



物理
08
L
3.3

九州帝國大學理學部
8442
物理學教室

桑本文庫
洋書
0570

理學部 洋 邇及
022232002008974

九州大學藏書



801877

3



3

10

ŒUVRES
COMPLÈTES
DE LAPLACE.



ŒUVRES
COMPLETES
DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR
MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME TROISIÈME.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXVIII



TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,
Membre de l'Institut national de France, et du Bureau
des Longitudes.

TOME TROISIÈME.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,
Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins.

AN XI.



3

A
BONAPARTE,

DE L'INSTITUT NATIONAL.

CITOYEN PREMIER CONSUL,

Vous m'avez permis de vous dédier cet Ouvrage. Il m'est
doux et honorable de l'offrir au Héros pacificateur de l'Europe,
à qui la France doit sa prospérité, sa grandeur et la plus brillante
époque de sa gloire; au Protecteur éclairé des Sciences, qui,
formé par elles, voit dans leur étude la source des plus nobles
jouissances, et dans leurs progrès le perfectionnement de tous

les arts utiles et des institutions sociales. Puisse cet Ouvrage, consacré à la plus sublime des Sciences naturelles, être un monument durable de la reconnaissance que votre accueil et les bienfaits du Gouvernement inspirent à ceux qui les cultivent ! De toutes les vérités qu'il renferme, l'expression de ce sentiment sera toujours pour moi la plus précieuse.

Salut et respect,

LAPLACE.

PRÉFACE.

Nous avons donné, dans la première Partie de cet Ouvrage, les principes généraux de l'équilibre et du mouvement de la matière. Leur application aux mouvements célestes nous a conduit, sans hypothèses et par une série de raisonnements géométriques, à la loi de la gravitation universelle, dont la pesanteur et les mouvements des projectiles sur la Terre ne sont que des cas particuliers. En considérant ensuite un système de corps soumis à cette grande loi de la nature, nous sommes parvenu, au moyen d'une analyse singulière, aux expressions générales de leurs mouvements, de leurs figures et des oscillations des fluides qui les recouvrent; expressions d'où l'on a vu découler tous les phénomènes observés du flux et du reflux de la mer, de la variation des degrés et de la pesanteur à la surface terrestre, de la précession des équinoxes, de la libration de la Lune, de la figure et de la rotation des anneaux de Saturne, et de leur permanence dans le plan de son équateur. Nous en avons déduit les principales inégalités des planètes, et spécialement celles de Jupiter et de Saturne, dont la période embrasse plus de neuf cents années, et qui, n'offrant aux observateurs que des anomalies dont ils ignoraient les lois et la cause, ont paru longtemps faire exception de la théorie de la pesanteur : plus approfondie, elle les a fait connaître, et maintenant ces inégalités en sont une des preuves les plus frappantes. Nous avons développé les variations des éléments du système planétaire qui ne se rétablissent qu'après un très-grand nombre de siècles. Au milieu de tous ces changements, nous

b.

avons reconnu la constance des moyens mouvements et des distances moyennes des corps de ce système, que la nature semble avoir disposé primitivement pour une éternelle durée, par les mêmes vues qu'elle nous paraît suivre si admirablement sur la Terre, pour la conservation des individus et la perpétuité des espèces. Par cela seul que ces mouvements sont dirigés dans le même sens et dans des plans peu différents, les orbes des planètes et des satellites doivent toujours être à peu près circulaires et peu inclinés les uns aux autres. Ainsi la variation de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, renfermée constamment dans d'étroites limites, ne produira jamais un printemps perpétuel sur la Terre. Nous avons prouvé que l'attraction du sphéroïde terrestre, ramenant sans cesse vers son centre l'hémisphère que la Lune nous présente, transporte au mouvement de rotation de ce satellite les grandes variations séculaires de son mouvement de révolution, et dérobe pour toujours l'autre hémisphère à nos regards. Enfin, nous avons démontré, sur les mouvements des trois premiers satellites de Jupiter, ce théorème remarquable, savoir, qu'en vertu de leur action mutuelle, la longitude moyenne du premier, vu du centre de Jupiter, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement et constamment égale à deux angles droits, en sorte qu'ils ne peuvent jamais être à la fois éclipsés. Il nous reste à considérer particulièrement les perturbations du mouvement des planètes et des comètes autour du Soleil, de la Lune autour de la Terre, et des satellites autour des planètes qu'ils accompagnent. C'est l'objet de la seconde Partie de cet Ouvrage, spécialement consacrée à la perfection des Tables astronomiques.

Les Tables ont suivi les progrès de la Science qui leur sert de base, et ces progrès ont d'abord été d'une extrême lenteur. Pendant très-longtemps, on ne considéra que les mouvements apparents des astres : cet intervalle, dont l'origine se perd dans la plus haute antiquité, et qui fut proprement l'enfance de l'Astronomie, comprend les travaux d'Hipparque et de Ptolémée, et ceux des Indiens, des Arabes et des Perses. Le système de Ptolémée, qu'ils ont successivement adopté, n'est, au fond, qu'une manière de représenter les apparences célestes,

et sous ce rapport, il fut utile à la Science. Telle est la faiblesse de l'esprit humain, qu'il a souvent besoin de s'aider d'hypothèses, pour lier les faits entre eux. En bornant les hypothèses à cet usage, en évitant de leur attribuer une réalité qu'elles n'ont point, et en les rectifiant sans cesse par de nouvelles observations, on parvient enfin aux véritables causes, ou du moins aux lois des phénomènes. L'histoire de la Philosophie nous offre plus d'un exemple des avantages que peuvent ainsi procurer les hypothèses, et des erreurs auxquelles on s'expose en les réalisant. Vers le milieu du xvi^e siècle, Copernic, en démêlant dans les apparences les mouvements réels de la Terre autour du Soleil et sur elle-même, montra sous un nouveau point de vue l'univers, et changea la face de l'Astronomie. Un concours inouï de découvertes a rendu mémorable à jamais dans l'histoire des sciences le siècle suivant, d'ailleurs illustré par tant de chefs-d'œuvre en littérature et dans les beaux-arts. Kepler reconnut les lois du mouvement elliptique des planètes; le télescope, trouvé par le plus heureux des hasards et perfectionné aussitôt par Galilée, lui fit voir dans les cieux de nouvelles inégalités et de nouveaux mondes; l'application que fit Huyghens du pendule aux horloges, et celle des lunettes au quart de cercle, en donnant des mesures précises des angles et de la durée, rendirent sensibles les plus petites inégalités des mouvements célestes. En même temps que l'observation offrait à l'esprit humain de nouveaux phénomènes, il créa, pour les expliquer et les soumettre au calcul, de nouveaux instruments de la pensée. Néper inventa les logarithmes; l'Analyse des courbes et la Dynamique prirent naissance dans les mains de Descartes et de Galilée; Newton découvrit le Calcul différentiel, décomposa la lumière et s'éleva au principe général de la pesanteur. Dans le siècle qui vient de s'écouler, les successeurs de ce grand homme ont achevé l'édifice dont il avait posé les fondements. Ils ont perfectionné l'Analyse infinitésimale, inventé le Calcul aux différences partielles infiniment petites et finies, et réduit en formules la Mécanique entière. En appliquant ces découvertes à la loi de la pesanteur, ils ont ramené à cette loi tous les phénomènes célestes, et donné aux théories

et aux Tables astronomiques une précision inespérée dont on est surtout redevable aux travaux des géomètres français, et aux prix proposés par l'Académie des Sciences. Si l'on joint à ces découvertes celles de Bradley sur l'aberration des étoiles et sur la nutation de l'axe terrestre; les mesures multipliées des degrés et du pendule, opérations dont la France a donné l'exemple en envoyant des académiciens au nord, à l'équateur et dans l'hémisphère austral, pour y observer la grandeur de ces degrés et l'intensité de la pesanteur; l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelone, déterminé par des opérations très-précises, et servant de base au système métrique le plus naturel et le plus simple; les nombreux voyages entrepris pour connaître les diverses parties du globe, et pour observer les passages de Vénus sur le Soleil; la détermination exacte des dimensions du Système solaire, fruit de ces voyages; la planète Uranus, ses satellites, et deux nouveaux satellites de Saturne, reconnus par Herschel; enfin, si l'on réunit à toutes ces découvertes l'invention admirable des instruments à réflexion, si utiles à la mer, et celles des lunettes achromatiques, du cercle répétiteur et des montres marines, le dernier siècle, envisagé sous le rapport des progrès de l'esprit humain dans les sciences mathématiques, paraîtra digne de celui qui l'a précédé. Le siècle où nous entrons a commencé sous les auspices les plus favorables à l'Astronomie. Son premier jour a été remarquable par la découverte de la planète Cérès, suivie presque aussitôt de celle de la planète Pallas, dont la moyenne distance au Soleil est à très-peu près la même. La proximité de ces deux corps, d'une extrême petitesse, à Jupiter, et la grandeur des excentricités et des inclinaisons de leurs orbites entrelacées, produisent dans leurs mouvements des inégalités considérables, qui répandront un nouveau jour sur la théorie des attractions célestes, et donneront lieu de la perfectionner encore.

C'est principalement dans les applications de l'Analyse au Système du monde que se manifeste la puissance de ce merveilleux instrument, sans lequel il eût été impossible de pénétrer un mécanisme aussi compliqué dans ses effets qu'il est simple dans sa cause. Le géomètre em-

brasse maintenant dans ses formules l'ensemble du système planétaire et de ses variations successives; il remonte par la pensée aux divers états qu'il a subis dans les temps les plus reculés, et redescend à tous ceux que les temps à venir développeront aux observateurs. Il voit ce sublime spectacle, dont la période embrasse des millions d'années, se renouveler en peu de siècles dans le système des satellites de Jupiter, par la promptitude de leurs révolutions, et produire de singuliers phénomènes, entrevus par les astronomes, mais trop composés ou trop lents pour qu'ils en aient pu déterminer les lois. La théorie de la pesanteur, devenue, par tant d'applications, un moyen de découvertes aussi certain que l'observation elle-même, lui a fait connaître plusieurs inégalités nouvelles, et prédire le retour de la comète de 1759, dont l'action de Jupiter et de Saturne rend les révolutions très-inégales. Par ce moyen, il a su tirer des observations, comme d'une mine féconde, un grand nombre d'éléments importants et délicats, qui, sans l'Analyse, y resteraient éternellement cachés. Telles sont les valeurs respectives des masses du Soleil, des planètes et des satellites, déterminées par les révolutions de ces différents corps et par le développement de leurs inégalités périodiques et séculaires; la vitesse de la lumière et l'ellipticité de Jupiter, données par les éclipses de ses satellites, avec plus de précision que par l'observation directe; la rotation et l'aplatissement d'Uranus et de Saturne, conclus de la position dans un même plan des différents corps qui circulent autour de ces deux planètes. Telles sont encore les parallaxes du Soleil et de la Lune, et la figure même de la Terre, déduites des inégalités lunaires; car on verra dans la suite que la Lune, par ses mouvements, déceut à l'Astronomie perfectionnée la petite ellipticité du sphéroïde terrestre, dont elle fit connaître la rondeur aux premiers astronomes par ses éclipses. Enfin, par une combinaison heureuse de l'Analyse avec les observations, cet astre, qui semble avoir été donné à la Terre pour l'éclairer pendant les nuits, devient encore le guide le plus assuré du navigateur, qu'il garantit des dangers auxquels il fut exposé longtemps par les erreurs de son estime. La perfection de la théorie et des Tables lunaires, à laquelle

il doit ce précieux avantage et celui de fixer avec exactitude la position des objets qui s'offrent à sa vue, est le fruit des travaux des géomètres et des astronomes, depuis plus d'un demi-siècle; elle réunit tout ce qui peut donner du prix aux découvertes : la grandeur et l'utilité de l'objet, la fécondité des résultats et le mérite de la difficulté vaincue. C'est ainsi que les théories les plus abstraites, en se répandant par de nombreuses applications, sur la nature et sur les arts, sont devenues d'inépuisables sources de biens et de jouissances pour celui même qui les ignore.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TROISIÈME VOLUME.

DÉDICACE.....	VII
PRÉFACE.....	IX

SECONDE PARTIE.

THÉORIES PARTICULIÈRES DES MOUVEMENTS CELESTES.

LIVRE VI.

THÉORIE DES MOUVEMENTS PLANÉTAIRES.

OBJET DE CETTE THÉORIE.....	I
CHAPITRE I. — <i>Formules des inégalités planétaires dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites.</i>	5
INÉGALITÉS DÉPENDANTES DE LA SECONDE DIMENSION DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS.....	5
Forme des termes qui les produisent. Influence qu'ont sur elles les rapports des moyens mouvements, à raison des petits diviseurs qu'ils peuvent introduire. Préparations des équations différentielles pour les divers cas que présente, à cet égard, le système solaire. N° 1 et 2.....	5 et 9
Considérations par lesquelles on distingue les plus sensibles de ces inégalités. N° 3.....	10
Développements des termes qui en résultent dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude de la planète troublée. N° 4, 5 et 6.....	11, 13 et 18
INÉGALITÉS DÉPENDANTES DES DIMENSIONS SUPÉRIEURES DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS.....	20
Forme des termes qui les produisent. N° 7.....	20
Examen des cas où elles deviennent sensibles. Ils sont dus aux rapports presque commensurables des moyens mouvements; applications à la théorie de Jupiter et de Saturne pour les termes de la troisième dimension. N° 8.....	23
Inégalités dépendantes de la cinquième dimension. Sont sensibles dans la théorie de Jupiter et de Saturne. Leur calcul pour ces planètes. N° 9.....	27
Inégalités dépendantes de la troisième dimension, qui deviennent sensibles dans la théorie de Mercure troublé par la Terre. N° 10.....	31

	Pages
Les inégalités dépendantes de la seconde dimension, qui affectent le mouvement en latitude de la planète troublée, en introduisant d'analogues dans le mouvement de la planète perturbatrice. Ce sont les seules inégalités en latitude qui soient sensibles dans le système planétaire, parmi celles qui dépendent du produit des excentricités et des inclinaisons. N° 11.....	33
CHAPITRE II. — <i>Inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice</i>	35
Développements de leurs expressions analytiques données dans les n° 65 et 69 du Livre II. Elles résultent de l'influence que les inégalités à longue période ont sur les termes dépendants du carré des masses perturbatrices. Les variations des excentricités et des périhélies peuvent introduire de semblables inégalités dans les moyens mouvements; mais on prouve que les termes dont ces inégalités se composent s'entre-détruisent d'eux-mêmes, d'où il suit que les moyens mouvements et les grands axes n'éprouvent aucune altération par l'effet des termes dont il s'agit. N° 12.....	35
Variations des excentricités, des périhélies, des nœuds et des inclinaisons, dues à la seconde puissance des masses perturbatrices. N° 13 et 14.....	38 et 41
Ces variations n'altèrent point les relations trouvées dans le Livre II entre les éléments des orbites. N° 15.....	42
Examen des termes de l'ordre du carré des masses perturbatrices, qui ont une influence sensible sur les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. N° 16.....	48
Corrections qu'il faut introduire dans les moyens mouvements de ces deux planètes, en vertu de leurs grandes inégalités. N° 17.....	55
Les coefficients des inégalités des planètes varient à raison des variations séculaires des éléments des orbites: Manière d'y avoir égard. N° 18.....	56
CHAPITRE III. — <i>Des perturbations dues à l'ellipticité du Soleil</i>	59
Cette ellipticité donne à la planète un mouvement direct dans son périhélie, et aux nœuds de l'orbite sur le plan de l'équateur solaire, un mouvement rétrograde égal au précédent. Ces inégalités s'affaiblissent rapidement à mesure que la distance au Soleil augmente; elles ne sont sensibles que pour Mercure. L'ellipticité du Soleil n'influe ni sur l'excentricité de l'orbite, ni sur son inclinaison, ne peut altérer la stabilité du système planétaire. N° 18 bis.....	59
CHAPITRE IV. — <i>Des perturbations du mouvement des planètes par l'action de leurs satellites</i>	62
Ces perturbations se déterminent par les théorèmes du n° 10 du Livre II. Leur grandeur dépend des masses des satellites par rapport à celle de la planète, et de leurs elongations vues du Soleil. Elles ne sont sensibles que dans la théorie de la Terre troublée par la Lune. N° 19.....	62
CHAPITRE V. — <i>Considérations sur la partie elliptique du rayon vecteur et du mouvement des planètes. N° 20</i>	64
CHAPITRE VI. — <i>Valeurs numériques des quantités qui entrent dans les expressions des inégalités planétaires</i>	66
Valeurs des masses des planètes. Considérations d'après lesquelles elles ont été calculées. N° 21.....	66

	Pages
Table des éléments planétaires. N° 22.....	69
Calcul numérique des formules données dans le n° 49 du Livre II. N° 23.....	71
CHAPITRE VII. — <i>Expressions numériques des variations séculaires des éléments des orbites planétaires. N° 24 à 26</i>	91, 93 et 98
CHAPITRE VIII. — <i>Théorie de Mercure</i>	100
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Elles sont produites par l'action de Vénus, de la Terre et de Jupiter.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites.	
Inégalités dépendantes de la troisième dimension de ces mêmes quantités.	
Les inégalités en latitude sont insensibles et au-dessous d'un quart de seconde. N° 27.....	100
CHAPITRE IX. — <i>Théorie de Vénus</i>	104
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont la Terre, Mars, Jupiter et Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites.	
Inégalités dépendantes de la troisième dimension de ces mêmes quantités.	
Inégalités en latitude. Elles sont dues à l'action de Mars et de Jupiter. N° 28.....	104
CHAPITRE X. — <i>Théorie du mouvement de la Terre</i>	108
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur terrestre. Les planètes qui les produisent sont Vénus, Mars, Jupiter et Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites.	
Inégalités dépendantes de la troisième dimension de ces mêmes quantités.	
Inégalités du mouvement de la Terre en latitude. Elles sont produites par l'action Vénus et de Jupiter. N° 29.....	108
Inégalités du mouvement de la Terre produites par l'action de la Lune. N° 30.....	112
Des variations séculaires de l'orbite terrestre, de l'équateur et de la longueur de l'année. L'action du Soleil et de la Lune influe considérablement sur leurs valeurs. Détermi-	

nation de l'époque à laquelle le grand axe de l'orbite terrestre coïncidait avec la ligne des équinoxes, et de celle à laquelle ces deux lignes étaient perpendiculaires l'une à l'autre. N° 31.....	114
CHAPITRE XI. — <i>Théorie de Mars</i>	120
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont Vénus, la Terre, Jupiter et Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites.	
Les inégalités en latitude sont très-peu sensibles. Celle qui l'est le plus résulte de l'action de Jupiter. N° 32.....	120
CHAPITRE XII. — <i>Théorie de Jupiter</i>	125
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont la Terre, Saturne et Uranus, mais principalement Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Elles sont assez considérables pour qu'il soit nécessaire d'avoir égard à la variation de leurs coefficients.	
Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons. Sont produites par la seule action de Saturne.	
Inégalités dépendantes des troisième et cinquième dimensions des excentricités et des inclinaisons, ainsi que du carré de la force perturbatrice. Ces dernières, qui sont dues aux inégalités à longues périodes, influent considérablement sur les variations séculaires des éléments elliptiques. Grande inégalité du moyen mouvement. Elle est produite par l'action de Saturne. N° 33.....	125
Inégalités en latitude. Ont pour cause l'action de Saturne. N° 34.....	129
CHAPITRE XIII. — <i>Théorie de Saturne</i>	131
Examen du degré auquel les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont Jupiter et Uranus.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons.	
Inégalités dépendantes de la troisième et cinquième dimension des excentricités et des inclinaisons, ainsi que du carré de la force perturbatrice. Grande inégalité de Saturne. C'est la réaction de celle de Jupiter. N° 35.....	131
Inégalités en latitude. Sont produites par l'action de Jupiter et d'Uranus. N° 36.....	150

CHAPITRE XIV. — <i>Théorie d'Uranus</i>	152
Examen du degré auquel les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Elles sont dues à l'action de Jupiter et de Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons.	
Inégalités dépendantes de la troisième dimension des excentricités et des inclinaisons. Il n'y en a qu'une seule produite par l'action de Saturne. N° 37.....	152
Inégalités en latitude. Sont produites par l'action de Jupiter et de Saturne. N° 38.....	154
CHAPITRE XV. — <i>De quelques équations de condition qui existent entre les inégalités planétaires, et qui peuvent servir à les vérifier.</i> N° 39, 40, 41, 42 et 43.....	155, 158, 160, 161 et 164
CHAPITRE XVI. — <i>Sur les masses des planètes et de la Lune</i>	166
Réflexions sur les valeurs données à ces masses dans le n° 21. Nouvelle détermination de celles de Vénus et de Mars. Discussion de celle de la Lune par la comparaison des divers phénomènes qui peuvent la déterminer, tels que les observations des marées, l'équation lunaire des Tables du Soleil, la nutation de l'axe terrestre et la parallaxe de la Lune. Il en résulte que cette masse est un peu moindre que ne l'indiquent les marées observées à Brest. N° 44.....	166
CHAPITRE XVII. — <i>Sur la formation des Tables astronomiques, et sur le plan invérifiable du système planétaire.</i> N° 45 et 46.....	172 et 173
CHAPITRE XVIII. — <i>De l'action des étoiles sur le système planétaire</i>	174
Le grand éloignement de ces astres rend leur action insensible. Réflexions sur la comparaison des formules précédentes avec les observations. N° 47.....	174

LIVRE VII.

THÉORIE DE LA LUNE.

Exposé de cette théorie; ses difficultés particulières. Considérations par lesquelles on doit y diriger les approximations. Comment on peut en conclure plusieurs éléments importants pour la théorie du système du monde, et entre autres l'aplatissement de la Terre, qui s'obtient ainsi avec plus d'exactitude que par les observations directes.	180
CHAPITRE I. — <i>Intégration des équations différentielles du mouvement lunaire</i>	193
Équations différentielles de ce mouvement données dans le n° 13 du Livre II. Manière d'avoir égard, dans les calculs, à la non-sphéricité de la Lune et de la Terre. N° 1.....	193
Développements des quantités qui entrent dans les équations différentielles, en supposant ces deux corps sphériques. N° 2.....	195

	Pages
L'écliptique, dans son mouvement séculaire, emporte l'orbite de la Lune, de manière que l'inclinaison moyenne de cette orbite sur elle reste toujours la même. Cette circonstance, indiquée par l'analyse, simplifie les calculs, en ce qu'elle permet de prendre pour plan fixe de projection celui de l'écliptique. N° 3.....	196
Recherche de la partie elliptique des mouvements de la Lune et de la Terre. N° 4.....	199
Principes relatifs aux degrés de petitesse des quantités qui entrent dans les expressions des coordonnées de la Lune. Examen de l'influence que les intégrations successives peuvent avoir sur les différents termes dont elles sont composées. Indication des termes du rayon vecteur qui produisent l'évection et l'équation annuelle. N° 5.....	201
Usage de ces considérations. Développement de l'équation différentielle qui donne le rayon vecteur, en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice. N° 6 et 7.....	204 et 212
Recherche des termes de l'ordre du carré et des puissances supérieures des masses perturbatrices qui acquièrent une influence sensible par les intégrations. Il est nécessaire d'avoir égard aux perturbations du mouvement de la Terre par la Lune. N° 8.....	214
Réunion de ces termes aux précédents. Développement complet de l'équation différentielle qui donne le rayon vecteur. N° 9.....	223
Intégration de cette équation. Inégalités qui en résultent. Expression du mouvement du périhélie lunaire.	
La variabilité de l'excentricité de l'orbite terrestre introduit une inégalité séculaire dans la constante de la parallaxe lunaire; mais cette inégalité est insensible.	
La même cause donne une inégalité séculaire dans le mouvement du périhélie lunaire; ce qui est conforme aux observations. Expression analytique de cette inégalité.	
L'excentricité de l'orbite lunaire est assujettie à une variation séculaire analogue à celle de la parallaxe, et pareillement insensible. N° 10.....	226
Développement de l'équation différentielle qui donne la latitude, en n'ayant d'abord égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices. N° 11.....	231
Recherche des termes de l'ordre du carré de ces forces qui acquièrent une influence sensible sur l'expression de la latitude. N° 12.....	234
Réunion de ces termes aux précédents, et développement complet de l'équation différentielle qui donne la latitude. N° 13.....	236
Intégration de cette équation. Inégalités qui en résultent. Expression du mouvement rétrograde des nœuds.	
La variabilité de l'excentricité de l'orbite terrestre introduit dans ce mouvement une inégalité séculaire. Expression analytique de cette inégalité. Son rapport avec celle du périhélie.	
L'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie est pareillement variable en vertu de la même cause; mais cette variation est insensible. N° 14.....	237
Développement de l'équation différentielle qui donne le temps ou la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie. Intégration de cette équation. Inégalités qui en résultent. N° 15.....	240
La longitude moyenne éprouve aussi un changement séculaire résultant de la variabilité de l'excentricité de l'orbite terrestre; expression de cette inégalité. Rapports analytiques des équations séculaires des moyens mouvements de la Lune, de son périhélie et de ses nœuds.	
Détermination numérique des divers coefficients qui entrent dans les formules précédentes, et développement numérique de l'expression de la longitude moyenne. Les perturbations de l'orbite terrestre par la Lune se réfléchissent à cette dernière par le moyen du Soleil, et elles s'affaiblissent par cette transmission. Valeur numérique du	

	Pages
mouvement du périhélie et de son équation séculaire. Cette équation a un signe contraire à celle du moyen mouvement. Expression numérique du mouvement des nœuds et de son équation séculaire. Cette équation a aussi un signe contraire à celle du moyen mouvement; d'où il suit que les mouvements des nœuds et du périhélie se ralentissent quand celui de la Lune s'accroît. Rapports numériques de ces trois équations séculaires. Équation séculaire de l'anomalie moyenne. N° 16.....	245
Inégalités les plus sensibles du quatrième ordre qui entrent dans l'expression de la longitude moyenne. N° 17.....	252
Expression numérique de la latitude. N° 18.....	261
Expression numérique de la parallaxe lunaire. N° 19.....	263
CHAPITRE II. — Des inégalités lunaires dues à la non-sphéricité de la Terre et de la Lune.....	266
La non-sphéricité de la Terre ne produit, dans la latitude de la Lune, qu'une seule inégalité sensible. On peut représenter cet effet, en supposant que l'orbite de la Lune, au lieu de se mouvoir sur le plan de l'écliptique avec une inclinaison constante, se meut avec la même condition sur un plan passant toujours par les équinoxes entre l'écliptique et l'équateur. Cette inégalité est très-propre à faire connaître l'aplatissement de la Terre. Elle est la réaction de la nutation de l'axe terrestre sur le sphéroïde lunaire, et il y aurait équilibre autour du centre de gravité de la Terre en vertu des forces qui produisent ces deux inégalités, si toutes les molécules de la Terre et de la Lune étaient fixement liées entre elles, la Lune compensant la petitesse des forces qui l'animent par la longueur du levier auquel elle est attachée.	
La non-sphéricité de la Terre n'influe sur le rayon vecteur de la Lune que d'une manière insensible; la longitude de la Lune n'éprouve de la part de la même cause qu'une seule inégalité appréciable. Le mouvement du périhélie et celui du nœud n'en reçoivent que de très-petites augmentations. N° 20.....	266
La non-sphéricité de la Lune n'introduit dans son mouvement que des inégalités insensibles. N° 21.....	276
CHAPITRE III. — Des inégalités de la Lune dues à l'action des planètes.....	280
Ces inégalités sont de deux sortes : les unes sont dues à l'action directe des planètes sur le mouvement de la Lune; les autres résultent des perturbations que les planètes font éprouver au rayon vecteur terrestre. Perturbations qui se réfléchissent à la Lune par le moyen du Soleil, en s'agrandissant par les intégrations qui leur donnent de petits diviseurs. Détermination de ces inégalités pour Vénus, Mars et Jupiter. La variabilité des excentricités des orbites planétaires introduit, dans la longitude moyenne de la Lune, des équations séculaires analogues à celle que produit la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre, réfléchie à la Lune par le moyen du Soleil; mais elles sont tout à fait insensibles par rapport à cette dernière. Ainsi l'action indirecte des planètes sur la Lune, transmise par le moyen du Soleil, l'emporte beaucoup à cet égard sur leur action directe. N° 22.....	280
CHAPITRE IV. — Comparaison de la théorie précédente avec les observations.....	292
Valeurs numériques de l'inégalité séculaire du moyen mouvement de la Lune, de celles du mouvement du périhélie et du nœud de l'orbite lunaire. Considérations qui confirment leur exactitude. N° 23.....	292

Inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude. Accord des coefficients donnés par la théorie avec ceux des Tables lunaires de Mason et de Bürg. Une de ces inégalités dépend de la parallaxe du Soleil. En déterminant son coefficient d'après les observations, on en déduit la valeur de cette parallaxe, telle que la donnent les passages de Vénus. Une autre de ces inégalités dépend de l'aplatissement de la Terre. La valeur de son coefficient, déterminée d'après les Tables de Mason et de Bürg, indique que la Terre est moins aplatie que dans le cas de l'homogénéité, et que son aplatissement est $\frac{1}{113}$. N° 21.....	293
Inégalités du mouvement de la Lune en latitude. Accord des coefficients donnés par la théorie avec ceux des Tables de Mason et de Bürg. Une de ces inégalités dépend de l'aplatissement de la Terre. Son coefficient, déterminé d'après les observations, donne le même aplatissement que l'inégalité en longitude qui dépend du même élément. Ainsi ces deux résultats s'accordent à montrer que la Terre est moins aplatie que dans le cas de l'homogénéité. N° 23.....	302
Expression numérique de la parallaxe horizontale de la Lune. Son accord avec les Tables de Mason et de Bürg. N° 25.....	305
CHAPITRE V. — Sur une inégalité à longue période qui paraît exister dans le mouvement de la Lune.....	308
L'action du Soleil sur la Lune produit, dans le mouvement de ce satellite, une inégalité dont l'argument est le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périée, moins trois fois la longitude du périée du Soleil. La considération de la non-sphéricité de la Terre peut encore introduire dans le mouvement de la Lune deux autres inégalités, dont la période est à très-peu près la même que celle de la précédente, et qui, vu la position actuelle du périée solaire, se confondent à peu près avec elle. Ces trois inégalités sont très-difficiles à déterminer par l'analyse : les deux dernières semblent devoir être insensibles. N° 27.....	308
La première est évidemment indiquée par les observations. Détermination de son coefficient. N° 28.....	312
CHAPITRE VI. — Des variations séculaires des mouvements de la Lune et de la Terre, qui peuvent être produites par la résistance d'un fluide éthéré répandu autour du Soleil.....	315
La résistance de l'éther ne produit d'équation séculaire que dans le moyen mouvement de la Lune, elle n'en produit aucune sensible dans les mouvements du périée et des nœuds. N° 29.....	315
L'équation séculaire du moyen mouvement de la Terre, produite par la résistance de l'éther, est environ cent fois plus petite que l'équation correspondante du moyen mouvement de la Lune. N° 30.....	321
SUPPLÉMENT.....	325

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

SECONDE PARTIE.

THÉORIES PARTICULIÈRES DES MOUVEMENTS CÉLESTES.

LIVRE VI.

THÉORIE DES MOUVEMENTS PLANÉTAIRES.

Les mouvements des planètes sont sensiblement troublés par leur attraction mutuelle : il importe de déterminer exactement les inégalités qui en résultent, soit pour vérifier la loi de la pesanteur universelle, soit pour perfectionner les Tables astronomiques, soit enfin pour reconnaître si des causes étrangères au système planétaire ne viennent point altérer sa constitution et ses mouvements. Je me propose ici d'appliquer aux corps de ce système les méthodes et les formules générales présentées dans la Première Partie de cet Ouvrage. Je n'ai développé, dans le Livre II, que les inégalités indépendantes des excentricités et des inclinaisons des orbites, et celles qui ne dépendent que de leur première puissance; mais il est souvent indispensable d'étendre



les approximations jusqu'aux carrés et aux puissances supérieures de ces quantités, et même de considérer les termes dépendants du carré de la force perturbatrice. Je commence par exposer les formules de ces inégalités; en substituant ensuite, dans ces formules et dans celles du Livre II, les nombres relatifs à chaque planète, je donne les expressions numériques de son rayon vecteur et de son mouvement tant en longitude qu'en latitude. Bouvard a bien voulu faire le calcul de ces substitutions, et le zèle avec lequel il s'est livré à ce pénible travail lui mérite la reconnaissance des Astronomes. Divers Géomètres ont déjà calculé la plupart des inégalités planétaires : leurs résultats ont servi de vérification à ceux de Bouvard, et, lorsqu'il a trouvé des différences, il a remonté à la source de l'erreur pour s'assurer de l'exactitude de ses calculs. Enfin il a revu avec un soin particulier le calcul des inégalités qui n'avaient point encore été déterminées, et quelques équations de condition qui ont lieu entre ces inégalités m'ont fourni les moyens d'en vérifier plusieurs. Malgré toutes ces précautions, il peut s'être glissé dans les résultats suivants des erreurs, presque inévitables dans un aussi long travail; mais j'ai lieu de penser qu'elles ne portent que sur des quantités insensibles, et qu'elles ne nuiront point à la justesse des Tables fondées sur ces résultats, qui, par leur importance dans l'Astronomie planétaire dont ils sont la base, méritent d'être vérifiés avec les soins que l'on a mis dans le calcul des Tables de logarithmes et de sinus.

Les Théories de Mercure, Vénus, la Terre et Mars n'offrent que des inégalités périodiques peu considérables; elles sont cependant très-sensibles par les observations modernes, qu'elles représentent avec une exactitude remarquable. Le développement des inégalités séculaires de ces planètes et de la Lune fera connaître exactement leurs masses, dont la véritable valeur est la seule chose que leurs théories laissent encore à désirer. C'est principalement dans les mouvements de Jupiter et de Saturne, les deux plus grands corps du système planétaire, que l'attraction mutuelle des planètes est sensible. Leurs moyens mouvements sont presque commensurables, en sorte que cinq

fois celui de Saturne est à très-peu près égal à deux fois celui de Jupiter : les inégalités considérables qui naissent de ce rapport, et dont on ignorait les lois et la cause, ont paru longtemps faire exception à la loi de la pesanteur universelle, et maintenant elles en sont une des preuves les plus frappantes. Il est extrêmement curieux de voir avec quelle précision les deux principales inégalités de ces planètes, dont la période embrasse plus de neuf cents années, satisfont aux observations anciennes et modernes; les siècles à venir, en les développant, mettront de plus en plus cet accord en évidence. Pour en faciliter la comparaison aux Astronomes, j'ai porté l'approximation jusqu'aux termes dépendants du carré de la force perturbatrice, ce qui me fait espérer que les valeurs que je leur assigne s'éloigneront fort peu de celles que l'on trouvera par une longue suite d'observations continuées pendant une période entière. Ces inégalités ont sur les variations séculaires des orbes de Jupiter et de Saturne une grande influence, dont je développe les expressions analytique et numérique. Enfin la planète Uranus est assujettie à des inégalités sensibles, que je détermine, et que les observations confirment.

Le premier jour de ce siècle est remarquable par la découverte d'une planète, dont l'orbe est situé entre ceux de Jupiter et de Mars, et à laquelle on a donné le nom de *Cérés*. Elle ne paraît que comme une étoile de la 8^e ou 9^e grandeur; son excessive petitesse rend donc insensible son action sur le système planétaire; mais elle doit éprouver de la part des autres planètes, et principalement de Jupiter et de Saturne, des perturbations considérables qu'il importe de déterminer. C'est ce que je me propose de faire dans la suite de cet Ouvrage, lorsque l'observation aura fait connaître avec une approximation suffisante les éléments de son orbite.

Il n'y a pas encore trois siècles que Copernic introduisit le premier, dans les Tables astronomiques, le mouvement des planètes autour du Soleil; environ un siècle après, Kepler y fit entrer les lois du mouvement elliptique, qu'il avait reconnues par l'observation, et qui ont conduit Newton à la découverte de la gravitation universelle. Depuis

ces trois époques mémorables dans l'histoire des sciences, les progrès de l'Analyse infinitésimale nous ont mis à portée de soumettre au calcul les nombreuses inégalités des planètes qui naissent de leur attraction réciproque, et par ce moyen les Tables ont acquis une précision inattendue. J'ose croire que les résultats suivants leur donneront une précision plus grande encore.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES DES INÉGALITÉS PLANÉTAIRES DÉPENDANTES DES CARRÉS ET DES PUISSANCES SUPÉRIEURES DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS DES ORBITES.

Des inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons.

1. Pour déterminer ces inégalités, je reprends l'équation du n° 46 du Livre II,

$$0 = \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} r + 2f \frac{\partial R}{\partial r} + r \frac{\partial R}{\partial r}.$$

On a, par les n°s 20 et 22 du même Livre,

$$\frac{\mu}{a^3} = n^2,$$

$$r = a \left[1 + \frac{1}{2} e^2 - e \cos(nt + \epsilon - \varpi) - \frac{1}{2} e^2 \cos(2nt + 2\epsilon - 2\varpi) \right];$$

l'équation différentielle précédente devient ainsi

$$0 = \frac{d^2 r}{dt^2} + n^2 r + 3n^2 a \frac{\partial R}{\partial r} [e \cos(nt + \epsilon - \varpi) + e^2 \cos(2nt + 2\epsilon - 2\varpi)] + 2f \frac{\partial R}{\partial r} + r \frac{\partial R}{\partial r}.$$

Maintenant tous les termes de l'expression de R dépendants du carré et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites peuvent être ramenés à l'une ou à l'autre de ces deux formes

$$M \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + K],$$

$$N \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + L],$$

i étant susceptible de toutes les valeurs entières positives et négatives.

en y comprenant zéro. Considérons d'abord la première forme. Elle donne dans $2fdR + r \frac{\partial R}{\partial r}$ la fonction

$$\left(\frac{2(2-i)n}{in' + (2-i)n} M + a \frac{\partial M}{\partial a} \right) \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + K].$$

On a vu, dans le Livre II, que la partie de $\frac{\partial R}{\partial a}$ qui dépend des angles

$$i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \quad \text{et} \quad i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon$$

est de cette forme

$$F \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + \epsilon G \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \omega] + \epsilon' H \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \omega'];$$

la fonction

$$3n^2 a \partial r [e \cos(nt + \epsilon - \omega) + e^2 \cos(2nt + 2\epsilon - 2\omega)]$$

produira donc la suivante

$$\frac{3}{2} n^2 a^2 \left\{ (F + G) e^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\omega] + H e e' \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - \omega - \omega'] \right\};$$

ainsi, en n'ayant égard qu'aux termes dépendants de l'angle

$$i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt,$$

et en observant que, si l'on fait $\mu = 1$, ce qui revient à prendre pour unité de masse celle du Soleil, en négligeant la masse de la planète, on a $n^2 a^3 = 1$; l'équation différentielle en $r \partial r$ devient

$$0 = \frac{d^2 r}{dt^2} + n^2 r \partial r + \frac{3}{2} n^2 a^2 \left\{ (F + G) e^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\omega] + H e e' \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - \omega - \omega'] \right\} + n^2 a^2 \left(\frac{2(2-i)n}{in' + (2-i)n} a M + a^2 \frac{\partial M}{\partial a} \right) \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + K],$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$(A) \quad \frac{r \partial r}{a^2} = \frac{\left\{ \frac{3}{2} n^2 \left\{ (F + G) e^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\omega] + H e e' \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - \omega - \omega'] \right\} + \left(\frac{2(2-i)n}{in' + (2-i)n} a M + a^2 \frac{\partial M}{\partial a} \right) n^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + K] \right\}}{[in' + (3-i)n][in' + (1-i)n]}.$$

Si cette expression de $\frac{r \partial r}{a^2}$ est considérable, et si l'un des diviseurs $in' + (3-i)n$, $in' + (1-i)n$ est très-petit, comme cela a lieu dans la théorie de Jupiter troublé par Saturne, lorsque l'on suppose $i = 5$, $2n$ étant à très-peu près égal à $5n'$, la variabilité des éléments des orbites a une influence sensible sur cette expression; il importe donc d'y avoir égard. Pour cela, nous mettrons l'équation différentielle en $r \partial r$ sous cette forme

$$0 = \frac{d^2 r}{dt^2} + n^2 r \partial r + n^2 a^2 P \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon] + n^2 a^2 P' \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon].$$

En l'intégrant et négligeant les termes dépendants des différences secondes et supérieures de P et de P' , nous aurons

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{r \partial r}{a^2} &= \frac{n^2}{[in' + (3-i)n][in' + (1-i)n]} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &\left[P + \frac{2[i(n'-n) + 2n] \frac{dP'}{dt}}{[in' + (3-i)n][in' + (1-i)n]} \right] \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon] \\ &+ \left[P' + \frac{2[i(n'-n) + 2n] \frac{dP}{dt}}{[in' + (3-i)n][in' + (1-i)n]} \right] \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

La formule (Y) du n° 46 du Livre II deviendra, en y faisant $\mu = 1$,

$$(C) \quad \partial r = \frac{\left\{ \begin{aligned} &\frac{2d(r \partial r)}{a^2 n dt} - \frac{1}{2} \left\{ (F + G) e^2 \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\omega] + H e e' \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - \omega - \omega'] \right\} \\ &+ \left[\frac{(6-3i)n^2}{[in' + (2-i)n]^2} a M + \frac{2na^2 \frac{\partial M}{\partial a}}{in' + (2-i)n} \right] \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + K] \end{aligned} \right\}}{\sqrt{1-e^2}}.$$

En donnant à i toutes les valeurs entières positives et négatives, en y comprenant zéro, on aura toutes les inégalités dans lesquelles le coefficient de nt surpasse ou est surpassé par celui de $n't$ de deux unités.

