CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

26. Après avoir exposé la théorie générale du mouvement elliptique et la manière de le calculer par des suites convergentes, dans les deux cas de la nature, celui des orbes presque circulaires et le cas des orbes fort allongés, il nous reste à déterminer les éléments de ces orbes. Si les circonstances des mouvements primitifs des corps célestes étaient données, on pourrait facilement en conclure ces éléments. En effet, si l'on nomme V la vitesse de m dans son mouvement relatif autour de M, on aura

$$V^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

et la dernière des équations (p) du n° 18 donnera

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Pour faire disparaître μ de cette expression, nous désignerons par U la vitesse que m aurait, s'il décrivait autour de M un cercle d'un rayon égal à l'unité de distance. Dans cette hypothèse, on a $r = a = 1$, et par conséquent $U^2 = \mu$; donc

$$V^2 = U^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Cette équation donnera le demi-grand axe a de l'orbite au moyen de la

vitesse primitive de m et de sa distance primitive à M; a est positif dans l'ellipse, il est infini dans la parabole, et négatif dans l'hyperbole; ainsi l'orbite décrite par m est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que V est moindre, égal ou plus grand que $U\sqrt{\frac{2}{r}}$. Il est remarquable que la direction du mouvement primitif n'influe point sur l'espèce de la section conique.

Pour déterminer l'excentricité de l'orbite, nous observerons que, si l'on nomme ε l'angle que fait la direction du mouvement relatif de m avec le rayon vecteur r, on a

$$\frac{dr^2}{dt^2} = V^2 \cos^2\varepsilon.$$

En substituant au lieu de V^2 sa valeur $\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, on aura

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\cos^2\varepsilon;$$

mais on a, par le n° 19,

$$2\mu r - \frac{\mu r^2}{a} - \frac{r^2 dr^2}{dt^2} = \mu a(1 - e^2);$$

on aura donc

$$a(1 - e^2) = r^2 \sin^2\varepsilon\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

ce qui fera connaître l'excentricité ae de l'orbite.

L'équation aux sections coniques

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v}$$

donne

$$\cos v = \frac{a(1 - e^2) - r}{er}.$$

On aura ainsi l'angle v que le rayon vecteur r fait avec la distance périhélie, et par conséquent on aura la position du périhélie. Les équations (f) du n° 20 feront ensuite connaître l'angle u, et par son moyen l'instant du passage par le périhélie.

Pour avoir la position de l'orbite par rapport à un plan fixe passant par le centre de M, supposé immobile, soit φ l'inclinaison de l'orbite sur ce plan, et θ l'angle que le rayon r forme avec la ligne des nœuds; soit de plus z l'élévation primitive de m au-dessus du plan fixe, élévation supposée connue; on aura

$$r \sin\theta \sin\varphi = z,$$

en sorte que l'inclinaison φ de l'orbite sera connue lorsque l'on aura déterminé θ. Pour cela, nommons λ l'angle, supposé connu, que fait avec le plan fixe la direction primitive du mouvement relatif de m; si l'on considère le triangle formé par cette direction prolongée jusqu'à la rencontre de la ligne des nœuds, par cette dernière ligne et par le rayon r, en nommant l le côté de ce triangle opposé à l'angle θ, on aura

$$l = \frac{r\sin\theta}{\sin(\theta + \varepsilon)};$$

on a ensuite $\frac{z}{l} = \sin\lambda$; on aura donc

$$\tang\theta = \frac{z\sin\varepsilon}{r\sin\lambda - z\cos\varepsilon}.$$

Les éléments de l'orbite de la planète étant déterminés par ces formules en fonction des coordonnées r et z, de la vitesse de la planète et de la direction de son mouvement, on peut avoir les variations de ces éléments correspondantes à des variations supposées dans la vitesse et dans sa direction, et il sera facile, par les méthodes que nous donnerons dans la suite, d'en conclure les variations différentielles de ces éléments dues à l'action de forces perturbatrices.

Reprenons l'équation

$$V^2 = U^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Dans le cercle, $a = r$, et par conséquent $V = U\sqrt{\frac{1}{r}}$; ainsi les vitesses

des planètes dans des cercles différents sont réciproques aux racines carrées de leurs rayons.

Dans la parabole, $a = \infty$, partant $V = U\sqrt{\frac{2}{r}}$; les vitesses dans les différents points de l'orbite sont donc alors réciproques aux racines carrées des rayons vecteurs, et la vitesse à chaque point est à celle qu'aurait la planète, si elle décrivait un cercle d'un rayon égal au rayon vecteur r, comme $\sqrt{2} : 1$.

Une ellipse infiniment aplatie se change en ligne droite, et dans ce cas V exprime la vitesse de m, s'il descendait en ligne droite vers M. Supposons que m parte de l'état du repos, et que sa distance primitive à M soit r; supposons de plus que, parvenu à la distance r', il ait acquis la vitesse V'; l'expression précédente de la vitesse donnera les deux équations suivantes :

$$0 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad V'^2 = U^2\left(\frac{2}{r'} - \frac{1}{a}\right),$$

d'où l'on tire

$$V' = U\sqrt{\frac{2(r-r')}{rr'}};$$

c'est l'expression de la vitesse relative acquise par m, en partant de la distance r et en tombant vers M de la hauteur $r - r'$. On déterminera facilement, au moyen de cette formule, de quelle hauteur le corps m, mû dans une section conique, devrait tomber vers M, pour acquérir, en partant de l'extrémité du rayon vecteur r, une vitesse relative égale à celle qu'il a à cette extrémité; car, V étant cette dernière vitesse, on a

$$V^2 = U^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

mais le carré de la vitesse acquise en tombant de la hauteur $r - r'$ est $2U^2\frac{r-r'}{rr'}$; en égalant ces deux expressions, on aura donc

$$r - r' = \frac{r(2a - r)}{4a - r}.$$

Dans le cercle, $a = r$, et alors $r - r' = \frac{1}{2}r$; dans l'ellipse, on a $r - r' < \frac{1}{2}r$; a étant infini dans la parabole, on a $r - r' = \frac{1}{2}r$; et dans l'hyperbole, où a est négatif, on a $r - r' > \frac{1}{2}r$.

27. L'équation

$$0 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

est remarquable en ce qu'elle donne la vitesse indépendamment de l'excentricité de l'orbite. Elle est renfermée dans une équation plus générale qui existe entre le grand axe de l'orbite, la corde de l'arc elliptique, la somme des rayons vecteurs extrêmes, et le temps employé à décrire cet arc. Pour parvenir à cette dernière équation, nous reprendrons les équations du mouvement elliptique, données dans le n° **20**, en y supposant, pour plus de simplicité, $\mu = 1$. Ces équations deviennent ainsi

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v},$$

$$r = a(1 - e\cos u),$$

$$t = a^{\frac{3}{2}}(u - e\sin u).$$

Supposons que r, v, u et t correspondent à la première extrémité de l'arc elliptique, et que r', v', u' et t' correspondent à l'autre extrémité; on aura

$$r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v'},$$

$$r' = a(1 - e\cos u'),$$

$$t' = a^{\frac{3}{2}}(u' - e\sin u').$$

Soient

$$t' - t = T, \quad \frac{u' - u}{2} = \beta, \quad \frac{u' + u}{2} = \beta', \quad r' + r = R;$$

si l'on retranche l'expression de t de celle de t', et si l'on observe que

$$\sin u' - \sin u = 2\sin\beta\cos\beta',$$

on aura

$$T = 2a^{\frac{3}{2}}(\beta - e\sin\beta\cos\beta').$$

Si l'on ajoute l'une à l'autre les deux expressions de r et de r' en u et u', et si l'on observe que

$$\cos u' + \cos u = 2\cos\beta\cos\beta',$$

on aura

$$R = 2a(1 - e\cos\beta\cos\beta').$$

Maintenant soit c la corde de l'arc elliptique; on a

$$c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v - v');$$

mais les deux équations

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v}, \quad r = a(1 - e\cos u)$$

donnent celles-ci

$$\cos v = a\frac{\cos u - e}{r}, \quad \sin v = \frac{a\sqrt{1 - e^2}\sin u}{r}.$$

On a pareillement

$$\cos v' = \frac{a(\cos u' - e)}{r'}, \quad \sin v' = \frac{a\sqrt{1 - e^2}\sin u'}{r'};$$

on aura donc

$$rr'\cos(v - v') = a^2(e - \cos u)(e - \cos u') + a^2(1 - e^2)\sin u\sin u',$$

et par conséquent

$$c^2 = 2a^2(1 - e^2)(1 - \sin u\sin u' - \cos u\cos u') + a^2e^2(\cos u - \cos u')^2;$$

or on a

$$\sin u\sin u' + \cos u\cos u' = 2\cos^2\beta - 1,$$

$$\cos u - \cos u' = 2\sin\beta\sin\beta';$$

partant

$$c^2 = 4a^2\sin^2\beta(1 - e^2\cos^2\beta');$$

on a donc ainsi les trois équations suivantes :

$$\mathrm{R} = 2a(1 - e\cos\beta\cos\beta'),$$

$$\mathrm{T} = 2a^{\frac{3}{2}}(\beta - e\sin\beta\cos\beta'),$$

$$c^2 = 4a^2\sin^2\beta(1 - e^2\cos^2\beta').$$

La première de ces équations donne

$$e\cos\beta' = \frac{2a - \mathrm{R}}{2a\cos\beta};$$

en substituant cette valeur de $e\cos\beta'$ dans les deux autres, on aura

$$\mathrm{T} = 2a^{\frac{3}{2}}\left(\beta + \frac{\mathrm{R} - 2a}{2a}\operatorname{tang}\beta\right),$$

$$c^2 = 4a^2\operatorname{tang}^2\beta\left[\cos^2\beta - \left(\frac{2a - \mathrm{R}}{2a}\right)^2\right].$$

Ces deux équations ne renferment point l'excentricité e, et, si dans la première on substitue au lieu de β sa valeur donnée par la seconde, on aura T en fonction de c, R et a. On voit ainsi que le temps T ne dépend que du demi-grand axe, de la corde c et de la somme R des rayons vecteurs extrêmes.

Si l'on fait

$$z = \frac{2a - \mathrm{R} + c}{2a}, \quad z' = \frac{2a - \mathrm{R} - c}{2a},$$

la dernière des équations précédentes donnera

$$\cos 2\beta = zz' + \sqrt{(1 - z^2)(1 - z'^2)},$$

d'où l'on tire

$$2\beta = \arccos z' - \arccos z,$$

$\arccos z$ désignant ici l'arc qui a z pour cosinus; on a par conséquent

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\arccos z') - \sin(\arccos z)}{z + z'};$$

on a ensuite $z + z' = \dfrac{2a - \mathrm{R}}{a}$; l'expression de T deviendra donc, en

observant que, si T est la durée de la révolution sidérale de la Terre, dont la moyenne distance au Soleil est prise pour unité, on a, par le n° 16, $T = 2\pi$,

$$(a) \qquad \mathrm{T} = \frac{a^{\frac{3}{2}}T}{2\pi}[\arccos z' - \arccos z - \sin(\arccos z') + \sin(\arccos z)].$$

Les mêmes cosinus pouvant appartenir à plusieurs arcs, cette expression de T est ambiguë, et il faut bien distinguer les arcs auxquels répondent les cosinus z et z'.

Dans la parabole, le demi-grand axe a est infini, et l'on a

$$\arccos z' - \sin(\arccos z') = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\mathrm{R} + c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

En faisant c négatif, on aura la valeur de $\arccos z - \sin(\arccos z)$; la formule (a) donnera donc, pour le temps T employé à décrire l'arc sous-tendu par la corde c,

$$\mathrm{T} = \frac{T}{12\pi}\left[(r + r' + c)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - c)^{\frac{3}{2}}\right],$$

le signe $-$ ayant lieu lorsque les deux extrémités de l'arc parabolique sont situées du même côté de l'axe de la parabole, ou lorsque, l'une d'elles étant située au-dessous, l'angle formé par les deux rayons vecteurs est tourné vers le périhélie; il faut employer le signe $+$ dans les autres cas. T étant égal à $365^{\mathrm{j}},25638$, on a

$$\frac{T}{12\pi} = 9^{\mathrm{j}},688726.$$

Dans l'hyperbole, a est négatif; z et z' deviennent plus grands que l'unité; les arcs $\arccos z$ et $\arccos z'$ sont imaginaires, et l'on a en logarithmes hyperboliques

$$\arccos z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\arccos z' = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(z' + \sqrt{z'^2 - 1}\right);$$

la formule (a) devient ainsi, en y changeant a dans $-a$,

$$\mathrm{t} = \frac{a^{\frac{3}{2}}\mathrm{T}}{2\pi}\left[\sqrt{z'^2-1} \mp \sqrt{z^2-1} - \log\left(z'+\sqrt{z'^2-1}\right) \pm \log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\right].$$

La formule (a) donne le temps qu'un corps emploie à descendre en ligne droite vers le foyer, en partant d'une distance donnée, avec une vitesse donnée; il suffit pour cela de supposer l'ellipse qu'il décrit alors infiniment aplatie. Si l'on suppose, par exemple, que le corps parte de l'état du repos, à la distance $2a$ du foyer, et que l'on cherche le temps t, qu'il emploie à s'en approcher de la distance c, on aura dans ce cas $\mathrm{R} = 2a + r$, $r = 2a - c$, ce qui donne $z' = -1$, $z = \frac{c-a}{a}$; la formule (a) donnera donc

$$\mathrm{t} = \frac{a^{\frac{3}{2}}\mathrm{T}}{2\pi}\left(\pi - \arccos\frac{c-a}{a} + \sqrt{\frac{2ac-c^2}{a^2}}\right).$$

Il y a cependant une différence essentielle entre le mouvement elliptique vers le foyer et le mouvement dans une ellipse infiniment aplatie. Dans le premier cas, le corps, parvenu au foyer, passe au delà et s'en éloigne à la même distance dont il était parti; dans le second cas, le corps, parvenu au foyer, revient au point d'où il était parti. Une vitesse tangentielle à l'aphélie, quelque petite qu'elle soit, suffit pour produire cette différence, qui n'influe point sur le temps que le corps emploie à descendre vers le foyer.

28. Les observations ne faisant pas connaître les circonstances du mouvement primitif des corps célestes, on ne peut pas déterminer par les formules du n° 26 les éléments de leurs orbites. Il est nécessaire pour cet objet de comparer entre elles leurs positions respectives observées à différentes époques, ce qui présente d'autant plus de difficultés que l'on n'observe point ces corps du centre de leurs mouvements. Relativement aux planètes, on peut, au moyen de leurs oppositions ou de leurs conjonctions, avoir leur longitude telle qu'on l'observerait du

centre même du Soleil. Cette considération, jointe à la petite excentricité et au peu d'inclinaison de leurs orbites à l'écliptique, donne un moyen fort simple d'avoir leurs éléments. Mais, dans l'état actuel de l'Astronomie, les éléments de ces orbites n'ont besoin que de corrections très-légères; et, comme les variations des distances des planètes à la Terre ne sont jamais assez grandes pour les dérober à nos regards, on peut les observer sans cesse, et rectifier, par la comparaison d'un grand nombre d'observations, les éléments de leurs orbites et les erreurs mêmes dont les observations sont susceptibles. Il n'en est pas ainsi des comètes; nous ne les voyons que vers leur périhélie : si les observations de leur apparition sont insuffisantes pour déterminer leurs éléments, nous n'avons alors aucun moyen de suivre ces astres par la pensée dans l'immensité de l'espace, et, quand la suite des siècles les ramène vers le Soleil, il nous est impossible de les reconnaître; il est donc important de pouvoir déterminer, par les seules observations de l'apparition d'une comète, les éléments de son orbite; mais ce problème, pris en rigueur, surpasse les forces de l'Analyse, et l'on est obligé de recourir aux méthodes d'approximation pour avoir les premières valeurs des éléments, que l'on peut corriger ensuite avec toute la précision que les observations comportent.

Si l'on faisait usage d'observations éloignées entre elles, les éliminations conduiraient à des calculs impraticables; il faut donc se borner à ne considérer que des observations voisines, et avec cette restriction même le problème présente encore de grandes difficultés. Après y avoir réfléchi, il m'a paru qu'au lieu d'employer directement les observations, il est plus avantageux d'en tirer des données qui offrent un résultat exact et simple, et je me suis assuré que celles qui remplissent le mieux cette condition sont la longitude et la latitude géocentriques de la comète à un instant donné, et leurs premières et secondes différences divisées par les puissances correspondantes de l'élément du temps; car au moyen de ces données on peut déterminer rigoureusement et avec facilité les éléments, sans recourir à aucune intégration, et par la seule considération des équations différentielles de l'orbite.

Cette manière d'envisager le problème permet d'ailleurs d'employer un grand nombre d'observations voisines, et de comprendre ainsi un intervalle considérable entre les observations extrêmes, ce qui est très-utile pour diminuer l'influence des erreurs dont ces observations sont toujours susceptibles, à cause de la nébulosité qui environne les comètes. Je vais d'abord présenter les formules nécessaires pour conclure les différences premières de la longitude et de la latitude d'un nombre quelconque d'observations voisines; je déterminerai ensuite les éléments de l'orbite d'une comète au moyen de ces différences; enfin j'exposerai le moyen qui m'a paru le plus simple pour corriger ces éléments par trois observations éloignées entre elles.

29. Soient, à une époque donnée, α la longitude géocentrique d'une comète, et θ sa latitude boréale géocentrique, les latitudes australes devant être supposées négatives. Si l'on désigne par s le nombre des jours écoulés depuis cette époque, la longitude et la latitude géocentrique de la comète après cet intervalle seront exprimées, en vertu de la formule (i) du n° **21**, par les deux suites

$$\alpha + s\left(\frac{d\alpha}{ds}\right) + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right) + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right) + \ldots,$$

$$\theta + s\left(\frac{d\theta}{ds}\right) + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right) + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\theta}{ds^3}\right) + \ldots.$$

On déterminera les valeurs de α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, ..., θ, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)$, ..., au moyen de plusieurs longitudes et de plusieurs latitudes géocentriques observées. Pour y parvenir de la manière la plus simple, considérons la suite infinie qui exprime la longitude géocentrique. Les coefficients des puissances de s, dans cette suite, doivent être déterminés par la condition qu'elle doit représenter chaque longitude observée, en y substituant pour s le nombre de jours qui lui correspond; on aura ainsi autant d'équations que d'observations, et, si le nombre de celles-ci est n, on ne pourra déterminer à leur moyen, dans la suite infinie, que

n quantités α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, ... Mais on doit observer que, s étant supposé fort petit, on peut négliger les termes multipliés par s^n, s^{n+1}, ..., ce qui réduit la suite infinie à ses n premiers termes, que l'on pourra déterminer par les n observations. Ces déterminations ne seront qu'approchées, et leur exactitude dépendra de la petitesse des termes que l'on néglige; elles seront d'autant plus précises que s sera plus petit et que l'on emploiera un plus grand nombre d'observations. La théorie des interpolations se réduit donc à trouver une fonction rationnelle et entière de s, qui soit telle, qu'en y substituant pour s le nombre des jours qui correspondent à chaque observation, elle se change dans la longitude observée.

Représentons par β, β', β'', ... les longitudes observées de la comète, et par i, i', i'', ... les nombres des jours dont elles suivent l'époque donnée; ces nombres doivent être supposés négatifs pour les observations antérieures à cette époque. Si l'on fait

$$\frac{\beta' - \beta}{i' - i} = \delta\beta, \qquad \frac{\beta'' - \beta'}{i'' - i'} = \delta\beta', \qquad \frac{\beta''' - \beta''}{i''' - i''} = \delta\beta'', \quad \ldots,$$

$$\frac{\delta\beta' - \delta\beta}{i'' - i} = \delta^2\beta, \quad \frac{\delta\beta'' - \delta\beta'}{i''' - i'} = \delta^2\beta', \quad \ldots,$$

$$\frac{\delta^2\beta' - \delta^2\beta}{i''' - i} = \delta^3\beta, \quad \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots,$$

la fonction cherchée sera

$$\beta + (s-i)\,\delta\beta + (s-i)(s-i')\,\delta^2\beta + (s-i)(s-i')(s-i'')\,\delta^3\beta + \ldots;$$

car il est facile de s'assurer que, si l'on fait successivement $s = i$, $s = i'$, $s = i''$, ..., elle se changera dans β, β', β'', ...

Maintenant, si l'on compare la fonction précédente à celle-ci

$$\alpha + s\left(\frac{d\alpha}{ds}\right) + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right) + \ldots,$$

on aura, en égalant les coefficients des puissances semblables de s,

$$\alpha = 6 - i\,\delta 6 + ii'\,\delta^2 6 - ii'i''\,\delta^3 6 + \ldots,$$

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right) = \delta 6 - (i + i')\,\delta^2 6 + (ii' + ii'' + i'i'')\,\delta^3 6 - \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right) = \delta^2 6 - (i + i' + i'')\,\delta^3 6 + \ldots;$$

les différences ultérieures de α nous seront inutiles. Les coefficients de ces expressions sont alternativement positifs et négatifs; le coefficient de $\delta^r 6$ est, abstraction faite du signe, le produit r à r des r quantités i, i', i'', ..., $i^{(r-1)}$ dans la valeur de α; il est la somme des produits des mêmes quantités $r-1$ à $r-1$ dans la valeur de $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$; enfin il est la somme des produits de ces quantités $r-2$ à $r-2$ dans la valeur de $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$.

Si l'on nomme γ, γ', γ'',... les latitudes géocentriques observées de la comète, on aura les valeurs de θ, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)$, ..., en changeant, dans les expressions précédentes de α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, ..., les quantités 6, $6'$, $6''$, ..., en γ, γ', γ'', ...

Ces expressions sont d'autant plus précises qu'il y a plus d'observations et que les intervalles qui les séparent sont plus petits; on pourrait donc employer toutes les observations voisines de l'époque choisie, si elles étaient exactes; mais les erreurs dont elles sont toujours susceptibles conduiraient à un résultat fautif; ainsi, pour diminuer l'influence de ces erreurs, il faut augmenter l'intervalle des observations extrêmes, à mesure que l'on emploie plus d'observations. On pourra de cette manière, avec cinq observations, embrasser un intervalle de 35 ou 40 degrés, ce qui doit conduire à des valeurs très-approchées de la longitude et de la latitude géocentriques et de leurs premières et secondes différences.

Si l'époque que l'on choisit est telle qu'il y ait un nombre égal d'observations avant et après, de manière que chaque longitude qui la suit

ait une longitude correspondante qui la précède du même intervalle, cette condition rendra les valeurs de α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$ et $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$ plus approchées, et il est facile de s'assurer que de nouvelles observations, prises à égales distances de part et d'autre de l'époque, ne feraient qu'ajouter à ces valeurs des quantités qui seraient, par rapport à leurs derniers termes, du même ordre que le rapport de $s^2\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$ à α. Cette disposition symétrique a lieu lorsque, toutes les observations étant équidistantes, on fixe l'époque au milieu de l'intervalle qu'elles comprennent; il y a donc de l'avantage à employer de semblables observations. En général, il sera toujours avantageux de fixer l'époque vers le milieu de cet intervalle, parce que, le nombre de jours qui la séparent des observations extrêmes étant moins considérable, les approximations sont plus convergentes. On simplifiera encore le calcul en fixant l'époque à l'instant même d'une des observations, ce qui donnera immédiatement les valeurs de α et de θ.

Lorsque l'on aura déterminé, par ce qui précède, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)$, on en conclura de cette manière les différences premières et secondes de α et de θ, divisées par les puissances correspondantes de l'élément du temps. Si l'on néglige les masses des planètes et des comètes vis-à-vis celle du Soleil, prise pour unité de masse; si, de plus, on prend pour unité de distance sa moyenne distance à la Terre, le moyen mouvement de la Terre autour du Soleil sera, par le n° 23, la mesure du temps t. Soit donc λ le nombre de secondes que la Terre décrit dans un jour, en vertu de son moyen mouvement sidéral; le temps t correspondant au nombre s de jours sera λs; on aura donc

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\alpha}{ds}\right), \quad \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right).$$

Les observations donnent, en logarithmes des Tables, $\log\lambda = 4{,}0394622$; de plus, $\log\lambda^2 = \log\lambda + \log\frac{\lambda}{R}$, R étant le rayon du cercle, réduit en secondes; d'où résulte $\log\lambda^2 = 2,2750444$; partant, si l'on réduit en secondes les valeurs de $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$ et de $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, on aura les logarithmes de $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ et de $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, en retranchant des logarithmes de ces valeurs les logarithmes 4,0394622 et 2,2750444. On aura pareillement les logarithmes de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et de $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, en retranchant respectivement les mêmes logarithmes des logarithmes de leurs valeurs réduites en secondes.

C'est de la précision des valeurs de α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ que dépend l'exactitude des résultats suivants, et, comme leur formation est très-simple, il faut choisir et multiplier les observations, de manière à les obtenir avec le plus de précision qu'il est possible. Déterminons présentement, au moyen de ces valeurs, les éléments de l'orbite de la comète, et, pour généraliser ces résultats, considérons le mouvement d'un système de corps animés par des forces quelconques.

30. Soient x, y, z les coordonnées rectangles du premier corps; x', y', z' celles du second corps, et ainsi de suite. Concevons que le premier corps soit sollicité, parallèlement aux axes des x, des y et des z, par les forces X, Y et Z, que nous supposerons tendre à diminuer ces variables. Concevons pareillement que le second corps soit sollicité, parallèlement aux mêmes axes, par les forces X′, Y′, Z′, et ainsi de suite. Les mouvements de tous ces corps seront donnés par les équations différentielles du second ordre

$$
\begin{gathered}
0 = \frac{d^2x}{dt^2} + X, \quad 0 = \frac{d^2y}{dt^2} + Y, \quad 0 = \frac{d^2z}{dt^2} + Z, \\
0 = \frac{d^2x'}{dt^2} + X', \quad 0 = \frac{d^2y'}{dt^2} + Y', \quad 0 = \frac{d^2z'}{dt^2} + Z', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
$$

Si le nombre de ces corps est n, ces équations seront au nombre $3n$, et leurs intégrales finies renfermeront $6n$ arbitraires, qui seront les éléments des orbites des différents corps.

Pour déterminer ces éléments par les observations, nous transformerons les coordonnées de chaque corps en d'autres dont l'origine soit à l'observateur. En supposant donc un plan passant par l'œil de l'observateur, et dont la situation soit toujours parallèle à elle-même, tandis que l'observateur se meut sur une courbe donnée, nous nommerons ρ, ρ', ρ'', ... les distances de l'observateur aux différents corps, projetées sur ce plan; α, α', α'', ... les longitudes apparentes de ces corps, rapportées au même plan, et θ, θ', θ'', ... leurs latitudes apparentes. Les variables x, y, z seront données en fonction de ρ, α, θ et des coordonnées de l'observateur. Pareillement, x', y', z' seront données en fonction de ρ', α', θ' et des coordonnées de l'observateur, et ainsi de suite. D'ailleurs, si l'on suppose que les forces X, Y, Z, X′, Y′, Z′, ... sont dues à l'action réciproque des corps du système et à des attractions étrangères, elles seront données en fonction de ρ, ρ', ρ'', ...; α, α', α'', ...; θ, θ', θ'', ... et de quantités connues; les équations différentielles précédentes seront ainsi entre ces nouvelles variables et leurs premières et secondes différences. Or les observations font connaître, pour un instant donné, les valeurs de α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$; θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$; α', $\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)$, ...; il ne restera donc d'inconnues que les valeurs de ρ, ρ', ρ'', ..., et leurs premières et secondes différences. Ces inconnues sont au nombre de $3n$, et, comme on a $3n$ équations différentielles, on pourra les déterminer. On aura même cet avantage, que les premières et secondes différences de ρ, ρ', ρ'', ... ne se présenteront dans ces équations que sous une forme linéaire.

Les quantités α, θ, ρ, α', θ', ρ', ... et leurs premières différences divisées par dt étant connues, on aura, pour un instant donné, les valeurs de x, y, z, x', y', z', ... et de leurs premières différences divisées par dt. Si l'on substitue ces valeurs dans les $3n$ intégrales finies des équations précédentes et dans les différences premières de ces intégrales, on aura $6n$ équations, au moyen desquelles on pourra déterminer les $6n$ arbitraires de ces intégrales, ou les éléments des orbites des différents corps.

31. Appliquons cette méthode au mouvement des comètes. Pour cela, nous observerons que la force principale qui les anime est l'attraction du Soleil; nous pouvons ainsi faire abstraction de toute autre force. Cependant, si la comète passait assez près d'une grosse planète pour en éprouver un dérangement sensible, la méthode précédente ferait connaître encore sa vitesse et sa distance à la Terre; mais, ce cas étant excessivement rare, nous n'aurons égard, dans les recherches suivantes, qu'à l'action du Soleil.

Si l'on prend pour unité de masse celle du Soleil, et pour unité de distance sa moyenne distance à la Terre; si, de plus, on fixe au centre du Soleil l'origine des coordonnées x, y, z d'une comète, dont nous nommerons r le rayon vecteur, les équations différentielles (O) du n° 17 deviendront, en négligeant la masse de la comète vis-à-vis de celle du Soleil,

$$(k)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3},\\ 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3},\\ 0 &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

Supposons que le plan des x et des y soit le plan même de l'écliptique; que l'axe des x soit la ligne menée du centre du Soleil au premier point d'Ariès, à une époque donnée; que l'axe des y soit la ligne menée du centre du Soleil au premier point du Cancer, à la même époque; enfin, que les z positifs soient du même côté que le pôle boréal de l'écliptique. Nommons ensuite x' et y' les coordonnées de la Terre, et R son rayon vecteur. Cela posé :

Transformons les coordonnées x, y, z en d'autres relatives à l'observateur, et, pour cela, nommons α la longitude géocentrique de la comète, θ sa latitude géocentrique, et ρ sa distance au centre de la Terre, projetée sur l'écliptique; nous aurons

$$x = x' + \rho\cos\alpha,\quad y = y' + \rho\sin\alpha,\quad z = \rho\operatorname{tang}\theta.$$

Si l'on multiplie la première des équations (k) par $\sin\alpha$, et que l'on en retranche la seconde multipliée par $\cos\alpha$, on aura

$$0 = \sin\alpha\frac{d^2x}{dt^2} - \cos\alpha\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{x\sin\alpha - y\cos\alpha}{r^3};$$

d'où l'on tire, en substituant pour x et y leurs valeurs précédentes,

$$0 = \sin\alpha\frac{d^2x'}{dt^2} - \cos\alpha\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{x'\sin\alpha - y'\cos\alpha}{r^3} - 2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - \rho\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right).$$

La Terre étant retenue dans son orbite, comme la comète, par l'attraction du Soleil, on a

$$0 = \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{x'}{R^3},\quad 0 = \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y'}{R^3},$$

ce qui donne

$$\sin\alpha\frac{d^2x'}{dt^2} - \cos\alpha\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{y'\cos\alpha - x'\sin\alpha}{R^3};$$

on aura donc

$$0 = (y'\cos\alpha - x'\sin\alpha)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - 2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - \rho\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right).$$

Soit A la longitude de la Terre vue du Soleil; on aura

$$x' = R\cos A,\quad y' = R\sin A;$$

partant

$$y'\cos\alpha - x'\sin\alpha = R\sin(A - \alpha);$$

l'équation précédente donnera ainsi

$$(1)\qquad \left(\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{R\sin(A-\alpha)}{2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{\rho\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)}{2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}.$$

Cherchons maintenant une seconde expression de $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$. Pour cela, nous multiplierons la première des équations (k) par $\operatorname{tang}\theta\cos\alpha$, la seconde par $\operatorname{tang}\theta\sin\alpha$, et nous retrancherons la troisième équation de la somme de ces deux produits; nous aurons ainsi

$$o = \operatorname{tang}\theta\left(\cos\alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \sin\alpha\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \operatorname{tang}\theta\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{r^3} - \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{z}{r^3}.$$

Cette équation deviendra, en y substituant pour x, y, z leurs valeurs,

$$\begin{aligned} o = \operatorname{tang}\theta\left[\left(\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{x'}{r^3}\right)\cos\alpha + \left(\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y'}{r^3}\right)\sin\alpha\right] - \frac{2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d\rho}{dt}\right)}{\cos^2\theta} \\ - \rho\left[\frac{\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}{\cos^2\theta} + \frac{2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta}{\cos^3\theta} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\operatorname{tang}\theta\right]; \end{aligned}$$

or on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{x'}{r^3}\right)\cos\alpha + \left(\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y'}{r^3}\right)\sin\alpha &= (x'\cos\alpha + y'\sin\alpha)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \\ &= R\cos(A-\alpha)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right); \end{aligned}$$

partant

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d\rho}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2}\rho\left[\frac{\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)} + 2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\operatorname{tang}\theta + \frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\sin\theta\cos\theta}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\right] \\ + \frac{R\sin\theta\cos\theta\cos(A-\alpha)}{2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right); \end{aligned} \right.$$

si l'on retranche cette valeur de $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ de la première, et que l'on suppose

$$\mu' = \frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\operatorname{tang}\theta + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3\sin\theta\cos\theta}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\sin\theta\cos\theta\cos(A-\alpha) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\sin(A-\alpha)},$$

on aura

$$(3)\qquad \rho = \frac{R}{\mu'}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right).$$

La distance projetée ρ de la comète à la Terre étant toujours positive, cette équation fait voir que la distance r de la comète au Soleil est plus petite ou plus grande que la distance R du Soleil à la Terre, suivant que μ' est positif ou négatif; ces deux distances sont égales, si $\mu' = o$.

On peut, par l'inspection seule d'un globe céleste, déterminer le signe de μ', et, par conséquent, si la comète est plus près ou plus loin que la Terre du Soleil. Pour cela, imaginons un grand cercle qui passe par deux positions géocentriques et infiniment voisines de la comète. Soit γ l'inclinaison de ce cercle à l'écliptique, et λ la longitude de son nœud ascendant; on aura

$$\operatorname{tang}\gamma\sin(\alpha-\lambda) = \operatorname{tang}\theta,$$

d'où l'on tire

$$d\theta\sin(\alpha-\lambda) = d\alpha\sin\theta\cos\theta\cos(\alpha-\lambda);$$

en différentiant encore, on aura

$$o = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta_{,}}{dt^2}\right) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\operatorname{tang}\theta + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3\sin\theta\cos\theta,$$

$d^2\theta_{,}$ étant la valeur de $d^2\theta$ qui aurait lieu si le mouvement apparent de la comète continuait dans le grand cercle. La valeur de μ' devient ainsi, en y substituant pour $d\theta$ sa valeur $\frac{d\alpha\sin\theta\cos\theta\cos(\alpha-\lambda)}{\sin(\alpha-\lambda)}$,

$$\mu' = \frac{\left[\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - \left(\frac{d^2\theta_{,}}{dt^2}\right)\right]\sin(\alpha-\lambda)}{\sin\theta\cos\theta\sin(A-\lambda)}.$$

La fonction $\frac{\sin(\alpha-\lambda)}{\sin\theta\cos\theta}$ est constamment positive; la valeur de μ' est donc positive ou négative, suivant que $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - \left(\frac{d^2\theta_{,}}{dt^2}\right)$ est de même signe ou d'un signe contraire à $\sin(A-\lambda)$; or $A-\lambda$ est égal à deux angles droits, plus à la distance du Soleil au nœud ascendant du grand cercle; d'où il est facile de conclure que μ' sera positif ou négatif, suivant que dans une troisième position géocentrique de la comète, infiniment voisine des deux premières, la comète s'écartera du grand cercle du même côté où se trouve le Soleil, ou du côté opposé. Concevons donc que, par deux positions géocentriques très-voisines de la comète, on fasse passer un grand cercle de la sphère; si, dans une troisième position géocentrique consécutive et très-voisine des deux premières, la comète s'écarte de ce grand cercle du même côté que le Soleil ou du côté opposé, elle sera plus près ou plus loin du Soleil que la Terre; elle en sera également éloignée, si elle continue de paraître dans ce grand cercle; ainsi les diverses inflexions de sa route apparente nous éclairent sur les variations de sa distance au Soleil.

Pour éliminer r de l'équation (3), et pour réduire cette équation à ne renfermer que l'inconnue ρ, nous observerons que l'on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

en substituant au lieu de x, y, z leurs valeurs en ρ, α et θ, on aura

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + 2\rho(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha) + \frac{\rho^2}{\cos^2\theta};$$

mais on a $x' = \mathrm{R}\cos\mathrm{A}$, $y' = \mathrm{R}\sin\mathrm{A}$; partant

$$r^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2\theta} + 2\mathrm{R}\rho\cos(\mathrm{A}-\alpha) + \mathrm{R}^2.$$

Si l'on carre les deux membres de l'équation (3) mise sous cette forme

$$r^3(\mu'\mathrm{R}^2\rho + 1) = \mathrm{R}^3,$$

on aura, en substituant au lieu de r^2 sa valeur,

$$\left[\frac{\rho^2}{\cos^2\theta} + 2\mathrm{R}\rho\cos(\mathrm{A}-\alpha) + \mathrm{R}^2\right]^3(\mu'\mathrm{R}^2\rho + 1)^2 = \mathrm{R}^6, \tag{4}$$

équation dans laquelle il n'y a que ρ d'inconnue, et qui monte au septième degré, parce que, le terme tout connu du premier membre étant égal à R^6, l'équation entière est divisible par ρ. Ayant ainsi déterminé ρ, on aura $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ au moyen des équations (1) et (2). En substituant, par exemple, dans l'équation (1), au lieu de $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\mathrm{R}^3}$, sa valeur $\frac{\mu'\rho}{\mathrm{R}}$, donnée par l'équation (3), on aura

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = -\frac{\rho}{2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}\left[\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + \mu'\sin(\mathrm{A}-\alpha)\right].$$

L'équation (4) est souvent susceptible de plusieurs racines réelles et positives : en faisant passer son second membre dans le premier et en la divisant ensuite par ρ, son dernier terme sera

$$2\mathrm{R}^5[\mu'\mathrm{R}^3 + 3\cos(\mathrm{A}-\alpha)];$$

ainsi, l'équation en ρ étant du septième degré ou d'un degré impair, elle aura au moins deux racines réelles positives, si $\mu'\mathrm{R}^3 + 3\cos(\mathrm{A}-\alpha)$ est positif; car elle doit toujours, par la nature du problème, avoir une racine positive, et elle ne peut alors avoir ses racines positives en nombre impair. Chaque valeur réelle et positive de ρ donne une section conique différente pour l'orbite de la comète; on aura donc autant de ces courbes qui satisfont à trois observations voisines que ρ aura de valeurs réelles et positives, et, pour déterminer la véritable orbite de la comète, il faudra recourir à une nouvelle observation.

32. La valeur de ρ, tirée de l'équation (4), serait rigoureuse, si α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ étaient exactement connus; mais ces quantités ne sont qu'approchées. A la vérité, on peut en approcher de plus en plus par la méthode exposée précédemment, en faisant usage d'un grand nombre d'observations, ce qui donne l'avantage de considérer d'assez grands intervalles et de compenser les unes par les autres les erreurs des observations. Mais cette méthode a l'inconvénient analytique d'employer plus de trois observations dans un problème où trois suffisent. On peut obvier à cet inconvénient de la manière suivante, et rendre notre solution aussi approchée que l'on voudra, en ne considérant que trois observations.

Pour cela, supposons que α et θ représentent la longitude et la latitude géocentrique de l'observation intermédiaire ; si l'on substitue dans les équations (k) du numéro précédent, au lieu de x, y, z, leurs valeurs $x'+\rho\cos\alpha$, $y'+\rho\sin\alpha$ et $\rho\,\mathrm{tang}\,\theta$, elles donneront $\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ en fonction de ρ, α et θ, de leurs premières différences et des quantités connues. Si l'on différentie ces fonctions, on aura $\left(\frac{d^3\rho}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$ et $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$ en fonction de ρ, α, θ et de leurs premières et secondes différences. On pourra en éliminer la seconde différence de ρ au moyen de sa valeur, et sa première différence au moyen de l'équation (2) du numéro précédent. En continuant de différentier successivement les valeurs de $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$, et en éliminant les différences de α et de θ supérieures aux secondes différences, et toutes les différences de ρ, on aura les valeurs de $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right)$, ..., $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\theta}{dt^4}\right)$, ..., en fonction de ρ, α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$. Cela posé :

Soient $\alpha_{,}$, α, α' les trois longitudes géocentriques observées de la comète ; $\theta_{,}$, θ, θ' ses trois latitudes géocentriques correspondantes ; soient i le nombre des jours qui séparent la première de la seconde observation, et i' celui des jours qui séparent la seconde observation de la troisième ; enfin, soit λ l'arc que la Terre décrit dans un jour par son moyen mouvement sidéral ; on aura, par le n° **29**,

$$\alpha_{,}=\alpha-i\lambda\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)+\frac{i^2\lambda^2}{1.2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)-\frac{i^3\lambda^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)+\ldots,$$

$$\alpha'=\alpha+i'\lambda\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)+\frac{i'^2\lambda^2}{1.2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+\frac{i'^3\lambda^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)+\ldots,$$

$$\theta_{,}=\theta-i\lambda\left(\frac{d\theta}{dt}\right)+\frac{i^2\lambda^2}{1.2}\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)-\frac{i^3\lambda^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)+\ldots,$$

$$\theta'=\theta+i'\lambda\left(\frac{d\theta}{dt}\right)+\frac{i'^2\lambda^2}{1.2}\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)+\frac{i'^3\lambda^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)+\ldots.$$

Si l'on substitue dans ces séries, au lieu de $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right)$, ..., $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\theta}{dt^4}\right)$, ..., leurs valeurs obtenues par ce qui précède, on aura quatre équations entre les cinq inconnues ρ, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$. Ces équations seront d'autant plus exactes, que l'on aura considéré un plus grand nombre de termes dans ces séries. On aura ainsi $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ en fonction de ρ et de quantités connues ; et, en les substituant dans l'équation (4) du numéro précédent, elle ne renfermera plus que l'inconnue ρ. Au reste, cette méthode, que je n'expose ici que pour montrer comment on peut obtenir des valeurs de plus en plus approchées de ρ en n'employant que trois observations, exigerait des calculs pénibles dans la pratique, et il est à la fois plus exact et plus simple d'en considérer un plus grand nombre, par la méthode du n° **29**.

33. Lorsque les valeurs de ρ et de $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ seront déterminées, on aura celles de x, y, z, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, au moyen des équations

$$x=\mathrm{R}\cos\mathrm{A}+\rho\cos\alpha,\quad y=\mathrm{R}\sin\mathrm{A}+\rho\sin\alpha,\quad z=\rho\,\mathrm{tang}\,\theta,$$

et de leurs différentielles divisées par dt,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left(\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\cos\mathrm{A}-\mathrm{R}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dt}\right)\sin\mathrm{A}+\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\cos\alpha-\rho\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\sin\alpha,$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\sin\mathrm{A}+\mathrm{R}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dt}\right)\cos\mathrm{A}+\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\sin\alpha+\rho\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\alpha,$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\mathrm{tang}\,\theta+\frac{\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\cos^2\theta}.$$

Les valeurs de $\left(\frac{d\mathrm{A}}{dt}\right)$ et de $\left(\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)$ sont données par la théorie du mouvement de la Terre : pour en faciliter le calcul, soient E l'excentricité de l'orbite terrestre et Π la longitude de son périhélie ; on a, par la nature du mouvement elliptique,

$$\left(\frac{dA}{dt}\right) = \frac{\sqrt{1-E^2}}{R^2}, \qquad R = \frac{1-E^2}{1+E\cos(A-H)}.$$

Ces deux équations donnent

$$\left(\frac{dR}{dt}\right) = \frac{E\sin(A-H)}{\sqrt{1-E^2}};$$

soit R' le rayon vecteur de la Terre, correspondant à la longitude A de cette planète, augmentée d'un angle droit; on aura

$$R' = \frac{1-E^2}{1-E\sin(A-H)},$$

d'où l'on tire

$$E\sin(A-H) = \frac{R'-1+E^2}{R'};$$

partant

$$\left(\frac{dR}{dt}\right) = \frac{R'+E^2-1}{R'\sqrt{1-E^2}}.$$

Si l'on néglige le carré de l'excentricité de l'orbite terrestre, qui est très-petit, on aura

$$\left(\frac{dA}{dt}\right) = \frac{1}{R^2}, \qquad \left(\frac{dR}{dt}\right) = R'-1;$$

les valeurs précédentes de $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ deviendront ainsi

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = (R'-1)\cos A - \frac{\sin A}{R} + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)\cos\alpha - \rho\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\sin\alpha,$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = (R'-1)\sin A + \frac{\cos A}{R} + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)\sin\alpha + \rho\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\alpha.$$

R, R' et A étant donnés immédiatement par les Tables du Soleil, le calcul des six quantités x, y, z, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ sera facile, lorsque ρ et $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ seront connus. On en tirera les éléments de l'orbite de la comète, de cette manière.

Le secteur infiniment petit, que la projection du rayon vecteur de la comète sur le plan de l'écliptique décrit durant l'élément du temps dt, est $\frac{x\,dy - y\,dx}{2}$, et il est visible que ce secteur est positif ou négatif, suivant que le mouvement de la comète est direct ou rétrograde; ainsi, en formant la quantité $x\left(\frac{dy}{dt}\right) - y\left(\frac{dx}{dt}\right)$, elle indiquera par son signe le sens du mouvement de la comète.

Pour déterminer la position de l'orbite, nommons φ son inclinaison à l'écliptique, et I la longitude du nœud qui serait ascendant si le mouvement de la comète était direct; nous aurons

$$z = y\cos I \tang\varphi - x\sin I \tang\varphi.$$

Cette équation, combinée avec sa différentielle, donne

$$\tang I = \frac{y\left(\frac{dz}{dt}\right) - z\left(\frac{dy}{dt}\right)}{x\left(\frac{dz}{dt}\right) - z\left(\frac{dx}{dt}\right)},$$

$$\tang\varphi = \frac{y\left(\frac{dz}{dt}\right) - z\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\sin I\left[x\left(\frac{dy}{dt}\right) - y\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]}.$$

φ devant toujours être positif et moindre qu'un angle droit, cette condition détermine le signe de $\sin I$; or, la tangente de I et le signe de son sinus étant déterminés, l'angle I est entièrement déterminé. Cet angle est la longitude du nœud ascendant de l'orbite, si le mouvement est direct; mais il faut lui ajouter deux angles droits pour avoir la longitude de ce nœud, si le mouvement est rétrograde. Il serait plus simple de ne considérer que des mouvements directs, en faisant varier l'inclinaison φ des orbites depuis zéro jusqu'à deux angles droits; car il est visible qu'alors les mouvements rétrogrades répondent à une inclinaison plus grande qu'un angle droit. Dans ce cas, $\tang\varphi$ est du même signe que $x\left(\frac{dy}{dt}\right) - y\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ce qui détermine $\sin I$, et par conséquent l'angle I, qui exprime toujours la longitude du nœud ascendant.

a et ea étant le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite, on a, par les nos 18 et 19, en y faisant $\mu = 1$,

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$$a(1 - e^2) = 2r - \frac{r^2}{a} - \left[x\left(\frac{dx}{dt}\right) + y\left(\frac{dy}{dt}\right) + z\left(\frac{dz}{dt}\right)\right]^2.$$

La première de ces équations détermine le demi-grand axe de l'orbite, et la seconde détermine son excentricité. Le signe de la fonction $x\left(\frac{dx}{dt}\right) + y\left(\frac{dy}{dt}\right) + z\left(\frac{dz}{dt}\right)$ fait connaître si la comète a déjà passé par son périhélie; car elle s'en approche, si cette fonction est négative; dans le cas contraire, la comète s'éloigne de ce point.

