SOPHUS LIE

GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

AUF GRUND EINER BEWILLIGUNG AUS DEM NORWEGISCHEN FORSCHUNGSFONDS VON 1919 UND MIT UNTERSTÜTZUNG DER VIDENSKAPSAKADEMIE ZU OSLO UND DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG · HERAUSGEGEBEN VON DEM NORWEGISCHEN MATHEMATISCHEN VEREIN DURCH

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
OSLO

ANMERKUNGEN ZUM SECHSTEN BAND

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1927

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1927

SOPHUS LIE

GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

ANMERKUNGEN

ZUM SECHSTEN BANDE

Die Abweichungen dieser Ausgabe von den ersten Drucken.[1])

I.

S. 2, Z. 20 (442, Z. 20): „wo die c_i bloße Funktionen der a und b sind".

S. 7, Z. 16 (447, Z. 5): „soll nach".

S. 8, Z. 6 (447, Z. 6 v. u.): „unmöglich, indem die".

S. 8, Z. 18 (448, Z. 6) fehlt: „uns".

S. 8, Z. 4, 3 v. u. (448, Z. 15, 16): „Koeffizient".

S. 8, Z. 1 v. u. (448, Z. 18) fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$.

S. 9, Z. 1 (448, Z. 19): „In allem erhält".

S. 10, Z. 10 (449, Z. 2 v. u.): „sein, indem die"; so noch öfters.

S. 11, Z. 3 (450, Z. 12 v. u.): „besitzen soll".

S. 11, Z. 9 v. u. (451, Z. 13): „Integrationskonstante", so noch öfters.

S. 12, Z. 16 (452, Z. 2): „indem sonst".

S. 14, Z. 16 (454, Z. 3): „als neue X_1".

S. 15, Z. 17 (454, Z. 4 v. u.): $+B_i\varphi$ statt: $-B_i\varphi$.

S. 17, Z. 7 (456, Z. 18): „die binnen gewisser".

S. 17, Z. 19f. (456, Z. 11, 10 v. u.): „eintreffen, daß".

S. 18, Z. 3 v. u. (458, Z. 1): „Variablen".

S. 21, Z. 5 (460, Z. 5): „liegt darin".

S. 21, Z. 9 v. u. (460, Z. 13 v. u.): „soll mit".

S. 22, Z. 7 v. u. (461, Z. 10 v. u.): fehlt „uns".

S. 23, Z. 9 (462, Z. 7) fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$.

S. 24, Z. 6 (463, Z. 5): „gegenseitigen".

S. 24, Z. 3 v. u.; 25, Z. 6 (463, Z. 3 v. u.; 464, Z 6): dt statt: δt.

S. 25, Z. 14 (464, Z. 14):

$$= \Phi_i(x_1 \ldots x_n)(t - t_0).$$

S. 26, Z. 6 (465, Z. 1 f.): „des vorangehenden Paragraphen".

S. 28, Z. 14 (467, Z. 10) fehlt: „nach".

S. 29, Z. 8 (468, Z. 7): „infinitesimalen".

S. 30, Z. 16 f. (469, Z. 15 f.): „indem die".

S. 31, Z. 7 (470, Z. 7): „der höchsten auftretenden".

S. 31, Z. 22 (470, Z. 21 f.): „ändert sie nicht die Lage dieses Punktes".

S. 33, Z. 4 (471, Z. 1 v. u.): „sein soll".

S. 33, Z. 9 (472, Z. 5): „und findet".

S. 33, Z. 24 (472, Z. 20): „indem sonst".

S. 34, Z. 4f. (473, Z. 2f.): „daß $\varphi = a$ das allgemeine Integral der".

S. 34, Z. 12 (473, Z. 10): „gleichzeitig das allgemeine Integral der".

S. 35, Z. 16 v. u. (474, Z. 16) fehlt: „nach".

S. 36, Z. 13 v. u. (475, Z. 18): „bestehen (Satz 9) Relationen".

S. 40, Z. 18, 17 v. u. (479, Z. 18): „soll man nämlich in allen".

S. 41, Z. 11, 17, 28; 42, Z. 9; 43, Z. 4, 27 (480, Z. 8, 14, 25; 481, Z. 2, 30; 482, Z. 16): (10) statt: (10*).

---

1) Die eingeklammerten Seitenzahlen beziehen sich auf den ersten Druck, dahinter folgt dessen Lesart. Unmittelbar ersichtliche Druck- und Sprachfehler sind nur in einzelnen Fällen berücksichtigt.

S. 41, Z. 21 (480, Z. 18) fehlt:

$$\varphi(x, y) = a.$$

S. 41, Z. 6 v. u. (480, Z. 26): $2y'$ statt: $-2y'$.

S. 42, Z. 12 v. u. (481, Z. 17): „durch neue Benutzung“.

S. 43, Z. 12 v. u. (482, Z. 13) fehlt: „$\varphi(x, y) = a$“.

S. 43, Z. 2 v. u. (482, Z. 22): „Satz 15“.

S. 44, Z. 13 v. u. (483, Z. 10): „geben“.

S. 44, Z. 1 v. u. (483, Z. 22): „und dabei“.

S. 47, Z. 11, 21 (485, Z. 13, 4 v. u.): „als neues y“.

S. 50, Z. 1 f., 22 f. (488, Z. 15; 489, Z. 1 f.): „indem die … zu Widerspruch“.

S. 50, Z. 23 f. (489, Z. 2 f.): „besteht, was auch“.

S. 53, Z. 14, 17, 26 (491, Z. 21, 24, 32): (13), (13), (14).

S. 53, Z. 4 v. u. (492, Z. 3): „noch mehrere“.

S. 54, Z. 10, 11 (492, Z. 14, 16): (14), (15).

S. 54, Z. 21 (492, Z. 13 v. u.): „groß als“.

S. 55, Z. 17; 56, Z. 7, 22 (493, Z. 17; 494, Z. 1, 16): (14).

S. 59, Z. 4 v. u (497, Z. 12): „indem die“.

S. 59, Z. 1 v. u. (497, Z. 15): „als neues y“.

S. 60, Z. 10 (497, Z. 25): „Unterdeterminanten“.

S. 62, Z. 6 (499, Z. 15): Die Bezeichnung (19) fehlt u. die Gl. lautet:

$$\frac{dX_k}{dx} = \alpha_{k1} X_1 + \cdots + \alpha_{kk} X_k.$$

S. 63, Z. 6 (500, Z. 10): Die Bezeichnung (19') und das Zeichen — fehlen.

S. 63, Z. 10 (500, Z. 14): „in der bekannten Beziehung“.

S. 68, Z. 11 (505, Z. 10): „$2r$ Gleichungen“.

S. 68, Z. 10 v. u. (505, Z. 12 v. u.): „als neues“

S. 70, Z. 5 f. (506, Z. 2, 1 v. u.): a_r statt a_{r+1}.

S. 72, Z. 17 (509, Z. 12) fehlt: B.

S. 79, Z. 3 v. o., 6 v. u. (515, Z. 5 v. o., 6 v. u.): „als neue“, so noch mehrmals.

S. 81, Z. 18 (517, Z. 13): „indem sie“.

S. 86, Z. 17 (521, Z. 15 v. u.): 53 statt 55.

S. 86, Z. 1 v. u. (522, Z. 1 f.):

$$x' = ax + by + c, \quad y' = \frac{1}{a} y + dx + e.$$

S. 88, Z. 18 (523, Z. 19) fehlt: $\varphi(x, y) = a$.

S. 89, Z. 4 v. u. (524, Z. 7 v. u.): „nächst-letzten“.

S. 90—93 (525—528). Die Einteilung in die Nrn. 60—68 ist neu.

II.

S. 99, Z. 1 (540, Z. 11 v. u.): „Freund“.

S. 100, Z. 13, 11 v. u. (542, Z. 19, 20). Statt: 244, 256 steht 4, 16; das sind die Seitenzahlen der Sonderabdrucke.

S. 100, Z. 8 v. u. (542, Z. 22 f.): „eine bloße Folge von $\Phi = 0$ ist“.

S. 100, Z. 5 v. u. (542, Z. 5 v. u.): „Abhandlungen“.

S. 101, Z. 12 v. u. (543, Z. 21): „wählen“.

S. 102, Z. 13 v. u. (544, Z. 16 v. u): Φ_r statt: Φ_s.

S. 104, Z. 13 (545, Z. 24): f statt: F.

S. 106, Z. 15 f. (547, Z. 7 v. u.): „in der diese“, wie im ersten Drucke.

S. 109, Z. 4, 6 (550, Z. 16, 14 v. u.) fehlen die letzten Punkte: . . . .

S. 109, Z. 20 (550, Z. 1 v. u.): „. . ., $\delta v = V\delta t$, $\delta w = W\delta t$, . . .“.

S. 111, Z. 1 (552, Z. 9): „Gruppe (2)“.

S. 111, Z. 12 (552, Z. 20): „gar nicht die unabhängigen Veränderlichen x, y“.

S. 112, Z. 6 v. u. (554, Z. 13 v. u.): 135 statt: 134.

S. 114, Z. 16 (555, Z. 8 v. u): „Konstante“.

S. 115, Z. 19 (557, Z. 5 f.): „indem Bf“.

S. 116, Z. 11 (557, Z. 22): „herauskommen“.

S. 119, Z. 16 (560, Z. 15 v. u.): „daß sie die“.

S. 121, Z. 3 (562, Z. 2): „betrachten sodann“.

S. 121, Z. 14 v. u. (562, Z. 17 v. u.): „Dabei ist zu erinnern“.

S. 122, Z. 7 (563, Z. 5): „Satze 2“.

S. 123, Z. 9 v. u. (564, Z. 11 v. u.) fehlen die Punkte hinter w.

S. 124, Z. 5 (565, Z. 3) fehlen die letzten Punkte: . . . .

S. 124, Z. 18 f. (565, Z. 16 f.) fehlen die Punkte hinter Y, y.

S. 124, Z. 7, 6 v. u. (565, Z. 8, 7 v. u.) fehlen die Punkte hinter Y, v.

S. 125, Z. 3 (566, Z. 2) fehlt: $X_r A_4 f$.

S. 125, Z. 11 (566, Z. 9) fehlt: U.

S. 127, Z. 8 (568, Z. 5 f.): „homogen sind“.

S. 129, Z. 11 (569, Z. 1 v. u.): „indem“ statt: „weil ja“.

S. 132, Z. 6 v. u. (573, Z. 7): „anderseits“.

S. 135, Z. 20 (575, Z. 12 v. u.):

$$„+ 2F\Phi_x\Phi_y“.$$

S. 136, Z. 14 v. u. (576, Z. 14 v. u.): „erfüllen“.

S. 136, Z. 9 v. u. (576, Z. 9 v. u.): „Da die F_k sich“.

S. 137, Z. 8 (577, Z. 10): „wenn ein“.

III.

S. 140, Z. 12 v. u. (72, Z. 14 v. u.):

$$„p\,dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_n\,dx_n = P\,dX - P_1\,dX_1 - \cdots - P_n\,dX_n“.$$

S. 140, Z. 2 v. u. (72, Z. 5 v. u.): „von x, y, z allein“.

S. 142, Z. 19 v. u. (74, Z. 15): „könnte“.

S. 149, Z. 2 v. u. (80, Z. 2 v. u.):

$$„(n' - n - q'')\text{-ter}“.$$

S. 151, Z. 1 (82, Z. 4): „Konstante“.

S. 152, Z. 1 (83, Z. 7): „indem n“.

S. 153, Z. 2 v. u. (85, Z. 1) fehlt: $= 0$.

S. 154, Z. 15 v. u. (85, Z. 21): „welcher die Relation:“.

S. 155, Z. 15 (86, Z. 12): „welches die Relation:“

S. 156, Z. 13, 7 v. u. (87, Z. 17, 24) fehlt: $= 0$.

S. 157, Z. 21, 22, 23, 27, 28, 31, 36; S. 158, Z. 1, 6, 16, 18 v. o., 8, 5, 2, 1 v. u.; S. 159, Z. 1, 4, 7, 8, 9, 10 (88, Z. 13, 14, 15, 19, 20, 22, 27, 29, 33; S. 89, Z. 4, 5, 19, 21, 24, 25, 26, 29, 32, 33, 34, 35) überall r statt q.

S. 157, Z. 7 v. u., 158, Z. 6, 20 v. o., 5, 2 v. u., 159, Z. 4, 7 (88, Z. 18, 7 v. u, 89, Z. 8, 21, 24, 29, 32) überall: $A_k f = 0$ statt: $A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0$.

S. 158, Z. 14 v. u. (89, Z. 13): „als möglich“.

S. 165, Z. 16 (95, Z. 9, 8 v. u.): „gegenseitigen“.

S. 165, Z. 22 (95, Z. 3 v. u.): q statt: qr

S. 165, Z. 24 (95, Z. 1 v. u.) fehlt: $k = 1, \ldots, r$.

S. 167, Z. 13 v. u. (97, Z. 7 v. u.) fehlt: $= 0$.

S. 176, Z. 5 f. (105, Z. 8, 7 v. u.): „dreigliedrige“.

S. 176, Z. 2 v. u. (106, Z. 23): y_n, y_n'.

S. 181, Z. 6 v. u. (111, Z. 9 f.): „transitiven und reziproken“.

S. 182, Z. 17 (111, Z. 8 v. u.): „projektivische Gruppe“.

S. 184, Z. 14 (113, Z. 10 v. u.) fehlt: $X_{q''+1}$.

S. 185, Z. 2 (114, Z. 12) fehlt: $= 0$.

S. 185, Z. 5 (114, Z. 15): „Relationen“.

S. 185, Z. 5 v. u. (115, Z. 2): „indem“ statt: „weil“.

S. 187, Z. 1 v. u., 188, Z. 3 (117, Z. 1, 4) fehlen die Punkte hinter z_j.

S. 189, Z. 12, 14 (118, Z. 10, 12) fehlen die Punkte hinter z_j und z_j'.

S. 191, Z. 3 v. u. (120, Z. 10 v. u.): „x, y, z bestimmen.“

S. 192, Z. 10 (121, Z. 3): „x', y', z' ein partikulares“.

S. 192, Z. 5 v. u., 193, Z. 3, 6, 8, 12 (121, Z. 14, 11, 8, 6 v. u., 122, Z. 2): C, X, Y, Z statt: C, X, Y, Z.

S. 193, Z. 4 (121, Z. 10 v. u.): „arbiträre Konstanten“.

S. 193, Z. 8 (121, Z. 6 v. u.): „finden“.

S. 193, Z. 6 v. u. (122, Z. 22) fehlt: $B_i f$.

S. 193, Z. 5, 3 v. u., 194, Z. 1, 5, 6 (122, Z. 24, 26, 29, 34, 36): C statt: C.

S. 194, Z. 3 (122, Z. 32): Bf statt: $B_i f$.

S. 195, Z. 9 (123, Z. 6 v. u.): B$_i f$ statt: $B_i f$.

S. 196, Z. 15 (125, Z. 9) fehlt: δt.

S. 197, Z. 12 (125, Z. 4 v. u.): k statt: i.

S. 202, Z. 13 v. u. (130, Z. 11 v. u.): „indem die eine".

S. 204, Z. 10 (132, Z. 8): „indem sonst".

S. 204, Z. 13, 12, 11 v. u. (132, Z. 17, 16, 15 v. u.): überall n statt: m.

S. 206, Z. 11 v. u. (134, Z. 20): G_n statt: G'_n.

S. 207, Z. 16 v. u. (135, Z. 15): „von derselben".

S. 210, Z. 7 (137, Z. 5 v. u.): Y statt: Y.

S. 215, Z. 15 (142, Z. 9 v. u.): „Konstante".

S. 215, Z. 20 (142, Z. 4 v. u.): n statt: 8.

S. 218, Z. 11 v. u. (145, Z. 2 v. u.): „in § 8".

S. 220, Z. 19 (147, Z. 4 v. u.): „indem die".

S. 221, Z. 17 (148, Z. 7 v. u.): „bilden und deren".

S. 223, Z. 7 v. u. (151, Z. 7 v. u.): $B_k f$ statt: Bf.

S. 223, Z. 6, 5 v. u. (151, Z. 5 v. u.): „gesuchten inf. Größen $B_k f$, die somit bestimmt sind".

IV.

S. 225, Z. 14 (84, Z. 14): „meiner oben".

S. 225, Z. 8 v. u. (84, Z. 5 v. u.): „aus welchen".

S. 228, Z. 21 (87, Z. 14 v. u.): Die Bezeichnung (4) fehlt.

V.

S. 230—236. Die Einteilung in die Nrn. 1—13 ist neu.

S. 230, Z. 4 v. u. (15, Z. 1f.): „Konstante".

S. 232, Z. 3, 2 v. u. (16, Z. 2 v. u.) fehlt: „von"; „deren letztere".

S. 232, Z. 10 v. u. (17, Z. 10): „Die Erledigung".

S. 233, Z. 11 (17, Z. 24): „bin indes".

S. 234, Z. 11 v. u. (19, Z. 2) fehlt: G_i.

VI.

S. 237—247. Die Einteilung in die Nrn. 1—10 ist neu.

S. 239, Z. 9 (147, Z. 13): „Normale".

S. 240, Z. 5 (148, Z. 11): „indem sich".

S. 245, Z. 12 v. u. (154, Z. 14 v. u.): $y'' - yf(y') = 0$.

S. 246, Z. 9, 11 (155, Z. 7, 9): „drei" statt: „vier".

S. 247, Z. 11 v. u. (156, Z. 11 v. u.): „überführt".

VII.

S. 249—259. Die Einteilung in die Nrn. 1—9 ist neu.

S. 250, Z. 4 (279, Z. 11) fehlt: (4).

S. 252, Z. 1 (281, Z. 9): „leuchtet es ein".

S. 252, Z. 8f. (281, Z. 17f.): „Auflösung von algebraischen Gleichungen".

S. 255, Z. 3 v. u. (285, Z. 19) fehlt die Bezeichnung (14).

S. 258, Z. 9 (288, Z. 5): „zu jeder".

S. 258, Z. 19 (288, Z. 16) sind aus Versehen die Gl. (16) wiederholt.

VIII.

S. 260, Z. 5 (320, Z. 3) fehlt I.

S. 260—265. Die Einteilung in die Nrn. 1—6 ist neu.

S. 260, Z. 10; 263, Z. 2f. (320, Z. 7; 323, Z. 15f.) haben die rechten Seiten das entgegengesetzte Vorzeichen.

S. 261, Z. 10 v. u. (322, Z. 4): (B) statt: (A).

S. 262, Z. 9 v. u.; 265, Z. 21 (323, Z. 8; 326, Z. 13): 2 und 3 statt: II und III.

S. 264, Z. 13 v. u (325, Z. 6) fehlt die Bezeichnung (B').

S. 265, Z. 4 (325, Z. 6 v. u.): „eines einfach".

S. 265, Z. 8 (325, Z. 2 v. u.): „Gruppe des Ausdruckes".

S. 265, Z. 9, 3 v. u. (326, Z. 12, 6 v. u.): „findet".

IX.

S. 267, Z. 8 (453, Z. 6): „paarweis"; so noch mehrmals.

S. 268—286. Die Einteilung in die Nrn. 1—14 ist neu.

S. 268, Z. 18 (454, Z. 2 v. u.): „Reihenfolge von".

S. 271, Z. 22 (458, Z. 11): „Reihenfolge $T_a T_b$ eine".

S. 272, Z. 1 v. u. (459, Z. 2 v. u.): „bloße Folgen".

S. 273, Z. 18, 31; 274, Z. 1 (460, Z. 16, 2 v. u.; 461, Z. 3): (3) statt: (3*).

S. 275, Z. 6 (462, Z. 14): „daß ω_{iks} auch x_i^r nicht enthalten, indem die".

S. 279, Z. 4 (467, Z. 17) fehlt die Bezeichnung: (6).

S. 280, Z. 12, 19, 23, 27, 29 (469, Z. 1, 7, 12, 16, 18): „Gruppe" für: „Schar von Transformationen" und für: „Schar".

S. 280, Z. 7, 6 v. u. (469, Z. 20f.): „Da wir nachher gerade"; „Gleichungen (9)".

S. 284, Z. 6 (473, Z. 14 v. u.): „Also setzen wir".

S. 284, Z. 12 (473, Z. 9, 8 v. u.): „Schar von Transformationen".

S. 284, Z. 5 v. u. (474, Z. 18): „sich in".

S. 285, Z. 16 v. u. (475, Z. 7): „abgebildet in".

S. 285, Z. 13 v. u. (475, Z. 11): „Satz 7".

X.

S. 289, Z. 23 (479, Z. 14 v. u.): „ebenfalls sind".

S. 289—299. Die Einteilung in die Nrn. 1—15 ist neu.

S. 289, Z. 1 v. u. (480, Z. 5f.): „Konstante".

S. 290, Z. 4 (480, Z. 9): „Ebenfalls verlangt".

S. 290, Z. 5 v. u. (481, Z. 1) fehlt: „die".

S. 290, Z. 1 v. u. (481, Z. 5):

$$\frac{\partial \varphi_k(a_1^0 \ldots a_r^0)}{\partial a_\nu^0}.$$

S. 291, Z. 5 (481, Z. 10) fehlt: $k = 1, \ldots, r$.

S. 291, Z. 17 (481, Z. 2 v. u.) fehlt: ∂t.

S. 292, Z. 7 (482, Z. 7 v. u.): „die Reihenfolge von der".

S. 293, Z. 3 v. u. (484, Z. 8 v. u.) fehlt: $= 0$.

S. 294, Z. 15—295, Z. 4 (485, Z. 10 v. o. bis 1 v. u.) überall: α statt: a.

S. 294, Z. 5 v. u. (485, Z. 9 v. u.) fehlt die Bezeichnung (4) und die Gl. lauten:

$$\sum_{\sigma i}^{1 \ldots r} c_{i\sigma s} \alpha_i \varphi_\sigma = \omega \varphi_s \quad (s = 1 \ldots r);$$

dementsprechend erscheinen dann auch die Gl S. 294, Z. 3—1 v. u., 295, Z. 2—4 (485, Z. 6—4, 2, 1 v. u.) nicht in der richtigen Form.

S. 295, Z. 9 (486, Z. 5): „Auf die Gleichungen (4) sowie auf die Gleichungen (5)".

S. 295, Z. 11, 14, 18 (486, Z. 7f., 11, 15) überall α statt a.

S. 295, Z. 18 (486, Z. 15). Diese Gl. stimmen mit den unrichtigen Gl. (4) des ersten Druckes überein.

S. 295, Z. 8 v. u. (486, Z. 8 v. u.): „Von derselben".

S. 295, Z. 6 v. u. (486, Z. 6, 5 v. u.): „Werte λ_k"; „Die hiermit bestimmten".

S. 295, Z. 3 v. u. (486, Z. 3 v. u.): (A) statt: (2).

S. 296, Z. 2f. (487, Z. 2f.) fehlt die Bezeichnung (6).

S. 297, Z. 11 (488, Z. 13) fehlt vor Θ_{ij} der Faktor t.

S. 297, Z. 14 (488, Z. 16):

$$\sum \Theta_{ij}(ta_1 \ldots a_r) \frac{df}{da_i}.$$

S. 297, Z. 3 v. u. (488, Z. 1 v. u.):

$$\frac{d\chi_s}{dt} + \sum^{\sigma} \chi_\sigma(-t) \sum^{i} \alpha_i c_{i\sigma s} = 0.$$

S. 298, Z. 3 v. u. (489, Z. 1 v. u.):

$$\sum_{ik} \chi_k w_{ik}(ta_1 \ldots a_r) \frac{df}{da_r}.$$

S. 298, Z. 1 v. u. (490, Z. 2):

$$\sum w_{ik}(ta_1 \ldots a_r) \frac{df}{da_i}.$$

S. 299, Z. 1 (490, Z. 3): „der zweiten".

XI.

S. 301—330. Die Einteilung in die Nrn. 1—38 ist neu.

S. 303, Z. 5 (319, Z. 22): „der oben".

S. 303, Z. 16 (319, Z. 7 v. u.): „in die".

S. 303, Z. 23, 33 (320, Z. 4, 14): a^0 tatt: a_0.

S. 310, Z. 14 (328, Z. 9): „ich mehrfach mich".

S. 323, Z. 4 (343, Z. 9): „von ihr erzeugte".

S. 323, Z. 16, 19 (343, Z. 10, 7 v. u.): (31) statt: (36).

S. 325, Z. 14, 19 (345, Z. 10, 5 v. u.): (36) statt: (37).

S. 325, Z. 21, 26, 28; 326, Z. 21, 22 (345, Z. 3 v. u.; 346, Z. 3, 5; 347, Z. 4, 5): (37) statt: (37').

S. 326, Z. 3 (346, Z. 20): „Punkte x', y' gelangen".

S. 326, Z. 23 (347, Z. 6): (36) statt: (37).

S. 328, Z. 2 (348, Z. 1 v. u.): $\bar{\xi}_i$ statt: ξ_i'.

XII.

S. 331—364. Die Einteilung in die Nrn. 1—47 ist neu.

S. 332, Z. 8 v. u. (355, Z. 7): (2) statt: (4).

S. 333, Z. 20 (356, Z. 2f.): „Abschnitt I, S. 110".

S. 334, Z. 4 v. u. (357, Z. 11 v. u.): (15) statt: (16).

S. 337, Z. 10 (360, Z. 6 v. u.): „und ihren".

S. 338, Z. 7 (361, Z. 4 v. u.): „und ihren".

S. 340, Z. 13 v. u. (364, Z. 5 v. u.): „definiert werden".

S. 345, Z. 21 f. (370, Z. 6, 5 v. u.): „geeignete Zahl Veränderliche".

S. 346, Z. 9 (371, Z. 8 v. u.): Ω statt: W.

S. 349, Z. 11 (375, Z. 15): „oben erwähnten".

S. 350, Z. 12 v. u. (376, Z. 1 v. u.): „ist hinzugefügt, weil".

S. 351, Z. 4 v. u. (378, Z. 17 v. u.): „und ihren".

S. 351, Z. 2 v. u. (378, Z. 15 v. u.): „muß sie".

S. 352, Z. 3 (378, Z. 10 v. u.): „und allen ihren".

S. 352, Z. 14 (379, Z. 4): „Formen (40) und (41) von".

S. 355, Z. 9, 8 v. u. (383, Z. 7): „und ihren".

S. 355, Z. 5 v. u. (383, Z. 10): „von ihnen durch".

S. 356, Z. 5 (383, Z. 9 v. u.): (48) statt: (49).

S. 356, Z. 16 (384, Z. 4): „wählen. Diese".

S. 357, Z. 13 v. u. (385, Z. 16) fehlt die Bezeichnung: (48).

S. 363, Z. 19 (392, Z. 20): 320 u.

S. 363, Z. 5 v. u. (393, Z. 1): 1884 statt: 1883.

XIII.

S. 365, 366. Die Einteilung in die Nrn. 1—3 ist neu.

S. 365, Z. 24 (335, Z. 15): „progressives de la".

XIV.

S. 368—374. Die Einteilung in die Nrn. 1—9 ist neu.

S. 371, Z. 7 v. u. (301, Z. 15): „In Bd. 24 der Math. Ann. (1884)".

XV.

S. 377—383. Die Einteilung in die Nrn. 1—12 ist neu.

S. 377, Z. 17 (371, Z. 15 v. u.): „indem sie".

S. 377, Z. 19f. (371, Z. 13, 12 v. u.): „derjenigen Geradentransformationen".

S. 378, Z. 9 (372, Z. 14, 13 v. u.): „beliebigen".

S. 378, Z. 9 v. u. (373, Z. 6): „r den Torsionsradius".

S. 381, Z. 16 (376, Z. 8): „bilden".

S. 381, Z. 20 (376, Z. 13 f.): „bietet, indem".

S. 381, Z. 26 (376, Z. 19): „ein, indem".

S. 383, Z. 1 v. u. (378, Z. 2, 1 v. u.): „Fragen mehr eingehend".

XVI.

S. 384 f. Die Einteilung in die Nrn. 1—4 ist neu.

XVII.

S. 386—395. Die Einteilung in die Nrn. 1—15 ist neu.

S. 388, Z. 10 (324, Z. 21): „zwei" statt: $n-1$.

S. 390, Z. 15 (327, Z. 2): „vor, deren".

S. 392, Z. 6 (328, Z. 5 v. u.): „werden sollen".

S. 392, Z. 12 (329, Z. 9): „überführt".

S. 392, Z. 14 (329, Z. 11): (B) statt: (D).

S. 393, Z. 3f. (330, Z. 4): „eine bloße Funktion von x, resp. x_1 ist".

S. 393, Z. 14 v. u. (330, Z. 13 v. u.) fehlt: 1.

S. 393, Z. 2 v. u., 394, Z. 3 (331, Z. 1, 5) fehlen: 3 und 4.

S. 395, Z. 12 (332, Z. 14 v. u.): „die linke Seite".

S. 395, Z. 11 v. u. (332, Z. 5, 4 v. u.): „von einer bestimmten Ordnung wiederum".

XVIII.

S. 396—492. Die Einteilung in die Nrn. 1—125 ist neu.

S. 398, Z. 22 (47, Z. 14 v. u.): 1890 statt: 1891.

S. 399, Z. 1 (48, Z. 6): „im Abels Nachlasse".

S. 399, Z. 11, 10 v. u. (48, Z. 14, 13 v. u.): „Gruppe, zu welcher selbstverständlicher Weise die Transformation T gehört".

S. 403, Z. 12, 23 (52, Z. 12, 1 v. u.): „Konstante".

S. 404, Z. 14 v. u. (54, Z. 2): „als neues y".

S. 405, Z. 1 (54, Z. 16): „Transformationen".

S. 406, Z. 6 (55, Z. 12 v. u.): „Findet sich".

S. 406, Z. 9, 16 (55, Z. 9, 1 v. u.): „indem" statt: „weil".

S. 406, Z. 12 v. u.; 407, Z. 1 v. u. (56, Z. 11; 57, Z. 10 v. u.): „findet".

S. 408, Z. 10 v. u. (58, Z. 15): $2X_5$ statt: $3X_5$.

S. 408, Z. 9, 4 v. u. (58, Z. 16, 21): „indem" statt: „weil".

S. 409, Z. 7 v. u. (59, Z. 15). Der Satz hat keine Nummer.

S. 409, Z. 2, 1 v. u. (59, Z. 13, 12 v. u.): Die Gruppe: $Y(y)q$ steht in der vorletzten Reihe, links.

S. 410, Z. 3, 2 v. u. (60, Z. 12, 11 v. u.): η_{yyy} und η_x sind vertauscht.

S. 411, Z. 18; 412, Z. 1, 13, 32; 413, Z. 6, 15 (61, Z. 7, 27; 62, Z. 5, 23; 63, Z. 1, 9). Die Bezeichnungen $A, \ldots, F$ sind neu.

S. 412, Z. 3 v. u.—413, Z. 5 und 413, Z. 6—14 stehen in der umgekehrten Reihenfolge: S. 63, Z. 1—8; 62, Z. 9—1 v. u.

S. 413, Z. 10 v. u. (63, Z. 16): Der Satz hat keine Nummer.

S. 414, Z. 4 (63, Z. 1 v. u.): „im folgenden".

S. 414, Z. 17—20 (64, Z. 13—16): „alle Untergruppen der unendlichen Gruppe $\eta(x, y)q$, p, xp, bei denen".

S. 414, Z. 2 v. u.; 415, Z. 5 v. o., 3 v. u.; 416, Z. 5, 11 (64, Z. 2 v. u.; 65, Z. 5 v. o., 2 v. u.; 66, Z. 6, 12) fehlen die Bezeichnungen $B, \ldots, F$.

S. 416, Z. 11 v. u. (66, Z. 12 v. u.): Der Satz hat keine Nummer.

S. 417, Z. 12, 6 v. u.; 418, Z. 1, 6, 12, 18 (67, Z. 12, 6 v. u.; 68, Z 1, 7, 13, 19). Die Bezeichnungen $A, \ldots, F$ fehlen.

S. 418, Z. 4 v. u. (68, Z. 3 v. u.): Der Satz hat keine Nummer.

S. 420, Z. 8, 9, 18, 20f. (70, Z. 13, 14, 23, 26) steht für $V_k f$ immer: $V_{k+1} f$.

S. 420, Z. 7 v. u. (70, Z. 1 v. u.): c für: $\varkappa$.

S. 423, Z. 22 (74, Z. 5): $m+1>0$ statt: $m>0$.

S. 424, Z. 10 (74, Z. 2 v. u.):

$$\tfrac{1}{2}(r-1)x^{r-1}q\text{“}.$$

S. 426, Z. 6 (77, Z. 3, 4): η statt: η_m. Hinter $m =$ fehlt: 0.

S. 428, Z. 14 (79, Z. 11 v. u.) fehlt: $\varphi(x, y) =$ Konst.

S. 428, Z. 9 v. u. (80, Z. 2): „Kurvenschar $x =$ Konst."

S. 434, Z. 7 (86, Z. 5): $(k>2)$.

S. 435, Z. 2 v. u. (87, Z. 3 v. u.): 1884 statt: 1883.

S. 438, Z. 8 v. u. (90, Z. 2 v. u.): „unabhängig sind“.

S. 440, Z. 11, 12 (92, Z. 10, 9 v. u.): „Ist $n > 1$“. „ist, $m-1$ Transformationen“.

S. 442, Z. 7 (94, Z. 10 v. u.): „als eine“.

S. 442, Z. 18 f. (95, Z. 2 f.): „Ordnung $(m > 1)$, die ... können, liefern“.

S. 444, Z. 3 (96, Z. 10 v. u.): „Anderseits“.

S. 448, Z. 5 (100, Z. 10 v. u.) fehlt: (Ω).

S. 450, Z. 10 (102, Z. 1 v. u.): „Verhältnis“.

S. 451, Z. 8 (104, Z. 2): S. 526.

S. 452, Z. 5 v. u. (106, Z. 3): $(m-1)$-mal.

S. 457, Z. 5, 7 (110, Z. 9, 7 v. u.): „ist. Ist aber“. „frei sind, so“.

S. 459, Z. 6 v. u. (113, Z. 13 v. u.): „und seinen“.

S. 460, Z. 3 (113, Z. 6 v. u.): „auf als möglich“.

S. 460, Z. 12 (114, Z. 6): „der oben“.

S. 461, Z. 15 (115, Z. 14): „der sechs“.

S. 462, Z. 4 (116, Z. 5): „enthält, die Glieder“.

S. 462, Z. 6 (116, Z. 7): (a) statt: (b).

S. 462, Z. 11 v. u. (116, Z. 6 v. u.): „genügen, so daß“.

S. 464, Z. 13 v. u. (118, Z. 5 v. u.): „wir jetzt zu“.

S. 469, Z. 10, 14 (124, Z. 3, 7):

$$-p_1 \frac{\partial U}{\partial p_1} = -x_2 p_1 V_1'\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) \cdot$$
$$+ p_2 \cdot \frac{p_1}{p_2} \frac{\partial W}{\partial \, . \, .} \cdot$$

S. 469, Z. 12 v. u.; 474, Z. 13 (124, Z. 17; 130, Z. 1). Der Satz hat keine Nummer.

S. 471, Z. 1 (126, Z. 10): „benachbarten“.

S. 472, Z. 15 f. (127, Z. 5, 4 v. u.): „bekommen wir schließlich“.

S. 473, Z. 9 v. u. (129, Z. 8):

$$0 < l < E\left(\frac{m}{2}\right) \cdot$$

S. 475, Z. 11 (131, Z. 7): (E) statt: (D).

S. 475, Z. 17 (131, Z. 12):

$$0 < l < E\left(\frac{m}{2}\right) \cdot$$

S. 479, Z. 15 v. u. (135, Z. 8 v. u.): „würde die“.

S. 479, Z. 5 v. u. (136, Z. 3). Der Satz hat keine Nummer.

S. 480, Z. 4 v. u. (137, Z. 14): „enthält, welche“.

S. 482, Z. 11 (138, Z. 3 v. u.): „und seinen“.

S. 483, Z. 10 (139, Z. 1 v. u.): x_n' für: x_{n+1}'.

S. 483, Z. 14 v. u. (140, Z. 9): p_i' für: p_{n+1}'.

S. 483, Z. 4 v. u. (140, Z. 4 v. u.): (F) statt: (H).

S. 484, Z. 19 (141, Z. 9): x_n' statt: x_{n+1}'.

S. 484, Z. 26 (141, Z. 16) fehlt: $\nu = 1, \ldots, n$.

S. 485, Z. 2 v. u. (142, Z. 5 v. u.). Der Satz hat keine Nummer.

S. 486, Z. 12 f. (143, Z. 14 f.): „Berührungstransformation der $\Omega(x, y)$ hat“.

S. 487, Z. 1, 11 (144, Z. 5, 15): § 5 statt: § 4.

S. 487, Z. 15 (144, Z. 19): $\gtreqless$ statt: $>$.

S. 488, Z. 5 v. u. (145, Z. 1 v. u.): V_1 statt: $\overline{V}_1$.

S. 489, Z. 8 v. u. (146, Z. 2 v. u.): V_0 statt: $\overline{V}_0$.

S. 490, Z. 1 (147, Z. 7): σ statt: τ.

S. 490, Z. 6 v. u. (148, Z. 6): § 6 statt: § 5.

S. 491, Z. 10 (148, Z. 13 v. u.):

$$\{y_\mu, U\} = \frac{\partial U}{\partial x_\mu} - y_\mu \frac{\partial U}{\partial z} = \cdot$$

S. 491, Z. 11 v. u. (148, Z. 2 v. u.). Der Satz hat keine Nummer.

S. 492, Z. 17 (149, Z. 1 v. u.): y_ν statt: y_ν^0.

XIX.

S. 494—537. Die Einteilung in die Nummern 1—63 ist neu.

S. 494, Z. 13 (209, Z. 11): „mit allen Regelflächen“.

S. 496, Z. 10 (211, Z. 14): „Seite unnotwendig sei“.

S. 496, Z. 6 v. u. (211, Z. 7 v. u.): „Zu einigen kritischen“.

S. 497, Z. 12 v. u. (213, Z. 3): „im Kapitel 3“.

S. 498, Z. 21 (213, Z. 10 v. u.): „projektive infinitesimale Transformation“.

S. 500, Z. 6 v. u. (216, Z. 13 v. u.): „bei Bildung“.

S. 501, Z. 9 v. u. (217, Z. 10 v. u.): „findet sich“.

S. 502, Z. 14 f. (218, Z. 15 f.): „Kein Punkt oder Ebene ... bleiben“.

S. 504, Z. 4 v. u. (221, Z. 6): „finden sich“.

S. 505, Z. 13, 12 v. u. (222, Z. 2): „Geraden“.

S. 506, Z. 16 (223, Z. 4): „unter sich“.

S. 506, Z. 1 v. u. (223, Z. 12 v. u.): „auf einer“.

S. 508, Z. 9 v. u. (225, Z. 9 v. u.): „Geraden“.

S. 509, Z. 6 (226, Z. 8): „in ihr“.

S. 510, Z. 16 (227, Z. 3 v. u.): „und setzen“.

S. 511, Z. 10 v. u. (229, Z. 10): „Geraden“.

S. 512, Z. 11 f. (229, Z. 5, 4 v. u.): „transzendent sind und ... Regelflächen“.

S. 512, Z. 17 (230, Z. 2): „Geraden“.

S. 512, Z. 21 (230, Z. 6): $K = 1$.

S. 514, Z. 9, 16, 27 (232, Z. 10, 17; 233, Z. 1): „Geraden“.

S. 514, Z. 19 (232, Z. 9 v. u.): „von der Gruppe“.

S. 515, Z. 14 (233, Z. 7 v. u.): (V) statt: (V*).

S. 516, Z. 15 (234, Z. 2 v. u.): „indem jede“.

S. 518, Z. 22 (237, Z. 18): „es dem“.

S. 522, Z. 6, 24; 524, Z. 9; 525, Z. 10 (241, Z. 9 v. u.; 242, Z. 13; 244, Z. 8; 245, Z. 18). Die §§ 7—10 haben die Nrn. 6—9.

S. 523, Z. 10 (243, Z. 3): „indem ihre“.

S. 523, Z. 19, 20 f. (243, Z. 13, 15): $+ L \log z$ statt: $- L \log z$. „gleich 1 gesetzt“.

S. 525, Z. 6 v. u. (246, Z. 14): „ebenfalls von“.

S. 528, Z. 10 (249, Z. 6): „bewahrt werden“.

S. 528, Z. 3 v. u. (249, Z. 3 v. u.): „nicht gleich“.

S. 532, Z. 7 (253, Z. 12 v. u.): „Transformationen“.

S. 532 (254) fehlt in dem Ausdrucke für die Det. der Faktor -1.

S. 536, Z. 11 (258, Z. 12): $= b$.

S. 537, Z. 12 v. u. (259, Z. 2 v. u.): „Es erübrigt, den“.

XX.

S. 539—591. Die Einteilung in die Nrn. 1—77 ist neu.

S. 539, Z. 3 v. u. (261, Z. 6, 5 v. u.): „in fast zweihundert Jahren das“.

S. 540, Z. 12 f. (262, Z. 10 f.): „Setzen wir ... darin, daß“.

S. 540, Z. 13, 9, 4 v. u. (262, Z. 13, 9, 5 v. u.): „herauskommen“. „Seite darin“. „mich seinerseits“.

S. 544, Z. 17 (266, Z. 8 v. u.) fehlt der Hinweis auf die Anmerkung unterm Texte.

S. 544, Z. 13, 12 v. u. (267, Z. 1, 2): „leistet meine“. „simultanen“.

S. 545, Z. 11 (267, Z. 10 v. u.): „findet sich“.

S. 545, Z. 8 v. u. (268, Z. 8): $\frac{\partial f}{\partial u}$.

S. 546, Z. 11, 14 (268, Z. 6, 4, 3 v. u.): „Δf findet“. „Hierüber mehr später“.

S. 546, Z. 19 (269, Z. 3): „erinnern dann zuerst“.

S. 546, Z. 4—2 v. u. (269, Z. 17—15 v. u.): „$\partial f : \partial \mathfrak{x}_n$ mit der Integration ... Quadratur sich deckt. Betrachtet“.

S. 547, Z. 5 (269, Z. 9 v. u.): „wie alle“.

S. 547, Z. 15 v. u. (270, Z. 13): „besprachen neuerdings“.

S. 548, Z. 15 (271, Z. 8): „vielen“.

S. 549, Z. 8 (272, Z. 6 f.): „finden“.

S. 549, Z. 14 (272, Z. 12): „Zusammensetzung zu den“.

S. 549, Z. 19 (272, Z. 19): $k = 1, 2, \ldots, n$.

S. 549, Z. 8 v. u. (272, Z. 5 v. u.): „findet“.

S. 550, Z. 11 v. u. (273, Z. 4, 3 v. u.): „partikularen".

S. 550, Z. 4 v. u. (274, Z. 4): F_k statt: $\mathfrak{F}_k$.

S. 551, Z. 4 (274, Z. 11): $T\bar{T}^{-1}$.

S. 551, Z. 16 (274, Z. 8 v. u.): „bringen, genießen".

S. 552, Z. 10, 23 (275, Z. 8 v. u.; 276, Z. 7): $\mathfrak{x}_y = 0$, $\mathfrak{x}_x \mathfrak{y}_y = 1$.

S. 552, Z. 12 v. u. (276, Z. 9): „deren".

S. 552, Z. 3 v. u. (276, Z. 18) steht das Komma erst hinter wiederum.

S. 553, Z. 1 f. (276, Z. 8, 7 v. u.): „enthält daher Γ ... verschiedene mit ihr vertauschbare".

S. 553, Z. 4 v. u. (277, Z. 4 v. u.): „verschiedene mit ihr vertauschbare".

S. 554, Z. 18 (278, Z. 15 v. u.) fehlt der Hinweis auf die Anm. unterm Texte.

S. 555, Z. 14 v. u. (279, Z. 1 v. u.): In ω_{ki} fehlen: $x_1, \ldots, x_n$.

S. 556, Z. 14 (280, Z. 4 v. u.): „Größtmöglichste".

S. 556, Z. 17—20 (281, Z. 1—5): „Reduktion auf die Form $\partial f : \partial \mathfrak{x}_n$ von der allgemeinen ... Gruppe

$$x_k' = f_k(x_1 \ldots x_n a_1 \ldots a_r)$$

sogar ohne".

S. 556, Z. 7 v. u. (281, Z. 18): G statt: Γ.

S. 557, Z. 16 (282, Z. 5): „indem sie".

S. 558, Z. 7 (283, Z. 3) fehlt der Hinweis auf die Anm. unterm Texte.

S. 558, Z. 3 v. u. (283, Z. 2, 1 v. u.): „in den".

S. 559, Z. 14, 13 (284, Z. 11 v. u.): J_n, $\bar{J}_n$ statt: J_μ, $\bar{J}_\mu$.

S. 559, Z. 10, 9, 7 v. u. (284, Z. 8 v. u., 285, Z. 1, 3): $\mathfrak{x}_n$, $\bar{\mathfrak{x}}_n$ statt: $\mathfrak{x}_m$, $\bar{\mathfrak{x}}_m$. An der letzten Stelle fehlt: $(k = 1, \ldots, \mu)$.

S. 560, Z. 1 v. u., 561, Z. 3 (286, Z. 10, 13) überall: n statt: m.

S. 561, Z. 6 (286, Z. 17): „finden".

S. 561, Z. 19 (286, Z. 5, 4 v. u.): „ist. Darum".

S. 561, Z. 5 v. u. (287, Z. 9): n statt: m.

S. 561, Z. 4 v. u. (287, Z. 11): „auch nicht in den ω_k".

S. 562, Z. 1 (287, Z. 15): „Die Formeln".

S. 562, Z. 1 v. u., 563, Z. 3 (288, Z. 17, 20): $\mathfrak{x}_n$ statt: $\mathfrak{x}_m$.

S. 563, Z. 17 (289, Z. 7): „allgemeinen".

S. 563, Z. 6, 5, 4, 1 v. u. (289, Z. 21, 22, 24, 26): $\mathfrak{x}_n$ statt: $\mathfrak{x}_m$.

S. 563, Z. 2 v. u. (289, Z. 10 v. u.): „deren allgemeinste".

S. 564, Z. 1 (289, Z. 9 v. u.): $\bar{\mathfrak{x}}_n$ statt: $\bar{\mathfrak{x}}_m$.

S. 564, Z. 8 (289, Z. 2 v. u.): „gehörte".

S. 564, Z. 12, 11 v. u. (290, Z. 22): „Gruppe einfach ist".

S. 565, Z. 1 f. (290, Z. 6, 5 v. u.): „weniger als n ... isomorph ist".

S. 565, Z. 16 v. u. (291, Z. 14): „irreduktibel", eine Form, die Lie damals schon seit längerer Zeit aufgegeben hatte. Vgl. z. B. Abh. VIII (1889), S. 260.

S. 565, Z. 10, 9 v. u. (291, Z. 14, 13 v. u.): „Zusammensetzung ... worden ist".

S. 566, Z. 10 (292, Z. 9): $= 0$.

S. 566, Z. 12 v. u. (292, Z. 17): $(n \gtreqless 2m)$.

S. 566, Z. 5 v. u. (292, Z. 6 v. u.): „versucht zu behandeln".

S. 567, Z. 17 (293, Z. 13 v. u.): $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-2}$ statt: $\psi_1 \ldots \psi_{n-2}$.

S. 568, Z. 14 f. (294, Z. 21): „von einer anderen passend gewählten endlichen".

S. 569, Z. 9, 5 v. u. (296, Z. 5, 9) fehlen die Faktoren: $(-1)^{n-1}$, $(-1)^{n-2}$, $(-1)^{n-k}$.

S. 571, Z. 1 (297, Z. 8 v. u.): „zerlegt sodann den".

S. 571, Z. 15 (298, Z. 9): $\mathfrak{y}_1 = n\omega_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1} = n\omega_{n-1}$.

S. 571, Z. 16 (298, Z. 11): dq statt: q.

S. 571, Z. 21 (298, Z. 15): Transformation $\frac{1}{\Theta}$.

S. 571, Z. 3 v. u. (298, Z. 4, 3 v. u.): $\mathfrak{x}_k' = \mathfrak{x}_k \; (k = 1 \ldots n-1)$, $\mathfrak{x}_n' = \frac{1}{\Theta}\mathfrak{x}_n$.

S. 572, Z. 3 v. u. (300, Z. 4): „so soll das".

S. 573, Z. 14 (300, Z. 7 v. u.) fehlt: $\bar{\mathfrak{x}}_n = \mathfrak{x}_n + \omega_n(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1})$.

S. 573, Z. 6 v. u. (301, Z. 5): „namentlich $J_1 \ldots J_n$"

S. 574, Z. 18 (301, Z. 3 v. u.) fehlt der Faktor $(-1)^{n-k}$.

S. 574, Z. 1 v. u. (302, Z. 10) fehlt: $= 0$.

S. 575, (302) Gl. (9) fehlt der Faktor: $(-1)^{n-k}$ und statt x_n steht zweimal x_{n-1}.

S. 575, Z. 4 v. u. (303, Z. 12 f.): „indem sie".

S. 577, Z. 2 (304, Z. 20 f.): „Veränderlichen".

S. 577, Z. 9 f. (304, Z. 8, 7 v. u.): „konstanten Verhältnissen ... ist die Reihenfolge dieser".

S. 578, Z. 7, 8, 15 (305, Z. 7, 6 v. u.: 306, Z. 3): „Raumes τ-fach verdoppelt", „Volumina σ-fach verdoppelt", „Volumina τ-fach verdoppelt".

S. 579, Z. 18 (307, Z. 13): „gehören sollen".

S. 580, Z. 12 v. u. (308, Z. 5 v. u.): $Xf + \delta t(YX)$.

S. 581, Z. 9, 8 v. u. (310, Z. 6 f.): „in die Identität" ... „nach den Wert $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1}$".

S. 582, Z. 14 (311, Z. 1): „der gefundenen Werte".

S. 584, Z. 17 (313, Z. 14 f.): „Normalform $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}$".

S. 586, Z. 4 (315, Z. 10 f.): „Konstante".

S. 588, Z. 11 (318, Z. 3): „additiv".

S. 588, Z. 18 (318, Z. 13) fehlt: $Af = 0$.

S. 588, Z. 4, 1 v. u. (318, Z. 10, 7 v. u.): „auf Seite 55". „Früher (S. 55)".

S. 590, Z. 19 (320, Z. 15 v. u.): „sind, so kennen".

S. 591, Z. 2 (321, Z. 7): Bf statt: Af.

S. 591, Z. 7 (321, Z. 12): 59 statt: 316.

S. 591, Z. 17 (321, Z. 10 v. u.): Bf statt: $B'f$.

S. 591, Z. 12 v. u. (321, Z. 1 v. u.): „unter sich".

XXIII.

S. 602—613. Die Einteilung in die Nrn. 1—22 ist neu.

S. 604, Z. 3 (496, Z. 17): „Gruppe genießen".

S. 607, Z. 5 v. u. (499, Z. 1 v. u.): „Ebenfalls".

S. 607, Z. 19 (500, Z. 17): „einfache transitive".

S. 608, Z. 14 (501, Z. 9): „Gleichungen".

S. 608, Z. 12 v. u. (501, Z. 18): ∞^2 statt: ∞^1.

S. 608, Z. 8, 7 v. u. (501, Z. 10 v. u.): „Polartheorie".

S. 608, Z. 6 v. u. (501, Z. 9 v. u.) steht in der zweiten Klammer:

$$\frac{z + z_1}{2} - xy_1 - x_1 y.$$

S. 608, Z. 2 v. u. (501, Z. 5 v. u.): „findet".

S. 610, Z. 18, 24 (503, Z. 16, 9 v. u.): „genießen" statt: „haben" und: „besitzen".

S. 610, Z. 17 v. u. (503, Z. 12 v. u.): „der u gehören".

S. 612, Z. 2 (505, Z. 15): „und einer".

S. 613, Z. 14 v. u. (507, Z. 8): „indem uns".

XXIV.

S. 615—617. Die Einteilung in die Nrn. 1—4 ist neu.

XXV.

S. 618, Z. 17 (390, Z. 15): „im inneren".

S. 621, Z. 5 (393, Z. 11): „müßte".

S. 624, Z. 18 (397, Z. 11): „erzeugt, so zwar daß".

S. 625, Z. 10 v. u. (398, Z. 21): Bd. 25, S. 666!

S. 625, Z. 9 v. u. (398, Z. 8 v. u.): „unterordnen sich".

S. 626, Z. 11 (399, Z. 5): „läßt, indem".

S. 627, Z. 15 v. u. (400, Z. 20 f.): „Licht über eine ... in späteren Jahren".

S. 627, Z. 3 v. u. (400, Z. 5 v. u.): „sie genießt".

S. 628, Z. 5 v. u. (401, Z. 4 v. u.): „sind, deren".

S. 628, Z. 1 v. u. (402, Z. 2): „Funktionen der x".

S. 629, Z. 3 v. u. (403, Z. 2): „Eigenschaft genießt".

S. 630—637. Die Einteilung in die Nrn. 9—17 ist neu.

S. 632, Z. 9 v. u. (406, Z. 7) fehlt: ∂t.

S. 632, Z. 8 v. u. (406, Z. 8) fehlt der Hinweis auf die Anmerkung.

S. 633, Z. 4, 6 (406, Z. 12, 14) fehlt: ∂t.

S. 633, Z. 10 (406, Z. 18): n statt: m.

S. 637, Z. 17 f. (411, Z. 15): „überführt“.

XXVI.

S. 639—648. Die Einteilung in die Nrn. 1—14 ist neu.

S. 640, Z. 12 v. u. (467, Z. 1 v. u.): „genießen, daß“.

S. 644, Z. 6 (472, Z. 6): „findet“.

S. 644, Z. 10 v. u. (472, Z. 7 v. u.): „bei Determinantenbildung“.

S. 645, Z. 14 (473, Z. 16): „so sollen wir“.

S. 646, Z. 15 (474, Z. 15 v. u.): „derartigen“.

S. 646, Z. 19 (474, Z. 11 v. u.): „beliebig vorgelegte“.

S. 646, Z. 5 v. u. (475, Z. 7) fehlt: (M).

S. 647, Z. 4, 18, 26 (475, Z. 15 v. o., 8 v. u.; 476, Z. 2): „Findet sich“; „fände sich“; „finden sich“.

S. 647, Z. 10, 9 v. u. (476, Z. 7): „auflösen, indem“.

S. 647, Z. 2 v. u. (476, Z. 14 f.): „nicht ein, indem ein“.

S. 648, Z. 15 (476, Z. 6 v. u.): $x^2 + y = k$.

S. 648, Z. 6 v. u. (477, Z. 3): „Maximalkurve“.

XXVII.

S. 649—663. Die Einteilung in die Nrn. 1—19 ist neu.

S. 650, Z. 19 (343, Z. 13 v. u.): „die Reihenfolge von“.

S. 651, Z. 5 (344, Z. 15): a_n statt: a_r.

S. 651, Z. 9 v. u. (345, Z. 7): „indem die“.

S. 652, Z. 18 (345, Z. 2 v. u.): „und gibt“.

S. 653, Z. 17 (347, Z. 3): „so soll für“.

S. 655, Z. 1 f. (348, Z. 2 v. u.): „Integralinvariante; denn“.

S. 657, Z. 11 (351, Z. 13): „die vorgesetzte“.

S. 659, Z. 16 v. u. (353, Z. 10, 9 v. u.): „wohl darin“.

S. 659, Z. 12, 11 v. u. (353, Z. 6, 5 v. u.): „als Symbol einer . . . als Erzeugende einer“.

S. 659, Z. 7 v. u. (353, Z. 1 v. u.): „Einfluß geübt“.

S. 660, Z. 5 v. u. (355, Z. 3): „ich es nicht“.

S. 661, Z. 8 (355, Z. 15): „mit gerade“.

S. 661, Z. 17 (355, Z. 14 v. u.): „Herrn Königs Note“.

S. 661, Z. 2 v. u. (356, Z. 6): „ihre Beziehung“.

S. 662, Z. 17 (356, Z. 15 v. u.): „reproduziert hat und“.

S. 662, Z. 12 v. u. (356, Z. 3 v. u.): „entfernten“.

XXVIII.

S. 664—701. Die Einteilung in die Nrn. 1—45 ist neu.

S. 664, Z. 10 (369, Z. 7): dw statt: $d\omega$.

S. 664, Z. 14 (369, Z. 11): „es gab“.

S. 666, Z. 1, 3 (371, Z. 14, 16): „im Kapitel 4“; „allgemeinen“.

S. 666, Z. 5 v. u. (372, Z. 12): „von vorneherein“; so noch öfters.

S. 667, Z. 22 (373, Z. 4): „deren Determinante“.

S. 667, Z. 24 f. (373, Z. 6 f.): „daß auch nicht die Kurven des Raumes Eigenschaften“.

S. 669, Z. 1 (374, Z. 12 v. u.): „gegenüber allen Punkttransformationen“.

S. 669, Z. 4, 5 (374, Z. 9, 8 v. u.): „auch nicht für das . . . Gruppen ein einfaches“.

S. 671, Z. 19 (377, Z. 16): 348 statt: 347.

S. 672, Z. 5, 15 (378, Z. 2, 11): „deren Determinante“.

S. 673, Z. 3, 4 (379, Z. 4, 5): „aber nicht der . . . Lesers entgehen“.

S. 674, Z. 8, 10, 11, 16, 19, 21—23, 27 (380, Z. 12, 14, 15, 20, 23, 25—27; 381, Z. 1) fehlt überall ∂t.

S. 677, Z. 13 (383, Z. 4 v. u.): „ihre Form“.

S. 682, Z. 13 (389, Z. 17): (2′) statt: (2).

S. 683, Z. 11 (390, Z. 14): (5) statt: (6).

S. 684, Z. 11 v. u. (391, Z. 6 v. u.): „indem die“.

S. 685, Z. 10 (392, Z. 11 v. u.): (5) statt: (5′).

S. 685, Z. 8, 7 v. u. (393, Z. 5, 6): (5) statt: (5′); $\frac{\partial f}{\partial y}$ oder $\frac{\partial f}{\partial z}$.

S. 686, Z. 15 (393, Z. 4 v. u.): „und geben“.

S. 687, Z. 5 (394, Z. 10 v. u.): Av statt: $\bar{A}v$.

S. 689, Z. 6 (396, Z. 4 v. u.): „gibt eine“.

S. 689, Z. 10 (397, Z. 1): A statt: $\bar{A}$.

S. 689, Z. 6 v. u. (397, Z. 17): „Geben nämlich“.

S. 690, Z. 2 (397, Z. 7 v. u.):

$$Ap + Bq + C.$$

S. 690, Z. 13 v. u. (398, Z. 18): „Falle von der“.

S. 692, Z. 8, 11 (400, Z. 7, 10 f.): „$Xf = 0$“; „unterordnet sich somit . . . unter der Theorie“.

S. 695, Z. 15 (403, Z. 10 v. u.): „Reihe partielle“.

S. 696, Z. 1, 20 (404, Z. 13 v. o., 1 v. u.): „finden sich“.

S. 696, Z. 11 (404, Z. 11 v. u.): „indem sie“.

S. 697, Z. 20 f. (406, Z. 1): „Da die . . . ist, so muß“.

S. 698, Z. 5, 4 v. u. (407, Z. 20): „Integrale bezüglich“.

S. 699, Z. 5 (407, Z. 6 v. u.): $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}$ statt: $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}$.

S. 701, Z. 4 (410, Z. 3): „Gruppe Lösungen Φ“.

XXIX.

S. 702—749. Die Einteilung in die Nrn. 1—61 ist neu.

S. 702, Z. 7 v. u. (2, Z. 4): „Anderseits“, so noch mehrmals.

S. 703, Z. 9 (2, Z. 15): „wahrscheinlicherweise“.

S. 703, Z. 4 v. u. (2, Z. 4 v. u.): „die von den“.

S. 704, Z. 6 (3, Z. 12): „zu Integration“; „von vorneherein“, dies noch mehrmals.

S. 704, Z. 13 (3, Z. 18): „den oben“.

S. 704, Z. 18 (3, Z. 22): „hinzuführen“.

S. 704, Z. 11 v. u. (3, Z. 8 v. u.): „Finden sich“.

S. 704, Z. 7 v. u. (3, Z. 6 v. u.): IX statt: XI.

S. 705, Z. 19 (4, Z. 19): ξ_{ki} statt: ξ'_{ki}.

S. 705, Z. 5 v. u. (5, Z. 1): „deren allgemeinste“.

S. 708, Z. 11 (8, Z. 6): „können. Das“.

S. 708, Z. 7 v. u. (8, Z. 3 v. u.) fehlt: $= \begin{vmatrix} x_3 x_4 \\ x_1 x_2 \end{vmatrix}$. Diese Abkürzung habe ich im folgenden immer für: $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}$ eingesetzt.

S. 711, Z. 3 (11, Z. 11 v. u.): „über zweidimensionale Mannigfaltigkeiten“.

S. 711, Z. 6 (11, Z. 8, 7 v. u.): „Veränderlichen“.

S. 712, Z. 15 (12, Z. 2 v. u.) fehlt: $= \begin{vmatrix} x_3 x_4 \\ x_1 x_2 \end{vmatrix}$.

S. 712, Z. 17 (13, Z. 1): „Satz 1, daß“.

S. 716, Z. 7 (17, Z. 13): „sagt, daß“.

S. 716, Z. 8 v. u. (18, Z. 6) fehlt: D.

S. 717, Z. 4, 6 (18, Z. 10, 8 v. u.): „Variabeländerung“, so noch mehrmals; „auch im transformierten“.

S. 717, Z. 13 v. u. (19, Z. 7) fehlt: D_1.

S. 717, Z. 6 v. u. (19, Z. 15): „lineäre“.

S. 719, Z. 16 (21, Z. 3 v. u.): „ist es aber“.

S. 719, Z. 3—1 v. u. (22, Z. 14—16) fehlt die Bezeichnung (9′).

S. 720, Z. 6 (22, Z. 4 v. u.): „so kann“.

S. 721, Z. 7 v. u. (24, Z. 4 v. u.): „Konstante“.

S. 722, Z. 15 (25, Z. 5 v. u.): „Transformation“.

S. 724, Z. 12 (28, Z. 7): „sie sollen“.

S. 725, Z. 2, 3 (29, Z. 9, 10) fehlt: $\frac{1}{C}$.

S. 725, Z. 4, 6 (29, Z. 11, 13): „Es erübrigt noch, den Fall“; „diesem Fall“.

S. 725, Z. 12, 11 v. u. (30, Z. 1): „über zweidimensionale Mannigfaltigkeiten“.

S. 726, Z. 8 v. u. (31, Z. 7): „$A = 0$, $\mathfrak{A} = 0$ wird".

S. 726, Z. 3 v. u. (31, Z. 11 v. u.): vor dem zweiten Integrale steht: $+\cdot$

S. 727, Z. 3 (31, Z. 6 v. u.) steht vor $p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q$ der Faktor C.

S. 727, Z. 7 f. (31, Z. 2, 1 v. u.):

$$-(k_3 x W_x - k_3 W + \text{const.})\, z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$+(k_2 x W_x - k_2 W + \text{const.})\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

S. 727, Z. 9, 7 v. u. (32, Z. 10, 8 v. u.): „Seien zunächst". „Ist $C = 0$".

S. 728, Z. 2, 10 (33, Z. 1, 8): „und ebenfalls"; „Konstante".

S. 728, Z. 11 v. u. (33, Z. 5 v. u.): 25 statt: 27.

S. 731, Z. 12 (37, Z. 2): „indem die".

S. 731, Z. 7 v. u. (37, Z. 7 v. u.): „zu Widerspruch".

S. 732, Z. 12 f. (38, nach Z. 10) ist die Nr. 30a eingefügt auf Grund der Mitteilung, die Guldberg und Størmer in ihrer Note 42 (S. 70 des ersten Druckes) über das Liesche Manuskript machen.

S. 733, Z. 11 v. u., 734, Z. 13 (40, Z. 3, 41, Z. 1): „Fall".

S. 735, Z. 14 (42, Z. 9): „kriegen wir".

S. 735, Z. 6 v. u. (42, Z. 1 v. u.): „aus ihnen".

S. 736, Z. 7 (43, Z. 12): $\mathfrak{A}_1$ statt: A_1; $\mathfrak{B}_1$ fehlt.

S. 738, Z. 17 (46, Z. 1 v. u.): „da L und V".

S. 738, Z. 4 v. u. (47, Z. 11): „ihre Form".

S. 740, Z. 4 v. u. (50, Z. 6): „im jeden einzelnen Fall".

S. 741, Z. 15 v. u., 8 v. u. (51, Z. 3, 9): „Konstante".

S 742, Z. 1 (51, Z. 16 v. u.): „beobachten wir".

S. 743, Z. 11 v. u. (53, Z. 9): „in einer".

S. 745, Z. 2 (54, Z. 9 v. u.) fehlt: b.

S. 746, Z. 17, 22 (56, Z. 13, 18): „indem die"; „indem alle".

S. 746, Z. 4 v. u., 747, Z. 15 (57, Z. 1 v. o., 10 v. u.) fehlt: Konst.

S. 747, Z 12 v. u. (58, Z. 1): „und die infinitesimalen".

S. 748, Z. 10 v. u. (59, Z. 11): „geben zwei."

S. 749, Z. 13 (60, Z. 3): $\mu(x)C(x)$ statt: $\mu(x)\varphi(x)$.

Anmerkungen.

Zu Abhandlung I, S. 1—94.

Abschnitt I, S. 1—16 ist eine verkürzte Umarbeitung von Bd. V d. Ausg., Abh. II (1876). Neu ist nur (in § 3, Nr. 4, S. 9—11) die Einführung der infinitesimalen Trff. verschiedener Ordnung (s. Bd. V d. Ausg., Abh. IV (1878), S. 104 f.), die sehr schnell zu dem Satze führt, daß die Gliederzahl r nicht > 3 sein kann. Außerdem wird dadurch wesentlich Raum gespart, daß Lie zunächst, in Nr. 2, 3, S. 5—9 die Zahl r beliebig läßt, statt jeden der Fälle: $r = 1, 2, 3, 4$ einzeln zu behandeln.

S. 1, Z. 4 v. u. Hier ist auch noch auf den Schluß der vom 5. 7. 1874 datierten Abh. „Begründung einer Invariantentheorie der B. T." zu verweisen, wo Lie zum ersten Male die Relationen: $(H_i H_k) = \Sigma c_{ik\nu} H_\nu$ mitteilt, die eine endliche kont. Gr. von homogenen B. T. definieren. Siehe Ann. Bd. VIII, S. 303 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. I, am Schlusse).

S. 2, Z. 12. Vgl. Bd. V, Abh. II (1876), S. 10, Z. 6 und S. *616*. Freilich hält Lie diese Festsetzung hier gar nicht ein, obgleich er sie S. 16, Z. 19—22 wiederholt. Man vgl. S. 7, Z. 10—15 und S. 21, Z. 17—22.

S. 5, Z. 12—22. Vgl. Bd. V, Abh. I (1874), S. 2; Abh. II (1876), S. 14, 19, 32 f.; Abh. III (1876), S. 47 f., Nr. 8 und S. *616*, Z. 15—7 v. u. Am Schlusse der vorliegenden Abh., auf S. 94, Z. 11—16 zeigt Lie, warum die hier aufgestellte Forderung berechtigt ist.

S. 10, Z. 15—11 v. u. Hier hätten $a_0, b_1, \ldots, h_{r-2}, k_{r-1}$ alle $= 1$ gesetzt werden sollen.

S. 14, Z. 8—1 v. u. Vgl. Bd. V, S. *618*, Z. 4 v. u.—*619*, Z. 6.

S. 16—26 ist eine Umarbeitung von Bd. V, Abh. III (1876), S. 42—58, jedoch sind die dortigen Entwickelungen S. 51—53 durch andere ersetzt, die für $n = 1$ und für $r = 2, 3, 4$ schon in Bd. V, Abh. II (1876), S. 22 f., Nr. 14; S. 35 f., Nr. 28; S. 39 f., Nr. 31 gemacht und hier in Bd. VI, Abh. I, S. 7—9 für $n = 1$ und beliebiges r dargestellt sind. Wahrscheinlich ist Lie durch Betrachtungen von der Art, wie ich sie Bd. V, S. *617*, Z. 15 v. u.—*618*, Z. 5 auseinandergesetzt habe, dazu veranlaßt worden, das 1876 benutzte Verfahren wieder aufzunehmen. Außer der eben besprochenen Änderung hat Lie bei der Umarbeitung noch eine andere vorgenommen. Er hat nämlich auf S. 26 den ungenügenden Beweis Bd. V, S. 56 f., Nr. 17 (vgl. ebd. S. *618*) durch einen einwandfreien ersetzt.

S. 19, Z. 11 — S. 20, Z. 4. Die inf. Trff., von denen hier die Rede ist, sind genau genommen unendlich kleine Trff. in dem Sinne, der hier in Abh. XI (1891), S. 304 f. erklärt ist. Vgl. auch Bd. V, S. *713*.

S. 24, Z. 5—11. Einen Beweis für diese Umkehrung hatte Lie schon 1878 gegeben, d. Ausg. Bd V, Abh. IV, S. 78—84, vgl. auch S. *620* f. Einen anderen gibt er Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 151—158. Noch einen andern findet man hier in Abh. IX (1890), S. 267—287.

S. 24, Z. 7 v. u. „Früher", s. S. 21, Nr. 10.

S. 25, Z. 15 f. Die a_k sind durch die Gl. Z. 5 bestimmt.

S. 25, Z. 17—20. Es ist merkwürdig, daß Lie hier gar nicht erwähnt, daß diese Trff. eine eingliedrige Gruppe bilden, die man als von der inf. Trf.: $\delta x_i = X_i \delta t$

erzeugt betrachten kann. Tatsächlich ist hier der Satz bewiesen: Enthält eine r-gliedrige Gruppe die unendlich kleine Trf.: $\delta x_i = X_i \delta t$, so enthält sie auch die eingliedrige Gruppe, der diese unendl. kl. Trf. angehört und die von dieser erzeugt ist.

S. 26—44. Was in Bd. V d. Ausg. Abh. IV (1878), S. 107—109 nur ganz kurz angedeutet ist, wird hier in großer Ausführlichkeit entwickelt. Eine knapper gefaßte Darstellung findet man Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 29—34.

S. 26, Z. 1. Unter „Lösungen" versteht Lie hier eine Funktion von $x_1, \ldots, x_n, t$, deren vollständiger Differentialquotient nach t vermöge des simultanen Systems verschwindet. Später gebraucht er dafür den Ausdruck: „Integralfunktion des sim. Systems", s. Th. d. Trfsgr. B. I (1888), S. 83.

S. 26, Z. 4. Hier hätte es sich empfohlen, anstatt des f einen andern Buchstaben zu benutzen.

S. 26, Z. 3—1 v. u. Die ψ_q enthalten dann eine gewisse positive ganze Potenz von $t - t_0$ als gemeinsamen Faktor, und diesen Faktor hat man wegzulassen, bevor man $t = t_0$ setzt.

S. 39, Z. 14—11 v. u. Später würde Lie gesagt haben: „daß $\varphi = \text{const.}$ ein Integral" oder „daß φ eine Integralfunktion".

S. 40, Z. 3—1 v. u. Es wird nämlich jeder Punkt der Ebene von allen inf. Trff. der Gruppe nach einundderselben Richtung fortgeführt. Bei der Gruppe bleibt daher eine gew. Diffgl. 1. O. invariant, und jeder Punkt bewegt sich auf der hindurchgehenden Integralkurve dieser Gl.

S. 44—46. Umarbeitung von Bd. V, Abh. III (1878), S. 117—119. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 36—38.

S. 45, Z. 10—13. Hier hätte bemerkt werden sollen, daß diese Form bei jeder Transformation: $x_1 = x$, $y_1 = w(x, y)$ erhalten bleibt. Darauf beruht es ja, daß nachher Transformationen von dieser Form benutzt werden dürfen, um die hier betrachteten Gruppen auf Normalformen zu bringen.

S. 46—53. Umarbeitung von Bd. V, Abh. III, S. 119—125. Die jetzige Darstellung ist wieder neu bearbeitet: Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 38—42.

S. 47, Z. 10—13. Vgl. die Anm. zu S. 45, Z. 10—13.

S. 49, Z. 14 f. Man findet nämlich:

$$\eta = -\frac{a_0 a_2 + 2a_1}{a_2^2} - \frac{2a_1}{a_2} y + Ce^{a_2 y},$$

wo die Konstante C nicht gleich Null sein kann, weil man sonst nicht drei unabhängige inf. Trff. hätte.

S. 51, Z. 10 v. u. Ist $\alpha \neq 0$, so kann man: $\alpha X_2 - \beta X_1$ als neues X_1 benutzen.

S. 51, Z. 7, 6 v. u. Dabei ergibt sich:

$$X_2(\Sigma \alpha_i X_i + \alpha_0 y) = \Sigma \beta_i X_i X_1 + \beta_0 X_1 y + \beta(y \Sigma \alpha_i X_i + \tfrac{1}{2}\alpha_0 y^2 + f(x)),$$

also:

$$X_2 \alpha_0 = \beta \Sigma \alpha_i X_i + \beta_0 X_1, \quad \beta \alpha_0 = 0.$$

Ist $\beta \neq 0$, so folgt: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$, also: $\eta_y = \alpha_1$, da ja $\alpha = 0$. Ist $\beta = 0$, so folgt: $\beta_0 X_1 = \alpha_0 X_2$, mithin: $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

S. 52, Z. 8: „im vorangehenden Falle", s. S. 50.

S. 53—59, § 13. Mit diesem § hat es eine besondere Bewandtnis. Während nämlich in § 14 die erste Gleichungsnummer, (17) auf S. 60, sich an die letzte in § 12, (16) auf S. 43, anschließt, werden in § 13, auf S. 53 f., die Nrn. (13), (14), (15) wiederholt, ein Übelstand, den ich durch Hinzufügung von Sternen beseitigt habe. Man darf daraus wohl schließen, daß Lie im Verlaufe der Ausarbeitung die ursprünglich beabsichtigte Anordnung der Darstellung abgeändert, jedoch versäumt hat, die dadurch nötig gewordenen Änderungen der Bezeichnung vollständig durchzuführen.

In Abh. IV (1878) von Bd. V d. Ausg. schickt Lie in § 3, S. 88—93 einige allgemeine Sätze über lineare (homogene) Gruppen voraus und leitet daraus in § 4, S. 93—96 gewisse Sätze über beliebige Gruppen ab, deren er später bei der Bestimmung der Gruppen der Ebene bedarf. Auf diese stützt er sich dann bei der Bestimmung der Gruppen, die die invariante Kurvenschar: $x = \text{const.}$ eingliedrig transformieren, a. a. O. S. 125, Z. 1 v. u.—126, Z. 8, S. 127, Z. 11—15, endlich auch noch in dem Falle, daß die Kurven: $x = \text{const.}$ zweigliedrig transformiert werden, S. 128, Z. 11—3 v. u., S. 130, Z. 11—15.

In der vorliegenden Abh. entwickelt Lie in § 13 nur einen Teil jener früher aufgestellten Sätze über lineare (homogene) Gruppen; er beschränkt sich nämlich auf die, die er nachher wirklich braucht. Bei den Beweisen, die er auf ganz anderem Wege führt, ist er viel sorgfältiger und geht auf alle Einzelheiten ein. Auch die Anwendungen auf beliebige Gruppen begründet er in ganz neuer Weise (§ 14, S. 60 f., § 15, Nr. 45, S. 64—66).

S. 53, Z. 16. Cauchy, Exercices de Math. (1826—30) Bd. I, S. 261; Bd. II, S. 22, 210. — C. R. Bd. 8 (1839), S. 827—830, 845—865 (Oeuvres compl. I. Ser., Bd. IV (1884), S. 369—373, 373—397). Exercices d'analyse Bd. I (1840), S. 53.

S. 53, Z. 11 v. u. Alles Folgende hätte an Lesbarkeit gewonnen, wenn die Buchstaben ξ und η vertauscht worden wären.

S. 55, Z. 1 f. Bestände nämlich eine Identität von der Form:

$$\Sigma \alpha_i \xi_{q+i} + \Sigma \beta_i x_{q+i} + \Sigma \gamma_i x_i = 0,$$

so käme durch Anwendung der Operation Af:

$$\Sigma \alpha_i (\xi_{q+i} + 2x_{q+i} + x_i) + \Sigma \beta_i (x_{q+i} + x_i) + \Sigma \gamma_i x_i = 0,$$

also:

$$\Sigma \alpha_i (2x_{q+i} + x_i) + \Sigma \beta_i x_i = 0,$$

sodaß die α_i, β_i, γ_i alle verschwänden.

S. 55, Z. 9—11. Man habe für $\mu = 1, 2, \ldots, m$ gefunden:

$$Bx_{(\mu-1)q+i} = \xi_{(\mu-1)q+i} = x_{\mu q+i},$$

$$Ax_{\mu q+i} = \eta_{\mu q+i} = x_{\mu q+i} + \mu x_{(\mu-1)q+i} + \tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)x_{(\mu-2)q+i} + \cdots + \mu x_{q+i} + x_i.$$

Aus:

$$A(\xi_{mq+i}) - B(\eta_{mq+i}) = \eta_{mq+i}$$

folgt dann:

$$\begin{aligned} A(\xi_{mq+i}) &= \xi_{mq+i} + m x_{mq+i} + \tfrac{1}{2} m(m-1) x_{(m-1)q+i} + \\ &\quad + \cdots + m x_{2q+i} + x_{q+i} + \eta_{mq+i} = \\ &= \xi_{mq+i} + (m+1) x_{mq+i} + \tfrac{1}{2}(m+1) m x_{mq+i} + \\ &\quad + \cdots + (m+1) x_{q+i} + x_i, \end{aligned}$$

und es ergibt sich, daß keine Relation von der Form:

$$\Sigma \alpha_i \xi_{mq+i} + \Sigma \beta_i x_{mq+i} + \Sigma \gamma_i x_{(m-1)q+i} + \cdots = 0$$

bestehen kann, weil man durch Anwendung der Operation Af findet, daß alle α_i, β_i, ... verschwinden. Setzt man nunmehr: $x_{(m+1)q+i} = \xi_{mq+i}$, so gilt die Formel für $\eta_{\mu q+i}$ auch für $\mu = m + 1$, das heißt, man kann sie als für jedes μ gültig annehmen, was mit der Endlichkeit von n unvereinbar ist.