Si le coefficient $in' + (2-i)n$ est très-petit, et si cette inégalité est très-sensible, comme cela a lieu dans la théorie d'Uranus troublé par Saturne, alors on mettra la partie de R , dépendante de l'angle

$i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon$ sous la forme suivante

$$Q \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon] \\ + Q' \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon],$$

et l'on aura

$$3a \int n dt dR = \frac{(6-3i)n^2 a}{[in' + (2-i)n]^3} \left(Q + \frac{2}{in' + (2-i)n} \frac{dQ'}{dt} \right) \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon] \\ - \frac{(6-3i)n^2 a}{[in' + (2-i)n]^3} \left(Q' - \frac{2}{in' + (2-i)n} \frac{dQ}{dt} \right) \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon].$$

La formule (Y) du n° 46 du Livre II donnera ainsi

$$(D) \left\{ \begin{aligned} \delta v &= \frac{2d(r\delta r)}{a^2 n dt} - \frac{1}{2} \left\{ (F+G) e^2 \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - \varpi] \right. \\ &\quad + H e e' \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - \varpi - \varpi'] \left. \right\} \\ &\quad + \left[\frac{(6-3i)n^2}{[in' + (2-i)n]^3} \left(aQ + \frac{2a}{in' + (2-i)n} \frac{dQ'}{dt} \right) + \frac{2na^2}{in' + (2-i)n} \frac{dQ}{da} \right] \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon] \\ &\quad - \left[\frac{(6-3i)n^2}{[in' + (2-i)n]^3} \left(aQ' - \frac{2a}{in' + (2-i)n} \frac{dQ}{dt} \right) + \frac{2na^2}{in' + (2-i)n} \frac{dQ'}{da} \right] \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon]. \end{aligned} \right.$$

Je supprime, pour plus d'exactitude, le diviseur $\sqrt{1-e^2}$ dans cette expression de δv , parce que ce diviseur n'affecte point, comme on l'a vu dans le n° 65 du Livre II, la partie de cette expression qui a pour diviseur le carré de $in' + (2-i)n$, et, dans le cas présent, cette partie est beaucoup plus grande que les autres. De plus, en vertu du même numéro, il faut appliquer cette partie de δv au moyen mouvement de la planète m , et, comme elle est à fort peu près égale à l'inégalité entière dépendante de l'angle $i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon$, on peut appliquer cette inégalité entière au moyen mouvement de m .

On aura les valeurs de $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$ et $\frac{dQ'}{dt}$ en différenciant les expressions de P , P' , Q , Q' par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, aux positions de leurs périhélie et de leurs nœuds, et en substituant, au lieu des différences de ces quantités, leurs valeurs. Mais on aura plus simplement ces valeurs de $\frac{dP}{dt}$, etc.

de la manière suivante. On déterminera la valeur de P pour une époque éloignée de deux cents ans de la première époque à laquelle on fixe l'origine du temps t . En nommant P , cette valeur et T l'intervalle de deux cents années, on aura

$$T \frac{dP}{dt} = P_1 - P.$$

On aura par le même procédé les valeurs de $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$, $\frac{dQ'}{dt}$.

Pour conclure l'expression de $\frac{\delta r}{a}$ de celle de $\frac{r\delta r}{a^2}$, nous désignerons par $\frac{\delta_1 r}{a}$ la partie de $\frac{\delta r}{a}$ qui dépend de l'angle $i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon$, et nous aurons

$$\frac{r\delta r}{a^2} = \frac{r}{a} \left\{ \frac{\delta_1 r}{a} + F \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)] + eG \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi] \right. \\ \left. + e' H \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi'] \right\},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\delta_1 r}{a} = \frac{r\delta r}{a^2} + \frac{1}{2} (F + 2G) e^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\varpi] \\ + \frac{1}{2} e e' H \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - \varpi - \varpi'].$$

2. En considérant de la même manière les termes dépendants de l'angle $i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$, et supposant que l'on ait, en ne portant l'approximation que jusqu'aux premières puissances des excentricités,

$$\frac{\delta r}{a} = F \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)] + eG \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi] \\ + eG' \cos[-i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi] \\ + e' H \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi'] \\ + e' H' \cos[-i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi'],$$

i étant ici positif, on aura

$$(E) \frac{r\delta r}{a^2} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} n^2 \left[(G+G') e^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)] \right. \\ &\quad \left. + H e e' \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + \varpi - \varpi'] \right] \\ &\quad + n^2 \left(a^2 \frac{\partial N}{\partial a} - \frac{2n}{n'-n} aN \right) \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + L] \end{aligned} \right\} \\ [in' - (i+1)n][in' - (i-1)n],$$

$$(F) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\frac{2d(r\dot{r})}{a^2 n dt} + \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & (G - G') e^2 \sin i (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ & + H e e' \sin [i (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + \varpi - \varpi'] \\ & - H' e e' \sin [i (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) - \varpi + \varpi'] \end{aligned} \right]}{\left(\frac{2n}{in - in'} a^2 \frac{\partial N}{\partial a} - \frac{3n^2 i}{(in - in')^2} a N \right) \sin [i (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + L]} \sqrt{1 - e^2}.$$

Si l'on désigne par $\frac{\partial_1 r}{a}$ la partie qui dépend à la fois des carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, et de l'angle $i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial_1 r}{a} = & \frac{r\dot{r}}{a^2} + \frac{1}{2}(G + G' - F) e^2 \cos i (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ & + \frac{1}{2} H e e' \cos [i (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + \varpi - \varpi'] \\ & + \frac{1}{2} H' e e' \cos [i (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) - \varpi + \varpi']. \end{aligned}$$

Dans ces trois expressions, i doit être supposé positif.

3. Le grand nombre des inégalités dépendantes des carrés des excentricités et des inclinaisons ne permet pas de les calculer toutes; on se dirigera dans leur choix par les considérations suivantes : 1° si la quantité $in' + (2 - i)n$ diffère peu de $\pm n$, alors l'un ou l'autre des diviseurs $in' + (3 - i)n$ et $in' + (1 - i)n$ de la formule (A) du n° 1 est peu considérable, et par là cette formule peut acquérir une valeur sensible; 2° si la quantité $in' + (2 - i)n$ est peu considérable, les termes de la formule (C) du même numéro qui ont cette quantité pour diviseur peuvent devenir sensibles; 3° si la quantité $i(n' - n)$ diffère peu de $\pm n$, l'un ou l'autre des diviseurs $in' - (i + 1)n$ et $in' - (i - 1)n$ de la formule (E) du numéro précédent est peu considérable, et par là cette formule peut acquérir une valeur sensible; 4° enfin, si la quantité $i(n' - n)$ est peu considérable, les termes de la formule (F) du numéro précédent qui ont ce diviseur peuvent devenir sensibles. Il faut donc calculer avec soin toutes les inégalités assujetties à l'une de ces quatre conditions.

4. Les quantités F, G, G', H, H' sont déterminées par les approximations développées dans le Livre II : nous allons déterminer M et N. Pour cela, reprenons la valeur de R du n° 46 du Livre II,

$$R = \frac{m' (xx' + yy' + zz')}{r'^2} - \frac{m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}},$$

r' étant ici le rayon vecteur de m' . Prenons pour plan fixe celui de l'orbite primitive de m , et pour ligne des abscisses x la ligne des nœuds de l'orbite de m' avec ce plan. Si l'on nomme v l'angle formé par r et par cette ligne, v' l'angle formé par cette même ligne et par r' , et γ la tangente de l'inclinaison respective des deux orbites, on aura

$$\begin{aligned} x &= r \cos v, & y &= r \sin v, & z &= 0, \\ x' &= r' \cos v', & y' &= \frac{r' \sin v'}{\sqrt{1 - \gamma^2}}, & z' &= \frac{r' \gamma \sin v'}{\sqrt{1 - \gamma^2}}, \end{aligned}$$

ce qui donne, en négligeant la quatrième puissance de γ ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{m'r}{r'^2} \cos(v' - v) - \frac{m'\gamma^2}{4} \frac{r}{r'^2} [\cos(v' - v) - \cos(v' + v)] \\ &= \frac{m'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos(v' - v) + r'^2}} + \frac{m'\gamma^2}{4} \frac{rr' [\cos(v' - v) - \cos(v' + v)]}{[r^2 - 2rr' \cos(v' - v) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Supposons, comme dans le n° 48 du Livre II,

$$\frac{a}{a^2} \cos(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) - [a^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + a'^2]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Sigma A^{(i)} \cos i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon),$$

$$[a^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + a'^2]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \Sigma B^{(i)} \cos i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon),$$

et représentons M cos $[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + K]$ par

$$\begin{aligned} & M^{(0)} e^2 \cos [i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\varpi] \\ & + M^{(1)} e e' \cos [i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - \varpi - \varpi'] \\ & + M^{(2)} e'^2 \cos [i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\varpi'] \\ & + M^{(3)} \gamma^2 \cos [i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\varpi], \end{aligned}$$

H étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m' sur celle de m , comptée de la ligne où l'on fixe l'origine de $nt + \epsilon$. On a, par

le n° 22 du Livre II,

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - e \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \frac{1}{2}e^2 \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi),$$

$$\nu = nt + \varepsilon - \Pi + 2e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{5}{8}e^2 \sin(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi),$$

ce qui donne les valeurs de $\frac{r}{a}$ et de ν , en marquant d'un trait les quantités n , ε et e . On a ensuite, par le n° 48 du même Livre, le produit de $\Sigma \Lambda^{(i)} \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)]$ par le sinus ou le cosinus d'un angle quelconque $ft + 1$ égal à

$$\Sigma \Lambda^{(i)} \frac{\sin}{\cos} [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + ft + 1].$$

De là il est facile de conclure

$$M^{(0)} = \frac{m'}{8} \left[i(4i-5) \Lambda^{(i)} + 2(2i-1) a \frac{\partial \Lambda^{(i)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i)}}{\partial a^2} \right],$$

$$M^{(1)} = -\frac{m'}{4} \left[4(i-1)^2 \Lambda^{(i-1)} + 2(i-1) a \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a} - 2(i-1) a' \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a'} - aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-1)}}{\partial a \partial a'} \right],$$

$$M^{(2)} = \frac{m'}{8} \left[(i-2) (4i-3) \Lambda^{(i-2)} + 2(2i-3) a' \frac{\partial \Lambda^{(i-2)}}{\partial a'} + a'^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-2)}}{\partial a'^2} \right],$$

$$M^{(3)} = -\frac{m'}{8} aa' B^{(i-1)},$$

et dans le cas de $i=1$,

$$M^{(3)} = \frac{m'}{4} \frac{a}{a'^2} - \frac{m'}{8} aa' B^{(0)}.$$

Représentons $N \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L]$ par les termes suivants

$$N^{(0)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + N^{(1)} e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \varpi'] \\ + N^{(2)} e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - \varpi + \varpi'];$$

nous aurons

$$N^{(0)} = -\frac{m'}{4} \left[(e^2 + e'^2) \left(4i^2 \Lambda^{(i)} - 2a \frac{\partial \Lambda^{(i)}}{\partial a} - a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i)}}{\partial a^2} \right) - \frac{\gamma^2}{2} aa' [B^{(i-1)} + B^{(i+1)}] \right],$$

$$N^{(1)} = \frac{m'}{4} \left[4(i-1)^2 \Lambda^{(i-1)} - 2(i-1) a \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a} - 2(i-1) a' \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a'} + aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-1)}}{\partial a \partial a'} \right],$$

$$N^{(2)} = \frac{m'}{4} \left[4(i+1)^2 \Lambda^{(i+1)} + 2(i+1) a \frac{\partial \Lambda^{(i+1)}}{\partial a} + 2(i+1) a' \frac{\partial \Lambda^{(i+1)}}{\partial a'} + aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(i+1)}}{\partial a \partial a'} \right],$$

i étant supposé positif et plus grand que zéro dans ces trois dernières expressions. Dans le cas de $i=1$, il faut ajouter à $N^{(0)}$ le terme

$$-\frac{m'}{4} \frac{\gamma^2}{a'^2}.$$

Il est plus commode pour les calculs numériques de n'avoir dans les formules que les différences relatives à l'une ou à l'autre des deux quantités a et a' . On trouve alors, par le n° 49 du Livre II,

$$M^{(1)} = -\frac{m'}{4} \left[(2i-2)(2i-1) \Lambda^{(i-1)} + 2(2i-1) a \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-1)}}{\partial a^2} \right],$$

$$M^{(2)} = \frac{m'}{8} \left[(4i^2 - 7i + 2) \Lambda^{(i-2)} + 2(2i-1) a \frac{\partial \Lambda^{(i-2)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-2)}}{\partial a^2} \right],$$

$$N^{(1)} = \frac{m'}{4} \left[(2i-2)(2i-1) \Lambda^{(i-1)} - 2a \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a} - a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-1)}}{\partial a^2} \right],$$

$$N^{(2)} = \frac{m'}{4} \left[(2i+2)(2i+1) \Lambda^{(i+1)} - 2a \frac{\partial \Lambda^{(i+1)}}{\partial a} - a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i+1)}}{\partial a^2} \right].$$

5. Le cas de $i=0$ mérite une attention particulière. Reprenons la formule (T) du n° 46 du Livre II, et considérons d'abord le terme $d \left[\frac{2r d \delta r + dr \delta r}{r^2 d \nu} \right]$ de l'expression de $d \delta \nu$ donnée par cette formule. On a, par le n° 53 du même Livre, et en n'ayant égard qu'aux termes affectés de l'arc de cercle nt ,

$$\frac{r}{a} = 1 - h \sin(nt + \varepsilon) - l \cos(nt + \varepsilon),$$

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{2} (lC + l'D) nt \sin(nt + \varepsilon) - \frac{m'}{2} (hC + h'D) nt \cos(nt + \varepsilon),$$

ce qui donne, en ne considérant que les termes dépendants des carrés et des produits de h , l , h' , l' , et indépendants des sinus et cosinus de $nt + \varepsilon$ et de ses multiples,

$$d \left[\frac{2r d \delta r + dr \delta r}{r^2 d \nu} \right] = -\frac{m'n^2 a^2 d l^2}{4} [(h^2 + l^2) C + (hh' + ll') D].$$

On a ensuite, par les n° 19 et 20 du Livre II, $r^2 d \nu = a^2 n dt \sqrt{1 - e^2}$;

on aura donc

$$\frac{d(2r d\delta r + dr \delta r)}{r^2 dv} = -\frac{m' n dt}{4} [(h^2 + l^2) C + (hh' + ll') D].$$

On a, par le n° 55 du Livre II,

$$(0, 1) = -\frac{m' n C}{2}, \quad \boxed{0, 1} = \frac{m' n D}{2},$$

partant,

$$\frac{d(2r d\delta r + dr \delta r)}{r^2 dv} = \frac{1}{2} dt [(0, 1) (h^2 + l^2) - \boxed{0, 1} (hh' + ll')].$$

Considérons ensuite le terme $\frac{3d\epsilon^2 f \delta dR}{r^2 dv}$ de la même formule (T). Si l'on n'a égard qu'aux quantités séculaires dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, on aura, par l'analyse du numéro précédent,

$$\begin{aligned} \delta R = & \frac{m'}{8} (h^2 + l^2) \left(2a \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} \right) \\ & + \frac{m'}{8} (h'^2 + l'^2) \left(2a' \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a'} + a'^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a'^2} \right) \\ & + \frac{m'}{4} (hh' + ll') \left(4A^{(1)} + 2a \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a} + 2a' \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a'} + aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a \partial a'} \right) \\ & + \frac{m'}{8} aa' B^{(1)} [(p' - p)^2 + (q' - q)^2], \end{aligned}$$

p, p', q, q' exprimant les mêmes choses que dans le n° 51 du Livre II. De là il est facile de conclure, par les n° 55 et 59 du Livre II,

$$\begin{aligned} an \delta R = & -\frac{1}{2} (0, 1) (h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2) + \boxed{0, 1} (hh' + ll') \\ & + \frac{1}{2} (0, 1) [(p' - p)^2 + (q' - q)^2], \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} an d \delta R = & dh [- (0, 1) h + \boxed{0, 1} h'] + dt [- (0, 1) l + \boxed{0, 1} l'] \\ & + (0, 1) dp (p - p') + (0, 1) dq (q - q'). \end{aligned}$$

Le second membre de cette équation devient nul, en vertu des équations

tions (A) et (C) des n° 55 et 59 du Livre II; on a donc

$$an d \delta R = 0,$$

d'où l'on tire, en observant que $n^2 a^3 = 1$,

$$\frac{3dt f dt d \delta R}{r^2 dv} = \frac{3m' g dt}{na^2 \sqrt{1 - e^2}},$$

$m' g$ étant une constante arbitraire ajoutée à l'intégrale $\int d \delta R$.

Il nous reste à considérer la fonction $\frac{dt^2 (2r \delta R' + R' \delta r)}{r^2 dv}$, qui entre dans l'expression de $d\delta v$, donnée par la formule (T) du n° 46 du Livre II. En négligeant le carré de la force perturbatrice, cette fonction

se réduit à $\frac{2\delta(RR') dt^2}{r^2 dv}$, ou, par le numéro cité, à $\frac{2a^2 \frac{\partial \delta R}{\partial a} n dt}{\sqrt{1 - e^2}}$. Cette

quantité produit d'abord le terme $\frac{m' n dt \cdot C^2 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a}}{\sqrt{1 - e^2}}$, qui, ajouté à celui-ci $\frac{3m' g dt}{na^2 \sqrt{1 - e^2}}$, égal à $\frac{3m' agn dt}{\sqrt{1 - e^2}}$ à cause de $n^2 a^3 = 1$, le détruit, parce que $g = -\frac{1}{2} a \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a}$, par le n° 50 du Livre II. Reprenant ensuite l'expression précédente de δR , nous observerons que la fonction

$$\frac{m'}{8} aa' B^{(1)} [(p' - p)^2 + (q' - q)^2] + \dots$$

est égale à une constante indépendante du temps t , puisque sa différentielle est nulle en vertu des équations (C) du n° 59 du Livre II; et, si l'on ne considère que les deux planètes m et m' , comme nous le ferons dans ce qui va suivre, $(p' - p)^2 + (q' - q)^2$ est, en vertu des mêmes équations, une quantité indépendante du temps; la fonction

précédente ne peut donc produire dans $\frac{2n dt \cdot a^2 \frac{\partial \delta R}{\partial a}}{\sqrt{1 - e^2}}$ qu'une quantité

pareillement indépendante du temps, et que l'on peut ainsi négliger, puisqu'elle peut être supposée se confondre avec la valeur de $n dt$. On aura donc, en faisant disparaître les différences partielles de $\Lambda^{(0)}$ et

de $\Lambda^{(1)}$ en a' , au moyen de leurs valeurs données dans le n° 49 du Livre II,

$$2ndt \cdot a^2 \frac{\partial \delta R}{\partial a} = \frac{m'n dt}{2} (h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2) \left(a^2 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + 2a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} + \frac{1}{2} a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a^3} \right) \\ - m'n dt (hh' + ll') \left(2a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a^2} + \frac{1}{2} a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(1)}}{\partial a^3} \right).$$

Si l'on rassemble ces différents termes, on aura

$$d\delta v = \frac{m'n dt}{8} (h^2 + l^2) \left(2a^2 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + 7a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} + 2a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a^3} \right) \\ + \frac{m'n dt}{4} (h'^2 + l'^2) \left(2a^2 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + 4a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} + a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a^3} \right) \\ - \frac{m'n dt}{8} (hh' + ll') \left(2a \Lambda^{(1)} - 2a^2 \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a} + 15a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a^2} + 4a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(1)}}{\partial a^3} \right).$$

On pourra, dans cette expression, négliger les termes indépendants du temps t . Il est facile d'en conclure l'expression de $d\delta v'$, en changeant ce qui est relatif à m dans ce qui est relatif à m' , et réciproquement, et en observant que, quoique la valeur de $\Lambda^{(0)}$ relative à l'action de m' sur m soit, par le n° 49 du Livre II, différente de sa valeur relative à l'action de m sur m' , cependant on peut, dans l'expression précédente, employer indifféremment l'une ou l'autre valeur. Mais on obtiendra plus facilement $d\delta v'$ par la considération suivante. Si l'on ajoute la valeur de $d\delta v$ multipliée par $m\sqrt{a}$ à la valeur de $d\delta v'$ multipliée par $m'\sqrt{a'}$, on aura, en substituant au lieu des différences partielles de $\Lambda^{(0)}$ et de $\Lambda^{(1)}$ en a' leurs différences partielles en a ,

$$m\sqrt{a} \cdot d\delta v + m'\sqrt{a'} \cdot d\delta v' = -\frac{3mm'dt}{4} (h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2) \left(a \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} \right) \\ - \frac{3mm'dt}{2} (hh' + ll') \left(\Lambda^{(1)} - a \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a} - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a^2} \right).$$

Si l'on ne considère que deux planètes m et m' , la différentielle du second membre de cette équation est nulle en vertu des équations (A) du n° 55 du Livre II; on a donc, en ne considérant que les quantités pë-

riodiques séculaires,

$$0 = m\sqrt{a} \cdot d\delta v + m'\sqrt{a'} \cdot d\delta v',$$

ce qui donne immédiatement $\delta v'$ lorsque l'on a déterminé δv .

La valeur de $d\delta v$ est relative à l'angle compris entre les deux rayons vecteurs r et $r + dr$. Pour avoir sa valeur relative à un plan fixe, nous observerons que, par le n° 46 du Livre II, si l'on nomme dv la projection de dv sur ce plan, on a, en négligeant la quatrième puissance de l'inclinaison de l'orbite,

$$dv = dv \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dv^2} \right).$$

On a, par le n° 53 du Livre II,

$$s = q \sin(nt + \epsilon) - p \cos(nt + \epsilon) + \dots,$$

ce qui donne

$$ds = \left(nq - \frac{dp}{dt} \right) dt \cos(nt + \epsilon) + \left(np + \frac{dq}{dt} \right) dt \sin(nt + \epsilon) + \dots;$$

on aura donc, en négligeant les quantités périodiques dépendantes de nt , et en observant que $dv = n dt$, à très-peu près,

$$dv = dv + \frac{q dp - p dq}{2};$$

ainsi, pour avoir la valeur de $d\delta v$, il faut ajouter à la valeur précédente de $d\delta v$ la quantité $\frac{q dp - p dq}{2}$.

Si l'on ne considère que deux planètes m et m' , on aura, par le n° 59 du Livre II,

$$(q dp - p dq) m\sqrt{a} + (q' dp' - p' dq') m'\sqrt{a'} = -\frac{mm'dt}{4} aa' B^{(1)} [(p' - p)^2 + (q' - q)^2],$$

et le second membre de cette équation est égal à dt multiplié par une constante; en n'ayant donc égard qu'aux quantités périodiques séculaires, on aura

$$0 = m\sqrt{a} \cdot d\delta v + m'\sqrt{a'} \cdot d\delta v',$$

δv , et $\delta v'$ étant relatifs au plan fixe.

6. Considérons maintenant les inégalités du mouvement en latitude dépendantes des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites; reprenons la troisième des équations (P) du n° 46 du Livre II,

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Prenons pour plan fixe celui de l'orbite primitive de m , ce qui permet de supposer z nul dans $\frac{\partial R}{\partial z}$. On aura, par le n° 4, et observant que $z' = r's'$,

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{m's'}{r'^2} - \frac{m'r's'}{[r^2 - 2rr'\cos(\psi' - \psi) + r'^2]^{\frac{3}{2}}};$$

L'équation différentielle en z deviendra ainsi

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z [1 + 3e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)] + \frac{m'n^2 a^3 s'}{r'^2} - \frac{m'n^2 a^3 r's'}{[r^2 - 2rr'\cos(\psi' - \psi) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Représentons par

$$M \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K] + N \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L]$$

la partie de

$$\frac{m's'}{r'^2} - \frac{m'r's'}{[r^2 - 2rr'\cos(\psi' - \psi) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

dépendante des angles $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt$ et $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$, et supposons qu'en n'ayant égard qu'aux inégalités de z dépendantes de la simple inclinaison des orbites, la partie de z relative à l'angle $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt$ soit

$$\gamma a F \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \Pi];$$

on aura, en ne conservant que les termes dépendants des produits des excentricités et des inclinaisons,

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z + \frac{3}{2} n^2 e \gamma a F \left\{ \begin{aligned} &\sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \Pi] \\ &+ \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \Pi] \end{aligned} \right\} \\ + n^2 a^3 M \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K] \\ + n^2 a^3 N \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L].$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$z = \frac{\frac{3}{2} n^2 e \gamma a F \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \Pi] + n^2 a^3 M \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K]}{(in' - (i-1)n) [in' - (i-3)n]} \\ + \frac{\frac{3}{2} n^2 e \gamma a F \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \Pi] + n^2 a^3 N \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L]}{(in' - (i+1)n) [in' - (i-1)n]}.$$

On aura la latitude s , en observant que

$$s = \frac{z}{r} = \frac{z}{a} [1 + e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)];$$

on aura donc s , en divisant l'expression précédente de z par a , et en lui ajoutant la quantité

$$\frac{1}{2} e \gamma F \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \Pi] \\ + \frac{1}{2} e \gamma F \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \Pi].$$

Il ne s'agit plus que de déterminer M et N , ce qui sera facile, en suivant l'analyse du n° 4. Mais nous nous dispenserons de suivre ce calcul, parce que les inégalités de cet ordre en latitude sont insensibles, excepté relativement à Jupiter et à Saturne, à cause de la commensurabilité très-approchée de leurs moyens mouvements, et nous donnerons dans le n° 10 un moyen très-simple de déterminer ces dernières inégalités.

Si l'on rapporte le mouvement de m sur un plan fixe très-peu incliné à celui de son orbite primitive, en nommant φ l'inclinaison de cette orbite sur ce plan et θ la longitude de son nœud ascendant, la réduction du mouvement sur l'orbite à ce plan sera, par le n° 22 du Livre II,

$$- \frac{1}{2} \tan^2 \varphi \sin(2v - 2\theta) - \tan \varphi \cdot 2s \cos(v - \theta),$$

v , étant le mouvement v rapporté au plan fixe. Ainsi le mouvement en latitude introduit dans le mouvement en longitude sur l'écliptique des inégalités dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites. Mais ces inégalités sont insensibles, excepté pour Jupiter et Saturne.

En ne considérant que les quantités séculaires, et observant que

$$\tan \varphi \sin \theta = p, \quad \tan \varphi \cos \theta = q,$$

on aura

$$\partial s = t \frac{dq}{dt} \sin (nt + \varepsilon) - t \frac{dp}{dt} \cos (nt + \varepsilon).$$

Le terme $-\tan \varphi \cdot \partial s \cos (\varphi - \theta)$ donnera ainsi le suivant $\frac{t(q \frac{dp}{dt} - p \frac{dq}{dt})}{2}$, en sorte que l'on aura

$$v_s = v + t \frac{q \frac{dp}{dt} - p \frac{dq}{dt}}{2},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans le numéro précédent.

Des inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, et de leurs puissances supérieures.

7. Les inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites sont susceptibles de ces deux formes

$$M \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + K],$$

$$N \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + L].$$

On peut les déterminer par l'analyse dont nous avons fait usage dans les numéros précédents; mais, comme elles ne deviennent très-sensibles qu'autant qu'elles croissent avec une extrême lenteur, cette considération simplifie leur calcul. Reprenons la formule (Y) du n° 46 du Livre II : on peut y négliger le terme $\frac{\gamma d(r \partial r)}{a^2 n dt}$, qui est alors insensible, à cause de la petitesse du coefficient de t dans les inégalités dont il s'agit. Cette formule devient ainsi

$$\partial v = -\frac{dr \partial r}{a^2 n dt} + 3a f \int n dt dR + 2 \int n dt a^2 \frac{\partial R}{\partial a},$$

le diviseur $\sqrt{1 - e^2}$ de cette formule devant être supprimé pour plus d'exactitude, par le n° 54 du Livre II. Il faut de plus, par ce même numéro, appliquer, dans la partie elliptique du mouvement de m , ces inégalités au moyen mouvement de cette planète. Cela posé, si l'on suppose

$$R = m' P \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \\ + m' P' \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon],$$

ce qui comprend tous les termes de R dans lesquels le coefficient de nt surpasse ou est surpassé de trois unités par celui de $n't$, on aura, par le n° 65 du Livre II,

$$3a \iint n dt dR = \frac{3(3-i)m'n^3a}{[i(n'-n)+3n]^2} \\ \times \left\{ \left[P + \frac{2dP}{[i(n'-n)+3n]dt} - \frac{3d^2P}{[i(n'-n)+3n]^2 d^2t} \right] \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right. \\ \left. - \left[P' - \frac{2dP'}{[i(n'-n)+3n]dt} - \frac{3d^2P'}{[i(n'-n)+3n]^2 d^2t} \right] \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right\}.$$

On aura ensuite

$$2 \int n dt a^2 \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2m'n}{i(n'-n)+3n} \left\{ a^2 \frac{\partial P}{\partial a} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right. \\ \left. - a^2 \frac{\partial P'}{\partial a} \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right\}.$$

Supposons enfin qu'en n'ayant égard qu'à l'angle

$$i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon,$$

on ait

$$\frac{r \partial r}{a^2} = H \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + A],$$

H étant déterminé par ce qui précède, et étant affecté du très-petit diviseur $i(n' - n) + 3n$; le terme $-\frac{dr \partial r}{a^2 n dt}$ donnera celui-ci

$$-\frac{cH}{2} \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi + A].$$

On aura ainsi, en ne considérant que les termes qui ont $i(n' - n) + 3n$

pour diviseur,

$$\delta v = \frac{3(3-i)m'n^2}{[i(n'-n)+3n]^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[aP' + \frac{2adP}{[i(n'-n)+3n]dt} - \frac{3ad^2P'}{[i(n'-n)+3n]^2 dt^2} \right] \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon] \\ & - \left[aP - \frac{2adP'}{[i(n'-n)+3n]dt} + \frac{3ad^2P}{[i(n'-n)+3n]^2 dt^2} \right] \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon] \end{aligned} \right\} \\ - \frac{2m'n}{i(n'-n)+3n} \left[a^2 \frac{\partial P}{\partial t} \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon] - a^2 \frac{\partial P'}{\partial t} \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon] \right] \\ - \frac{eH}{2} \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon - \varpi + \Lambda].$$

L'équation différentielle

$$0 = \frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + \frac{\mu \cdot r\delta r}{r^3} + 2f\delta R + r \frac{\partial R}{\partial r}$$

donne, en ne considérant que les termes qui ont $i(n'-n) + 3n$ pour diviseur,

$$\frac{r\delta r}{a^2} = \frac{2(i-3)m'n}{i(n'-n)+3n} \left\{ \begin{aligned} & aP \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon] \\ & - aP' \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon] \end{aligned} \right\} \\ - \frac{3}{2}eH \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon - \varpi + \Lambda] \\ + \frac{1}{2}eH \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon + \varpi + \Lambda].$$

En réunissant cette équation à celle-ci

$$\frac{r\delta r}{a^2} = H \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon + \Lambda],$$

on en tirera

$$\begin{aligned} \frac{\delta r}{a} &= H \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon + \Lambda] \\ &- eH \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon - \varpi + \Lambda] \\ &+ eH \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon + \varpi + \Lambda] \\ &+ \frac{2(i-3)m'n}{i(n'-n)+3n} \left\{ \begin{aligned} & aP \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon] \\ & + aP' \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon] \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Cette valeur de $\frac{\delta r}{a}$ introduit dans δv une inégalité dépendante de l'angle $i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon$, et qui a pour diviseur $i(n'-n) + 3n$.

Pour la déterminer, nous reprendrons l'expression de δv donnée par la formule (Y) du n° 46 du Livre II. La partie $\frac{2rd\delta r + dr\delta r}{a^2 n dt}$ de cette expression produit dans δv le terme

$$\frac{3}{2}eH \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon + \varpi + \Lambda].$$

C'est le seul de ce genre qui ait $i(n'-n) + 3n$ pour diviseur. L'inégalité de δv dépendante de l'angle $i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon$ est à très-peu près, par le n° 4, en n'ayant égard qu'aux termes qui ont $i(n'-n) + 3n$ pour diviseur,

$$2H \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon + \Lambda].$$

En désignant donc cette inégalité par

$$K \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon + B],$$

on a dans δv l'inégalité

$$\frac{3}{2}eK \sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon + \varpi + B].$$

8. C'est principalement dans la théorie de Jupiter et de Saturne que ces diverses inégalités sont sensibles. En supposant $i = 5$, la fonction $i(n'-n) + 3n$ devient $5n' - 2n$, et cette dernière quantité est très-petite, en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements de ces deux planètes, ce qui donne aux inégalités correspondantes de δr et de δv de grandes valeurs. Pour les déterminer, reprenons l'expression de R donnée dans le n° 4. La partie

$$\frac{m'r}{r'^2} \cos(v'-v) - \frac{m'}{4} \gamma^2 \frac{r}{r'^2} [\cos(v'-v) - \cos(v'+v)] + \frac{\frac{m'}{4} \gamma^2 rr' \cos(v'-v)}{[r^2 - 2rr' \cos(v'-v) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ne produit aucun terme de l'ordre des cubes des excentricités, et dépendant de l'angle $5n't - 2nt$; il ne peut donc en résulter que de la partie

$$-\frac{m'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos(v'-v) + r'^2}} - \frac{\frac{m'}{4} \gamma^2 rr' \cos(v'+v)}{[r^2 - 2rr' \cos(v'-v) + r'^2]^{\frac{3}{2}}},$$

et alors les valeurs de P et de P' sont les mêmes, lorsque l'on considère l'action de m' sur m et celle de m sur m'. Déterminons ces valeurs.

On a, par le n° 22 du Livre II, en ne portant la précision que jusqu'aux troisièmes puissances des excentricités inclusivement,

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - (e - \frac{3}{2}e^2) \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \frac{1}{2}e^2 \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi) - \frac{3}{8}e^3 \cos(3nt + 3\varepsilon - 3\varpi),$$

$$v = nt + \varepsilon + (2e - \frac{1}{2}e^2) \sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{5}{8}e^2 \sin(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi) + \frac{13}{24}e^3 \sin(3nt + 3\varepsilon - 3\varpi).$$

Cela posé, si l'on développe R suivant les termes dépendants de l'angle $5n't - 2nt$, on aura une expression de cette forme

$$\begin{aligned} R = & M^{(0)} e'^3 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi') \\ & + M^{(1)} e'^2 e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi' - \varpi) \\ & + M^{(2)} e' e^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\varpi) \\ & + M^{(3)} e^3 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi) \\ & + M^{(4)} e' e'^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\Pi) \\ & + M^{(5)} e e'^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\Pi), \end{aligned}$$

et l'on trouvera, après toutes les réductions,

$$\begin{aligned} \alpha' M^{(0)} = & -\frac{m'}{48} \left(389 b_{\frac{3}{2}}^{(2)} + 201 \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx} + 27 \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx^3} \right), \\ \alpha' M^{(1)} = & -\frac{m'}{16} \left(402 b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + 193 \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} + 26 \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^3} \right), \\ \alpha' M^{(2)} = & -\frac{m'}{16} \left(396 b_{\frac{3}{2}}^{(4)} + 184 \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx} + 25 \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx^3} \right), \\ \alpha' M^{(3)} = & -\frac{m'}{48} \left(380 b_{\frac{3}{2}}^{(5)} + 174 \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{dx} + 24 \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{dx^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{dx^3} \right), \\ \alpha' M^{(4)} = & -\frac{m' \alpha}{16} \left(10 b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} \right), \\ \alpha' M^{(5)} = & -\frac{m' \alpha}{16} \left(7 b_{\frac{3}{2}}^{(4)} + \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx} \right). \end{aligned}$$

De là on tire

$$\begin{aligned} m' \alpha' P = & \alpha' M^{(0)} e'^3 \sin 3\varpi' + \alpha' M^{(1)} e'^2 e \sin(2\varpi' + \varpi) \\ & + \alpha' M^{(2)} e' e^2 \sin(\varpi' + 2\varpi) + \alpha' M^{(3)} e^3 \sin 3\varpi \\ & + \alpha' M^{(4)} e' e'^2 \sin(2\Pi + \varpi') + \alpha' M^{(5)} e e'^2 \sin(2\Pi + \varpi). \end{aligned}$$

On aura $m' \alpha' P'$, en changeant dans cette expression de $m' \alpha' P$ les sinus en cosinus, et il sera facile de conclure les valeurs de αP et de $\alpha P'$, en multipliant celles de αP et de $\alpha P'$ par $\frac{a}{a'}$ ou par α . On aura ensuite, en faisant $i = 5$ dans les expressions de δv et de $\frac{\partial r}{a}$ du numéro précédent,

$$\begin{aligned} \delta v = & -\frac{6m'n^2}{(5n' - 2n)^2} \left\{ \left(\alpha P' + \frac{2\alpha dP}{(5n' - 2n)dt} - \frac{3\alpha d^2 P}{(5n' - 2n)^2 dt^2} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. - \left(\alpha P - \frac{2\alpha dP}{(5n' - 2n)dt} - \frac{3\alpha d^2 P}{(5n' - 2n)^2 dt^2} \right) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & - \frac{2m'n}{5n' - 2n} \left[a^2 \frac{\partial P}{\partial a} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - a^2 \frac{\partial P}{\partial a} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ & - \frac{eH}{2} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + \Lambda) \\ & + \frac{3}{2} eK \sin(5n't - 4nt + 5\varepsilon' - 4\varepsilon + \varpi + B), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{a} = & H \cos(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon + \Lambda) - eH \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + \Lambda) \\ & + eH \cos(5n't - 4nt + 5\varepsilon' - 4\varepsilon + \varpi + \Lambda) \\ & + \frac{4m'n}{5n' - 2n} [aP \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + \alpha P' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)]. \end{aligned}$$

En supposant $i = -2$, et changeant ce qui est relatif à m dans ce qui est relatif à m' , et réciproquement, on aura

$$\begin{aligned} \delta v' = & -\frac{15mn'^2}{(5n' - 2n)^2} \left\{ \left(\alpha' P' + \frac{2\alpha' dP}{(5n' - 2n)dt} - \frac{3\alpha' d^2 P}{(5n' - 2n)^2 dt^2} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. - \left(\alpha' P - \frac{2\alpha' dP}{(5n' - 2n)dt} - \frac{3\alpha' d^2 P}{(5n' - 2n)^2 dt^2} \right) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & - \frac{2mn'}{5n' - 2n} \left[a'^2 \frac{\partial P}{\partial a'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - a'^2 \frac{\partial P}{\partial a'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ & - \frac{e'H}{2} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + \Lambda') \\ & + \frac{3}{2} e'K' \sin(3n't - 2nt + 3\varepsilon' - 2\varepsilon + \varpi' + B'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r'}{a} = & H' \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon + A') - e' H' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + A') \\ & + e' H' \cos(3n't - 2nt + 3\varepsilon' - 2\varepsilon + \varpi' + A') \\ & - \frac{10mn'}{5n' - 2n} [a' P \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + a' P' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)], \end{aligned}$$

$H' \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon + A')$ étant la partie de $\frac{r' \partial r'}{a^2}$ dépendante de l'angle $4n't - 2nt$, et $K' \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon + B')$ étant la partie de $\delta v'$ relative au même angle. Dans ces diverses inégalités, nous rapportons, pour plus de simplicité, l'origine des angles à l'intersection commune des deux orbites de Jupiter et de Saturne, comme nous l'avons fait dans le développement de l'expression de R du n° 4, et comme nous le ferons dans le numéro suivant. Nous ne conserverons ainsi que pour l'analogie l'angle II, qu'il faut alors supposer nul.