Soit T l'intervalle de temps compris entre l'époque et le passage de la comète par le périhélie; les deux premières des équations (f) du no 20 donneront, en observant que, μ étant supposé égal à l'unité, on a $n = a^{-\frac{3}{2}}$,

$$r = a(1 - e\cos u), \quad \mathrm{T} = a^{\frac{3}{2}}(u - e\sin u).$$

La première de ces équations donne l'angle u, et la seconde fait connaître T. Ce temps, ajouté ou retranché de l'époque, suivant que la comète s'approche ou s'éloigne du périhélie, donnera l'instant de son passage par ce point. Les valeurs de x et de y déterminent l'angle que la projection du rayon vecteur r fait avec l'axe des x, et, puisque l'on connaît l'angle I formé par cet axe et par la ligne des nœuds, on aura l'angle que forme cette dernière ligne avec la projection de r, d'où l'on tirera, au moyen de l'inclinaison φ de l'orbite, l'angle formé par la ligne des nœuds et par le rayon r. Mais, l'angle u étant connu, on aura, au moyen de la troisième des équations (f) du no 20, l'angle v que forme ce rayon avec la ligne des apsides; on aura donc l'angle compris entre les deux lignes des apsides et des nœuds, et par conséquent la position du périhélie; tous les éléments de l'orbite seront ainsi déterminés.

34. Ces éléments sont donnés, par ce qui précède, en fonction de ρ, $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ et des quantités connues; et, comme $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ est donné en ρ par le no 31, les éléments de l'orbite seront fonctions de ρ et de quantités connues. Si l'un d'eux était donné, on aurait une nouvelle équation, au moyen de laquelle on pourrait déterminer ρ; cette équation aurait un diviseur commun avec l'équation (4) du no 31, et, en cherchant ce diviseur par les méthodes ordinaires, on parviendrait à une équation du premier degré en ρ; on aurait, de plus, une équation de condition entre les données des observations, et cette équation serait celle qui doit avoir lieu pour que l'élément donné puisse appartenir à l'orbite de la comète.

Appliquons maintenant cette considération à la nature. Pour cela, nous observerons que les orbites des comètes sont des ellipses très-allongées, qui se confondent sensiblement avec une parabole, dans la partie dans laquelle ces astres sont visibles; on peut donc supposer sans erreur sensible $a = \infty$, et par conséquent $\frac{1}{a} = 0$; l'expression de $\frac{1}{a}$ du numéro précédent donnera ainsi

$$0 = \frac{2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}.$$

Si l'on substitue ensuite, au lieu de $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, leurs valeurs trouvées dans le même numéro, on aura, après toutes les réductions et en négligeant le carré de $\mathrm{R}' - 1$,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\operatorname{tang}\theta + \frac{\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\cos^2\theta}\right]^2 \\ & + 2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\left[(\mathrm{R}' - 1)\cos(\mathrm{A} - \alpha) - \frac{\sin(\mathrm{A} - \alpha)}{\mathrm{R}}\right] \\ & + 2\rho\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left[(\mathrm{R}' - 1)\sin(\mathrm{A} - \alpha) + \frac{\cos(\mathrm{A} - \alpha)}{\mathrm{R}}\right] + \frac{1}{\mathrm{R}^2} - \frac{2}{r};\end{aligned}\right.$$

en substituant dans cette équation, au lieu de $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$, sa valeur

$$-\frac{\rho}{2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}\left[\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+\mu'\sin(A-\alpha)\right],$$

trouvée dans le n° 31; en faisant ensuite

$$4\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 B = 4\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^4+\left[\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+\mu'\sin(A-\alpha)\right]^2$$
$$+\left[\text{tang}\,\theta\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+\mu'\,\text{tang}\,\theta\sin(A-\alpha)-\frac{2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\cos^2\theta}\right]^2,$$

$$C=\frac{\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+\mu'\sin(A-\alpha)}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}\left[\frac{\sin(A-\alpha)}{R}-(R'-1)\cos(A-\alpha)\right]$$
$$+2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left[(R'-1)\sin(A-\alpha)+\frac{\cos(A-\alpha)}{R}\right],$$

on aura

$$0=B\rho^2+C\rho+\frac{1}{R^2}-\frac{2}{r},$$

et par conséquent

$$r^2\left(B\rho^2+C\rho+\frac{1}{R^2}\right)^2=4;$$

cette équation n'est que du sixième degré, et, sous ce rapport, elle est plus simple que l'équation (4) du n° 31; mais elle est particulière à la parabole, au lieu que l'équation (4) s'étend à toute espèce de section conique.

35. On voit par l'analyse précédente que, la détermination des orbes paraboliques des comètes conduisant à plus d'équations que d'inconnues, on peut, en combinant diversement ces équations, former autant de méthodes différentes pour calculer ces orbes. Examinons celles dont on doit attendre le plus de précision dans les résultats, ou qui participent le moins aux erreurs des observations.

C'est principalement sur les valeurs des différences secondes $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ que ces erreurs ont une influence sensible; en effet, il faut, pour les déterminer, prendre les différences finies des longitudes et des latitudes géocentriques de la comète, observées dans un court intervalle de temps; or, ces différences étant moindres que les différences premières, les erreurs des observations en sont une plus grande partie aliquote; d'ailleurs, les formules du n° 29, qui déterminent, par la comparaison des observations, les valeurs de α, θ, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, donnent avec plus de précision les quatre premières de ces quantités que les deux dernières; il y a donc de l'avantage à s'appuyer le moins qu'il est possible sur les différences secondes de α et de θ; et, comme on ne peut pas les rejeter toutes deux à la fois, la méthode qui n'emploie que la plus grande doit conduire aux résultats les plus précis. Cela posé :

Reprenons les équations trouvées dans les n^{os} 31 et 34,

$$(\mathrm{L})\quad\left\{\begin{aligned}
r^2&=\frac{\rho^2}{\cos^2\theta}+2R\rho\cos(A-\alpha)+R^2,\\
\left(\frac{d\rho}{dt}\right)&=\frac{R\sin(A-\alpha)}{2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{\rho\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)}{2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)},\\
\left(\frac{d\rho}{dt}\right)&=-\tfrac{1}{2}\rho\left[\frac{\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}+2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\text{tang}\,\theta+\frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\sin\theta\cos\theta}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\right]\\
&\quad+\frac{R\sin\theta\cos\theta\cos(A-\alpha)}{2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right),\\
0&=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\text{tang}\,\theta+\frac{\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\cos^2\theta}\right]^2\\
&\quad+2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\left[(R'-1)\cos(A-\alpha)-\frac{\sin(A-\alpha)}{R}\right]\\
&\quad+2\rho\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left[(R'-1)\sin(A-\alpha)+\frac{\cos(A-\alpha)}{R}\right]+\frac{1}{R^2}-\frac{2}{r}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on veut rejeter $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, on ne considérera que la première, la seconde et la quatrième de ces équations; en éliminant $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ de la dernière au moyen de la seconde, on formera une équation qui, délivrée de fractions, renfermera un terme multiplié par $r^6\rho^2$ et d'autres termes affectés des puissances paires et impaires de ρ et de r. Si l'on met dans un membre tous les termes affectés des puissances paires de r, et dans l'autre membre tous les termes affectés de ses puissances impaires, et que l'on carre chacun de ses membres pour n'avoir que des puissances paires de r, le terme multiplié par $r^6\rho^2$ en produira un multiplié par $r^{12}\rho^4$; en substituant donc, au lieu de r^2, sa valeur donnée par la première des équations (L), on aura une équation finale du seizième degré en ρ. Mais, au lieu de former cette équation pour la résoudre ensuite, il sera plus simple de satisfaire par des essais aux trois équations précédentes.

Si l'on veut rejeter $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, il faudra considérer la première, la troisième et la quatrième des équations (L). Ces trois équations conduisent encore à une équation finale du seizième degré en ρ, et l'on peut facilement y satisfaire par des essais.

Les deux méthodes précédentes me paraissent être les plus exactes que l'on puisse employer dans la détermination des orbes paraboliques des comètes; il est même indispensable d'y recourir, si le mouvement de la comète en longitude ou en latitude est insensible, ou trop petit pour que les erreurs des observations n'altèrent pas sensiblement sa seconde différence : dans ce cas, il faudra rejeter celle des équations (L) qui contient cette différence. Mais, quoique dans ces méthodes on n'emploie que trois de ces équations, cependant la quatrième est utile pour déterminer, parmi toutes les valeurs réelles et positives de ρ qui satisfont au système des trois autres équations, celle qui doit être admise.

36. Les éléments de l'orbite d'une comète, déterminés par ce qui précède, seraient exacts, si les valeurs de α, θ et de leurs premières et secondes différences étaient rigoureuses; car nous avons eu égard,

d'une manière fort simple, à l'excentricité de l'orbe terrestre, au moyen du rayon vecteur R′ de la Terre, correspondant à son anomalie vraie augmentée d'un angle droit; nous nous sommes permis seulement de négliger le carré de cette excentricité, comme une trop petite fraction pour que son omission puisse influer sensiblement sur les résultats. Mais θ, α et leurs différences sont toujours susceptibles de quelque inexactitude, soit à cause des erreurs des observations, soit parce que nous n'avons tiré ces différences des observations que d'une manière approchée. Il est donc nécessaire de corriger les éléments au moyen de trois observations éloignées entre elles, ce que l'on peut faire d'une infinité de manières; car, si l'on connaît à peu près deux quantités relatives au mouvement d'une comète, telles que les rayons vecteurs correspondants à deux observations, ou la position du nœud et l'inclinaison de l'orbite; en calculant les observations, d'abord avec ces quantités, et ensuite avec d'autres quantités qui en soient très-peu différentes, la loi des différences entre les résultats fera aisément connaître les corrections que ces quantités doivent subir. Mais, parmi les combinaisons deux à deux des quantités relatives au mouvement des comètes, il en est une qui doit offrir le calcul le plus simple, et qui par cette raison mérite d'être recherchée : il importe, en effet, dans un problème aussi compliqué, d'épargner au calculateur toute opération superflue. Les deux éléments qui m'ont paru présenter cet avantage sont la distance périhélie et l'instant du passage de la comète par ce point : non-seulement ils sont faciles à déduire des valeurs de ρ et de $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$, mais il est très-aisé de les corriger par les observations, sans être obligé, à chaque variation qu'on leur fait subir, de déterminer les autres éléments correspondants de l'orbite.

Reprenons l'équation trouvée dans le n° 19,

$$a(1-e^2) = 2r - \frac{r^2}{a} - \frac{r^2\,dr^2}{dt^2},$$

$a(1-e^2)$ est le demi-paramètre de la section conique dont a est le demi-grand axe et ea l'excentricité; dans la parabole, où a est infini et e égal à l'unité, $a(1-e^2)$ est le double de la distance périhélie; soit D cette distance : l'équation précédente devient, relativement à cette courbe,

$$D = r - \frac{1}{2}\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2.$$

$\frac{r\,dr}{dt}$ est égal à $\frac{\frac{1}{2}d.r^2}{dt}$; en substituant au lieu de r^2 sa valeur $\frac{\rho^2}{\cos^2\theta} + 2R\rho\cos(A-\alpha) + R^2$, et au lieu de $\left(\frac{dR}{dt}\right)$ et de $\left(\frac{dA}{dt}\right)$ leurs valeurs trouvées dans le n° 33, on aura

$$\begin{aligned}\frac{r\,dr}{dt} = {} & \frac{\rho}{\cos^2\theta}\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\tang\theta\right] + R\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\cos(A-\alpha) \\ & + \rho\left[(R'-1)\cos(A-\alpha) - \frac{\sin(A-\alpha)}{R}\right] + \rho R\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\sin(A-\alpha) + R(R'-1).\end{aligned}$$

Soit P cette quantité; si elle est négative, le rayon vecteur r va en diminuant, et par conséquent la comète tend vers son périhélie; mais elle s'en éloigne, si P est positif. On a ensuite

$$D = r - \tfrac{1}{2}P^2;$$

la distance angulaire v de la comète à son périhélie se déterminera par l'équation polaire de la parabole

$$\cos^2\tfrac{1}{2}v = \frac{D}{r}.$$

Enfin, on aura le temps employé à décrire l'angle v, par la Table du mouvement des comètes. Ce temps, ajouté ou retranché de celui de l'époque, suivant que P est négatif ou positif, donnera l'instant du passage de la comète par le périhélie.

37. En rassemblant ces divers résultats, on aura la méthode suivante, pour déterminer les orbes paraboliques des comètes.

Méthode générale pour déterminer les orbes des comètes.

Cette méthode sera divisée en deux parties : dans la première, nous donnerons le moyen d'obtenir à peu près la distance périhélie de la comète et l'instant de son passage au périhélie; dans la seconde, nous déterminerons exactement tous les éléments de l'orbite, en supposant ceux-ci à peu près connus.

Détermination approchée de la distance périhélie de la comète et de l'instant de son passage au périhélie.

On choisira trois, quatre, ou cinq,... observations de la comète, également éloignées les unes des autres, autant qu'il sera possible; on pourra embrasser, avec quatre observations, un intervalle de 30°; avec cinq observations, un intervalle de 36° ou 40°, et ainsi du reste; mais il faudra toujours que l'intervalle compris entre les observations soit d'autant plus considérable qu'elles sont en plus grand nombre, afin de diminuer l'influence de leurs erreurs. Cela posé :

Soient β, β', β'', ... les longitudes géocentriques successives de la comète; γ, γ', γ'', ... les latitudes correspondantes, ces latitudes étant supposées positives ou négatives suivant qu'elles sont boréales ou australes. On divisera la différence $\beta'-\beta$ par le nombre des jours qui séparent la première de la seconde observation; on divisera pareillement la différence $\beta''-\beta'$ par le nombre des jours qui séparent la seconde de la troisième observation; on divisera encore la différence $\beta'''-\beta''$ par le nombre des jours qui séparent la troisième de la quatrième observation, et ainsi de suite. Soient $\delta\beta$, $\delta\beta'$, $\delta\beta''$, ... ces quotients.

On divisera la différence $\delta\beta'-\delta\beta$ par le nombre des jours qui séparent la première observation de la troisième; on divisera pareillement la différence $\delta\beta''-\delta\beta'$ par le nombre des jours qui séparent la seconde observation de la quatrième; on divisera encore la différence $\delta\beta'''-\delta\beta''$

par le nombre des jours qui séparent la troisième observation de la cinquième, et ainsi de suite. Soient $\delta^2\beta$, $\delta^2\beta'$, $\delta^2\beta''$,... ces quotients.

On divisera la différence $\delta^2\beta' - \delta^2\beta$ par le nombre des jours qui séparent la première observation de la quatrième; on divisera pareillement $\delta^2\beta'' - \delta^2\beta'$ par le nombre des jours qui séparent la seconde observation de la cinquième, et ainsi de suite. Soient $\delta^3\beta$, $\delta^3\beta'$,... ces quotients. On continuera ainsi, jusqu'à ce que l'on parvienne à $\delta^{n-1}\beta$, n étant le nombre des observations employées.

Cela fait, on prendra une époque moyenne ou à peu près moyenne entre les instants des deux observations extrêmes; et, en nommant i, i', i'', i'''.... le nombre des jours dont elle précède chaque observation, i, i', i'',... devant être supposés négatifs pour les observations antérieures à cette époque, la longitude de la comète, après un petit nombre z de jours comptés depuis l'époque, sera exprimée par la formule suivante :

$$(p)\quad\left\{\begin{aligned}&\beta - i\,\delta\beta + ii'\,\delta^2\beta - ii'i''\,\delta^3\beta + \ldots\\ &+ z[\delta\beta - (i+i')\,\delta^2\beta + (ii' + ii'' + i'i'')\,\delta^3\beta - (ii'i'' + ii'i''' + ii''i''' + i'i''i''')\,\delta^4\beta + \ldots]\\ &+ z^2[\delta^2\beta - (i + i' + i'')\,\delta^3\beta + (ii' + ii'' + ii''' + i'i'' + i'i''' + i''i''')\,\delta^4\beta - \ldots].\end{aligned}\right.$$

Les coefficients de $-\delta\beta$, $+\delta^2\beta$, $-\delta^3\beta$,..., dans la partie indépendante de z, sont : 1° le nombre i; 2° le produit des deux nombres i et i'; 3° le produit des trois nombres i, i', i'', etc.

Les coefficients de $-\delta^2\beta$, $+\delta^3\beta$, $-\delta^4\beta$,..., dans la partie multipliée par z, sont : 1° la somme des deux nombres i et i'; 2° la somme des produits deux à deux des trois nombres i, i', i''; 3° la somme des produits trois à trois des quatre nombres i, i', i'', i''', etc.

Les coefficients de $-\delta^3\beta$, $+\delta^4\beta$, $-\delta^5\beta$,..., dans la partie multipliée par z^2, sont : 1° la somme des trois nombres i, i', i''; 2° la somme des produits deux à deux des quatre nombres i, i', i'', i'''; 3° la somme des produits trois à trois des cinq nombres i, i', i'', i''', i^{iv}, etc.

Au lieu de former ces produits, il est aussi simple de développer la fonction

$$\beta + (z-i)\,\delta\beta + (z-i)(z-i')\,\delta^2\beta + (z-i)(z-i')(z-i'')\,\delta^3\beta + \ldots,$$

en rejetant les puissances de z supérieures au carré, ce qui donnera la formule précédente.

Si l'on opère d'une manière semblable sur les latitudes géocentriques observées de la comète, sa latitude géocentrique, après le nombre z de jours comptés depuis l'époque, sera exprimée par la formule (p), en y changeant β en γ. Nommons (q) ce que devient cette formule par ce changement. Cela posé :

α sera la partie indépendante de z dans la formule (p); θ sera la partie indépendante de z dans la formule (q).

En réduisant en secondes le coefficient de z dans la formule (p), et en retranchant du logarithme tabulaire de ce nombre de secondes le logarithme 4,0394622, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par a.

En réduisant en secondes le coefficient de z^2 dans la même formule, et en retranchant du logarithme de ce nombre de secondes le logarithme 1,9740144, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par b.

En réduisant pareillement en secondes les coefficients de z et de z^2 dans la formule (q), et en retranchant respectivement des logarithmes de ces nombres de secondes les logarithmes 4,0394622 et 1,9740144, on aura les logarithmes de deux nombres que nous nommerons h et l.

C'est de la précision des valeurs de a, b, h, l que dépend l'exactitude de la méthode, et, comme leur formation est très-simple, il faut choisir et multiplier les observations, de manière à les obtenir avec toute la précision que les observations comportent. Il est aisé de voir que ces valeurs ne sont que les quantités $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, que nous avons exprimées, pour plus de simplicité, par les lettres précédentes.

Si le nombre des observations est impair, on pourra fixer l'époque à l'instant de l'observation moyenne, ce qui dispensera de calculer les parties indépendantes de z dans les deux formules précédentes; car il est visible que ces parties sont alors respectivement égales à la longitude et à la latitude de l'observation moyenne.

Ayant ainsi déterminé les valeurs de α, a, b, θ, h et l, on déterminera la longitude du Soleil à l'instant que l'on a choisi pour époque. Soit E cette longitude, R la distance correspondante de la Terre au Soleil, et R′ la distance qui répond à E augmenté d'un angle droit; on formera les équations suivantes :

$$(1)\qquad r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta} - 2\mathrm{R}x\cos(\mathrm{E}-\alpha) + \mathrm{R}^2,$$

$$(2)\qquad y = \frac{\mathrm{R}\sin(\mathrm{E}-\alpha)}{2a}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\mathrm{R}^3}\right) - \frac{bx}{2a},$$

$$(3)\qquad y = -x\left(h\,\mathrm{tang}\,\theta + \frac{l}{2h} + \frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{2h}\right) + \frac{\mathrm{R}\sin\theta\cos\theta}{2h}\cos(\mathrm{E}-\alpha)\left(\frac{1}{\mathrm{R}^3} - \frac{1}{r^3}\right),$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = y^2 + a^2x^2 + \left(y\,\mathrm{tang}\,\theta + \frac{hx}{\cos^2\theta}\right)^2 + 2y\left[\frac{\sin(\mathrm{E}-\alpha)}{\mathrm{R}} - (\mathrm{R}'-1)\cos(\mathrm{E}-\alpha)\right] \\ - 2ax\left[(\mathrm{R}'-1)\sin(\mathrm{E}-\alpha) + \frac{\cos(\mathrm{E}-\alpha)}{\mathrm{R}}\right] + \frac{1}{\mathrm{R}^2} - \frac{2}{r}. \end{aligned}\right.$$

Pour tirer de ces équations les valeurs des inconnues x, y et r, on considérera d'abord si, abstraction faite du signe, b est plus grand ou plus petit que l. Dans le premier cas, on fera usage des équations (1), (2) et (4). On formera une première hypothèse pour x, en le supposant, par exemple, égal à l'unité, et l'on en conclura, au moyen des équations (1) et (2), les valeurs de r et de y. On substituera ensuite ces valeurs dans l'équation (4), et, si le reste est nul, ce sera une preuve que la valeur de x a été bien choisie; mais, si ce reste est négatif, on augmentera la valeur de x, et on la diminuera si le reste est positif. On aura ainsi, au moyen d'un petit nombre d'essais, les valeurs de x, y et r; mais, comme ces inconnues peuvent être susceptibles de plusieurs valeurs réelles et positives, il faudra choisir celle qui satisfait exactement ou à peu près à l'équation (3).

Dans le second cas, c'est-à-dire si l'on a $l > b$, on fera usage des équations (1), (3) et (4), et alors ce sera l'équation (2) qui servira de vérification.

Ayant ainsi les valeurs de x, y et r, on formera la quantité

$$\mathrm{P} = \frac{x}{\cos^2\theta}(y + hx\,\mathrm{tang}\,\theta) - \mathrm{R}y\cos(\mathrm{E}-\alpha) + x\left[\frac{\sin(\mathrm{E}-\alpha)}{\mathrm{R}} - (\mathrm{R}'-1)\cos(\mathrm{E}-\alpha)\right]$$
$$- \mathrm{R}ax\sin(\mathrm{E}-\alpha) + \mathrm{R}(\mathrm{R}'-1).$$

La distance périhélie D de la comète sera

$$\mathrm{D} = r - \tfrac{1}{2}\mathrm{P}^2;$$

le cosinus de son anomalie v sera donné par l'équation

$$\cos^2\tfrac{1}{2}v = \frac{\mathrm{D}}{r},$$

et l'on en conclura, par la Table du mouvement des comètes, le temps employé à parcourir l'angle v. Pour avoir l'instant du passage au périhélie, il faudra ajouter ce temps à l'époque si P est négatif, et l'en soustraire si P est positif, parce que, dans le premier cas, la comète s'approche du périhélie, au lieu que, dans le second cas, elle s'en éloigne.

Ayant ainsi à peu près la distance périhélie de la comète et l'instant de son passage au périhélie, on pourra les corriger par la méthode suivante, qui a l'avantage d'être indépendante de la connaissance approchée des autres éléments de l'orbite.

Détermination exacte des éléments de l'orbite, lorsque l'on connaît à peu près la distance périhélie de la comète et l'instant de son passage au périhélie.

On choisira d'abord trois observations éloignées de la comète; en partant ensuite de la distance périhélie de la comète et de l'instant de son passage au périhélie, déterminés par ce qui précède, on calculera les trois anomalies de la comète et les rayons vecteurs correspondants aux instants des trois observations. Soient v, v', v'' ces anomalies, celles qui précèdent le passage au périhélie devant être supposées négatives;

soient de plus r, r', r'' les rayons vecteurs correspondants de la comète; $v'-v$, $v''-v$ seront les angles compris entre r et r' et entre r et r''; soient U le premier de ces angles, et U′ le second. Nommons encore α, α', α'' les trois longitudes géocentriques observées de la comète, et rapportées à un équinoxe fixe; θ, θ', θ'' ses trois latitudes géocentriques, les latitudes australes devant être supposées négatives; soient β, β', β'' ses trois longitudes héliocentriques correspondantes, et ϖ, ϖ', ϖ'' ses trois latitudes héliocentriques. Enfin, nommons E, E′, E″ les trois longitudes correspondantes du Soleil; R, R′, R″ ses trois distances au centre de la Terre.

Concevons que la lettre S indique le centre du Soleil, T celui de la Terre, C le centre de la comète, et C′ sa projection sur le plan de l'écliptique. L'angle STC′ est la différence des longitudes géocentriques du Soleil et de la comète; en ajoutant le logarithme du cosinus de cet angle au logarithme du cosinus de la latitude géocentrique de la comète, on aura le logarithme du cosinus de l'angle STC; on connaîtra donc dans le triangle STC le côté ST ou R, le côté SC ou r, et l'angle STC; on aura ainsi, par la Trigonométrie, l'angle CST. On aura ensuite la latitude héliocentrique ϖ de la comète, au moyen de l'équation

$$\sin\varpi = \frac{\sin\theta \sin \mathrm{CST}}{\sin \mathrm{CTS}}.$$

L'angle TSC′ est le côté d'un triangle sphérique rectangle dont l'hypoténuse est l'angle TSC, et dont un des côtés est l'angle ϖ; d'où l'on tirera facilement l'angle TSC′, et par conséquent la longitude héliocentrique β de la comète.

On aura de la même manière ϖ', β', ϖ'', β'', et les valeurs de β, β', β'' feront connaître si le mouvement de la comète est direct ou rétrograde.

Si l'on imagine les deux arcs de latitude ϖ et ϖ' réunis au pôle de l'écliptique, ils y feront un angle égal à $\beta'-\beta$, et dans le triangle sphérique formé par cet angle et par les côtés $\frac{\pi}{2}-\varpi$ et $\frac{\pi}{2}-\varpi'$, π étant la demi-circonférence, le côté opposé à l'angle $\beta'-\beta$ sera l'angle au Soleil, compris entre les deux rayons vecteurs r et r'. On le déterminera

aisément par la Trigonométrie sphérique ou par la formule suivante

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{V} = \cos^2\tfrac{1}{2}(\varpi+\varpi') - \cos^2\tfrac{1}{2}(\beta'-\beta)\cos\varpi\cos\varpi',$$

dans laquelle V représente cet angle; en sorte que, si l'on nomme A l'angle dont le sinus carré est $\cos^2\frac{1}{2}(\beta'-\beta)\cos\varpi\cos\varpi'$, et que l'on obtiendra facilement par les Tables, on aura

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{V} = \cos(\tfrac{1}{2}\varpi+\tfrac{1}{2}\varpi'+\mathrm{A})\cos(\tfrac{1}{2}\varpi+\tfrac{1}{2}\varpi'-\mathrm{A}).$$

Si l'on nomme pareillement V′ l'angle formé par les deux rayons vecteurs r et r'', on aura

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{V}' = \cos(\tfrac{1}{2}\varpi+\tfrac{1}{2}\varpi''+\mathrm{A}')\cos(\tfrac{1}{2}\varpi+\tfrac{1}{2}\varpi''-\mathrm{A}'),$$

A′ étant ce que devient A, lorsque l'on y change ϖ' et β' dans ϖ'' et β''.

Maintenant, si la distance périhélie de la comète et l'instant du passage de la comète au périhélie étaient exactement déterminés, et si les observations étaient rigoureuses, on aurait

$$\mathrm{V}=\mathrm{U},\quad \mathrm{V}'=\mathrm{U}';$$

mais, comme cela n'arrivera presque jamais, on supposera

$$m=\mathrm{U}-\mathrm{V},\quad m'=\mathrm{U}'-\mathrm{V}'.$$

Nous observerons ici que le calcul du triangle STC donne pour l'angle CST deux valeurs différentes : le plus souvent, la nature du mouvement de la comète fera connaître celle dont on doit faire usage, surtout si ces deux valeurs sont fort différentes; car alors l'une d'elles placera la comète plus loin que l'autre de la Terre, et il sera facile de juger, par le mouvement apparent de la comète à l'instant de l'observation, laquelle doit être préférée; mais, s'il reste de l'incertitude à cet égard, on pourra toujours la lever, en observant de choisir la valeur qui rend V et V′ peu différents de U et de U′.

On fera ensuite une seconde hypothèse, dans laquelle, en conservant le même instant du passage par le périhélie que ci-dessus, on fera varier la distance périhélie d'une petite quantité, par exemple, de la cinquantième partie de sa valeur, et l'on cherchera, dans cette hypothèse, les valeurs de $U - V$ et de $U' - V'$; soit alors

$$n = U - V, \quad n' = U' - V'.$$

Enfin on formera une troisième hypothèse, dans laquelle, en conservant la même distance périhélie que dans la première, on fera varier d'un demi-jour ou d'un jour, plus ou moins, l'instant du passage par le périhélie. On cherchera, dans cette nouvelle hypothèse, les valeurs de $U - V$ et de $U' - V'$. Soit alors

$$p = U - V, \quad p' = U' - V'.$$

Cela posé, si l'on nomme u le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans la distance périhélie pour avoir la véritable, et t le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans l'instant du passage par le périhélie pour avoir le véritable instant, on aura les deux équations suivantes

$$(m - n)\,u + (m - p)\,t = m,$$
$$(m' - n')\,u + (m' - p')\,t = m',$$

d'où l'on tirera u et t, et par conséquent la distance périhélie corrigée et le véritable instant du passage de la comète au périhélie.

Les corrections précédentes supposent que les éléments déterminés par la première approximation sont assez approchés pour traiter comme infiniment petites leurs erreurs; mais, si la seconde approximation ne paraissait pas encore suffisante, on pourrait recourir à une troisième, en opérant sur les éléments déjà corrigés comme on l'a fait sur les premiers; il faudrait seulement avoir l'attention de leur faire subir de plus petites variations. Il suffira même de calculer par ces éléments corrigés les valeurs de $U - V$ et de $U' - V'$; en les désignant par M et M', on les substituera pour m et m' dans les seconds membres des deux équations précédentes; on aura ainsi deux nouvelles équations,

qui donneront les valeurs de u et de t relatives aux corrections de ces nouveaux éléments.

Ayant ainsi la vraie distance périhélie et le véritable instant du passage de la comète au périhélie, on en conclura de cette manière les autres éléments de l'orbite.

Soient j la longitude du nœud qui serait ascendant si le mouvement de la comète était direct, et φ l'inclinaison de l'orbite; on aura, en comparant la première et la dernière observation,

$$\operatorname{tang} j = \frac{\operatorname{tang}\varpi \sin\theta'' - \operatorname{tang}\varpi'' \sin\theta}{\operatorname{tang}\varpi \cos\theta'' - \operatorname{tang}\varpi'' \cos\theta},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\varpi''}{\sin(\theta'' - j)}.$$

Comme on peut comparer ainsi deux à deux les trois observations, il sera plus exact de choisir celles qui donnent aux fractions précédentes les plus grands numérateurs et les plus grands dénominateurs.

$\operatorname{Tang} j$ pouvant appartenir également aux deux angles j et $\pi + j$, j étant le plus petit des angles positifs auxquels appartient sa valeur, pour déterminer celui des deux angles qu'il faut choisir, on observera que φ est positif et moindre qu'un angle droit, et qu'ainsi $\sin(\theta'' - j)$ doit être du même signe que $\operatorname{tang}\varpi''$. Cette condition déterminera l'angle j, et cet angle sera la position du nœud ascendant, si le mouvement de la comète est direct; mais, si ce mouvement est rétrograde, il faudra ajouter deux angles droits à l'angle j pour avoir la position de ce nœud.

L'hypoténuse du triangle sphérique dont $\theta'' - j$ et ϖ'' sont les côtés est la distance de la comète à son nœud ascendant dans la troisième observation, et la différence entre v'' et cette hypoténuse est l'intervalle entre le nœud et le périhélie, compté sur l'orbite.

Si l'on veut donner à la théorie d'une comète toute la précision que les observations comportent, il faut l'établir sur l'ensemble des meilleures observations, ce que l'on pourra faire ainsi. Marquons d'un trait, de deux traits, etc., les lettres m, n, p, relatives à la seconde observation, à la troisième, etc., comparées toutes à la première observation; on formera les équations

$$\begin{aligned}
&(m - n)u + (m - p)t = m,\\
&(m' - n')u + (m' - p')t = m',\\
&(m'' - n'')u + (m'' - p'')t = m'',\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

En combinant ensuite ces équations de la manière la plus avantageuse pour déterminer u et t, on aura les corrections de la distance périhélie et de l'instant du passage au périhélie, fondées sur l'ensemble de ces observations. On en conclura les valeurs de $\beta, \beta', \beta'', \ldots, \varpi, \varpi', \varpi'', \ldots$, et l'on aura

$$\operatorname{tang} j = \frac{\operatorname{tang}\varpi(\sin\beta' + \sin\beta'' + \ldots) - \sin\beta(\operatorname{tang}\varpi' + \operatorname{tang}\varpi'' + \ldots)}{\operatorname{tang}\varpi(\cos\beta' + \cos\beta'' + \ldots) - \cos\beta(\operatorname{tang}\varpi' + \operatorname{tang}\varpi'' + \ldots)},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\varpi' + \operatorname{tang}\varpi'' + \ldots}{\sin(\beta' - j) + (\sin\beta'' - j) + \ldots}.$$

38. Il existe un cas, à la vérité fort rare, dans lequel l'orbite d'une comète peut être déterminée d'une manière rigoureuse et simple : c'est le cas où la comète a été observée dans ses deux nœuds. La droite qui joint ses deux positions observées passe alors par le centre du Soleil, et se confond avec la ligne des nœuds. La longueur de cette droite est déterminée par le temps écoulé entre les deux observations; en nommant T ce temps, réduit en décimales de jour, et en désignant par c la droite dont il s'agit, on aura, par le n° **27**,

$$c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{T^2}{(9^j,688726)^2}}.$$

Soit maintenant β la longitude héliocentrique de la comète au moment de la première observation; soient r son rayon vecteur, ρ sa distance à la Terre, et α sa longitude géocentrique. Soient encore R le rayon de l'orbe terrestre au même instant, et E la longitude correspondante du Soleil; on aura

$$\begin{aligned}
r\sin\beta &= \rho\sin\alpha - R\sin E,\\
r\cos\beta &= \rho\cos\alpha - R\cos E.
\end{aligned}$$

$\pi + \beta$ sera la longitude héliocentrique de la comète à l'instant de la seconde observation, et, si l'on marque d'un trait les quantités r, α, ρ, R et E, relatives à ce même instant, on aura

$$\begin{aligned}
r'\sin\beta &= R'\sin E' - \rho'\sin\alpha',\\
r'\cos\beta &= R'\cos E' - \rho'\cos\alpha'.
\end{aligned}$$

Ces quatre équations donnent

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\rho\sin\alpha - R\sin E}{\rho\cos\alpha - R\cos E} = \frac{\rho'\sin\alpha' - R'\sin E'}{\rho'\cos\alpha' - R'\cos E'},$$

d'où l'on tire

$$\rho' = \frac{RR'\sin(E - E') - R'\rho\sin(\alpha - E')}{\rho\sin(\alpha' - \alpha) - R\sin(\alpha' - E)}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
(r + r')\sin\beta &= \rho\sin\alpha - \rho'\sin\alpha' - R\sin E + E'\sin E',\\
(r + r')\cos\beta &= \rho\cos\alpha - \rho'\cos\alpha' - R\cos E + R'\cos E'.
\end{aligned}$$

En carrant ces deux équations, en les ajoutant ensuite, et substituant c au lieu de $r + r'$, on aura

$$\begin{aligned}
c^2 = {} & R^2 - 2RR'\cos(E' - E) + R'^2\\
& + 2\rho[R'\cos(\alpha - E') - R\cos(\alpha - E)]\\
& + 2\rho'[R\cos(\alpha' - E) - R'\cos(\alpha' - E')]\\
& + \rho^2 - 2\rho\rho'\cos(\alpha' - \alpha) + \rho'^2.
\end{aligned}$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de ρ', sa valeur précédente en ρ, on aura une équation en ρ, du quatrième degré, que l'on pourra résoudre par les méthodes connues; mais il sera plus simple de supposer à ρ une valeur quelconque, d'en conclure la valeur de ρ', de substituer ces valeurs de ρ et de ρ' dans l'équation précédente, et de voir si elles y satisfont. Un petit nombre d'essais suffira pour déterminer avec précision ρ et ρ'.

Au moyen de ces quantités, on aura β, r et r'. Si l'on nomme v l'angle que le rayon r fait avec la distance périhélie, que nous désignerons par D, $\pi - v$ sera l'angle formé par cette même distance et par le rayon r'; on aura ainsi, par le n° **23**,

$$r = \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} v}, \quad r' = \frac{D}{\sin^2 \frac{1}{2} v},$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{r}{r'}, \quad D = \frac{rr'}{r + r'}.$$

On aura donc l'anomalie v de la comète à l'instant de la première observation, et sa distance périhélie D, d'où il est facile de conclure la position du périhélie et l'instant du passage de la comète par ce point. Ainsi, des cinq éléments de l'orbite de la comète, quatre sont connus, savoir : la distance périhélie, la position du périhélie, l'instant du passage de la comète par ce point et la position du nœud. Il ne restera plus à connaître que l'inclinaison de l'orbite; mais pour cela il sera nécessaire de recourir à une troisième observation, qui servira d'ailleurs à choisir, parmi les différentes racines réelles et positives de l'équation en ρ, celle dont on doit faire usage.

39. La supposition du mouvement parabolique des comètes n'est pas rigoureuse; elle est même infiniment peu probable, vu le nombre infini des cas qui donnent un mouvement elliptique ou hyperbolique, relativement à ceux qui déterminent le mouvement parabolique. D'ailleurs une comète mue dans un orbe soit parabolique, soit hyperbolique, ne serait visible qu'une fois; ainsi l'on peut supposer avec vraisemblance que les comètes qui décrivent ces courbes, s'il en existe quelques-unes, ont depuis longtemps disparu, en sorte que nous n'observons aujourd'hui que celles qui, mues dans des orbes rentrants, sont ramenées sans cesse, à des intervalles plus ou moins grands, dans les régions de l'espace voisines du Soleil. On pourra par la méthode suivante déterminer, à quelques années près, la durée de leurs révolutions, lorsque l'on aura un grand nombre d'observations très-précises, avant et après le passage au périhélie.

Pour cela, supposons que l'on ait quatre ou un plus grand nombre de bonnes observations qui embrassent toute la partie visible de l'orbite, et que l'on ait déterminé par la méthode précédente la parabole qui satisfait à peu près à ces observations. Soient $v, v', v'', v''', \ldots$ les anomalies correspondantes; $r, r', r'', r''', \ldots$ les rayons vecteurs correspondants. Soit encore

$$v' - v = U, \quad v'' - v = U', \quad v''' - v = U'', \quad \ldots.$$

Cela posé, on calculera par la méthode précédente, avec la parabole déjà trouvée, les valeurs de $U, U', U'', \ldots, V, V', V'', \ldots$. Soit

$$m = U - V, \quad m' = U' - V', \quad m'' = U'' - V'', \quad m''' = U''' - V''', \quad \ldots.$$

On fera ensuite varier d'une très-petite quantité la distance périhélie dans cette parabole; soit, dans cette hypothèse,

$$n = U - V, \quad n' = U' - V', \quad n'' = U'' - V'', \quad n''' = U''' - V''', \quad \ldots.$$

On formera une troisième hypothèse, dans laquelle, en conservant la même distance périhélie que dans la première, on fera varier d'une très-petite quantité l'instant du passage par le périhélie; soit alors

$$p = U - V, \quad p' = U' - V', \quad p'' = U'' - V'', \quad p''' = U''' - V''', \quad \ldots.$$

Enfin, on calculera, avec la distance périhélie et l'instant du passage de la comète au périhélie de la première hypothèse, l'angle v et le rayon vecteur r, en supposant l'orbe elliptique, et la différence $1 - e$ de son excentricité d'avec l'unité égale à une très-petite quantité, par exemple à $\frac{1}{50}$. Pour avoir la valeur de l'angle v dans cette hypothèse, il suffira, par le n° **23**, d'ajouter à l'anomalie v, calculée dans la parabole de la première hypothèse, un petit angle dont le sinus est

$$\tfrac{1}{10}(1 - e) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \left(4 - 3\cos^2 \tfrac{1}{2} v - 6\cos^4 \tfrac{1}{2} v\right).$$

En substituant ensuite dans l'équation

$$r = \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} v}\left(1 - \frac{1 - e}{2} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} v\right),$$

au lieu de v, cette anomalie ainsi calculée dans l'ellipse, on aura le rayon vecteur r correspondant. On calculera de la même manière v', r',

v'', r'', v''', r''',...., d'où l'on tirera les valeurs de U, U′, U″, U‴,.... et, par le n° 37, celles de V, V′, V″, V‴,.... Soit, dans ce cas,

$$q = \mathrm{U} - \mathrm{V},\quad q' = \mathrm{U}' - \mathrm{V}',\quad q'' = \mathrm{U}'' - \mathrm{V}'',\quad q''' = \mathrm{U}''' - \mathrm{V}''',\quad \ldots.$$

Nommons enfin u le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans la distance périhélie pour avoir la véritable, t le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans l'instant du passage par le périhélie pour avoir ce véritable instant, et s le nombre par lequel on doit multiplier la valeur supposée pour $1 - e$ pour avoir la véritable; on formera les équations

$$\begin{aligned}
(m - n)u + (m - p)t + (m - q)s &= m,\\
(m' - n')u + (m' - p')t + (m' - q')s &= m',\\
(m'' - n'')u + (m'' - p'')t + (m'' - q'')s &= m'',\\
(m''' - n''')u + (m''' - p''')t + (m''' - q''')s &= m''',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On déterminera, au moyen de ces équations, les valeurs de u, t, s, d'où l'on tirera la vraie distance périhélie, le véritable instant du passage de la comète au périhélie, et la vraie valeur de $1 - e$. Soient D la distance périhélie, et a le demi-grand axe de l'orbite; on aura $a = \frac{\mathrm{D}}{1-e}$; le temps de la révolution sidérale de la comète sera exprimé par un nombre d'années sidérales égal à $a^{\frac{3}{2}}$ ou à $\left(\frac{\mathrm{D}}{1-e}\right)^{\frac{3}{2}}$, la moyenne distance du Soleil à la Terre étant prise pour unité. On aura ensuite, par le n° 37, l'inclinaison de l'orbite et la position du nœud.

Quelque précision que l'on apporte dans les observations, elles laisseront toujours de l'incertitude sur la durée de la révolution des comètes. La méthode la plus exacte pour la déterminer consiste à comparer les observations d'une comète dans deux révolutions consécutives; mais ce moyen n'est praticable que lorsque la suite des temps ramène la comète vers son périhélie.

CHAPITRE V.

MÉTHODES GÉNÉRALES POUR DÉTERMINER PAR DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES LES MOUVEMENTS DES CORPS CÉLESTES.

40. Nous n'avons considéré, dans la première approximation des mouvements des corps célestes, que les forces principales qui les animent, et nous en avons déduit les lois du mouvement elliptique. Nous aurons égard, dans les recherches suivantes, aux forces perturbatrices de ce mouvement. L'action de ces forces ne fait qu'ajouter des petits termes aux équations différentielles du mouvement elliptique, dont nous avons donné précédemment les intégrales finies : il faut maintenant déterminer par des approximations successives les intégrales des mêmes équations augmentées des termes dus à l'action des forces perturbatrices. Voici, pour cet objet, une méthode générale, quels que soient le nombre et le degré des équations différentielles dont on se propose de trouver des intégrales de plus en plus approchées.

Supposons que l'on ait, entre les n variables y, y', y'',... et la variable t dont l'élément dt est regardé comme constant, les n équations différentielles

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^i y}{dt^i} + \mathrm{P} + \alpha \mathrm{Q},\\
0 &= \frac{d^i y'}{dt^i} + \mathrm{P}' + \alpha \mathrm{Q}',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

P, Q, P′, Q′,... étant des fonctions de t, y, y',... et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i - 1$ inclusivement, et α étant un très-petit coefficient constant, qui, dans la théorie des mouvements célestes, est de l'ordre des forces perturbatrices. Supposons ensuite que l'on ait les intégrales finies de ces équations, lorsque Q, Q',... sont nuls; en les différentiant chacune $i-1$ fois de suite, elles formeront avec leurs différentielles in équations, au moyen desquelles on pourra déterminer par l'élimination les arbitraires c, c', c'',..., en fonction de t, y, y', y'',... et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i-1$. En désignant donc par V, V', V'',... ces fonctions, on aura

$$c = \mathrm{V}, \quad c' = \mathrm{V}', \quad c'' = \mathrm{V}'', \quad \ldots.$$

Ces équations sont les in intégrales de l'ordre $i-1$ que les équations différentielles doivent avoir, et qui, par l'élimination des différences des variables, donnent leurs intégrales finies.

Maintenant, si l'on différentie les intégrales précédentes de l'ordre $i-1$, on aura

$$0 = d\mathrm{V}, \quad 0 = d\mathrm{V}', \quad 0 = d\mathrm{V}'', \quad \ldots.$$

Or il est clair que, ces dernières équations étant différentielles de l'ordre i, sans renfermer d'arbitraires, elles ne peuvent être que les sommes des équations

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + \mathrm{P}, \quad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + \mathrm{P}', \quad \ldots,$$

multipliées chacune par des facteurs convenables pour que ces sommes soient des différences exactes. En nommant donc $\mathrm{F}dt$, $\mathrm{F}'dt$,... les facteurs qui doivent multiplier respectivement ces équations pour former la suivante $0 = d\mathrm{V}$; en nommant pareillement $\mathrm{H}dt$, $\mathrm{H}'dt$,... les facteurs qui doivent multiplier respectivement les mêmes équations pour former celle-ci $0 = d\mathrm{V}'$, et ainsi du reste, on aura

$$d\mathrm{V} = \mathrm{F}dt\left(\frac{d^i y}{dt^i} + \mathrm{P}\right) + \mathrm{F}'dt\left(\frac{d^i y'}{dt^i} + \mathrm{P}'\right) + \ldots,$$

$$d\mathrm{V}' = \mathrm{H}dt\left(\frac{d^i y}{dt^i} + \mathrm{P}\right) + \mathrm{H}'dt\left(\frac{d^i y'}{dt^i} + \mathrm{P}'\right) + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

F, F',..., H, H',..., etc. sont des fonctions de t, y, y', y'',... et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i-1$: il est facile de les déterminer lorsque V, V',... sont connus; car F est évidemment le coefficient de $\frac{d^i y}{dt^i}$ dans la différentielle de V; F' est le coefficient de $\frac{d^i y'}{dt^i}$ dans la même différentielle, et ainsi de suite. Pareillement, H, H',... sont les coefficients de $\frac{d^i y}{dt^i}$, $\frac{d^i y'}{dt^i}$,... dans la différentielle de V', etc. Ainsi, puisque l'on est supposé connaître les fonctions V, V',..., en les différentiant uniquement par rapport à $\frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}$, $\frac{d^{i-1} y'}{dt^{i-1}}$,..., on aura les facteurs par lesquels on doit multiplier les équations différentielles

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + \mathrm{P}, \quad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + \mathrm{P}', \quad \ldots,$$

pour avoir des différences exactes. Cela posé :

Reprenons les équations différentielles

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + \mathrm{P} + \alpha\mathrm{Q}, \quad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + \mathrm{P}' + \alpha\mathrm{Q}', \quad \ldots.$$

Si l'on multiplie la première par $\mathrm{F}dt$, la seconde par $\mathrm{F}'dt$, et ainsi du reste, on aura, en les ajoutant,

$$0 = d\mathrm{V} + \alpha\, dt(\mathrm{FQ} + \mathrm{F'Q'} + \ldots);$$

on aura de la même manière

$$0 = d\mathrm{V}' + \alpha\, dt(\mathrm{HQ} + \mathrm{H'Q'} + \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$c - \alpha\int dt(\mathrm{FQ} + \mathrm{F'Q'} + \ldots) = \mathrm{V},$$

$$c' - \alpha\int dt(\mathrm{HQ} + \mathrm{H'Q'} + \ldots) = \mathrm{V}',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aura ainsi in équations différentielles qui seront de la même forme que dans le cas où Q, Q′,... sont nuls, avec la seule différence que les arbitraires c, c', c'',... doivent être changées dans

$$c - \alpha\int dt(\mathrm{FQ} + \mathrm{F'Q'} + \ldots), \quad c' - \alpha\int dt(\mathrm{HQ} + \mathrm{H'Q'} + \ldots), \quad \ldots.$$

Or, si, dans la supposition de Q, Q′,... égaux à zéro, on élimine des in intégrales de l'ordre $i-1$ les différences des variables y, y',..., on aura les n intégrales finies des équations proposées; on aura donc ces mêmes intégrales, lorsque Q, Q′,... ne sont pas nuls, en changeant dans les premières intégrales c, c',... dans $c - \alpha\int dt(\mathrm{FQ} + \ldots)$, $c' - \alpha\int dt(\mathrm{HQ} + \ldots)$,....