S. 56, Z. 11—5 v. u. Sucht man n Größen x_i derart, daß $Ax_i = \varrho x_i$ wird für $i = 1, \ldots, n$, so muß ϱ einer algebraischen Gleichung n-ten Grades genügen, der sogenannten charakteristischen Gl. der lin. hom. inf. Trf. Af. Die hier auf-

gestellte Normalform von Af zeigt, daß die zugehörige char. Gl. lauter verschwin-
dende Wurzeln hat. Demnach ist hier tatsächlich der Satz bewiesen:

Stehen zwei lin. hom. inf. Trff. Af und Bf in der Beziehung: $ABf - BAf$ $= Af$, so hat die char. Gl. von Af lauter verschwindende Wurzeln.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar ein Satz von Killing[1]):

Es seien: $X_1 f, \ldots, X_r f$ unabhängige inf. Trff. einer r-gliedrigen Gruppe und $E_1 f, \ldots, E_r f$ die zugehörigen lin. hom. inf. Trff. der adjungierten Gruppe. Stehen dann die inf. Trff.: $\Sigma \lambda_k X_k f = Yf$ und: $\Sigma \mu_k X_k f = Zf$ in der Beziehung: (YZ) $= YZf - ZYf = Yf$, so hat die char. Gl. der inf. Trf.: $\Sigma \lambda_k E_k f$ lauter verschwindende Wurzeln.

In der Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), auf S. 774 erwähnt Lie diesen Killingschen Satz, ohne zu bemerken, daß er selbst schon 1880 einen noch allgemeineren Satz bewiesen hatte.

Es ist bemerkenswert, daß Lie seinen Satz indirekt beweist, indem er zeigt, daß das Gegenteil der Behauptung des Satzes nur dann eintreten kann, wenn die Zahl n der Veränderlichen unendlich ist. Ein von mir stammender Beweis des Killingschen Satzes (s. K. Umlauf, Über die Zusammensetzung der endlichen kontin. Trfsgr. insbesondere der Gruppen vom Range Null, Dissertation, Leipzig 1891, S. 19—21) beruht auf einem Verfahren, das zu demselben Ergebnisse führt, und bei dem die Binomialkoeffizienten in ganz ähnlicher Weise auftreten.

Am schnellsten läßt sich der Liesche Satz beweisen, wenn man die inf. lin. hom. Trf. Af als eine bilineare Form A auffaßt und mit den Potenzen $A, A^2, A^3, \ldots$ dieser bilinearen Form operiert. Bekanntlich genügen diese Potenzen einer Gl.:

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n = 0,$$

die, wenn man das Symbol A durch eine Zahl ϱ ersetzt, in die char. Gl. von Af übergeht. Denkt man sich in Af neue Veränderliche eingeführt vermöge der lin. hom. inf. Trf. Bf, so geht Af über in:

$$Af + (AB)\delta t = (1 + \delta t) Af$$

(s. hier Abh. III, S. 162). Da nun die char. Gl. von der Wahl der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig ist, so muß die inf. Trf.: $(1 + \delta t)Af$ dieselbe charakteristische Gl. haben, wie Af, was offenbar nur der Fall ist, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alle verschwinden.

S. 57, Z. 3—1 v. u. Ich glaube nicht, daß der Satz damals wirklich schon in irgend einer Form bekannt war. Das allgemeinere Theorem, an das Lie denkt, findet man bewiesen in Bd. V d. Ausg., Abh. IV (1878), S. 88—93. Man sehe dort insbesondere Satz 5, S. 89, aus dem dann das Theorem III, S. 92 abgeleitet wird.

Ist nämlich: $(AB) = Af$, so kann man immer Af auf die Form:

$$Af = \alpha(x_1 p_1 + \cdots + x_q p_q) + l_{q+1} p_{q+1} + \cdots$$

bringen, wo α eine Wurzel der char. Gl. von Af ist und wo $q \gtreqless 1$. Dann kann man Satz 5, a. a. O. anwenden und daher Af und Bf gleichzeitig auf die Form:

$$Af = \alpha\,(x_1' p_1' + \cdots + x_{q'}' p_{q'}') + \cdots$$
$$Bf = \alpha'(x_1' p_1' + \cdots + x_{q'}' p_{q'}') + \cdots$$

bringen, wo die weggelassenen Glieder von: $p'_1, \ldots, p'_{q'}$ frei sind und wo $q' \leq q$ ist.

---

1) W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, Math. Ann. Bd. 31, S. 270 (1888).

Aus $(AB) = Af$ folgt dann sofort: $\alpha = 0$, und auf dem a. a. O., S. 91 angegebenen Wege gelangt man zu dem Satze, der hier auf S. 56 ausgesprochen ist.

S. 57 f., Nr. 37. Im Wesentlichen nach Bd. V, Abh. III (1876), S. 63 f., Nr. 22.

S. 58, Nr. 38. Die hier aufgestellte lineare homogene Gruppe ist nicht die in Bd. V, Abh. III (1876), S. 73 aufgestellte adjungierte Gruppe der Gruppe: $A_1 f, \ldots, A_r f$, sondern die dazu dualistische Gruppe. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), Kap. 19. Ordnet man jeder inf. Trf.: $\Sigma e_k A_k f$ die inf. Trf.: $\Sigma e_k B_k f$ zu, so ist die neue Gruppe isomorph auf die alte bezogen.

Am durchsichtigsten wird die Bildung der inf. Trff. $B_k f$, wenn man diese geradezu als inf. Trff. in gewissen Größen: $A_1, \ldots, A_r$ auffaßt und so schreibt:

$$B_i f = \sum_k^{1\ldots r} (A_i A_k) \frac{\partial f}{\partial A_k} \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Dann erkennt man deutlich, daß die inf. Trff. $B_i f$ die Schar: $\Sigma e_k A_k$ der inf. Trff. der Gruppe: $A_1 f, \ldots, A_r f$ transformiert. Die r inf. Trff. $A_1 f, \ldots, A_r f$, die dabei benutzt werden, kann man zweckmäßig als eine Basis der Schar der inf. Trff.: $\Sigma e_k A_k f$ der ursprünglichen Gr. bezeichnen. Die $B_i f$ bilden ebenso eine Basis der Schar der inf. Trff. der neuen Gruppe, und die isomorphe Beziehung zwischen beiden Gruppen ist so beschaffen, daß jene Basis dieser zugeordnet ist.

Die Rechnungen, die Lie nachher auf S. 60 und 65 f. ausführt, sind nun nichts andres als Beweise für besondere Fälle des Satzes, daß die neue Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ und die isomorphe Beziehung zwischen dieser und der ursprünglichen Gruppe unabhängig sind von der benutzten Basis: $A_1 f, \ldots, A_r f$.

In der Tat, setzt man wie auf S. 60:

$$A_i' = \sum_\mu \alpha_{i\mu} A_\mu, \quad \Delta . A_i = \sum_\mu \beta_{\mu i} A'_\mu,$$

so wird:

$$(A_i' A_k') = \sum_{\mu\nu} \alpha_{i\mu} \alpha_{k\nu} (A_\mu A_\nu) = \sum_s c'_{iks} A'_s.$$

Setzt man daher weiter:

$$B_i' f = \sum_k^{1\ldots r} (A_i' A_k') \frac{\partial f}{\partial A_k'},$$

so kommt:

$$\begin{aligned} B_i' f &= \sum_{k\mu\nu}^{1\ldots r} \alpha_{i\mu} \alpha_{k\nu} (A_\mu A_\nu) \sum_\tau^{1\ldots r} \frac{\partial f}{\partial A_\tau} \frac{\beta_{k\tau}}{\Delta} \\ &= \sum_{\mu\nu} \alpha_{i\mu} (A_\mu A_\nu) \frac{\partial f}{\partial A_\nu} \\ &= \sum_\mu \alpha_{i\mu} B_\mu f, \end{aligned}$$

womit unsre Behauptung bewiesen ist.

S. 58, Z. 9, 8 v. u. Das Verschwinden dieser Ausdrücke folgt aus den Relationen Z. 6 v. o. nur dann mit Sicherheit, wenn $A_1 f, \ldots, A_r f$ unabhängige inf. Trff. sind. Dies der Grund für die von mir auf S. 57, Z. 17, S. 58, Z. 4 gemachten Zusätze in eckigen Klammern.

S. 59, Z. 11 f. Die Trff. von der Form: $x_1 = x$, $Y_1 = Y(x, y)$, die man benutzen darf, um die Gruppen auf Normalformen zurückzuführen (vgl. die Anm. zu S. 45, Z. 10—13), sind ja auch so beschaffen, daß die Form der Untergr.: $\eta_1 q, \ldots, \eta_r q$ erhalten bleibt.

S. 59—63, § 14. Eine Umarbeitung von Bd. V, Abh. IV (1878), S. 125—127. Später hat Lie die Bestimmung dieser Gruppenklasse ganz wesentlich vereinfacht, namentlich dadurch, daß er einen Weg fand, auf dem die Theorien von § 13 entbehrt werden können. Siehe Bd. V d. Ausg., Abh. XIX (1884), S. 453—455. Hierauf beruht die Darstellung Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 42—45.

S. 60. Setzt man:

$$A_k f = \eta_k q \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,r)}, \quad A_{r+1} f = p + \eta q,$$

so wird:

$$(A_{r+1} A_k) = -\sum_j^{1\ldots r} c_{kj} A_j f,$$

also nach S. 58 und *773* die $A_{r+1}f$ entsprechende lin. hom. inf. Trf.:

$$B_{r+1} f = \sum_k^{1\ldots r+1} (A_{r+1} A_k) \frac{\partial f}{\partial A_k} = -\sum_{kj}^{1\ldots r} c_{kj} A_j \frac{\partial f}{\partial A_k} = -Bf,$$

da die A_k nichts andres sind als die von Lie benutzten x_k. Ersetzt man nun die Basis: $A_1, \ldots, A_{r+1}$ durch eine andre: $A_1', \ldots, A_{r+1}'$, wo

$$A_i' = \sum_k^{1\ldots r} \alpha_{ik} A_k \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,r)}$$

und $A_{r+1}' = A_{r+1}$, so wird:

$$(A_{r+1}' A_k') = -\sum_j^{1\ldots r} c_{kj}' A_j'$$

und:

$$B_{r+1}' f = -\sum_{kj}^{1\ldots r} c_{kj}' A_j' \frac{\partial f}{\partial A_k'}$$

die neue Form, die $-Bf$ in den neuen Veränderlichen erhält.

Mir kam es hier darauf an, die Entwickelungen von Lie möglichst durchsichtig zu gestalten, so daß die Rechnungen auf S. 60 nicht als ein überraschender Kunstgriff erscheinen und die Anwendung auf S. 61 unmittelbar einleuchtet. In Wahrheit hat aber Lie durch die von ihm gewählte Darstellung den eigentlichen Gedankengang, der ihn zu dem Satze 20, S. 61 geführt hat, vollkommen verschleiert. Diesen Gedankengang hat er erst 1884 mitgeteilt, Bd. V d. Ausg., Abh. XIX, S. 457 f., Nr. 5.

S. 61, Z. 21. Vgl. Bd. V d. Ausg., S. *628*, Anm. zu S. 126, Z. 9 f.

S. 64—70, § 15. Umarbeitung von Bd. V, Abh. IV (1878), S. 128—130. Auch diese Entwickelungen hat Lie später wesentlich vereinfacht und dabei namentlich die umständlichen Betrachtungen S 65 f. erspart; siehe Bd. V, Abh. XIX (1884), S. 455—457 und Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 45—48.

S. 64, Z. 10 v. u. Eigentlich müßte es heißen: „daß η gleich Null gemacht werden kann."

S. 64, Z. 8 v. u.—66, Z. 14. Wir setzen:

$$A_k f = X_k q \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,r)},$$
$$A_{r+1} f = p + \eta_1 q, \quad A_{r+2} f = xp + \eta_2 q,$$

dann ist:

$$(A_i A_k) = 0,$$

$$(A_i A_{r+1}) = \sum_s^{1\ldots r} c_{is} A_s f, \quad (A_i A_{r+2}) = \sum_s^{1\ldots r} d_{is} A_s f,$$

$$(A_{r+1} A_{r+2}) = A_{r+1} f + \sum_s^{1\ldots r} c_s A_s f,$$

und die inf. Trff. der zugehörigen lin. hom. Gr. werden nach S. *773*:

$$B_i f = \sum_s^{1\ldots r} c_{is} A_s \frac{\partial f}{\partial A_{r+1}} + \sum_s^{1\ldots r} d_{is} A_s \frac{\partial f}{\partial A_{r+2}} \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,r)},$$

$$B_{r+1} f = -\sum_{is}^{1\ldots r} c_{is} A_s \frac{\partial f}{\partial A_i} + \left(A_{r+1} + \sum_s^{1\ldots r} c_s A_s\right) \frac{\partial f}{\partial A_{r+2}},$$

$$B_{r+2} f = -\sum_{is}^{1\ldots r} d_{is} A_s \frac{\partial f}{\partial A_i} - \left(A_{r+1} + \sum_s^{1\ldots r} c_s A_s\right) \frac{\partial f}{\partial A_{r+1}},$$

wo:

$$(B_{r+1} B_{r+2}) = B_{r+1} f + \sum_s^{1\ldots r} c_s B_s f.$$

Demnach sind Af und Bf die verkürzten inf. Trff., durch die: $A_1 = x_1, \ldots, A_r = x_r$ bei den inf. Trff.: $-B_{r+1}f$ und: $-B_{r+2}f$ transformiert werden, und es ist eigentlich: $(AB) = -Af$.

Ersetzt man nun die Basis: $A_1, \ldots, A_{r+2}$ durch eine andere, wo:

$$A_i' = \sum_k^{1\ldots r} \alpha_{ik} A_k \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,r)},$$

während A_{r+1} und A_{r+2} ungeändert bleiben, so sind die Betrachtungen S. 66 f. nur eine Anwendung des S. *773* Gesagten auf den vorliegenden besonderen Fall.

Die Überlegungen, die Lie eigentlich zu dem Satze 22, S. 66 geführt haben, sind hier ebenfalls ganz verschleiert. Man findet sie angedeutet in Bd. V, Abh. XIX (1884), S. 458 f., Nr. 6.

S. 67, Z. 8, 7 v. u. Man führt $y : R$ als neues y ein.

S. 68, Z. 1 v. u.—69, Z. 5. Es haben ja $f(x)$ und $F(x)$ die Form: $\Sigma c_k X_k$.

S. 69, Z. 8. Hier wird ohne weiteres r durch $r+1$ ersetzt, also ist jetzt $r > 0$.

S 70—72. Umarbeitung von Bd. V, Abh. IV (1878), S. 131 f. Wieder neu bearbeitet Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 48—52.

S. 71, Z. 3—1 v. u. Man erhält:

$$\begin{aligned} &2(r+1)xy + 2x^{r+2} + M(r+1)x^{r+1} + \\ &\quad + \{(r+1)y + x^{r+1}\} \cdot \{2(r+1)x + N\} - \\ &\quad - (r+1)x^{r+2} - (r+1)\eta = \eta + \Sigma \lambda_i x^i, \end{aligned}$$

braucht aber in den beiden Ausdrücken für η nur die Koeffizienten von x^{r+2} zu vergleichen, was: $r+1=0$ liefert.

S. 72—87. Umarbeitung von Bd. V d. Ausg., Abh. IV (1878), S. 109—117. Die dort begangenen Fehler (Bd. V, S. *626* f) sind hier vermieden. Die ganze Untersuchung hat Lie später wesentlich vereinfacht, s. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 29, wo man nur $n=2$ zu setzen hat. Allerdings ist da in § 155, beim dritten Falle auf S. 631, übersehen, daß der Fall: $n=2$ nicht mit erledigt wird, eine Lücke, die übrigens leicht ausgefüllt werden kann.

S. 76, Z. 2. Hier wird das Klammersymbol in der allgemeineren Bedeutung:

$$(uv) = u_p v_x + u_q v_y - u_x v_p - u_y v_q$$

gebraucht. Vgl. Bd. III d. Ausg., S. *677*, Z. 13—9 v. u.

S. 77, Z. 7. Eigentlich müßte es heißen: $= (xp + \cdots) - (yq + \cdots) + \cdots$.

S. 77, Z. 10—13. Eigentlich müßte für: $x'p' + \cdots$ gesetzt werden: $(xp + \cdots)'$, und so weiter.

S. 79, Z. 7 v. u. Die früheren Gl. für: $(p + \cdots, S_1)$, $(p + \cdots, S_2)$ ändern sich dabei nicht.

S. 80, Z. 15—19. Zuerst findet man: $A = B = C = E = 0$, sodann: $D = F = 0$, endlich: $G = H = 0$.

S. 87, Z. 3—1 v. u. Der in Bd. V d. Ausg., Abh. V (1878), S. 138—156 gelieferte Beweis war ja nicht streng (s. ebd. *629* f.). Einen strengen hat Lie erst 1888 geliefert, Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 619—631.

S. 87 f. Hier sind die Andeutungen Bd. V d. Ausg., Abh. IV (1878), S. 133 wirklich ausgeführt.

S. 88, dritte Gruppe der letzten Reihe. Ersetzt man q durch: $X_0 q$, so kann man ε gleich Null machen; vgl. Bd. V d. Ausg., S. *767* unter $B\beta$.

S. 89, Z. 5, 4 v. u. „Früher", siehe S. 70.

S. 89, Z. 3 v. u.—90, Z. 2. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 441—443.

S. 90, Z. 10—6 v. u. „Recherches des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de z, x et y". Crelle, Bd. 1, S. 11—15 (1826); Oeuvres complètes, 2. Ausg., Bd. I (1881), S. 61—65.

S. 91, Z. 6—4 v. u. Vgl. Bd. V d. Ausg., S. *616*, Z. 6—8.

S. 91, Z. 9, 8 v. u.—92, Z. 3. Siehe d. Ausg. Bd. III, Abh. I, V—VIII, XIII, XIV, XVIII.

S. 92, Z. 5—3 v. u. Die vorliegende Abh. ist vom Dez. 1879 datiert und Anfang Juni 1880 erschienen. Es ist daher sehr gut möglich, daß Lie diese Zeilen bei der Korrektur hinzugefügt und dabei an die unendlichdeutigen Transformationen der Flächen konstanter Krümmung und der Kurven konstanter Torsion gedacht hat. s. Bd. III d. Ausg., Abh. XXVI (1880), Abh. XXVIII (datiert: April 1880) und XXX (datiert: 15. Juni 1880).

S. 92, Z. 9—11. R. Lipschitz, Ganze homogene Funktionen von n Differentialen, Crelle, Bd. 70, 1869. Quadratische Formen von n Differentialen, Crelle, Bd. 71, 72, 74 (1870 u. 1872). E. B. Christoffel, Transformation homogener Differentialausdrücke, Berl. Ber. 1869, Transformation der homogenen Differentialausdrücke 2. Grades, Crelle, Bd. 70 (1869); Gesammelte math. Abh. Bd. I (1910), S. 347—351, 352—377, 378—382.

S. 92, Z. 12—17. B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Gött. Abh. Bd. XIII, 1867. Ges. math. Werke 1. Ausg. (1876), S. 254—268. H. Helmholtz, Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Gött. Nachr. 1868, S. 193—221. Wiss. Abh. Bd. II (1883), S. 618—639. Lie hat später an diese Untersuchungen angeknüpft, s. Bd. II d. Ausg., Abh. V (1886), VI u. VII (1890), Th. d. Trfsgr. Bd III (1893), S. 393—523.

S. 92, Z. 19—22. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 29.

S. 93, Z. 14—20. Die Klammersymbole: [ ] und: ( ) der Theorie der partiellen Diffgl. 1. O. können als Symbole von inf. Transformationen aufgefaßt werden und führen dabei unter anderm ganz von selbst zur Jacobischen Identität, Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 252, 257, 259, 262, 270, 275.

S. 93, Z. 3 v. u. Ich kann leider keine Stelle angeben, wo diese Auffassung zu Tage tritt. Vielleicht denkt Lie an Äußerungen, die er in Gesprächen mit Mathematikern gehört hat.

S. 93, Z. 18—15 v. u. Vgl. Abh. X (1890), S. 288.

S. 94, Z. 6, 5 v. u. Vgl. Bd. V d. Ausg., S. *616*, Z. 15—13 v. u.; *618*, Z. 14 ff.; *619*, Z. 10 v. u.; *620*, Z. 3; *621*, Z. 6 v. u.; *624*, Z. 19 ff.; *626* f.; *629* f.

Zur Vorgeschichte der Abhandlungen II und III, S. 95—138 und S. 139—223.

Im folgenden stelle ich einige Stücke aus Briefen von Lie an A. Mayer und an F. Klein zusammen. Dabei greife ich noch etwas weiter zurück und berücksichtige auch die Vorgeschichte der ersten von Lie veröffentlichten Abhandlung über unendliche kontinuierliche Gruppen, nämlich der Abh. XIII (1883) in Bd. V dieser Ausgabe.

I. In einem Anf. Dez. 1882 begonnenen Briefe an A. Mayer, den Lie erst Anfang Februar 1883 fortgesetzt und beendigt hat — A. Mayer erhielt ihn am 10. 2. 1883 — heißt es in dieser Fortsetzung:

„Es ist mir in den letzten Monaten gelungen, sehr wichtige Fortschritte in der Theorie der Transformationsgruppen zu machen. Früher beschränkte ich mich nämlich wesentlich auf Gruppen mit einer endlichen Anzahl Parameter. Es gibt aber auch Gruppen mit unendlich vielen Parametern. Jetzt beherrsche ich auch diese Gruppen.

„Erstmal in 1872 oder 1873 traf ich unendliche Gruppen. Sei vorgelegt eine Gleichung 1. O.:

$$f(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a .$$

Soll dann eine infinitesimale Berührungstransformation φ die Gleichung: $f = a$ in sich überführen, so genügt es, daß:

$$(f\varphi) = 0 .$$

Die Gruppe von allen B. T., die $f = a$ in sich überführen, ist somit unendlich.

„Nimmt man andererseits eine beliebige lineare partielle Gleichung, z. B. zweiter Ordnung:

$$A(x, y)r + Bs + Ct + Dp + Eq + Fz = 0,$$

so gestattet sie immer eine unendliche Gruppe. Ist in der That f ein beliebiges Integral, so gestattet die Gleichung jede Transformation:

$$z' = cz + f .$$

Ein drittes Beispiel ist die Gleichung:

$$s = e^{kz},$$

deren Transformationstheorie ich früher entwickelt habe.[1])

„Eine allgemeine Theorie der unendlichen Gruppen bietet anscheinend große Schwierigkeiten. Insbesondere, da keineswegs jede Gruppe eine gewisse Differentialgleichung invariant läßt. Allein die präcise Formulierung des Problems: „alle unendlichen Gruppen zu finden", ist nicht ganz leicht. Ich verfahre folgendermaßen[2]):

„Ich denke mir gewisse partielle Diffgl. beliebiger Ordnung:

$$\Omega_i\left(x, y, \xi, \eta, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n \eta}{\partial y^n}\right) = 0$$

vorgelegt. Laß mich annehmen, daß deren Gleichungen unter anderm sowohl durch:

$$\xi = \xi_1(x, y), \quad \eta = \eta_1(x, y),$$

1) Bd. III d. Ausg., Abh XXXIII (1881), S. 476. A. d. H.

2) „Ich beschränke mich hier auf Punkttransformationen der Ebene."

wie durch:

$$\xi = \xi_2(x, y), \quad \eta = \eta_2(x, y)$$

befriedigt werden. Dann verlange ich, daß immer:

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2, \quad \eta = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2$$

und zugleich:

$$\xi = \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y},$$

$$\eta = \xi_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y}$$

die Gleichungen: $\Omega_i = 0$ erfüllen. Dann bestimmen die inf. Trff.:

$$Af = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

eine Gruppe, die entweder endlich oder auch unendlich ist.

„Eine unendliche Gruppe wird z. B. bestimmt durch die einfache Gleichung:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

Eine andere unendliche Gruppe entspricht der Gleichung:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Eine dritte unendliche Gruppe entspricht dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0.$$

„Wünscht man jetzt, alle unendlichen Gruppen von P. T. zu bestimmen, so bemerkt man zuerst, daß die $\Omega_i = 0$ sicher linear sind. Darnach bestimmt man durch Betrachtung der inf. Trff. erster Ordnung, ..., m-ter Ordnung, ... u. s. w., von welcher Ordnung die $\Omega_i = 0$ sein können, und welche Koeffizienten die Differentialquotienten höchster Ordnung haben können.

„Man erkennt z. B., daß es eine unendliche Gruppe gibt, deren Definitionsgleichung die Form:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \alpha \xi + \beta \eta = 0$$

besitzt. Darnach ist es nicht schwierig, α und β als Funktionen von x und y zu bestimmen.

„Ich kann nicht auf die äußerst merkwürdigen Detaillen meiner Methode eingehen. Ich beschränke mich darauf, meine Resultate anzugeben.

„Die unendlichen Gruppen von P. T. zerfallen in zwei Kategorien, je nachdem die Gruppe eine Differentialgleichung (die dann sicher von erster Ordnung ist) invariant läßt oder nicht. Im ersten Falle kann die Gruppe die Form:

$$x' = f(x), \quad y' = \varphi(x, y)$$

erhalten. Als Beispiel einer solchen Gruppe gebe ich diejenige, deren inf. Trff. die Form:

$$\xi(x) p + \xi' \cdot y \cdot q$$

haben. Sie verifizieren leicht, daß dies eine Gruppe ist. Ich kenne alle derartigen Gruppen.

„Läßt eine unendliche Gruppe keine Diffgl. invariant, so sind zwei Fälle möglich.

„Entweder können ihre inf. Trff. die Form erhalten:

$$\frac{\partial U}{\partial y} p - \frac{\partial U}{\partial x} q,$$

wo U arbiträre Funktion von x, y ist, oder auch enthält die Gruppe außer allen inf. Trff.:

$$\frac{\partial U}{\partial y} p - \frac{\partial U}{\partial x} q$$

zugleich die Trf.: $xp + yq$.

„Ich kenne alle unendlichen Gruppen von B. T. einer Ebene, u. s. w."

II. Aus einem Briefe vom Dez. 1883, den A. Mayer am 3. 1. 1884 beantwortet hat:

„Im letzten Jahre habe ich nach meiner Meinung ziemlich viel Mathematisches gemacht. Ich interessirte mich besonders für meine neuen Untersuchungen über unendliche kontinuirliche Gruppen. Die Schwierigkeit lag für mich in der präcisen Definition des Begriffs. Nachdem dies mir gelungen war, ging das Übrige leicht. Ich habe jetzt eine große Anzahl allgemeiner Sätze über unendliche Gruppen. Bis auf Weiteres beschränke ich mich indeß in meinen Publikationen auf die einfachsten Sachen.

„Daß die allgemeine Theorie der Differentialinvarianten, die ich für endliche Gruppen schon in 10 Jahren besaß, sich auch auf unendliche Gruppen ausdehnt, ganz gleichgültig, wie viel Variabeln etc, hat mich sehr interessirt. Meine Begründung beruht eigentlich auf dem folgenden, mir längs bekannten Satze:

„Gestattet eine Reihe Pfaffscher Gleichungen:

$$\Sigma U_{1k} du_k = 0, \quad \Sigma U_{2k} du_k = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma U_{mk} du_k = 0$$

in den Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$ zwei inf. Trff. Af und Bf, so gestatten sie auch die Trf.: $A(B(f)) - B(A(f))$.

„Meine Voraussetzung kommt auf die Existenz von Relationen der folgenden Form hinaus:

$$\sum_k A(U_{ik}) du_k + \sum_k U_{ik} d(Au_k) = \sum_i \varrho_i \sum_k U_{ik} du_k.$$

„Meine ganze Begründung ist kurz und einfach, und doch ist die ganze Sache mir noch sehr überraschend. Die Gaußische Theorie des Krümmungsmaßes und Mindings Satz über geodätische Krümmung, wie die sich hieran anschließenden Theorien, sind sehr specielle Teile meiner allgemeinen Theorie, von der ich mir sehr viel in vielen Richtungen verspreche.

„Eine erste ausführliche Arbeit, wo ich auch diese Theorien berühre, schicke ich Ihnen bald.[1])

„Ich hoffe im Laufe des kommenden Jahres zwei große Arbeiten nach Math. Ann. schicken zu können. Beide behandeln Gleichungen: $f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0$, die eine kontinuirliche Gruppe von Trff. gestatten.[2]) Mit den Jahren entwickelt sich meine Kritik. Allerdings drucke ich fortwährend leichtsinnig Arbeiten in

1) Hiernach darf man wohl annehmen, daß Lie damals wenigstens mit Vorarbeiten zu der Abh. beschäftigt war, die hier als Nr. II abgedruckt ist. A. d. H.

2) Lie plante also anscheinend eine Neubearbeitung der Abh. X, XI und XIV (1883) in Bd. V d. Ausg. Es wurde aber damals nichts daraus, und er hat sich später (1888) damit begnügt, Abh. X und XI in Bd. XXXII der Math. Ann. wieder abdrucken zu lassen. A. d. H.

Christiania. Was ich aber nach Ausland schicke, plagt mich immer mehr. Daher wachsen meine Restancen in bedenklicher Weise. Und wenn meine Laufbahn einmal abschließt, so ist nur ein kleiner Theil meiner Untersuchungen ordentlich publicirt.

„Nun ja, beiläufig denke ich nicht auf Abschließen meiner Wirksamkeit. Obgleich mein linkes Auge mir fortwährend zuweilen beim Arbeiten hindert, so ist meine Gesundheit recht gut. Krank war ich jedenfalls nicht in 27 Jahren, wenn ich von ein Bischen Kopfweh wegsehe. Und auch meine Frau und Kinder erfreuen sich einer merkwürdigen Gesundheit. In den neun Jahren [seit] meiner Heirat kann ich fast sagen, daß wir nie Arzt benutzt haben."

In einem an A. Mayer gerichteten Briefe vom Jan. 1884 zeigt Lie, wie man Invarianten und Kovarianten der Diffgl. 2. O.: $y'' = F(x, y, y')$ gegenüber der unendl. Gr.: $x_1 = \Phi(x)$, $y_1 = \Pi(y)$ bestimmen kann.

III. Aus einem wohl im März 1884 geschriebenen Briefe, den A. Mayer am 9. 4. 1884 beantwortet hat. Diese Antwort scheint allerdings verloren gegangen zu sein.

„Ich schickte eben Klein eine vorläufige Redaktion einer Arbeit für die Annalen über Differentialinvarianten der unendlichen Gruppen. Bei einer definitiven Redaktion werde ich Alles etwas präciser redigiren können. Es wäre mir äußerst lieb, wenn Sie es ansähen und mir Bemerkungen machten, einerseits hinsichlich Strenge und Klarheit, zweitens hinsichtlich verwandter Ideen von anderen Mathematikern, die ich nicht berücksichtigt habe.

„Mit den Differentialinvarianten läßt sich sehr viel machen.

„Ich redigiere eben eine zweite ähnliche (kurzgefaßte) Note für die Annalen. Es ist eine Fortsetzung und Verwertung vom zweiten Abschnitte in meiner Abhandlung in Bd. XI.[1]) Die dort entwickelten Principien zusammen mit der Theorie der Transformationsgruppen geben eine schöne Erledigung von einer Reihe allgemeiner Probleme, wie ich schon in hiesigen Arbeiten angedeutet habe. Ich schicke diese zweite Arbeit direkt an Sie, da Sie es jedenfalls besser als Klein verstehen und würdigen werden. Doch wünschte ich gern, daß auch Klein es ansah. Die betreffenden Theorien haben eine sehr große Allgemeinheit. Leider wird es mir unmöglich, alle Beweise zu liefern; denn ich habe wie gewöhnlich abwechselnd synthetisch und analytisch raisonnirt, und habe noch nicht Alles rein analytisch durchgedacht.

„Ich gebe unter anderm beiläufig eine strenge Erledigung eines Problems, das ich früher in nicht ganz korrekter Weise behandelt habe: nämlich die Frage, wann eine Gruppe:

$$B_k f = \xi_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

durch eine Punkttransformation in eine andere gegebene Gruppe sich überführen läßt. In meiner dritten Abh. über Transformationsgruppen (Archiv . . .[2])) gab ich eine eingehende Behandlung dieser Frage, die indeß, wie ich schon etwas später angab, mit zwei Fehlern behaftet war.

„Später im Laufe des Frühlings schicke ich den Annalen jedenfalls zwei weitere große Arbeiten.[3]) Ich denke überhaupt, in längerer Zeit hauptsächlich meine Kraft auf Redaktion und Publikation in den Annalen von meinen Untersuchungen zu verwenden. Und ich wage hierbei wie gewöhnlich, auf Ihre und Kleins gütige Unterstützung zu hoffen."

1) Der Annalen (1877), d. Ausg. Bd. IV, Abh. III. A. d. H.

2) Bd. III. D. Ausg. Bd. V, Abh. IV (1878), S. 96—103, *625*, Z. 22 ff. Die neue strenge Erledigung findet man hier in Bd. VI, Abh. III, S. 165—175. A. d. H.

3) Dazu ist er nachher nicht gekommen. A. d. H.

IV. Aus einem Briefe, den A. Mayer am 2. 5. 1884 beantwortet hat.

„Meinen besten Dank für Ihre und Engels[1]) Bemerkungen, die ich möglichst verwerthen werde. Heute gehe ich jedoch nicht auf die verschiedenen Punkte ein.

„Heute schicke ich eine vorläufige Redaktion meiner zweiten Arbeit. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie auch dieselbe durchsehen würden. Sie werden bemerken, daß die Redaktion allerdings an mehreren Punkten knapp ist. Doch gebe ich die Beweise in allen Paragraphen, außer in dem nächstletzten, wo ich nur Theoreme aufstelle.[2]) Die betreffenden Beweise habe ich noch nicht sämtlich analytisch durchgearbeitet.

„Neuerdings kriegte meine Frau einen Sohn[3]) . . . Hiermit in Verbindung steht es, daß einige Partieen meiner Arbeit nicht hinlänglich durchgearbeitet sind. Sie wissen ja, daß ich ursprünglich meine Theorien synthetisch finde. Bei der analytischen Ausführung fällt es mir immer schwer, Alles hinlänglich generell darzustellen. Die analytische Redaktion verlangt eine partikuläre Form, in der leider zu häufig viel verloren geht. Natürlicher Weise weil ich die analytische Form nicht hinlänglich beherrsche.

„Die vorliegende Arbeit ist lange nicht mein letztes Wort in dieser umfangreichen Theorie, die mit der Abel-Galoisschen Gleichungstheorie viele schöne Analogien darbietet. Der Zweck dieser Abhandlung ist ja wesentlich, meine Priorität zu sichern. Denn eine Arbeit in Math. Ann. wird ja nicht wie eine norwegische ignorirt."

V. Aus einem Briefe, den A. Mayer am 16. 5. 1884 beantwortet hat:

„Daß die Einleitung zu meiner zweiten Arbeit fehlte, war mir bekannt, und schadet auch nichts. Wesentlicher ist, daß ich den Schluß noch nicht geliefert habe. Ich denke nämlich, in einem Schlußparagraphen zu zeigen, daß einige frühere Beschränkungen unwesentlich sind. Ich dehne unter anderm meine Theorien aus auf vollständige Systeme $A_k f = 0$ mit einer bekannten Gruppe $B_i f$, indem ich nur die $B_i f$ und nicht die entsprechenden endlichen Transformationen als bekannt betrachte.

„Meine Arbeiten über Transformationsgruppen lassen sich möglicherweise am besten in folgender Ordnung studiren[4]):

„1. Math. Ann. Bd. XI, Abschn. 2 [d. Ausg. Bd. IV, Abh. III], wobei die Anwendung auf nichtlineare Gleichungen 1. O. ausgeschlossen wird.

„2. Math. Ann. Bd. XVI [hier Abh. I], wo unter anderm die Bestimmung aller Gruppen der Form: $X(x)p + Y(x, y)q$ sich bedeutend vereinfachen läßt.

„3. Meine fünfte in Christiania gedruckte Arbeit über Transformationsgruppen (Th. d. Tr. V [d. Ausg. Bd. V, Abh. VI]). Allerdings findet sich in dieser Arbeit p. 240 [a. a. O. S. 205 f., *636*, Z. 16 f.] eine kleine Ungenauigkeit, die indeß keinen Einfluß besitzt. Die Betrachtungen auf pg. 233—234 [a. a. O. S. 199—201] be-

1) Nach Beendigung meiner Militärdienstzeit setzte ich im Sommer 1884 mein Studium an der Universität Leipzig fort und nahm an den Kleinschen Seminarübungen theil. Auf Veranlassung von Klein und Mayer las ich die vorläufige Redaktion der Abhandlung über Differentialinvarianten durch und nachher auch die mit diesem Briefe übersandte zweite Arbeit. A. d. H.

2) Die Abhandlung enthielt in der damaligen Fassung den jetzigen Paragraphen 11 (hier S. 219—222) noch nicht. A. d. H.

3) Herman Lie, geb. in Christiania 22. 4. 1884. A. d. H.

4) Auf einer Postkarte vom 2. 5. 1884 hatte A. Mayer geschrieben: „Und weiter, in welcher Reihenfolge sind Ihre Abhandlungen über Transformationsgruppen und deren Anwendungen am besten zu studiren?"

ruhen darauf, daß die durch einen Punkt des Raumes gehenden Richtungen ein zweifach ausgedehntes Gebiet bilden.[1])

„Diese Arbeit ist im Grunde sehr gut, doch ist sie möglicherweise schwierig. Sie ist nicht wesentlich für die jetzt folgenden Arbeiten.

„Meine übrigen in Christiania gedruckten Arbeiten, Theorie der Transformationsgruppen I—V [a. a. O. Abh. II—VI] enthalten viele gute Sachen, theilweise doch in nicht ganz genauer Form. In Abh. II sind pg. 181—188 [S. 66—71] lesenswert. In Abh. III sind pg. 94—105 [S. 78—87] wichtig, aber wohl schwierig zu verstehen. In Abh. IV sind p. 375—402 [S. 136—156] sehr wichtig, aber nicht immer genau in den Beweisen.[2])

„4. Meine Arbeit in Christiania über unendliche Gruppen [Bd. V d. Ausg., Abh. XIII].

„5. Meine beiden jetzigen Arbeiten in Math. Ann. [hier Abh. II, III].

„Meine verschiedenen geometrischen Anwendungen auf geodätische Linien, geodätische Kreise, Flächen konstanter Krümmung (Über Gleichungen: $s = F(z)$, Transformationstheorie der Gleichung: $s^2 - rt = (1 + p^2 + q^2)^2 : a^2$) sind leicht verständlich und können wohl ohne Kenntniss der vorangehenden Arbeiten gelesen werden [d. Ausg. Bd. I, Abh. XXIV; Bd. II, Abh. IV; Bd. I, Abh. XXVIII, XXIX; Bd. III, Abh. XXXIII, XXXIV].

„Etwa in dieser Ordnung wird man am besten Alles lesen. Ich bemerke ausdrücklich, daß in meinen geometrischen Anwendungen eigentlich nur die einfachsten Principien zur Anwendung kommen.

„Im Vorangehenden sind meine wichtigsten Arbeiten unterstrichen. Ich bin sehr gespannt, ob meine letzte Arbeit Ihnen große Schwierigkeiten bereitet. Einige unter den stattfindenden Lücken werde ich wohl entfernen können."

VI. Aus einem Briefe, den A. Mayer am 3. 6. 1884 beantwortet hat:

„Meinen besten Dank für Ihre und Engels Bemerkungen, die ich überall berücksichtigen werde. Daß meine Arbeit nicht leicht verständlich ist, liegt allerdings theilweise an meiner unvollkommnen Redaktion, wesentlich doch daran, daß die Redaktion so knapp gehalten ist. Hierzu war ich genöthigt, da ich nur ein gedrängtes Résumé von Theorien, die einer großen Entwickelung fähig sind, zu geben wünschte. Die einzelnen Punkte, die Sie als unklar bezeichnet haben, lassen sich fast immer mit wenig Worten erledigen.

„Heute gehe ich nur auf Ihre allgemeinen Bemerkungen ein.

„Daß meine Citate oft unvollständig waren, liegt daran, daß ich gedacht hatte, die pagina hinzuzufügen. Die plötzliche Ankunft meines Sohnes machte mir es aber unmöglich, die letzte Hand an die Arbeit zu legen.

„Ich citire meine norwegischen Arbeiten, weil es mir von Wichtigkeit ist, anzugeben, wann ich die betreffenden Ideen zuerst ausgesprochen habe.

„Dagegen ist es nicht mein Gedanke, daß der gewöhnliche Leser diese Citate zum Verständnisse des Textes brauchen soll.

„Ich citire mein Archiv, indem ich Bd., pg. und Jahr angebe; unsere Ges. d. Wiss., indem ich Jahr, **Nummer** der Abh. und pg. angebe. Jede Arbeit eines Jahrgangs hat seit 1876 ihre besondere Nummer und Paginirung. Sie müssen aber bemerken, daß ich häufig unsrer Ges. kurze Mittheilungen geschickt habe, die nicht besondere Arbeiten bilden, sondern in den Übersichten über die

1) „Sieh hierzu Th. d. TrGr. IV, p. 403—412" [a. a. O. Abh. V, S. 156—163].

2) „Als 3 wäre es möglicherweise besser, meine Chra. Arbeiten über Klassifik. und Integr. von gew. Diffgl.: $f(x, y, \ldots, y^{(m)}) = 0$ mit einer Gruppe einzuschalten". [Bd. V d. Ausg. Abh. X, XI, XIV].

Sitzungen aufgenommen sind. Bei solcher Gelegenheit kann ich nur den Tag der Sitzung citiren.

„Ich werde den Citaten meine Aufmerksamkeit widmen.

„Nun eine andere Bemerkung.

„In meiner Arbeit aus 1874 über vollständige Systeme mit inf. Trff. (Ges. d. Wiss. Christiania; Verallgemeinerung und neue Verwerthung des Jacobischen Multipl. [d. Ausg. Bd. III, Abh. XIV]) gab ich eine Zusammenstellung von den Principien, welche zur Verwerthung von bekannten inf. Trff. dienen. Wie diese Principien zu kombiniren sind, zeigte ich allerdings nicht in detaillirter Weise.

„Ich reducirte zuerst das Problem auf den Fall eines q-gliedrigen vollständigen Systems: $A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0$ mit $n - q$ inf. Trff.: $B_1 f, \ldots, B_{n-q} f$, die keine Relation: $\Sigma \alpha A f + \Sigma \beta B f = 0$ erfüllen. Dabei bestanden Relationen:

$$(B_i B_k) = \Sigma c_{iks} B_s + \Sigma \gamma_{iks} A_s,$$

und ich kann sogar ohne Beschränkung alle $\gamma_{iks} = 0$ annehmen. Die $B_k f$ bilden also eine Gruppe, welche immer Untergruppen enthält, die man nach mir immer bestimmen kann. Sei: $B_{q+1}, \ldots, B_{q'}$ eine Untergruppe mit der größtmöglichen Anzahl Parameter. Dann bilden:

$$A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0, \quad B_{q+1} f = 0, \ldots, B_{q'} f = 0$$

ein vollständiges System, dessen Lösungen φ_i ich bestimme. Sodann erhalte ich im Allgemeinen neue Lösungen von $A_k f = 0$ durch Differentiation, indem ich die Ausdrücke (Math. Ann. XI, p. 498, Z. 8 von unten [d. Ausg. Bd. IV, Abh. III, § 8, Nr. 16, letzter Absatz]):

$$B_{q'+1}\varphi, B_{q'+2}\varphi, \ldots, B_{n-q}\varphi, \ldots$$

bilde. Hierdurch erhalte ich jedenfalls eine Reduktion des Problems, und hiernach operirt man ebenso weiter. An der Spitze der zweiten Note sage ich ein Bischen hierüber [hier Abh. III, S. 146—152].

„Es stellt sich nun die Frage, wenn ein derartiges Problem vorgelegt ist, wie bestimmt man dann durch eine vorläufige Diskussion die Ordnung und die Anzahl der erforderlichen Hülfsgleichungen. Diese Frage wird im ersten Paragraphen[1]) eingehend behandelt. Dies Alles und noch viel mehr wußte ich in 1874.

„In 1882 machte ich einen zweiten Schritt, indem ich allgemeine Sätze über die Form der Hülfsgleichungen entdeckte. Hierüber handelt meine Note, die indeß keine definitive Theorie liefert. Ganz wie in der Theorie der algebraischen Gleichungen nach der Aufbauung der Abel-Galoisschen Theorie noch viele Fragen für Gleichungen fünften, sechsten, siebenten, ... Grades successiv erledigt werden. Ganz ebenso existirt in meiner Integrationstheorie eine unendliche Anzahl von Stufen, deren jede ihr besonderes Interesse darbietet. Es gibt hier eine unbegrenzte Anzahl Sätze, die sich, soviel ich übersehen kann, nicht mit einem Schlage erledigen lassen. Man kann aber immer tiefer in die Theorie hineindringen.

„Meine Parallelisirung mit der Gleichungstheorie ist nicht ins Blaue gewählt; sie entspricht dem Sachverhältnisse.

„In meiner Arbeit enthielt ein § Sätze ohne Beweise, weil sie nicht allein umständlich, sondern schwer zu redigiren waren. In den übrigen Paragraphen glaube ich die Beweise gegeben zu haben, oft allerdings kurz. Bei einer definitiven Redaktion mache ich es sorgfältiger, wenn auch kurz.

„Haben Sie und Engel auch in den letzten Paragraphen die unklaren Punkte markirt?"

1) In dem jetzigen zweiten §, S. 152—159. A. d. H.

„Nachdem ich in einiger Zeit allerlei verschiedene Sachen getrieben habe, mache ich jetzt die erste Note rasch fertig. Darnach folgt auch die zweite rasch, wenn nichts dazwischen kommt.

VII. Aus einem Briefe, den A. Mayer am 4. 7. 1884 beantwortet hat.

„Meine erste Abhandlung ist längst fertig (schon im Mai). Ich halte sie indeß zurück, bis beide fertig sind. Sie kommen im Laufe von 8—10 Tagen. Darnach gehe ich in die Gebirge. Beide Noten haben bei der endlichen Redaktion sich so ziemlich erweitert. Ihre Bemerkungen[1]) sind mir vielfach nützlich gewesen. Ich habe successiv ihren Wert besser erkannt. Ganz besonders schätze ich Ihre Bemerkungen über den Begriff Differentialinvariante einer vorgelegten Differentialgleichung. Bei meiner Redaktion habe ich jetzt gestrebt, diesen Begriff etwas genauer zu zerlegen, als früher geschehen.

„Ich glaube, daß beide Arbeiten viel neue und sehr umfassende Theorien skizziren. Ich wäre sehr dankbar, wenn Sie oder Klein mir frühere Literatur, die zu berücksichtigen wäre, angeben würden.

„Daß ich so äußerst umständlich meine eigenen älteren Arbeiten citire, geschieht, weil ich einigen Herren, insbesondere Halphen, begreiflich zu machen wünsche, wie die Prioritätsverhältnisse stehen. Ich habe versucht, ihn möglichst anerkennend und gerecht zu behandeln. Er wird wohl kaum mit meiner Arbeit zufrieden sein. Nun ja, irre ich, so kann ich sie später verbessern.

Wenn Sie Zeit haben, so schreib mir sogleich kürzlich, welche unklaren Punkte Sie in meiner großen Annalenarbeit in Bd. XVI, über Trfsgr. [hier Abh. I] finden. Ich habe später mehrere Partien dieser Abh. wesentlich verbessert. So viel ich weiß, enthält indes diese Arbeit keine unrichtigen Resultate. Immerhin ist es denkbar, und ehe ich meine neuen Arbeiten drucke, will ich Ihre Bedenken gern hören.[2])

„Es ist mir ganz außerordentlich lieb, daß Sie diesen meinen Arbeiten so viel Aufmerksamk. zeigen. Ich wäre glücklich, wenn Sie oder andere anfingen, in der Theorie der Trfsgr. zu arbeiten. Es ist ein ausgedehntes Gebiet, wo für lange Zeit hinlänglich viel zu machen ist. Wenn ich mit Engels Hülfe ein Werk über Trfsgr. und ihre Anwendungen auf Diffgl. schreiben könnte! Ich habe längst daran gedacht. Leider geht es wohl wie mit meinem Werke über partielle Diffgl. 1. O. [Vgl. Bd. III d. Ausg., S. *694*, *714* f.]

„In Arbeiten, die, wie meine jetzigen, große umfassende Gebiete in knapper Form behandeln, können sich äußerst leicht Ungenauigkeiten einschleichen. Wenn Sie oder Engel solche fänden, wäre ich äußerst glücklich. Bei der definitiven Redaktion habe ich einige solche kleine Ungenauigkeiten bemerkt. Leider gibt es wohl mehrere (hoffentlich nicht wesentliche) Fehler, die mir entgangen sind."

VIII. Aus einem Briefe, den Lie nach seiner Rückkehr aus den Gebirgen geschrieben und den A. Mayer am 2. 8. 1884 oder kurz vorher erhalten hat.

„Ich bin sehr gespannt, ob Sie und Engel mit meinen Abhandlungen einigermaßen zufrieden sind. Die erste muß doch jetzt verständlich sein. Die zweite ist wohl schwieriger, da ich zuweilen synthetisch räsonnire. Die Welt muß indeß einmal anfangen, solche Räsonnements zu verstehen.

„Und ob einige Beweise vielen Lesern unbegreiflich bleiben, so schadet das nicht sehr viel, wenn sie nur die Sätze begreifen. — Ich habe schon zu viel dadurch verloren, daß ich die synthetischen Betrachtungen zurückgehalten habe."

---

1) Mayer hatte seine Bemerkungen an den Rand des Lieschen Manuskripts geschrieben; daher sind sie nicht erhalten. A. d. H.

2) Unter den Bedenken, die Mayer in seiner Antwort vom 4. 7. 1884 geltend macht, ist nichts von Belang. A. d. H.

Die endgültige Fassung der Abh. über Differentialinvarianten (hier Abh. II) ist am 12. 7. und die der „Allgemeinen Untersuchungen . . ." (hier Abh. III) ist am 15. 7. 1884 bei der Annalenredaktion eingegangen.

IX. Aus einem Briefe an F. Klein, wohl Anfang 1883.

„Ich habe natürlicherweise lange daran gedacht, Dir zu schreiben. Ich denke, Dir im Laufe des Sommers (hoffentlich im Juni) eine große Integrationstheorie zu schicken. Es ist die Ausführung von meiner Note in Gött. Nachr. 1874 [d. Ausg. Bd. V, Abh. I]; es handelt über Gleichungen: $f(x, y, y_1, \ldots, y_m) = 0$ mit einer Gruppe, ihre Klassifikation und Integration [a. a. O. Abh. X, XI, XIV]. Ein Résumé lege ich bei [a. a. O. Abh. IX].

„Diese Arbeit subsumirt sich unter meine Integrationstheorie (Math. Ann. XI, [1877, d. Ausg. Bd. IV, Abh. III]) eines vollständigen Systems:

$$A_1 f = 0, \ldots, A_r f = 0$$

mit bekannten inf. Trff.:

$$B_1 f, \ldots, B_\varrho f.$$

Meine alte Theorie leistet insofern Alles, als sie die Integration auf die niedrigsten Hilfsgleichungen zurückgeführt hat. Jetzt bin ich insofern weiter gekommen, als ich diese Hilfsgleichungen immer als lineare Gleichungen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \chi_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + \chi_n(x)\, y = 0$$

wähle. Ich beweise ferner, daß eine größere Reduktion unmöglich ist.

„Als ich Dich im Herbste sprach, war ich auf Spuren dieser Theorie, insofern ich eine Klasse, oder richtiger eine große Anzahl Klassen Gleichungen 1. O. auf Riccatische Gleichungen zurückgeführt hatte. Erst eine Anregung Halphens brachte mich dazu, zu bemerken, daß etwas ähnliches sich immer machen ließ.

„Halphens Untersuchungen über invariants différentiels sind eigentlich nur die Ausführung für die lineare Gruppe von einer Andeutung hinsichtlich der Klassifikation der Gleichungen, die ich in Gött. Nachr. 1874 gab. Und seine Integrationstheorien stehen im genausten Zusammenhange mit meiner Arbeit, Math. Ann. XI. Er hat aber etwas wesentliches Neues hinzugefügt. Nur geht es sehr viel weiter, als er bemerkt hat. So z. B. integrire ich jede Gleichung:

$$f(x, y, \ldots, y^{(m)}) = 0,$$

die bei einer geeigneten[1]) Berührungstransformation sich umwandeln läßt in eine lineare Gleichung:

$$\text{(A)} \qquad y^{(m)} + \chi_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + \chi y = 0\,,$$

deren Integration geleistet werden kann. Es genügt z. B. zur Integration von $f = 0$, daß $f = 0$ durch eine B. T. sich umwandeln läßt in eine Gl. mit doppeltperiodischen Koefficienten und eindeutigem Integral, u. s. w.

„Eine Ausnahmestellung nehmen Gleichungen ein, reduktibel auf: $y'' = 0$ (durch Punkttransformation) oder auf: $y''' = 0$ durch Berührungstransformation.[2])

„Bäcklunds und Weingartens Bestimmung der geod. Kurven auf den Flächen konst. Krümmung durch lineare Gl. 2. O. ist unter den einfachsten Korollaren meiner Theorie.[3]) Ich muß hinzufügen, daß Bäcklund mir dies schon im

---

1) Lie schreibt: „beliebigen." A. d. H.

2) Man vgl. Bd. III d. Ausg. Abh. XXXVI (1881), Bd. V, Abh. X, S. 241 f. XI, S. 310; XII, S. 312 (1883); S. *594—599*, *604*, *703—706*.

3) Bd. III d. Ausg., Abh. XLI, S. 556 f. *768*.

Frühlinge 1882 schrieb, früher, als meine Theorie fertig war. Auch Darboux hat sich nach Anregung von mir hiermit beschäftigt. Bonnet scheint das Resultat gekannt zu haben.

„Ich fürchte, daß Halphen mir nicht Recht machen will. Wir werden es sehen.

„Picards Note[1]) interessirt mich natürlich sehr. Mir ist das neu. Denn ich habe fast nie die Beschränkung gemacht, daß die Gleichungen rational oder algebraisch waren. Ich vermuthe, daß Picards Untersuchungen sehr weit führen."

Lie theilt dann die Sätze über einfache Gruppen mit, die er hier in Abh. III auf S. 205—207 als Theorem V—VII aufstellt. Er fügt hinzu:

„Das Merkwürdige bei diesen Sätzen ist, daß es gleichgültig ist, wieviele Dimensionen der durch G_r transformirte Raum besitzt."

Ferner stellt er den Satz auf, der hier in Abh. III, S. 158, Z. 16—25 ausgesprochen ist, und bemerkt dazu: „Dieser Satz, den ich übrigens längst besitze, ist fundamental." Dann fährt er fort:

„Ich empfehle Dir meine: Untersuchungen über Differentialgleichungen II [d. Ausg. Bd. III, Abh. XL (1882)]. Diese kurze Andeutung läßt sich nach vielen Richtungen hin verallgemeinern und spielt eine Hauptrolle in allen Untersuchungen über Transformationsgruppen.

„Ich verließ für mehrere Jahre Transformationsgruppen und Differentialgleichungen, um Geometrie zu treiben. Jetzt kehre ich wieder zurück, und ich bereue gewissermaßen, daß ich meine wichtigsten Untersuchungen deswegen verließ, weil sie unberücksichtigt blieben. Ich bin mit jedem Jahre sicherer, daß die Theorie der Trfsgr. die Theorie der Diffgl. in eine ganz neue Lage bringen wird. Wenn ich nur alle meine Resultate sammeln und redigiren könnte."

X. Aus einem Briefe an F. Klein, wohl vom Februar 1883:

„Du weißt, wie schwierig ich dazu komme, einen Brief zu schreiben. In dem letzten Monat habe ich eine ganz besondere Hinderung gehabt, indem ich eine mehr als gewöhnlich glückliche produktive Zeit gehabt habe. Hierüber am Schlusse des Briefes. . . .

„Ich habe viele wichtige Sachen in späterer Zeit gemacht. Das schönste ist, daß ich jetzt Gruppen von kontinuirlichen Trff. mit unendlich vielen Parametern in allgemeiner Weise behandeln kann.

„Ich habe z. B. alle unendlichen Gruppen von P. T. der Ebene bestimmt. Solche Gruppen lassen im allgemeinen eine Diffgl. der Ebene:

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

invariant, und dabei ist $n = 1$. Diese Klasse unendlicher Gruppen können daher die Form:

$$x' = f(x), \quad y' = F(x, y)$$

erhalten, wo f und F gewissen Beschränkungen unterworfen sein können, auf die ich hier nicht eingehe.

„Es gibt aber auch unendliche Gruppen, die keine Diffgl. invariant lassen. Die Schwierigkeit war, dieselben zu bestimmen. Jetzt habe ich das gemacht. Es gibt zwei Typen solcher Gruppen. Durch Einführung von zweckmäßigen Variabeln können diese beiden Typen folgendermaßen charakterisirt werden:

„Kanonische Form der einen Klasse ist der Inbegriff aller Trff., bei denen alle infinitesimalen (und endlichen) Flächenräume invariant bleiben. Kanonische Form der zweiten Klasse ist der Inbegriff aller Transformationen, bei denen alle Flächenräume nach konstantem Verhältnisse geändert werden.

1) E. Picard, Sur les groupes de transformation des équations différentielles linéaires. C. R. Bd. 96 (1883), S. 1131—1134.

„Du bemerkst die philosophische Bedeutung für den Begriff Flächeninhalt.

„Ebenso kenne ich alle unendlichen Gruppen von B. T. der Ebene, ebenso alle unendlichen Gruppen von P. T. des Raums. Und für den n-fach ausgedehnten Raum habe ich mehrere allgemeine Sätze. Hiermit ist ein großes wichtiges Gebiet geöffnet.

„Ich habe angefangen, alle partiellen Diffgl.: $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ mit unendlichen Gruppen zu konstruiren. Das ist möglich und wichtig für die Integrationstheorie.

„Auch viele andere Sachen habe ich gemacht. . . .

„Ich schreibe an Mayer etwas mehr präcis über unendliche Gruppen." [Siehe S. *777—779*.]

XI. Aus einem Briefe an F. Klein, vom September 1883, in dem Lie auf einen Brief Kleins vom 28. 8. 1883 antwortet:

„Ich empfehle Dir eine äußerst wichtige Arbeit über kontinuirliche Gruppen mit unendlich vielen Parametern, die ich jetzt in Christiania drucke [d. Ausg. Bd. V, Abh. XIII]. Mit derselben geht meine Theorie der Trfsgr. einen sehr großen Schritt vorwärts."

„Ich hoffe, es geht jetzt gut mit Deiner Gesundheit. Jetzt ist es genau ein Jahr, seit ich Leipzig passirte[1]). Wenn ich das nächste Mal nach Deutschland komme, bleibe ich längere Zeit dort. Möchte es mir bald möglich werden. Es ist einsam, schrecklich einsam hier in Christiania, wo kein Mensch meine Arbeiten und Interessen versteht."

XII. Aus der Antwort auf einen Brief Kleins vom 27. 9. 1883:

Über der Anrede steht:

„Mein Brief ist schon alt, doch hat er Interesse. Ich denke, Dir bald ausführlich zu schreiben. Denn glücklicherweise fließt meine Produktion jedenfalls ebenso reich, wie in alten Tagen. Das ist meine Freude in den schlechten Zeiten. Allerdings fällt die Publikation in definitiver Form mir immer schwieriger."

Nach Bemerkungen über die geometrischen Axiome von Helmholtz heißt es dann:

„Ich habe Dir wohl nichts über die Invariantentheorie der unendlichen Gruppen geschrieben. Daß endliche Gruppen Differentialinvarianten bestimmen, die man sämtlich angeben kann, habe ich seit 1874 gewußt, ja als selbstverständlich betrachtet. Daß dagegen jede unendliche Gruppe ebenfalls Differentialinvarianten, Differentialkovarianten bestimmt, die man sämtlich angeben kann, weiß ich erst im letzten Jahre. Das ist äußerst merkwürdig und gibt Veranlassung zu einer großen Anzahl Theorien.

„In einem speziellen Falle habe ich dies allerdings schon 1872 ganz en passant berührt, nämlich wenn man die Gruppe aller P. T. oder die Gruppe aller B. T. behandelt [d. Ausg. Bd. III, Abh. IV, V, VI].

1) In einem Briefe, den A. Mayer am 11. 7. 1882 erhalten hat, schreibt Lie: „Etwa 10. Sept. reise ich nach Schweiz und komme etwa 1. Okt. nach Paris, wo ich bis Schluß Nov. bleibe. Da mein Reisestipendium kleiner ausgefallen ist, als ich gehofft hatte, kann ich leider nicht daran denken, nach Leipzig zu kommen." Aus einem Anfang Oktober aus Paris an F. Klein gerichteten Briefe geht aber hervor, daß Lie doch, auf der Reise nach der Schweiz, im Sept. 1882 Leipzig besucht und dort Klein und Mayer beide getroffen hat. Als er das nächste Mal nach Leipzig kam, im Jahre 1886, war es, um dauernd da zu bleiben. A. d. H.

„Nimm z. B. die Gleichung: $y'' = F(x, y, y')$, dann kann man Ausdrücke von der Form:

$$\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \ldots\right)$$

bilden, die durch alle P. T. invariant bleiben.

„Wünscht man Invarianten einer partiellen Diffgl., so denke ich mir dieselbe algebraisch. Suche ich dann Invarianten gegenüber allen P. T., so bringe ich die linke Seite auf die Form einer ganzen Funktion n-ter O. in r, s, t. Suche ich dagegen Invarianten bei allen B. T., so bringe ich die linke Seite der Gl. auf die Form einer ganzen Funktion in:

$$r, s, t, rt - s^2.$$

„Was existirt überhaupt über Differentialinvarianten, und wo findet man es? Viel neues habe ich hier jedenfalls, da der Begriff einer unendlichen kontinuirlichen Gruppe gewiß erst von mir fixirt worden ist."

XIII. Aus einem Briefe an F. Klein, Anfang 1884:

„Auch heute wenig Mathematik.

„Die von Gauß, Minding etc. herrührende Theorie der Invarianten bei Deformation ist natürlich ein sehr spezieller Fall meiner allgemeinen Invariantentheorie, die ebenso mehrere andere partikuläre Theorien umfaßt. Dies betrachte ich indeß mehr als Gewinn als wie Verlust.

„Meine Hauptleistung auf dem Gebiete der unendlichen kontinuirlichen Gruppen liegt eigentlich in meiner Definition dieses Begriffs, der für mich immer vag und unbestimmt erschien. Nachdem die Definition mir eingefallen war, fand ich leicht Methoden zur Bestimmung aller unendlichen Gruppen. Ebenso ergab sich leicht die allgemeine Theorie der Invarianten der unendlichen Gruppen. Doch bemerke ich, daß, während die Existenz und die Theorie von Differentialinvarianten der endlichen Gruppen sowohl synthetisch wie analytisch ohne Spur von Rechnung unmittelbar evident ist, wenn man sich eine kontinuirliche Mannigfaltigkeit von einer kontinuirlichen Gruppe transformirt denkt, so kann ich bis jetzt nicht synthetisch, sondern nur analytisch übersehen, daß jede unendliche kont. Gruppe Differentialinvarianten bestimmt.

„Eine Bemerkung über endliche Gruppen. Die Gruppe aller Bewegungen im Raume bestimmt zwei Differentialinvarianten zweiter Ordnung: die beiden Hauptkrümmungen R und R_1.

„Dementsprechend liefert die Gruppe der reziproken Radien zwei Invarianten 3. O., J_1 und J_2, die wirklich berechnet werden müssen. Setze jetzt:

$$J_2 = \text{arb. Funktion von } (J_1),$$

so erhält man durch Differentiation eine merkwürdige Diffgl. 4. O. Dieselbe ist wahrscheinlich die Diffgl. aller Flächen mit isothermen Krümmungslinien. — Ich bin nie dazu gekommen, dies näher zu untersuchen.

„Es gibt andererseits zwei Invarianten 4. O. gegenüber allen B. T., die Krümmungslinien invariant lassen, u. s. w. Der Sinn dieser Invarianten muß doch untersucht werden.

„Ich bewege mich, wie Du siehst, immer in einem begrenzten Kreise. Derselbe ist indeß so weit, daß ich mein Leben lang zu thun habe."

XIV. Aus einem Briefe an F. Klein, vom 20. 1. 1884:

„Es ist für mich das Schlimme, daß es für mich aussieht, als wollten die meisten Mathematiker mich am liebsten ignoriren. Ich werde Dir ein andermal ausführlich über Halphen schreiben. Derselbe fängt auch an, mir unbegreiflich zu werden. . . .

„Auf eine mathematische Theorie, die sehr viel umfaßt, werde ich auch brieflich Deine Aufmerksamkeit ziehen.

„Seien gegeben gewisse Diffgl. in $x_1, \ldots, x_n$ (partielle, totale, Pfaffsche Systeme, etc.):

$$U_1(x_1, \ldots) = 0, \ \ldots, \ U_r = 0,$$

und laß mich annehmen, daß dieselben auf eine bekannte kanonische Form:

$$U_1^0(\mathrm{x}_1, \ldots) = 0, \ \ldots, \ U_r^0 = 0$$

reduktibel sind durch eine unbekannte Transformation:

$$\mathrm{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a, b, c, \ldots)$$

mit den arbiträren Konstanten: a, b, c.

„Dann gestattet die kanonische Form U^0 eine endliche kontinuirliche Gruppe G:

$$\mathrm{x}_k' = \varphi_k(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, a, b, c, \ldots),$$

die als bekannt aufzufassen ist.

„Die Bestimmung der Größen x_i reducirt sich auf die Integration von gewissen (linearen) Hilfsgleichungen:

$$u^{(n)} + U_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + U . u = 0$$

zwischen zwei Variabeln. Die Anzahl und Ordnung dieser Hilfsgleichungen hängt von der Zusammensetzung der Gruppe G ab.

„Ist G einfach (nicht zusammengesetzt) und enthält r Parameter, enthält sie dabei keine Untergruppe mit mehr als r' Parametern, so gibt es nur eine Hilfsgleichung von der Ordnung $r - r'$, und so weiter.

„Diese allgemeine Theorie, die ich erst im letzten Jahre skizzirt habe, umfaßt sehr viele allgemeine Sachen, die ich teilweise schon 1874 gab.

„Ein Beispiel für die Anwendung gibt meine rationelle und **vollständige** Integrationstheorie von linearen Gleichungen:

$$\frac{dx_k}{dz} = Z_{k1}(z)x_1 + \cdots + Z_{kn}(z)x_n + Z_{k0} = Z_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit einem bekannten Integralsysteme:

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n, z) = 0, \ \ldots, \ \Omega_\varrho = 0,$$

oder überhaupt mit einem bekannten Gleichungssysteme:

$$W_i(x_1, \ldots, x_n, z, \ dx_1, \ldots, dx_n) = 0,$$

das die inf. Trf.:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_k Z_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

gestattet.

„Dies ist schon schändlich allgemein. Man kann aber noch weiter generalisiren und unter gewissen Beschränkungen annehmen z. B., daß die Größen x als Funktionen von x_i von arbiträren Funktionen abhängen.

„Wirf diesen Brief nicht weg."

XV. Aus einem Briefe von F. Klein an Lie, vom 25. 2. 1884.

„Ich schreibe Dir heute, um Dir einen bestimmten Vorschlag zu machen. Es ist unbedingt so, daß alle die Arbeiten, die Du in vorläufiger Form im norwegischen Archiv publizirst, dem größeren Publikum so gut wie unbekannt bleiben. Andererseits verstehe ich, daß Du nicht dazu kommst, größere oder jedenfalls umfassendere Ausarbeitungen zu machen. Wie aber wäre es, wenn Du Dich hinsetztest und schriebst für unsere Annalen ein ausführliches Selbstreferat? — Also etwa geradezu über die Gesamtheit Deiner in den Annalen nicht publizirten Untersuchungen? — Du würdest dann auch geeignete Bemerkungen über Kugelgeometrie etc. einfügen können."

Leider geht Lie in keinem der vorhandenen Briefe an F. Klein auf das hier Gesagte ein. Es läßt sich daher nicht feststellen, ob Kleins Vorschlag die Entstehung der hier als Nr. III abgedruckten Abhandlung veranlaßt hat. Daß Lie schon Ende 1883 eine Abhandlung über die Differentialinvarianten der unendlichen Gruppen plante, haben wir auf S. *779* gesehen; es bleibt allerdings zweifelhaft, ob diese Abhandlung schon damals für die Annalen bestimmt war.

XVI. Aus einem Briefe an F. Klein, wohl vom März[1]) 1884:

„Ich schicke Dir gleichzeitig eine vorläufige Redaktion von einer Abhandlung über Differentialinvarianten [hier Abh. II], die ich bald in den Math. Ann. zu drucken wünsche. Du wirst bemerken, daß die Arbeit nur als eine zusammengedrängte Darstellung von einer recht umfassenden Theorie aufzufassen ist. Es wäre mir lieb, wenn sowohl Du wie Mayer meine vorläufige Redaktion durchsähen und mir Ihre Bemerkungen gütigst machten. Ich darf nicht länger mit diesen Sachen warten, denn man fängt an, derartige Ideen zu entwickeln. Und was ich hier gedruckt habe, wird häufig selbst von denjenigen agnoscirt, an die ich die Arbeit geschickt habe.

„Ich redigire jetzt eine zweite ähnliche Arbeit [hier Abh. III] über die Bestimmung von kontinuirlichen Gruppen durch Rechnungen mit Differentialinvarianten, und die Verwertung dieser Theorie für eine Reihe von Problemen. Ich denke, hier wesentlich nur allgemeine Theoreme (die ich hier publicirt habe) zusammenzustellen, im allgemeinen mit kurzer Angabe des Beweises. Es soll eine gute Arbeit von großer Allgemeinheit werden. Sie wird aber nicht sehr leicht zu lesen. (Die Analogie mit Galois tritt in den Vordergrund.)

„In meiner jetzigen Note gehe ich auf meine alten Beziehungen zu Dir und meine neueren zu Halphen, Poincaré (und Picard) ein.

„Was mein Verhältniß zu Dir betrifft, so habe ich geglaubt, festhalten zu müssen, daß meine Arbeiten über Diffgl. und ihre Transformationstheorie nicht, wie einige Mathematiker angedeutet oder geglaubt haben, als Ausführung von Deinen Ideen aufzufassen sind. Meine Stellung ist gewissermaßen schwierig. Ich fühle äußerst gut, daß mein Verkehr mit Dir von der größten Bedeutung für mich gewesen ist. Und doch ist es sicher, daß ich schon, ehe ich nach Deutschland kam, durch Plücker, allerdings in unbestimmter Form, auf das Studium von Berührungstransformationen geführt war, und daß sich hier für mich große, wenn auch dunkle, Prospekte geöffnet hatten.

„Du wirst mir Deine Meinung über die verschiedenen Punkte mittheilen. Auch Mayers (dem ich schreibe [s. Briefstück Nr. III, S. *780*]) Auffassung wäre mir sehr wertvoll."

XVII. Aus einem Briefe an F. Klein, wohl von Ende April oder Anfang Mai 1884:

„Meine zweite Abh. ist jetzt bei Mayer. Doch sollen einige Verallgemeinerungen hinzugefügt werden. Der Hauptzweck ist die Integration von vollständigen Systemen mit bekannten inf. Trff. (und Verwertungen). Dieses Problem reducirte ich schon 1874 auf die Erledigung von gewissen Hilfsgleichungen, deren Ordnung sich nicht erniedrigen läßt. In einer im Sept. 1882 in Christiania eingereichten Arbeit [d. Ausg. Bd. III, Abh. XXXVIII, S. 545 f.] bemerkte ich, daß diese

1) Mayer hatte die im folgenden erwähnte „vorläufige Redaktion" schon durchgesehen, als Klein sie mir mit einem Briefe vom 4. 4. 1884 zur Durchsicht zuschickte. Klein hat dann das Manuskript mit einem Briefe vom 11. 4. 84 an Lie zurückgeschickt.

Hilfsgleichungen immer einen gewissen Affekt besaßen, daß insbesondere solche Gl. 1. O. auf Riccatische reduktibel waren (schon 3. Mai 1882 [d. Ausg. Bd. III, Abh. XXXVII, S. 531—535]). Aus verschiedenen Ursachen (wohl weil ich müde war) hatte ich bei meinem Aufenthalte in Deutschland, im Sept. 1882, noch nicht Alles durchgedacht. Und auch nicht eine anregende Bemerkung von Dir bewegte mich zu der nothwendigen Kraftentwickelung. Dann hielt ich in Paris in der Sociéte mathématique einen Vortrag [d. Ausg. Bd. V, S. *669—673*], bei dessen Schlusse Halphen (Präsident) mich komplimentirte und seine eigenen Untersuchungen als partikuläre gegenüber meinen bezeichnete. Er fügte hinzu, daß er eine gewisse Gl. 2. O. auf eine lineare 3. O. reducirt hatte. Dies war mir neu. Aber augenblicklich sah ich, daß seine Bemerkung mit meiner älteren über Affekt der betreffenden Gleichungen sich im Grunde deckte; nur daß seine Bemerkung äußerst speziell war. Ich erkenne aber äußerst gern an, daß ich an diesem Punkte eine gewisse Anregung von Halphen empfangen habe. In meiner Arbeit habe ich noch nicht hierüber gesprochen[1]).

„In dem betreffenden Vortrage (wie auch in Arbeiten aus 1881 [d. Ausg. Bd. III, Abh. XXXII, Nr. 3 u. XXXVI] hatte ich übrigens auf den in meinen Augen evidenten Zusammenhang zwischen Untersuchungen über Transformationsgruppen und linearen Differentialgleichungen (worüber ich schon 1877 zu Dir und Gordan sprach) hingewiesen.

„In späteren Arbeiten habe ich vielfach über Halphen zu sprechen; denn aus seinen neueren Untersuchungen (1883 [d. Ausg. Bd. V, S. *746*]) habe ich profitirt. Ich bin aber auf ihn ärgerlich, theils, weil er meine Arbeiten aus 1874 nie nennt, obgleich ich ihn darauf hingewiesen habe, theils, weil er neuerdings eine wichtige Bemerkung, die ich 1882 publicirte und auf die ich ihn in Paris aufmerksam machte, in verdeckter Form annektirt hat.

„Es ist fortwährend meine Absicht, jetzt ununterbrochen für die Annalen eine Reihe Arbeiten fertig zu machen. Ich fühle mich dazu aus vielen Gründen genöthigt, um möglichst viel aus meinen Resultaten für mich selbst zu retten. Ich bin darauf gespannt, ob Mayer und Engel meine zweite Arbeit unverständlich finden. Bei der definitiven Redaktion werde ich sicher viele Lücken entfernen können."

XVIII. Aus einem Briefe an F. Klein, vom 23. 5. 1884:

„Ich glaube doch, es ist das Beste, daß ich meine beiden nach Leipzig geschickten Noten schon jetzt für die Annalen fertig stelle. Mein Zweck mit ihnen ist eigentlich ein Programm für eine Richtung meiner Untersuchungen auch in den Math. Annalen zu publiziren, um meine Priorität möglichst zu sichern. Ich muß hiermit eilen. Denn Halphen arbeitet mit großem Erfolge mit, was ich als meine Gedanken betrachte; und Poincaré und Picard nähern sich diesen Gebieten.

„Ich verstehe von Mayer, daß er die Redaktion meiner letzten Note als sehr unvollkommen betrachtet. Hierin hat er doch sicher Unrecht. Die Note ist kurz und zusammengedrängt. Daher sind mehrere Detailschlüsse ihm unklar geblieben, obgleich die betreffenden Lücken in meiner Darstellung (wenn man es so nennen wird) sich jedesmal mit wenig Worten erledigen lassen. Wenn andererseits die zu Grunde liegenden Gedanken ihm theilweise nicht klar gewesen sind, so liegt das daran, daß ich vorausgesetzt habe, daß der Leser meine früheren Arbeiten in den Math. Ann. auf diesem Gebiete [hier Abh. I] vollständig kannte. Solche Voraussetzungen mache ich nicht, wenn ich ausführliche Arbeiten schreibe. Mit einer Programmschrift, die kurz sein muß, steht aber die Sache anders.

1) Das ist erst in der endgültigen Fassung geschehen; s. hier Abh. III, S. 142. A. d. H.

„Mayers verschiedene Bemerkungen habe ich genau durchgedacht, und ich werde sie überall berücksichtigen können. Ich fühle mich sicher, daß er die Form meiner zweiten Note später gerechter beurteilen wird (als er jetzt wahrscheinlich macht; Du weißt, er ist der höflichste Mensch auf der Erde; ich kann also seine Meinung nur ahnen).“

XIX. Aus einem Briefe an F. Klein, von Ende Juni oder Anfang Juli 1884:

„Ich arbeite zur Zeit einigermaßen fleißig an meinen Abhandlungen für die Math. Ann. Die erste ist längst fertig. Die zweite wird in wenig Tagen fertig. Ich schicke beide in 8—10 Tagen. Ich bin mit beiden recht zufrieden. Wie viel neues meine Arbeit über Differentialinv. enthält, kann ich nicht beurteilen, da ich die Literatur nicht kenne. So allgemein können doch die Sachen nicht früher publizirt sein; denn der Begriff unendliche kontin. Gruppe scheint zuerst von mir präcis aufgestellt. Sicher ist jedenfalls, daß diese beiden Begriffe: unendliche Gruppen und ihre Invarianten eine große Menge Fragen stellen, die, wohl bemerkt, erledigt werden können.

„Meine zweite Arbeit enthält viele merkwürdige und allgemeine Resultate und viele neue Gesichtspunkte, deren Wichtigkeit bei meiner späteren Verwertung an Beispielen klarer hervortreten wird. Ich versuche in dieser Zeit, die bei der analytischen Übertragung möglicherweise eingetretenen Fehler zu entfernen. Es ist schwierig, sich ganz sicher zu fühlen. Ich hoffe indeß, daß möglicherweise zurückgebliebene Fehler nicht wesentlich sind.

„Meine jetzigen Arbeiten sind insofern kühner als meine älteren, als ich jetzt mehr explicite mit den Begriffen operire. Hierin besteht theilweise, was ich synthetische Methode nenne. Es ist möglich, daß meine älteren Arbeiten durch rein analytische Darstellung leichter verständlich geworden sind. Ich fühle indeß leider mit jedem Tage klarer, daß meine alten Arb. aus diesem Grunde nur äußerst unvollkommen meinen damaligen Standpunkt wiedergegeben haben. Am besten sind meine von Dir redigirten Noten, die mir theilweise ganz imponiren[1]). Andererseits sind meine Christianiaredaktionen häufig kühner und allgemeiner gehalten als die späteren Reproduktionen in den Annalen, die doch ihre Vorzüge haben.