On déterminera de la manière suivante les différences $\frac{dP}{dt}$, $\frac{d^2P}{dt^2}$, $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{d^2P'}{dt^2}$. On calculera, pour l'époque de 1750 et pour une époque plus éloignée de deux cents années juliennes, c'est-à-dire pour 1950, les valeurs de $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{d\Pi}{dt}$. Soient $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, ... ces valeurs pour la seconde de ces époques; on aura, en supposant que t exprime un nombre d'années juliennes,

$$\frac{de}{dt} = \frac{de}{dt} + 200 \frac{d^2e}{dt^2},$$

les différences de et d^2e dans le second membre de cette équation étant relatives à 1750. L'expression de e pour un temps quelconque t est, en négligeant le cube de t et ses puissances supérieures,

$$e + t \frac{de}{dt} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2e}{dt^2},$$

e , $\frac{de}{dt}$, $\frac{d^2e}{dt^2}$ se rapportant à l'époque de 1750. Cette expression peut s'étendre à mille ou douze cents ans avant et après cette époque. On

aura de la même manière les expressions de ϖ , e' , ϖ' , γ et Π . On calculera par leur moyen les valeurs de P correspondantes aux trois époques de 1750, 2250 et 2750. Soient P , P_1 , P_2 ces valeurs; l'expression générale de P étant

$$P + t \frac{dP}{dt} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2P}{dt^2},$$

on aura, en faisant successivement $t = 500$, $t = 1000$,

$$P + 500 \frac{dP}{dt} + 250000 \cdot \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dt^2} = P_1,$$

$$P + 1000 \frac{dP}{dt} + 1000000 \cdot \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dt^2} = P_2,$$

ce qui donne

$$\frac{dP}{dt} = \frac{4P_1 - 3P - P_2}{1000}, \quad \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{P_2 - 2P_1 + P}{250000}.$$

9. Les termes dépendants des cinquièmes puissances des excentricités peuvent avoir une influence sensible sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; mais le calcul en est pénible par son excessive longueur. Son importance a déterminé Burckhardt, très-habile astronome, à l'entreprendre. Il a discuté avec une scrupuleuse attention tous les termes de cet ordre qui dépendent de l'angle $5n't - 2nt$, en se permettant seulement de négliger les produits des excentricités par la quatrième puissance de l'inclinaison mutuelle des orbites, ce qui ne peut, en effet, produire que des quantités insensibles. L'expression de R du n° 4 est relative à l'action de m' sur m : la partie de cette expression qui a le plus d'influence sur cette inégalité est le produit de m' par le facteur

$$-\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + r'^2}} + \frac{\frac{\gamma^2}{4} rr' [\cos(\nu' - \nu) - \cos(\nu' + \nu)]}{[r^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce facteur est le même pour les deux planètes; en le développant et en ne considérant que les produits des excentricités et des inclinaisons,

relatifs à l'angle $5n't - 2nt$, on a une fonction de cette forme

$$(0) \quad \begin{cases} N^{(0)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 4\varpi' + \varpi) \\ + N^{(1)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi') \\ + N^{(2)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi' - \varpi) \\ + N^{(3)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\varpi) \\ + N^{(4)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi) \\ + N^{(5)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \varpi' - 4\varpi) \\ + N^{(6)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi' + \varpi - 2\Pi) \\ + N^{(7)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\Pi) \\ + N^{(8)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - 2\Pi) \\ + N^{(9)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \varpi' - 2\Pi), \end{cases}$$

et l'on trouve (*)

$$a'N^{(0)} = \frac{e'^4 e}{768} \left\{ \begin{aligned} & 3138b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - 13\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} - 1556\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} - 438\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} \\ & - 38\alpha^4 \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^4} - \alpha^5 \frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^5} \end{aligned} \right\},$$

(*) Les valeurs de $a'N^{(0)}$, $a'N^{(1)}$, ..., $a'N^{(9)}$ données dans le texte sont inexactes. D'abord, ainsi que l'Auteur en a averti dans le Supplément au tome III, elles doivent toutes être prises avec des signes contraires, aussi bien que les nombres $-\frac{3125\alpha e'^4 e}{768}$ et $-\frac{500e'^4 e}{768\alpha^2}$ de la page 31. Mais il y a plus : même après ce changement, les expressions de $a'N^{(7)}$ et de $a'N^{(8)}$ sont encore fautives ; les valeurs exactes de ces quantités sont en effet

$$\begin{aligned} a'N^{(7)} &= \frac{e'^4 e}{128} \left\{ \begin{aligned} & (280e^2 + 810e'^2)\alpha b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - (60e^4 - 23e'^4)\alpha^2 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} \\ & - (32e^3 + 18e'^3)\alpha^3 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} - (2e^5 + e'^5)\alpha^4 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} \end{aligned} \right\}, \\ a'N^{(8)} &= \frac{e'^4 e}{128} \left\{ \begin{aligned} & -(150e^3 + 1372e'^3)\alpha b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - (2e^5 + 132e'^5)\alpha^2 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} \\ & + (11e^5 + 26e'^5)\alpha^3 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} + (e^7 + 2e'^7)\alpha^4 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

V. P.

$$a'N^{(1)} = \frac{e'^3}{768} \left\{ \begin{aligned} & -(20267e'^2 + 24896e^2)b_{\frac{1}{2}}^{(2)} - (7223e'^2 + 8144e^2)\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} \\ & + (1094e'^2 + 3692e^2)\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} + (482e'^2 + 1436e^2)\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} \\ & + (41e'^2 + 140e^2)\alpha^4 \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^4} + (e'^2 + 4e^2)\alpha^5 \frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^5} \end{aligned} \right\} \\ - \frac{e'^2 e^2}{384} \left\{ \begin{aligned} & 590\alpha \left(b_{\frac{1}{2}}^{(1)} + b_{\frac{1}{2}}^{(3)} \right) + 255\alpha^2 \left(\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} + \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} \right) \\ & + 30\alpha^3 \left(\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} + \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} \right) + \alpha^4 \left(\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} + \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} \right) \end{aligned} \right\},$$

$$a'N^{(2)} = -\frac{e'^2 e}{768} \left\{ \begin{aligned} & -(109392e'^2 + 53064e^2)b_{\frac{1}{2}}^{(3)} - (42368e'^2 + 23436e^2)\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} \\ & + (1064e'^2 + 2088e^2)\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} + (1572e'^2 + 1710e^2)\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} \\ & + (152e'^2 + 192e^2)\alpha^4 \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^4} + (4e'^2 + 6e^2)\alpha^5 \frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^5} \end{aligned} \right\} \\ + \frac{e'^2 e^2}{128} \left\{ \begin{aligned} & 595\alpha \left(b_{\frac{1}{2}}^{(2)} + b_{\frac{1}{2}}^{(4)} \right) + 245\alpha^2 \left(\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} + \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} \right) \\ & + 29\alpha^3 \left(\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} + \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} \right) + \alpha^4 \left(\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} + \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^3} \right) \end{aligned} \right\},$$

$$a'N^{(3)} = \frac{e'^2 e}{768} \left\{ \begin{aligned} & -(42912e^2 + 199848e'^2)b_{\frac{1}{2}}^{(4)} - (21728e^2 + 82032e'^2)\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} \\ & - (640e^2 + 2970e'^2)\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} + (864e^2 + 1854e'^2)\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^3} \\ & + (116e^2 + 210e'^2)\alpha^4 \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^4} + (4e^2 + 6e'^2)\alpha^5 \frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^5} \end{aligned} \right\} \\ - \frac{e'^2 e^2}{128} \left\{ \begin{aligned} & 580\alpha \left(b_{\frac{1}{2}}^{(3)} + b_{\frac{1}{2}}^{(5)} \right) + 234\alpha^2 \left(\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} + \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} \right) \\ & + 28\alpha^3 \left(\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} + \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^2} \right) + \alpha^4 \left(\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} + \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^3} \right) \end{aligned} \right\},$$

$$\begin{aligned}
a' N^{(1)} &= -\frac{e^3}{768} \left\{ \begin{aligned} &-(11840e^2 + 152000e'^2) b_{\frac{3}{2}}^{(1)} - (6560e^2 + 65168e'^2) \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{dx} \\ &-(592e^2 + 4720e'^2) \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{dx^2} + (152e^2 + 920e'^2) \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{dx^3} \\ &+(26e^2 + 128e'^2) \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{dx^4} + (e^2 + 4e'^2) \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{dx^5} \end{aligned} \right\} \\
&+ \frac{e^3 \gamma^2}{384} \left\{ \begin{aligned} &554 \alpha \left(b_{\frac{3}{2}}^{(4)} + b_{\frac{3}{2}}^{(6)} \right) + 222 \alpha^2 \left(\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx} + \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{dx} \right) \\ &+ 27 \alpha^2 \left(\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx^2} + \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{dx^2} \right) + \alpha^4 \left(\frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx^3} + \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{dx^3} \right) \end{aligned} \right\}, \\
a' N^{(2)} &= -\frac{e'e^4}{768} \left\{ \begin{aligned} &41448 b_{\frac{3}{2}}^{(4)} + 18392 \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{dx} + 1780 \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{dx^2} \\ &- 156 \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{dx^3} - 29 \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{dx^4} - \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{dx^5} \end{aligned} \right\}, \\
a' N^{(4)} &= -\frac{e'^2 e \gamma^2}{128} \left\{ -85 \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(2)} + 85 \alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx} + 21 \alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx^2} + \alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx^3} \right\}, \\
a' N^{(1)} &= -\frac{e'e^2}{128} \left\{ \begin{aligned} &(56e^2 + 842e'^2) \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + (4e^2 + 87e'^2) \alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} \\ &-(16e^2 + 2e'^2) \alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^2} - (2e^2 + e'^2) \alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^3} \end{aligned} \right\}, \\
a' N^{(8)} &= -\frac{e'e^2}{128} \left\{ \begin{aligned} &-(174e^2 + 196e'^2) \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(4)} - (50e^2 + 180e'^2) \alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx} \\ &+ (14e'^2 - e^2) \alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx^2} + (2e'^2 + e^2) \alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx^3} \end{aligned} \right\}, \\
a' N^{(6)} &= -\frac{e'e^2 \gamma^2}{128} \left\{ 580 \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + 86 \alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} - 8 \alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^2} - \alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^3} \right\}.
\end{aligned}$$

Lorsque l'on considère l'action de m' sur m , il faut, par le n° 4, augmenter, dans $a' N^{(0)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$ de $-\frac{a}{a'}$ ou de $-z$, ce qui augmente $a' N^{(0)}$ de

$-\frac{3125ae^4e}{768}$. Lorsque l'on considère l'action de m sur m' , il faut augmenter $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$ de $-\frac{1}{\alpha^2}$, ce qui augmente $a' N^{(0)}$ de $-\frac{500e^4e}{768\alpha^2}$. Cela posé, on multipliera les valeurs précédentes de $a' N^{(0)}$, $a' N^{(1)}$, ... par m' , et l'on décomposera chacun des cosinus qu'elles multiplient dans la fonction (O) en sinus et cosinus de $5n't - 2nt + 5t' - 2t$, ce qui donne à cette fonction la forme suivante

$$\begin{aligned}
&m'a' P_s \sin(5n't - 2nt + 5t' - 2t) \\
&+ m'a' P_c \cos(5n't - 2nt + 5t' - 2t).
\end{aligned}$$

On multipliera pareillement par m les valeurs de $a' N^{(0)}$, $a' N^{(1)}$, ... relatives à l'action de m sur m' , et l'on décomposera les cosinus de la fonction (O) en sinus et cosinus de $5n't - 2nt + 5t' - 2t$, ce qui lui donnera la forme suivante

$$\begin{aligned}
&ma' P_s \sin(5n't - 2nt + 5t' - 2t) \\
&+ ma' P_c \cos(5n't - 2nt + 5t' - 2t).
\end{aligned}$$

On substituera donc successivement ces valeurs dans les expressions de δv et de $\delta v'$ du numéro précédent, et l'on pourra négliger leurs différences secondes, à cause de la petitesse de ces quantités. On aura ainsi les parties des inégalités de Jupiter et de Saturne relatives à l'angle $5n't - 2nt$ et dépendantes des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites.

On peut observer ici qu'en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, on a $3125\alpha^3 = 500$. En effet, $\alpha^3 = \frac{n'^2}{n^2}$, et, de plus, $5n'$ est à fort peu près égal à $2n$, ce qui donne $\frac{n'^2}{n^2} = \frac{4}{25}$. De là il suit que la valeur de $a' N^{(0)}$ est la même, soit que l'on considère l'action de m' sur m , soit que l'on considère l'action de m sur m' . Ainsi, l'on peut conclure la partie précédente de $\delta v'$ de la partie correspondante de δv , en multipliant celle-ci par $-\frac{5mn'^2 a'}{2mn^2 a'}$.

10. Dans la théorie de Mercure troublé par la Terre, il faut considérer l'inégalité dépendante de l'angle $nt - 4n't$, parce que le moyen

mouvement de Mercure est à très-peu près quadruple de celui de la Terre. En supposant que m soit Mercure et m' la Terre, on aura l'inégalité dont il s'agit, en faisant $i = 4$ dans l'expression de δv du n° 7. Vu l'extrême petitesse de cette inégalité, on peut négliger les termes qui n'ont point $(n - 4n')^2$ pour diviseur, et ceux qui dépendent de $\frac{dP}{dt}$ et $\frac{dP'}{dt}$. On aura ainsi

$$\delta v = \frac{3m'n^2}{(n-4n')^2} [aP' \sin(nt - 4n't + \varepsilon - 4\varepsilon') + aP \cos(nt - 4n't + \varepsilon - 4\varepsilon')].$$

On déterminera facilement P et P' de cette manière. On calculera, par la formule (A) du n° 1, la valeur de $\frac{r\partial r}{a^2}$ correspondante à l'angle $4n't - 2nt$, ce qui revient à faire $i = 4$ dans cette formule. On aura ainsi une valeur de $\frac{r\partial r}{a^2}$ de cette forme

$$\begin{aligned} & L e^2 \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi) \\ & + L^{(1)} e e' \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi') \\ & + L^{(2)} e'^2 \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi') \\ & + L^{(3)} \gamma^2 \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi). \end{aligned}$$

On observera ensuite que cette valeur de $\frac{r\partial r}{a^2}$ résulte des variations de l'excentricité et du périhélie dépendantes de $nt - 4n't$ dans l'expression elliptique de $\frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2}$: cette expression contient le terme $-e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$, dont la variation est

$$-\delta e \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - e \delta \varpi \sin(nt + \varepsilon - \varpi),$$

δe et $\delta \varpi$ étant les variations de e et de ϖ dépendantes de $nt - 4n't$. On a, par le n° 69 du Livre II,

$$\begin{aligned} \delta e &= \frac{m'an}{n-4n'} \left[\frac{\partial P}{\partial e} \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) + \frac{\partial P'}{\partial e} \cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) \right], \\ e \delta \varpi &= -\frac{m'an}{n-4n'} \left[\frac{\partial P}{\partial e} \cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e} \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

La variation de $-e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ devient ainsi

$$\frac{m'an}{n-4n'} \left[\frac{\partial P}{\partial e} \sin(2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon' - \varpi) - \frac{\partial P'}{\partial e} \cos(2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon' - \varpi) \right].$$

Cette fonction est identique avec l'expression précédente de $\frac{r\partial r}{a^2}$; en changeant donc, dans l'une et dans l'autre, $2nt + 2\varepsilon$ dans $nt + \varepsilon + \varpi + \frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence, on aura

$$\begin{aligned} \frac{m'an}{n-4n'} \left[\frac{\partial P}{\partial e} \cos(nt - 4n't + \varepsilon - 4\varepsilon') + \frac{\partial P'}{\partial e} \sin(nt - 4n't + \varepsilon - 4\varepsilon') \right] \\ = L e^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 3\varpi) \\ + L^{(1)} e e' \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi' - 2\varpi) \\ + L^{(2)} e'^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi' - \varpi) \\ + L^{(3)} \gamma^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - 2\Pi). \end{aligned}$$

Si l'on intègre cette équation par rapport à e , et qu'ensuite on la multiplie par $\frac{3n}{n-4n'}$, on aura

$$\delta v = \frac{3n}{n-4n'} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} L e^3 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 3\varpi) \\ & + \frac{1}{2} L^{(1)} e^2 e' \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi' - 2\varpi) \\ & + L^{(2)} e e'^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi' - \varpi) \\ & + L^{(3)} e \gamma^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - 2\Pi) \end{aligned} \right\}.$$

Dans cette intégration, on néglige les termes de P et de P' dépendants de e^3 et de $e'\gamma^2$; mais l'excentricité de l'orbite de la Terre est si peu considérable relativement à celle de Mercure, et l'inégalité dont il s'agit est si petite, que l'on peut les omettre sans erreur sensible.

11. Il résulte du n° 71 du Livre II que les termes

$$\begin{aligned} & M^{(1)} e' \gamma^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - \varpi') \\ & + M^{(2)} e \gamma^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - \varpi) \end{aligned}$$

du développement de R , donné dans le n° 8, produisent, dans la valeur de s ou dans le mouvement de m en latitude, l'inégalité

$$-\frac{2an}{5n-2n'} \left[e' \gamma M^{(1)} \sin(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon - \Pi - \varpi') + e \gamma M^{(2)} \sin(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon - \Pi - \varpi) \right].$$

Parcillement, les mêmes termes produisent, dans la valeur de s' ou dans le mouvement de m' en latitude, l'inégalité

$$\frac{2an'}{5n'-2n} \frac{m}{m'} \left[\begin{aligned} & e' \gamma M^{(1)} \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - \Pi - \varpi) \\ & + e \gamma M^{(2)} \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - \Pi - \varpi) \end{aligned} \right],$$

Il étant, comme dans l'inégalité précédente de s , la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m' sur celle de m . Ce sont les seules inégalités sensibles en latitude du système planétaire dépendantes du produit des excentricités et des inclinaisons des orbites.

On a vu, dans le n° 6, que la valeur de δs introduit dans le mouvement de m , réduit au plan fixe, le terme $-\tan \varphi \delta s \cos(v, -\theta)$; en substituant dans ce terme l'inégalité précédente de s , on aura un terme dépendant de $5n't - 2nt$, qui doit s'ajouter à la grande inégalité du mouvement de m ; mais ce terme est insensible pour Jupiter et Saturne.

CHAPITRE II.

DES INÉGALITÉS DÉPENDANTES DU CARRÉ DE LA FORCE PERTURBATRICE.

12. Les grandes inégalités que nous venons de déterminer en produisent de sensibles, dépendantes du carré de la force perturbatrice; nous en avons donné les expressions analytiques dans les n° 65 et 69 du Livre II. Il résulte du n° 65 du même Livre que, si l'on désigne par $\bar{H} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \bar{A})$ la grande inégalité de Jupiter, on aura

$$-\frac{\bar{H}^2}{8} \frac{2m' \sqrt{a'} + 5m \sqrt{a}}{m' \sqrt{a'}} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \bar{A})$$

pour l'inégalité correspondante de Jupiter, dépendante du carré de la force perturbatrice; cette inégalité s'ajoute, comme celle dont elle dérive, au moyen mouvement de la planète.

Parcillement, si l'on désigne par $-\bar{H} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \bar{A})$ la grande inégalité de Saturne, on aura

$$\frac{\bar{H}^2}{8} \frac{2m' \sqrt{a'} + 5m \sqrt{a}}{m' \sqrt{a'}} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \bar{A})$$

pour l'inégalité correspondante de Saturne, et qui doit être ajoutée au moyen mouvement de cette planète.

Les variations des excentricités et des périhélies peuvent introduire de semblables inégalités dans les moyens mouvements des deux planètes. Pour les déterminer, nous observerons que l'on a, en n'ayant égard qu'aux cubes et aux produits de trois dimensions des excentri-

cités et des inclinaisons des orbites,

$$3affndt dR = -6am'ffn^2 dt^2 \left[\begin{array}{l} P \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - P' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right],$$

ce qui donne dans $3affndt dR$ la quantité

$$(X) -6am'ffn^2 dt^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial e} \left[\frac{\partial P}{\partial e} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \frac{\partial \sigma}{\partial \omega} \left[\frac{\partial P}{\partial \omega} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial \omega} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \frac{\partial e'}{\partial e'} \left[\frac{\partial P}{\partial e'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \frac{\partial \sigma'}{\partial \omega'} \left[\frac{\partial P}{\partial \omega'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial \omega'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma} \left[\frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \frac{\partial \Pi}{\partial \Pi} \left[\frac{\partial P}{\partial \Pi} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial \Pi} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \end{array} \right\},$$

δe , $\delta \sigma$, $\delta e'$, $\delta \sigma'$, $\delta \gamma$, $\delta \Pi$ étant les parties de e , σ , e' , σ' , γ , Π qui dépendent de l'angle $5n't - 2nt$. On a, par le n° 8,

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial P}{\partial \sigma} = e \frac{\partial P'}{\partial e}, & \frac{\partial P'}{\partial \sigma} = -e \frac{\partial P}{\partial e'}, \\ \frac{\partial P}{\partial \sigma'} = e' \frac{\partial P'}{\partial e'}, & \frac{\partial P'}{\partial \sigma'} = -e' \frac{\partial P}{\partial e}, \\ \frac{\partial P}{\partial \Pi} = \gamma \frac{\partial P'}{\partial \gamma}, & \frac{\partial P'}{\partial \Pi} = -\gamma \frac{\partial P}{\partial \gamma}. \end{array}$$

De plus, on a, par le n° 69 du Livre II,

$$\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial e} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) = \frac{5n' - 2n}{m'an} e \delta \sigma, \\ \frac{\partial P}{\partial e} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + \frac{\partial P'}{\partial e} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) = -\frac{5n' - 2n}{m'an} \delta e; \end{array}$$

on a pareillement

$$\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial e'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) = \frac{5n' - 2n}{ma'n'} e' \delta \sigma', \\ \frac{\partial P}{\partial e'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + \frac{\partial P'}{\partial e'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) = -\frac{5n' - 2n}{ma'n'} \delta e'. \end{array}$$

Pour avoir les valeurs de $\delta \gamma$ et de $\delta \Pi$, nous observerons que la latitude s de m au-dessus de l'orbite primitive de m' est $-\gamma \sin(v - \Pi)$, ce qui donne

$$-\delta s = \delta \gamma \sin(v - \Pi) - \gamma \delta \Pi \cos(v - \Pi);$$

or on a, par le n° 71 du Livre II,

$$\delta s = \frac{m'an}{5n' - 2n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - v + \Pi) \\ - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - v + \Pi) \end{array} \right\}.$$

En comparant cette expression à la précédente, on aura

$$\begin{array}{l} \delta \gamma = -\frac{m'an}{5n' - 2n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\}, \\ \gamma \delta \Pi = \frac{m'an}{5n' - 2n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\}. \end{array}$$

γ exprimant l'inclinaison respective des deux orbites l'une sur l'autre, et Π étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m' sur celle de m . Ces quantités varient encore par l'action de m sur m' ; en nommant $\delta_e \gamma$ et $\delta_e \Pi$ ces dernières variations, et représentant par $\delta_e \gamma$ et $\delta_e \Pi$ les variations précédentes dues à l'action de m' sur m , on aura

$$\begin{array}{l} \delta \gamma = \delta_e \gamma + \delta_e \gamma, \quad \delta \Pi = \delta_e \Pi + \delta_e \Pi, \\ \delta_e \gamma = \frac{ma'n'}{m'an} \delta_e \gamma, \quad \delta_e \Pi = \frac{ma'n'}{m'an} \delta_e \Pi. \end{array}$$

Cela posé, si l'on substitue ces diverses quantités dans la fonction (X), on trouve qu'elle se réduit à zéro. Les variations des excentricités, des périhélie, des nœuds et des inclinaisons des orbites, correspondantes aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, n'introduisent donc dans le moyen mouvement de Jupiter et dans le grand axe de son orbite, considérée comme une ellipse variable, aucune inégalité sensible dépendante du carré de la force perturbatrice, et il est visible

que cela a encore lieu pour le moyen mouvement de Saturne et pour le grand axe de son orbite.

13. Considérons présentement les variations des excentricités et des périhélie. Nous avons donné, dans le n° 69 du Livre II, les expressions des accroissements de $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\sigma}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, $\frac{d\sigma'}{dt}$, dus aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, et nous avons observé dans le même numéro que les variations de e , σ , e' , σ' , relatives à l'angle $5n't - 2nt$, introduisent dans ces expressions des variations semblables à celles qu'y produisent les deux grandes inégalités. En appliquant ces considérations à Jupiter et à Saturne, et désignant par δe et $\delta \sigma$ les variations dues au carré de la force perturbatrice, on trouve

$$\begin{aligned} \delta e = & - \frac{3m^2 a^2 n^3}{(5n' - 2n)^2} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left\{ \left(P \frac{\partial P'}{\partial e} - P' \frac{\partial P}{\partial e} \right) t + \frac{P \frac{\partial P'}{\partial e} + P' \frac{\partial P}{\partial e}}{2(5n' - 2n)} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. + \frac{P' \frac{\partial P'}{\partial e} - P \frac{\partial P}{\partial e}}{2(5n' - 2n)} \cdot \cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & + \frac{m'^2 a'^2 n'^3}{5n' - 2n} \left\{ \left(\frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e'^2} + \frac{\partial P'}{\partial \varepsilon'} \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon'} + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 P'}{\partial \varepsilon' \partial \varepsilon'} \right) t + \frac{\left(\frac{\partial P'}{\partial e} \right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial e} \right)^2}{4e(5n' - 2n)} \cdot \cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. - \frac{\frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial P'}{\partial e}}{2e(5n' - 2n)} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & + \frac{mm'aa'n'n't}{5n' - 2n} \left(\frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial e} + \frac{\partial P'}{\partial \varepsilon'} \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon'} + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 P'}{\partial \varepsilon' \partial \varepsilon'} \right), \\ \delta \sigma = & \frac{3m^2 a^2 n^3}{(5n' - 2n)^2 e} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left\{ \left(P \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + P' \frac{\partial P}{\partial \sigma} \right) t + \frac{P \frac{\partial P'}{\partial \sigma} - P' \frac{\partial P}{\partial \sigma}}{2(5n' - 2n)} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. + \frac{P' \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + P \frac{\partial P}{\partial \sigma}}{2(5n' - 2n)} \cdot \cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & + \frac{m'^2 a'^2 n'^3}{(5n' - 2n)e} \left\{ \left(\frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} + \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e'^2} + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon'} + \frac{\partial P'}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 P'}{\partial \varepsilon' \partial \varepsilon'} \right) t + \frac{\left(\frac{\partial P'}{\partial e} \right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial e} \right)^2}{2e(5n' - 2n)} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. + \frac{\frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial P'}{\partial e}}{e(5n' - 2n)} \cdot \cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & + \frac{mm'aa'n'n't}{(5n' - 2n)e} \left(\frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial e} + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon'} + \frac{\partial P'}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 P'}{\partial \varepsilon' \partial \varepsilon'} \right). \end{aligned}$$

Les parties de ces expressions, proportionnelles au temps t , donnent les variations séculaires de l'excentricité et du périhélie dues au carré de la force perturbatrice. Pour avoir les termes périodiques dépendants de ce carré, considérons le terme $2e \sin(nt + \varepsilon - \sigma)$ de l'expression elliptique de la longitude vraie. Si l'on désigne par δe et par $\delta \sigma$ les variations de e et de σ dépendantes de l'angle $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$, et qui sont dues à la première puissance de la force perturbatrice, et par $\delta'e$ et $\delta'\sigma$ les variations précédentes de e et de σ dépendantes du double de cet angle; si l'on désigne ensuite par δ_2 la somme des deux inégalités de m , l'une dépendante de $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$, et l'autre dépendante du double de cet angle, le terme $2e \sin(nt + \varepsilon - \sigma)$ devient

$$(2e + 2\delta e + 2\delta'e) \sin(nt + \varepsilon + \delta_2 - \sigma - \delta\sigma - \delta'\sigma),$$

et par conséquent, en négligeant le cube de la force perturbatrice, il se développe dans les termes suivants

$$\begin{aligned} & 2e \sin(nt + \varepsilon + \delta_2 - \sigma) \\ & + 2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \sigma) - 2e\delta\sigma \cos(nt + \varepsilon - \sigma) \\ & + [2\delta'e + 2e\delta\sigma\delta_2 - e(\delta\sigma)^2] \sin(nt + \varepsilon - \sigma) \\ & - [2e\delta'\sigma + 2\delta e\delta\sigma - 2\delta_2\delta e] \cos(nt + \varepsilon - \sigma). \end{aligned}$$

Le terme $2e \sin(nt + \varepsilon + \delta_2 - \sigma)$ est celui que l'on obtient en augmentant, comme nous le prescrivons, dans la partie elliptique, le moyen mouvement nt , de δ_2 ; les deux termes

$$2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \sigma) - 2e\delta\sigma \cos(nt + \varepsilon - \sigma)$$

forment l'inégalité dépendante de l'angle $3nt - 5n't + 3\varepsilon - 5\varepsilon'$, que donnent les formules du n° 1. Si l'on substitue ensuite dans les autres termes, au lieu de δe et $\delta \sigma$, leurs valeurs données par le n° 69 du Livre II, et au lieu de $\delta'e$ et $\delta'\sigma$ leurs valeurs données par ce qui précède, leur somme donnera, en négligeant les termes dépendants du sinus et du cosinus de $nt + \varepsilon$, parce qu'ils se confondent avec l'équa-

tion du centre,

$$-\frac{3m'^2a^2n^3}{(5n'-2n)^3} \frac{5m\sqrt{a}+4m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left(\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e} + \mathbf{P}' \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e} \right) \cos(5nt-10n't+5\varepsilon-10\varepsilon'-\omega) \\ -\frac{3m'^2a^2n^3}{(5n'-2n)^3} \frac{5m\sqrt{a}+4m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left(\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e} - \mathbf{P}' \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e} \right) \sin(5nt-10n't+5\varepsilon-10\varepsilon'-\omega).$$

Cette inégalité peut être mise sous la forme suivante : si l'on représente par $\mathbf{K} \sin(5n't-3nt+5\varepsilon'-3\varepsilon+B)$ l'inégalité de m dépendante de $3nt-5n't+3\varepsilon-5\varepsilon'$, et par $\mathbf{H} \sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\bar{\mathbf{A}})$ la grande inégalité, l'inégalité précédente sera, par le n° 69 du Livre II,

$$\frac{1}{4} \frac{5m\sqrt{a}+4m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \mathbf{H} \mathbf{K} \sin(5nt-10n't+5\varepsilon-10\varepsilon'-B-\bar{\mathbf{A}}).$$

On trouvera pareillement, en n'ayant égard qu'aux variations séculaires dépendantes du carré de la force perturbatrice,

$$\partial e' = -\frac{3m^2a^2n^3}{(5n'-2n)^2a'} \frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \left(\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e'} - \mathbf{P}' \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e'} \right) \\ + \frac{m^2a'^2n'^2}{5n'-2n} \left(\frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e'} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial e'^2} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e'} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'}{\partial e'^2} + \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'}{\partial e' \partial \gamma} \right) \\ + \frac{mm'aa'nn't}{5n'-2n} \left(\frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial e \partial e'} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'}{\partial e \partial \gamma} \right), \\ \partial \omega' = \frac{3m^2a^2n^3}{(5n'-2n)^2a'e'} \frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \left(\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e'} + \mathbf{P}' \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e'} \right) \\ + \frac{m^2a'^2n'^2}{(5n'-2n)e'} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e'} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial e'^2} + \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e'} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial e'^2} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'}{\partial e' \partial \gamma} + \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial e' \partial \gamma} \right) \\ + \frac{mm'aa'nn't}{(5n'-2n)e'} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'}{\partial e \partial \gamma} + \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial e \partial \gamma} \right).$$

On trouve encore que le mouvement de m' en longitude est affecté de l'inégalité

$$-\frac{3m^2a^2n^3}{(5n'-2n)^2a'} \frac{3m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \left\{ \left(\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e'} + \mathbf{P}' \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e'} \right) \cos(4nt-9n't+4\varepsilon-9\varepsilon'-\omega') \right. \\ \left. + \left(\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial e'} - \mathbf{P}' \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial e'} \right) \sin(4nt-9n't+4\varepsilon-9\varepsilon'-\omega') \right\}.$$

Si l'on désigne par

$$\mathbf{K}' \sin(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon+B')$$

l'inégalité de m' dépendante de $2nt-4n't+2\varepsilon-4\varepsilon'$, et par

$$-\mathbf{H}' \sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\bar{\mathbf{A}}')$$

la grande inégalité de m' , on aura, pour son inégalité dépendante de $4nt-9n't+4\varepsilon-9\varepsilon'$,

$$\frac{1}{4} \frac{3m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \mathbf{H}' \mathbf{K}' \sin(4nt-9n't+4\varepsilon-9\varepsilon'-B'-\bar{\mathbf{A}}').$$

14. Les nœuds et les inclinaisons des orbites de Jupiter et de Saturne sont assujettis à des variations analogues aux précédentes. Pour les déterminer, nous observerons que, φ et φ' étant les inclinaisons des orbites sur un plan fixe, et θ et θ' étant les longitudes de leurs nœuds ascendants, on a, par le n° 60 du Livre II, à cause de la petitesse de φ et de φ' ,

$$\varphi' \sin \theta' - \varphi \sin \theta = \gamma \sin \Pi,$$

$$\varphi' \cos \theta' - \varphi \cos \theta = \gamma \cos \Pi.$$

On a de plus, par le n° 12,

$$\partial(\varphi' \sin \theta') = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \partial(\varphi \sin \theta),$$

$$\partial(\varphi' \cos \theta') = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \partial(\varphi \cos \theta).$$

De ces quatre équations on tire les suivantes

$$\partial \varphi = \frac{-m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}} [\partial \gamma \cos(\Pi-\theta) - \gamma \partial \Pi \sin(\Pi-\theta)],$$

$$\varphi \partial \theta = \frac{-m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}} [\partial \gamma \sin(\Pi-\theta) + \gamma \partial \Pi \cos(\Pi-\theta)],$$

$$\partial \varphi' = \frac{m\sqrt{a}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}} [\partial \gamma \cos(\Pi-\theta') - \gamma \partial \Pi \sin(\Pi-\theta')],$$

$$\varphi' \partial \theta' = \frac{m\sqrt{a}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}} [\partial \gamma \sin(\Pi-\theta') + \gamma \partial \Pi \cos(\Pi-\theta')].$$

Les variations de φ , θ , φ' et θ' dépendent ainsi des variations de γ et de Π . On a, par le n° 12.

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} m' an \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\},$$

$$\gamma \frac{d\Pi}{dt} = -\frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} m' an \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\}.$$

De là on tire, en négligeant les quantités périodiques dont l'effet est insensible, et en observant que

$$\frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma = & -\frac{3m'^2 a^2 n^3}{(5n' - 2n)^2} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left(P \frac{\partial P'}{\partial \gamma} - P' \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{m'^2 a^2 n^2}{5n' - 2n} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left(\frac{\partial P'}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 P'}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \right) \\ & + \frac{mm'aa'nn'}{5n' - 2n} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left(\frac{\partial P'}{\partial \varepsilon'} \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} \frac{\partial^2 P'}{\partial \varepsilon' \partial \gamma} \right), \\ \delta\Pi = & \frac{3m'^2 a^2 n^3}{\gamma(5n' - 2n)^2} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left(P \frac{\partial P}{\partial \gamma} + P' \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{m'^2 a^2 n^2}{\gamma(5n' - 2n)} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon \partial \gamma} + \frac{\partial P'}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 P'}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \\ + \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} \end{array} \right\} \\ & + \frac{mm'aa'nn'}{\gamma(5n' - 2n)} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon' \partial \gamma} + \frac{\partial P'}{\partial \varepsilon'} \frac{\partial^2 P'}{\partial \varepsilon' \partial \gamma} \\ + \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

15. Si l'on voulait déterminer pour un temps quelconque les éléments des orbites planétaires, il faudrait intégrer les équations différentielles (A) et (C) des nos 55 et 59 du Livre II, par la méthode ex-

posée dans le n° 56 du même Livre; mais l'ignorance où nous sommes encore sur les valeurs des masses de plusieurs planètes rend inutile à l'Astronomie ce calcul, dans lequel il devient indispensable de faire entrer les variations séculaires dépendantes du carré de la force perturbatrice, que nous venons de déterminer, et qui sont très-sensibles pour Jupiter et Saturne. Ces variations augmentent les valeurs de $\frac{dh''}{dt}$, $\frac{dl''}{dt}$, $\frac{dp''}{dt}$, $\frac{dq''}{dt}$, $\frac{dh'}{dt}$, $\frac{dl'}{dt}$, $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dq'}{dt}$, ..., relatives à ces deux planètes, respectivement des quantités

$$\frac{h'' \partial e''}{e'' t} + \frac{l'' \partial \varpi''}{t}, \quad \frac{l'' \partial e''}{e'' t} - \frac{h'' \partial \varpi''}{t}, \quad \frac{p'' \partial \varphi''}{\varphi'' t} + \frac{q'' \partial \theta''}{t}, \quad \dots,$$

en ne considérant dans $\delta e''$, $\delta \varpi''$, ... que les quantités proportionnelles au temps t , déterminées dans les numéros précédents. On substituera dans ces dernières quantités, au lieu de e'' , $\sin \varpi''$, $\cos \varpi''$, ..., leurs valeurs en h'' , l'' , ...; les équations différentielles (A) du n° 55 du Livre II cesseront d'être linéaires; mais il sera facile de les intégrer par les méthodes connues d'approximation, lorsque la suite des siècles aura fait connaître les vraies valeurs des masses planétaires. Dans l'état actuel de l'Astronomie, il suffit d'avoir les variations séculaires des éléments des orbites, en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, en ne portant l'approximation que jusqu'à la seconde puissance.

On a vu, dans les nos 57 et 59 du Livre II, que l'état du système planétaire est stable, c'est-à-dire que les orbites de ce système restent toujours très-peu excentriques et très-peu inclinées les unes aux autres. Nous avons déduit ce résultat important du Système du monde de l'équation trouvée dans le n° 61 du Livre II.

$$\text{const.} = (e^2 + \varphi^2) m\sqrt{a} + (e'^2 + \varphi'^2) m'\sqrt{a'} + \dots$$

En effet, le second membre de cette équation est très-petit dans l'état actuel de ce Système; il le sera donc toujours, ce qui exige que les excentricités et les inclinaisons des orbites soient toujours peu consi-

dérables. Nous allons faire voir ici que la différentielle de l'équation précédente

$$0 = (e de + \varphi d\varphi) m \sqrt{a} + (e' de' + \varphi' d\varphi') m' \sqrt{a'} + \dots$$

subsiste, en ayant même égard aux variations séculaires des éléments des orbites, déterminées dans les numéros précédents, d'où il suit que ces variations n'altèrent point la stabilité du système planétaire. Pour cela, il suffit de prouver qu'en représentant par m Jupiter, par m' Saturne, et par δe , $\delta e'$, $\delta \varphi$, $\delta \varphi'$ les variations séculaires de e , e' , φ , φ' , données par ce qui précède, on a

$$0 = (e \delta e + \varphi \delta \varphi) m \sqrt{a} + (e' \delta e' + \varphi' \delta \varphi') m' \sqrt{a'}.$$

En substituant dans la fonction $\varphi \delta \varphi \cdot m \sqrt{a} + \varphi' \delta \varphi' \cdot m' \sqrt{a'}$, au lieu de φ , $\delta \varphi$, φ' , $\delta \varphi'$, leurs valeurs données dans le numéro précédent, elle devient

$$\frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma,$$

ce qui change l'équation précédente dans celle-ci

$$0 = e \delta e \cdot m \sqrt{a} + e' \delta e' \cdot m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma.$$

Considérons d'abord le premier terme de l'expression de δe du n° 13. Ce terme devient, en observant que $n^2 a^3 = 1$,

$$-\frac{3m'(5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'})}{a\sqrt{a'}(5n' - 2n)^2} nt \left(P \frac{\partial P'}{\partial e} - P' \frac{\partial P}{\partial e} \right).$$

Considérons ensuite le premier terme de l'expression de $\delta e'$ du même numéro,

$$-\frac{3m(5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'})}{a'\sqrt{a}(5n' - 2n)^2} nt \left(P \frac{\partial P'}{\partial e'} - P' \frac{\partial P}{\partial e'} \right).$$

Considérons enfin le premier terme de l'expression de $\delta \gamma$ du numéro

précédent

$$-\frac{3m'(5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'})}{a\sqrt{a'}(5n' - 2n)^2} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} nt \left(P \frac{\partial P'}{\partial \gamma} - P' \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right).$$

On aura, en n'ayant égard qu'à ces termes.

$$e \delta e \cdot m \sqrt{a} + e' \delta e' \cdot m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma \\ = -\frac{3mm'(5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'})}{(5n' - 2n)^2 \sqrt{aa'}} nt \left\{ \begin{aligned} &P \left(e \frac{\partial P'}{\partial e} + e' \frac{\partial P'}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \right) \\ &- P' \left(e \frac{\partial P}{\partial e} + e' \frac{\partial P}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right) \end{aligned} \right\};$$

or P et P' étant des fonctions homogènes en e , e' et γ , de la troisième dimension, on a

$$e \frac{\partial P}{\partial e} + e' \frac{\partial P}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P}{\partial \gamma} = 3P,$$

$$e \frac{\partial P'}{\partial e} + e' \frac{\partial P'}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P'}{\partial \gamma} = 3P';$$

on a donc

$$0 = e \delta e \cdot m \sqrt{a} + e' \delta e' \cdot m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma.$$

Considérons ensuite le terme de δe ,

$$\frac{m'^2 t}{a(5n' - 2n)} \left(\frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e'^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right);$$

le terme de $\delta e'$,

$$\frac{mm' t}{\sqrt{aa'}(5n' - 2n)} \left(\frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial e} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right);$$

enfin le terme de $\delta \gamma$,

$$\frac{m'^2 t}{a(5n' - 2n)} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left(\frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right);$$

on aura, en n'ayant égard qu'à ces termes et observant que l'on a

$$0 = \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2},$$

$$e \delta e . m \sqrt{a} + e' \delta e' . m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma$$

$$= \frac{m'^2 m t}{(5n' - 2n) \sqrt{a}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial P'}{\partial e} \left(e \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} + e' \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} + \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} \right) \\ & - \frac{\partial P}{\partial e} \left(e \frac{\partial^2 P'}{\partial e^2} + e' \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \gamma \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right) \\ & + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \left(e \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} + e' \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} \right) \\ & - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \left(e \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} + e' \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} \right) \end{aligned} \right\}.$$

$\frac{\partial P}{\partial e}$ et $\frac{\partial P'}{\partial e}$ sont homogènes en e, e' et γ , de la seconde dimension, ce qui donne

$$e \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} + e' \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} + \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} = 2 \frac{\partial P}{\partial e},$$

$$e \frac{\partial^2 P'}{\partial e^2} + e' \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \gamma \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} = 2 \frac{\partial P'}{\partial e};$$

de plus, $\frac{\partial P}{\partial \gamma}$ et $\frac{\partial P'}{\partial \gamma}$ sont homogènes en e, e' et γ , de la seconde dimension, ce qui donne

$$e \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} + e' \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} = 2 \frac{\partial P}{\partial \gamma},$$

$$e \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} + e' \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} = 2 \frac{\partial P'}{\partial \gamma};$$

on a donc encore, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0 = e \delta e . m \sqrt{a} + e' \delta e' . m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma.$$

Considérons enfin le terme de δe ,

$$\frac{mm' t}{(5n' - 2n) \sqrt{aa'}} \left(\frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right);$$

le terme de $\delta e'$,

$$\frac{m^2 t}{(5n' - 2n) a'} \left(\frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial e'} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial e'} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right),$$

et le terme de $\delta \gamma$,

$$\frac{mm'}{(5n' - 2n) \sqrt{aa'}} \frac{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}}{m' \sqrt{a'}} t \left(\frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right);$$

on aura encore, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0 = e \delta e . m \sqrt{a} + e' \delta e' . m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma.$$

Cette équation a donc lieu généralement, en ayant même égard aux termes dépendants du carré de la force perturbatrice.

La détermination du plan invariable, donnée dans le n° 62 du Livre II, est fondée sur les trois équations

$$e = m \sqrt{a(1-e^2)} \cos \varphi + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos \varphi' + \dots,$$

$$e' = m \sqrt{a(1-e^2)} \sin \varphi \sin \theta + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin \varphi' \sin \theta' + \dots,$$

$$e'' = m \sqrt{a(1-e^2)} \sin \varphi \cos \theta + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin \varphi' \cos \theta' + \dots,$$

$a, a', \dots$ étant constants par le n° 12, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice; la première de ces équations donne, en négligeant les produits de quatre dimensions de $e, e', \dots, \varphi, \varphi', \dots$

$$\text{const.} = (e^2 + \varphi^2) m \sqrt{a} + (e'^2 + \varphi'^2) m' \sqrt{a'} + \dots,$$

et l'on vient de voir que les termes dépendants du carré de la force perturbatrice n'altèrent point l'exactitude de cette équation. La seconde des trois équations précédentes donne, en négligeant les produits de trois dimensions de $e, e', \dots, \varphi, \varphi', \dots$

$$0 = \delta(\varphi \sin \theta) m \sqrt{a} + \delta(\varphi' \sin \theta') m' \sqrt{a'} + \dots;$$

or, en ayant même égard aux termes dépendants du carré de la force

perturbatrice, cette équation a lieu par le n° 14: l'équation

$$e' = m \sqrt{a(1-e^2)} \sin \varphi \sin \delta + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin \varphi' \sin \delta' + \dots$$

n'est donc point altérée par ces termes, et l'on trouve de la même manière que cela a également lieu pour l'équation

$$e'' = m \sqrt{a(1-e^2)} \sin \varphi \cos \delta + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin \varphi' \cos \delta' + \dots;$$

ainsi le plan invariable déterminé par le n° 62 du Livre II reste toujours invariable, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice.