41. Si les différentielles

$$dt(\mathrm{FQ} + \mathrm{F'Q'} + \ldots), \quad dt(\mathrm{HQ} + \mathrm{H'Q'} + \ldots), \quad \ldots$$

sont exactes, on aura par la méthode précédente les intégrales finies des équations différentielles proposées; mais cela n'a lieu que dans quelques cas particuliers, dont le plus étendu et le plus intéressant est celui dans lequel ces équations sont linéaires. Supposons ainsi P, P′,... fonctions linéaires de y, y',... et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i-1$, sans aucun terme indépendant de ces variables, et considérons d'abord le cas dans lequel Q, Q′,... sont nuls. Les équations différentielles étant linéaires, leurs intégrales successives seront pareillement linéaires, en sorte que, $c = \mathrm{V}$, $c' = \mathrm{V'}$,... étant les in intégrales de $i-1$ des équations différentielles linéaires

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + \mathrm{P}, \quad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + \mathrm{P'}, \quad \ldots,$$

V, V′,... peuvent être supposés des fonctions linéaires de y, y',... et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i-1$. Pour le faire voir, supposons, dans les expressions de y, y',..., la constante arbitraire c égale à une quantité déterminée, plus à l'indéterminée δc; la constante arbitraire c' égale à une quantité déterminée, plus à l'indéterminée $\delta c'$, etc.; en réduisant ces expressions en séries ordonnées par rapport aux puis-

sances et aux produits de δc, $\delta c'$,..., on aura, par les formules du n° **21**,

$$y = \mathrm{Y} + \delta c\,\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial c} + \delta c'\,\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial c'} + \ldots + \frac{\delta c^2}{1.2}\,\frac{\partial^2 \mathrm{Y}}{\partial c^2} + \ldots,$$

$$y' = \mathrm{Y'} + \delta c\,\frac{\partial \mathrm{Y'}}{\partial c} + \delta c'\,\frac{\partial \mathrm{Y'}}{\partial c'} + \ldots + \frac{\delta c^2}{1.2}\,\frac{\partial^2 \mathrm{Y'}}{\partial c^2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Y, Y′, $\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial c}$,... étant des fonctions de t sans arbitraires. En substituant ces valeurs dans les équations différentielles proposées, il est clair que, δc, $\delta c'$,... étant indéterminés, les coefficients des premières puissances de chacun d'eux doivent être nuls dans ces diverses équations. Or, ces équations étant linéaires, on aura évidemment les termes affectés des premières puissances de δc, $\delta c'$,..., en y substituant $\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial c}\delta c + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial c'}\delta c' + \ldots$ au lieu de y, $\frac{\partial \mathrm{Y'}}{\partial c}\delta c + \frac{\partial \mathrm{Y'}}{\partial c'}\delta c' + \ldots$ au lieu de y', etc. Ces expressions de y, y',... satisfont donc séparément aux équations différentielles proposées, et, comme elles renferment les in arbitraires δc, $\delta c'$,..., elles en sont les intégrales complètes. On voit ainsi que les arbitraires existent sous une forme linéaire dans les expressions de y, y',..., et par conséquent aussi dans leurs différentielles; d'où il est aisé de conclure que les variables y, y',... et leurs différences peuvent être supposées sous une forme linéaire dans les intégrales successives des équations différentielles proposées.

Il suit de là que, F, F′,... étant les coefficients de $\frac{d^i y}{dt^i}$, $\frac{d^i y'}{dt^i}$,... dans la différentielle de V; H, H′,... étant les coefficients des mêmes différences dans la différentielle de V′, et ainsi du reste, ces quantités sont fonctions de la seule variable t. Partant, si l'on suppose Q, Q′,... fonctions de t seul, les différences

$$dt(\mathrm{FQ} + \mathrm{F'Q'} + \ldots), \quad dt(\mathrm{HQ} + \mathrm{H'Q'} + \ldots), \quad \ldots$$

seront exactes.

De là résulte un moyen simple d'avoir les intégrales d'un nombre quelconque n d'équations différentielles linéaires de l'ordre i, et qui renferment des termes quelconques αQ, $\alpha Q'$, ..., fonctions de la seule variable t, lorsque l'on sait intégrer les mêmes équations dans le cas où ces termes sont nuls; car alors, si l'on différentie leurs n intégrales finies $i-1$ fois de suite, on aura in équations qui donneront, par l'élimination, les valeurs des in arbitraires $c, c', \ldots$ en fonction de $t, y, y', \ldots$ et des différences de ces variables jusqu'à l'ordre $i-1$. On formera ainsi les in équations

$$c = V, \quad c' = V', \quad \ldots.$$

Cela posé, F, F′, ... seront les coefficients de $\frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$, $\frac{d^{i-1}y'}{dt^{i-1}}$, ..., dans V; H, H′, ... seront les coefficients des mêmes différences dans V′, et ainsi du reste; on aura donc les intégrales finies des équations différentielles linéaires

$$o = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q, \quad o = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' + \alpha Q', \quad \ldots,$$

en changeant, dans les intégrales finies de ces équations privées de leurs derniers termes αQ, $\alpha Q'$, ..., les arbitraires $c, c', \ldots$ dans

$$c - \alpha \int dt (FQ + F'Q' + \ldots), \quad c' - \alpha \int dt (HQ + H'Q' + \ldots), \quad \ldots.$$

Considérons, par exemple, l'équation différentielle linéaire

$$o = \frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y + \alpha Q.$$

L'intégrale finie de l'équation $o = \frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y$ est

$$y = \frac{c}{a} \sin at + \frac{c'}{a} \cos at,$$

c et c' étant arbitraires. Cette intégrale donne, en la différentiant,

$$\frac{dy}{dt} = c \cos at - c' \sin at.$$

Si l'on combine cette différentielle avec l'intégrale elle-même, on formera les deux intégrales du premier ordre

$$c = ay \sin at + \frac{dy}{dt} \cos at,$$

$$c' = ay \cos at - \frac{dy}{dt} \sin at;$$

ainsi l'on aura dans ce cas

$$F = \cos at, \quad H = -\sin at.$$

L'intégrale complète de la proposée sera donc

$$y = \frac{c}{a} \sin at + \frac{c'}{a} \cos at - \frac{\alpha \sin at}{a} \int Q\, dt \cos at + \frac{\alpha \cos at}{a} \int Q\, dt \sin at.$$

Il est facile d'en conclure que, si Q est composé de termes de la forme $K \cdot \frac{\sin}{\cos} (mt + \varepsilon)$, chacun de ces termes produira dans la valeur de y le terme correspondant

$$\frac{\alpha K}{m^2 - a^2} \cdot \frac{\sin}{\cos} (mt + \varepsilon).$$

Si m est égal à a, le terme $K \cdot \frac{\sin}{\cos} (mt + \varepsilon)$ produira dans y : 1° le terme $-\frac{\alpha K}{4a^2} \cdot \frac{\sin}{\cos} (at + \varepsilon)$, qui, étant compris dans les deux termes $\frac{c}{a} \sin at + \frac{c'}{a} \cos at$, peut être négligé; 2° le terme $\pm \frac{\alpha K t}{2a} \cdot \frac{\cos}{\sin} (at + \varepsilon)$, le signe + ayant lieu si le terme de l'expression de Q est un sinus, et le signe — ayant lieu si ce terme est un cosinus. On voit ainsi comment l'arc t se produit hors des signes sinus et cosinus dans les valeurs de $y, y', \ldots$, par les intégrations successives, quoique les équations différentielles ne le renferment point sous cette forme. Il est clair que cela aura lieu toutes les fois que les fonctions FQ, F′Q′, ..., HQ, H′Q′, ... renfermeront des termes constants.

42. Si les différences $dt(FQ + \ldots)$, $dt(HQ + \ldots)$, ... ne sont pas exactes, l'analyse précédente ne donnera point leurs intégrales rigou-

reuses; mais elle offre un moyen simple d'avoir des intégrales de plus en plus approchées, lorsque α est fort petit et lorsque l'on a les valeurs de $y, y', \ldots,$ dans la supposition de α nul. En différentiant ces valeurs $i-1$ fois de suite, on formera les équations différentielles de l'ordre $i-1$

$$c = V, \quad c' = V', \quad \ldots.$$

Les coefficients de $\frac{d^i y}{dt^i}, \frac{d^i y'}{dt^i}, \ldots,$ dans les différentielles de $V, V', \ldots,$ étant les valeurs de $F, F', \ldots, H, H', \ldots,$ on les substituera dans les fonctions différentielles

$$dt(FQ + F'Q' + \ldots), \quad dt(HQ + H'Q' + \ldots), \quad \ldots.$$

Ensuite on substituera dans ces fonctions, au lieu de $y, y', \ldots,$ leurs premières valeurs approchées, ce qui rendra ces différences fonctions de t et des arbitraires $c, c', \ldots.$ Soient $T\,dt$, $T'dt, \ldots$ ces fonctions. Si l'on change, dans les premières valeurs approchées de $y, y', \ldots,$ les arbitraires $c, c', \ldots,$ respectivement dans $c - \alpha\int T\,dt$, $c' - \alpha\int T'dt, \ldots,$ on aura les secondes valeurs approchées de ces variables.

On substituera de nouveau ces secondes valeurs dans les fonctions différentielles

$$dt(FQ + \ldots), \quad dt(HQ + \ldots), \quad \ldots;$$

or il est visible que ces fonctions sont alors ce que deviennent celles-ci $T\,dt$, $T'dt, \ldots,$ lorsque l'on y change les arbitraires $c, c', \ldots$ dans $c - \alpha\int T\,dt$, $c' - \alpha\int T'dt, \ldots.$ Soient donc $T_{,}, T'_{,}, \ldots$ ce que deviennent $T, T', \ldots$ par ces changements : on aura les troisièmes valeurs approchées de $y, y', \ldots$ en changeant, dans les premières, $c, c', \ldots$ respectivement dans $c - \alpha\int T_{,}\,dt$, $c' - \alpha\int T'_{,}\,dt, \ldots.$

Nommons pareillement $T_{,,}, T'_{,,}, \ldots$ ce que deviennent $T, T', \ldots,$ lorsque l'on y change $c, c', \ldots$ dans $c - \alpha\int T_{,}\,dt$, $c' - \alpha\int T'_{,}\,dt, \ldots$: on aura les quatrièmes valeurs approchées de $y, y', \ldots,$ en changeant, dans les premières valeurs approchées de ces variables, $c, c', \ldots$ dans $c - \alpha\int T_{,,}\,dt$, $c' - \alpha\int T'_{,,}dt, \ldots,$ et ainsi de suite.

Nous verrons ci-après que la détermination des mouvements célestes dépend presque toujours d'équations différentielles de la forme

$$o = \frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y + \alpha Q,$$

Q étant une fonction rationnelle et entière de y, de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps représenté par t. Voici le moyen le plus facile d'intégrer cette équation.

On supposera d'abord α nul, et l'on aura, par le numéro précédent, une première valeur de y.

On substituera cette valeur dans Q, qui deviendra ainsi une fonction rationnelle et entière de sinus et de cosinus d'angles proportionnels à t. En intégrant ensuite l'équation différentielle, on aura une seconde valeur de y, approchée jusqu'aux quantités de l'ordre α inclusivement.

On substituera de nouveau cette valeur dans Q, et, en intégrant l'équation différentielle, on aura une troisième valeur approchée de y, et ainsi de suite.

Cette manière d'intégrer par approximation les équations différentielles des mouvements célestes, quoique la plus simple de toutes, a cependant l'inconvénient de donner, dans les expressions des variables $y, y', \ldots,$ des arcs de cercle hors des signes sinus et cosinus, dans le cas même où ces arcs n'existent point dans les valeurs rigoureuses de ces variables; on conçoit en effet que, si ces valeurs renferment des sinus ou des cosinus d'angles de l'ordre αt, ces sinus ou cosinus doivent se présenter sous la forme de séries dans les valeurs approchées que l'on trouve par la méthode précédente, puisque ces dernières valeurs sont ordonnées par rapport aux puissances de α. Ce développement en séries des sinus et cosinus d'angles de l'ordre αt cesse d'être exact lorsque, par la suite des temps, l'arc αt devient considérable; les valeurs approchées de $y, y', \ldots$ ne peuvent donc point s'étendre à un temps illimité. Comme il importe d'avoir des valeurs qui embrassent les siècles passés et à venir, le retour des arcs de cercle, que renferment les valeurs approchées, aux fonctions qui les produisent par leur développement en séries, est un problème délicat et intéressant d'Analyse. Voici, pour le résoudre, une méthode générale et fort simple.

43. Considérons l'équation différentielle de l'ordre i

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q,$$

α étant très-petit, et P et Q étant des fonctions algébriques de y, $\frac{dy}{dt}$, ..., $\frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$, et de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement à t. Supposons que l'on ait l'intégrale complète de cette équation différentielle, dans le cas de $\alpha = 0$, et que la valeur de y, donnée par cette intégrale, ne renferme point l'arc t hors des signes sinus et cosinus; supposons ensuite qu'en intégrant cette équation par la méthode précédente d'approximation, lorsque α n'est pas nul, on ait

$$y = X + tY + t^2Z + t^3S + \ldots,$$

X, Y, Z,... étant des fonctions périodiques de t, qui renferment les i arbitraires c, c', c'', ..., et les puissances de t, dans cette expression de y, s'étendant à l'infini par les approximations successives. Il est visible que les coefficients de ces puissances décroîtront avec d'autant plus de rapidité que α sera plus petit. Dans la théorie des mouvements des corps célestes, α exprime l'ordre des forces perturbatrices, relativement aux forces principales qui les animent.

Si l'on substitue la valeur précédente de y dans la fonction

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q,$$

elle prendra cette forme

$$k + k't + k''t^2 + \ldots,$$

k, k', k'', ... étant des fonctions périodiques de t; mais, par la supposition, la valeur de y satisfait à l'équation différentielle

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q;$$

on doit donc avoir identiquement

$$0 = k + k't + k''t^2 + \ldots.$$

Si k, k', k'', ... n'étaient pas nuls, cette équation donnerait, par le retour des suites, l'arc t en fonction de sinus et de cosinus d'angles proportionnels à t; en supposant donc α infiniment petit, on aurait t égal à une fonction finie de sinus et de cosinus d'angles semblables, ce qui est impossible; ainsi les fonctions k, k', ... sont identiquement nulles.

Maintenant, si l'arc t n'est élevé qu'à la première puissance sous les signes sinus et cosinus, comme cela a lieu dans la théorie des mouvements célestes, cet arc ne sera point produit par les différences successives de y; en substituant donc la valeur précédente de y dans la fonction $\frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q$, la fonction $k + k't + \ldots$, dans laquelle elle se transforme, ne contiendra l'arc t, hors des signes sinus et cosinus, qu'autant qu'il est déjà renfermé dans y; ainsi, en changeant, dans l'expression de y, l'arc t, hors des signes périodiques, dans $t - \theta$, θ étant une constante quelconque, la fonction $k + k't + \ldots$ se changera dans $k + k'(t - \theta) + \ldots$, et, puisque cette dernière fonction est identiquement nulle, en vertu des équations identiques $k = 0$, $k' = 0$, ..., il en résulte que l'expression

$$y = X + (t - \theta)Y + (t - \theta)^2 Z + \ldots$$

satisfait encore à l'équation différentielle

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q.$$

Quoique cette seconde valeur de y semble renfermer $i + 1$ arbitraires, savoir les i arbitraires c, c', c'', ... et l'arbitraire θ, cependant elle ne peut en contenir que le nombre i qui soient distinctes entre elles. Il est donc nécessaire que, par un changement convenable dans les constantes c, c', c'', ..., l'arbitraire θ puisse disparaître de cette seconde expression de y, et qu'ainsi elle coïncide avec la première. Cette considération va nous fournir le moyen d'en faire disparaître les arcs de cercle hors des signes périodiques.

Donnons à la seconde expression de y la forme suivante

$$y = X + (t - \theta)R.$$

Puisque nous supposons que θ disparaît de y, on aura $\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0$, et par conséquent

$$R = \frac{\partial X}{\partial \theta} + (t - \theta)\frac{\partial R}{\partial \theta}.$$

En différentiant successivement cette équation, on aura

$$2\frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + (t - \theta)\frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2},$$

$$3\frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^3 X}{\partial \theta^3} + (t - \theta)\frac{\partial^3 R}{\partial \theta^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

d'où il est facile de conclure, en éliminant R et ses différentielles de l'expression précédente de y,

$$y = X + (t - \theta)\frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{(t - \theta)^2}{1.2}\frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{(t - \theta)^3}{1.2.3}\frac{\partial^3 X}{\partial \theta^3} + \dots.$$

X est fonction de t et des constantes c, c', c'', ..., et, comme ces constantes sont fonctions de θ, X est une fonction de t et de θ, que nous pouvons représenter par $\varphi(t, \theta)$. L'expression de y est, par la formule (i) du n° **21**, le développement de la fonction $\varphi(t, \theta + t - \theta)$ suivant les puissances de $t - \theta$; on a donc $y = \varphi(t, t)$; d'où il suit que l'on aura y, en changeant θ en t dans X. Le problème se réduit ainsi à déterminer X en fonction de t et de θ, et par conséquent à déterminer c, c', c'', ... en fonction de θ.

Pour cela, reprenons l'équation

$$y = X + (t - \theta)Y + (t - \theta)^2 Z + (t - \theta)^3 S + \dots.$$

Puisque la constante θ est supposée disparaître de cette expression de y,

on aura l'équation identique

$$(a) \qquad 0 = \frac{\partial X}{\partial \theta} - Y + (t - \theta)\left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} - 2Z\right) + (t - \theta)^2\left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} - 3S\right) + \dots.$$

En appliquant à cette équation le raisonnement que nous avons fait sur celle-ci, $0 = k + k't + k''t^2 + \dots$, on voit que les coefficients des puissances successives de $t - \theta$ doivent se réduire d'eux-mêmes à zéro. Les fonctions X, Y, Z, ... ne renferment θ qu'autant qu'il est contenu dans c, c', ..., en sorte que, pour former les différences partielles $\frac{\partial X}{\partial \theta}$, $\frac{\partial Y}{\partial \theta}$, $\frac{\partial Z}{\partial \theta}$, ..., il suffit de faire varier c, c', ... dans ces fonctions, ce qui donne

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial c}\frac{dc}{d\theta} + \frac{\partial X}{\partial c'}\frac{dc'}{d\theta} + \frac{\partial X}{\partial c''}\frac{dc''}{d\theta} + \dots,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{\partial Y}{\partial c}\frac{dc}{d\theta} + \frac{\partial Y}{\partial c'}\frac{dc'}{d\theta} + \frac{\partial Y}{\partial c''}\frac{dc''}{d\theta} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Maintenant il peut arriver que quelques-unes des arbitraires c, c', c'', ... multiplient l'arc t dans les fonctions périodiques X, Y, Z, ...; la différentiation de ces fonctions relativement à θ, ou, ce qui est la même chose, relativement à ces arbitraires, développera cet arc et le fera sortir hors des signes des fonctions périodiques; les différences $\frac{\partial X}{\partial \theta}$, $\frac{\partial Y}{\partial \theta}$, $\frac{\partial Z}{\partial \theta}$, ... seront alors de cette forme

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = X' + tX'',$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = Y' + tY'',$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta} = Z' + tZ'',$$

$$\dots\dots\dots,$$

X', X'', Y', Y'', Z', Z'', ... étant des fonctions périodiques de t, et renfermant de plus les arbitraires c, c', c'', ... et leurs premières différences divisées par $d\theta$, différences qui n'entrent dans ces fonctions que sous une forme linéaire. On aura donc

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = X' + \theta X'' + (t-\theta)X'',$$
$$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = Y' + \theta Y'' + (t-\theta)Y'',$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \theta} = Z' + \theta Z'' + (t-\theta)Z'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (a), on aura

$$\begin{aligned} o = X' + \theta X'' - Y + (t-\theta)\,(Y' + \theta Y'' + X'' - 2Z) \\ + (t-\theta)^2(Z' + \theta Z'' + Y'' - 3S) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en égalant séparément à zéro les coefficients des puissances de $t-\theta$,

$$o = X' + \theta X'' - Y,$$
$$o = Y' + \theta Y'' + X'' - 2Z,$$
$$o = Z' + \theta Z'' + Y'' - 3S,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on différentie la première de ces équations $i-1$ fois de suite par rapport à t, on en tirera autant d'équations entre les quantités c, c', c'',... et leurs premières différences divisées par $d\theta$; en intégrant ensuite ces nouvelles équations par rapport à θ, on aura ces constantes en fonction de θ. Presque toujours l'inspection seule de la première des équations précédentes suffira pour avoir les équations différentielles en c, c', c'',..., en comparant séparément les coefficients des sinus et des cosinus qu'elle renferme; car il est visible que, les valeurs de c, c',... étant indépendantes de t, les équations différentielles qui les déterminent doivent pareillement en être indépendantes. La simplicité que cette considération apporte dans les calculs est un des principaux avantages de cette méthode. Le plus souvent, ces équations ne seront

intégrables que par des approximations successives, qui pourront introduire l'arc θ hors des signes périodiques, dans les valeurs de c, c',..., alors même que cet arc ne se rencontre point ainsi dans les intégrales rigoureuses; mais on le fera disparaître par la méthode que nous venons d'exposer.

Il peut arriver que la première des équations précédentes et ses $i-1$ différentielles en t ne donnent point un nombre i d'équations distinctes, entre les quantités c, c', c'',... et leurs différences. Dans ce cas, il faudra recourir à la seconde équation et aux suivantes.

Lorsque l'on aura ainsi déterminé les valeurs de c, c', c'',... en fonction de θ, on les substituera dans X, et, en y changeant ensuite θ en t, on aura la valeur de y, sans arcs de cercle hors des signes périodiques, lorsque cela est possible. Si cette valeur en conservait encore, ce serait une preuve qu'ils existent dans l'intégrale rigoureuse.

44. Considérons présentement un nombre quelconque n d'équations différentielles

$$o = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q, \quad o = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' + \alpha Q', \quad \ldots,$$

P, Q, P', Q',... étant des fonctions de y, y',... de leurs différentielles jusqu'à l'ordre $i-1$, et de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement à la variable t dont la différence est supposée constante. Supposons que les intégrales approchées de ces équations soient

$$y = X + tY + t^2Z + t^3S + \ldots,$$
$$y' = X_, + tY_, + t^2Z_, + t^3S_, + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

X, Y, Z,..., $X_,$, $Y_,$, $Z_,$,... étant des fonctions périodiques de t, et renfermant les in arbitraires c, c', c'',.... On aura, comme dans le numéro précédent,

$$o = X' + \theta X'' - Y,$$
$$o = Y' + \theta Y'' + X'' - 2Z,$$
$$o = Z' + \theta Z'' + Y'' - 3S,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La valeur de y' donnera pareillement des équations de cette forme

$$\begin{gathered} 0 = X'_{,} + \theta X''_{,} - Y_{,}, \\ 0 = Y'_{,} + \theta Y''_{,} + X''_{,} - 2Z_{,}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Les valeurs de y'', y''', ... fourniront des équations semblables. On déterminera par ces diverses équations, en choisissant les plus simples et les plus approchées, les valeurs de c, c', c'', ... en fonction de θ : en substituant ces valeurs dans X, $X_{,}$, ..., et en y changeant ensuite θ en t, on aura les valeurs de y, y', ..., sans arcs de cercle hors des signes périodiques, lorsque cela est possible.

45. Reprenons la méthode que nous avons exposée dans le n° **40**. Il en résulte que, si, au lieu de supposer les paramètres c, c', c'', ... constants, on les fait varier en sorte que l'on ait

$$\begin{gathered} dc = -\alpha dt(FQ + F'Q' + \dots), \\ dc' = -\alpha dt(HQ + H'Q' + \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{gathered}$$

on aura toujours les in intégrales de l'ordre $i-1$

$$c = V, \quad c' = V', \quad c'' = V'', \quad \dots,$$

comme dans le cas de α nul; d'où il suit que non-seulement les intégrales finies, mais encore toutes les équations dans lesquelles il n'entrera que des différences inférieures à l'ordre i conserveront la même forme, dans le cas de α nul et dans celui de α quelconque, puisque ces équations peuvent résulter de la comparaison seule des intégrales précédentes de l'ordre $i-1$. On pourra donc également, dans ces deux cas, différentier $i-1$ fois de suite les intégrales finies, sans faire varier c, c', ..., et, comme on est libre de faire varier tout à la fois, il en résultera des équations de condition entre les paramètres c, c', ... et leurs différences.

Dans les deux cas de α nul et de α quelconque, les valeurs de y, y', ... et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i-1$ inclusivement sont

les mêmes fonctions de t et des paramètres c, c', c'', ...; soit donc Y une fonction quelconque des variables y, y', y'', ... et de leurs différentielles inférieures à l'ordre $i-1$, et nommons T la fonction de t dans laquelle elle se change, lorsque l'on y substitue, au lieu de ces variables et de leurs différences, leurs valeurs en t. On pourra différentier l'équation Y = T, en y regardant les paramètres c, c', c'', ... comme constants; on pourra même ne prendre que la différence partielle de Y relativement à une seule ou à plusieurs des variables y, y', ..., pourvu que l'on ne fasse varier dans T que ce qui varie avec elles. Dans toutes ces différentiations, les paramètres c, c', c'', ... peuvent toujours être traités comme constants, puisqu'en substituant, pour y, y', ... et leurs différences, leurs valeurs en t, on aura des équations identiquement nulles, dans les deux cas de α nul et de α quelconque.

Lorsque les équations différentielles sont de l'ordre $i-1$, il n'est plus permis, en les différentiant, de traiter les paramètres c, c', c'', ... comme constants. Pour différentier ces équations, considérons l'équation $\varphi = 0$, φ étant une fonction différentielle de l'ordre $i-1$, et qui renferme les paramètres c, c', c'', ...; soit $\delta\varphi$ la différence de cette fonction, prise en regardant c, c', ... comme constants, ainsi que les différences $d^{i-1}y$, $d^{i-1}y'$, ... Soit S le coefficient de $\frac{d^i y}{dt^{i-1}}$ dans la différence entière de φ; soit S' le coefficient de $\frac{d^i y'}{dt^{i-1}}$ dans cette même différence, et ainsi du reste. L'équation $\varphi = 0$, différentiée, donnera

$$0 = \delta\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial c}dc + \frac{\partial\varphi}{\partial c'}dc' + \dots + S\frac{d^i y}{dt^{i-1}} + S'\frac{d^i y'}{dt^{i-1}} + \dots.$$

En substituant au lieu de $\frac{d^i y}{dt^{i-1}}$ sa valeur $-dt(P + \alpha Q)$, au lieu de $\frac{d^i y'}{dt^{i-1}}$ sa valeur $-dt(P' + \alpha Q')$, etc., on aura

$$(t)\quad 0 = \delta\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial c}dc + \frac{\partial\varphi}{\partial c'}dc' + \dots - dt(SP + S'P' + \dots) - \alpha dt(SQ + S'Q' + \dots).$$

Dans la supposition de α nul, les paramètres c, c', c'', ... sont constants; on a ainsi

$$0 = \delta\varphi - dt(SP + S'P' + \dots).$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de $c, c', c'', \ldots,$ leurs valeurs $\mathrm{V}, \mathrm{V}', \mathrm{V}'', \ldots,$ on aura une équation différentielle de l'ordre $i-1$, sans arbitraires, ce qui est impossible, à moins que cette équation ne soit identiquement nulle. La fonction

$$\delta\varphi - dt(\mathrm{SP} + \mathrm{S}'\mathrm{P}' + \ldots)$$

devient donc identiquement nulle, en vertu des équations $c = \mathrm{V}$, $c' = \mathrm{V}', \ldots,$ et, comme ces équations ont encore lieu lorsque les paramètres $c, c', c'', \ldots$ sont variables, il est visible que, dans ce cas, la fonction précédente est encore identiquement nulle; l'équation (t) deviendra donc

$$(x) \qquad o = \frac{\partial\varphi}{\partial c}\,dc + \frac{\partial\varphi}{\partial c'}\,dc' + \ldots - \alpha\,dt(\mathrm{SQ} + \mathrm{S}'\mathrm{Q}' + \ldots).$$

On voit ainsi que, pour différentier l'équation $\varphi = o$, il suffit de faire varier dans φ les paramètres $c, c', \ldots$ et les différences $d^{i-1}y$, $d^{i-1}y', \ldots,$ et de substituer, après les différentiations, $-\alpha\mathrm{Q}, -\alpha\mathrm{Q}', \ldots,$ au lieu des quantités $\frac{d^iy}{dt^i}, \frac{d^iy'}{dt^i}, \ldots.$

Soit $\psi = o$ une équation finie entre $y, y', \ldots$ et la variable t; si l'on désigne par $\delta\psi, \delta^2\psi, \ldots$ les différences successives de ψ, prises en regardant $c, c', \ldots$ comme constants, on aura, par ce qui précède, dans le cas même où $c, c', \ldots$ sont variables, les équations suivantes

$$\psi = o, \quad \delta\psi = o, \quad \delta^2\psi = o, \quad \ldots, \quad \delta^{i-1}\psi = o;$$

en changeant donc successivement, dans l'équation (x), la fonction φ en $\psi, \delta\psi, \delta^2\psi, \ldots,$ on aura

$$o = \frac{\partial\psi}{\partial c}\,dc + \frac{\partial\psi}{\partial c'}\,dc' + \ldots,$$

$$o = \frac{\partial\delta\psi}{\partial c}\,dc + \frac{\partial\delta\psi}{\partial c'}\,dc' + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$o = \frac{\partial\delta^{i-1}\psi}{\partial c}\,dc + \frac{\partial\delta^{i-1}\psi}{\partial c'}\,dc' + \ldots - \alpha\,dt\left(\mathrm{Q}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathrm{Q}'\frac{\partial\psi}{\partial y'} + \ldots\right).$$

Ainsi, les équations $\psi = o, \psi' = o, \ldots$ étant supposées être les n intégrales finies des équations différentielles

$$o = \frac{d^iy}{dt^i} + \mathrm{P}, \quad o = \frac{d^iy'}{dt^i} + \mathrm{P}', \quad \ldots,$$

on aura les in équations au moyen desquelles on pourra déterminer les paramètres $c, c', c'', \ldots,$ sans qu'il soit nécessaire de former pour cela les équations $c = \mathrm{V}, c' = \mathrm{V}', \ldots$; mais, lorsque les intégrales seront sous cette dernière forme, la détermination de $c, c', \ldots$ sera plus simple.

Cette méthode de faire varier les paramètres est d'une grande utilité dans l'Analyse et dans ses applications. Pour en montrer un nouvel usage, considérons l'équation différentielle

$$o = \frac{d^iy}{dt^i} + \mathrm{P},$$

P étant fonction de t, y, de ses différences jusqu'à l'ordre $i-1$ et des quantités $q, q', \ldots,$ qui sont fonctions de t. Supposons que l'on ait l'intégrale finie de cette équation différentielle, dans la supposition de $q, q', \ldots$ constants, et représentons par $\varphi = o$ cette intégrale, qui renfermera i arbitraires $c, c', \ldots$; désignons par $\delta\varphi, \delta^2\varphi, \delta^3\varphi, \ldots$ les différences successives de φ, prises en regardant $q, q', \ldots$ comme constants, ainsi que les paramètres $c, c', \ldots.$ Si l'on fait varier toutes ces quantités, la différence de φ sera

$$\delta\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\,dc + \frac{\partial\varphi}{\partial c'}\,dc' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\,dq + \frac{\partial\varphi}{\partial q'}\,dq' + \ldots;$$

en faisant donc

$$o = \frac{\partial\varphi}{\partial c}\,dc + \frac{\partial\varphi}{\partial c'}\,dc' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\,dq + \frac{\partial\varphi}{\partial q'}\,dq' + \ldots,$$

$\delta\varphi$ sera encore la première différence de φ, dans le cas de $c, c, \ldots,$ $q, q', \ldots$ variables. Si l'on fait pareillement

$$o = \frac{\partial\delta\varphi}{\partial c}\,dc + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial c'}\,dc' + \ldots + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial q}\,dq + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial q'}\,dq' + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$o = \frac{\partial\delta^{i-1}\varphi}{\partial c}\,dc + \frac{\partial\delta^{i-1}\varphi}{\partial c'}\,dc' + \ldots + \frac{\partial\delta^{i-1}\varphi}{\partial q}\,dq + \frac{\partial\delta^{i-1}\varphi}{\partial q'}\,dq' + \ldots,$$

$\delta^2\varphi$, $\delta^3\varphi$, ..., $\delta^i\varphi$ seront encore les différences seconde, troisième, ..., $i^{\text{ième}}$ de φ, lorsque $c, c', \ldots, q, q', \ldots$ sont supposés variables.

Maintenant, dans le cas de $c, c', \ldots, q, q', \ldots$ constants, l'équation différentielle

$$o = \frac{d^i y}{dt^i} + \mathrm{P}$$

est le résultat de l'élimination des paramètres $c, c', \ldots$ au moyen des équations

$$\varphi = o, \quad \delta\varphi = o, \quad \delta^2\varphi = o, \quad \ldots, \quad \delta^i\varphi = o;$$

ainsi, ces dernières équations ayant encore lieu lorsque $q, q', \ldots$ sont supposés variables, l'équation $\varphi = o$ satisfait encore dans ce cas à l'équation différentielle proposée, pourvu que les paramètres $c, c', \ldots$ soient déterminés au moyen des i équations différentielles précédentes; et, comme leur intégration donne i constantes arbitraires, la fonction φ renfermera ces arbitraires, et l'équation $\varphi = o$ sera l'intégrale complète de la proposée.

Cette manière de faire varier les arbitraires peut être employée avec avantage, lorsque les quantités $q, q', \ldots$ varient avec une grande lenteur, parce que cette considération rend, en général, beaucoup plus facile l'intégration par approximation des équations différentielles qui déterminent les paramètres variables $c, c', \ldots$.

CHAPITRE VI.

SECONDE APPROXIMATION DES MOUVEMENTS CÉLESTES, OU THÉORIE DE LEURS PERTURBATIONS.

46. Appliquons maintenant les méthodes précédentes aux perturbations des mouvements célestes, pour en conclure les expressions les plus simples de leurs inégalités périodiques et séculaires. Reprenons pour cela les équations différentielles (1), (2) et (3) du n° 9, qui déterminent le mouvement relatif de m autour de M. Si l'on fait

$$\mathrm{R} = \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m''(xx'' + yy'' + zz'')}{(x''^2 + y''^2 + z''^2)^{\frac{3}{2}}} + \ldots - \frac{\lambda}{m},$$

λ étant, par le numéro cité, égal à

$$\frac{mm'}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{mm''}{[(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{m'm''}{[(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2]^{\frac{1}{2}}} + \ldots;$$

si, de plus, on suppose

$$\mathrm{M} + m = \mu, \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad \ldots,$$

on aura

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} o = \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\mu x}{r^3} + \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}, \\[2mm] o = \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\mu y}{r^3} + \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}, \\[2mm] o = \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{\mu z}{r^3} + \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}. \end{cases}$$

La somme de ces trois équations, multipliées respectivement par dx, dy, dz, donne, en l'intégrant,

$$(\mathrm{Q}) \qquad 0 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int d\mathrm{R},$$

la différentielle $d\mathrm{R}$ étant uniquement relative aux coordonnées x, y, z du corps m, et a étant une constante arbitraire qui, lorsque R est nul, devient, par les n^{os} 18 et 19, le demi-grand axe de l'ellipse décrite par m autour de M.

Les équations (P), multipliées respectivement par x, y, z, et ajoutées à l'intégrale (Q), donneront

$$(\mathrm{R}) \qquad 0 = \frac{1}{2}\frac{d^2.r^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int d\mathrm{R} + x\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y} + z\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}.$$

Maintenant on peut concevoir les masses perturbatrices m', m'', ... multipliées par un coefficient α, et alors la valeur de r sera fonction du temps t et de α. Si l'on développe cette fonction par rapport aux puissances de α, et que l'on fasse $\alpha = 1$ après ce développement, elle sera ordonnée par rapport aux puissances et aux produits des masses perturbatrices. Désignons par la caractéristique δ, placée devant une quantité, la différentielle de cette quantité, prise par rapport à α et divisée par $d\alpha$. Lorsque l'on aura déterminé δr dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de α, on aura le rayon r en multipliant cette suite par $d\alpha$, en l'intégrant ensuite par rapport à α, et en ajoutant à cette intégrale une fonction de t indépendante de α, fonction qui est évidemment la valeur de r dans le cas où les forces perturbatrices sont nulles et où le corps m décrit une section conique. La détermination de r se réduit donc à former et à intégrer l'équation différentielle qui détermine δr.

Pour cela, reprenons l'équation différentielle (R), et faisons, pour plus de simplicité,

$$x\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y} + z\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} = r\mathrm{R}';$$

en la différentiant par rapport à α, on aura

$$(\mathrm{S}) \qquad 0 = \frac{d^2.r\delta r}{dt^2} + \frac{\mu r \delta r}{r^3} + 2\int \delta\, d\mathrm{R} + \delta.r\mathrm{R}'.$$

Nommons dv l'arc infiniment petit intercepté entre les deux rayons vecteurs r et $r + dr$; l'élément de la courbe décrite par m autour de M sera $\sqrt{dr^2 + r^2 dv^2}$; on aura ainsi

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 dv^2,$$

et l'équation (Q) deviendra

$$0 = \frac{r^2 dv^2 + dr^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int d\mathrm{R}.$$

En éliminant $\frac{\mu}{a}$ de cette équation, au moyen de l'équation (R), on aura

$$\frac{r^2 dv^2}{dt^2} = \frac{r\, d^2 r}{dt^2} + \frac{\mu}{r} + r\mathrm{R}',$$

d'où l'on tire, en différentiant par rapport à α,

$$\frac{2r^2 dv\, d\delta v}{dt^2} = \frac{r\, d^2\delta r - \delta r\, d^2 r}{dt^2} - \frac{3\mu r \delta r}{r^3} + r\delta \mathrm{R}' - \mathrm{R}'\delta r.$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de $\frac{\mu r \delta r}{r^3}$, sa valeur tirée de l'équation (S), on aura

$$(\mathrm{T}) \qquad d\delta v = \frac{d(dr\delta r + 2r\, d\delta r) + dt^2\left(3\int \delta\, d\mathrm{R} + 2r\delta \mathrm{R}' + \mathrm{R}'\delta r\right)}{r^2 dv}.$$

On pourra, au moyen des équations (S) et (T), avoir aussi exactement que l'on voudra les valeurs de δr et de δv; mais on doit observer que, dv étant l'angle intercepté entre les rayons r et $r + dr$, l'intégrale v de ces angles n'est pas dans un même plan. Pour en conclure la valeur de l'angle décrit autour de M par la projection du rayon vecteur r sur un plan fixe, désignons par $v_{,}$ ce dernier angle, et nommons s la tangente de la latitude de m au-dessus de ce plan; $r(1 + s^2)^{-\frac{1}{2}}$ sera l'expression du rayon vecteur projeté, et le carré de l'élément de la courbe décrite par m sera

$$\frac{r^2 dv_{,}^2}{1+s^2} + dr^2 + \frac{r^2 ds^2}{(1+s^2)^2};$$

mais le carré de cet élément est $r^2 dv^2 + dr^2$; on aura donc, en égalant ces deux expressions,

$$dv_{,} = \frac{dv\sqrt{(1+s^2)^2 - \frac{ds^2}{dv^2}}}{\sqrt{1+s^2}}.$$

On déterminera ainsi $dv_{,}$ au moyen de dv, lorsque s sera connu.

Si l'on prend pour plan fixe le plan de l'orbite de m à une époque donnée, s et $\frac{ds}{dv}$ seront visiblement de l'ordre des forces perturbatrices; en négligeant donc les carrés et les produits de ces forces, on aura $v = v_{,}$. Dans la théorie des planètes et des comètes, on peut négliger ces carrés et ces produits, à l'exception de quelques termes de cet ordre, que des circonstances particulières rendent sensibles, et qu'il sera facile de déterminer au moyen des équations (S) et (T). Ces dernières équations prennent une forme plus simple, lorsque l'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices. En effet, on peut alors considérer δr et δv comme les parties de r et de v dues à ces forces; δR, $\delta.r$R$'$ sont ce que deviennent R et rR$'$, lorsque l'on y substitue, au lieu des coordonnées des corps, leurs valeurs relatives au mouvement elliptique; nous pouvons les désigner par ces dernières quantités assujetties à cette condition. L'équation (S) devient ainsi

$$0 = \frac{d^2.r\delta r}{dt^2} + \frac{\mu r\delta r}{r^3} + 2\int d\mathrm{R} + r\mathrm{R}'.$$

Le plan fixe des x et des y étant supposé celui de l'orbite de m à une époque donnée, z sera de l'ordre des forces perturbatrices, et, puisque l'on néglige le carré de ces forces, on pourra négliger la quantité $z\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}$. De plus, le rayon r ne diffère de sa projection que de quantités de l'ordre z^2. L'angle que ce rayon fait avec l'axe des x ne diffère de sa

projection que de quantités du même ordre; cet angle peut donc être supposé égal à v, et l'on a, aux quantités près du même ordre,

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v,$$

d'où l'on tire

$$x\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y} = r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r},$$

et par conséquent $r\mathrm{R}' = r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}$. Il est facile de s'assurer par la différentiation que, si l'on néglige le carré de la force perturbatrice, l'équation différentielle précédente donnera, en vertu des deux premières des équations (P),

$$r\delta r = \frac{x\int y\,dt\left(2\int d\mathrm{R} + r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\right) - y\int x\,dt\left(2\int d\mathrm{R} + r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\right)}{\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}}.$$

Dans le second membre de cette équation, les coordonnées peuvent se rapporter au mouvement elliptique, ce qui donne $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ constant et égal, par le n° 19, à $\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, ae étant l'excentricité de l'orbite de m. Si l'on substitue dans l'expression de $r\delta r$, au lieu de x et de y, leurs valeurs $r\cos v$ et $r\sin v$, et, au lieu de $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$, la quantité $\sqrt{\mu a(1-e^2)}$; enfin, si l'on observe que, par le n° 20, $\mu = n^2 a^3$, on aura

$$\text{(X)} \quad \delta r = \frac{a\cos v\int n\,dt\,r\sin v\left(2\int d\mathrm{R} + r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\right) - a\sin v\int n\,dt\,r\cos v\left(2\int d\mathrm{R} + r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\right)}{\mu\sqrt{1-e^2}}.$$

L'équation (T) donne, en l'intégrant et en négligeant le carré des forces perturbatrices,

$$\text{(Y)} \qquad \delta v = \frac{\frac{2r\,d\delta r + dr\,\delta r}{a^2 n\,dt} + \frac{3a}{\mu}\iint n\,dt\,d\mathrm{R} + \frac{2a}{\mu}\int n\,dt\,r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}}{\sqrt{1-e^2}};$$

cette expression donnera facilement les perturbations du mouvement de m en longitude, lorsque celles du rayon vecteur seront déterminées.

Il nous reste à déterminer les perturbations du mouvement en latitude. Pour cela, nous reprendrons la troisième des équations (P); en l'intégrant comme nous avons intégré l'équation (S), et faisant $z = r\delta s$, nous aurons

$$(Z) \qquad \delta s = \frac{a\cos v \int n\,dt\,r\sin v \frac{\partial R}{\partial z} - a\sin v \int n\,dt\,r\cos v \frac{\partial R}{\partial z}}{\mu\sqrt{1-e^2}};$$

δs est la latitude de m au-dessus du plan de son orbite primitive : si l'on veut rapporter le mouvement de m sur un plan peu incliné à cette orbite, en nommant s sa latitude lorsqu'il est supposé ne point quitter le plan de cette orbite, $s + \delta s$ sera à très-peu près la latitude de m au-dessus du plan proposé.

47. Les formules (X), (Y) et (Z) ont l'avantage de présenter sous une forme finie les perturbations, ce qui est très-utile dans la théorie des comètes, dans laquelle ces perturbations ne peuvent être déterminées que par des quadratures; mais le peu d'excentricité et d'inclinaison respective des orbites des planètes permet de développer leurs perturbations en séries convergentes de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, et d'en former des Tables qui peuvent servir pour un temps indéfini. Alors, au lieu des expressions précédentes de δr et de δs, il est plus commode de faire usage des équations différentielles qui déterminent ces variables. En ordonnant ces équations par rapport aux puissances et aux produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, on peut toujours réduire la détermination des valeurs de δr et de δs à l'intégration d'équations de la forme

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} + n^2y + Q,$$

équations dont nous avons donné les intégrales dans le n° **42**. Mais on peut donner immédiatement cette forme très-simple aux équations différentielles précédentes, par la méthode suivante.

Reprenons l'équation (R) du numéro précédent, en y faisant, pour abréger,

$$Q = 2\int dR + r\frac{\partial R}{\partial r};$$

elle devient ainsi

$$(R') \qquad 0 = \frac{1}{2}\frac{d^2.r^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + Q.$$

Dans le cas du mouvement elliptique, où $Q = 0$, r^2 est, par le n° **22**, fonction de $e\cos(nt + \varepsilon - \varpi)$, ae étant l'excentricité de l'orbite et $nt + \varepsilon - \varpi$ étant l'anomalie moyenne de la planète m. Soit $e\cos(nt + \varepsilon - \varpi) = u$, et supposons $r^2 = \varphi(u)$; on aura

$$0 = \frac{d^2u}{dt^2} + n^2u.$$

Dans le cas du mouvement troublé, nous pouvons supposer encore $r^2 = \varphi(u)$; mais u ne sera plus égal à $e\cos(nt + \varepsilon - \varpi)$; il sera donné par l'équation différentielle précédente augmentée d'un terme dépendant des forces perturbatrices. Pour déterminer ce terme, nous observerons que, si l'on fait $u = \psi(r^2)$, on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + n^2u = \frac{d^2.r^2}{dt^2}\psi'(r^2) + \frac{4r^2dr^2}{dt^2}\psi''(r^2) + n^2\psi(r^2),$$

$\psi'(r^2)$ étant la différentielle de $\psi(r^2)$ divisée par $d.r^2$, et $\psi''(r^2)$ étant la différentielle de $\psi'(r^2)$ divisée par $d.r^2$. L'équation (R') donne $\frac{d^2.r^2}{dt^2}$ égal à une fonction de r, plus à une fonction dépendante de la force perturbatrice. Si l'on multiplie cette équation par $2r\,dr$, et qu'ensuite on l'intègre, on aura $\frac{r^2dr^2}{dt^2}$ égal à une fonction de r, plus à une fonction dépendante de la force perturbatrice. En substituant ces valeurs de $\frac{d^2.r^2}{dt^2}$ et de $\frac{r^2dr^2}{dt^2}$ dans l'expression précédente de $\frac{d^2u}{dt^2} + n^2u$, la fonction de r indépendante de la force perturbatrice disparaîtra d'elle-même, puisqu'elle est identiquement nulle lorsque cette force est nulle; on aura donc la valeur de $\frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 u$, en substituant dans son expression, au lieu de $\frac{d^2.r^2}{dt^2}$ et de $\frac{r^2 dr^2}{dt^2}$, les parties de leurs expressions qui dépendent de la force perturbatrice. Or, en n'ayant égard qu'à ces parties, l'équation (R′) et son intégrale donnent

$$\frac{d^2.r^2}{dt^2} = -2Q,$$

$$\frac{4r^2 dr^2}{dt^2} = -8\int Q r\, dr;$$

partant

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 u = -2Q\,\psi'(r^2) - 8\psi''(r^2)\int Q r\, dr.$$

Maintenant, de l'équation $u = \psi(r^2)$ on tire $du = 2r\,dr\,\psi'(r^2)$; celle-ci $r^2 = \varphi(u)$ donne $2r\,dr = du\,\varphi'(u)$, et par conséquent

$$\psi'(r^2) = \frac{1}{\varphi'(u)}.$$

En différentiant cette dernière équation, et substituant $\varphi'(u)$ au lieu de $\frac{2r\,dr}{du}$, on aura

$$\psi''(r^2) = -\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3},$$

$\varphi''(u)$ étant égal à $\frac{d\varphi'(u)}{du}$, de même que $\varphi'(u)$ est égal à $\frac{d\varphi(u)}{du}$. Cela posé, si l'on fait

$$u = e\cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \delta u,$$

l'équation différentielle en u deviendra

$$0 = \frac{d^2 \delta u}{dt^2} + n^2 \delta u - \frac{4\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3}\int Q\, du\, \varphi'(u) + \frac{2Q}{\varphi'(u)},$$

et, si l'on néglige le carré de la force perturbatrice, u pourra être supposé égal à $e\cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ dans les termes dépendants de Q.