„Ich werde aber jetzt anfangen, kühner und rascher vorwärts zu gehen. Ich fühle mich im großen Ganzen im letzten Jahre muthiger und stärker als in den zehn letzten Jahren. Das ist kaum ein Irrthum. . . .

„In meiner ersten Arbeit gebe ich ein neues Citat aus 1872 (Zur Theorie der Differentialprobleme. Chra. Ges. d. W.). Die betreffende Stelle [hier Abh. II, S. 105] ist äußerst bemerkenswerth. Schade nur, daß sie so kurzgefaßt gehalten ist. Ich spreche da im Grunde in vollster Allgemeinheit über die Einführung von Differentialinvarianten der endlichen Gruppen. Hierdurch erreicht man, sage ich, nicht neue Integrale, keine neue Zerlegung in einfachere Hilfsgleichungen, sondern einen Vorteil anderer Art (nämlich formeller Art). Die Stelle ist nicht präcis redigirt, nichtsdestoweniger äußerst merkwürdig. Fast genau in denselben Tagen stelltest Du (wie von mir citirt [a. a. O. S. 100]) in Deiner Programmschrift die allgemeine Frage nach Invarianten der kontinuirlichen Gruppen.

„Kannst Du Dir eine selbständige Meinung über die Beziehungen zwischen Halphen und mir bilden. Sicher ist, daß ich ihm realiter kein Unrecht thue. Ich habe übrigens bestimmten Grund, anzunehmen, daß er nicht ganz unbekannt mit meinen alten Arbeiten über Diffgl. mit inf. Trff. gewesen ist. Die principielle Einführung in voller Allgemeinheit des Begriffs inf. Trf.:

$$Bf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

1) D. Ausg. Bd. I, Abh. V, VI; Bd. III, Abh. IV; Bd. V, Abh. I. A. d. H.

gehört, soviel ich einsehe, mir. Einige Jahre später fingen drei Mathematiker an, diesen Begriff zu verwerten, ohne mich zu citiren. Der eine (M. Lévy) hat mir ganz ruhig erzählt, er hätte diese Idee bei mir gelernt. Der zweite (Ermakoff) citirt mich in anderer Verbindung, wenn auch unkorrekt; und es scheint mir unzweifelhaft, daß er durch mich auf die betreffenden Gedanken geführt ist. Was Halphen betrifft, so scheint mir die Sache aus vielen Gründen verdächtig.

„Auch der in seinen späteren Arbeiten hervortretende Grundgedanke, die Aufgabe zu behandeln, ob eine Diffgl. durch eine beliebige analytische Trf. eine gegebene Form erhalten kann, ist früher in voller Allgemeinheit von mir formulirt worden, und zwar ist sein fundamentaler Zusammenhang mit der Theorie der Trfsgr. betont worden.

„Ich vermuthe, daß Halphen versuchen wird, mich . . . zu ignoriren. Unglücklicherweise sind meine Gesichtspunkte viel allgemeiner und gewissermaßen tiefer als seine, deren Schönheit ich allerdings bewundere.“

XX. Aus einem Briefe an F. Klein, wohl August 1884:

„Dein Buch über das Ikosaeder habe ich empfangen, wie ich Dir schrieb. Ich fühle mich sehr geschmeichelt, daß Du mich in so ehrenvoller Weise in der Vorrede genannt hast. Allerdings fühle ich recht gut, daß ich es nur halb verdient habe.

„Ich schäme mich, daß ich Dich in meinen letzten Arbeiten nur mit einer gewissen Reservation citire. Ich habe indeß gelernt, daß ich vorsichtig sein muß. Denn, wenn ich jemand unbedingt citire, so glaubt man, daß der Andere Alles gemacht hat. Ich verstehe nicht, woran es liegt. Wahrscheinlich daran, daß man ohne weiteres voraussetzt, daß meine Ideen mit meiner Redaktionsfähigkeit proportional sind.

„Wie ich Dir schrieb, wäre es mir ganz außerordentlich lieb, wenn meine Arbeiten rasch gedruckt würden. Diese Ideen fangen jetzt an, sich zu verbreiten. Und wenn auch meine Arbeiten nichts enthalten, was ich nicht längst jedenfalls skizzirt habe, so weiß ich recht gut, daß meine kurzgefaßten Christianianoten nicht respektirt werden. Darboux hat es mir fast mit reinen Worten gesagt.

„Engel schreibt mir, daß meine erste Arbeit und der größte Theil der zweiten für jedermann leicht verständlich sind. — Nun das glaube ich eben nicht. Die Sachen sind zu tief und umfassend, um leicht zu sein. Kuriös ist es, daß ihm derjenige § am besten gefällt, den Mayer sicher als fast unverständlich bezeichnen wird, weil die Beweise durch Anwendung von Begriffen geführt sind.

„Ich selbst betrachte diese beiden Arbeiten als außerordentlich wichtig. Sie sind mein Arbeitsprogramm für viele Jahre. Denn fast überall sind die dargestellten Ideen nur als Grundlage von weiter gehenden speziellen Untersuchungen zu betrachten.

„Also, druck möglichst rasch.“

Zu Abhandlung II, S. 95—138.

S. 98, Z. 13—20. Vgl. Lie-Scheffers, G. d. B. T. (1896), S. 311—357.

S. 98, Z. 21—33. A. a. O. S. 384—390.

S. 99, Z. 20—18 v. u. Auch abgedruckt in F. Kleins Gesammelten math. Abhandlungen Bd. I (1921), Abh. XXV, S. 416—423, Abh. XXVI, S. 424—459.

S. 99, Z. 17—15 v. u. C. Stéphanos, Sur la théorie des quaternions. Math. Ann. Bd. XXII (1883), S. 589—592.

S. 100, Z. 10—14. F. Klein, Ges. math. Abh. Bd. I, S. 489, Z. 15—10 v. u.

S. 100, Z. 15—101, Z. 15 v. u. Diese Dinge findet man eingehend auseinandergesetzt in der Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 7.

S. 101, Z. 17—19. Eigentlich müßte es heißen: „so kann sie im allgemeinen die Form: $\Psi(f_1, \ldots, f_{n-q}) = 0$ erhalten.“

S. 101, Z. 4, 3 v. u. Siehe Bd. V d. Ausg., Abh. III (1876), S. 73f. Die dort aufgestellte lineare homogene Gruppe ist die zu der r-gliedrigen Gruppe gehörige: „adjungirte Gruppe“, von der die Frage nach den verschiedenen Typen von Untergruppen der r-gliedrigen Gruppe beherrscht wird. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 16, insbesondere S. 281 und Kap. 23, S. 494—496.

S. 102, Z. 1—9 und Z. 15—1 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 14.

S. 102, Z. 18—20. Es ist nicht deutlich, was diese Verweisung gerade hier soll. Vermutlich ist sie deshalb gemacht, weil dort alle Gruppen des R_n mit möglichst großer Transitivität im Infinitesimalen bestimmt werden.

S. 103, Z. 2—6, 22—24. Kennt man die endlichen Trff. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$, so kann man die Invarianten der Gruppe, also die Funktionen: $f_1, \ldots, f_{n-q}$ durch Elimination finden, s. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 218. Nach der Anm. zu urteilen setzt aber Lie nur voraus, daß man jede einzelne Gl. $B_k f = 0$ integriren kann. Demnach sollte es wohl auf Z. 3f. eigentlich heißen: „die endlichen Trff. jeder eingliedrigen Gruppe $B_k f$.“

S. 103, Z. 10f. und Z. 21, S. 104, Z. 1f. Die Poincaréschen Abh. sind aufgezählt Bd. V d. Ausg., S. *640*, Z. 3 v. u.—*641*, Z. 4.

S. 103, Z. 13—8 v. u. Diese Ergänzung zu Abh. VII von Bd. V d. Ausg. hat Lie auch am 12. 6. 1884 der Ges. d. Wiss. zu Christ. mitgeteilt, s. Bd. V d. Ausg. Abh. XVIII, S. 449. Vgl. ebd. S. *741*, Z. 21—23. Die „beiden von Klein und mir entdeckten perm. inf. Trff.“ sind angegeben in der ersten ihrer gemeinsamen Note in den C. R. von 1870, im vorletzten Absatze des ersten Teils: „Enfin, si toutes les faces du tétraèdre coïncident, les courbes V sont des cubiques gauches, et les surfaces V des surfaces réglées du troisième ordre de cette espèce particulière dont les deux directrices coïncident.“ (D. Ausg. Bd. I, Abh. VI; Klein, Ges. math. Abh. Bd. I, S. 418, Z. 8—10.)

S. 103, Z. 6—1 v. u. D. Ausg. Bd. V, Abh. VII, S. 232f. Genauer ausgedrückt ist die gerade Linie die einzige Kurve dieser Art und die Kugel die einzige reelle Fläche; a. a. O. S. *640*, Z. 8—13.

S. 104, Z. 3—7. É. Picard, Sur les groupes de transformation des équations différentielles linéaires. C. R. Bd. 96 (1883), S. 1131—1134.

S. 104, Z. 3 v. u.—107, Z. 14 v. u. Man vgl. hierzu Abh. III, S. 139—143.

S. 105, Z. 10—7 v. u. Kennt man nämlich die Bahnkurven einer inf. Trf., so erfordert die Aufstellung der endlichen Trff. der von der inf. Trf. erzeugten eingliedrigen Gruppe nur noch eine Quadratur.

S. 107, Z. 14—17. Die einzige Stelle, wo Lie die Frage wirklich behandelt hat, findet man in den Leipz. Ber. 1895, S. 506—508, hier Abh. XXIII, § IV, S. 612—614.

S. 108, Z. 3—1 v. u. Vgl. Bd. V d. Ausg., S. *641*, Z. 2 v. u.—*642*, Z. 6. Die dort nicht angeführte Abh. von 1876 hat den Titel: „Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace.“ Liouvilles Journal, III. Ser., Bd. II, S. 257—290, 371—408 (Oeuvres Bd. I (1916) S. 475—542).

S. 108, Z. 13—15. Vgl. Bd. V d. Ausg., S. *746*, Z. 21—17 v. u.

S. 110, Z. 10—1 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 25.

S. 111, Z. 18—15 v. u. Vgl. hier S. 125, Z. 1 v. u.—126, Z. 4 und Abh. XXVIII (1897), S. 668, 670. Vgl. auch S. *824—826*.

S. 112, Z. 11—1 v. u., 113, Z. 8—3 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 287—290, ferner Bd. III d. Ausg., S. *640—644*.

S. 113, Z. 3—1 v. u. Die Integration von: $u_k = \text{const.}$ ist ja mit der Integration der Gl.: $(u_k f) = 0$ gleichbedeutend. Damit verbinde man das auf S. 103, Z. 22—20 v. u. Gesagte.

S. 113, Z. 4—6. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XXXIII (1881), S. 476.

S. 113, Z. 21—115, Z. 12. Vgl. Bd. V d. Ausg., Abh. III, S. 46, 51f., *617*, ferner hier Abh. XI (1891), S. 304—315, 319—323, 326f.

S. 115, Z. 4. Als Lie 1872 die Note: „Zur Theorie der Differentialprobleme“ schrieb (Bd. III d. Ausg., Abh. V), war ihm der Satz zweifellos in seiner vollen Allgemeinheit bekannt.

S. 115, Z. 4—1 v. u. Vgl. hier Abh. III, S. 141, Z. 3—7. Die partielle Diffgl. 1. O.: $\varphi(x, p) = \text{const.}$ gestattet ja die inf. Trf. (uf), wenn $(\varphi u) \equiv 0$ ist. Setzt man aber: $B_k f = (u_k f)$, so wird: $B_k(B_j(f)) - B_j(B_k(f)) = ((u_k u_j) f)$. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XX, S. 297f., Th. d. Trfsgr. Bd. II, S. 269f.

S. 116, Z. 4—13. Lie denkt an die Bildung der Transformationen: $T^{-1}ST$, S^2T, ST^2, wenn S und T inf. Trff. sind, bei denen man, wie auf S. 114, in den Reihenentwickelungen der zugehörigen eingliedrigen Gruppen die unendlich kleinen Größen bis zu einer gewissen Ordnung mitnimmt.

S. 116, Z. 5—1 v. u. Für solche Scharen, die durch Diffgl. definiert werden können, läßt sich die Richtigkeit der Vermutung allgemein beweisen; s. hier Abh. XII (1891).

S. 123—125, Nr. 13. Vgl. hier Abh. XII (1891), S. 339—348.

S. 125, Z. 1 v. u.—126, Z. 4. Vgl. S. 111, Z. 18—15 v. u. und die Anm. dazu.

S. 127, Z. 13—18. Die Bestimmung dieser Invarianten hat A. Tresse ausgeführt, Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre: $y'' = \omega(x, y, y')$. Gekrönte Preisschrift der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig, 1896, 87 S. gr. 8°.

S. 129, Z. 8—3 v. u. Für $n = 3$ hat F. Leja die Invarianten der einen wie der andern Art bestimmt: „Własności niezmiennicze równań różniczkowych zwyczajnych 3-go rzędu ze względu na przekształcenia stycznościowe (Invariante Eigenschaften der gew. Diffgl. 3. O. gegenüber B. T.), Prac matematyczno-fizycznych, Bd. 29, S. 179—256, Warschau 1918. Bestimmung der Invarianten der gewöhnlichen Diffgleichungen 3. O. i. B. auf die P. T. Wiener Monatshefte Bd. 29 (1918), S. 203—254.

S. 130, Z. 9—3 v. u. Vgl. Bd. V d. Ausg., Abh. XVI (1884), S. 440f.

S. 131, Z. 5—3 v. u. Vgl. das Zitat S. 132, Z. 8f. und Bd. III d. Ausg., Abh. V (1872), S. 27, Z. 14—18.

S. 132, Z. 4—1 v. u. Vgl. Bd. III d. Ausg., S. *619*, die Anm. zu Abh. I (1872) S. 3, Z. 4—7 und Abh. XXXVIII (1882), S. 542. Siehe auch ebd. S. *706*.

S. 133, Z. 10f., 16—13 v. u. Laguerre, Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre C. R. 88 (1879), S. 116—119. Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires, ebd. S. 224—227. Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Bull. d. l. Soc. Math. Bd. 8 (1880), S. 35—36. Über Halphen s. Bd. V d. Ausg., S. *746*.

S. 133, Z. 13—7 v. u. Vgl. auch die Anm. dazu, Bd. V, S. *703—706*.

S. 133, Z. 7, 6 v. u. Ist nicht geschehen.

S. 133f., Nr. 23. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XXXV (1881).

S. 134f. Nr. 24. Auf Veranlassung von Lie hat das später Żorawski genauer ausgeführt, s. dessen Leipziger Dissertation: „Über Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lieschen Gruppentheorie.“ Acta Math. Bd. 16 (1892), S. 1—64.

S. 135, Z. 7—1 v. u. Lie ist in der letzten von ihm veröffentlichten Abh. noch einmal auf diese seine alten Fragestellungen (s. Bd. III d. Ausg., Abh. IV (1872), S. 19—25) zurückgekommen. Vgl. „Über B. T. und Diffgl.“ Leipz. Ber. 1898, S. 113—180 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. XI). Vgl. auch die von mir veranlaßten Dissertationen: W. Steingräber, Über partielle Diffgl. 1. O. im R_4. Greifswald 1906. E. Ziemke, Über part. Diffgl. 1. O. mit Integralvereinen, die als Punktmann. zweifach ausgedehnt sind. Ebd. 1909. K. Schweißguth, Über part. Diffgl. 1. O. mit vollständigen Lösungen von besonderer Art. Gießen 1924.

S. 136, Z. 7—17. Vgl. Bd. III, Abh. XX (1877), S. 297f.

S. 136, Z. 4—1 v. u. Die $\frac{1}{2}r(r-1)$-Ausdrücke: (F_iF_k) enthalten $2nr$ Ableitungen der r Funktionen $F_1, \ldots, F_r$. Die von Lie angekündigten Relationen treten daher auf, sobald $r > 4n+1$.

S. 137, Z. 14—16. Bd. III d. Ausg., Abh. XXI (1877).

S. 137, Z. 17 v. u. Minding, „Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; ...". Crelle, Bd. 19 (1839), S. 370—387.

S. 137, Z. 5 v. u.—138, Z. 10, vgl. S 136.

S. 138, Z. 11—16. Dann sind nämlich alle: (F_iF_k), $((F_iF_k)F_j)$, ... durch ϱ von einander unabhängige unter ihnen und durch: $F_1, \ldots, F_r$ ausdrückbar, mit andern Worten: $F_1, \ldots, F_r$ bestimmen eine $(r+\varrho)$-gliedrige Funktionengruppe. Ist daher v eine beliebige Funktion der $(2n-r-\varrho)$-gliedrigen reziproken Gruppe (Polargruppe, s. Bd. III d. Ausg., Abh. VII (1873), S. 38), so läßt die inf. Trf.: (vf) alle Funktionen: $F_1, \ldots, F_r$, (F_iF_k), ... invariant.

S. 138, Z. 10—8 v. u. Jede inf. B. T. in x, y, z, p, q liefert nämlich, wenn man sie durch Hinzunahme von r, s, t erweitert, sieben unabhängige Differentialinvarianten: $H_1, \ldots, H_7$. Wenn sie nun die gegebene Funktion F invariant läßt, so läßt sie offenbar auch alle Funktionen von $x, y, \ldots, t$ invariant, die sich aus den Differentialinvarianten: $J_1, J_2, \ldots$ des Textes ergeben, sobald man darin die gegebene Funktion F einsetzt. Demnach sind F und alle diese Funktionen von $x, y, \ldots, t$ durch $H_1, \ldots, H_7$ ausdrückbar.

Um uns davon auch analytisch zu überzeugen, betrachten wir eine beliebige inf. P. T.:

$$Xf = \sum_i^{1\ldots n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und erweitern diese durch Hinzufügung einer beliebigen Funktion F, die gar nicht transformiert wird, nebst den zugehörigen Ableitungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_i, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_\nu} = F_{i\nu}, \quad \ldots.$$

Bezeichnen wir die Erweiterung von Xf bis zur m-ten Ordnung mit $X^{(m)}f$, so ergibt sich wegen $XF=0$ aus der Gleichung: $dF - \Sigma F_i\, dx_i = 0$ der Ausdruck:

$$X^{(1)}F_i = -\sum_\nu F_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i},$$

und allgemein wird.

$$X^{(m+1)}F_{i_1\ldots i_m\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} X^{(m)}F_{i_1\ldots i_m} - \sum_\nu^{1\ldots n} F_{i_1\ldots i_m\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\mu}.$$

Es sei nun: $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ irgend eine bestimmte Funktion von $x_1, \ldots, x_n$, und die Substitution: $F=\Phi$ werde durch Einschließen in eckige Klammern [ ] angedeutet. Dann ist:

$$XF = 0, \quad X[F] = X\Phi = \sum_i^{1\ldots n} \xi_i \Phi_i,$$

ferner:

$$X[F_i] = X\Phi_i = \sum_\nu^{1\ldots n} \xi_\nu \Phi_{i\nu} = \frac{\partial}{\partial x_i} X\Phi + [X^{(1)}F_i].$$

Ebenso wird allgemein:

$$X\Phi_{i_1\ldots i_m} = \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} X\Phi + [X^{(m)}F_{i_1\ldots i_m}].$$

In der Tat, aus dieser Formel folgt:

$$\begin{aligned} X\Phi_{i_1\ldots i_m\mu} &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} X\Phi_{i_1\ldots i_m} - \sum_\nu^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\mu} \Phi_{i_1\ldots i_m\nu} \\ &= \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}\partial x_\mu} X\Phi + \frac{\partial}{\partial x_\mu}[X^{(m)}F_{i_1\ldots i_m}] \\ &\qquad - \sum_\nu^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\mu} \Phi_{i_1\ldots i_m\nu} \\ &= \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}\partial x_\mu} X\Phi + [X^{(m+1)}F_{i_1\ldots i_m\mu}], \end{aligned}$$

womit ihre Allgemeingültigkeit bewiesen ist.

Betrachten wir jetzt irgend eine Lösung:

$$\Omega(x_1, \ldots, x_n, F_1, \ldots, F_n, F_{11}, \ldots)$$

der Gleichung: $X^{(m)}f = 0$, also eine Differentialinvariante m-ter O. von F gegenüber der inf. Trf. Xf. In der für jedes Ω gültigen Formel:

$$X[\Omega] = [X^{(m)}\Omega] + \sum_\nu^{1\ldots n} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial F_\nu}\right] \frac{\partial}{\partial x_\nu} X\Phi + \sum_{\mu\nu} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial F_{\mu\nu}}\right] \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} X\Phi + \cdots,$$

verschwindet jetzt das erste Glied rechts identisch. Gestattet daher $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ die inf. Trf. Xf und ist also: $X\Phi \equiv 0$, so wird auch $X[\Omega] \equiv 0$, das heißt, wenn man in einer solchen Differentialinvariante Ω für F eine Lösung von: $Xf=0$ einsetzt, so erhält man stets wieder eine Lösung von: $Xf=0$.

Gehört Xf irgend einer endlichen oder unendlichen Gruppe an, und sind $J_1, J_2, \ldots$ Differentialinvarianten von F gegenüber dieser Gruppe, so sind sie selbstverständlich auch Differentialinvarianten gegenüber Xf. Demnach ergibt sich insbesondere, daß $J_1, J_2, \ldots$, wenn man für F eine Lösung Φ von: $Xf=0$ einsetzt, lauter ebensolche Lösungen liefern, daß also für $F=\Phi$ je n der Ausdrücke: $J_1, J_2, \ldots$ durch eine Relation verknüpft sind.

Das auf S. 138, Z. 10—8 v. u. Gesagte folgt hieraus als besonderer Fall.

Ähnliche Betracht. wie die eben angestellten entwickelt Lie in Abh. III, § 8, S. 195 ff., vgl. insbesondere S. 197 f. Er hat sich nur dort die Darstellung dadurch erschwert, daß er von einer inf. Trf Xf von ganz besonderer Form ausgeht.

S. 138, Z. 7—5 v. u. Vgl. Bd. III d. Ausg. Abh. I (1872), S. 2 f., S. *622* und Abh. XIX (1877), XXXVIII (1882), S. 542 f.

Zu Abhandlung III, S. 139—223.

S. 139, Z. 11—16. Vgl. Geom. d. B. T. (1896), S. 359 f. Ist das Tetraeder durch die Koordinatenebenen und durch die unendlich ferne Ebene bestimmt, so geht die Gruppe der ∞^3 Trff., bei denen $F=0$ invariant bleibt, bei der logarithmischen Abbildung:

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

in die Gruppe der Translationen über; die transformierte Gleichung wird daher frei von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und hat eine Form, die schon von Euler integriert worden ist. Zum Ziele führt also eine geeignete Wahl des Koordinatensystems. Die Analogie mit Abels Verfahren, auf die F. Klein damals hinwies, kann wohl nur darin bestehen, daß Abel durch eine geeignete Anordnung der Wurzeln die Gruppe der

Vertauschungen der Wurzeln auf eine solche Form bringt, daß die Lösung der Gleichung auf die von reinen Gl., also auf Wurzelzeichen zurückführbar wird. Vgl. auch Abh. II, S. 105, Z. 1—6.

S. 139, Z. 10 v. u. Auch in F. Kleins Ges. Abh. Bd. I (1921), Abh. XXVI.

S. 140, Z. 1—4. Vgl. Christ. Forh. 1871: „Über eine Klasse geometrischer Trff.“, S. 195—197 (d. Ausg. Bd. I, Abh. XII, § 16, Nr. 43, 44); Math. Ann. Bd. V (1872): „Über Komplexe“, S. 201—203 (d. Ausg. Bd. II, Abh. I, § 17, Nr. 50, 51).

S. 140, Z. 19 v. o.—8 v. u. Vgl. Bd. III, Abh. I (1872), S. 2, Z. 5—1 v. u.

Die P_k sind Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p, p_1, \ldots, p_n$ [1], und zwar homogen von 1. O. in den p (vgl. S. 159). Kennt man die endlichen Trff. der eingliedrigen Gruppen, die von den inf. Trff.: $P_1, \ldots, P_q$ erzeugt werden, so kann man durch Elimination alle Lösungen jeder der q Gl.: $(P_1 f) = 0, \ldots, (P_q f) = 0$ aufstellen und also auch alle Lösungen des von diesen Gl. gebildeten vollständigen Systems. Dann aber kennt man die charakteristischen Mannigfaltigkeiten des Involutionssystems: $P_k = a_k$ $(k=1,\ldots,q)$ und kann daher auch eine vollständige Lösung dieses Invsyst. angeben (Bd. III d. Ausg., Abh. IV (1872), S. 25, III, 1).

Wir können daher $n+1-q$ Funktionen $\varphi, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_n$ derart bestimmen, daß $P_1, \ldots, P_q, \varphi_0, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_n$ von einander unabhängig sind und paarweise in Involution liegen, und daß (vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. IX (1873), S. 106f.; Abh. XVIII (1876), S. 267) eine Identität von der Form:

$$pdz + \sum_i^{1\ldots n} p_i dx_i = \sum_k^{1\ldots q} \chi_k dP_k + \psi_0 d\varphi_0 + \sum_j^{1\ldots n-q} \psi_j d\varphi_{q+j} + d\Omega \tag{1}$$

besteht. Das System der Gl.: $P_k = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, $\varphi_{q+j} = \text{const.}$, $\Omega = \text{const.}$ stellt dann eine vollständige Lösung des erwähnten Invsyst. dar.

Wegen der Homogeneität der P_k gestattet nun (vgl. hier Abh. III, S. 147) das vollständige System: $(P_k f) = 0$ $(k=1,\ldots,q)$ die inf. Trf.:

$$p\frac{\partial f}{\partial p} + \sum_i^{1\ldots n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

(vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. VIII (1873), S. 66), demnach liegen auch die Funktionen:

$$\varphi_j\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{p}{c}, \frac{p_1}{c}, \ldots, \frac{p_n}{c}\right) \qquad (j=0,\, q+1, \ldots, n)$$

mit $P_1, \ldots, P_q$ in Involution, unter c eine beliebige Konstante verstanden; überdies ist klar, daß sie zugleich paarweise in Involution liegen. Das gilt auch noch, wenn man c durch irgend eines der P_k, etwa durch P_1 ersetzt. Bilden wir nun die Funktionen:

$$P_j = P_1 \cdot \varphi_j\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{p}{P_1}, \frac{p_1}{P_1}, \ldots, \frac{p_n}{P_1}\right) \qquad (j=0,\, q+1, \ldots, n)$$

die sämtlich homogen von 1. O. in den p sind, so folgt aus (1) das Bestehen einer Identität von der Form:

$$pdz + \sum_i^{1\ldots n} p_i dx_i = \sum_\nu^{0\ldots n} \Psi_\nu dP_\nu + d\omega .$$

Hier können wir die rechte Seite auch in der Form:

$$\sum_\nu^{0\ldots n} P_\nu d\Xi_\nu + d\vartheta$$

1) Zur Erleichterung der Übersicht kann man sich z und p durch x_0 und p_0 ersetzt denken.

schreiben, wo $\Xi_\nu = -\Psi_\nu$ und wo nunmehr die Relationen:

$$(\Xi_\mu \Xi_\nu) = 0, \quad (P_\mu \Xi_\nu) = \varepsilon_{\mu\nu}, \quad (P_\mu P_\nu) = 0,$$

$$(\vartheta\, \Xi_i) = \sum_\nu^{0\ldots n} p_\nu \frac{\partial \Xi_i}{\partial p_\nu}, \quad (\vartheta\, P_i) = \sum_\nu^{0\ldots n} p_\nu \frac{\partial P_i}{\partial p_\nu} - P_i = 0$$

bestehen (vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 130, Theorem 13), die zeigen, daß ϑ eine Funktion von: $P_0, P_1, \ldots, P_n$ allein ist. Bestimmen wir daher, was nur eine Quadratur erfordert, eine Funktion u der P, die der Diffgl.:

$$\sum_i^{0\ldots n} P_i \frac{\partial u}{\partial P_i} - u = \vartheta$$

genügt, so wird:

$$d\vartheta = \sum_i^{0\ldots n} P_i d\frac{\partial u}{\partial P_i},$$

und mithin, wenn wir:

$$\Xi_i + \frac{\partial u}{\partial P_i} = X_i$$

setzen:

$$pdz + \sum_i^{1\ldots n} p_i dx_i = \sum_i^{0\ldots n} P_i dX_i,$$

wo die X_i homogen von nullter O. in den p sind (a. a. O. S. 132f.).

Führen wir endlich die homogene B. T.: $x_i' = X_i$, $p_i' = P_i$ aus, so verwandelt sich das ursprüngliche System von part. Diffgl. in ein solches, das die inf. Translationen: $p_1', \ldots, p_q'$ gestattet, und das also von $x_1', \ldots, x_q'$ frei ist.

Merkwürdiger Weise stehen in dem ersten Drucke, Ann. XXV, in der Gl. S. 140, Z. 12 v. u. an Stelle der + Zeichen lauter — Zeichen. Ob das ein Druckfehler, ein Schreibfehler oder gar Absicht ist, bleibt ungewiß. Jedenfalls stimmt es nicht mit Lies sonstiger Schreibweise, und es hat keinen Zweck, diese Abweichung beizubehalten, zumal sie nur die Darstellung des Beweises für Lies Behauptung erschweren würde.

S. 140, Z. 7—1 v. u. Setzt man nämlich zum Beispiel: $P_1 = \zeta p + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2$, und versteht man unter F eine Funktion von $z = x, x_1, x_2$ allein, so wird:

$$(P_1 F) = A_1 F.$$

S. 140, Z. 5—13. Diese Auffassung hat Lie früher nur gelegentlich erwähnt, vgl. z. B. Ann. VIII (1874), S. 240 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. I, Schluß von § 6, Anm. zu Theorem V). Ferner Bd. III d. Ausg., Abh. XVIII (1876), S. 269f., Nr. 9. Vgl. auch hier Abh. II, S. 112, Anm.

S. 141, Z. 3—7. Vgl. hier Abh. II, S. 115, Anm.

S. 141, Z. 17—19. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 188.

S. 141, Z. 21—24. A. a. O. S. 204.

S. 142, Z. 14f. v. o., 10, 9 v. u. Lie denkt an die Stelle, die er hier in Abh. II, S. 105 anführt, und die er, wie er ebd. S. 103, Z. 18—14 v. u. erwähnt, bereits 1882 am Schlusse der Abh. VII von Bd. V d. Ausg., S. 234 näher präzisiert hatte.

S. 142, Z. 9—5 v. u. Es handelt sich dabei um die Frage, wann zwei r-gl. Gr. von P. T. durch P. T. ähnlich sind, eine Theorie, die Lie hier auf S. 165—175 in neuer, berichtigter Fassung darstellt.

S. 142, Z. 19f. Diese Reduktion auf eine Riccatische Gl. hat Lie zum ersten Male in einem besonderen Falle durchgeführt Bd. III d. Ausg., Abh. XXXVII

(3. Mai 1882), S. 531—536. Etwas später (Bd. V d. Ausg., Abh. VIII (6. Juli 1882), S. 237, Nr. 5) hob er hervor, daß die Reduktion auf der Einführung kanonischer Veränderlicher, nämlich der Invarianten der betr. Gr., beruhe.

In dem Briefe (vgl. S. 787), den A. Mayer am 11. 7. 1882 erhalten und beantwortet hat, spricht Lie etwas ausführlicher über die kanonischen Veränderlichen. Diese Briefstelle, die ich bisher übersehen habe, hätte eigentlich in den Anm. zu Abh. VIII von Bd. V abgedruckt werden sollen. Ich füge sie jetzt hier ein, zumal da sie auch auf die ganze hier besprochene geschichtliche Entwicklung Licht wirft.

„Ich werde baldigst eine Arbeit veröffentlichen[1]) über einen Gegenstand, den ich schon in 8 Jahren beherrsche. Ich darf die Veröffentlichung nicht länger verschieben, da Halphen, wie ich soeben bemerke, angefangen hat, in seinen Untersuchungen über Invariants différentiels spezielle Fälle meiner Resultate zu veröffentlichen.[2]) Ich denke an die kanonischen Formen von Differentialgleichungen, die eine Transformationsgruppe besitzen.

„Laß mich hier auf lineare partielle Diffgl. mich beschränken.

„Es gestatte die Gl.: $Af = 0$ in: $x_1, \ldots, x_n$ die r inf. Trff.: $B_1 f, \ldots B_r f$:

$$(A B_k) = \lambda_k \,.\, A$$

und es bestehe keine Relation:

$$\Sigma \varphi_k \,.\, B_k f + \varphi \,.\, A f = 0 \quad \{\varphi_k(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Laß mich annehmen, daß die $B_i f$ eine Gruppe bilden:

$$(B_i B_k) = \Sigma c_{iks} B_s.$$

Ich setze: $\varrho A f = \mathsf{A} f$ und behaupte, daß ϱ derart als Funktion von: $x_1, \ldots, x_n$ gewählt werden kann, daß:

$$(\mathsf{A} B_i) = 0:$$

„Beweis. Es ist:

$$(\mathsf{A} B_i) = (\varrho A, B_i) = (\varrho \lambda_i - B_i \varrho) A f.$$

Ich verlange, daß: $B_i \varrho - \lambda_i \varrho = 0$ oder:

$$(\beta) \qquad B_i W + \lambda_i \varrho \frac{\partial W}{\partial \varrho} = 0 = \mathsf{B}_i W.$$

Nun aber ist:

$$\mathsf{B}_i(\mathsf{B}_k(W)) - \mathsf{B}_k(\mathsf{B}_i(W)) = (B_i B_k) + (B_i \lambda_k - B_k \lambda_i) \varrho \frac{\partial W}{\partial \varrho}$$

$$= \Sigma c_{iks} B_s W + (B_i \lambda_k - B_k \lambda_i) \varrho \frac{\partial W}{\partial \varrho},$$

und durch Anwendung der Jacobischen Identität:

$$(B_i(B_k A)) + (B_k(A B_i)) + (A(B_i B_k)) = 0,$$

folgt:

$$-(B_i, \lambda_k A) + (B_k, \lambda_i A) + (A, \Sigma c_{iks} B_s) = 0$$

sodaß:

$$\{-(B_i \lambda_k - B_k \lambda_i) + \Sigma c_{iks} \lambda_s\} A f = 0,$$

$$\mathsf{B}_i(\mathsf{B}_k(W)) - \mathsf{B}_k(\mathsf{B}_i(W)) = \Sigma c_{iks} \left(B_s W + \lambda_s \varrho \frac{\partial W}{\partial \varrho}\right)$$

$$= \Sigma c_{iks} \mathsf{B}_s W$$

wird.

1) Die vom 6. 7. 1882 datierte Abh. VIII in Bd. V d. Ausg. A. d. H.

2) Die betr. Abh. von Halphen sind aufgezählt in Bd. V d. Ausg., S. *642*, Z. 3—6.

„Also bilden die Gl. (β) ein vollständiges System, womit der Nachweis geführt ist.

„Ich kann daher ohne Beschränkung:

$$(B_i A) = 0, \quad (B_i B_k) = \Sigma c_{iks} B_s$$

setzen. Seien: $\omega_1, \ldots, \omega_{n-r}$ die Lösungen des vollst. Systems: $B_i f = 0$. Dann sind: $\omega_1, \ldots, \omega_{n-r}$ meine kanonischen Variabeln. Die Gl.: $B_k A \omega_i - A B_k \omega_i = 0$ oder $B_k A \omega_i = 0$ zeigen, daß $A \omega_i$ sicher eine Funktion von: $\omega_1, \ldots, \omega_{n-r}$ ist:

$$A \omega_i = \Theta_i(\omega_1, \ldots, \omega_{n-r}).$$

Ist daher Ω eine unbekannte Funktion von dem ω_i, so wird:

$$A \Omega = \sum_1^{n-r} \Theta_i(\omega_1, \ldots, \omega_{n-r}) \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_i},$$

sodaß: $Af = 0$ immer auf eine Gl. mit $n - r$ unabh. Variabeln reduziert werden kann.

„Die hiermit angedeutete Theorie besteht für beliebige Gl. beliebiger Ordnung, die eine Trfsgr. gestatten.

„Halphen betrachtet den speziellen Fall, daß die Gruppe linear, und zwar die allgemeine lineare Gruppe ist. Er gibt eine Theorie für die Integration solcher Gleichungen, welche sich indes im wesentlichen subsumiert unter meine längst publizierte Verwertung von inf. Trff.

„Ich füge noch hinzu: Die Bestimmung der kanonischen Variabeln: $\omega_1, \ldots, \omega_{n-r}$ verlangte im obenstehenden die Integration des Systems: $B_i f = 0$. Diese Integration wird ohne weiteres geleistet, wenn die endlichen Gleichungen der betreffenden Trfsgr. vorgelegt sind.

„Ich bemerke ferner. Ich verlangte im vorangehenden die Nichtexistenz einer Relation der Form:

$$\Sigma \varphi_i \,.\, B_i + \varphi \,.\, A = 0.$$

Diese Beschränkung ist indes nicht wesentlich.

„Man kann insbesondere das vorangehende auf nichtlineare part. Diffgl. 1. O. anwenden. Dann erhält man einige Integrationstheorien, die wohl nichts wesentlich neues enthalten. Gesetzt man soll die Gl.:

$$f(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$

integrieren und man kennt von: $(f\varphi) = 0$ r Lösungen: $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. Dann ist es nach mir immer möglich, alles auf die Integration von:

$$(fw) = 0, \quad (\varphi_1 w) = 0, \quad \ldots, \quad (\varphi_r w) = 0$$

zu reduzieren.[1]) Gesetzt nun, daß das vollst. Syst.:

$$(\varphi_1 w) = 0, \quad \ldots, \quad (\varphi_r w) = 0$$

integriert werden kann, und seien: $\omega_1, \ldots, \omega_{2n-r}$ die Lösungen. Dann sind: $\omega_1, \ldots, \omega_{2n-r}$ meine kanonischen Variabeln. Die Gl.: $(f\varphi) = 0$ läßt sich ersetzen durch eine lineare part. Gl. der Form:

$$\Sigma \Theta_i(\omega_1, \ldots) \frac{\partial W}{\partial \omega_i} = 0.$$

Besonders interessant der Fall, daß $(\omega_i \omega_k) = 0$.

1) Bd. III d. Ausg., Abh. XVIII (1876), S. 273—275. A. d. H.

„Man erhält auf diese Weise zwar keine neue Erniedrigung in der Ordnung der zurückstehenden Integrationsoperationen, aber eine Erniedrigung der Anzahl der Parameter. Ich rühre hier die Frage: eine Gl. 1. O. durch die einfachsten Integrationsoperationen und mit der geringsten Zahl Parameter in den Hilfsgleichungen zu integrieren."

S. 142, Z. 22—24. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XXXVIII (Sept. 1882[1]), S. 546; Bd. V, Abh. XI (1883), S. 308. Die erste dieser Abh. stammt wie Abh. XXXVII ebd. und VIII in Bd. V aus der Zeit vor der Pariser Reise und dem Zusammentreffen mit Halphen. Leider sagt Lie an keiner dieser Stellen, auf welchem Wege er zuerst eingesehen hat, daß man von der Hilfsgleichung 2. O. bloß ein Integral 1. O. zu bestimmen braucht; er verrät nur (s. die Abh. vom Sept., S. 546), daß diese Vereinfachung nicht aus seinen ersten Untersuchungen resultiert, in denen er sich nur die inf. Trff. der Gruppe gegeben dachte, nicht aber die endlichen. Sie muß also eine Folge des Umstandes sein, daß die endlichen Trff. der Gruppe als bekannt betrachtet werden.

In meiner Anm. zu Bd. III, S. 546, ebd. *761*, Z. 4—9 begründe ich die Liesche Behauptung damit, daß ich auf die kanonische Form der Hilfsgl. verweise; denn die Hilfsgl. 2. O. ist auf eine lineare homogene Diffgl. 3. O. zurückführbar, und auf diese sind die Theorien in Bd. III d. Ausg., Abh. XXXIX, Nr. I, S. 548 u. Abh. XL, § 1, S. 551—553, Nr. 1—4 anwendbar. Da aber Lie, als er jene Abh. XXXVIII schrieb, die Zurückführung der Hilfsgl. 2. O. auf ihre Normalform noch nicht kannte, so ist hiermit noch nicht ins Reine gebracht, wie er damals zu seinem Satze gelangt ist. Mit Sicherheit wird sich das schwerlich feststellen lassen; ich kann daher nur eine Vermutung aussprechen.

Ich bin überzeugt, daß Lie die Theorien, die er in Bd. III d. Ausg. S. 548 und 551—553 entwickelt, schon besaß, als er Abh. XXXVIII schrieb.[2]) Insbesondere kannte er auch schon die auf S. 553, Z. 4—6 angekündigte Verallgemeinerung, die er in der vorliegenden Abh. Bd. VI, S. 195 ff. entwickelt, und bei der Alles darauf beruht, daß die endlichen Trff. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ bekannt sind. Auf Grund dieser Theorie und durch Benutzung der vorhin (S. *800*) erwähnten kanonischen Veränd. mag er seinen Satz gefunden haben. Wie er das im Einzelnen gemacht hat, bleibt freilich im Dunkeln.

S 143, Z. 14f. Vgl. d. Ausg. Bd. III, S. 553, Z. 4—1 v. u.

S. 143, Z. 16—21. Mém. Sav. Etr. Bd. 28 (1883—84), Nr. 1, 301 S. Oeuvres Bd. III (1921), S. 1—260. Vgl. da Kap. 3, Nr. 11 (Oeuvres Bd. III, S. 123).

S. 143, Z. 5, 4 v. u. Vgl. Leipz. Ber. 1891, S. 266 f. (d. Ausg. Bd. IV, Abh. V, § 4).

S. 145, Z. 11—9 v. u. Das ist in der Tat die erste Stelle, an der Lie diesen Ausdruck gebraucht. Vgl. jedoch Bd. V d. Ausg. S. *634*, Z. 17—19. In Bd. III d. Ausg., Abh. XXXIV (1881), S. 487 spricht Lie von den Translationen als einer dreigliedrigen Gruppe, die bei allen Bewegungen invariant bleibt. Der Ausdruck invariante Untergruppe selbst kommt dann, so viel ich weiß, erst 1883 wieder vor, Bd. V d. Ausg., Abh. XIV, S. 376.

S. 145, Z. 8—6 v. u. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder usw., Leipzig 1884, S. 7.

S. 145, Z. 6—4 v. u. Julius König, „Beiträge zur Theorie der algebr. Gl." Ann. XXI (1883), S. 424—433.

S. 145, Z. 4—1 v. u. Vgl. auch diese Ausg. Bd. III, Abh. VII (1873), S. 35.

S. 146, Z. 1. Das „semblable" beruht offenbar auf einem Versehen von Lie, es müßte heißen: isomorphe.

---

1) S. Bd. III d. Ausg., S. *752*, Z. 8—1 v. u. und hier S. *790*, Z. 6, 5 v. u.—*791*, Z. 3.

2) Beweisen kann ich das allerdings nicht, da Abh. XXXIX, Bd. III d. Ausg. in Paris, und zwar im Nov. 1882 geschrieben ist, während der Vortrag, bei dem die Begegnung mit Halphen stattfand, am 2. Nov. gehalten wurde.

S. 146, Z. 13—17. Es ist sehr merkwürdig, daß ein Satz, der aus dieser Invarianz des Ausdrucks $(B_1 B_2)$ unmittelbar folgt, Lie hat entgehen können, der Satz nämlich, daß mit dem Systeme der lin. part. Diffgl.: $A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0$ das System:

$$A_i f = 0, \quad (A_i A_k) = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, q)$$

invariant verknüpft ist. Erst ich habe diesen Satz bemerkt, Engel, Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaffschen Gleichungen, Leipz. Ber. 1889, S. 165, Satz 4. Man muß sich über das Übersehen dieses Satzes um so mehr wundern, als Lie hier auf S. 152 ff. den Klammerausdruck benutzt, um aus einem vollständigen Systeme und aus inf. Trff. kovariante vollständige Systeme abzuleiten.

S. 146, Z. 17, 16 v. u. S. hier S. 166, Z. 7—9.

S. 146, Z. 11 v. u. „angekündigten", nämlich in Abh. V von Bd. III d. Ausg., S. 27, Z. 15—6 v. u.

S. 147, Z. 6—3 v. u. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 204, Nr. 13, 14. Dabei stützt sich Lie auf Theorem III, S. 198 und auf S. 197, Z. 7—1 v. u. Am einfachsten kommt man zum Ziele, wenn man bemerkt, daß für jede Lösung φ des vollst. Syst. $B\varphi = \omega(\varphi)$ wird, wo $\omega(\varphi)$ sicher nicht identisch verschwindet, daß es also eine Funktion Φ von φ gibt, für die $B\Phi = 1$ wird. Diese Gl. zusammen mit den $n-1$ Gl.: $A_k \Phi = 0$ bestimmt die Ableitungen von Φ, das daher durch eine Quadratur gefunden wird. In einer gedruckten Arbeit verfährt Lie zum ersten Male so in Abh. VII (1889), S. 256.

S. 148, Z. 2. Die ν Lösungen Π_k sollen selbstverst. von einander unabh. sein.

S. 148, Z. 1—9, Die Frage, ob die ursprünglich gegebenen inf. Trff. hiermit vollständig ausgenutzt sind, bleibt hier unerörtert. In der Tat gibt es Fälle, wo man ohne Integration Lösungen des vollständigen Systems finden kann, die sich nicht nach der Regel E ergeben. Vgl. Bd. V d. Ausg., S. *662* f. und Bd. VI, die Anm. zu Abh. XXIX, S. 705, Z. 16—22, S. *911* ff.

S. 149, Z. 5—7. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 194, Z. 5—9. Ann. Bd. XI (1877), S. 500 Anm. (d. Ausg. Bd. IV, Abh. III, § 8, Nr. 17). Endlich hier Abh. XXIII (1895), S. 612—614.

S. 149, Z. 18f. „nach dem Vorangehenden", d. h. wegen der Voraussetzungen über die $B_k f$, S. 148, Z. 7f.

S. 149, Z. 13, 12 v. u. Vgl. Bd. III d. Ausg., S. *628* f.

S. 150, Z. 10—12. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 193f., *677*, Z. 8—6 v. u., *678*, Z. 1—3. In den Math. Ann. Bd. XI, a. a. O. erwähnt Lie diese formelle Vereinfachung nicht.

S. 150, Z. 17—19. Diese Voraussetzung braucht hier noch nicht gemacht zu werden. In der Tat sind die Betrachtungen bis S. 151, Z. 5 ganz davon unabhängig, nur sind dann die $B_i' f$ nicht notw. unabh. inf. Trff.

S. 151, Z. 5—1 v. u. Hier bestehen von vornherein Relationen von der Form: $(B_i B_k) = \Sigma c_{iks} B_s f$, die bei Einführung der neuen Veränderlichen erhalten bleiben. Da nun die $B_i f$ in den neuen Veränderlichen von den $\partial f : \partial J_k$ frei werden, so liefern die aufgelösten Gleichungen: $A_k' f = 0$ Beziehungen von der Form: $(B_i A_k') = 0$.

S. 151, Z. 14—18. Das Glied: $\Sigma \alpha_i A_i f$ wäre besser weggelassen worden. Das „und also" ist irreführend, denn es kann nicht auf den Vordersatz: „Es gibt keinen . . ." bezogen werden. In Wirklichkeit sind die Gl. Z. 18 eine Folge der auf Z. 9—14 gemachten Voraussetzungen, zu denen Z. 14—16 noch eine neue Voraussetzung hinzufügen.

S. 151, Z. 9, 8 v. u. Nämlich nach S. 147, Regel F.

S. 152, Z. 8f., 22f. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. IV (1872), S. 16 f. und *628*.

S. 152, Z. 8—6 v. u. Man beachte für das Folgende, daß immer, wenn $n-q$ unabh. Fkt. $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-q}$ gegeben sind, alle Gl. $\Sigma \xi_\nu (\partial f : \partial x_\nu) = 0$, die von

$\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-q}$ befriedigt werden, durch:

$$\sum_{\nu}^{1\ldots n} \xi_\nu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-q)$$

bestimmt werden, daß es also q linear unabh. Gl. dieser Art gibt, die offenbar ein q-gliedriges vollständiges System bilden.

S. 152, Z. 4—2 v. u. Da die Gleichungen von der Form: $\Sigma \alpha_k A_k f = 0$ die einzigen lin. part. Diffgl. 1. O. sind, die von allen Funktionen: $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-q}$ befriedigt werden, so sind die gesuchten Gl. $A'f = 0$ alle die Gl. von der Form: $A'f = \Sigma \alpha_k A_k f = 0$, bei denen die α_k den Bedingungen:

$$A' B \varphi_j = \sum_k^{1\ldots q} \alpha_k \,.\, A_k B \varphi_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-q)$$

genügen. Die so gekennzeichneten Gl. $A'f = 0$ lassen sich nun in anderer Weise, nämlich durch das Bestehen einer Relation (1), S. 153 definieren; jene Bedingungen können nämlich auch in der Form:

$$\sum_k^{1\ldots q} \alpha_k (A_k B \varphi_j - B A_k \varphi_j) = A' B \varphi_j - B A' \varphi_j = 0$$

geschrieben werden.

S. 155, Z. 12—17, 24—29. Man kann auch sagen: Das ϱ-gliedrige System der: $C_i f = 0$ ist das größte System, das aus lauter lin. part. Diffgl.: $\Sigma \alpha_k A_k f = 0$ des vollst. Systems: $A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0$ besteht, und das bei der inf. Trf. Bf invariant bleibt.[1]) Dieses System ist ganz von selber ein ϱ-gliedriges vollständiges System. Aus der Jacobischen Identität zwischen $C_i f$, $C_k f$, Bf folgt nämlich, daß das System der Gl.: $C_i f = 0$, $(C_i C_k) = 0$, dessen Gl. sämtlich die Form: $\Sigma \alpha_k A_k f = 0$ haben, auch bei Bf invariant bleibt. Da nun: $C_1 f = 0, \ldots, C_\varrho f = 0$ das größte bei Bf inv. System von der betrachteten Art ist und also jedes solche inv. System umfassen muß, so enthält es auch die Gl. $(C_i C_k) = 0$ und ist somit ein vollständiges System.

S. 152—155, Nr. 5. Die ganze Untersuchung gestaltet sich wesentlich bequemer, wenn man statt der vollständigen Systeme die entsprechenden unbeschränkt integrablen Systeme von Pfaffschen Gl. betrachtet.[2])

Da das vollständige System: $A_k f = 0$ mit dem unbeschränkt integrablen Systeme der Pfaffschen Gl.: $d\varphi_1 = 0, \ldots, d\varphi_{n-q} = 0$ gleichbedeutend ist, so erkennt man sofort, daß das System der: $A_k' f = 0$ dem ebenfalls unbeschränkt integrablen Systeme:

$$d\varphi_k = 0, \quad d B \varphi_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-q)$$

entspricht, und so fort. Kennt man die Lösungen φ_k nicht, so ersetzt man das System: $A_k f = 0$ durch das entsprechende totale System:

$$\Delta_j = \sum_i^{1\ldots n} \varrho_{ji}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-q)$$

1) Nach S. 162, Z. 8—11 sagen nämlich die Gl. S. 147, Z. 15 aus, daß das System der lin. part. Diffgl.: $A_1 f = 0, \ldots, A_r f = 0$ bei der inf. Trf. Bf invariant bleibt, und dabei ist es gleichgültig, ob diese Gl. ein r-gliedriges vollst. System bilden oder nicht. Lie löst also hier eigentlich zugleich die allgemeinere Aufgabe, das größte bei Bf inv. Syst. von Gl. $\Sigma \alpha_k A_k f = 0$ zu bestimmen, wenn: $A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0$ beliebige unabh. lin. part. Diffgl. sind.

2) Vgl. A. Mayer, Über unbeschränkt integrable Systeme von lin. totalen Diffgl. und die simultane Integration lin. part. Diffgl. Ann. V (1872), S. 448—470

und es liegt auf der Hand, daß dem Systeme: $A_k' f = 0$ das totale System:

$$\Delta_j = 0, \quad B\Delta_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-q)$$

entspricht. Bildet man nun für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ die unbeschränkt integrablen Systeme:

$$(U_\mu) \qquad \Delta_j = 0, \quad B\Delta_j = 0, \quad BB\Delta_j = 0, \ \ldots, \ B^\mu \Delta_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-q),$$

und ist m_μ die Zahl der von einander unabhängigen unter den Gleichungen U_μ, so ist: $m_0 = n - q \leqq m_1 \leqq m_2, \ldots$. Es gibt daher offenbar eine eindeutig bestimmte ganze Zahl l derart, daß $0 \leqq l \leqq q$ und: $m_0 < m_1 < \cdots < m_l$, während m_{l+1} und ebenso $m_{l+2}, \ldots$, gleich m_l ist. Das System U_l ist dann das kleinste Pfaffsche System, welches das System U_0 umfaßt und bei der inf. Trf. Bf invariant bleibt. Es ist das dem vollst. Syst. $C_k f = 0$ entsprechende, unbeschränkt integrable totale System.

S. 156, Z. 16—10 v. u. Also das größte Syst., das aus Gl. von der Form: $\Sigma \alpha_k A_k f = 0$ besteht, und das die inf. Trff.: $B_1 f, \ldots, B_m f$ gestattet. Auch dieses System ist von selber ein vollst. System.

S. 156, Z. 7—3 v. u. Also erzeugen: $A_1 f, \ldots, A_q f$ eine q-gliedrige Gruppe, und diese Gruppe geht bei jeder inf. Trf. $D_1 f, \ldots, D_m f$ in eine Gruppe über, deren inf. Trff. der Schar: $\Sigma a_k A_k f + \Sigma b_j D_j f$ angehören.

S. 156, Z. 2 v. u.—157, Z. 1. Die Zahl n der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ ist unter den gemachten Voraussetzungen $\overline{\gtrless} m + q$, folglich ist: $n - q \overline{\gtrless} m$. Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-q}$ unabh. Lös. des vollst. Syst.: $A_k f = 0$, und führt man $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-q}$ nebst q geeigneten der x als neue Veränderliche ein, so werden $A_1 f, \ldots, A_q f$ alle frei von den Ableitungen von f nach den φ_j. Daß zwischen den $A_k f$ und $D_i f$ keine lin. hom. Relation besteht, zieht jetzt nach sich, daß kein Ausdruck: $\Sigma \varrho_i D_i f$ von den Ableitungen $\partial f : \partial \varphi_j$ frei sein darf, daß also in der Matrix aller $D_i \varphi_j$ nicht alle m-reihigen Det. verschwinden.

S. 157, Z. 2—8. Die α_i in $A'f$ werden durch die Gl.:

$$(V) \qquad \sum_i^{1\ldots q} \alpha_i \,.\, A_i A_\mu \varphi_j = 0, \qquad \sum_i^{1\ldots q} \alpha_i \,.\, A_i D_k \varphi_j = 0$$

$$(\mu = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, n-q;\ k = 1, \ldots, m)$$

bestimmt, unter denen die ersten q sich auf $0 = 0$ reduzieren. Es ist aber:

$$A_i D_k \varphi_j = A_i D_k \varphi_j - D_k A_i \varphi_j = \sum_\mu^{1\ldots q} a_{ik\mu} A_\mu \varphi_j + \sum_s^{1\ldots m} d_{iks} D_s \varphi_j,$$

wo die $A_\mu \varphi_j$ verschwinden, also kommt:

$$\sum_s^{1\ldots m} \left(\sum_i^{1\ldots q} d_{iks} \alpha_i \right) D_s \varphi_j = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n-q),$$

oder, wegen der Beschaffenheit der Matrix der $D_s \varphi_j$:

$$\sum_i^{1\ldots q} d_{iks} \alpha_i = 0 \qquad (k, s = 1, \ldots, m).$$

Enthält dieses System gerade $q - l$ unabh. Gl., und wird es von den l linear unabh. Lösungssystemen: $\alpha_{\lambda 1}, \ldots, \alpha_{\lambda q}$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ befriedigt, wo die $\alpha_{\lambda i}$ Konstanten sind, so ist:

$$\alpha_i = \sum_\lambda^{1\ldots l} \varrho_\lambda \alpha_{\lambda i} \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

mit den l willkürlichen Funktionen ϱ_λ das allgemeinste Lösungssystem der Gl. (V). Man kann daher das vollst. Syst. der Gl. $\mathsf{A}'f=0$ in der Form:

$$\mathsf{A}'_\lambda f=\sum_i^{1\dots q}\alpha_{\lambda i}A_i f=0 \qquad (\lambda=1,\dots,l)$$

darstellen und erkennt sofort, daß Relationen von der Form S. 157, Z. 7 mit konstanten Koeff. bestehen:

$$(W)\qquad \begin{cases}(\mathsf{A}'_\lambda\mathsf{A}'_\mu)=\Sigma c'_{\lambda\mu s}\mathsf{A}'_s f,\\ (\mathsf{A}'_\lambda D_k)=\Sigma a'_{\lambda k s}A_s f.\end{cases}$$

Hieraus geht insbesondere hervor, daß die $\mathsf{A}'_\lambda f$ eine l-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $A_1 f,\dots,A_q f$ erzeugen.

Wie Lie selbst S. 158, Z. 8f. sagt, läßt sich dieses Ergebnis durch begriffliche (synth·tische) Betrachtungen einfacher ableiten.

Es sind $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-q}$ unabhängige Invarianten der q-gliedrigen Gruppe: $A_1 f,\dots,A_q f$, und alle Inv. dieser Gr. lassen sich durch $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-q}$ ausdrücken. Bei der inf. Trf. $D_k f$ geht diese Gruppe nach S. 162 über in die unendlich benachbarte q-gliedrige Gruppe: $A_i f+(A_i D_k)\delta t$ $(k=1,\dots,q)$, und gleichzeitig gehen $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-q}$ über in $n-q$ unabhängige Invarianten:

$$\varphi_\mu-D_k\varphi_\mu\delta t \qquad (\mu=1,\dots,n-q)$$

dieser neuen Gruppe. Demnach bestimmen: φ_μ, $D_k\varphi_\mu$ $(\mu=1,\dots,n-q)$ die Invarianten derjenigen Gruppe, deren inf. Trff. beiden q-gliedrigen Gruppen angehören. Läßt man k die Werte $1,\dots,m$ durchlaufen, so hat man alle inf. Trff. der Gruppe $A_1 f,\dots,A_q f$ aufzusuchen, die allen m unendlich benachbarten Gruppen angehören, oder, was auf dasselbe hinauskommt, alle inf. Trff. $\Sigma\lambda_i A_i f$, die bei allen m inf. Trff. $D_k f$ in inf. Trff. der Gruppe: $A_1 f,\dots,A_q f$ übergehen. Nun aber ist:

$$A_i f+(A_i D_k)\delta t=A_i f+\Big(\sum_r^{1\dots q}a_{ikr}A_r f+\sum_s^{1\dots m}d_{iks}D_s f\Big)\delta t;$$

soll daher die inf. Trf. $\Sigma\lambda_i A_i f$ bei jedem $D_k f$ die verlangte Eigenschaft haben, so müssen die Konstanten λ_i den Gl.:

$$\sum_i^{1\dots l}d_{iks}\lambda_i=0 \qquad (k,s=1,\dots,m)$$

genügen, die mit den vorhin gefundenen übereinstimmen. Die gesuchten inf. Trff. $\Sigma\lambda_i A_i f$ sind daher aus den l früher definierten inf. Trff.: $\mathsf{A}'_\lambda f$ linear ableitbar.

Die l Gl. $\mathsf{A}'_\lambda f=0$ bilden ein l-gliedriges vollständiges System, dessen allgemeinste Lösung eine willkürliche Funktion aller φ_j, $D_k\varphi_j$ $(j=1,\dots,n-q;\ k=1,\dots,m)$ ist. Da überdies die inf. Trff. $\mathsf{A}'_\lambda f$ die gemeinsamen inf. Trff. von $m+1$ q-gliedrigen Gruppen sind, so ist klar, daß sie eine l-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $A_1 f,\dots,A_q f$ erzeugen. Wir können noch hinzufügen, daß diese Untergruppe in der Gruppe: $A_1 f,\dots,A_q f$ invariant ist.[1] In der Tat, es ist:

$$A_i\varphi_j=0,\quad A_i D_k\varphi_j-\sum_s^{1\dots m}d_{iks}D_s\varphi_j$$
$$(i=1,\dots,q;\ j=1,\dots,n-q;\ k=1,\dots,m);$$

1) Lie hat nicht für nötig gehalten, das ausdrücklich zu erwähnen.

demnach bleibt der Inbegriff der Lösungen des vollst. Systems: $\mathsf{A}'_1 f=0,\dots,\mathsf{A}'_l f=0$ bei den q inf. Trff. $A_i f$ invariant, worin eben liegt, daß $\mathsf{A}'_1 f,\dots,\mathsf{A}'_l f$ eine inv. Untergr. von $A_1 f,\dots,A_q f$ ist.

Man kann sich von dieser letzten Eigenschaft der Gruppe: $\mathsf{A}'_1 f,\dots,\mathsf{A}'_l f$ auch noch auf andere Weise überzeugen. Bildet man nämlich die Jacobische Identität:

$$((\mathsf{A}'_\lambda A_i)D_k)+((A_i D_k)\mathsf{A}'_\lambda)+((D_k\mathsf{A}'_\lambda)A_i)=0,$$

so erkennt man aus den Gleichungen (W), daß die letzten beiden Glieder aus $A_1 f,\dots,A_q f$ allein linear ableitbar sind, worin liegt, daß alle $(\mathsf{A}'_\lambda A_i)$ aus $\mathsf{A}'_1 f,\dots,\mathsf{A}'_l f$ allein linear ableitbar sind.

S. 157, Z. 14—17. Aus den eben durchgeführten Betrachtungen folgt nunmehr leicht, daß die Funktionen: φ_j, $D_k\varphi_j$, $D_{k'}D_k\varphi_j,\dots$ die Invarianten der größten in der Gruppe $A_1 f,\dots,A_q f$ enthaltenen invarianten Untergruppe bestimmen, die auch bei den inf. Trff. $D_1 f,\dots,D_m f$ invariant bleibt. Daraus aber ergibt sich unmittelbar das auf Z. 17—19 Gesagte.

Ich habe in Bd. V d. Ausg., S. *690—694* dieses Ergebnis auf andere Weise begründet, glaube aber jetzt, daß die hier entwickelten Betrachtungen eher den Weg wiedergeben, auf dem Lie seinen Satz bewiesen hat. Um nun bei der Darstellung dieser Theorie möglichst wenig Gruppentheorie vorauszusetzen, hat Lie die ganze Fragestellung verallgemeinert und hat deshalb zunächst die Entwickelungen S. 152—156 vorausgeschickt, bevor er auf den Fall einging, wo die $A_i f$ und $D_k f$ eine Gruppe erzeugen.

S. 157, Z. 14—10 v. u. Lie hat vergessen, eine Voraussetzung hinzuzufügen, die wegen S. 156, Z. 9—7 v. u. auch noch gemacht werden muß, die nämlich, daß $A_1 f,\dots,A_q f$, $B_{q+1}f,\dots,B_n f$ durch keine lin. hom. Relation verknüpft sein sollen.

S. 158, Z. 8—12. Wie sie sich einfacher gestalten, ist im Vorhergehenden gezeigt. Was die Zahl der erforderlichen Differentiationen angeht, so kann man aus der Zusammensetzung der Gruppe ohne weiteres erkennen, wie viele Differentiationen man hinter einander ausführen muß. Man gelangt ja nach und nach zu gewissen invarianten Untergruppen der Gruppe: $B_{q+1}f,\dots,B_{q''}f$, deren jede in der vorhergehenden enthalten, und deren letzte in der ganzen Gruppe: $B_{q+1}f,\dots,B_n f$ invariant ist. Die Zahl dieser invarianten Untergruppen gibt an, wie oft man die Operationen $B_{q''+\mu}f$ auf die φ_k anwenden muß, um alle Lösungen zu erhalten, die sich durch Differentiation ergeben. Ist die Untergr. $B_{q+1}f,\dots,B_{q''}f$ selbst in der ganzen Gr. inv., so kann man keine neuen Lösungen durch Differentiation ableiten.

Als Beispiel kann das in Bd. V d. Ausg., Abh. XI (1883), S. 307—310 behandelte Integrationsproblem dienen, das auf S. *701—703* noch genauer durchgeführt ist. Dabei ist $q=1$, $n=9$, und die Gruppe $B_2 f,\dots,B_9 f$ ist die sechsmal erweiterte allg. proj. Gr. der Ebene, während die Untergruppe: $B_2 f,\dots,B_{q''}f$ mit der sechsmal erweiterten sechsgl. proj. Gruppe:

$$p,\ q,\ xp,\ yq,\ xq,\ x^2p+xyq$$

des unendlich fernen Punktes der y-Achse zusammenfällt. Einmalige Anwendung der inf. Trff. $\mathsf{B}_7^{(6)}f$, $\mathsf{B}_8^{(6)}f$ liefert, wie a. a. O. S. *702*f. zu ersehen ist, aus den zwei durch Integration gefundenen Integralgl.: $W_1=a_1$, $W_2=a_2$ vier neue Integralgl., welche die Größen:

$$\varrho_4^{-\frac{1}{2}}y_2^{\frac{3}{2}},\quad y_3:y_2^{\frac{3}{2}},\quad x,\quad y_2$$

als Funktionen von Φ_1 bestimmen. Man kennt also dann: x, y_2, y_3, ϱ_4, ϱ_5, ϱ_6, also x, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 als Funktionen von Φ_1. Das aber sind die niedrigsten

Differentialinvarianten der zweigliedrigen Gruppe: q, xq, die in der sechsgl. als inv. Untergr. enthalten ist. Da die Gruppe: q, xq außer der Identität keine inv. Untergruppe der sechsgl. enthält, so muß abermalige Anwendung von $\mathsf{B}_7^{(6)}f$, $\mathsf{B}_8^{(6)}f$ die beiden noch fehlenden Integrale liefern.

S. 158, Z. 12—15. Es erscheint angebracht, das wirklich auszuführen.

Das q-gliedrige vollständige System: $A_1f=0, \ldots, A_qf=0$ in $x_1, \ldots, x_n$ gestatte die inf. Trff.: $B_{q+1}f, \ldots, B_nf$, es bestehe keine lin. hom. Relation zwischen den A_if und den $B_{q+\mu}f$, und es sei nicht möglich, Lösungen des vollst. Syst. oder neue inf. Trff. abzuleiten (S. 148, Z. 1—9). Dann bestehen Relationen von der Form:

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{l} (A_iA_k)=\sum\limits_s^{1\ldots q}\varphi_{iks}(x)A_sf, \quad (A_iB_{q+\mu})=\sum\limits_s^{1\ldots q}\chi_{i\mu s}(x)A_sf, \\ (B_{q+\mu}B_{q+\nu})=\sum\limits_\tau^{1\ldots n-q}c_{\mu\nu\tau}B_{q+\tau}f+\sum\limits_s^{1\ldots q}\psi_{\mu\nu s}(x)A_sf. \end{array}\right.$$

Es sei endlich: $B_{q+1}f, \ldots, B_{q+l}f$ eine Untergruppe, und: $u_1, \ldots, u_{n-q-l}$ seien unabb. Lös. des vollst. Syst.:

$$(2)\qquad A_1f=0, \ldots, A_qf=0, \quad B_{q+1}f=0, \ldots, B_{q+l}f=0.$$

Bei der inf. Trf. $B_{q+l+j}f$ geht das vollst. System (2) über in das unendlich benachbarte:

$$A_kf+(A_kB_{q+l+j})\delta t=0, \quad B_{q+\lambda}f+(B_{q+\lambda}B_{q+l+j})\delta t=0,$$

das heißt in:

$$(2')\qquad A_kf=0, \quad B_{q+\lambda}f+\sum_\tau^{1\ldots n-q}c_{\lambda,l+j,\tau}B_{q+\tau}f\cdot\delta t=0 \quad (k=1,\ldots q;\ \lambda=1,\ldots,l),$$

während die Lösungen u_μ übergehen in:

$$u_\mu-B_{q+l+j}u_\mu\cdot\delta t=0 \qquad (\mu=1,\ldots,n-q-$$

Die Funktionen:

$$(3)\qquad u_\mu, \quad B_{q+l+j}u_\mu \qquad (\mu, j=1,\ldots,n-q+l)$$

sind daher die Lösungen des vollst. Systems, das aus allen Gl. besteht, die das System (2) mit allen $n-q-l$ Systemen (2′) gemein hat, also eines vollst. Syst., das außer den Gl.: $A_kf=0$ noch alle Gl. von der Form:

$$Zf=\sum_\lambda^{1\ldots l}\omega_\lambda B_{q+\lambda}f=0$$

enthält, wo die ω_λ an die Bedingungen:

$$(4)\qquad \sum_\lambda^{1\ldots l}c_{\lambda,l+j,l+\tau}\,\omega_\lambda=0 \qquad (j,\tau=1,\ldots,n-q-l)$$

gebunden sind.

Besitzen die Gl. (4) gerade h linear unabhängige Lösungssysteme: $\omega_{\mu1}, \ldots, \omega_{\mu l}$ $(\mu=1,\ldots,h)$, wo die $\omega_{\mu\lambda}$ Konstanten sind, so hat unser neues vollst. Syst. die Form:

$$(5)\qquad A_1f=0, \ldots, A_qf=0, \quad Z_\mu f=\sum_\lambda^{1\ldots l}\omega_{\mu\lambda}B_{q+\lambda}f=0 \qquad (\mu=1,\ldots,h).$$

Erinnert man sich überdies der Gl. (1) und des Umstandes, daß die inf. Trff. der Gr.: $B_{q+1}f, \ldots, B_{q+l}f$ durch keine lin. hom. Relation verknüpft sind, so erkennt man, daß Gl. von der Form:

$$(6)\qquad (A_iZ_\mu)=\sum_s^{1\ldots q}\overline{\varphi}_{i\mu s}(x)A_sf, \quad (Z_\mu Z_\nu)=\sum_\tau^{1\ldots h}\overline{c}_{\mu\nu\tau}Z_\tau f+\sum_s^{1\ldots q}\overline{\psi}_{\mu\nu s}(x)A_sf$$

bestehen, wo die $\overline{c}_{\mu\nu\tau}$ Konstanten sind. Darin liegt offenbar, daß die inf. Trff. $Z_\mu f$ die Lös. des vollst. Systems: $A_1f=0, \ldots, A_qf=0$ durch eine h-gliedrige Gruppe transformieren.

Bildet man ferner die Gleichungen:

$$B_{q+\lambda}u_\mu=0, \quad B_{q+\lambda}B_{q+l+j}u_\mu=\sum_\tau^{l+1\ldots n-q}c_{\lambda,l+j,\tau}B_{q+\tau}u_\mu$$
$$(\lambda=1,\ldots,l;\ \mu=1,\ldots,n-q-l)$$

und bedenkt, daß die allgemeinste Lösung des vollst. Systems (5) eine willkürliche Fkt. der Größen (3) ist, so erkennt man, daß der Inbegriff dieser Lösungen und also auch das vollst. System (5) selber bei den inf. Trff. der Gruppe: $B_{q+1}f, \ldots, B_{q+l}f$ inv. bleibt. Daraus aber folgt, daß Gleichungen von der Form:

$$(B_{q+\lambda}Z_\mu)=\sum_\nu^{1\ldots h}e_{\lambda\mu\nu}Z_\nu f+\sum_s^{1\ldots q}\overline{\chi}_{\lambda\mu s}(x)A_sf$$
$$(\lambda=1,\ldots,l;\ \mu=1,\ldots,h)$$

bestehen, wo die $e_{\lambda\mu\nu}$ Konstanten sind. Mit andern Worten: Die Gruppe, durch welche die Lösungen des vollst. Syst.: $A_1f=0, \ldots, A_qf=0$ bei den inf. Trff.: $B_{q+1}f, \ldots, B_{q+l}f$ vertauscht werden, enthält als invariante Untergruppe die Gruppe, durch die diese Lös. bei: $Z_1f, \ldots, Z_hf$ vertauscht werden.

In derselben Weise kann man nun das vollst. Syst. ermitteln, das alle:

$$u_\mu, \quad B_{q+l+j}u_\mu, \quad B_{q+l+\tau}B_{q+l+j}u_\mu$$

zu Lösungen hat. Wir erwähnen nur, daß auch dieses vollst. Syst. bei der Gruppe: $B_{q+1}f, \ldots, B_{q+l}f$ inv. bleibt. Fährt man so fort, so gelangt man schließlich zu einem vollst. Syst.:

$$A_1f=0, \ldots, A_qf=0, \quad \sum_\lambda^{1\ldots l}\vartheta_{\mu\lambda}B_{q+\lambda}f=0 \qquad (\mu=1,\ldots,h_m),$$

dessen Lösungen man kennt. Dabei sind die $\vartheta_{\mu\lambda}$ Konstanten, die auch alle verschwinden können. Dieses vollst. Syst. bleibt bei der ganzen Gruppe: $B_{q+1}f, \ldots, B_nf$ invariant, die inf. Trff. dieser Gruppe und die inf. Trff. $\Sigma\vartheta_{\mu\lambda}B_{q+\lambda}f$ transformieren also die Lösungen des vollst. Systems: $A_1f=0, \ldots, A_qf=0$ durch zwei Gruppen, unter denen die zweite in der ersten inv. ist.

S. 159, Z. 18ff. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II, S. 262—264, 266, 299f.

S. 161, Z. 12. Es ist nicht ersichtlich, warum Lie nicht sagt: „durch eine zweckmäßige homogene B. T."

S. 161, Z. 20—24. Das stimmt mit Bd. V d. Ausg., Abh. II (1876), S. 10, Z. 6, Abh. III (1876), S. 42, Z. 2, 1 v. u., Abh. IV (1878), S. 86. Vgl. ebd. S. *616*, *621*. Anders Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 226, 258, Bd. III, S. 571.

S. 164, Z. 9 v. u. Auch in Bd. V d. Ausg. Abh. I, S. 7, Z. 16f. befindet sich schon eine Anspielung auf die hier eingeführte lineare homogene Gruppe. Vgl. die Anm. dazu, ebd. S. *615* und S. *619*, Z. 10 v. u.

S. 164, Z. 8—5 v. u. Diese lineare Gr. bezeichnet Lie später als die adjungierte Gr. der Gr.: $B_1 f, \ldots, B_r f$, vgl. Th. der Trfsgr. Bd. I, Kap. 16.

S. 164, Z. 3, 2 v. u. C. Stéphanos, Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques. Math. Ann. XXII (1883), S. 299—367.

S. 164, Z. 2, 1 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 255.

S. 164, Z. 14—21. Sind: $B_{\varrho+1} f, \ldots, B_r f$ die ausgezeichneten inf. Trff., so ist das nur richtig, wenn in den Gl.:

$$(B_i B_k) = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} B_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, \varrho)$$

alle $c_{ik, \varrho+1}, \ldots, c_{ikr}$ verschwinden, s. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 278. Lie benutzt den hier aufgestellten, nicht allgemein gültigen Satz nachher in § 11, Nr 33, S. 221 f. In Lie-Scheffers Diffgl. (1891), S. 568, Z. 7—5 v. u. weist Lie darauf hin, daß die Darstellung in den Math. Ann. Bd. XXV an einer Stelle eine kleine Lücke hat und an einer andern Stelle einen Satz verwertet, dessen allgemeine Gültigkeit allerdings zweifelhaft ist. Er denkt dabei an den hier aufgestellten Satz. Dieser wird eigentlich erst in den Leipz. Ber. von 1890 entbehrlich gemacht (hier Abh. X, S. 288—299). Wegen der „kleinen Lücke“ vgl. die Anm. zu S. 169, Z. 1—3.

S. 164 f., Nr. 10. Ausführlich dargestellt Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 15, S. 246—253.

S. 165—175, umgearbeitet Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 19, S. 327—355.

S. 166, Z. 10 f. Dort ist allerdings nur gesagt, daß das Theorem VI (Bd. V d. Ausg., S. 103) unrichtig formuliert ist (vgl. ebd. S. *624* f.). Die verbesserte Formulierung hat Lie erst 1884 mitgeteilt (Bd. V d. Ausg., Abh. XVII, S. 447 Anm.).

S. 167, Z. 3 f. Damit ist zugleich gemeint, daß sie weder zwischen den y allein eine Relation liefern dürfen, noch zwischen den y' allein.

S. 167, Z. 17—20. Bei Einführung der neuen Veränd. $y_i' = F_i(y)$ wird:

$$B_k f = \sum_i^{1 \ldots n} B_k y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i'} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

also müssen die Gl.:

$$B_k y_i' = B_k F_i = B_k' y_i' \qquad (k, i = 1, \ldots, n)$$

vermöge: $y_i' = F_i(y)$ bestehen, d. h., das Glsyst.: $y_i' = F_i(y)$ in den $2n$ Veränd. y_i, y_i' muß die inf. Trff.:

$$\mathsf{B}_k f = B_k f + B_k' f \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

gestatten (s. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 109—112). Außerdem muß es selbstverständlich nach $y_1, \ldots, y_n$ auflösbar sein.

Es kommt also darauf an, ein System von $2n$ unabh. Gl. in den y_i, y_i' aufzustellen, das die n inf. Trff. $\mathsf{B}_k f$ gestattet, und das sowohl nach den y_i als nach den y_i' auflösbar ist. Das Glsyst. $\Omega_i(y, y') = a_i$ besitzt die verlangten Eigenschaften, denn es ist sowohl nach den y_i als nach den y_i' auflösbar (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 91, Theorem 12) und es gestattet die inf. Trff. $\mathsf{B}_k f$, weil alle $\mathsf{B}_k \Omega_i$ identisch verschwinden.

S. 168, Z. 10—6 v. u. Sind die endlichen Trff. beider Gruppen bekannt, und sind die endl. Trff. der einen schon holoedrisch isomorph auf die der andern bezogen, so kann die Überführung der einen Gr. in die andere ohne jede Integration, auch ohne Quadratur geleistet werden. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 425—428.