16. Les termes dépendants de ce carré peuvent avoir une influence sensible sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; nous allons déterminer les plus considérables. On a vu dans le n° 5 que l'expression de R ou de δR renferme la fonction

$$\begin{aligned} & \frac{m'}{8} (e^2 + e'^2) \left(2a \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} \right) \\ & + \frac{m'}{4} ee' \cos(\varpi' - \varpi) \left(4\Lambda^{(1)} + 2a \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a} + 2a' \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a'} + aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a \partial a'} \right) \\ & + \frac{m'}{8} aa' B^{(1)} \gamma^2. \end{aligned}$$

En y faisant croître e , e' , ϖ , ϖ' et γ de leurs variations dépendantes de l'angle $5n't - 2nt$, on aura dans R un terme dépendant du même angle, et qui, à raison du diviseur $5n' - 2n$, qui affecte ces variations, paraît devoir être sensible. Mais on doit observer que ce diviseur disparaît dans dR , parce que, la caractéristique différentielle d se rapportant aux seules coordonnées de m , elle se rapporte aux variations de e et de ϖ , et par conséquent elle introduit le multiplicateur $5n' - 2n$; or on a vu que la grande inégalité de m dépend principalement du terme $3affndt dR$; les inégalités du rayon vecteur et de la longitude, qui dépendent des variations des excentricités et des péri-

hélie relatives à l'angle $5n't - 2nt$, ont donc très-peu d'influence sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne.

On verra dans la suite que les inégalités les plus sensibles de ces deux planètes, dépendantes des simples excentricités des orbites, sont relatives à l'angle $nt - 2n't$. Nommons $F \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + A)$ le terme de $\frac{\partial r}{a}$ qui dépend de cet angle, et $E \sin(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + B)$ le terme de δv dépendant du même angle. Soient

$$F \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + A) \quad \text{et} \quad E \sin(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + B)$$

les termes correspondants de $\frac{\partial r}{a}$ et de δv . Supposons que R soit relatif à Saturne troublé par Jupiter; en le développant par rapport aux carrés et aux produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, et en ne considérant que l'angle $3n't - nt$, on aura, par le n° 4, une fonction de cette forme

$$\begin{aligned} & M^{(0)} e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \\ & + M^{(1)} ee' \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \\ & + M^{(2)} e^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) \\ & + M^{(3)} \gamma^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi), \end{aligned}$$

Le premier terme $M^{(0)} e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi')$ résulte du développement de $\Lambda^{(1)} \cos(\varphi' - \varphi)$ dans l'expression de R. Il faut augmenter, dans ce dernier terme, r de δr , r' de $\delta r'$, v de δv , et φ' de $\delta \varphi'$, ce qui revient à augmenter, dans son développement, a de δa , a' de $\delta a'$, et $n't - nt$ de $\delta v' - \delta v$. Ce premier terme donne alors les suivants

$$\begin{aligned} & - M^{(0)} e'^2 (\delta v' - \delta v) \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \\ & + a \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a} e'^2 \frac{\partial r}{a} \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \\ & + a' \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a'} e'^2 \frac{\partial r'}{a'} \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi'), \end{aligned}$$

d'où résultent, dans R, les termes

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}M^{(0)}e'^2E'\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B') \\ & +\frac{1}{2}M^{(0)}e'^2E\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B) \\ & +\frac{1}{2}a'\frac{\partial M^{(0)}}{\partial a'}e'^2F'\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A') \\ & +\frac{1}{2}a\frac{\partial M^{(0)}}{\partial a}e'^2F\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A). \end{aligned}$$

Designons par d'R la différentielle de R, prise en ne faisant varier que les coordonnées de m' . Dans les termes multipliés par E' et F', la partie $5n't - nt$ de l'angle $5n't - 2nt$ est relative à ces coordonnées. Dans les termes multipliés par E et F, la partie $3n't$ du même angle leur est relative; on a donc, en n'ayant égard qu'aux termes précédents de R,

$$\begin{aligned} a'd'R &= \frac{1}{2}(5n'-n)dt.a'M^{(0)}E'e'^2\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B') \\ & -\frac{1}{2}(5n'-n)dt.a'^2\frac{\partial M^{(0)}}{\partial a'}F'e'^2\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A') \\ & -\frac{3}{2}n'dt.a'M^{(0)}Ee'^2\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B) \\ & -\frac{3}{2}n'dt.aa'\frac{\partial M^{(0)}}{\partial a}Fe'^2\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A). \end{aligned}$$

Le terme $M^{(1)}ee'\cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi')$ résulte du développement de $A^{(2)}\cos(2\nu' - 2\nu)$ dans l'expression de R; il faut donc faire varier, dans ce terme, a de δr , a' de $\delta r'$, et $2n't - 2nt$ de $2\delta\nu' - 2\delta\nu$, ce qui donne les termes suivants

$$\begin{aligned} & -2M^{(1)}ee'(\delta\nu' - \delta\nu)\sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \\ & + a\frac{\partial M^{(1)}}{\partial a}ee'\frac{\partial r}{a}\cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \\ & + a'\frac{\partial M^{(1)}}{\partial a'}ee'\frac{\partial r'}{a'}\cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi'); \end{aligned}$$

la partie de $a'd'R$ relative à ce terme sera donc

$$\begin{aligned} & (5n' - n)dt.a'M^{(1)}E'ee'\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi' - B') \\ & -\frac{1}{2}(5n' - n)dt.a'^2\frac{\partial M^{(1)}}{\partial a'}F'ee'\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi' - A') \\ & -3n'dt.a'M^{(1)}Eee'\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi' - B) \\ & -\frac{3}{2}n'dt.aa'\frac{\partial M^{(1)}}{\partial a}Fee'\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi' - A). \end{aligned}$$

Le terme $M^{(2)}e^2\cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi)$ résulte du développement de $A^{(3)}\cos(3\nu' - 3\nu)$ dans l'expression de R; il faut donc faire varier, dans ce terme, a de δr , a' de $\delta r'$, et $3n't - 3nt$ de $3\delta\nu' - 3\delta\nu$, ce qui donne les suivants

$$\begin{aligned} & -3M^{(2)}e^2(\delta\nu' - \delta\nu)\sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) \\ & + a\frac{\partial M^{(2)}}{\partial a}e^2\frac{\partial r}{a}\cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) \\ & + a'\frac{\partial M^{(2)}}{\partial a'}e^2\frac{\partial r'}{a'}\cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi); \end{aligned}$$

la partie de $a'd'R$ relative à ce terme sera donc

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}(5n' - n)dt.a'M^{(2)}E'e^2\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi - B') \\ & -\frac{1}{2}(5n' - n)dt.a'^2\frac{\partial M^{(2)}}{\partial a'}F'e^2\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi - A') \\ & -\frac{3}{2}n'dt.a'M^{(2)}Ee^2\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi - B) \\ & -\frac{3}{2}n'dt.aa'\frac{\partial M^{(2)}}{\partial a}Fe^2\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi - A). \end{aligned}$$

Enfin, le terme $M^{(3)}\gamma^2\cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi)$ résulte du terme multiplié par $\gamma^2\cos(3\nu' - \nu)$ dans l'expression de R; il faut donc y faire varier a de δr , a' de $\delta r'$, $3n't$ de $3\delta\nu'$, et nt de $\delta\nu$, ce qui donne les suivants

$$\begin{aligned} & -M^{(3)}\gamma^2(3\delta\nu' - \delta\nu)\sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \\ & + a\frac{\partial M^{(3)}}{\partial a}\gamma^2\frac{\partial r}{a}\cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \\ & + a'\frac{\partial M^{(3)}}{\partial a'}\gamma^2\frac{\partial r'}{a'}\cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi), \end{aligned}$$

d'où résultent, dans a' d'R, les termes suivants

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}(5n'-n) dt. a' M^{(3)} E \gamma^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - B') \\ & - \frac{1}{2}(5n'-n) dt. a'^2 \frac{\partial M^{(3)}}{\partial a'} F' \gamma^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - A') \\ & - \frac{3}{2} n' dt. a' M^{(3)} E \gamma^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - B) \\ & - \frac{3}{2} n' dt. aa' \frac{\partial M^{(3)}}{\partial a} F \gamma^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - A). \end{aligned}$$

Les inégalités les plus sensibles dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, et qui n'ont point $5n' - 2n$ pour diviseur, ou qui ne dépendent point des variations des éléments, relatives à l'angle $5n't - 2nt$, se rapportent à l'angle $3n't - nt$. Soit $G \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon + C)$ la partie de $\frac{\partial r}{a}$ qui dépend de cet angle; soit $H \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon + D)$ la partie de δv qui dépend du même angle. Soient pareillement $G' \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon + C')$ et $H' \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon + D')$ les parties de $\frac{\partial r'}{a'}$ et de $\delta v'$ relatives au même angle. L'expression de R, développée par rapport aux puissances simples des excentricités, renferme les deux termes suivants

$$\begin{aligned} & N^{(0)} e \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\ & + N^{(1)} e' \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi'). \end{aligned}$$

Le premier de ces termes résulte du développement de $A^{(2)} \cos(2v' - 2v)$ dans l'expression de R; il faut donc augmenter, dans ce développement, a de δr , a' de $\delta r'$, et $2n't - 2nt$ de $2\delta v' - 2\delta v$, ce qui donne les termes suivants

$$\begin{aligned} & 2N^{(0)} e (\delta v' - \delta v) \sin(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\ & + a \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a} e \frac{\partial r}{a} \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\ & + a' \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a'} e' \frac{\partial r'}{a'} \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi); \end{aligned}$$

d'où résultent, dans R, les termes suivants

$$\begin{aligned} & N^{(0)} H' e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + D') \\ & - N^{(0)} H e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + D) \\ & + \frac{1}{2} a' \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a'} G' e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + C') \\ & + \frac{1}{2} a \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a} G e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + C). \end{aligned}$$

Pour avoir la partie correspondante de d'R, il faut, dans les termes multipliés par H' et G' , faire varier l'angle $5n't - nt$, et, dans les termes multipliés par H et G , ne faire varier que $2n't$, ce qui donne

$$\begin{aligned} a' d'R = & - (5n' - n) dt. a' N^{(0)} H' e \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + D') \\ & - \frac{1}{2} (5n' - n) dt. a'^2 \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a'} G' e \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + C') \\ & + 2n' dt. a' N^{(0)} H e \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + D) \\ & - n' dt. aa' \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a} G e \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + C). \end{aligned}$$

Le terme $N^{(1)} e' \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi')$ résulte du développement de $A^{(1)} \cos(v' - v)$ dans R; il faut donc faire varier, dans ce terme, a de δr , a' de $\delta r'$, et $n't - nt$ de $\delta v' - \delta v$, ce qui donne les suivants

$$\begin{aligned} & N^{(1)} e' (\delta v' - \delta v) \sin(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\ & + a \frac{\partial N^{(1)}}{\partial a} e' \frac{\partial r}{a} \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\ & + a' \frac{\partial N^{(1)}}{\partial a'} e' \frac{\partial r'}{a'} \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi'). \end{aligned}$$

La partie de a' d'R relative à ces termes sera donc

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} (5n' - n) dt. a' N^{(1)} H' e' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + D') \\ & - \frac{1}{2} (5n' - n) dt. a'^2 \frac{\partial N^{(1)}}{\partial a'} G' e' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + C') \\ & + n' dt. a' N^{(1)} H e' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + D) \\ & - n' dt. aa' \frac{\partial N^{(1)}}{\partial a} G e' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + C). \end{aligned}$$

Les valeurs de $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ sont déterminées par les formules du n° 4, en y changeant ce qui est relatif à m dans ce qui est relatif à m' , et réciproquement. Les valeurs de $N^{(0)}$ et $N^{(1)}$ seront déterminées par les équations

$$a' N^{(0)} = -2ma' A^{(2)} - \frac{1}{2}ma'a' \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a},$$

$$a' N^{(1)} = ma' A^{(1)} - \frac{1}{2}ma'a' \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}.$$

En réunissant toutes ces expressions partielles de a' d'R, on aura un terme de cette forme

$$mn' \int dt \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 0).$$

Le terme $3a' \int f n' dt$ d'R de l'expression de $\delta v'$ donnera ainsi

$$= \frac{3n'^2 \int m}{(5n' - 2n)^2} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 0).$$

C'est le terme le plus sensible de la grande inégalité de Saturne dépendant du carré de la force perturbatrice.

Si l'expression de R, divisée par la masse perturbatrice, était la même pour Jupiter et pour Saturne, on aurait, par le n° 65 du Livre II, l'inégalité correspondante de Jupiter, en multipliant la précédente par $-\frac{m' \sqrt{a'}}{m \sqrt{a}}$; mais la valeur de $A^{(1)}$ n'est pas la même pour les deux planètes, et par conséquent les termes

$$M^{(0)} e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \quad \text{et} \quad N^{(1)} e' \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi'),$$

divisés par les masses perturbatrices, sont différents pour chacune d'elles. Mais il résulte du n° 65 du Livre II qu'en n'ayant égard qu'aux termes qui ont $(5n' - 2n)^2$ pour diviseur, on a, dans ce cas,

$$m \int dR + m' \int d'R = 0,$$

R, étant ce que devient R relativement à Jupiter, et la caractéristique différentielle d se rapportant aux coordonnées de Jupiter; d'où il suit

que l'inégalité de Jupiter qui correspond à la précédente est

$$\frac{3m'n'^2 \sqrt{\frac{a'}{a}}}{(5n' - 2n)^2} \int \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 0).$$

17. Dans les inégalités de Jupiter et de Saturne, dans lesquelles le coefficient de t n'est pas $5n' - 2n$ et ne diffère pas de cette quantité du coefficient n pour Jupiter ou du coefficient n' pour Saturne, il faut augmenter nt et $n't$ de leurs grandes inégalités dépendantes de $5n't - 2nt$. En effet, on a vu que ces grandes inégalités doivent être ajoutées aux moyens mouvements dans les formules du mouvement elliptique; elles doivent donc être ajoutées aux mêmes quantités dans le développement de R. Soit $H \cos(i'n't - int + A)$ un terme quelconque de ce développement, et $L \sin(i'n't - int + B)$ l'inégalité correspondante de Jupiter. En augmentant nt et $n't$ de leurs grandes inégalités dans le terme $H \cos(i'n't - int + A)$, il en résultera un terme de la forme $qH \cos[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + A + E]$. Maintenant, la suite des opérations qui lient H à L donne aux parties de H les diviseurs $(i'n' - in)^2$, $i'n' - in$, $i'n' - in \pm n$. La même suite d'opérations donnera à l'inégalité correspondante aux parties de $qH \cos[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + A + E]$ les diviseurs $[i'n' - in \pm (5n' - 2n)]^2$, $i'n' - in \pm (5n' - 2n)$, $i'n' - in \pm (5n' - 2n) \pm n$. Si $i'n' - in$ ou $i'n' - in \pm n$ ne sont pas très-petits de l'ordre $5n' - 2n$, on peut négliger $5n' - 2n$ dans ces derniers diviseurs, et alors l'inégalité correspondante à

$$qH \cos[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + A + E]$$

sera

$$qL \sin[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + B + E];$$

ce qui revient à augmenter, dans $L \sin(i'n't - int + B)$, nt et $n't$ des grandes inégalités.

Il faut pareillement augmenter, dans les termes dépendants des simples excentricités, les quantités e , e' , ϖ , ϖ' de leurs variations dépendantes de l'angle $5n't - 2nt$; mais on s'assurera facilement qu'il n'en résulte que des inégalités insensibles.

18. Les coefficients des inégalités des planètes varient à raison des variations séculaires des éléments des orbites. On peut y avoir égard de la manière suivante : on mettra d'abord l'inégalité relative à un angle quelconque $i'n't - int$ sous cette forme

$$P \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon) + P' \cos(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon).$$

On déterminera les valeurs de P et de P' pour l'époque de 1750; en faisant ensuite

$$\tan A = \frac{P'}{P}, \quad L = \sqrt{P^2 + P'^2},$$

le signe de $\sin A$ étant le même que celui de P' , et son cosinus étant du même signe que P , l'inégalité dont il s'agit sera

$$L \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon + A).$$

On déterminera les valeurs de P et de P' pour 1950, en ayant égard aux variations séculaires des éléments des orbites, et l'on aura ainsi pour cette inégalité, en 1950,

$$(L + \delta L) \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon + A + \delta A);$$

en exprimant donc par t le nombre des années juliennes écoulées depuis 1750, l'inégalité précédente, relative au temps t , prendra cette forme

$$\left(L + \frac{t \delta L}{200}\right) \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon + A + \frac{t \delta A}{200}).$$

Sous cette forme, elle pourra s'étendre plusieurs siècles avant et après 1750; mais ce calcul ne doit avoir lieu que pour les inégalités un peu considérables.

Relativement aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, il sera utile de porter l'approximation jusqu'au carré du temps, dans la partie qui a pour diviseur $(5n' - 2n)^2$. Cette partie de l'expression de δv est, par le n° 8,

$$\frac{6m'n^2}{(5n' - 2n)^2} \left\{ \left[aP' + \frac{2a dP}{(5n' - 2n) dt} - \frac{3a d^2 P'}{(5n' - 2n)^2 d^2 t^2} \right] \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ \left. - \left[aP - \frac{2a dP'}{(5n' - 2n) dt} - \frac{3a d^2 P}{(5n' - 2n)^2 d^2 t^2} \right] \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\};$$

les valeurs de P , P' et de leurs différences étant relatives à un temps quelconque t . En les développant en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, et en ne conservant que sa seconde puissance et les différences premières et secondes de P et de P' , la quantité précédente devient

$$\frac{6m'n^2}{(5n' - 2n)^2} \left\{ \left(aP' + \frac{2a dP}{(5n' - 2n) dt} - \frac{3a d^2 P'}{(5n' - 2n)^2 d^2 t^2} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ \left. + t \left[a \frac{dP'}{dt} + \frac{2a d^2 P}{(5n' - 2n) d^2 t^2} + \frac{1}{2} t^2 a \frac{d^3 P'}{d^3 t^3} \right] \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ - \left\{ aP - \frac{2a dP'}{(5n' - 2n) dt} - \frac{3a d^2 P}{(5n' - 2n)^2 d^2 t^2} \right\} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + t \left[a \frac{dP}{dt} - \frac{2a d^2 P'}{(5n' - 2n) d^2 t^2} + \frac{1}{2} t^2 a \frac{d^3 P}{d^3 t^3} \right] \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\};$$

les valeurs de P , P' et de leurs différences étant ici relatives à l'époque de 1750, et déterminées par la méthode du n° 8; les autres parties de la grande inégalité de m étant peu considérables, il suffira d'avoir égard, par ce qui précède, à la première puissance du temps. Cette grande inégalité prendra ainsi la forme suivante

$$(A + Bt + Ct^2) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + (A' + B't + C't^2) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

On donnera à la grande inégalité de m' la même forme sous laquelle il sera facile de réduire en Tables ces inégalités.

Si l'on veut réduire l'inégalité précédente à un seul terme, on la calculera pour les trois époques de 1750, 2250 et 2750. Soit $\mathcal{E} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + A)$ cette grande inégalité pour 1750; soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ ce que deviennent $\mathcal{E}$ et A aux époques de 2250 et de 2750. Cette inégalité relative à un temps quelconque t sera

$$\left(\mathcal{E} + t \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{1}{2} t^2 \frac{d^2 \mathcal{E}}{d^2 t^2} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + A + t \frac{dA}{dt} + \frac{1}{2} t^2 \frac{d^2 A}{d^2 t^2}),$$

les différences de $\mathcal{E}$ et de A se rapportant ici à l'époque de 1750. On

aura ensuite, par le n° 8,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{4\epsilon - 3\epsilon - \epsilon_v}{1000}, \quad \frac{d^2\epsilon}{dt^2} = \frac{6_v - 2\epsilon_v + \epsilon}{250000},$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{4\Lambda_v - 3\Lambda - \Lambda_v}{1000}, \quad \frac{d^2\Lambda}{dt^2} = \frac{\Lambda_v - 2\Lambda_v + \Lambda}{250000}.$$

Conformément à la remarque que nous avons faite dans le n° 1, ces deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne doivent être respectivement appliquées à leurs moyens mouvements.

CHAPITRE III.

DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES DUES À L'ELLIPTICITÉ DU SOLEIL.

18⁴⁰. Le Soleil étant doué d'un mouvement de rotation, sa figure ne doit pas être exactement sphérique. Nous allons déterminer l'influence de son ellipticité sur les mouvements des planètes. Si l'on nomme ρ cette ellipticité, q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, à l'équateur solaire, et μ la déclinaison d'une planète m relativement à cet équateur; si, de plus, on prend pour unité la masse du Soleil, et que l'on nomme D son demi-diamètre, il résulte du n° 35 du Livre III que l'ellipticité du Soleil ajoute à la fonction R du n° 46 du Livre II la quantité

$$(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{r^2} (\mu^2 - \frac{1}{2});$$

l'équation différentielle en $r \delta r$ du n° 46 du Livre II deviendra donc, en n'ayant égard qu'à cette partie de R , en négligeant le carré de μ et en observant qu'ici $\int dR = g + R$, g étant une arbitraire,

$$0 = \frac{d^2 r \delta r}{dt^2} + \frac{n^2 a^2 \cdot r \delta r}{r^3} + 2g + \frac{(\rho - \frac{1}{2}q) D^2}{3r^2}.$$

Pour déterminer la constante g , nous observerons que la formule (Y) du n° 46 du Livre II donne, dans δv , la quantité

$$3angt + (\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} nt.$$

nt exprimant le moyen mouvement de la planète, cette quantité doit être nulle; on a donc

$$g = - \frac{(\rho - \frac{1}{2}q) D^2}{3a^2},$$

et par conséquent l'équation différentielle en $r \delta r$ devient, en observant que $n^2 a^3 = 1$, et négligeant le carré de e ,

$$0 = \frac{d^2 r}{dt^2} + n^2 r \delta r [1 + 3e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)] - \frac{2(\rho - \frac{1}{2}q)}{3} n^2 D^2 \\ + \frac{(\rho - \frac{1}{2}q)}{3} n^2 D^2 [1 + 3e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)],$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\frac{r \delta r}{a^2} = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} [1 - 3e \sin(nt + \varepsilon - \varpi)].$$

La partie elliptique de $\frac{r^2}{a^2}$ est $1 - 2e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$; en y faisant donc varier ϖ de $\delta \varpi$, on aura

$$\frac{r \delta r}{a^2} = -e \delta \varpi \sin(nt + \varepsilon - \varpi).$$

Si l'on compare cette expression de $\frac{r \delta r}{a^2}$ à la précédente, on aura

$$\delta \varpi = (\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} nt = (\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2 t}{a^2};$$

l'effet le plus sensible de l'ellipticité du Soleil sur le mouvement de la planète dans son orbite est donc un mouvement direct dans son périhélie; mais, ce mouvement étant réciproque à la racine carrée de la septième puissance du grand axe de l'ellipse planétaire, on voit qu'il ne peut être sensible que pour Mercure.

Pour avoir l'effet de l'ellipticité du Soleil sur la position de l'orbite, reprenons la troisième des équations (P) du n° 46 du Livre II. Cette équation peut être mise sous la forme suivante

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{n^2 a^2 z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Prenons pour plan fixe celui de l'équateur solaire, ce qui donne

$\mu^2 = \frac{z^2}{r^2}$. En observant ensuite que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on aura

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 3(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{n^2 D^2}{a^2} z;$$

l'équation différentielle précédente devient ainsi

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z \left[1 - \frac{3 \delta r}{a} + 3(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} \right];$$

or on a, par ce qui précède,

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2};$$

on a donc

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z \left[1 + 2(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} \right],$$

ce qui donne, en intégrant,

$$z = a \varphi \sin \left\{ nt \left[1 + (\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} \right] - \theta \right\},$$

φ étant l'inclinaison de l'orbite à l'équateur solaire, et θ étant une constante arbitraire. Ainsi les nœuds de l'orbite sur cet équateur ont un mouvement rétrograde égal au mouvement direct du périhélie, et qui, par conséquent, ne peut être sensible que pour Mercure. On voit en même temps que, l'ellipticité du Soleil n'ayant aucune influence ni sur l'excentricité de l'orbite de la planète ni sur son inclinaison à l'équateur solaire, elle ne peut pas altérer la stabilité du système planétaire.

CHAPITRE IV.

DES PERTURBATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES, PRODUITES PAR L'ACTION DE LEURS SATELLITES.

19. Les théorèmes du n° 10 du Livre II offrent un moyen aussi simple qu'exact pour déterminer les perturbations des planètes dues à l'action de leurs satellites. On a vu, dans le numéro cité, que le centre commun de gravité de la planète et de ses satellites décrit à très-peu près une orbite elliptique autour du Soleil. En considérant cet orbite comme étant l'ellipse même de la planète, la position respective des satellites entre eux et par rapport au Soleil donnera celle de la planète par rapport au centre commun de gravité, et par conséquent les perturbations que la planète éprouve de la part de ses satellites. Soient M la masse de la planète, R le rayon vecteur du centre commun de gravité, U l'angle que ce rayon fait avec une droite invariable prise sur l'orbite de ce centre, et d'où l'on compte les longitudes. Soient $m, m', \dots$ les masses des satellites; $r, r', \dots$ leurs rayons vecteurs; $v, v', \dots$ leurs longitudes vraies; $s, s', \dots$ leurs latitudes au-dessus de l'orbite du centre commun de gravité. Enfin soient X, Y, Z les coordonnées rectangles de la planète, en supposant leur origine au centre commun de gravité et prenant le rayon R pour l'axe des X , Z étant la coordonnée perpendiculaire au plan de l'orbite de ce centre. On aura à très-peu près, par la propriété du centre de gravité et en observant que les masses des satellites sont très-petites par rapport à celle de la planète,

$$0 = MX + mr \cos(v - U) + m'r' \cos(v' - U) + \dots,$$

$$0 = MY + mr \sin(v - U) + m'r' \sin(v' - U) + \dots,$$

$$0 = MZ + ms + m'r's' + \dots$$

La perturbation du rayon vecteur est à très-peu près égale à X , et par conséquent à

$$-\frac{m}{M} r \cos(v - U) - \frac{m'}{M} r' \cos(v' - U) - \dots$$

La perturbation du mouvement de la planète en longitude est à très-peu près $\frac{Y}{R}$, et par conséquent égale à

$$-\frac{m}{M} \frac{r}{R} \sin(v - U) - \frac{m'}{M} \frac{r'}{R} \sin(v' - U) - \dots$$

Enfin, la perturbation du mouvement de la planète en latitude est à très-peu près $\frac{Z}{R}$, et par conséquent égale à

$$-\frac{m}{M} \frac{rs}{R} - \frac{m'}{M} \frac{r's'}{R} - \dots$$

Ces diverses perturbations ne sont sensibles que pour la Terre troublée par la Lune; les masses des satellites de Jupiter sont si petites par rapport à celle de la planète, et leurs elongations vues du Soleil sont si peu considérables que ces perturbations sont insensibles. Il y a tout lieu de croire que cela a également lieu pour Saturne et Uranus.

CHAPITRE V.

CONSIDÉRATIONS SUR LA PARTIE ELLIPTIQUE DU RAYON VECTEUR
ET DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.

20. Nous avons déterminé, dans le Chapitre VI du Livre II, les arbitraires de manière que le moyen mouvement et l'équation du centre ne reçussent aucun changement par l'action mutuelle des planètes; or on a, dans l'hypothèse elliptique, $\frac{1+m}{a^3} = n^2$, la masse du Soleil étant prise pour unité, ce qui donne

$$a = n^{-\frac{2}{3}}(1 + \frac{1}{3}m);$$

tel est donc le grand axe dont on doit faire usage dans la partie elliptique du rayon vecteur.

Si, comme nous le ferons dans la suite, on suppose

$$a = n^{-\frac{2}{3}}, \quad a' = n'^{-\frac{2}{3}}, \quad \dots,$$

il faudra, dans le calcul de la partie elliptique du rayon vecteur, augmenter respectivement $a, a', \dots$ des quantités $\frac{1}{3}ma, \frac{1}{3}m'a', \dots$; mais cette augmentation n'est sensible que pour Jupiter et Saturne.

On appliquera ensuite au rayon vecteur les corrections données par les formules du n° 50 du Livre II et par les numéros précédents. Ces corrections contiennent les deux termes

$$-m'afe \cos(nt + \varepsilon - \varpi), \quad -m'af'e' \cos(nt + \varepsilon - \varpi'),$$

f et f' étant déterminés par les deux équations suivantes

$$f = \frac{2}{3}a^2 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{3}a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2},$$

$$f' = \frac{1}{3} \left(a \Lambda^{(1)} - a^2 \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a} - a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a^2} \right),$$

équations données par le n° 50 du Livre II. La partie précédente du rayon vecteur peut être réunie dans une même Table avec la partie elliptique de ce rayon.

CHAPITRE VI.

VALEURS NUMÉRIQUES DES DIVERSES QUANTITÉS QUI ENTRENT DANS LES EXPRESSIONS
DES INÉGALITÉS PLANÉTAIRES.

21. Pour réduire en nombres les formules exposées dans le Livre II
et dans les Chapitres précédents, on est parti des données suivantes :

Masses des planètes, celle du Soleil étant prise pour unité.

Mercure.....	$m = \frac{1}{2025810}$
Vénus.....	$m' = \frac{1}{383130}$
La Terre.....	$m'' = \frac{1}{320630}$
Mars.....	$m''' = \frac{1}{1840082}$
Jupiter.....	$m^{iv} = \frac{1}{1067,09}$
Saturne.....	$m^v = \frac{1}{3359,40}$
Uranus.....	$m^{vi} = \frac{1}{19504}$

De toutes ces masses, celle de Jupiter est la mieux connue; je l'ai conclue de l'équation suivante, qui résulte du n° 25 du Livre II. Si l'on nomme T la révolution sidérale d'une planète m , T celle d'un de ses satellites, dont q est le sinus de l'angle sous lequel le rayon moyen de son orbite est vu du centre du Soleil à la moyenne distance de la

planète à ce centre; la masse de la planète, celle du Soleil étant prise pour unité, est

$$\frac{q^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2}{1 - q^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^3}.$$

On a, relativement au quatrième satellite,

$$\begin{aligned} q &= \sin 1530'',38, \\ T &= 4332^d,602208, \\ T' &= 16^d,6890, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{1}{1067,09}.$$

La masse de Saturne a été conclue de la même manière, en supposant la révolution sidérale de son sixième satellite égale à $15^d,9453$, et l'angle sous lequel le rayon moyen de l'orbite de ce satellite est vu du Soleil, dans les distances moyennes de Saturne, égal à $552'',47$. La masse d'Uranus a pareillement été conclue en supposant, conformément aux observations d'Herschel, la durée de la révolution sidérale de son quatrième satellite égale à $13^d,4559$, et le rayon moyen de l'orbite de ce satellite, vu du Soleil, dans la moyenne distance d'Uranus, égal à $136'',512$. Mais les plus grandes elongations de ces satellites à leurs planètes respectives ne sont pas aussi certaines que celle du quatrième satellite de Jupiter. Leur observation mérite toute l'attention des astronomes.

La masse de la Terre a été déterminée de cette manière. Si l'on prend pour unité la moyenne distance de la Terre au Soleil, l'arc décrit par la Terre dans une seconde de temps sera le rapport de la circonférence au rayon, divisé par le nombre des secondes de l'année sidérale, ou par $365^d,25638'',4$. En divisant le carré de cet arc par le diamètre, on aura $\frac{1479565}{10^{10}}$ pour son sinus verse : c'est la quantité dont la Terre tombe vers le Soleil pendant une seconde, en vertu de son mouvement relatif

autour de cet astre. Sur le parallèle terrestre dont le carré du sinus de latitude est $\frac{1}{4}$, l'attraction de la Terre fait tomber les corps dans une seconde de $3^m,66553$. Pour réduire cette attraction à la moyenne distance de la Terre au Soleil, il faut la multiplier par le carré du sinus de la parallaxe solaire, et diviser le produit par le nombre de mètres que renferme cette distance; or le rayon terrestre sur le parallèle que nous considérons est de 6369374 mètres; en divisant donc ce nombre par le sinus de la parallaxe solaire, supposée égale à $27'',2$, on aura le rayon moyen de l'orbe terrestre exprimé en mètres; d'où il suit que l'effet de l'attraction de la Terre, à la moyenne distance de cette planète au Soleil, est égal au produit de la fraction $\frac{3,66553}{6369374}$ par le cube du sinus de $27'',2$; il est par conséquent égal à $\frac{4,48855}{10^{20}}$. En retranchant cette fraction de $\frac{1479565}{10^{20}}$, on aura $\frac{1479560,5}{10^{20}}$ pour l'effet de l'attraction du Soleil à la même distance; les masses du Soleil et de la Terre sont donc dans le rapport des nombres $1479560,5$ et $4,4885$, d'où il suit que la masse de la Terre est $\frac{1}{329630}$. Si la parallaxe du Soleil est un peu différente de celle que nous avons admise, la valeur de la masse de la Terre doit varier comme le cube de cette parallaxe, comparé à celui de $27'',2$.

J'ai conclu la masse de Vénus des formules, que je donnerai dans la suite, de la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, en supposant cette diminution égale à $154'',30$. C'est, en effet, celle qui résulte des observations qui me paraissent mériter le plus de confiance. Quant aux masses de Mercure et de Mars, j'ai supposé, d'après les observations, les diamètres moyens de Mercure, Mars et Jupiter, vus à la moyenne distance de la Terre au Soleil, respectivement de $21'',60$, $35'',19$ et $626'',04$. Ces diamètres donneraient leurs masses, celle de Jupiter étant connue, si l'on connaissait la loi de leurs densités; or, en comparant les masses de la Terre, de Jupiter et de Saturne à leurs volumes, on trouve que la densité de ces trois planètes est à peu près en raison inverse de leurs moyennes distances au Soleil; j'ai donc adopté la même hypothèse relativement aux trois planètes

Mercure, Mars et Jupiter, d'où résultent les valeurs précédentes des masses de Mercure et de Mars. L'irradiation et les autres difficultés qu'offre l'observation des diamètres planétaires, jointes à l'incertitude de l'hypothèse adoptée sur la loi de leurs densités, rend ces valeurs d'autant plus incertaines, que cette hypothèse s'éloigne de la vérité, relativement aux masses de Vénus et d'Uranus. Heureusement Mercure et Mars n'ont qu'une très-petite influence sur le système planétaire, et il sera facile de corriger les résultats suivants qu'elles affectent, lorsque le développement des inégalités séculaires aura fait connaître exactement leurs masses.

22. *Moyens mouvements sidéraux des planètes, pour une année julienne de 365 $\frac{1}{4}$, ou valeurs de $n, n', \dots$*

Mercure.....	$n = 16608076',50,$
Vénus.....	$n' = 6501980,00,$
La Terre.....	$n'' = 3999930,09,$
Mars.....	$n''' = 2126701,00,$
Jupiter.....	$n'''' = 337210,78,$
Saturne.....	$n'''' = 135792,34,$
Uranus.....	$n'''' = 47606,62.$

En employant pour $n, n', \dots$ ces valeurs, le temps t désigne un nombre d'années juliennes. De là, en prenant pour unité la moyenne distance du Soleil à la Terre, on a conclu, par la loi de Kepler, les distances suivantes des planètes au Soleil :

Distances moyennes des planètes au Soleil, ou demi-grands axes de leurs orbites.

Mercure.....	$a = 0,38709812,$
Vénus.....	$a' = 0,72333230,$
La Terre.....	$a'' = 1,00000000,$
Mars.....	$a''' = 1,52369352,$
Jupiter.....	$a'''' = 5,20116636,$
Saturne.....	$a'''' = 9,53787090,$
Uranus.....	$a'''' = 19,18330500.$

L'action mutuelle des planètes altère un peu ces moyennes distances; nous déterminerons, dans la suite, ces altérations.

Rapports des excentricités aux moyennes distances,
ou valeurs de $e, e', \dots$, pour 1750.

Mercury.....	$e = 0,20551320,$
Vénus.....	$e' = 0,00688405,$
La Terre.....	$e'' = 0,01681395,$
Mars.....	$e''' = 0,09308767,$
Jupiter.....	$e^{(4)} = 0,04807670,$
Saturne.....	$e^{(5)} = 0,05622460,$
Uranus.....	$e^{(6)} = 0,04669950.$

Longitudes des périhélie en 1750, ou valeurs de $\varpi, \varpi', \dots$

Mercury.....	$\varpi = 81,7401,$
Vénus.....	$\varpi' = 142,1241,$
La Terre.....	$\varpi'' = 109,5790,$
Mars.....	$\varpi''' = 368,3037,$
Jupiter.....	$\varpi^{(4)} = 11,5012,$
Saturne.....	$\varpi^{(5)} = 97,9466,$
Uranus.....	$\varpi^{(6)} = 185,1262.$

Inclinaisons des orbites à l'écliptique en 1750, ou valeurs de $\varphi, \varphi', \dots$

Mercury.....	$\varphi = 7,7778,$
Vénus.....	$\varphi' = 3,7701,$
Mars.....	$\varphi'' = 2,0556,$
Jupiter.....	$\varphi^{(4)} = 1,4636,$
Saturne.....	$\varphi^{(5)} = 2,7762,$
Uranus.....	$\varphi^{(6)} = 0,8596,$

Longitudes des nœuds ascendants sur l'écliptique de 1750,
ou valeurs de $\theta, \theta', \dots$

Mercury.....	$\theta = 50,3836,$
Vénus.....	$\theta' = 82,7093,$
Mars.....	$\theta'' = 52,9376,$
Jupiter.....	$\theta^{(4)} = 108,7846,$
Saturne.....	$\theta^{(5)} = 123,8960,$
Uranus.....	$\theta^{(6)} = 80,7015.$

Toutes ces longitudes sont comptées de l'équinoxe moyen du printemps, à l'époque du 31 décembre 1749, à midi, temps moyen à

Paris. On doit observer ici que l'on entend par *longitude du périhélie* la distance du périhélie au nœud ascendant, comptée sur l'orbite, plus la longitude du nœud.