La valeur de $\frac{r}{a}$ trouvée dans le n° 22 donne, en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre e^3 inclusivement,

$$r = a\left[1 + e^2 - u\left(1 - \tfrac{3}{2}e^2\right) - u^2 - \tfrac{3}{2}u^3\right],$$

d'où l'on tire

$$r^2 = a^2\left[1 + 2e^2 - 2u\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2\right) - u^2 - u^3\right] = \varphi(u).$$

Si l'on substitue cette valeur de $\varphi(u)$ dans l'équation différentielle en δu, et que l'on restitue au lieu de Q sa valeur $2\int dR + r\frac{\partial R}{\partial r}$, et $e\cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ au lieu de u, on aura, aux quantités près de l'ordre e^3,

$$(X')\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2 \delta u}{dt^2} + n^2 \delta u \\ & - \frac{1}{a^2}\left[1 + \tfrac{1}{4}e^2 - e\cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \tfrac{1}{4}e^2\cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)\right]\left(2\int dR + r\frac{\partial R}{\partial r}\right) \\ & - \frac{2e}{a^2}\int n\,dt\left[\sin(nt + \varepsilon - \varpi)\left[1 + e\cos(nt + \varepsilon - \varpi)\right]\left(2\int dR + r\frac{\partial R}{\partial r}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Lorsque l'on aura déterminé δu au moyen de cette équation différentielle, on aura δr en différentiant l'expression de r par rapport à la caractéristique δ, ce qui donne

$$\delta r = -a\,\delta u\left[1 + \tfrac{3}{4}e^2 + 2e\cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \tfrac{9}{4}e^2\cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)\right].$$

Cette valeur de δr donnera la valeur de δv, au moyen de la formule (Y) du numéro précédent.

Il nous reste à déterminer δs; or, si l'on compare les formules (X) et (Z) du numéro précédent, on voit que δr se change en δs en changeant, dans son expression, $2\int dR + r\frac{\partial R}{\partial r}$ en $\frac{\partial R}{\partial z}$; d'où il suit que, pour avoir δs, il suffit de faire ce changement dans l'équation différentielle en δu, et de substituer ensuite la valeur de δu, donnée par cette équation et que nous désignerons par $\delta u'$, dans l'expression de δr. On aura ainsi

$$
(\mathrm{Z}')\quad \left\{
\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2\delta u'}{dt^2} + n^2\delta u' \\
&\quad - \frac{1}{a^2}\left[1 + \tfrac{1}{4}e^2 - e\cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \tfrac{1}{4}e^2\cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)\right]\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} \\
&\quad - \frac{2e}{a^2}\int n\,dt\left[\sin(nt + \varepsilon - \varpi)\left[1 + e\cos(nt + \varepsilon - \varpi)\right]\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\right], \\
\delta s &= -a\,\delta u'\left[1 + \tfrac{3}{4}e^2 + 2e\cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \tfrac{9}{4}e^2\cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Le système des équations (X′), (Y), (Z′) donnera d'une manière fort simple le mouvement troublé de m, en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice. La considération des termes dus à cette puissance étant à très-peu près suffisante dans la théorie des planètes, nous allons en tirer des formules commodes pour déterminer le mouvement de ces corps [1].

48. Il est nécessaire, pour cela, de développer la fonction R en série. Si l'on n'a égard qu'à l'action de m sur m', on a, par le n° 46,

$$
\mathrm{R} = \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{\frac{1}{2}}}.
$$

Cette fonction est entièrement indépendante de la position du plan des x et des y; car, le radical $\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$ exprimant la distance de m à m', il en est indépendant; la fonction

$$
x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2xx' - 2yy' - 2zz'
$$

en est donc pareillement indépendante; mais les carrés $x^2 + y^2 + z^2$ et $x'^2 + y'^2 + z'^2$ des rayons vecteurs ne dépendent point de cette position; la quantité $xx' + yy' + zz'$ n'en dépend donc pas, et par conséquent la fonction R en est indépendante. Supposons dans cette fonction

[1] Dans l'édition publiée par le Gouvernement français, on trouve à la fin du tome V, pour le n° 47 du Livre II, une correction *indiquée par l'Auteur* dans les termes suivants : « L'équation (Z′) du dernier alinéa de ce numéro n'est exacte qu'en négligeant l'excentricité et le carré de l'inclinaison de l'orbite. C'est avec cette restriction qu'elle a été employée dans tout l'Ouvrage. Il faut supprimer cet alinéa et y substituer ces mots : L'équation (Z) du numéro précédent donnera, d'une manière fort simple, la valeur de δs. »

(*Note de l'Éditeur.*)

$$
x = r\cos v, \qquad y = r\sin v,
$$
$$
x' = r'\cos v', \qquad y' = r'\sin v';
$$

on aura

$$
\mathrm{R} = \frac{m'[rr'\cos(v' - v) + zz']}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'}{[r^2 - 2rr'\cos(v' - v) + r'^2 + (z' - z)^2]^{\frac{1}{2}}}.
$$

Les orbes des planètes étant presque circulaires et peu inclinés les uns aux autres, on peut choisir le plan des x et des y de manière que z et z' soient très-petits. Dans ce cas, r et r' diffèrent très-peu des demi-grands axes a et a' des orbes elliptiques; nous supposerons donc

$$
r = a(1 + u_{,}), \quad r' = a'(1 + u'_{,}),
$$

$u_{,}$ et $u'_{,}$ étant des petites quantités. Les angles v et v' différant peu des longitudes moyennes $nt + \varepsilon$ et $n't + \varepsilon'$, nous supposerons

$$
v = nt + \varepsilon + v_{,}, \quad v' = n't + \varepsilon' + v'_{,},
$$

$v_{,}$ et $v'_{,}$ étant des angles peu considérables. Ainsi, en réduisant R dans une série ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de $u_{,}$, $v_{,}$, z, $u'_{,}$, $v'_{,}$ et z', cette série sera fort convergente. Soit

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{a'^2}\cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - [a^2 - 2aa'\cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(0)} + \mathrm{A}^{(1)}\cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \mathrm{A}^{(2)}\cos 2(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\
&\qquad + \mathrm{A}^{(3)}\cos 3(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \ldots;
\end{aligned}
$$

on peut donner à cette série la forme

$$
\tfrac{1}{2}\Sigma\mathrm{A}^{(i)}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon),
$$

la caractéristique Σ des intégrales finies étant relative au nombre i, et devant s'étendre à tous les nombres entiers, depuis $i = -\infty$ jusqu'à $i = \infty$, la valeur $i = 0$ étant comprise dans ce nombre infini de valeurs; mais alors il faut observer que $\mathrm{A}^{(-i)} = \mathrm{A}^{(i)}$. Cette forme a l'avantage de servir à exprimer d'une manière fort simple, non-seulement la série précédente, mais encore le produit de cette série par le sinus ou le cosinus d'un angle quelconque $ft + \varpi$; car il est facile de voir que ce produit est égal à

$$\tfrac{1}{2}\Sigma A^{(i)} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + ft + \varpi].$$

Cette propriété nous fournira des expressions très-commodes des perturbations du mouvement des planètes. Soit pareillement

$$[a^2 - 2aa'\cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\Sigma B^{(i)}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon),$$

$B^{(-i)}$ étant égal à $B^{(i)}$. Cela posé, on aura, par les théorèmes du n° **21**,

$$\begin{aligned}
R = {} & \frac{m'}{2}\Sigma A^{(i)}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& + \frac{m'}{2}u_{,}\Sigma a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& + \frac{m'}{2}u'_{,}\Sigma a'\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& - \frac{m'}{2}(v'_{,} - v_{,})\Sigma iA^{(i)}\sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& + \frac{m'}{4}u_{,}^2\Sigma a^2\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a^2}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& + \frac{m'}{2}u_{,}u'_{,}\Sigma aa'\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a\,\partial a'}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& + \frac{m'}{4}u'^2_{,}\Sigma a'^2\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a'^2}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& - \frac{m'}{2}(v'_{,} - v_{,})u_{,}\Sigma ia\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& - \frac{m'}{2}(v'_{,} - v_{,})u'_{,}\Sigma ia'\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}\sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& - \frac{m'}{4}(v'_{,} - v_{,})^2\Sigma i^2A^{(i)}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& + \frac{m'zz'}{a'^3} - \frac{3m'az'^2}{2a'^4}\cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& + \frac{m'(z' - z)^2}{4}\Sigma B^{(i)}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si l'on substitue dans cette expression de R, au lieu de $u_{,}$, $u'_{,}$, $v_{,}$, $v'_{,}$, z et z', leurs valeurs relatives au mouvement elliptique, valeurs qui sont fonctions de sinus et de cosinus des angles $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$ et de leurs multiples, R sera exprimé par une suite infinie de cosinus de la forme

$$m'k\cos(i'n't - int + A),$$

i et i' étant des nombres entiers.

Il est visible que l'action des corps m'', m''',... sur m produira dans R des termes analogues à ceux qui résultent de l'action de m', et que l'on obtiendra, en changeant dans l'expression précédente de R tout ce qui est relatif à m' dans les mêmes quantités relatives à m'', m''', ...

Considérons un terme quelconque $m'k\cos(i'n't - int + A)$ de l'expression de R. Si les orbites étaient circulaires et dans un même plan, on aurait $i' = i$; donc i' ne peut surpasser i ou en être surpassé qu'au moyen des sinus ou des cosinus des expressions de $u_{,}$, $v_{,}$, z, $u'_{,}$, $v'_{,}$, z', qui, en se combinant avec les sinus et les cosinus de l'angle $n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon$ et de ses multiples, produisent des sinus et des cosinus d'angles dans lesquels i' est différent de i.

Si l'on regarde les excentricités et les inclinaisons des orbites comme des quantités très-petites du premier ordre, il résulte des formules du n° **22** que, dans les expressions de $u_{,}$, $v_{,}$, z ou rs, s étant la tangente de la latitude de m, le coefficient du sinus ou du cosinus d'un angle tel que $f(nt + \varepsilon)$ est exprimé par une série dont le premier terme est de l'ordre f, le second terme de l'ordre $f + 2$, le troisième terme de l'ordre $f + 4$, et ainsi de suite. Il en est de même du coefficient du sinus ou du cosinus de l'angle $f'(n't + \varepsilon')$, dans les expressions de $u'_{,}$, $v'_{,}$, z'. Il suit de là que, i et i' étant supposés positifs, et i' plus grand que i, le coefficient k dans le terme $m'k\cos(i'n't - int + A)$ est de l'ordre $i' - i$, et que, dans la série qui l'exprime, le premier terme est de l'ordre $i' - i$, le second terme est de l'ordre $i' - i + 2$, et ainsi de suite, en sorte que cette série est fort convergente. Si i était plus grand que i', les termes de la série seraient successivement des ordres $i - i'$, $i - i' + 2, \ldots$. Il en serait de même si i était négatif dans le premier cas, ou i' dans le second (*).

Nommons ϖ la longitude du périhélie de l'orbite de m, et θ celle de son nœud; nommons pareillement ϖ' la longitude du périhélie de l'orbite de m', et θ' celle de son nœud, ces longitudes étant comptées sur un plan très-peu incliné à celui des orbites. Il résulte des formules du n° **22** que, dans les expressions de $u_{,}$, $v_{,}$ et z, l'angle $nt + \varepsilon$ est toujours accompagné de $-\varpi$ ou de $-\theta$, et que, dans les expressions de $u'_{,}$, $v'_{,}$ et z', l'angle $n't + \varepsilon'$ est toujours accompagné de $-\varpi'$ ou de $-\theta'$; d'où il suit que le terme $m'k\cos(i'n't - int + \mathrm{A})$ est de cette forme

$$m'k\cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta - g'''\theta'),$$

g, g', g'', g''' étant des nombres entiers positifs ou négatifs, et tels que l'on a

$$0 = i' - i - g - g' - g'' - g'''.$$

Cela résulte encore de ce que la valeur de R et ses différents termes sont indépendants de la position de la droite d'où l'on compte les longitudes. De plus, dans les formules du n° **22**, le coefficient du sinus et du cosinus de l'angle ϖ a toujours pour facteur l'excentricité e de l'orbite de m; le coefficient du sinus et du cosinus de l'angle 2ϖ a pour facteur le carré e^2 de cette excentricité, et ainsi de suite. Pareillement, le coefficient du sinus et du cosinus de l'angle θ a pour facteur $\tang\frac{1}{2}\varphi$, φ étant l'inclinaison de l'orbite de m sur le plan fixe; le coefficient du sinus et du cosinus de l'angle 2θ a pour facteur $\tang^2\frac{1}{2}\varphi$, et ainsi du reste; d'où il résulte que le coefficient k a pour facteur

$$e^g e'^{g'} \tang^{g''}\tfrac{1}{2}\varphi \tang^{g'''}\tfrac{1}{2}\varphi',$$

les nombres g, g', g'', g''' étant pris positivement dans les exposants de ce facteur. Si tous ces nombres sont positifs en eux-mêmes, ce facteur sera de l'ordre $i' - i$, en vertu de l'équation

(*) La phrase : Il en serait de même, etc., qui termine cet alinéa, ne se trouve pas dans l'édition de l'an VII; elle a été ajoutée dans l'édition de 1829.

$$0 = i' - i - g - g' - g'' - g''';$$

mais, si l'un d'eux, tel que g, est négatif et égal à $-g$, ce facteur sera de l'ordre $i' - i + 2g$. En ne conservant donc, parmi les termes de R, que ceux qui, dépendant de l'angle $i'n't - int$, sont de l'ordre $i' - i$, et en rejetant tous ceux qui, dépendant du même angle, sont des ordres $i' - i + 2$, $i' - i + 4, \ldots$, l'expression de R sera composée de termes de la forme

$$\mathrm{H}e^g e'^{g'} \tang^{g''}\tfrac{1}{2}\varphi \tang^{g'''}\tfrac{1}{2}\varphi' \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta - g'''\theta'),$$

H étant un coefficient indépendant des excentricités et des inclinaisons des orbites, et les nombres g, g', g'', g''' étant tous positifs, et tels que leur somme soit égale à $i' - i$.

Si l'on substitue, dans R, $a(1 + u_{,})$ au lieu de r, on aura

$$r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} = a\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a}.$$

Si, dans cette même fonction, on substitue, au lieu de $u_{,}$, $v_{,}$ et z, leurs valeurs données par les formules du n° **22**, on aura

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varepsilon},$$

pourvu que l'on suppose $\varepsilon - \varpi$ et $\varepsilon - \theta$ constants dans la différentielle de R prise par rapport à ε; car alors $u_{,}$, $v_{,}$ et z sont constants dans cette différentielle, et, comme on a $v = nt + \varepsilon + v_{,}$, il est clair que l'équation précédente a lieu. On pourra donc obtenir facilement les valeurs de $r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}$ et de $\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}$ qui entrent dans les équations différentielles des numéros précédents, lorsque l'on aura la valeur de R développée en série de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps t. La différentielle $d\mathrm{R}$ sera pareillement très-facile à déterminer, en observant de ne faire varier dans R que l'angle nt, et de supposer l'angle $n't$ constant, puisque $d\mathrm{R}$ est la différence de R, prise en supposant constantes les coordonnées de m', qui sont fonctions de $n't$.

49. La difficulté du développement de R en série se réduit à former les quantités $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, et leurs différences prises soit relativement à a, soit relativement à a'. Pour cela, considérons généralement la fonction

$$(a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{-s},$$

et développons-la suivant les cosinus de l'angle θ et de ses multiples. Si l'on fait $\frac{a}{a'} = \alpha$, elle deviendra

$$a'^{-2s}(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s}.$$

Soit

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\theta + b_s^{(2)}\cos 2\theta + b_s^{(3)}\cos 3\theta + \ldots,$$

$b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$, $b_s^{(2)}$, ... étant des fonctions de α et de s. Si l'on prend les différences logarithmiques des deux membres de cette équation par rapport à la variable θ, on aura

$$\frac{-2s\alpha\sin\theta}{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2} = \frac{-b_s^{(1)}\sin\theta - 2b_s^{(2)}\sin 2\theta - \ldots}{\frac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\theta + b_s^{(2)}\cos 2\theta + \ldots}.$$

En multipliant en croix et comparant les cosinus semblables, on trouve généralement

$$(a) \qquad b_s^{(i)} = \frac{(i-1)(1+\alpha^2)\,b_s^{(i-1)} - (i+s-2)\,\alpha b_s^{(i-2)}}{(i-s)\,\alpha};$$

on aura ainsi $b_s^{(2)}$, $b_s^{(3)}$, ... lorsque l'on connaîtra $b_s^{(0)}$ et $b_s^{(1)}$.

Si l'on change s en $s+1$, dans l'expression précédente de $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s}$, on aura

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s-1} = \tfrac{1}{2}b_{s+1}^{(0)} + b_{s+1}^{(1)}\cos\theta + b_{s+1}^{(2)}\cos 2\theta + b_{s+1}^{(3)}\cos 3\theta + \ldots.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2$, et en substituant, au lieu de $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s}$, sa valeur en série, on aura

$$\tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\theta + b_s^{(2)}\cos 2\theta + \ldots = (1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)\left(\tfrac{1}{2}b_{s+1}^{(0)} + b_{s+1}^{(1)}\cos\theta + b_{s+1}^{(2)}\cos 2\theta + b_{s+1}^{(3)}\cos 3\theta + \ldots\right),$$

d'où l'on tire, en comparant les cosinus semblables,

$$b_s^{(i)} = (1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i)} - \alpha b_{s+1}^{(i-1)} - \alpha b_{s+1}^{(i+1)}.$$

La formule (a) donne

$$b_{s+1}^{(i+1)} = \frac{i(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i)} - (i+s)\,\alpha b_{s+1}^{(i-1)}}{(i-s)\,\alpha};$$

l'expression précédente de $b_s^{(i)}$ deviendra ainsi

$$b_s^{(i)} = \frac{2s\alpha b_{s+1}^{(i-1)} - s(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i)}}{i-s}.$$

En changeant i en $i+1$ dans cette équation, on aura

$$b_s^{(i+1)} = \frac{2s\alpha b_{s+1}^{(i)} - s(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i+1)}}{i-s+1},$$

et, si l'on substitue au lieu de $b_{s+1}^{(i+1)}$ sa valeur précédente, on aura

$$b_s^{(i+1)} = \frac{s(i+s)\,\alpha(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i-1)} + s\left[2(i-s)\,\alpha^2 - i(1+\alpha^2)^2\right]b_{s+1}^{(i)}}{(i-s)(i-s+1)\,\alpha}.$$

Ces deux expressions de $b_s^{(i)}$ et de $b_s^{(i+1)}$ donnent

$$(b) \qquad b_{s+1}^{(i)} = \frac{\frac{i+s}{s}(1+\alpha^2)\,b_s^{(i)} - 2\,\frac{i-s+1}{s}\,\alpha b_s^{(i+1)}}{(1-\alpha^2)^2};$$

en substituant au lieu de $b_s^{(i+1)}$ sa valeur tirée de l'équation (a), on aura

$$(c) \qquad b_{s+1}^{(i)} = \frac{\frac{s-i}{s}(1+\alpha^2)\,b_s^{(i)} + \frac{2(i+s-1)}{s}\,\alpha b_s^{(i-1)}}{(1-\alpha^2)^2},$$

expression que l'on peut conclure de la précédente, en y changeant i dans $-i$, et observant que $b^{(i)} = b^{(-i)}$. On aura donc, au moyen de cette formule, les valeurs de $b_{s+1}^{(0)}$, $b_{s+1}^{(1)}$, $b_{s+1}^{(2)}$, ..., lorsque celles de $b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$, $b_s^{(2)}$, ... seront connues.

Nommons, pour abréger, λ la fonction $1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2$. Si l'on différentie, par rapport à α, l'équation

$$\lambda^{-s} = \tfrac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos\theta + b_s^{(2)} \cos 2\theta + \ldots,$$

on aura

$$-2s(\alpha - \cos\theta)\lambda^{-s-1} = \frac{1}{2}\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} + \frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}\cos\theta + \frac{db_s^{(2)}}{d\alpha}\cos 2\theta + \ldots;$$

mais on a

$$-\alpha + \cos\theta = \frac{1 - \alpha^2 - \lambda}{2\alpha};$$

on aura donc

$$\frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha}\lambda^{-s-1} - \frac{s\lambda^{-s}}{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} + \frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}\cos\theta + \ldots,$$

d'où l'on tire généralement

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha} b_{s+1}^{(i)} - \frac{s b_s^{(i)}}{\alpha}.$$

En substituant au lieu de $b_{s+1}^{(i)}$ sa valeur donnée par la formule (b), on aura

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \frac{i + (i + 2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)} b_s^{(i)} - \frac{2(i - s + 1)}{1 - \alpha^2} b_s^{(i+1)}.$$

Si l'on différentie cette équation, on aura

$$\frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2} = \frac{i + (i + 2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} + \left(\frac{2(i+s)(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} - \frac{i}{\alpha^2}\right) b_s^{(i)} - \frac{2(i-s+1)}{1-\alpha^2}\frac{db_s^{(i+1)}}{d\alpha} - \frac{4(i-s+1)\alpha}{(1-\alpha^2)^2} b_s^{(i+1)}.$$

En différentiant encore, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d^3 b_s^{(i)}}{d\alpha^3} = {} & \frac{i + (i + 2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2} + 2\left(\frac{2(i+s)(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} - \frac{i}{\alpha^2}\right)\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} + \left(\frac{4(i+s)\alpha(3+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3} + \frac{2i}{\alpha^3}\right) b_s^{(i)} \\ & - \frac{2(i-s+1)}{1-\alpha^2}\frac{d^2 b_s^{(i+1)}}{d\alpha^2} - \frac{8(i-s+1)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\frac{db_s^{(i+1)}}{d\alpha} - \frac{4(i-s+1)(1+3\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3} b_s^{(i+1)}.\end{aligned}$$

On voit ainsi que, pour déterminer les valeurs de $b_s^{(i)}$ et de ses différences successives, il suffit de connaître celles de $b_s^{(0)}$ et de $b_s^{(1)}$. On déterminera ces deux quantités de la manière suivante.

Si l'on nomme c le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on pourra mettre l'expression de λ^{-s} sous cette forme

$$\lambda^{-s} = (1 - \alpha c^{\theta\sqrt{-1}})^{-s}(1 - \alpha c^{-\theta\sqrt{-1}})^{-s}.$$

En développant le second membre de cette équation par rapport aux puissances de $c^{\theta\sqrt{-1}}$ et de $c^{-\theta\sqrt{-1}}$, il est visible que les deux exponentielles $c^{i\theta\sqrt{-1}}$ et $c^{-i\theta\sqrt{-1}}$ auront le même coefficient, que nous désignerons par k. La somme des deux termes $kc^{i\theta\sqrt{-1}}$ et $kc^{-i\theta\sqrt{-1}}$ est $2k\cos i\theta$; ce sera la valeur de $b_s^{(i)}\cos i\theta$; on aura donc $b_s^{(i)} = 2k$. Maintenant l'expression de λ^{-s} est égale au produit des deux séries

$$1 + s\alpha c^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{s(s+1)}{1.2}\alpha^2 c^{2\theta\sqrt{-1}} + \ldots,$$

$$1 + s\alpha c^{-\theta\sqrt{-1}} + \frac{s(s+1)}{1.2}\alpha^2 c^{-2\theta\sqrt{-1}} + \ldots;$$

en multipliant donc ces deux séries l'une par l'autre, on aura, dans le cas de $i = 0$,

$$k = 1 + s^2\alpha^2 + \left(\frac{s(s+1)}{1.2}\right)^2\alpha^4 + \ldots,$$

et, dans le cas de $i = 1$,

$$k = \alpha\left(s + s\frac{s(s+1)}{1.2}\alpha^2 + \frac{s(s+1)}{1.2}\frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\alpha^4 + \ldots\right);$$

partant

$$b_s^{(0)} = 2\left[1 + s^2\alpha^2 + \left(\frac{s(s+1)}{1.2}\right)^2\alpha^4 + \left(\frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\right)^2\alpha^6 + \ldots\right],$$

$$b_s^{(1)} = 2\alpha\left[s + s\frac{s(s+1)}{1.2}\alpha^2 + \frac{s(s+1)}{1.2}\frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\alpha^4 + \ldots\right].$$

Pour que ces séries soient convergentes, il faut que α soit moindre que l'unité; c'est ce que l'on peut toujours faire, en prenant pour α le rapport de la plus petite des distances a et a' à la plus grande; ainsi, ayant supposé $\alpha = \frac{a}{a'}$, nous supposerons a plus petit que a'.

Dans la théorie du mouvement des corps m, m', m'',..., on a besoin de connaître les valeurs de $b_s^{(0)}$ et de $b_s^{(1)}$, lorsque $s = \frac{1}{2}$ et $s = \frac{3}{2}$. Dans ces deux cas, ces valeurs sont peu convergentes, si α n'est pas une petite fraction. Ces séries convergent avec plus de rapidité, lorsque $s = -\frac{1}{2}$, et l'on a

$$\tfrac{1}{2} b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 \alpha^4 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 \alpha^6 + \left(\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 \alpha^8 + \ldots,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -\alpha\left(1 - \frac{1.1}{2.4}\alpha^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}\alpha^4 - \frac{1.3}{4.6}\cdot\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\alpha^6 - \frac{1.3.5}{4.6.8}\cdot\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\alpha^8 - \ldots\right).$$

Dans la théorie des planètes et des satellites, il suffira de prendre la somme des onze ou douze premiers termes, en négligeant les termes suivants, ou plus exactement, en les sommant comme une progression géométrique dont la raison est α^2. Lorsque l'on aura ainsi déterminé $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ et $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$, on aura $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, en faisant $i = 0$ et $s = -\frac{1}{2}$ dans la formule (b), et l'on trouvera

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{(1+\alpha^2)\, b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + 6\alpha b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Si, dans la formule (c), on suppose $i = 1$ et $s = -\frac{1}{2}$, on aura

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{2\alpha b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + 3(1+\alpha^2)\, b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Au moyen de ces valeurs de $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$ et de $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, on aura, par les formules précédentes, les valeurs de $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ et de ses différences, quel que soit le nombre i, et l'on en conclura les valeurs de $b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$ et de ses différences.

Les valeurs de $b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$ et de $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$ peuvent être déterminées fort simplement par les formules suivantes :

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = \frac{b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}}{(1-\alpha^2)^2}, \qquad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = -3\,\frac{b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Maintenant, pour avoir les quantités $A^{(0)}$, $A^{(1)}$,... et leurs différences, on observera que, par le numéro précédent, la série

$$\tfrac{1}{2} A^{(0)} + A^{(1)} \cos\theta + A^{(2)} \cos 2\theta + \ldots$$

résulte du développement de la fonction

$$\frac{a\cos\theta}{a'^2} - (a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

dans une suite de cosinus de l'angle θ et de ses multiples; en faisant $\frac{a}{a'} = \alpha$, cette même fonction se réduit à

$$-\frac{1}{2a'} b_{\frac{1}{2}}^{(0)} + \left(\frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(1)}\right)\cos\theta - \frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(2)} \cos 2\theta - \ldots,$$

ce qui donne généralement

$$A^{(i)} = -\frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(i)},$$

lorsque i est zéro ou plus grand que 1, abstraction faite du signe. Dans le cas de $i = 1$, on a

$$A^{(1)} = \frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(1)}.$$

On a ensuite

$$\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} = -\frac{1}{a'} \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha} \frac{\partial\alpha}{\partial a};$$

or on a $\frac{\partial\alpha}{\partial a} = \frac{1}{a'}$; partant

$$\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} = -\frac{1}{a'^2} \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha},$$

et, dans le cas de $i = 1$, on a

$$\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} = \frac{1}{a'^2}\left(1 - \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha}\right).$$

Enfin on a, dans le cas même de $i = 1$,

$$\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a^2} = -\frac{1}{a'^3}\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2},$$

$$\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3} = -\frac{1}{a'^4}\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour avoir les différences de $A^{(i)}$ relatives à a', on observera que, $A^{(i)}$ étant une fonction homogène en a et a', de la dimension -1, on a, par la nature de ce genre de fonctions,

$$a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + a'\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'} = -A^{(i)},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
a'\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'} &= -A^{(i)} - a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a},\\
a'\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a\,\partial a'} &= -2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} - a\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a^2},\\
a'^2\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a'^2} &= 2A^{(i)} + 4a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + a^2\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a^2}.\\
a'^2\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a'^2\,\partial a} &= 6\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + 6a\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a^2} + a^2\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3},\\
a'^3\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a'^3} &= -6A^{(i)} - 18a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} - 9a^2\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a^2} - a^3\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

On aura $B^{(i)}$ et ses différences en observant que, par le numéro précédent, la série

$$\tfrac{1}{2}B^{(0)} + B^{(1)}\cos\theta + B^{(2)}\cos 2\theta + \ldots$$

est le développement de la fonction $a'^{-3}(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}$, suivant les cosinus de l'angle θ et de ses multiples; or cette fonction ainsi dé-

veloppée est égale à

$$a'^{-3}\left(\tfrac{1}{2}b_{\frac{3}{2}}^{(0)} + b_{\frac{3}{2}}^{(1)}\cos\theta + b_{\frac{3}{2}}^{(2)}\cos 2\theta + \ldots\right);$$

on a donc généralement

$$B^{(i)} = \frac{1}{a'^3}b_{\frac{3}{2}}^{(i)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial B^{(i)}}{\partial a} = \frac{1}{a'^4}\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha},\qquad \frac{\partial^2 B^{(i)}}{\partial a^2} = \frac{1}{a'^5}\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2},\qquad \ldots.$$

De plus, $B^{(i)}$ étant une fonction homogène de a et de a', de la dimension -3, on a

$$a\frac{\partial B^{(i)}}{\partial a} + a'\frac{\partial B^{(i)}}{\partial a'} = -3B^{(i)},$$

d'où il est facile de conclure les différences partielles de $B^{(i)}$ prises relativement à a', au moyen de ses différences partielles en a.

Dans la théorie des perturbations de m' par l'action de m, les valeurs de $A^{(i)}$ et de $B^{(i)}$ sont les mêmes que ci-dessus, à l'exception de $A^{(1)}$, qui dans cette théorie devient $\frac{a'}{a^2} - \frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$. Ainsi le calcul des valeurs de $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ et de leurs différences sert à la fois pour les théories des deux corps m et m'.

50. Après cette digression sur le développement de R en série, reprenons les équations différentielles (X'), (Y) et (Z') des nos **46** et **47**, et déterminons à leur moyen les valeurs de δr, δv et δs, en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Si, dans les orbes elliptiques, on suppose

$$\begin{aligned}
r &= a(1 + u_{,}), & r' &= a'(1 + u'_{,}),\\
v &= nt + \varepsilon + v_{,}, & v' &= n't + \varepsilon' + v'_{,},
\end{aligned}$$

on aura, par le n° **22**,

$$\begin{aligned}
u_{,} &= -e\cos(nt + \varepsilon - \varpi), & u'_{,} &= -e'\cos(n't + \varepsilon' - \varpi'),\\
v_{,} &= 2e\sin(nt + \varepsilon - \varpi), & v'_{,} &= 2e'\sin(n't + \varepsilon' - \varpi'),
\end{aligned}$$

$nt+\varepsilon$, $n't+\varepsilon'$ étant les longitudes moyennes de m et de m'; a et a' étant les demi-grands axes de leurs orbites; e et e' étant les rapports des excentricités aux demi-grands axes; enfin, ϖ et ϖ' étant les longitudes de leurs périhélies. Toutes ces longitudes peuvent être rapportées indifféremment aux plans mêmes des orbites ou à un plan qui leur est fort peu incliné, puisque l'on néglige les quantités de l'ordre des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons. En substituant les valeurs précédentes dans l'expression de R du n° 48, on aura

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{m'}{2}\,\Sigma\,\mathrm{A}^{(i)}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
& -\frac{m'}{2}\,\Sigma\left[a\frac{\partial\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+2i\mathrm{A}^{(i)}\right]e\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\\
& -\frac{m'}{2}\,\Sigma\left[a'\frac{\partial\mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a'}-2(i-1)\,\mathrm{A}^{(i-1)}\right]e'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi')],
\end{aligned}
$$

le signe Σ des intégrales finies s'étendant à toutes les valeurs entières, positives et négatives, de i, en y comprenant la valeur $i=0$. De là on tire

$$
\begin{aligned}
2\int d\mathrm{R}+r\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r} = {} & 2m'g+\frac{m'}{2}\,a\frac{\partial\mathrm{A}^{(0)}}{\partial a}\\
& +\frac{m'}{2}\,\Sigma\left[a\frac{\partial\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+\frac{2n}{n-n'}\,\mathrm{A}^{(i)}\right]\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
& -\frac{m'}{2}\left[a^2\frac{\partial^2\mathrm{A}^{(0)}}{\partial a^2}+3a\frac{\partial\mathrm{A}^{(0)}}{\partial a}\right]e\cos(nt+\varepsilon-\varpi)\\
& -\frac{m'}{2}\left(aa'\frac{\partial^2\mathrm{A}^{(1)}}{\partial a\,\partial a'}+2a\frac{\partial\mathrm{A}^{(1)}}{\partial a}+2a'\frac{\partial\mathrm{A}^{(1)}}{\partial a'}+4\mathrm{A}^{(1)}\right)e'\cos(nt+\varepsilon-\varpi')\\
& -\frac{m'}{2}\,\Sigma\left[a^2\frac{\partial^2\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a^2}+(2i+1)\,a\frac{\partial\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+\frac{2(i-1)\,n}{i(n-n')-n}\left(a\frac{\partial\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+2i\mathrm{A}^{(i)}\right)\right]\\
& \qquad\qquad\times e\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\\
& -\frac{m'}{2}\,\Sigma\left[aa'\frac{\partial^2\mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a\,\partial a'}-2(i-1)\,a\frac{\partial\mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a}+\frac{2(i-1)n}{i(n-n')-n}\left(a'\frac{\partial\mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a'}-2(i-1)\,\mathrm{A}^{(i-1)}\right)\right]\\
& \qquad\qquad\times e'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'],
\end{aligned}
$$

le signe intégral Σ s'étendant, comme dans ce qui suit, à toutes les

valeurs entières, positives ou négatives, de i, la seule valeur $i=0$ étant exceptée, parce que nous avons fait sortir hors de ce signe les termes dans lesquels $i=0$; $m'g$ est une constante ajoutée à l'intégrale $\int d\mathrm{R}$. En faisant donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C} &= \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2\mathrm{A}^{(0)}}{\partial a^2}+3a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(0)}}{\partial a}+6ag,\\
\mathrm{D} &= \tfrac{1}{2}a^2a'\frac{\partial^2\mathrm{A}^{(1)}}{\partial a\,\partial a'}+a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(1)}}{\partial a}+aa'\frac{\partial\mathrm{A}^{(1)}}{\partial a'}+2a\mathrm{A}^{(1)},\\
\mathrm{C}^{(i)} &= \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a^2}+\frac{2i+1}{2}\,a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+\frac{i(n-n')-3n}{2[i(n-n')-n]}\left(a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+\frac{2n}{n-n'}\,a\mathrm{A}^{(i)}\right)\\
&\qquad+\frac{(i-1)\,n}{i(n-n')-n}\left(a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+2ia\mathrm{A}^{(i)}\right),\\
\mathrm{D}^{(i)} &= \tfrac{1}{2}a^2a'\frac{\partial^2\mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a\,\partial a'}-(i-1)\,a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a}+\frac{(i-1)\,n}{i(n-n')-n}\left(aa'\frac{\partial\mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a'}-2(i-1)\,a\mathrm{A}^{(i-1)}\right);
\end{aligned}
$$

en prenant ensuite pour unité la somme des masses $\mathrm{M}+m$, et observant que, par le n° 20, $\frac{\mathrm{M}+m}{a^3}=n^2$, l'équation (X') deviendra

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{d^2\delta u}{dt^2}+n^2\delta u-2n^2m'ag-\frac{n^2m'}{2}\,a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(0)}}{\partial a}\\
& -\frac{n^2m'}{2}\,\Sigma\left(a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+\frac{2n}{n-n'}\,a\mathrm{A}^{(i)}\right)\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
& +n^2m'\mathrm{C}e\cos(nt+\varepsilon-\varpi)+n^2m'\mathrm{D}e'\cos(nt+\varepsilon-\varpi')\\
& +n^2m'\,\Sigma\,\mathrm{C}^{(i)}e\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\\
& +n^2m'\,\Sigma\,\mathrm{D}^{(i)}e'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'],
\end{aligned}
$$

et, en intégrant,

$$
\begin{aligned}
\delta u = {} & 2m'ag+\frac{m'}{2}\,a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(0)}}{\partial a}-\frac{m'}{2}\,n^2\,\Sigma\,\frac{a^2\dfrac{\partial\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+\dfrac{2n}{n-n'}\,a\mathrm{A}^{(i)}}{i^2(n-n')^2-n^2}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
& +m'f_1e\cos(nt+\varepsilon-\varpi)+m'f'_1e'\cos(nt+\varepsilon-\varpi')\\
& -\frac{m'}{2}\,\mathrm{C}nte\sin(nt+\varepsilon-\varpi)-\frac{m'}{2}\,\mathrm{D}nte'\sin(nt+\varepsilon-\varpi')\\
& +m'\,\Sigma\,\frac{\mathrm{C}^{(i)}n^2}{[i(n-n')-n]^2-n^2}\,e\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\\
& +m'\,\Sigma\,\frac{\mathrm{D}^{(i)}n^2}{[i(n-n')-n]^2-n^2}\,e'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'],
\end{aligned}
$$

$f_{,}$ et $f'_{,}$ étant deux arbitraires. L'expression de δr en δu, trouvée dans le n° 47, donnera

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{a} = {}& -2m'ag - \frac{m'}{2}a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{m'}{2}n^2\Sigma\frac{a^2\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \dfrac{2n}{n-n'}aA^{(i)}}{i^2(n-n')^2-n^2}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&- m'fe\cos(nt+\varepsilon-\varpi) - m'f'e'\cos(nt+\varepsilon-\varpi')\\
&+ \tfrac{1}{2}m'Cnte\sin(nt+\varepsilon-\varpi) + \tfrac{1}{2}m'Dnte'\sin(nt+\varepsilon-\varpi')\\
&+ m'n^2\Sigma\left\{\frac{a^2\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \dfrac{2n}{n-n'}aA^{(i)}}{i^2(n-n')^2-n^2} - \frac{C^{(i)}}{[i(n-n')-n]^2-n^2}\right\}e\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\\
&- m'n^2\Sigma\frac{D^{(i)}}{[i(n-n')-n]^2-n^2}e'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'],\end{aligned}$$

f et f' étant des arbitraires dépendantes de $f_{,}$ et $f'_{,}$.

Cette valeur de δr, substituée dans la formule (Y) du n° 46, donnera δv ou les perturbations du mouvement de la planète en longitude; mais on doit observer que, nt exprimant le moyen mouvement de m, le terme proportionnel au temps t doit disparaître de l'expression de δv. Cette condition détermine la constante g, et l'on trouve

$$g = -\tfrac{1}{2}a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}.$$

Nous aurions pu nous dispenser d'introduire dans la valeur de δr les arbitraires f et f', puisqu'elles peuvent être censées comprises dans les éléments e et ϖ du mouvement elliptique; mais alors l'expression de δv aurait renfermé des termes dépendants de l'anomalie moyenne, et qui n'auraient point été compris dans ceux que donne le mouvement elliptique : or il est plus commode de faire disparaître ces termes de l'expression de la longitude, pour les introduire dans l'expression du rayon vecteur; nous déterminerons ainsi $f_{,}$ et $f'_{,}$ de manière à remplir cette condition. Cela posé, si l'on substitue au lieu de $a'\dfrac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a'}$ sa

valeur $-A^{(i-1)} - a\dfrac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}$, on aura

$$C = a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 A^{(0)}}{\partial a^2},$$

$$D = aA^{(1)} - a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial a^2},$$

$$D^{(i)} = \frac{(i-1)(2i-1)n}{n-i(n-n')}aA^{(i-1)} + \frac{i^2(n-n')-n}{n-i(n-n')}a^2\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 A^{(i-1)}}{\partial a^2},$$

$$f = \tfrac{3}{2}a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{4}a^3\frac{\partial^2 A^{(0)}}{\partial a^2},$$

$$f' = \tfrac{1}{4}\left(aA^{(1)} - a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} - a^3\frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial a^2}\right).$$

Soit, de plus,

$$E^{(i)} = -\frac{3n}{n-n'}aA^{(i)} + \frac{i^2(n-n')[n+i(n-n')]-3n^2}{i^2(n-n')^2-n^2}\left(a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{2n}{n-n'}aA^{(i)}\right) + \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a^2};$$

$$F^{(i)} = \frac{(i-1)n}{n-n'}aA^{(i)} + \frac{\dfrac{in}{2}[n+i(n-n')]-3n^2}{i^2(n-n')^2-n^2}\left(a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{2n}{n-n'}aA^{(i)}\right) - \frac{2n^2E^{(i)}}{n^2-[n-i(n-n')]^2},$$

$$G^{(i)} = \frac{(i-1)(2i-1)naA^{(i-1)} + (i-1)na^2\dfrac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}}{2[n-i(n-n')]} - \frac{2n^2D^{(i)}}{n^2-[n-i(n-n')]^2},$$

on aura

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{a} = {}& \frac{m'}{6}a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{m'n^2}{2}\Sigma\frac{a^2\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \dfrac{2n}{n-n'}aA^{(i)}}{i^2(n-n')^2-n^2}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&- m'fe\cos(nt+\varepsilon-\varpi) - m'f'e'\cos(nt+\varepsilon-\varpi')\\
&+ \tfrac{1}{2}m'Cnte\sin(nt+\varepsilon-\varpi) + \tfrac{1}{2}m'Dnte'\sin(nt+\varepsilon-\varpi')\\
&+ n^2m'\Sigma\left\{\begin{aligned}&\frac{E^{(i)}}{n^2-[n-i(n-n')]^2}e\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\\
&+\frac{D^{(i)}}{n^2-[n-i(n-n')]^2}e'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi']\end{aligned}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta v = \frac{m'}{2}\Sigma &\left\{\frac{n^2}{i(n-n')^2}a\mathrm{A}^{(i)} + \frac{2n^3\left(a^2\dfrac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a} + \dfrac{2n}{n-n'}a\mathrm{A}^{(i)}\right)}{i(n-n')[i^2(n-n')^2-n^2]}\right\}\sin i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ &+ m'\mathrm{C}nte\cos(nt+\varepsilon-\varpi) + m'\mathrm{D}nte'\cos(nt+\varepsilon-\varpi')\\ &+ nm'\Sigma\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{F}^{(i)}}{n-i(n-n')}e\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\\ &+\frac{\mathrm{G}^{(i)}}{n-i(n-n')}e'\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi']\end{aligned}\right\},\end{aligned}$$

le signe intégral Σ s'étendant dans ces expressions à toutes les valeurs entières, positives et négatives, de i, la seule valeur $i=0$ étant exceptée.

On doit observer ici que, dans le cas même où la série représentée par $\Sigma\,\mathrm{A}^{(i)}\cos i(n't+nt+\varepsilon'-\varepsilon)$ est peu convergente, ces expressions de $\frac{\delta r}{a}$ et de δv le deviennent par les diviseurs qu'elles acquièrent. Cette remarque est d'autant plus importante que, sans elle, il eût été impossible d'exprimer analytiquement les perturbations réciproques des planètes dont les rapports des distances au Soleil diffèrent peu de l'unité.

Ces expressions peuvent être mises sous la forme suivante, qui nous sera utile dans la suite; soit

$$h = e\sin\varpi,\quad h' = e'\sin\varpi',$$
$$l = e\cos\varpi,\quad l' = e'\cos\varpi';$$

on aura

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{6}a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a} &+ \frac{m'n^2}{2}\Sigma\frac{a^2\dfrac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}+\dfrac{2n}{n-n'}a\mathrm{A}^{(i)}}{i^2(n-n')^2-n^2}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ &- m'(hf+h'f')\sin(nt+\varepsilon) - m'(lf+l'f')\cos(nt+\varepsilon)\\ &+\frac{m'}{2}(l\mathrm{C}+l'\mathrm{D})nt\sin(nt+\varepsilon) - \frac{m'}{2}(h\mathrm{C}+h'\mathrm{D})nt\cos(nt+\varepsilon)\\ &+ n^2m'\Sigma\left\{\begin{aligned}&\frac{h\mathrm{E}^{(i)}+h'\mathrm{D}^{(i)}}{n^2-[n-i(n-n')]^2}\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon]\\ &+\frac{l\mathrm{E}^{(i)}+l'\mathrm{D}^{(i)}}{n^2-[n-i(n-n')]^2}\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon]\end{aligned}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta v = \frac{m'}{2}\Sigma &\left\{\frac{n^2}{i(n-n')^2}a\mathrm{A}^{(i)} + 2n^3\frac{a^2\dfrac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a} + \dfrac{2n}{n-n'}a\mathrm{A}^{(i)}}{i(n-n')[i^2(n-n')^2-n^2]}\right\}\sin i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ &+ m'(h\mathrm{C}+h'\mathrm{D})nt\sin(nt+\varepsilon) + m'(l\mathrm{C}+l'\mathrm{D})nt\cos(nt+\varepsilon)\\ &+ nm'\Sigma\left\{\begin{aligned}&\frac{l\mathrm{F}^{(i)}+l'\mathrm{G}^{(i)}}{n-i(n-n')}\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon]\\ &-\frac{h\mathrm{F}^{(i)}+h'\mathrm{G}^{(i)}}{n-i(n-n')}\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon]\end{aligned}\right\}.\end{aligned}$$

En réunissant ces expressions de δr et de δv aux valeurs de r et de v relatives au mouvement elliptique, on aura les valeurs entières du rayon vecteur de m et de son mouvement en longitude.