S. 169, Z. 1—3. Man vgl. hierzu S. 208, Z. 2, 1 v. u. und S. 212, Z. 1—4, wo Lie ähnliche Behauptungen aufstellt. Es ist nicht zu ersehen, auf welche Weise

Lie damals zu diesen Sätzen gelangt war. In der Tat, kennt man die endlichen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$, so kann man allerdings dann, wenn die Gruppe keine ausgezeichneten inf. Trff. enthält, ohne weiteres jede Gl.: $\Sigma e_k B_k f = 0$ mit konstanten Koeffizienten und also insbesondere jede Gl.: $B_k f = 0$ durch Differentiation und Elimination integrieren. Dieser Fall liegt auf S. 212, Z. 1—4 vor. Dagegen erfordert der Fall, daß die Gruppe ausgezeichnete inf. Trff. enthält, eine besondere Untersuchung, die Lie allem Anscheine nach erst später durchgeführt und jedenfalls erst 1889 in den Leipz. Ber. (hier Abh. VII) veröffentlicht hat. Er zeigt da, daß man in diesem Falle gewisse Quadraturen ausführen muß.

Vielleicht hatte Lie, als er die vorliegenden Zeilen schrieb, sich noch nicht genügend klar gemacht, welchen Einfluß das Auftreten ausgezeichneter inf. Trff. der Gruppe hat. Das ist um so glaublicher, als er schon auf S. 164 bei Aufstellung des Satzes 9 diesen Einfluß nicht genügend beachtet hatte. Es ist daher wohl anzunehmen, daß gerade in den vorliegenden Zeilen und in der Parallelstelle auf S. 208 die „kleine Lücke“ vorliegt, von der Lie an der auf S. *810*, Z. 12—15 angeführten Stelle spricht.

S. 169, Z. 6—9. Sind $u_1, \ldots, u_{n-1}$ unabh. Lösungen von: $B_k f = 0$ und $v_1, \ldots, v_{n-1}$ eben solche von: $B_k' f = 0$, so führt man $u_1, \ldots, u_{n-1}$ und etwa y_n als neue Veränderliche ein und ebenso $v_1, \ldots, v_{n-1}$ und y_n'. Dann kommt die Integration von: $B_k f + B_k' f = 0$ auf eine gewöhnl. Diffgl. 1. O. zwischen y_n und y_n' hinaus, in der die Veränd. schon getrennt sind. Hat man aber die endl. Trff. der eingl. Gr. $B_k f$ und $B_k' f$ schon auf ihre kanonischen Formen gebracht, so sind die beiden noch erforderlichen Quadraturen in y_n und y_n' schon erledigt.

S. 169, Z. 16 f. richtiger: „durch gewisse Quadraturen, deren Anzahl sich unter Umständen auf Null reduziert.“

S. 169, Z. 14—1 v. u. Nach Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 186 u. 199 können wir setzen:

$$B_1 f = p + 2xq + 3yr, \quad B_2 f = xp + 2yq + 3zr,$$
$$B_3 f = 3x(xp + yq + zr) - 2yp - zq$$

und:

$$B_1' f = p' + y'r', \quad B_2' f = x'p' + z'r', \quad B_3' f = x'(x'p' + y'q' + z'r') - z'q'.$$

Bei jeder Trf., die jedes $B_k f$ in $B_k' f$ überführt, gehen die Bahnkurven:

$$y = ax^2, \quad z = bx^3$$

von $B_2 f$ in die Bahnkurven: $y' = a'$, $z' = b'x'$ von $B_2' f$ über, also in gerade Linien. Die Bahnkurven von $B_2 f$ haben mit der invarianten Kurve: $y = x^2$, $z = x^3$ in zwei Punkten die Schmiegungsebenen gemein.

Da andrerseits die inf. Trff.: $B_2 f$ und $B_2' f$ jede in ihrer dreigl. Gr. inf. Trff. von allgemeiner Lage sind (Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 17, Theorem 2), so erkennt man sofort, daß wirklich jede Gerade von allgemeiner Lage im Raume x', y', z' einer Kurve 3. O von der angegebenen Art entspricht. Gewissen Geraden, z. B. den Bahnkurven: $y' = a'$, $z' - a'x' = b'$ von $B_1' f$ entsprechen Kurven 3. O., die mit der inv. Kurve 3. O. in zwei zusammenfallenden Punkten die Schmiegungsebene gemein haben.

S. 170, Z. 4—2 v. u. Hierin liegt, daß das Glsyst.: $\varphi_{kj} = \varphi_{kj}'$ die inf. Trff.: $\mathsf{B}_k f = B_k f + B_k' f$ gestattet. Die ganze Aufgabe kommt also (vgl. S. *810*) darauf hinaus, zu den Gl.: $\varphi_{kj} = \varphi_{kj}'$ solche Gl. hinzuzufügen, daß ein System von 2ν unabh. Gl. entsteht, das sowohl nach $y_1', \ldots, y_\nu'$ als nach $y_1, \ldots, y_\nu$ auflösbar ist, und das die r inf. Trff. $\mathsf{B}_k f$ gestattet. Gibt es unter den φ_{kj} und also auch unter den φ_{kj}' gerade ν unabh. Fkt., so ist die Aufgabe schon erledigt, denn dann bestimmen die Gl.: $\varphi_{kj} = \varphi_{kj}'$ eine, und zwar die einzige Trf., die jedes $B_k f$ in $B_k' f$ überführt.

S. 171, Z. 8—172, Z. 8. Diese Entwickelungen lassen an Durchsichtigkeit zu wünschen übrig, und auch in der Umarbeitung, Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 344—347, ist die Darstellung noch unnötig umständlich.

Wir führen $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ nebst $\nu - \mu$ geeigneten der y, etwa: $y_1, \ldots, y_{\nu-\mu}$ als neue Veränderliche ein. Dann wird:

$$B_k f = \sum_j^{1\ldots\mu} B_k\varphi_j \frac{\partial f}{\partial \varphi_j} + \sum_\tau^{1\ldots\nu-\mu} B_k y_\tau \frac{\partial f}{\partial y_\tau},$$

wo die $B_k\varphi_j$ Funktionen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ allein sind. Die Gleichungen:

$$B_1 f = 0, \ldots, B_n f = 0 \tag{1}$$

bilden ein n-gliedriges vollständiges System in: $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu, y_1, \ldots, y_{\nu-\mu}$ mit $\nu - n$ unabh. Lösungen. Ebenso bilden die von einander unabhängigen unter den verkürzten Gleichungen:

$$\overline{B}_k f = \sum_j^{1\ldots\mu} B_k\varphi_j \frac{\partial f}{\partial \varphi_j} = 0 \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{2}$$

ein vollst. System in den Veränd.: $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$. Wir wollen annehmen, daß das System (2) gerade m unabh. Gl. enthält, die nach:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} \tag{3}$$

auflösbar sind $(m \leqq \mu,\ m \leqq n)$. Dann sind die Gl. (1) auflösbar nach den Ableitungen (3) und nach $n - m$ unter den Ableitungen i. B. auf $y_1, \ldots, y_{\nu-\mu}$, etwa nach:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{n-m}}. \tag{4}$$

Sind daher: $u_{n+1}, \ldots, u_\nu$ unabhängige Lös. von (1), so sind die ν Größen:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m,\ \ y_1, \ldots, y_{n-m},\ \ u_{n+1}, \ldots, u_\nu$$

von einander unabhängig (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 91). Da andrerseits die Gl. (2) ein m-gliedriges vollst. Syst. bilden, so können wir gerade $\mu - m$ unter den Lös. $u_{n+1}, \ldots, u_\nu$ so wählen, daß sie Fkt. von $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ allein werden. Es seien das: $u_{p+1}, \ldots, u_\nu$, wo $\nu - p = \mu - m$ gesetzt ist. Dann sind: $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, u_{p+1}$ $\ldots, u_\nu$ gerade μ unabh. Fkt. von $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$, durch die auch umgekehrt $\varphi_1, \ldots$ φ_μ ausgedrückt werden können.

Jetzt führen wir wieder neue Veränderliche ein, nämlich an Stelle von: $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ die Größen:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m,\ \ u_{p+1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu), \ldots, u_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu),$$

die wir mit: $x_1, \ldots, x_m, x_{p+1}, \ldots, x_\nu$ bezeichnen, und an Stelle von: $y_1, \ldots, y_{\nu-\mu}$ die $\nu - \mu = p - m$ Größen:

$$y_1, \ldots, y_{n-m},\ \ u_{n+1}, \ldots, u_p,$$

die wir mit: $x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_p$ bezeichnen.[1]) Dann bilden: $x_{n+1}, \ldots,$

1) Ich behalte die Lieschen Bezeichnungen bei, obgleich man sie offenbar durch zweckmäßiger gewählte ersetzen könnte.

x_ν ein System unabhängiger Lösungen der r Gl.: $X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0$, und die $r - m$ Ausdrücke: $X_k x_1, \ldots, X_k x_m$ sind sämtlich Fkt. von: $x_1, \ldots, x_m, x_{p+1},$ $\ldots, x_\nu$ allein. Demnach ergibt sich die S. 172, Z. 16 f. angegebene Form der $B_k f$.

Setzt man nunmehr:

$$x_1' = \varphi_1', \ldots, x_m' = \varphi_m',\ \ x_{p+k}' = u_{p+k}(\varphi_1', \ldots, \varphi_\mu') \qquad (k=1,\ldots,\nu-p)$$

und wählt die Veränderlichen: $x_{m+1}', \ldots, x_p'$ so, daß: $x_{n+1}', \ldots, x_p'$ von einander und von $x_{p+1}', \ldots, x_\nu'$ unabh. Lösungen des vollst. Systems: $X_1' f = 0, \ldots, X_r' f = 0$ und daß $x_{m+1}', \ldots, x_n'$ von $x_1', \ldots, x_m', x_{n+1}', \ldots, x_\nu'$ unabh. werden, so erhält man die $B_k' f$ in der Form: S. 172, Z. 3, 2 v. u.

S. 173. Das Glsyst. $\varphi_{kj} = \varphi_{kj}'$ kann jetzt durch das folgende:

$$x_1' = x_1, \ldots, x_m' = x_m,\ \ x_{p+1}' = x_{p+1}, \ldots, x_\nu' = x_\nu \tag{5}$$

ersetzt werden, das aus $\mu = m + \nu - p$ unabh. Gl. besteht und das die r inf. Trff.:

$$\mathfrak{B}_k f = B_k f + B_k' f \qquad (k=1,\ldots,r)$$

gestattet, wo für $B_k f$ und $B_k' f$ die Formen in den neuen Veränderlichen zu setzen sind. Man hat daher noch zu (5) gerade $\nu - \mu = p - m$ solche Gl. hinzuzufügen, daß ein Glsyst. entsteht, das die inf. Trff. $\mathfrak{B}_k f$ gestattet und das sowohl nach $x_1', \ldots, x_\nu'$ als nach $x_1, \ldots, x_\nu$ auflösbar ist.

Da $x_{n+1}', \ldots, x_p'$ Lösungen des vollst. Syst.: $X_1' f = 0, \ldots, X_r' f = 0$ sind, so müssen sie gleich Funktionen von $x_1, \ldots, x_\nu$ werden, die Lös. von: $X_1 f = 0,$ $\ldots, X_r f = 0$ sind. Man kann also von vornherein zu (5) die $p - n = \nu - \mu -$ $- (n - m)$ Gl.:

$$x_{n+k}' = \omega_k(x_{n+1}, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_\nu) \qquad (k=1,\ldots,p-n) \tag{6}$$

hinzufügen, wo die ω_k willkürliche Fkt. sind, die nur i. B. auf: $x_{n+1}, \ldots, x_p$ von einander unabhängig sein müssen.

Ist $m = n$, so sind wir fertig. Ist $m < n$, so haben wir aus den $\mathfrak{B}_k f$ die Ableitungen von f nach $x_1', \ldots, x_m'$ wegzulassen — die nach $x_{n+1}, \ldots, x_\nu, x_{n+1}',$ $\ldots, x_\nu'$ fehlen sowieso — und in den Koeffizienten der übrigen Ableitungen die Substitution (5), (6) auszuführen, was zu gewissen verkürzten Ausdrücken $\overline{\mathfrak{B}}_k f$ führt, in denen nur noch die Ableitungen von f nach $x_1, \ldots, x_n$ und $x_{m+1}', \ldots, x_n'$ vorkommen. Bei Lie sind es die Ausdrücke $B_k f$, S. 173, Z. 2—4; nur hat Lie jedes $\omega_k = x_{n+k}$ gesetzt, sodaß die $p - n$ willk. Fkt. ω_k, die in der gesuchten Trf. auftreten, bei ihm nicht wirklich zum Vorschein kommen; er erwähnt sie jedoch nachher, S. 174, Z. 16—13 v. u.

Da das System (5), (6) die r inf. Trff. $\mathfrak{B}_k f$ gestattet, so bilden die n unabh. unter den verkürzten Gl.: $\overline{\mathfrak{B}}_k f = 0$ ein n-gliedriges vollständiges System (Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 7, S. 130—132, Kap. 14, S. 233 f.), das sowohl nach:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m},\ \ \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

als nach:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m},\ \ \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n'}$$

auflösbar ist und das daher $n - m$ Lös. besitzt, die sowohl i. B. auf $x_{m+1}', \ldots,$ x_n' als i. B. auf $x_{m+1}, \ldots, x_n$ von einander unabhängig sind. Hat man $n - m$ solche Lösungen: Ω_k (S. 173, Z. 9 v. u.), so stellen die Gl.:

$$\Omega_k(x_1, \ldots, x_\nu, x_{m+1}', \ldots, x_n') = \chi_k(x_{n+1}, \ldots, x_\nu) \qquad (k=1,\ldots,n-m) \tag{7}$$

mit den $n-m$ willk. Fkt. χ_k das allgemeinste Glsyst. dar, das man zu (5), (6) hinzufügen kann, um eine Trf. von der verlangten Beschaffenheit zu erhalten.

Die gesuchte Trf. enthält also $p-n$ willk. Fkt. $\omega_1, \ldots, \omega_{p-n}$ von $\nu-n$ Argumenten, die nur i. B. auf $x_{n+1}, \ldots, x_p$ von einander unabhängig sein müssen, und $n-m$ willk. Fkt. $\chi_1, \ldots, \chi_{n-m}$ von denselben Argumenten, die nur so gewählt werden müssen, daß die Gl. (7) Auflösungen nach $x'_{m+1}, \ldots, x'_n$ und nach $x_{m+1}, \ldots, x_n$ besitzen.

Merkwürdigerweise erwähnt Lie nicht, daß die willk. Konstanten: $a_1, \ldots, a_{n-m}$, von denen er auf S. 174, Z. 13, 12 v. u. spricht, durch willk. Fkt. von $x_{n+1}, \ldots, x_\nu$ ersetzt werden können. In Bd. I der Th. d. Trfsgr., S. 351f. ist das in Ordnung gebracht.

S. 175, Z. 14f. Vgl. die Anm. zu S. 167, Z. 3f.

S. 176, Z. 9f. Das ist nicht geschehen.

S. 176, Z. 17—20. Vgl. die Anm. zu S. 169, Z. 1—3.

S. 176, Z. 23—27. Darauf, daß sich diese Frage beantworten läßt, hat Lie schon 1878 hingewiesen, s. Bd. V d. Ausg., Abh. IV, S. 103, Z. 12—8 v. u.

S. 177, Z. 12—14. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 19, S. 363—366.

S. 177, Z. 3—1 v. u. Demnach bleibt jede inf. Trf. $B_i f$ invariant, wenn man vermöge der inf. Trf. $C_k f$ die neuen Veränd.: $x'_\nu = x_\nu + C_k x_\nu \,.\, \delta t$ einführt (vgl. S. 162). Daraus folgt dann, daß alle Trff. jeder eingl. Gr. $\Sigma a_k B_k f$ mit allen Trff. jeder eingl. Gr. $\Sigma e_k C_k f$ vertauschbar sind (vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 249—253). Hiernach ist auch verständlich, warum Lie nachher (S. 178, Z. 3ff.) alle endlichen Trff. sucht, die jeden Ausdruck $B_k f$ invariant lassen, denn $t \,.\, B_k f$ kann ja als Symbol der endlichen Trff. der eingl. Gr. mit der inf. Trf. $B_k f$ betrachtet werden (vgl. S. 164, Z. 2, 1 v. u. und die Anm. dazu, S. *810*).

S. 178, Z. 17—15 v. u. Eine direkte Bestimmung der inf. Trff. $C_i f$ findet man Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 20, S. 369ff.

S. 178, Z. 5—1 v. u. Vgl. hier Abh. I (1880), S. 94.

S. 181, Z. 2, 1 v. u. Vgl. auch Bd. V d. Ausg., Abh. XII (1883), S. 312, Nr. 3.

S. 181, Z. 4, 3 v. u.—182, Z. 1—3. Siehe Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 376, Theorem 67.

S. 182, Z. 3—9. Vgl. auch Bd. III d. Ausg., Abh. VII (1873).

S. 182, Z. 8 v. u.—183, Z. 24. Unter den gemachten Voraussetzungen bestehen Relationen von der Form:

$$(B_{q+\mu} B_{q+\nu}) = \sum_s^{1\ldots n-q} c_{\mu\nu s} B_{q+s} f \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n-q),$$

sodaß also: $A_1 f, \ldots, A_q f, B_{q+1} f, \ldots, B_n f$ eine einfach transitive Gruppe erzeugen. Es handelt sich darum, die besondere Form der durch S. 181, Theorem II bestimmten reziproken Gruppe zu ermitteln. Ohne Einführung neuer Veränd. und überdies schneller kommt man zum Ziele, wenn man bemerkt, daß jede inf. Trf. Cf in $x_1, \ldots, x_n$ die eindeutig bestimmte Form:

$$Cf = \sum_k^{1\ldots q} \varphi_k A_k f + \sum_j^{1\ldots n-q} \chi_j B_{q+j} f$$

erhalten kann. Die Bedingungen: $(A_\mu C) = 0$, $(B_{q+\nu} C) = 0$ ergeben nämlich:

$$A_\mu \varphi_k = 0, \quad A_\mu \chi_j = 0,$$

$$B_{q+\nu} \varphi_k = 0, \quad B_{q+\nu} \chi_j + \sum_s^{1\ldots n-q} c_{\nu s j} \chi_s = 0;$$

hieraus aber folgt, daß die φ_k willk. Konstanten sind, und daß die allgemeinste inf. Trf. Cf von der verlangten Art die Form: $\Sigma a_k A_k f + \Sigma c_j C_j f$ besitzt.

S. 183, Z. 10—7 v. u. Die Frage ist also: wie integriert man das vollständige System: $A_i f = 0$, wenn man weiß, daß es die bekannten inf. Trff.: $B_{q+\mu} f$, $C_k f$ gestattet. Dabei muß es auffallen, daß Lie diese Frage nicht als einen besonderen Fall seines allgemeinen Problems betrachtet, ein vollst. System mit bekannten inf. Trff. zu integrieren. Man kommt nämlich auch dann, wenn man sich auf diesen Standpunkt stellt, zu dem Ergebnisse, daß die Integration des Systems: $A_i f = 0$ nur Quadraturen verlangt.

Das vollst. Syst. $A_i f = 0$ gestattet außer den inf. Trff. $B_{q+k} f$ auch noch die $n-q$ inf. Trff. $C_k f$ oder, wie wir lieber schreiben wollen: $C_{q+k} f$, die in der Form:

$$C_{q+k} f = \sum_j^{1\ldots n-q} \chi_{kj} B_{q+j} f \qquad (k = 1, \ldots, n-q) \tag{1}$$

darstellbar sind. Nach S. 147, Regel F (vgl. auch die vorhergehende Anm.) sind die χ_{kj} sämtlich Lösungen des Syst. $A_i f = 0$. Man findet ferner, wie in jener Anm.:

$$B_{q+\nu} \chi_{kj} = \sum_s^{1\ldots n-q} c_{s\nu j} \chi_{ks} \qquad (\nu, k, j = 1, \ldots, n-q) \tag{2}$$

und, da auch Relationen von der Form:

$$(C_{q+\nu} C_{q+k}) = \sum_s^{1\ldots n-q} c'_{\nu k s} C_{q+s} f$$

bestehen, überdies:

$$\sum_j^{1\ldots n-q} C_{q+\nu} \chi_{kj} \,.\, B_{q+j} f = \sum_{sj}^{1\ldots n-q} c'_{\nu k s} \chi_{sj} B_{q+j} f,$$

was sich in die Gleichungen:

$$C_{q+\nu} \chi_{kj} = \sum_s^{1\ldots n-q} c'_{\nu k s} \chi_{sj} \qquad (\nu, k, j = 1, \ldots, n-q) \tag{3}$$

zerlegt.

Nun ist klar, daß die χ_{kj} die Lösungen eines vollständigen Systems sind, das die Gl.: $A_i f = 0$ umfaßt. Wir können annehmen, daß dieses vollst. System $(q+l)$-gliedrig ist und die Form:

$$\left| \begin{aligned} & A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0, \\ & D_{q+j} f = C_{q+j} f + \sum_\tau^{1\ldots n-q-l} \vartheta_{j\tau} C_{q+l+\tau} f = 0 \end{aligned} \right. \qquad (j = 1, \ldots, l) \tag{4}$$

besitzt, während es keine Gl.: $\Sigma \psi_\tau C_{q+l+\tau} f = 0$ gibt, die von allen χ_{kj} befriedigt wird. Wegen $(A_i C_{q+\mu}) = 0$ können diese Gl. nur dann ein vollst. System bilden, wenn alle $A_i \vartheta_{j\tau}$ verschwinden. Andrerseits zeigen die Gl. (2) und (3), daß das vollst. Syst. (4) sowohl die inf. Trff. $B_{q+\mu} f$ als die $C_{q+\mu} f$ gestattet. Die erste dieser beiden Eigenschaften bedingt, daß auch alle $B_{q+\mu} \vartheta_{j\tau}$ verschwinden, demnach sind die $\vartheta_{j\tau}$ bloße Konstanten. Die zweite zeigt sodann, daß $D_{q+1} f, \ldots, D_{q+l} f$ eine l-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe: $C_{q+1} f, \ldots, C_n f$ erzeugen.

Der Bequemlichkeit wegen denken wir uns die inf. Trff. $C_{q+\nu} f$ so gewählt, daß das vollst. Syst. (4) die Form:

$$A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0, \quad C_{q+1} f = 0, \ldots, C_{q+l} f = 0 \tag{4'}$$

erhält. Da jetzt alle $C_{q+\nu}\chi_{kj}$ $(\nu=1,\ldots,l)$ verschwinden, so folgt aus (3).

$$\sum_s^{1\ldots n-q} c'_{\nu k s}\chi_{sj} = 0 \qquad (\nu=1,\ldots,l;\ k,j=1,\ldots,n-$$

und somit aus (1):

$$\sum_s^{1\ldots n-q} c'_{\nu k s} C_{q+s} f = 0 \qquad (\nu=1,\ldots,l;\ k=1,\ldots,n-q),$$

sodaß alle $c'_{\nu k s}$ $(\nu=1,\ldots,l;\ k,s=1,\ldots,n-q)$ verschwinden, was wieder heißt, daß $C_{q+1}f, \ldots, C_{q+l}f$ ausgezeichnete inf. Trff. der Gruppe: $C_{q+1}f, \ldots, C_n f$ sind und daher auch der Gruppe: $B_{q+1}f, \ldots, B_n f$ angehören und in dieser ebenfalls ausgezeichnet sind.

Ist umgekehrt etwa $B_{q+\nu}f$ eine ausgezeichnete inf. Trf. der Gruppe $B_{q+1}f, \ldots, B_n f$, so sind alle:

$$c_{\nu kj} = -c_{k\nu j} \qquad (k,j=1,\ldots,n-q)$$

gleich Null und daher nach (2) auch alle:

$$B_{q+\nu}\chi_{kj} \qquad (k,j=1,\ldots,n-q).$$

Demnach ergibt sich folgendes:

Enthält die Gruppe: $B_{q+1}f, \ldots, B_n f$ gerade l unabh. ausgezeichnete inf. Trff., und sind etwa: $B_{q+1}f, \ldots, B_{q+l}f$ derartige inf. Trff., so sind die χ_{kj} die Lösungen eines $(q+l)$-gl. vollst. Systems von der Form:

$$(5) \qquad A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0, \quad B_{q+1}f = 0, \ldots, B_{q+l}f = 0,$$

und es gibt unter den χ_{kj} gerade $n-q-l$ von einander unabhängige, sodaß jede Lösung dieses vollst. Syst. durch die χ_{kj} ausdrückbar ist.

Die Kenntnis der inf. Trff. $B_{q+\nu}f$ und $C_{q+\nu}f$ des vollst. Systems: $A_i f = 0$ ermöglicht es uns also, ohne Integration alle Lös. des vollst. Systems (5) aufzustellen. Dabei sind alle $(B_{q+\mu} B_{q+\nu})$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, l)$ identisch Null.

Führen wir jetzt die bekannten Lös.: $u_{q+l+1}, \ldots, u_n$ des vollst. Syst. (5) nebst $q+l$ geeigneten x_i, etwa: $x_1, \ldots, x_{q+l}$ als neue Veränd. ein, so erhält das vollst. Syst. $A_i f = 0$ eine neue Form:

$$(6) \qquad \overline{A}_1 f = 0, \ldots, \overline{A}_q f = 0,$$

die von den Ableitungen von f nach den u frei ist und somit als ein vollst. Syst. in $x_1, \ldots, x_{q+l}$ aufgefaßt werden kann. Die inf. Trff. $B_{q+\nu}f$ $(\nu = 1, \ldots, l)$ verwandeln sich in gewisse inf. Trff.:

$$\overline{B}_{q+1}f, \ldots, \overline{B}_{q+l}f$$

in $x_1, \ldots, x_{q+l}$, die paarweise vertauschbar sind und das vollst. System (6) invariant lassen. Außerdem sind: $\overline{A}_1 f, \ldots, \overline{A}_q f, \overline{B}_{q+1}f, \ldots, \overline{B}_{q+l}f$ durch keine lin. hom. Relation verknüpft.

Daher findet man nach Bd. V d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 204, Nr. 14 l unabhängige Lösungen des vollst. Syst. (6) und somit die noch fehlenden Lösungen des vollst. Syst.: $A_i f = 0$ durch l von einander unabhängige Quadraturen.

Es erscheint mir ziemlich sicher, daß Lie auf diesem Wege oder durch ähnliche Betrachtungen erkannt hat, daß die Integration des vollst. Systems: $A_i f = 0$ unter den gemachten Voraussetzungen nur Quadratur erfordert. Ich bin davon um so mehr überzeugt, als Lie, nach den Andeutungen auf S. 182, Z. 2f., damals

das Theorem 67, Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 376f. schon kannte. Wendet man dieses Theorem auf die Gruppe:

$$A_1 f, \ldots, A_q f, \ B_{q+1}f, \ldots, B_n f, \ C_{q+1}f, \ldots, C_n f$$

an, so hat man: $s = n$, $m = n - q - l$, also gibt es $q + l$ unabh. inf. Trff., die mit allen inf. Trff. der Gruppe vertauschbar sind. Diese inf. Trff. sind sowohl aus: $A_1 f, \ldots, A_q f, C_{q+1}f, \ldots, C_n f$ als aus: $A_1 f, \ldots, A_q f, B_{q+1}f, \ldots, B_n f$ linear ableitbar, und, da $A_1 f, \ldots, A_q f$ zu ihnen gehören, so gibt es unter ihnen l unabhängige, die den beiden Gruppen: $B_{q+1}f, \ldots, B_n f$ und $C_{q+1}f, \ldots, C_n f$ angehören und somit in beiden ausgezeichnet sind.

Nachdem Lie auf diesem Wege zu dem Satze über das vollständige System $A_i f = 0$ gelangt war, bemerkte er, daß der Satz auch aus den Sätzen in Bd. III d. Ausg., Abh. XVIII (1876), S. 263—267 (s. auch Math. Ann. Bd. XI (1877), S. 465 bis 470, d. Ausg. Bd. IV, Abh. III, § 1) abgeleitet werden kann, weil es sich um ein Integrationsproblem handelt, zu dessen Lösung nur Quadraturen erforderlich sind. Er wählte hier diese Begründung, weil sie viel bequemer dargestellt werden kann als die andere, die allerhand gruppentheoretische Entwickelungen und Sätze verwendet.

Wenn meine Vermutung das Richtige trifft, so haben wir hier ein vollständiges Analogon zu der Entdeckung der eben angeführten Sätze in Bd. III d. Ausg. und in Bd. XI der Ann. Denn auch diese Sätze hat Lie zuerst in der Weise gefunden, daß er seine Integrationstheorie eines vollst. Syst. mit bekannten inf. Trff. anwendete; erst nachher sah er, daß sie auf einem anderen Wege bequemer begründet werden können (s. Bd. III d. Ausg., Abh. XVIII, S. 269—272, Ann. Bd. XI, S. 521—526, d. Ausg. Bd. IV, Abh. III, § 14, Nr. 34, 35).

S. 183 f. Hilfssatz. S. 184, Z. 1—5 müßte eigentlich so lauten:

„*eine gewisse Anzahl, etwa:*

$$(A) \qquad X_1, \ldots, X_q, u_1, u_2, \ldots, u_{q'+q''-2q},$$

die eine Funktionengruppe mit der kanonischen Form:

$$(4) \qquad X_1, \ldots, X_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q'}, X_{q'+1}, \ldots, X_{q''}, P_{q+1}, \ldots, P_{q'}$$

bilden, kennt man ferner alle Lösungen des vollst. Syst.:

$$(B) \qquad (X_1 f) = 0, \ldots, (X_q f) - 0, (u_1 f) = 0, \ldots, (u_{q'+q''-2q} f) = 0,$$

so ist . . .“

Beim Beweise des Satzes wird nämlich keineswegs vorausgesetzt, daß die Funktionengruppe (A) auf die kanonische Form gebracht ist.

S. 184, Z. 8f. Es ist das dieselbe Terminologie, die schon in Bd. III d. Ausg., Abh VII (1873) eingeführt ist.

S. 184, Z. 11—16 müßten eigentlich so lauten: „Bilden die Größen (A) eine Funktionengr. mit der kanonischen Form (4), so bilden die Lösungen des vollst. Syst. (B) die zugehörige Polargruppe mit der kanonischen Form (6), und dabei liefern die Größen (A) zusammen mit den Lösungen von (B) eine Funktionengruppe, die n-gliedrige Involutionssysteme enthält, und deren Funktionen sämtlich die Gl.: $(X_1 F) = 0, \ldots, (X_q F) = 0$ befriedigen.“ Die kanonische Form der neuen Fktgr. enthält nämlich das n-gliedrige Involutionssystem: $X_1, \ldots, X_n$, und darauf beruht die Anwendbarkeit des nachher benutzten Satzes.

S. 184, Z. 17—19. Denselben Satz hatte Lie schon 1876 ausgesprochen, s. Bd. V d. Ausg., Abh. XVIII, S. 264, Satz 2.

S. 184, Z. 19f. Es ist mir nicht gelungen, herauszubekommen, was Lie mit dieser Verweisung beabsichtigt hat.

S. 185, Z. 11—8 v. u. Es muß ja werden:

$$B_{q+k}y_{q+\mu} = \omega_{k\mu}(y_{q+1}, \ldots, y_n);$$

nun aber ist:

$$B_{q+k}y_{q+\mu} = \sum_{\tau}^{1\ldots n-q} \xi_{q+k,\, q+\tau} \frac{\partial y_{q+\mu}}{\partial x_{q+\tau}},$$

also ergibt sich bei der Substitution: $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_q = \alpha_q$:

$$\xi_{q+k,\, q+\mu}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) = \omega_{k\mu}(x_{q+1}, \ldots, x_n),$$

womit die unbekannten Funktionen $\omega_{k\mu}$ bestimmt sind.

S. 185, Z. 2, 1 v. u. Nämlich auf S. 220f. in Nr. 32. Dort wird die Integration eines vollst. Syst. mit einer bekannten Gruppe, von der nur die inf. Trff. gegeben sind, zurückgeführt auf die Integration eines andern vollst. Systems, mit einer bekannten Gruppe, die der Gruppe des ersten vollst. Syst. ähnlich ist, von der man aber auch die endlichen Trff. kennt.

S. 186, Z. 21—28. Auf Z. 24f. müßte es eigentlich heißen: „und gewissen von den Diffqu. ..., s-ter O,“, und auf Z. 28: „in gewissen der Variabeln (L).“ Eine eingehende Darstellung dieser Dinge findet man in Bd. I d. Th. d. Trfsgr., Kap. 10.

Das System $\Omega_k = 0$ ermöglicht es, gewisse (A) unter den Ableitungen erster, ..., s-ter O. durch die übrigen (B) unter diesen Ableitungen und durch $x, y, z, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ auszudrücken und ebenso alle Ableitungen $(s+1)$ter und höherer O.[1]) Enthält das allgemeinste Lösungssystem von $\Omega_k = 0$ gerade r wesentliche willkürliche Konstanten, so ist die Zahl der Ableitungen (B) gleich $r - m$. Führen wir daher für die m Veränderlichen $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ und die $r - m$ Ableitungen (B) die Bezeichnungen: $u_1, \ldots, u_r$ ein, so erscheint das p-gliedrige vollständige System in der Gestalt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{k}^{1\ldots r} \varphi_k(x, y, z, \ldots, u_1, \ldots, u_r) \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{k}^{1\ldots r} \chi_k(x, y, z, \ldots, u_1, \ldots, u_r) \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0,$$

$$\cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot$$

Setzen wir überdies voraus, daß die Gleichungen, die die Ableitungen (A) durch die übrigen (B) ausdrücken, sich für: $x = y = z = \cdots = 0$ regulär verhalten, so werden insbesondere alle in dem vollständigen System auftretenden Funktionen $\varphi_k, \chi_k, \ldots$ ebenfalls diese Eigenschaft haben (S. 187, Z. 12—10 v. u.).

S. 186, Z. 29—33. Man erweitert die inf. Trff. $B_i f$ unter Hinzunahme der Ableitungen erster, ..., s-ter O. von $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, läßt dann in den erweiterten $B_i f$ alle Ableitungen von f weg, in denen f nach einer Ableitung (A) differentiiert wird, und drückt in den Koeffizienten der übrigen Ableitungen von f alle Ableitungen (A) durch die Ableitungen (B) aus. Jedes $B_i f$ liefert so eine inf. Trf. $\mathfrak{B}_i f$ in den $p + r$ Veränderlichen: $x, y, z, \ldots, u_1, \ldots, u_r$, bei der die Veränderlichen $x, y, z, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ genau so transformiert werden, wie bei dem ursprünglichen $B_i f$, und diese inf. Trf. $\mathfrak{B}_i f$ läßt das p-gliedrige vollständige System invariant.

1) Den von Lie auf S. 188, Z. 4—1 v. u. erwähnten Fall, daß die Ableitungen alle eliminiert werden können, schließen wir am besten von vornherein aus.

S. 186, Z. 2 v. u. — 187, Z. 8. Den allgemeineren Fall eines Systems: $\Omega_k = 0$, bei dem das allgemeinste Lösungssystem aus einem speziellen durch eine beliebige kont. Gruppe hervorgeht, behandelt Lie in den Leipz. Ber. von 1895, hier Abh. XX, Kap. 2, S. 557ff.

S. 187, Z. 14—20. Vgl. Bd. III d. Ausg. Abh. III (1872), S. 16f. und *628*f.

S. 187, Z. 12 v. u. — 188, Z. 4. Lie wendet hier ein Verfahren an, das an die Entwickelungen in Bd. V d. Ausg. Abh. XIV (1883), S. 423f. erinnert (s. auch ebd. S. *733*). Auch dort führt Lie alles auf Ableitungen nach einer einzigen unabhängigen Veränderlichen zurück, indem er zeigt, daß man sich auf die Betrachtung solcher Differentialinvarianten beschränken kann, die nur Ableitungen nach x enthalten.

Lie setzt voraus, daß das allgemeinste Lösungssystem:

(C) $$\mathrm{x} = U(x, y, z, \ldots, a_1, \ldots, a_r), \quad \mathrm{y} = V, \quad \mathrm{z} = W, \ldots$$

des Systems: $\Omega_k = 0$ gerade r wesentliche Parameter $a_1, \ldots, a_r$ enthält, was darauf hinauskommt, daß die Funktionen: $U, V, W, \ldots$ keine lin. hom. part. Diffgl. 1. O.:

$$\sum_{k}^{1\ldots r} \alpha_k(a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

in $a_1, \ldots, a_r$ allein befriedigen (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 13, Satz 1). Hierdurch wird aber nicht ausgeschlossen, daß $U, V, W, \ldots$ eine Diffgl. von der Form:

$$\sum_{k}^{1\ldots r} \alpha_k(y, z, \ldots, a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

befriedigen, daß also die Parameter $a_1, \ldots, a_r$ in dem Systeme (C) nicht mehr wesentlich sind, wenn man $y, z, \ldots$ als Konstanten und nur x als Veränderliche betrachtet. Ebenso kann es vorkommen, daß $U, V, W, \ldots$ bei Ausführung der Substitution: $y = \alpha x$, $z = \beta x, \ldots$ in Funktionen übergehen, die eine Diffgl. von der Form:

$$\sum_{k}^{1\ldots r} \varphi_k(\alpha, \beta, \ldots, a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

befriedigen. Das würde dann zur Folge haben, daß das allgemeinste Lösungssyst. der Gl. (8), S. 188 weniger als r wesentliche willkürliche Konstanten enthielte, daß also die Summe: $(q+1) + (k+1) + \cdots$ kleiner als r wäre. Diese Möglichkeit ist es offenbar, auf die Lie S. 188, Z. 12 mit den Worten „im allgemeinen“ anspielt.

Die eben besprochenen Möglichkeiten, die das von Lie angewendete Verfahren unbrauchbar machen würden, kann man immer dadurch ausschließen, daß man zunächst, ehe man die Substitution: $y = \alpha x, \ldots$ macht, an Stelle von $y, z, \ldots$ gewisse Ausdrücke: $y + \varphi(x)$, $z + \chi(x), \ldots$ als neue Veränderliche einführt. Für die Funktionen $\varphi(x), \chi(x), \ldots$ kann man dabei sogar ganze Funktionen von x setzen, vorausgesetzt, daß man deren Gradzahlen genügend groß wählt.

In der Tat, unter den gemachten Voraussetzungen werden die Gleichungen:

(D) $$\sum_{k}^{1\ldots r} \alpha_k \frac{\partial U}{\partial a_k} = 0, \quad \sum_{k}^{1\ldots r} \alpha_k \frac{\partial V}{\partial a_k} = 0, \ldots,$$

wenn man für $x, y, z, \ldots$ eine gewisse endliche Anzahl von verschiedenen Wertsystemen einsetzt, r unabhängige lin. hom. Relationen für die α_k liefern, die zeigen, daß die Gl. (D) durch keine andern Fkt. α_k von den a befriedigt werden, als durch: $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_r = 0$. Ersetzt man nun $y, z, \ldots$ durch: $\alpha x + \varphi(x)$, $\beta x + \chi(x), \ldots$, so kann man die Gradzahlen der ganzen Fkt. $\varphi(x)$, $\chi(x), \ldots$ immer so groß wählen, daß die Gl. (D) sogar, wenn man $\alpha = \beta = \cdots = 0$ setzt, für eine gewisse endliche Anzahl verschiedener Werte von x das Verschwinden aller α_k nach sich ziehen. In den so erhaltenen Gl. (C) werden daher die Parameter $a_1, \ldots, a_r$ auch dann noch wesentlich sein, wenn man bloß x als veränderlich betrachtet und $\alpha, \beta, \ldots$ als Konstanten.

S. 188, Z. 5—13. Unter der Voraussetzung, daß: $(q+1) + (k+1) + \cdots$ gleich r ist, sind nicht bloß die r Größen:

$$\mathrm{x},\ \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q,\ \mathrm{y},\ \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_k, \ldots$$

ausdrückbar durch $x, y, z, \ldots$ und $u_1, \ldots, u_r$, sondern auch umgekehrt $u_1, \ldots, u_r$ durch $\alpha, \beta, \ldots$ und jene Größen; dabei können wir annehmen, daß sich die Funktionen, die sich für $u_1, \ldots, u_r$ ergeben, für $x = 0$ regulär verhalten. Nun aber wird zum Beispiel:

$$\frac{\partial \mathrm{x}_\lambda}{\partial \alpha} = x \frac{\partial \mathrm{x}_\lambda}{\partial y},$$

wo rechts der Faktor von x durch $x, y, z, \ldots, u_1, \ldots, u_r$ ausdrückbar ist und sich für: $x = y = \cdots = 0$ regulär verhält. Demnach kommen zu den Gl. (8) noch Gl. von der folgenden Form hinzu:

$$(8')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{x}_\lambda}{\partial \alpha} = x \,.\, \Phi_\lambda(x, \alpha, \beta, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q, \mathrm{y}, \ldots) & (\lambda = 0, 1, \ldots, q) \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}_\mu}{\partial \alpha} = x \,.\, X_\mu(x, \alpha, \beta, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q, \mathrm{y}, \ldots) & (\mu = 0, 1, \ \ , k) \\ \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \dfrac{\partial \mathrm{x}_\lambda}{\partial \beta} = x \,.\, \Psi_\lambda(x, \alpha, \beta, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q, \mathrm{y}, \ldots) & (\lambda = 0, 1, \ldots, q), \\ \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \end{cases}$$

wo sich die $\Phi_\lambda, X_\lambda, \ldots$, für $x = 0$ regulär verhalten. Die Gl. (8) und (8′) zusammen bestimmen $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \ldots$ vollständig als Funktionen von $x, \alpha, \beta, \ldots$ und liefern ein p-gliedriges vollständiges System, das dem ursprünglich aus den Gl. $\Omega_k = 0$ abgeleiteten vollständigen Systeme entspricht.

Unser neues vollständiges System hat nun offenbar genau dieselben Eigenschaften wie das in Bd. III d. Ausg. auf S. *629* aufgestellte System (2′). Bestimmen wir daher die Hauptlösungen der Gl. $Af = 0$, S. 188, Z. 7f. für $x = 0$, von denen eine gewisse Anzahl, nämlich $\alpha, \beta, \ldots$ von vornherein bekannt sind, und bezeichnen wir mit:

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_q,\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_k,\ \mathfrak{Z}, \ldots$$

die r Hauptlösungen, die sich für: $x = 0$ der Reihe nach auf $\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q, \mathrm{y}, \ldots$ reduzieren, so sind diese r Funktionen zugleich Hauptlösungen des neuen vollständigen Systems und bestimmen, gleich willkürlichen Konstanten gesetzt, die allgemeinsten Lösungen des Systems (8), (8′). Die gefundenen Ausdrücke für $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \ldots$ liefern dann, wenn man zu den ursprünglichen Veränderlichen zurückkehrt, die allgemeinsten Lösungen des Systems: $\Omega_k = 0$.

S. 188, Z. 14 v. u. In der Klammer müßte es eigentlich heißen:

$$\frac{\partial X_i}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{z}_1 + \cdots.$$

S. 189, Z. 3—7. Daß es sich so verhält, ist von vornherein begrifflich klar. Die inf. Trff. $B_i' f$ transformieren nämlich die vorhin erwähnten r Hauptlösungen

von $Af = 0$ durch eine Gruppe g. Nun bestimmen diese Hauptlösungen, gleich willkürlichen Konstanten gesetzt, die ∞^r Lösungssysteme des Systems $\Omega_k = 0$, andererseits aber führt die Gruppe g nach S. 187 jedes spezielle Lösungssystem in das allgemeinste Lösungssystem über, das r wesentliche willkürliche Konstanten enthält. Demnach muß g r-gliedrig sein und die r Hauptlösungen durch eine einfach transitive Gruppe transformieren. Hierin liegt, daß zwischen den r inf. Trff. $B_i' f$ keine lin. hom. Relation bestehen kann.

S. 189, Gl. (9). In der Klammer müßte es eigentlich heißen:

$$\mathrm{z}_j', \ldots, x, \alpha, \beta, \ldots, a_1, \ldots, a_r.$$

S. 189, Z. 9, 8 v. u. Eigentlich müßte stehen:

$$\left. \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \mathrm{z}_j & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_r \end{matrix} \right|$$

S. 190, Z. 12—14. Nämlich die Theorie von S. 151f. Daß die Kenntnis der endlichen Transformationen der Gruppe dabei zunächst nicht in Betracht kommt, ist der Sinn von Z. 15—18.

S. 190, Z. 18f. Dann bestehen eben lin. hom. Relationen zwischen den $B_i' f$ und es können daher unter Umständen Lösungen von $Af = 0$ ohne Integration gefunden werden (nach S. 147, E.).

S. 191, Z. 2, 1 v. u. Die Transformation, durch die (A) in (A) übergeführt wird, hat selbstverständlich die Form:

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= X(x, y, z, \ldots), \\ \mathrm{y} &= Y(x, y, z, \ldots), \ldots, \\ \mathrm{\xi} &= \xi \frac{\partial X}{\partial x} + \eta \frac{\partial X}{\partial y} + \zeta \frac{\partial X}{\partial z} + \cdots, \\ \mathrm{\eta} &= \xi \frac{\partial Y}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y}{\partial y} + \zeta \frac{\partial Y}{\partial z} + \cdots, \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \end{aligned}$$

S. 193, Z. 12—10 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 360f., 376f. Haben die Gl. $B_i f = 0$ gemeinsame Lösungen, so ist die Gruppe $B_i f$ intransitiv. Soll in diesem Falle die Gruppe (M) endlich sein, so ist notwendig und hinreichend, daß die Gruppe $B_i f$ asystatisch ist; a. a. O. S. 376, 502, 517.

S. 194, Z. 11—13. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. XIV (1883), S. 372—394.

S. 194, Z. 17—22. Die Gruppe, deren Definitionsgl. vorgelegt sind, ist in diesem Falle intransitiv und systatisch. Ihre Invarianten sind die Lösungen des vollst. Syst., das sich Lie aufgestellt denkt. Dieses vollständige System aber erhält man, wenn man aus den Definitionsgl. alle Ableitungen von $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ eliminiert und die linearen homogenen Relationen aufstellt, die zwischen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ allein bestehen. Das gesuchte vollständige System besteht nämlich aus dem Inbegriffe aller Gl.:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \cdots = 0,$$

bei denen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ durch die erhaltenen lin. hom. Relationen verknüpft sind.

Hat man das besprochene vollst. Syst. integriert, so kann man dessen Lösungen $u_{m+1}, \ldots, u_n$ nebst m geeigneten Größen $x_1, \ldots, x_m$ als neue Veränderliche einführen, wobei die inf. Trff. der gesuchten Gruppe die Form:

$$Xf = \sum_{\mu}^{1\ldots m} \xi_\mu(x_1, \ldots, x_m, u_{m+1}, \ldots, u_n) \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + \sum_{\nu}^{1\ldots n-m} \omega_{m+\nu} \frac{\partial f}{\partial u_{m+\nu}}$$

annehmen, in der $\omega_{m+1}, \ldots, \omega_n$ alle verschwinden. Gleichzeitig erhalten die ursprünglich vorgelegten Definitionsgl. eine neue Form, in der außer gewissen lin. hom. Diffgl. für $\xi_1, \ldots, \xi_m$ noch die endlichen Gl. $\omega_{m+\nu} = 0$ auftreten. Betrachtet man nun nur $x_1, \ldots, x_m$ als veränderlich und $u_{m+1}, \ldots, u_n$ als konstant, läßt man also die Gl. $\omega_{m+\nu} = 0$ weg und behält nur die Diffgl., die nach Elimination aller Ableitungen der ξ_μ nach den $u_{m+\nu}$ übrigbleiben, so hat man die Definitionsgleichung einer transitiven Gruppe in $x_1, \ldots, x_m$ und damit das reduzierte Problem aus der im Vorhergehenden erledigten Kategorie. Ist diese Gruppe r-gliedrig ($r \gtrless m$) und ist ihre allgemeine inf. Trf.:

$$Xf = \sum_k^{1\ldots r} e_k X_k f = \sum_\mu^{1\ldots m} \xi_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$$

gefunden, wo:

$$X_k f = \sum_\mu^{1\ldots m} \xi_{k\mu}(x_1, \ldots, x_m, u_{m+1}, \ldots, u_n) \frac{\partial f}{\partial x_\mu},$$

so hat man noch $e_1, \ldots, e_r$ in allgemeinster Weise so als Funktionen von $u_{m+1}, \ldots, u_n$ zu bestimmen, daß $\xi_1, \ldots, \xi_m$ die Diffgl. befriedigen, die vorhin weggelassen wurden. Das aber kommt hinaus auf die Integration eines Systems von lin. hom. part. Diffgl. für $e_1, \ldots, e_r$, dessen Koeff. Fkt. von $u_{m+1}, \ldots, u_n$ sind, und dieses System kann ähnlich wie auf S. 187 f. auf ein simultanes lineares hom. System 1. Ord. mit einer unabh. Veränd. zurückgeführt werden. Vgl. hierzu auch Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 22, S. 455—458.

Einzelne Beispiele findet man behandelt in Bd. V d. Ausg. Abh. XIV (1883), S. 399, Nr. 20; S. 401, Nr. 22; S. 412, Nr 33; S. 414, Nr. 34.

S. 195, Z. 8—5 v. u. Indem man sich auf das System $W_k = 0$ die allgemeinste Transformation dieser Art ausgeführt denkt, findet man eine bei allen diesen Trff. invariante Kategorie von Glsyst., der das System $W_k = 0$ angehört. Der Inbegriff aller dieser Kategorie angehörigen Gleichungssysteme wird durch eine unendliche Gruppe transformiert, deren endliche Trff. man kennt. Man kann daher nach Abh. II, S. 123 ff. durch ausführbare Operationen alle Differentialinvarianten der Gruppe und die bei dieser invarianten Systeme von Diffgl. aufstellen.

S. 195, Z. 16 f. „der vorangehenden“: gemeint ist Abh. II, S. 123 ff.

S. 195, Z. 17 f. Die Theorie dieser Klasse von Diffgl. hatte Lie schon 1882 andeutungsweise entwickelt: d. Ausg. Bd. III, Abh. XXXIX, S. 548; Abh. XL, S. 551—553. Er ist später noch mehrmals darauf zurückgekommen: Leipz. Ber. 1893, S. 343—348 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. VI, § II, III); Lie-Scheffers, Kontin. Gruppen (1893), S. 765—804; Leipz. Ber. 1895, 267 f. (hier Abh. XX, S. 544 f.); Leipz. Ber. 1896, S. 392—403 (hier Abh. XXV, S. 620—630).

S. 195, Z. 20—27. In der eben angeführten Abh. von 1895 (s. hier S. 545) spricht sich Lie über die seiner Theorie zu Grunde liegenden Gedanken aus. Er hebt hervor, daß sich der Ausdruck Af auffassen läßt *als die allgemeine inf. Trf. einer unendlichen Gruppe* in $n+1$ Veränderlichen: $x_1, \ldots, x_n, u$. Dieser unendl. Gruppe gehöre insbesondere die inf. Trf. $\partial f : \partial u$ an, und der Ausgangspunkt seiner alten Behandlung des Problems, die Gl. $Af = 0$ zu integrieren, sei die Bemerkung gewesen, daß Af immer durch eine geeignete Trf. dieser unendl. Gr. die Form $\partial f : \partial u'$ erhalten könne.

In der Tat, sind $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)$ die endlichen Trff. der Gr. $B_1 f, \ldots, B_r f$, und versteht man unter $\mathfrak{A}_1(u), \ldots, \mathfrak{A}_r(u)$ willkürliche Funktionen von u, so stellen offenbar die Gl.:

$$u' = u + c, \quad x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, \mathfrak{A}_1(u), \ldots, \mathfrak{A}_r(u)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

eine unendliche kont. Gr. in den Veränd. $x_1, \ldots, x_n, u$ dar. Zugleich ist klar, daß der Ausdruck:

$$c' \frac{\partial f}{\partial u} + \Sigma U_k \cdot B_k f$$

mit den r willkürlichen Funktionen U_k die allgemeine inf. Trf. dieser unendl. Gr. ist.

Nunmehr seien $U_1, \ldots, U_r$ gegebene Funktionen von u. Die Integration der Gl. $Af = 0$ ist gleichbedeutend mit der des sim. Systems:

$$\text{(U)} \qquad \frac{dx_i}{du} = \sum_k^{1\ldots r} U_k \xi_{ki}(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

die wir uns mit den Anfangsbed.: $x_i = \mathfrak{x}_i$ für $u = u^0$ ausgeführt denken wollen. Aber dieses simultane System können wir auf ein anderes zurückführen. Wir bilden die Gl.:

$$\text{(V)} \qquad x_i = f_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

und wollen annehmen, daß $a_1^0, \ldots, a_r^0$ die Parameter der identischen Trf. der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ sind, so daß also aus (V) für $a_1 = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0$ folgt: $x_i = \mathfrak{x}_i$. Als Funktionen der a_k betrachtet genügen die x_i in (V) Diffgl. von der Form:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_k} = \sum_j^{1\ldots r} \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x) \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, r),$$

wo die Det. der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch verschwindet (s. hier Abh. I, S. 22; Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 33 f.). Denken wir uns daher die a_k als Fkt. von u, so wird:

$$\frac{dx_i}{du} = \sum_j^{1\ldots r} \left\{ \sum_k^{1\ldots r} \psi_{jk}(a) \frac{da_k}{du} \right\} \xi_{ji}(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

und diese Gl. fallen mit den Gl. (U) zusammen, wenn wir die a_k dem sim. Syst.:

$$\text{(U')} \qquad \sum_k^{1\ldots r} \psi_{jk}(a) \frac{da_k}{du} = U_j \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

unterwerfen. Bestimmen wir daher die Fkt. $a_k = \mathfrak{A}_k(u)$ aus dem sim. Syst. (U') mit den Anfangsbed. $a_k = a_k^0$ für $u = u^0$, so liefern die Gl.:

$$\text{(W)} \qquad x_i = f_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \mathfrak{A}_1(u), \ldots, \mathfrak{A}_r(u)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die vorhin definierten Lösungen des sim. Syst. (U). Denken wir uns endlich die Gl. (W) nach $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ aufgelöst:

$$\text{(Z)} \qquad \mathfrak{x}_i = F_i(x_1, \ldots, x_n, \mathfrak{A}_1(u), \ldots, \mathfrak{A}_r(u)) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

so sind die F_i unabhängige Lösungen der Gl. $Af = 0$, und zwar deren Hauptlös. i. B. auf $u = u^0$. Führen wir vermöge der Trf. (Z), die offenbar auch unserer unendlichen Gruppe angehört, die Größen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ als neue Veränderliche an Stelle der x ein, so erhält die inf. Trf. Af wirklich die Form $\partial f : \partial u$.

S. 195, Z. 4, 3 v. u. Wie sich Lie das gedacht hat, muß man erraten. Da er aber bei dem im Text betrachteten Falle davon ausgegangen war, daß sich Af als die allg. inf. Trf. einer unendl. Gr. auffassen läßt, so kann es keinem Zweifel unterliegen, daß er folgendes meint: Die inf. Trff. $B_k f$, die jetzt die Form:

$$B_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n, u) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

besitzen, erzeugen eine r-gliedrige Gr. in $x_1, \ldots, x_n$, stehen also in Beziehungen von der Form:

$$(B_k B_j) = \sum_s^{1\ldots r} c_{kjs} B_s f \qquad (k, j = 1, \ldots, r)$$

mit konstanten Koeffizienten. Außerdem aber soll der Ausdruck:

$$c \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \sum_k^{1\ldots r} U_k B_k f$$

mit den r willk. Fkt. U_k die allg. inf. Trf. einer unendl. Gr. in $x_1, \ldots, x_n, u$ darstellen. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß die $B_k f$ Relationen von der Form:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, B_k f\right) = \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_s^{1\ldots r} \chi_{ks}(u) B_s f \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

befriedigen, daß also jedes $B_k f$ in der Form:

$$B_k f = \sum_s^{1\ldots r} \omega_{ks}(u) \mathfrak{B}_s f \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

darstellbar ist, wo die $\mathfrak{B}_s f$ von u freie inf. Trff. in $x_1, \ldots, x_n$ allein sind, die nun ihrerseits in Beziehungen von der Form:

$$(\mathfrak{B}_k \mathfrak{B}_j) = \sum_s^{\ldots r} c'_{kjs} \mathfrak{B}_s f \qquad (k, j = 1, \ldots, r)$$

stehen. Man kommt also wirklich auf den im Texte betrachteten Fall zurück.

S. 197, Z. 1, 2. Diese Differentialinvarianten der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ sind die Invarianten einer Gruppe, deren endliche Trff. aus den Gl.:

$$\text{(A)} \qquad x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

durch Erweiterung entstehen, nämlich durch Hinzufügung der Gleichungen:

$$\text{(A')} \qquad \begin{cases} \Phi' = \Phi, \\ \Phi'_i = F_i(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, a_1, \ldots, a_r), \\ \Phi'_{i\mu} = F_{i\mu}(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi_{11}, \ldots, a_1, \ldots, a_r), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

wo $\Phi'_i = \partial \Phi' : \partial x'_i$, $\Phi'_{i\nu} = \partial^2 \Phi' : \partial x'_i \partial x'_\nu, \ldots$. Man findet sie daher durch Elimination der Parameter $a_1, \ldots, a_r$ aus den vereinigten Gl. (A), (A'), vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 218, Theor. 35. Doch braucht man nur gewisse unter ihnen wirklich auf diesem Wege zu bestimmen und erhält dann alle übrigen durch Differentiation und Determinantenbildung.

In der Tat, die Diffinv. μ-ter O. sind die Lösungen des vollst. Syst., das man erhält, indem man die inf. Trff.: $B_1 f, \ldots, B_r f$ durch Mitnahme der Ableit. von Φ bis zur μ-ten O. erweitert und die erweiterten inf. Trff. gleich Null setzt. Dieses vollst. System ist höchstens r-gliedrig. Bezeichnet man mit n_μ die Anzahl der Abl. μ-ter O. von Φ nach $x_1, \ldots, x_n$ und mit s_μ die der von einander unabh. Diffinv. nullter bis μ-ter O., dabei Φ selbst nicht mitgerechnet, so ist s_μ stets mindestens gleich:

$$n + n_1 + n_2 + \cdots + n_\mu - r = N_\mu.$$

Wählt man μ so groß, daß $N_\mu \geqq 0$ ausfällt, so ist für $\nu \geqq \mu$ offenbar stets:

$$N_{\nu+1} \leqq s_{\nu+1} \leqq s_\nu + n_{\nu+1},$$

mithin: $s_{\nu+1} - N_{\nu+1} \leqq s_\nu - N_\nu$. Die Differenzen $s_\nu - N_\nu$ bilden daher eine niemals zunehmende Folge, und, da $s_\mu - N_\mu \geqq 0$ ist, muß es eine positive ganze Zahl q geben derart, daß immer: $s_q - N_q = s_{q+1} - N_{q+1} = \cdots$ ist, während für $\nu < q$ stets: $s_\nu - N_\nu > s_q - N_q$. Ist hier $s_q - N_q = h > 0$, so ist die Anzahl der von einander unabh. Diffinv. nullter bis ν-ter O. für $\nu \geqq q$ stets $= N_\nu + h$. Dabei gibt es für $\nu > q$ jedesmal n_ν Diffinv., die in bezug auf die n_ν Ableit. ν-ter O. von einander unabh. sind. Insbesondere ist schon N_{q+1} sicher $\geqq n$.

Es seien nun $\Omega_k(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots)$ die sämtlichen von einander unabh. Diffinv. bis zur ν-ten O. $(\nu \geqq q)$ und $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ sei irgend eine bestimmte Funktion. Wir bilden die Gl.:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \Phi = \Pi(f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a)) = \Pi(x'_1, \ldots, x'_n) = \Pi', \\ \Omega_k(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots) = \Omega_k(x'_1, \ldots, x'_n, \Pi'_1, \ldots) = \overline{\Omega}_k(x'_1, \ldots, x'_n) \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots, N_\nu + h;\ \nu \geqq q). \end{cases}$$

Hier sind die $\overline{\Omega}_k(x')$ Funktionen der x', und zwar können sich diese Funktionen auf Konstanten reduzieren, wobei der konstante Wert ∞ nicht ausgeschlossen ist. Es können andrerseits einzelne unter den $\overline{\Omega}_k(x')$ in der unbestimmten Form: Null durch Null erscheinen. Da aber alle Funktionen $\Pi(x)$, für die einzelne der Funktionen $\overline{\Omega}_k(x')$ den konstanten Wert ∞ annehmen oder unbestimmt werden, durch eine endliche Anzahl von part. Diffgl. definiert werden, so können wir uns $\Pi(x)$ stets so gewählt denken, daß für: $\nu = q + 2$ jedes $\overline{\Omega}_k(x')$ eine bestimmte Funktion der x' wird, die, wenn sie konstant ist, einen endlichen Wert besitzt.

Wir können aber noch weiter gehen. Wir können $\Pi(x)$ immer so wählen daß es für: $\nu = q + 1$ unter den $N_\nu + h + 1$ Funktionen Π' und $\overline{\Omega}_k(x')$ gerade n von einander unabhängige gibt. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur $\Phi = \Pi(x)$ so zu wählen, daß es keine der Diffgl. erfüllt, die sich ergeben, wenn man im Falle: $\nu = q + 1$ für je n unter den $N_\nu + h + 1$ Diffinv. Φ und $\Omega_k(x_1, \ldots, \Phi_1, \ldots)$ die Funktionaldet. in bezug auf $x_1, \ldots, x_n$ bildet[1]) und diese gleich Null setzt.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so ergibt sich aus (B) für: $\nu = q + 2$ durch Elimination der x' ein System von gerade: $N_{q+2} + h + 1 - n$ unabh. Diffgl. erster bis $(q+2)$-ter O., das jedenfalls nach den n_{q+2} Ableit. $(q+2)$-ter O. von Φ auflösbar ist. Beachten wir überdies, daß die Gl. (B) bei der Substitution:

$$\text{C)} \qquad x'_i = f_i(x, a) \ (i = 1, \ldots, n), \quad \Phi = \Pi(f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a))$$

in lauter Identitäten übergehen, so erkennen wir, daß dieses System von part. Diffgl. durch: $\Phi = \Pi(f(x, a))$ identisch befriedigt wird. Nun aber enthält die allgemeinste Lösung des Systems offenbar höchstens:

$$1 + n_1 + \cdots + n_{q+2} - (N_{q+2} + h + 1 - n) = r - h$$

wesentliche willkürliche Konstanten, während $\Phi(f(x, a))$ im allgemeinen r wesentliche Konstanten enthält. Demnach ist: $h = 0$, unser System von Diffgl. ist unbeschränkt integrabel, und $\Phi(f(x, a))$ ist seine allgemeinste Lösung.[2])

---

1) Dabei muß man selbstverständlich berücksichtigen, daß auch die Ableit. $\Phi_1, \ldots$ von $x_1, \ldots, x_n$ abhängen.

2) Denkt man sich die Gl.: $\Phi = \Pi(f(x, a))$ differentiiert und die Parameter $a_1, \ldots, a_r$ eliminiert, so sind im ungünstigsten Falle sicher alle Ableitungen r-ter O. von Φ durch die von niedrigerer O. ausdrückbar. Die Zahl $q + 2$ ist daher höchstens gleich r.

Hiermit ist bewiesen, daß zu unsrer Gr.: $x_i' = f_i(x, a)$ eine positive ganze Zahl q von solcher Beschaffenheit gehört, daß es, unter Einrechnung von Φ, gerade $N_q + 1$ von einander unabh. Diffinv. nullter bis q-ter O. gibt, daß zu diesen Diffinv. gerade n_{q+1} von einander und von den früheren unabh. Diffinv. $(q+1)$-ter O. hinzukommen, zu diesen n_{q+2} von den früheren und von einander unabh. Diffinv. $(q+2)$-ter O., u. s. w. Mit andern Worten:

Sind: $B_1 f, \ldots, B_r f$ unabh. inf. Trff., die in Beziehungen von der Form:

$$(B_i B_k) = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} B_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

stehen, und liefern diese inf. Trff. bei Hinzunahme der Ableit. von Φ bis zur ν-ten O. die erweiterten inf. Trff. $B_k^{(\nu)} f$, so sind die lin. part. Diffgl.:

$$B_1^{(\nu)} f = 0, \ \ldots, \ B_r^{(\nu)} f = 0$$

für: $\nu \gtreqless q$ immer von einander unabhängig.

Außerdem aber ergibt sich noch: Sind $\Omega_k(x_1, \ldots, \Phi_1, \ldots)$ die sämtlichen von einander unabh. Diffinv. bis zur ν-ten O. $(\nu \geq q)$, so werden die Gl.:

$$(\mathrm{B}') \quad \left\{ \begin{array}{c} \Phi = \Pi(x_1', \ldots, x_n') = \Pi', \\ \Omega_k(x_1, \ldots, \Phi_1, \ldots) = \Omega_k(x_1', \ldots, \Pi_1', \ldots) = \overline{\Omega}_k(x_1', \ldots, x_n') \\ (k = 1, 2, \ldots, N_\nu;\ \nu \geq q) \end{array} \right.$$

bei der Substitution (C) zu lauter Identitäten.

Nunmehr können wir auch zeigen, daß man jedenfalls nur die Diffinv. bis zur $(q+2)$-ten O. einschließlich durch Elimination zu berechnen braucht, weil man dann alle übrigen durch Differentiation und Determinantenbildung findet.

Sind: $J_1, \ldots, J_n$ Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, die bei der inf. Trf.: $\delta x_i = \xi_i \delta t$ inv. bleiben, so ist:

$$\delta \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\nu} = - \sum_\tau^{1 \ldots n} \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\tau} \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\nu} \cdot \delta t,$$

mithin:

$$\delta \begin{vmatrix} J_1 \ldots J_n \\ x_1 \ldots x_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} J_1 \ldots J_n \\ x_1 \ldots x_n \end{vmatrix} \sum_\tau^{1 \ldots n} \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\tau} \cdot \delta t.$$

Bleibt daher auch noch J bei der inf. Trf. inv., so gilt dasselbe auch von jedem der n Ausdrücke:

$$\begin{vmatrix} J\ J_{\mu_1} \ldots J_{\mu_{n-1}} \\ x_1\, x_2 \ \ldots x_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} J_1 \ldots J_n \\ x_1 \ldots x_n \end{vmatrix},$$

unter: $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ irgend $n - 1$ der Zahlen: $1, \ldots, n$ verstanden.

Setzen wir nun für $J_1, \ldots, J_n$ irgend n von einander unabh. Diffinv. nullter, $\ldots, (q+1)$-ter O. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ und für J eine Diffinv. $(q+2)$-ter O., so erhalten wir durch Bildung solcher Quotienten sicher n unabh. Diffinv. $(q+3)$-ter O. Offenbar liefern die n_{q+2} Diffinv. $(q+2)$-ter O., die in bezug auf die n_{q+2} Ableitungen $(q+2)$-ter O. von Φ unabh. sind, soviele Diffinv. $(q+3)$-ter O., daß darunter n_{q+3} in bezug auf die Ableitungen $(q+3)$-ter O. von Φ unabhängige vorhanden sind. Das Verfahren führt somit zu allen Diffinv. $(q+3)$-ter O. und, bei sinngemäßer Wiederholung, zu allen von höherer O.

Wir haben es vorhin als selbstverständlich betrachtet, daß in der Funktion:

$$\Pi(x_1', \ldots, x_n') = \Pi(f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a))$$

die r Parameter $a_1, \ldots, a_r$ im allgemeinen wesentlich sind. Es ist aber nötig, genau festzustellen, wie viele wesentliche Parameter diese Funktion je nach der Beschaffenheit von $\Pi(x)$ enthält.

Aus den schon auf S. *823* benutzten Diffgl.:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_j^{1 \ldots r} \psi_{jk}(a) \xi_{ji}(x'),$$

denen die x_i' als Funktionen der a_k genügen, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \Pi(f(x, a)) = \sum_j^{1 \ldots r} \psi_{jk}(a) B_j' \Pi(x').$$

Sollen nun in $\Pi(f(x, a))$ die Parameter a_k nicht wesentlich sein, so muß in den x_i und den a_k eine Identität von der Form:

$$\sum_k^{1 \ldots r} \alpha_k(a) \frac{\partial}{\partial a_k} \Pi(f(x, a)) = 0$$

bestehen, in der die $\alpha_k(a)$ Fkt. von: $a_1, \ldots, a_r$ allein sind (s. hier Abh. I, S. 2). Hieraus folgt, daß die Gl.:

$$\sum_j^{1 \ldots r} \left\{ \sum_k^{1 \ldots r} \alpha_k(a) \psi_{jk}(a) \right\} B_j' \Pi(x') = 0$$

in den Veränderlichen: $x_1', \ldots, x_n', a_1, \ldots, a_r$ identisch erfüllt sein muß. Das aber kann dann und nur dann eintreten, wenn der Ausdruck: $\Sigma e_k . B_k \Pi$ bei geeigneter Wahl der Konstanten: $e_1, \ldots, e_r$ identisch verschwindet, ohne daß $e_1, \ldots, e_r$ alle verschwinden, wenn also die Fkt. $\Pi(x)$ mindestens eine inf. Trf.: $\Sigma e_k B_k f$ der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ gestattet. Daher leuchtet ein, daß unter den Parametern: $a_1, \ldots, a_r$ der Fkt. $\Pi(f(x, a))$ immer dann gerade $r - m$ wesentlich sind, wenn $\Pi(x)$ gerade m und nicht mehr unabh. inf. Trff. der Gr.: $B_1 f, \ldots, B_r f$ gestattet (vgl. auch Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 479—482).

Die Gl. (B′) werden bei der Subst. (C) zu Identitäten. Hat man nun insbesondere eine der Gr.: $B_1 f, \ldots, B_r f$ angehörige Trf.: $x_i' = f_i(x, \bar{a})$, bei der die Fkt. $\Pi(x)$ inv. bleibt, ist also: $\Pi(f(x, \bar{a})) \equiv \Pi(x)$, so ziehen die Gl.: $x_i' = f_i(x, \bar{a})$ offenbar die Gl.:

$$(\mathrm{D}) \qquad \overline{\Omega}_k(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\Omega}_k(x_1', \ldots, x_n') \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

nach sich. Hat daher $\overline{\Omega}_k(x)$ die unbestimmte Form Null durch Null, so gilt von $\Omega_k(f(x, \bar{a}))$ dasselbe. Ist andrerseits $\overline{\Omega}_k(x)$ eine bestimmte Fkt. der x, so läßt die Trf.: $x_i' = f_i(x, \bar{a})$ diese Fkt. invariant.

Bleibt die Fkt. $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ bei einer Trf. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ inv. und liefert die Diffinv. $\Omega(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots)$ der Gruppe bei der Subst. $\Phi = \Pi(x)$ eine bestimmte Fkt. der x, so bleibt diese Fkt. ebenfalls bei jener Trf. inv.

Hier ergibt sich also ganz von selber der Satz, den Lie in etwas anderer Form auf S. 199, Z. 13—9 v. u. ausspricht. Es ist derselbe Satz, den Lie in Abh. II, S. 138, Z. 10—8 v. u. andeutet und den ich auf S. *796* f. für den Fall, daß $\Pi(x)$ bei einer inf. Trf. der Gr. inv. bleibt, auf anderm Wege bewiesen habe (vgl. auch die folg. Anm. zu S. 197, Z. 3—8, S. *834*). Insbesondere finden wir, daß immer, wenn $\Pi(x)$ eine inf. Trf. $\Sigma e_k B_k f$ gestattet, dasselbe auch von jeder Fkt. $\overline{\Omega}_k(x)$ gilt, die nicht in der unbestimmten Form: Null durch Null erscheint.

Gestattet nun $\Pi(x)$ gerade ϱ und nicht mehr unabh. inf. Trff. der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$, etwa: $B_1 f, \ldots, B_\varrho f$, so erzeugen diese eine ϱ-gliedrige Untergruppe, es bestehen also Relationen von der Form:

$$(\mathrm{E}) \qquad (B_k B_j) = \sum_s^{1\ldots\varrho} c'_{kjs} B_s f \qquad (k, j = 1, \ldots, \varrho).$$

Sind überdies: $B_1 f, \ldots, B_{\varrho-\varrho'} f$ durch keine lin. hom. Relation verknüpft, während:

$$(\mathrm{F}) \qquad B_{\varrho-\varrho'+\mu} f = \sum_j^{1\ldots\varrho-\varrho'} \varphi_{\mu j}(x) B_j f \qquad (\mu = 1, \ldots, \varrho')$$

ist (vgl. S. 199, Z. 2—5), so bilden die Gl.: $B_1 f = 0, \ldots, B_\varrho f = 0$ ein $(\varrho - \varrho')$-gl. vollst. System mit $n - \varrho + \varrho'$ unabh. Lös.: $u_{\varrho-\varrho'+1}, \ldots, u_n$. Dabei ist klar, daß jede Fkt. $\overline{\Omega}_k(x')$ in (B'), die nicht in der unbestimmten Form Null durch Null erscheint, ebenfalls die inf. Trff.: $B'_1 f, \ldots, B'_\varrho f$ gestattet und also durch $u'_{\varrho-\varrho'+1}, \ldots, u'_n$ allein ausdrückbar ist. Für $\nu = q + 2$ gibt es daher unter den Funktionen $\overline{\Omega}_k(x')$, die nicht die unbestimmte Form haben, höchstens $n - \varrho + \varrho'$ von einander unabh. Zugleich erscheinen alle $\overline{\Omega}_k(x')$, die aus Diffinv. $(q + 3)$-ter und höhere O. hervorgehen, in der Form Null durch Null, da die Fktdet., von denen sie Quotienten sind, alle identisch verschwinden.

Ungewiß bleibt allerdings, wie viele von einander unabh. es unter den Fkt. $\overline{\Omega}_k(x)$ gibt, die nicht in unbestimmter Form erscheinen. Um darüber ins Klare zu kommen, müssen wir etwas weiter ausholen.

Wir setzen: $\varrho - \varrho' = m$ und: $\varrho' = l$ und wählen die Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ so, daß $\Pi(x) = x_1$ wird, und daß: $x_1, \ldots, x_{n-m}$ unabhängige Lösungen des m-gl. vollst. Syst.: $B_1 f = 0, \ldots, B_{m+l} f = 0$ werden. Die inf. Trff. der Gruppe erscheinen dann in der Gestalt:

$$(\mathrm{G}) \qquad \begin{cases} B_k f = \displaystyle\sum_\mu^{1\ldots m} \xi_{k,\, n-m+\mu} \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}}, \\ B_{m+l+j} f = \displaystyle\sum_\nu^{1\ldots n-m} \xi_{m+l+j,\, \nu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \sum_\mu^{1\ldots m} \xi_{m+l+j,\, n-m+\mu} \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \\ \qquad (k = 1, \ldots, m+l;\ j = 1, \ldots, r-m-l). \end{cases}$$

Dabei sind unter den Gl.: $B_1 f = 0, \ldots, B_{m+l} f = 0$ gerade m von einander unabhängige vorhanden. Da überdies: $\Pi = x_1$ gerade $m + l$ und nicht mehr unabh. inf. Trff. der Gruppe gestattet, so sind die Fkt.:

$$(\mathrm{H}) \qquad \xi_{m+l+1,1}, \ldots, \xi_{r,1}$$

durch keine lin. hom. Relation mit konst. Koeffizienten verknüpft.

Aus unsern früheren Entwickelungen geht hervor, daß jede Diffinvariante $\Omega_k(x_1, \ldots, \Phi_1, \ldots)$ der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$, die für: $\Phi = x_1$ nicht die unbestimmte Form: Null durch Null annimmt, bei der Substitution: $\Phi = x_1$ in eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ allein übergeht. Wir behaupten nun, daß die Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ immer $n - m - 1$ solche Diffinv. besitzt, die bei der Subst.: $\Phi = x_1$ gerade $n - m - 1$ von einander und von x_1 unabh. Fkt. von $x_1, \ldots, x_{n-m}$ liefern. Mit andern Worten: Nimmt man zu der Fkt. $\Phi = x_1$ alle die Fkt. hinzu, die aus den Diffinv. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ durch die Substitution: $\Phi = x_1$ hervorgehen, so hat man alle Lösungen des m-gliedr. vollst. Syst.: $B_1 f = 0, \ldots, B_{m+l} f = 0$.

Erweitert man die inf. Trf.:

$$B f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

durch Hinzunahme der Ableit. von Φ bis zur ν-ten O. und macht man dann in den Zuwachsen der Ableit. von Φ die Substitution:

$$(\mathrm{J}) \qquad \Phi = x_1, \quad \Phi_1 = 1, \quad \Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_n = 0, \quad \Phi_{11} = 0, \quad \ldots,$$

so erhält man, wie leicht zu erkennen ist:

$$\delta \Phi_i = -\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \delta t, \quad \delta \Phi_{i\mu} = -\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_i \partial x_\mu} \delta t, \ \ldots.$$

Hiernach liegt auf der Hand, welche Gestalt die Matrix der Koeffizienten der erweiterten inf. Trff.: $B_1^{(\nu)} f, \ldots, B_r^{(\nu)} f$ für: $\Phi = x_1$ annimmt. In der ersten bis $(m + l)$-ten Reihe dieser Matrix folgen auf die Koeffizienten der ursprünglichen inf. Trff. $X_k f$ lauter Nullen. In den $r - m - l$ letzten Reihen bilden die Größen (H) die erste Spalte, während die Ableitungen erster bis ν-ter O. der Größen (H) die Spalten liefern, die auf die n-te folgen.

Nun aber besteht zwischen den Größen (H) keine lin. hom. Relation mit konstanten Koeff. Wählen wir daher: $\nu \geqq r - m - l - 1$, so können in der Matrix, deren erste Spalte die Größen (H) sind und deren übrige Spalten die Ableitungen dieser Größen bis zur ν-ten O. bilden, nicht alle $(r - m - l)$-reihigen Determ. verschwinden, in denen die Größen (H) als erste Spalte auftreten. Für: $\nu \geqq r - m - l - 1$ sind daher die Gl.:

$$B_{m+l+j}^{(\nu)} f = 0 \qquad (j = 1, \ldots, r-m-l)$$

sogar dann, wenn man in den Koeffizienten die Substit. (J) ausführt, auflösbar nach $\partial f : \partial x_1$ und nach $r - m - l - 1$ der Ableitungen von f nach den Ableit. von Φ.

