}\cdot\frac{4}{5},$$

la probabilité que la valeur de z sera comprise dans des limites données est

$$\frac{\int h\,dz\,.\,c^{-h^2z^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites. Par les observations précédentes, z est égal à $0^{mm},940 - 0^{mm},763$ ou à $0^{mm},177$; ainsi la probabilité que z est au-dessous de $0^{mm},177$ est

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0,177.h}^{\infty} dt\,.\,c^{-t^2}.$$

On a, par le n° 44 de ma *Théorie analytique des probabilités*,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{T}^{\infty} dt\,.\,c^{-t^2} = \frac{c^{-T^2}}{2T\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2T^4} - \frac{1.3.5}{2^3T^6} + \ldots\right),$$

et la série a l'avantage de donner une valeur alternativement plus grande et plus petite, suivant que l'on s'arrête à un nombre pair ou impair de ses termes.

Si l'on fait $\frac{1}{2T^2} = q$, la série $1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2T^4} - \ldots$ peut être mise

sous la forme suivante de fraction continue

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \cfrac{4q}{1 + \ldots}}}}}$$

Ici l'on a

$$T = 0,177.h, \quad h^2 = 33\cdot\frac{\bar{k}}{4\bar{k}''}\cdot\frac{4}{5},$$

et l'on a, par le numéro précédent,

$$\frac{\bar{k}}{4\bar{k}''} = 33\cdot\frac{k}{4k''} = 33 \times 0,42884 = 14,15172;$$

on a donc

$$T^2 = (0,177)^2 \times 26,4 \times 14,15172;$$

c'est le logarithme hyperbolique de c^{T^2}, et, pour avoir le logarithme tabulaire de cette exponentielle, il faut le multiplier par 0,434294. On trouvera ainsi, à fort peu près,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{T}^{\infty} dt\,.\,c^{-t^2} = 0,0000000650;$$

en retranchant ce nombre de l'unité, on aura la probabilité que l'excès de la variation diurne observée pendant les trois mois de février, mars et avril, et pendant onze années, sur la variation moyenne des onze années, serait moindre que $0^{mm},177$, s'il était dû aux simples anomalies du hasard. L'excès observé indique donc avec une extrême vraisemblance une cause constante, qui augmente à Paris la variation diurne du baromètre pendant les trois mois cités.

On trouve de la même manière que l'excès $0^{mm},205$ de la variation moyenne de l'année sur la variation moyenne des trois mois de novembre, décembre et janvier indique avec une vraisemblance encore plus grande une cause constante, qui diminue la variation diurne pendant ces mois.

Enfin on trouve que les différences observées entre la variation moyenne de l'année et les variations moyennes soit des trois mois de mai, juin et juillet, soit des trois mois d'août, de septembre et octobre, peuvent sans invraisemblance être attribuées aux seules anomalies du hasard.

Les observations de la variation diurne du baromètre, de neuf heures du matin à trois heures du soir, discutées par M. Bouvard, présentent ce phénomène remarquable, savoir, que la variation moyenne de chacun des cent trente-deux mois qu'il a considérés a été positive. Pour apprécier la probabilité de ce phénomène, je supposerai que la variation moyenne des trois mois de novembre, décembre et janvier serait, indépendamment des anomalies du hasard et par l'effet des seules causes régulières, celle que M. Bouvard a conclue de onze années d'observations, savoir $0^{mm},557$. Je ferai une supposition semblable relativement à la variation des trois mois suivants, février, mars et avril, qui a été trouvée de $0^{mm},940$. Enfin je supposerai que la variation moyenne des six autres mois, qui ne paraît être soumise qu'à l'action des causes accidentelles, est celle que l'on a trouvée pour l'année entière, savoir $0^{mm},762$. Cela posé, si l'on nomme u l'erreur de la variation d'un mois, due aux seules causes accidentelles, la probabilité de cette erreur sera, par ce qui précède, proportionnelle à $c^{-12,525.u^2}$. D'où il est facile de conclure que la probabilité que u ne sera pas au-dessous de $0^{mm},557$ sera

$$1-\frac{\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

en supposant

$$t^2=14,15172.u^2,$$

et l'intégrale étant prise depuis $t=0,557.\sqrt{14,15172}$ jusqu'à $t=\infty$.

La probabilité qu'aucun des trois mois de novembre, décembre et janvier n'aura de variation négative, ou que l'erreur négative de u n'atteindra jamais $-0^{mm},557$, sera

$$\left(1-\frac{\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\right)^3,$$

et celle que le même résultat aura lieu pendant onze années sera

$$\left(1-\frac{\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\right)^{33}.$$

On trouvera de la même manière que la probabilité semblable relative aux trois mois de février, mars et avril est

$$\left(1-\frac{\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\right)^{33},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0,940.\sqrt{14,15172}$ jusqu'à $t=\infty$.

Enfin on trouvera que la probabilité semblable relative aux six autres mois est

$$\left(1-\frac{\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\right)^{66},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0^{mm},762.\sqrt{14,15172}$ jusqu'à $t=\infty$.

Le produit de ces trois probabilités est la probabilité du phénomène observé, que l'on trouvera ainsi à peu près égale à 0,9; en sorte que, loin de présenter une chose invraisemblable, il est lui-même vraisemblable.