51. Considérons présentement le mouvement de m en latitude. Pour cela, reprenons la formule (Z') du n° 47. Si l'on néglige le produit des inclinaisons par les excentricités des orbites, elle devient

$$0 = \frac{d^2\delta u'}{dt^2} + n^2\delta u' - \frac{1}{a^2}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z};$$

l'expression de R du n° 48 donne, en prenant pour plan fixe celui de l'orbite primitive de m,

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} = \frac{m'z'}{a'^3} - \frac{m'z'}{2}\Sigma\,\mathrm{B}^{(i)}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon),$$

la valeur de i s'étendant à tous les nombres entiers positifs et négatifs, en y comprenant même $i=0$. Soient γ la tangente de l'inclinaison de l'orbite de m' sur l'orbite primitive de m, et Π la longitude du nœud ascendant de la première de ces orbites sur la seconde; on aura, à très-peu près,

$$z' = a'\gamma\sin(n't+\varepsilon'-\Pi),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} = \frac{m'}{a'^2}\gamma\sin(n't+\varepsilon'-\Pi) &- \frac{m'}{2}a'\mathrm{B}^{(1)}\gamma\sin(nt+\varepsilon-\Pi)\\ &- \frac{m'}{2}a'\Sigma\,\mathrm{B}^{(i-1)}\gamma\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\Pi],\end{aligned}$$

la valeur de i s'étendant ici, comme dans ce qui va suivre, à tous les nombres entiers positifs et négatifs, la seule valeur $i = 0$ étant exceptée. L'équation différentielle en $\delta u'$ deviendra donc, en multipliant la valeur de $\frac{\partial R}{\partial z}$ par $n^2 a^3$, qui est égal à l'unité,

$$0 = \frac{d^2 \delta u'}{dt^2} + n^2 \delta u' - m' n^2 \frac{a}{a'^2} \gamma \sin(n't + \varepsilon' - \Pi) + \frac{m' n^2}{2} a a' B^{(1)} \gamma \sin(nt + \varepsilon - \Pi)$$
$$+ \frac{m' n^2}{2} a a' \Sigma B^{(i-1)} \gamma \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \Pi];$$

d'où l'on tire, en intégrant et en observant que, par le n° 47, $\delta s = -a \delta u'$,

$$\delta s = -\frac{m' n^2}{n^2 - n'^2} \frac{a^2}{a'^2} \gamma \sin(n't + \varepsilon' - \Pi) - \frac{m' a^2 a'}{4} B^{(1)} nt . \gamma \cos(nt + \varepsilon - \Pi)$$
$$+ \frac{m' n^2 a^2 a'}{2} \Sigma \frac{B^{(i-1)}}{n^2 - [n - i(n - n')]^2} \gamma \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \Pi].$$

Pour avoir la latitude de m au-dessus d'un plan fixe peu incliné à celui de son orbite primitive, en nommant φ l'inclinaison de cette orbite sur le plan fixe, et θ la longitude de son nœud ascendant sur le même plan, il suffira d'ajouter à δs la quantité $\operatorname{tang} \varphi \sin(v - \theta)$ ou $\operatorname{tang} \varphi \sin(nt + \varepsilon - \theta)$, en négligeant l'excentricité de l'orbite. Nommons φ' et θ' ce que deviennent φ et θ relativement à m'. Si m était en mouvement sur l'orbite primitive de m', la tangente de sa latitude serait $\operatorname{tang} \varphi' \sin(nt + \varepsilon - \theta')$; elle serait $\operatorname{tang} \varphi \sin(nt + \varepsilon - \theta)$, si m continuait de se mouvoir sur son orbite primitive. La différence de ces deux tangentes est à très-peu près la tangente de la latitude de m au-dessus du plan de son orbite primitive, en le supposant mû sur le plan de l'orbite primitive de m'; on a donc

$$\operatorname{tang} \varphi' \sin(nt + \varepsilon - \theta') - \operatorname{tang} \varphi \sin(nt + \varepsilon - \theta) = \gamma \sin(nt + \varepsilon - \Pi).$$

Soit

$$\operatorname{tang} \varphi \sin \theta = p, \quad \operatorname{tang} \varphi' \sin \theta' = p',$$
$$\operatorname{tang} \varphi \cos \theta = q, \quad \operatorname{tang} \varphi' \cos \theta' = q';$$

on aura

$$\gamma \sin \Pi = p' - p, \quad \gamma \cos \Pi = q' - q,$$

et par conséquent, si l'on désigne par s la latitude de m au-dessus du

plan fixe, on aura, à très-peu près,

$$s = q \sin(nt + \varepsilon) - p \cos(nt + \varepsilon) - \frac{m' a^2 a'}{4} (p' - p) B^{(1)} nt \sin(nt + \varepsilon)$$
$$- \frac{m' a^2 a'}{4} (q' - q) B^{(1)} nt \cos(nt + \varepsilon) - \frac{m' n^2}{n^2 - n'^2} \frac{a^2}{a'^2} [(q' - q) \sin(n't + \varepsilon') - (p' - p) \cos(n't + \varepsilon')]$$
$$+ \frac{m' n^2 a^2 a'}{2} \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(q' - q) B^{(i-1)}}{n^2 - [n - i(n - n')]^2} \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon] \\ - \dfrac{(p' - p) B^{(i-1)}}{n^2 - [n - i(n - n')]^2} \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon] \end{array} \right\}.$$

52. Rassemblons présentement les formules que nous venons de trouver. Nommons (r) et (v) les parties du rayon vecteur et de la longitude v sur l'orbite, qui dépendent du mouvement elliptique; on aura

$$r = (r) + \delta r, \quad v = (v) + \delta v.$$

La valeur précédente de s sera la latitude de m au-dessus du plan fixe; mais il sera plus exact d'employer, au lieu de ses deux premiers termes, qui sont indépendants de m', la valeur de la latitude qui aurait lieu dans le cas où m ne quitterait point le plan de son orbite primitive. Ces expressions renferment toute la théorie des planètes, lorsque l'on néglige les carrés et les produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, ce qui est le plus souvent permis. Elles ont d'ailleurs l'avantage d'être sous une forme très-simple, qui laisse facilement apercevoir la loi de leurs différents termes.

Quelquefois on aura besoin de recourir aux termes dépendants des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons, et même des puissances et des produits supérieurs. On pourra déterminer ces termes par l'analyse précédente; la considération qui les rend nécessaires facilitera toujours leur détermination. Les approximations dans lesquelles on y aurait égard introduiraient de nouveaux termes, qui dépendraient de nouveaux arguments. Elles reproduiraient encore les arguments que donnent les approximations précédentes, mais avec des coefficients de plus en plus petits, suivant cette loi, qu'il est aisé de conclure du développement de R en série, donné dans le n° 48 : *Un argument qui, dans les approximations successives, se trouve pour la première fois parmi les quantités d'un ordre quelconque r, n'est reproduit que par les quantités des ordres $r+2$, $r+4$, ...*

Il suit de là que les coefficients des termes de la forme $t \, {}^{\sin}_{\cos}(nt+\varepsilon)$, qui entrent dans les expressions de r, v et s, sont approchés jusqu'aux quantités du troisième ordre, c'est-à-dire que l'approximation dans laquelle on aurait égard aux carrés et aux produits des excentricités et des inclinaisons des orbites n'ajouterait rien à leurs valeurs; elles ont donc toute la précision que l'on peut désirer, ce qu'il est d'autant plus essentiel d'observer, que de ces coefficients dépendent les variations séculaires des orbites.

Les divers termes des perturbations de r, v, s sont compris dans la forme

$$k \, {}^{\sin}_{\cos}[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + rnt + r\varepsilon],$$

r étant un nombre entier positif ou zéro, et k étant une fonction des excentricités et des inclinaisons des orbites de l'ordre r ou d'un ordre supérieur. On peut juger par là de quel ordre est un terme dépendant d'un angle donné.

Il est clair que l'action des corps m'', m''', ... ne fait qu'ajouter aux valeurs précédentes de r, v et s des termes analogues à ceux qui résultent de l'action de m', et qu'en négligeant le carré de la force perturbatrice, les sommes de tous ces termes donneront les valeurs entières de r, v et s. Cela suit de la nature des formules (X'), (Y) et (Z'), qui sont linéaires relativement aux quantités dépendantes de la force perturbatrice.

Enfin, on aura les perturbations de m', produites par l'action de m, en changeant, dans les formules précédentes, a, n, h, l, ε, ϖ, p, q et m' en a', n', h', l', ε', ϖ', p', q' et m, et réciproquement.

CHAPITRE VII.

DES INÉGALITÉS SÉCULAIRES DES MOUVEMENTS CÉLESTES.

53. Les forces perturbatrices du mouvement elliptique introduisent, dans les expressions de r, $\frac{dv}{dt}$ et s du Chapitre précédent, le temps t hors des signes sinus et cosinus, ou sous la forme d'arcs de cercle qui, en croissant indéfiniment, doivent à la longue rendre ces expressions fautives; il est donc essentiel de faire disparaître ces arcs, et d'avoir les fonctions qui les produisent par leur développement en série. Nous avons donné pour cet objet, dans le Chapitre V, une méthode générale, de laquelle il résulte que ces arcs naissent des variations des éléments du mouvement elliptique, qui sont alors fonctions du temps. Ces variations s'exécutant avec une grande lenteur, elles ont été désignées sous le nom d'*inégalités séculaires*. Leur théorie est un des points les plus intéressants du Système du monde; nous allons la présenter ici avec l'étendue qu'exige son importance.

On a, par le Chapitre précédent,

$$\begin{aligned}
r = a\Big[&1 - h\sin(nt+\varepsilon) - l\cos(nt+\varepsilon) - \ldots \\
&+ \frac{m'}{2}(lC + l'D)\,nt\sin(nt+\varepsilon) - \frac{m'}{2}(hC + h'D)\,nt\cos(nt+\varepsilon) + m'S\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} = {} & n + 2nh\sin(nt+\varepsilon) + 2nl\cos(nt+\varepsilon) + \ldots \\
& - m'(lC + l'D)\,n^2 t\sin(nt+\varepsilon) + m'(hC + h'D)\,n^2 t\cos(nt+\varepsilon) + m'T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s = {} & q\sin(nt+\varepsilon) - p\cos(nt+\varepsilon) + \ldots \\
& - \frac{m'}{4}a^2a'(p'-p)B^{(1)}nt\sin(nt+\varepsilon) - \frac{m'}{4}a^2a'(q'-q)B^{(1)}nt\cos(nt+\varepsilon) + m'\chi,
\end{aligned}$$

S, T, χ étant des fonctions périodiques du temps t. Considérons d'abord l'expression de $\frac{dv}{dt}$, et comparons-la à l'expression de y du n° 43. L'arbitraire n multipliant l'arc t sous les signes périodiques dans l'expression de $\frac{dv}{dt}$, on doit alors faire usage des équations suivantes, trouvées dans le n° 43,

$$o = X' + \theta X'' - Y,$$
$$o = Y' + \theta Y'' + X'' - 2Z,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Voyons ce que deviennent ici X, X', X'', Y, ... : en comparant l'expression de $\frac{dv}{dt}$ à celle de y du numéro cité, on trouve

$$X = n + 2nh\sin(nt+\varepsilon) + 2nl\cos(nt+\varepsilon) + m'T,$$
$$Y = m'n^2(hC + h'D)\cos(nt+\varepsilon) - m'n^2(lC + l'D)\sin(nt+\varepsilon).$$

Si l'on néglige le produit des différences partielles des constantes par les masses perturbatrices, ce qui est permis, puisque ces différences sont de l'ordre de ces masses, on aura, par le n° 43,

$$\begin{aligned} X' = {} & \frac{dn}{d\theta}[1 + 2h\sin(nt+\varepsilon) + 2l\cos(nt+\varepsilon)] \\ & + 2n\frac{d\varepsilon}{d\theta}[h\cos(nt+\varepsilon) - l\sin(nt+\varepsilon)] \\ & + 2n\frac{dh}{d\theta}\sin(nt+\varepsilon) + 2n\frac{dl}{d\theta}\cos(nt+\varepsilon), \end{aligned}$$

$$X'' = 2n\frac{dn}{d\theta}[h\cos(nt+\varepsilon) - l\sin(nt+\varepsilon)].$$

L'équation $o = X' + \theta X'' - Y$ deviendra ainsi

$$\begin{aligned} o = {} & \frac{dn}{d\theta}[1 + 2h\sin(nt+\varepsilon) + 2l\cos(nt+\varepsilon)] \\ & + 2n\frac{dh}{d\theta}\sin(nt+\varepsilon) + 2n\frac{dl}{d\theta}\cos(nt+\varepsilon) \\ & + 2n\left(\theta\frac{dn}{d\theta} + \frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)[h\cos(nt+\varepsilon) - l\sin(nt+\varepsilon)] \\ & - m'n^2(hC + h'D)\cos(nt+\varepsilon) + m'n^2(lC + l'D)\sin(nt+\varepsilon). \end{aligned}$$

En égalant séparément à zéro les coefficients des sinus et des cosinus semblables, on aura

$$o = \frac{dn}{d\theta},$$
$$o = \frac{dh}{d\theta} - l\frac{d\varepsilon}{d\theta} + \frac{m'n}{2}(lC + l'D),$$
$$o = \frac{dl}{d\theta} + h\frac{d\varepsilon}{d\theta} - \frac{m'n}{2}(hC + h'D).$$

Si l'on intègre ces équations, et si dans leurs intégrales on change θ en t, on aura, par le n° 43, les valeurs des arbitraires en fonctions de t, et l'on pourra effacer les arcs de cercle des expressions de $\frac{dv}{dt}$ et de r; mais, au lieu de ce changement, on peut tout de suite changer θ en t dans ces équations différentielles. La première de ces équations nous montre que n est constant, et, comme l'arbitraire a, de l'expression de r, en dépend, en vertu de l'équation $n^2 = \frac{1}{a^3}$, a est pareillement constant. Les deux autres équations ne suffisent pas pour déterminer h, l, ε. On aura une nouvelle équation, en observant que l'expression de $\frac{dv}{dt}$ donne, en l'intégrant, $\int n\,dt$ pour la valeur de la longitude moyenne de m; or nous avons supposé cette longitude égale à $nt + \varepsilon$; on a donc $nt + \varepsilon = \int n\,dt$, ce qui donne

$$t\frac{dn}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt} = o,$$

et, comme on a $\frac{dn}{dt} = o$, on aura pareillement $\frac{d\varepsilon}{dt} = o$. Ainsi les deux arbitraires n et ε sont constantes; les arbitraires h et l seront par conséquent déterminées au moyen des équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{m'n}{2}(lC + l'D),$$

$$(2) \qquad \frac{dl}{dt} = \frac{m'n}{2}(hC + h'D).$$

La considération de l'expression de $\frac{dv}{dt}$ nous ayant suffi pour déterminer les valeurs de n, a, h, l et ε, on voit *a priori* que les équations différentielles entre les mêmes quantités, qui résultent de l'expression de r, doivent coïncider avec les précédentes. C'est ce dont il est facile de s'assurer *a posteriori*, en appliquant à cette expression la méthode du n° 43.

Considérons maintenant l'expression de s. En la comparant à celle de y du numéro cité, on aura

$$X = q\sin(nt+\varepsilon) - p\cos(nt+\varepsilon) + m'\chi,$$
$$Y = \frac{m'n}{4}a^2a'B^{(1)}(p-p')\sin(nt+\varepsilon) + \frac{m'n}{4}a^2a'B^{(1)}(q-q')\cos(nt+\varepsilon).$$

n et ε étant constants, par ce qui précède, on aura, par le n° 43,

$$X' = \frac{dq}{d\theta}\sin(nt+\varepsilon) - \frac{dp}{d\theta}\cos(nt+\varepsilon),$$
$$X'' = 0.$$

L'équation $0 = X' + \theta X'' - Y$ devient ainsi

$$0 = \frac{dq}{d\theta}\sin(nt+\varepsilon) - \frac{dp}{d\theta}\cos(nt+\varepsilon)$$
$$- \frac{m'n}{4}a^2a'B^{(1)}(p-p')\sin(nt+\varepsilon) - \frac{m'n}{4}a^2a'B^{(1)}(q-q')\cos(nt+\varepsilon);$$

d'où l'on tire, en comparant les coefficients des sinus et des cosinus semblables, et en changeant θ en t, pour avoir directement p et q en fonctions de t,

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m'n}{4}a^2a'B^{(1)}(q-q'), \tag{3}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m'n}{4}a^2a'B^{(1)}(p-p'). \tag{4}$$

Lorsque l'on aura déterminé p et q par ces équations, on les substituera dans l'expression précédente de s, en effaçant les termes qui contiennent des arcs de cercle, et l'on aura

$$s = q\sin(nt+\varepsilon) - p\cos(nt+\varepsilon) + m'\chi.$$

54. L'équation $\frac{dn}{dt} = 0$, que nous venons de trouver, est d'une grande importance dans la théorie du Système du monde, en ce qu'elle nous montre que les moyens mouvements des corps célestes et les grands axes de leurs orbites sont inaltérables; mais cette équation n'est approchée que jusqu'aux quantités de l'ordre $m'h$ inclusivement. Si les quantités de l'ordre $m'h^2$ et des ordres suivants produisaient dans $\frac{dv}{dt}$ un terme de la forme $2kt$, k étant une fonction des éléments des orbites de m et de m', il en résulterait dans l'expression de v le terme kt^2, qui, en altérant la longitude de m proportionnellement au carré du temps, deviendrait à la longue extrêmement sensible. On n'aurait plus alors $\frac{dn}{dt} = 0$; mais, au lieu de cette équation, on aurait, par le numéro précédent, $\frac{dn}{dt} = 2k$; il est donc très-important de savoir s'il existe dans l'expression de v des termes de la forme kt^2. Nous allons démontrer que, si l'on n'a égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices, quelque loin que l'on porte d'ailleurs les approximations relativement aux puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites, l'expression de v ne renfermera point de termes semblables.

Reprenons pour cela la formule (X) du n° 46,

$$\delta r = \frac{a\cos v\int n\,dt.r\sin v\left(2\int d\mathrm{R} + r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\right) - a\sin v\int n\,dt.r\cos v\left(2\int d\mathrm{R} + r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\right)}{\mu\sqrt{1-e^2}}.$$

Considérons la partie de δr qui renferme des termes multipliés par t^2, ou, pour plus de généralité, considérons les termes qui, étant multipliés par le sinus ou par le cosinus d'un angle $\alpha t + 6$, dans lequel α

est très-petit, ont en même temps α^2 pour diviseur. Il est clair qu'en supposant $\alpha = 0$, il en résultera un terme multiplié par t^2, en sorte que ce second cas renferme le premier. Les termes qui ont α^2 pour diviseur ne peuvent évidemment résulter que d'une double intégration; ils ne peuvent donc être produits que par la partie de δr qui renferme le double signe intégral $\int$. Examinons d'abord le terme

$$\frac{2a\cos v \int n\,dt\left(r\sin v \int d\mathrm{R}\right)}{\mu\sqrt{1-e^2}}.$$

Si l'on fixe l'origine de l'angle v au périhélie, on a dans l'orbite elliptique, par le n° **20**,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

et par conséquent

$$\cos v = \frac{a(1-e^2)-r}{er},$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$r^2\,dv\sin v = \frac{a(1-e^2)}{e}\,dr;$$

mais on a, par le n° **19**,

$$r^2\,dv = dt\sqrt{\mu a(1-e^2)} = a^2 n\,dt\sqrt{1-e^2};$$

on aura donc

$$\frac{an\,dt\,.\,r\sin v}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{r\,dr}{e}.$$

Le terme $\frac{2a\cos v \int n\,dt\left(r\sin v \int d\mathrm{R}\right)}{\mu\sqrt{1-e^2}}$ deviendra ainsi

$$\frac{2\cos v}{\mu e}\int\left(r\,dr\int d\mathrm{R}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{\cos v}{\mu e}\left(r^2\int d\mathrm{R} - \int r^2\,d\mathrm{R}\right).$$

Il est visible que, cette dernière fonction ne renfermant plus de doubles intégrales, il ne peut en résulter aucun terme qui ait α^2 pour diviseur.

Considérons présentement le terme

$$-\frac{2a\sin v \int n\,dt\left(r\cos v \int d\mathrm{R}\right)}{\mu\sqrt{1-e^2}}$$

de l'expression de δr. En substituant pour $\cos v$ sa valeur précédente en r, ce terme devient

$$\frac{2a\sin v \int n\,dt\left[r - a(1-e^2)\right]\int d\mathrm{R}}{\mu e\sqrt{1-e^2}}.$$

On a, par le n° **22**,

$$r = a\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2 + e\chi'\right),$$

χ' étant une suite infinie de cosinus de l'angle $nt+\varepsilon$ et de ses multiples; on aura donc

$$\frac{1}{e}\int n\,dt\left[r - a(1-e^2)\right]\int d\mathrm{R} = a\int n\,dt\left(\tfrac{3}{2}e + \chi'\right)\int d\mathrm{R}.$$

Nommons χ'' l'intégrale $\int\chi' n\,dt$; on aura

$$a\int n\,dt\left(\tfrac{3}{2}e + \chi'\right)\int d\mathrm{R} = \tfrac{3}{2}ae\int n\,dt\int d\mathrm{R} + a\chi''\int d\mathrm{R} - a\int\chi''\,d\mathrm{R}.$$

Ces deux derniers termes ne renfermant point le double signe intégral, il ne peut en résulter aucun terme qui ait α^2 pour diviseur; en n'ayant donc égard qu'aux termes de ce genre, on aura

$$-\frac{2a\sin v \int n\,dt\left(r\cos v \int d\mathrm{R}\right)}{\mu\sqrt{1-e^2}} = \frac{3a^2 e\sin v \int n\,dt\int d\mathrm{R}}{\mu\sqrt{1-e^2}} = \frac{dr}{n\,dt}\,\frac{3a}{\mu}\int n\,dt\int d\mathrm{R},$$

et le rayon r deviendra

$$(r) + \left(\frac{dr}{n\,dt}\right)\frac{3a}{\mu}\int n\,dt\int d\mathrm{R},$$

(r) et $\left(\frac{dr}{n\,dt}\right)$ étant les expressions de r et de $\frac{dr}{n\,dt}$ relatives au mouvement elliptique. Ainsi, pour avoir égard, dans l'expression du rayon vecteur, à la partie des perturbations qui est divisée par α^2, il suffit d'augmenter de la quantité $\frac{3a}{\mu}\int n\,dt\int d\mathrm{R}$ la longitude moyenne $nt+\varepsilon$ de cette expression relative au mouvement elliptique.

Voyons comment on doit avoir égard à cette partie des perturbations, dans l'expression de la longitude v. La formule (Y) du n° 46 donne, en y substituant $\frac{3a}{\mu}\frac{dr}{n\,dt}\int n\,dt\int d\mathrm{R}$ au lieu de δr, et en n'ayant égard qu'aux termes divisés par α^2,

$$\delta v = \frac{\frac{2r\,d^2r+dr^2}{a^2n^2dt^2}+1}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{3a}{\mu}\int n\,dt\int d\mathrm{R};$$

or on a, par ce qui précède,

$$dr = \frac{aen\,dt\sin v}{\sqrt{1-e^2}},\quad r^2dv = a^2n\,dt\sqrt{1-e^2},$$

d'où il est facile de conclure, en substituant pour $\cos v$ sa valeur précédente en r,

$$\frac{\frac{2r\,d^2r+dr^2}{a^2n^2dt^2}+1}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{dv}{n\,dt};$$

en n'ayant donc égard qu'à la partie des perturbations qui a pour diviseur α^2, la longitude v deviendra

$$(v)+\left(\frac{dv}{n\,dt}\right)\frac{3a}{\mu}\int n\,dt\int d\mathrm{R},$$

(v) et $\left(\frac{dv}{n\,dt}\right)$ étant les parties de v et de $\frac{dv}{n\,dt}$ relatives au mouvement elliptique. Ainsi, pour avoir égard à cette partie des perturbations dans l'expression de la longitude de m, on doit suivre la même règle que nous venons de donner pour y avoir égard dans l'expression du rayon vecteur; c'est-à-dire qu'il faut augmenter, dans l'expression elliptique de la longitude vraie, la longitude moyenne $nt+\varepsilon$ de la quantité $\frac{3a}{\mu}\int n\,dt\int d\mathrm{R}$.

La partie constante de l'expression de $\left(\frac{dv}{n\,dt}\right)$, développée en série de cosinus de l'angle $nt+\varepsilon$ et de ses multiples, se réduisant à l'unité, comme on l'a vu dans le n° 22, il en résulte, dans l'expression de la longitude, le terme $\frac{3a}{\mu}\int n\,dt\int d\mathrm{R}$. Si $d\mathrm{R}$ renfermait un terme constant $km'n\,dt$, ce terme produirait, dans l'expression de la longitude v, le suivant $\frac{3}{2}\frac{am'}{\mu}kn^2t^2$. L'existence de semblables termes dans cette expression se réduit donc à voir si $d\mathrm{R}$ renferme un terme constant.

Lorsque les orbites sont peu excentriques et peu inclinées les unes aux autres, on a vu (n° 48) que R peut toujours se réduire dans une suite infinie de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps t. On peut les représenter généralement par le terme $km'\cos(i'n't+int+\mathrm{A})$, i et i' étant des nombres entiers positifs ou négatifs, ou zéro. La différentielle de ce terme, prise uniquement par rapport au moyen mouvement de m, est $-ikm'n\,dt\sin(i'n't+int+\mathrm{A})$; c'est la partie de $d\mathrm{R}$ relative à ce terme; elle ne peut pas être constante, à moins que l'on n'ait $0=i'n'+in$, ce qui suppose les moyens mouvements des corps m et m' commensurables entre eux; et, comme cela n'a point lieu dans le système solaire, on doit en conclure que la valeur de $d\mathrm{R}$ ne renferme point de termes constants, et qu'ainsi, en ne considérant que la première puissance des masses perturbatrices, les moyens mouvements des corps célestes sont uniformes, ou, ce qui revient au même, $\frac{dn}{dt}=0$. La valeur de a étant liée à celle de n au moyen de l'équation $n^2=\frac{\mu}{a^3}$, il en résulte que, si l'on néglige les quantités périodiques, les grands axes des orbites sont constants.

Si les moyens mouvements des corps m et m', sans être exactement commensurables, approchent cependant beaucoup de l'être, il existera, dans la théorie de leurs mouvements, des inégalités d'une longue période, et qui pourront devenir fort sensibles, à raison de la petitesse du diviseur α^2. Nous verrons dans la suite que ce cas est celui de Jupiter et de Saturne. L'analyse précédente donnera d'une manière fort simple la partie des perturbations qui dépend de ce diviseur. Il en résulte qu'il suffit alors de faire varier la longitude moyenne $nt + \varepsilon$ ou $\int n\,dt$, de la quantité $\frac{3a}{\mu}\int n\,dt \int d\mathrm{R}$; ce qui revient à faire croître n, dans l'intégrale $\int n\,dt$, de la quantité $\frac{3an}{\mu}\int d\mathrm{R}$; or, en considérant l'orbite de m comme une ellipse variable, on a $n^2 = \frac{\mu}{a^3}$; la variation précédente de n introduit donc dans le demi-grand axe a de l'orbite la variation $-\frac{2a^2.\int d\mathrm{R}}{\mu}$.

Si l'on porte dans la valeur de $\frac{dv}{dt}$ la précision jusqu'aux quantités de l'ordre des carrés des masses perturbatrices, on trouvera des termes proportionnels au temps; mais, en considérant avec attention les équations différentielles du mouvement des corps $m, m', \ldots$, on s'assurera facilement que ces termes sont en même temps de l'ordre des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites. Cependant, comme tout ce qui affecte le moyen mouvement peut à la longue devenir fort sensible, nous aurons dans la suite égard à ces termes, et nous verrons qu'ils produisent les équations séculaires observées dans le mouvement de la Lune.

55. Reprenons maintenant les équations (1) et (2) du n° 53, et supposons

$$(0, 1) = -\frac{m'n\mathrm{C}}{2}, \quad \boxed{0, 1} = \frac{m'n\mathrm{D}}{2};$$

elles deviendront

$$\frac{dh}{dt} = (0, 1)\,l - \boxed{0, 1}\,l',$$

$$\frac{dl}{dt} = -(0, 1)\,h + \boxed{0, 1}\,h'.$$

Les expressions de $(0, 1)$ et de $\boxed{0, 1}$ peuvent être déterminées fort simplement de cette manière. En substituant, au lieu de C et de D, leurs valeurs déterminées dans le n° 50, on aura

$$(0, 1) = -\frac{m'n}{2}\left(a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a^2}\right),$$

$$\boxed{0, 1} = \frac{m'n}{2}\left(a\mathrm{A}^{(1)} - a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(1)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 \mathrm{A}^{(1)}}{\partial a^2}\right).$$

On a, par le n° 49,

$$a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a^2} = -\alpha^2\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha^3\frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2};$$

on obtiendra facilement, par le même numéro, $\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$ et $\frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}$ en fonctions de $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ et de $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, et ces quantités sont données en fonctions linéaires de $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ et de $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$; on trouvera, cela posé,

$$a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a^2} = \frac{3\alpha^2 b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{2(1-\alpha^2)^2};$$

partant

$$(0, 1) = -\frac{3m'n\alpha^2 b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{4(1-\alpha^2)^2}.$$

Soit

$$(a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{\frac{1}{2}} = (a, a') + (a, a')'\cos\theta + (a, a')''\cos 2\theta + \ldots;$$

on aura, par le n° 49,

$$(a, a') = \tfrac{1}{2}a'b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}, \quad (a, a')' = a'b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}, \quad \ldots;$$

on aura donc

$$(0, 1) = -\frac{3m'na^2a'(a, a')'}{4(a'^2 - a^2)^2}.$$

On a ensuite, par le n° 49,

$$a\mathrm{A}^{(1)} - a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(1)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 \mathrm{A}^{(1)}}{\partial a^2} = -\alpha\left(b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - \alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2 b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right);$$

en substituant, au lieu de $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ et de ses différences, leurs valeurs en $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ et $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$, on trouvera la fonction précédente égale à

$$-\frac{3\alpha\left[(1+\alpha^2)\,b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}+\frac{1}{2}\alpha\,b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}\right]}{(1-\alpha^2)^2};$$

partant

$$\boxed{0,1} = -\frac{3\alpha m'n\left[(1+\alpha^2)\,b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}+\frac{1}{2}\alpha\,b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}\right]}{2(1-\alpha^2)^2},$$

ou

$$\boxed{0,1} = -\frac{3m'an\left[(a^2+a'^2)\,(a,a')'+aa'\,(a,a')\right]}{2(a'^2-a^2)^2};$$

on aura donc ainsi des expressions fort simples de $(0,1)$ et de $\boxed{0,1}$, et il est facile de se convaincre, par les valeurs en séries de $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ et de $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$, données dans le nº 49, que ces expressions sont positives si n est positif, et négatives si n est négatif.

Nommons $(0,2)$ et $\boxed{0,2}$ ce que deviennent $(0,1)$ et $\boxed{0,1}$, lorsque l'on y change a' et m' dans a'' et m''. Nommons pareillement $(0,3)$ et $\boxed{0,3}$ ce que deviennent ces mêmes quantités, lorsque l'on y change a' et m' en a''' et m''', et ainsi de suite. Désignons, de plus, par h', l'; h'', l'', ... les valeurs de h et de l relatives aux corps m', m'', ...; on aura, en vertu des actions réunies des différents corps m', m'', m''', ... sur m,

$$\frac{dh}{dt} = \quad [(0,1)+(0,2)+(0,3)+\ldots]\,l - \boxed{0,1}\,l' - \boxed{0,2}\,l'' - \ldots,$$

$$\frac{dl}{dt} = -[(0,1)+(0,2)+(0,3)+\ldots]\,h + \boxed{0,1}\,h' + \boxed{0,2}\,h'' + \ldots.$$

Il est clair que $\frac{dh'}{dt}$, $\frac{dl'}{dt}$, $\frac{dh''}{dt}$, $\frac{dl''}{dt}$, ... seront déterminés par des expressions semblables à celles de $\frac{dh}{dt}$ et de $\frac{dl}{dt}$, et qu'il est facile de conclure

de celles-ci, en y changeant successivement ce qui est relatif à m dans ce qui a rapport à m', m'', ..., et réciproquement. Soient donc

$$(1,0),\quad \boxed{1,0};\qquad (1,2),\quad \boxed{1,2};\quad \ldots,$$

ce que deviennent

$$(0,1),\quad \boxed{0,1};\qquad (0,2),\quad \boxed{0,2};\quad \ldots,$$

lorsque l'on y change ce qui est relatif à m dans ce qui est relatif à m', et réciproquement; soient encore

$$(2,0),\quad \boxed{2,0};\qquad (2,1),\quad \boxed{2,1};\quad \ldots,$$

ce que deviennent

$$(0,2),\quad \boxed{0,2};\qquad (0,1),\quad \boxed{0,1};\quad \ldots,$$

lorsque l'on y change ce qui est relatif à m dans ce qui est relatif à m'', et réciproquement; et ainsi de suite. Les équations différentielles précédentes, rapportées successivement aux corps m, m', m'', ..., donneront, pour déterminer h, l, h', l', h'', l'', ..., le système suivant d'équations

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \quad [(0,1)+(0,2)+(0,3)+\ldots]\,l - \boxed{0,1}\,l' - \boxed{0,2}\,l'' - \boxed{0,3}\,l''' - \ldots,\\
\frac{dl}{dt} &= -[(0,1)+(0,2)+(0,3)+\ldots]\,h + \boxed{0,1}\,h' + \boxed{0,2}\,h'' + \boxed{0,3}\,h''' + \ldots,\\
\frac{dh'}{dt} &= \quad [(1,0)+(1,2)+(1,3)+\ldots]\,l' - \boxed{1,0}\,l - \boxed{1,2}\,l'' - \boxed{1,3}\,l''' - \ldots,\\
\frac{dl'}{dt} &= -[(1,0)+(1,2)+(1,3)+\ldots]\,h' + \boxed{1,0}\,h + \boxed{1,2}\,h'' + \boxed{1,3}\,h''' + \ldots,\\
\frac{dh''}{dt} &= \quad [(2,0)+(2,1)+(2,3)+\ldots]\,l'' - \boxed{2,0}\,l - \boxed{2,1}\,l' - \boxed{2,3}\,l''' - \ldots\\
\frac{dl''}{dt} &= -[(2,0)+(2,1)+(2,3)+\ldots]\,h'' + \boxed{2,0}\,h + \boxed{2,1}\,h' + \boxed{2,3}\,h''' + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Les quantités $(0, 1)$ et $(1, 0)$, $\boxed{0, 1}$ et $\boxed{1, 0}$ ont entre elles des rapports remarquables qui peuvent en faciliter le calcul, et qui nous seront utiles dans la suite. On a, par ce qui précède,

$$(0, 1) = -\frac{3m'na^2a'(a, a')'}{4(a'^2 - a^2)^2}.$$

Si, dans cette expression de $(0, 1)$, on change m' en m, n en n', a en a', et réciproquement, on aura l'expression de $(1, 0)$, qui sera par conséquent

$$(1, 0) = -\frac{3mn'a'^2a(a', a)'}{4(a'^2 - a^2)^2};$$

mais on a $(a, a')' = (a', a)'$, puisque l'une et l'autre de ces quantités résulte du développement de la fonction $(a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{\frac{1}{2}}$ dans une série ordonnée suivant les cosinus de l'angle θ et de ses multiples; on aura donc

$$(0, 1)\,mn'a' = (1, 0)\,m'na;$$

or on a, en négligeant les masses m, m', ... vis-à-vis de M,

$$n^2 = \frac{\mathrm{M}}{a^3}, \quad n'^2 = \frac{\mathrm{M}}{a'^3}, \quad \ldots;$$

partant

$$(0, 1)\,m\sqrt{a} = (1, 0)\,m'\sqrt{a'},$$

équation d'où l'on tirera facilement $(1, 0)$, lorsque $(0, 1)$ sera déterminé. On trouvera de la même manière

$$\boxed{0, 1}\,m\sqrt{a} = \boxed{1, 0}\,m'\sqrt{a'}.$$

Ces deux équations subsisteraient encore dans le cas où n et n' auraient des signes contraires, c'est-à-dire si les deux corps m et m' circulaient en différents sens; mais alors il faudrait donner le signe de n au radical $\sqrt{a}$, et le signe de n' au radical $\sqrt{a'}$.

Des deux équations précédentes résultent évidemment celles-ci

$$\begin{array}{ll}
(0, 2)\,m\sqrt{a} = (2, 0)\,m''\sqrt{a''}, & \boxed{0, 2}\,m\sqrt{a} = \boxed{2, 0}\,m''\sqrt{a''}, \\
(1, 2)\,m'\sqrt{a'} = (2, 1)\,m''\sqrt{a''}, & \boxed{1, 2}\,m'\sqrt{a'} = \boxed{2, 1}\,m''\sqrt{a''}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

56. Maintenant, pour intégrer les équations (A) du numéro précédent, nous ferons

$$\begin{array}{ll}
h = \mathrm{N}\sin(gt + 6), & l = \mathrm{N}\cos(gt + 6), \\
h' = \mathrm{N}'\sin(gt + 6), & l' = \mathrm{N}'\cos(gt + 6), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots , & \ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{array}$$

en substituant ces valeurs dans les équations (A), on aura

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{N}g = [(0, 1) + (0, 2) + \ldots]\mathrm{N} - \boxed{0, 1}\,\mathrm{N}' - \boxed{0, 2}\,\mathrm{N}'' - \ldots, \\
\mathrm{N}'g = [(1, 0) + (1, 2) + \ldots]\mathrm{N}' - \boxed{1, 0}\,\mathrm{N} - \boxed{1, 2}\,\mathrm{N}'' - \ldots, \\
\mathrm{N}''g = [(2, 0) + (2, 1) + \ldots]\mathrm{N}'' - \boxed{2, 0}\,\mathrm{N} - \boxed{2, 1}\,\mathrm{N}' - \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Si l'on suppose le nombre des corps m, m', m'', ... égal à i, ces équations seront en nombre i, et, en éliminant les constantes N, N', ..., on aura une équation finale en g, du degré i, que l'on obtiendra facilement de cette manière.

Nommons φ la fonction

$$\begin{array}{l}
\quad\ \mathrm{N}^2 m\sqrt{a}\,[g - (0, 1) - (0, 2) - \ldots] \\
+\ \mathrm{N}'^2 m'\sqrt{a'}\,[g - (1, 0) - (1, 2) - \ldots] \\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\ 2\mathrm{N}m\sqrt{a}\,\left\{\boxed{0, 1}\,\mathrm{N}' + \boxed{0, 2}\,\mathrm{N}'' + \ldots\right\} \\
+\ 2\mathrm{N}'m'\sqrt{a'}\,\left\{\boxed{1, 2}\,\mathrm{N}'' + \boxed{1, 3}\,\mathrm{N}''' + \ldots\right\} \\
+\ 2\mathrm{N}''m''\sqrt{a''}\,\left\{\boxed{2, 3}\,\mathrm{N}''' + \ldots\right\} \\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Les équations (B) se réduisent, en vertu des relations données dans le numéro précédent, à celles-ci

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial N'} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial N''} = 0, \quad \ldots;$$

en considérant donc $N, N', N'', \ldots$ comme autant de variables, φ sera un maximum. De plus, φ étant une fonction homogène de ces variables, de la seconde dimension, on a

$$N\frac{\partial\varphi}{\partial N} + N'\frac{\partial\varphi}{\partial N'} + \ldots = 2\varphi;$$

on a donc $\varphi = 0$, en vertu des équations précédentes.

Présentement, on peut déterminer ainsi le maximum de la fonction φ. On différentiera d'abord cette fonction relativement à N, et l'on substituera dans φ, au lieu de N, sa valeur tirée de l'équation $\frac{\partial\varphi}{\partial N} = 0$, valeur qui sera une fonction linéaire des quantités $N', N'', \ldots$; on aura de cette manière une fonction rationnelle, entière et homogène, de la seconde dimension en $N', N'', \ldots$: soit $\varphi^{(1)}$ cette fonction. On différentiera $\varphi^{(1)}$ relativement à N', et l'on substituera dans $\varphi^{(1)}$, au lieu de N', sa valeur tirée de l'équation $\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial N'} = 0$; on aura une fonction homogène et de la seconde dimension en $N'', N''', \ldots$: soit $\varphi^{(2)}$ cette fonction. En continuant ainsi, on parviendra à une fonction $\varphi^{(i-1)}$ de la seconde dimension en $N^{(i-1)}$, et qui sera par conséquent de la forme $(N^{(i-1)})^2 k$, k étant une fonction de g et de constantes. Si l'on égale à zéro la différentielle de $\varphi^{(i-1)}$ prise par rapport à $N^{(i-1)}$, on aura $k = 0$, ce qui donnera une équation en g du degré i, et dont les diverses racines donneront autant de systèmes différents pour les indéterminées $N, N', N'', \ldots$; l'indéterminée $N^{(i-1)}$ sera l'arbitraire de chaque système, et l'on aura sur-le-champ le rapport des autres indéterminées $N, N', \ldots$ du même système à celle-ci, au moyen des équations précédentes, prises dans un ordre inverse, savoir

$$\frac{\partial\varphi^{(i-2)}}{\partial N^{(i-2)}} = 0, \quad \frac{\partial\varphi^{(i-3)}}{\partial N^{(i-3)}} = 0, \quad \ldots.$$

Soient $g, g_1, g_2, \ldots$ les i racines de l'équation en g; soit $N, N', N'', \ldots$ le système des indéterminées relatif à la racine g; soit $N_1, N'_1, N''_1, \ldots$ le système des indéterminées relatif à la racine g_1, et ainsi de suite : on aura, par la théorie connue des équations différentielles linéaires,

$$\begin{aligned}
h &= N\sin(gt + 6) + N_1\sin(g_1 t + 6_1) + N_2\sin(g_2 t + 6_2) + \ldots,\\
h' &= N'\sin(gt + 6) + N'_1\sin(g_1 t + 6_1) + N'_2\sin(g_2 t + 6_2) + \ldots,\\
h'' &= N''\sin(gt + 6) + N''_1\sin(g_1 t + 6_1) + N''_2\sin(g_2 t + 6_2) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$6, 6_1, 6_2, \ldots$ étant des constantes arbitraires. En changeant, dans ces valeurs de $h, h', h'', \ldots$, les sinus en cosinus, on aura les valeurs de $l, l', l'', \ldots$. Ces différentes valeurs renferment deux fois autant d'arbitraires qu'il y a de racines $g, g_1, g_2, \ldots$; car chaque système d'indéterminées renferme une arbitraire, et, de plus, il y a i arbitraires $6, 6_1, 6_2, \ldots$; ces valeurs sont par conséquent les intégrales complètes des équations (A) du numéro précédent.

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer les constantes $N, N_1, \ldots; N', N'_1, \ldots; 6, 6_1, \ldots$. Les observations ne donnent point immédiatement ces constantes; mais elles font connaître, à une époque donnée, les excentricités $e, e', \ldots$ des orbites, et les longitudes $\varpi, \varpi', \ldots$ de leurs périhélies, et par conséquent les valeurs de $h, h', \ldots, l, l', \ldots$; on en tirera ainsi les valeurs des constantes précédentes. Pour cela, nous observerons que, si l'on multiplie la première, la troisième, la cinquième,... des équations différentielles (A) du numéro précédent respectivement par $Nm\sqrt{a}$, $N'm'\sqrt{a'}, \ldots$, on aura, en vertu des équations (B) et des relations trouvées dans le numéro précédent entre $(0, 1)$ et $(1, 0)$, $(0, 2)$ et $(2, 0), \ldots$,

$$\begin{aligned}
&N\frac{dh}{dt}m\sqrt{a} + N'\frac{dh'}{dt}m'\sqrt{a'} + N''\frac{dh''}{dt}m''\sqrt{a''} + \ldots\\
&\quad = g(Nlm\sqrt{a} + N'l'm'\sqrt{a'} + N''l''m''\sqrt{a''} + \ldots).
\end{aligned}$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de $h, h', \ldots, l, l', \ldots$, leurs valeurs précédentes, on aura, en comparant les coefficients des mêmes cosinus,

$$0 = NN_1 m\sqrt{a} + N'N'_1 m'\sqrt{a'} + N''N''_1 m''\sqrt{a''} + \ldots,$$
$$0 = NN_2 m\sqrt{a} + N'N'_2 m'\sqrt{a'} + N''N''_2 m''\sqrt{a''} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, si l'on multiplie les valeurs précédentes de h, h',... respectivement par $Nm\sqrt{a}$, $N'm'\sqrt{a'}$,..., on aura, en vertu de ces dernières équations,

$$\begin{aligned} &Nmh\sqrt{a} + N'm'h'\sqrt{a'} + N''m''h''\sqrt{a''} + \ldots \\ &\quad = (N^2 m\sqrt{a} + N'^2 m'\sqrt{a'} + N''^2 m''\sqrt{a''} + \ldots)\sin(gt + 6). \end{aligned}$$

On aura pareillement

$$\begin{aligned} &Nml\sqrt{a} + N'm'l'\sqrt{a'} + N''m''l''\sqrt{a''} + \ldots \\ &\quad = (N^2 m\sqrt{a} + N'^2 m'\sqrt{a'} + N''^2 m''\sqrt{a''} + \ldots)\cos(gt + 6). \end{aligned}$$

En fixant l'origine du temps t à l'époque pour laquelle les valeurs de h, l, h', l',... sont supposées connues, les deux équations précédentes donnent

$$\operatorname{tang} 6 = \frac{Nhm\sqrt{a} + N'h'm'\sqrt{a'} + N''h''m''\sqrt{a''} + \ldots}{Nlm\sqrt{a} + N'l'm'\sqrt{a'} + N''l''m''\sqrt{a''} + \ldots}.$$

Cette expression de tang6 ne renferme point d'indéterminée; car, quoique les constantes N, N', N'',... dépendent de l'indéterminée $N^{(i-1)}$, cependant, comme leurs rapports à cette indéterminée sont connus par ce qui précède, elle disparaît de l'expression de tang6. Ayant ainsi déterminé 6, on aura $N^{(i-1)}$ au moyen de l'une des deux équations qui donnent tang6, et l'on en conclura le système des indéterminées N, N', N'',... relatif à la racine g. En changeant, dans les expressions précédentes, cette racine successivement en g_1, g_2, g_3,..., on aura les valeurs des arbitraires relatives à chacune de ces racines.

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de h, l, h', l',..., on en tirera les valeurs des excentricités e, e',... des orbites, et des

longitudes ϖ, ϖ',... de leurs périhélies, au moyen des équations

$$e^2 = h^2 + l^2, \quad e'^2 = h'^2 + l'^2, \quad \ldots,$$
$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{h}{l}, \quad \operatorname{tang}\varpi' = \frac{h'}{l'}, \quad \ldots;$$

on aura ainsi

$$\begin{aligned} e^2 = {} & N^2 + N_1^2 + N_2^2 + \ldots + 2NN_1\cos[(g_1 - g)t + 6_1 - 6] \\ & + 2NN_2\cos[(g_2 - g)t + 6_2 - 6] + 2N_1N_2\cos[(g_2 - g_1)t + 6_2 - 6_1] + \ldots \end{aligned}$$

Cette quantité est constamment plus petite que $(N + N_1 + N_2 + \ldots)^2$, lorsque les racines g, g_1,... sont toutes réelles et inégales, en prenant positivement les quantités N, N_1,.... On aura pareillement

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{N\sin(gt + 6) + N_1\sin(g_1 t + 6_1) + N_2\sin(g_2 t + 6_2) + \ldots}{N\cos(gt + 6) + N_1\cos(g_1 t + 6_1) + N_2\cos(g_2 t + 6_2) + \ldots},$$

d'où il est facile de conclure

$$\operatorname{tang}(\varpi - gt - 6) = \frac{N_1\sin[(g_1 - g)t + 6_1 - 6] + N_2\sin[(g_2 - g)t + 6_2 - 6] + \ldots}{N + N_1\cos[(g_1 - g)t + 6_1 - 6] + N_2\cos[(g_2 - g)t + 6_2 - 6] + \ldots}.$$

Lorsque la somme $N_1 + N_2 + \ldots$ des coefficients des cosinus de ce dénominateur, pris tous positivement, est moindre que N, $\operatorname{tang}(\varpi - gt - 6)$ ne peut jamais devenir infini; l'angle $\varpi - gt - 6$ ne peut donc jamais alors atteindre le quart de la circonférence, en sorte que le vrai moyen mouvement du périhélie est, dans ce cas, égal à gt.