Ist insbesondere: $l = 0$, so sind die m Gl.:

$$B_k^{(\nu)} f = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

stets auflösbar nach $\partial f : \partial x_{n-m+1}, \ldots, \partial f : \partial x_n$. Für: $\nu \geqq r - m - 1$ bilden daher in diesem Falle die r Gl.: $B_1^{(\nu)} f = 0, \ldots, B_r^{(\nu)} f = 0$ ein r-gliedr. vollst. Syst., das derart nach r Ableit. von f auflösbar ist, daß sich die Koeff. der aufgelösten Gl. bei der Substitution (J) für allgemeine Werte von $x_1, \ldots, x_n$ regulär verhalten. Wir denken uns dieses vollst. Syst. aufgelöst und die der Auflös. entsprechenden Hauptlös. bestimmt. Wenn man setzt: $x_1 = x_1^0$, $x_{n-m+1} = x_{n-m+1}^0, \ldots, x_n = x_n^0$ und wenn man gewissen $r - m - 1$ Ableitungen von Φ die aus $\Phi = x_1$ folgenden Werte erteilt, werden sich diese Hauptlös. der Reihe nach auf: $x_2, \ldots, x_{n-m}$ und auf gewisse unter den Ableit. von Φ reduzieren. Hierin liegt, daß die Hauptl. bei der Substitution (J) sämtlich in bestimmte Fkt. von $x_1, \ldots, x_n$ übergehen. Da sie andrerseits Diffinv. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ sind, so verwandeln sie sich bei der Substitution (J) in Fkt. von $x_1, \ldots, x_{n-m}$ allein, und es ist sicher, daß die ersten $n - m - 1$ unter ihnen bei jener Subst. ebensoviele Fkt. von $x_1, \ldots, x_n$ liefern, die in bezug auf $x_2, \ldots, x_{n-m}$ von einander unabhängig sind.

Kehren wir zu den ursprünglichen Veränderlichen zurück, so können wir das gewonnene Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Die Fkt. $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ gestatte gerade m und nicht mehr unabh. inf. Trff. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$, nämlich: $B_1 f, \ldots, B_m f$, und es seien diese m inf. Trff. durch keine lin. hom. Relation verknüpft. Dann kann man die Diffinvarianten

$\Omega_k(x_1, \ldots, \Phi_1, \ldots)$ der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ stets so wählen, daß sie bei der Substitution: $\Phi = \Pi(x)$ sämtlich in bestimmte Fkt. von $x_1, \ldots, x_n$ übergehen. Ist $\nu > r - m - 1$, so liefern die Diffinv. bis zur ν-ten O. bei der Subst.: $\Phi = \Pi(x)$ lauter Lösungen des vollst. Systems: $B_1 f = 0, \ldots, B_m f = 0$, und zwar erhält man auf diese Weise, wenn man noch $\Pi(x)$ selber hinzunimmt, stets $n - m$ unabh. Lös. dieses vollst. Systems.

Der Fall, daß $\Pi(x)$ gar keine inf. Trf. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ gestattet, ist hierin mit enthalten, nämlich für: $m = 0$.

Da die Gl.: $B_1^{(\nu)} f = 0, \ldots, B_r^{(\nu)} f = 0$ für: $\nu = r - m - 1$ sicher von einander unabhängig werden, so braucht man die Gl. (B′) nur für: $\nu = r - m$ zu bilden und erhält dann durch Elimination von $x_1', \ldots, x_n'$ ein System von $N_{r-m} + 1 - n + m$ unabh. Diffgl. $(r-m)$-ter O., das nach allen Ableit. $(r-m)$-ter O. auflösbar ist und das von: $\Phi = \Pi(f_1(x, a)), \ldots, f_n(x, a))$ befriedigt wird. Nun aber enthält $\Pi(f(x, a))$ gerade $r - m$ wesentliche Parameter, während die allgemeinste Lösung jenes Systems höchstens so viele enthalten kann. Mithin ist das gefundene System unbeschränkt integrabel und $\Pi(f(x, a))$ ist seine allgemeinste Lösung.

Jetzt können wir auch den allgemeinen Fall: $l > 0$ betrachten.

Wählen wir wie vorhin: $\nu > r - m - l - 1$, so sind wir sicher, daß die $r - m - l$ letzten der Gl.: $B_k^{(\nu)} f = 0$ auch dann, wenn wir in den Koeff. die Subst. (J) machen, von einander unabhängig und auflösbar sind nach $\partial f : \partial x_1$ und nach $r - m - l - 1 = r'$ Ableitungen von f nach gewissen r' Ableitungen von Φ. Da sich andrerseits die $m + l$ ersten der Gl.: $B_k^{(\nu)} f = 0$ bei der Subst. (J) auf die Gl.: $B_1 f = 0, \ldots, B_{m+l} f = 0$ reduzieren, unter denen es gerade m von einander unabh. gibt, die nach $\partial f : \partial x_{n-m+1}, \ldots, \partial f : \partial x_n$ auflösbar sind, so erkennen wir sofort, daß die Matrix von: $B_1^{(\nu)} f, \ldots, B_r^{(\nu)} f$ bei der Substitution (J) den Rang $r - l$ bekommt. Bei der allgemeinsten Trf. unserer Gr. geht aber die Fkt.: $\Phi = x_1$ in die Fkt.: $\Phi = f_1(x, a)$ über; demnach ist klar, daß die eben erwähnte Matrix auch bei der Substitution: $\Phi = f_1(x, a)$ den Rang $r - l$ bekommt.

Nun enthält die Fkt.: $\Phi = f_1(x, a)$ unter den von uns gemachten Voraussetzungen gerade $r - m - l$ wesentliche Parameter. Denken wir uns daher die Gl.: $\Phi = f_1(x, a)$ differentiiert und $a_1, \ldots, a_r$ eliminiert, so erhalten wir ein unbeschränkt integrables System (S) von Diffgl. $(r - m - l)$-ter und niedrigerer O., das nach allen Ableit. $(r - m - l)$-ter O. von Φ auflösbar ist, und vermöge dessen alle Ableitungen niedrigerer O. durch $r - m - l - 1 = r'$ unter ihnen, durch Φ und durch $x_1, \ldots, x_n$ ausdrückbar sind. Dabei ist klar, daß dieses System (S) die inf. Trff.: $B_1^{(\nu)} f, \ldots, B_r^{(\nu)} f$ $(\nu = r - m - l)$ gestattet und daß es bei der Subst. (J) identisch erfüllt ist.

Bezeichnen wir die eben erwähnten r' Ableitungen von Φ mit: $z_1, \ldots, z_{r'}$ und die übrigen Ableit. erster bis $(r - m - l)$-ter O. mit $Z_1, Z_2, \ldots$, so erscheint unser System (S) in der Gestalt:

$$Z_\mu = \chi_\mu(x_1, \ldots, x_n, \Phi, z_1, \ldots, z_{r'}) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots). \tag{S}$$

Da (S) die inf. Trff. $B_k^{(\nu)} f$ gestattet und bei der Substitution (J) identisch erfüllt ist, so müssen auch die Gl.:

$$B_k^{(\nu)} Z_\mu = B_k^{(\nu)} \chi_\mu$$

bei der Subst. zu Identitäten werden. Nun aber verschwinden offenbar sämtliche Ableitungen:

$$\frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_n}$$

bei der Substitution identisch. Deuten wir daher die Subst. (J) durch Einschließen in eckige Klammern an, so wird:

$$\left\{ [B_{m+l+j}^{(\nu)} Z_\mu] = \left[\frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_1}\right] \xi_{m+l+j,\,1} + \sum_{\tau}^{1\ldots r'} \left[\frac{\partial \chi_\mu}{\partial z_\tau}\right] [B_{m+l+j}^{(\nu)} z_\tau] \right. \tag{K}$$
$$(j = 1, \ldots, r - m - l;\ \nu = r - m - l).$$

Andrerseits wissen wir (vgl. S. *829*, Z. 8ff.), daß bei der Substitution (J) in der Matrix:

$$\left| \begin{array}{c} \xi_{m+l+j,\,1},\ B_{m+l+j}^{(\nu)} z_1,\ \ldots,\ B_{m+l+j} z_{r'},\ B_{m+l+j} Z_1,\ \ldots \\ (j = 1, \ldots, r - m - l) \end{array} \right|$$

nicht alle $(r - m - l)$-reihigen Determ. verschwinden, in denen die erste Spalte der Matrix enthalten ist. Aus (K) können wir daher schließen, daß insbesondere die aus den $r - m - l$ ersten Spalten der Matrix bestehende Det. bei der Subst. (J) einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Somit sind die Gl.:

$$B_{m+l+j}^{(\nu)} f = 0 \qquad (j = 1, \ldots, r - m - l;\ \nu = r - m - l) \tag{L}$$

auch dann, wenn wir in den Koeff. die Subst. (J) ausführen, gerade nach:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{r'}}$$

auflösbar, und diese Auflösung ist daher sicher auch dann möglich, wenn man in den Koeff. von (L) die Substitution (S) macht.

Erinnern wir uns jetzt, daß die r inf. Trff.: $B_1^{(\nu)} f, \ldots, B_r^{(\nu)} f$ $(\nu = r - m - l)$ in den Beziehungen:

$$(B_i^{(\nu)} B_k^{(\nu)}) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} B^{(\nu)} f \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

stehen und eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, daß diese Gruppe das System (S) inv. läßt, und daß die Matrix der $B_k^{(\nu)} f$ bei der Subst. (S) den Rang $r - l$ bekommt, so erkennen wir nach Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 109—111, 233—235 folgendes:

Werden aus den $B_k^{(\nu)} f$ $(\nu = r - m - l)$ alle Ableit. $\partial f : \partial Z_\mu$ weggelassen, und wird in den Koeff. der Ableit. $\partial f : \partial z_\tau$ die Subst. (S) ausgeführt, so ergeben sich r von einander unabh. verkürzte inf. Trff. $\overline{B}_k^{(\nu)} f$ in den $n + r - m - l$ Veränd.: $x_1, \ldots, x_n$, Φ, $z_1, \ldots, z_{r'}$. Diese verkürzten inf. Trff. stehen in den Beziehungen:

$$(\overline{B}_i^{(\nu)} \overline{B}_k^{(\nu)}) = \sum_s^{1\ldots r} c_{ik\tau} \overline{B}^{(\nu)} f$$

und erzeugen daher eine r-gliedrige Gruppe. Ihre Matrix hat den Rang $r - l$, sodaß es unter den r Gl.: $\overline{B}_k^{(\nu)} f = 0$ gerade $r - l$ von einander unabh. gibt, die ein $(r - l)$-gl. vollst. Syst. bilden. Jede Inv. der Gruppe $B_k^{(\nu)} f$ verwandelt sich bei der Subst. (S) in eine Inv. der verkürzten Gr. $\overline{B}_k^{(\nu)} f$.

In dem vorliegenden Falle insbesondere wissen wir, daß die m ersten und die $r - m - l$ letzten der Gl.: $\overline{B}_k^{(\nu)} f = 0$ von einander unabh. und nach:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{r'}}$$

auflösbar sind, und zwar auch dann noch, wenn man $\Phi = x_1$ setzt und den Ableit. z_τ die daraus folgenden Werte erteilt, die wir mit z_τ^0 bezeichnen wollen. Das $(r - l)$-gl. vollst. Syst.: $\overline{B}_k^{(\nu)} f = 0$, das die Inv. der verkürzten Gr. bestimmt, hat daher außer der Lösung Φ noch $n-m-1$ unabh. Lös., die wir immer so wählen können, daß sie die Hauptlösungen: $u_2, \ldots, u_{n-m}$ sind, die sich für: $x_1 = x_1^0$, $x_{n-m+\mu} = x_{n-m+\mu}^0$, $z_\tau = z_\tau^0$ der Reihe nach auf $x_2, \ldots, x_{n-m}$ reduzieren.

In dem früher behandelten Falle: $l = 0$ hat das r-gl. vollst. Syst.: $B_k^{(\nu)} f = 0$, das die Inv. der unverkürzten Gr. $B_k^{(\nu)} f$ bestimmt, offenbar $n-m$ Hauptlös.: $U_2, \ldots, U_{n-m}$ i. B. auf: $x_1 = x_1^0$, $x_{n-m+\mu} = x_{n-m+\mu}^0$, $z_\tau = z_\tau^0$. In diesen Hauptlös. kann man die Subst. (S) ausführen und erhält dadurch der Reihe nach die Inv.: $u_2, \ldots, u_{n-m}$ der verkürzten Gr. Bei der Subst. (J) verwandeln sich daher: $U_2, \ldots, U_{n-m}$ in ebensoviele Fkt. von $x_1, \ldots, x_{n-m}$, die i. B. auf: $x_2, \ldots, x_{n-m}$ von einander unabh. sind.

Ist aber $l > 0$, so sind wir nicht sicher, daß solche Hauptlös. vorhanden sind. Wir müssen daher einen andern Weg einschlagen.

Da das Syst. (S) die Gruppe $B_k^{(\nu)} f$ gestattet, so führen wir statt der Z_μ neue Veränd.:

(M) $$\mathfrak{Z}_\mu = Z_\mu - \chi_\mu(x_1, \ldots, x_n, \Phi, z_1, \ldots, z_{r'}) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

ein. Die endl. Trff. der Gruppe $B_k^{(\nu)} f$ erhalten dabei die Form:

(N) $$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) & (i = 1, \ldots, n), \\ \Phi' = \Phi, & \\ \mathfrak{Z}_\mu' = \Psi_\mu(x_1, \ldots, x_n, \Phi, z_1, \ldots, z_{r'}, \mathfrak{Z}_1, \ldots, a_1, \ldots, a_r) & (\mu = 1, 2, \ldots), \\ z_\tau' = \vartheta_\tau(x_1, \ldots, x_n, \Phi, z_1, \ldots, z_{r'}, \mathfrak{Z}_1, \ldots, a_1, \ldots, a_r) & (\tau = 1, \ldots, r'). \end{cases}$$

Hier verschwinden die Ψ_μ bei der Subst.: $\mathfrak{Z}_1 = 0$, $\mathfrak{Z}_2 = 0, \ldots$, und die nach Weglassung der Gl. $\mathfrak{Z}_\mu' = \Psi_\mu$ übrig bleibenden Gl. verwandeln sich bei der Subst.: $\mathfrak{Z}_1 = 0, \ldots$ in die endl. Gl. der verkürzten Gr. $\overline{B}_k^{(\nu)} f$:

(N′) $$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) & (i = 1, \ldots, n) \\ \Phi' = \Phi & \\ z_\tau' = \vartheta_\tau(x_1, \ldots, x_n, \Phi, z_1, \ldots, z_{r'}, 0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_r) & (\tau = 1, \ldots, r'). \end{cases}$$

Nun gestatten die $n-m$ Fkt. $x_1, \ldots, x_{n-m}$ alle die $m+l$ inf. Trff.: $B_1 f, \ldots, B_{m+l} f$; die Fkt.: $f_1(x, a), \ldots, f_{n-m}(x, a)$ enthalten daher bloß $r - m - l = r' + 1$ wesentliche Parameter, sodaß die Gl. (N′) der verkürzten Gruppe bei geeigneter Wahl der Parameter die Form:

(N″) $$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{r-m-l}) & (i = 1, \ldots, n-m) \\ x_{n-m+\mu}' = f_{n-m+\mu}(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) & (\mu = 1, \ldots m) \\ \Phi' = \Phi, \ z_\tau' = \vartheta_\tau(x_1, \ldots, x_n, \ldots, a_1, \ldots, a_r) & (\tau = 1, \ldots, r') \end{cases}$$

erhalten können. Da ferner die verkürzte Gr. gerade $n-m-1$ unabh. Inv. besitzt, die i. B. auf $x_2, \ldots, x_{n-m}$ von einander unabh. sind, so muß es möglich sein, die $m + r' + 1 = r - l$ Gl.:

$$x_1' = f_1(x, a), \quad x_{n-m+\mu}' = f_{n-m+\mu}(x, a) \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$
$$z_\tau' = \vartheta_\tau(x, \Phi, z, 0, a) \qquad (\tau = 1, \ldots, r')$$

nach $r - l$ der Parameter a_k, etwa nach $a_1, \ldots, a_{r-l}$, aufzulösen, und diese Auflösungen müssen, in die Gl.: $x_2' = f_2, \ldots, x_{n-m}' = f_{n-m}$ eingesetzt, lauter Fkt. liefern, die von sämtlichen Parametern a_k frei und Invarianten der verkürzten Gruppe sind.

Für die Gruppe (N) ergibt sich hieraus folgendes: Die Gl.:

$$x_1' = f_1(x, a), \quad x_{n-m+\mu}' = f_{n-m+\mu}(x, a) \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$
$$z_\tau' = \vartheta_\tau(x, \Phi, z, \mathfrak{Z}, a) \qquad (\tau = 1, \ldots, r')$$

sind nach den $r - l$ Parametern: $a_1, \ldots, a_{r-l}$ auflösbar, und diese Auflösungen liefern in die Gl.: $x_2' = f_2, \ldots, x_{n-m}' = f_{n-m}$, $\mathfrak{Z}_\mu' = \Psi_\mu$ eingesetzt, Gl. von der Form:

(P) $$\begin{cases} x_i' = X_i(x_1, \ldots, x_n, \Phi, z_1, \ldots, z_{r'}, \mathfrak{Z}_1, \ldots, a_{r-l+1}, \ldots, a_r) \\ \mathfrak{Z}_\mu' = \Psi_\mu(x_1, \ldots, x_n, \Phi, z_1, \ldots, z_{r'}, \mathfrak{Z}_1, \ldots, a_{r-l+1}, \ldots, a_r) \\ \qquad (i = 2, \ldots, n-m;\ \mu = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

wo die X_i bei der Substitution: $\mathfrak{Z}_1 = 0, \ldots$ von $a_{r-l+1}, \ldots, a_r$ frei werden und in Invarianten der verkürzten Gruppe übergehen. Endlich gibt es unter den Gl. $\mathfrak{Z}_\mu' = \Psi_\mu$ immer l solche, die nach den l Parametern $a_{r-l+1}, \ldots, a_r$ auflösbar sind. Denkt man sich diese Auflösungen hergestellt und in die Funktionen X_i und in die übrigen Funktionen Ψ_μ eingesetzt, so erhält man so viele von einander unabh. Inv. der unverkürzten Gr. $B_k^{(\nu)} f$, wie es überhaupt gibt. Insbesondere erhält man aus den X_i gerade $n-m-1$ unabh. Inv. der unverkürzten Gr. und diese verwandeln sich bei der Subst.: $\mathfrak{Z}_1 = 0, \ldots$ in ebensoviele unabh. Inv. der verkürzten Gruppe: $\overline{B}_k^{(\nu)} f$. Kehren wir daher zu den alten Veränderlichen Z_μ zurück, so liefern uns die X_i $n-m-1$ unabh. Inv. der Gruppe: $B_k^{(\nu)} f$, die bei der Subst. (S) in Inv. der verkürzten Gruppe $\overline{B}_k^{(\nu)} f$ übergehen und bei der Subst. (J) in solche Fkt. von $x_1, \ldots, x_{n-m}$, die i. B. auf $x_2, \ldots, x_{n-m}$ von einander unabhängig sind.

Die auf S. *828* aufgestellte Behauptung ist hiermit bewiesen, und wir können daher den Satz aussprechen:

Die Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ gestatte gerade $m + l$ und nicht mehr unabh. inf. Trff. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$, nämlich: $B_1 f, \ldots, B_{m+l} f$, und es seien diese $m + l$ inf. Trff. durch gerade l und nicht mehr von einander unabh lin. hom Relationen verknüpft. Unter den Diffinv. $\Omega_k(x_1, \ldots, \Phi_1, \ldots)$ der Gruppe, deren Ordnung $r - m - l$ nicht übersteigt, gibt es dann stets $n - m - 1$ solche, die bei der Substitution: $\Phi = \Pi(x)$ in bestimmte Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ übergehen, und zwar kann man diese Diffinv. stets so wählen, daß sie bei der Subst. $\Phi = \Pi(x)$ gerade $n - m - 1$ von einander und von $\Pi(x)$ unabhängige Lösungen des m-gliedrigen vollst. Systems: $B_1 f = 0, \ldots, B_{m+l} f = 0$ liefern.

Insbesondere ergibt sich hieraus noch:

Bilden wir unter den Voraussetzungen des eben ausgesprochenen Satzes die Gl (B′), S. 826 für $\nu = r - m - l$ und wählen wir die Diffinv. $\Omega_k(x_1, \ldots, \Phi_1, \ldots)$ in geeigneter Weise, so gibt es, wenn zwei Wertsysteme: $x_1, \ldots, x_n$ und: $x_1', \ldots, x_n'$ die Gl.: $\Pi(x') = \Pi(x)$ und die sämtlichen Gl.: $\overline{\Omega}_k(x') = \overline{\Omega}_k(x)$ befriedigen, immer ∞^l Trff. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$, bei denen das Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ in das Wertsystem $x_1', \ldots, x_n'$ übergeht.

In der Tat, die inf. Trff.: $B_1 f, \ldots, B_{m+l} f$ erzeugen die größte in der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ enthaltene kont. Untergruppe, bei der die Funktion $\Pi(x)$ invariant bleibt. Andrerseits sind $\Pi(x)$ und die $\overline{\Omega}_k(x)$ Invarianten dieser Untergr., und die $n - m$ von einander unabh. Inv. der Untergr. sind durch $\Pi(x)$ und die $\overline{\Omega}_k(x)$ ausdrückbar. Demnach ergeben sich aus den endl. Gl.:

(Q) $$x_i' = F_i(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_{m+l}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

der Untergruppe gerade $n-m$ von einander unabh., von den b_k freie Gl., eben die Gl.: $\Phi(x')=\Phi(x)$, $\overline{\Omega}_k(x')=\overline{\Omega}_k(x)$, während gerade m unter den Gl. (Q) nach ebensovielen unter den Parametern b_k auflösbar sind. Unterwirft man daher die x_i und x_i' den Gl.: $\Pi(x')=\Pi(x)$, $\overline{\Omega}_k(x')=\Omega_k(x)$, so können die Gl. (Q) immer befriedigt werden, und zwar bleiben l unter den Parametern $b_1, \ldots, b_{m+l}$ willkürlich.

Die Behauptungen, die Lie auf S. 199, Z. 13—6 v. u. aufstellt, sind im Vorstehenden genauer gefaßt und zugleich vollständig bewiesen.

S. 197, Z. 3—8. Man beachte, daß auf S. 196 bei der Erweiterung der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ nur die Ableitungen von Φ nach $x_1, \ldots, x_n$ mitgenommen werden, nicht aber die Ableitungen, bei denen Φ auch nach u differentiiert wird. Bei der benutzten Erweiterung gehen daher lauter solche Diffinv. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ hervor, die zugleich Diffinv. der unendlichen Gruppe sind, die von den inf. Trf.:

$$c\frac{\partial f}{\partial u}+\sum_k^{\ldots r} U_k \cdot B_k f$$

mit den r willkürlichen Funktionen: $U_1, \ldots, U_r$ erzeugt wird. Das ist der Sinn der auf S. 197 abgeleiteten Gl.: $A'(\Omega(\Phi))=0$.

Die auf S. 197, Z. 6—8 aufgestellte Behauptung, die S. 197, Z. 6 v. u.—198, Z. 17 bewiesen wird, ist ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes, den Lie schon in Abh. II, S. 138, Z. 10—8 v. u. angedeutet und den ich in der Anm. dazu (s. S. *796* f.) aufgestellt und bewiesen habe. Es ist daher wohl nicht nötig, die betreffenden Entwickelungen auf S. 197 f. noch näher zu erläutern, zumal dieser Satz im Vorstehenden (S. *824*—*827*) noch auf einem andern Wege bewiesen ist.

S. 198, Z. 5—1 v. u., 199, Z. 19—14 v. u. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XL (1882), S. 552, Z. 6—4 v. u., 553, Z. 1—3 und S. *763*, Z. 7—19.

S. 199, Z. 1—7. Die „wiederholte Anwendung" ist nicht etwa so zu verstehen, daß man die gefundenen neuen Lösungen $\Omega(\Pi)$ an Stelle von Φ in die Differentialinv. Ω einzusetzen und dieses Verfahren zu wiederholen hätte. Vielmehr erhält man alle neuen Lösungen, die das Verfahren liefert, schon dadurch, daß man in allen Differentialinv. Ω die Substitution: $\Phi=\Pi$ macht. Man braucht dabei aber nur eine gewisse endliche Anzahl von Diffinv. zu berücksichtigen, und zwar kann man nach Z. 2—7 von vornherein übersehen, wie viele von einander unabhängige Lösungen von: $Af=0$ aus einer bekannten Lösung Π durch Anwendung des Satzes 14 hervorgehen. Vgl. S. *833*.

Wenn Lie von inf. Trff. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$ spricht, die Π, aufgefaßt als Fkt. von $x_1, \ldots, x_n$ allein, invariant lassen, so meint er damit solche inf. Trff.: $\Sigma e_k B_k f$, in denen die e_k Funktionen von u sind. Die Bestimmung dieser inf. Trff. kann durch ausführbare Oper. geleistet werden, denn sie führt auf gewisse lineare homogene Gl. zwischen: $e_1, \ldots, e_r$, deren Koeffizienten Funktionen von u sind.

Gestattet Π in diesem Sinne gerade $m+l$ und nicht mehr unabh. inf. Trff. der Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_r f$, so können wir annehmen, daß die betr. inf. Trff. die Form:

$$\mathfrak{B}_k f = B_k f + \sum_\mu^{1 \ldots r-m-l} \vartheta_{k\mu}(u) B_{m+l+\mu} f \qquad (k=1, \ldots, m+l)$$

haben. Dabei sind die $\vartheta_{k\mu}$ bestimmte Fkt. von u, und Π gestattet keine inf. Trf. von der Form:

$$e_{m+l+1} B_{m+l+1} f + \cdots + e_r B_r f,$$

auch wenn man zuläßt, daß die $e_{m+l+\mu}$ Funktionen von u sind. Es ist dann offenbar:

$$\sum_k^{1 \ldots m+l} \chi_k(u) \mathfrak{B}_k f$$

mit den willkürlichen Funktionen $\chi_k(u)$ die allgemeinste inf. Trf. $\Sigma e_k X_k f$, bei der Π invariant bleibt. Andererseits ist klar, daß $\mathfrak{B}_1 f, \ldots, \mathfrak{B}_{m+l} f$ für jedes u eine $(m+l)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$ erzeugen.

Da nun Π überdies eine Lösung der Gl. $Af=0$ ist, so liefert jede Diffinv. $\Omega(x_1, \ldots, \Phi_1, \ldots)$ bei der Substitution $\Phi=\Pi$ wieder eine Lösung der Gleichung $Af=0$. Diese Lösung ist aber nach dem Früheren (S. *833*) zugleich eine Invar. der Untergruppe $\mathfrak{B}_1 f, \ldots, \mathfrak{B}_{m+l} f$. Sind diese inf. Trff. durch gerade l und nicht mehr von einander unabh. lin. hom. Relationen verknüpft, so bilden die Gleich. $\mathfrak{B}_1 f=0, \ldots, \mathfrak{B}_{m+l} f=0$ ein m-gliedriges vollst. System, und die Diffinv. der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$ liefern uns daher nach S. *833* gerade $n-m-1$ von einander und von Π unabh. Lösungen der Gl. $Af=0$.

Gestattet Π gar keine inf. Trf. der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$, ist also $m=l=0$, so finden wir auf diese Weise alle Lösungen von $Af=0$.

Die Differentialinv. der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$ hat Lie offenbar bloß zu dem Zwecke eingeführt, einen analytischen Beweis dafür zu geben, daß sich aus einer bekannten Lösung der Gl. $Af=0$ durch ausführbare Oper. neue Lösungen gewinnen lassen. Es ist leicht zu sehen, daß man diese Diffinv. vermeiden und durch rein begriffliche Betrachtungen erkennen kann, welcher Vorteil sich aus einer bekannten Lösung von $Af=0$ ziehen läßt. Wir gelangen damit zweifellos ungefähr zu dem Gedankengange, den Lie ursprünglich befolgt hat.

Es sei $\Pi(x_1, \ldots, x_n, u)$ eine Lösung von $Af=0$ und gestatte in dem früher erklärten Sinne gerade $m+l$ unabh. inf. Trff. der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$, nämlich $\mathfrak{B}_1 f, \ldots, \mathfrak{B}_{m+l} f$. Wie wir wissen, erzeugen die inf. Trff.:

$$\text{(R)} \qquad c\frac{\partial f}{\partial u}+\sum_k^{1 \ldots r} \varphi_k(u) B_k f,$$

wo c ein Parameter und $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)$ willk. Fkt., eine unendl. kont. Gruppe. Nach dem, was wir vorhin gesehen haben, sind alle inf. Trff. dieser Gruppe, bei denen Π invariant bleibt, in der Form:

$$\text{(T)} \qquad cAf+\sum_k^{1 \ldots m+l} \chi_k(u) \mathfrak{B}_k f$$

enthalten, wo die $\chi_k(u)$ wieder willkürliche Funktionen bedeuten. Es ist daher klar, daß die inf. Trff. (T) eine Untergruppe der Gruppe (R) erzeugen. Die Invarianten dieser Untergruppe, die offenbar durch die Gl.:

$$\text{(U)} \qquad Af=0, \ \mathfrak{B}_1 f=0, \ \ldots, \ \mathfrak{B}_{m+l} f=0$$

definiert werden, sind sämtlich Lösungen von $Af=0$.

Nun aber kennen wir die endlichen Trff. der Gruppe (R); diese lauten ja:

$$\text{(V)} \qquad u'=u+a, \ x_i'=f_i(x_1, \ldots, x_n, A_1(u), \ldots, A_r(u)) \qquad (i=1, \ldots, n),$$

wo a ein Parameter und die $A_k(u)$ willkürliche Funktionen. Demnach erhalten wir die endlichen Trff. der Gruppe (T), wenn wir alle Trff. (V) bestimmen, bei denen die Fkt. $\Pi(x_1, \ldots, x_n, u)$ invariant bleibt. Ist das gemacht — es ist eine ausführbare Operation —, so finden wir durch Elimination alle Invarianten der Gruppe (T) und damit alle Lösungen des vollst. Syst. (U).

Sind $\mathfrak{B}_1 f, \ldots, \mathfrak{B}_{m+l} f$ durch gerade l unabh. lin. hom. Relationen verknüpft, so ist das vollst. Syst. (U) gerade $(m+1)$-gliedrig und hat daher gerade $n-m$ unabh. Lösungen. Wir finden also durch ausführbare Oper. gerade $n-m-1$ von einander und von Π unabh. Lös. der Gl. $Af=0$.

Gestattet $\Pi(x_1, \ldots, x_n, u)$ keine inf. Trf. der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$, so ist Af die einzige inf. Trf. der unendl. Gr. (R), bei der Π invariant bleibt. Da wir nun durch ausführb. Oper. alle endlichen Trff. (V) der Gr. (R) aufstellen können, die $\Pi(x_1, \ldots, x_n, u)$ invariant lassen, so erhalten wir, indem wir das tun, die endlichen Trff. der eingliedrigen Gruppe Af, und damit ist dann auch die Gl. $Af=0$ integriert.

Wir können aber in diesem Falle auch so schließen: Nach S. *823* gibt es in der unendl. Gruppe:

$$u'=u, \quad x_i'=f_i(x_1, \ldots, x_n; \; A_1(u), \ldots, A_r(u)) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{W}$$

eine Trf. (Z), bei der Af die Form $\partial f : \partial u'$ erhält. Bei dieser Trf. wird $\Pi(x_1, \ldots, x_n, u)$ notwendig eine von u freie Funktion der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$, und da $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, u$ betrachtet die Hauptlös. von $Af=0$ i. B. auf $u=u^0$ sind, so wird:

$$\Pi(x_1, \ldots, x_n, u) = \Pi(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, u^0).$$

Da nun $\Pi(x_1, \ldots, x_n, u)$ keine inf. Trf. der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$ und also auch keine inf. Trf. der unendl. Gruppe (W) gestattet, so ist die Trf. der Gr. (W), die $\Pi(x_1, \ldots, x_n, u)$ in $\Pi(x_1', \ldots, x_n', u_0)$ überführt, einzig in ihrer Art und kann somit ohne Integration gefunden werden. Damit kennen wir dann zugleich alle Lösungen von $Af=0$.

Wir haben hier eine wichtige Anwendung des allgemeinen Prinzips, das Lie in Abh. I, S. 91, Nr. 63 ausgesprochen hat.

S. 199, Z. 13—3 v. u. Vgl. S. *833*, Z. 13 v. u.—*834*, Z. 8.

S. 199, Z. 11—17. Kennt man ein partikuläres System von Integralgl.:

$$x_{q+\mu} = F_\mu(x_1, \ldots, x_q, u) \qquad (\mu=1, \ldots, n-q), \tag{1}$$

also ein Glsyst., das die inf. Trf. Af gestattet, so kommt es darauf an, wie viele unabh. inf. Trff. $\Sigma e_k B_k f$ dieses Glsyst. gestattet. Gibt es gerade $m+l$ unabh. inf. Trff. dieser Art, etwa $\mathfrak{B}_1 f, \ldots, \mathfrak{B}_{m+l} f$, so erzeugen wieder die inf. Trff. (T) eine unendliche Gruppe, deren endliche Trff. durch ausführbare Operationen aufgestellt werden können. Diese Gr. bestimmt in den Veränd. $u, x_1, \ldots, x_q$ eine verkürzte Gruppe, deren Invarianten aufgestellt werden können. Setzt man diese Invarianten gleich willkürlichen Konstanten und fügt die erhaltenen Gl. zu (1) hinzu, so erhält man das größte partikuläre System von Integralgl., das das Glsyst. (1) umfaßt und die inf. Trff. $\mathfrak{B}_1 f, \ldots, \mathfrak{B}_{m+l} f$ gestattet. Zugleich kennt man alle in der unendl. Gruppe (R) enthaltenen Trff., bei denen dieses Syst. von Integralgl. inv. bleibt.

Gestattet (1) keine inf. Trf $\Sigma e_k B_k f$, so reduziert sich die Gruppe (T) auf die eingl. Gruppe Af, deren endl. Trff. mithin aufgestellt werden können; also ist auch die Gl. $Af=0$ integriert.

Man kann aber in diesem Falle auch so schließen: Bei der Trf. (Z), S. *823*, bei der Af die Form $\partial f : \partial u$ annimmt, muß (1) von u frei werden und daher, wie man leicht sieht, in:

$$\mathfrak{x}_{q+\mu} = F_\mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_q, u^0) \qquad (\mu=1, \ldots, n-q) \tag{1'}$$

übergehen. Da nun die Trf. (Z) hier die einzige Trf. von der Form (W) ist, die diese Überführung leistet, so kann sie ohne Integration aufgestellt werden, und damit sind zugleich die Lös. von $Af=0$ gefunden.

S. 199, Z. 18—21; S. 200, Z. 1—4. Kommt die Veränd. u in diesem Systeme von Diffgl. nicht vor, so tritt an die Stelle der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$ einfach die Gruppe, die man erhält, wenn man die inf. Trff. $B_k f$ durch Hinzunahme der in dem Systeme auftretenden Ableitungen erweitert.

Man habe andererseits z. B. ein System von Diffgl., das die inf. Trf. Af gestattet, und in dem außer $u, x_1, \ldots, x_n$ noch die Ableitungen $x_1', \ldots, x_n'$ von $x_1, \ldots, x_n$ nach u vorkommen. Dann erweitert man Af durch Hinzunahme von $x_1', \ldots, x_n'$ und erhält eine erweiterte infinitesimale Transformation:

$$A'f = \frac{\partial f}{\partial u} + \sum_k^{1\ldots r} U_k \left\{ \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} x_\nu' \frac{\partial f}{\partial x_i'} \right\} + \sum_k^{1\ldots r} U_k' \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

oder:

$$A'f = \frac{\partial f}{\partial u} + \sum_k^{1\ldots r} U_k \cdot B_k' f + \sum_k^{1\ldots r} U_k' \cdot C_k f,$$

wo die $B_k' f$, $C_k f$ eine $2r$-gliedrige Gruppe in $x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$ erzeugen. Da die endlichen Trff. dieser Gr. aufgestellt werden können, so hat man jetzt in den Veränd. u, x_i, x_i' ein Problem von derselben Art, wie das auf S. 195 ff. betrachtete. Das bekannte System von Diffgl., das Af gestattet, erscheint ja jetzt als ein bekanntes Gleichungssystem, das die inf. Trf. $A'f$ gestattet.

Zu S. 200, Z. 1—4 vgl. man Leipz. Ber. 1893, S. 343 f. (d. Ausg., Bd. IV, Abh. VI, § II), sowie Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 219; Bd. III, S. 589.

S. 200, Z. 14 v. u. — S. 201, Z. 13. Die Bedeutung dieser Betrachtungen liegt darin, daß die Integration der Gl. $Af=0$ mit der bekannten Lösung Π auf ein *Transformationsproblem* zurückgeführt wird (vgl. Abh. XX (1895), S. 546, Nr. 11). Es ist (vgl. S. *823*) ohne weiteres klar, wie sich alles das für die allgemeine, in Nr. 23 behandelte Aufgabe gestaltet (S. 202, Z. 3—1 v. u.). An die Stelle der Diffgl. $\partial^2 \mathfrak{x}_i : \partial x_k \partial x_j = 0$ des Systems (N) treten da nur die Definitionsgleichungen der endlichen Trff. der Gruppe $B_1 f, \ldots, B_r f$, d. h. die Diffgl., die die endlichen Trff. dieser Gruppe definieren.

S. 201, Z. 1 v. u. — S. 202, Z. 3. In diesem Falle muß man in dem Syst. (N) die Gl. $\partial^2 \mathfrak{x}_i : \partial x_k \partial x_j = 0$ durch das System von Diffgl. ersetzen, das die endlichen Trff. der ϱ-gliedrigen Untergruppe definiert, und erhält so ein System von Diffgl., dessen allgemeinstes Lösungssystem $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ aus einem partikulären $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ durch die allgemeinste Trf. der Untergruppe hervorgeht. Demnach ist in der Tat das Verfahren des § 6 anwendbar.

S. 202, Z. 5 f. Gemeint ist damit das auf S. 199, Z. 8—20 Gesagte.

S. 202. Über die drei Hilfssätze vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 560, 569, 562.

S. 203, Z. 10 f. Vgl. hier Abh. I (1880), S. 9 f., 30 f. und Bd. V d. Ausg., Abh. IV (1878), S. 104.

S. 203, Z. 12 f. Es müßte eigentlich heißen: „eine endliche kontinuierliche Gruppe".

S. 203, Z. 5, 4 v. u. Der a. a. O. gegebene, nicht einwandfreie Beweis des Satzes ist in Bd. I der Th. d. Trfsgr., Kap. 29 durch einen einwandfreien ersetzt. Nur ist dort übersehen, daß beim dritten Falle, auf S. 631, Z. 6—12, der Wert $n=2$ ausgeschlossen ist, ein Umstand, der auch Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 35 nicht beachtet wird.

S. 203, Z. 1 v. u. — S. 204, Z. 2. Vgl. Bd. V d. Ausg., Abh. VI (1879), S. 199 bis 222; Abh. XX* (1884), S. 501 f.; Abh. XXII (1886), S. 533—550, sowie hier Abh. XVIII (1895), S. 429—493.

S. 204, Satz 17. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), Kap. 14, S. 264—266.

S. 204, Z. 21. „Eine invariante Untergruppe", nämlich von der Gruppe, die von den inf. Trff. 1. und 2. O. erzeugt wird.

S. 204, Z. 5 v. u. Auch hier handelt es sich nur um *endliche* Gruppen.

S. 205—207. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 685—692.

S. 205, Z. 8—16. Vgl. S. 162—164.

S. 206, Z. 10f. Die Schar der ∞^1 mit der ursprünglich vorausgesetzten G_{n-1} gleichberechtigten Untergruppen kann nämlich als Grenzgebilde eine invariante $(n-1)$-gl. Untergr. enthalten.

S. 207, Z. 11—15. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 452—456.

S. 207, Z. 2, 1 v. u. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. XXII (1886), S. 507—521. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 447f., 455—458.

S. 208, Z. 1—3. Für $n > 6$ hat sich diese Vermutung als unrichtig herausgestellt, was Lie schon 1885 (d. Ausg. Bd. V, Abh. XXI, S. 505) für wahrscheinlich erklärt hatte. In den Leipz. Ber. von 1891, S. 267 f. (d. Ausg. Bd. IV, Abh. V, in § 4) hat er die Tatsachen mitgeteilt, aus denen die Unrichtigkeit der Vermutung hervorgeht, und Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 808f. hat er nochmals darauf hingewiesen.

S. 208, Z. 4—9. Lie ist meines Wissens nicht wieder auf diese Frage zurückgekommen.

S. 208, Z. 2, 1 v. u. Man vgl. hierzu S. 169, Z. 1—3 und die Anm. S. *810*f.

S. 210, Z. 2. Daß diese Gr. einfach ist, beruht darauf, daß die inv. Untergr.: $B_{n+1}f, \ldots, B_m f$ in keiner größeren inv. Untergr. der Gr.: $B_1 f, \ldots, B_m f$ steckt. Die Zusammensetzung der Gr.: $B_1' f, \ldots, B_n' f$ wird nämlich dadurch erhalten, daß man in den Relationen: $(B_i B_k) = \Sigma c_{iks} B_s f$ für die Zusammensetzung der Gr.: $B_1 f, \ldots, B_m f$ die inf. Trff.: $B_{n+1} f, \ldots, B_m f$ der inv. Untergr. der Identität entsprechen läßt, d. h. sie alle $= 0$ setzt. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 703, Satz 15.

S. 210—212, Nr. 29. Es ist gar nicht nötig, Nr. 17, S. 182—185 heranzuziehen, vielmehr genügt es, sich auf Nr. 16, S. 178—181 und auf den Schluß von Nr. 14, S. 176 zu berufen. Auf diese Weise ist man sogar imstande, ganz allgemein die S. 212, Z. 20f. angekündigte kanonische Form des Integrationsproblems anzugeben, die auf dem von Lie eingeschlagenen Wege für jeden einzelnen Fall besonders abgeleitet werden muß.

Die inf. Trff. $B_i' f$ auf S. 210 stehen in Beziehungen von der Form:

$$(B_i' B_k') = \sum_s^{1\ldots n} c_{iks} B_s' f \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

wo die c_{iks} Konstanten sind. Demnach erzeugen diese inf. Trff. in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ eine einfache transitive Gruppe, in der x als Parameter auftritt, während die Zusammensetzung c_{iks} der Gruppe von x unabhängig ist. Sind daher die $B_i' f$ nicht zufällig alle von x frei, so haben wir ∞^1 einfache transitive Gruppen, die gleichzusammengesetzt und daher alle mit einander ähnlich sind. Da diese Gruppen überdies alle holoedrisch isomorph auf einander bezogen sind, so können wir schließen, daß es eine Transformation:

$$\mathfrak{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

gibt, bei der jedes $B_i' f$ die Form:

$$\mathfrak{B}_i f = \sum_k^{1\ldots n} \xi_{ik}(x^0, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_k}$$

erhält, unter x^0 eine beliebige Konstante verstanden, die nur der Beschränkung unterworfen ist, daß die Determ. der ξ_{ik} nicht identisch verschwinden darf.

Nun kennen wir aber die endlichen Trff. der Gruppe $B_i' f$, die die Form:

$$(1) \qquad x_i' = F_i(x_1, \ldots, x_n; x; a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

haben mögen, und also auch die endlichen Trff. der Gruppe $\mathfrak{B}_i f$, nämlich:

$$(2) \qquad x_i' = F_i(x_1, \ldots, x_n; x^0; a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Folglich muß es nach S. 176 möglich sein, durch ausführbare Operationen sogar die allgemeinste Transformation: $\mathfrak{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; x)$ aufzustellen, welche jene Überführung leistet.

Zur wirklichen Aufstellung der gesuchten Trf. verfahren wir nach Anleitung von Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 425—428. Wir bezeichnen die Trf. (1) mit S_a und (2) mit T_a; ferner seien P_0 und Q_0 zwei beliebige Punkte von allgemeiner Lage im Raume $x_1, \ldots, x_n$. Bei den ∞^n Trff. S_a geht P_0 in alle Punkte des Raumes $x_1, \ldots, x_n$ über, und dasselbe gilt von Q_0 bei den ∞^n Trff. T_a. Es gibt daher eine ganz bestimmte Trf. U derart, daß:

$$(P_0) S_a U = (Q_0) T_a$$

wird für alle Werte $a_1, \ldots, a_n$. Ist $S_a S_b = S_c$, so ist auch $T_a T_b = T_c$ und demnach:

$$(P_0) S_a S_b U = (Q_0) T_a T_b,$$

für alle Werte der Parameter a_k, b_n. Hieraus aber folgt:

$$(P_0) S_a U \,.\, U^{-1} S_b U = (Q_0) T_a \,.\, U^{-1} S_b U = (Q_0) T_a \,.\, T_b,$$

mithin:

$$U^{-1} S_b U = T_b$$

für alle $b_1, \ldots, b_n$. Demnach leistet die Trf. U, die wir aufstellen können, die verlangte Überführung.

Wir können folglich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die inf. Trff. $B_i' f$ von x frei sind. Dann aber können wir, abermals durch ausführbare Operationen, die allgemeinste Trf. in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ aufstellen, bei der jede einzelne der inf. Trff.: $B_1' f, \ldots, B_n' f$ ihre Form behält, mit andern Worten, wir können die endlichen Trff. der reziproken, einfach transitiven Gruppe aufstellen, die zu der Gruppe: $B_1' f, \ldots, B_n' f$ gehört. Mithin können wir auch die inf. Trff.:

$$Z_i f = \sum_k^{1\ldots n} \zeta_{ik}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

dieser reziproken Gruppe als bekannt ansehen.

Die Gl. $A' f = 0$ ist jetzt in der Form:

$$A' f = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_i^{1\ldots n} \chi_i(x, x_1, \ldots, x_n) Z_i f = 0$$

darstellbar. Nun aber ist $(A' B_k') = 0$, $(Z_i B_k') = 0$ und die $B_k' f$ sind von x frei, also ergibt sich:

$$\sum_i^{1\ldots n} B_k' \chi_i \,.\, Z_i f = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

was das Verschwinden aller $B_k' \chi_i$ nach sich zieht. Mithin sind alle χ_i Funktionen von x allein, und es wird:

$$A' f = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_i^{1\ldots n} \chi_i(x) Z_i f = 0.$$

Es sei jetzt $B_{q+1}' f, \ldots, B_n' f$ eine Untergruppe mit möglichst vielen Parametern. Wir denken uns q unabh. Lösungen $z_1, \ldots, z_q$ des $(n-q)$-gliedrigen vollst. Syst.: $B'_{q+1}f = 0, \ldots, B'_n f = 0$ bestimmt, was, da die Gruppe $B'_k f$ einfach ist, nicht einmal Quadraturen, sondern nur Differentiationen und Eliminationen erfordert (s. hier Abh. VII (1888), S. 248—259). Wegen der Relationen $(B'_k Z_i) = 0$ werden dann die $Z_i z_\mu$ Funktionen von $z_1, \ldots, z_q$ allein. Führen wir daher $z_1, \ldots, z_q$ zusammen mit etwa $x_{q+1}, \ldots, x_n$ als neue Veränderliche ein, so wird:

$$Z_i f = \sum_j^{1\ldots q} \omega_{ij}(z_1, \ldots, z_q) \frac{\partial f}{\partial z_j} + \sum_\tau^{1\ldots n-q} \vartheta_{i,\, q+\tau}(z_1, \ldots, z_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{q+\tau}}$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$

$$B'_{q+k} f = \sum_\tau^{1\ldots n-q} \eta_{q+k,\, q+\tau}(z_1, \ldots, z_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{q+\tau}}$$
$$(k = 1, \ldots, n-q),$$

wo die Determ. der $\eta_{q+k,\, q+\tau}$ nicht identisch verschwindet.

Da die Gruppe $B'_k f$ einfach ist, so ist nach S. 158 die Integration der Gl. $A'f = 0$ geleistet, sobald es gelingt, das $(n - q + 1)$-gl. vollst. System:

$$A'f = 0,\; B'_{q+1} f = 0, \ldots, B'_n f = 0$$

zu integrieren. Aber dieses vollständige System erhält, wenn wir:

$$U_i f = \sum_j^{1\ldots q} \omega_{ij}(z_1, \ldots, z_q) \frac{\partial f}{\partial z_j} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

setzen, in den neuen Veränderlichen die Form:

$$\bar{A} f = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_i^{1\ldots n} \chi_i(x)\, U_i f = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0,$$

es kommt also hinaus auf die lin. part. Diffgl. 1. O. $\bar{A} f = 0$ in den $q + 1$ Veränderlichen $x, z_1, \ldots, z_q$.

Da $Z_1 f, \ldots, Z_n f$ eine einfach transitive Gruppe erzeugen, die zu der einfach trans. Gr. $B'_1 f, \ldots, B'_n f$ reziprok und demnach mit dieser gleichzusammengesetzt ist, so erzeugen $U_1 f, \ldots, U_n f$ offenbar in den Veränderlichen $z_1, \ldots, z_q$ eine transitive Gruppe von derselben Zusammensetzung. Wir können daher annehmen, daß $U_1 f, \ldots, U_q f$ durch keine lin. hom. Relation verknüpft sind, während:

$$U_{q+\tau} f \equiv \sum_k^{1\ldots q} \varphi_{\tau k}(z_1, \ldots, z_q)\, U_k f \qquad (\tau = 1, \ldots, n-q). \tag{3}$$

Verstehen wir ferner unter $z_1^0, \ldots, z_q^0$ ein Wertsystem von allgemeiner Lage, so sind augenscheinlich alle inf. Trff. der Gruppe $U_1 f, \ldots, U_n f$, bei denen der Punkt: $z_1 = z_1^0, \ldots, z_q = z_q^0$ in Ruhe bleibt, aus den $n - q$ von einander unabhängigen:

$$U_{q+\tau} f - \sum_k^{1\ldots q} \varphi_{\tau k}(z_1^0, \ldots, z_q^0)\, U_k f \qquad (\tau = 1, \ldots, n-q) \tag{4}$$

linear ableitbar. Die inf. Trff. (4) erzeugen mithin eine $(n - q)$-gl. Untergr. der Gr. $U_1 f, \ldots, U_n f$, die größte kont. Untergr., bei der jener Punkt in Ruhe bleibt.

Offenbar erzeugen die inf. Trff.:

$$Z_{q+\tau} f - \sum_k^{1\ldots q} \varphi_{\tau k}(z_1^0, \ldots, z_q^0)\, Z_k f \qquad (\tau = 1, \ldots, n-q) \tag{5}$$

eine mit der Gruppe (4) gleichzusammengesetzte Untergruppe der einfach transitiven Gr. $Z_1 f, \ldots, Z_n f$. Diese Untergruppe (5) läßt die $(n - q)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit: $z_1 = z_1^0, \ldots, z_q = z_q^0$ des Raumes $z_1, \ldots, z_q, x_{q+1}, \ldots, x_n$ invariant und transformiert die Punkte $x_{q+1}, \ldots, x_n$ dieser Mann. durch eine einfach trans. Gruppe, die ebenfalls mit der Gr. (4) gleichzusammengesetzt ist. Ihre inf. Trff können in der Form:

$$[Z_{q+\tau} f]_{z=z^0} - \sum_k^{1\ldots q} \varphi_{\tau k}(z_1^0, \ldots, z_q^0)\, [Z_k f]_{z=z^0} \qquad (\tau = 1, \ldots, n-q) \tag{6}$$

geschrieben werden, denn in den Ausdrücken (6) fallen die Ableitungen von f nach $z_1^0, \ldots, z_q^0$ wegen (3) alle heraus.

Andererseits erzeugen die inf. Trff.:

$$\left\{ [B'_{q+k} f]_{z=z^0} = \sum_\tau^{1\ldots n-q} \eta_{q+k,\, q+\tau}(z_1^0, \ldots, z_q^0, x_{q+1}, \ldots, x_k) \frac{\partial f}{\partial x_{q+\tau}} \right. \quad (k = 1, \ldots, n-q) \tag{7}$$

in den Veränderlichen $x_{q+1}, \ldots, x_n$ ebenfalls eine $(n - q)$-gl. einfach transitive Gruppe. Da nun die inf. Trff. $B'_{q+k} f$ mit den inf. Trft. $Z_1 f, \ldots, Z_n f$ vertauschbar und überdies von $\partial f : \partial z_1, \ldots, \partial f : \partial z_q$ frei sind, so ist auch jede inf. Trf. (7) mit jeder inf. Trf. (6) vertauschbar, d. h. die beiden einfach transitiven Gr. (6) und (7) sind zu einander reziprok und daher gleichzusammengesetzt.

Wir sehen also, daß die größte in der Gruppe $U_1 f, \ldots, U_n f$ enthaltene Untergruppe, bei der ein Punkt von allgemeiner Lage in Ruhe bleibt, mit der Untergruppe $B'_{q+1} f, \ldots, B'_n f$ gleichzusammengesetzt ist. Endlich erinnern wir noch daran, daß jede $(n - q)$-gl. Untergruppe der n-gliedr. einfachen Gruppe $B'_1 f, \ldots, B'_n f$ im R_q einen Typus von n-gliedrigen transitiven Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} bestimmt. Die diesem Typus angehörigen Gruppen, die alle unter einander ähnlich sind, haben die charakteristische Eigenschaft, daß man jedesmal bei Festhaltung eines Punktes von allgemeiner Lage in dem R_q eine $(n - q)$-gl. Untergr. erhält, die mit der Gruppe $B'_{q+1} f, \ldots, B'_n f$ gleichzusammengesetzt ist (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 434—447 und S. 359, Satz 3 u. 4). Hiernach ist klar, daß $U_1 f, \ldots, U_n f$ dem durch die Untergruppe $B'_{q+1} f, \ldots, B'_n f$ bestimmten Typus von transitiven Gruppen des R_q angehört und durch geeignete Wahl der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_q$ in jede beliebige diesem Typus angehörige Gruppe übergeführt werden kann.

Die vorstehenden Betrachtungen sind davon unabhängig, ob $B'_{q+1} f, \ldots, B'_n f$ eine Untergruppe mit möglichst vielen Parametern ist oder nicht. Hat man aber $n - q$ möglichst groß gewählt, so kommt das Problem der Integration der Gl. $A'f = 0$ auf die Integration einer lin. part. Diffgl. 1. O. $\bar{A} f = 0$ hinaus, wo $U_1 f, \ldots, U_n f$ eine transitive Gruppe ist, die dieselbe Zusammensetzung hat wie die Gruppe $B'_1 f, \ldots, B'_n f$, und die möglichst wenig Veränderliche enthält. Die Hilfsgleichung $\bar{A} f = 0$ hat dann die niedrigste mögliche Ordnung.

Kennt man in der einfachen Gruppe $B'_1 f, \ldots, B'_n f$ oder kurz G_n zwei verschiedene Untergruppen G_{n-q} und G'_{n-q} von möglichst großer Parameterzahl, so kann man im allgemeinen stets G_n derart holoedrisch isomorph auf sich selbst beziehen, daß die Untergruppe G'_{n-q} der Untergruppe G_{n-q} entspricht. Tritt dieser Fall ein, so erhält man im wesentlichen nur eine Hilfsgleichung niedrigster Ordnung $\bar{A}f=0$, denn jede andere, die man aufstellen könnte, kann durch geeignete Wahl der Veränd. $z_1, \ldots, z_q$ auf die Form: $\bar{A}f=0$ gebracht werden.

Es kann aber auch der Fall eintreten, daß G_n zwei größte Untergruppen G_{n-q} und G'_{n-q} enthält, während es nicht möglich ist, G_n derart holoedrisch isomorph auf sich selber zu beziehen, daß G'_{n-q} der Untergruppe G_{n-q} entspricht. Dann kann man zwei wesentlich verschiedene Hilfsgleichungen niedrigster Ord. $\bar{A}f=0$ aufstellen. Jede von beiden zieht, wenn sie integriert wird, die Erledigung des ursprünglichen Integrationsproblems nach sich; aber es ist nicht möglich, die eine auf die andere durch eine Punkttransformation in $z_1, \ldots, z_q$ zurückzuführen.

Dieser Fall, auf den Lie S. 212, Z. 8, 7 v. u. anspielt, tritt z. B. ein für $n=10$, wenn die G_{10} gleichzusammengesetzt ist mit der projektiven Gr. eines nicht ausgearteten linearen Komplexes im R_3.[1])

Die vorstehenden Entwickelungen vervollständigen die Auseinandersetzungen, die ich in Bd. V d. Ausg. auf S. *718—722* gegeben habe. Ich habe nämlich dort nicht ausdrücklich vorausgesetzt, daß die endlichen Trff. der mit $D_k f$ bezeichneten Gruppe bekannt sind. Macht man diese Voraussetzung, so kann man die inf. Trff. $\bar{D}_k f$, S. *719* a. a. O. immer ohne Integration aufstellen.

Merkwürdigerweise hat Lie den Umstand nicht verwertet, daß man die Gruppe $B'_k f$ durch ausführbare Operationen auf eine von x freie Form bringen kann. Er scheint diese Möglichkeit ganz übersehen zu haben und sah sich deshalb genötigt, den Umweg über die inf. Trff. $D'_k f$ (S. 211) und über die Relationen S. 211, Z. 5 v. u. einzuschlagen. Infolgedessen gelang es ihm auch nicht, den Satz über die Normalform der niedrigsten Hilfsgleichung des Integrationsproblems allgemein zu beweisen, und er begnügte sich damit, den Satz für gewisse einfache Gruppen aufzustellen und zu beweisen (Nr. 30).

Lie selbst empfand das als höchst unbefriedigend, und er war daher, wie ich schon in Bd. V d. Ausg., S. *682* erwähnt habe, aufs höchste überrascht und erfreut, als Vessiot 1888 bemerkte, daß man durch ein äußerst einfaches Verfahren die Normalform des Integrationsproblems mit einem Schlage herstellen kann.

Das Vessiotsche Verfahren ist nicht auf den Fall beschränkt, daß die Gruppe des Integrationsproblems einfach ist. Daß Lie nicht selber darauf gekommen war, ist um so verwunderlicher, als er selbst damals schon seit mehreren Jahren bei der Behandlung der Fälle, wo das Integrationsproblem durch eine Quadratur erledigt werden kann, einen Weg eingeschlagen hatte, der ganz genau dem Verfahren entsprach, das Vessiot im allgemeinen Falle anwandte.

Man habe in n Veränderlichen ein $(n-1)$-gliedriges vollständiges System:

$$A_k f=\sum_{\nu}^{1\ldots n} \alpha_{k\nu}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\nu}=0 \qquad (k=1, \ldots, n-1),$$

das eine bekannte inf. Trf.:

$$Xf=\sum_{\nu}^{1\ldots n} \xi_\nu(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

gestattet, und es bestehe zwischen $A_1 f, \ldots, A_{n-1} f, Xf$ keine lin. hom. Relation. Dann erfordert die Integration des vollst. Systems nach Bd. III d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 198 f. nur eine Quadratur.

1) K. Faber ist der erste, der zwei solche verschiedene Resolventen aufgestellt hat; er hat überdies gezeigt, daß die eine auf die andere durch Berührungstransformation zurückgeführt werden kann. Vgl. seine Gießener Dissertation von 1925: „Diffgl., die eine irreduzible Gruppe von B. T. gestatten", und die Abh.: „Ein Integrationsproblem mit zwei wesentlich verschiedenen Resolventen", Leipz. Ber. 1926, S. 23—34.

Ich erinnere mich deutlich, daß Lie schon während meines Aufenthaltes in Kristiania (1884/85) diesen Satz folgendermaßen zu beweisen pflegte:

Ist $u(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung des vollständigen Systems, so besteht eine Relation von der Form $Xu=\omega(u)$, wo die Funktion ω nicht identisch verschwindet. Setzt man daher:

$$v=\int\frac{du}{\omega(u)},$$

so ist v eine Lösung des vollst. Syst., für die $Xv=1$ wird. Für diese Lösung gelten daher die Gleichungen:

$$A_1 v=0, \ldots, A_{n-1} v=0,\ Xv=1,$$

aus denen die Ableitungen von v berechnet werden können; demnach erhält man die Lösung selber durch eine Quadratur.[1])

Die Gruppe des Problems ist hier eingliedrig. Sie zerlegt den Inbegriff aller Lösungen des vollst. Systems in lauter Scharen von je ∞^1 Lösungen derart, daß jede Schar durch eine eingliedrige Gruppe transformiert wird. Die Zurückführung des Problems auf seine Normalform, eine Quadratur, geschieht dadurch, daß die Schar von Lösungen ausgewählt wird, deren Individuen durch eine eingliedrige Gr. von Translationen transformiert werden, also durch die Normalform der eingliedrigen Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Legt man diese Auffassung zugrunde, so erscheint das Verfahren von Vessiot als eine naturgemäße Verallgemeinerung.

In $q+r$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{q+r}$ sei ein q-gliedriges vollst. Syst.:

$$A_1 f=0, \ldots, A_q f=0 \tag{1}$$

vorgelegt, das r unabh. inf. Trff. $B_1 f, \ldots, B_r f$ gestattet. Zwischen den $A_\mu f$ und $B_k f$ soll keine lin. hom. Relation bestehen, andererseits soll sein:

$$(B_i B_k)=\sum_{s}^{1\ldots r} c_{iks} B_s f+\sum_{\mu}^{1\ldots q}\varphi_{ik\mu}(x) A_\mu f \qquad (i, k=1, \ldots, r).$$

Die Konstanten c_{iks} bestimmen also die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe.

Es seien $X_1 f, \ldots, X_r f$ r unabh. inf. Trff., die in den Beziehungen:

$$(X_i X_k)=\sum c_{iks} X_s f$$

stehen und also eine r-gliedr. Gr. von der Zusammensetzung c_{iks} erzeugen. Wir brauchen diese inf. Trff. nicht wirklich aufzustellen. Es genügt zu wissen, daß es jedenfalls in r Veränd. r solche inf. Trff. gibt.[2]) Wir nehmen ferner an, daß $X_1 f, \ldots, X_{r-n} f$ eine $(r-n)$-gl. Untergr. erzeugen. Dann können wir mit Lie

1) In den von Lie veröffentlichten Arbeiten finde ich allerdings dieses Verfahren nicht vor 1889, wenigstens nicht mit voller Deutlichkeit, ausgesprochen. Die erste Stelle, wo das der Fall ist, findet man hier in Abh. VII auf S. 256. Vessiot wird dabei nicht erwähnt, ein deutlicher Beweis dafür, daß das Verfahren Lie schon geläufig war, bevor Vessiot nach Leipzig kam.

2) Sind $u_1, \ldots, u_r$ unabh. Lös. von (1), so sind offenbar die Ausdrücke:

$$\mathfrak{X}_k f=\sum_{\nu}^{1\ldots r} B_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \qquad (k=1, \ldots, r)$$

r solche inf. Trff.

eine Resolvente des Integrationsproblems bilden, indem wir das $(r-n+q)$-gl. vollst. Syst.:

$$A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0, \; B_1 f = 0, \ldots, B_{r-n} f = 0 \tag{2}$$

aufstellen, das n unabh. Lösungen besitzt.

Diese Art der Resolventenbildung leidet an dem Übelstande, daß die Lös. des vollst. Syst. (1), die durch (2) ausgeschieden werden, von den inf. Trff. $B_1 f, \ldots, B_r f$ dann und nur dann unter einander vertauscht werden, wenn $X_1 f, \ldots, X_{r-n} f$ eine *invariante* Untergr. der Gr. $X_1 f, \ldots, X_r f$ erzeugen. Bei Vessiot wird dieser Übelstand vermieden; es wird ein Inbegriff von Lös. des Syst. (1) ausgeschieden, der ebenfalls n unabhängige Lösungen von (1) enthält, der aber bei den inf. Trff. $B_1 f, \ldots, B_r f$ invariant bleibt.

Der Kürze wegen wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß die Untergruppe $X_1 f, \ldots, X_{r-n} f$ weder selbst in der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ invariant ist noch eine kontinuierliche invariante Untergruppe der r-gliedrigen enthält. Wir denken uns im R_n eine r-gliedrige transitive Gruppe:

$$X_k f = \sum_\nu^{1 \ldots n} \eta_{k\nu}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_\nu} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

von der Zusammensetzung c_{iks} aufgestellt, die dem durch die Untergr. $X_1 f, \ldots, X_{r-n} f$ bestimmten Typus angehört, die also bei Festhaltung eines Punktes $\mathfrak{x}_1^0, \ldots, \mathfrak{x}_n^0$ von allgemeiner Lage eine $(r-n)$-gliedrige, mit der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_{r-n} f$ gleichzusammengesetzte Untergruppe liefert. Wir werden sehen, daß es möglich ist, n unabhängige Lösungen des Systems (1) zu bestimmen, die bei den inf. Trff. $B_k f$ genau so transformiert werden, wie die Veränd. $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ bei den inf. Trff. $X_k f$.

Wir bilden zu diesem Zwecke die Gl.:

$$A_\mu \mathfrak{x}_\tau = 0, \; B_k \mathfrak{x}_\tau = \eta_{k\tau}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) \qquad (\mu = 1, \ldots, q;\; k = 1, \ldots, r;\; \tau = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

und behaupten, daß die immer durch n von einander unabhängige Funktionen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ befriedigt werden können.

Zunächst ist klar, daß die Gl. (3) alle Ableitungen von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ nach $x_1, \ldots, x_{q+r}$ als Funktionen der x und der $\mathfrak{x}$ bestimmen. Um nun zu zeigen, daß dieses System von part. Diffgl. 1. O. für $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ unbeschränkt integrabel ist, stellen wir die Gl.:

$$A_\mu f = 0, \; B_k f + X_k f = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, q;\; k = 1, \ldots, r) \tag{4}$$

auf, die offenbar ein $(q+r)$-gl. vollständiges System in den Veränd. $x_1, \ldots, x_{q+r}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ bilden. Da dieses vollst. Syst. nach den $q+r$ Ableit. $\partial f : \partial x$ auflösbar ist, so besitzt es n unabh. Lös. $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, die i. B. auf $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ von einander unabh. sind. Denken wir uns n solche Lösungen bestimmt und setzen wir sie gleich willkürlichen Konstanten, so erhalten wir ein Gleichungssystem:

$$\Omega_\tau(x_1, \ldots, x_{n+q}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = C_\tau \qquad (\tau = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

das nach $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ auflösbar ist. Da nun dieses Glsyst. die inf. Trff. $A_\mu f$, $B_k f + X_k f$ gestattet, so gilt (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 109—111) von dem nach $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ aufgelösten Glsyst. dasselbe, was darauf hinauskommt, daß die aus (5) folgenden Ausdrücke für $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ die Diffgl. (3) identisch befriedigen, und zwar stellen sie offenbar die allgemeinsten Lösungen des Systems (3) dar.

Das vollst. Syst. (4) ist die Vessiotsche Resolvente unseres Integrationsproblems. Durch Auflösung nach den $\partial f : \partial x_i$ erhält es die Gestalt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k^{1 \ldots r} \chi_{ik}(x_1, \ldots, x_{q+r}) X_k f \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

und kann in bekannter Weise (s. Bd. III d. Ausg., S. *628* f.) auf eine lin. part. Diffgl. 1. O. von der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_k^{1 \ldots r} \chi_k(t) \cdot X_k f$$

in den $n+1$ Veränderl. $t, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ zurückgeführt werden, also auf ein Integrationsproblem von der Art, wie sie Lie auf S. 195 ff. betrachtet.

Aus (5) erhalten wir n unabh. Lösungen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ des vollst. Syst. (1), in denen n wesentliche willkürliche Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ vorkommen. Dieser Umstand ermöglicht es, alle Lösungen von (1) zu finden.

In der Tat, wir setzen:

$$X_k^{(i)} f = \sum_\nu^{1 \ldots n} \eta_{k\nu}(\mathfrak{x}_1^{(i)}, \ldots, \mathfrak{x}_n^{(i)}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_\nu^{(i)}} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

und bilden das $(q+r)$-gl. vollst. Syst.:

$$A_\mu f = 0, \; B_k f + \sum_i^{1 \ldots r} X_k^{(i)} f = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, q;\; k = 1, \ldots, r). \tag{6}$$

Dieses besitzt nr unabh. Lösungen, die i. B. auf die nr Größen $\mathfrak{x}_\nu^{(i)}$ von einander unabh. sind und die, gleich willk. Konstanten gesetzt, nr Lösungen $\mathfrak{x}_\nu^{(i)}$ des Systems (1) liefern. Daß unter diesen nr Lösungen r von einander unabhängige vorhanden sind, folgt daraus, daß die r Gl.:

$$\sum_i^{1 \ldots r} X_k^{(i)} f = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

von einander unabhängig sind (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 66). Das vollst. Syst. (6) hat nämlich infolgedessen gerade $rn - r$ und nicht mehr von einander unabh. und von $x_1, \ldots, x_{q+r}$ freie Lösungen; darin aber liegt, daß die nr Lösungen $\mathfrak{x}_\nu^{(i)}$ von (1), die wir finden, durch r unter ihnen, die notwendig von einander unabhängig sind, ausgedrückt werden können.

Durch die Integration der Resolvente (4) wird also das Problem der Integration des vollst. Systems (1) erledigt. Erinnern wir uns der Voraussetzungen, die wir auf S. *844* über die Untergruppe $X_1 f, \ldots, X_{r-n} f$ gemacht haben, so erkennen wir, daß die Resolvente (4) genau dasselbe leistet wie die Liesche Resolvente (2), die noch nicht auf eine Normalform gebracht ist. Nach S. 157 f., Nr. 7 kann man ja aus den Lösungen von (2) alle Lösungen von (1) durch Differentiation ableiten.

Wir haben im Vorangehenden ohne weiteres vorausgesetzt, daß man für jede Untergruppe $X_1 f, \ldots, X_{r-n} f$ der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ eine transitive, dem der Untergruppe entsprechenden Typus angehörige Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ aufstellen kann. Das ist in der Tat immer möglich, und zwar braucht man dazu nur die Zusammensetzung c_{iks} der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ zu kennen. Aus den Konstanten c_{iks} kann man nämlich durch Auflösung einer algebraischen Gl. die inf. Trff. zweier reziproker einfach transitiver Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} herleiten (s. Abh. X, S. 288—299) und kann dann, nach einer Bemerkung von F. Schur, durch ausführbare Operationen für jeden Typus r-gliedr. transitiver Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} einen Repräsentanten aufstellen, d. h. die inf. Trff. einer dem Typus angehörigen Gruppe angeben (vgl. die Anm. zu S. 299).

Um die Vessiotsche Resolvente aufstellen zu können, braucht man also nicht erst nach Anleitung von S. 150 f. das auf S. *843*, Z. 21—25 formulierte Integrationsproblem so umzugestalten, daß $B_1 f, \ldots, B_r f$ eine Gruppe erzeugen. Vor allen Dingen aber ist es nicht erforderlich, daß man die endlichen Trff. einer r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} kennt. Das auf S. 151, Z. 7 bis Z. 1 v. u. Gesagte kommt also hier nicht in Betracht. Insbesondere werden die Entwickelungen des § 11, S. 219—222 auf dem von Vessiot eingeschlagenen Wege entbehrlich.

S. 211, Z. 8—10. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 394f.

S. 212, Z. 1—4. Eine ausführbare Operation ist es in der Tat, weil die Gruppe: $B'_1 f, \ldots, B'_n f$ einfach ist und weil man infolgedessen jede Gl.: $\Sigma e_k B'_k f = 0$ durch ausführbare Operationen integrieren kann (s. Abh. VII (1889), S. 252).

S. 212, Z. 17—19. Ist nämlich: $A'' f = 0$ integriert, so ist offenbar das vollständige System: $A' f = 0$, $B'_{q+i} f = 0$ integriert. Da nun die Gruppe: $B'_1 f, \ldots, B'_n f$ einfach ist, so tritt das auf S. 158, Z. 16—25 Gesagte in Kraft.

S. 212, Z. 8—5 v. u. Vgl. S. *842*, Anm. Die „andere Gelegenheit" hat sich allerdings nicht gefunden.

S. 212, Z. 4—1 v. u. Gemeint ist die Gl. $A f = 0$, S. 210, Z. 7.

S. 212, Z. 11—9 v. u., 213, Z. 1f. Nach S. 147, F.

S. 213, Z. 10, 9 v. u. Nach S. 175, Theorem I muß ja werden:

$$Z_2(x, z_1) = z \,.\, Z_1(x, z_1), \quad Z_3(x, z_1) = z^2 \,.\, Z_1(x, z_1).$$

Diese Gl. aber sind sicher verträglich, denn aus den Relationen auf Z. 18 folgt, wie man sich leicht überzeugt: $Z_1 Z_3 - Z_2^2 = 0$.

S. 214, Z. 10. X_0 ist hier eine ganz beliebige Funktion von x.

S. 214, Z. 8, 7 v. u. Dort hat Lie zum ersten Male ein solches Integrationsproblem auf eine Riccatische Gl. zurückgeführt. Vgl. auch Bd. III, S. *751f.* Bd. V, S. *683—685*.

S. 215, Z. 11 v. u. Aus Abh. I (1880), S. 72—82, aber auch aus der Aufzählung aller endlichen kont. Gr. von Punkttrf. der Ebene (S. 88f.) geht hervor, daß die Gruppe der $\mathsf{B}_k f$ in keiner größeren endl. kont. Gr. von P. T. der Ebene x, y steckt. Demnach muß Ef, wenn man x als konstant betrachtet, in eine inf. Trf.: $\Sigma c_k \mathsf{B}_k f$ übergehen.

S. 215, Z. 3—1 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 578f.

S. 216, Z. 2 v. u. — 217, Z. 7. Vgl. Bd. III d. Ausg. Abh. XXXVIII (1882), S. 537—539 und S. *755*, wo die Arbeiten von Bonnet u. Serret aufgezählt sind. Bei der von diesen beiden Mathematikern behandelten Aufgabe ist die Gruppe: $B_1 f, \ldots, B_{10} f$ die Gruppe der konformen Punkttrff des R_3, die mit der proj. Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Linienkomplexes durch Lies berühmte B. T. ähnlich ist. Das simultane System von vier linearen homogen. Diffgl., auf das ein allgemeines Integrationsproblem der hier betrachteten Art im Falle $n = 10$ zurückgeführt werden kann, ist von K. Faber in seiner Dissertation (s. S. *842*) aufgestellt worden.

S. 217, Z. 8—12. Das beruht auf den Entwickelungen S. 199 in Verbindung mit S. 200—202, Nr. 24. Die Gruppe des noch zu erledigenden Integrationsproblems ist die siebengliedrige Untergr. G_7 der proj Gr. eines linearen Komplexes, die einen Punkt in Ruhe läßt. Diese Gr. ist gleichzusammengesetzt mit der siebengliedrigen irreduzibeln Gr. von B. T. der Ebene. Ihre größte invariante Untergr. ist viergliedrig und integrabel (vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II, Kap. 24).

S. 217, Z. 7—1 v. u. Diese Vermutung hat sich als unrichtig herausgestellt. Vgl. die Anm. zu S. 208, Z. 1f.

S. 218, Z. 1—3. Schon im Falle $n = 10$, wo $n - q = 7$ ist, liefert die eine Art von siebengl. Untergr. (vgl. S. 207) eine Resolvente, die nicht die Form S. 217, Z. 1 v. u. erhalten kann. Die konforme Gruppe des R_7 kann ja durch Punkttrf. nicht in eine projektive Gruppe übergeführt werden.

S. 218, Z. 6—10. Vgl. S. *842*.

S. 218, Z. 2 v. u. Die Reduktion geschieht durch eine Quadratur, vgl. S. 151, Z. 14—8 v. u., S. 152, Z. 1f.

S. 219, Z. 10. Nämlich durch eine Quadratur.

S. 219—222. Die Entwickelungen dieses § 11 werden, wie schon auf S. *846* erwähnt, durch die von Vessiot angegebene Art der Resolventenbildung entbehrlich.

S. 220, Z. 11—9 v. u. Diese Gl. stellen die endlichen Trff. der reziproken einfach transitiven Gruppe dar, die zu der kanonischen Gruppe: $\mathsf{B}_k f$ gehört.

S. 221, Z. 13—11 v. u. Die Parameter, die sich nicht vermeiden lassen, sind die Größen, die auf S 187 mit $\alpha, \beta, \ldots$ bezeichnet sind. Übrigens treten Parameter dieser Art auch bei dem Vessiotschen Verfahren auf. Bei diesem kommt nämlich alles auf die Integration eines vollst. Systems hinaus, das nur durch Einführung gewisser Parameter auf eine einzige lineare part. Diffgl. zurückführbar ist.

S. 221, Z. 7 v. u. —222, Z. 12. Da der Satz 9, S. 164 nicht allgemein bewiesen ist (vgl. die Anm. dazu), so sind diese Überlegungen nicht stichhaltig. In Ordnung gebracht hat Lie das alles erst in den beiden Abh. von 1889 und 1890, die hier als Nr. VII und X abgedruckt sind.

S. 222f., § 12. Auf S. 283 der Leipz. Ber. von 1895 (hier Abh. XX, S. 558, Z. 10—4 v. u.) spricht sich Lie darüber aus, welche Bedeutung den Entwickelungen dieses § 12 zukommt.

S. 222, Z. 8 v. u. Diese „arbiträren" Funktionen werden nachher (S. 223, Z. 1—6) so bestimmt, daß die Ausdrücke für die ξ_k von der Wahl des Wertsystems: $x_1^0, \ldots, x_n^0$ unabhängig werden.

S. 222, Z. 6 v. u. —223, Z. 2 v. u. Das System der Definitionsgl. wird so beschaffen sein, daß es alle Ableitungen der ξ_i von einer bestimmten, etwa der s-ten O., durch die ξ_i und die Ableitungen niedrigerer O. auszudrücken gestattet, während das bei den Ableitungen $(s-1)$-ter O. noch nicht der Fall ist. Dann können wir unter den ξ_i und deren Ableitungen erster bis $(s-1)$-ter O. r Größen auswählen, die $z_1, \ldots, z_r$ heißen mögen und die folgende Eigenschaften haben: Erstens lassen sich alle ξ_i und ihre Ableitungen bis zur $(s-1)$-ten O. linear und homogen durch $z_1, \ldots, z_r$ ausdrücken:

$$(1) \qquad \xi_i = \sum_k^{1\ldots r} \beta_{ik} z_k, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} = \sum_k^{1\ldots r} \gamma_{i\nu k} z_k, \ldots,$$

wo die $\beta_{ik}, \gamma_{i\nu k}, \ldots$ bekannte Fkt. von $x_1, \ldots, x_n$ sind. Zweitens genügen die z_k selber einem unbeschränkt integrabeln Systeme von lin. hom. part. Diffgl. 1. O.:

$$(2) \qquad \frac{\partial z_k}{\partial x_\nu} = \sum_\tau^{1\ldots r} \alpha_{k\nu\tau} z_\tau \qquad (k = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, n).$$

Das System (2) zusammen mit (1) ersetzt dann die gegebenen Definitionsgl. vollständig.