23. On a obtenu les résultats suivants par les formules du n° 49 du Livre II :

MERCURE ET VÉNUS.

$$\alpha = \frac{a}{a'} = 0,53516076,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,145969210,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,515245873.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,1721751, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,6057052, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,2465877,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,1107665, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,0520855, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,0251378,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,0123166, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,0069633, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,0029287;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(9)} = 0,0012758;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 0,780206, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,457891, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 1,070071,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 0,691487, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} = 0,423818, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} = 0,253376,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx} = 0,147708, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx} = 0,085953, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{dx} = 0,050726,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} = 2,756285, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} = 2,426165, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} = 3,395022,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 3,381072, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} = 2,826559, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^2} = 2,137906,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^2} = 1,511016, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx^2} = 1,014134.$$

$$\frac{d^3 b_2^{(0)}}{dx^3} = 11,308703, \quad \frac{d^3 b_2^{(1)}}{dx^3} = 12,064245, \quad \frac{d^3 b_2^{(2)}}{dx^3} = 11,983424,$$

$$\frac{d^3 b_2^{(3)}}{dx^3} = 14,584366, \quad \frac{d^3 b_2^{(4)}}{dx^3} = 16,067040, \quad \frac{d^3 b_2^{(5)}}{dx^3} = 15,617274,$$

$$\frac{d^3 b_2^{(6)}}{dx^3} = 13,720218;$$

$$\frac{d^4 b_2^{(2)}}{dx^4} = 69,60594, \quad \frac{d^4 b_2^{(3)}}{dx^4} = 82,36773, \quad \frac{d^4 b_2^{(4)}}{dx^4} = 92,72610,$$

$$\frac{d^4 b_2^{(5)}}{dx^4} = 105,33662;$$

$$b_2^{(0)} = 4,214154, \quad b_2^{(1)} = 3,035376, \quad b_2^{(2)} = 1,950536,$$

$$b_2^{(3)} = 1,192372, \quad b_2^{(4)} = 0,708667, \quad b_2^{(5)} = 0,413762,$$

$$b_2^{(6)} = 0,238807;$$

$$\frac{db_2^{(2)}}{dx} = 12,50630, \quad \frac{db_2^{(3)}}{dx} = 9,76666, \quad \frac{db_2^{(4)}}{dx} = 7,08399,$$

$$\frac{db_2^{(5)}}{dx} = 4,88781;$$

$$\frac{d^2 b_2^{(3)}}{dx^2} = 78,09476, \quad \frac{d^2 b_2^{(4)}}{dx^2} = 67,14764.$$

MERCURE ET LA TERRE.

$$\alpha = \frac{a}{a''} = 0,3870982,$$

d'où l'on a conclu

$$b_2^{(0)} = 2,07565247,$$

$$b_2^{(1)} = 0,37970591.$$

Ensuite,

$$b_2^{(0)} = 2,081980, \quad b_2^{(1)} = 0,411140, \quad b_2^{(2)} = 0,120178,$$

$$b_2^{(3)} = 0,038900, \quad b_2^{(4)} = 0,013202, \quad b_2^{(5)} = 0,004603,$$

$$b_2^{(6)} = 0,001629, \quad b_2^{(7)} = 0,000573, \quad b_2^{(8)} = 0,000177;$$

$$\frac{db_2^{(0)}}{dx} = 0,464378, \quad \frac{db_2^{(1)}}{dx} = 1,199633, \quad \frac{db_2^{(2)}}{dx} = 0,665739,$$

$$\frac{db_2^{(3)}}{dx} = 0,316756, \quad \frac{db_2^{(4)}}{dx} = 0,141792, \quad \frac{db_2^{(5)}}{dx} = 0,061433,$$

$$\frac{db_2^{(6)}}{dx} = 0,026130, \quad \frac{db_2^{(7)}}{dx} = 0,011153;$$

$$\frac{d^2 b_2^{(0)}}{dx^2} = 1,672199, \quad \frac{d^2 b_2^{(1)}}{dx^2} = 1,220775, \quad \frac{d^2 b_2^{(2)}}{dx^2} = 2,235935,$$

$$\frac{d^2 b_2^{(3)}}{dx^2} = 1,852364, \quad \frac{d^2 b_2^{(4)}}{dx^2} = 1,197245, \quad \frac{d^2 b_2^{(5)}}{dx^2} = 0,670874;$$

$$\frac{d^2 b_2^{(6)}}{dx^2} = 5,49232, \quad \frac{d^2 b_2^{(7)}}{dx^2} = 5,45663, \quad \frac{d^2 b_2^{(8)}}{dx^2} = 6,51373;$$

$$b_2^{(0)} = 2,871833, \quad b_2^{(1)} = 1,576062, \quad b_2^{(2)} = 0,747619,$$

$$b_2^{(3)} = 0,334212, \quad b_2^{(4)} = 0,153779;$$

$$\frac{db_2^{(3)}}{dx} = 3,05535.$$

MERCURE ET MARS.

$$\alpha = \frac{a}{a''} = 0,25405312,$$

d'où l'on a conclu

$$b_2^{(0)} = 2,03246384,$$

$$b_2^{(1)} = 0,25198657.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,033500, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,260462, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,049765, \\ b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,010546, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,002331, & b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 0,000538; \\ \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 0,273829, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,077839, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 0,402980, \\ \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 0,127139, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} &= 0,037781; \\ \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 1,244725, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 0,656780, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 1,778641, \\ \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} &= 1,050458; \\ b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,322536, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,863876, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,272085. \end{aligned}$$

MERCURE ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a}{a^{(1)}} = 0,07442555,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned} b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,00277053, \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,07437397. \end{aligned}$$

En déterminant, au moyen de ces équations et des formules du n° 49 du Livre II, les valeurs de $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, ..., on a reconnu qu'elles deviennent de plus en plus inexactes, ce qui a lieu dans tous les cas où z est peu considérable, parce que alors ces valeurs sont les différences de nombres qui diffèrent très-peu entre eux; en sorte qu'il faudrait avoir ces nombres avec une très-grande précision, pour déterminer exactement ces différences, ce qui exigerait l'usage des Tables de logarithmes à dix ou douze décimales. Pour obvier à cet inconvénient,

il faut recourir à la valeur de $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ en séries: on trouve, par le numéro cité,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(i)} = 2 \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+i-1)}{1.2.3\dots i} \alpha^i \left(1 + \frac{s}{i} \frac{s+i}{i+1} \alpha^2 + \frac{s(s+1)}{1.2} \frac{(s+i)(s+i+1)}{(i+1)(i+2)} \alpha^4 + \dots \right).$$

Cette valeur de $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ est ici très-convergente, à cause de la petitesse de z : c'est par son moyen que l'on a déterminé les valeurs de $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, ..., $b_{\frac{1}{2}}^{(5)}$, ..., dans tous les cas où z est peu considérable. On a trouvé de cette manière, pour Mercure et Jupiter,

$$\begin{aligned} b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,002778, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,074581, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,004164, \\ b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,000258, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,000017; \\ \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 0,074891, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,006269, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 0,111380, \\ \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 0,010428; \\ \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 1,018876, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 0,171781, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 1,499780; \\ b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,025143, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,225613, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,020984. \end{aligned}$$

MERCURE ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a}{a^{(1)}} = 0,04058547,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned} b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,00082368, \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,04057711. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,000833, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,040610, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,001236, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,000042, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,000001; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 0,040662, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,001841, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 0,060919, \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 0,003085; \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 1,003904, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 0,091840, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 1,469188.
 \end{aligned}$$

MERCURE ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a}{a^{11}} = 0,02017895,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}
 b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,00020360, \\
 b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,02017792.
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,000182, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,020183, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,000306; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 0,020196, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,000913.
 \end{aligned}$$

VÉNUS ET LA TERRE.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0,72333230,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}
 b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,27159162, \\
 b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,67226315.
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,386343, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,942413, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,527589, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,323359, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,206811, & b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 0,135616, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(6)} &= 0,090412, & b_{\frac{1}{2}}^{(7)} &= 0,061101, & b_{\frac{1}{2}}^{(8)} &= 0,041731; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 1,643709, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 2,272414, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 2,069770, \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 1,738781, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} &= 1,407491, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} &= 1,113704, \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx} &= 0,867147, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx} &= 0,668830;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 7,719923, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 7,531096, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 8,558595, \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} &= 9,112527, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} &= 9,107400, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^2} &= 8,634030, \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^2} &= 7,842733;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} &= 56,55335, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} &= 57,35721, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} &= 58,19633, \\
 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} &= 62,87646, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^3} &= 66,32409, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^3} &= 70,54326;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 9,992539, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 8,871894, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 7,386580, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 5,953940, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 4,704321, & b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 3,652052;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 56,65440, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} &= 50,90290.
 \end{aligned}$$

VÉNUS ET MARS.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0,47472320,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,11436649,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,46094390.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,129668, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,521624, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,187726, \\ b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,074675, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,031127, & b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 0,013337, \\ b_{\frac{1}{2}}^{(6)} &= 0,005829; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 0,631752, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,330781, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 0,884106, \\ \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 0,510976, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} &= 0,279002, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} &= 0,147606; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 2,192778, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 1,815836, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 2,795574, \\ \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} &= 2,628516, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} &= 2,004429; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} &= 7,65440, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} &= 8,45655, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} &= 8,17676, \\ \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} &= 10,66513; \end{aligned}$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 3,523572, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 2,304481, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 1,325959,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,722687; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 8,47521.$$

VÉNUS ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0,13907116,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00968215,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,13873412.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,009778, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,140092, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,014623, \\ b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,001695, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,000206, & b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 0,000026; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 0,142160, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,022206, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 0,212046, \\ \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 0,036783, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} &= 0,006111; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 1,067532, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 0,325869, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 1,575190, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 0,533951;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,089736, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,432801, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,075054.$$

VÉNUS ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0,07583790,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00287673,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,07578334.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,002886, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,076002, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,004323, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,000273, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,000018; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 0,076331, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,006499, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 0,114767, \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 0,011085; \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 1,019629, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 0,172510, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 1,419950; \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,026116, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,229988, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,021791.
 \end{aligned}$$

VENUS ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0,03770634,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,00071095, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,03769964.
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,000712, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,037725, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,001067, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,000034; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 0,716690, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,000829, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 0,056634.
 \end{aligned}$$

LA TERRE ET MARS.

$$\alpha = \frac{a''}{a'} = 0,65630030,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,22192172, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,61874262.
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,291132, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,804563, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,405584, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,224598, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,129973, & b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 0,077170, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(6)} &= 0,046595, & b_{\frac{1}{2}}^{(7)} &= 0,028480, & b_{\frac{1}{2}}^{(8)} &= 0,017565; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 1,228078, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,871211, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 1,601236, \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 1,240990, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} &= 0,920710, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} &= 0,666207, \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx} &= 0,473942, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx} &= 0,333444; \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 4,985108, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 4,744671, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 5,731111, \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} &= 6,057860, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} &= 5,776483, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^2} &= 5,141993, \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^2} &= 4,388001; \\
 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} &= 29,03400, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} &= 29,78930, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} &= 30,18848, \\
 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} &= 33,29381, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^3} &= 36,32093, & \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^3} &= 37,23908; \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 6,856336, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 5,727893, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 4,404530, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 3,255964, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 2,351254, & b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 1,671668, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(6)} &= 1,174650; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 31,80897, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 32,26285, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} &= 18,25867,
 \end{aligned}$$

LA TERRE ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a''}{a'''} = 0,19226461,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,01852593,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,19137205.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,018885, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,195003, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,028195,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,004516, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000779, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,000132,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,000023;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 0,200586, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,043204, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 0,297995,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 0,070932, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} = 0,016369, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} = 0,003448;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} = 1,132355, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} = 0,466165, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} = 1,628667,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 0,746681;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} = 1,472714, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} = 2,874986, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} = 1,418830;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,176460, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,619063, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,148198,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,032439.$$

LA TERRE ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a''}{a'''} = 0,10484520,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00550004,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,10470094.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,005535, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,105283, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,008282,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,000724, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000066;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 0,106155, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,012536, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 0,158723,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 0,020779;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} = 1,037816, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} = 0,246193, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} = 1,526303;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,050321, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,321144, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,041977.$$

LA TERRE ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a''}{a'''} = 0,05212866,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00135893,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,05211095.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,001355, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,052182, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,002040,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,000089;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 0,052288, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,003060, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 0,078449.$$

MARS ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a''}{a^{(1)}} = 0,29295212,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,04314576,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,28977479.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,045112, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,302922, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,066812,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,016357, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,004192, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,001109,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,000297, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,000081;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 0,324004, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,105998, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 0,473717,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 0,172096, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} = 0,058420, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} = 0,019258,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx} = 0,006173;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} = 1,338759, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} = 0,794557, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} = 1,871538,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 1,258858, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} = 0,623184;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} = 2,69358, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} = 3,77722, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} = 2,91068,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} = 5,47068;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,444762, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 1,040206, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,376693,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,127942;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 3,48815, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 4,80540, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 2,99684.$$

MARS ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a''}{a'} = 0,15975187,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,01278081,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,15924060.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,012945, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,161305, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,019347,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,002577, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000360, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,000052;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 0,164463, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,029493, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 0,244843,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 0,048740, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} = 0,009065;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} = 1,090095, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} = 0,379322, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} = 1,596248,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 0,620632;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,119585, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,503071, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,100136,$$

MARS ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a''}{a'} = 0,07942807,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00315565,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,07936538.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,003167, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,079617, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,004746,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,000314, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000022;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 0,079995, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,007144, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 0,119822,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 0,011982.$$

JUPITER ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a''}{a'} = 0,54531725,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,15168241,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,52421272.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,1802348, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,6206406, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,2576379,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,1179750, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,0565522, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,0278360,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,0139345, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,0070481, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,0035837,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(9)} = 0,0018056, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(10)} = 0,0008632, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(11)} = 0,0003223;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 0,808789, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,483154, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 1,105160,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 0,726550, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} = 0,453285, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} = 0,274717,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx} = 0,163506, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx} = 0,096019, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{dx} = 0,056171,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{dx} = 0,033083, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{dx} = 0,020265;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} = 2,875229, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} = 2,552788, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} = 3,521040,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 3,533622, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} = 2,995647, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^2} = 2,302428,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^2} = 1,664586, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx^2} = 1,144377, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{dx^2} = 0,760603,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{dx^2} = 0,485135;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} = 12,128630, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} = 12,878804, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} = 12,832050,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} = 15,454850, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^3} = 17,058155, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^3} = 16,655445,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^3} = 14,958762, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx^3} = 12,234874, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{dx^3} = 9,566420;$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^4} = 84,40159, \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^4} = 83,94825, \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^4} = 87,3027,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^4} = 89,8615, \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^4} = 101,3809, \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^4} = 113,5238,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^4} = 118,6607, \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx^4} = 115,9588;$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 747,480, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 753,417, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 761,843, \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} &= 785,884, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} &= 819,180, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^2} &= 884,505, \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^2} &= 912,301; \\
b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 4,35837, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 3,185493, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 2,082131, \\
b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 1,295672, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,784084, & b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 0,466047, \\
b_{\frac{1}{2}}^{(6)} &= 0,273629, & b_{\frac{1}{2}}^{(7)} &= 0,158799, & b_{\frac{1}{2}}^{(8)} &= 0,092290, \\
b_{\frac{1}{2}}^{(9)} &= 0,053922; \\
\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 14,681324, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 15,239657, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 13,416026, \\
\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 10,598611, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} &= 7,802247, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} &= 5,470398, \\
\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx} &= 3,710043, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx} &= 2,426079, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{dx} &= 1,563695; \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 96,68536, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 94,91701, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 93,19282, \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} &= 86,90215, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} &= 75,08115, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^2} &= 61,10155, \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^2} &= 47,48185, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx^2} &= 35,74355; \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{dx^2} &= 830,0586, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{dx^2} &= 830,1580, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{dx^2} &= 810,1045, \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(11)}}{dx^2} &= 785,5855, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(12)}}{dx^2} &= 740,6775, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(13)}}{dx^2} &= 666,4080, \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(14)}}{dx^2} &= 574,9115.
\end{aligned}$$

JUPITER ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a^{17}}{a^{11}} = 0,27112980,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}
b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,03692776, \\
b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,26861497.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 2,038359, & b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,278966, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,056906, \\
b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 0,012879, & b_{\frac{1}{2}}^{(6)} &= 0,003058, & b_{\frac{1}{2}}^{(7)} &= 0,000745, \\
b_{\frac{1}{2}}^{(8)} &= 0,000185; \\
\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} &= 0,295410, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} &= 1,089551, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} &= 0,433630, \\
\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} &= 0,145398, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} &= 0,045930, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} &= 0,015410; \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} &= 1,283434, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} &= 0,714932, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} &= 1,815451, \\
\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} &= 1,133359; \\
b_{\frac{1}{2}}^{(9)} &= 2,372983, & b_{\frac{1}{2}}^{(10)} &= 0,938794, & b_{\frac{1}{2}}^{(11)} &= 0,315186, \\
b_{\frac{1}{2}}^{(12)} &= 0,099260.
\end{aligned}$$

SATURNE ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a^8}{a^{11}} = 0,49719638,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}
b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,12564287, \\
b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,48131675.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
b_1^{(0)} &= 2,144440, & b_1^{(1)} &= 0,552007, & b_1^{(2)} &= 0,208313, \\
b_1^{(3)} &= 0,086834, & b_1^{(4)} &= 0,037909, & b_1^{(5)} &= 0,016990, \\
b_1^{(6)} &= 0,007728, & b_1^{(7)} &= 0,003522, & b_1^{(8)} &= 0,001547; \\
\frac{db_1^{(0)}}{dx} &= 0,683055, & \frac{db_1^{(1)}}{dx} &= 1,373806, & \frac{db_1^{(2)}}{dx} &= 0,949128, \\
\frac{db_1^{(3)}}{dx} &= 0,572896, & \frac{db_1^{(4)}}{dx} &= 0,327198, & \frac{db_1^{(5)}}{dx} &= 0,181370, \\
\frac{db_1^{(6)}}{dx} &= 0,098790, & \frac{db_1^{(7)}}{dx} &= 0,053642; \\
\frac{d^2 b_1^{(0)}}{dx^2} &= 2,377102, & \frac{d^2 b_1^{(1)}}{dx^2} &= 2,017767, & \frac{d^2 b_1^{(2)}}{dx^2} &= 2,992245, \\
\frac{d^2 b_1^{(3)}}{dx^2} &= 2,881218, & \frac{d^2 b_1^{(4)}}{dx^2} &= 2,278077, & \frac{d^2 b_1^{(5)}}{dx^2} &= 1,616470, \\
\frac{d^2 b_1^{(6)}}{dx^2} &= 1,067430; \\
\frac{d^3 b_1^{(0)}}{dx^3} &= 8,798999, & \frac{d^3 b_1^{(1)}}{dx^3} &= 9,578267, & \frac{d^3 b_1^{(2)}}{dx^3} &= 9,425450, \\
\frac{d^3 b_1^{(3)}}{dx^3} &= 11,904140, & \frac{d^3 b_1^{(4)}}{dx^3} &= 12,988670, & \frac{d^3 b_1^{(5)}}{dx^3} &= 12,135721; \\
b_1^{(6)} &= 3,750905, & b_1^{(7)} &= 2,547992, & b_1^{(8)} &= 1,530152, \\
b_1^{(9)} &= 0,872105, & b_1^{(10)} &= 0,482564, & b_1^{(11)} &= 0,262146; \\
\frac{db_1^{(2)}}{dx} &= 9,75656, & \frac{db_1^{(3)}}{dx} &= 7,24097, & \frac{db_1^{(4)}}{dx} &= 4,95052.
\end{aligned}$$

CHAPITRE VII.

EXPRESSIONS NUMÉRIQUES DES VARIATIONS SÉCULAIRES DES ÉLÉMENTS
DES ORBITES PLANÉTAIRES.

24. Nous allons présentement donner les valeurs numériques des variations séculaires des éléments des orbites planétaires. Reprenons pour cela les variations différentielles des excentricités, des périhélies, des inclinaisons et des nœuds des orbites, données dans les nos 58 et 60 du Livre II. Pour les réduire en nombres, il faut d'abord déterminer les valeurs numériques des quantités $(0, 1)$, $[0, 1]$, ... On a d'abord calculé les valeurs de $(0, 1)$ et $[0, 1]$, au moyen des formules suivantes, données dans le n° 55 du Livre II,

$$(0, 1) = -\frac{3m'n\alpha^2 b_1^{(1)}}{4(1-\alpha^2)^2}, \quad [0, 1] = -\frac{3m'n\alpha \left[(1+\alpha^2) b_1^{(1)} - \frac{1}{2} \alpha b_1^{(0)} \right]}{2(1-\alpha^2)^2}.$$

On en a conclu les valeurs de $(1, 0)$ et $[1, 0]$, au moyen des équations suivantes, trouvées dans le même numéro,

$$(1, 0) = \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} (0, 1), \quad [1, 0] = \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} [0, 1].$$

On a obtenu de cette manière les résultats suivants réduits en secondes, et dans lesquels les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 se rapportent respectivement à Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus. On a multiplié les masses précédentes des planètes respectivement par les facteurs indéterminés $1+\mu$, $1+\mu'$, $1+\mu''$, ..., afin

de pouvoir corriger immédiatement ces résultats, quand on aura les corrections des masses.

$(0, 1) = (1 + \mu') \cdot 9'', 421152,$	$[0, 1] = (1 + \mu') \cdot 6'', 053725,$
$(0, 2) = (1 + \mu'') \cdot 2'', 974746,$	$[0, 2] = (1 + \mu'') \cdot 1'', 411096,$
$(0, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 125403,$	$[0, 3] = (1 + \mu''') \cdot 0'', 039496,$
$(0, 4) = (1 + \mu^{IV}) \cdot 4'', 862570,$	$[0, 4] = (1 + \mu^{IV}) \cdot 0'', 451633,$
$(0, 5) = (1 + \mu^V) \cdot 0'', 248641,$	$[0, 5] = (1 + \mu^V) \cdot 0'', 012610,$
$(0, 6) = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 005252,$	$[0, 6] = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 000129;$
$(1, 0) = (1 + \mu) \cdot 1'', 303450,$	$[1, 0] = (1 + \mu) \cdot 0'', 837553,$
$(1, 2) = (1 + \mu'') \cdot 22'', 889753,$	$[1, 2] = (1 + \mu'') \cdot 19'', 058562,$
$(1, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 457288,$	$[1, 3] = (1 + \mu''') \cdot 0'', 263124,$
$(1, 4) = (1 + \mu^{IV}) \cdot 12'', 750512,$	$[1, 4] = (1 + \mu^{IV}) \cdot 2'', 211195,$
$(1, 5) = (1 + \mu^V) \cdot 0'', 640032,$	$[1, 5] = (1 + \mu^V) \cdot 0'', 060621,$
$(1, 6) = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 013439,$	$[1, 6] = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 000634;$
$(2, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 301154,$	$[2, 0] = (1 + \mu) \cdot 0'', 142855,$
$(2, 1) = (1 + \mu') \cdot 16'', 749060,$	$[2, 1] = (1 + \mu') \cdot 13'', 945671,$
$(2, 3) = (1 + \mu''') \cdot 1'', 336417,$	$[2, 3] = (1 + \mu''') \cdot 1'', 027656,$
$(2, 4) = (1 + \mu^{IV}) \cdot 21'', 444015,$	$[2, 4] = (1 + \mu^{IV}) \cdot 5'', 129740,$
$(2, 5) = (1 + \mu^V) \cdot 1'', 050745,$	$[2, 5] = (1 + \mu^V) \cdot 0'', 137390,$
$(2, 6) = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 021899,$	$[2, 6] = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 001428;$
$(3, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 057600,$	$[3, 0] = (1 + \mu) \cdot 0'', 018142,$
$(3, 1) = (1 + \mu') \cdot 1'', 518147,$	$[3, 1] = (1 + \mu') \cdot 0'', 873545,$
$(3, 2) = (1 + \mu'') \cdot 6'', 063413,$	$[3, 2] = (1 + \mu'') \cdot 4'', 662522,$
$(3, 4) = (1 + \mu^{IV}) \cdot 44'', 479510,$	$[3, 4] = (1 + \mu^{IV}) \cdot 16'', 108309,$
$(3, 5) = (1 + \mu^V) \cdot 2'', 031918,$	$[3, 5] = (1 + \mu^V) \cdot 0'', 404446,$
$(3, 6) = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 041468,$	$[3, 6] = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 004114;$

$(4, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 000699,$	$[4, 0] = (1 + \mu) \cdot 0'', 000065,$
$(4, 1) = (1 + \mu') \cdot 0'', 013244,$	$[4, 1] = (1 + \mu') \cdot 0'', 002297,$
$(4, 2) = (1 + \mu'') \cdot 0'', 030439,$	$[4, 2] = (1 + \mu'') \cdot 0'', 007281,$
$(4, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 013916,$	$[4, 3] = (1 + \mu''') \cdot 0'', 005040,$
$(4, 5) = (1 + \mu^V) \cdot 23'', 771411,$	$[4, 5] = (1 + \mu^V) \cdot 15'', 537640,$
$(4, 6) = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 298294,$	$[4, 6] = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 100143;$
$(5, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 000083,$	$[5, 0] = (1 + \mu) \cdot 0'', 000004,$
$(5, 1) = (1 + \mu') \cdot 0'', 001545,$	$[5, 1] = (1 + \mu') \cdot 0'', 000146,$
$(5, 2) = (1 + \mu'') \cdot 0'', 003467,$	$[5, 2] = (1 + \mu'') \cdot 0'', 000454,$
$(5, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 001478,$	$[5, 3] = (1 + \mu''') \cdot 0'', 000294,$
$(5, 4) = (1 + \mu^{IV}) \cdot 55'', 263722,$	$[5, 4] = (1 + \mu^{IV}) \cdot 36'', 121899,$
$(5, 6) = (1 + \mu^{VI}) \cdot 1'', 096340,$	$[5, 6] = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'', 658505;$
$(6, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 000007,$	$[6, 0] = (1 + \mu) \cdot 0'', 000000,$
$(6, 1) = (1 + \mu') \cdot 0'', 000133,$	$[6, 1] = (1 + \mu') \cdot 0'', 000007,$
$(6, 2) = (1 + \mu'') \cdot 0'', 000296,$	$[6, 2] = (1 + \mu'') \cdot 0'', 000019,$
$(6, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 000124,$	$[6, 3] = (1 + \mu''') \cdot 0'', 000012,$
$(6, 4) = (1 + \mu^{IV}) \cdot 2'', 838932,$	$[6, 4] = (1 + \mu^{IV}) \cdot 0'', 953096,$
$(6, 5) = (1 + \mu^V) \cdot 4'', 488196,$	$[6, 5] = (1 + \mu^V) \cdot 2'', 695783,$

25. Au moyen de ces valeurs et des formules données dans les nos 58 et 60 du Livre II, on a conclu les résultats suivants, dans lesquels $\frac{d\varpi}{dt}$ exprime le mouvement sidéral du périhélie en longitude, à l'époque de 1750, et pendant une année de $365\frac{1}{4}$; $\frac{2de}{dt}$ est la variation annuelle de l'équation du centre, ou du double de l'excentricité, à la même époque; $\frac{d\varrho}{dt}$ est la variation annuelle de l'inclinaison de l'orbite à l'écliptique fixe de 1750; $\frac{d\varphi}{dt}$ est la variation annuelle de l'inclinaison

de l'orbite à l'écliptique vraie; $\frac{d\theta}{dt}$ est le mouvement annuel et sidéral du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique fixe de 1750; $\frac{d\theta_1}{dt}$ est le mouvement annuel et sidéral du même nœud sur l'écliptique vraie.

MERCURE.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= 17'', 367383 + 9'', 302569.\mu' + 2'', 870161.\mu'' + 0'', 129151.\mu''' \\ &\quad + 4'', 814947.\mu^{iv} + 0'', 245303.\mu^v + 0'', 003252.\mu^{vi}, \\ \frac{de}{dt} &= 0'', 042252 + 0'', 067742.\mu' + 0'', 020096.\mu'' - 0'', 007190.\mu''' \\ &\quad - 0'', 038766.\mu^{iv} + 0'', 000358.\mu^v + 0'', 000012.\mu^{vi}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= -0'', 370349 - 0'', 271453.\mu' - 0'', 000162.\mu'' - 0'', 088777.\mu''' \\ &\quad - 0'', 009924.\mu^{iv} - 0'', 000033.\mu^v, \\ \frac{d\varpi_1}{dt} &= 0'', 547557 + 0'', 211140.\mu' + 0'', 001569.\mu'' + 0'', 302730.\mu''' \\ &\quad + 0'', 032015.\mu^{iv} + 0'', 000103.\mu^v, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -13'', 040106 - 5'', 446264.\mu' - 2'', 974745.\mu'' - 0'', 092442.\mu''' \\ &\quad - 4'', 308989.\mu^{iv} - 0'', 212929.\mu^v - 0'', 004737.\mu^{vi}, \\ \frac{d\eta_1}{dt} &= -23'', 354327 - 0'', 301154.\mu' - 12'', 513661.\mu'' - 2'', 974745.\mu''' \\ &\quad - 0'', 443748.\mu^{iv} - 6'', 750288.\mu^v - 0'', 363854.\mu^{vi} \\ &\quad - 0'', 006877.\mu^{vii}.\end{aligned}$$

VÉNUS.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= -7'', 231874 - 13'', 318446.\mu' - 17'', 761229.\mu'' + 3'', 715362.\mu''' \\ &\quad + 19'', 863664.\mu^{iv} + 0'', 258684.\mu^v + 0'', 010091.\mu^{vi}, \\ \frac{de}{dt} &= -0'', 804218 - 0'', 279256.\mu' - 0'', 312252.\mu'' - 0'', 019686.\mu''' \\ &\quad - 0'', 189714.\mu^{iv} - 0'', 004348.\mu^v + 0'', 000038.\mu^{vi}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= -0'', 049228 + 0'', 077777.\mu' + 0'', 006658.\mu'' - 0'', 116834.\mu''' \\ &\quad - 0'', 016835.\mu^{iv} + 0'', 000006.\mu^v, \\ \frac{d\varpi_1}{dt} &= 0'', 137464 + 0'', 059807.\mu' - 0'', 012801.\mu'' + 0'', 079659.\mu''' \\ &\quad + 0'', 010803.\mu^{iv} - 0'', 000004.\mu^v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= -30'', 558630 + 1'', 055720.\mu' - 22'', 889753.\mu'' - 0'', 234914.\mu''' \\ &\quad - 8'', 215138.\mu^{iv} - 0'', 264164.\mu^v - 0'', 010381.\mu^{vi}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= -56'', 752351 + 0'', 510648.\mu' - 16'', 749053.\mu'' - 22'', 889753.\mu''' \\ &\quad - 0'', 884798.\mu^{iv} - 15'', 842800.\mu^v - 0'', 881230.\mu^{vi} \\ &\quad - 0'', 015365.\mu^{vii}.\end{aligned}$$

LA TERRE.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= 36'', 881443 - 1'', 280628.\mu' + 11'', 769371.\mu'' + 4'', 772107.\mu''' \\ &\quad + 21'', 001210.\mu^{iv} + 0'', 598970.\mu^v + 0'', 020413.\mu^{vi}, \\ \frac{de}{dt} &= -0'', 579130 - 0'', 024866.\mu' + 0'', 093936.\mu'' - 0'', 152500.\mu''' \\ &\quad - 0'', 493018.\mu^{iv} - 0'', 002806.\mu^v + 0'', 000124.\mu^{vi},\end{aligned}$$

MARS.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= 48'', 386296 + 0'', 049209.\mu' + 1'', 577303.\mu'' + 6'', 571974.\mu''' \\ &\quad + 38'', 002750.\mu^{iv} + 2'', 141598.\mu^v + 0'', 043462.\mu^{vi}, \\ \frac{de}{dt} &= 1'', 149806 + 0'', 007292.\mu' + 0'', 004832.\mu'' + 0'', 124976.\mu''' \\ &\quad + 0'', 972168.\mu^{iv} + 0'', 040638.\mu^v - 0'', 000100.\mu^{vi}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= -0'', 906791 + 0'', 000284.\mu' - 0'', 040575.\mu'' - 0'', 786665.\mu''' \\ &\quad - 0'', 079599.\mu^{iv} - 0'', 000236.\mu^v, \\ \frac{d\varpi_1}{dt} &= -0'', 040074 - 0'', 001199.\mu' + 0'', 407078.\mu'' - 0'', 407404.\mu''' \\ &\quad - 0'', 038437.\mu^{iv} - 0'', 000112.\mu^v, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -30'', 025415 + 0'', 161185.\mu' + 0'', 969343.\mu'' - 6'', 063413.\mu''' \\ &\quad - 24'', 244144.\mu^{iv} - 0'', 822630.\mu^v - 0'', 025756.\mu^{vi}, \\ \frac{d\eta_1}{dt} &= -70'', 338499 - 0'', 982701.\mu' - 26'', 474072.\mu'' - 6'', 063413.\mu''' \\ &\quad - 1'', 336417.\mu^{iv} - 33'', 999862.\mu^v - 1'', 447980.\mu^{vi} \\ &\quad - 0'', 034054.\mu^{vii}.\end{aligned}$$

JUPITER.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega''}{dt} &= 20'', 369659 + 0'', 000574 \cdot \mu + 0'', 013364 \cdot \mu' + 0'', 030362 \cdot \mu'' \\ &\quad + 0'', 006319 \cdot \mu''' + 19'', 931701 \cdot \mu^{IV} + 0'', 387339 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{de''}{dt} &= 1'', 711168 - 0'', 000024 \cdot \mu + 0'', 000028 \cdot \mu' + 0'', 000244 \cdot \mu'' \\ &\quad - 0'', 000588 \cdot \mu''' + 1'', 707742 \cdot \mu^{IV} + 0'', 003766 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi''}{dt} &= -0'', 241174 + 0'', 000068 \cdot \mu + 0'', 000313 \cdot \mu' + 0'', 000346 \cdot \mu'' \\ &\quad - 0'', 243621 \cdot \mu''' + 0'', 001720 \cdot \mu^{IV}, \\ \frac{d\varphi_1''}{dt} &= -0'', 688820 - 0'', 029292 \cdot \mu - 0'', 393414 \cdot \mu' - 0'', 032856 \cdot \mu'' \\ &\quad - 0'', 232852 \cdot \mu''' + 0'', 001594 \cdot \mu^{IV}, \\ \frac{d\varphi_2''}{dt} &= 19'', 926792 + 0'', 001570 \cdot \mu + 0'', 018076 \cdot \mu' - 0'', 030439 \cdot \mu'' \\ &\quad - 0'', 001423 \cdot \mu''' + 20'', 078923 \cdot \mu^{IV} - 0'', 139915 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi_3''}{dt} &= -45'', 257336 - 0'', 976008 \cdot \mu - 39'', 594863 \cdot \mu' - 0'', 030439 \cdot \mu'' \\ &\quad - 1'', 201089 \cdot \mu''' - 21'', 444015 \cdot \mu^{IV} + 18'', 140621 \cdot \mu^{V} \\ &\quad - 0'', 151543 \cdot \mu^{VI}.\end{aligned}$$

SATURNE.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega''}{dt} &= 49'', 730637 + 0'', 000068 \cdot \mu + 0'', 001531 \cdot \mu' + 0'', 003334 \cdot \mu'' \\ &\quad + 0'', 001697 \cdot \mu''' + 48'', 737068 \cdot \mu^{IV} + 0'', 986939 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{de''}{dt} &= -3'', 334597 - 0'', 000000 \cdot \mu + 0'', 000001 \cdot \mu' + 0'', 000002 \cdot \mu'' \\ &\quad - 0'', 000048 \cdot \mu''' - 3'', 394812 \cdot \mu^{IV} + 0'', 060260 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi''}{dt} &= 0'', 307841 + 0'', 000009 \cdot \mu + 0'', 000055 \cdot \mu' + 0'', 000043 \cdot \mu'' \\ &\quad + 0'', 298443 \cdot \mu^{IV} + 0'', 009291 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi_1''}{dt} &= -0'', 479290 - 0'', 033813 \cdot \mu - 0'', 598513 \cdot \mu' - 0'', 038709 \cdot \mu'' \\ &\quad + 0'', 182639 \cdot \mu^{IV} + 0'', 009106 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi_2''}{dt} &= -27'', 794110 + 0'', 000011 \cdot \mu + 0'', 000130 \cdot \mu' - 0'', 003467 \cdot \mu'' \\ &\quad - 0'', 000969 \cdot \mu''' - 26'', 957559 \cdot \mu^{IV} - 0'', 832229 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi_3''}{dt} &= -58'', 770060 - 0'', 342473 \cdot \mu - 18'', 158175 \cdot \mu' - 0'', 003467 \cdot \mu'' \\ &\quad - 0'', 436463 \cdot \mu''' - 37'', 941234 \cdot \mu^{IV} - 1'', 050744 \cdot \mu^{V} \\ &\quad - 0'', 837504 \cdot \mu^{VI}.\end{aligned}$$

URANUS.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega''}{dt} &= 7'', 576700 + 0'', 000008 \cdot \mu + 0'', 000132 \cdot \mu' + 0'', 000293 \cdot \mu'' \\ &\quad + 0'', 000147 \cdot \mu''' + 3'', 737130 \cdot \mu^{IV} + 3'', 838990 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{de''}{dt} &= -0'', 333901 - 0'', 000000 \cdot \mu - 0'', 000000 \cdot \mu' - 0'', 000000 \cdot \mu'' \\ &\quad + 0'', 000001 \cdot \mu''' - 0'', 036890 \cdot \mu^{IV} - 0'', 297012 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi''}{dt} &= -0'', 150807 + 0'', 000000 \cdot \mu + 0'', 000000 \cdot \mu' + 0'', 000001 \cdot \mu'' \\ &\quad - 0'', 027888 \cdot \mu^{IV} - 0'', 122920 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi_1''}{dt} &= -0'', 084754 - 0'', 016951 \cdot \mu + 0'', 031312 \cdot \mu' - 0'', 018232 \cdot \mu'' \\ &\quad + 0'', 182767 \cdot \mu^{IV} - 0'', 094142 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi_2''}{dt} &= 8'', 336037 + 0'', 000051 \cdot \mu + 0'', 000450 \cdot \mu' - 0'', 000296 \cdot \mu'' \\ &\quad + 0'', 000144 \cdot \mu''' + 1'', 532043 \cdot \mu^{IV} + 6'', 803645 \cdot \mu^{V}, \\ \frac{d\varphi_3''}{dt} &= -106'', 183322 - 2'', 433693 \cdot \mu - 73'', 505817 \cdot \mu' - 0'', 000296 \cdot \mu'' \\ &\quad - 2'', 897429 \cdot \mu''' - 31'', 484265 \cdot \mu^{IV} + 4'', 160079 \cdot \mu^{V} \\ &\quad - 0'', 021901 \cdot \mu^{VI}.\end{aligned}$$

Je n'ai point compris dans les formules précédentes les variations de l'orbite terrestre; on les déterminera par les équations

$$\tan \varphi'' \sin \theta'' = p'', \quad \tan \varphi'' \cos \theta'' = q''.$$

Quant aux valeurs de p'' et de q'' , on les déterminera par les formules du n° 59 du Livre II, et l'on aura, en prenant pour plan fixe l'écliptique de 1750,

$$p'' = t \frac{dp''}{dt} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2 p''}{dt^2} + \dots,$$

$$q'' = t \frac{dq''}{dt} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2 q''}{dt^2} + \dots,$$

t exprimant le nombre des années juliennes écoulées depuis 1750, et les valeurs de $\frac{dp''}{dt}$, $\frac{dq''}{dt}$, $\frac{d^2 p''}{dt^2}$, ... se rapportant à cette époque. On pourra ne considérer que la première puissance de t dans ces deux séries, lorsque t n'excèdera pas 300; et lorsqu'il ne surpassera pas

1000 ou 1200, on pourra rejeter les puissances supérieures au carré, ce qui est permis, même relativement aux observations les plus anciennes, vu leur imperfection. On trouve, par les formules citées,

$$\begin{aligned}\frac{dp''}{dt} &= 0'',236792 + 0'',025989.\mu + 0'',266408.\mu' + 0'',029082.\mu'' \\ &\quad - 0'',067966.\mu''' - 0'',016809.\mu'' + 0'',000088.\mu''', \\ \frac{dq''}{dt} &= -1'',546156 - 0'',026304.\mu - 0'',956638.\mu' - 0'',031898.\mu'' \\ &\quad - 0'',488376.\mu''' - 0'',042658.\mu'' - 0'',000282.\mu'''.\end{aligned}$$

26. On a vu, dans le Chapitre III, que l'ellipticité du Soleil produit dans les périhélies des orbes planétaires un léger mouvement égal à

$$\left(p - \frac{1}{2}q\right) \frac{D^2}{a^2} nt.$$

Considérons ce mouvement par rapport à Mercure. q est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur solaire; soit mt le mouvement angulaire de rotation du Soleil; la force centrifuge à l'équateur solaire sera $m^2 D$. Si l'on exprime par S la masse du Soleil, on aura $\frac{S}{a^3} = n^2$, ou $S = n^2 a^3$, ce qui donne la pesanteur $\frac{S}{D^2}$ à l'équateur solaire égale à $\frac{n^2 a^3}{D^2}$; on a donc

$$q = \frac{m^2}{n^2} \frac{D^2}{a^2}.$$

La durée de la rotation du Soleil est, suivant les observations, à très-peu près égale à 25¹,417. La durée de la révolution sidérale de la Terre est de 365¹,256, d'où l'on tire

$$\frac{m}{n^2} = \frac{365,256}{25,417}.$$

Le demi-diamètre apparent du Soleil, dans sa moyenne distance, est de 2968'', ce qui donne

$$\frac{D}{a} = \sin 2968'';$$

on a donc

$$q = 0,000209268.$$

Dans le cas de l'homogénéité du Soleil, on a, par le n° 24 du Livre III,

$p = \frac{5}{4}q$; le mouvement du périhélie de Mercure, produit par l'ellipticité du Soleil, est donc alors égal à

$$\frac{3}{4} q \frac{D^2}{a^2} nt,$$

et par conséquent à

$$\frac{3}{4} q (\sin 2968'')^2 \left(\frac{a''}{a}\right)^2 nt.$$

En substituant, pour a , a'' et n , leurs valeurs données dans le Chapitre V, cette quantité devient 0'',037810. t . Elle augmente la valeur précédente de $\frac{d\omega}{dt}$ de la quantité 0'',037810. Cette quantité presque insensible devient plus petite encore si, comme il y a tout lieu de le croire, le Soleil est formé de couches dont la densité croît de la surface au centre; on peut donc la négliger pour Mercure, et à plus forte raison pour les autres planètes. Les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites, dépendantes de la même cause, peuvent être également négligées.

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DE MERCURE.

27. Les inégalités de toutes les planètes, indépendantes des excentricités, et celles qui ne dépendent que de leurs premières puissances ont été calculées par les formules du n° 50 du Livre II. On a d'abord déterminé les valeurs de $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, ... et de leurs différences par les formules du n° 49 du même Livre; ensuite on a obtenu les résultats suivants, dans lesquels j'ai omis les perturbations du rayon vecteur dont l'effet sur la longitude géocentrique de la planète est au-dessous d'une seconde. Pour déterminer la limite qu'une inégalité du rayon vecteur doit atteindre pour produire une seconde sur la longitude géocentrique de Mercure, nous observerons que, si l'on nomme V cette longitude, et si l'on fait $\frac{r}{r''} = \alpha$, on a, pour la variation δV correspondante à δr ,

$$\delta V = -\frac{\delta r}{r''} \frac{\sin(v-v'')}{1-2\alpha \cos(v-v'')+\alpha^2}.$$

Le maximum de la fonction

$$\frac{\sin(v-v'')}{1-2\alpha \cos(v-v'')+\alpha^2}$$

correspond à

$$\cos(v-v'') = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2},$$

ce qui donne $\frac{1}{1-\alpha^2}$ pour ce maximum; on a donc alors

$$\delta r = -r''(1-\alpha^2)\delta V.$$

Si l'on suppose $\delta V = \pm 1''$, et si l'on prend pour r et r'' les moyennes distances de Mercure et de la Terre au Soleil, on aura, par ce qui précède, $r'' = 1$, $\alpha = 0,38709812$, d'où l'on tire

$$\delta r = \mp 0,000001335;$$

on peut donc négliger toutes les inégalités du rayon vecteur de Mercure dont le coefficient est au-dessous de $\pm 0,000001$. Parmi les inégalités du mouvement en longitude, nous ne rapporterons que celles dont le coefficient est au-dessus d'un quart de seconde, excepté les inégalités qui dépendent de la simple distance angulaire de la planète, et qui peuvent être réduites dans une même Table avec des inégalités plus considérables.

Inégalités de Mercure indépendantes des excentricités.

$$\begin{aligned} \delta v = (1+\mu') & \left\{ \begin{array}{l} 2'',044299. \sin(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ - 4'',497255. \sin 2(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ - 0'',395294. \sin 3(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ - 0'',090322. \sin 4(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ - 0'',027485. \sin 5(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \end{array} \right\} \\ & + (1+\mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0'',622493. \sin(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) \\ - 0'',511250. \sin 2(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) \\ - 0'',052163. \sin 3(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) \\ - 0'',009652. \sin 4(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) \end{array} \right\} \\ & + (1+\mu''') \left\{ \begin{array}{l} 1'',757209. \sin(n'''t - nt + \epsilon''' - \epsilon) \\ - 0'',365384. \sin 2(n'''t - nt + \epsilon''' - \epsilon) \\ - 0'',009624. \sin 3(n'''t - nt + \epsilon''' - \epsilon) \end{array} \right\}, \\ \delta r = -(1+\mu') & \left\{ \begin{array}{l} 0,0000000376 \\ - 0,0000004094. \cos(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ + 0,0000015545. \cos 2(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ + 0,0000001702. \cos 3(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ + 0,0000000437. \cos 4(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\begin{aligned} \partial v = (1 + \mu') & \left\{ \begin{aligned} & 0'', 911114. \sin(n't + \epsilon' - \omega) \\ & - 12'', 440900. \sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \omega) \\ & - 5'', 204241. \sin(3n't - 2nt + 3\epsilon' - 2\epsilon - \omega) \\ & + 0'', 290090. \sin(3n't - 2nt + 3\epsilon' - 2\epsilon - \omega) \\ & + 0'', 907384. \sin(4n't - 3nt + 4\epsilon' - 3\epsilon - \omega) \\ & - 0'', 545742. \sin(2nt - n't + 2\epsilon' - \epsilon - \omega) \\ & + 1'', 217550. \sin(3nt - 2n't + 3\epsilon' - 2\epsilon - \omega) \end{aligned} \right\} \\ & + (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & 0'', 294499. \sin(n''t + \epsilon'' - \omega) \\ & - 1'', 425025. \sin(2n''t - nt + 2\epsilon'' - \epsilon - \omega) \\ & + 0'', 753543. \sin(3n''t - 2nt + 3\epsilon'' - 2\epsilon - \omega) \end{aligned} \right\} \\ & + (1 + \mu''') \left\{ \begin{aligned} & 0'', 729463. \sin(n'''t + \epsilon''' - \omega) \\ & - 1'', 765062. \sin(n'''t + \epsilon''' - \omega''') \\ & - 10'', 119405. \sin(2n'''t - nt + 2\epsilon''' - \epsilon - \omega) \end{aligned} \right\} \\ & - (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & 0'', 259774. \sin(n''t + \epsilon'' - \omega') \\ & + 1'', 220658. \sin(2n''t - nt + 2\epsilon'' - \epsilon - \omega) \end{aligned} \right\}, \\ \partial r = & - (1 + \mu') \cdot 0,0000013482. \cos(3n't - 2nt + 3\epsilon' - 2\epsilon - \omega) \\ & - (1 + \mu'') \cdot 0,0000029625. \cos(2n''t - nt + 2\epsilon'' - \epsilon - \omega). \end{aligned}$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Ces inégalités ont été calculées par les formules des nos 1, 2 et 4. Le double du mouvement de Mercure diffère très-peu de cinq fois le mouvement de Vénus, en sorte que $5(n' - n) + 2n$ est à très-peu près égal à $-n$; il faut donc, par le n° 3, considérer l'inégalité dépendante de $3nt - 5n't$. L'angle $3n't - nt$ croît avec assez de lenteur pour avoir égard à l'inégalité qui en dépend. Pareillement, le mouvement de Mercure étant égal à très-peu près à quatre fois celui de la Terre, $4(n'' - n) + 2n$ diffère peu de $-n$; il faut donc, par le n° 3, consi-

dérer l'inégalité dépendante de $2nt - 4n''t$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \partial v = & - (1 + \mu') \left\{ \begin{aligned} & 5'', 217417. \sin(3nt - 5n't + 3\epsilon' - 5\epsilon' - 48'', 1210) \\ & + 1'', 844641. \sin(3n't - nt + 3\epsilon' - \epsilon' + 45'', 1219) \end{aligned} \right\} \\ & - (1 + \mu'') \cdot 0'', 813190. \sin(2nt - 4n''t + 2\epsilon' - 4\epsilon'' - 45'', 7735), \\ \partial r = & (1 + \mu') \cdot 0,0000016056. \cos(3nt - 5n't + 3\epsilon' - 5\epsilon' - 47'', 7420). \end{aligned}$$

Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

La première de ces inégalités dépend de l'angle $2nt - 5n't$; elle a été calculée par les formules du n° 7. La seconde dépend de l'angle $nt - 4n''t$; elle a été calculée suivant la méthode du n° 10. On a trouvé ainsi

$$\begin{aligned} \partial v = & - (1 + \mu') \cdot 26'', 184460. \sin(2nt - 5n't + 2\epsilon' - 5\epsilon' + 33'', 5852) \\ & - (1 + \mu'') \cdot 2'', 131517. \sin(nt - 4n''t + \epsilon' - 4\epsilon'' + 21'', 1522). \end{aligned}$$

Les inégalités du mouvement de Mercure en latitude ont été calculées par les formules du n° 51 du Livre II. Comme elles sont insensibles et au-dessous d'un quart de seconde, je crois inutile de les rapporter ici.