57. Il suit de ce qui précède que les excentricités des orbites et les positions de leurs grands axes sont assujetties à des variations considérables, qui changent à la longue la nature de ces orbites, et dont les périodes, dépendantes des racines g, g_1, g_2,..., embrassent, relativement aux planètes, un grand nombre de siècles. On peut ainsi considérer les excentricités comme des ellipticités variables, et les mouvements des périhélies comme n'étant pas uniformes. Ces variations sont très-sensibles dans les satellites de Jupiter, et nous verrons dans la suite qu'elles expliquent les inégalités singulières observées dans le mouvement du troisième satellite. Mais les variations des excentricités ont-elles des limites, et les orbites sont-elles constamment peu différentes du cercle? C'est ce qu'il importe d'examiner. Nous venons de voir que, si les racines de l'équation en g sont toutes réelles et inégales, l'excentricité e de l'orbite de m est toujours moindre que la somme $N + N_1 + N_2 + \ldots$ des coefficients des sinus de l'expression de h, pris positivement; et, comme ces coefficients sont supposés fort petits, la valeur de e sera toujours peu considérable. En n'ayant donc égard qu'aux variations séculaires, on voit que les orbites des corps m, m', m'',... ne feront que s'aplatir plus ou moins, en s'éloignant peu de la forme circulaire; mais les positions de leurs grands axes éprouveront des variations considérables. Ces axes seront constamment de la même grandeur, et les moyens mouvements qui en dépendent seront toujours uniformes, comme on l'a vu dans le n° 54. Les résultats précédents, fondés sur le peu d'excentricité des orbites, subsisteront sans cesse, et pourront s'étendre à tous les siècles passés et à venir; en sorte que l'on peut alors affirmer que, dans aucun temps, les orbites des planètes et des satellites n'ont été et ne seront considérablement excentriques, du moins si l'on n'a égard qu'à leur action mutuelle. Mais il n'en serait pas de même si quelques-unes des racines g, g_1, g_2,... étaient égales ou imaginaires; les sinus et les cosinus des expressions de h, l, h', l',..., correspondants à ces racines, se changeraient alors en arcs de cercle ou en exponentielles, et, comme ces quantités croissent indéfiniment avec le temps, les orbites finiraient, à la longue, par être fort excentriques; la stabilité du système planétaire serait alors détruite, et les résultats que nous avons trouvés cesseraient d'avoir lieu. Il est donc très-intéressant de s'assurer que les racines g, g_1, g_2,... sont toutes réelles et inégales. C'est ce que l'on peut démontrer d'une manière fort simple pour le cas de la nature, dans lequel les corps m, m', m'',... du système circulent tous dans le même sens.

Reprenons les équations (A) du n° 55. Si l'on multiplie la première par $m\sqrt{a}\,.\,h$, la seconde par $m\sqrt{a}\,.\,l$, la troisième par $m'\sqrt{a'}\,.\,h'$, la

quatrième par $m'\sqrt{a'}\,.\,l'$,..., et qu'ensuite on les ajoute ensemble, les coefficients de hl, $h'l'$, $h''l''$,... seront nuls dans cette somme; le coefficient de $h'l - hl'$ sera $\boxed{0,1}\,m\sqrt{a} - \boxed{1,0}\,m'\sqrt{a'}$, et il sera nul, en vertu de l'équation $\boxed{0,1}\,m\sqrt{a} = \boxed{1,0}\,m'\sqrt{a'}$, trouvée dans le n° 55. Les coefficients de $h''l - hl''$, $h''l' - h'l''$,... seront nuls par la même raison; la somme des équations (A) ainsi préparées se réduira donc à l'équation suivante

$$\frac{h\,dh + l\,dl}{dt}\,m\sqrt{a} + \frac{h'\,dh' + l'\,dl'}{dt}\,m'\sqrt{a'} + \ldots = 0,$$

et par conséquent à celle-ci

$$0 = e\,de\,.\,m\sqrt{a} + e'\,de'\,.\,m'\sqrt{a'} + \ldots.$$

En intégrant cette équation et en observant que, par le n° 54, les demi-grands axes a, a',... sont constants, on aura

$$(u)\qquad e^2 m\sqrt{a} + e'^2 m'\sqrt{a'} + e''^2 m''\sqrt{a''} + \ldots = \text{const.}$$

Maintenant, les corps m, m', m'',... étant supposés circuler dans le même sens, les radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$,... doivent être pris positivement dans l'équation précédente, comme on l'a vu dans le n° 55; tous les termes du premier membre de cette équation sont donc positifs, et par conséquent chacun d'eux est moindre que la constante du second membre; or, en supposant à une époque quelconque les excentricités très-petites, cette constante sera fort petite; chacun des termes de l'équation restera donc toujours fort petit, et ne pourra pas croître indéfiniment; les orbites seront toujours à fort peu près circulaires.

Le cas que nous venons d'examiner est celui des planètes et des satellites du système solaire, puisque tous ces corps circulent dans le même sens, et qu'à l'époque où nous sommes leurs orbites sont peu excentriques. Pour ne laisser aucun doute sur ce résultat important, nous observerons que, si l'équation qui détermine g renfermait des racines imaginaires, quelques-uns des sinus et des cosinus des expressions de h, l, h', l',... se changeraient en exponentielles; ainsi l'expression de h contiendrait un nombre fini de termes de la forme $\mathrm{P}c^{ft}$, c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et P étant une quantité réelle, puisque h ou $e\sin\varpi$ est une quantité réelle. Soient $\mathrm{Q}c^{ft}$, $\mathrm{P}'c^{ft}$, $\mathrm{Q}'c^{ft}$, $\mathrm{P}''c^{ft}$,... les termes correspondants de l, h', l', h'',...; Q, P′, Q′, P″,... étant encore des quantités réelles : l'expression de e^2 renfermera le terme $(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)c^{2ft}$; l'expression de e'^2 renfermera le terme $(\mathrm{P}'^2+\mathrm{Q}'^2)c^{2ft}$, et ainsi de suite; le premier membre de l'équation (u) renfermera donc le terme

$$[(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)\,m\sqrt{a}+(\mathrm{P}'^2+\mathrm{Q}'^2)\,m'\sqrt{a'}+(\mathrm{P}''^2+\mathrm{Q}''^2)\,m''\sqrt{a''}+\ldots]\,c^{2ft}.$$

Si l'on suppose que c^{ft} soit la plus grande des exponentielles que contiennent h, l, h', l',..., c'est-à-dire celle dans laquelle f est le plus considérable, c^{2ft} sera la plus grande des exponentielles que renfermera le premier membre de l'équation précédente; le terme précédent ne pourra donc être détruit par aucun autre terme de ce premier membre; ainsi, pour que ce membre se réduise à une constante, il faut que le coefficient de c^{2ft} soit nul, ce qui donne

$$\mathrm{o}=(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)\,m\sqrt{a}+(\mathrm{P}'^2+\mathrm{Q}'^2)\,m'\sqrt{a'}+(\mathrm{P}''^2+\mathrm{Q}''^2)\,m''\sqrt{a''}+\ldots.$$

Lorsque $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$, ... ont le même signe, ou, ce qui revient au même, lorsque les corps m, m', m'',... circulent dans le même sens, cette équation est impossible, à moins que l'on ne suppose $\mathrm{P}=\mathrm{o}$, $\mathrm{Q}=\mathrm{o}$, $\mathrm{P}'=\mathrm{o}$,...; d'où il suit que les quantités h, l, h', l',... ne renferment point d'exponentielles, et qu'ainsi l'équation en g ne contient point de racines imaginaires.

Si cette équation avait des racines égales, les expressions de h, l, h', l',... renfermeraient, comme l'on sait, des arcs de cercle, et l'on aurait dans l'expression de h un nombre fini de termes de la forme $\mathrm{P}t^r$. Soient $\mathrm{Q}t^r$, $\mathrm{P}'t^r$, $\mathrm{Q}'t^r$,... les termes correspondants de l, h', l',..., P, Q, P′, Q′,... étant des quantités réelles; le premier membre de l'équation (u)

renfermera le terme

$$[(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)\,m\sqrt{a}+(\mathrm{P}'^2+\mathrm{Q}'^2)\,m'\sqrt{a'}+(\mathrm{P}''^2+\mathrm{Q}''^2)\,m''\sqrt{a''}+\ldots]\,t^{2r}.$$

Si t^r est la plus haute puissance de t que contiennent les valeurs de h, l, h', l',..., t^{2r} sera la plus haute puissance de t renfermée dans le premier membre de l'équation (u); ainsi, pour que ce membre puisse se réduire à une constante, il faut que l'on ait

$$\mathrm{o}=(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)\,m\sqrt{a}+(\mathrm{P}'^2+\mathrm{Q}'^2)\,m'\sqrt{a'}+\ldots,$$

ce qui donne $\mathrm{P}=\mathrm{o}$, $\mathrm{Q}=\mathrm{o}$, $\mathrm{P}'=\mathrm{o}$, $\mathrm{Q}'=\mathrm{o}$,.... Les expressions de h, l, h', l',... ne renferment donc ni exponentielles, ni arcs de cercle, et par conséquent toutes les racines de l'équation en g sont réelles et inégales.

Le système des orbites de m, m', m'',... est donc parfaitement stable relativement à leurs excentricités; ces orbites ne font qu'osciller autour d'un état moyen d'ellipticité, dont elles s'écartent peu, en conservant les mêmes grands axes; leurs excentricités sont toujours assujetties à cette condition, savoir, que la somme de leurs carrés, multipliés respectivement par les masses des corps et par les racines carrées des grands axes, est constamment la même.

58. Lorsque l'on aura déterminé, par ce qui précède, les valeurs de e et de ϖ, on les substituera dans tous les termes des expressions de r et de $\frac{dv}{dt}$, données dans les numéros précédents, en effaçant les termes qui renferment le temps t hors des signes sinus et cosinus. La partie elliptique de ces expressions sera la même que dans le cas de l'orbite non troublée, avec la seule différence que l'excentricité et la position du périhélie seront variables; mais les périodes de ces variations étant fort longues, à raison de la petitesse des masses m, m', m'',... relativement à M, on pourra supposer ces variations proportionnelles au temps pendant un grand intervalle qui, pour les planètes, peut s'étendre à plusieurs siècles avant et après l'époque où l'on fixe l'origine du temps. Il est utile, pour les usages astronomiques, d'avoir sous cette forme les variations séculaires des excentricités et des périhélies des orbites; on peut facilement les conclure des formules précédentes. En effet, l'équation $e^2 = h^2 + l^2$ donne $e\,de = h\,dh + l\,dl$; or, en n'ayant égard qu'à l'action de m', on a, par le n° 55,

$$\frac{dh}{dt} = (0,1)\,l - \boxed{0,1}\,l',$$

$$\frac{dl}{dt} = -(0,1)\,h + \boxed{0,1}\,h',$$

partant

$$\frac{e\,de}{dt} = \boxed{0,1}\,(h'l - hl');$$

mais on a $h'l - hl' = ee'\sin(\varpi' - \varpi)$; on aura donc

$$\frac{de}{dt} = \boxed{0,1}\,e'\sin(\varpi' - \varpi);$$

ainsi, en ayant égard à l'action réciproque des différents corps m, m',..., on aura

$$\frac{de}{dt} = \boxed{0,1}\,e'\sin(\varpi' - \varpi) + \boxed{0,2}\,e''\sin(\varpi'' - \varpi) + \ldots,$$

$$\frac{de'}{dt} = \boxed{1,0}\,e\sin(\varpi - \varpi') + \boxed{1,2}\,e''\sin(\varpi'' - \varpi') + \ldots,$$

$$\frac{de''}{dt} = \boxed{2,0}\,e\sin(\varpi - \varpi'') + \boxed{2,1}\,e'\sin(\varpi' - \varpi'') + \ldots,$$

....

L'équation $\tang\varpi = \frac{h}{l}$ donne, en la différentiant,

$$e^2\,d\varpi = l\,dh - h\,dl.$$

En n'ayant égard qu'à l'action de m', et substituant pour dh et dl leurs valeurs, on aura

$$\frac{e^2\,d\varpi}{dt} = (0,1)(h^2 + l^2) - \boxed{0,1}\,(hh' + ll'),$$

ce qui donne

$$\frac{d\varpi}{dt} = (0,1) - \boxed{0,1}\,\frac{e'}{e}\cos(\varpi' - \varpi);$$

on aura donc, en vertu des actions réciproques des corps m, m', m'',...,

$$\frac{d\varpi}{dt} = (0,1) + (0,2) + \ldots - \boxed{0,1}\,\frac{e'}{e}\cos(\varpi' - \varpi) - \boxed{0,2}\,\frac{e''}{e}\cos(\varpi'' - \varpi) - \ldots,$$

$$\frac{d\varpi'}{dt} = (1,0) + (1,2) + \ldots - \boxed{1,0}\,\frac{e}{e'}\cos(\varpi - \varpi') - \boxed{1,2}\,\frac{e''}{e'}\cos(\varpi'' - \varpi') - \ldots,$$

$$\frac{d\varpi''}{dt} = (2,0) + (2,1) + \ldots - \boxed{2,0}\,\frac{e}{e''}\cos(\varpi - \varpi'') - \boxed{2,1}\,\frac{e'}{e''}\cos(\varpi' - \varpi'') - \ldots,$$

....

Si l'on multiplie ces valeurs de $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, ..., $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, ... par le temps t, on aura les expressions différentielles des variations séculaires des excentricités et des périhélies, et ces expressions, qui ne sont rigoureuses que lorsque t est infiniment petit, pourront cependant servir pendant un long intervalle, relativement aux planètes. Leur comparaison avec des observations précises et éloignées entre elles est le moyen le plus exact de déterminer les masses des planètes qui n'ont point de satellites. On a, pour un temps quelconque t, l'excentricité e égale à $e + t\frac{de}{dt} + \frac{t^2}{1.2}\frac{d^2e}{dt^2} + \ldots$; e, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d^2e}{dt^2}$, ... étant relatifs à l'origine du temps t ou à l'époque. La valeur précédente de $\frac{de}{dt}$ donnera, en la différentiant et en observant que a, a',... sont constants, les valeurs de $\frac{d^2e}{dt^2}$, $\frac{d^3e}{dt^3}$, ...; on pourra donc continuer aussi loin que l'on voudra la série précédente, et, par le même procédé, la série relative à ϖ; mais, relativement aux planètes, il suffira, dans la comparaison des observations les plus anciennes qui nous soient parvenues, d'avoir égard au carré du temps, dans les expressions en séries de e, e',..., ϖ, ϖ',....

59. Considérons présentement les équations relatives à la position des orbites. Reprenons pour cela les équations (3) et (4) du n° 53,

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m'n}{4} a^2 a' \mathrm{B}^{(1)} (q - q'), \quad \frac{dq}{dt} = \frac{m'n}{4} a^2 a' \mathrm{B}^{(1)} (p - p').$$

On a, par le n° 49,

$$a^2 a' \mathrm{B}^{(1)} = \alpha^2 b_{\frac{3}{2}}^{(1)};$$

on a ensuite, par le même numéro,

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = -\frac{3 b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1 - \alpha^2)^2};$$

on aura donc

$$\frac{m'n}{4} a^2 a' \mathrm{B}^{(1)} = -\frac{3 m' n \alpha^2 b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{4(1 - \alpha^2)^2}.$$

Le second membre de cette équation est ce que nous avons désigné par $(0, 1)$ dans le n° 55; on aura ainsi

$$\frac{dp}{dt} = (0, 1)(q' - q), \quad \frac{dq}{dt} = (0, 1)(p - p').$$

De là il est aisé de conclure que les valeurs de $q, p, q', p', \ldots$ seront déterminées par le système suivant d'équations différentielles

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= [(0, 1) + (0, 2) + \ldots] p - (0, 1) p' - (0, 2) p'' - \ldots, \\ \frac{dp}{dt} &= -[(0, 1) + (0, 2) + \ldots] q + (0, 1) q' + (0, 2) q'' + \ldots, \\ \frac{dq'}{dt} &= [(1, 0) + (1, 2) + \ldots] p' - (1, 0) p - (1, 2) p'' - \ldots, \\ \frac{dp'}{dt} &= -[(1, 0) + (1, 2) + \ldots] q' + (1, 0) q + (1, 2) q'' + \ldots, \\ \frac{dq''}{dt} &= [(2, 0) + (2, 1) + \ldots] p'' - (2, 0) p - (2, 1) p' - \ldots, \\ \frac{dp''}{dt} &= -[(2, 0) + (2, 1) + \ldots] q'' + (2, 0) q + (2, 1) q' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Ce système d'équations est semblable à celui des équations (A) du n° 55; il coïnciderait entièrement avec lui si, dans les équations (A), on changeait $h, l, h', l', \ldots$ en $q, p, q', p', \ldots$, et si l'on supposait $\boxed{0, 1} = (0, 1)$, $\boxed{1, 0} = (1, 0), \ldots$; ainsi, l'analyse dont nous avons fait usage dans le n° 56 pour intégrer les équations (A) s'applique aux équations (C). On supposera donc

$$\begin{aligned} q &= \mathrm{N} \cos(gt + \beta) + \mathrm{N}_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + \mathrm{N}_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \ldots, \\ p &= \mathrm{N} \sin(gt + \beta) + \mathrm{N}_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + \mathrm{N}_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \ldots, \\ q' &= \mathrm{N}' \cos(gt + \beta) + \mathrm{N}'_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + \mathrm{N}'_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \ldots, \\ p' &= \mathrm{N}' \sin(gt + \beta) + \mathrm{N}'_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + \mathrm{N}'_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et l'on aura, par le n° 56, une équation en g du degré i, et dont les diverses racines seront $g, g_1, g_2, \ldots$. Il est facile de voir qu'une de ces racines est nulle; car il est clair que l'on satisfait aux équations (C) en y supposant $p, p', p'', \ldots$ égaux et constants, ainsi que $q, q', q'', \ldots$, ce qui exige que l'une des racines de l'équation en g soit zéro, et ce qui l'abaisse au degré $i - 1$. Les arbitraires $\mathrm{N}, \mathrm{N}_1, \mathrm{N}', \ldots, \beta, \beta_1, \ldots$ se détermineront par la méthode exposée dans le n° 56. Enfin on trouvera, par l'analyse du n° 57,

$$\text{const.} = (p^2 + q^2) m \sqrt{a} + (p'^2 + q'^2) m' \sqrt{a'} + \ldots;$$

d'où l'on conclura, comme dans le numéro cité, que les expressions de $p, q, p', q', \ldots$ ne renferment ni arcs de cercle ni exponentielles, lorsque les corps $m, m', m'', \ldots$ circulent dans le même sens, et qu'ainsi l'équation en g a toutes ses racines réelles et inégales.

On peut obtenir deux autres intégrales des équations (C). En effet, si l'on multiplie la première de ces équations par $m\sqrt{a}$, la troisième par $m'\sqrt{a'}$, la cinquième par $m''\sqrt{a''}, \ldots$, on aura, en vertu des relations trouvées dans le n° 55,

$$0 = \frac{dq}{dt} m \sqrt{a} + \frac{dq'}{dt} m' \sqrt{a'} + \ldots,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\text{const.} = qm\sqrt{a} + q'm'\sqrt{a'} + \ldots. \tag{1}$$

On trouvera de la même manière

$$\text{const.} = pm\sqrt{a} + p'm'\sqrt{a'} + \ldots. \tag{2}$$

Nommons φ l'inclinaison de l'orbite de m sur le plan fixe, et θ la longitude du nœud ascendant de cette orbite sur le même plan; la latitude de m sera à très-peu près $\tang\varphi \sin(nt + \varepsilon - \theta)$. En comparant cette valeur à celle-ci $q\sin(nt + \varepsilon) - p\cos(nt + \varepsilon)$, on aura

$$p = \tang\varphi \sin\theta, \quad q = \tang\varphi \cos\theta,$$

d'où l'on tire

$$\tang\varphi = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \tang\theta = \frac{p}{q};$$

on aura donc l'inclinaison de l'orbite de m et la position de son nœud, au moyen des valeurs de p et de q. En marquant successivement d'un trait, de deux traits, etc., relativement à m', m'', ..., les valeurs de $\tang\varphi$ et de $\tang\theta$, on aura les inclinaisons des orbites de m', m'', ..., et les positions de leurs nœuds, au moyen des quantités p', q', p'', q'', ...

La quantité $\sqrt{p^2 + q^2}$ est moindre que la somme $N + N_1 + N_2 + \ldots$ des coefficients des sinus de l'expression de p; ainsi, ces coefficients étant fort petits, puisque l'orbite est supposée peu inclinée au plan fixe, son inclinaison sur ce plan sera toujours peu considérable, d'où il suit que le système des orbites est aussi stable relativement à leurs inclinaisons que par rapport à leurs excentricités. On peut donc considérer les inclinaisons des orbites comme des quantités variables comprises entre des limites déterminées, et les mouvements des nœuds comme n'étant pas uniformes. Ces variations sont très-sensibles dans les satellites de Jupiter, et nous verrons dans la suite qu'elles expliquent les phénomènes singuliers observés dans l'inclinaison de l'orbite du quatrième satellite.

Des expressions précédentes de p et de q résulte ce théorème :

Que l'on imagine un cercle dont l'inclinaison au plan fixe soit N, *et dont* $gt + 6$ *soit la longitude du nœud ascendant; que sur ce premier cercle on imagine un second cercle qui lui soit incliné de* N_1, *et dont* $g_1 t + 6_1$ *soit la longitude de son intersection avec le premier cercle; que sur ce second cercle on imagine un troisième cercle qui lui soit incliné de* N_2, *et dont* $g_2 t + 6_2$ *soit la longitude de son intersection avec le second cercle, et ainsi de suite; la position du dernier cercle sera celle de l'orbite de m.*

En appliquant la même construction aux expressions de h et de l du n° 56, on voit que *la tangente de l'inclinaison du dernier cercle sur le plan fixe est égale à l'excentricité de l'orbite de m, et que la longitude de l'intersection de ce cercle avec le même plan est égale à celle du périhélie de l'orbite de m.*

60. Il est utile, pour les usages astronomiques, d'avoir les variations différentielles des nœuds et des inclinaisons des orbites. Pour cela, reprenons les équations du numéro précédent,

$$\tang\varphi = \sqrt{p^2 + q^2}, \qquad \tang\theta = \frac{p}{q}.$$

En les différentiant, on aura

$$d\varphi = dp\sin\theta + dq\cos\theta,$$
$$d\theta = \frac{dp\cos\theta - dq\sin\theta}{\tang\varphi}.$$

Si l'on substitue pour dp et dq leurs valeurs données par les équations (C) du numéro précédent, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = (0, 1)\tang\varphi' \sin(\theta - \theta') + (0, 2)\tang\varphi'' \sin(\theta - \theta'') + \ldots,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -[(0, 1) + (0, 2) + \ldots] + (0, 1)\frac{\tang\varphi'}{\tang\varphi}\cos(\theta - \theta') + (0, 2)\frac{\tang\varphi''}{\tang\varphi}\cos(\theta - \theta'') + \ldots;$$

on aura pareillement

$$\frac{d\varphi'}{dt} = (1, 0) \operatorname{tang}\varphi \sin(\theta' - \theta) + (1, 2) \operatorname{tang}\varphi'' \sin(\theta' - \theta'') + \ldots,$$

$$\frac{d\theta'}{dt} = -[(1, 0) + (1, 2) + \ldots] + (1, 0) \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi'} \cos(\theta' - \theta) + (1, 2) \frac{\operatorname{tang}\varphi''}{\operatorname{tang}\varphi'} \cos(\theta' - \theta'') + \ldots;$$

....

Les astronomes rapportent les mouvements célestes à l'orbite mobile de la Terre; c'est, en effet, du plan de cette orbite que nous les observons; il importe donc de connaître les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites relativement à l'écliptique. Supposons ainsi que l'on veuille déterminer les variations différentielles des nœuds et des inclinaisons des orbites relativement à l'orbite de l'un des corps m, m', m'',..., par exemple, à l'orbite de m. Il est clair que

$$q \sin(n't + \varepsilon') - p \cos(n't + \varepsilon')$$

serait la latitude de m' au-dessus du plan fixe, s'il était en mouvement sur l'orbite de m. Sa latitude au-dessus du même plan est

$$q' \sin(n't + \varepsilon') - p' \cos(n't + \varepsilon');$$

or la différence de ces deux latitudes est à très-peu près la latitude de m' au-dessus de l'orbite de m; en nommant donc $\varphi'_{,}$ l'inclinaison, et $\theta'_{,}$ la longitude du nœud de l'orbite de m' sur l'orbite de m, on aura, par ce qui précède,

$$\operatorname{tang}\varphi'_{,} = \sqrt{(p' - p)^2 + (q' - q)^2}, \qquad \operatorname{tang}\theta'_{,} = \frac{p' - p}{q' - q}.$$

Si l'on prend pour plan fixe celui de l'orbite de m à une époque donnée, on aura à cette époque $p = 0$, $q = 0$; mais les différentielles dp et dq ne seront pas nulles; ainsi l'on aura

$$d\varphi'_{,} = (dp' - dp) \sin\theta' + (dq' - dq) \cos\theta',$$

$$d\theta'_{,} = \frac{(dp' - dp) \cos\theta' - (dq' - dq) \sin\theta'}{\operatorname{tang}\varphi'}.$$

En substituant pour dp, dq, dp', dq',... leurs valeurs données par les équations (C) du numéro précédent, on aura

$$\frac{d\varphi'_{,}}{dt} = [(1, 2) - (0, 2)] \operatorname{tang}\varphi'' \sin(\theta' - \theta'')$$
$$+ [(1, 3) - (0, 3)] \operatorname{tang}\varphi''' \sin(\theta' - \theta''') + \ldots,$$

$$\frac{d\theta'_{,}}{dt} = -[(1, 0) + (1, 2) + (1, 3) + \ldots] - (0, 1)$$
$$+ [(1, 2) - (0, 2)] \frac{\operatorname{tang}\varphi''}{\operatorname{tang}\varphi'} \cos(\theta' - \theta'')$$
$$+ [(1, 3) - (0, 3)] \frac{\operatorname{tang}\varphi'''}{\operatorname{tang}\varphi'} \cos(\theta' - \theta''') + \ldots.$$

Il est facile de conclure de ces expressions les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites des autres corps m'', m''',... sur l'orbite mobile de m.

61. Les intégrales trouvées précédemment des équations différentielles qui déterminent les variations des éléments des orbites ne sont qu'approchées, et les relations qu'elles donnent entre tous ces éléments n'ont lieu qu'en supposant les excentricités des orbites et leurs inclinaisons fort petites. Mais les intégrales (4), (5), (6) et (7), auxquelles nous sommes parvenus dans le n° 9, donnent ces mêmes rapports, quelles que soient les excentricités et les inclinaisons. Pour cela, nous observerons que $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ est le double de l'aire décrite durant l'instant dt par la projection du rayon vecteur de la planète m sur le plan des x et des y. Dans le mouvement elliptique, si l'on néglige la masse de la planète vis-à-vis de celle du Soleil, prise pour unité, on a, par les n[os] 19 et 20, relativement au plan de l'orbite de m,

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \sqrt{a(1 - e^2)}.$$

Pour rapporter au plan fixe l'aire sur l'orbite, il faut la multiplier par le cosinus de l'inclinaison φ de l'orbite à ce plan; on aura donc, par rapport à ce plan,

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \cos\varphi\sqrt{a(1-e^2)} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\tang^2\varphi}};$$

on aura pareillement

$$\frac{x'dy' - y'dx'}{dt} = \sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1+\tang^2\varphi'}}, \quad \text{etc.}$$

Ces valeurs de $x\,dy - y\,dx$, $x'dy' - y'dx'$,... peuvent être employées lorsque l'on fait abstraction des inégalités du mouvement des planètes, pourvu que l'on considère les éléments $e, e',\ldots, \varphi, \varphi',\ldots$ comme variables en vertu des inégalités séculaires; l'équation (4) du n° 9 donnera donc alors

$$c = m\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\tang^2\varphi}} + m'\sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1+\tang^2\varphi'}} + \ldots + \Sigma mm'\frac{(x'-x)(dy'-dy)-(y'-y)(dx'-dx)}{dt}.$$

En négligeant ce dernier terme, qui reste toujours de l'ordre mm', on aura

$$c = m\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\tang^2\varphi}} + m'\sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1+\tang^2\varphi'}} + \ldots.$$

Ainsi, quels que soient les changements que la suite des temps apporte aux valeurs de $e, e',\ldots, \varphi, \varphi',\ldots$ en vertu des variations séculaires, ces valeurs doivent toujours satisfaire à l'équation précédente.

Si l'on néglige les quantités très-petites de l'ordre e^4 ou $e^2\varphi^2$, cette équation donnera

$$c = m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + \ldots - \tfrac{1}{2}m\sqrt{a}(e^2 + \tang^2\varphi) - \tfrac{1}{2}m'\sqrt{a'}(e'^2 + \tang^2\varphi') - \ldots,$$

et par conséquent, si l'on néglige les carrés de $e, e', \varphi,\ldots$, on aura $m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + \ldots$ constant. On a vu précédemment que, si l'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, $a, a',\ldots$ sont constants séparément; l'équation précédente donnera donc, en négligeant les quantités très-petites de l'ordre e^4 ou $e^2\varphi^2$,

$$\text{const.} = m\sqrt{a}(e^2 + \tang^2\varphi) + m'\sqrt{a'}(e'^2 + \tang^2\varphi') + \ldots.$$

Dans la supposition des orbites presque circulaires et peu inclinées les unes aux autres, les variations séculaires des excentricités des orbites sont, par le n° 55, déterminées au moyen d'équations différentielles indépendantes des inclinaisons, et qui par conséquent sont les mêmes que si les orbites étaient dans un même plan; or on a, dans cette hypothèse, $\varphi = 0$, $\varphi' = 0,\ldots$; l'équation précédente devient ainsi

$$\text{const.} = e^2 m\sqrt{a} + e'^2 m'\sqrt{a'} + e''^2 m''\sqrt{a''} + \ldots,$$

équation à laquelle nous sommes déjà parvenus dans le n° 57.

Pareillement, les variations séculaires des inclinaisons des orbites sont, par le n° 59, déterminées au moyen d'équations différentielles indépendantes des excentricités, et qui par conséquent sont les mêmes que si les orbites étaient circulaires; or on a, dans cette hypothèse, $e = 0$, $e' = 0,\ldots$; partant, on aura

$$\text{const.} = m\sqrt{a}\tang^2\varphi + m'\sqrt{a'}\tang^2\varphi' + m''\sqrt{a''}\tang^2\varphi'' + \ldots,$$

équation à laquelle nous sommes parvenus dans le n° 59.

Si l'on suppose, comme dans ce dernier numéro,

$$p = \tang\varphi\sin\theta, \quad q = \tang\varphi\cos\theta,$$

il est facile de s'assurer que, l'inclinaison de l'orbite de m sur le plan des x et des y étant φ, et la longitude de son nœud ascendant, comptée de l'axe des x, étant θ, le cosinus de l'inclinaison de cette orbite sur le plan des x et des z sera

$$\frac{q}{\sqrt{1+\tang^2\varphi}}.$$

En multipliant cette quantité par $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ ou par sa valeur $\sqrt{a(1-e^2)}$, on aura la valeur de $\frac{x\,dz - z\,dx}{dt}$; l'équation (5) du n° 9 donnera donc, en négligeant les quantités de l'ordre m^2,

$$c' = mq\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\tang^2\varphi}} + m'q'\sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1+\tang^2\varphi'}} + \ldots.$$

On trouvera pareillement que l'équation (6) du n° 9 donne

$$c'' = mp\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\tang^2\varphi}} + m'p'\sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1+\tang^2\varphi'}} + \ldots.$$

Si dans ces deux équations on néglige les quantités de l'ordre e^3 ou $e^2\varphi$, elles deviennent

$$\text{const.} = mq\sqrt{a} + m'q'\sqrt{a'} + \ldots,$$

$$\text{const} = mp\sqrt{a} + m'p'\sqrt{a'} + \ldots,$$

équations auxquelles nous sommes déjà parvenus dans le n° 59.

Enfin, l'équation (7) du n° 9 donnera, en observant que, par le n° **18**,

$$\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

et en négligeant les quantités de l'ordre mm',

$$\text{const.} = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots.$$

Ces diverses équations subsistent eu égard aux inégalités à très-longues périodes qui peuvent affecter les éléments des orbites de m, m', ... Nous avons observé, dans le n° 54, que les rapports des moyens mouvements de ces corps peuvent introduire dans les expressions des grands axes des orbites, considérées comme variables, des inégalités dont les arguments proportionnels au temps croissent avec beaucoup de lenteur, et qui, ayant pour diviseurs les coefficients du temps t dans ces arguments, peuvent devenir sensibles. Or il est visible qu'en n'ayant égard qu'aux termes qui ont de semblables diviseurs, et en considérant les orbites comme des ellipses dont les éléments varient à raison de ces termes, les intégrales (4), (5), (6) et (7) du n° 9 donneront toujours les relations que nous venons de trouver entre ces éléments, parce que les termes de l'ordre mm', que nous avons négligés dans ces intégrales pour en conclure ces relations, n'ont point pour diviseurs les très-petits coefficients dont nous venons de parler, ou du moins ils ne les

renferment que multipliés par une puissance des forces perturbatrices supérieure à celle que l'on considère.

62. Nous avons observé, dans les n^{os} **21** et **22** du premier Livre, que, dans le mouvement d'un système de corps, il existe un plan invariable ou conservant toujours une situation parallèle, qu'il est facile de retrouver dans tous les temps, par cette condition, que la somme des masses du système, multipliées respectivement par les projections des aires décrites par leurs rayons vecteurs dans un temps donné, est un maximum. C'est principalement dans la théorie du Système solaire que la recherche de ce plan est importante, vu les mouvements propres des étoiles et de l'écliptique, qui rendent très-difficile aux astronomes la détermination précise des mouvements célestes. Si l'on nomme γ l'inclinaison de ce plan invariable sur celui des x et des y, et Π la longitude de son nœud ascendant, il résulte de ce que nous avons démontré, dans les n^{os} **21** et **22** du premier Livre, que l'on aura

$$\tang\gamma\sin\Pi = \frac{c''}{c}, \quad \tang\gamma\cos\Pi = \frac{c'}{c},$$

et, par conséquent,

$$\tang\gamma\sin\Pi = \frac{m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\theta + m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin\varphi'\sin\theta' + \ldots}{m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi + m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos\varphi' + \ldots},$$

$$\tang\gamma\cos\Pi = \frac{m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\theta + m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin\varphi'\cos\theta' + \ldots}{m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi + m'\sqrt{u'(1-e'^2)}\cos\varphi' + \ldots}.$$

On déterminera facilement, au moyen de ces valeurs, les deux angles γ et Π. On voit que, pour déterminer le plan invariable, il faudrait connaître les masses des comètes et les éléments de leurs orbites; heureusement ces masses paraissent être fort petites, en sorte que l'on peut, sans erreur sensible, négliger leur action sur les planètes; mais le temps seul peut nous éclairer sur ce point. On peut observer ici que, relativement à ce plan invariable, les valeurs de p, q, p', q', ... ne renferment point de termes constants; car il est visible, par les équations (C) du n° 59, que ces termes sont les mêmes pour $p, p', p'', \ldots$, et qu'ils sont encore les mêmes pour $q, q', q'', \ldots$; et comme, relativement au plan invariable, les constantes des premiers membres des équations (1) et (2) du n° 59 sont nulles, les termes constants disparaissent, en vertu de ces équations, des expressions de $p, p', \ldots, q, q', \ldots$.

Considérons le mouvement de deux orbites, en les supposant inclinées l'une à l'autre d'un angle quelconque; on aura, par le n° 61,

$$c' = \sin\varphi \cos\theta . m\sqrt{a(1-e^2)} + \sin\varphi' \cos\theta' . m'\sqrt{a'(1-e'^2)},$$

$$c'' = \sin\varphi \sin\theta . m\sqrt{a(1-e^2)} + \sin\varphi' \sin\theta' . m'\sqrt{a'(1-e'^2)}.$$

Supposons que le plan fixe auquel on rapporte le mouvement des orbites soit le plan invariable dont nous venons de parler, et par rapport auquel les constantes des premiers membres de ces équations sont nulles, comme on l'a vu dans les n^{os} 21 et 22 du premier Livre. Les angles φ et φ' étant positifs, les équations précédentes donnent les suivantes

$$m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi = m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin\varphi',$$

$$\sin\theta = -\sin\theta', \quad \cos\theta = -\cos\theta',$$

d'où l'on tire $\theta' = \theta +$ la demi-circonférence; les nœuds des orbites sont par conséquent sur la même ligne; mais le nœud ascendant de l'une coïncide avec le nœud descendant de l'autre, en sorte que l'inclinaison mutuelle des deux orbites est égale à $\varphi + \varphi'$.

On a, par le n° 61,

$$c = m\sqrt{(a1-e^2)}\cos\varphi + m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos\varphi';$$

en combinant cette équation avec la précédente entre $\sin\varphi$ et $\sin\varphi'$, on aura

$$2mc\cos\varphi\sqrt{a(1-e^2)} = c^2 + m^2 a(1-e^2) - m'^2 a'(1-e'^2).$$

Si l'on suppose les orbites circulaires, ou du moins assez peu excentriques pour que l'on puisse négliger les carrés de leurs excentricités, l'équation précédente donnera φ constant; par la même raison, φ' sera

constant; les inclinaisons des plans des orbites sur le plan fixe et sur elles-mêmes seront donc alors constantes, et ces trois plans auront toujours une intersection commune. Il en résulte que la variation moyenne instantanée de cette intersection est toujours la même, puisqu'elle ne peut être qu'une fonction de ces inclinaisons. Lorsqu'elles sont fort petites, on trouvera facilement, par le n° 60 et en vertu de la relation précédente entre $\sin\varphi$ et $\sin\varphi'$, que, pour le temps t, le mouvement de cette intersection est $-[(0,1)+(1,0)]\,t$.

La position du plan invariable, auquel nous venons de rapporter le mouvement des orbites, est facile à déterminer pour un instant quelconque; car il ne s'agit que de partager l'angle de l'inclinaison mutuelle des orbites en deux angles φ et φ', tels que l'on ait l'équation précédente entre $\sin\varphi$ et $\sin\varphi'$. En désignant donc par ϖ cette mutuelle inclinaison, on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin\varpi}{m\sqrt{a(1-e^2)} + m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos\varpi}.$$

CHAPITRE VIII.

SECONDE MÉTHODE D'APPROXIMATION DES MOUVEMENTS CÉLESTES.

63. On a vu, dans le Chapitre II, que les coordonnées des corps célestes, rapportées aux foyers des forces principales qui les animent, sont déterminées par des équations différentielles du second ordre. Nous avons intégré ces équations dans le Chapitre III, en n'ayant égard qu'aux forces principales, et nous avons fait voir que, dans ce cas, les orbites sont des sections coniques dont les éléments sont les constantes arbitraires introduites par les intégrations. Les forces perturbatrices n'ajoutant que de petites inégalités au mouvement elliptique, il est naturel de chercher à ramener aux lois de ce mouvement le mouvement troublé des corps célestes. Si l'on applique aux équations différentielles du mouvement elliptique, augmentées des petits termes dus aux forces perturbatrices, la méthode d'approximation exposée dans le n° 45, on pourra encore considérer les mouvements célestes dans les orbites rentrantes comme étant elliptiques; mais les éléments de ce mouvement seront variables, et l'on aura leurs variations par cette méthode. Il en résulte que, les équations du mouvement étant différentielles du second ordre, non-seulement leurs intégrales finies, mais encore leurs intégrales infiniment petites du premier ordre sont les mêmes que dans le cas des ellipses invariables, en sorte que l'on peut différentier les équations finies du mouvement elliptique, en traitant les éléments de ce mouvement comme constants. Il résulte encore de la même méthode que les équations de ce mouvement, différentielles du premier ordre, peuvent être différentiées, en n'y faisant varier que les éléments des orbites et les premières différences des

coordonnées, pourvu qu'au lieu des différences secondes de ces coordonnées on ne substitue que la partie de leurs valeurs due aux forces perturbatrices. Ces résultats peuvent être immédiatement tirés de la considération du mouvement elliptique.

Pour cela, concevons une ellipse passant par une planète et par l'élément de la courbe qu'elle décrit, et dont le centre du Soleil occupe le foyer. Cette ellipse est celle que la planète décrirait invariablement, si les forces perturbatrices cessaient d'agir sur elle. Ses éléments sont constants pendant l'instant dt, mais ils varient d'un instant à l'autre. Soit donc $V=0$ une équation finie à l'ellipse invariable, V étant fonction des coordonnées rectangles x, y, z, et des paramètres $c, c', \ldots$, qui sont fonctions des éléments du mouvement elliptique. Cette équation aura encore lieu pour l'ellipse variable; mais les paramètres $c, c', \ldots$ ne seront plus constants. Cependant, puisque cette ellipse appartient à l'élément de la courbe décrite par la planète durant l'instant dt, l'équation $V=0$ aura encore lieu pour le premier et le dernier point de cet élément, en regardant $c, c', \ldots$ comme constants. On peut donc différentier cette équation une première fois, en n'y faisant varier que x, y, z, ce qui donne

$$(i)\qquad 0=\frac{\partial V}{\partial x}\,dx+\frac{\partial V}{\partial y}\,dy+\frac{\partial V}{\partial z}\,dz.$$

On voit ainsi la raison pour laquelle les équations finies de l'ellipse invariable peuvent, dans le cas de l'ellipse variable, être différentiées une première fois, en traitant les paramètres comme constants. Par la même raison, toute équation différentielle du premier ordre à l'ellipse invariable a également lieu pour l'ellipse variable; car soit $V'=0$ une équation de cet ordre, V' étant fonction de $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ et des paramètres $c, c', \ldots$. Il est clair que toutes ces quantités sont les mêmes pour l'ellipse variable que pour l'ellipse invariable qui coïncide avec elle pendant l'instant dt.

Présentement, si nous considérons la planète à la fin de l'instant dt ou au commencement de l'instant suivant, la fonction V ne variera de l'ellipse relative à l'instant dt à l'ellipse consécutive que par la variation des paramètres, puisque les coordonnées x, y, z, relatives à la fin du premier instant, sont les mêmes pour ces deux ellipses; ainsi, la fonction V étant nulle, on a

$$(i') \qquad 0 = \frac{\partial V}{\partial c}\,dc + \frac{\partial V}{\partial c'}\,dc' + \ldots.$$

Cette équation peut se déduire encore de l'équation $V = 0$, en y faisant varier à la fois x, y, z, c, c', ...; car, si l'on retranche l'équation (i) de cette différentielle, on aura l'équation (i').

En différentiant l'équation (i), on aura une nouvelle équation en dc, dc', ..., qui, avec l'équation (i'), servira à déterminer les paramètres c, c', ... C'est ainsi que les géomètres qui se sont occupés les premiers de la théorie des perturbations célestes ont déterminé les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites; mais on peut simplifier cette différentiation de la manière suivante.

Considérons généralement l'équation différentielle du premier ordre $V' = 0$, équation qui, comme on vient de le voir, convient également à l'ellipse variable et à l'ellipse invariable qui, dans l'instant dt, coïncide avec elle. Dans l'instant suivant, cette équation convient encore aux deux ellipses, mais avec cette différence, que c, c', ... restent les mêmes dans le cas de l'ellipse invariable, au lieu qu'ils changent avec l'ellipse variable. Soit V'' ce que devient V' lorsque l'ellipse est supposée invariable; soit $V'_{,}$ ce que devient cette même fonction dans le cas de l'ellipse variable. Il est clair que, pour avoir V'', il faut changer, dans V', les coordonnées x, y, z, qui sont relatives au commencement du premier instant dt, dans celles qui sont relatives au commencement du second instant; il faut ensuite augmenter les différences premières dx, dy, dz respectivement des quantités d^2x, d^2y, d^2z, relatives à l'ellipse invariable, l'élément dt du temps étant supposé constant.

Pareillement, pour avoir $V'_{,}$, il faut changer dans V' les coordonnées x, y, z dans celles qui sont relatives au commencement du second instant, et qui sont encore les mêmes dans les deux ellipses; il faut ensuite augmenter dx, dy, dz respectivement des quantités d^2x, d^2y, d^2z; enfin, il faut changer les paramètres c, c', ... dans $c + dc$, $c' + dc'$, ...

Les valeurs de d^2x, d^2y, d^2z ne sont pas les mêmes dans les deux ellipses; elles sont augmentées, dans le cas de l'ellipse variable, des quantités dues aux forces perturbatrices. On voit ainsi que les deux fonctions V'' et $V'_{,}$ ne diffèrent qu'en ce que, dans la seconde, les paramètres c, c', ... croissent de dc, dc', ..., et les valeurs de d^2x, d^2y, d^2z, relatives à l'ellipse invariable, y sont augmentées des quantités dues aux forces perturbatrices. On formera donc $V'_{,} - V''$ en différentiant V' dans la supposition de x, y, z constants, et de dx, dy, dz, c, c', ... variables, pourvu que, dans cette différentielle, on substitue pour d^2x, d^2y, d^2z les parties de leurs valeurs uniquement dues aux forces perturbatrices.

Maintenant, si dans la fonction $V'' - V'$ on substitue, au lieu de d^2x, d^2y, d^2z, leurs valeurs relatives au mouvement elliptique, on aura une fonction de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, c, c', ..., qui, dans le cas de l'ellipse invariable, est nulle; cette fonction est donc encore nulle dans le cas de l'ellipse variable. On a évidemment, dans ce dernier cas, $V'_{,} - V' = 0$, puisque cette équation est la différentielle de l'équation $V' = 0$; en en retranchant l'équation $V'' - V' = 0$, on aura $V'_{,} - V'' = 0$. Ainsi l'on peut, dans ce cas, différentier l'équation $V' = 0$, en n'y faisant varier que dx, dy, dz, c, c', ..., pourvu que l'on substitue, pour d^2x, d^2y, d^2z, les parties de leurs valeurs relatives aux forces perturbatrices. Ces résultats sont exactement les mêmes que ceux auxquels nous sommes parvenus dans le n° 45, par des considérations purement analytiques; mais, vu leur importance, nous avons cru devoir les déduire ici de la considération du mouvement elliptique. Cela posé,

64. Reprenons les équations (P) du n° 46,

$$(P) \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\mu x}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\[2ex] 0 = \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\mu y}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial y}, \\[2ex] 0 = \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{\mu z}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial z}. \end{cases}$$

Si l'on suppose $R=0$, on aura les équations du mouvement elliptique, que nous avons intégrées dans le Chapitre III. Nous sommes parvenus, dans le n° 18, aux sept intégrales suivantes :

$$(p)\quad\left\{\begin{aligned}
&c=\frac{x\,dy-y\,dx}{dt},\quad c'=\frac{x\,dz-z\,dx}{dt},\quad c''=\frac{y\,dz-z\,dy}{dt},\\
&0=f+x\left(\frac{\mu}{r}-\frac{dy^2+dz^2}{dt^2}\right)+\frac{y\,dy\,dx}{dt^2}+\frac{z\,dz\,dx}{dt^2},\\
&0=f'+y\left(\frac{\mu}{r}-\frac{dx^2+dz^2}{dt^2}\right)+\frac{x\,dx\,dy}{dt^2}+\frac{z\,dz\,dy}{dt^2},\\
&0=f''+z\left(\frac{\mu}{r}-\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)+\frac{x\,dx\,dz}{dt^2}+\frac{y\,dy\,dz}{dt^2},\\
&0=\frac{\mu}{a}-\frac{2\mu}{r}+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}.
\end{aligned}\right.$$

Ces intégrales donnant les arbitraires en fonctions des coordonnées et de leurs premières différences, elles sont sous une forme très-commode pour déterminer les variations de ces arbitraires. Les trois premières intégrales donnent en les différentiant, et en ne faisant varier, par le numéro précédent, que les paramètres c, c', c'', et les premières différences des coordonnées,

$$dc=\frac{x\,d^2y-y\,d^2x}{dt},\quad dc'=\frac{x\,d^2z-z\,d^2x}{dt},\quad dc''=\frac{y\,d^2z-z\,d^2y}{dt}.$$

En substituant, au lieu de d^2x, d^2y, d^2z, les parties de leurs valeurs dues aux forces perturbatrices, et qui, en vertu des équations différentielles (P), sont $-dt^2\frac{\partial R}{\partial x}$, $-dt^2\frac{\partial R}{\partial y}$, $-dt^2\frac{\partial R}{\partial z}$, on aura

$$\begin{aligned}
dc&=dt\left(y\frac{\partial R}{\partial x}-x\frac{\partial R}{\partial y}\right),\\
dc'&=dt\left(z\frac{\partial R}{\partial x}-x\frac{\partial R}{\partial z}\right),\\
dc''&=dt\left(z\frac{\partial R}{\partial y}-y\frac{\partial R}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

On a vu, dans les n°s 18 et 19, que les paramètres c, c', c'' déterminent

trois éléments de l'orbite elliptique, savoir, l'inclinaison φ de l'orbite sur le plan des x et des y, et la longitude θ de son nœud, au moyen des équations

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\sqrt{c'^2+c''^2}}{c},\quad \operatorname{tang}\theta=\frac{c''}{c'},$$

et le demi-paramètre $a(1-e^2)$ de l'ellipse au moyen de l'équation

$$\mu a(1-e^2)=c^2+c'^2+c''^2.$$

Ces mêmes équations subsistent encore dans le cas de l'ellipse variable, pourvu que l'on détermine c, c', c'' au moyen des équations différentielles précédentes. On aura ainsi le paramètre de l'ellipse variable, son inclinaison sur le plan fixe des x et des y, et la position de son nœud.