Unter der Voraussetzung, daß $x_1^0, \ldots, x_n^0$ ein Wertsystem von allgemeiner Lage ist, denken wir uns nun r partikuläre Lösungssysteme: $z_{j1}, \ldots, z_{jr}$ $(j = 1, \ldots, r)$ von (2) durch die Anfangsbedingungen:

$$(3) \qquad [z_{jk}]_0 = \varepsilon_{jk} \qquad (j, k = 1, \ldots, r)$$

definiert, wo der Index 0 die Substitution: $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ andeutet. Dann ist:

$$(4) \qquad z_k = \sum_j^{1\ldots r} \lambda_j \,.\, z_{jk} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

mit den r willkürlichen Konstanten: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ das allgemeinste Lösungssystem von (2), und:

$$(5)\qquad \xi_i = \sum_j^{1\ldots r} \lambda_j \sum_k^{1\ldots r} \beta_{ik} z_{jk} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ist die allgemeine inf. Trf. der gesuchten Gruppe.

Das Lösungssystem (4) der Diffgl. (2), das durch die Anfangsbed.: $z_k = \lambda_k$ für: $x_i = x_i^0$ geliefert wird, bleibt offenbar ungeändert, wenn man jedem z_k für: $x_i = x_i^0 + dx_i^0$ den Anfangswert:

$$\lambda_k + \sum_\nu^{1\ldots n} \left\{ \sum_\tau^{1\ldots r} \alpha^0_{k\nu\tau} \lambda_\tau \right\} dx_\nu^0$$

erteilt. Demnach genügen die Ausdrücke z_k in (4), wenn sie als Funktionen von: $x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ betrachtet werden, den Diffgl.:

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_\nu^0} + \sum_\pi^{1\ldots r} \frac{\partial z_k}{\partial \lambda_\pi} \sum_\tau^{1\ldots r} \alpha^0_{\pi\nu\tau} \lambda_\tau = 0,$$

und die z_{jk}, als Fkt. von: $x_1^0, \ldots, x_n^0$ betrachtet, müssen die Diffgl.:

$$(6)\qquad \frac{\partial z_{jk}}{\partial x_\nu^0} + \sum_\tau^{1\ldots r} \alpha^0_{\tau\nu j} z_{\tau k} = 0 \qquad (j, k = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, n)$$

befriedigen.

Wünscht man nun die λ_k derart als Funktionen von: $x_1^0, \ldots, x_n^0$ zu wählen, daß die allgemeine inf. Trf. (5) der Gruppe in einer von: $x_1^0, \ldots, x_n^0$ unabhängigen Form erscheint, so braucht man nur dafür zu sorgen, daß die Ausdrücke z_k in (4) von: $x_1^0, \ldots, x_n^0$ frei werden. Man hat also die λ_k den Diffgl.:

$$(7)\qquad \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\nu^0} = \sum_\tau^{1\ldots r} \alpha^0_{k\nu\tau} \lambda_\tau \qquad (k = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, n)$$

zu unterwerfen. Diese Diffgl. sind es, die sich Lie auf S. 223, Z. 14 aufgestellt denkt. Da sie mit den Diffgl. (2) der Form nach vollständig übereinstimmen, so leuchtet auch das auf S. 223, Z. 8—5 v. u. Gesagte ohne weiteres ein.

Setzen wir:

$$\xi_{ki} = \sum_\tau^{1\ldots r} \beta_{i\tau} z_{k\tau} \qquad (k = 1, \ldots, r;\ i = 1, \ldots, n)$$

und:

$$A_k f = \sum_i^{1\ldots n} {}_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so sind: $A_1 f, \ldots, A_r f$ unabh. inf. Trff. unsrer Gruppe, und es ist dann offenbar $c_1 A_1 f + \cdots + c_r A_r f$ mit den r willkürlichen Konstanten $c_1, \ldots, c_r$ die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe.

Die inf. Trff. $A_k f$ stehen notwendig in Beziehungen von der Form:

$$(8)\qquad (A_k A_j) = \sum_s^{1\ldots r} c_{kjs} A_s f \qquad (k, j = 1, \ldots, r).$$

Dabei sind die Konstanten c_{iks} gewisse Fkt. von $x_1^0, \ldots, x_n^0$, die wir berechnen können, ohne das System (2) integriert zu haben.

In der Tat, wir finden:

$$(A_k A_j) = \sum_{\nu i}^{1\ldots n} \sum_\tau^{1\ldots r} \beta_{i\tau} \left(z_{k\tau} \frac{\partial \xi_{j\nu}}{\partial x_i} - z_{j\tau} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

oder, wegen (1):

$$(A_k A_j) = \sum_{\nu i}^{1\ldots n} \sum_{\tau\pi}^{1\ldots r} \beta_{i\tau} \gamma_{\nu i\pi} (z_{k\tau} z_{j\pi} - z_{j\tau} z_{k\pi}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

sodaß sich die Gl. (8) in die folgenden zerlegen:

$$(9)\qquad \frac{1}{2} \sum_{\tau\pi}^{1\ldots r} \sum_i^{1\ldots n} \begin{vmatrix} \beta_{i\tau} & \beta_{i\pi} \\ \gamma_{\nu i\tau} & \gamma_{\nu i\pi} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_{k\tau} & z_{k\pi} \\ z_{j\tau} & z_{j\pi} \end{vmatrix} = \sum_s^{1\ldots r} c_{kjs} \sum_\tau^{1\ldots r} \beta_{\nu\tau} z_{s\tau}$$

$$(k, j = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, n).$$

Diese Gl., in denen allerdings die Konstanten c_{kjs} noch unbekannt sind; bilden ein partikuläres System von Integralgl. des unbeschränkt integrabeln Systems:

$$(2')\qquad \frac{\partial z_{jk}}{\partial x_\nu} = \sum_\tau^{1\ldots r} \alpha_{k\nu\tau} z_{j\tau} \qquad (k, j = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, n),$$

das zusammen mit den Anfangsbed. (3) die z_{jk} definiert.

Differentieren wir (9) nach $x_1, \ldots, x_n$ und benutzen wir (2'), so erhalten wir neue partik. Integralgl. von (2'). Da nun die $A_k f$ unabh. inf. Trff. sind, so müssen die Gl. (9), genügend oft nach den x_i differentiiert, so viele von einander unabhängige lineare Gl. für die c_{kjs} liefern, daß wir nach den c_{kjs} auflösen können. Wir wissen andrerseits, daß die c_{kjs} von $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig sind. Bedenken wir daher noch, daß die Gl. (9) bei der Substitution: $x_i = x_i^0$, $z_{kj} = \varepsilon_{kj}$ identisch erfüllt sein müssen, und daß dasselbe auch von den durch Differentiation aus (9) entstehenden Gl. gilt, so erkennen wir, daß wir die c_{kjs} als Funktionen von $x_1^0, \ldots, x_n^0$ bestimmen können, indem wir eine genügende Anzahl unsrer partik. Integralgl. für: $x_i = x_i^0$, $z_{kj} = \varepsilon_{kj}$ bilden und dann nach den c_{kjs} auflösen.

Wir setzen die gefundenen Ausdrücke für die c_{kjs} in (9) ein und fügen zu (9) so viele unter den durch Differentiation nach $x_1, \ldots, x_n$ entstehenden Gl. hinzu, daß ein Glsyst. entsteht, das bei einmaliger Differentiation nach $x_1, \ldots, x_n$ und Benutzung von (2') keine neuen Gl. für die z_{kj} mehr liefert. Dieses Glsyst. hat augenscheinlich die Form:

$$(10)\qquad \sum_{kj\tau\pi}^{1\ldots r} \varrho_{\mu kj\tau\pi} \begin{vmatrix} z_{k\tau} & z_{k\pi} \\ z_{j\tau} & z_{j\pi} \end{vmatrix} = \sum_{s\tau}^{1\ldots r} \sigma_{\mu s\tau} z_{s\tau} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

wo die ϱ und σ bekannte Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind. Es gestattet die n inf. Trff.:

$$C_\nu f = \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \sum_{jk\tau}^{1\ldots r} \alpha_{k\nu\tau} z_{j\tau} \frac{\partial f}{\partial z_{jk}} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

in den $n + rr$ Veränd. x_ν, z_{jk} und ist überdies bei der Substitution: $x_i = x_i^0$, $z_{jk} = \varepsilon_{jk}$ identisch erfüllt.

Die Bestimmung der gesuchten r-gliedrigen Gruppe, von der die Definitionsgl. gegeben sind, ist nunmehr zurückgeführt auf die Integration des Systems (2') mit dem bekannten partikulären Systeme von Integralgl. (10). Dieses Problem aber kann nach der auf S. 195—202 entwickelten Theorie behandelt werden. Beachtet man, daß in den $C_\nu f$ die inf. Trff.:

$$\sum_j^{1\ldots r} z_{j\tau}\frac{\partial f}{\partial z_{jk}} \qquad (11) \qquad (\tau, k = 1, \ldots, r)$$

auftreten, die eine rr-gliedrige einfach transitive Gruppe in den rr Veränd. z_{jk} erzeugen, so erkennt man, daß es vor allen Dingen darauf ankommt, wie viele von einander unabh. inf. Trff. der Gruppe (11) das Glsyst. (10) gestattet. Die Zusammensetzung dieser Gruppe ist es, die, um mit Lie zu reden, das noch zu erledigende Integrationsproblem beherrscht. Doch muß man, um die Theorien von S. 195 ff. unmittelbar anwenden zu können, erst noch das System (2') in der in Bd. III d. Ausg., S. *628* f. angegebenen Weise auf ein simultanes System von lin. hom. gewöhnlichen Diffgl. 1. O. zurückführen.

Als Beispiel für unsre allgemeinen Entwickelungen betrachten wir die Definitionsgleichung:

$$\xi''' = 2\,\alpha(x)\,\xi' + \alpha'(x)\,\xi \qquad (12)$$

einer beliebigen dreigl. Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit (vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 7—10).

Wir ersetzen (12) durch das simultane System:

$$\frac{d\xi_i}{dx} = \xi_i', \quad \frac{d\xi_i'}{dx} = \xi_i'', \quad \frac{d\xi_i''}{dx} = 2\,\alpha\,\xi_i' + \alpha'\,\xi_i \qquad (13) \qquad (i = 0, 1, 2)$$

mit den Anfangsbed.:

$$[\xi_i^{(\nu)}]_{x = x_0} = \varepsilon_{i\nu} \qquad (14) \qquad (i, \nu = 0, 1, 2).$$

Dann liefert: $\xi = \lambda_0\,\xi_0 + \lambda_1\,\xi_1 + \lambda_2\,\xi_2$ die allg. inf. Trf. der Gruppe, und es sind:

$$\xi_i\xi_k' - \xi_k\xi_i' = \sum_s^{0\ldots 2} c_{iks}\,\xi_s \qquad (15) \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

bekannte Integralgl. des Systems (13). Differentiieren wir (15) und berücksichtigen (13), so bekommen wir die neuen Integralgl.:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\xi_i\xi_k'' - \xi_k\xi_i'' = \sum_s c_{iks}\,\xi_s', \\ &\xi_i'\xi_k'' - \xi_k'\xi_i'' + 2\,\alpha\,(\xi_i\xi_k' - \xi_k\xi_i') = \sum_s c_{iks}\,\xi_s'' \end{aligned} \right. \qquad (i, k = 0, 1, 2).$$

Setzen wir: $x = x_0$, so finden wir die Werte der c_{iks}, und zwar ergeben sich zwischen den inf. Trff.:

$$X_i f = \xi_i\,\frac{df}{dx} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

die Beziehungen:

$$(X_0\,X_1) = X_0 f + 2\,\alpha_0\,X_2 f, \quad (X_0\,X_2) = X_1 f, \quad (X_1\,X_2) = X_2 f. \qquad (17)$$

Wir haben somit die folgenden neun Integralgl. des Systems (13):

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\xi_0\xi_1' - \xi_1\xi_0' = \xi_0 + 2\,\alpha_0\,\xi_2, \quad \xi_0\xi_2' - \xi_2\xi_0' = \xi_1, \quad \xi_1\xi_2' - \xi_2\xi_1' = \xi_2, \\ &\xi_0\xi_1'' - \xi_1\xi_0'' = \xi_0' + 2\,\alpha_0\,\xi_2', \quad \xi_0\xi_2'' - \xi_2\xi_0'' = \xi_1', \quad \xi_1\xi_2'' - \xi_2\xi_1'' = \xi_2', \\ &\xi_0'\xi_1'' - \xi_1'\xi_0'' = \xi_0'' + 2\,\alpha_0\,\xi_2'' - 2\,\alpha\,(\xi_0 + 2\,\alpha_0\,\xi_2), \\ &\xi_0'\xi_2'' - \xi_2'\xi_0'' = \xi_1'' - 2\,\alpha\,\xi_1, \quad \xi_1'\xi_2'' - \xi_2'\xi_1'' = \xi_2'' - 2\,\alpha\,\xi_2. \end{aligned} \right.$$

Durch Differentiation ergeben sich daraus keine neuen mehr.

Es fragt sich jetzt, wie viele unabh. inf. Trff. der neungl. einfach trans. Gruppe:

$$\sum_i^{0,1,2} \xi_i^{(\mu)}\,\frac{\partial f}{\partial \xi_i^{(\nu)}} \qquad (19) \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2)$$

das System (18) invariant lassen.

Statt der Gruppe (19) betrachten wir lieber die zugehörige reziproke einf. trans. Gr.:

$$\xi_i\,\frac{\partial f}{\partial \xi_k} + \xi_i'\,\frac{\partial f}{\partial \xi_k'} + \xi_i''\,\frac{\partial f}{\partial \xi_k''} \qquad (20) \qquad (i, k = 0, 1, 2),$$

die offenbar aus der allgemeinen lin. hom. Gruppe:

$$\xi_i\,\frac{\partial f}{\partial \xi_k} \qquad (21) \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

durch Erweiterung entsteht. Gestattet nämlich das System (18) überhaupt eine inf. Trf. einer der beiden Gruppen (19), (20), so gestattet es notwendig gleich viele von einander unabh. inf. Trff. jeder von beiden Gruppen, und diese inf. Trff. erzeugen zwei gleichzusammengesetzte Untergruppen, die eine in der Gruppe (19), die andere in der reziproken Gruppe (s. Th. d. Trfsgr., Bd. I, S. 390).

Nun folgt aus (18) nur eine Gl. zwischen ξ_0, ξ_1, ξ_2 allein, nämlich:

$$2\,\xi_0\xi_2 - \xi_1^2 + 2\,\alpha_0\,\xi_2^2 = 0. \qquad (22)$$

Demnach müssen die gesuchten inf. Trff. der Gruppe (20) alle die Gl. (22) inv. lassen. Da aber die Gruppe (20) aus (21) durch Erweiterung entsteht, und da die Gruppe (21) außer der inf. Trf.:

$$\xi_0\,\frac{\partial f}{\partial \xi_0} + \xi_1\,\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \xi_2\,\frac{\partial f}{\partial \xi_2} \qquad (23)$$

nur die folgenden drei inf. Trff.:

$$(24) \quad \xi_1\,\frac{\partial f}{\partial \xi_0} + \xi_2\,\frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \quad \xi_1\,\frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \xi_0\,\frac{\partial f}{\partial \xi_1} - 2\,\alpha_0\,\xi_1\,\frac{\partial f}{\partial \xi_0}, \quad (\xi_0 + 2\,\alpha_0\,\xi_2)\,\frac{\partial f}{\partial \xi_0} - \xi_2\,\frac{\partial f}{\partial \xi_2}$$

enthält, die (22) invariant lassen, so können nur die aus (23) oder (24) durch Erweiterung entstehenden inf. Trff. in Betracht kommen. Man überzeugt sich sofort, daß (23) erweitert keine inf. Trf. liefert, die (18) invariant läßt, daß dagegen alle drei inf. Trff. (24) solche inf. Trff. liefern. Da nun die inf. Trff. (24) eine dreigl. einfache Gruppe erzeugen, so können wir schließen, daß auch die inf. Trff. der Gruppe (19), die das System (18) invariant lassen, eine dreigl. einfache Gruppe erzeugen. Daraus aber folgt, daß die Integration des simultanen Systems (13) mit dem bekannten partik. Systeme von Integralgl. (18) noch die Integration einer Riccatischen Gl. erfordert (S. 200—202, Nr. 24 und S. 211—214).

Auch in dem allgemeinen Falle, den wir vorher betrachtet haben, läßt sich zeigen, daß das System der Integralgl. (10) gewisse angebbare inf. Trff. der Gruppe (11) gestattet.

In der Tat, das Glsyst.:

$$(A_k\,A_j) = \sum_s^{1\ldots r} c_{kjs}\,A_s f \qquad (8) \qquad (k, j = 1, \ldots, r),$$

das die Zusammensetzung der gesuchten Gruppe darstellt, bleibt ungeändert, wenn man $A_1 f, \ldots, A_r f$ durch die unendlich benachbarte inf. Trff.:

$$A_1 f + (A_j A_1)\,\delta t, \;\ldots,\; A_r f + (A_j A_r)\,\delta t$$

ersetzt, unter j eine beliebige der Zahlen $1, \ldots, r$ verstanden, wenn man also auf $A_1, \ldots, A_r$ eine inf. Trf.:

$$E_j f = \sum_k^{1\ldots r} \left(\sum_s^{1\ldots r} c_{jks} A_s \right) \frac{\partial f}{\partial A_k} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

der zur adjungierten Gruppe dualistischen Gruppe ausführt (vgl. S. *773*). Erinnert man sich nun der Ausdrücke auf S. *848*:

$$A_k f = \sum_i^{1\ldots n} \left\{ \sum_\tau^{1\ldots r} \beta_{i\tau} z_{k\tau} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, .$$

so erkennt man, daß die r inf. Trff.:

$$U_j f - \sum_{\tau s k}^{1\ldots r} c_{jks} z_{s\tau} \frac{\partial f}{\partial z_{k\tau}} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

den $A_k f$ dieselben Zuwachse erteilen, wie die $E_j f$. Hieraus geht hervor, daß zunächst das Glsyst. (9) und infolgedessen auch das Glsyst. (10) die inf. Trff. $U_1 f, \ldots, U_r f$ gestattet.

Diese inf. Trff. stehen selbstverständlich in den Bezeichnungen:

$$(U_k U_j) = \sum_s^{1\ldots r} c_{kjs} U_s f \qquad (k, j = 1, \ldots, r)$$

und erzeugen daher eine Untergruppe der rr-gl. einfach trans. Gruppe:

$$25) \qquad \sum_\tau^{1\ldots r} z_{j\tau} \frac{\partial f}{\partial z_{k\tau}} \qquad (j, k = 1, \ldots, r),$$

die zu der Gruppe (11) reziprok ist. Es leuchtet daher ein, daß auch die Gr. (11) r inf. Trff. $V_1 f, \ldots, V_r f$ enthält, die das Glsyst. (10) invariant lassen und die in den Beziehungen $(V_k V_j) = \Sigma c_{kjs} V_s f$ stehen.

Enthält die r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} gerade h unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen, so gibt es unter den inf. Trff. $U_1 f, \ldots, U_r f$ und ebenso unter den inf. Trff. $V_1 f, \ldots, V_r f$ gerade $r - h$ von einander unabhängige.

Es bleibt freilich die Frage offen, ob die Gruppe $U_1 f, \ldots, U_r f$ die größte kontinuierliche Untergruppe der Gruppe (25) ist, die das System (10) invariant läßt. Nach neueren Untersuchungen von Cartan ist das wenigstens dann sicher der Fall, wenn die c_{iks} die Zusammensetzung einer einfachen oder einer halbeinfachen Gruppe bestimmen. Dann sind nämlich die inf. Trff. der zur adj. Gr. dualist. Gr. die einzigen lin. hom. inf. Trff. in $A_1, \ldots, A_r$, bei denen das Glsyst. (8) inv. bleibt.[1])

Hiermit ist gezeigt, daß in der Tat, wie S. 223, Z. 12—9 v. u., angegeben wird, die Theorien von § 8 (S. 195 ff.) Anwendung finden. Ich wage nicht zu behaupten, daß Lie sich die Dinge wirklich so gedacht hat, wie ich sie hier auseinandergesetzt habe. Jedenfalls ist nicht ganz klar, was er mit den „endlichen Relationen", S. 223, Z. 10, 9 v. u., meint. Er hat sich zweifellos zu knapp ausgedrückt, und es erscheint mir das Nächstliegende, anzunehmen, daß er an Relationen zwischen r partikulären Lösungssystemen der Diffgl. für $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gedacht hat. Solche Relationen aber bieten sich in den Gl. (9) ganz von selber dar.

1) E. Cartan, Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples. Bulletin des Sc. Math., II. Ser.. Bd. 49, Mai 1925, S. 136.

Die auf S. 223, Z. 4—2 v. u. aufgestellte Behauptung gründet sich darauf, daß die Bestimmung der Gruppe zurückgeführt ist auf ein Problem von der folgenden Art:

Es soll eine lin.-part. Diffgl. 1. O. $Af = 0$ von der auf S. 195 betrachteten Form integriert werden unter der Voraussetzung, daß ein Gleichungssystem in den Veränderlichen $u, x_1, \ldots, x_n$ bekannt ist, das die inf. Trf. Af gestattet.

In § 8 ist aber gezeigt, welcher Nutzen aus der Kenntnis des bei Af invarianten Glsyst. gezogen werden kann, und von welcher Beschaffenheit die noch erforderlichen Integrationen sind.

Zu Abhandlung IV, S. 224—229.

Die Abhandlung ist von Engel ausgearbeitet.

S. 224, Z. 6—8. In den Œuvres de G. H. Halphen ist dieser Brief nicht abgedruckt.

S. 225, Z. 15—20. Wörtlich heißt es da:

„Ich sage dabei, daß eine kontinuierliche oder diskontinuierliche Schar Transformationen eine Gruppe bilden, wenn die Kombination einiger dieser Transformationen jedesmal mit einer Transformation der gegebenen Schar äquivalent ist. Herr Jordan hat insbesondere alle Gruppen [von] *Bewegungen* bestimmt."

In der großen Abh.: Über Komplexe", Ann. Bd. V (1872), S. 254 (d. Ausg. Bd. II, Abh. I, § 26, Nr. 84 a) ist die Stelle unverändert wiederholt und nur am Schlusse das Zitat: Annali, ser. II, t. II, hinzugefügt. Zu diesem Zitate vgl. Bd. V d. Ausg., S. *616*, Z. 6—8.

S 228, Z. 7—4 v. u. Vgl. z. B. Bd. V d. Ausg., Abh. X (1883), S. 241, 243 f., ferner hier Abh. II (1884), S. 102 f. Alles das ist näher ausgeführt in der Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 13, 14.

S. 228, Z. 4—1 v. u. Man vgl. z. B. Lies Untersuchungen über die unendlichdeutige inf. Trf. der Flächen konst. Krümmung und der Kurven konst. Torsion, d. Ausg. Bd. III, Abh. XXVIII (1880), S. 403—415 und Abh. XXX (1880), S. 429 bis 436. Vollständig und systematisch findet man diese Dinge dargestellt Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 7: „Bestimmung aller Gleichungensysteme, welche gegebene infinitesimale Transformationen gestatten."

S. 229, Z. 2—6. Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 18, S. 310 ff., insbesondere werden die Invarianten solcher Gruppen auf S. 323—327 besprochen; ferner ebd. Bd. III (1893), S. 566—575.

Halphen hat auf die Auseinandersetzungen Lies nichts erwidert, offenbar, weil er nichts zu erwidern hatte.

Zu Abhandlung V, S. 230—236.

S. 230, Z. 9 v. o.—1 v. u. Den ersten kurzen Beweis für diese Sätze, den Lie veröffentlicht hat, findet man Bd. V d. Ausg., Abh. XXIII (1888), S. 554—557. Ausführlicher Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), Kap. 13, S. 233—249; Kap. 17, S. 294—298.

S. 231, Z. 1—9. Vgl. Bd. V, Abh. III (1876), S. 74; Bd. VI, Abh. III (1885), S. 162—164. Als er die letztere Abh. schrieb, glaubte Lie noch, auch den Fall, wo ausgezeichnete inf. Trff. auftreten, sehr einfach erledigen zu können. Bald nachher erkannte er jedoch, daß er sich getäuscht hatte. Die auf Z. 8 f. ausgesprochene Absicht hat er nicht ausgeführt.

S. 231, Z. 10—15. Ähnlich drückt sich Lie in Abh. VII (1889), S. 252 aus. Man hat nur so zu verfahren, wie Abh. III (1885), S. 208, Z. 6 v. u.—210, Z. 18. Das dort betrachtete Integrationsproblem wird nämlich auf dem von Lie angegebenen Wege in eine Reihe von Integrationsproblemen derselben Art zerlegt, und zwar ist bei jedem dieser Integrationsprobleme die zugehörige Gr. einfach. Jede einfache Gr. aber, die eine ausgezeichnete inf. Trf. enthält, ist eingliedrig.

S. 231, Nr. 3. Die Probleme A und C werden in der Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 22 behandelt, und in Kap. 28 wird ein Weg zur Behandlung von Problem B angegeben. Über die entsprechenden Probleme für Gruppen von B. T. vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), Kap. 20 u. 26.

S. 231, Z. 6, 5 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 17, S. 297—300.

S. 232, Nr. 4. Vgl. ebd. Bd. II, Kap. 20.

S. 232, Z. 4—8. Es ist das die dualistische zur adjungierten Gr., a. a. O. Kap. 19. Vgl. auch hier Abh. I (1880), S. 58, *773*.

S. 232 f., Nr. 5, a. a. O., Kap. 21.

S. 233, Nr. 6. Vgl. hier Abh. X (1890), S. 288 f.

S. 233, Nr. 7. Ausführlicher Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), Kap. 19, S. 365—368.

S. 233, Z. 10—5 v. u. Ebd. Bd. I, Kap. 24, S. 521.

S. 233, Z. 4, 3 v. u. — S. 234, Z. 8. Denselben Satz spricht Lie auch in Bd. V d. Ausg., Abh. XXIII (1888), S. 554 aus. Bewiesen ist er Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 382—388.

S. 234, Z. 9—12. Vgl. Bd. V d. Ausg., Abh. XXII (1886), S. 521—528. Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 24, vgl. insbesondere S. 520.

S. 234, Nr. 9. Pages Diss., s. Bd. V d. Ausg., S. *754*, Z. 21—19 v. u. Bei der Bestimmung der primitiven Gruppen des R_4 machte die größte Schwierigkeit der Fall, daß die Gruppe ein System von zwei lin. part. Diffgl. 1. O.: $Af = 0$, $Bf = 0$ invariant läßt, das keine Lösung besitzt. Engel bemerkte, daß zu diesem Systeme das folgende: $Af = 0$, $Bf = 0$, $(AB) = 0$ kovariant ist, das eine bei der Gruppe inv. Pfaffsche Gl. bestimmt. Zu dieser Pfaffschen Gl. gehört ein kovariantes simult. Syst., sodaß die betr. Gruppen alle imprimitiv sind (Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 761 f.).

S. 234 f., Nr. 10. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 205. Bd. V, Abh. IV (1878), S. 90—96. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 265—270; Bd. III, S. 678—682.

S. 234, Z. 4, 3 v. u. Dieser Begriff, ohne den Namen, tritt schon auf Bd. V d. Ausg., Abh. XIV (1883), S. 376 f.

S. 235, Z. 16—14 v. u., wenn also die Gr. nicht integrabel ist. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 703—712.

S. 235, Z. 9—7 v. u. Wie Bd. V d. Ausg. Abh. IV (1878), S. 93 f. bewiesen wird, kann man in einer r-gl. integrabeln Gr. $Y_1 f, \ldots, Y_r f$, für die also Beziehungen von der Form:

$$(Y_i Y_{i+k}) = \sum_s^{1 \ldots i+k-1} c_{i,\, i+k,\, s} Y_s f$$

gelten, immer r unabh. inf. Trff. $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ so auswählen, daß:

$$(Z_i Z_{i+k}) = \sum_s^{1 \ldots i} c'_{i,\, i+k,\, s} Z_s f$$

bestehen, daß also stets: $Z_1 f, \ldots, Z_i f$ eine invariante Untergr. der ganzen r-gl. Gr. erzeugen. Diese Auswahl von inf. Trff. $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ nennt Lie eine *kanonische Form der integrabeln Gruppe*. Die wirkliche Herstellung dieser kanonischen Form kann nach Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 597 ausgeführt werden.

S. 235, Z. 6—4 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 300—305.

S. 236, Z. 2—16. Zum Beweise vgl. man Bd. V d. Ausg. Abh. XXXIII (1888), S. 557; *754* f.

S. 236, Z. 3—1 v. u. Bei einer B. T.:

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

erhält man:

$$y_1'' = \frac{P_x + y' P_y + y'' P_{y'}}{X_x + y' X_y + y'' X_{y'}}$$

und für $m > 2$:

$$y_1^{(m)} = \frac{[PX]\, y^{(m)}}{(X_x + y' X_y + y'' X_{y'})^m} + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von $y^{(m)}$ frei sind und wo:

$$[PX] = P_{y'}(X_x + y' X_y) - X_{y'}(P_x + y' P_y).$$

Zu Abhandlung VI, S. 237—247.

S. 237, Z. 6—8. Vgl. d. Ausg. Bd. III, Abh. I (1872), S. 2. Math. Ann. Bd. VIII (1874), S. 239 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. I, § 6). D. Ausg. Bd. III, Abh. XVI (1875), S. 225 ff., Abh. XVIII (1876), S. 269 ff., Abh. XX (1877), S. 295 ff.

S. 237 f., Nr. 1. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), Kap. 14.

S. 239 f.; Nr. 3. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XX (1877), S. 309—312.

S. 243, Z. 9—14. Unterscheidet man die beiden Scharen von Krümmungslinien durch die Indices 1 und 2 an den Differentialen und bedenkt man, daß die Hauptkrümmungsrichtungen konjugiert und zu einander senkrecht sind, so hat man für die Krümmungsl. das folgende System von Diffgl.:

$$\Sigma p_i d_1 x_i = 0, \quad \Sigma p_i d_2 x_i = 0,$$

$$\Sigma d_1 x_i \cdot d_2 p_i = 0, \quad \Sigma d_2 x_i \cdot d_1 p_i = 0, \quad \Sigma d_1 x_i \cdot d_2 x_i = 0.$$

Soll dieses System bei einer inf. P. T. inv. bleiben, so muß das insbesondere für die Gl. $\Sigma d_1 x_i \cdot d_2 x_i = 0$ und also auch für die Gl. $\Sigma d x_i^2 = 0$ gelten.

S. 243, Z. 17—14 v. u. Berücksichtigt man in (4) bloß die Glieder zweiten Grades in den dx_i, so kommt:

$$-\Sigma(H_{x_1 x_1} dx_1 + H_{x_1 x_2} dx_2 + H_{x_1 x_3} dx_3)(p_2\, dx_3 - p_3\, dx_2) =$$
$$= \Sigma p_i\, dx_i \cdot \Sigma \alpha_k\, dx_k,$$

also:

$$H_{x_2 x_1} p_2 - H_{x_1 x_2} p_3 = \alpha_1 p_1,$$

$$(H_{x_1 x_1} - H_{x_2 x_2}) p_3 - H_{x_3 x_1} p_1 + H_{x_3 x_2} p_2 = \alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2,$$

und so weiter. Da H die p_k nur in der Verbindung $\sqrt{\Sigma p_k^2}$ enthält, so müssen die α_k sämtlich verschwinden, und man erhält die von Lie angegebenen Diffgl. für Ω.

Aus (4) folgt weiter durch Vergleichung der Koeff. von $dx_3\, dp_3$ und $dx_3\, dp_2$:

$$\beta_3 = \frac{\Omega_{x_2} p_1 - \Omega_{x_1} p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},$$

$$-\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} (\Omega_{x_1} p_2 - \Omega_{x_2} p_1) + \Omega_{x_1} \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\right) =$$
$$= -\lambda p_1 + \beta_2 p_3,$$

mithin:

$$\lambda = -\frac{\Sigma \Omega_{x_i} p_i}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Bed. (4) für die Form (9) der inf. Trf. wirklich erfüllt ist.

S. 244, Z. 1—4. Aus: $\Sigma p_k' dx_k' = \Sigma p_k dx_k$ erhält man nämlich:

$$p_i = \frac{\Sigma(x_k + b_k)^2 \cdot p_i' - 2(x_i + b_i)\,\Sigma(x_k + b_k) p_k'}{\Sigma(x_k + b_k)^2 \cdot \Sigma(x_k + b_k)^2},$$

also:

$$\sqrt{\Sigma p_k^2} = \frac{\sqrt{\Sigma p_k'^2}}{\Sigma(x_k + b_k)^2}.$$

S. 244, Z. 18—20. Über diese alten Methoden vgl. die erst nach Lies Tode 1899 von Sylow herausgegebenen „Mathematiske Meddelelser" (s. Bd. III, S. *588*), und zwar Nr. 4 vom 26. Sept. 1871 (d. Ausg. Bd. I, Abh. XV). Ferner die Gött. Nachr von 1871, S. 191—209 und 535—557 (d. Ausg. Bd. I, Abh. XIII und XVI) und Bd. III d. Ausg., Abh. I (1872), S. 2. Lie ist auf diese Dinge nicht wieder zurückgekommen.

S. 244f., Nr. 7. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. X (1883), S. 248—273.

S. 244, Z. 7—3 v. u. S. ebd. Abh. XIX (1884), S. 474 e.

S. 245f., Nr. 8. Vgl. ebd. Abh. XIV (1883), S. 363—370. Bd. VI, Abh. II, S. 130.

S. 246, Z. 1. Dann müßte ja $k = 0$ sein und die Gruppe wäre nicht bloß dreigliedrig, sondern achtgliedrig.

S. 246, Z. 4—7. A. a. O. Abh. XIX (1884), S. 475 h.

S. 246, Z. 13—6 v. u. Lie vervollständigt hier gewisse Ergebnisse seiner „Untersuchungen über geodätische Kurven", Math. Ann. Bd. XX (1882), S. 442—444 (d. Ausg. Bd. II, Abh. IV, Note 3).

Die Bestimmung der inf. Trff. der betreffenden dreigl. Gr. erfordert nach Bd. V d. Ausg., Abh. XIV (1883), S. 406 f. die Integration einer Riccatischen Gl. und eine Quadratur. Hat man die inf. Trff. der Gruppe bestimmt, so findet man (ebd. S. *652—659*) die geodätischen Kurven ohne Quadratur. Die Diffgl. der geod. Kurven ist nämlich für die kanonische Form der Gr. eine der ∞^2 inv. Diffgl. 2. O.:

$$y^3(x'y'' - y'x'') = A x'^3$$

(ebd. Abh. XIX. (1884), S. 474 e.) und zwar ist der Fall: $A = 0$ ausgeschlossen. Die S. 246, Z. 7, 6 v. u. erwähnte Schar von ∞^1 geodätischen Kurven ist natürlich in der kanon. Form die Schar: $x = \text{const.}$, die jede inv. Diffgl. 2. O. befriedigt.

S. 247, Nr. 10. Ausführlicher Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 369—385.

Zu Abhandlung VII, S. 248—259.

Der Inhalt dieser Abh. ist in umgearbeiteter Fassung in das Kap. 26 von Bd. III der Th. d. Trfsgr. (1893) aufgenommen.

S. 248, Z. 3—1 v. u. Vgl. hier Abh. II (1884), S. 102 f., Abh. III (1885), S. 168 f.

S. 249, Z. 6. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. XX* (1884), S. 501, Nr. 4. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 16 und 21.

S. 249, Z. 8 f. Hier Abh. I, S. 22. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 33 f., Theor. 3.

S. 249, Z. 12—19. Setzt man $X_k' f + A_k f = B_k f$, so wird:

$$B_k(x_i' - f_i(x, a)) = \xi_{ki}(x') - \sum_{\mu}^{1\ldots r} \alpha_{k\mu}(a) \frac{\partial f_i}{\partial a_\mu},$$

was vermöge $x_i' = f_i(x, a)$ verschwindet. Das aber bedeutet, daß das Gleichungssystem $x_i' = f_i(x, a)$ die inf. Trff. $B_k f$ gestattet (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 109—111). Da das aufgelöste Glsyst. $x_i = F_i(x', a)$ dieselbe Eigenschaft haben muß, so sind die $F_i(x', a)$ Lösungen der Gl. $B_k f = 0$ (vgl. auch a. a. O. S. 146 f.).

S. 250, Z. 1—4. Es wird ja:

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_{\mu}^{1\ldots r} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_\mu} \sum_{j}^{1\ldots r} \lambda_j \alpha_{j\mu}(a) = \sum_{j}^{1\ldots r} \lambda_j \xi_{ji}(x'),$$

und für $t = 0$ ist: $a_k = a_k^0$, also $x_i' = x_i$.

S. 250, Nr. 2. Vgl. Abh. III, S. 162—164. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 81, 270—275.

S. 251, Z. 4—1 v. u. Vgl. Abh. III, S. 163 f.; Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 275—277.

S. 252, Z. 7—9. Dazu kommt allerdings noch die Auflösung der Gleichungen: $\varrho_{ki}(a) = \psi_{ki}(\eta)$.

S. 252, Z. 10—14. Vgl. Abh. V, S. 231, Z. 10—15 und die Anm. dazu, S. *853*.

S. 252, Z. 19—22. Vgl. die Anm. zu S. 251, Z. 4—1 v. u.

S. 253, Z. 13—11 v. u. Es ist das die Gruppe von hom. B. T., die man erhält, wenn man die H_j als Symbole von inf. hom. B. T. auffaßt. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 265.

S. 253, Z. 1 v. u. Dies sind die Auflösungen der Gl. S. 249, Z. 9. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 33 f.

S. 254, Z. 4. Da die erweiterte Gr. von den r inf. B. T.:

$$\delta x_i = \frac{\partial H_j}{\partial p_i}\,\delta t, \quad \delta p_i = -\frac{\partial H_j}{\partial x_i}\,\delta t \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

erzeugt ist, so gelten mit den Gl. auf Z. 2 auch die auf Z. 4.

S. 255, Z. 5 v. u. — 256, Z. 15. Das Glsyst. (14) stellt in dem Raume $a_1, \ldots, a_r, t$ eine $(r - m + 1)$-fach ausged. Mann. dar, auf der man: $a_{m+1}, \ldots, a_r, t$ als Punktkoord. benutzen kann. Die paarweise vertauschbaren inf. Trff. Af, $A_{m+1}f$, $\ldots$, $A_r f$ lassen diese Mann. inv. und transformieren deren Punkte so, wie die verkürzten inf. Trff. $\bar{A}f$, $\bar{A}_{m+1}f$, $\ldots$, $\bar{A}_r f$ angeben. Diese letzteren sind ebenfalls paarweise vertauschbar und durch keine lin. hom. Relation verknüpft. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 232—234.

S. 256, Z. 7—1 v. u. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 198, Theor. III für $r = n - 1$ oder S. 204, Nr. 14. Die so naheliegende Bemerkung, daß man unter den Lösungen des vollständigen Systems eine ganz bestimmte durch die Gl. $B\varphi = 1$ ausscheiden kann, benutzt Lie hier zum ersten Male in einer gedruckten Arbeit. Vgl. jedoch S. *842* f.

S. 257, Z. 1—5. Das Glsyst. (15) gestattet nämlich die inf. Trf. Af; es ist nach $a_1, \ldots, a_r$ auflösbar, weil $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_r$ in bezug auf $a_{m+1}, \ldots, a_r$ von einander unabh. sind; endlich liefert es für $t = 0$ die Werte: $a_k = a_k^0$.

S. 258, Z. 3—8. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 218, 223—226.

S. 258, Z. 6—4 v. u. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 218—220. Vgl. auch Bd. III (1893), S. 296 f.

S. 259, Z. 3—7. Einen noch etwas allgemeineren Satz, der den hier ausgesprochenen nach sich zieht, findet man Bd. V d. Ausg. Abh. XXII (1886) S. 526, Satz 7. Vgl. auch Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 517 f.

S. 259, Z. 8—11. Die hier gemachte Voraussetzung kommt darauf hinaus, daß die ausgezeichneten inf. Trff. der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ die einzigen, mit $X_1 f, \ldots, X_r f$ vertauschbaren, inf. Trff. sind.

Enthält die Gruppe gerade l unabh. ausgez. inf. Trff., so ist sie unter der gemachten Voraussetzung sicher transitiv (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 376, Theor. 67), also ist $r \gtreqless n$. Es seien nun etwa $X_1 f, \ldots, X_n f$ durch keine lin. hom. Relation verknüpft, dagegen:

$$(1) \qquad X_{n+k} f = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \varphi_{k\nu}(x_1, \ldots, x_n) X_\nu f \qquad (k = 1, \ldots, r - n).$$

Gibt es dann unter den $\varphi_{k\nu}$ gerade m von einander unabhängige, so ist nach dem angeführten Theor. $n-m=l$, und die l ausgez. inf. Trff. sind durch keine lin. hom. Relation verknüpft. Wir können daher annehmen, daß $X_1 f, \ldots, X_l f$ die ausgez. inf. Trff. sind.

Ist jetzt $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_r)$ die unbekannte kanonische Form der Gruppe, so wird: $\Sigma e_k' X_k' f = \Sigma e_k X_k f$ und:

$$e_k' = \sum_{\mu}^{1\ldots r} \sigma_{k\mu}(\eta) e_\mu \qquad (k=1, \ldots, r),$$

was die kanonische Form der adjungierten Gruppe ist. Demnach ist:

$$e_k = \sum_{\mu}^{1\ldots r} \sigma_{k\mu}(-\eta) e_\mu' \qquad (k=1, \ldots, r)$$

und:

$$(2) \qquad X_k' f = \sum_{\mu}^{1\ldots r} \sigma_{\mu k}(-\eta) X_\mu f \qquad (k=1, \ldots, r),$$

wobei insbesondere die ersten l Gl. die Form:

$$(3) \qquad X_1' f = X_1 f, \ldots, X_l' f = X_l f$$

haben.

Denkt man sich in (2) für f nach und nach $x_1', \ldots, x_n'$ eingesetzt, so erhält man ein System von part. Diffgl., das $x_1', \ldots, x_n'$ als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ und den Parametern $\eta_1, \ldots, \eta_r$ bestimmt. Dieses System von part. Diffgl. besitzt jedenfalls ein Lösungssystem, nämlich dieses: $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, \eta_1, \ldots, \eta_r)$, das wir allerdings noch nicht kennen, von dem wir aber wissen, daß es eine Trf. zwischen den x_i und den x_i' darstellt. Ist nun $x_i' = F_i(x, \eta)$ ein beliebiges anderes Lösungssystem, und setzen wir $x_i'' = F_i(x, \eta)$, so wird:

$$X_k'' f = X_k' f \qquad (k=1, \ldots, r).$$

Diese Gl. aber definieren unter den gemachten Voraussetzungen die allgemeine endliche Trf. der Gr. $X_1 f, \ldots, X_l f$. Man erhält daher das allgemeinste Lösungssystem von (2), indem man auf das partikuläre Lösungssyst. $x_i' = f_i(x, \eta)$ die allgemeinste Trf.: $x_i'' = \chi_i(x_1', \ldots, x_n'; c_1, \ldots, c_l)$ der l-gliedrigen Gruppe: $X_1 f, \ldots, X_l f$ ausführt.

Da $X_1 f, \ldots, X_l f$ eine Untergruppe von $X_1 f, \ldots, X_r f$ ist, so erkennen wir, daß das Glsyst. (2) mit den willkürl. Parametern $\eta_1, \ldots, \eta_r$ die endlichen Trff. der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ definiert. Zugleich aber sehen wir (vgl. S. 259, Z. 4–1 v. u.), daß die Aufgabe, das System (2) zu integrieren, ein besonderer Fall des in Abh. III (1885), S. 186 f., Nr. 19 behandelten Problems ist.

Der Bequemlichkeit wegen setzen wir:

$$(4) \qquad \sum_{\mu}^{1\ldots r} \sigma_{\mu k}(-\eta) X_\mu f = \mathfrak{X}_k f \qquad (k=1, \ldots, r),$$

sodaß das System (2) die einfachere Gestalt:

$$(2') \qquad X_k' f = \mathfrak{X}_k f \qquad (k=1, \ldots, r)$$

annimmt. Die Integration dieses Systems kommt darauf hinaus, das allgemeinste System von n Gl. zwischen $x_1, \ldots, x_n$ und $x_1', \ldots, x_n'$ aufzustellen, das die r inf. Trff. $X_k' f + \mathfrak{X}_k f$ gestattet und das sowohl nach den x_i, als nach den x_i' auflösbar ist.

Zunächst können wir aus (2′) gewisse endliche Relationen zwischen den x_i und den x_i' ableiten, die unter allen Umständen bestehen müssen. Da nämlich $X_1 f, \ldots, X_n f$ durch keine lin. hom. Rel. verknüpft sind, während die $X_{n+k} f$ in der Form (1) dargestellt werden können, so sind sicher auch $\mathfrak{X}_1 f, \ldots, \mathfrak{X}_n f$ durch keine lin. hom. Rel. verknüpft, es wird aber:

$$(1') \qquad \mathfrak{X}_{n+k} f \equiv \sum_{\nu}^{1\ldots n} \psi_{k\nu}(x_1, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_r) \mathfrak{X}_\nu f \qquad (k=1, \ldots, r-n).$$

Demnach ziehen die Gl. (2′) die Gl.:

$$(5) \qquad \varphi_{k\nu}(x') = \psi_{k\nu}(x, \eta) \qquad (k=1, \ldots, r-n;\ \nu=1, \ldots, n)$$

nach sich. Da aber unter den $\varphi_{k\nu}(x')$ gerade $m=n-l$ von einander unabh. vorhanden sind, und da die Gl. (5) bei der Substitution $x_i' = f_i(x, \eta)$ sicher zu Identitäten werden, so kann das Glsyst. (5) durch $n-l$ Gl.:

$$(6) \qquad \varphi_\tau(x_1', \ldots, x_n') = \psi_\tau(x_1, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_r) \qquad (\tau=1, \ldots, n-l)$$

ersetzt werden, die nach $n-l$ von den x' und nach $n-l$ von den x auflösbar sind. Ist dabei:

$$\varphi_{k\nu}(x') \equiv \omega_{k\nu}(\varphi_1(x'), \ldots, \varphi_{n-m}(x')),$$

so ist auch:

$$\psi_{k\nu}(x, \eta) \equiv \omega_{k\nu}(\psi_1(x, \eta), \ldots, \psi_{n-m}(x, \eta)),$$

wo die $\omega_{k\nu}$ beide Male dieselben Fkt. ihrer Argumente sind.

Nun bestehen zwischen den $X_k f$ Beziehungen von der Form: $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s f$; zwischen den $\mathfrak{X}_k f$ bestehen daher, wie ihre Herleitung erkennen läßt, Relationen von genau derselben Form: $(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \Sigma c_{iks} \mathfrak{X}_s f$, mit denselben Konstanten c_{iks}. Erinnern wir uns ferner, daß, nach Abh. III, S. 170, Gl. (Ω) von der Form:

$$X_i' \varphi_{k\nu}' = \Omega_{ik\nu}(\varphi_{11}', \varphi_{12}', \ldots, c_{121}, \ldots)$$

bestehen, denen Relationen von genau derselben Form:

$$\mathfrak{X}_i \psi_{k\nu} = \Omega_{ik\nu}(\psi_{11}, \psi_{12}, \ldots, c_{121}, \ldots)$$

entsprechen, so erkennen wir, daß das Glsyst. (5) und also auch das äquiv. Glsyst. (6) die r inf. Trff.: $X_k' f + \mathfrak{X}_k f$ gestattet. Endlich folgt aus den Gl. (1) in Verbindung mit den Gl. $(X_\lambda X_k) = 0$ $(\lambda = 1, \ldots, l;\ k=1, \ldots, r)$, daß die $\varphi_{k\nu}(x')$ Lösungen der Gl.: $X_1' f = 0, \ldots, X_l' f = 0$ sind, und ebenso folgt aus (1′), daß die $\psi_{k\nu}(x, \eta)$ Lösungen der Gl. $X_\lambda f = \mathfrak{X}_\lambda f = 0$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ sind. Es ergibt sich daher noch, daß das Glsyst. (5) und ebenso (6) jede einzelne der inf. Trff.: $X_1' f, \ldots, X_l' f, \mathfrak{X}_1 f, \ldots, \mathfrak{X}_l f$ gestattet. Dabei ist zu beachten, daß diese $2l$ inf. Trff. mit jeder der inf. Trff.: $X_k' f + \mathfrak{X}_k f$ vertauschbar sind.

Unsere Aufgabe ist jetzt, zu dem Glsyst. (6) l solche Gl. hinzuzufügen, daß ein Glsyst. entsteht, das ebenfalls die r inf. Trff.: $X_k' f + \mathfrak{X}_k f$ gestattet und das sowohl nach den x_i', als nach den x_i auflösbar ist.

Nehmen wir an, daß die Gl. (6) nach: $x_{l+1}', \ldots, x_n'$ auflösbar sind:

$$(7) \qquad x_{l+\tau}' = \omega_\tau(x_1', \ldots, x_l'; x_1, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_r) \qquad (\tau = 1, \ldots, n-l),$$

und bilden wir aus den $X_k' f$ die verkürzten inf. Trff. $\overline{X}_k' f$, indem wir die Ableitungen von f nach $x_{l+1}', \ldots, x_n'$ weglassen und in den Koeffizienten der Ableit. nach $x_1', \ldots, x_l'$ die Substitution (7) machen. Dann handelt es sich darum, zu

(7) ein System von l Gl. in den Veränd.: $x_1', \ldots, x_l', x_1, \ldots, x_n$ hinzuzufügen, das die r inf. Trff.: $\overline{X}_k'f + \mathfrak{X}_k f$ gestattet. Dabei ist klar[1]), daß diese inf. Trff. durch die Relationen:

$$\overline{X}_{n+k}'f + \mathfrak{X}_{n+k}f \equiv \sum_\nu^{1\ldots n} \psi_{k\nu}(x, \eta)\,(X_\nu' f + \mathfrak{X}_\nu f) \qquad (k = 1, \ldots, r-n)$$

verknüpft sind, während zwischen: $\overline{X}_\nu'f + \mathfrak{X}_\nu f$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ keine solche Relation besteht. Überdies ist nach Th. d. Trfgr. Bd. I, S. 233f.:

$$(\overline{X}_i'f + \mathfrak{X}_i f,\ \overline{X}_k'f + \mathfrak{X}_k f) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks}(\overline{X}_s'f + \mathfrak{X}_s f),$$

und die r inf. Trff.: $\overline{X}_k'f + \mathfrak{X}_k f$ sind mit den $2l$ inf. Trff.: $\overline{X}_\lambda' f$, $\mathfrak{X}_\lambda f$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ vertauschbar.

Hierin liegt, daß die n Gleich.:

$$\overline{X}_\nu'f + \mathfrak{X}_\nu f = 0 \tag{8} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ein n-gliedriges vollst. Syst. bilden, dem alle r Gl.: $\overline{X}_k'f + \mathfrak{X}_k f = 0$ angehören, und daß dieses vollst. System die inf. Trff.: $\overline{X}_1'f, \ldots, \overline{X}_l'f$ gestattet und ebenso, die inf. Trff.: $\mathfrak{X}_1 f, \ldots, \mathfrak{X}_l f$ oder, was dasselbe ist, diese: $X_1 f, \ldots, X_l f$. Wir bemerken überdies, daß die $n - l$ Lös. $\varphi_\tau(x')$ des l-gl. vollst. Syst.: $X_1'f = 0, \ldots X_l'f = 0$ i. B. auf: $x_{l+1}', \ldots, x_n'$ von einander unabhängig sind, woraus folgt, daß dieses vollst. Syst. nach den Ableitungen $\partial f : \partial x_1', \ldots, \partial f : \partial x_l'$ auflösbar ist. Daraus aber können wir schließen, daß: $\overline{X}_1'f, \ldots, \overline{X}_l'f$ durch keine lineare hom. Rel. verknüpft sind, und daß auch zwischen den linken Seiten von (8) und den inf. Trff.: $\overline{X}_1'f, \ldots, X_l'f$ keine solche Relation bestehen kann.

Da: $X_1 f, \ldots, X_l f$ paarweise vertauschbar sind, so bilden die Gl.:

$$\begin{cases} \overline{X}_\nu'f + \mathfrak{X}_\nu f = 0 & (\nu = 1, \ldots, n) \\ X_1 f = 0, \ldots, X_{\lambda-1}f = 0, \quad X_{\lambda+1}f = 0, \ldots, X_l f = 0 \end{cases} \tag{9}$$

für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots, l$ ein $(n + l - 1)$-gl. vollst. System in den $n + l$ Veränd.: $x_1', \ldots, x_l', x_1, \ldots, x_n$, und dieses vollst. Syst. gestattet die inf. Trf. $X_\lambda f$. Wir finden demnach eine Lösung ϑ_λ dieses vollständ. Systems durch eine Quadratur aus den Gl.:

$$X_\nu'\vartheta_\lambda + \mathfrak{X}_\nu \vartheta_\lambda = 0,\ X_\mu \vartheta_\lambda = \varepsilon_{\mu\lambda} \tag{10} \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, \ldots, l).$$

Auf diese Weise finden wir offenbar l unabh. Lös. ϑ_λ des vollst, Syst. (8), und da (8) nach den Ableitungen von f nach $x_1, \ldots, x_n$ auflösbar ist, so sind: $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l$ in bezug $x_1', \ldots, x_l'$ von einander unabhängig.

Fügt man nunmehr die Gl.:

$$\vartheta_\lambda(x_1', \ldots, x_l';\ x_1, \ldots, x_n;\ \eta_1, \ldots, \eta_r) = c_\lambda \tag{11} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

mit den l willk. Parametern: $c_1, \ldots, c_l$ zu (7) oder zu (6) hinzu, so erhält man ein nach $x_1', \ldots, x_n'$ auflösbares System von n Gl., das die r inf. Trff.: $X_k'f + \mathfrak{X}_k f$ gestattet. Dieses Glsyst. kann keine Relation zwischen $x_1', \ldots, x_n'$ allein nach sich ziehen, da $X_1'f, \ldots, X_n'f$ durch keine lin. hom. Relation verknüpft sind. Es ist daher auch nach $x_1, \ldots, x_n$ auflösbar und bestimmt die allgemeinste Trf.,

1) Es folgt aus den Rel. (1) und (1′) und daraus, daß die Gl. (5) bei der Substitution (7) zu Identitäten werden.

vermöge deren die Gl. (2′) bestehen. Faßt man in diesem Glsyst. auch: $\eta_1, \ldots, \eta_r$ als willk. Parameter, so hat man die endlichen Trff. der Gruppe: $X_1 f, \ldots, X_r f$, die also durch l von einander unabhängige Quadraturen gefunden werden.

Die so bestimmten endl. Trff. der Gruppe: $X_1 f, \ldots, X_r f$ enthalten $r + l$ Parameter: $\eta_1, \ldots, \eta_r$ und $c_1, \ldots, c_l$; aber unter diesen Parametern sind nur r wesentlich. Da nämlich die zugehörige adjung. Gr.: $e_k' = \Sigma \sigma_{k\mu}(\eta) e_\mu$ bloß $(r - l)$-gl. ist, so gibt es unter den Fkt. $\sigma_{k\mu}(\eta)$ bloß gerade $r - l$ von einander unabhängige und die Parameter: $\eta_1, \ldots, \eta_r$ treten deshalb in den gefundenen Gl. bloß in $r - l$ Verbindungen auf.

Zu Abhandlung VIII, S. 260–266.

S. 260, Z. 6—13. Vgl. Bd. V d. Ausg., Abh. VI (1879), S. 207.

S. 260f., N. 1. Vgl. ebd. Abh. V (1878), S. 157f.

S. 261f., Nr. 2, 3. Vgl. auch Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), Kap. 23 und 24

S. 262—264, Nr. 4. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II, Kap. 25.

S. 265, Z. 6f. Ausgenommen ist selbstverständlich der Fall des gewöhnlichen Raumes. Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), Kap. 10.

S. 265, Z. 17 v. u. H. Poincaré, „Sur les nombres complexes“. C. R. Bd. 99, S. 740—742.

S. 265, Z. 2, 1 v. u Weil es keine einfache Gr. mit 4, 5, 6 oder 7 Parametern gibt. In der Tat, jede r-gl. Gruppe G_r enthält Untergruppen mit mindestens 3 Parametern (Th. d. Trfsg. Bd. I, S. 593). Ist nun $3 < r \leq 7$ und ist die Gr. einfach, so gibt es in einem Raume von $r - 3$ oder weniger Dimensionen stets eine gleichzusammengesetzte primitive Gr. von derselben Zusammensetzung (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 439, 521). Aber aus der Bestimmung der Gruppen auf der Geraden und der Ebene (hier Abh. I) und der primitiven Gruppen in R_3 und R_4 (Th. d. Trfsgr. Bd. III, Kap. 7 und S. 807f.) geht hervor, daß die Gr. nicht einfach sein kann.

Die auf S. 265, Z. 5—3 v. u. gestellte Frage hat Th. Molien in seiner Dorpater Habilitationsschrift dahin beantwortet, daß $n = m^2$ sein muß, und daß die G_{n-1} mit der allgemeinen projektiven Gr. des R_{m-1} gleichzusammengesetzt ist. Siehe: „Über Systeme höherer komplexer Zahlen“. Math. Ann. Bd. 41 (1892), S. 83 bis 156.

Zu Abhandlung IX, S. 267–287.

In meinem Verzeichnisse von Lies Veröffentlichungen (Bibliotheca Mathematica, III. Folge, Bd. I, Leipzig 1900) führe ich die vorliegende Abh. auf S. 194 unter Nr. 125 an und bemerke dazu: „Die Ausarbeitung ist von G. Scheffers, ausgenommen S. 476, Z. 8 v. u. bis 477, Z. 1 v. u.“, also ausgenommmen die jetzige Nr. 14, S. 286f.

Scheffers selbst kann sich allerdings jetzt nicht mehr darauf besinnen, ob er die Abhandlung ausgearbeitet hat. Aber ich war, jedenfalls damals, als ich das Verzeichnis zusammenstellte, überzeugt, daß er es getan hat, und ich glaube noch heute, mich zu erinnern, daß ich die von seiner Hand geschriebene Ausarbeitung gesehen habe.

Ein Teil der Abhandlung, im wesentlichen nur der Inhalt von § 3, ist in umgearbeiteter Fassung in Bd. III der Th. d. Trfsgr. aufgenommen, s. da Kap. 25, S. 591—596.

S. 268, Z. 1—12. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. III (1876), S. 56—58, *618;* Bd. VI, Abh. I (1880), S. 25f. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 61—65.

S. 269, Z. 17—24. Aus dem Verschwinden der Größen auf Z. 18 läßt sich keineswegs schließen, daß in den Gl. (2) immer alle Glieder verschwinden, die:

$e_{q+1}, \ldots, e_r$ enthalten. Dieser Schluß ist nicht einmal dann zulässig, wenn $X_1 f, \ldots, X_r f$ in Beziehungen von der Form: $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s f$ stehen, wenn man es also mit einer Gruppe zu tun hat.

So lautet die Schar der ∞^2 Trff., die von den ∞^1 inf. Trff.: $e_1 p + e_2 x q$ erzeugt werden und die keine Gruppe bilden:

$$x' = x + e_1, \quad y' = y + e_2 x + \tfrac{1}{2} e_1 e_2.$$

Hier bleibt der Koordinatenfang bei der inf. Trf. xq in Ruhe, nimmt aber bei den ∞^2 Trff. der Schar nicht bloß ∞^1 Lagen an, sondern ∞^2, nämlich diese:

$$x' = e_1, \quad y' = \tfrac{1}{2} e_1 e_2.$$

Andrerseits erzeugen die inf. Trff.: $(\lambda_1 + \lambda_2 x)p$ eine zweigl. Gr.:

$$x' = \lambda_1 \frac{e^{\lambda_2} - 1}{\lambda_2} + x e^{\lambda_2}.$$

Hier gestattet der Punkt: $x = 0$ die inf. Trf. xp und nimmt bei der Gruppe ∞^1 Lagen an, aber der Ausdruck:

$$x' = \lambda_1 \frac{e^{\lambda_2} - 1}{\lambda_2},$$

der die neuen Lagen bestimmt, wird nicht von λ_2 frei.

Erzeugen: $X_1 f, \ldots, X_r f$ eine r-gl. Gruppe, so nimmt ein Punkt x_i, der gerade $r - q$ unabh. inf. Trff. der Gruppe gestattet, allerdings bloß ∞^q verschiedene Lagen an. Aber das beruht nicht darauf, daß die Gl. (2) immer von $e_{q+1}, \ldots, e_r$ frei werden, sondern darauf, daß: $e_1, \ldots, e_r$ in diesen Gl. nur in q Verbindungen auftreten.

Die Anmerkung 2 auf S. 275 zeigt, daß Lie den hier begangenen Fehler während des Druckes bemerkt hat.

S. 270, Z. 14—24. Man ersetze auf Z. 19: $\varrho = q$ durch: $\varrho \geqq q$, sowie auf Z. 14 und 17 die Gl. (2) durch:

$$x_i' = x_i + \sum_k^{1 \ldots r} e_k X_k x_i + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2'}$$

und die Substitution durch diese. $e_1 = 0, \ldots, e_r = 0$. Endlich müssen Z. 21—24 etwa so umgestaltet werden: „Gleichungen (2′) ergeben sich alsdann gerade $n - q$ Relationen zwischen: $x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n', e_{q+1}, \ldots, e_r$, die zeigen, daß bei gegebenen: $x_1, \ldots, x_n$ die transformierten Punkte: $x_1', \ldots, x_n'$ eine mindestens q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit erfüllen.

S. 270, Z. 11—9 v. u. Daß q Fortschreitungsrichtungen durch einen Punkt von einander unabhängig sind, bedeutet, daß sie keiner durch den Punkt gehenden ebenen Mannigfaltigkeit angehören, deren Dimensionenzahl kleiner ist als q.

S. 270, Satz 1 und Satz 2 sind nur richtig, wenn man das „gerade" ersetzt durch „mindestens". Hat man die zu S. 270, Z. 14—24 angegebenen Änderungen angebracht, so sind die berichtigten Sätze 1 und 2 durch das Vorhergehende auch wirklich bewiesen.

S. 271 f., Nr. 3, 4. Nur in dem Falle: $q = r$, der nachher in Nr. 5 behandelt wird, führen diese Betrachtungen zu einem wirklichen Ergebnisse.

Sind unter den Gl.: $X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0$ gerade q von einander unabhängige vorhanden, und stellen die Gl. (2′) eine Gr. dar, die dann sicher r-gliedrig ist, so wird jedem Punkte P eine durch ihn gehende Mannigfaltigkeit M zugeordnet, die aus dem Inbegriffe aller Lagen besteht, die der Punkt bei den Trff. der Gruppe annimmt. Diese Mann. M bleibt bei allen Trff. der Gr. invariant und ist für jeden Punkt P von allgemeiner Lage mindestens q-fach ausgedehnt, und

zwar ist ihre Dimensionenzahl für alle Punkte von allgemeiner Lage dieselbe, also etwa $= q + m \leqq n$ und $\leqq r$. Hierin liegt, daß der ganze R_n in ∞^{n-q-m} invariante $(q + m)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten zerlegt wird, die durch Gl. von der Form:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k \qquad (k = 1, \ldots, n - m - q)$$

dargestellt werden. Wie auf S. 272 ergibt sich weiter, daß die φ_k Lösungen der Gl.: $X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0$ sind.

Man findet also, daß die Gr. die Lösungen des vollständigen Systems invariant läßt, das durch die Gl.: $X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0$ bestimmt wird und dessen Gliederzahl $\geqq q$, aber $\leqq r$ und $\leqq n$ ist. Aber dieses Ergebnis ist im Grunde nichtssagend außer im Falle $q = r$; dann folgt nämlich aus der Gruppeneigenschaft der Gl. (2′), daß die Gl.: $X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0$ ein r-gl. vollständiges System bilden.

S. 273, Z. 9f. Sie sind ja auch nur für diesen Fall bewiesen.

S. 274, Z. 12f. Das „also" verrät, daß sich Lie stillschweigend auf den Satz stützt, auf den er sich nachher, S. 275, Z. 3, beruft, auf den Satz nämlich, daß die Gl.: $U_1 f = 0, \ldots, U_r f = 0$ immer dann von einander unabhängig sind, wenn $X_1 f, \ldots, X_r f$ unabh. inf. Trff. sind. (Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 63—65.)

S. 275, Z. 8—3 v. u. Die Sätze 3 und 4 sind in der Tat auch für $q < r$ gültig, aber sie sind eben hier für diesen Fall nicht bewiesen und auch durch so einfache Betrachtungen wie auf S. 269—273 gar nicht beweisbar. Lie hätte besser getan, das einfach einzugestehen, statt die bedenkliche Äußerung hinzuzufügen, daß das Beiwort „streng" bei einem Beweise steigerungsfähig sei.

S. 277, Z. 1—6. Vgl. Th. der Trfsgr. Bd. I, S. 95—97.

S. 277, Z. 8 —278, Z. 8. Hier hätten: $e_1, \ldots, e_r$ eigentlich überall durch: $e_1 t, \ldots, e_r t$ ersetzt werden sollen.

S. 278, Z. 16f. Dazu müssen wir nur die y_k'' zweckmäßig wählen. Berechnen wir die e_k aus den Gl.: $y_k'' = f_k(x'', e)$, was ergeben möge: $e_k = \varphi_k(x'', y'')$, so werden die Gl. S. 278, Z. 15 durch die Substitution:

$$z_k = f_k(y, e) = f_k(y, \varphi(x'', y''))$$

identisch befriedigt bei beliebigen y. Diese Gl. stellen also die Trf.: $z_k = f_k(y, e)$ dar, wenn man den e_k die angegebenen Werte $\varphi_k(x'', y'')$ erteilt. Setzt man nun:

$$f_k(y', e) = f_k(y', \varphi(x'', y'')) = \bar{y}_k,$$

so werden die Gl.:

$$\Omega_j(y_1, \ldots, y_r, y_1', \ldots, y_r') = \Omega_j(z_1, \ldots, z_r, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$$

ebenfalls durch die Substitution: $z_k = f_k(y, e)$ identisch befriedigt, stellen also dieselbe Trf. dar, die auch durch die Gl. S. 278, Z. 15 dargestellt wird. Die beiden Trff., die sich Lie nach einander ausgeführt denkt, ergeben daher die Trf.:

$$\Omega_j(x_1, \ldots, x_r, x_1', \ldots, x_r') = \Omega_j(z_1, \ldots, z_r, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r).$$

S. 279, Z. 19f. Daß man die Lösungen Ω_k in der hier angegebenen Weise wählen kann, müßte erst bewiesen werden. Zum Glück wird es aber im folgenden nicht benutzt.

S. 279, Z. 12 v. u. Wegen des folgenden beachte man, daß: $J_1(x), \ldots, J_{n-r}(x), \Omega_1, \ldots, \Omega_r$ unabhängig sind i. B. auf: $x_1, \ldots, x_n$, während: $J_1(x'), \ldots, J_{n-r}(x'), \Omega_1, \ldots, \Omega_r$ es sind i. B. auf: $x_1', \ldots, x_n'$.

S. 280, Z. 7, 6 v. u. Die Gl.:

$$y_i'' = f_i(x_1'', \ldots, x_n', e_1, \ldots, e_r) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{A}$$

ziehen die $n - r$ von einander unabh., von $e_1, \ldots, e_r$ freien Gl.:

$$J_k(x_1'', \ldots, x_n'') = J_k(y_1'', \ldots, y_n'') \qquad (k = 1, \ldots, n - r) \tag{B}$$

nach sich. Andrerseits gibt es unter ihnen r solche, die nach: $e_1, \ldots, e_r$ auflösbar sind, und diese mögen ergeben:

$$\text{(C)} \qquad e_k = \varphi_k(x_1'', \ldots, x_n'', y_1'', \ldots, y_n'') \qquad (k=1, \ldots, r).$$

Das System (A) kann daher durch die vereinigten Gl. (B) und (C) ersetzt werden.

Sind nun: $x_1'', \ldots, x_n'', y_1'', \ldots, y_n''$ feste Größen, die den Gl. (B) genügen, so stellen die Gl.:

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \Omega_j(y_1, \ldots, y_n, x_1'', \ldots, x_n'') = \Omega_j(z_1, \ldots, z_n, y_1'', \ldots, y_n'') \\ J_k(y_1, \ldots, y_n) = J_k(z_1, \ldots, z_n) \\ (j=1, \ldots, r;\ k=1, \ldots, n-r) \end{cases}$$

eine Trf. dar. Berechnen wir die e_k aus den Gl. (C), so befriedigen: $y_1'', \ldots, y_n''$ die Gl. (A). Demnach werden die Gl. (D) durch die Substitution: $z_i = f_i(y, e)$ für beliebige y identisch erfüllt, d. h. sie stellen unter der gemachten Voraussetzung die Trf.: $z_i = f_i(y, e)$ dar, wo die e_k aus (C) zu entnehmen sind.

Setzen wir jetzt, unter den e_k die durch (C) definierten Größen verstanden:

$$\overline{y} = f_i(y_1', \ldots, y_n', e_1, \ldots, e_r) = f_i(y', \varphi(x'', y'')),$$

so ist: $J_k(\overline{y}) = J_k(y')$ und die Gl.:

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \Omega_j(y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = \Omega_j(z_1, \ldots, z_n, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \\ J_k(y_1, \ldots, y_n) = J_k(z_1, \ldots, z_n) \\ (j=1, \ldots, r;\ k=1, \ldots, n-r) \end{cases}$$

werden durch die Substitution: $z_i = f_i(y, e)$ identisch befriedigt, d. h. sie stellen dieselbe Trf. dar, wie die Gl. (D). Führen wir daher zuerst die Trf. (9) aus und dann die Trf. (D), oder, was dasselbe ist, die Trf. (E), so erhalten wir die Trf.:

$$\Omega_j(x_1, \ldots, x_n, x', \ldots, x_n') = \Omega_j(z_1, \ldots, z_n, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n),$$
$$J_k(x_1, \ldots, x_n) = J_k(z_1, \ldots, z_n),$$

und es ist: $J_k(x') = J_k(y') = J_k(\overline{y})$. Kurz die Schar der Trff. (9) bildet eine Gruppe.

S. 287, Z. 13—17. Killing bezeichnet merkwürdigerweise nicht bloß die Gl.:

$$((X_i X_k) X_j) + ((X_k X_j) X_i) + ((X_j X_i) X_k) = 0,$$

sondern auch die daraus vermöge: $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s f$ folgende Gl.:

$$\sum_s^{1 \ldots r} \{ c_{iks}(X_s X_j) + c_{kjs}(X_s X_i) + c_{jis}(X_s X_k) \} = 0$$

als „Jacobische Relationen". Siehe seine Abh.: „Die Zusammensetzung der stetigen endl. Trfsgr., II. Teil", Math. Ann. Bd. XXXIII (1888), S. 2.

S. 287, Z. 7—1 v. u. Damals waren die folgenden Arbeiten von F. Schur erschienen:

1. Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen. Math. Ann. Bd. XXXV (1889), S. 161—197.

2. Über die kanonische Form der Parametergruppe. Leipz. Ber. 1889, S. 229 bis 231.

3. Beweis für die Darstellbarkeit der inf. Trff. aller transitiven endlichen Gruppen durch Quotienten beständig konvergenter Potenzreihen. Ebd. 1890, S. 1—7.

Vgl. auch Abh. XIV (1892), S. 368—375 und die Anm. dazu.

Zu Abhandlung X, S. 288—299.

Die Abh. ist in umgearbeiteter Fassung in das Kap. 27 des III. Bd. (1893) der Th. d. Trfsgr. aufgenommen.

S. 288, Z. 9—12. Vgl. hier Abh. I (1880), S. 93.

S. 288, Z. 6—4 v. u. Vgl. hier Abh. I, S. 52. In der Gruppe: $X_1 q, \ldots, X_r q$ sind: $X_1, \ldots, X_r$ willkürliche Funktionen, die nur keine lin. hom. Relation: $\Sigma c_k X_k = 0$ mit konstanten Koeffizienten erfüllen dürfen. Von diesen willk. Fkt. kann man zwei beseitigen, indem man $y : X_1$ als neues y und dann $X_2 : X_1$ als neues x einführt. Ist daher $r > 2$, so hat man $r - 2$ wirklich wesentliche willk. Fkt. So groß ist also die Mannigfaltigkeit der verschiedenen Typen von Gruppen dieser Art.

S. 288, Z. 4—1 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 457 f., Bd. III, Kap. 3 u. 8.

S. 289, Z. 2 v. u. —290, Z. 4. Vgl. hier Abh. V (1888), S. 230 und Bd. V d. Ausg. Abh. XXIII (1888), S. 554—557.

S. 290, Z. 4—7. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 297—300.

S. 290, Z. 18—22. Ebd. Kap. 21 und Bd. III (1893), S. 638 f.

S. 291, Z. 6—4 v. u. Die folgenden Nrn. 6—14 sind eine Umarbeitung dieser Entwickelungen; sie sind ihrerseits noch einmal umgearbeitet Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 643—654.

S. 291, Z. 3 v. u. —292, Z. 3. Ebd. Bd. I, S. 255. Es ist daher: $t \Sigma a_k X_k f$, mit dem willkürlichen Parameter t, das Symbol der eingl. Gr., die von der inf. Trf.: $\Sigma a_k X_k f$ erzeugt wird. Das wird nachher benutzt.

S. 292, Z. 10 ff. Es ist merkwürdig, daß Lie auch hier, wie schon 1878 in Bd. III seines Archivs, die inf. Trf.: $\Sigma a_k X_k f$ auf die Form $\partial f : \partial y_n$ bringt, statt sich auf die Diffgl. zu stützen, denen die endliche Trf.: $\Sigma a_k X_k f$ als Fkt. der a_k genügt.

Ist nämlich:

$$x_i' = x_i + t \Sigma a_k \xi_{ki} + \cdots \qquad (i=1, \ldots, n)$$

eine r-gl. Gruppe, so ist (vgl. Abh. VII, S. 253):

$$\frac{\partial x_i'}{\partial (a_k t)} = \sum_j^{1 \ldots r} \psi_{jk}(a_1 t, \ldots, a_r t)\, \xi_{ji}(x'),$$

also:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_j^{1 \ldots r} \Psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r, t)\, \xi_{ji}(x'),$$

wenn gesetzt wird: $t \psi_{jk} = \Psi_{jk}$. Andrerseits ist:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial t} = \sum_j^{1 \ldots r} a_j \xi_{ji}',$$

woraus sich leicht Diffgl. zur Bestimmung der Ψ_{jk} ergeben (Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 793 f.).

Dieses Verfahren ist allerdings rein rechnerisch und bringt die begrifflichen Überlegungen, die auf S. 292 f. zum Ziel führen, nicht zur Geltung. Man kann aber auch diese begrifflichen Überlegungen durchführen, ohne die Form $\partial f : \partial y_n$ zu Hilfe zu nehmen.

Es seien:

$$\text{(1)} \qquad x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1 t, \ldots, a_r t) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

die Lös. des simult. Systems:

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_k^{1\ldots r} a_k \xi_{ki}' \tag{2} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

mit den Anfangsbedingungen: $(x_i')_{t=0} = x_i$.

Dann hat das simultane Syst.:

$$\frac{dx_i''}{dt} = \sum_k a_k \xi_{ki}'' + \sum_k \delta a_k \xi_{ki}'' \tag{3} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

mit den Anfangsbed.: $(x_i'')_{t=0} = x_i$ die Lösungen:

$$x_i'' = f_i(x_1,\ldots,x_n;\ (a_1+\delta a_1)t,\ldots,(a_r+\delta a_r)t). \tag{4}$$

Diese lassen sich nun, wenn die Schar (1) eine r-gl. Gruppe bildet, auf zwei Arten darstellen.

Erstens kann die Trf. (4) dadurch erhalten werden, daß man zuerst die Trf. (1) und dann eine unendlich kleine Trf.:

$$x_i'' = x_i' + \sum_k^{1\ldots r} \delta\lambda_k \xi_{ki}' \tag{5}$$

ausführt. Zweitens dadurch, daß man zuerst eine unendlich kl. Trf.:

$$\bar{x}_i = x_i + \sum_k^{1\ldots r} \delta\mu_k \xi_{ki} \tag{6}$$

ausführt und dann die endliche:

$$x_i'' = f_i(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\ a_1 t,\ldots,a_r t). \tag{7}$$

Dabei müssen sowohl die $\delta\lambda_k$ als die $\delta\mu_k$ alle für: $t=0$ verschwinden.

Im ersten Falle findet man aus (5), (2) und (3):

$$\begin{aligned}\frac{dx_i''}{dt} &= \sum_k a_k \xi_{ki}' + \sum_k \frac{d}{dt}\delta\lambda_k \xi_{ki}' + \sum_k \delta\lambda_k \sum_\nu^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{ki}'}{\partial x_\nu'} \sum_j a_j \xi_{j\nu}' \\ &= \sum_k a_k \xi_{ki}' + \sum_k a_k \sum_\nu^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{ki}'}{\partial x_\nu'} \sum_j \delta\lambda_j \xi_{j\nu}' + \sum \delta a_k \xi_{ki}',\end{aligned}$$

woraus sich wegen der Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s f$$

ergibt:

$$\frac{d}{dt}\delta\lambda_s = \delta a_s + \sum_k a_k \sum_j c_{jks} \delta\lambda_j. \tag{8}$$

Den zweiten Fall kann man genau in derselben Weise behandeln, wenn man nur beachtet, daß die Auflösung der Gl. (1) die Form:

$$x_i = f_i(x_1',\ldots,x_n';\ -a_1 t,\ldots,-a_r t) \tag{1'}$$

besitzt, und das auch auf (4) und (6) anwendet. Man findet so die Diffgl.:

$$\frac{d}{dt}\delta\mu_s = \delta a_k + \sum_k a_k \sum_j c_{kjs} \delta\mu_j. \tag{9}$$

Die Diffgl. (9) stimmen mit den Diffgl. S. 294, Z. 9, denn die Größen δa_k sind die λ_k bei Lie, S. 292, Z. 5, und:

$$\delta\mu_k = \int_0^t \varphi_k\, dt,$$

wo die φ_k durch die Gl. S. 293, Z. 13 definiert sind. Ebenso entsprechen die ψ_k auf S. 297, Z. 9 v. u. den Größen δa_k, und aus den χ_k ebd. folgen die:

$$\delta\lambda_k = \int_0^t \chi_k\, dt,$$

sodaß die Diffgl. (8) mit S. 297, Z. 3 v. u. stimmen.

S. 295, Z. 5—7. Diese Fkt. sind in bezug auf $e^{\nu_1 t}, e^{\nu_2 t}, \ldots$ sogar linear, in bezug auf t ganz.

S. 295, Z. 8 v. u. In seinen Arbeiten über die Zusammensetzung der endl. kont. Gruppen. Vgl. die Anm. zu S. 287, Z. 13—17, S. *864*.