J'ai supposé, dans tous ces résultats, tous les mois égaux et de trente jours. On leur donnerait plus d'exactitude en y introduisant l'inégalité des mois, ce qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul. Mais comme il suffit que ces résultats soient approchés pour que nos conclusions soient justes, soit relativement à l'existence des causes régulières qui produisent le maximum et le minimum de la variation, soit relativement à la vraisemblance du phénomène suivant lequel tous les cent trente-deux mois ont donné une variation diurne positive, on peut se dispenser de ce calcul.

FIN DU TOME CINQUIÈME.

NOTE.

Averti par M. Souillart, professeur à la Faculté des Sciences de Lille et auteur d'un travail considérable sur la théorie des satellites de Jupiter, que M. Adams avait signalé plusieurs erreurs dans le Chapitre VI du Livre VII de la *Mécanique céleste*, j'ai prié M. Adams de vouloir bien m'en communiquer la liste. L'illustre directeur de l'Observatoire de Cambridge a eu l'obligeance de m'envoyer à ce sujet une Lettre dont la Note suivante est à peu près la traduction. (Les indications de pages et de lignes se rapportent à la présente édition.)

« Le terme

$$-0{,}000264\cos(x+48^\circ{,}27)$$

qui entre dans la valeur de r^{iv} (tome V, page 462, ligne 6) est fautif. Il a été donné au Tome IV (page 341, ligne 8 en remontant) sous la forme équivalente

$$-0{,}000264\cos(5q^{\text{v}}-2q^{\text{iv}}-13^\circ{,}50)$$

et représente à peu près le terme

$$-0{,}0003042733\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}-13^\circ{,}4966),$$

trouvé au Tome III (page 138, avant-dernière ligne), modifié par suite du changement adopté pour la masse de Saturne. Nous disons *à peu près*; car, avec la nouvelle masse de Saturne, on aurait dû trouver $-0{,}000290$ au lieu de $-0{,}000264$; il a dû y avoir là quelque erreur de calcul.

» Mais, au Tome III, pour obtenir la valeur numérique du terme en question, lequel doit être la somme des expressions formant les lignes 7, 5, 4 (en remontant) de la page 138, on a par mégarde pris en signe contraire l'expression contenue dans la première de ces trois lignes. Le terme dont il s'agit aurait donc dû recevoir une double correction, d'abord à cause de cette erreur de signe et ensuite à raison de la nouvelle valeur adoptée pour la masse de Saturne.

» Il est curieux que la même erreur qui vient d'être signalée dans le coefficient $-0{,}000264$ du terme qui dépend de $5q^{\text{v}}-2q^{\text{iv}}$ ait été commise aussi dans la réduction en nombre d'un autre coefficient de la même page 341 (tome IV). Les deux termes de δr^{iv} qui dépendent de $2n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t$ (tome III, page 128) forment, quand on les combine, un terme unique dont le coefficient est $-0{,}0003503$ et ce coefficient, modifié à raison du changement de la masse de Saturne, devient, comme le précédent, $-0{,}000290$, tandis que dans le Tome IV, page 341, ligne 16, le coefficient du terme dépendant de $q^{\text{iv}}-2q^{\text{v}}$ est $-0{,}000264$, exactement comme celui du terme dépendant de $5q^{\text{v}}-2q^{\text{iv}}$.

» Les termes correspondants dans les Tables de Bouvard ont respectivement pour coefficients $-0{,}000290$ et $-0{,}000294$.

» La valeur du terme de δr^{IV} dépendant de $5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{IV}}t$ (tome III, page 138, ligne 2 en remontant) devrait être, d'après les données adoptées par Laplace,

$$-(1+\mu^{\text{v}})\,0{,}0002465\cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} + 32^{\circ}{,}41),$$

les degrés étant centésimaux comme dans la *Mécanique céleste*. La valeur modifiée de ce terme, qui aurait dû être donnée au Tome IV (page 341, ligne 8 en remontant), est

$$-0{,}0002343\cos(5q^{\text{v}} - 2q^{\text{IV}} + 32^{\circ}{,}41).$$

Par conséquent, dans le Tome V, le terme correspondant (page 462, ligne 6) devrait être

$$-0{,}000234\cos(x + 94^{\circ}{,}18)$$

et l'inégalité résultante dans la longitude du quatrième satellite deviendrait ainsi

$$-30'',404\sin(x + 48^{\circ}{,}09) \quad \text{ou} \quad -30'',404\sin(5q^{\text{v}} - 2q^{\text{IV}} - 13^{\circ}{,}68).$$

Les coefficients des termes correspondants, relativement au premier, au second et au troisième satellite, seraient

$$-0'',618, \quad -8'',788, \quad -12'',872,$$

ou, si l'on emploie les rapports de ces coefficients adoptés par Laplace, lesquels ne sont qu'approchés,

$$-0'',682, \quad -8'',810, \quad -12'',784.$$

L'argument de ces inégalités est presque identique à celui du terme fautif de δr^{IV} (tome III, page 138) dont il a déjà été question.

» Enfin le nombre $-44'',334$ (tome V, page 462, ligne 6 en remontant) n'est pas déduit correctement de la formule qui le précède; celle-ci donne en effet $-42'',863$. Les trois coefficients de la dernière ligne de cette page doivent être diminués dans le même rapport. »

V. P.

6114 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.