Les trois premières des équations (p) nous ont donné, dans le n° 19, l'intégrale finie $0=c''x-c'y+cz$; cette équation subsiste encore dans le cas de l'ellipse troublée, ainsi que sa première différence $0=c''dx-c'dy+c\,dz$, prise en regardant c, c', c'' comme constants.

Si l'on différentie la quatrième, la cinquième et la sixième des intégrales (p), en n'y faisant varier que les paramètres f, f', f'' et les différences dx, dy, dz; si l'on substitue ensuite, au lieu de d^2x, d^2y, d^2z, les quantités $-dt^2\frac{\partial R}{\partial x}$, $-dt^2\frac{\partial R}{\partial y}$, $-dt^2\frac{\partial R}{\partial z}$, on aura

$$\begin{aligned}
df&=dy\left(y\frac{\partial R}{\partial x}-x\frac{\partial R}{\partial y}\right)+dz\left(z\frac{\partial R}{\partial x}-x\frac{\partial R}{\partial z}\right)\\
&\quad+(y\,dx-x\,dy)\frac{\partial R}{\partial y}+(z\,dx-x\,dz)\frac{\partial R}{\partial z},\\
df'&=dx\left(x\frac{\partial R}{\partial y}-y\frac{\partial R}{\partial x}\right)+dz\left(z\frac{\partial R}{\partial y}-y\frac{\partial R}{\partial z}\right)\\
&\quad+(x\,dy-y\,dx)\frac{\partial R}{\partial x}+(z\,dy-y\,dz)\frac{\partial R}{\partial z},\\
df''&=dx\left(x\frac{\partial R}{\partial z}-z\frac{\partial R}{\partial x}\right)+dy\left(y\frac{\partial R}{\partial z}-z\frac{\partial R}{\partial y}\right)\\
&\quad+(x\,dz-z\,dx)\frac{\partial R}{\partial x}+(y\,dz-z\,dy)\frac{\partial R}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Enfin, la septième des intégrales (p), différentiée de la même manière, donnera la variation du demi-grand axe a, au moyen de l'équation

$$d\frac{\mu}{a} = 2\,\mathrm{dR},$$

la différentielle dR se rapportant aux seules coordonnées x, y, z du corps m.

Les valeurs de f, f', f'' déterminent la longitude de la projection du périhélie de l'orbite sur le plan fixe, et le rapport de l'excentricité au demi-grand axe; car, I étant la longitude de cette projection, on a, par le n° **19**,

$$\operatorname{tang} \mathrm{I} = \frac{f'}{f},$$

et, e étant le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, on a, par le même numéro,

$$\mu e = \sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2}.$$

Ce rapport peut encore être déterminé en divisant le demi-paramètre $a(1 - e^2)$ par le demi-grand axe a; le quotient, retranché de l'unité, donnera la valeur de e^2.

Les intégrales (p) ont donné par l'élimination, dans le n° **19**, l'intégrale finie $0 = \mu r - h^2 + fx + f'y + f''z$; cette équation subsiste encore dans le cas de l'ellipse troublée, et elle détermine à chaque instant la nature de l'ellipse variable. On peut la différentier en regardant f, f', f'' comme constants, ce qui donne

$$0 = \mu\,dr + f\,dx + f'\,dy + f''\,dz.$$

Le demi-grand axe a donne le moyen mouvement de m, ou, plus exactement, ce qui dans l'orbite troublée répond au moyen mouvement dans l'orbite non troublée; car on a, par le n° **20**, $n = a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\mu}$; de plus, si l'on désigne par ζ le moyen mouvement de m, on a dans l'orbite elliptique invariable $d\zeta = n\,dt$; cette équation a également lieu

dans l'ellipse variable, puisqu'elle est différentielle du premier ordre. En la différentiant, on aura $d^2\zeta = dn\,dt$; or on a

$$dn = \frac{3an}{2\mu}\,d\frac{\mu}{a} = \frac{3an\,\mathrm{dR}}{\mu},$$

partant

$$d^2\zeta = \frac{3an\,dt\,\mathrm{dR}}{\mu},$$

et, en intégrant,

$$\zeta = \frac{3}{\mu}\iint an\,dt\,\mathrm{dR}.$$

Enfin, on a vu, dans le n° **18**, que les intégrales (p) n'équivalent qu'à cinq intégrales distinctes, et qu'elles donnent entre les sept paramètres c, c', c'', f, f', f'' et e les deux équations de condition

$$0 = fc'' - f'c' + f''c,$$
$$0 = \frac{\mu}{a} + \frac{f^2 + f'^2 + f''^2 - \mu^2}{c^2 + c'^2 + c''^2};$$

ces équations ont donc encore lieu dans le cas de l'ellipse variable, pourvu que les paramètres soient déterminés par ce qui précède. On peut d'ailleurs s'en assurer facilement *a posteriori*.

Nous venons de déterminer cinq éléments de l'orbite troublée, savoir, son inclinaison, la position de ses nœuds, son demi-grand axe qui donne son moyen mouvement, son excentricité, et la position du périhélie. Il nous reste à déterminer le sixième élément du mouvement elliptique, celui qui, dans l'ellipse non troublée, répond à la position de m à une époque donnée. Pour cela, reprenons l'expression de dt du n° **16**,

$$\frac{dt\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{[1 + e\cos(v - \varpi)]^2}.$$

Cette équation, développée en série, nous a donné, dans le numéro cité,

$$n\,dt = dv[1 + \mathrm{E}^{(1)}\cos(v - \varpi) + \mathrm{E}^{(2)}\cos 2(v - \varpi) + \ldots].$$

En intégrant cette équation dans la supposition de e et de ϖ constants, on aura

$$\int n\,dt + \varepsilon = v + \mathrm{E}^{(1)} \sin(v - \varpi) + \frac{\mathrm{E}^{(2)}}{2} \sin 2(v - \varpi) + \ldots,$$

ε étant une arbitraire. Cette intégrale est relative à l'ellipse invariable; pour l'étendre à l'ellipse troublée, il faut qu'en y faisant tout varier jusqu'aux arbitraires ε, e et ϖ qu'elle renferme, sa différentielle coïncide avec la précédente; ce qui donne

$$\begin{aligned} d\varepsilon = de\left[\frac{d\mathrm{E}^{(1)}}{de} \sin(v - \varpi) + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}^{(2)}}{de} \sin 2(v - \varpi) + \ldots\right] \\ - d\varpi\left[\mathrm{E}^{(1)} \cos(v - \varpi) + \mathrm{E}^{(2)} \cos 2(v - \varpi) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

$v - \varpi$ est l'anomalie vraie de m comptée sur l'orbite, et ϖ est la longitude du périhélie comptée pareillement sur l'orbite. Nous avons déterminé précédemment la longitude I de la projection du périhélie sur le plan fixe; or on a, par le n° **22**, en changeant v en ϖ, et $v_{,}$ en I dans l'expression de $v - 6$ de ce numéro,

$$\varpi - 6 = \mathrm{I} - \theta + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin 2(\mathrm{I} - \theta) + \ldots.$$

En supposant ensuite v et $v_{,}$ nuls dans cette même expression, on a

$$6 = \theta + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin 2\theta + \ldots;$$

partant

$$\varpi = \mathrm{I} + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varphi\left[\sin 2\theta + \sin 2(\mathrm{I} - \theta)\right] + \ldots,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} d\varpi = d\mathrm{I}\left[1 + 2\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cos 2(\mathrm{I} - \theta) + \ldots\right] + 2\,d\theta \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varphi\left[\cos 2\theta - \cos 2(\mathrm{I} - \theta) + \ldots\right] \\ + \frac{d\varphi \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}\left[\sin 2\theta + \sin 2(\mathrm{I} - \theta) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs de $d\mathrm{I}$, $d\theta$ et $d\varphi$ étant déterminées par ce qui précède, on aura celle de $d\varpi$, d'où l'on tirera la valeur de $d\varepsilon$.

Il suit de là que les expressions en séries du rayon vecteur, de sa projection sur le plan fixe, de la longitude rapportée soit sur le plan fixe, soit sur l'orbite, et de la latitude, que nous avons données dans le n° **22** pour le cas de l'ellipse invariable, ont également lieu dans le cas de l'ellipse troublée, pourvu que l'on y change nt en $\int n\,dt$, et que l'on détermine les éléments de l'ellipse variable par les formules précédentes. Car, puisque les équations finies entre r, v, s, x, y, z et $\int n\,dt$ sont les mêmes dans les deux cas, et que les expressions en séries du n° **22** résultent de ces équations par des opérations analytiques entièrement indépendantes de la constance ou de la variabilité des éléments, il est clair que ces expressions ont encore lieu dans le cas des éléments variables.

Lorsque les ellipses sont fort excentriques, telles que les orbites des comètes, il faut changer un peu l'analyse précédente. L'inclinaison φ de l'orbite sur le plan fixe, la longitude θ de son nœud ascendant, le demi-grand axe a, le demi-paramètre $a(1 - e^2)$, l'excentricité e et la longitude I du périhélie sur le plan fixe pourront être déterminés par ce qui précède. Mais, les valeurs de ϖ et de $d\varpi$ étant données en séries ordonnées par rapport aux puissances de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, il faut, pour les rendre convergentes, choisir le plan fixe de manière que $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ soit peu considérable, et ce qu'il y a de plus simple pour cet objet consiste à prendre pour plan fixe celui de l'orbite de m à une époque donnée.

La valeur précédente de $d\varepsilon$ est exprimée par une série qui n'est convergente que dans le cas où l'excentricité de l'orbite est peu considérable; on ne peut donc pas l'employer dans le cas présent. Pour y suppléer, reprenons l'équation

$$\frac{dt\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{[1 + e\cos(v - \varpi)]^2}.$$

Si l'on fait $1 - e = \alpha$, on a par l'analyse du n° **23**, dans le cas de l'ellipse invariable,

$$t + \mathrm{T} = \frac{2a^{\frac{3}{2}}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(2 - \alpha)^2\sqrt{\mu}} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v - \varpi)\left[1 + \frac{\frac{2}{3} - \alpha}{2 - \alpha} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(v - \varpi) + \ldots\right].$$

T étant une arbitraire. Pour étendre cette équation à l'ellipse variable, il faut la différentier, en ne faisant varier que T, le demi-paramètre $a(1-e^2)$, α et ϖ. On aura ainsi une équation différentielle qui déterminera T, et les équations finies qui ont lieu dans le cas de l'ellipse invariable subsisteront encore dans le cas de l'ellipse troublée.

65. Considérons particulièrement les variations des éléments de l'orbite de m, dans le cas des orbites peu excentriques et peu inclinées les unes aux autres. Nous avons donné, dans le n° 48, la manière de développer alors R en série de sinus et de cosinus de la forme $m'k\cos(i'n't - int + A)$, k et A étant des fonctions des excentricités et des inclinaisons des orbites, des positions de leurs nœuds et de leurs périhélies, des longitudes des corps à une époque donnée, et des grands axes. Lorsque les ellipses sont variables, toutes ces quantités doivent être supposées varier conformément à ce qui précède; il faut, de plus, changer dans le terme précédent l'angle $i'n't - int$ en $i'\int n'dt - i\int n\,dt$, ou, ce qui revient au même, en $i'\zeta' - i\zeta$.

Maintenant on a, par le numéro précédent,

$$\frac{\mu}{a} = 2\int d\mathrm{R},$$

$$\zeta = \int n\,dt = \frac{3}{\mu}\iint an\,dt\,d\mathrm{R}.$$

La différence dR étant prise uniquement par rapport aux coordonnées x, y, z du corps m, on ne doit faire varier, dans le terme $m'k\cos(i'\zeta' - i\zeta + A)$ de l'expression de R, développée en série, que ce qui dépend du mouvement de ce corps; d'ailleurs, R étant une fonction finie de x, y, z, x', y', z', on peut, par le n° 63, supposer les éléments de l'orbite constants dans la différence dR; il suffit donc de faire varier ζ dans le terme précédent, et, comme la différence de ζ est $n\,dt$, on aura $im'.kn\,dt.\sin(i'\zeta' - i\zeta + A)$, pour le terme de dR qui correspond au terme précédent de R. Ainsi, en n'ayant égard qu'à

ce terme, on aura

$$\frac{1}{a} = \frac{2im'}{\mu}\int kn\,dt\sin(i'\zeta' - i\zeta + A),$$

$$\zeta = \frac{3im'}{\mu}\iint akn^2\,dt^2\sin(i'\zeta' - i\zeta + A).$$

Si l'on néglige les carrés et les produits des masses perturbatrices, on pourra, dans l'intégration de ces termes, supposer les éléments du mouvement elliptique constants, ce qui change ζ en nt, et ζ' en $n't$; d'où l'on tire

$$\frac{1}{a} = -\frac{2im'nk}{\mu(i'n' - in)}\cos(i'n't - int + A),$$

$$\zeta = -\frac{3im'an^2k}{\mu(i'n' - in)^2}\sin(i'n't - int + A).$$

On voit par là que, si $i'n' - in$ n'est pas nul, les quantités a et ζ ne renferment que des inégalités périodiques, en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice; or, i et i' étant des nombres entiers, l'équation $i'n' - in = 0$ ne peut pas avoir lieu, quand les moyens mouvements de m et de m' sont incommensurables, ce qui est le cas des planètes, et ce que l'on peut admettre généralement, puisque, n et n' étant des constantes arbitraires susceptibles de toutes les valeurs possibles, leur rapport exact de nombre à nombre est infiniment peu vraisemblable.

Nous sommes donc conduits à ce résultat remarquable, savoir, que les grands axes des orbites des planètes et leurs moyens mouvements ne sont assujettis qu'à des inégalités périodiques dépendantes de leur configuration entre elles, et qu'ainsi, en négligeant ces quantités, leurs grands axes sont constants et leurs moyens mouvements sont uniformes, résultat conforme à celui que nous avons trouvé par une autre méthode, dans le n° 54.

Si les moyens mouvements nt et $n't$, sans être exactement commensurables, approchent beaucoup d'être dans le rapport de i' à i, le diviseur $i'n' - in$ est fort petit, et il peut en résulter dans ζ et ζ' des inégalités qui, croissant avec une grande lenteur, pourront donner lieu aux observateurs de penser que les moyens mouvements des deux corps m et m' ne sont pas uniformes. Nous verrons, dans la théorie de Jupiter et de Saturne, que cela est arrivé relativement à ces deux planètes : leurs moyens mouvements sont tels que deux fois celui de Jupiter est à fort peu près égal à cinq fois celui de Saturne, en sorte que $5n' - 2n$ n'est pas la soixante-quatorzième partie de n. La petitesse de ce diviseur rend très-sensible le terme de l'expression de ζ dépendant de l'angle $5n't - 2nt$, quoiqu'il soit de l'ordre $i' - i$ ou du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, comme on l'a vu dans le n° 48. L'analyse précédente donne la partie la plus sensible de ces inégalités; car la variation de la longitude moyenne dépend de deux intégrations, tandis que les variations des autres éléments du mouvement elliptique ne dépendent que d'une seule intégration; il n'y a conséquemment que les termes de l'expression de la longitude moyenne qui puissent avoir le carré $(i'n' - in)^2$ pour diviseur; en n'ayant donc égard qu'à ces termes qui, vu la petitesse de ce diviseur, doivent être les plus considérables, il suffira, dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, d'accroître de ces termes la longitude moyenne.

Quand on a les inégalités de ce genre, que l'action de m' produit dans le moyen mouvement de m, il est facile d'en conclure les inégalités correspondantes que l'action de m produit dans le moyen mouvement de m'. En effet, si l'on n'a égard qu'à l'action mutuelle des trois corps M, m et m', la formule (7) du n° 9 donne

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \text{const.} = {} & \frac{m(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2} + \frac{m'(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}{dt^2} \\ & - \frac{(m\,dx+m'dx')^2+(m\,dy+m'dy')^2+(m\,dz+m'dz')^2}{(\mathrm{M}+m+m')\,dt^2} \\ & - \frac{2\mathrm{M}m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{2\mathrm{M}m'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - \frac{2mm'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}. \end{aligned}\right.$$

La dernière des intégrales (p) du numéro précédent donne, en y sub-

stituant pour $\frac{\mu}{a}$ l'intégrale $2\int d\mathrm{R}$,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \frac{2(\mathrm{M}+m)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 2\int d\mathrm{R}.$$

Si l'on nomme ensuite R′ ce que devient R lorsque l'on considère l'action de m sur m', on aura

$$\mathrm{R}' = \frac{m(xx'+yy'+zz')}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}},$$

$$\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2} = \frac{2(\mathrm{M}+m')}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - 2\int d'\mathrm{R}',$$

la caractéristique différentielle d' ne se rapportant qu'aux coordonnées x', y', z' du corps m'. En substituant, au lieu de $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ et de $\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}$, ces valeurs dans l'équation (a), on aura

$$\begin{aligned} m\int d\mathrm{R} + m'\int d'\mathrm{R}' = \text{const.} & - \frac{(m\,dx+m'dx')^2+(m\,dy+m'dy')^2+(m\,dz+m'dz')^2}{2(\mathrm{M}+m+m')\,dt^2} \\ & + \frac{m^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{m'^2}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - \frac{mm'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}. \end{aligned}$$

Il est visible que le second membre de cette équation ne renferme point de termes de l'ordre des carrés et des produits des masses m et m', qui aient pour diviseur $i'n' - in$; en n'ayant donc égard qu'à ces termes, on aura

$$m\int d\mathrm{R} + m'\int d'\mathrm{R}' = 0;$$

ainsi, en ne considérant que les termes qui ont pour diviseur $(i'n' - in)^2$, on aura

$$\frac{3\iint a'n'dt\,d'\mathrm{R}'}{\mathrm{M}+m'} = -\frac{m(\mathrm{M}+m)a'n'}{m'(\mathrm{M}+m')an}\,\frac{3\iint an\,dt\,d\mathrm{R}}{\mathrm{M}+m};$$

or on a

$$\zeta = \frac{3\iint an\,dt\,d\mathrm{R}}{\mathrm{M}+m}, \qquad \zeta' = \frac{3\iint a'n'dt\,d'\mathrm{R}'}{\mathrm{M}+m'};$$

on aura donc

$$m'(\mathrm{M}+m')an\zeta'+m(\mathrm{M}+m)a'n'\zeta=0.$$

On a ensuite

$$n=\frac{\sqrt{\mathrm{M}+m}}{a^{\frac{3}{2}}},\quad n'=\frac{\sqrt{\mathrm{M}+m'}}{a'^{\frac{3}{2}}};$$

en négligeant donc m et m' vis-à-vis de M, on aura

$$m\sqrt{a}.\zeta+m'\sqrt{a'}.\zeta'=0,$$

ou

$$\zeta'=-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}\zeta.$$

Ainsi les inégalités de ζ qui ont pour diviseur $(i'n'-in)^2$ feront connaitre celles de ζ' qui ont le même diviseur. Ces inégalités sont, comme l'on voit, affectées de signes contraires, si n et n' sont de même signe, ou, ce qui revient au même, si les deux corps m et m' tournent dans le même sens; elles sont d'ailleurs dans un rapport constant; d'où il suit que, si elles paraissent accélérer le moyen mouvement de m, elles paraîtront retarder celui de m' suivant la même loi, et l'accélération apparente de m sera au retardement apparent de m' comme $m'\sqrt{a'}$ est à $m\sqrt{a}$. L'accélération du moyen mouvement de Jupiter et le ralentissement de celui de Saturne, que la comparaison des observations modernes aux anciennes avait fait connaître à Halley, étant à fort peu près dans ce rapport, je conclus du théorème précédent qu'ils sont dus à l'action mutuelle de ces deux planètes, et, puisqu'il est constant que cette action ne peut produire dans les moyens mouvements aucune altération indépendante de la configuration des planètes, je ne balançai point à croire qu'il existe dans la théorie de Jupiter et de Saturne une grande inégalité périodique, d'une fort longue période. En considérant ensuite que cinq fois le moyen mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter, est à très-peu près égal à zéro, il me parut vraisemblable que le phénomène observé par Halley avait pour cause une iné-

galité dépendante de cet argument. La détermination de cette inégalité vérifia cette conjecture.

La période de l'argument $i'n't-int$ étant supposée fort longue, les éléments des orbites de m et de m' éprouvent dans cet intervalle des variations sensibles, auxquelles il est essentiel d'avoir égard dans la double intégrale $\int\int akn^2dt^2\sin(i'n't-int+\mathrm{A})$. Pour cela, nous donnerons à la fonction $k\sin(i'n't-int+\mathrm{A})$ la forme $\mathrm{Q}\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)+\mathrm{Q}'\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)$, Q et Q' étant fonctions des éléments des orbites; nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}&\int\int akn^2dt^2\sin(i'n't-int+\mathrm{A})\\&=-\frac{n^2a\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)}{(i'n'-in)^2}\left(\mathrm{Q}-\frac{2d\mathrm{Q}'}{(i'n'-in)dt}-\frac{3d^2\mathrm{Q}}{(i'n'-in)^2dt^2}+\frac{4d^3\mathrm{Q}'}{(i'n'-in)^3dt^3}+\ldots\right)\\&\quad-\frac{n^2a\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)}{(i'n'-in)^2}\left(\mathrm{Q}'+\frac{2d\mathrm{Q}}{(i'n'-in)dt}-\frac{3d^2\mathrm{Q}'}{(i'n'-in)^2dt^2}-\frac{4d^3\mathrm{Q}}{(i'n'-in)^3dt^3}+\ldots\right).\end{aligned}$$

Les termes de ces deux séries décroissant très-rapidement, vu la lenteur des variations séculaires des éléments elliptiques, on peut dans chaque série s'en tenir aux deux premiers termes. En y substituant ensuite, au lieu des éléments des orbites, leurs valeurs ordonnées par rapport aux puissances du temps, et ne conservant que sa première puissance, la double intégrale précédente pourra être transformée dans un seul terme de la forme

$$(\mathrm{F}+\mathrm{E}t)\sin(i'n't-int+\mathrm{A}+\mathrm{H}t).$$

Relativement à Jupiter et à Saturne, cette expression pourra servir pendant plusieurs siècles avant et après l'instant que l'on aura choisi pour époque.

Les grandes inégalités dont nous venons de parler en produisent de sensibles parmi les termes dépendants de la seconde puissance des masses perturbatrices. En effet, si dans la formule

$$\zeta=\frac{3im'}{\mu}\int\int akn^2dt^2\sin(i'\zeta'-i\zeta+\mathrm{A})$$

on substitue pour ζ et ζ' leurs valeurs

$$nt - \frac{3im'an^2.k}{\mu(i'n'-in)^2}\sin(i'n't - int + \mathrm{A}),$$

$$n't + \frac{3iman^2.k}{\mu(i'n'-in)^2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}}\sin(i'n't - int + \mathrm{A}),$$

il en résultera parmi les termes de l'ordre m^2 le suivant

$$-\frac{9i^2m'^2a^2n^4k^2}{8\mu^2(i'n'-in)^4}\,\frac{im'\sqrt{a'}+i'm\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}\sin 2(i'n't - int + \mathrm{A}).$$

La valeur de ζ' renferme le terme correspondant qui est au précédent dans le rapport de $m\sqrt{a}$ à $-m'\sqrt{a'}$,

$$\frac{9i^2m'^2a^2n^4k^2}{8\mu^2(i'n'-in)^4}(im'\sqrt{a'}+i'm\sqrt{a})\frac{m\sqrt{a}}{m'^2a}\sin 2(i'n't - int + \mathrm{A}).$$

66. Il peut arriver que les inégalités du moyen mouvement les plus sensibles ne se rencontrent que parmi les termes de l'ordre des carrés des masses perturbatrices. Si l'on considère trois corps m, m', m'', circulant autour de M, l'expression de dR relative aux termes de cet ordre renfermera des inégalités de la forme $k\sin(int - i'n't + i''n''t + \mathrm{A})$; or, si l'on suppose les moyens mouvements nt, $n't$, $n''t$ tels que $in - i'n' + i''n''$ soit une fraction extrêmement petite de n, il en résultera une inégalité très-sensible dans la valeur de ζ. Cette inégalité peut même rendre rigoureusement nulle la quantité $in - i'n' + i''n''$, et établir ainsi une équation de condition entre les moyens mouvements et les longitudes moyennes des trois corps m, m', m''. Ce cas très-singulier ayant lieu dans le système des satellites de Jupiter, nous allons en développer l'analyse.

Si l'on prend M pour unité de masse, et si l'on néglige m, m', m'' vis-à-vis de M, on aura

$$n^2 = \frac{1}{a^3}, \quad n'^2 = \frac{1}{a'^3}, \quad n''^2 = \frac{1}{a''^3}.$$

On a ensuite

$$d\zeta = n\,dt, \quad d\zeta = n'dt, \quad d\zeta'' = n''dt;$$

partant,

$$\frac{d^2\zeta}{dt} = -\tfrac{3}{2}n^{\frac{1}{3}}\frac{da}{a^2}, \qquad \frac{d^2\zeta'}{dt} = -\tfrac{3}{2}n'^{\frac{1}{3}}\frac{da'}{a'^2}, \qquad \frac{d^2\zeta''}{dt} = -\tfrac{3}{2}n''^{\frac{1}{3}}\frac{da''}{a''^2}.$$

On a vu dans le n° 61 que, si l'on n'a égard qu'aux inégalités qui ont de très-longues périodes, on a

$$\text{const.} = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''},$$

ce qui donne

$$0 = m\frac{da}{a^2} + m'\frac{da'}{a'^2} + m''\frac{da''}{a''^2}.$$

On a vu dans le même numéro que, si l'on néglige les carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, on a

$$\text{const.} = m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + m''\sqrt{a''},$$

ce qui donne

$$0 = m\frac{da}{\sqrt{a}} + m'\frac{da'}{\sqrt{a'}} + m''\frac{da''}{\sqrt{a''}}.$$

De ces diverses équations il est aisé de conclure

$$\frac{d^2\zeta}{dt} = -\tfrac{3}{2}n^{\frac{1}{3}}\frac{da}{a^2},$$

$$\frac{d^2\zeta'}{dt} = \tfrac{3}{2}\frac{mn'^{\frac{4}{3}}}{m'n}\,\frac{n-n''}{n'-n''}\,\frac{da}{a^2},$$

$$\frac{d^2\zeta''}{dt} = -\tfrac{3}{2}\frac{mn''^{\frac{4}{3}}}{m''n}\,\frac{n-n'}{n'-n''}\,\frac{da}{a^2}.$$

Enfin l'équation $\frac{\mu}{a} = 2\int d\mathrm{R}$ du n° 64 donne

$$-\frac{da}{a^2} = 2\,d\mathrm{R}.$$

Il ne s'agit donc plus que de déterminer dR.

On a par le n° 46, en négligeant les carrés et les produits des inclinaisons des orbites,

$$\begin{aligned}R = {} & \frac{m'r}{r'^2}\cos(v'-v) - m'\left[r^2 - 2rr'\cos(v'-v) + r'^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ & + \frac{m''r}{r''^2}\cos(v''-v) - m''\left[r^2 - 2rr''\cos(v''-v) + r''^2\right]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Si l'on développe cette fonction dans une série ordonnée par rapport aux cosinus de $v'-v$, de $v''-v$ et de leurs multiples, on aura une expression de cette forme

$$\begin{aligned}R = {} & \frac{m'}{2}(r, r')^{(0)} + m'(r, r')^{(1)}\cos(v'-v) + m'(r, r')^{(2)}\cos 2(v'-v) + m'(r, r')^{(3)}\cos 3(v'-v) + \ldots \\ & + \frac{m''}{2}(r, r'')^{(0)} + m''(r, r'')^{(1)}\cos(v''-v) + m''(r, r'')^{(2)}\cos 2(v''-v) + m''(r, r'')^{(3)}\cos 3(v''-v) + \ldots,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}dR = dr\Big[& \frac{m'}{2}\frac{\partial(r, r')^{(0)}}{\partial r} + m'\frac{\partial(r, r')^{(1)}}{\partial r}\cos(v'-v) + m'\frac{\partial(r, r')^{(2)}}{\partial r}\cos 2(v'-v) + \ldots \\ & + \frac{m''}{2}\frac{\partial(r, r'')^{(0)}}{\partial r} + m''\frac{\partial(r, r'')^{(1)}}{\partial r}\cos(v''-v) + m''\frac{\partial(r, r'')^{(2)}}{\partial r}\cos 2(v''-v) + \ldots\Big] \\ & + dv\big[m'(r, r')^{(1)}\sin(v'-v) + 2m'(r, r')^{(2)}\sin 2(v'-v) + \ldots \\ & + m''(r, r'')^{(1)}\sin(v''-v) + 2m''(r, r'')^{(2)}\sin 2(v''-v) + \ldots\big].\end{aligned}$$

Supposons, conformément à ce que les observations indiquent dans le système des trois premiers satellites de Jupiter, que $n-2n'$ et $n'-2n''$ soient des fractions très-petites de n, et que leur différence $(n-2n')-(n'-2n'')$ ou $n-3n'+2n''$ soit incomparablement plus petite que chacune d'elles. Il résulte des expressions de $\frac{\delta r}{a}$ et de δv du n° 50 que l'action de m' produit dans le rayon vecteur et dans la longitude de m une inégalité très-sensible, dépendant de l'argument $2(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$. Les termes relatifs à cette inégalité ont pour diviseur $4(n'-n)^2-n^2$ ou $(n-2n')(3n-2n')$, et ce diviseur est très-petit, à raison de la petitesse du facteur $n-2n'$. On voit encore, par la considération des mêmes expressions, que l'action de m

produit dans le rayon vecteur et dans la longitude de m' une inégalité dépendante de l'argument $n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon$, et qui, ayant pour diviseur $(n'-n)^2-n'^2$ ou $n(n-2n')$, est fort sensible. On voit pareillement que l'action de m'' sur m' produit dans les mêmes quantités une inégalité considérable, dépendant de l'argument $2(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon')$. Enfin on voit que l'action de m' produit dans le rayon vecteur et dans la longitude de m'' une inégalité considérable, dépendant de l'argument $n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon'$. Ces inégalités ont été reconnues d'abord par les observations; nous les développerons avec étendue dans la théorie des satellites de Jupiter; leur grandeur par rapport aux autres inégalités permet de négliger celles-ci dans la question présente. Nous supposerons donc

$$\begin{aligned}\delta r &= m'E'\cos 2(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon), \\ \delta v &= m'F'\sin 2(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon), \\ \delta r' &= m''E''\cos 2(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') + mG\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon), \\ \delta v' &= m''F''\sin 2(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') + mH\sin(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon), \\ \delta r'' &= m'G'\cos(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon'), \\ \delta v'' &= m'H'\sin(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon').\end{aligned}$$

Il faut maintenant substituer dans l'expression précédente de dR, au lieu de r, v, r', v', r'', v'', les valeurs de $a+\delta r$, $nt+\varepsilon+\delta v$, $a'+\delta r'$, $n't+\varepsilon'+\delta v'$, $a''+\delta r''$, $n''t+\varepsilon''+\delta v''$, et ne conserver que les termes dépendants de l'argument $nt-3n't+2n''t+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon''$; or il est facile de voir que la substitution des valeurs de δr, δv, $\delta r''$, $\delta v''$ ne peut produire aucun terme semblable. Il n'en est pas ainsi de la substitution des valeurs de $\delta r'$ et de $\delta v'$; le terme $m'(r, r')^{(1)}dv\sin(v'-v)$ de l'expression de dR produit la quantité suivante

$$-\frac{m'm''n\,dt}{2}\left[E''\frac{\partial(a, a')^{(1)}}{\partial a'} - F''(a, a')^{(1)}\right]\sin(nt-3n't+2n''t+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon'');$$

c'est la seule quantité de ce genre que renferme l'expression de dR. Les expressions de $\frac{\delta r}{a}$ et de δv du n° 50, appliquées à l'action de m''

sur m', donnent, en ne conservant que les termes qui ont $n'-2n''$ pour diviseur, et en observant que n'' est à très-peu près égal à $\frac{1}{2}n'$,

$$\frac{E''}{a'} = n'^2\,\frac{a'^2\,\dfrac{\partial(a',a'')^{(2)}}{\partial a'} + \dfrac{2n'}{n'-n''}\,a'(a',a'')^{(2)}}{(n'-2n'')(3n'-2n'')},$$

$$F'' = \frac{2E''}{a'};$$

on aura donc

$$dR = \frac{m'm''n\,dt}{2}\,E''\left(\frac{2(a,a')^{(1)}}{a'} - \frac{\partial(a,a')^{(1)}}{\partial a'}\right)\sin(nt-3n't+2n''t+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon'') = -\frac{1}{2}\,\frac{da}{a^2}.$$

En substituant cette valeur de $\frac{da}{a^2}$ dans les valeurs de $\frac{d^2\zeta}{dt}$, $\frac{d^2\zeta'}{dt}$ et $\frac{d^2\zeta''}{dt}$, et faisant, pour abréger,

$$\beta = \tfrac{3}{2}E''\left[2(a,a')^{(1)} - a'\,\frac{\partial(a,a')^{(1)}}{\partial a'}\right]\left(\frac{a}{a'}\,m'm'' + \frac{9}{4}\,mm'' + \frac{a''}{4a'}\,mm'\right),$$

on aura, à cause de n à très-peu près égal à $2n'$, et de n' à très-peu près égal à $2n''$,

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - 3\,\frac{d^2\zeta'}{dt^2} + 2\,\frac{d^2\zeta''}{dt^2} = \beta n^2\sin(nt-3n't+2n''t+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon''),$$

ou, plus exactement,

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - 3\,\frac{d^2\zeta'}{dt^2} + 2\,\frac{d^2\zeta''}{dt^2} = \beta n^2\sin(\zeta-3\zeta'+2\zeta''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon''),$$

en sorte que, si l'on suppose

$$V = \zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'',$$

on aura

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \beta n^2\sin V.$$

Les moyennes distances a, a', a'' variant très-peu, ainsi que la quan-

tité n, on peut, dans cette équation, considérer βn^2 comme une quantité constante. En l'intégrant, on a

$$dt = \frac{\pm\,dV}{\sqrt{c - 2\beta n^2\cos V}},$$

c étant une constante arbitraire. Les différentes valeurs dont cette constante est susceptible donnent lieu aux trois cas suivants.

Si c est positif et plus grand que $\pm 2\beta n^2$, l'angle V croîtra sans cesse, et cela doit arriver si, à l'origine du mouvement, $(n-3n'+2n'')^2$ est plus grand que $\pm 2\beta n^2(1 \mp \cos V)$, les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu suivant que β est positif ou négatif. Il est facile de s'assurer, et nous le ferons voir particulièrement dans la théorie des satellites de Jupiter, que β est une quantité positive relativement aux trois premiers satellites de Jupiter; en supposant donc $\mp\varpi = \pi - V$, π étant la demi-circonférence, on aura

$$dt = \frac{d\varpi}{\sqrt{c + 2\beta n^2\cos\varpi}}.$$

Dans l'intervalle depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \frac{\pi}{2}$, le radical $\sqrt{c + 2\beta n^2\cos\varpi}$ est plus grand que $\sqrt{2\beta n^2}$, lorsque c est égal ou plus grand que $2\beta n^2$; on a donc, dans cet intervalle, $\varpi > nt\sqrt{2\beta}$; ainsi le temps t, que l'angle ϖ emploie à parvenir de zéro à l'angle droit, est moindre que $\frac{\pi}{2n\sqrt{2\beta}}$. La valeur de β dépend des masses m, m', m''; les inégalités observées dans les mouvements des trois premiers satellites de Jupiter, et dont nous avons parlé ci-dessus, donnent entre leurs masses et celle de Jupiter des rapports d'où il résulte que $\frac{\pi}{2n\sqrt{2\beta}}$ est au-dessous de deux années, comme on le verra dans la théorie de ces satellites; ainsi l'angle ϖ emploierait moins de deux ans à parvenir de zéro à l'angle droit; or les observations des satellites de Jupiter donnent, depuis leur découverte, ϖ constamment nul ou insensible; le cas que nous examinons n'est donc point celui des trois premiers satellites de Jupiter.

Si la constante c est moindre que $\pm 2\beta n^2$, l'angle V ne fera qu'osciller; il n'atteindra jamais deux angles droits, si β est négatif, parce qu'alors le radical $\sqrt{c - 2\beta n^2 \cos V}$ deviendrait imaginaire; il ne sera jamais nul, si β est positif. Dans le premier cas, sa valeur sera alternativement plus grande et plus petite que zéro; dans le second cas, elle sera alternativement plus grande et plus petite que deux angles droits. Toutes les observations des trois premiers satellites de Jupiter nous prouvent que ce second cas est celui de ces astres; ainsi la valeur de β doit être positive relativement à eux; et, comme la théorie de la pesanteur donne β positif, on peut regarder ce phénomène comme une nouvelle confirmation de cette théorie.

Reprenons l'équation

$$dt = \frac{d\varpi}{\sqrt{c + 2\beta n^2 \cos\varpi}}.$$

L'angle ϖ étant toujours très-petit, suivant les observations, nous pouvons supposer $\cos\varpi = 1 - \frac{1}{2}\varpi^2$; l'équation précédente donnera, en l'intégrant,

$$\varpi = \lambda \sin(nt\sqrt{\beta} + \gamma)$$

λ et γ étant deux constantes arbitraires, que l'observation peut seule déterminer. Jusqu'ici elle n'a point fait reconnaître cette inégalité, ce qui prouve qu'elle est très-petite.

De l'analyse précédente résultent les conséquences suivantes. Puisque l'angle $nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$ ne fait qu'osciller de part et d'autre de deux angles droits, sa valeur moyenne est égale à deux angles droits; on aura donc, en n'ayant égard qu'aux quantités moyennes, $n - 3n' + 2n'' = 0$; c'est-à-dire que *le moyen mouvement du premier satellite, moins trois fois celui du second, plus deux fois celui du troisième, est exactement et constamment égal à zéro*. Il n'est pas nécessaire que cette égalité ait eu lieu exactement à l'origine, ce qui serait infiniment peu vraisemblable; il suffit qu'elle ait été fort approchée, et que $n - 3n' + 2n''$ ait été moindre, abstraction faite du signe, que $\lambda n\sqrt{\beta}$, et alors, l'attraction mutuelle des trois satellites a suffi pour rendre cette égalité rigoureuse.

On a ensuite $\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$ égal à deux angles droits; ainsi la *longitude moyenne du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement et constamment égale à deux angles droits*. En vertu de ce théorème, les valeurs précédentes de $\delta r'$ et de $\delta v'$ se réduisent aux suivantes :

$$\delta r' = (mG - m''E'')\cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon),$$
$$\delta v' = (mH - m''F'')\sin(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Les deux inégalités du mouvement de m', dues aux actions de m et de m'', se confondent par conséquent dans une seule, et seront constamment réunies. Il résulte encore du même théorème que ces trois premiers satellites ne peuvent jamais être éclipsés à la fois; ils ne peuvent être ensemble vus de Jupiter, ni en opposition, ni en conjonction avec le Soleil; car les théorèmes précédents ont également lieu par rapport aux moyens mouvements synodiques et aux longitudes moyennes synodiques des trois satellites, comme il est facile de s'en assurer. Ces deux théorèmes subsistent malgré les altérations que les moyens mouvements des satellites reçoivent, soit par une cause semblable à celle qui altère le moyen mouvement de la Lune, soit par la résistance d'un milieu très-rare. Il est clair que ces diverses causes ne font qu'ajouter à la valeur de $\frac{d^2V}{dt^2}$ une quantité de la forme $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ et qui ne peut devenir sensible que par les intégrations; en supposant donc $V = \pi - \varpi$, et ϖ très-petit, l'équation différentielle en V deviendra

$$0 = \frac{d^2\varpi}{dt^2} + \beta n^2\varpi + \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

La période de l'angle $nt\sqrt{\beta}$ étant d'un très-petit nombre d'années, tandis que les quantités renfermées dans $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ sont ou constantes, ou embrassent plusieurs siècles, on aura à très-peu près, en intégrant l'équation précédente,

$$\varpi = \lambda \sin(nt\sqrt{\beta} + \gamma) - \frac{d^2\psi}{\beta n^2 dt^2}.$$

Ainsi la valeur de ϖ sera toujours très-petite, et les équations séculaires des moyens mouvements des trois premiers satellites seront toujours coordonnées par l'action mutuelle de ces astres, de manière que l'équation séculaire du premier, plus deux fois celle du troisième, soit égale à trois fois celle du second.

Les théorèmes précédents donnent entre les six constantes n, n', n'', ε, ε', ε'' deux équations de condition, qui réduisent ces arbitraires à quatre; mais les deux arbitraires λ et γ de la valeur de ϖ les remplacent. Cette valeur se distribue entre les trois satellites, de manière qu'en nommant p, p', p'' les coefficients de $\sin(nt\sqrt{6}+\gamma)$ dans les expressions de v, v', v'', ces coefficients sont dans le rapport des valeurs précédentes de $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta'}{dt^2}$ et $\frac{d^2\zeta''}{dt^2}$, et de plus on a $p-3p'+2p''=\lambda$. De là résulte, dans les moyens mouvements des trois premiers satellites de Jupiter, une inégalité qui ne diffère pour chacun d'eux que par son coefficient, et qui forme dans ces mouvements une espèce de libration dont l'étendue est arbitraire. Les observations ont fait voir qu'elle est insensible.

67. Considérons présentement les variations des excentricités et des périhélies des orbites. Pour cela, reprenons les expressions de df, df', df'', trouvées dans le n° 64; en nommant r le rayon vecteur de m, projeté sur le plan des x et des y, v l'angle que cette projection fait avec l'axe des x, et s la tangente de la latitude de m au-dessus du même plan, on aura

$$x=r\cos v,\quad y=r\sin v,\quad z=rs,$$

d'où il est facile de conclure

$$x\frac{\partial R}{\partial y}-y\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial v},$$

$$x\frac{\partial R}{\partial z}-z\frac{\partial R}{\partial x}=(1+s^2)\cos v\frac{\partial R}{\partial s}-rs\cos v\frac{\partial R}{\partial r}+s\sin v\frac{\partial R}{\partial v},$$

$$y\frac{\partial R}{\partial z}-z\frac{\partial R}{\partial y}=(1+s^2)\sin v\frac{\partial R}{\partial s}-rs\sin v\frac{\partial R}{\partial r}-s\cos v\frac{\partial R}{\partial v}.$$

On a de plus, par le n° 64,

$$x\,dy-y\,dx=c\,dt,\quad x\,dz-z\,dx=c'dt,\quad y\,dz-z\,dy=c''dt;$$

les équations différentielles en f, f', f'' deviendront ainsi

$$\begin{aligned}df={}&-dy\frac{\partial R}{\partial v}-dz\left[(1+s^2)\cos v\frac{\partial R}{\partial s}-rs\cos v\frac{\partial R}{\partial r}+s\sin v\frac{\partial R}{\partial v}\right]\\&-c\,dt\left(\sin v\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\cos v}{r}\frac{\partial R}{\partial v}-\frac{s\sin v}{r}\frac{\partial R}{\partial s}\right)-\frac{c'dt}{r}\frac{\partial R}{\partial s},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}df'={}&dx\frac{\partial R}{\partial v}-dz\left[(1+s^2)\sin v\frac{\partial R}{\partial s}-rs\sin v\frac{\partial R}{\partial r}-s\cos v\frac{\partial R}{\partial v}\right]\\&+c\,dt\left(\cos v\frac{\partial R}{\partial r}-\frac{\sin v}{r}\frac{\partial R}{\partial v}-\frac{s\cos v}{r}\frac{\partial R}{\partial s}\right)-\frac{c''dt}{r}\frac{\partial R}{\partial s},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}df''={}&dx\left[(1+s^2)\cos v\frac{\partial R}{\partial s}-rs\cos v\frac{\partial R}{\partial r}+s\sin v\frac{\partial R}{\partial v}\right]\\&+dy\left[(1+s^2)\sin v\frac{\partial R}{\partial s}-rs\sin v\frac{\partial R}{\partial r}-s\cos v\frac{\partial R}{\partial v}\right]\\&+c'dt\left(\cos v\frac{\partial R}{\partial r}-\frac{\sin v}{r}\frac{\partial R}{\partial v}-\frac{s\cos v}{r}\frac{\partial R}{\partial s}\right)\\&+c''dt\left(\sin v\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\cos v}{r}\frac{\partial R}{\partial v}-\frac{s\sin v}{r}\frac{\partial R}{\partial s}\right).\end{aligned}$$

Les quantités c', c'' dépendent, comme on l'a vu dans le n° 64, de l'inclinaison de l'orbite de m sur le plan fixe, en sorte que ces quantités se réduiraient à zéro, si cette inclinaison était nulle; d'ailleurs, il est aisé de voir, par la nature de R, que $\frac{\partial R}{\partial s}$ est de l'ordre des inclinaisons des orbites; en négligeant donc les carrés et les produits de ces inclinaisons, les expressions précédentes de df et de df' deviendront

$$df=-dy\frac{\partial R}{\partial v}-c\,dt\left(\sin v\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\cos v}{r}\frac{\partial R}{\partial v}\right),$$

$$df'=dx\frac{\partial R}{\partial v}+c\,dt\left(\cos v\frac{\partial R}{\partial r}-\frac{\sin v}{r}\frac{\partial R}{\partial v}\right);$$

or on a

$$dx=d(r\cos v),\quad dy=d(r\sin v),\quad c\,dt=x\,dy-y\,dx=r^2dv;$$

on aura donc

$$df = -(dr\sin v + 2r\,dv\cos v)\frac{\partial R}{\partial v} - r^2\,dv\sin v\frac{\partial R}{\partial r},$$

$$df' = \quad (dr\cos v - 2r\,dv\sin v)\frac{\partial R}{\partial v} + r^2\,dv\cos v\frac{\partial R}{\partial r}.$$

Ces équations seront plus exactes, si l'on prend pour plan fixe des x et des y celui de l'orbite de m à une époque donnée; car alors c', c'' et s sont de l'ordre des forces perturbatrices; ainsi les quantités que l'on néglige sont de l'ordre des carrés des forces perturbatrices multipliés par le carré de l'inclinaison respective des deux orbites de m et de m'.