S. 297, Z. 3, 6. Dabei ist:

$$(\omega_{ki})_{t=0} = \varepsilon_{ki}, \quad (\vartheta_{ki})_{t=0} = 0, \quad (t\Theta_{ij})_{t=0} = \varepsilon_{ij},$$

wo $\varepsilon_{ki} = 0$ für $k \neq i$ und -1 für $k = i$.

S. 297, Nr. 13. Die Funktionen ω_{ki} enthalten $a_1,\ldots,a_r$ und t nur in den Verbindungen: $a_1 t,\ldots,a_r t$ und sind gewöhnliche, ja sogar beständig konvergente Potenzreihen. Folglich hat jedes ϑ_{ki} die Form: t mal einer Funktion von: $a_1 t,\ldots,a_r t$, und die Ausdrücke: $t\Theta_{ij}$ sind wieder Funktionen von: $a_1 t,\ldots,a_r t$.

Die zweite Parametergruppe, deren inf. Trff. hier aufgestellt sind, ist diejenige, die erhalten wird, wenn man die endlichen Trff. der Gruppe: $X_1 f,\ldots,X_r f$ in der kanonischen Form:

$$x_i' = x_i + \sum_k^{1\ldots r} a_k \xi_{ki} + \frac{1}{1\cdot 2}\sum_{kj}^{1\ldots r} a_k a_j X_k \xi_{ji} + \cdots$$

schreibt (vgl. S. 291, Z. 3 v. u. — 292, Z. 3 und Abh. VII, S. 248 ff.). Lie bezeichnete sie später (Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 656), als die zweite kanonische Parametergruppe, wobei immer hinzuzudenken ist: die zu der Zusammensetzung c_{iks} gehört.

S. 297, Z. 10—7 v. u. Jetzt wird zuerst die endliche Trf.:

$$y_1' = y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}' = y_{n-1},\ y_n' = y_n + t$$

ausgeführt und dann die unendlich kleine:

$$y_i'' = y_i' + \sum_k \chi_k \cdot \eta_{ki}(y_1',\ldots,y_n'),$$

wo die χ_k unendlich kleine Größen sind. Es müssen also die Gl.:

$$\begin{aligned} y_n'' &= y_n + t + \Sigma\chi_k \cdot \eta_{kn}(y_1,\ldots,y_{n-1}, y_n + t) \\ y_i'' &= y_i \qquad + \Sigma\chi_k \cdot \eta_{ki}(y_1,\ldots,y_{n-1}, y_n + t)\end{aligned}$$

in der Form (2), S. 293, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in der Form (7), S. 296 dargestellt werden.

S. 297, Z. 7—1 v. u. „Zur Bestimmung der λ_k als Funktionen von den φ_i“. Wenn man sich nämlich in der ersten Gl. von Nr. 8 die φ_k als konstant und die λ_k als Fkt. von t denkt, so erhält man für die $\lambda_s(-t)$ genau dieselben Diffgl. wie in Nr. 8 für die φ_s. Es wird also:

$$\text{(A)} \qquad \varphi_k = \sum_i \omega_{ki}(t)\,\lambda_i, \quad \lambda_k = \sum_i \omega_{ki}(-t)\,\varphi_i.$$

Bedenkt man nun, daß die inf. Trff.:

$$E_i f = -\sum_s^{1\ldots r}\left(\sum_\sigma^{1\ldots r} c_{i\sigma s}e_\sigma\right)\frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (i=1,\ldots,r)$$

in den Beziehungen stehen:

$$(E_i E_k) = \Sigma c_{iks} E_s f$$

und daher eine Gruppe erzeugen, nämlich die adjungierte Gr. der Gr.: $X_1 f, \ldots, X_r f$ (vgl. hier Abh. III, S. 163; Abh. VII, S. 250 f.), beachtet man überdies, daß $\Sigma a_i E_i f$ die allgemeine inf. Trf. der adj. Gr. darstellt, so erkennt man, daß die Gl.:

$$e'_k = \sum_i^{1\ldots r} \omega_{ki}(-t)\,e_i \qquad (k=1,\ldots,r)$$

die endlichen Trff. der adj. Gr. in kanonischer Form darstellen. Das gleichzeitige Bestehen der Gl. (A) kommt also darauf hinaus, daß man, wenn man t durch $-t$ ersetzt, von einer Trf. der adj. Gr. zur inversen Trf. übergeht.

S. 298, Z. 8 v. u. — 299, Z. 2. Die $\omega_{ki}(-t)$ sind Fkt. von: $a_1 t, \ldots, a_r t$, die ϑ_{ij} haben die Form: t mal einer Fkt. von: $a_1 t, \ldots, a_r t$. Die $t w_{ik}$ sind daher Fkt. von: $a_1 t, \ldots, a_r t$.

Die erste Parametergr., deren inf. Trff. hier aufgestellt sind, ist nach Lies späterer Bezeichnung (vgl. S. *867*) die erste kanonische Parametergruppe, die zu der Zusammensetzung c_{iks} gehört.

Ich habe schon in den Anm. zu Bd. V auf S. *620* f. darauf hingewiesen, daß die hier angestellten Betrachtungen zugleich einen Beweis dafür liefern, daß r^3 Konstanten c_{iks}, die in den Beziehungen S. 290, Z. 3 stehen, stets die Zusammensetzung einer r-gl. Gr. darstellen. Die hier berechneten inf. Trff. der ersten und der zweiten Parametergr. (S. 298, Z. 1 v. u., S. 297, Z. 14) sind nämlich durch die c_{iks} allein bestimmt. Es läßt sich nun zeigen, daß diese inf. Trff. immer zwei reziproke einfach transitive Gruppen erzeugen, wenn man sie mit Hilfe von r^3 Konst. c_{iks} berechnet, die in jenen Beziehungen stehen. Vgl. meine Abh.: „Die kanonische Form der Parametergruppe", Leipz. Ber. 1891, S. 308—315 und Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 795 f.

S. 299, Z. 8—6 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 429.

S. 299, Z. 13—16. Hat die Gruppe: $X_1 f, \ldots, X_r f$ l unabh. ausgezeichnete inf. Trff., so haben die beiden Parametergruppen gerade l unabh. inf. Trff. gemein und ihre inf. Trff. erzeugen zusammengenommen eine $(2r-l)$-gl. transitive Gr. des R_r. Diese Gr. gehört zu denen, die in Abh. VII (1889), S. 259, Z. 8—11 betrachtet werden (vgl. die Anm. dazu, S. *857—861*); ihre endlichen Trff. findet man daher durch l Quadraturen.

S. 299, Z. 16—18. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. XXII (1886), S. 513—519. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 434—448. Die vollständigen Systeme, auf deren Integration es dort ankommt, lassen sich nämlich durch ausführbare Operationen erledigen. In der Tat, man hat, durch die vorhin erwähnten l Quadraturen, die endl. Trff. der beiden Parametergruppen in kanonischer Form gefunden und kann daher für jede Untergruppe einer der beiden Parametergruppen die zugehörigen Invarianten durch Elimination finden.

S. 299, Z. 11—9 v. u., 3—1 v. u. Es ist die Abh. Schurs, die auf S. *864* als dritte angeführt ist. Schur zeigt darin, daß man, sobald die inf. Trff. der beiden kanonischen Parametergr. gefunden sind, für jeden Typus r-gliedriger transitiver Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung einen Repräsentanten aufstellen kann. Es ist dann nämlich möglich, die inf. Trff. einer dem Typus angehörigen Gruppe wirklich hinzuschreiben. Man braucht also, um das machen zu können, nicht erst die endlichen Trff. der beiden kanonischen Parametergruppen zu bestimmen. Die dazu erforderlichen Quadraturen lassen sich vermeiden, wenn man weiter nichts verlangt als die inf. Trff. eines Repräsentanten für jeden einzelnen Typus. Verlangt man auch die endlichen Trff. jedes Repräsentanten, so lassen sich die Quadraturen nicht vermeiden. Vgl. auch Abh. XIV (1892), S. 373, Z. 2—4.

Zu Abhandlung XI, S. 301—330.

Diese Abh. ist ebenso wie die folgende von Engel ausgearbeitet. Die Aufzeichnungen, die dieser Ausarbeitung zugrunde lagen, hatte Lie im Frühjahr 1890 niedergeschrieben, während er sich in der Nervenanstalt zu Ilten bei Hannover aufhielt. Die vorliegenden Untersuchungen über unendliche Gruppen und die beiden großen Abhandlungen über die Grundlagen der Geometrie (Leipz. Ber. 1890, S. 284—321, 355—418, d. Ausg. Bd. II, Abh. VI und VII) sind damals zu Papier gebracht worden, als Lie allmählich wieder Lust und Kraft zur Arbeit fühlte.

S. 300, Z. 13—15. „Über die Definitionsgleichungen der kontinuierlichen Transformationsgruppen", die Leipziger Habilitationsschrift, durch die Engel zu seiner am 26. 10. 1885 abgehaltenen Probevorlesung einlud. Sie erschien im März 1886 in den Math. Ann., Bd. XXVII, S. 1—57.

S. 301, Nr. 1. Während Lie bisher immer von den Definitionsgl. der inf. Trff. einer unendlichen Gruppe ausgegangen war (d. Ausg. Bd. V, Abh. XIII (1883), S. 315—318; Bd. VI, Abh. II (1884), S. 111 f.), stellt er hier die Definitionsgl. der endlichen Trff. der Gr. an die Spitze.

S. 302, Z. 17—15 v. u. Daß diese Frage mit nein zu beantworten ist, hat A. Tresse 1893 in seiner Thèse gezeigt: „Sur les invariants différentiels des groupes continus". Diese ist 1894 in Bd. XVIII der Acta Math. erschienen, S. 1—88, s. insbesondere S. 4—9.

S. 303 f., Nr. 4. Hier ist es mir offenbar nicht gelungen, die Gedanken, die Lie in seiner Niederschrift nur kurz angedeutet hatte, vollständig klar auseinanderzusetzen. Da sich Lie auch 1891 immer noch schonen mußte, konnte ich nicht, wie früher, schwierige Punkte eingehend mit ihm besprochen. So ist es leider gekommen, daß die Darstellung in Nr. 4 unbefriedigend ausgefallen ist.

S. 327, Z. 18—23. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 541—547.

S. 327 f., Nr. 35. Vgl. d. Ausg. Bd. V, Abh. III (1876), S. 51 f., *617*; Abh. XIII (1883), S. 358, *713*.

S. 329, Z. 7—1 v. u. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 249—251.

S. 330, Z. 4—1 v. u. Näheres hier Z. 13—19.

Zu Abhandlung XII, S. 331—364.

S. 336, Z. 14—17. Führt man die Bezeichnung ein:

$$\frac{d\varphi}{dx_j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \sum_i \mathfrak{x}_{i,j}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}_i} + \sum_{i\nu}\mathfrak{x}_{i,\nu j}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}_{i,\nu}} + \cdots,$$

so ist augenscheinlich:

$$X^{(m+1)}\left(\frac{dW_k}{dx_j}\right) = \frac{d}{dx_j}X^{(m)}W_k,$$

wo die rechte Seite entwickelt so lautet:

$$\sum_i \xi_i(\mathfrak{x}) \frac{d}{dx_j} \frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{x}_i} + \sum_{i\mu\nu} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathfrak{x}_\mu} \mathfrak{x}_{\mu,\nu} \frac{d}{dx_j} \frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{x}_{i,\nu}} + \sum_{i\nu} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathfrak{x}_\nu} \mathfrak{x}_{\nu,j} \frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{x}_i} +$$

$$+ \sum_{i\mu\nu} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \mathfrak{x}_\mu} \mathfrak{x}_{\mu,\nu j} + \sum_\pi \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial \mathfrak{x}_\mu \partial \mathfrak{x}_\pi} \mathfrak{x}_{\mu,\nu} \mathfrak{x}_{\pi,j} \right) \frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{x}_{i,\nu}} + \cdots.$$

Nun aber ist:

$$\left[\frac{d\varphi}{dx_j}\right]_0 = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right]_0 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}_j}\right]_0 = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_j} [\varphi]_0,$$

also kommt:

$$\left[X^{(m+1)} \frac{dW_k}{dx_j}\right]_0 = \sum_i \xi_i(\mathfrak{x}) \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_j} \left[\frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{x}_i}\right]_0 + \sum_{i\mu} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathfrak{x}_\mu} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_j} \left[\frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{x}_{i,\mu}}\right]_0 +$$

$$+ \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathfrak{x}_j} \left[\frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{x}_i}\right]_0 + \sum_{i\mu} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial \mathfrak{x}_\mu \partial \mathfrak{x}_j} \left[\frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{x}_{i,\mu}}\right]_0 + \cdots$$

und somit:

$$\left[X^{(m+1)} \frac{dW_k}{dx_j}\right]_0 = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_j} [X^{(m)} W_k]_0.$$

Ferner ist offenbar:

$$[W_k]_0 \equiv 0, \quad \left[\frac{dW_k}{dx_j}\right]_0 \equiv 0, \cdots.$$

Ist daher z. B.:

$$U = \sum_{k,j} \varrho_{kj} \frac{dW_k}{dx_j}$$

frei von den Ableitungen $(m+1)$-ter O. der $\mathfrak{x}$, so ist:

$$\left[X^{(m+1)} \sum \varrho_{kj} \frac{dW_k}{dx_j}\right]_0 = \sum \varrho_{kj} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_j} [X^{(m)} W_k]_0 = V$$

frei von den Ableitungen $(m+1)$-ter O. der ξ. Unter den gemachten Voraussetzungen folgt aber die Gl.: $U = 0$ schon ohne Differentiation aus den Gl.: $W_k = 0$, demnach folgt auch:

$$V = \left[X^{(m)} \sum \varrho_{kj} \frac{dW_k}{dx_j}\right]_0 = 0$$

schon ohne Differentiation aus (21). Andrerseits ist V offenbar dann und nur dann von den Ableitungen $(m+1)$-ter O. der ξ frei, wenn U keine Ableitung $(m+1)$-ter O eines $\mathfrak{x}$ enthält.

S. 337, Nr. 9. Vgl. dagegen Abh. IX (1890), S. 286 f., Nr. 14.

S. 344, Z. 7—15. Ist bewiesen Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 544—547.

S. 345, Z 4 v. u. —346, Z. 1. Nach Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 7.

S. 354, Z. 4—1 v. u. Das heißt, die Differentialinvarianten q-ter und niedrigerer O. bilden das, was Lie später (Abh. XX (1895), S. 558) ein volles System von Differentialinvarianten nennt.

S. 356, Z. 13—16. In seiner Niederschrift hatte Lie die Hauptlösungen nicht benutzt, und erst ich habe sie in meiner Ausarbeitung eingeführt. Ich war dazu durch eine Abh. von F. Schur angeregt worden, in der mit Hilfe der Hauptlösungen der zweite Teil des ersten Lieschen Fundamentalsatzes über endliche kont. Trfsgr. sehr einfach bewiesen wird.[1]) Es zeigte sich, daß die Benutzung der

1) F. Schur, „Zur Theorie der endlichen Trfsgr.", Math. Ann. XXXVIII (1891). Siehe da S. 265. Auch Lie hat die große Einfachheit dieses Schurschen Beweises anerkannt, s. hier Abh. XIV (1892), S. 369, Z. 12—23.

Hauptlös. auch bei den unendlichen kont. Trfsgr. gewisse Beweise sehr vereinfacht und die Darstellung erleichtert.

S. 359, Z. 10—1 v. u. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 123, Theor. 17. In der Tat, das Wertsystem (62), das das gesuchte invariante Glsyst. befriedigt, hebt die Unabhängigkeit der Gl. des vollst. Syst. nicht auf, also kann auch das Glsyst. (61) selber diese Unabh. nicht aufheben.

S. 360, Z. 2—6. $J_1, \ldots, J_s$ bilden ein volles System von Diffinv. Sind nun: $J_{s+1}, \ldots, J_t$, wo $t - s = m_{q+1}$, Diffinv. $(q+1)$-ter O., die von einander und von: $J_1, \ldots, J_s$ unabhängig sind, so bestehen nach Nr. 37 Relationen von der Form:

$$\frac{\partial J_k}{\partial x_\nu} = \omega_{k\nu}(J_1, \ldots, J_s, J_{s+1}, \ldots, J_t) \quad (k = 1, \ldots, s;\ \nu = 1, \ldots, n),$$

und unter diesen Gl. gibt es sicher $t - s$ solche, die nach: $J_{s+1}, \ldots, J_t$ auflösbar sind. Es ergeben sich daher gerade $s \cdot n - m_{q+1}$ von: $J_{s+1}, \ldots, J_t$ freie Relationen:

$$\Phi_\mu \left(J_1, \ldots, J_s, \frac{\partial J_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial J_s}{\partial x_n} \right) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

die identisch erfüllt sind, wenn man die Ausdrücke der J_k in den Veränderlichen: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{1,1}, \ldots$ einsetzt, die also auch bei der Substitution (63) in Identitäten übergehen. Unter den Gl.:

$$\frac{\partial \alpha_k(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_\nu} = \omega_{k\nu}(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_s(x), J_{s+1}, \ldots, J_t)$$

gibt es daher $t - s$ von einander unabh., die: $J_{s+1}, \ldots, J_t$ als Fkt. von: $x_1, \ldots, x_n$ bestimmen.

S. 361, Z. 5. Das Verständnis wird erleichtert, wenn man hinter „befriedigt" einschaltet: „Beim Übergange von (63′) zu (67) werden nur die unabh. Veränd.: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$, die von $X'f$ nicht transformiert werden, durch die neuen unabh. Veränd.: $x_1, \ldots, x_n$ ersetzt."

S. 363, Z. 8—16. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 253—277. Aus dem dortigen Theor. 44 auf S. 275 geht hervor, daß das System von Diffgl., dem die charakteristische Fkt. W genügt, die folgende Eigenschaft hat: Sind U und V zwei Lösungen des Systems, so ist stets auch:

$$\{UV\} = [UV] - UV_z + VU_z$$

eine Lösung.

Näher ausgeführt ist das alles in der Gießener Dissertation von L. Gąsiorowski, „Über die Definitionsgleichungen der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Berührungstrff. in der Ebene". Abgedruckt in den: Prace matematyczno-fizyczne. XXVI, S. 135—202. Warschau 1914.

S. 363, Z. 5—3 v. u. In umgearbeiteter Fassung bildet diese Arbeit einen Teil der nachfolgenden Abh. XVIII (1895), s. dort S. 400—429.

S. 363, Z. 3 v. u. —364, Z. 1. Diese Bestimmung ist in der eben erwähnten Abh. auf S. 450—493 durchgeführt.

S. 364, Z. 1—5. Siehe ebd. S. 429—450. Die einzigen primitiven unendl. Gr. von P. T. des R_3 sind die unendl. Gr. aller P. T., die Gr., die alle Volumina ungeändert läßt, die Gr., deren Trff. alle Volumina proportional ändern, und schließlich die Gruppe aller P. T., die eine nicht integrable Pfaffsche Gl. invariant lassen.

S. 364, Z. 6—9. Dieser Plan ist nicht ausgeführt worden.

S. 364, Z. 9—11. Vgl. S. *869*, Z. 13—19.

Zu Abhandlung XIII, S. 365—367.

Im Jahre 1892 hat Lie der Christianiaer Ges. d. Wiss. durch Professor Elling Holst eine Note vorlegen lassen: „Funktionstheoretische Sätze“ (s. Christ. Forh., Aar 1892, Oversigt S. 3, Sitzung vom 5. Febr.). Nach Mitteilungen von Holst und dem damaligen Generalsekretär der Ges., Prof. Gustav Storm, hatte Lie gewünscht, daß der Druck der Note bis zum 1. Jan. 1893 aufgeschoben würde. Er hat aber die Handschrift schon vor diesem Zeitpunkte zurückverlangt, vermutlich, um deren Inhalt anderswo zu veröffentlichen. Es ist sehr wahrscheinlich, daß die vorliegende Abh. an die Stelle jener Note getreten ist, doch hat sich darüber nichts Sicheres feststellen lassen.

Andrerseits hat Lie an L. Koenigsberger vier und an H. Weber fünf Briefe geschrieben, in denen er die Sätze der vorliegenden Abh. und noch weitergehende mitteilt. Diese Briefe sind leider alle undatiert, nur bei dem einen an Koenigsberger ist der Poststempel: Leipzig 17. 1. 1892 erhalten. Sie werden in Bd. II d. Ausg. beim Neudruck der Abh. über Translationsmannigfaltigkeiten und Abelsches Theorem Verwertung finden.

S. 365, Z. 6—10. Dieser Satz steckt in der Tat genau genommen schon in den Andeut. Bd. III d. Ausg., Abh. I (1872), S. 2, Z. 5—1 v. u. Vgl. ebd. S. *618* f.

S. 365, Z. 11 f. Über die Picardschen Untersuchungen vgl. Th. d. Trfsgr., Bd. III (1893), S. 812—815. Die dort angeführte Preisschrift von Picard hat den Titel: Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables. Liouvilles Journal, IV. Serie, Bd. V, S. 135—319. Ihr war eine ganze Reihe von Arbeiten über die Integrale totaler algebraischer Differentialausdrücke und über die Transformation algebraischer Flächen in sich vorausgegangen.

S. 365, Z. 20 v. o. — 1 v. u. Vgl. z. B. Über reelle algebr. Minimalfl., Arch. Bd. II (1877), S. 157—171 (d. Ausg., Bd. I, Abh. XVII). Beiträge zur Theorie der Minimalfl. Math. Ann. Bd. XIV (1879), S. 332—345 (d. Ausg. Bd. II, Abh. II, § 1—3). Lie-Scheffers, Geom. d. B. T. (1896), S. 376, 383—389.

S. 366, Nr. 2. Einen besonderen Fall dieses Satzes hat Lie schon in den beiden vorhin angeführten Abh. bewiesen: Arch. Bd. II, S. 163 (d. Ausg. Bd. I, Abh. XVII, § 1). Math. Ann. Bd. XIV, S. 344 f. (d. Ausg. Bd. II, Abh. II, § 3, Nr. 13). Ferner findet man den Beweis eines anderen besonderen Falles in den „Untersuchungen über Translationsflächen I.“ Leipz. Ber. 1892, S. 461 f. (d. Ausg. Bd. II, Abh. XI, § 5). In seinen Vorlesungen an der Universität Leipzig hatte Lie einen rein begrifflichen Beweis für den Satz in dessen speziellster Form vorgetragen. Als daher L. Koenigsberger 1902 einen rein analytischen Beweis des allgemeinen Satzes veröffentlichte[1]), den ihm Lie 1892 brieflich mitgeteilt hatte, da war G. Scheffers in der Lage, den begrifflichen Beweis, den Lie für den allgemeinen Satz geführt haben wird, wiederherzustellen.[2])

Wir wählen die Bezeichnung der $\varDelta_k$ so, daß:

$$\sum_k^{1\ldots m+1} \varDelta_k \frac{d A_{k\mu}(t_\mu)}{d t_\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Dann ist $\Sigma \varDelta_k d v_k = 0$ und also:

$$\varDelta_1 : \cdots : \varDelta_{m+1} = \frac{\partial \Omega}{\partial v_1} : \cdots : \frac{\partial \Omega}{\partial v_{m+1}}.$$

1) „Bemerkungen zu einem Satze von Sophus Lie über ein Analogon zum Abelschen Theorem.“ Acta Math. Bd. 26, S 171—188.

2) „Bemerkungen zu einem Satze von Sophus Lie über algebraische Funktionen“, Leipz. Ber. 1903, S. 88—96. Scheffers kannte übrigens damals die vorliegende Note von Lie in den C. R. nicht. Er würde sonst seine Bemerkungen über den Ausnahmefall anders gefaßt haben.

d. h. $\varDelta_1, \ldots, \varDelta_{m+1}$ bestimmen in jedem Punkte $t_1, \ldots, t_m$ der Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$ die zugehörige m-fach ausgedehnte Tangentialebene.

Betrachtet man nun bloß t_1 als veränderlich, $t_2, \ldots, t_m$ dagegen als Parameter, so befriedigt die Kurve:

$$(1) \qquad x_k = A_{k1}(t_1) \qquad (k = 1, \ldots, m+1)$$

die Gleichung:

$$(2) \qquad \Omega(x_1 + A_{12}(t_2) + \cdots + A_{1m}(t_m), \ldots, x_{m+1} + A_{m+1,2}(t_2) + \cdots) = 0$$

für beliebige Werte von $t_2, \ldots, t_m$. Diese unendlich vielen Mannigfaltigkeiten, auf denen die Kurve (1) liegt, sind alle algebraisch; haben sie daher nur die Kurve (1) gemein, so ist (1) sicher auch algebraisch.

Es fragt sich also: Wann haben die Mann. (2) nur die Kurve (1) gemein, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wann gehört zu jedem ihnen gemeinsamen Punkte t_1 der Kurve (1) nur ein unendlich benachbarter Punkt, nämlich dieser:

$$(3) \qquad d x_k = A'_{k1}(t_1)\, d t_1 \qquad (k = 1, \ldots, m+1),$$

der ihnen auch gemeinsam ist? Aber die dem Punkte t_1 der Kurve (1) unendlich ben. Punkte, die allen Mann. angehören, erfüllen alle die Gl.:

$$\sum_k^{1\ldots m+1} \frac{\partial \Omega(v_1, \ldots, v_{m+1})}{\partial v_k} d x_k = 0,$$

d. h. diese:

$$(4) \qquad \sum_k^{1\ldots m+1} \varDelta_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)\, d x_k = 0,$$

wo t_1 einen beliebigen, aber bestimmten Wert hat, während $t_2, \ldots, t_m$ willkürliche Parameter sind. Es kommt demnach darauf an, ob diese Gl. außer durch das Lösungssystem (3) noch durch ein davon verschiedenes Lösungssystem:

$$(5) \qquad d x_k = \varphi_k(t_1)\, d t_1 \qquad (k = 1, \ldots, m+1)$$

befriedigt werden können.

Da $\varDelta_1, \ldots, \varDelta_{m+1}$ sicher nicht alle verschwinden, so hat das allgemeinste Lösungssystem von (4) die Gestalt:

$$(6) \qquad d x_k = \sum_\mu^{1\ldots m} \varrho_\mu A'_{k\mu}(t_\mu)\, d t_1 \qquad (k = 1, \ldots, m+1)$$

wo die ϱ_μ willkürliche Funktionen von $t_1, \ldots, t_m$ bezeichnen. Es gebe nun außer (3) gerade noch $l - 1$ und nicht mehr von einander und von (3) linear unabhängige Lösungssysteme:

$$(7) \qquad d x_k = \varphi_{k\lambda}(t_1)\, d t_1 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l-1).$$

Dann sind in der aus den Größen (3) und (7) gebildeten Matrix nicht alle l-reihigen Determ. identisch null, und das allgemeinste Lösungssyst. (5), das die Gl. (4) für alle Werte von $t_2, \ldots, t_m$ befriedigt, hat die Gestalt:

$$(8) \qquad d x_k = \left(\omega(t_1) A'_{k1}(t_1) + \sum_\lambda^{1\ldots l-1} \omega_\lambda(t_1)\, \varphi_{k\lambda}(t_1)\right) d t_1 \qquad (k = 1, \ldots, m+1),$$

wo die ω willkürlichen Fkt. von t_1 allein sind. Weil nun (3) und (7) gerade l linear unabh. Lösungssyst. von (4) darstellen, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für $k=1, \ldots, m+1$ je $l-1$ Relationen von der Form:

$$A'_{k\mu}(t_\mu) = \varrho_\mu A'_{k1}(t_1) + \sum_\lambda^{1\ldots l-1} \sigma_{\mu\lambda}\varphi_{\mu\lambda}(t_1) + \sum_\tau^{1\ldots m-l} \sigma_{\mu,\, l+\tau} A'_{k,\, l+\tau}(t_{l+\tau})$$
$$(\mu = 2, \ldots, l)$$

bestehen. Hierin liegt, daß die $\varDelta_k$ die Form:

$$\varDelta_k = \Omega(t_1, \ldots, t_m) \cdot \Theta_k(t_1, t_{l+1}, \ldots, t_m) \qquad (k=1, \ldots, m+1)$$

besitzen. Die Gl.:

$$\sum_k^{1\ldots m+1} \varDelta_k A'_{k\lambda}(t_\lambda) = 0 \qquad (\lambda = 2, \ldots, l)$$

zeigen daher, daß $l-1$ Relationen von der Form:

$$\sum_k^{1\ldots m+1} \varDelta_k(t_1, \ldots, t_m) \cdot A'_{k\lambda}(t_\lambda^0) = 0 \qquad (\lambda = 2, \ldots, l)$$

bestehen, welche konstanten Werte man auch für $t_2^0, \ldots, t_l^0$ setzen mag.

Wenn also die Gl. (4) für irgend ein μ zwei linear unabh. Lösungssysteme $dx_k = \chi_k(t_\mu)\,dt_\mu$ besitzt, so besteht zwischen $\varDelta_1, \ldots, \varDelta_{m+1}$ eine lineare hom. Relation: $\Sigma c_k \varDelta_k = 0$ mit konstanten Koeffizienten.

Nehmen wir zunächst an, daß keine solche Relation besteht. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Det.:

$$(9) \qquad \left| \begin{matrix} \varDelta_k(t_1, \ldots, t_m)\, \varDelta_k(t_1^{(1)}, \ldots, t_m^{(1)}) \ldots \varDelta_k(t_1^{(m)}, \ldots, t_m^{(m)}) \\ (k = 1 \ldots, m+1) \end{matrix} \right|$$

nicht identisch verschwindet. Da andrerseits für jedes μ die Identität:

$$\Sigma \varDelta_k A'_{k\mu}(t_\mu) = 0$$

besteht, so verschwindet die Det. (9) identisch, wenn man $t_\mu = t_\mu^{(1)} = \cdots = t_\mu^{(m)}$ setzt. Es können aber bei dieser Substitution nicht alle m-reihigen Unterdet. von (9) verschwinden, weil sonst die Gl. (4) zwei lin. unabh. Lösungssyst. $dx_\mu = \chi_k(t_\mu)\,dt_\mu$ besäße, und daher eine Relation $\Sigma c_k \varDelta_k = 0$ bestände.

Unter der gemachten Voraussetzung bestimmt daher die Gleichung (4) für jedes μ, wenn man bloß t_μ als Veränderliche und $t_1, \ldots, t_{\mu-1}, t_{\mu+1}, \ldots, t_m$ als willkürliche Parameter betrachtet, die Verhältnisse der dx_k vollständig und ergibt:

$$dx_1 : \cdots : dx_{m+1} = A'_{k\mu}(t_\mu) : \cdots : A'_{m+1,\mu}(t_\mu).$$

Die Mann. (2) haben mithin nur die Kurve (1) gemein, und Entsprechendes gilt für jedes μ. Damit ist bewiesen, daß die Mann. $\Omega(v_1, \ldots, v_{m+1}) = 0$ dann und nur dann algebraisch ist, wenn die Kurve:

$$x_k = A_{k\mu}(t_\mu) \qquad (k = 1, \ldots, m+1)$$

für jedes $\mu = 1, 2, \ldots, m$ algebraisch ist.

Nun mögen gerade q lineare Relationen $\Sigma c_k \varDelta_k = 0$ mit konstanten Koeff. bestehen. Dann können wir diese in der Form:

$$(10) \qquad \varDelta_{m+1-q+\lambda} = \sum_\mu^{1\ldots m+1-q} c_{\lambda\nu} \varDelta_\nu \qquad (\lambda = 1, \ldots, q)$$

annehmen und erhalten:

$$\sum_k^{1\ldots m+1} \varDelta_k dv_k = \sum_\nu^{1\ldots m+1-q} \varDelta_\nu \left\{ dv_\nu + \sum_\lambda^{1\ldots q} c_{\lambda\nu} dv_{m+1-q+\lambda} \right\}.$$

Ersetzen wir daher: $v_1, \ldots, v_{m+1-q}$ durch die neuen Veränd.:

$$(11) \qquad v'_\nu = v_\nu + \sum_\lambda^{1\ldots q} c_{\lambda\nu} v_{m+1-q+\lambda} \qquad (\nu = 1, \ldots, m+1-q)$$

und lassen wir dann die Akzente wieder weg, so werden: $\varDelta_{m+1-q+\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, q)$ alle gleich Null. Jetzt haben wir:

$$\sum_\nu^{1\ldots m+1-q} \varDelta_\nu A'_{\nu\mu}(t_\mu) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

also verschwinden in der Matrix:

$$\left| \begin{matrix} A'_{11}(t_1) & \ldots & A'_{m+1-q,1}(t_1) \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ A'_{1m}(t_m) & \ldots & A'_{m+1-q,m}(t_m) \end{matrix} \right|$$

alle $(m+1-q)$-reihigen Determ., während sicher nicht alle $(m-q)$-reihigen Determ. verschwinden, weil sonst auch $\varDelta_1, \ldots, \varDelta_{m+1-q}$ alle Null wären.

Hieraus folgt, daß es in den Veränd.: $t_1, \ldots, t_m$ gewisse inf. Trff.:

$$Xf = \sum_\mu^{1\ldots m} \xi_\mu(t_1, \ldots, t_m) \frac{\partial f}{\partial t_\mu}$$

gibt, für welche die Gl.:

$$Xv_\nu = \sum_\mu^{1\ldots m} \xi_\mu A'_{\nu\mu}(t_\mu) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, m+1-q)$$

identisch erfüllt sind, und zwar können q und nicht mehr von den ξ_μ, etwa die q letzten, willkürlich gewählt werden. Demnach sind: $v_1, \ldots, v_{m+1-q}$ gemeinsame Lösungen von q und nicht mehr lin. part. Diffgl. 1. O., die wir in der Form:

$$X_\lambda f = \frac{\partial f}{\partial t_{m-q+\lambda}} + \sum_\tau^{1\ldots m-q} \xi_{\lambda\tau}(t_1, \ldots, t_m) \frac{\partial f}{\partial t_\tau} = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, q)$$

annehmen können. Diese q Gl. bilden offenbar ein q-gliedr. vollst. Syst., das $m-q$ Hauptlös.: $T_1, \ldots, T_{m-q}$ i. B. auf: $t_{m-q+\lambda} = t^0_{m-q+\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, q)$ besitzt. Führen wir diese Hauptlös. an Stelle von $t_1, \ldots, t_{m-q}$ ein, so werden $v_1, \ldots, v_{m+1-q}$ Fkt. von $T_1, \ldots, T_{m-q}$ allein, und zwar ergibt sich wegen der Eigenschaften der Hauptlösungen:

$$v_\nu = \sum_\mu^{1\ldots m-q} A_{\nu\mu}(T_\mu) + \sum_\lambda^{1\ldots q} A_{\nu,\, m-q+\lambda}(t^0_{m-q+\lambda}) \qquad (\nu = 1, \ldots, m+ - .$$

Das ist das reduzierte System S. 366, Z. 16 v. u.

S. 367, Z. 2—6. Siehe die Anm. zu S. 365, Z. 11 f., S. 872.

Zu Abhandlung XIV, S. 368—375.

Über die Vorgeschichte dieser Abh. ist folgendes zu sagen: Als F. Schur, der damals Professor in Dorpat war, im Juli 1892 durch Leipzig kam, beklagte er sich bei mir über die Äußerung von Lie, auf die hier S. 373, Z. 18—16 v. u. bezug genommen wird. Ich besprach die Sache mit Lie und überzeugte diesen, daß er die Pflicht habe, die Mißverständnisse zu beseitigen, die diese Äußerung hervorzurufen geeignet war. Aus diesen Besprechungen mit Lie ist dann die Abh. XIV hervorgegangen. Sie wurde von mir ausgearbeitet und vor der Veröffentlichung Schur mitgeteilt. Dieser hat dann die beiden Anmerkungen auf S. 374 hinzugefügt und damit sein Einverständnis mit der hier gegebenen Darstellung öffentlich kundgegeben.

S. 368, Z. 5f. Siehe Leipz. Ber. 1890, S. 477 u. 490 (hier Abh. IX, S. 287; Abh. X, S. 299). Ebd. 1892, S. 113f. in der Abh.: „Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie" (d. Ausg. Bd. II, Abh. VIII am Schlusse).

S. 368, Z. 5. v. u. Vgl. die Anm. zu S. 287, Z. 7—1 v. u., S. *864*. Zu den dort angeführten Arbeiten Schurs war inzwischen noch hinzugekommen:

4. Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen. Math. Ann. Bd. XXXVIII (1891), S. 263—286.

Erwähnt sei gleich noch eine erst später erschienene Arbeit:

5. Über den analytischen Charakter der eine endliche kontinuierliche Transformationsgruppe darstellenden Funktionen. Ebd. Bd. XLI (1893), S. 509—538.

S. 369, Z. 4—7. Die zugrunde liegenden Gedanken sind auseinandergesetzt Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 546—557.

S. 369, Z. 4, 3 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 18; Bd. III, S. 566—575.

S. 369, Z. 12—17. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 151—155; Bd. III, S. 562f.

S. 369, Z. 2, 1 v. u. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 160, Theor. 25.

S. 369, Z. 17—24. Schurs ersten Beweis findet man Ann. XXXV (1889), S. 169 bis 173; den zweiten Ann. XXXVIII (1891), S. 265. Lie ist in der Tat Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 790—792 auf diese Dinge zurückgekommen. — Man vgl. auch meine Anm. zu S. 356, Z. 13—16, S. *870*.

S. 370, Z. 1—7. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 146—150, 151—158. Schur, Ann. XXXV, S. 173—179; XXXVIII, S. 268—271. Beide Male leisten aber die Betrachtungen von Schur noch mehr, denn sie liefern zugleich einen Beweis für den zweiten Teil des dritten Fundamentalsatzes (S. 370, Z. 13—15).

S. 370, Z. 20—22. D. Ausg. Bd. V, Abh. III (1876), S. 73f. Bd. VI, Abh. III (1885), S. 162—164. Das „im wesentlichen" bezieht sich auf folgendes. Der Fall, wo die adjungierte Gr. nicht r-gliedrig ist, wird allerdings an der zweiten der eben angeführten Stellen berücksichtigt. Aber die dort gegebene Erledigung ist nur dann stichhaltig, wenn die r unabh. inf. Trff.: $X_1 f, \ldots, X_r f$ so gewählt werden können, daß: $X_{r-\varrho+1} f, \ldots, X_r f$ die ausgez. inf. Trff. sind, während: $X_1 f, \ldots, X_{r-\varrho} f$ eine $(r-\varrho)$-gliedrige Gruppe ohne ausgez. inf. Trff. erzeugen.

S. 370, Z. 12, 11 v. u. Der Satz erscheint nämlich als besonderer Fall des Satzes, daß man unter gewissen Voraussetzungen stets eine r-gliedrige Funktionengruppe von vorgeschriebener Beschaffenheit aufstellen kann.

S. 370, Z. 10—4 v. u. Vgl. die Anm. zu S. 287, Z. 13—17, S. *864*.

S. 370, Z. 3, 2 v. u. Schur leitet Ann. XXXVIII, S. 268 die Integrabilitätsbedingungen für sein System (19) ohne Benutzung der Jacobischen Identität ab und gelangt so zu den Gl. (4), hier S. 370. Im Grunde kommt das aber darauf hinaus, daß Schur statt mit inf. Trff. Xf zu arbeiten, Pfaffsche Gleichungen benutzt. An die Stelle der Jacobischen Identität, die eine identisch verschwindende Kovariante dreier inf. Trff. ist, tritt bei ihm die identisch verschwindende trilineare Kovariante eines Pfaffschen Ausdruckes. In der Schurschen Darstellung ist das allerdings nicht ohne weiteres ersichtlich. Man vgl. aber E. Cartan, La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile. Bull. d. Sc. Math. II. Ser., Bd. 34 (1910), S. 259ff.

S. 371, Z. 1—9. Vgl. die Anm. zu S. 370, Z. 1—7.

S. 371, Nr. 4. Schur, Ann. XXXV, S. 194—197. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 159—163.

S. 371, Z. 19—15 v. u. Vgl. hier Abh. I (1880), S. 93. Abh. X (1890), S. 288.

S. 372, Z. 4 v. u. Ann. XXXV, S. 187—194.

S. 373, Z. 2—4. Vgl. hier Abh. X (1890), S. 299, Z. 11—9 v. u. und die Anm. dazu, S. *869*.

S. 373, Z. 5—10. Vgl. insbesondere Ann. XXXVIII, S. 280 Anm.

S. 373, Z. 10—2 v. u. Engel, Die kanonische Form der Parametergruppe, Leipz. Ber. 1891, S. 308—315. Nochmals die kanonische Form der Parametergruppe. Ebd. 1892, S. 43—53.

S. 373, Z. 1 v. u. Engel, Die Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung. Leipz. Ber. 1891, S. 585—596.

Nach Th. d. Trfsgr. Bd. I, Kap. 22 bestimmt jede $(r-n)$-gl. Untergr. einer r-gl. Gruppe einen Typus von transitiven Gruppen des R_n. Die diesem Typus angehörigen Gruppen sind alle unter einander ähnlich und zu der r-gl. isomorph. Ich zeige nun in jener Abh., wie man die inf. Trff. einer dem Typus angehörigen Gruppe aufstellen, also einen Repräsentanten des Typus finden kann, wenn man die inf. Trff.: $X_1 f, \ldots, X_r f$ und: $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ zweier r-gliedriger reziproker einfach transitiver Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung kennt. Ist nämlich: $X_{n+1} f, \ldots, X_r f$ eine $(r-n)$-gl. Untergr. der Gr.: $X_1 f, \ldots, X_r f$ und sind: $u_1, \ldots, u_n$ unabhängige Lösungen des $(r-n)$-gl. vollst. Systems:

$$(1) \qquad X_{n+1} f = 0, \quad \ldots, \quad X_r f = 0,$$

so stellen die Ausdrücke:

$$(2) \qquad U_k f = \sum_{\nu}^{1 \ldots n} Z_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_{\nu}^{1 \ldots n} w_{k\nu}(u_1, \ldots, u_n) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

die inf. Trff. eines solchen Repräsentanten dar. Ich setze nun voraus, daß die Gl. (1) nach $\partial f : \partial x_{n+1}, \ldots, \partial f : \partial x_r$ auflösbar sind, und benutze als Lösungen: $u_1, \ldots, u_n$ die Hauptlös. i. B. auf: $x_{n+1} = x_{n+1}^0, \ldots, x_r = x_r^0$. Auf diese Weise gelingt es mir auf S. 589—591, die inf. Trff. (2) hinzuschreiben, ohne die Hauptlösungen selber zu kennen.

Das von mir damals benutzte Verfahren kann durch ein wesentlich einfacheres ersetzt werden, das Lie schon 1874 angedeutet und das er hier in Abh. III, S. 150, Z. 10—151. Z. 5 (vgl. auch die Anm. S. *803*) genauer beschrieben hat. Wie es auf den vorliegenden Fall anzuwenden ist, findet man auseinandergesetzt Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 798f.

S. 373, Z. 18—16 v. u. Siehe die Anm. zu S. 368, Z. 5f.

S. 374, Z. 9—11. Vgl. S. 371, Z. 1 v. u.

S. 374, Z. 11—17. Siehe Ann. XXXVIII, S. 280 Anm. und S. 286.

S. 374, Z. 10, 9 v. u. L. Maurer, Über allgemeinere Invariantensysteme. Münchn. Ber. 1888, S. 103—150. Über Invariantentheorie, Crelle Bd. 107 (1890), S. 89—116. Über kontinuierliche Transformationsgruppen. Math. Ann. Bd. XXXIX (1891), S. 409—440.

S. 374, Z. 5—1 v. u. Schur ist später Ann. XLI (1893), S. 523 Anm. noch einmal auf diesen Punkt zurückgekommen.

S. 375, Z. 5f. Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), Kap. 25.

S. 375, Z. 6—8. Das ist allerdings nicht geschehen.

Zu Abhandlung XV, S. 376—383.

S. 376, Z. 9—1 v. u. Dieser Plan ist nicht ausgeführt worden.

S. 377, Z. 2—8. Lie beschränkt sich jedoch im folgenden auf Kurven. Die Flächen betrachtet er erst in Abh. XXVI (1896), S. 639—648.

S. 377, Z. 19 f. Im ersten Drucke steht „derjenigen Geradentransformationen"; es ist aber nicht zu erkennen, was damit gemeint sein soll.

S. 377, Nr. 2, 3. Man vgl. hierzu: E. Study, Kritische Betrachtungen über Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, Jahresber. d. dtsch. Math.-Ver. XVII. Bd. (1908), S. 125—142, und meine Bemerkungen dazu, ebd. S. 143 f. Study erwähnt allerdings dort die vorliegende Abh. nicht. Er hat die Darstellung im Auge, die in dem Werke: Lie-Scheffers, Kontin. Gruppen (1893) auf S. 674—709 gegeben ist.

S. 379, Z. 7—11. In Wahrheit wird der Krümmungshalbmesser in diesem Falle unbestimmt.

S. 379, Z. 14—16. Das ist nicht richtig, denn dasselbe gilt auch für die Kurven in Minimalebenen. Study ist der erste, der darauf aufmerksam gemacht hat, daß Lie diese Kurven übersehen hat (a. a. O. S. 133).

S. 379, Z 17—19. Offenbar hat Lie nachher ganz vergessen, dieses Versprechen einzulösen.

S. 380, Z. 15—8 v. u. Hier ist der Fall übersehen, das ϱ unendlich wird. Dann ist:

$$\frac{1}{\varrho}=0, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=0,$$

während $\tau:\varrho^2$ verschwindet. Setzt man nämlich:

$$y'z''-z'y''=u, \quad z'x''-x'z''=v, \quad x'y''-y'x''=w,$$

so ist: $\Sigma u^2=0$, während $\Sigma x'^2$ nicht verschwindet. Aus: $\Sigma u^2=0$, $\Sigma uu'=0$ folgt nun:

$$u:v:w=vw'-wv':wu'-uw':uv'-vu'.$$

Es ist aber: $vw'-wv'=x'.\varDelta, \ldots$, wo:

$$\varDelta=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix};$$

wegen: $\Sigma u^2=0$, $\Sigma x'^2 \neq 0$ ist daher: $\varDelta=0$ und: $u:v:w=a:b:c$, wo die Konstanten: a, b, c in der Beziehung: $\Sigma a^2=0$ stehen. Demnach wird τ unbestimmt und $\tau:\varrho^2=0$. Wählen wir nun das rechtwinklige Koordinatensystem so, daß die Ebene der Kurve die Gl.: $z=iy$ bekommt, so finden wir, daß diese Ebene bei der folgenden viergliedrigen Gruppe:

$$p, \quad q+ir, \quad zq-yr, \quad yp-xq-i(xr-zp)$$

von Bewegungen des Raumes invariant bleibt. Dabei werden die Punkte der Ebene, als deren Koordinaten wir x und y benutzen können, nach Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 233 f. durch die viergliedrige Gruppe transformiert:

$$p, \quad q, \quad yq, \quad xq.$$

Nach Bd. V d. Ausg. Abh. X (1883), S. 268, Nr. 18 und S. 266 wird nun:

$$D=y'', \quad D_1=y''', \quad D_2=y^{\mathrm{IV}},$$

und somit sind:

$$y''':y'', \quad y^{\mathrm{IV}}:y''$$

die niedrigsten Differentialinvarianten dieser Gruppe. Außer ∞^1 Scharen von je ∞^3 kongruenten Kurven, die durch die Gl: $y'''=cy''$ definiert sind, gibt es daher in der Ebene: $z=iy$ noch unbegrenzt viele Scharen von je ∞^4 kongruenten Kurven, deren jede eine Diffgl. von der Form:

$$y^{\mathrm{IV}}:y''=\omega(y''':y'')$$

befriedigt. Alle diese Diffgl. sind durch Quadraturen integrierbar (a. a. O. Abh. XI, S. 299, Nr. 15).

S. 381, Nr. 9. Es muß heißen: fünf Kategorien, unter denen vier singulär sind. Die Kurven in den Minimalebenen bilden die vierte singuläre Kategorie.

S. 382, Z. 10—1 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 135—138.

S. 383, Z. 1—10. Es muß eine sechsgliedrige Gruppe sein, die ebenso wie die Gruppe der Bewegungen eine dreigl. inv. Untergr. mit vertauschbaren inf. Trff. enthält. Hiernach geht aus der Aufzählung der Gruppen von P. T. der Ebene (Abh. I, S. 88 f.) hervor, daß die Gruppe weder primitiv sein noch zwei Scharen von je ∞^1 Kurven inv. lassen kann. Also kann bei ihr nur eine inv. Schar von ∞^1 Kurven vorhanden sein, und da bleibt nur die vierte Gruppe auf S. 89 für $r=2$ übrig.

Die niedrigsten Diffinv. dieser Gruppe lauten nach Bd. V d. Ausg., Abh. X (1883), S. 271, Nr. 22 für $r=3$:

$$J_5=\frac{4y'''y^{\mathrm{V}}-5y^{\mathrm{IV}2}}{y'''^3},$$

$$J_6=\frac{4y'''^2y^{\mathrm{VI}}-18y'''y^{\mathrm{IV}}y^{\mathrm{V}}+15y^{\mathrm{IV}3}}{y'''^{\frac{9}{2}}}.$$

S. 383, Z. 1 v. u. S. Lie-Scheffers, Kontin. Gr., a. a. O.

Zu Abhandlung XVI, S. 384 f.

S. 385, Z. 16—1 v. u. Auf S. 602 der Leipz. Ber. von 1893 sagt Ostwald: „Eine gewisse Schwierigkeit in der Anwendung des Prinzips liegt in der Frage, welches in jedem Falle die charakteristische Größe ist, deren Variation verschwinden soll. Wenn auch in sehr vielen Fällen die Antwort sich aus der Beschaffenheit des Problems ergibt, so muß doch zugegeben werden, daß zweifelhafte Fälle möglich sind. Eine allgemeingültige Antwort weiß ich nicht zu geben. Doch wird in dieser Beziehung der Hinweis von Wert sein, daß im allgemeinen in jedem Falle mehrere Größen vorhanden sein werden, welche Funktionen von einander sind, und bei demselben Werte der anderen Veränderlichen gleichzeitig ausgezeichnete Werte annehmen werden."

Andrerseits liest man bei Jacobi im Anfange der 6. Vorlesung (S. 43 der ersten Ausgabe): „Wir kommen jetzt zu einem neuen Prinzip, welches nicht, wie die früheren, ein Integral gibt. Dies ist das ‚principe de la moindre action', fälschlich der kleinsten Wirkung genannt. Die Wichtigkeit desselben liegt erstens in der Form, unter welcher es die Diffgl. der Bewegung darstellt, und zweitens darin, daß es eine Funktion angibt, welche, wenn diese Diffgl. erfüllt sind, ein Minimum wird. Ein solches Minimum existiert zwar bei allen Aufgaben, aber man weiß in der Regel nicht wo. Während daher das Interesse dieses Prinzips gerade darin besteht, daß man das Minimum allgemein angeben kann, legte man in früheren Zeiten ein übertriebenes Gewicht darauf, daß ein solches Minimum überhaupt existiere."

Zu Abhandlung XVII, S. 386—395.

S. 386, Z. 14—9 v. u. Siehe Bd. V d. Ausg. Abh. XIII (1884), S. 359, Z. 2, 1 v. u.

S. 386, Z. 9—6 v. u. Ich kann keine Stelle finden, wo Lie ausdrücklich derartige Betrachtungen angestellt hat. Z. B. in den „Untersuchungen über geodätische Linien", Math. Ann. Bd. XX (1882), S. 442 f. (d. Ausg. Bd. II, Abh. IV, Note 3) fragt er nach allen Gruppen von P. T. einer Ebene, bei denen eine Schar von ∞^2 Kurven invariant bleibt, die nicht durch eine (in den Parametern) lineare Gl. dargestellt werden kann. Er geht aber dort ganz anders zu Werke.

S. 387, Z. 17—20. Hält man alle Kurven des Büschels durch p fest und dazu einen von p verschiedenen Punkt p', so sind das: $2+3+1$ Bedingungen. In dem durch p' bestimmten Büschel von Integralkurven bleibt dann schon eine Kurve in Ruhe, sodaß die Festhaltung aller nur noch zwei Bedingungen liefert.

S. 388, Z. 1—4. In dem Punkte p', durch den die Kurven des zweiten Bündels gehen, bleiben in Ruhe: das Linienelement der hindurchgehenden Kurve C des ersten Bündels und außerdem alle durch dieses Linienelement gehenden Flächenelemente; denn jede der Kurve C unendlich benachbarte Kurve des ersten Bündels bestimmt mit C zusammen ein solches Flächenelement durch p'. Von den acht Bedingungen, die das Festhalten aller Kurven des zweiten Bündels nach sich zieht, sind also: $2+3$ schon von selbst erfüllt.

S. 388, S. 14—17. In dem Träger p' des zweiten Kurvenbündels bleibt ja ein hindurchgehendes Linienelement in Ruhe und zugleich alle ∞^{n-2} durch dieses Linienelement gehenden Elemente, deren Ebenen zweifach ausgedehnt sind.

S. 388, Z. 15—11 v. u. Siehe Bd. V d. Ausg. Abh. V (1878), S. 136—156. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 29.

S. 388, Z. 10—8 v. u. Hat man z. B. eine Diffgl. 3. O.: $y''' = \omega(x, y, y', y'')$ und hält man ein Linienelement durch den Punkt p fest, nebst allen ∞^1 hindurchgehenden Integralkurven, so sind das $3+2$ Beding., denn die Veränderliche y'' wird bei festgehaltenem: x, y, y' nur noch durch die zweigliedrige allgemeine lineare Gr. transformiert, nicht durch die dreigliedrige allgemeine projektive (hier Abh. II (1884), S. 130, Z. 20 f.). Hält man einen zweiten Punkt p' von allgemeiner Lage fest, was nur eine Bedingung liefert, so bleibt eine durch p' gehende Integralkurve in Ruhe und das zu p' gehörige Linienelement dieser Integralk. Sollen daher alle durch dieses Linienelement gehenden Integralk. in Ruhe bleiben, so kommt nur noch eine Bedingung hinzu. Da nun dann alle Punkte der Ebene fest bleiben, gestattet die Diffgl. höchstens eine siebengliedrige Gr. von P. T. Andrerseits ergibt sich aus Bd. V d. Ausg. Abh. X (1883), S. 248 bis 273, daß jede Diffgl. 3. O., die eine G_7 von P. T. gestattet, die Form: $y''' = 0$ erhalten kann (a. a. O. S. 272, Nr. 23 für: $r = 3$). Da nun die Gl.: $y''' = 0$ eine zehngl. irreduzible Gr. von B. T. gestattet (ebd. Abh. V (1878), S. 191—194), so stimmt das mit dem Ergebnisse ebd. Abh. V, S. 187, Z. 10—14.

S. 389, Z. 5—12. Vgl. Om en Classe geometriske Transformationer. Christ. Forh. 1870, S. 506 (d. Ausg. Bd. I, Abh. IX).

S. 389, Z. 13 v. o. — 7 v. u. Wäre die Mongesche Gl.: $\Omega = 0$ in $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ eine Pfaffsche Gl., so würde sie von ∞^∞ zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des Raumes: $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ befriedigt (Bd. III d. Ausg. Abh. XXI (1877), S. 322, Theor. I und S. 326 f.). Jeder solchen zweifach ausg. Mann. entspräche aber im Raume: x, y, z eine Schar von ∞^2 Kurven, bei der jede Kurve der Schar von jeder unendlich ben. Kurve der Schar geschnitten würde, also eine Fläche, auf der ∞^2 Integralkurven von (A) lägen.

Es gibt aber höchstens ∞^3 Flächen, auf deren jeder ∞^2 Integralk. von (A) liegen. In der Tat, jede Schar von ∞^3 Flächen wird durch ein unbeschränkt integrables System von der Form:

$$r = \alpha(x, y, z, p, q), \quad s = \beta, \quad t = \gamma \tag{1}$$

definiert. Für die Integralk. von (A), die auf einer Integralfläche von (1) liegen, gelten dann die Gl.:

$$z' = p + qy', \tag{2}$$

$$[\psi] = \alpha + 2\beta y' + \gamma y'^2 + q[\varphi], \tag{3}$$

wo [ ] die Substitution (2) andeutet. Nun geht durch jedes Flächenelement: x, y, z, p, q eine Integralfläche von (1), und eine durch den Punkt: x, y, z gehende Integralk. von (A) kann auf dieser Fläche nur dann liegen, wenn ihr durch den Punkt: x, y, z gehendes Linienelement: x, y, z, y', z' die Gl. (2) erfüllt. Soll daher jede Integralfl. von (1) ∞^2 Integralk. von (A) enthalten, so muß (3) für beliebige Werte von y' erfüllt sein, es müssen also auch die durch Differentiation nach y' entstehenden Gl.:

$$\left\{\begin{aligned} [\psi_{y'}] + q[\psi_{z'}] &= 2\beta + 2\gamma y' + q([\varphi_{y'}] + q[\varphi_{z'}]), \\ [\psi_{y'y'}] + 2q[\psi_{y'z'}] + q^2[\psi_{z'z'}] &= 2\gamma + q([\varphi_{y'y'}] + 2q[\varphi_{y'z'}] + q^2[\varphi_{z'z'}]) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

für alle Werte von y' gelten. Demnach sind: α, β, γ ganz bestimmte Funktionen von x, y, z, p, q, die bei gegebenen: φ, ψ sofort aufgestellt werden können. Wenn es also überhaupt Flächen gibt, die ∞^2 Integralkurven von (A) enthalten, so gibt es deren nie mehr als ∞^3, und wenn es ∞^3 gibt, so sind diese vollständig bestimmt.

Damit ist bewiesen, daß die Mongesche Gl.: $\Omega = 0$ keine Pfaffsche Gl. sein kann.

Wir bemerken hier gleich noch folgendes. Jeder der ∞^3 Punkte des Raumes x, y, z hat mit jeder der ∞^2 durch ihn gehenden Integralk von (A) ∞^1 Flächenelemente gemein, die einen Verein bilden. Eine B. T., bei der die durch (A) definierte Kurvenschar invariant bleibt, führt daher die ∞^3 Punkte in eine Schar von ∞^3 Vereinen von je ∞^2 Flächenelementen über, wo zu jedem Vereine der Schar ∞^2 Integralkurven von (A) gehören, mit deren jeder der Verein ∞^1 Elemente gemein hat. Hieraus geht hervor, daß unsre Schar von ∞^3 Vereinen nicht aus ∞^3 Kurven bestehen kann, daß sie vielmehr entweder wieder die Schar aller Punkte ist oder eine Schar von ∞^3 Flächen, deren jede ∞^2 Integralk. von (A) enthält. Im letzteren Falle ist, wie wir wissen, die Schar von ∞^3 Flächen eine ganz bestimmte, immer dieselbe. Wir erkennen daher, daß die Gr. aller B. T., bei denen das System (1) inv. bleibt, entweder aus lauter P. T. besteht, oder daß sie aus einer Gr. von P. T. erhalten wird, wenn man zu deren Trff. noch eine geeignete B. T. hinzunimmt, die keine erweiterte P. T. ist. Zugleich ergibt sich nach S. 387 f., Nr. 3, daß die betreffende Gruppe von P. T. endlich ist und höchstens 15 Parameter enthält.

Wir sind aber damit den Lieschen Betrachtungen vorausgeeilt und haben sogar noch etwas mehr bewiesen, als der Satz auf S. 390 aussagt.

Die Gl. der Kurvenschar: $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ können wir stets in einer der folgenden beiden Formen:

$$y = Y(x, \alpha_1, \dots, \alpha_4), \quad z = Z(x, \alpha_1, \dots, \alpha_4) \tag{5}$$

oder:

$$\alpha_3 = \varphi_3(\alpha_1, \alpha_2, x, y, z), \quad \alpha_4 = \varphi_4(\alpha_1, \alpha_2, x, y, z) \tag{6}$$

darstellen. Aufgefaßt als eine Schar von Vereinen von je ∞^2 Elementen des Raumes: x, y, z erscheint die Kurvenschar (5) in der Gestalt:

$$y = Y, \quad z = Z, \quad p = Z_x - qY_x. \tag{5'}$$

Fassen wir andrerseits die Schar der ∞^3 zweifach ausgedehnten Mann. (6) des R_4: $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ als eine Schar von Elementvereinen auf und nehmen wir die Bedingung der vereinigten Lage in der Form: $d\alpha_4 - \Sigma p_k d\alpha_k = 0$ an, so erhalten wir im R_4 die Schar von ∞^3 Vereinen von je ∞^3 Elementen:

$$(6') \qquad \alpha_3 = \varphi_3, \quad \alpha_4 = \varphi_4, \quad p_1 = \frac{\partial \varphi_4}{\partial \alpha_1} - p_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha_1}, \quad p_2 = \frac{\partial \varphi_4}{\partial \alpha_2} - p_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha_2}.$$

Aus (6′) erhalten wir durch Elimination von: x, y, z eine partielle Diffgl. 1. O.

$$(7) \qquad \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, p_1, p_2, p_3) = 0,$$

von der (6′) eine vollständige Lösung darstellt. Das ist die part. Diffgl. 1. O., die nach S. 389, Nr. 6 der Mongeschen Gl.: $\Omega = 0$ entspricht.

Die Gleichung:

$$(8) \qquad \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} dz - p_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dz \right) = 0$$

bestimmt auf jedem der ∞^3 Integralvereine: x, y, z von (7) alle Elemente: $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, p_1, p_2, p_3 die mit den unendlich benachb. Elem. des unendl. benachb. Vereins: $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ vereinigt liegen. Setzt man daher: $dz = p\,dx + q\,dy$ und betrachtet: dx, dy als willkürlich, so stellt (6′) zusammen mit:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_4}{\partial x} + p \dfrac{\partial \varphi_4}{\partial z} - p_3 \left(\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x} + p \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_4}{\partial y} + q \dfrac{\partial \varphi_4}{\partial z} - p_3 \left(\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y} + q \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) = 0 \end{cases}$$

die charakt. Streifen der Diffgl. (7) dar (Bd. III d. Ausg., Abh. XII (1874), S. 162 bis 166, *672—674*). Setzt man: $p_k = -\pi_k : \pi_4$ und:

$$W = \varphi_3 \pi_3 + \varphi_4 \pi_4,$$

so wird die vollst. Lös. (6′) durch die Gl.:

$$(6'') \qquad \alpha_3 = \frac{\partial W}{\partial \pi_3}, \quad \alpha_4 = \frac{\partial W}{\partial \pi_4}, \quad \pi_1 = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \pi_2 = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}$$

dargestellt, und bildet man die Gl.:

$$(9') \qquad \frac{\partial W}{\partial x} : \frac{\partial W}{\partial y} : \frac{\partial W}{\partial z} = p : q : -1,$$

so hat man die zugehörigen charakt. Streifen.

Eliminiert man: p_1, p_2, p_3 aus (6′) und (9), so erhält man die Gl. der charakt. Kurven:

$$(10) \qquad \alpha_3 = \varphi_3, \quad \alpha_4 = \varphi_4, \quad \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_4 \\ x & y \end{vmatrix} - p \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_4 \\ y & z \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_4 \\ z & x \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gl. sind aber nur eine andere Form von (5′), also sehen wir, daß die Gl. (5′) im R_4 die ∞^5 charakt. Kurven der Diffgl. (7) darstellen, und zwar erhalten wir diese charakt. Kurven und damit auch die ∞^5 charakt. Streifen auf die ∞^5 Elemente: x, y, z, p, q des $R_3 : x, y, z$ abgebildet.

Läßt nun eine inf. P. T.:

$$\mathsf{A}f = \sum_k^{1 \ldots 4} \chi_k (\alpha_1, \ldots, \alpha_4) \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}$$

die Mongesche Gl.: $\Omega = 0$ invariant, so läßt sie auch die part. Diffgl. 1. O. (7) und die Schar der zugehörigen charakt. Kurven (5′) invariant. Es gibt daher

(Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 467) in den Veränd.: x, y, z, p, q eine eindeutig bestimmte inf. Trf.:

$$Xf = \xi(x, y, z, p, q) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \pi \frac{\partial f}{\partial p} + \varkappa \frac{\partial f}{\partial q}$$

derart, daß das Glsyst. (5′) die inf. Trf.: $\mathsf{A}f + Xf$ gestattet. Dann läßt die inf. Trf. Xf offenbar das Glsyst. inv., das aus (5′) und:

$$(11) \qquad dy = Y_x dx, \quad dz = Z_x dx, \quad dp = (Z_{xx} - q Y_{xx})\, dx - Y_x dq$$

durch Elimination von: $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ folgt. Da aber dieses System nur eine einzige Pfaffsche Gl. enthält, nämlich: $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, so bleibt diese für sich inv., d. h. Xf ist eine inf. B. T. des Raumes x, y, z.

Läßt umgekehrt eine inf. B. T. Xf die Schar der ∞^4 Kurven (5) oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Schar der ∞^4 Vereine (5′) invariant, so gibt es eine inf. Trf. $\mathsf{A}f$ derart, daß $Xf + \mathsf{A}f$ das Glsyst. (5′) inv. läßt. Die Bedingung dafür, daß zwei unendl. ben. Vereine α_k und $\alpha_k + d\alpha_k$ der Schar (5′) ein Element: x, y, z, p, q gemein haben, muß dann bei $\mathsf{A}f$ inv. bleiben. Aber diese Bed. ergibt sich, wenn man $x, \ldots, q$ aus (5′) und:

$$\Sigma Y_{\alpha_k} d\alpha_k = 0, \quad \Sigma Z_{\alpha_k} d\alpha_k = 0, \quad \Sigma (Z_{x\alpha_k} - q Y_{x\alpha_k})\, d\alpha_k = 0$$

die Größen: $x, \ldots, q$ eliminiert, und das liefert nur die Mongesche Gl.: $\Omega = 0$. Demnach bleibt diese bei $\mathsf{A}f$ inv.

Damit ist auch das auf S. 389, Z. 13—17 Gesagte bewiesen.

S. 389, Z. 7—1 v. u. Siehe Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 345. Das dortige Theorem 25 ist anwendbar, weil der Mongeschen Gl.: $\Omega = 0$ bloß eine Gl. zwischen: $\alpha_1, \ldots, \alpha_4, p_1, p_2, p_3$ entspricht.

S. 390, Z. 14—25. Vgl. Bd. III d. Ausg. Abh. XXVII (1880), S. 394—396, *728—730*. Die dortigen Entwickelungen sind näher ausgeführt in der ebd. S. *730*, Z. 11—15 erwähnten Abh. Das „längst angedeutet" bezieht sich auf Bd. III, Abh. V (1872), S. 27.

S. 390, Z. 8—6 v. u. Dort gibt Lie eine kurze Übersicht über den Inhalt der hier als Nr. II, S. 95—138 abgedruckten Abh.

S. 391, Z. 15—17. Zu I. Zum Beispiel bilden die Monge-Ampèreschen Gl. eine Klasse von Gl., die gegenüber allen B. T. invariant ist. Vgl. Bd. III, S. *619*, die Anm. zu S. 3, Z. 4—7. Ebenso bilden die Systeme von Diffgl., die man erhält, wenn man zu jeder r-gliedr. Funktionengruppe die reziproke Funktionengr. sucht, eine Kategorie, die bei allen B. T. in den x, p invariant bleibt (Bd. III d. Ausg., Abh. VII (1873)). Eine bei allen P. T. der Ebene invariante Klasse von gew. Diffgl. 2. O. hat man Bd. V d. Ausg. Abh. XIV (1883), S. 363 f. Diese wird auch hier in Abh. II (1884), S. 130 besprochen.

Zu II. Vgl. z. B. Bd. III d. Ausg. Abh. XVI (1875), S. 226—242. Abh. XXXIII (1881), S. 474 ff. Abh. XXXIV (1881), S. 480 ff. Ferner Bd. V, Abh. XVI (1884), S. 440 ff. Bd. VI, Abh. II (1884), S. 130 f. Nr. 19.

S. 391, Z. 7—5 v. u. Bd. III d. Ausg. Abh. XXXV, S. 495 ff. Laplacesche Diffgl. nennt man die von der Form: $s + \alpha p + \beta q + \gamma z = M$, wo α, β, γ, M Funktionen von x, y allein sind.

S. 391, Z. 4—1 v. u. Man sehe S. 126 ff. der von Lie angeführten Abh.

S. 392, Z. 1—6. Gemeint ist die Abh. von P. Stäckel: „Über Transformationen von Differentialgleichungen", Crelle Bd. 111 (1893), S. 290—302. Darin werden alle P. T. in x, y bestimmt, die jede Gl. (D) in eine ebensolche Gl. überführen. In der Abh.: „Über Transformationen partieller Differentialgleichungen", Crelle Bd. 114 (1894), S. 116—142 macht Stäckel dasselbe für lin. hom. partielle Diffgl. von höherer als erster O. Beide Male muß er recht langwierige Rechnungen ausführen, obgleich er nicht einmal B. T. im Auge hat, sondern nur P. T. Diese Rechnungen sind also vollständig überflüssig, s. S. 392 f., Nr. 11, S. 394 f., Nr. 14.

S. 393, Z. 14—9 v. u. Bd. V d. Ausg. Abh. XIV (1883), S. 363—370.

S. 393, Z. 8—3 v. u. Ebd. S. 409 ff. Vgl. K Żorawski, „Über die Integration einer Kategorie von gew. Diffgl. 3. O.", Anzeiger der Akad. d. Wiss. zu Krakau, Okt. 1897, Nr. 52, S. 303—319. Der V. berichtet da über seine Abh.: „O całkowaniu pewnej kategoryi równań różniczkowych zwyczajnych rzędu trzeciego. Bd. 34 der Denkschr. der Krak. Ak. 1898.

S. 393, Z. 2 v. u. —394, Z. 2. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. XII (1883), S. 312. Die Zurückführung auf ein System von vier lin. hom. gew. Diffgl. hat K. Faber geleistet: „Differentialgleichungen, die durch eine B. T. auf die Form $y''' = 0$ gebracht werden können. Leipz. Ber. 1926, S. 9—22.

S. 394, Z. 3—9. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. XII (1883), S. 312, *703* ff.

S. 395, Z. 1—4. Vgl. Bd. III d. Ausg. Abh. IX (1873), S. 116. Math. Ann. Bd. VIII (1874), S. 225 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. I, § 2, Nr. 6).

Zu Abhandlung XVIII, S. 396—493.

S. 396, Z. 9—11. Vgl. Bd. III d. Ausg. S. *623*, Z. 2—23.

S. 396, Z. 12—17. Ebd. Abh. VI—IX (1872, 73).

S. 396, Z. 21—23. Gemeint ist die Theorie der Ähnlichkeit von endl. kont. Gr. von P. T. durch P. T. Bd. V d. Ausg. Abh. IV (1878), S. 96 ff., *624* f.

S. 396, Z. 11—8 v. u. Hieraus geht hervor, daß die Entstehung der Abh. XIII von Bd. V d. Ausg ganz in das Jahr 1883 fällt. Das stimmt mit den auf S. *777* u. *786* angeführten Briefstellen.

S. 397, Z. 15—19. Bd. V d. Ausg. Abh. XII (1883), S. 313, Nr. 5 und die Anm. dazu S. *707*.

S. 397, Z. 19—23. Vgl. Bd. III d. Ausg. S. *706*, Z. 5—8. Bd. V, Abh. IV (1878), S. 78, Z. 3—1 v. u.

S. 397, Z. 8—4 v. u. Ampère, Sur les avantages qu'ont peut retirer, dans la théorie des courbes, de la considération des paraboles osculatrices, avec des réflexions sur les fonctions différentielles dont la valeur ne change pas lors de la transformation des axes (1803). Journ. de l'Ecole polyt. Tome VII, Cahier XIV (1808), S. 159—181.

Über die Arbeiten von James Cockle (1819—1895) berichtet ein Schüler Lies: Charles L. Bouton in seiner von Lie veranlaßten Leipziger Dissertation: „Invariants of the general linear differential equation and their relation to the theory of continuous groups", American Journal, Bd. 21 (1899), S. 25—84. Darin werden die folgenden Arbeiten besprochen: „Correlations of analysis", Phil. Magaz. XXIV (1862), S. 531—534. „On differential covariants", ebd. XXVII (1864), S. 225—228. „On the operating symbol of differential covariants", ebd. XXVIII (1864), S. 205—206. „On quantoids", ebd. XXX (1865), S. 347—348. „On hyperdistributives", ebd. XLIII (1872), S. 300—305. „On a differential criticoid", ebd. L (1875), S. 440—446.

Die Arbeiten von Laguerre, die hier in Betracht kommen, findet man aufgezählt S. *795*, Z. 20—16 v. u. und die von Halphen Bd. V d. Ausg., S. *746*.

S. 397, Z. 3—1 v. u. A. Tresse war im Winterhalbjahre 1891—92 in Leipzig gewesen. Die Arbeit in den Acta, die Lies Entrüstung hervorgerufen hat, ist seine schon auf S. *869* erwähnte Thèse von 1893. Es muß zwar zugegeben werden, daß Tresse den Fehler begangen hat, nicht überall zu sagen, was er Lie verdankt und was er als sein Eigentum beanspruchen kann, aber von „ausbeuten" in durchaus inkorrekter Weise kann nicht die Rede sein. Nichts hat Tresse ferner gelegen, als sich irgend etwas aneignen zu wollen, was Lie gehörte. Vgl. meinen Bericht über die Arbeit, Fortschr. d. Math. Bd. XXV (1893, 94), S. 641 f.

S. 398, Z. 1—10. Diese Gruppen werden hier auf S. 429—450, 470—493 bestimmt.

S. 398, Z. 10. Die endlichen irreduzibeln Gr. von B T. der Ebene sind schon in Bd. V d. Ausg. Abh. V (1878), S. 156 ff. bestimmt, die unendlichen reduzibeln ebd. Abh. XIII (1883), die unendlichen irreduzibeln werden es hier S. 450—470.

S. 398, Z. 11 f. Wegen der endl. kont. primitiven Gruppen des R_3 und R_4 sehe man Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), Kap. 7 und S. 807 f. Die Aufzählung der prim. unendl. kont. Gr. in diesen Räumen ist nunmehr ziemlich leicht, wenn man das an der letzten Stelle Gesagte berücksichtigt, sich auf Theorem 24, S. 334 ebd. stützt und schließlich auf das hier S. 492 f. ausgesprochene.

S. 398, Z. 13—15. Th. d. Trfsgr. Bd. III, Kap. 8.

S. 398, Z. 15—19. Auf Veranlassung von Lie hat G. Scheffers in seiner Leipz. Diss. von 1890: „Bestimmung einer Klasse von Berührungstransformationsgruppen des dreifach ausgedehnten Raumes" (Acta: Math. Bd. XIV, S 111—178) alle endl. kont. irreduzibeln Gr. von B. T. des R_3 bestimmt, bei denen eine Schar von ∞^1 part. Diffgl. 1. O.: $\Phi(x, y, z, p, q) = \text{const.}$ inv. bleibt. Ferner sind zwei Abh. von C. W. Oseen zu nennen: „Über einige irreduzible Gruppen von B. T. im Raume", Akad. zu Stockholm, Förhandlingar 1901, Nr. 5, S. 307—342. „Über die endl. kont. irreduziblen B. T.-Gruppen im Raume". Diss. Lund 1901. 36 S. 8°.

Die unendl. kont. Gr. von B. T. des R_3 hat U. Amaldi bestimmt: „Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio", Accademia di Torino, Ser. II, Bd. 57 (1907), S. 141—219, und später auch die von P. T.: „I gruppi continui infiniti di trasformazioni puntuali dello spazio a tre dimensioni", Accad. di Modena Ser. III, Bd. 10 (1910), S. 277—349, Suppl. (1912), S. 3—345, dann noch alle Gr. von B. T. des R_3: Sulla classificazione dei gruppi cont. di trasf. di cont. dello spacio. Soc. dei XL, Ser. III, Bd. 20 (1918), S. 167—350.

S. 398, S. 25—30. Lie ist nicht dazu gekommen, das auszuführen.

S. 399, Z. 4—12. N. H. Abel, Œuvres complètes. Nouv. Éd. Bd. II (1881), Abh. VI, S. 36 f.

S. 399, Z. 1 v. u. Auch hier ist es bei der Ankündigung geblieben.

S. 399, Z. 9—7 v. u., 400, Z. 1—4. Siehe Lie-Scheffers, Geom. d. B. T. (1896), S. 64, 99.

S. 400, Z. 13—16. „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", dort heißt es in Abt. II, Nr. 4 (Ges. math. Werke, 1. Ausg. 1876, S. 264): „Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmaß konstant ist, kann auch so ausgedrückt werden, daß sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung bewegen lassen."

S. 400, Z. 20 f. Ich habe bis jetzt noch nicht feststellen können, wen Lie meint.

S. 400—429. Neubearbeitung von Bd. V d. Ausg., Abh. XIII (1883). Es ist alles dadurch vereinfacht, daß die Gr. von vornherein in primitive und imprimitive eingeteilt werden (S. 401 f.) und daß die Bestimmung der primitiven durch die später (S. 429—450) folgenden Untersuchungen im R_n geleistet wird. Auf diese Weise werden die Entwickelungen in Bd. V, S. 318—334 ganz erspart.

S. 402—404, Nr. 11 ist eine Umarbeitung von Bd. V, Abh. XIII, S. 334 f., Nr. 15.

S. 404—410 entspricht a. a. O. S. 335—342.

S. 405, Z. 1—5. Hier läßt Lie genau so wie a. a. O. S. 336, Z. 1—8 (vgl. ebd. S. *709*, Z. 15—11 v. u.) den Fall außer acht, daß β konstant ist.

S. 405, Z. 10. Hinter „lineare" ist zu ergänzen „homogene".

S. 405, Z. 17—25. Vgl. a. a. O. S. 336—338 und Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 40 f.

S. 406, Z. 18. Nach $\eta(x, y) q$ müßte eigentlich hinzugesetzt werden: „von der hier betrachteten Art", denn die Gr. soll ja die Forderung S. 405, Z. 9—7 v. u. erfüllen. Vgl. S. 410, Nr. 18.

S. 406, Z. 15—12 v. u. Es gibt mindestens eine Defingl. 2. O. und höchstens zwei solche, weil sonst die Gr. endlich wäre.