CHAPITRE IX.

THÉORIE DE VÉNUS.

28. Si l'on fait $\frac{r'}{r''} = \alpha$, et si l'on nomme V la longitude géocentrique de Vénus, l'équation

$$\partial r = -r''(1 - \alpha^2)\partial V,$$

donnée dans le numéro précédent, deviendra, relativement à cette planète,

$$\partial r' = -r''(1 - \alpha^2)\partial V'.$$

En prenant pour r' et r'' les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on a, par le n° 23, $\alpha = 0,72333230$; en faisant donc $\delta V' = \pm 1''$, on aura

$$\partial r' = \mp 0,000007489,$$

On peut ainsi négliger les inégalités du rayon vecteur dont le coefficient est au-dessous de 0,000007. Nous négligerons les inégalités du mouvement en longitude au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de Vénus indépendantes des excentricités.

$$\partial v' = (1 + \mu'') \left(\begin{array}{l} 15'',481270. \sin (n''t - n't + e'' - e') \\ + 35'',260470. \sin 2 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 22'',388478. \sin 3 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 3'',261481. \sin 4 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 1'',067587. \sin 5 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',448709. \sin 6 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',215203. \sin 7 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',111751. \sin 8 (n''t - n't + e'' - e') \end{array} \right)$$

$$+ (1 + \mu'') \left(\begin{array}{l} 0'',246629. \sin (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',327119. \sin 2 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',033497. \sin 3 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',007196. \sin 4 (n''t - n't + e'' - e') \end{array} \right)$$

$$+ (1 + \mu''') \left(\begin{array}{l} 8'',923260. \sin (n''t - n't + e'' - e') \\ - 2'',708716. \sin 2 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',123561. \sin 3 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',008501. \sin 4 (n''t - n't + e'' - e') \end{array} \right)$$

$$+ (1 + \mu''') \left(\begin{array}{l} 0'',587881. \sin (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',123022. \sin 2 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0'',004031. \sin 3 (n''t - n't + e'' - e') \end{array} \right)$$

$$\partial r' = (1 + \mu'') \left(\begin{array}{l} -0,0000003145 \\ + 0,0000038362. \cos (n''t - n't + e'' - e') \\ + 0,0000165050. \cos 2 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0,0000140155. \cos 3 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0,0000024255. \cos 4 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0,0000008873. \cos 5 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0,0000004021. \cos 6 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0,0000000333. \cos 7 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0,0000001094. \cos 8 (n''t - n't + e'' - e') \end{array} \right)$$

$$+ (1 + \mu''') \left(\begin{array}{l} -0,0000003106 \\ + 0,0000048903. \cos (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0,0000021911. \cos 2 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0,0000001155. \cos 3 (n''t - n't + e'' - e') \\ - 0,0000000098. \cos 4 (n''t - n't + e'' - e') \end{array} \right)$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\partial v' = (1 + \mu). 2'',472014. \sin (2n't - nt + 2e' - e - \omega)$$

$$+ (1 + \mu'') \left(\begin{array}{l} 0'',225944. \sin (n''t + e'' - \omega') \\ - 0'',394198. \sin (n''t + e'' - \omega'') \\ + 0'',503442. \sin (2n''t - n't + 2e'' - e' - \omega') \\ - 0'',350134. \sin (2n''t - n't + 2e'' - e' - \omega'') \\ - 4'',782561. \sin (3n''t - 2n't + 3e'' - 2e' - \omega') \\ + 14'',710902. \sin (3n''t - 2n't + 3e'' - 2e' - \omega'') \\ - 0'',924314. \sin (4n''t - 3n't + 4e'' - 3e' - \omega') \\ + 2'',924841. \sin (4n''t - 3n't + 4e'' - 3e' - \omega'') \\ - 2'',135011. \sin (5n''t - 4n't + 5e'' - 4e' - \omega') \\ + 6'',779405. \sin (5n''t - 4n't + 5e'' - 4e' - \omega'') \\ + 0'',328502. \sin (3n't - 2n''t + 3e' - 2e'' - \omega) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -(1+\mu''). 3,372700. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega'') \\
& + (1+\mu''') \left\{ \begin{aligned} & -4'',641646. \sin(n''t + \varepsilon'' - \omega''') \\ & -0'',991075. \sin(2n''t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \omega''') \\ & +0'',717378. \sin(2n''t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \omega''') \\ & -0'',504538. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega''') \end{aligned} \right\} \\
& + (1+\mu''). 0'',675132. \sin(n''t + \varepsilon'' - \omega''), \\
\delta r' = & + (1+\mu). 0,000008831. \cos(2n't - nt + 2\varepsilon' - \varepsilon - \omega) \\
& + (1+\mu'') \left\{ \begin{aligned} & 0,0000016482. \cos(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega'') \\ & -0,0000011406. \cos(5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \omega'') \\ & +0,0000036421. \cos(5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \omega'') \end{aligned} \right\} \\
& - (1+\mu'''). 0,0000019404. \cos(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega'').
\end{aligned}$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits de deux dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\begin{aligned}
\delta v' = & (1+\mu). 1'',029617. \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 43'',8980) \\
& - (1+\mu'') \left\{ \begin{aligned} & 4'',645172. \sin(5n''t - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 23'',2302) \\ & +0'',275774. \sin(4n''t - 2n't + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon' + 29'',9358) \end{aligned} \right\} \\
& + (1+\mu'''). 6'',202706. \sin(3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' + 73'',2065).
\end{aligned}$$

En vertu des rapports qui existent entre les moyens mouvements de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, les quantités $2n - 5n'$, $5n' - 3n'$ et $n' - 3n''$ sont très-petites par rapport à n' ; ainsi, par le n° 3, les inégalités précédentes paraissent être les seules de l'ordre des carrés des excentricités qui puissent être sensibles.

Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v' = (1+\mu). 3'',656620. \sin(2nt - 5n't + 2\varepsilon - 5\varepsilon' + 33'',5852).$$

Inégalités du mouvement de Vénus en latitude.

Les formules du n° 51 donnent

$$\begin{aligned}
\delta s' = & (1+\mu'') \left\{ \begin{aligned} & 0'',385197. \sin(n''t + \varepsilon'' - \theta') \\ & +0'',280655. \sin(2n''t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \theta') \\ & +0'',226675. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \theta') \\ & +0'',251485. \sin(4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \theta') \\ & +0'',964615. \sin(5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \theta') \\ & -0'',241108. \sin(2n''t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \theta') \end{aligned} \right\} \\
& - (1+\mu''). 0'',458953. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \Pi'') \\
& + (1+\mu'''). 0'',498190. \sin(2n''t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \Pi'''),
\end{aligned}$$

Π'' étant ici la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Mars sur celle de Vénus, et Π''' étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Vénus.

CHAPITRE X.

THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA TERRE.

29. V' étant la longitude géocentrique de Vénus, et α étant supposé égal à $\frac{r'}{r''}$, V' sera fonction de α et de $v' - v''$; on aura donc, par le n° 27,

$$\delta V' = - \frac{\partial \alpha \sin(v' - v'')}{1 - 2\alpha \cos(v' - v'') + \alpha^2},$$

ce qui donne, par le même numéro, lorsque $\delta V'$ est à son maximum,

$$\delta V' = - \frac{\partial \alpha}{1 - \alpha^2}.$$

En ne faisant varier que r'' dans $\delta \alpha$, on a $\delta \alpha = - \frac{\alpha \delta r''}{r''}$; partant

$$\delta r'' = r'' \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \delta V'.$$

En supposant $\delta V' = \pm 1''$, et prenant pour r' et r'' les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on aura

$$\delta r'' = \pm 0,000001035.$$

Si l'on nomme V'' la longitude géocentrique de Mars, et si l'on fait $\frac{r''}{r''} = \alpha$, on aura, par le n° 27,

$$\delta r'' = r'' (1 - \alpha^2) \delta V'';$$

en prenant pour r' et r'' les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil, on a

$$\alpha = 0,65630030,$$

$$r'' = 1,52369352.$$

En supposant donc $\delta V'' = \pm 1''$, on aura

$$\delta r'' = \pm 0,000001363;$$

on peut donc négliger les inégalités de $\delta r''$ dont le coefficient est au-dessous de $\pm 0,000001$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de la Terre en longitude, au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de la Terre indépendantes des excentricités.

$$\begin{aligned} \delta v'' = (1 + \mu') & \left\{ \begin{aligned} & 16'', 329870. \sin(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & - 18'', 567565. \sin 2(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & - 2'', 294583. \sin 3(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & - 0'', 695799. \sin 4(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & - 0'', 281511. \sin 5(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & - 0'', 131113. \sin 6(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & - 0'', 067984. \sin 7(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & - 0'', 037203. \sin 8(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \end{aligned} \right\} \\ & + (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & 1'', 318563. \sin(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ & + 10'', 750115. \sin 2(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ & - 0'', 664350. \sin 3(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ & - 0'', 145130. \sin 4(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ & - 0'', 048984. \sin 5(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ & - 0'', 019931. \sin 6(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ & - 0'', 009022. \sin 7(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \end{aligned} \right\} \\ & + (1 + \mu''') \left\{ \begin{aligned} & 21'', 787301. \sin(n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ & - 8'', 253880. \sin 2(n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ & - 0'', 517808. \sin 3(n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ & - 0'', 051076. \sin 4(n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \end{aligned} \right\} \\ & + (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & 1'', 356204. \sin(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ & - 0'', 342623. \sin 2(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ & - 0'', 012792. \sin 3(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \end{aligned} \right\} \\ \delta r'' = (1 + \mu') & \left\{ \begin{aligned} & 0,000001553 \\ & - 0,0000060012. \cos(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & + 0,000017431. \cos 2(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & + 0,0000027072. \cos 3(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & + 0,000009358. \cos 4(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & + 0,0000004086. \cos 5(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ & + 0,0000002008. \cos 6(n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & - 0,000000478 \\ & + 0,0000005487 \cdot \cos(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ & + 0,0000006020 \cdot \cos 2(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ & - 0,0000006475 \cdot \cos 3(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ & - 0,0000001643 \cdot \cos 4(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu''') \left\{ \begin{aligned} & - 0,0000011581 \\ & + 0,0000159384 \cdot \cos(n''t - n't + \varepsilon''' - \varepsilon') \\ & - 0,0000090986 \cdot \cos 2(n''t - n't + \varepsilon''' - \varepsilon') \\ & - 0,000006550 \cdot \cos 3(n''t - n't + \varepsilon''' - \varepsilon') \\ & - 0,000000704 \cdot \cos 4(n''t - n't + \varepsilon''' - \varepsilon') \end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu''') \left\{ \begin{aligned} & - 0,000000580 \\ & + 0,0000010337 \cdot \cos(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ & - 0,000003859 \cdot \cos 2(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\begin{aligned}
\delta v'' = (1 + \mu') \left\{ \begin{aligned} & 0'',234290 \cdot \sin(n't + \varepsilon' - \omega') \\ & - 0'',400233 \cdot \sin(2n't - n't + 2\varepsilon' - \varepsilon'' - \omega') \\ & + 0'',448083 \cdot \sin(2n't - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \omega') \\ & - 0'',521547 \cdot \sin(2n't - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \omega') \\ & - 11'',318247 \cdot \sin(3n't - 2n't + 3\varepsilon' - 2\varepsilon'' - \omega') \\ & + 3'',661696 \cdot \sin(3n't - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega') \\ & - 7'',231346 \cdot \sin(4n't - 3n't + 4\varepsilon' - 3\varepsilon'' - \omega') \\ & + 2'',229704 \cdot \sin(4n't - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \omega') \\ & + 0'',667803 \cdot \sin(5n't - 4n't + 5\varepsilon' - 4\varepsilon'' - \omega') \end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & - 3'',381490 \cdot \sin(2n't - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \omega') \\ & + 6'',597711 \cdot \sin(2n't - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \omega') \\ & - 0'',269754 \cdot \sin(3n't - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega') \\ & + 2'',043057 \cdot \sin(3n't - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega') \\ & - 0'',320240 \cdot \sin(4n't - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \omega') \\ & + 2'',491082 \cdot \sin(4n't - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \omega') \\ & - 0'',416405 \cdot \sin(5n't - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \omega') \end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu''') \left\{ \begin{aligned} & 0'',932384 \cdot \sin(n''t + \varepsilon''' - \omega') \\ & - 7'',839149 \cdot \sin(n''t + \varepsilon''' - \omega') \\ & - 4'',605075 \cdot \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \omega') \\ & + 1'',871601 \cdot \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \omega') \\ & - 1'',677049 \cdot \sin(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon'' - \omega') \\ & - 0'',459646 \cdot \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon''' - \omega') \\ & - 0'',289022 \cdot \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon''' - \omega') \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \mu') \left\{ \begin{aligned} & - 1'',110867 \cdot \sin(n't + \varepsilon' - \omega') \\ & - 0'',468371 \cdot \sin(2n't - n't + 2\varepsilon' - \varepsilon'' - \omega') \end{aligned} \right\} \\
\delta r'' = (1 + \mu') \left\{ \begin{aligned} & - 0,0000030439 \cdot \cos(3n't - 2n't + 3\varepsilon' - 2\varepsilon'' - \omega') \\ & - 0,0000049815 \cdot \cos(4n't - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \omega') \\ & + 0,0000015895 \cdot \cos(4n't - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \omega') \end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & 0,0000017707 \cdot \cos(4n't - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \omega') \\ & - 0,0000030410 \cdot \cos(2n''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \omega') \end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu''') \left\{ \begin{aligned} & - 0,0000012652 \cdot \cos(2n''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \omega') \\ & - 0,0000018101 \cdot \cos(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon'' - \omega') \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\begin{aligned}
\delta v'' = (1 + \mu') \left\{ \begin{aligned} & 3'',473997 \cdot \sin(5n't - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 2\varepsilon', 3759) \\ & + 3'',067703 \cdot \sin(4n't - 2n't + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon' + 75'', 3506) \end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & + 1'',085790 \cdot \sin(5n't - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 76'', 0214) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

En vertu des rapports qui existent entre les moyens mouvements de Vénus, la Terre et Mars, $5n' - 3n'$ et $4n'' - 2n''$ sont de petits coefficients, en sorte que, par le n° 3, les deux premières de ces inégalités sont les seules de cet ordre qui doivent être sensibles. On a cependant calculé la troisième, parce que $3n' - 5n''$ n'étant à peu près que le tiers de n' , il était utile de s'assurer que cette inégalité n'acquiert par cette considération qu'une valeur très-peu sensible.

Inégalités dépendantes du cube et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v'' = (1 + \mu) \cdot 0'',215787 \cdot \sin(nt - 4n't + \varepsilon - 4\varepsilon'' + 2\varepsilon', 1522).$$

Inégalités périodiques du mouvement de la Terre en latitude.

On a trouvé, par les formules du n° 51 du Livre II,

$$\begin{aligned}
\delta s'' = (1 + \mu') \left\{ \begin{aligned} & 0'',306112 \cdot \sin(2n't - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \theta') \\ & + 0'',723012 \cdot \sin(4n't - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \theta') \end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & 0'',508343 \cdot \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \theta'') \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Inégalités de la Terre dépendantes de l'action de la Lune.

30. Si l'on nomme U la longitude de la Lune vue du centre de la Terre, et ν'' la longitude de la Terre vue du centre du Soleil; si l'on nomme encore R le rayon vecteur de la Lune, et r'' celui de la Terre; enfin, si l'on désigne par m et M les masses de la Lune et de la Terre, et par s la latitude de la Lune; on a vu, dans le Chapitre IV, que l'inégalité du mouvement de la Terre en longitude, produite par l'action de la Lune, est,

$$-\frac{m}{M} \frac{R}{r''} \sin(U - \nu'').$$

L'inégalité du rayon vecteur de la Terre est

$$-\frac{m}{M} R \cos(U - \nu''),$$

et l'inégalité du mouvement de la Terre en latitude est

$$-\frac{m}{M} \frac{R}{r''} s.$$

Il faut, pour plus d'exactitude, substituer $\frac{m}{M+m}$ au lieu de $\frac{m}{M}$ dans les expressions de ces trois inégalités.

Nous supposons, conformément aux phénomènes des marées (Livre IV, nos 31 et 35),

$$\frac{m}{R^3} = \frac{3S}{r''^3},$$

S étant la masse du Soleil. Or on a, par la théorie des forces centrales,

$$\frac{M+m}{R^3} = n_t^2, \quad \frac{S}{r''^3} = n''^2,$$

$n_t t$ étant le moyen mouvement de la Lune; on a donc

$$\frac{m}{M+m} = \frac{3n''^2}{n_t^2}.$$

Suivant les observations, $\frac{n''}{n_t} = 0,0748013$, ce qui donne

$$\frac{m}{M+m} = \frac{1}{59,6},$$

et, par conséquent,

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{58,6}.$$

Nous supposons ensuite la parallaxe horizontale du Soleil égale à $27''.2$, et la parallaxe moyenne horizontale de la Lune égale à $10661''$, d'où l'on tire

$$\frac{R}{r''} = \frac{27,2}{10661},$$

et conséquemment

$$\partial \nu'' = -27'',2524 \cdot \sin(U - \nu''),$$

$$\partial r'' = -0,00042808 \cdot \cos(U - \nu'').$$

En prenant ensuite pour s la plus grande inégalité de la Lune en latitude, que nous supposons égale à $57231'' \cdot \sin(U - \theta)$, $U - \theta$ étant la distance de la Lune à son nœud ascendant, on aura

$$-2'',4499 \cdot \sin(U - \theta)$$

pour l'inégalité du mouvement de la Terre en latitude; il faut l'ajouter à la valeur précédente de $\partial s''$ pour avoir la valeur entière de $\partial s''$. Cette valeur entière, prise avec un signe contraire, donne les inégalités du mouvement apparent du Soleil en latitude. Elle influe sur l'obliquité de l'écliptique, conclue de l'observation des hauteurs du Soleil vers les solstices: elle influe encore sur le moment de l'équinoxe, conclu des observations du Soleil vers les équinoxes, et sur l'ascension droite et la déclinaison des étoiles, déterminées par leur comparaison avec le Soleil. Vu la précision des observations modernes, il est nécessaire d'y avoir égard. Il est facile de voir que la déclinaison apparente du Soleil en est augmentée de la quantité

$$-\frac{\partial s'' \cdot \cos(\text{obliquité de l'écliptique})}{\cos(\text{déclinaison du Soleil})},$$

et que son ascension droite apparente en est augmentée de la quantité

$$\frac{\delta s'' \cdot \sin(\text{obliquité de l'écliptique}) \cdot \cos(\text{ascension droite du Soleil})}{\cos(\text{déclinaison du Soleil})};$$

il faut donc diminuer de ces quantités les déclinaisons et les ascensions droites observées du Soleil, pour avoir celles qu'on observerait si la Terre ne quittait point le plan de l'écliptique.

Des variations séculaires de l'orbe terrestre, de l'équateur et de la longueur de l'année.

31. Nous avons donné, dans le n° 26, les variations séculaires des éléments de l'orbe terrestre; mais l'influence de ces variations sur les phénomènes les plus importants de l'Astronomie nous engage à les déterminer avec plus de précision, en ayant égard au carré du temps. t exprimant un nombre quelconque d'années juliennes écoulées depuis 1750, on a trouvé, par la méthode du n° 58 du Livre II, et en adoptant les valeurs des masses des planètes données dans le n° 21, le coefficient de l'équation du centre de l'orbite terrestre égal à

$$2E = t \cdot 0'',579130 + t^2 \cdot 0'',0000207446,$$

$2E$ étant ce coefficient au commencement de 1750, où t est nul. On a trouvé pareillement la longitude sidérale du périhélie de l'orbe terrestre égale à

$$\omega'' + t \cdot 36'',881443 + t^2 \cdot 0'',0002454381.$$

Enfin, les valeurs de p'' et de q'' , pour un temps quelconque t , ont été trouvées respectivement égales à

$$t \cdot 0'',236793 + t^2 \cdot 0'',0000665275,$$

$$- t \cdot 1'',546156 + t^2 \cdot 0'',000008253.$$

Nous avons présenté dans les nos 6 et 7 du livre V les formules de la précession des équinoxes et de l'inclinaison de l'équateur soit à une écliptique fixe, soit à l'écliptique vraie; mais ces formules supposent

que la valeur de p'' est sous la forme $\Sigma c \sin(gt + \epsilon)$, et que q'' est sous la forme $\Sigma c \cos(gt + \epsilon)$. On a vu, dans le n° 59 du Livre II, que les expressions finies de p'' et de q'' se présentent sous ces formes, et l'on peut déterminer, par la méthode exposée dans le n° 56 du même Livre, les valeurs de c , g , ϵ , etc.; mais cela suppose les masses des planètes exactement connues, et l'on a vu l'incertitude qui existe encore à cet égard. Ainsi, au lieu de faire le calcul pénible que cette méthode exige, il est préférable de le simplifier en n'étendant les résultats qu'à mille ou douze cents ans avant et après l'époque de 1750, ce qui suffit aux besoins de l'Astronomie. On pourra facilement recommencer ces calculs à mesure que le développement des variations séculaires fera mieux connaître les masses des planètes. Donnons aux valeurs de p'' et de q'' les formes suivantes, comprises dans celles-ci, $\Sigma c \sin(gt + \epsilon)$, $\Sigma c \cos(gt + \epsilon)$,

$$c \sin \epsilon - c \cos \epsilon \sin gt - c \sin \epsilon \sin \left(g' t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$c \cos \epsilon - c \cos \epsilon \cos gt - c \sin \epsilon \cos \left(g' t + \frac{\pi}{2}\right),$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. Si l'on développe ces deux fonctions par rapport aux puissances du temps t , on aura, en les comparant aux séries précédentes,

$$cg \cos \epsilon = -0'',236793, \quad cg' \sin \epsilon = -1'',546156,$$

$$cg^2 \cos \epsilon = 0'',0000416506, \quad cg'^2 \sin \epsilon = 0'',0001330550,$$

d'où il est facile de conclure

$$g = -111'',978, \quad g' = -54'',7845.$$

$$c \sin \epsilon = 17967'',0, \quad c \cos \epsilon = 1346'',21.$$

Maintenant on a vu, dans le n° 6 du Livre V, que la précession ψ des équinoxes par rapport à l'écliptique fixe de 1750 est, en ne considérant que les variations séculaires,

$$lt + \zeta + \Sigma \left[\left(\frac{l}{f} - 1 \right) \tan h + \cot h \right] \frac{lt}{f} \sin(ft + \delta).$$

Pour avoir $\Sigma c \sin(ft + \epsilon)$, il faut, par le n° 5 du même Livre, augmenter, dans $\Sigma c \sin(gt + \epsilon)$, l'angle $gt + \epsilon$ de lt , ce qui donne $f = g + l$; on aura ainsi

$$\Sigma c \sin(ft + \epsilon) = c \sin(lt + \epsilon) - c \cos \epsilon \sin(gt + lt) - c \sin \epsilon \sin\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right);$$

par conséquent,

$$\psi = lt + \zeta + c \cot h \sin(lt + \epsilon) - \frac{l}{l+g} c \cos \epsilon \left(\cot h - \frac{g}{l+g} \tanh h \right) \sin(gt + lt) - \frac{l}{l+g'} c \sin \epsilon \left(\cot h - \frac{g'}{l+g'} \tanh h \right) \sin\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right).$$

En nommant ensuite V l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique fixe de 1750, on aura, par le n° 6 du Livre V,

$$V = h - \Sigma \frac{lc}{f} \cos(ft + \epsilon).$$

Pour avoir $\Sigma c \cos(ft + \epsilon)$, il faut, par le n° 5 du même Livre, augmenter, dans $\Sigma c \cos(gt + \epsilon)$, l'angle $gt + \epsilon$ de lt ; on aura ainsi

$$\Sigma c \cos(ft + \epsilon) = c \cos(lt + \epsilon) - c \cos \epsilon \cos(gt + lt) - c \sin \epsilon \cos\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right);$$

partant,

$$V = h - c \cos(lt + \epsilon) + \frac{l}{l+g} c \cos \epsilon \cos(gt + lt) + \frac{l}{l+g'} c \sin \epsilon \cos\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right).$$

ψ exprimant la précession des équinoxes par rapport à l'écliptique vraie, et V étant l'inclinaison de l'équateur à cette écliptique, on trouvera, par le n° 7 du Livre V,

$$\begin{aligned} \psi &= lt + \zeta + \frac{g}{l+g} c \cos \epsilon \left(\cot h + \frac{l}{l+g} \tanh h \right) \sin(gt + lt) \\ &\quad + \frac{g'}{l+g'} c \sin \epsilon \left(\cot h + \frac{l}{l+g} \tanh h \right) \sin\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right), \\ V &= h - \frac{g}{l+g} c \cos \epsilon \cos(gt + lt) - \frac{g'}{l+g'} c \sin \epsilon \cos\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

L'expression de ψ donne

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= l + cg \cos \epsilon \left(\cot h + \frac{l}{l+g} \tanh h \right) \cos(gt + lt) \\ &\quad + cg' \sin \epsilon \left(\cot h + \frac{l}{l+g'} \tanh h \right) \cos\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

En retranchant de cette valeur de $\frac{d\psi}{dt}$, lorsque t est nul, sa valeur à une autre époque, la différence réduite en temps, en raison de la circonférence pour une année tropique, donnera l'accroissement de l'année tropique depuis 1750. On voit, par cette formule et par la différentiation de l'expression générale de ψ donnée dans le n° 7 du Livre V, que l'action du Soleil et de la Lune change considérablement la loi de la variation de la longueur de l'année. Dans les hypothèses les plus vraisemblables sur les masses des planètes, l'étendue entière de cette variation, ainsi que l'étendue entière de la variation de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, sont réduites à peu près au quart de la valeur qu'elles auraient sans cette action.

Suivant les observations, on a, en 1750, $\frac{d\psi}{dt} = 154''.63$; mais, par ce qui précède, on a, à cette époque,

$$\frac{d\psi}{dt} = l + cg \cos \epsilon \left(\cot h + \frac{l}{l+g} \tanh h \right);$$

on a donc

$$l + cg \cos \epsilon \left(\cot h + \frac{l}{l+g} \tanh h \right) = 154''.63,$$

équation dans laquelle on peut, en négligeant le carré de c , substituer pour h l'obliquité de l'écliptique à l'équateur en 1750. Cette obliquité, suivant les observations, était alors égale à $26^\circ.0796$, d'où l'on tire

$$l = 155''.543.$$

On a ensuite, en 1750,

$$V' = h - \frac{g}{l+g} c \cos \epsilon,$$

ce qui donne

$$h = 26^\circ.0796 - 3460''.3.$$

Au moyen de ces valeurs, on trouve

$$\begin{aligned}\psi &= t.155'',542 + 2'',92883 + 42118'',3.\sin(t.155'',542 + 95'',2389) \\ &\quad - 71289'',2.\cos(t.100'',757) - 16521'',1.\sin(t.43'',564), \\ V &= 26'',0796 - 3460'',3 - 18017'',4.\cos(t.155'',542 + 95'',2389) \\ &\quad + 4806'',5.\cos(t.43'',564) - 27736'',3.\sin(t.100'',757), \\ \psi' &= t.155'',542 + 2'',92883 - 29288'',3.\cos(t.100'',757) \\ &\quad - 13374'',2.\sin(t.43'',564), \\ V' &= 26'',0796 - 3460'',3.[1 - \cos(t.43'',564)] - 9769'',2.\sin(t.100'',757).\end{aligned}$$

On pourra, par ces expressions, déterminer la précession des équinoxes et l'obliquité de l'écliptique dans l'intervalle de mille ou douze cents ans avant et après l'époque de 1750, en observant de faire t négatif pour les temps antérieurs à cette époque; on pourra même les étendre aux observations d'Hipparque, vu leur imperfection.

La valeur précédente de ψ donne, pour l'accroissement de l'année tropique à partir de 1750,

$$-0,00083569.[1 - \cos(t.43'',564)] - 0,00042327.\sin(t.100'',757);$$

d'où il suit qu'au temps d'Hipparque, ou 128 ans avant l'ère chrétienne, l'année tropique était de 12'',326 plus longue qu'en 1750: l'obliquité de l'écliptique était plus grande alors de 2832'',27.

Une époque astronomique remarquable est celle où le grand axe de l'orbite terrestre coïncidait avec la ligne des équinoxes; car alors l'équinoxe vrai et l'équinoxe moyen étaient réunis. Je trouve par les formules précédentes que ce phénomène a eu lieu vers l'an 4004 avant l'ère chrétienne, époque où la plupart de nos chronologistes placent la création du monde, et qui, sous ce point de vue, peut être considérée comme une époque astronomique. En effet, on a pour ce temps $t = -5754$, et l'expression précédente de ψ donne

$$\psi = -87'',8530;$$

c'est la longitude de l'équinoxe fixe de 1750 par rapport à l'équinoxe

d'alors. L'expression précédente de π'' donne, pour la longitude du périhélie de l'orbite terrestre ou de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe fixe de 1750,

$$\pi'' = 89'',1700.$$

Cette longitude, par rapport à l'équinoxe de l'année 4004 avant l'ère chrétienne, était donc 1'',3170, d'où il suit que l'instant où la longitude de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe mobile, était nulle, précède d'environ 69 ans l'époque où l'on fixe la création du monde. Cette différence paraîtra bien petite, si l'on considère l'inexactitude des expressions précédentes de ψ et de π'' , lorsqu'on les rapporte à un temps aussi éloigné, et l'incertitude qui subsiste encore, soit relativement au mouvement des équinoxes, soit à l'égard des valeurs que nous supposons aux masses des planètes.

Une autre époque astronomique remarquable est celle où le grand axe de l'orbite terrestre était perpendiculaire à la ligne des équinoxes; car alors le solstice vrai et le solstice moyen étaient réunis. Cette seconde époque est beaucoup plus rapprochée de nous, et remonte à peu près à l'année 1250. Si l'on suppose, en effet, $t = -500$, les formules précédentes donnent 100'',0189 pour la longitude de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe mobile; ainsi, l'instant où cette longitude était de 100'' répond à fort peu près au commencement de 1249. L'incertitude des éléments du calcul en laisse une, au moins d'une année, sur ce résultat.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DE MARS.

32. On a par le n° 29, dans le cas du maximum de $\delta V''$,

$$\delta x = (1 - \alpha^2) \delta V'',$$

x étant égal à $\frac{r''}{r''}$. Si l'on ne fait varier que r'' dans x , on aura

$$\delta r'' = -\frac{r''^2}{r''} (1 - \alpha^2) \delta V''.$$

En prenant pour r'' et r'' les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil, et supposant $\delta V'' = \pm 1''$, on aura

$$\delta r'' = \mp 0,000002076;$$

on peut donc négliger les inégalités du rayon vecteur r'' dont les coefficients sont au-dessous de $\pm 0,000002$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de Mars en longitude au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de Mars indépendantes des excentricités.

$$\delta v'' = (1 + \mu') \begin{pmatrix} 0'', 644302. \sin (n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ - 0'', 076897. \sin 2 (n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ - 0'', 015431. \sin 3 (n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ - 0'', 004222. \sin 4 (n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + \mu'') \begin{pmatrix} 21'', 570470. \sin (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 2'', 989780. \sin 2 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'', 564852. \sin 3 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'', 179760. \sin 4 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'', 071294. \sin 5 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'', 031909. \sin 6 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'', 015408. \sin 7 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + \mu''') \begin{pmatrix} 75'', 434700. \sin (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 41'', 969330. \sin 2 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 3'', 642865. \sin 3 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 0'', 533236. \sin 4 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 0'', 102363. \sin 5 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 0'', 041427. \sin 6 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + \mu'') \begin{pmatrix} 4'', 147390. \sin (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 1'', 369345. \sin 2 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'', 071260. \sin 3 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'', 005799. \sin 4 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \end{pmatrix}$$

$$\delta r'' = (1 + \mu') \begin{pmatrix} 0,0000016104 \\ + 0,0000021947. \cos (n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ + 0,0000001972. \cos 2 (n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \\ + 0,0000000418. \cos 3 (n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'') \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + \mu'') \begin{pmatrix} 0,0000023860 \\ - 0,0000187564. \cos (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ + 0,0000052387. \cos 2 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ + 0,0000011969. \cos 3 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ + 0,0000004169. \cos 4 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ + 0,0000001733. \cos 5 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ + 0,0000000796. \cos 6 (n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + \mu''') \begin{pmatrix} - 0,0000066174 \\ + 0,0000784371. \cos (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 0,0000679436. \cos 2 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 0,0000069390. \cos 3 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 0,0000010930. \cos 4 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 0,0000002004. \cos 5 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \\ - 0,0000000520. \cos 6 (n'''t - n''t + \epsilon''' - \epsilon'') \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + \mu^*) \left\{ \begin{aligned} & -0,0000003173 \\ & +0,0000047062 \cdot \cos(n^*t - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & -0,000003273 \cdot \cos 2(n^*t - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & -0,0000001399 \cdot \cos 3(n^*t - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & -0,0000000125 \cdot \cos 4(n^*t - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \end{aligned} \right\}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v'' = (1 + \mu^*) \left\{ \begin{aligned} & 3'', 341189 \cdot \sin(2n^*t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi'') \\ & -0'', 779586 \cdot \sin(2n^*t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi'') \end{aligned} \right\}$$

$$+ (1 + \mu^*) \left\{ \begin{aligned} & -2'', 156325 \cdot \sin(n^*t + \varepsilon'' - \varpi'') \\ & -0'', 415215 \cdot \sin(2n^*t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ & -3'', 218207 \cdot \sin(2n^*t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ & +15'', 811900 \cdot \sin(2n^*t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ & -20'', 111960 \cdot \sin(3n^*t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ & +2'', 611122 \cdot \sin(3n^*t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ & +2'', 091815 \cdot \sin(4n^*t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \\ & -0'', 244306 \cdot \sin(4n^*t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \\ & +0'', 370141 \cdot \sin(5n^*t - 4n''t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon'' - \varpi'') \end{aligned} \right\}$$

$$+ (1 + \mu^{**}) \left\{ \begin{aligned} & -16'', 945362 \cdot \sin(n^{**}t + \varepsilon^{**} - \varpi^{**}) \\ & -16'', 564830 \cdot \sin(n^{**}t + \varepsilon^{**} - \varpi^{**}) \\ & -72'', 692383 \cdot \sin(2n^{**}t - n''t + 2\varepsilon^{**} - \varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & +8'', 003396 \cdot \sin(2n^{**}t - n''t + 2\varepsilon^{**} - \varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & +7'', 088590 \cdot \sin(3n^{**}t - 2n''t + 3\varepsilon^{**} - 2\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & -11'', 015046 \cdot \sin(3n^{**}t - 2n''t + 3\varepsilon^{**} - 2\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & +0'', 679471 \cdot \sin(4n^{**}t - 3n''t + 4\varepsilon^{**} - 3\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & -1'', 088395 \cdot \sin(4n^{**}t - 3n''t + 4\varepsilon^{**} - 3\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & -8'', 853862 \cdot \sin(5n^{**}t - 4n''t + 5\varepsilon^{**} - 4\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & -0'', 631233 \cdot \sin(5n^{**}t - 4n''t + 5\varepsilon^{**} - 4\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & +5'', 719628 \cdot \sin(6n^{**}t - 5n''t + 6\varepsilon^{**} - 5\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & +0'', 611530 \cdot \sin(6n^{**}t - 5n''t + 6\varepsilon^{**} - 5\varepsilon'' - \varpi^{**}) \end{aligned} \right\}$$

$$+ (1 + \mu^*) \left\{ \begin{aligned} & -0'', 443697 \cdot \sin(n^*t + \varepsilon' - \varpi') \\ & -2'', 151005 \cdot \sin(n^*t + \varepsilon' - \varpi') \\ & -5'', 549601 \cdot \sin(2n^*t - n''t + 2\varepsilon' - \varepsilon'' - \varpi') \\ & +0'', 407952 \cdot \sin(2n^*t - n''t + 2\varepsilon' - \varepsilon'' - \varpi') \\ & -0'', 309401 \cdot \sin(3n^*t - 2n''t + 3\varepsilon' - 2\varepsilon'' - \varpi') \\ & -0'', 483901 \cdot \sin(3n^*t - 2n''t + 3\varepsilon' - 2\varepsilon'' - \varpi') \end{aligned} \right\}$$

$$\delta r'' = (1 + \mu^*) \left\{ \begin{aligned} & 0,0000044700 \cdot \cos(2n^*t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi'') \\ & -0,0000009713 \cdot \cos(2n^*t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi'') \end{aligned} \right\}$$

$$+ (1 + \mu^*) \left\{ \begin{aligned} & -0,0000022865 \cdot \cos(n^*t + \varepsilon'' - \varpi'') \\ & +0,0000086337 \cdot \cos(2n^*t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ & -0,0000031269 \cdot \cos(2n^*t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ & -0,000000331 \cdot \cos(3n^*t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ & +0,0000025454 \cdot \cos(3n^*t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ & +0,0000030863 \cdot \cos(4n^*t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \\ & +0,0000040239 \cdot \cos(4n^*t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \end{aligned} \right\}$$

$$+ (1 + \mu^{**}) \left\{ \begin{aligned} & 0,0000035825 \cdot \cos(n^*t + \varepsilon'' - \varpi'') \\ & -0,0000107986 \cdot \cos(n^{**}t + \varepsilon^{**} - \varpi^{**}) \\ & +0,0000031431 \cdot \cos(n^{**}t + \varepsilon^{**} - \varpi^{**}) \\ & -0,0000099470 \cdot \cos(2n^{**}t - n''t + 2\varepsilon^{**} - \varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & +0,0000069892 \cdot \cos(2n^{**}t - n''t + 2\varepsilon^{**} - \varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & +0,0000114352 \cdot \cos(3n^{**}t - 2n''t + 3\varepsilon^{**} - 2\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & -0,0000169741 \cdot \cos(3n^{**}t - 2n''t + 3\varepsilon^{**} - 2\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & -0,0000020307 \cdot \cos(4n^{**}t - 3n''t + 4\varepsilon^{**} - 3\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & +0,0000087307 \cdot \cos(4n^{**}t - 3n''t + 4\varepsilon^{**} - 3\varepsilon'' - \varpi^{**}) \\ & -0,0000063983 \cdot \cos(5n^{**}t - 4n''t + 5\varepsilon^{**} - 4\varepsilon'' - \varpi^{**}) \end{aligned} \right\}$$

$$- (1 + \mu^*) \cdot 0,0000061906 \cdot \cos(2n^*t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'')$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v'' = - (1 + \mu^*) \cdot 21'', 295121 \cdot \sin(3n^*t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' + 72'', 7683) \\ - (1 + \mu^*) \left\{ \begin{aligned} & 4'', 365840 \cdot \sin(3n^*t - n''t + 3\varepsilon'' - \varepsilon'' + 81'', 3318) \\ & +13'', 490441 \cdot \sin(4n^*t - 2n''t + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon'' + 75'', 3518) \\ & +8'', 228086 \cdot \sin(5n^*t - 3n''t + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon'' + 75'', 9814) \end{aligned} \right\} \\ + (1 + \mu^{**}) \left\{ \begin{aligned} & -1'', 428330 \cdot \sin(n^{**}t + n''t + \varepsilon^{**} + \varepsilon'' - 59'', 0333) \\ & -4'', 457166 \cdot \sin(2n^{**}t + 2\varepsilon^{**} + 66'', 7969) \\ & +3'', 998174 \cdot \sin(n^{**}t - n''t + \varepsilon^{**} - \varepsilon'' + 60'', 7691) \end{aligned} \right\}$$

La dernière de ces inégalités peut être réunie à l'inégalité indépendante des excentricités

$$(1 + \mu^{**}) \cdot 75'', 434700 \cdot \sin(n^{**}t - n''t + \varepsilon^{**} - \varepsilon'');$$

leur somme donne l'inégalité

$$\begin{aligned} & (1+\mu^{iv}).77^{\circ},813921.\sin(n^{iv}t-n^{iv}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{iv}+2^{\circ},6702). \\ \delta r^{iv} = & -(1+\mu^i).0,0000023461.\cos(3n^{iv}t-n^{iv}t+3\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{iv}+71^{\circ},9904) \\ & 0,0000050403.\cos(3n^{iv}t-n^{iv}t+3\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{iv}+80^{\circ},8704) \\ + (1+\mu^{iv}) & \left\{ \begin{aligned} & +0,0000070248.\cos(4n^{iv}t-2n^{iv}t+4\varepsilon^{iv}-2\varepsilon^{iv}-65^{\circ},4042) \\ & -0,0000075032.\cos(5n^{iv}t-3n^{iv}t+5\varepsilon^{iv}-3\varepsilon^{iv}+76^{\circ},0641) \end{aligned} \right\} \\ & 0,0000080002.\cos(2n^{iv}t+2\varepsilon^{iv}+66^{\circ},9975) \\ + (1+\mu^{iv}) & \left\{ \begin{aligned} & +0,0000041488.\cos(n^{iv}t-n^{iv}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{iv}+65^{\circ},7214) \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

La dernière de ces inégalités peut être réunie à l'inégalité indépendante des excentricités

$$(1+\mu^{iv}).0,0000784371.\cos(n^{iv}t-n^{iv}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{iv});$$

leur somme donne l'inégalité

$$(1+\mu^{iv}).0,000086432.\cos(n^{iv}t-n^{iv}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{iv}+2^{\circ},8133).$$

Les inégalités du mouvement de Mars en latitude sont très-peu sensibles. En désignant par Π^{iv} la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Mars, on trouve

$$\delta s^{iv} = (1+\mu^{iv}) \left\{ \begin{aligned} & 0^{\circ},291339.\sin(n^{iv}t+\varepsilon^{iv}-\Pi^{iv}) \\ & +1^{\circ},244657.\sin(2n^{iv}t-n^{iv}t+2\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{iv}-\Pi^{iv}) \end{aligned} \right\}.$$

CHAPITRE XII.