Les valeurs de r, dr, dv, $\frac{\partial R}{\partial r}$, $\frac{\partial R}{\partial v}$ restent visiblement les mêmes, quelle que soit la position du point d'où l'on compte les longitudes: mais, en diminuant v d'un angle droit, $\sin v$ se change dans $-\cos v$, et $\cos v$ se change dans $\sin v$; l'expression de df se change, par conséquent, dans celle de df'; d'où il suit qu'ayant développé la valeur de df dans une suite de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, on aura la valeur de df' en diminuant dans la première les angles ε, ε', ϖ, ϖ', θ et θ' d'un angle droit.

Les quantités f et f' déterminent la position du périhélie et l'excentricité de l'orbite; en effet, on a vu dans le n° 64 que

$$\operatorname{tang} I = \frac{f'}{f},$$

I étant la longitude du périhélie, rapportée au plan fixe. Lorsque ce plan est celui de l'orbite primitive de m, on a, aux quantités près de l'ordre des carrés des forces perturbatrices multipliés par le carré de l'inclinaison respective des orbites, $I = \varpi$, ϖ étant la longitude du périhélie sur l'orbite; on aura donc alors

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{f'}{f},$$

ce qui donne

$$\sin\varpi = \frac{f'}{\sqrt{f^2+f'^2}}, \quad \cos\varpi = \frac{f}{\sqrt{f^2+f'^2}}.$$

On a ensuite, par le n° 64,

$$\mu e = \sqrt{f^2+f'^2+f''^2}, \quad f'' = \frac{f'c'-fc''}{c};$$

ainsi, c' et c'' étant, dans la supposition précédente, de l'ordre des forces perturbatrices, f'' est du même ordre, et, en négligeant les termes de l'ordre du carré de ces forces, on aura $\mu e = \sqrt{f^2+f'^2}$. Si l'on substitue, au lieu de $\sqrt{f^2+f'^2}$, sa valeur μe dans les expressions de $\sin\varpi$ et de $\cos\varpi$, on aura

$$\mu e\sin\varpi = f', \quad \mu e\cos\varpi = f;$$

ces deux équations détermineront l'excentricité et la position du périhélie, et l'on en tirera facilement

$$\mu^2 e\,de = f\,df + f'\,df', \quad \mu^2 e^2\,d\varpi = f\,df' - f'\,df.$$

En prenant pour le plan des x et des y celui de l'orbite de m, on a, par les n°s 19 et 20, dans le cas des ellipses invariables,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}, \quad dr = \frac{r^2\,dv.e\sin(v-\varpi)}{a(1-e^2)},$$

$$r^2\,dv = a^2 n\,dt.\sqrt{1-e^2},$$

et, par le n° 63, ces équations subsistent encore dans le cas des ellipses variables; les expressions de df et de df' deviendront ainsi

$$df = -\frac{an\,dt}{\sqrt{1-e^2}}\left[2\cos v + \tfrac{3}{2}e\cos\varpi + \tfrac{1}{2}e\cos(2v-\varpi)\right]\frac{\partial R}{\partial v} - a^2 n\,dt\sqrt{1-e^2}\sin v\frac{\partial R}{\partial r},$$

$$df' = -\frac{an\,dt}{\sqrt{1-e^2}}\left[2\sin v + \tfrac{3}{2}e\sin\varpi + \tfrac{1}{2}e\sin(2v-\varpi)\right]\frac{\partial R}{\partial v} + a^2 n\,dt\sqrt{1-e^2}\cos v\frac{\partial R}{\partial r};$$

partant

$$e\,d\varpi = -\frac{an\,dt}{\mu\sqrt{1-e^2}}\sin(v-\varpi)\left[2+e\cos(v-\varpi)\right]\frac{\partial R}{\partial v} + \frac{a^2 n\,dt\sqrt{1-e^2}}{\mu}\cos(v-\varpi)\frac{\partial R}{\partial r},$$

$$de = -\frac{an\,dt}{\mu\sqrt{1-e^2}}\left[2\cos(v-\varpi) + e + e\cos^2(v-\varpi)\right]\frac{\partial R}{\partial v} - \frac{a^2 n\,dt}{\mu}\sqrt{1-e^2}\sin(v-\varpi)\frac{\partial R}{\partial r}.$$

Cette expression de de peut être mise sous une forme plus commode dans quelques circonstances. Pour cela, nous observerons que $dr\frac{\partial R}{\partial r} = dR - dv\frac{\partial R}{\partial v}$; en substituant pour r et dr leurs valeurs précédentes, on aura

$$r^2 dv.e\sin(v-\varpi)\frac{\partial R}{\partial r} = a(1-e^2)\,dR - a(1-e^2)\,dv\frac{\partial R}{\partial v};$$

or on a

$$r^2 dv = a^2 n\,dt\sqrt{1-e^2}, \qquad dv = \frac{n\,dt[1+e\cos(v-\varpi)]^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}};$$

partant

$$a^2 n\,dt\sqrt{1-e^2}\sin(v-\varpi)\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{a(1-e^2)}{e}\,dR - \frac{an\,dt}{e\sqrt{1-e^2}}[1+e\cos(v-\varpi)]^2\frac{\partial R}{\partial v};$$

l'expression précédente de de donnera ainsi

$$e\,de = \frac{an\,dt\sqrt{1-e^2}}{\mu}\frac{\partial R}{\partial v} - \frac{a(1-e^2)}{\mu}\,dR.$$

On peut parvenir fort simplement à cette formule, de la manière suivante. On a, par le n° 64,

$$\frac{dc}{dt} = y\frac{\partial R}{\partial x} - x\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial v};$$

mais on a, par le même numéro, $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, ce qui donne

$$dc = \frac{da\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{2a} - \frac{e\,de\sqrt{\mu a}}{\sqrt{1-e^2}};$$

partant

$$e\,de = \frac{an\,dt\sqrt{1-e^2}}{\mu}\frac{\partial R}{\partial v} + a(1-e^2)\frac{da}{2a^2};$$

on a ensuite, par le n° 64,

$$\frac{\mu\,da}{2a^2} = -dR;$$

on aura ainsi pour $e\,de$ la même expression que ci-dessus.

68. Nous avons vu dans le n° 65 que, si l'on néglige les carrés des forces perturbatrices, les variations du grand axe et du moyen mouvement ne renferment que des quantités périodiques dépendantes de la configuration des corps m, m', m'',... entre eux. Il n'en est pas ainsi des variations des excentricités et des inclinaisons : leurs expressions différentielles contiennent des termes indépendants de cette configuration, et qui, s'ils étaient rigoureusement constants, produiraient, par l'intégration, des termes proportionnels au temps, qui rendraient à la longue les orbites fort excentriques et très-inclinées les unes aux autres; ainsi, les approximations précédentes, fondées sur le peu d'excentricité et d'inclinaison respective des orbites, deviendraient insuffisantes et même fautives. Mais les termes constants en apparence, qui entrent dans les expressions différentielles des excentricités et des inclinaisons, sont fonctions des éléments des orbites, en sorte qu'ils varient avec une extrême lenteur, à raison des changements qu'ils y introduisent. On conçoit qu'il doit en résulter, dans ces éléments, des inégalités considérables, indépendantes de la configuration mutuelle des corps du système, et dont les périodes dépendent des rapports des masses m, m',... à la masse M. Ces inégalités sont celles que nous avons nommées précédemment *inégalités séculaires*, et que nous avons considérées dans le Chapitre VII. Pour les déterminer par cette méthode, reprenons la valeur de df du numéro précédent,

$$df = -\frac{an\,dt}{\sqrt{1-e^2}}\left[2\cos v + \tfrac{3}{2}e\cos\varpi + \tfrac{1}{2}e\cos(2v-\varpi)\right]\frac{\partial R}{\partial v} - a^2 n\,dt\sqrt{1-e^2}\sin v\frac{\partial R}{\partial r}.$$

Nous négligerons dans le développement de cette équation les carrés et les produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, et parmi les termes dépendants des excentricités et des inclinaisons, nous ne conserverons que ceux qui sont constants; nous supposerons ensuite, comme dans le n° 48,

$$r = a(1+u_{,}), \qquad r' = a'(1+u'_{,}),$$
$$v = nt+\varepsilon+v_{,}, \qquad v' = n't+\varepsilon'+v'_{,}.$$

Cela posé, si l'on substitue pour R sa valeur trouvée dans le n° **48**; si l'on considère ensuite que l'on a, par le même numéro,

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{a}{r}\,\frac{\partial R}{\partial a} = (1 - u_{,})\,\frac{\partial R}{\partial a};$$

enfin, si l'on substitue, au lieu de $u_{,}$, $u'_{,}$, v, et $v'_{,}$, leurs valeurs

$$\begin{aligned} &-e\cos(nt+\varepsilon-\varpi), &\quad& -e'\cos(n't+\varepsilon'-\varpi'),\\ &2e\sin(nt+\varepsilon-\varpi), && 2e'\sin(n't+\varepsilon'-\varpi'),\end{aligned}$$

données par le n° **22**, en ne conservant que les termes constants parmi ceux qui dépendent de la première puissance des excentricités des orbites, et en négligeant les carrés des excentricités et des inclinaisons, on trouvera

$$\begin{aligned} df = {} & \frac{am'n\,dt}{2}\,e\sin\varpi\left(a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\\ & + am'n\,dt.e'\sin\varpi'\left(A^{(1)} + \tfrac{1}{2}a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a'\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a'} + \tfrac{1}{4}aa'\frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial a\,\partial a'}\right)\\ & - am'n\,dt.\Sigma\left(iA^{(i)} + \tfrac{1}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon],\end{aligned}$$

le signe intégral Σ s'étendant dans cette expression, comme dans la valeur de R du n° **48**, à toutes les valeurs entières positives et négatives de i, en y comprenant même la valeur $i = 0$.

On aura, par le numéro précédent, la valeur de df', en diminuant dans celle de df les angles ε, ε', ϖ et ϖ' d'un angle droit; d'où l'on tire

$$\begin{aligned} df' = {} & -\frac{am'n\,dt}{2}\,e\cos\varpi\left(a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\\ & - am'n\,dt.e'\cos\varpi'\left(A^{(1)} + \tfrac{1}{2}a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a'\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a'} + \tfrac{1}{4}aa'\frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial a\,\partial a'}\right)\\ & + am'n\,dt.\Sigma\left(iA^{(i)} + \tfrac{1}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon].\end{aligned}$$

Nommons, pour abréger, X la partie de l'expression de df renfermée sous le signe Σ, et Y la partie de l'expression de df' renfermée sous

le même signe. Faisons de plus, comme dans le n° **55**,

$$\begin{aligned} (0,1) &= -\frac{m'n}{2}\left(a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 A^{(0)}}{\partial a^2}\right),\\ \boxed{0,1} &= \frac{m'n}{2}\left(aA^{(1)} - a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial a^2}\right).\end{aligned}$$

Observons ensuite que le coefficient de $e'dt\sin\varpi'$, dans l'expression de df, se réduit à $\boxed{0,1}$, lorsque l'on y substitue, au lieu des différences partielles de $A^{(1)}$ en a', leurs valeurs en différences partielles relatives à a; enfin, supposons, comme dans le n° **50**,

$$\begin{aligned} e\sin\varpi &= h, &\quad e'\sin\varpi' &= h',\\ e\cos\varpi &= l, & e'\cos\varpi' &= l',\end{aligned}$$

ce qui donne, par le numéro précédent, $f = \mu l$, $f' = \mu h$, ou simplement $f = l$, $f' = h$, en prenant pour unité de masse M, et négligeant m eu égard à M; nous aurons

$$\frac{dh}{dt} = (0,1)\,l - \boxed{0,1}\,l' + am'nY, \qquad \frac{dl}{dt} = -(0,1)\,h + \boxed{0,1}\,h' - am'nX.$$

De là il est aisé de conclure que, si l'on nomme (Y) la somme des termes analogues à $am'nY$, dus à l'action de chacun des corps m', m'', ... sur m; si l'on nomme pareillement (X) la somme des termes analogues à $-am'nX$, dus aux mêmes actions; enfin, si l'on marque successivement d'un trait, de deux traits, etc., ce que deviennent les quantités (X), (Y), h et l, relativement aux corps m', m'', ..., on aura le système suivant d'équations différentielles,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= [(0,1) + (0,2) + \ldots]\,l - \boxed{0,1}\,l' - \boxed{0,2}\,l'' - \ldots + (Y),\\ \frac{dl}{dt} &= -[(0,1) + (0,2) + \ldots]\,h + \boxed{0,1}\,h' + \boxed{0,2}\,h'' + \ldots + (X),\\ \frac{dh'}{dt} &= [(1,0) + (1,2) + \ldots]\,l' - \boxed{1,0}\,l - \boxed{1,2}\,l'' - \ldots + (Y'),\\ \frac{dl'}{dt} &= -[(1,0) + (1,2) + \ldots]\,h' + \boxed{1,0}\,h + \boxed{1,2}\,h'' + \ldots + (X'),\end{aligned}$$

....

Pour intégrer ces équations, nous observerons que chacune des quantités h, l, h', l',... est formée de deux parties : l'une dépendante de la configuration mutuelle des corps m, m', ..., l'autre indépendante de cette configuration, et qui renferme les variations séculaires de ces quantités. On aura la première partie en considérant que, si l'on n'a égard qu'à elle seule, h, l, h', l',... sont de l'ordre des masses perturbatrices, et par conséquent $(0,1)h$, $(0,1)l$,... sont de l'ordre des carrés de ces masses; en négligeant donc les quantités de cet ordre, on aura

$$\frac{dh}{dt}=(\mathrm{Y}),\qquad \frac{dl}{dt}=(\mathrm{X}),$$
$$\frac{dh'}{dt}=(\mathrm{Y}'),\qquad \frac{dl'}{dt}=(\mathrm{X}'),$$
$$\ldots\ldots\ldots,\qquad \ldots\ldots\ldots;$$

partant

$$h=\int(\mathrm{Y})\,dt,\quad l=\int(\mathrm{X})\,dt,\quad h'=\int(\mathrm{Y}')\,dt,\quad \ldots.$$

Si l'on prend ces intégrales, en n'ayant point égard à la variabilité des éléments des orbites, et que l'on nomme Q ce que devient alors $\int(\mathrm{Y})\,dt$; en nommant $\delta\mathrm{Q}$ la variation de Q due à celle des éléments, on aura

$$\int(\mathrm{Y})\,dt=\mathrm{Q}-\int\delta\mathrm{Q};$$

or, Q étant de l'ordre des masses perturbatrices, et les variations des éléments des orbites étant du même ordre, $\delta\mathrm{Q}$ est de l'ordre des carrés de ces masses; ainsi, en négligeant les quantités de cet ordre, on aura

$$\int(\mathrm{Y})\,dt=\mathrm{Q}.$$

On peut donc prendre les intégrales $\int(\mathrm{Y})\,dt$, $\int(\mathrm{X})\,dt$, $\int(\mathrm{Y}')\,dt$, ..., en supposant les éléments des orbites constants, et regarder ensuite ces éléments comme variables dans les intégrales; on aura ainsi d'une manière fort simple les parties périodiques des expressions de h, l, h', ...

Pour avoir les parties de ces expressions qui renferment les inégalités séculaires, on observera qu'elles sont données par l'intégration des équations différentielles précédentes privées de leurs derniers termes (Y), (X), ...; car il est clair que la substitution des parties périodiques

de h, l, h',... en fera disparaître ces termes. Mais, en privant ces équations de leurs derniers termes, elles retombent dans les équations différentielles (A) du n° 55, que nous avons considérées précédemment avec beaucoup d'étendue.

69. Nous avons observé dans le n° 65 que, si les moyens mouvements nt et $n't$ des deux corps m et m' sont à fort peu près dans le rapport de i' à i, en sorte que $i'n'-in$ soit une très-petite quantité, il peut en résulter dans les moyens mouvements de ces corps des inégalités fort sensibles. Ce rapport des moyens mouvements peut aussi produire des variations sensibles dans les excentricités des orbites et dans la position de leurs périhélies. Pour les déterminer, nous reprendrons l'équation trouvée dans le n° 67,

$$e\,de=\frac{a n\,dt\sqrt{1-e^2}}{\mu}\,\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial v}-\frac{a(1-e^2)}{\mu}\,d\mathrm{R}.$$

Il résulte de ce que nous avons dit dans le n° 48 que, si l'on prend pour plan fixe celui de l'orbite de m à une époque donnée, ce qui permet de négliger dans R l'inclinaison φ de l'orbite de m sur ce plan, tous les termes de l'expression de R dépendants de l'angle $i'n't-int$ seront compris dans la forme suivante

$$m'k\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-g''\theta'),$$

i, i', g, g', g'' étant des nombres entiers tels que l'on a

$$0=i'-i-g-g'-g''.$$

Le coefficient k a pour facteur $e^g e'^{g'}(\tang\frac{1}{2}\varphi')^{g''}$, g, g', g'' étant pris positivement dans ces exposants; de plus, si l'on suppose i et i' positifs, et i' plus grand que i, on a vu dans le n° 48 que les termes de R qui dépendent de l'angle $i'n't-int$ sont de l'ordre $i'-i$, ou d'un ordre supérieur de deux, de quatre, etc. unités; en n'ayant donc égard qu'aux termes de l'ordre $i'-i$, k sera de la forme $e^g e'^{g'}(\tang\frac{1}{2}\varphi')^{g''}\mathrm{Q}$, Q étant une fonction indépendante des excentricités et de l'inclinaison respective des orbites. Les nombres g, g', g'', renfermés sous le signe cosinus, sont alors positifs; car, si l'un d'eux, g par exemple, était négatif et égal à $-f$, k serait de l'ordre $f+g'+g''$; mais l'équation

$$0 = i' - i - g - g' - g''$$

donne

$$f + g' + g'' = i' - i + 2f;$$

ainsi k serait d'un ordre supérieur à $i'-i$, ce qui est contre la supposition. Cela posé, on a, par le n° 48, $\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, pourvu que dans cette dernière différence partielle on fasse $\varepsilon - \varpi$ constant; le terme de $\frac{\partial R}{\partial v}$, correspondant au terme précédent de R, est donc

$$m'(i+g)\,k \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta').$$

Le terme correspondant de dR est

$$m'ink\,dt \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta');$$

en n'ayant donc égard qu'à ces termes, et en négligeant e^2 vis-à-vis de l'unité, l'expression précédente de $e\,de$ donnera

$$de = \frac{m'an\,dt}{\mu}\,\frac{gk}{e} \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta');$$

or on a

$$\frac{gk}{e} = g e^{g-1} e'^{g'} (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi')^{g''} Q = \frac{\partial k}{\partial e};$$

on aura donc, en intégrant,

$$e = -\frac{m'an}{\mu(i'n' - in)}\,\frac{\partial k}{\partial e} \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta').$$

Maintenant, la somme de tous les termes de R qui dépendent de l'angle $i'n't - int$ étant représentée par la quantité suivante,

$$m'P \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + m'P' \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon),$$

la partie correspondante de e sera

$$-\frac{m'an}{\mu(i'n' - in)}\left[\frac{\partial P}{\partial e} \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + \frac{\partial P'}{\partial e} \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)\right].$$

Cette inégalité peut devenir fort sensible, si le coefficient $i'n' - in$ est très-petit, comme cela a lieu dans la théorie de Jupiter et de Saturne. A la vérité, elle n'a pour diviseur que la première puissance de $i'n' - in$, tandis que l'inégalité correspondante du moyen mouvement a pour diviseur la seconde puissance de cette quantité, comme on l'a vu dans le n° 65; mais $\frac{\partial P}{\partial e}$ et $\frac{\partial P'}{\partial e}$ étant d'un ordre inférieur à P et P', l'inégalité de l'excentricité peut être considérable, et même surpasser celle du moyen mouvement, si les excentricités e et e' sont très-petites; nous en verrons des exemples dans la théorie des satellites de Jupiter.

Déterminons présentement l'inégalité correspondante du mouvement du périhélie. Pour cela, reprenons les deux équations

$$e\,de = \frac{f\,df + f'\,df'}{\mu^2}, \quad e^2\,d\varpi = \frac{f\,df' - f'\,df}{\mu^2},$$

auxquelles nous sommes parvenus dans le n° 67. Ces équations donnent

$$df = \mu\,de \cos\varpi - \mu e\,d\varpi \sin\varpi;$$

ainsi, en n'ayant égard qu'à l'angle $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta'$, on aura

$$df = m'an\,dt\,\frac{\partial k}{\partial e} \cos\varpi \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta') - \mu e\,d\varpi \sin\varpi.$$

Représentons par

$$-m'an\,dt\left(\frac{\partial k}{\partial e} + k'\right) \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta')$$

la partie de $\mu e\,d\varpi$ qui dépend du même angle; on aura

$$df = m'an\,dt\left(\frac{\partial k}{\partial e} + \tfrac{1}{2}k'\right) \sin[i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - (g-1)\varpi - g'\varpi' - g''\theta']$$
$$-\frac{m'an\,dt}{2}\,k' \sin[i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - (g+1)\varpi - g'\varpi' - g''\theta'].$$

Il est aisé de voir, par la dernière des expressions de df données dans le n° 67, que le coefficient de ce dernier sinus a pour facteur $e^{g+1}e'^{g'}(\tang\frac{1}{2}\varphi')^{g''}$; k' est donc d'un ordre supérieur de deux unités à celui de $\frac{\partial k}{\partial e}$; ainsi, en le négligeant vis-à-vis de $\frac{\partial k}{\partial e}$, on aura

$$-\frac{m'an\,dt}{\mu}\frac{\partial k}{\partial e}\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-g''\theta'),$$

pour le terme de $e\,d\varpi$ qui correspond au terme

$$m'k\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-g''\theta')$$

de l'expression de R. Il suit de là que la partie de ϖ, qui correspond à la partie de R exprimée par

$$m'\mathrm{P}\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)+m'\mathrm{P}'\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon),$$

est égale à

$$\frac{m'an}{\mu(i'n'-in)e}\left[\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial e}\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)-\frac{\partial\mathrm{P}'}{\partial e}\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\right];$$

on aura donc ainsi, d'une manière fort simple, les variations de l'excentricité et du périhélie dépendantes de l'angle $i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon$. Elles sont liées à la variation ζ du moyen mouvement, qui y correspond, de manière que la variation de l'excentricité est

$$\frac{1}{3in}\frac{\partial^2\zeta}{\partial e\,\partial t},$$

et la variation de la longitude du périhélie est

$$\frac{i'n'-in}{3ine}\frac{\partial\zeta}{\partial e}.$$

La variation correspondante de l'excentricité de l'orbite de m', due à l'action de m, sera

$$-\frac{1}{3i'n'}\frac{\partial^2\zeta'}{\partial e'\,\partial t},$$

et la variation de la longitude de son périhélie sera

$$-\frac{i'n'-in}{3i'n'e'}\frac{\partial\zeta'}{\partial e'};$$

et, comme on a, par le n° 65, $\zeta'=-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}\zeta$, ces variations seront

$$\frac{m\sqrt{a}}{3i'n'm'\sqrt{a'}}\frac{\partial^2\zeta}{\partial e'\,\partial t},\quad\text{et}\quad\frac{(i'n'-in)m\sqrt{a}}{3i'n'e'm'\sqrt{a'}}\frac{\partial\zeta}{\partial e'}.$$

Lorsque la quantité $i'n'-in$ est fort petite, l'inégalité dépendante de l'angle $i'n't-int$ en produit une sensible dans l'expression du moyen mouvement, parmi les termes dépendants des carrés des masses perturbatrices; nous en avons donné l'analyse dans le n° 65. Cette même inégalité produit, dans les expressions de de et de $d\varpi$, des termes de l'ordre du carré de ces masses, et qui, n'étant fonctions que des éléments des orbites, ont une influence sensible sur les variations séculaires de ces éléments. Considérons, en effet, l'expression de de dépendante de l'angle $i'n't-int$. On a, par ce qui précède,

$$de=-\frac{m'an\,dt}{\mu}\left[\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial e}\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)-\frac{\partial\mathrm{P}'}{\partial e}\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\right].$$

Par le n° 65, le moyen mouvement nt doit être augmenté de

$$\frac{3m'an^2i}{(i'n'-in)^2\mu}[\mathrm{P}\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)-\mathrm{P}'\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)],$$

et le moyen mouvement $n't$ doit être augmenté de

$$-\frac{3m'an^2i}{(i'n'-in)^2\mu}\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}[\mathrm{P}\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)-\mathrm{P}'\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)].$$

En vertu de ces accroissements, la valeur de de sera augmentée de la fonction

$$-\frac{3m'a^2in^3\,dt}{2\mu^2\sqrt{a'}(i'n'-in)^2}(im'\sqrt{a'}+i'm\sqrt{a})\left(\mathrm{P}\frac{\partial\mathrm{P}'}{\partial e}-\mathrm{P}'\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial e}\right),$$

et la valeur de $d\varpi$ sera augmentée de la fonction

$$\frac{3m'a^2in^3\,dt}{2\mu^2\sqrt{a'}\,(i'n'-in)^2e}\left(im'\sqrt{a'}+i'm\sqrt{a}\right)\left(\mathrm{P}\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial e}+\mathrm{P}'\frac{\partial\mathrm{P}'}{\partial e}\right).$$

On trouvera pareillement que la valeur de de' sera augmentée de la fonction

$$-\frac{3ma^2\sqrt{a}\,.\,in^3\,dt}{2\mu^2a'\,(i'n'-in)^2}\left(im'\sqrt{a'}+i'm\sqrt{a}\right)\left(\mathrm{P}\frac{\partial\mathrm{P}'}{\partial e'}-\mathrm{P}'\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial e'}\right),$$

et que la valeur de $d\varpi'$ sera augmentée de la fonction

$$\frac{3ma^2\sqrt{a}\,.\,in^3\,dt}{2\mu^2a'\,(i'n'-in)^2e'}\left(im'\sqrt{a'}+i'm\sqrt{a}\right)\left(\mathrm{P}\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial e'}+\mathrm{P}'\frac{\partial\mathrm{P}'}{\partial e'}\right).$$

Ces différents termes sont sensibles dans la théorie de Jupiter et de Saturne, et dans celle des satellites de Jupiter. Les variations de e, e', ϖ et ϖ', relatives à l'angle $i'n't-int$, peuvent encore introduire quelques termes constants de l'ordre du carré des masses perturbatrices dans les différentielles de, de', $d\varpi$, $d\varpi'$, et dépendants des variations de e, e', ϖ et ϖ' relatives au même angle; il sera facile d'y avoir égard par l'analyse précédente. Enfin il sera facile, par notre analyse, de déterminer les termes des expressions de e, ϖ, e' et ϖ' qui, dépendant de l'angle $i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon$, n'ont point $i'n'-in$ pour diviseur, et ceux qui, dépendant du même angle et du double de cet angle, sont de l'ordre du carré des forces perturbatrices. Ces différents termes sont assez considérables dans la théorie de Jupiter et de Saturne pour y avoir égard : nous les développerons avec l'étendue qu'ils exigent, lorsque nous nous occuperons de cette théorie.

70. Déterminons les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites, et pour cela reprenons les équations du n° 64.

$$dc=dt\left(y\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x}-x\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y}\right),$$

$$dc'=dt\left(z\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x}-x\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z}\right),$$

$$dc''=dt\left(z\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y}-y\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z}\right).$$

Si l'on n'a égard qu'à l'action de m', la valeur de R du n° 46 donne

$$y\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x}-x\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y}=m'(x'y-xy')\left(\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$z\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x}-x\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z}=m'(x'z-xz')\left(\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$z\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y}-y\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z}=m'(y'z-yz')\left(\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Soit maintenant

$$\frac{c''}{c}=p,\quad \frac{c'}{c}=q;$$

les deux variables p et q détermineront, par le n° 64, la tangente de l'inclinaison φ de l'orbite de m et la longitude θ de son nœud, au moyen des équations

$$\operatorname{tang}\varphi=\sqrt{p^2+q^2},\quad \operatorname{tang}\theta=\frac{p}{q}.$$

Nommons p', q', p'', q'', ... ce que deviennent p et q relativement aux corps m', m'', ...; on aura, par le n° 64,

$$z=qy-px,\quad z'=q'y'-p'x',\quad \ldots.$$

La valeur précédente de p, différentiée, donne

$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{c}\,\frac{dc''-p\,dc}{dt};$$

en substituant au lieu de dc et de dc'' leurs valeurs, on aura

$$\frac{dp}{dt}=\frac{m'}{c}[(q-q')yy'+(p'-p)x'y]\left(\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\right);$$

on trouvera pareillement

$$\frac{dq}{dt}=\frac{m'}{c}[(p'-p)xx'+(q-q')xy']\left(\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Si l'on substitue pour x, y, x', y' leurs valeurs $r\cos v$, $r\sin v$, $r'\cos v'$, $r'\sin v'$, on aura

$$(q-q')yy'+(p'-p)x'y=\frac{q'-q}{2}rr'[\cos(v'+v)-\cos(v'-v)]+\frac{p'-p}{2}rr'[\sin(v'+v)-\sin(v'-v)],$$

$$(p'-p)xx'+(q-q')xy'=\frac{p'-p}{2}rr'[\cos(v'+v)+\cos(v'-v)]+\frac{q-q'}{2}rr'[\sin(v'+v)+\sin(v'-v)].$$

En négligeant les excentricités et les inclinaisons des orbites, on a

$$r=a,\quad v=nt+\varepsilon,\quad r'=a',\quad v'=n't+\varepsilon',$$

ce qui donne

$$\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a'^3}-\frac{1}{[a^2-2aa'\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+a'^2]^{\frac{3}{2}}};$$

on a de plus, par le n° 48,

$$\frac{1}{[a^2-2aa'\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+a'^2]^{\frac{3}{2}}}=\tfrac{1}{2}\Sigma B^{(i)}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon),$$

le signe intégral Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives et négatives, de i, en y comprenant la valeur $i=0$; on aura ainsi, en négligeant les termes de l'ordre des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites,

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt}=&\frac{q'-q}{2c}\,\frac{m'a}{a'^2}[\cos(n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon)-\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]\\&+\frac{p'-p}{2c}\,\frac{m'a}{a'^2}[\sin(n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon)-\sin(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]\\&+\frac{q'-q}{4c}m'aa'\Sigma B^{(i)}\{\cos[(i+1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]-\cos[(i+1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon]\}\\&+\frac{p'-p}{4c}m'aa'\Sigma B^{(i)}\{\sin[(i+1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]-\sin[(i+1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon]\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt}=&\frac{p'-p}{2c}\,\frac{m'a}{a'^2}[\cos(n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon)+\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]\\&+\frac{q-q'}{2c}\,\frac{m'a}{a'^2}[\sin(n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon)+\sin(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]\\&+\frac{p-p'}{4c}m'aa'\Sigma B^{(i)}\{\cos[(i+1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]+\cos[(i+1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon]\}\\&+\frac{q'-q}{4c}m'aa'\Sigma B^{(i)}\{\sin[(i+1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]+\sin[(i+1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon]\}.\end{aligned}$$

La valeur $i=-1$ donne dans l'expression de $\frac{dp}{dt}$ la quantité constante $\frac{q'-q}{4c}m'aa'B^{(-1)}$; tous les autres termes de l'expression de $\frac{dp}{dt}$ sont périodiques; en désignant par P leur somme, et observant que $B^{(-1)}=B^{(1)}$ par le n° 48, on aura

$$\frac{dp}{dt}=\frac{q'-q}{4c}m'aa'B^{(1)}+P.$$

On trouvera par le même procédé que, si l'on désigne par Q la somme de tous les termes périodiques de l'expression de $\frac{dq}{dt}$, on aura

$$\frac{dq}{dt}=\frac{p-p'}{4c}m'aa'B^{(1)}+Q.$$

Si l'on néglige les carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, on a, par le n° 64, $c=\sqrt{\mu a}$; en supposant ensuite $\mu=1$, on a $n^2a^3=1$, ce qui donne $c=\frac{1}{an}$; la quantité $\frac{m'aa'B^{(1)}}{4c}$ devient ainsi $\frac{m'a^2a'nB^{(1)}}{4}$, ce qui, par le n° 59, est égal à $(0,1)$; on aura ainsi

$$\frac{dp}{dt}=(0,1)(q'-q)+P,$$

$$\frac{dq}{dt}=(0,1)(p-p')+Q.$$

Il suit de là que, si l'on désigne par (P) et (Q) la somme de toutes les fonctions P et Q, relatives à l'action des différents corps m', m'', ... sur m; si l'on désigne pareillement par (P'), (Q'), (P''), (Q''), ... ce que deviennent (P) et (Q) lorsque l'on y change successivement les quantités relatives à m dans celles qui sont relatives à m', m'', ..., et réciproquement, on aura, pour déterminer les variables p, q, p', q',

p'', q'', ..., le système suivant d'équations différentielles

$$\frac{dp}{dt} = -[(0,1)+(0,2)+\ldots]q + (0,1)q' + (0,2)q'' + \ldots + (\mathrm{P}),$$

$$\frac{dq}{dt} = \quad [(0,1)+(0,2)+\ldots]p - (0,1)p' - (0,2)p'' - \ldots + (\mathrm{Q}),$$

$$\frac{dp'}{dt} = -[(1,0)+(1,2)+\ldots]q' + (1,0)q + (1,2)q'' + \ldots + (\mathrm{P}'),$$

$$\frac{dq'}{dt} = \quad [(1,0)+(1,2)+\ldots]p' - (1,0)p - (1,2)p'' - \ldots + (\mathrm{Q}'),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'analyse du n° 68 donne, pour les parties périodiques de p, q, p', q', ...,

$$p = \int(\mathrm{P})\,dt, \qquad q = \int(\mathrm{Q})\,dt,$$
$$p' = \int(\mathrm{P}')\,dt, \qquad q' = \int(\mathrm{Q}')\,dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots;$$

on aura ensuite les parties séculaires des mêmes quantités, en intégrant les équations différentielles précédentes, privées de leurs derniers termes (P), (Q), (P′), ..., et alors on retombera dans les équations (C) du n° 59, que nous avons considérées avec assez d'étendue pour nous dispenser de revenir sur cet objet.

71. Reprenons les équations du n° 64,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{c'^2 + c''^2}}{c}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{c''}{c'},$$

d'où résultent celles-ci

$$\frac{c'}{c} = \operatorname{tang}\varphi\cos\theta, \qquad \frac{c''}{c} = \operatorname{tang}\varphi\sin\theta.$$

En les différentiant, on aura

$$d\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{c}(dc'\cos\theta + dc''\sin\theta - dc\operatorname{tang}\varphi),$$

$$d\theta\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{c}(dc''\cos\theta - dc'\sin\theta).$$

Si l'on substitue dans ces équations, au lieu de $\frac{dc}{dt}$, $\frac{dc'}{dt}$, $\frac{dc''}{dt}$, leurs valeurs

$$y\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x} - x\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y}, \qquad z\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x} - x\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z}, \qquad z\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y} - y\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z},$$

et au lieu de ces dernières quantités leurs valeurs données dans le n° 67; si l'on observe, de plus, que $s = \operatorname{tang}\varphi\sin(v-\theta)$, on aura

$$d\operatorname{tang}\varphi = \frac{dt\operatorname{tang}\varphi\cos(v-\theta)}{c}\left[r\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r}\sin(v-\theta) + \frac{\partial\mathrm{R}}{\partial v}\cos(v-\theta)\right] - \frac{(1+s^2)\,dt}{c}\cos(v-\theta)\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial s},$$

$$d\theta\operatorname{tang}\varphi = \frac{dt\operatorname{tang}\varphi\sin(v-\theta)}{c}\left[r\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r}\sin(v-\theta) + \frac{\partial\mathrm{R}}{\partial v}\cos(v-\theta)\right] - \frac{(1+s^2)\,dt}{c}\sin(v-\theta)\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial s}.$$

Ces deux équations différentielles détermineront directement l'inclinaison de l'orbite et le mouvement des nœuds. Elles donnent

$$\sin(v-\theta)\,d\operatorname{tang}\varphi - d\theta\cos(v-\theta)\operatorname{tang}\varphi = 0,$$

équation qui peut se déduire encore de celle-ci, $s = \operatorname{tang}\varphi\sin(v-\theta)$; en effet, cette dernière équation étant finie, on peut, par le n° 63, la différentier, soit en regardant φ et θ comme constants, soit en les traitant comme variables, en sorte que sa différentielle prise en ne faisant varier que φ et θ est nulle, d'où résulte l'équation différentielle précédente.

Supposons maintenant que le plan fixe soit extrêmement peu incliné à l'orbite de m, en sorte que nous puissions négliger les carrés de s et de $\operatorname{tang}\varphi$; on aura

$$d\operatorname{tang}\varphi = -\frac{dt}{c}\cos(v-\theta)\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial s},$$

$$d\theta\operatorname{tang}\varphi = -\frac{dt}{c}\sin(v-\theta)\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial s};$$

en faisant donc, comme précédemment,

$$p = \operatorname{tang}\varphi\sin\theta, \qquad q = \operatorname{tang}\varphi\cos\theta,$$

on aura, au lieu des deux équations différentielles précédentes, les suivantes

$$dq = -\frac{dt}{c}\cos v\,\frac{\partial R}{\partial s},$$

$$dp = -\frac{dt}{c}\sin v\,\frac{\partial R}{\partial s};$$

or on a $s = q\sin v - p\cos v$, ce qui donne

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial R}{\partial q}, \qquad \frac{\partial R}{\partial s} = -\frac{1}{\cos v}\,\frac{\partial R}{\partial p};$$

partant

$$dq = \frac{dt}{c}\,\frac{\partial R}{\partial p}, \qquad dp = -\frac{dt}{c}\,\frac{\partial R}{\partial q}.$$

On a vu dans le n° 48 que la fonction R est indépendante de la position du plan fixe des x et des y; en supposant donc tous les angles de cette fonction rapportés à l'orbite de m, il est visible que R sera fonction de ces angles et de l'inclinaison respective des deux orbites, inclinaison que nous désignerons par $\varphi'_{,}$. Soit $\theta'_{,}$ la longitude du nœud de l'orbite de m' sur l'orbite de m, et supposons que $m'k(\tang\varphi'_{,})^g\cos(i'n't - int + A - g\theta'_{,})$ soit un terme de R, dépendant de l'angle $i'n't - int$; on aura, par le n° 60,

$$\tang\varphi'_{,}\sin\theta'_{,} = p' - p, \qquad \tang\varphi'_{,}\cos\theta'_{,} = q' - q,$$

d'où l'on tire

$$(\tang\varphi'_{,})^g\sin g\theta'_{,} = \frac{[q'-q+(p'-p)\sqrt{-1}]^g - [q'-q-(p'-p)\sqrt{-1}]^g}{2\sqrt{-1}},$$

$$(\tang\varphi'_{,})^g\cos g\theta'_{,} = \frac{[q'-q+(p'-p)\sqrt{-1}]^g + [q'-q-(p'-p)\sqrt{-1}]^g}{2}.$$

En n'ayant donc égard qu'au terme précédent de R, on aura

$$\frac{\partial R}{\partial p} = -g(\tang\varphi'_{,})^{g-1}m'k\sin[i'n't - int + A - (g-1)\theta'_{,}],$$

$$\frac{\partial R}{\partial q} = -g(\tang\varphi'_{,})^{g-1}m'k\cos[i'n't - int + A - (g-1)\theta'_{,}].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions précédentes de dp et de dq, et si l'on observe que l'on a, à très-peu près, $c = \frac{\mu}{an}$, on aura

$$p = \frac{gm'kan}{\mu(i'n' - in)}(\tang\varphi'_{,})^{g-1}\sin[i'n't - int + A - (g-1)\theta'_{,}],$$

$$q = \frac{gm'kan}{\mu(i'n' - in)}(\tang\varphi'_{,})^{g-1}\cos[i'n't - int + A - (g-1)\theta'_{,}].$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $s = q\sin v - p\cos v$, on aura

$$s = \frac{-gm'kan}{\mu(i'n' - in)}(\tang\varphi'_{,})^{g-1}\sin[i'n't - int - v + A - (g-1)\theta'_{,}].$$

Cette expression de s est la variation de la latitude, correspondante au terme précédent de R; il est clair qu'elle est la même, quel que soit le plan fixe auquel on rapporte les mouvements de m et de m', pourvu qu'il soit peu incliné au plan des orbites; on aura donc ainsi la partie de l'expression de la latitude que la petitesse du diviseur $i'n' - in$ peut rendre sensible. A la vérité, cette inégalité de la latitude ne renfermant ce diviseur qu'à la première puissance, elle est sous ce rapport moins sensible que l'inégalité correspondante de la longitude moyenne, qui renferme le carré de ce diviseur; mais, d'un autre côté, $\tang\varphi'_{,}$ s'y trouve élevé à une puissance moindre qu'une unité, remarque analogue à celle que nous avons faite, dans le n° 69, sur l'inégalité correspondante des excentricités des orbites. On voit ainsi que toutes ces inégalités sont liées entre elles et à la partie correspondante de R par des rapports très-simples.

Si l'on différentie les expressions précédentes de p et de q, et si, dans les valeurs de $\frac{dp}{dt}$ et de $\frac{dq}{dt}$ qui en résultent, on fait croître les angles nt et $n't$ des inégalités des moyens mouvements dépendantes de l'angle $i'n't - int$, il en résultera dans ces différentielles des quantités qui seront uniquement fonctions des éléments des orbites, et qui peuvent influer d'une manière sensible sur les variations séculaires des inclinaisons et des nœuds, quoique de l'ordre des carrés des masses perturbatrices, ce qui est analogue à ce que nous avons dit dans le n° 69 sur les variations séculaires des excentricités et des périhélies.

72. Il nous reste à considérer la variation de la longitude ε de l'époque. On a, par le n° 64,

$$\begin{aligned} d\varepsilon = {} & de\left[\frac{d\mathrm{E}^{(1)}}{de}\sin(v-\varpi) + \tfrac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}^{(2)}}{de}\sin 2(v-\varpi) + \ldots\right] \\ & - d\varpi\left[\mathrm{E}^{(1)}\cos(v-\varpi) + \mathrm{E}^{(2)}\cos 2(v-\varpi) + \ldots\right]; \end{aligned}$$

en substituant pour $\mathrm{E}^{(1)}, \mathrm{E}^{(2)}, \ldots$ leurs valeurs en séries ordonnées suivant les puissances de e, séries qu'il est facile de conclure de l'expression générale de $\mathrm{E}^{(i)}$ du n° 16, on aura

$$\begin{aligned} d\varepsilon = {} & -2\,de\sin(v-\varpi) + 2e\,d\varpi\cos(v-\varpi) \\ & + e\,de\left[\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}e^2 + \ldots\right]\sin 2(v-\varpi) - e^2 d\varpi\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4}e^2 + \ldots\right)\cos 2(v-\varpi) \\ & - e^2 de(1+\ldots)\sin 3(v-\varpi) + e^3 d\varpi(1+\ldots)\cos 3(v-\varpi) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on substitue pour de et $e\,d\varpi$ leurs valeurs données dans le n° 67, on trouvera, en ne portant la précision que jusqu'aux quantités de l'ordre e^2 inclusivement,

$$\begin{aligned} d\varepsilon = {} & \frac{a^2 n\,dt}{\mu}\sqrt{1-e^2}\left[2 - \tfrac{3}{2}e\cos(v-\varpi) + e^2\cos 2(v-\varpi)\right]\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} \\ & - \frac{an\,dt}{\mu\sqrt{1-e^2}}\,e\sin(v-\varpi)\left[1 + \tfrac{1}{2}e\cos(v-\varpi)\right]\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}. \end{aligned}$$

L'expression générale de $d\varepsilon$ contient des termes de la forme

$$m'kn\,dt\cos(i'n't - int + \mathrm{A}),$$

et par conséquent l'expression de ε en contient de la forme

$$\frac{m'kn}{i'n' - in}\sin(i'n't - int + \mathrm{A});$$

mais il est facile de se convaincre que le coefficient k dans ces termes

est de l'ordre $i' - i$, et qu'ainsi ces termes sont du même ordre que ceux de la longitude moyenne qui dépendent du même angle. Ceux-ci ayant pour diviseur le carré de $i'n' - in$, on voit que l'on peut négliger à leur égard les termes correspondants de ε, lorsque $i'n' - in$ est une très-petite quantité.

Si, dans les termes de l'expression de $d\varepsilon$ qui sont uniquement fonctions des éléments des orbites, on substitue, au lieu de ces éléments, les parties séculaires de leurs valeurs, il est clair qu'il en résultera des termes constants, et d'autres termes affectés des sinus et des cosinus des angles dont dépendent les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons des orbites. Les termes constants produiront dans l'expression de ε des termes proportionnels au temps et qui se confondront avec le moyen mouvement de m. Quant aux termes affectés de sinus et de cosinus, ils acquerront par l'intégration, dans l'expression de ε, de très-petits diviseurs du même ordre que les forces perturbatrices, en sorte que, ces termes étant à la fois multipliés et divisés par ces forces, ils pourront devenir sensibles, quoique de l'ordre des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons. Nous verrons, dans la théorie des planètes, que ces termes y sont insensibles; mais ils sont très-sensibles dans la théorie de la Lune et des satellites de Jupiter, et c'est de ces termes que dépendent leurs équations séculaires.

On a vu, dans le n° 65, que le moyen mouvement de m a pour expression $\frac{3}{\mu}\iint an\,dt\,d\mathrm{R}$, et que, si l'on n'a égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices, $d\mathrm{R}$ ne renferme que des quantités périodiques. Mais, si l'on considère les carrés et les produits de ces masses, cette différentielle peut contenir des termes qui sont uniquement fonctions des éléments des orbites. En y substituant, au lieu de ces éléments, les parties séculaires de leurs valeurs, il en résultera des termes affectés des sinus et des cosinus des angles dont dépendent les variations séculaires des orbites. Ces termes acquerront par la double intégration, dans l'expression du moyen mouvement, de très-petits diviseurs, qui seront de l'ordre des carrés et des produits des masses perturbatrices, en sorte que, étant à la fois multipliés et divisés par les carrés et les produits de ces masses, ils pourront devenir sensibles, quoiqu'ils soient de l'ordre des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites. Nous verrons encore que ces termes sont insensibles dans la théorie des planètes.

73. Les éléments de l'orbite de m étant déterminés par ce qui précède, on les substituera dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, que nous avons données dans le n° 22; on aura ainsi les valeurs de ces trois variables au moyen desquelles les astronomes déterminent la position des corps célestes. En réduisant ensuite ces valeurs en séries de sinus et de cosinus, on aura une suite d'inégalités, dont on formera des Tables, et l'on pourra ainsi calculer avec facilité la position de m à un instant quelconque.

Cette méthode, fondée sur la variation des paramètres, est très-utile dans la recherche des inégalités qui, par les rapports des moyens mouvements des corps du système, acquièrent de petits diviseurs et par là deviennent fort sensibles. Ce genre d'inégalités affecte principalement les éléments elliptiques des orbites; en déterminant donc les variations qui en résultent dans ces éléments, et en les substituant dans l'expression du mouvement elliptique, on aura, de la manière la plus simple, toutes les inégalités que ces diviseurs rendent sensibles.

La méthode précédente est encore utile dans la théorie des comètes; nous n'apercevons ces astres que dans une très-petite partie de leur cours, et les observations ne font connaître que la partie de l'ellipse qui se confond avec l'arc de l'orbite qu'elles décrivent pendant leurs apparitions; ainsi, en déterminant la nature de l'orbite considérée comme une ellipse variable, on aura les changements que cette ellipse subit dans l'intervalle de deux apparitions consécutives de la même comète; on pourra donc annoncer son retour et, lorsqu'elle reparaît, comparer la théorie aux observations.

Après avoir donné les méthodes et les formules pour déterminer par des approximations successives les mouvements des centres de gravité

des corps célestes, il nous reste à les appliquer aux différents corps du Système solaire; mais, l'ellipticité de ces corps influant d'une manière sensible sur les mouvements de plusieurs d'entre eux, il convient, avant que d'en venir aux applications numériques, de nous occuper de la figure des corps célestes, dont la considération est d'ailleurs aussi intéressante par elle-même que celle de leurs mouvements.

FIN DU TOME PREMIER.

2041 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