THÉORIE DE JUPITER.

33. L'attraction réciproque des planètes entre elles et sur le Soleil est principalement sensible dans la théorie de Jupiter et de Saturne, et nous allons en voir naître les plus grandes inégalités du système planétaire. L'équation

$$\delta r^{iv} = -\frac{r^{iv2}}{r^{iv}}(1-\alpha^2)\delta V^{iv},$$

trouvée dans le numéro précédent relativement à Mars, devient, pour Jupiter,

$$\delta r^{iv} = -\frac{r^{iv2}}{r^{iv}}(1-\alpha^2)\delta V^{iv}.$$

Si l'on prend pour r^{iv} et r^{iv} les moyennes distances de la Terre et de Jupiter au Soleil, et si l'on suppose $\delta V^{iv} = \pm 1''$, on aura

$$\delta r^{iv} = \mp 0,000040225;$$

on peut ainsi négliger les inégalités de δr^{iv} au-dessous de $\mp 0,000041$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de Jupiter en longitude et en latitude au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de Jupiter indépendantes des excentricités.

$$\delta v^{iv} = (1+\mu^{iv}) \left\{ \begin{aligned} & 0^{\circ},372941.\sin(n^{iv}t-n^{iv}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{iv}) \\ & -0^{\circ},000266.\sin(2n^{iv}t-n^{iv}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{iv}) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& -255'', 591700. \sin (n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -630'', 883870. \sin 2(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -52'', 690013. \sin 3(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -12'', 118299. \sin 4(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -3'', 736337. \sin 5(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -1'', 322283. \sin 6(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0'', 527541. \sin 7(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0'', 234833. \sin 8(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0'', 127385. \sin 9(n''t - n'''t + e'' - e''')
\end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu'') \left. \begin{aligned}
& -3'', 246102. \sin (n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -1'', 318815. \sin 2(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0'', 136065. \sin 3(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0'', 018447. \sin 4(n''t - n'''t + e'' - e''')
\end{aligned} \right\} \\
& \delta e'' = (1 + \mu'') \left. \begin{aligned}
& -0.0000620586 \\
& +0.0000768760. \cos (n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0.0028966200. \cos 2(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0.0003021367. \cos 3(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0.0000782514. \cos 4(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0.0000258952. \cos 5(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0.0000094779. \cos 6(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0.0000037360. \cos 7(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0.0000014781. \cos 8(n''t - n'''t + e'' - e''') \\
& -0.0000004799. \cos 9(n''t - n'''t + e'' - e''')
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

Plusieurs de ces inégalités étant considérables, il importe d'avoir les variations de leurs coefficients : nous allons donner celles des coefficients qui surpassent cent secondes dans l'expression de $\delta e''$. Les coefficients des inégalités dépendantes de e'' ont e'' pour multiplicateur; en nommant donc Ae'' l'un de ces coefficients, sa variation sera $Ae'' \frac{\delta e''}{e''}$, et l'on verra dans la suite qu'en ayant égard aux quantités dépendantes du carré de la force perturbatrice, et dont nous avons donné les expressions analytiques dans le n° 13, on a

$$\delta e'' = t.1'', 016936.$$

Pareillement, les coefficients des inégalités dépendantes de e'' ont e'' pour multiplicateur; en nommant donc Be'' l'un de ces coefficients, sa variation sera $Be'' \frac{\delta e''}{e''}$, et l'on verra dans la suite que

$$\delta e'' = -t.1'', 984469.$$

Cela posé, on trouve

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& 26'', 569412. \sin (n''t + e'' - e''') \\
& -29'', 914770. \sin (n''t + e'' - e''') \\
& - (42'', 078201 + t.0'', 0141929). \sin (2n''t - n'''t + 2e'' - e''') \\
& + (174'', 796601 - t.0'', 0096906). \sin (2n''t - n'''t + 2e'' - e''') \\
& - (137'', 224760 + t.0'', 0045603). \sin (3n''t - 2n'''t + 3e'' - 2e''') \\
& + (262'', 168424 - t.0'', 0145351). \sin (3n''t - 2n'''t + 3e'' - 2e''') \\
& + 24'', 460840. \sin (4n''t - 3n'''t + 4e'' - 3e''') \\
& - 48'', 239570. \sin (4n''t - 3n'''t + 4e'' - 3e''') \\
& + 3'', 233695. \sin (5n''t - 4n'''t + 5e'' - 4e''') \\
& - 8'', 585382. \sin (5n''t - 4n'''t + 5e'' - 4e''') \\
& + 1'', 256948. \sin (6n''t - 5n'''t + 6e'' - 5e''') \\
& - 2'', 818833. \sin (6n''t - 5n'''t + 6e'' - 5e''') \\
& + 0'', 460731. \sin (7n''t - 6n'''t + 7e'' - 6e''') \\
& - 1'', 004913. \sin (7n''t - 6n'''t + 7e'' - 6e''') \\
& - 16'', 074450. \sin (2n''t - n'''t + 2e'' - e''') \\
& - 1'', 758450. \sin (2n''t - n'''t + 2e'' - e''') \\
& + 39'', 742746. \sin (3n''t - 2n'''t + 3e'' - 2e''') \\
& - 1'', 087630. \sin (3n''t - 2n'''t + 3e'' - 2e''') \\
& + 3'', 973709. \sin (4n''t - 3n'''t + 4e'' - 3e''') \\
& - 0'', 533617. \sin (4n''t - 3n'''t + 4e'' - 3e''') \\
& - 1'', 100702. \sin (5n''t - 4n'''t + 5e'' - 4e''') \\
& - 0'', 256755. \sin (5n''t - 4n'''t + 5e'' - 4e''')
\end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu'') \left. \begin{aligned}
& 0'', 381191. \sin (n''t + e'' - e''') \\
& - 0'', 726050. \sin (n''t + e'' - e''') \\
& - 1'', 645307. \sin (2n''t - n'''t + 2e'' - e''') \\
& + 0'', 316891. \sin (2n''t - n'''t + 2e'' - e''') \\
& - 0'', 394947. \sin (3n''t - 2n'''t + 3e'' - 2e''')
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\delta r'' = (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0,000026111 \cdot \cos(n''t + \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0,0000795246 \cdot \cos(n''t + \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,0000492096 \cdot \cos(n''t + \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0,0000921130 \cdot \cos(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,0001688085 \cdot \cos(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0,0004584483 \cdot \cos(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,0009647822 \cdot \cos(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,0001259429 \cdot \cos(4n''t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0,0002424413 \cdot \cos(4n''t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,0000268383 \cdot \cos(5n''t - 4n''t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0,0000516048 \cdot \cos(5n''t - 4n''t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,000079151 \cdot \cos(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0,0001346530 \cdot \cos(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \end{array} \right\}$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons (*).

$$\delta v'' = (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 3'',097780 \cdot \sin(n''t + n''t + \varepsilon'' + \varepsilon'' + 50'',5438) \\ - 17'',218232 \cdot \sin(2n''t + 2\varepsilon'' + 17'',7111) \\ + 36'',185942 \cdot \sin(3n''t - n''t + 3\varepsilon'' - \varepsilon'' + 88'',5148) \\ - 55'',787912 \cdot \sin(4n''t - 2n''t + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - 63'',5635) \\ + (522'',425601 - t \cdot 0'',013202) \sin(3n''t - 5n''t + 3\varepsilon'' - 5\varepsilon'' \\ + 61'',8669 + t \cdot 155'',89) \\ + 5'',083765 \cdot \sin(6n''t - 4n''t + 6\varepsilon'' - 4\varepsilon'' - 60'',4778) \\ + 7'',643221 \cdot \sin(n''t - n''t + \varepsilon'' - \varepsilon'' + 48'',0929) \\ - 19'',407399 \cdot \sin(2n''t - 2n''t + 2\varepsilon'' - 2\varepsilon'' + 47'',4210) \end{array} \right\}$$

Ces deux dernières inégalités, réunies aux deux suivantes,

$$(1 + \mu'') [255'',591700 \cdot \sin(n''t - n''t + \varepsilon'' - \varepsilon'') - 630'',883870 \cdot \sin(2n''t - n''t + \varepsilon'' - \vare'')],$$

que nous avons trouvées précédemment, et qui sont indépendantes des excentricités, donnent celles-ci

$$(1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} - 261'',200420 \cdot \sin(n''t - n''t + \varepsilon'' - \varepsilon'' - 1'',2756) \\ + 645'',364888 \cdot \sin(2n''t - 2n''t + 2\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - 1'',2957) \end{array} \right\}.$$

(*) La valeur de $\delta v''$ a été reproduite conformément à l'édition originale. Dans la deuxième édition, dont le tome III porte le millésime de 1839 et a été imprimé par conséquent après la mort de l'Auteur, l'angle $+ 50'',5438$, qui figure à la première ligne de $\delta v''$, est remplacé par $+ 74'',5000$; au lieu du coefficient $- 55'',787912$ de la quatrième ligne, on lit $- 54'',787912$; enfin, dans cette même ligne, l'angle $- 63'',5635$ est changé en $- 64'',2284$.

On a ensuite

$$\delta r'' = (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0,0000822415 \cdot \cos(2n''t + 2\varepsilon'' + 12'',2392) \\ + 0,0000226252 \cdot \cos(3n''t - n''t + 3\varepsilon'' - \varepsilon'' - 24'',2093) \\ - 0,0001010533 \cdot \cos(4n''t - 2n''t + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - 56'',7419) \\ - (0,0021114502 - t \cdot 0,0000005323) \cdot \cos(3n''t - 5n''t + 3\varepsilon'' - 5\varepsilon'' \\ + 61'',7749 + t \cdot 155'',60) \\ - 0,0000552204 \cdot \cos(2n''t - 2n''t + 2\varepsilon'' - 2\varepsilon'' + 60'',1641) \end{array} \right\}$$

En réunissant la dernière de ces inégalités à la suivante,

$$- (1 + \mu'') \cdot 0,0028966200 \cdot \cos(2n''t - n''t + \varepsilon'' - \vare''),$$

que nous avons trouvée précédemment, et qui est indépendante des excentricités, on a celle-ci,

$$- (1 + \mu'') \cdot 0,0029251892 \cdot \cos(2n''t - 2n''t + 2\varepsilon'' - 2\vare'' - 1'',1506).$$

Les inégalités précédentes de $\delta v''$ ont été calculées par les formules (A), (C), (E) et (F) des nos 1 et 2, à l'exception de l'inégalité dépendante de l'angle $3n''t - 5n''t$; $5n''t - 2n''t$ étant un coefficient très-petit en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, l'angle $3n''t - 5n''t$ diffère très-peu de $n''t$; on a donc fait usage, pour calculer cette inégalité, des formules (B) et (C) du n° 1 et de la méthode du n° 18.

Inégalités dépendantes du cube et des produits de trois et de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, ainsi que du carré de la force perturbatrice.

La grande inégalité de Jupiter a été calculée par les formules des nos 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16 et 17. On a trouvé, par le n° 8,

$$\begin{aligned} a''M^{(0)} &= -5,2439100 \cdot m'', \\ a''M^{(1)} &= 9,6074688 \cdot m'', \\ a''M^{(2)} &= -5,8070750 \cdot m'', \\ a''M^{(3)} &= 1,1620283 \cdot m'', \\ a''M^{(4)} &= -0,6385781 \cdot m'', \\ a''M^{(5)} &= 0,3320740 \cdot m'', \end{aligned}$$

De là on a conclu, pour 1750,

$$a'P = 0,0001093026,$$

$$a'P' = -0,0010230972.$$

On a déterminé ces valeurs pour 2250 et pour 2750. Pour cela, il a été nécessaire de déterminer les valeurs de e'' , e' , ϖ'' , ϖ' , γ et Π en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, en portant la précision jusqu'au carré du temps. On a d'abord calculé, par les formules du n° 13, les variations séculaires de $\delta e''$, $\delta e'$, $\delta \varpi''$ et $\delta \varpi'$ dépendantes du carré de la force perturbatrice, et l'on a trouvé pour ces variations

$$\delta e'' = t. 0'', 161352,$$

$$\delta \varpi'' = t. 1'', 089325,$$

$$\delta e' = -t. 0'', 317171,$$

$$\delta \varpi' = t. 10'', 008401.$$

Les coefficients de t , dans ces expressions, sont les parties de $\frac{de''}{dt}$, $\frac{d\varpi''}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$ dépendantes du carré de la force perturbatrice; il faut les ajouter aux valeurs des mêmes quantités déterminées dans le n° 25, ce qui donne, pour ces valeurs entières en 1750,

$$\frac{de''}{dt} = 1'', 016936,$$

$$\frac{d\varpi''}{dt} = 21'', 459284,$$

$$\frac{de'}{dt} = -1'', 984469,$$

$$\frac{d\varpi'}{dt} = 59'', 739037.$$

On a déterminé, par le même procédé, ces valeurs pour 1950, et l'on

a trouvé, pour cette époque,

$$\frac{de''}{dt} = 1'', 006705,$$

$$\frac{d\varpi''}{dt} = 21'', 769069,$$

$$\frac{de'}{dt} = -2'', 001540,$$

$$\frac{d\varpi'}{dt} = 59'', 952898.$$

De là on a conclu, par le n° 8, les expressions suivantes de e'' , ϖ'' , e' , ϖ' , pour un temps quelconque t ,

$$e'' = e'' + t. 1'', 016936 - t^2. 0'', 000255775,$$

$$\varpi'' = \varpi'' + t. 21'', 459284 + t^2. 0'', 0007744625,$$

$$e' = e' - t. 1'', 984469 - t^2. 0'', 000426775,$$

$$\varpi' = \varpi' + t. 59'', 739037 + t^2. 0'', 0005346525,$$

les valeurs de e'' , ϖ'' , e' , ϖ' dans les seconds membres de ces équations étant celles de 1750.

On a déterminé les valeurs de γ et de Π au moyen des équations

$$\varphi' \sin \delta' - \varphi'' \sin \delta'' = \gamma \sin \Pi,$$

$$\varphi' \cos \delta' - \varphi'' \cos \delta'' = \gamma \cos \Pi.$$

Ensuite on a déterminé les valeurs de $\frac{d\gamma}{dt}$ et de $\frac{d\Pi}{dt}$ au moyen des différentielles de ces équations, en y substituant, pour $\frac{d\varphi''}{dt}$, $\frac{d\varphi'}{dt}$, $\frac{d\delta''}{dt}$, leurs valeurs données dans le n° 25. On a trouvé de cette manière, pour 1750,

$$\gamma = 1'', 3982, \quad \Pi = 139'', 7142,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -0'', 000326, \quad \frac{d\Pi}{dt} = -80'', 537447,$$

Les formules du n° 14 donnent, pour les variations séculaires de γ et de Π dépendantes du carré de la force perturbatrice,

$$\delta\gamma = t. 0'', 000568, \quad \delta\Pi = -t. 0'', 023552.$$

En ajoutant les coefficients de t dans ces équations aux valeurs précédentes de $\frac{d\gamma}{dt}$ et de $\frac{d\Pi}{dt}$, on aura, pour les valeurs complètes de ces quantités en 1750,

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0'',000242, \quad \frac{d\Pi}{dt} = -80'',560999.$$

On a trouvé par le même procédé, pour 1950,

$$\frac{d\gamma}{dt} = -0'',004589, \quad \frac{d\Pi}{dt} = -81'',487827.$$

De là on a conclu, par le n° 8, pour un temps quelconque t ,

$$\gamma = \gamma + t. 0'',000242 - t^2. 0'',000120775,$$

$$\Pi = \Pi - t. 80'',560999 - t^2. 0'',0023170701,$$

les valeurs de γ et de Π , dans les seconds membres de ces équations, étant celles de 1750. Cela posé, on a trouvé, pour 2250,

$$a^v P = -0,000080189,$$

$$a^v P' = -0,001006510,$$

et pour 2750,

$$a^v P = -0,000260997,$$

$$a^v P' = -0,000954603,$$

d'où l'on a conclu, par le n° 8,

$$a^v \frac{dP}{dt} = -0,000000387666,$$

$$a^v \frac{dP'}{dt} = -0,000000002145,$$

$$a^v \frac{d^2 P}{dt^2} = 0,00000000034734,$$

$$a^v \frac{d^2 P'}{dt^2} = 0,000000000141280.$$

La partie de $\delta v^{(v)}$ donnée dans le n° 18,

$$\frac{6 m^v n^{(v)3}}{(5 n^v - 2 n^{(v)})^3} \left\{ \begin{aligned} & \left[a^{(v)2} P' + \frac{2 a^{(v)} dP}{(5 n^v - 2 n^{(v)}) dt} - \frac{3 a^{(v)2} d^2 P'}{(5 n^v - 2 n^{(v)})^2 dt^2} \right] \sin(5 n^v t - 2 n^{(v)} t + 5 \varepsilon^v - 2 \varepsilon^{(v)}) \\ & + t \left(a^{(v)} \frac{dP'}{dt} + \frac{2 a^{(v)} d^2 P}{(5 n^v - 2 n^{(v)}) dt^2} \right) + \frac{1}{2} t^2 a^{(v)} \frac{d^3 P'}{dt^3} \end{aligned} \right\} \sin(5 n^v t - 2 n^{(v)} t + 5 \varepsilon^v - 2 \varepsilon^{(v)}) \\ - \left[a^{(v)2} P - \frac{2 a^{(v)} dP'}{(5 n^v - 2 n^{(v)}) dt} - \frac{3 a^{(v)2} d^2 P}{(5 n^v - 2 n^{(v)})^2 dt^2} \right] \cos(5 n^v t - 2 n^{(v)} t + 5 \varepsilon^v - 2 \varepsilon^{(v)}) \\ + t \left(a^{(v)} \frac{dP}{dt} - \frac{2 a^{(v)} d^2 P'}{(5 n^v - 2 n^{(v)}) dt^2} \right) + \frac{1}{2} t^2 a^{(v)} \frac{d^3 P}{dt^3} \right] \cos(5 n^v t - 2 n^{(v)} t + 5 \varepsilon^v - 2 \varepsilon^{(v)}).$$

devient ainsi, en la réduisant en nombres,

$$(3900'',616270 - t. 0'',025982 - t^2. 0'',000059403) \sin(5 n^v t - 2 n^{(v)} t + 5 \varepsilon^v - 2 \varepsilon^{(v)}) \\ + (368'',910343 - t. 1'',461994 + t^2. 0'',00024276) \cos(5 n^v t - 2 n^{(v)} t + 5 \varepsilon^v - 2 \varepsilon^{(v)}).$$

La grande inégalité de Jupiter se compose de plusieurs autres parties : elle renferme encore, par le n° 8, la fonction

$$- \frac{2 m^v n^{(v)}}{5 n^v - 2 n^{(v)}} \left[\begin{aligned} & a^{(v)2} \frac{\partial P}{\partial a^{(v)}} \cos(5 n^v t - 2 n^{(v)} t + 5 \varepsilon^v - 2 \varepsilon^{(v)}) \\ & - a^{(v)2} \frac{\partial P'}{\partial a^{(v)}} \sin(5 n^v t - 2 n^{(v)} t + 5 \varepsilon^v - 2 \varepsilon^{(v)}) \end{aligned} \right].$$

Pour la réduire en nombres, il faut calculer les valeurs de $a^{(v)2} \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a^{(v)2}}$, $a^{(v)2} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial a^{(v)2}}$, ... On a trouvé

$$a^{(v)2} \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a^{(v)2}} = -26,46390. m^v,$$

$$a^{(v)2} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial a^{(v)2}} = 65,75870. m^v,$$

$$a^{(v)2} \frac{\partial M^{(2)}}{\partial a^{(v)2}} = -50,22714. m^v,$$

$$a^{(v)2} \frac{\partial M^{(3)}}{\partial a^{(v)2}} = 12,14696. m^v,$$

$$a^{(v)2} \frac{\partial M^{(4)}}{\partial a^{(v)2}} = -6,75963. m^v,$$

$$a^{(v)2} \frac{\partial M^{(5)}}{\partial a^{(v)2}} = 4,13173. m^v.$$

On a conclu de ces valeurs celles de $a'' \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a''}$, $a'' \frac{\partial M^{(1)}}{\partial a''}$, ..., qui sont nécessaires dans la théorie de Saturne, au moyen de l'équation générale

$$a'' \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a''} + a'' \frac{\partial M^{(1)}}{\partial a''} = -M^{(0)}.$$

On a trouvé ensuite, pour 1750,

$$\begin{aligned} & -\frac{2m''n''}{5n''-2n''} \left[\begin{aligned} & a'' \frac{\partial P}{\partial a''} \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ & - a'' \frac{\partial P}{\partial a''} \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \end{aligned} \right] \\ & = -53'', 175501 \cdot \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ & \quad + 16'', 543260 \cdot \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'''). \end{aligned}$$

et pour 1950, on a trouvé cette fonction égale à

$$\begin{aligned} & -51'', 965436 \cdot \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ & + 19'', 906909 \cdot \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'''). \end{aligned}$$

d'où l'on a conclu la valeur de cette fonction, pour un temps quelconque t , égale à

$$\begin{aligned} & -\{53'', 175501 - t \cdot 0'', 0060503\} \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ & + \{16'', 543260 + t \cdot 0'', 0168182\} \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'''). \end{aligned}$$

La grande inégalité de Jupiter renferme encore, par le n° 8, le terme

$$-\frac{e''''\Pi}{2} \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'''' - \Pi'''' + A);$$

ce terme, en 1750, était égal à

$$\begin{aligned} & 2'', 531758 \cdot \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ & - 5'', 672724 \cdot \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'''). \end{aligned}$$

et en 1950 il sera égal à

$$\begin{aligned} & 2'', 165507 \cdot \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ & - 5'', 681970 \cdot \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'''). \end{aligned}$$

d'où l'on a conclu, pour un temps quelconque t , ce terme égal à

$$\begin{aligned} & (2'', 531758 - t \cdot 0'', 0018310) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ & - (5'', 672724 + t \cdot 0'', 0000460) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'''). \end{aligned}$$

Pour déterminer la partie de la grande inégalité de Jupiter dépendante des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, on a déterminé, par le n° 9, les valeurs de $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, ... pour les deux époques de 1750 et de 1950, et l'on a trouvé (*) :

En 1750.

$$\begin{aligned} a''N^{(0)} &= -0,00000135044, \\ a''N^{(1)} &= -0,00000789719, \\ a''N^{(2)} &= 0,0000198552, \\ a''N^{(3)} &= -0,0000175127, \\ a''N^{(4)} &= 0,0000066540, \\ a''N^{(5)} &= -0,000009277, \\ a''N^{(6)} &= -0,000003618, \\ a''N^{(7)} &= -0,0000003643, \\ a''N^{(8)} &= 0,0000001720, \\ a''N^{(9)} &= -0,0000000730; \end{aligned}$$

En 1950.

$$\begin{aligned} a''N^{(0)} &= -0,00000129983, \\ a''N^{(1)} &= -0,00000754771, \\ a''N^{(2)} &= 0,0000196012, \\ a''N^{(3)} &= -0,0000172415, \\ a''N^{(4)} &= 0,0000066551, \\ a''N^{(5)} &= -0,000009408, \\ a''N^{(6)} &= -0,000003562, \\ a''N^{(7)} &= -0,0000003460, \\ a''N^{(8)} &= 0,000001712, \\ a''N^{(9)} &= -0,0000000732. \end{aligned}$$

De là on a conclu l'inégalité correspondante relative à Saturne, que nous donnerons ci-après, et, en la multipliant par le facteur $-\frac{m''\sqrt{a''}}{m'''\sqrt{a'''}}$,

(*) Ces valeurs de $a''N^{(0)}$, $a''N^{(1)}$, ... sont celles qui figurent dans l'édition originale. Dans la deuxième édition, les valeurs de $a''N^{(7)}$ et de $a''N^{(8)}$ sont différentes; on y lit, pour 1750,

$$a''N^{(7)} = -0,0000002616, \quad a''N^{(8)} = 0,0000006855,$$

et, pour 1950,

$$a''N^{(7)} = -0,0000002275, \quad a''N^{(8)} = 0,00000066675.$$

Voir, au sujet des erreurs dont ces quantités sont affectées, la note de la page 28.

on a obtenu l'inégalité suivante de Jupiter (*).

$$(38'', 692571 - t. 0'', 005418) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'') \\ - (25'', 064701 + t. 0'', 015076) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'').$$

Enfin on a déterminé, par le n° 16, la partie sensible de la grande inégalité de Saturne dépendante du carré de la force perturbatrice, et l'on en a conclu celle de Jupiter, en la multipliant par $-\frac{m''\sqrt{a''}}{m''\sqrt{a''}}$, ce qui donne pour cette dernière inégalité

$$(5'', 066862 - t. 0'', 0144693) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'') \\ - (56'', 981339 + t. 0'', 0046755) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'').$$

Maintenant, si l'on rassemble ces diverses parties de la grande inégalité de Jupiter, on aura, pour sa valeur entière,

$$(1+\mu'') \left\{ (3893'', 731960 - t. 0'', 041650 - t^2. 0'', 000059403) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'') \right. \\ \left. + (297'', 734839 - t. 1'', 464973 + t^2. 0'', 00024248) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'') \right\}.$$

En réduisant ces deux termes en un seul par la méthode du n° 17, on aura

$$(1+\mu'') (3905'', 098090 - t. 0'', 114476 + t^2. 0'', 000113175) \sin \left(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'' + 4'', 8583 \right. \\ \left. - t. 239'', 669 + t^2. 0'', 038830 \right).$$

Cette inégalité peut avoir besoin de correction, soit à raison du coefficient μ'' ou de la masse de Saturne, soit à raison du diviseur $(5n'' - 2n'')$; une suite nombreuse d'observations lèvera ces légères incertitudes. Il faut, comme on l'a vu dans le n° 17, appliquer cette grande inégalité au moyen mouvement de Jupiter.

Le carré de la force perturbatrice produit encore, par le n° 12, l'inégalité

$$-\frac{\Pi^2}{8} \frac{(2m''\sqrt{a''} + 5m''\sqrt{a''})}{m''\sqrt{a''}} \sin(\text{double argument de la grande inégalité}),$$

ce qui donne

$$-40'', 860794. \sin(\text{double argument de la grande inégalité}).$$

(*) Voir à la fin du volume, n° 3 du Supplément, la correction indiquée par l'Auteur. — Voir aussi la note de la page précédente.

Il faut encore appliquer au moyen mouvement de Jupiter cette inégalité à longue période.

L'inégalité

$$\frac{1}{4} \frac{(5m''\sqrt{a''} + 4m''\sqrt{a''})}{m''\sqrt{a''}} \text{BK} \sin(5n''t - 10n''t + 5\varepsilon'' - 10\varepsilon'' - B - A),$$

trouvée dans le n° 13, donne, en la réduisant en nombres,

$$-12'', 422071. \sin(5n''t - 10n''t + 5\varepsilon'' - 10\varepsilon'' + 57'', 0725).$$

On a encore, par le n° 8, l'inégalité

$$\frac{3}{2} e'' K \sin(5n''t - 4n''t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon'' + \varpi'' + B).$$

Cette inégalité, réduite en nombres, donne

$$31'', 125493. \sin(4n''t - 5n''t + 4\varepsilon'' - 5\varepsilon'' + 50'', 4025);$$

en la réunissant aux deux inégalités

$$3'', 387695. \sin(5n''t - 4n''t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon'' - \varpi''), \\ -8'', 585382. \sin(5n''t - 4n''t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon'' - \varpi''),$$

que nous avons trouvées précédemment, on aura l'inégalité

$$(1+\mu''). 35'', 512932. \sin(4n''t - 5n''t + 4\varepsilon'' - 5\varepsilon'' + 64'', 4555).$$

On a vu, dans le n° 5, que l'expression de $d\delta v''$ renferme une inégalité séculaire dépendante de l'équation (*)

$$\frac{d\delta v''}{dt} = \frac{m''n''}{8} (h''^2 + l''^2) \left(2a''^3 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a''} + 7a''^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a''^2} + 2a''^3 \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a''^3} \right) \\ + \frac{m''n''}{4} (h''^2 + l''^2) \left(2a''^3 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a''} + 4a''^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a''^2} + a''^3 \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a''^3} \right) \\ - \frac{m''n''}{8} (h''^2 h'' + l''^2 l'') \left(2a''^3 \Lambda^{(1)} - 2a''^3 \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a''} + 15a''^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a''^2} + 4a''^3 \frac{\partial^3 \Lambda^{(1)}}{\partial a''^3} \right),$$

(*) D'après l'errata placé à la fin du tome V de l'édition du Gouvernement, cette inégalité doit être affectée du signe $-$. La correction est donnée comme ayant été indiquée par l'Auteur.

d'où l'on a conclu

$$\frac{d\delta v''}{dt} = -73'',9016.e^{v''} - 85'',7873.e^{v''} + 132'',4989.e^{v''} \cos(\varpi' - \varpi'').$$

On peut, dans le second membre de cette équation, négliger la partie constante, qui se confond avec le moyen mouvement de Jupiter, et alors on a

$$\begin{aligned} \frac{d\delta v''}{dt} = & -73'',9016.t.2e^{v''} \frac{de^{v''}}{dt} - 85'',7873.t.2e^{v''} \frac{de^{v''}}{dt} \\ & + 132'',4989.t \left[\left(e^{v''} \frac{de^{v''}}{dt} + e^{v''} \frac{d\varpi''}{dt} \right) \cos(\varpi' - \varpi'') - e^{v''} \frac{d\varpi'' - d\varpi'}{dt} \sin(\varpi' - \varpi'') \right]. \end{aligned}$$

En substituant, pour $\frac{de^{v''}}{dt}$, $\frac{d\varpi''}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, leurs valeurs données par ce qui précède, et intégrant, on a

$$\delta v'' = -t^2.0,000020066.$$

Cette inégalité est insensible dans l'intervalle de mille ou douze cents ans, et même par rapport aux observations les plus anciennes qui nous soient parvenues; on peut donc la négliger.

Il nous reste à considérer le rayon vecteur de Jupiter. On a vu, dans le n° 8, que les termes dépendants du cube des excentricités ajoutent à son expression la quantité

$$\begin{aligned} & -a^{v''} e^{v''} \Pi \cos(5n''t - 2n^{v''}t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon^{v''} - \varpi^{v''} + \Lambda) \\ & + a^{v''} e^{v''} \Pi \cos(4n^{v''}t - 5n''t + 4\varepsilon^{v''} - 5\varepsilon'' - \varpi^{v''} - \Lambda) \\ & + \frac{4m^{v''}n^{v''}a^{v''3}}{5n'' - 2n^{v''}} \left\{ \begin{array}{l} P \sin(5n''t - 2n^{v''}t - 5\varepsilon'' - 2\varepsilon^{v''}) \\ + P' \cos(5n''t - 2n^{v''}t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon^{v''}) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

En réduisant cette fonction en nombres, on trouve

$$\delta r^{v''} = (1 + \mu^{v''}) \left\{ \begin{array}{l} -0,00030 \{ 2733.\cos(5n''t - 2n^{v''}t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon^{v''} - 130,4966) \\ + 0,0001001860.\cos(4n^{v''}t - 5n''t + 4\varepsilon^{v''} - 5\varepsilon'' + 500,3108) \} \end{array} \right\}.$$

La dernière de ces inégalités, réunie à celles-ci,

$$(1 + \mu^{v''}) \left\{ \begin{array}{l} 0,0000268383.\cos(5n''t - 4n^{v''}t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon^{v''} - \varpi^{v''}) \\ - 0,0000516048.\cos(5n''t - 4n^{v''}t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon^{v''} - \varpi^{v''}) \end{array} \right\},$$

donne la suivante,

$$\delta r^{v''} = (1 + \mu^{v''}).0,0000983161.\cos(4n^{v''}t - 5n''t + 4\varepsilon^{v''} - 5\varepsilon'' - 150,9874).$$

Le demi-grand axe $a^{v''}$ dont on doit faire usage pour calculer la partie elliptique du rayon vecteur doit, par le n° 20, être augmenté de la quantité $\frac{1}{3}a^{v''}m^{v''}$; en la réunissant à la valeur de $a^{v''}$ du n° 21, on trouve

$$a^{v''} = 5,20279108.$$

Inégalités du mouvement de Jupiter en latitude.

34. Il résulte du n° 14 que les termes dépendants du carré de la force perturbatrice ajoutent à la valeur de $\frac{d\varphi^{v''}}{dt}$ la quantité

$$\frac{-m^{v''}\sqrt{a^{v''}}}{m^{v''}\sqrt{a^{v''}} + m^{v''}\sqrt{a^{v''}}} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \cos(\Pi - \vartheta^{v''}) - \gamma \frac{\partial \Pi}{\partial t} \sin(\Pi - \vartheta^{v''}) \right],$$

et à la valeur de $\frac{d\vartheta^{v''}}{dt}$ la quantité

$$\frac{-m^{v''}\sqrt{a^{v''}}}{(m^{v''}\sqrt{a^{v''}} + m^{v''}\sqrt{a^{v''}})^2} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \sin(\Pi - \vartheta^{v''}) + \gamma \frac{\partial \Pi}{\partial t} \cos(\Pi - \vartheta^{v''}) \right],$$

$\delta\gamma$ et $\delta\Pi$ étant déterminés par le numéro cité. La première de ces fonctions, réduite en nombres, est égale à

$$-0'',000224;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\varphi^{v''}}{dt}$ et $\frac{d\vartheta^{v''}}{dt}$ du n° 15. La seconde fonction, réduite en nombres, est égale à

$$0'',002504;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\vartheta^{iv}}{dt}$ et $\frac{d\vartheta^{iv}}{dt}$ du n° 25; on aura ainsi

$$\frac{d\vartheta^{iv}}{dt} = -0'',241398,$$

$$\frac{d\vartheta^{iv}}{dt} = -0'',689044,$$

$$\frac{d\vartheta^{iv}}{dt} = 19'',929296,$$

$$\frac{d\vartheta^{iv}}{dt} = -45'',254832.$$

On trouve ensuite, par les formules du n° 51 du Livre II,

$$\delta s^{iv} = (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} 1'',742154. \sin(n''t + \epsilon'' - \Pi^{iv}) \\ + 2'',049156. \sin(2n''t - n''t + 2\epsilon'' - \epsilon'' - \Pi^{iv}) \\ + 3'',456117. \sin(3n''t - 2n''t + 3\epsilon'' - 2\epsilon'' - \Pi^{iv}) \\ - 0'',862291. \sin(4n''t - 3n''t + 4\epsilon'' - 3\epsilon'' - \Pi^{iv}) \\ - 0'',830647. \sin(2n''t - n''t + 2\epsilon'' - \epsilon'' - \Pi^{iv}) \end{array} \right\},$$

Π^{iv} , dans cette formule, étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter. Enfin on a, par le n° 41, l'inégalité

$$\delta s^{iv} = 12'',165680. \sin(3n''t - 5n''t + 3\epsilon'' - 5\epsilon'' + 66'',1219).$$

CHAPITRE XIII.

THÉORIE DE SATURNE.

35. L'équation

$$\delta r^{iv} = -\frac{r^{iv2}}{r^{iv}} (1 - \alpha^2) \delta V^{iv},$$

trouvée dans le n° 33 relativement à Jupiter, devient, pour Saturne,

$$\delta r^{iv} = -\frac{r^{iv2}}{r^{iv}} (1 - \alpha^2) \delta V^{iv}.$$

Si l'on prend, pour r^{iv} et r^s , les moyennes distances de la Terre et de Saturne au Soleil, et si l'on suppose $\delta V^{iv} = \pm 1''$, on aura

$$\delta r^{iv} = \mp 0,000141326.$$

On peut ainsi négliger les inégalités de δr^{iv} au-dessous de $\mp 0,000141$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de Saturne en longitude et en latitude, au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de Saturne indépendantes des excentricités.

$$\delta v^{iv} = (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} 9'',742382. \sin(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 97'',202867. \sin 2(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 20'',265220. \sin 3(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 6'',067124. \sin 4(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 2'',151379. \sin 5(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'',835768. \sin 6(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'',358923. \sin 7(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'',173227. \sin 8(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \\ - 0'',105239. \sin 9(n''t - n''t + \epsilon'' - \epsilon'') \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \mu^{11}) \left\{ \begin{aligned} & 28^{\circ}, 544040. \sin (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & - 44^{\circ}, 604670. \sin 2 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & - 4^{\circ}, 404816. \sin 3 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & - 0^{\circ}, 972099. \sin 4 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & - 0^{\circ}, 279908. \sin 5 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & - 0^{\circ}, 146432. \sin 6 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & - 0^{\circ}, 032980. \sin 7 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & - 0^{\circ}, 012166. \sin 8 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \end{aligned} \right\}, \\
& \delta r^{\circ} = (1 + \mu^{11}) \left\{ \begin{aligned} & 0, 0039077763 \\ & + 0, 0081538400. \cos (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & + 0, 0013838330. \cos 2 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & + 0, 0003200673. \cos 3 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & + 0, 0000992632. \cos 4 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & + 0, 0000355919. \cos 5 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & + 0, 0000135999. \cos 6 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & + 0, 0000055135. \cos 7 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & + 0, 0000021631. \cos 8 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \\ & + 0, 0000006436. \cos 9 (n^{11} t - n^{\circ} t + e^{11} - e^{\circ}) \end{aligned} \right\} \\
& + (1 + \mu^{11}) \left\{ \begin{aligned} & - 0, 0000137622 \\ & + 0, 0001491217. \cos (n^{\circ} t - n^{11} t + e^{\circ} - e^{11}) \\ & - 0, 0003949916. \cos 2 (n^{\circ} t - n^{11} t + e^{\circ} - e^{11}) \\ & - 0, 0000480303. \cos 3 (n^{\circ} t - n^{11} t + e^{\circ} - e^{11}) \\ & - 0, 0000118201. \cos 4 (n^{\circ} t - n^{11} t + e^{\circ} - e^{11}) \\ & - 0, 0000036280. \cos 5 (n^{\circ} t - n^{11} t + e^{\circ} - e^{11}) \\ & - 0, 0000012501. \cos 6 (n^{\circ} t - n^{11} t + e^{\circ} - e^{11}) \end{aligned} \right\}.
\end{aligned}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

On a eu égard, comme on l'a fait dans le n° 33 relativement à Jupiter, aux variations séculaires des coefficients des inégalités qui surpassent

cent secondes, et l'on a trouvé

$$\begin{aligned}
& - 35^{\circ}, 523202. \sin (n^{11} t + e^{11} - \omega^{\circ}) \\
& + 3^{\circ}, 882844. \sin (n^{11} t + e^{11} - \omega^{11}) \\
& - 6^{\circ}, 371723. \sin (2 n^{11} t - n^{\circ} t + 2 e^{11} - e^{\circ} - \omega^{\circ}) \\
& + 8^{\circ}, 249634. \sin (2 n^{11} t - n^{\circ} t + 2 e^{11} - e^{\circ} - \omega^{11}) \\
& - 0^{\circ}, 902132. \sin (3 n^{11} t - 2 n^{\circ} t + 3 e^{11} - 2 e^{\circ} - \omega^{\circ}) \\
& - 0^{\circ}, 688862. \sin (3 n^{11} t - 2 n^{\circ} t + 3 e^{11} - 2 e^{\circ} - \omega^{11}) \\
& - 0^{\circ}, 279731. \sin (4 n^{11} t - 3 n^{\circ} t + 4 e^{11} - 3 e^{\circ} - \omega^{\circ}) \\
& - (561^{\circ}, 940390 - t. 0^{\circ}, 0312021) \sin (2 n^{\circ} t - n^{11} t + 2 e^{\circ} - e^{11} - \omega^{\circ}) \\
& + (1287^{\circ}, 215250 + t. 0^{\circ}, 0427691) \sin (2 n^{\circ} t - n^{11} t + 2 e^{\circ} - e^{11} - \omega^{11}) \\
& + (105^{\circ}, 992675 - t. 0^{\circ}, 0058853) \sin (3 n^{\circ} t - 2 n^{11} t + 3 e^{\circ} - 2 e^{11} - \omega^{\circ}) \\
& - 54^{\circ}, 488162. \sin (3 n^{\circ} t - 2 n^{11} t + 3 e^{\circ} - 2 e^{11} - \omega^{11}) \\
& + 14^{\circ}, 799631. \sin (4 n^{\circ} t - 3 n^{11} t + 4 e^{\circ} - 3 e^{11} - \omega^{\circ}) \\
& - 7^{\circ}, 516699. \sin (4 n^{\circ} t - 3 n^{11} t + 4 e^{\circ} - 3 e^{11} - \omega^{11}) \\
& + 4^{\circ}, 301273. \sin (5 n^{\circ} t - 4 n^{11} t + 5 e^{\circ} - 4 e^{11} - \omega^{\circ}) \\
& - 2^{\circ}, 171142. \sin (5 n^{\circ} t - 4 n^{11} t + 5 e^{\circ} - 4 e^{11} - \omega^{11}) \\
& + 1^{\circ}, 657904. \sin (6 n^{\circ} t - 5 n^{11} t + 6 e^{\circ} - 5 e^{11} - \omega^{\circ}) \\
& - 0^{\circ}, 791698. \sin (6 n^{\circ} t - 5 n^{11} t + 6 e^{\circ} - 5 e^{11} - \omega^{11}) \\
& + 0^{\circ}, 667270. \sin (7 n^{\circ} t - 6 n^{11} t + 7 e^{\circ} - 6 e^{11} - \omega^{\circ}) \\
& - 0^{\circ}, 331301. \sin (7 n^{\circ} t - 6 n^{11} t + 7 e^{\circ} - 6 e^{11} - \omega^{11}) \\
& + (1 + \mu^{11}) \left\{ \begin{aligned} & 3^{\circ}, 525920. \sin (n^{11} t + e^{11} - \omega^{\circ}) \\ & - 3^{\circ}, 122367. \sin (n^{11} t + e^{11} - \omega^{11}) \\ & - 30^{\circ}, 968721. \sin (2 n^{11} t - n^{\circ} t + 2 e^{11} - e^{\circ} - \omega^{\circ}) \\ & + 8^{\circ}, 537570. \sin (2 n^{11} t - n^{\circ} t + 2 e^{11} - e^{\circ} - \omega^{11}) \\ & - 52^{\circ}, 272469. \sin (3 n^{11} t - 2 n^{\circ} t + 3 e^{11} - 2 e^{\circ} - \omega^{\circ}) \\ & + 77^{\circ}, 633790. \sin (3 n^{11} t - 2 n^{\circ} t + 3 e^{11} - 2 e^{\circ} - \omega^{11}) \\ & + 1^{\circ}, 726346. \sin (4 n^{11} t - 3 n^{\circ} t + 4 e^{11} - 3 e^{\circ} - \omega^{\circ}) \\ & - 2^{\circ}, 340202. \sin (4 n^{11} t - 3 n^{\circ} t + 4 e^{11} - 3 e^{\circ} - \omega^{11}) \\ & - 0^{\circ}, 579410. \sin (5 n^{11} t - 4 n^{\circ} t + 5 e^{11} - 4 e^{\circ} - \omega^{\circ}) \\ & - 2^{\circ}, 079683. \sin (5 n^{11} t - 4 n^{\circ} t + 5 e^{11} - 4 e^{\circ} - \omega^{11}) \\ & + 4^{\circ}, 696226. \sin (6 n^{11} t - 5 n^{\circ} t + 6 e^{11} - 5 e^{\circ} - \omega^{\circ}) \\ & + 0^{\circ}, 468213. \sin (6 n^{11} t - 5 n^{\circ} t + 6 e^{11} - 5 e^{\circ} - \omega^{11}) \\ & - 0, 000342170. \cos (n^{\circ} t + e^{\circ} - \omega^{\circ}) \\ & - 0, 0020775935. \cos (2 n^{\circ} t - n^{11} t + 2 e^{\circ} - e^{11} - \omega^{\circ}) \\ & + 0, 0053861750. \cos (2 n^{\circ} t - n^{11} t + 2 e^{\circ} - e^{11} - \omega^{11}) \\ & + 0, 0011594872. \cos (3 n^{\circ} t - 2 n^{11} t + 3 e^{\circ} - 2 e^{11} - \omega^{\circ}) \\ & - 0, 0006217670. \cos (3 n^{\circ} t - 2 n^{11} t + 3 e^{\circ} - 2 e^{11} - \omega^{11}) \\ & + 0, 0002117893. \cos (4 n^{\circ} t - 3 n^{11} t + 4 e^{\circ} - 3 e^{11} - \omega^{\circ}) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ (1 + \mu^{11}) \left\{ \begin{aligned} &-0,0003750767 \cdot \cos(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi') \\ &+ 0,0005605490 \cdot \cos(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'') \end{aligned} \right\}.$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\begin{aligned} \delta v'' = (1 + \mu^{11}) \left\{ \begin{aligned} &- (169'', 283424 - t \cdot 0'', 001117) \sin(3n''t - n''t + 3\varepsilon'' - \varepsilon' \\ &\quad + 94'', 0139 - t \cdot 106'', 635) \\ &+ 88'', 045398 \cdot \sin(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon' + 93'', 6429) \\ &- (2066'', 920900 - t \cdot 0'', 047745) \sin(2n''t - 4n't + 2\varepsilon'' - 4\varepsilon' \\ &\quad + 62'', 4250 + t \cdot 152'', 77) \\ &- 9'', 061090 \cdot \sin(5n''t - 3n''t + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' - 63'', 5025) \\ &+ (1 + \mu^{11}) \left\{ \begin{aligned} &5'', 936888 \cdot \sin(3n''t - 3n't + 3\varepsilon'' - 3\varepsilon' - 75'', 4576) \\ &+ 95'', 757344 \cdot \sin(3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' - 95'', 0779) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

En réunissant les inégalités dépendantes de $n''t - n't$ et de $3n''t - 3n't$ avec celles qui sont indépendantes des excentricités, on a pour leurs sommes

$$\begin{aligned} &(1 + \mu^{11}) \cdot 89'', 404702 \cdot \sin(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon' + 86'', 7262) \\ &- (1 + \mu^{11}) \cdot 5'', 914481 \cdot \sin(3n''t - 3n't + 3\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 76'', 0577). \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\delta r'' = (1 + \mu^{11}) \left\{ \begin{aligned} &-0,0011710805 \cdot \cos(3n''t - n''t + 3\varepsilon'' - \varepsilon' - 100'', 2330) \\ &-0,0005631901 \cdot \cos(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon' + 92'', 7139) \\ &+ (0,0151990624 - t \cdot 0,0000003370) \cos(2n''t - 4n't + 2\varepsilon'' - 4\varepsilon' \\ &\quad + 62'', 2324 + t \cdot 151'', 36) \end{aligned} \right\}.$$

L'inégalité du rayon vecteur dépendante de $n''t - n't$, réunie à son analogue indépendante des excentricités, donne

$$(1 + \mu^{11}) \cdot 0,0081090035 \cdot \cos(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon' - 4'', 3997).$$

$5n'' - 2n''$ étant très-petit, l'inégalité dépendante de $2n''t - 4n't$ a été calculée par les formules (B) et (C) du n° 1. $3n'' - n''$ étant fort petit, l'inégalité dépendante de $3n''t - n't$ a été calculée par les for-

mules (A) et (D) du même numéro. Elle doit, pour plus d'exactitude, être appliquée au moyen mouvement de Saturne, à cause de la longueur de sa période

Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois et de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, et du carré de la force perturbatrice ().*

La partie la plus considérable de la grande inégalité de Saturne est celle qui a pour diviseur $(5n'' - 2n'')$, et qui dépend de P et de P'. Elle a été conclue de la grande inégalité de Jupiter, en multipliant cette dernière partie par le facteur $-\frac{15m''n''a''}{6m''n''a''}$, conformément au n° 8, ce qui donne, pour cette partie de l'inégalité de Saturne,

$$\begin{aligned} &- (9129'', 190030 - t \cdot 0'', 0608061 - t^2 \cdot 0'', 00013903) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'') \\ &- (863'', 415400 - t \cdot 3'', 4217230 + t^2 \cdot 0'', 00056750) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''). \end{aligned}$$

La grande inégalité de Saturne se compose de plusieurs autres parties : elle renferme, par le n° 8, la fonction

$$-\frac{3m''n''}{5n'' - 2n''} \left[\begin{aligned} &a'' \frac{\partial P}{\partial a''} \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'') \\ &- a'' \frac{\partial P'}{\partial a''} \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'') \end{aligned} \right].$$

En réduisant cette fonction en nombres, on a trouvé, pour 1750,

$$\begin{aligned} &160'', 922811 \cdot \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'') \\ &- 34'', 800640 \cdot \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''), \end{aligned}$$

et pour 1950,

$$\begin{aligned} &158'', 002590 \cdot \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'') \\ &- 46'', 240842 \cdot \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''). \end{aligned}$$

(*) On croit devoir rappeler que les valeurs attribuées dans le texte aux inégalités dépendantes des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons sont inexactes. Voir les notes des pages 28, 135 et 136, ainsi que le Supplément au tome III. V. P.

d'où l'on tire la valeur de cette fonction, pour un temps quelconque t , égale à

$$(160'', 922811 - t.0'', 0146011) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ - (34'', 800640 + t.0'', 0572010) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''').$$

La grande inégalité de Saturne renferme encore, par le n° 8, le terme

$$-\frac{e''H'}{2} \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \omega'' + A').$$

Ce terme, en 1750, était égal à

$$23'', 315711. \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ + 16'', 423734. \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'''),$$

et en 1950 il sera égal à

$$23'', 800290. \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ + 14'', 894510. \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''').$$

ce qui donne, pour le temps t , l'inégalité

$$(23'', 315711 + t.0'', 002423) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ + (16'', 423734 - t.0'', 007646) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''').$$

La partie de la grande inégalité de Saturne dépendante des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites est, par les n° 8 et 18,

$$\frac{15m''n''}{(5n'' - 2n'')^2} \left\{ \left(a''P' + \frac{2a''dP'}{(5n'' - 2n'')dt} + ta''\frac{dP'}{dt} \right) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \right. \\ \left. - \left(a''P - \frac{2a''dP'}{(5n'' - 2n'')dt} + ta''\frac{dP}{dt} \right) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \right\},$$

en désignant par P , et P' , les coefficients de $m'' \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''')$ et de $m'' \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''')$ du développement de R , dépendants des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons. On a trouvé, pour 1750,

$$a''P = -0,0000068376,$$

$$a''P' = -0,0000100087,$$

et pour 1950,

$$a''P = -0,0000077132,$$

$$a''P' = -0,000006940;$$

par conséquent,

$$a''\frac{dP}{dt} = -0,000000043780,$$

$$a''\frac{dP'}{dt} = 0,000000015735,$$

ce qui donne, pour la fonction précédente réduite en nombres,

$$-(89'', 952440 - t.0'', 012596) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ + (58'', 270353 + t.0'', 035048) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''').$$

Enfin on a déterminé, par le n° 16, la partie sensible de la grande inégalité de Saturne dépendante du carré de la force perturbatrice, et l'on a trouvé pour cette partie, en 1750,

$$-11'', 779433. \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ + 132'', 470121. \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon'''),$$

et en 1950,

$$-5'', 051766. \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ + 134'', 644093. \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''').$$

ce qui donne, pour le temps t , cette partie égale à

$$-(11'', 779433 - t.0'', 0336383) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \\ + (132'', 470121 + t.0'', 0108698) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''').$$

Maintenant, si l'on rassemble ces diverses parties de la grande inégalité de Saturne, on aura, pour sa valeur entière, que l'on doit appliquer au moyen mouvement de cette planète,

$$-(1 + p'') \left\{ (9046'', 683471 - t.0'', 0948628 - t^2.0'', 00013903) \sin(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \right. \\ \left. + (689'', 051830 - t.3'', 4027934 + t^2.0'', 00056750) \cos(5n''t - 2n''t + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon''') \right\}.$$

En réduisant ces deux termes en un seul par la méthode du n° 17, on

aura

$$-(1+\mu^{11}) (9072^{\circ}, 888420 - t.0^{\circ}, 2624193 + t^2.0^{\circ}, 00025990) \sin \left(\begin{matrix} 5n^{\circ}t - 2n^{\circ}t + 5t^{\circ} - 2t^{\circ} + 4^{\circ}, 8395 \\ - t.239^{\circ}, 597 + t^2.0^{\circ}, 039122 \end{matrix} \right).$$

Le carré de la force perturbatrice produit encore, par le n° 12, l'inégalité

$$\frac{H^2}{8} \frac{2m^{\circ}\sqrt{a^{\circ}} + 5m^{11}\sqrt{a^{11}}}{m^{11}\sqrt{a^{11}}} \sin(\text{double argument de la grande inégalité}),$$

ce qui donne

$$(94^{\circ}, 719002 - t.0^{\circ}, 005320) \sin(\text{double argument de la grande inégalité}).$$

Il faut encore appliquer cette inégalité au moyen mouvement de Saturne.

L'inégalité

$$\frac{1}{4} \frac{3m^{11}\sqrt{a^{11}} + 2m^{\circ}\sqrt{a^{\circ}}}{m^{11}\sqrt{a^{11}}} H'K' \sin(4n^{\circ}t - 9n^{\circ}t + 4t^{\circ} - 9t^{\circ} - B' - A').$$

trouvée dans le n° 13, devient, en la réduisant en nombres,

$$+ 25^{\circ}, 507770. \sin(4n^{\circ}t - 9n^{\circ}t + 4t^{\circ} - 9t^{\circ} + 57^{\circ}, 5885).$$

On a encore, par le n° 8, l'inégalité

$$\frac{3}{8} e^{\circ} K^{\circ} \sin(3n^{\circ}t - 2n^{\circ}t + 3t^{\circ} - 2t^{\circ} + \varpi^{\circ} + B').$$

Cette inégalité, réduite en nombres, était, en 1750, égale à

$$145^{\circ}, 417101. \sin(2n^{\circ}t - 3n^{\circ}t + 2t^{\circ} - 3t^{\circ} + 164^{\circ}, 5950);$$

en 1950, elle sera

$$142^{\circ}, 923362. \sin(2n^{\circ}t - 3n^{\circ}t + 2t^{\circ} - 3t^{\circ} + 160^{\circ}, 3197);$$

sa valeur pour un temps quelconque t est donc

$$(145^{\circ}, 417101 - t.0^{\circ}, 0124687) \sin \left(\begin{matrix} 2n^{\circ}t - 3n^{\circ}t + 2t^{\circ} - 3t^{\circ} \\ + 164^{\circ}, 5950 + t.86^{\circ}, 23 \end{matrix} \right).$$

En réunissant cette inégalité à celles-ci,

$$\begin{aligned} & (105^{\circ}, 992675 - t.0^{\circ}, 005914) \sin(3n^{\circ}t - 2n^{\circ}t + 3t^{\circ} - 2t^{\circ} - \varpi^{\circ}) \\ & - 54^{\circ}, 488162. \sin(3n^{\circ}t - 2n^{\circ}t + 3t^{\circ} - 2t^{\circ} - \varpi^{11}). \end{aligned}$$

que nous avons trouvées précédemment, on aura pour leur somme l'inégalité

$$-(75^{\circ}, 837202 - t.0^{\circ}, 013555) \sin \left(\begin{matrix} 2n^{\circ}t - 3n^{\circ}t + 2t^{\circ} - 3t^{\circ} \\ + 16^{\circ}, 4503 - t.38^{\circ}, 23 \end{matrix} \right).$$

On a vu dans le n° 5 que le moyen mouvement de Saturne est assujéti à une équation séculaire correspondante à celle que nous avons trouvée dans le n° 33, pour Jupiter, égale à

$$- t^2.0^{\circ}, 0000020066.$$

L'équation séculaire de Saturne est ainsi, par le n° 5, égale à

$$\frac{m^{11}\sqrt{a^{11}}}{m^{\circ}\sqrt{a^{\circ}}} t^2.0^{\circ}, 0000020066,$$

et par conséquent égale à

$$t^2.0^{\circ}, 000004665.$$

Cette inégalité peut être négligée sans erreur sensible.

Il nous reste à considérer le rayon vecteur de Saturne. On a vu, dans le n° 8, que les termes dépendants du cube des excentricités ajoutent à l'expression du rayon vecteur de Saturne la quantité

$$\begin{aligned} & - a^{\circ} e^{\circ} H' \cos(5n^{\circ}t - 2n^{\circ}t + 5t^{\circ} - 2t^{\circ} - \varpi^{\circ} - A') \\ & + a^{\circ} e^{\circ} H' \cos(3n^{\circ}t - 2n^{\circ}t + 3t^{\circ} - 2t^{\circ} + \varpi^{\circ} + A') \\ & - \frac{10m^{11}n^{\circ}a^{\circ 3}}{5n^{\circ} - 2n^{11}} \left[\begin{matrix} P \sin(5n^{\circ}t - 2n^{\circ}t + 5t^{\circ} - 2t^{\circ}) \\ + P' \cos(5n^{\circ}t - 2n^{\circ}t + 5t^{\circ} - 2t^{\circ}) \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

Cette fonction, réduite en nombres, donne

$$\delta r^{\circ} = (1+\mu^{11}) \left[\begin{matrix} 0,00351994565. \cos(5n^{\circ}t - 2n^{\circ}t + 5t^{\circ} - 2t^{\circ} + 14^{\circ}, 4782) \\ - 0,0008553506. \cos(2n^{\circ}t - 3n^{\circ}t + 2t^{\circ} - 3t^{\circ} + 39^{\circ}, 7988) \end{matrix} \right].$$

En réunissant la dernière de ces deux inégalités à celles-ci, que nous

avons trouvées précédemment, dépendantes des simples excentricités,

$$(1 + p^{12}) \begin{bmatrix} 0,0011594872 \cdot \cos(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'') \\ -0,0006217670 \cdot \cos(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'') \end{bmatrix},$$

on a

$$\partial s'' = -(1 + p^{12}) \cdot 0,0013806201 \cdot \cos(2n''t - 3n''t + 2\varepsilon'' - 3\varepsilon' - 25^\circ,9130).$$

Le demi-grand axe a' , dont on doit faire usage pour calculer la partie elliptique du rayon vecteur, doit, par le n° 20, être augmenté de la quantité $\frac{1}{2}a'm'$; en la réunissant à la valeur de a' du n° 21, on trouve

$$a' = 9,53881757.$$

Inégalités du mouvement de Saturne en latitude.

36. Les formules du n° 51 du Livre II donnent

$$\partial s'' = (1 + p^{12}) \begin{bmatrix} 5'',516537 \cdot \sin(n''t + \varepsilon'' - \Pi'') \\ -0'',772161 \cdot \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \Pi'') \\ -0'',259092 \cdot \sin(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \Pi'') \\ +9'',702232 \cdot \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \Pi'') \\ -1'',613780 \cdot \sin(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \Pi'') \\ -0'',256736 \cdot \sin(4n''t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \Pi'') \end{bmatrix} \\ + (1 + p^{12}) \begin{bmatrix} 0'',261948 \cdot \sin(n''t + \varepsilon'' - \Pi'') \\ +0'',377170 \cdot \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \Pi'') \\ +2'',046267 \cdot \sin(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \Pi'') \end{bmatrix}.$$

Π'' étant la longitude du nœud de l'orbite de Jupiter sur celle de Saturne, et Π''' étant la longitude du nœud de l'orbite d'Uranus sur celle de Saturne. Enfin on a, par le n° 10, l'inégalité

$$\partial s'' = -28'',282713 \cdot \sin(2n''t - 4n''t + 2\varepsilon'' - 4\varepsilon' + 66^\circ,1219).$$

Il résulte du n° 14 que les termes dépendants du carré de la force perturbatrice ajoutent à la valeur de $\frac{d\varphi''}{dt}$ la quantité

$$\frac{m''\sqrt{a''}}{m''\sqrt{a''} + m'\sqrt{a'}} \left[\frac{\partial \gamma}{t} \cos(\Pi - \vartheta'') - \frac{\gamma \partial \Pi}{t} \sin(\Pi - \vartheta'') \right],$$

et à la valeur de $\frac{d\vartheta''}{dt}$ la quantité

$$\frac{m''\sqrt{a''}}{m''\sqrt{a''} + m'\sqrt{a'}} \left[\frac{\partial \gamma}{t} \sin(\Pi - \vartheta'') + \frac{\gamma \partial \Pi}{t} \cos(\Pi - \vartheta'') \right],$$

$\partial \gamma$ et $\partial \Pi$ étant déterminés par le numéro cité. La première de ces fonctions, réduite en nombres, est égale à

$$0'',000474;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\varphi''}{dt}$ et de $\frac{d\vartheta''}{dt}$ du n° 25. La seconde fonction, réduite en nombres, est égale à

$$-0'',005780;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\varphi''}{dt}$ et de $\frac{d\vartheta''}{dt}$ du n° 25. On aura ainsi

$$\frac{d\varphi''}{dt} = 0'',308315,$$

$$\frac{d\vartheta''}{dt} = -0'',478816,$$

$$\frac{d\vartheta''}{dt} = -27'',799890,$$

$$\frac{d\vartheta''}{dt} = -58'',775840.$$

CHAPITRE XIV.

THÉORIE D'URANUS.

37. L'équation

$$\partial r'' = -\frac{r''^3}{r''^2} (1 - \alpha^2) \partial V'',$$

trouvée dans le n° 35, relativement à Saturne, devient, pour Uranus,

$$\partial r'' = -\frac{r''^3}{r''^2} (1 - \alpha^2) \partial V''.$$

Si l'on prend pour r'' et r''' les moyennes distances de la Terre et d'Uranus au Soleil, et si l'on suppose $\partial V'' = \pm 1''$, on aura

$$\partial r'' = \mp 0,00057648;$$

on peut ainsi négliger les inégalités de $\partial r''$ au-dessous de $\mp 0,00057$. Nous négligerons les inégalités du mouvement d'Uranus en longitude et en latitude au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités d'Uranus, indépendantes des excentricités.

$$\partial v'' = (1 + \mu'') \begin{pmatrix} 161'', 438440. \sin (n''t - n''t + e'' - e'') \\ - 0'', 587550. \sin 2 (n''t - n''t + e'' - e'') \\ - 0'', 080319. \sin 3 (n''t - n''t + e'' - e'') \\ - 0'', 011090. \sin 4 (n''t - n''t + e'' - e'') \\ - 0'', 002371. \sin 5 (n''t - n''t + e'' - e'') \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + \mu') \begin{pmatrix} 65'', 961045. \sin (n't - n''t + e' - e'') \\ - 13'', 027691. \sin 2 (n't - n''t + e' - e'') \\ - 2'', 660850. \sin 3 (n't - n''t + e' - e'') \\ - 0'', 754350. \sin 4 (n't - n''t + e' - e'') \\ - 0'', 247564. \sin 5 (n't - n''t + e' - e'') \\ - 0'', 089294. \sin 6 (n't - n''t + e' - e'') \\ - 0'', 033731. \sin 7 (n't - n''t + e' - e'') \\ - 0'', 012801. \sin 8 (n't - n''t + e' - e'') \end{pmatrix}$$

$$\partial r'' = (1 + \mu'') \begin{pmatrix} 0,0063473160 \\ + 0,0048914790. \cos (n''t - n''t + e'' - e'') \\ + 0,0000336184. \cos 2 (n''t - n''t + e'' - e'') \\ + 0,0000030669. \cos 3 (n''t - n''t + e'' - e'') \\ + 0,0000005044. \cos 4 (n''t - n''t + e'' - e'') \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + \mu') \begin{pmatrix} 0,0023641285 \\ + 0,0035433901. \cos (n't - n''t + e' - e'') \\ + 0,0004061682. \cos 2 (n't - n''t + e' - e'') \\ + 0,0000889425. \cos 3 (n't - n''t + e' - e'') \\ + 0,0000035870. \cos 4 (n't - n''t + e' - e'') \end{pmatrix}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\partial v'' = (1 + \mu'') \begin{pmatrix} - 3'', 807443. \sin (n''t + e'' - \varpi'') \\ + 3'', 887493. \sin (2n''t - n''t + 2e'' - e'' - \varpi'') \\ - 11'', 224270. \sin (2n''t - n''t + 2e'' - e'' - \varpi'') \\ - 0'', 685175. \sin (2n''t - n''t + 2e'' - e'' - \varpi'') \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + \mu') \begin{pmatrix} - 4'', 328267. \sin (n't + e' - \varpi') \\ + 0'', 663139. \sin (n't + e' - \varpi') \\ - 0'', 678358. \sin (2n't - n''t + 2e' - e' - \varpi') \\ + 2'', 712230. \sin (2n't - n''t + 2e' - e' - \varpi') \\ - (135'', 961650 - 1.0'', 000761) \sin (2n''t - n''t + 2e'' - e'' - \varpi'') \\ + (462'', 369642 - 1.0'', 025635) \sin (2n''t - n''t + 2e'' - e'' - \varpi'') \\ + 7'', 673429. \sin (3n''t - 2n''t + 3e'' - 2e'' - \varpi'') \\ - 5'', 069294. \sin (3n''t - 2n''t + 3e'' - 2e'' - \varpi'') \\ + 1'', 304718. \sin (4n''t - 3n''t + 4e'' - 3e'' - \varpi'') \\ - 0'', 869752. \sin (4n''t - 3n''t + 4e'' - 3e'' - \varpi'') \\ + 0'', 390410. \sin (5n''t - 4n''t + 5e'' - 4e'' - \varpi'') \end{pmatrix}$$

$$\partial r'' = (1 + \mu'') \begin{pmatrix} 0,0016092001. \cos (2n''t - n''t + 2e'' - e'' - \varpi'') \\ + 0,0061835858. \cos (2n''t - n''t + 2e'' - e'' - \varpi'') \end{pmatrix}$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v'' = (1 + \mu'') \left[\begin{aligned} & - (408'', 978001 - t.0'', 0448163) \sin \left(3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' \right) \\ & + 5'', 288440. \sin (4n''t - 2n't + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon' - 42'', 8685) \\ & + 25'', 864683. \sin (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon' + 98'', 3271) \end{aligned} \right]$$

La dernière de ces inégalités, réunie à sa correspondante qui est indépendante des excentricités, donne la suivante :

$$(1 + \mu''). 71'', 470002. \sin (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon' + 23'', 5385).$$

On a ensuite

$$\delta r'' = - (1 + \mu''). 0,0007553840. \cos (3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' + 83'', 3463).$$

Inégalité dépendante des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v'' = - (1 + \mu''). 2'', 977432. \sin (5n''t - 2n't + 5\varepsilon'' - 2\varepsilon' - 75'', 9911).$$

Inégalités du mouvement d'Uranus en latitude.

38. Les formules du n° 54 du Livre II donnent

$$\delta \varepsilon'' = (1 + \mu''). 1'', 970350. \sin (n''t + \varepsilon'' - \Pi'') \\ + (1 + \mu') \cdot \left[\begin{aligned} & 2'', 826360. \sin (n't + \varepsilon' - \Pi') \\ & + 9'', 015592. \sin (2n''t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \Pi'') \end{aligned} \right],$$

Π'' étant ici la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle d'Uranus, et Π' étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle d'Uranus.

CHAPITRE XV.

DE QUELQUES ÉQUATIONS DE CONDITION QUI EXISTENT ENTRE LES INÉGALITÉS PLANÉTAIRES, ET QUI PEUVENT SERVIR À LES VÉRIFIER.

39. Les inégalités à longues périodes, produites par les perturbations réciproques de deux planètes m et m' , sont à peu près, par le n° 65 du Livre II, dans le rapport de $m'\sqrt{a'}$ à $-m\sqrt{a}$, en sorte que, pour avoir les perturbations de ce genre correspondantes, dans le mouvement de m' , à celles du mouvement de m , il suffit de multiplier celles-ci par $-\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}$. Ce résultat est d'autant plus exact, qu'en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements des deux planètes, la période de ces inégalités est plus grande par rapport aux durées de leurs révolutions. Nous allons, au moyen de ce théorème, vérifier plusieurs des inégalités précédentes.

L'action de la Terre sur Vénus produit, par le n° 28, dans le mouvement de Vénus, les deux inégalités dont la période est d'environ quatre années,

$$- 4'', 782561. \sin (3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega') \\ + 14'', 710902. \sin (3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega'').$$

En les multipliant par $-\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}$, on a, pour les inégalités correspondantes de la Terre,

$$3'', 4995. \sin (3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega') \\ - 10'', 7644. \sin (3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \omega'').$$

Le calcul direct a donné, par le n° 29, pour ces inégalités,

$$3'', 661696. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon' - 2\varepsilon' - \varpi') \\ - 11'', 318347. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon' - 2\varepsilon' - \varpi''),$$

ce qui diffère peu des inégalités précédentes.

L'action de la Terre sur Vénus produit encore, par le n° 28, l'inégalité suivante, dont la période est d'environ huit ans :

$$- 4'', 645172. \sin(5n''t - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 23^\circ, 2302).$$

En la multipliant par $-\frac{m' \sqrt{a'}}{m'' \sqrt{a''}}$, on a, pour l'inégalité correspondante de la Terre,

$$3'', 399002. \sin(5n''t - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 23^\circ, 2302),$$

et le calcul direct a donné, par le n° 29,

$$3'', 473997. \sin(5n''t - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 23^\circ, 3759).$$

Mars éprouve, par l'action de Vénus, comme on l'a vu par le n° 32, l'inégalité à longue période

$$- 21'', 295121. \sin(3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' + 72^\circ, 7083).$$

En la multipliant par $-\frac{m' \sqrt{a'}}{m'' \sqrt{a''}}$, on a

$$6'', 4144. \sin(3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' + 72^\circ, 7083).$$

Le calcul direct donne, par le n° 28,

$$6'', 202706. \sin(3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' + 73^\circ, 2065),$$

ce qui diffère peu de l'inégalité précédente.

Mars éprouve, par le n° 32, de la part de la Terre, les deux inégalités suivantes, dont la période est d'environ seize ans :

$$- 31'', 218207. \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi') \\ + 15'', 811920. \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'').$$

En les multipliant par $-\frac{m'' \sqrt{a''}}{m' \sqrt{a'}}$, on a, pour les inégalités correspondantes de la Terre,

$$6'', 8807. \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi') \\ - 3'', 4851. \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'').$$

Le calcul direct donne, par le n° 29,

$$6'', 597711. \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi') \\ - 3'', 381490. \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi''),$$

ce qui diffère peu des précédentes.

Mars éprouve encore, de la part de la Terre, par le n° 32, l'inégalité à longue période

$$- 13'', 490441. \sin(4n''t - 2n''t + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon'' + 75^\circ, 3518).$$

En la multipliant par $-\frac{m'' \sqrt{a''}}{m' \sqrt{a'}}$, on a, pour l'inégalité correspondante de la Terre,

$$2'', 9734. \sin(4n''t - 2n''t + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon'' + 75^\circ, 3518),$$

ce qui diffère peu de l'inégalité

$$3'', 067702. \sin(4n''t - 2n''t + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon'' + 75^\circ, 3506),$$

trouvée dans le n° 29.

Les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne sont encore à peu près l'une à l'autre dans le rapport de $-m' \sqrt{a'}$ à $m'' \sqrt{a''}$, comme il est facile de s'en convaincre.

Enfin Uranus éprouve de la part de Saturne, par le n° 37, l'inégalité à longue période

$$- 408'', 978001. \sin(3n''t - n''t + 3\varepsilon'' - \varepsilon'' - 98^\circ, 1313).$$

En la multipliant par $-\frac{m'' \sqrt{a''}}{m' \sqrt{a'}}$, on a, dans le mouvement de Sa-

turne, l'inégalité

$$99^{\circ}, 900. \sin(3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' - 98^{\circ}, 1313),$$

ce qui diffère peu de l'inégalité

$$95^{\circ}, 334222. \sin(3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' - 97^{\circ}, 1319),$$

donnée dans le n° 35 (*).

40. Considérons, dans le développement de R, le terme de la forme

$$m' M^{(1)} e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'],$$

et supposons que $i(n' - n) + 2n$ soit fort petit par rapport à n et à n' ; ce terme produira, par le n° 69 du Livre II, dans l'excentricité e de l'orbite de la planète m , considérée comme une ellipse variable, l'inégalité

$$-\frac{m'an}{i(n' - n) + 2n} M^{(1)} e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'],$$

et dans la position σ du périhélie l'inégalité

$$-\frac{m'an}{i(n' - n) + 2n} M^{(1)} \frac{e'}{e} \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'].$$

Nommons δe la première de ces inégalités, et $\delta \sigma$ la seconde. L'expression de v contient le terme $2e \sin(nt + \varepsilon - \varpi)$, et par conséquent l'inégalité

$$2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - 2e \delta \varpi \cos(nt + \varepsilon - \varpi),$$

ce qui donne dans v l'inégalité

$$\frac{2m'an}{i(n' - n) + 2n} M^{(1)} e' \sin[(i-1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + n't + \varepsilon' - \varpi'].$$

(*) L'inégalité donnée dans le n° 35 (voir page 144) est

$$95^{\circ}, 757345 \sin(3n''t - n't + 3\varepsilon'' - \varepsilon' - 95^{\circ}, 0779),$$

valeur un peu différente de celle qui est rapportée ici.

V. P.

Il résulte du n° 65 du Livre II que, dans le cas de $i(n' - n) + 2n$ très-petit, l'expression de R' relative à l'action de m sur m' renferme encore à très-peu près le terme

$$m M^{(1)} e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'];$$

puisque, en n'ayant égard qu'aux deux termes de ce genre dans R et R' , on a, par le numéro cité, à très-peu près

$$m f dR + m' f dR' = 0,$$

on a donc dans v' l'inégalité

$$\frac{2ma'n'}{i(n' - n) + 2n} M^{(1)} e \sin[(i-1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi].$$

Ces deux inégalités de v et de v' sont dans le rapport de $m'e'\sqrt{a'}$ à $me\sqrt{a}$, en sorte que la seconde se conclut de la première, en multipliant le coefficient de celle-ci par $\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \frac{e}{e'}$.

$5n'' - 3n'$ étant peu considérable par rapport à n' et même à n'' , on a dans v' , en supposant $i = 5$, une inégalité dépendante de l'argument $5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \varpi''$, et dans v'' une inégalité dépendante de l'argument $4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi'$. La première de ces inégalités est, par le n° 28,

$$6^{\circ}, 779405. \sin(5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \varpi'').$$

En multipliant son coefficient par $\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \frac{e'}{e}$, ou a pour la Terre l'inégalité

$$2^{\circ}, 0310. \sin(4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi');$$

le calcul direct donne, par le n° 29, l'inégalité

$$2^{\circ}, 229704. \sin(4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi'),$$

ce qui diffère peu de la précédente.

Pareillement, $4n'' - 2n''$ est assez petit relativement à n'' , et même

à n'' . En supposant $i = 4$, on a dans v'' une inégalité dépendante de l'argument $4n''t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi''$, et dans v'' une inégalité dépendante de l'argument $3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi''$. La première de ces inégalités est, par le n° 29,

$$2'', 491089. \sin(4n''t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi'').$$

En multipliant son coefficient par $\frac{m''\sqrt{a''}}{m''\sqrt{a''}}$, on a pour Mars l'inégalité

$$2'', 0415. \sin(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'').$$

Le calcul direct donne, par le n° 32,

$$2'', 611123. \sin(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'');$$

la différence est dans les limites de celle que l'on peut supposer, d'après le rapport de $4n'' - 2n''$ à n'' , qui est à peu près celui de 1 à 4.

41. Il résulte encore du n° 71 du Livre II que, si $i(n' - n) + 2n$ est très-petit par rapport à n' , l'inégalité de m en latitude, dépendante de $(i-1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + n't + \varepsilon'$, est à l'inégalité de m' en latitude, dépendante de $(i-1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon$, dans le rapport de $m'\sqrt{a'}$ à $m\sqrt{a}$.

En supposant $i = 5$, on a, par le n° 28, dans le mouvement de Vénus en latitude, l'inégalité

$$-0'', 964615. \sin(5n't - 4n't + 5\varepsilon' - 4\varepsilon' - \theta').$$

En multipliant son coefficient par $-\frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}}$, on a, dans le mouvement de la Terre en latitude, l'inégalité

$$0'', 705835. \sin(4n''t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \theta').$$

Le calcul direct donne, par le n° 29, l'inégalité

$$0'', 723012. \sin(4n''t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \theta'),$$

ce qui diffère peu de la précédente.

$3n'' - n'$ est peu considérable par rapport à n'' ; en faisant donc $i = 3$, on a dans $\delta s''$ une inégalité dépendante de $3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'$, et dans $\delta s''$ une inégalité dépendante de $2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'$. La première de ces inégalités est, par le n° 36,

$$2'', 046367. \sin(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \Pi'').$$

Π'' étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite d'Uranus sur celle de Saturne. En multipliant le coefficient de cette inégalité par

$$-\frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}},$$

$$-8'', 3772. \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \Pi''),$$

et, par le n° 38, cette inégalité est

$$-9'', 015592. \sin(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \Pi''),$$

ce qui diffère peu de la précédente.

42. Il suit du n° 69 du Livre II que, $i'n' - in$ étant supposé très-petit relativement à n et à n' , si l'on représente par

$$m'P \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + m'P' \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)$$

la partie du développement de R qui dépend de l'angle

$$i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon,$$

il en résulte dans δv l'inégalité

$$-\frac{\gamma m' an}{i'n' - in} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \varpi) \\ &-\frac{\partial P'}{\partial \varepsilon} \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \varpi) \end{aligned} \right\},$$

et dans $\delta v'$ l'inégalité

$$-\frac{\gamma m a n'}{i'n' - in} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - n't - \varepsilon' + \varpi') \\ &-\frac{\partial P'}{\partial \varepsilon'} \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - n't - \varepsilon' + \varpi') \end{aligned} \right\}.$$

Il suit encore du n° 71 du Livre II que les mêmes termes de R donnent dans δs l'inégalité

$$\frac{m'an}{i'n-in} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \Pi) \\ & - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \Pi) \end{aligned} \right\},$$

γ étant la tangente de l'inclinaison respective des orbites de m et de m' , et Π étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m' sur celle de m .

Si l'on augmente l'argument de l'inégalité de δv de $nt + \varepsilon - \sigma$, et que l'on multiplie son coefficient par e ; si l'on augmente l'argument de l'inégalité de δv de $n't + \varepsilon' - \sigma'$, et que l'on multiplie son coefficient par $\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} e'$; enfin si l'on augmente l'argument de l'inégalité de δs de $nt + \varepsilon - \Pi$, et si l'on multiplie son coefficient par -2γ , la somme de ces trois inégalités sera

$$-\frac{2m'an}{i'n-in} \left\{ \begin{aligned} & \left(e \frac{\partial P}{\partial \sigma} + e' \frac{\partial P}{\partial \sigma'} + \gamma \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right) \cos(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon) \\ & - \left(e \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + e' \frac{\partial P'}{\partial \sigma'} + \gamma \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \right) \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon) \end{aligned} \right\};$$

or P et P' sont des fonctions homogènes en e , e' et γ de la dimension $i' - i$, i' étant supposé plus grand que i ; la fonction précédente est ainsi égale à

$$-\frac{2m'an(i'-i)}{i'n-in} \left[\begin{aligned} & P \cos(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon) \\ & - P' \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon) \end{aligned} \right].$$

Maintenant on a, par le n° 69 du Livre II, dans δv , l'inégalité

$$\frac{3m'an^2 i}{(i'n-in)^2} \left[\begin{aligned} & P \cos(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon) \\ & - P' \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon) \end{aligned} \right].$$

D'où il suit que, si l'on représente par

$$K \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + O)$$

l'inégalité de δv dépendante de l'angle $i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - nt - \varepsilon$;

si l'on représente par

$$K' \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - n't - \varepsilon' + O')$$

l'inégalité de δv dépendante de l'angle $i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - n't - \varepsilon'$;

enfin, si l'on représente par

$$K'' \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + O'')$$

l'inégalité de δs dépendante de l'angle $i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - nt - \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} & eK \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - \sigma + O) \\ & + \frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} e' K' \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - \sigma' + O') \\ & - 2\gamma K'' \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon - \Pi + O'') \\ & = -\frac{2(i'-i)}{3i} \Pi \frac{i'n-in}{n} \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon + Q), \end{aligned}$$

$H \sin(i'n't - int + i'e' - i\varepsilon + Q)$ étant l'inégalité de δv dépendante de l'angle $i'n't - int + i'e' - i\varepsilon$.

$5n' - 2n$ étant fort petit par rapport à n' , on a, par le n° 27, dans δv l'inégalité

$$5'', 217417. \sin(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon + 48'', 1210).$$

L'inégalité de δs dépendante de $5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon$ est insensible.

On a ensuite, par le n° 28, dans δv l'inégalité

$$-1'', 029617. \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 43'', 8980).$$

Enfin on a, par le n° 27, dans δv l'inégalité

$$26'', 184460. \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 33'', 5852).$$

Ici $i' = 5$, et $i = 2$; on a donc, par ce qui précède, l'équation de condition

$$\begin{aligned} & 5'', 217417. e \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \sigma + 48'', 1210) \\ & - 1'', 029617. e' \frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \sigma' - 43'', 8980) \\ & = -26'', 184460. \frac{5n' - 2n}{n} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 33'', 5852). \end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation donne

$$1'',11035.\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-31^{\circ},6212).$$

Le second membre donne

$$1'',1135.\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-33^{\circ},5852);$$

la différence est insensible.

On pourrait vérifier par les théorèmes précédents plusieurs des inégalités respectives de Jupiter et de Saturne; mais, comme toutes les inégalités de ces deux planètes ont été vérifiées plusieurs fois, et avec beaucoup de soin, par divers calculateurs, cette dernière vérification devient inutile.

43. L'inégalité de m , produite par l'action de m' et dépendante de l'argument $n't + \varepsilon' - \varpi'$, est, par les n° 50 et 55 du Livre II, égale à

$$\frac{-4n^2}{n'(n^2 - n'^2)} \cdot (0, 1) \cdot e' \sin(n't + \varepsilon' - \varpi').$$

L'inégalité de m' , produite par l'action de m et dépendante de l'argument $nt + \varepsilon - \varpi$, est

$$\frac{4n'^2}{n(n^2 - n'^2)} \cdot (1, 0) \cdot e \sin(nt + \varepsilon - \varpi).$$

Les coefficients de ces deux inégalités sont donc dans le rapport de $-(0, 1) \cdot n^3 e'$ à $(1, 0) \cdot n'^3 e$; or on a, par le n° 55 du Livre II,

$$(1, 0) = (0, 1) \cdot \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}};$$

en nommant donc Q le coefficient de la première inégalité, le coefficient de la seconde sera

$$-\frac{ma^2}{m'a'^2} \frac{e}{e'} Q.$$

Les inégalités de ce genre ont été vérifiées, soit au moyen de cette équation de condition, soit au moyen de l'expression précédente de Q .

Ainsi l'action de Jupiter produit par le n° 29, dans la Terre, l'inégalité sensible

$$-7'',839149.\sin(n''t + \varepsilon'' - \varpi'').$$

Cette inégalité, par ce qui précède, est

$$\frac{-4n''^2}{n''(n''^2 - n'''^2)} \cdot (2, 4) \cdot e'' \sin(n''t + \varepsilon'' - \varpi'').$$

Or on a, par le n° 24, $(2, 4) = 21'',444015$; en substituant dans cette formule cette valeur, et celles de n'' , n''' et e'' , données dans le n° 22, et multipliant le résultat par l'arc égal au rayon, on trouve

$$-7'',8397.\sin(n''t + \varepsilon'' - \varpi'').$$

L'action d'Uranus sur Saturne produit, par le n° 35, dans le mouvement de Saturne, l'inégalité

$$-3'',123367.\sin(n''t + \varepsilon'' - \varpi'').$$

En multipliant son coefficient par $-\frac{m''a''^2}{m''a''^2} \frac{e''}{e''}$, on a dans Uranus l'inégalité

$$0'',663124.\sin(n''t + \varepsilon'' - \varpi'').$$

et le calcul direct a donné, dans le n° 35,

$$0'',663139.\sin(n''t + \varepsilon'' - \varpi'').$$