S. 407, Z. 5, 4 v. u. Es ist das die auf S. 405, Z. 9—7 v. u. gemachte Voraussetzung.

S. 411—414, Nr. 22 entspricht Bd. V d. Ausg. Abh. XIII, S. 342—345, Nr. 17 f.

S. 414, Nr. 23—S. 417, Nr. 25 entspricht a. a. O. S. 345—347, Nr. 18 f.

S. 417, Nr. 26—419, Nr. 27 entspricht a. a. O. S. 347, Nr. 19—349, Nr. 19 f.

S. 419, Nr. 28—428, Nr. 38 entspricht a. a. O. S. 349, Nr. 20—355, Nr. 20 f.

S. 419, Z. 12—6 v. u. Vgl. Bd. V, Abh. IV (1878), S. 131 und hier Abh. I (1880), S. 70 u. 89, Z. 5, 4 v. u. Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 48 f., 70. In Bd. V d. Ausg. Abh. XIII, S. 349 f. verfährt Lie etwas anders und hat auch die Untersuchung nicht ganz durchgeführt (s. ebd. S. 350, Z. 1 v. u., *710*).

S. 421, Z. 5. Ist hier $\varkappa \neq 0$, so kann man es gleich 1 machen, indem man: $y\sqrt{\varkappa}$ als neues y einführt.

S. 423, Z. 18—25. Siehe hier Abh. I, S. 52.

S. 423, Z. 1 v. u.—424, Z. 1. Vgl. Abh. I, S. 71. Hiernach hat man im Falle: $m = 1$ noch eine andere kanonische Form: $yq, p, xp, x^2p + xyq$, die in Nr. 34 berücksichtigt wird.

S. 425, Z. 1—8. Daß k verschwindet, folgt bequemer aus der zweiten Gl. S. 424, Z. 3 v. u.

S. 425, Nr. 35. Vgl. Abh. I, S. 72.

S. 426, Nr. 36. Vgl. ebd. S. 70.

S. 426, Z. 13, 12 v. u. Man führt: $ye^{-\int \varphi_0 dx}$ als neues y ein.

S. 426, Z. 6, 5 v. u. Lie betont das offenbar deshalb so stark, weil er in Bd. V d. Ausg. Abh. XIII, S. 353 f., Nr. 20 f. das Auftreten des wesentlichen Parameters c übersehen hatte (vgl. ebd. S. *712*).

S. 427, Z. 15—12 v. u. Dieser Fall hätte eigentlich nach S. 427, Z. 4 behandelt werden müssen. In Bd. V, Abh. XIII, S. 354 hatte ihn Lie übersehen (ebd. S. *712*, Z. 20 ff.).

S. 427, Z. 8—5 v. u. Nämlich nach Nr. 20C, 23C, 26C (S. 412, 415, 418).

S. 429, V, erste Gruppe, vgl. die Anm. zu S. 421, Z. 5. Bei der dritten Gr. kann man $\frac{1}{2}$ durch 1 ersetzen, wenn man y^2 als neues y einführt. Man kann aber auch $2 \lg y$ als neues y einführen und erhält dann die Gruppe:

$$\boxed{q,\ Xp + X'q}\,.$$

S. 430, Z. 13, 12 v. u. Für: $n = 1$ kommt offenbar nur der Fall in Betracht, daß eine inf. Trf. nullter O.: $p + \cdots$, und eine 1. O.: $xp + \cdots$ auftritt. Käme nämlich keine inf. Trf. 1. O. vor, so wäre die Gr. endlich. Soll sie nun unendlich sein, so muß sie für jedes m eine inf. Trf.: $x^m p + \cdots$ enthalten, d. h., sie ist die unendl. Gr. aller P. T.

S. 443, Z. 10 v. u. Es ist ja:

$$X\varDelta - \sum_{\mu,\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial \varDelta}{\partial d_\mu x_\nu} d_\mu \xi_\nu = \sum_{\mu,\nu,i}^{1\ldots n} \frac{\partial \varDelta}{\partial d_\mu x_\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i} d_\mu x_i = \varDelta \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}.$$

S. 447, Z. 4 v. u. Vgl. Abh. XII (1891), S. 350.

S. 450, Z. 10, 9 v. u. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. V (1878), S. 156. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 631.

S. 451, Nr. 69. Was auf Z. 22—26, 31—33, 38 über das Auftreten oder Nichtauftreten gewisser charakt. Fkt. dritter Stufe gesagt wird, ist im Grunde überflüssig, denn es bewirkt im Nachfolgenden keine Vereinfachung. Es wäre zweckmäßiger gewesen, geradeso wie auf S. 471 im Raume von $n + 1$ Dimensionen, bloß zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem drei oder vier char. Fkt. zweiter St. auftreten.

S. 453, Nr. 72. Auch hier wäre es zweckmäßiger, so zu verfahren, wie auf S. 473 für den R_{n+1}. Man braucht bloß anzunehmen, daß eine char. Fkt. m-ter St. $(m > 2)$ auftritt, deren Glieder niedrigster St. z enthalten.

S. 456, Nr. 76. Wenn man ähnlich wie auf S. 475 f. verfährt, braucht man nicht von vornherein anzunehmen, daß die char. Fkt. 3. St. auf Z. 8 f. beide auftreten.

S. 459, Z. 15—17. Auf S. 475—479 wird dasselbe Ziel auf andere Weise erreicht. Es wird nämlich gezeigt, daß dieser Fall nur endliche Gruppen liefert.

S. 460, Z. 13, 12 v. u. Auf dem nachher für den R_{n+1} eingeschlagenen Wege ergibt sich, daß man auch sagen kann: „und außerdem eine char. Fkt. 3. St., deren Glieder niedrigster St. z enthalten, so ist ...“.

S. 462, Z. 5, 4 v. u. Daß es immer drei solche Lösungen: X_1, X_2, X_3 gibt, ist leicht zu beweisen; vgl. S. 483, Z. 5—1 v. u. und die Anm. dazu.

S. 463, Z. 8—11. Bd. III d. Ausg. Abh. VIII (1873), S. 89. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 223 f.

S. 463, Z. 11—18. Ähnlich wie auf S. 484 kommt man einfacher zum Ziele, indem man bemerkt, daß die Gruppe von B. T. im ersten Falle die homogene Fkt. nullter O. X_2 invariant ließe und daher als Gruppe von P. T. des Raumes x, y, z intransitiv wäre, was sie sicher nicht ist.

S. 463, Z. 5—1 v. u., 464, Z. 1—3. Siehe Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 371 f.

S. 465—469, Nr. 91—94. Vgl. die Anm. zu S. 487—491.

S. 465, Z. 5—1 v. u. Deutlicher wäre auf Z. 2 v. u.: $+ U_3 + U_4 + \cdots$. Dabei sollen natürlich, wenn $k > 2$ ist, alle Koeff.: $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ gleich Null sein und ebenso: $U_3, U_4, \ldots, U_{k-1}$.

S. 468, Z. 11 f. Vgl. hier Abh. V (1888), S. 234, Z. 2 v. u.—235, Z. 2. Abh. XII (1891), S. 363, Z. 7 v. u.

S. 468, Z. 12 v. u.—469, Z. 20. Das alles vereinfacht sich, wenn man x, y, z wieder einführt; vgl. S. 491.

S. 470, Z. 13—10 v. u. Die Gruppe: $\Omega(x, y)$ ist überdies auch systatisch, vgl. S. 486.

S. 481, Z. 18—22. Vgl. hier Abh. XI (1891), S. 301 f. und die Anm. zu S. 302, Z. 17—15 v. u., S. *869*.

S. 483, Z. 8—10. Siehe Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 273 f.

S. 483, Z. 5—1 v. u. Bezeichnet man die linke Seite von (H) mit: AH, und die von (G') mit: BH, so ist: $ABH - BAH \equiv 0$. Sind daher: $F_1, \ldots F_{2n+1}$ unabh. Lös. von (H), so sind auch alle BF_k Lös. von (H) und somit:

$$BF_k = \omega_k(F_1, \ldots, F_{2n+1}),$$

wo sicher nicht alle ω_k verschwinden, weil die Gl.: $Af = 0$, $Bf = 0$ offenbar von einander unabh. sind. Die Gl.:

$$BH(F_1, \ldots, F_{2n+1}) = \sum_k^{1\ldots 2n+1} \omega_k(F_1, \ldots, F_{2n+1}) \frac{\partial H}{\partial F_k} = H$$

hat daher sicher $2n + 1$ unabh. Lös.: $H_1, \ldots, H_{2n+1}$.

S. 484, Z. 7—12. Vgl. die Anm. zu S. 463, Z. 8—11.

S. 485, Z. 4—9. Vgl. die Anm. zu S. 463, Z. 5—1 v. u.

S. 486, Z. 13—11 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 510 f.

S. 487—491, Nr. 120—123. Die Bestimmung dieser Gruppen wird wesentlich einfacher, wenn man sich auf einen Satz stützt, den ich in der Abh.: „Über die Zurückführung gewisser infinitesimaler Trff. auf Normalformen“, Leipz. Ber. 1894, S. 73—83 bewiesen habe. Danach läßt sich nämlich (s. a. a. O. S. 82, Satz 3) jede inf. B. T., deren charakt. Fkt. die Form: $z - \frac{1}{2}\Sigma x_\nu y_\nu + \cdots$ besitzt, in eine inf. B. T. mit der charakt. Fkt.: $z' - \frac{1}{2}\Sigma x'_\nu y'_\nu$ überführen, und zwar durch eine B. T., die das Wertsystem: $z = x_\nu = y_\nu = 0$ inv. läßt und sich in der Umgebung dieses Wertsystems regulär verhält.

Ist nun G eine Gr. von der hier betrachteten Art, so kann man durch eine geeignete B. T. erreichen, daß sie die char. Fkt.: $Z = z - \frac{1}{2}\Sigma x_\nu y_\nu$ enthält. Ist andrerseits ω_m eine ganze Fkt. m-ter Stufe, so wird nach Th. d. Trfsgr. Bd. II, S. 546 identisch:

$$\{Z\omega_m\} = \tfrac{1}{2}(2 - m)\,\omega_m.$$

Demnach müssen sich die char. Fkt. jeder inf. Trf. der Gr. aus lauter solchen char. Fkt. linear ableiten lassen, deren jede eine ganze Fkt. von bestimmter Stufenzahl ist (vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 622). Insbesondere ist klar, daß die Gruppe außer Z noch alle die char. Fkt.: $x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n}$ enthält, sonst aber nur die aus diesen linear ableitbaren. Dieselben Betrachtungen lassen sich überhaupt auf jede Gruppe von B. T. anwenden, die eine inf. Trf. mit einer charakt. Fkt. von der Form: $z - \frac{1}{2} \Sigma x_\nu y_\nu + \cdots$ enthält.

In Lies handschriftlichem Nachlaß, in Paket XXVI unter Nr. 17, befinden sich 72 Folioseiten, unter denen die 68 ersten Seiten eben die Niederschrift sind, auf Grund deren ich die S. 450—493 hier ausgearbeitet habe. Die vier letzten Seiten enthalten Aufzeichnungen, deren Schluß lautet:[1])

„Wie gesagt, die Entwickelungen dieses Bogens sind leichtsinnig und nicht durchgeführt. Ich fühle mich doch überzeugt, daß hier ein allgemeines Prinzip gefunden ist.

„*Es existiert für unendliche Gruppen mit einer Transf. U ganz derselbe Satz, wie für endliche Gruppen von Berührungstransformationen.*

„Ich fordere Engel dazu auf, die Idee durchzuführen. Ich habe nicht Zeit …“

Lie verweist dabei selbst auf meinen vorhin erwähnten Satz.

Der Satz über endliche Gruppen von B. T., an den Lie denkt, steht Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 549. Er läßt sich in der Tat auf dem vorhin besprochenen Wege auf unendliche Gr. von B. T. übertragen. Zu bemerken ist noch, daß dieser Satz ein Seitenstück ist zu dem Satz über endl. kont. Gr. von P. T., der Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 618 ausgesprochen ist. Auch dieser Satz kann auf unendliche Gr. von P. T. übertragen werden, wenn man sich auf den von mir Leipz. Ber. 1894, S. 75—77 bewiesenen Satz stützt.

S. 493, Z. 3—1 v. u. Auch dieses M. S. gehört zu denen, die Lie im Frühjahre 1890 in Ilten niedergeschrieben hat (vgl. S. *869*).

Zu Abhandlung XIX, S. 494—538.

S. 495, Z. 18—21. Bd. V d. Ausg. Abh. VII (1882), S. 226—229; Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 190—198.

S. 495, Z 23—31. Bd. V d. Ausg., S. 229f. Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 196—198. Das Wort „transitiv“ wird hier in einem ungewöhnlichen Sinne gebraucht. Es soll andeuten, daß die Punkte der inv. Fläche transitiv transformiert werden. Dazu ist jedenfalls notwendig und unter gewissen Umständen (a. a. O. S. 198, Satz 2) auch hinreichend, daß zwischen $X_1 f$ und $X_2 f$ keine lin. hom. Relation besteht.

S. 495, Z. 4—1 v. u. Siehe Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 237 f.

S. 495, Z. 1 v. u. — 496, Z. 2. Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 118: die 14 zweigl. Gruppen stehen da unter VI, doch ist die zweite Gr. der ersten Reihe überflüssig; s. die Berichtigungen am Schluß jenes Bandes.

S. 496, Z. 6 v. u. Siehe Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 40 (1895), hist. lit. Abt., wo F. Meyer auf S. 14—28 den III. Bd. der Th. d. Trfsgr. bespricht. Auf S. 19 sagt er da: Die Herausgeber würden vielen Fachgenossen einen Dienst erwiesen haben, „hätten sie ihrer symbolischen Tabelle der inf. Trff. [der proj. Gr.] eine zweite reale an die Seite gestellt, mit den Gl. der Gruppen in der geläufigen endlichen Gestalt.“

S. 496, Z. 13—19. Vgl. den Schluß der Abh.: „Zur allgemeinen Theorie der part. Diffgl. beliebiger Ordnung“, Leipz Ber. 1895, S. 128 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. IX).

S. 497, Z. 14, 13 v. u. Der Ausdruck ∞^6 in diesem Sinne ist ungewöhnlich.

1) Verzeichnis über den wissensch. Nachlaß von Sophus Lie. Erste Mitteil. von C. Størmer. Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Math.-naturv. Kl., Christiania 1904, Nr. 7, ersch. Christiania 1905, siehe da S. 24.

S. 498, Z. 8 v. u. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 589, Theor. 105.

S 499, Z. 14, 13 v. u. Ebd. Bd. III, S. 118, siehe die erste Abteilung der Gruppen unter VI.

S. 500, Z. 11 v. u. Man hat eine geeignete Trf.: $x_1 = \lambda x$, $y_1 = \lambda y$, $z_1 = \lambda z$ auszuführen.

S. 501, Z. 5, 4 v. u. Nämlich für: $a - 9b = 0$.

S. 502, Z. 12—21. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 186—190.

S. 505, Z. 1—3. Nämlich durch eine geeignete Trf.: $x_1 = x$, $y_1 = \lambda y$, $z_1 = z : \lambda$ kann man $k = 1$ machen. Der Fall: $\alpha = -1$ ist auszuschließen, da er nur Flächen 2. O. liefert.

S. 505, Z. 7, 6 v. u. Nämlich auf S. 516, Nr. 28, Fall: $\alpha \neq 0$.

S. 506, Z. 16—14 v. u. Nämlich auf S. 509 f., Nr. 20.

S. 506, Z 7 v. u. $X_1 f$ ist ja die derivierte Gr. (Abh. V, S. 234 f.) einer zweigl. Gr. von Ähnlichkeitstrff.

S. 506, Z. 5—2 v. u. Vgl. „Klassifikation der Flächen nach der Trfsgr. ihrer geodätischen Kurven“ (1879), S. 25 f. (d. Ausg. Bd. I, Abh. XXIV, § 7, Nr. 15). „Untersuchungen über geodätische Kurven“, Math. Ann. XX (1882), S. 385—387 (d. Ausg. Bd. II, Abh. IV, § 5, Nr. 16).

S. 510, Z. 9—11. Vgl. S. 506, Nr. 15.

S. 512, Z. 18—21. Vgl. S. 515, Nr. 27. Die Flächen (V) werden durch die Trff.: $x_1 = \lambda x$, $y_1 = \lambda^2 y$, $z_1 = \lambda z$ unter einander vertauscht.

S. 513, Z. 12. Der Fall: $\gamma = 1$, $\alpha = 1$ wird ausgeschlossen, weil er nur Flächen 2. O. liefert.

S. 515, Z. 10 v. u. Siehe S. 511.

S. 516, Z. 9 f., Siehe S. 504 f., Nr. 13 f.

S. 516, Z. 11 f. Man kann $L = 1$ machen, weil: $L = 0$ nur auf invariante Ebenen und auf den Zylinder 2. O.: $z^2 - 2y = 0$ führt.

S. 517 unter (V) ist die Gruppe aus Nr. 27 gewählt, nicht die aus Nr. 22.

S. 518, Z. 13 f. Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 118, zweite Abteilung der Gruppen unter VI.

S. 521, Z. 10—4 v. u. A. a. O. S. 118, Z. 7 v. u., die mittlere Gruppe.

S. 525, Z. 15—13 v. u. Wir kämen also auf eine der früher behandelten Gruppen.

S. 526, Z. 9, 8 v. u. Vgl. z. B. Über die Reziprozitätsverhältnisse des Reyeschen Komplexes. Gött. Nachr. 1870, S. 53—66 (d. Ausg. Bd. I, Abh. V). Klein und Lie, Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. C. R. Bd. 70 (1870), S. 1222—26, 1275—79 (ebd. Abh. VI); auch abgedr. in F. Kleins ges. Abh. Bd. I (1921), S. 416—423. Vgl. auch Lie-Scheffers Geom. d. B. T. (1896), Kap. 8.

S. 527, Z. 4—7. Klein u. Lie, Über diejenigen ebenen Kurven usw. Ann. IV (1871), S. 83 f. (ebd. Abh. XIV, § 7, Nr. 29; F. Klein, Ges. Abh. Bd. I (1921), S. 458 f.).

S. 527, Nr. 51. Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 119.

S. 536, Z. 12—18. Vgl. Nr. 59, S. 534.

S. 537, Z. 11, 10 v. u. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 190, Z. 15—20; „hyperoskulieren“, weil sie in zwei zusammenfallenden Punkten oskulieren.

Zu Abhandlung XX, S. 539—591.

S. 539, Z. 3, 15—21. Von der hier angekündigten Fortsetzung liegt nur ein kleines Stück vor, wo Lie den einfachsten Fall wirklich erledigt, hier Abh. XXIII (1895), § IV, S. 612—614.

S. 539, Z. 18 f. Allgemeine Theorie der part. Diffgl. 1. O. II. Abh. Ann. XI (1877), S. 500 Anm. (d. Ausg. Bd. IV, Abh. III, § 8, Nr. 17).

S. 539, Z. 21 f. Hier Abh. III (1885), S. 146—159, 182—185, 208—222.

S. 539, Z. 12—9 v. u. Die „ursprünglichen Resultate" findet man hier Abh. III, S. 210—218. Die Vervollständigung in der Abh.: „Die lin. hom. gew. Diffgl.", Leipz. Ber. 1891, S. 267 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. V, § 4).

S. 540, Z. 4—2 v. u. Unter „Potentialtheorie" versteht Lie wahrscheinlich die Theorien, die in Jacobis, von Clebsch 1866 herausgegebenen, Vorlesungen über Dynamik zusammengefaßt sind. Die Potentialtheorie im heutigen Sinne, die zum ersten Male in dem bekannten Buche von Clausius eine damals viel gelesene Darstellung gefunden hat, kann unmöglich gemeint sein. Es ist nämlich schlechterdings nicht einzusehen, wie Lie daraus die von ihm erwähnten Anregungen geschöpft haben sollte.

S. 541, Z. 4—9. D. Ausg. Bd. III, Abh. I und V (1872), Abh. IV, VI—IX (1872, 73).

S. 541, Z. 17—14 v. u. Das ist leider nicht geschehen.

S. 541, Z. 6—1 v. u. Der erste Bd. der Geom. d. B. T. ist 1896 erschienen. Von dem zweiten haben sich in Lies Nachlasse drei vollständig ausgearbeitete Kapitel vorgefunden, die ich in Bd. LIX der Math. Ann. (1904), S. 193—313 herausgegeben habe (abzudrucken in Bd. II d. Ausg. als Abh. XVI). Aus den auf Z. 3 bis 1 v. u. erwähnten Plänen ist nichts geworden.

S. 542, Z. 4—11. Siehe hier Abh. VII (1889), S. 248—258.

S. 542, Problem I. Man beachte, daß nur die Definitionsgl. der endlichen Trff. der Gruppe als bekannt vorausgesetzt werden, nicht die endlichen Trff. selber.

S. 544, Z. 3—1 v. u. Vgl. die Überschrift zu Kapitel 4, S. 577.

S. 544, Z. 21—23, In der Abh.: „Über Diffgl., die Fundamentalintegrale besitzen", Leipz. Ber. 1893, S. 341—348 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. VI) spricht Lie im Texte nur von Diffgl. mit „Fundamentalsystemen".

S. 544, Z. 24—30. D. Ausg. Bd. III, Abh. XXXIX (1882), S. 548; Abh. XL (1882), S. 551—553; Bd. VI, Abh. III (1885), S. 195—202.

S. 545, Z. 4—10. „richtete ich", nämlich er für sich selber; ausgesprochen hat er es an keiner der eben angeführten Stellen. Nachträglich kann man es allerdings hier Abh. III, S. 195, Z. 4, 3 v. u. (vgl. meine Anm. S. *823*) herauslesen, wohlbemerkt, wenn man die jetzige Äußerung kennt.

S. 545, Z. 15—26. Vgl. S. *822—824*, *834—837*.

S. 546, Z. 4—11. Siehe hier Abh. III (1885), S. 150, Nr. 3. Die dort gemachte Voraussetzung, daß keine Relation: $\Sigma \alpha_k A_k f + \Sigma \beta_i B_i f = 0$ besteht, ist nicht wesentlich.

S. 546, Z. 12—14. Vgl. S. 556 f., Nr. 24.

S. 546 f., Nr. 11. Diese Nr. ist besonders beachtenswert, denn an keiner früheren Stelle hat sich Lie über diese seine Auffassung der Integrationsprobleme mit solcher Genauigkeit und Deutlichkeit ausgesprochen wie hier. Man vgl. z. B. Abh. III (1885), S. 200 f.

S. 547, Z. 4—1 v. u. Siehe Abh. VII (1889), S. 251.

S. 548, Z. 3—12. Siehe Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 673, 676—678.

S. 553, Z. 7, 6 v. u. Vgl. hier Abh. III (1885), S. 186—188, Nr. 19.

S. 554, Z. 9—11. Bei dem Systeme von lin. hom. Diffgl., das die dreigl. Gr.: Xf, $X_1 f$, $X_2 f$ definiert, kann ja das allg. Lösungssystem linear und homogen mit konstanten Koeff. aus drei partik. Lösungssystemen zusammengesetzt werden, und ein partik. Lösungssystem, nämlich das Xf entsprechende, ist bekannt.

S. 555, Z. 6. Die erste derivierte Gr. dieser dreigl. Gruppe ist ja bloß eingliedrig und die zweite daher nullgliedrig. Vgl. Abh. V (1888), S. 235.

S. 557, Z. 13, 12 v. u. Vgl. z. B. Abh. III (1885), S. 186—190, Nr. 19. Ferner namentlich Bd. V d. Ausg. Abh. XIV (1883), S. 377—383, 394—421.

S. 557, Z. 3—1 v. u. Hier Abh. III, S. 186, 190 f., Nr. 20.

S. 558, Z. 6 f. Bei den unendlichen Gruppen denkt Lie wohl an seine Invariantentheorie der B. T. (Bd. III d. Ausg., Abh. VI—IX) und an seine Theorie des Pfaffschen Problems (ebd. Abh. XI, XXI; vgl. auch hier Abh. XXV (1896), S. 631 bis 638). Bei den endlichen Gruppen denkt er wohl besonders an Bd. V d. Ausg. Abh. XIV (1883).

S. 558, Z. 16—18. Siehe hier Abh. II (1884), S. 123—126. Jetzt handelt es sich allerdings um den besonderen Fall, daß die unabh. Veränd.: $x_1, \ldots, x_n$ gar nicht transformiert werden, s. hier Abh. XII (1891), S. 352—358.

S. 558, Z. 3—1 v. u., 559, Z. 4—1 v. u. Führt man statt: $x_1, \ldots, x_n$ beliebige von einander unabh. Fkt.: $x_1', \ldots, x_n'$ der x_i als neue Veränd. ein, so bleibt offenbar jede Diffinv.: $J_k\left(\mathfrak{x}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}, \ldots\right)$ der Gruppe G eine Diffinv. Es bestehen daher Relationen:

$$J_k\left(\mathfrak{x}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x'}, \ldots\right) = \omega_k\left(x_1, \ldots, x_n, J_1\left(\mathfrak{x}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}, \ldots\right), J_2, \ldots\right),$$

wo rechts die Veränd.: $x_1, \ldots, x_n$ in den Verbindungen auftreten, die durch die Ableitungen der x' nach den x geliefert werden. Ebenso wird:

$$\Delta_k\left(\mathfrak{x}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x'}, \ldots\right) = \Delta_k' = \sum_j \psi_{kj}(x_1, \ldots, x_n)\, \Delta_j \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Vgl. auch Bd. V d. Ausg. Abh. XIV (1883), S. 381, Nr. 9.

Man kann sich das auch in der Weise klar machen, daß man sich die erweiterte inf. Trf.:

$$Y^{(n)} f = \sum \eta_i(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_i} + \sum_{i\nu\mu} \frac{\partial \eta_i(\mathfrak{x})}{\partial \mathfrak{x}_\nu} \mathfrak{x}_{\nu,\mu} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{i,\mu}} + \cdots$$

gebildet denkt, die offenbar bei jeder Trf.: $\mathfrak{x}_i' = \mathfrak{x}_i$, $x_\nu' = \varphi_\nu(x)$ ihre Form behält. Erinnert man sich nun an Abh. XII (1891), S. 353, so erkennt man, daß die $A_i f$, $A_{i,\tau} f, \ldots$ und ebenso die $\overline{A}_i f$, $\overline{A}_{i,\tau} f, \ldots$ linear und homogen transformiert werden, und daß die Koeff. dieser lin. homog. Trff. aus den Ableitungen der φ_ν zusammengesetzt sind. Hierin liegt, daß bei jener Trf. jede Diffinv. in eine Diffinv. übergeht. Andrerseits bleibt offenbar jedes Glsyst.: $\Delta_1 = 0, \ldots$ invariant, das man durch Nullsetzen von Determ. der Matrix der Koeff. der $\overline{A}_i f$, $A_{i,\tau} f, \ldots$ erhält. Dasselbe gilt auch von jedem Glsyst., das entsteht, wenn man zu: $\Delta_1 = 0, \ldots$ alle durch einmalige, durch ein- und zweimalige, ... Differentiation entstehenden Gl. hinzufügt; es gilt also auch von dem kleinsten unbeschränkt integrablen Glsyst., das das Glsyst.: $\Delta_1 = 0, \ldots$ umfaßt, wenn es ein solches unbeschr. int. System gibt.

S. 559, Z. 12—5 v. u. Wir setzen voraus, daß das Glsyst.: $\Omega_k = 0$ auf S. 557 bereits in einer solchen Form vorliegt, daß alle aus: $\Omega_k = 0$ durch Differentiation und Elimination folgenden Gl., deren O. die von: $\Omega_k = 0$ nicht übersteigt, schon ohne Differentiation aus: $\Omega_k = 0$ folgen (vgl. Abh. XI (1891), S. 301). Dann ist das System S. 559, Z. 7 v. u. nur eine andere Form des Glsyst.: $\Omega_k = 0$. Mit andern Worten, denkt man sich dieses letztere, das auch aus gerade μ Gl. besteht, nach μ von den Ableitungen der $\mathfrak{x}$ aufgelöst und setzt man die gefundenen Ausdrücke in J_k ein, so fallen alle übrigen Ableitungen heraus und es ergibt sich die Funktion B_k von $x_1, \ldots, x_n$ allein.

S. 560, Z. 16—18. Ist nicht geschehen.

S. 560, Z. 6—4 v. u. Hier irrt sich Lie. Was für jede endl. kont. Gr. selbstverständlich ist, gilt für die unendl. keineswegs. Wie Cartan zuerst erkannt hat, trifft die Behauptung für diese nur dann immer zu, wenn sie transitiv sind. Es gibt nämlich intransitive unendl. kont. Gruppen, bei denen jede invariante Untergruppe in einer größeren inv. Untergr. steckt. In der Tat, es sei: $n > 2$ und die allg. inf. Trf. der Gruppe G habe die Form:

$$\omega(x_1, \ldots, x_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

wo ω durch ein System A von lin. hom. part. Diffgl. beliebiger O. definiert ist, dessen allgemeinste Lösung nicht bloß von einer endlichen Anzahl von willk. Konst. abhängt. Da die inf. Trff. von G paarweise vertauschbar sind, so ist überhaupt jede Untergr. von G eine inv. Untergr. Ist also B ein beliebiges System von lin. hom. part. Diffgl. für ω, dessen Lösungen sämtlich A befriedigen, das aber nicht von jeder Lösung von A befriedigt wird, so definiert B eine inv. Untergr. g von G. Wählen wir nun $\overline{\omega}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ so, daß es A befriedigt, B aber nicht, und fügen wir zu g die inf. Trf. $\overline{\omega} p_n$ hinzu, so erhalten wir eine inv. Untergr. g_1 von G, die wieder durch ein System von Diffgl. definiert werden kann und die g umfaßt.

Daß Lie diese Möglichkeit übersehen hat, ist um so merkwürdiger, als er von jeher daran gewöhnt war, jedes System von lin. hom. gewöhnlichen oder partiellen Diffgl. als die Definitionsgl. einer kont. Gr. mit vertauschbaren inf. Trff. zu betrachten (Abh. XVII (1894), S. 392—395, s. besonders S. 395, Z. 4—1 v. u.).

Vgl. E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis. C. R. Bd. 135 (1902), S. 851—854. Sur la structure des groupes infinis de transformations. Ann. de l'Ecole Norm. III. Serie, Bd. XXI (1904), S. 153—206. Bd. XXII (1905), S. 219—308. Les groupes de transformations continus, infinis, simples, C. R. Bd. 144 (1907), S. 1094—1097 und Ann. de l'Ecole Norm. III. Serie, Bd. XXVI (1909), S. 93—161. In den letzten beiden Arbeiten zeigt Cartan, daß es zweckmäßig ist, den Begriff „einfache Gruppe" zu erweitern und von den „eigentlich einfachen" die „uneigentlich einfachen" Gruppen zu unterscheiden, das sind solche unendliche Gruppen, die zu einer unendlichen Gr. G von der vorhin definierten Art isomorph sind.

S. 562, Z. 9. Hier wird also die allgemeinere Annahme gemacht, daß die Gl. der Gruppe G auch: $x_1, \ldots, x_n$ enthalten, im Gegensatze zu S. 561, Z. 6—1 v. u.

S. 564, Z. 7—12. Die Gruppe Zf ist nur dann einfach, wenn $Y'f$ wirklich eine größte inv. Untergr. ist. Vgl. die Anm. zu S. 560, Z. 6—4 v. u. Außerdem vergesse man nicht, daß man das Hilfsproblem mit der Gruppe Zf integriert haben muß, bevor man die Diffgl. des zweiten Hilfsproblems mit der Gruppe $Y'f$ aufstellen kann.

S. 564, Z. 8—6 v. u. Bd. III d. Ausg. Abh. XXXVIII (1882), S. 546. Abh. XL (1882), S. 553, Nr. 5. Bd. V, Abh. XI (1883), S. 289 Anm., S. *688*ff. Abh. XIV (1883), S. 424f. Bd. VI, Abh. III (1885), S. 158.

S. 564, Z. 2, 1 v. u. — 565, Z. 2. Eine solche Gruppe gibt es, wenn G als Gruppe in: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ imprimitiv ist. Denkbar ist aber auch, daß man, wenn man G durch Hinzunahme der Ableitungen $\partial \mathfrak{x}_i : \partial x_\nu$ erweitert, eine imprimitive Gr. erhält, die eine invariante Zerlegung des neuen Raumes in eine Schar von $\infty^{n'}$ $(n' < m)$ Mannigfaltigkeiten bestimmt. An eine dieser beiden Möglichkeiten muß Lie gedacht haben; denn es ist nicht einzusehen, wie die Diffgl. für die $\mathfrak{y}_k$ aufgestellt werden können, wenn die $\mathfrak{y}_k$ nicht angebbare Funktionen der $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{x}_{i,\nu}, \ldots$ sind.

S. 565, Z. 15—13 v. u. $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}$ bleiben bei einer gewissen Untergr. von G inv. Andrerseits liefern die gefundenen Werte der $\mathfrak{y}_k$ bei jeder Trf. von G neue Integralgl. des ursprünglichen Problems mit der Gruppe G. Da G einfach ist, gelangt man so schließlich zu einem solchen System Integralgl. des ursprünglichen Problems, das nur bei der ident. Trf. invariant bleibt, das also die Lösung dieses Problems darstellt (vgl. S. *806—809*). Übrigens würde dasselbe auch dann gelten, wenn G' nicht eine Gr. in möglichst wenigen Veränderlichen wäre.

S. 565, Z. 2 v. u. —566, Z. 7. Th. d Trfsgr. Bd. II, S. 253, 259.

S. 566, Z. 8—14. Hier Abh. XVIII (1895), S. 431—445.

S. 566, Z. 15—22. Das Normalproblem ist hier die Reduktion eines Pfaffschen Ausdrucks:

$$\sum_{\nu}^{1 \ldots n} \alpha_\nu(y_1, \ldots, y_n)\, dy_\nu$$

auf seine Normalform, wenn diese die Gestalt: $p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m$ hat. Bd. III d. Ausg. Abh. XI (1873), S. 126—148. Abh. XXI (1877), S. 335—345.

S. 569, Z. 4 v. u. Das hat zuerst Jacobi erkannt. Siehe: „Theoria novi multiplicatoris etc.", Crelle, Bd. 27 (1844), S. 203 (Werke Bd. IV, S. 323).

S. 570, Z. 14, 13 v. u. Vgl. Bd. III, Abh. X (1873), S. 123f., Satz 5, denn die Lösung f hat die Form:

$$f = \chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) + \Omega(\psi_1, \ldots, \psi_{n-2}),$$

wo Ω eine willkürliche Funktion ist.

S. 572, Z. 18. Eigentlich: „die der Gl. $\sum \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{x}_i} = 0$ genügt und die mit ...".

S. 575, Z. 13—20. Man kann auch so schließen: Setzt man die linken Seiten von (9) gleich Null, so erhält man n lin. part. Diffgl., die $n-2$ unabh. Lösungen gemein haben, nämlich: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-2}$, und die infolgedessen ein zweigliedriges vollständiges System bilden. Die Gl. (9) selbst reduzieren sich daher auf gerade zwei von einander unabhängige, auf die der vorhin angeführte Satz 5, Bd. III, S. 123f. anwendbar ist.

S. 576, Z. 12—10 v. u. Eigentlich müßte hinzugesetzt werden: „die aber nicht aus lauter invarianten Mann. dieser Art besteht".

S. 577, Z. 6f. Vgl. S. 544, Anm.

S. 580, Z. 4—7. Dieser Satz ist übrigens schon in Abh. XVIII (1895) enthalten, und zwar in der Gl. S. 446, Z. 1 v. u.

S. 580, Z. 14. Vgl. Abh. V (1888), S. 234f., Nr. 10.

S. 580, Z. 19—22. Siehe Abh. III (1885), S. 162.

S. 582, Z. 1f. Vgl. S. 569, Z. 4 v. u. und die Anm. dazu.

S. 585ff. Dieses Kapitel 5 ist zum Teil eine Umarbeitung von Bd. V d. Ausg. Abh. XVI (1884), § 1, S. 433—440. In den Anm. dazu (a. a. O. S. *740*) hätte auch auf die Bd. III, S. *676f.* abgedruckte Stelle aus einem Briefe an A. Mayer verwiesen werden sollen, die überschrieben ist: „Ausdehnung des Poisson-Jacobischen Satzes". Außerdem habe ich übersehen, daß Lie Ende 1882 oder Anfang 1883 in einem Briefe an F. Klein diese Untersuchungen erwähnt. Es heißt da:

„Meine alten Sätze über allerlei Multiplikatoren, inf. Trff., usw. habe ich im Laufe des Winters ein bißchen komplettiert. Ich habe nämlich gefunden, daß in den bei mir ungünstigen Fällen, wo sich die Integration nicht auf Quadratur reduzieren läßt, eben eintritt, daß, wenn die erste Hilfsgl. zufälligerweise erledigt ist, daß dann die nächste Hilfsgl. nicht einmal (wie früher bei mir) eine Quadratur, sondern nur Differentiation verlangt.

„Ich habe eine Reihe schöner Beispiele vollständig durchgeführt. Besonders Gleichungen:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}),$$

die $y^{(n-1)}$ nicht enthalten und dabei eine Trfsgr. gestatten".

Vgl. Bd. V, Abh. XVI (1884), S. 437, Z. 6—2 v. u. und hier S. 590, Nr. 75.

Endlich ist noch zu erwähnen, daß Lie die hier entwickelte Theorie auch in der nachher folgenden Abh. XXV (1896), S. 619, Nr. 3 erwähnt und unter einem Gesichtspunkte von großer Allgemeinheit betrachtet.

S. 585, Z. 10 v. u. bis 586, Z. 3. Einen Beweis dieses Satzes findet man Bd. III d. Ausg., S. *679—683*.

S. 586, Z. 6, 5 v. u. Dabei darf man natürlich nicht vergessen, daß der Multiplikator M von Af bei Einführung neuer Veränderlicher mit einer Potenz der Funktionaldet. multipliziert wird (Bd. III d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 196). Hier, wo die benutzte Trf. alle Volumina invariant läßt, und wo $M = 1$ ist, bleibt selbstverständlich: $M = 1$.

S. 588, Z. 14—16. Gemäß S. 557—560 kann man zunächst das System S. 587, Z. 11—13 auf eine kanonische Form bringen. Es sind nämlich alle Ausdrücke:

$$\text{(I)}\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-} \\ x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_{n-2}} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1} \\ x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_{n-1}} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{vmatrix},$$

wo: $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ Zahlen aus der Reihe: $1, \ldots, n$ bedeuten, Differentialinvarianten der Gruppe G und daher solche Fkt. von: $x_1, \ldots, x_n$, die berechnet werden können. Hieraus folgt, daß die in Nr. 72 angegebenen Integrationsoperationen zur Bestimmung von: $\mathfrak{x}_{n-2}, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{x}_n$ führen, sobald man $n-3$ unabh. Lös. des Systems: $Af = 0$, $Bf = 0$ gefunden hat.

Daß diese Integrationsop. die einfachsten sind, folgt aus der Zusammensetzung der Gruppe G. Setzt man nämlich in der allg. inf. Trf. Cf von G erst: $\gamma_n = 0$, dann: $\gamma_n = \gamma_{n-1} = 0$, so erhält man zwei Untergruppen G_1 und G_2 von G, die beide in G invariant sind. Dabei ist G_1 eine größte inv. Untergr. von G, und G_2 ist eine größte inv. Untergr. von G_1. Überdies ist G_2 holoedrisch isomorph zu der größten Gr. in $n-2$ Veränd., die alle Volumina inv. läßt. Demnach ist G_{n-2} einfach.

Differentialinv. von G_1 sind nun zunächst alle Diffinv. (I) von G. Das sind in unserem Falle die auf S. 559—561 mit: $J_1, \ldots, J_\mu$ bezeichneten Größen, die bekannte Fkt. von: $x_1, \ldots, x_n$ sind. Außerdem aber hat G_1 noch die Diffinv. $\mathfrak{x}_n$, die jetzt den auf S. 561 mit: $J_1', \ldots, J_{\mu'}'$ bezeichneten Größen entspricht und zu deren Bestimmung man die Diffgl.:

$$\text{(II)}\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{vmatrix} = 1$$

hat. Das ganze Integrationsproblem zerfällt also in die beiden: Erstens: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$ so zu bestimmen, daß die Diffinv.:

$$\text{(III)}\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-2} \\ x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_{n-2}} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1} \\ x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_{n-1}} \end{vmatrix}$$

von G_1 gleich den bekannten Funktionen von: $x_1, \ldots, x_n$ werden, und sodann zweitens $\mathfrak{x}_n$ aus (II) zu bestimmen.

Das erste dieser Integrationsprobleme zerlegen wir weiter mit Hilfe der inv. Untergr. G_2 von G_1. Da G_2 außer den Diffinv. (III) von G_1 noch die Diffinv. $\mathfrak{x}_{n-1}$ besitzt, so müssen wir erstens: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-2}$ so bestimmen, daß die Diffinv.

$$\text{(IV)}\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-2} \\ x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_{n-2}} \end{vmatrix}$$

von G_2 gleich den bekannten Fkt. von $x_1, \ldots, x_n$ werden, und sodann müssen wir zweitens $\mathfrak{x}_{n-1}$ so bestimmen, daß die Ausdrücke

$$\text{(V)}\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1} \\ x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_{n-1}} \end{vmatrix}$$

gleich den bekannten Funktionen von: $x_1, \ldots, x_n$ werden.

Anfangen müssen wir mit der Bestimmung von: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-2}$ aus den Diffgl., die aussagen, daß die Ausdrücke (IV) bekannte Fkt. von: $x_1, \ldots, x_n$ sind. Die Gruppe dieses Integrationsproblems ist einfach und seine Integrationstheorie ist auf S. 567—575 entwickelt. Hieraus ergibt sich das auf S. 588, Z. 6—12 Gesagte.

Hat man ein Lösungssystem: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-2}$ gefunden, so ist $\mathfrak{x}_{n-1}$ bis auf eine additive willk. Fkt. von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-2}$ bestimmt und wird daher durch eine Quadratur gefunden. Endlich ist $\mathfrak{x}_n$ durch (II) bis auf eine additive willk. Fkt. von: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$ bestimmt und erfordert also zu seiner Bestimmung noch eine Quadratur.

Daß man, sobald: $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-3}$ bestimmt sind, $\mathfrak{x}_{n-2}$ durch eine Quadratur findet, folgt auch daraus, daß das vollst. System: $Af = 0$, $Bf = 0$ den Multiplikator 1 hat (S. 585, Z. 1 v. u. bis 586, Z. 3).

S. 589, Z. 1 v. u. Aus der zweiten Gl. Z. 4 v. u. folgt ja insbesondere:

$$\mathfrak{x}_{n-1} \frac{\partial \gamma_{n-1}}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} = \gamma_{n-1}.$$

S. 591, Z. 4, 16f., 23, 34f. Hier hat Lie überall vergessen, hinzuzufügen, daß die inf. Trf. mit Af vertauschbar sein muß.

In der Tat, die allgemeine Form einer inf. Trf. $B'f$, die die Charakt. von: $Af = 0$ genau so vertauscht, wie Bf, ist: $B'f = Bf + \varrho Af$. Soll nun $B'f$, wie im ersten Falle, Z. 1—6, der Gruppe G angehören, die alle Volumina invariant läßt, so muß sein:

$$\sum \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + A\varrho = 0,$$

also wird: $A\varrho = \lambda$ und:

$$(AB') = (-\lambda + A\varrho) Af = 0,$$

mithin ist $B'f$ immer mit Af vertauschbar. Soll $B'f$, wie im zweiten Falle, Z. 14f. der Gruppe angehören, die alle Volumina nach konstanten Verhältnissen ändert, so muß sein:

$$\sum \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + A\varrho = c;$$

aber es ist: $\sum \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + \lambda = a \neq 0$, also wird: $A\varrho = \lambda + c - a$ und:

$$(AB') = (-\lambda + A\varrho) Af = (c - a) Af,$$

mithin ist $B'f$ mit Af vertauschbar, wenn man $c = a$ wählt. Im dritten Falle endlich, Z. 21—23 ist:

$$\sum \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + \lambda = \omega(x_1, \ldots, x_n),$$

wo ω keine Konstante. Soll $B'f$ alle Volumina nach konstanten Verhältnissen ändern, so muß werden:

$$\sum \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + A\varrho = c,$$

also: $A\varrho = \lambda + \omega - c$, eine Gl., die immer durch geeignete Wahl von ϱ befriedigt werden kann. Jetzt aber wird:

$$(AB') = (-\lambda + A\varrho) Af = (\omega - c) Af,$$

also ist $B'f$ niemals mit Af vertauschbar.

Hiernach ist die Behauptung auf Z. 23f. unrichtig, wenn die Worte: „mit Af vertauschbare" fehlen. Es ist daher klar, daß diese Worte auch an den drei anderen Stellen hinzugefügt werden müssen, zumal, wenn man sich auch noch daran erinnert, welche Rolle auf S. 549—556 die mit Xf vertauschbaren inf. Trff. spielen.

Zu Abhandlung XXI, S. 592–601.

Die Arbeit war von Lie in deutscher Sprache abgefaßt, und die Herausgeber der Festschrift der École Normale haben sie ins Französische übersetzen lassen.

S. 595, Z. 11, 10 v. u. Nämlich in § III, S. 597 ff.

S. 597, Z. 4—2 v. u. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. XIII (1883), S. 314 ff. Bd. VI, Abh. II (1884), S. 112. Abh. XI (1891), S. 302. Abh. XVIII (1895), S. 396 f.

S. 598, Z. 20—23. Vgl. hier Abh. XVIII (1895), S. 397 Anm. und meine Anm. dazu, S. *884*.

S. 598, Z. 5—1 v. u., 599, Z 1 f. Bei Lies berühmter B. T., die die geraden Linien in die Kugeln überführt (Bd. I d. Ausg. Abh. VIII, IX (1870), XI, XII (1871); Bd II, Abh. I (1872)) geht ja die allgemeine projektive Gr. des R_3 über in eine fünfzehngliedrige Gr. von B. T., die größte Gr. von B. T., bei der die Schar aller Kugeln invariant bleibt.

S. 599, Z. 9—11. Man denke z. B. an diese Ausg. Bd. III, Abh. XIII, XIV (1874), Bd. VI, Abh. III (1885).

S. 599, Z. 11—18. Hier Abh. III, S. 186—202.

S. 599, Z. 18—24. Die Lösung des Problems verdankt man W. Killing, dessen Untersuchungen über die einfachen endl. kont. Gruppen von E. Cartan vervollständigt und in einigen Punkten berichtigt worden sind. Das auf Z. 21—24 Gesagte beruht offenbar auf einem Mißverständnisse. Es kann wohl nur die folgende Arbeit von Cartan sein, die Lie zu seinem Irrtum veranlaßt hat: „Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu". American Journal of Math. Bd. XVIII (1896), S. 1—61. Darin bestimmt nämlich Cartan die Galoisschen Gruppen der algebraischen Gleichungen, die bei dem von ihm behandelten Probleme auftreten, und er gelangt dabei in drei Fällen zu einfachen Permutationsgruppen, die nicht mit der Gruppe aller geraden Permutationen gleichzusammengesetzt sind. Aber neue einfache Gruppen dieser Art findet er nicht.

S. 599, Z. 25—27. Vgl. hier Abh. XX (1895), S. 539 ff.

S. 599, Z. 7 v. u. bis 600, Z. 4. Lie denkt hier an die Untersuchungsrichtung, die Picard eröffnet hat und in der Vessiot in seiner Thèse[1]) mit so großem Erfolge weiter gegangen ist. Lies eigene Untersuchungen über gew. lineare Diffgl. höherer O. (Bd. VI, Abh. III (1885), S. 200 f.; Bd. V, Abh. XXI (1885); Leipz. Ber. 1891, S. 253—270 (Bd. IV d. Ausg. Abh. V (1891)), vgl. auch Bd. VI, Abh. XXV (1896), S. 623—628) unterscheiden sich von den Picard-Vessiotschen dadurch, daß Lie immer den Fall behandelt, daß schon gewisse partikuläre Integralgleichungen bekannt sind. Diese Voraussetzung zieht nach sich, daß ein gewisser Rationalitätsbereich von vornherein ausgezeichnet, und daß die zugehörige Gruppe des Problems von vornherein bestimmt ist. Genau ebenso verhält es sich überhaupt bei allen den Integrationstheorien, die Lie aufgestellt hat.

S. 600, Z. 13—19. Siehe hier Abh. II (1884), S. 104, 134 f.

S. 600, Z. 20—34. Siehe hier Abh. XX (1895).

S. 600, Z. 3—1 v. u.—601, Z. 2. Bd. V d. Ausg. Abh. XIII (1883), S. 360. Bd. VI, Abh. XVIII (1895), S. 450. Bd. V, Abh. IV (1878), S. 107—117. Abh. V (1878), S. 156. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 29.

---

1) Sur l'intégration des équations différentielles linéaires, Annales de l'Ecole Norm. III. Serie, Bd. IX (1892), S. 197—280.

Zu Abhandlung XXII, S. 601.

S. 601, Z. 10—8 v. u. Bd. III d. Ausg. Abh. XIII, XIV (1874).

S. 601, Z. 6, 5 v. u. A. a. O. S. 188, Z. 13 f., S. 194. Ferner Math. Ann. Bd. XI (1877), S. 500 Anm. (d. Ausg. Bd. IV, Abh. III, § 8, Nr. 17). Endlich hier Abh. III (1885[1])), S. 141, 223. Vgl. auch hier Abh. XX (1895), S. 539, Z. 15—22.

S. 601, Z. 5—1 v. u. Von diesem Plane ist nur ein Bruchstück zur Ausführung gekommen, hier Abh. XXIII (1895), S. 612—614.

Zu Abhandlung XXIII, S. 602–614.

S. 602, Z. 9—5 v. u. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 289.

S. 603, Z. 9—6 v. u. Bd. III d. Ausg., Abh. VII (1873), S. 40, Satz 6; S. 47, Korollar 2.

S. 604, Z. 14 f. Diese Spiraltrff. sind solche Trff. der viergl. Gr.: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, H_1, die keine Bewegungen sind.

S. 604, Z. 16 f. Die inf. B. T. H_2 erzeugt die eingl. Gr. der Dilatationen. Über die Fußpunkttrff. vgl. Geom. d. B. T. (1896), S. 62—65.

S. 604, Z. 1 v. u.—605, Z. 8. Die endl. Trff. der von:

$$H_3 = \sqrt{\Sigma(\mathfrak{x}\mathfrak{q} - \mathfrak{y}\mathfrak{p})^2}$$

erzeugten eingl. Gr. werden bestimmt durch die Diffgl.

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = \dfrac{\partial H_3}{\partial \mathfrak{p}} = \dfrac{\mathfrak{p}\,\Sigma\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{x}\,\Sigma\mathfrak{x}\mathfrak{p}}{H_3}, \\ \dfrac{d\mathfrak{p}}{dt} = -\dfrac{\partial H_3}{\partial \mathfrak{x}} = \dfrac{\mathfrak{p}\,\Sigma\mathfrak{x}\mathfrak{p} - \mathfrak{x}\,\Sigma\mathfrak{p}^2}{H_3}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

mit den Anfangsbedingungen: $(\mathfrak{x})_{t=0} = x, \ldots$ Demnach wird, wie auch schon auf S. 604 erwähnt ist:

$$(2)\qquad \Sigma\mathfrak{x}^2 = \Sigma x^2, \quad \Sigma\mathfrak{p}^2 = \Sigma p^2, \quad \Sigma\mathfrak{x}\mathfrak{p} = \Sigma xp.$$

Setzen wir nun:

$$(3)\qquad u = \Sigma x\mathfrak{x}, \quad v = \Sigma x\mathfrak{p},$$

so kommt:

$$(4)\qquad \begin{cases} H_3 \dfrac{du}{dt} = \Sigma\mathfrak{x}^2 . \Sigma x\mathfrak{p} - \Sigma\mathfrak{x}\mathfrak{p} . \Sigma x\mathfrak{x} = \Sigma x^2 . v - \Sigma xp . u, \\ H_3 \dfrac{dv}{dt} = \Sigma\mathfrak{x}\mathfrak{p} . \Sigma x\mathfrak{p} - \Sigma\mathfrak{p}^2 . \Sigma x\mathfrak{x} = \Sigma xp . v - \Sigma p^2 . u, \\ H_3^2 \dfrac{d^2u}{dt^2} = \Sigma x^2(\Sigma xp . v - \Sigma p^2 . u) - \Sigma xp(\Sigma x^2 . v - \Sigma xp . u) = -H_3^2 u, \end{cases}$$

und, da $\dfrac{du}{dt}$ für $t = 0$ verschwindet:

$$\Sigma x\mathfrak{x} = \Sigma x^2 . \cos t,$$

woraus folgt:

$$(5)\qquad (\Sigma x\mathfrak{x})^2 - \cos^2 t . \Sigma x^2 . \Sigma\mathfrak{x}^2 = 0.$$

Es ist also: $m = \cos t$.

---

1) Die Abh. ist zwar erst 1885 erschienen, aber vom Juli 1884 datiert.

S. 605, Z. 20 f. Das zeigen die Gl.:

$$\Sigma d\mathfrak{x}^2 = dt^2, \quad \Sigma(\mathfrak{y}\mathfrak{r} - \mathfrak{z}\mathfrak{q})\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = 0,$$

die aus (1) folgen. Die Ausdrücke: $\mathfrak{y}\mathfrak{r} - \mathfrak{z}\mathfrak{q} : \ldots$, sind ja die Richtungskoeff. des durch den Punkt: $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gehenden Linienelementes, das von dem Flächenelemente: $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{u} : \mathfrak{v} : \mathfrak{w}$ auf der Kugelfläche: $\Sigma\mathfrak{x}^2 = \Sigma x^2$ ausgeschnitten wird.

S. 605, Nr. 6. Zu einer gegebenen Fläche F erhält man ihre Apsidalfläche Φ z. B. auf den Nullpunkt O folgendermaßen: Ist P ein beliebiger Punkt von F, so bestimmt man in der zu P gehörigen Tangentialebene von F die Tangente von F, die auf OP senkrecht steht, legt durch OP die Ebene, die diese Tangente enthält, und trägt von O aus, senkrecht zu dieser Ebene, die Länge OP ab. Die beiden so erhaltenen Punkte $\mathfrak{P}$ gehören der Apsidalfläche Φ an. Man sieht sofort, daß zwischen den Koord. von P und $\mathfrak{P}$ die Gl.:

$$\Sigma\mathfrak{x}^2 - \Sigma x^2 = 0, \quad \Sigma x\mathfrak{x} = 0$$

bestehen. Das sind die Leitgleichungen (aequ. dir.) der Apsidaltrf. Vgl. Encykl. d. Math. Wiss. Bd. III, 3, Heft 4 (1915), S. 469 f. (Artikel B T. von H. Liebmann.)

S. 606, Z. 11—14. Es ist ja: $H_3^2 = \Sigma x^2 . H_2^2 - H_1^2$.

S. 606, Z. 14—16. Wählt man der Einfachheit wegen: $\Sigma p^2 = 1$, so hat man für die Krümmungslinien die Gl.: $dx + \varrho dp = 0, \ldots$, wo ϱ ein Hauptkrümmungshalbm. ist. Daraus folgt:

$$\varrho . d\Sigma xp = -\Sigma x dx.$$

Andrerseits ist, wenn man: $\Sigma x^2 = \mathfrak{r}^2$ setzt:

$$\Sigma xp = \mathfrak{r}\Omega(\mathfrak{r}^2).$$

Demnach erhält man für die eine Schar Krümmungslinien:

$$d_1\Sigma x^2 = 0, \quad \Sigma x^2 = \text{const.},$$

für die andere:

$$-\mathfrak{r} = \varrho_2(\Omega(\mathfrak{r}^2) + 2\mathfrak{r}^2\Omega'(\mathfrak{r}^2)).$$

Wir haben nunmehr für die erste Schar:

$$\Sigma p d_1 x = 0, \quad \Sigma x d_1 x = 0,$$

also:

$$d_1 x : d_1 y : d_1 z = yr - zq : \cdots.$$

Für die zweite ist:

$$\Sigma p d_2 x = 0, \quad \Sigma d_1 x . d_2 x = 0,$$

mithin wird:

$$\begin{aligned} d_2 x : d_2 y : d_2 z &= q d_1 z - r d_1 y : \cdots \\ &= x - p\Sigma xp : \cdots. \end{aligned}$$

Benutzen wir daher $\mathfrak{r}$ als unabh. Veränd., so erhalten wir für die zweite Schar die Diffgl.:

$$\frac{dx}{d\mathfrak{r}} = \frac{1}{\mathfrak{r}(1-\Omega^2)}(x - \mathfrak{r}\Omega p), \ldots, \quad \frac{dp}{d\mathfrak{r}} = \frac{\Omega + 2\mathfrak{r}^2\Omega'}{\mathfrak{r}^2(1-\Omega^2)}(x - \mathfrak{r}\Omega p), \ldots$$

Hierin liegt, daß die Krümmungslinien der zweiten Schar wirklich auf ∞^1 Ebenen durch den Koordinatenanfang liegen. Vgl. auch Monge, Application de l'analyse à la géométrie, 5. Ausg., Paris 1850, S. 309 ff.

S. 606, Z. 8—6 v. u. Vgl. Bd. III d. Ausg., Abh. XIII (1874) S. 184, Nr. 5. Es ist klar, daß genau ebenso jede inf. B. T. des Raumes, die ein unbeschränkt integrables System: $p = \alpha(x, y, z)$, $q = \beta(x, y, z)$ inv. läßt, eine inf. P. T. liefert,

bei der die Pfaffsche Gl.: $dz - \alpha dx - \beta dy = 0$ inv. bleibt. Demnach kann man dann (a. a. O. Abh. XIV (1874), S. 200) einen Eulerschen Integrabilitätsfaktor der letzten Gl. angeben.

S. 606, Z. 5—3 v. u. Aus den Relationen S. 602, Z. 14 ergibt sich:

$$(X_1 + iX_2, X_3) = i(X_1 + iX_2).$$

Setzen wir daher:

$$\Pi_1 = X_1 + iX_2, \quad \Pi_2 = H_2, \quad \Pi_3 = H_3 = \sqrt{\Sigma X_k^2},$$
$$\Xi_1 = -i\frac{X_3}{X_1 + iX_2}, \quad \Xi_2 = \frac{H_1}{H_2},$$

so stehen die fünf Fkt. Π_i, Ξ_k in den kanonischen Beziehungen. Nunmehr können wir die beiden intermediären Integralgl. S. 606, Z. 5, 7 folgendermaßen darstellen:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_3} = U(\Xi_1), \quad \frac{\Pi_2}{\Pi_3} = V(\Xi_2),$$

und in dieser Gestalt haben sie gerade die Form die Bd. III d. Ausg. Abh. XIX (1877), S. 289, Z. 7 benutzt wird. Da hier: $\Pi_1, \Xi_1, \Pi_2, \Xi_2, \Pi_3$ von vornherein bekannt sind, so finden wir (ebd. S. 292) Ξ_3 durch eine Quadratur.

S. 607, Z. 10—1 v. u. Vgl. hierzu die folgende Abh., Nr. XXIV, S. 615—617.

S. 607, Nr. 9. Die beiden dreigliedrigen Gruppen bilden zusammen die kontin. proj. Gr. der Fläche 2. O.: $z - xy = 0$ (Th. d. Trfsgr. Bd. III, S. 199).

S. 608, Nr. 10. Vgl. Bd. III d. Ausg. Abh. XXXVIII (1882), S. 537—540 und S. *752—759*. Das eine Bündel von linearen Komplexen wird durch die Gl.:

$$\text{(L)} \qquad \alpha d\mathfrak{x} + \gamma(d\mathfrak{z} - \mathfrak{x}d\mathfrak{y} + \mathfrak{y}d\mathfrak{x}) + A(\mathfrak{y}d\mathfrak{z} - \mathfrak{z}d\mathfrak{y}) = 0$$

dargestellt. In der Tat, bei Hinzunahme der Gl.: $d\mathfrak{z} = \mathfrak{p}d\mathfrak{x} + \mathfrak{q}d\mathfrak{y}$ ergibt sich:

$$\alpha + \gamma\mathfrak{y} + (\gamma + A\mathfrak{y})\mathfrak{p} = 0,$$
$$-\gamma\mathfrak{x} - A\mathfrak{z} + (\gamma + A\mathfrak{y})\mathfrak{q} = 0.$$

Faßt man nun $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ als die charakt. Fkt. von inf. B. T. auf und führt man an Stelle der homogenen Elementkoord. x, y, z, p, q, r die nichthomogenen:

$$\mathfrak{x} = x, \; \mathfrak{y} = y, \; \mathfrak{z} = z, \quad \mathfrak{p} = -\frac{p}{r}, \quad \mathfrak{q} = -\frac{q}{r}$$

ein, so erhält man nach Th. d. Trfsgr. Bd. II, S. 272 f. an Stelle der char. Fkt. $X_i f$ die folgende: $\mathfrak{X}_i = -X_i f : r$. Auf diese Weise ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= \mathfrak{q} - \mathfrak{x} = A\frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\gamma + A\mathfrak{y}}, \\ \mathfrak{X}_2 &= \mathfrak{y}\mathfrak{q} - \mathfrak{z} = -\gamma\frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\gamma + A\mathfrak{y}}, \\ \mathfrak{X}_3 &= -(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}\mathfrak{y})\mathfrak{p} + \mathfrak{y}^2\mathfrak{q} - \mathfrak{y}\mathfrak{z} \\ &= (\mathfrak{z} - \mathfrak{x}\mathfrak{y})\frac{\alpha + \gamma\mathfrak{y}}{\gamma + A\mathfrak{y}} + \mathfrak{y}^2\frac{\gamma\mathfrak{x} + A\mathfrak{z}}{\gamma + A\mathfrak{y}} - \mathfrak{y}\mathfrak{z} \\ &= \alpha\frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\gamma + A\mathfrak{y}}. \end{aligned}$$

Die erste Gl. S. 608, Z. 8, die auch:

$$\text{(M)} \qquad \frac{\mathfrak{X}_2}{\mathfrak{X}_3} = \varphi\left(\frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_3}\right)$$

geschrieben werden kann, bestimmt daher ∞^1 Komplexe des Bündels (L), die durch die Gl.:

$$-\gamma : \alpha = \varphi(A : \alpha)$$

ausgeschieden werden. Auf jeder Integralfläche der Gl. (M) gehört jede Haupttangentenkurve der einen Schar einem dieser ∞^1 linearen Komplexe an.

Die Gl. des zweiten Bündels von lin. Kompl. ergibt sich aus (L) durch Vertauschung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$.

S. 608, Nr. 11. Man kann auch schreiben:

$$\Omega = \sqrt{(xy-z)(p+yr)(q+xr)-(xy-z)^2 r^2}$$

und hat dann für die eingl. Gr., die von der inf. B. T. mit der char. Fkt. Ω erzeugt wird, gewisse Diffgl., von denen wir nur die folgenden hinschreiben:

$$\frac{dx}{dt} = \Omega_p = \frac{1}{2}\frac{(xy-z)(q+xr)}{\Omega},$$

$$\frac{dy}{dt} = \Omega_q = \frac{1}{2}\frac{(xy-z)(p+yr)}{\Omega},$$

$$\frac{dz}{dt} = \Omega_r = \frac{1}{2}(xy-z)\frac{xp+yq+2zr}{\Omega},$$

$$\frac{dr}{dt} = -\Omega_z = \frac{1}{2}\frac{(p+yr)(q+xr)-2(xy-z)r^2}{\Omega}.$$

Dazu kommen noch die Anfangsbedingungen: $(x)_{t=0} = x_1, \ldots$ Hieraus folgt: $\Omega = \Omega_1$, und da Ω mit den $X_i f$ und $H_i f$ in Involution liegt, so wissen wir von vornherein, daß die Gl.:

$$q+xr = q_1 + x_1 r_1, \quad yq+zr = y_1 q_1 + z_1 r_1, \ldots,$$

$$p+yr = p_1 + y_1 r_1, \quad xp+zr = x_1 p_1 + z_1 r_1, \ldots$$

bestehen.

Nun wird:

$$\frac{d}{dt}(xy-z) = \frac{(xy-z)^2 r}{\Omega}$$

und:

$$\frac{d}{dt}(xy_1+yx_1-z-z_1) = \frac{1}{2}\frac{xy-z}{\Omega}\{y_1(q+xr)+x_1(p+yr)-(xp+yq+2zr)\}$$

$$= \frac{(xy-z)(x_1y_1-z_1)r_1}{\Omega_1}.$$

Setzen wir:

$$xy-z = u, \quad (xy-z)r = v,$$

so haben wir:

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 = u(p_1+y_1q_1)(q_1+x_1r_1)-v^2,$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv}{\Omega_1}, \quad 2\frac{dv}{dt} = \frac{u(p_1+y_1r_1)(q_1+x_1r_1)}{\Omega_1},$$

mithin:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_1^2+v^2}{\Omega_1}$$

und:

$$v = \Omega_1 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}t+a), \quad (x_1y_1-z_1)r_1 = \Omega_1 \operatorname{tg} a.$$

Weiter ergibt sich:

$$\frac{du}{dt} = u \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}t+a),$$

$$u = xy-z = \frac{b}{\cos^2(\frac{1}{2}t+a)}, \quad b = (x_1y_1-z_1)\cos^2 a,$$

$$xy_1+yx_1-z-z_1 = 2b\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}t+a).\operatorname{tg} a + c,$$

$$2(x_1y_1-z_1) = 2b\operatorname{tg}^2 a + c = \frac{2b}{\cos^2 a},$$

mithin: $c = 2b$ und:

$$xy_1+yx_1-z-z_1 = \frac{2b\cos\frac{1}{2}t}{\cos a.\cos(\frac{1}{2}t+a)},$$

demnach schließlich:

$$\frac{(z+z_1-y_1x-x_1y)^2}{(z-xy)(z_1-x_1y_1)} = \frac{1}{m} = 4\cos^2\tfrac{1}{2}t.$$

S. 609, Z. 1—7. „Über Komplexe usw.", Ann. V (1872), S. 154 und 219 f. (d. Ausg. Bd. II, Abh. I, § 3, Nr. 10; § 21, Nr. 64). Vgl. auch Bd. III d. Ausg., S. *756*, Z. 21—14 v. u.

S. 609, Z. 18—21. Vgl. hier Abh. III (1885), S. 169, 181, Theor. II.

S. 609, Z. 1 v. u.—610, Z. 5. Nach Bd. III d. Ausg., Abh. VIII (1873), S. 72, Satz 3 kann die Gruppe in der Form: $N_1, \ldots, N_{r-1}, P$ angenommen werden, wo die N_k homogen von nullter O. in den p sind, P aber homogen von 1. O., und wo Relationen von der Form:

$$(N_i N_k) = \frac{1}{P} w_{ik}(N_1, \ldots, N_{r-1})$$

bestehen.

S. 610, Z. 22—27. In der Tat, sind: $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{2n-r}$ unabh. Fkt., so wird:

$$(u_i u_k) = w_{ik}(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{2n-r}) \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

und:

$$(V(u_1, \ldots, u_r), f(u_1, \ldots, u_r)) = \sum_{ik}^{1\ldots r} w_{ik}(u, v)\frac{\partial V}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial v_k} = 0.$$

Soll diese Gl. für jedes V eine Diffgl. in: $u_1, \ldots, u_r$ allein sein, so dürfen die w_{ik} die Veränd.: $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ höchstens in einem, allen w_{ik} gemeinsamen Faktor: $\varrho(u, v)$ enthalten.

S. 610, Z. 10—7 v. u. Bd. III d. Ausg., Abh. VII u. VIII (1873).

S. 611, Z. 15—18. Es ist:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} & 0 \\ 0 & \varphi_{34} & \varphi_{42} & \varphi_{23} \\ \varphi_{34} & 0 & \varphi_{41} & \varphi_{13} \\ \varphi_{24} & \varphi_{41} & 0 & \varphi_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{34} & \varphi_{42} & \varphi_{23} \\ \varphi_{34} & 0 & \varphi_{41} & \varphi_{13} \\ \varphi_{24} & \varphi_{41} & 0 & \varphi_{12} \\ \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{34} & \varphi_{42} & \varphi_{23} \\ \varphi_{43} & 0 & \varphi_{14} & \varphi_{31} \\ \varphi_{24} & \varphi_{41} & 0 & \varphi_{12} \\ \varphi_{32} & \varphi_{13} & \varphi_{21} & 0 \end{vmatrix}.$$

In der **Plückerschen** Liniengeometrie aber wird gezeigt, daß die letzte Determinante gleich ist der Det., die man erhält, wenn man jedes φ_{ik} ersetzt durch φ_{jl}, unter: i, k, j, l eine gerade Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4 verstanden.

S. 611, Z. 9—6 v. u. Setzt man:

$$\frac{u_k}{\varrho} = v_k \;(k=1,\ldots,4), \quad \frac{1}{\varrho} = v_5,$$

so werden alle: $(v_i v_k)$ $(i, k = 1, \dots, 5)$ homogen von 1. O. in: $v_1, \dots, v_5$. Daher ist das Theorem 38, Th. d. Trfsgr. Bd. II, S. 248 anwendbar.

S. 612, Z. 18—16 v. u. Ist nicht geschehen.

S. 612, Z. 14—10 v. u. Vgl. Abh. XXII, S. 601 und die Anm. dazu.

S. 613, Z. 3—9. Nach Abh. III (1885), S. 150, Nr. 3. Im allgemeinen kann man die $\Phi_k f$ in der Gestalt:

$$\Phi_k f = \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} + \sum_{\mu}^{1 \dots q-l} w_{k\mu}(\varphi_1, \dots, \varphi_q) \frac{\partial f}{\partial \varphi_{l+\mu}} + \sum_i \psi_{ki} \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k = 1, \dots, l)$$

annehmen, wo die $(\Phi_k \Phi_j)$ sich linear durch die $Y_\nu f$ allein ausdrücken lassen müssen. Das macht aber keinen wesentlichen Unterschied, da die verkürzten Gl.:

$$\Phi_k f - \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} + \sum_{\mu}^{1 \dots q-l} w_{k\mu} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{l+\mu}} = 0 \qquad (k = 1, \dots, l)$$

ein l-gliedriges vollst. System bilden, dessen, allerdings unbekannte, Lösungen man sich ebenso wie auf S. 614 an Stelle von: $\varphi_{l+1}, \dots, \varphi_q$ als neue Veränd. eingeführt denken kann.

S. 613, Z. 12—9 v. u. Man kann zunächst die v_{ki} so wählen, daß:

$$\begin{aligned}
(\Phi_k Y_1) &= v_{k12} Y_2 + v_{k13} Y_3, \\
(\Phi_k Y_2) &= v_{k22} Y_2, \\
(\Phi_k Y_3) &= v_{k31} Y_1 + v_{k32} Y_2 + v_{k33} Y_3
\end{aligned}$$

wird. Die Jacobische Identität zwischen: Φ_k, Y_1, Y_2 liefert dann: $v_{k12} = v_{k13} = v_{k22} = 0$, die zwischen: Φ_k, Y_2, Y_3 ergibt: $v_{k31} = v_{k32} = 0$, endlich folgt: $v_{k33} = 0$ aus der zwischen: Φ_k, Y_3, Y_1.

S. 613, Z. 6, 5 v. u. Aus den Gl: $((\Phi_i \Phi_k) Y_j) = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ folgt: $(\Phi_i \Phi_k) = 0$, weil die Gr.: Y_1, Y_2, Y_3 keine ausgezeichnete inf. Trf. enthält.

S. 614, Z. 4, 3 v. u. Man würde nämlich selbst dann, wenn man das vollst. Syst. Z. 3 v. o. integriert hätte, gar keinen Vorteil haben, sondern einem Integrationsprobleme gegenüberstehen, das genau ebenso schwierig ist, wie das Integrationsproblem, das man erhält, wenn man die Gl.: $Af = 0$, S. 613, Z. 5 integrieren soll und dabei unter den bekannten inf. Trff.: $\Phi_k f$ und: $Y_\nu f$ die $\Phi_k f$ ganz wegläßt.

Zu Abhandlung XXIV, S. 615—617.

S. 615, Z. 6—17. Systematisch verwendet Lie die B. T. zum ersten Male in der Abh.: „Über die Reziprozitätsverhältnisse des Reyeschen Komplexes" (Gött. Nachr. 1870, d. Ausg. Bd. I, Abh. V) und dann in: „Sur une transformation géométrique" (C. R. 1870, d. Ausg. Bd. I, Abh. VIII). „Om en Classe geometriske Transformationer" (Christ. Forh. 1870, d. Ausg. Bd. I, Abh. IX). Inf. B. T. benutzt er in: „Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen" (Gött. Nachr. 1871, Bd. I, Abh. XVI). „Kurzes Résumé usw." (Christ. Forh. 1872, Bd. III, Abh. I) und dann in Bd. III, Abh. V. In Bd. III, Abh. VI—IX (1872, 73) wird dann die Invariantentheorie der B. T. entwickelt.

S. 615, Z, 10, 9 v. u. Weder die Leipziger Berichte von 1893 noch die Verhandlungsniederschriften für dieses Jahr enthalten etwas über den Vortrag. Das einzige, was vielleicht darauf hindeutet, ist die Tatsache, daß Lie am 8. 5. 1893 eine Arbeit von P. Stäckel in Halle a. S. vorgelegt hat: „Über dynamische Probleme, deren Diffgl. eine inf. Trf. gestatten" (Leipz. Ber. 1893, S. 331—340). Es ist sehr gut möglich, daß Lie diese Gelegenheit benutzt hat, um solche Gedanken auszusprechen. Leider erinnere ich mich gar nicht mehr an das, was er damals gesagt hat.

S. 616, Z. 21 f. Jamin, Cours de physique de l'École polytechnique, Bd. III, Paris 1866.

S. 616, Z. 17—13 v. u. Die B. T., die durch einen Flächenkomplex:

$$F(x, y, z;\ a, b, c) = 0$$

definiert wird (Th. d. Trfsgr. Bd. II, S. 51, Satz 2) ist im allgemeinen mehrdeutig, führt also jede Fläche f in eine Anzahl von Flächen: $f_1, f_2, \dots$ über. Dann gibt es eine bestimmte B. T., die jede Fläche f_1 in die Fläche f_2 überführt, eine, die f_2 in f_3 überführt, usw. Zum Beispiel definiert der Komplex aller Kugeln mit konstantem Halbmesser:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1^2) = r^2$$

eine B. T., bei der jede Fläche in die zwei Parallelflächen im Abstande r übergeht. Alle Kugeln des Komplexes, die die eine Parallelfl. berühren, umhüllen zugleich die zweite, und der Übergang von der ersten Parallelfl. zur zweiten ist eine B. T., die auch durch den Komplex aller Kugeln mit dem Halbm. $2r$ definiert werden kann.

S. 617, Z. 2. S. die Arbeit von Malus: „Optique", Journal de l'Éc. polyt. Tom. VII, Cahier XIV (1808), S. 1—44, 84—129. Vgl. auch Lie-Scheffers, Geom. d B. T. (1896), S. 269—271.

S. 617, Z. 2—5. A. a. O. ersetzt Lie die Kugeln durch eine Schar von ∞^4 ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen, also durch eine Schar:

$$(1) \qquad F\left(\frac{x-a}{\varrho},\ \frac{y-b}{\varrho},\ \frac{z-c}{\varrho}\right) = 0$$

mit den Parametern: a, b, c, ϱ. Der Paralleltrf. entspricht da eine B. T., die durch die Leitgleichung:

$$(2) \qquad F\left(\frac{\mathfrak{x}-x}{\varrho},\ \frac{\mathfrak{y}-y}{\varrho},\ \frac{\mathfrak{z}-z}{\varrho}\right) = 0$$

mit festem ϱ, bestimmt wird, und bei der die Punkte: x, y, z in den Komplex der ∞^3 kongruenten Flächen (2) übergehen, der in der Schar der ∞^4 Fl. (1) enthalten ist. Diese B. T. wird durch die Gl.:

$$F = 0, \quad F_x + pF_z = 0, \quad F_y + qF_z = 0, \quad F_{\mathfrak{x}} + \mathfrak{p}F_{\mathfrak{z}} = 0, \quad F_{\mathfrak{y}} + \mathfrak{q}F_{\mathfrak{z}} = 0$$

dargestellt und hat daher die Gestalt:

$$(3) \quad \mathfrak{x} = x + \varrho\varphi(p, q), \quad \mathfrak{y} = y + \varrho\chi(p, q), \quad \mathfrak{z} = z + \varrho\psi(p, q), \quad \mathfrak{p} = p, \mathfrak{q} = q.$$

Faßt man ϱ als einen willk. Parameter auf, so stellen die Gl. (3) eine eingliedrige Gr. von B. T. dar, die der unendlichen Gruppe von B. T. angehört, bei der die Gr. aller Translationen inv. bleibt (vgl. hier Abh. XVIII (1895), S. 396, Nr. 1; Bd. III d. Ausg., S. *623*).

Jedes Element: x, y, z, p, q nimmt bei der eingl. Gr. (3) ∞^1 Lagen an, deren Punktort (der Ort der Punkte der ∞^1 Elemente) eine Gerade ist. Das ist die Pseudonormale des betr. Elementes. Mit Hilfe dieser Pseudonormalen kann man auf jeder Fläche Pseudokrümmungslinien definieren. In jedem Punkte einer solchen Pseudokrümmungslinie gibt es dann unter den ∞^4 Flächen der Schar (1) eine, mit der die Fläche eine stationäre Berührung eingeht.

Zu Abhandlung XXV, S. 618—638.

S. 618, Z. 10 v. u. Hinter: „geht“ ist zu ergänzen: „bei dieser Transformation“.

S. 619, Z. 5—3 v. u. Es ist die Arbeit: „Über die Reziprozitätsverhältnisse des Reyeschen Komplexes“, deren Entwickelungen wenigstens zum Teil in Lie-Scheffers, Geom. d. B. T. (1896) wiedergegeben sind.

S. 619, Nr. 3. Da $A'f = 0$ bei der Trf. in eine Gl. derselben Kateg. übergeht, so kennt man, nach der gemachten Voraussetzung, für die transformierte Gl. von vornherein einen Multiplikator. Einen zweiten Multiplikator kann man angeben, weil man aus dem Multiplikator von $A'f$ einen Mult. der transformierten Gl. ableiten kann (Bd. III d. Ausg., Abh. XIV (1874), S. 195f.). Der Quotient dieser beiden Mult. ist dann die Lösung von $A'f = 0$, die man aufstellen kann.

Hier gibt Lie zum ersten Male den Gedanken an, der eigentlich diesen Betrachtungen zu Grunde liegt. Früher beschränkte er sich in seinen Veröffentlichungen immer auf den Fall, daß man von der Gl.: $A'f = 0$ einen Mult. kennt und eine inf. Trf., bei der sie inv. bleibt: Math. Ann. Bd. XI (1877), S. 506—512 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. III, § 10). Ebd. Bd. XX (1882), S. 431—438 (a. a. O. Bd. II, Abh. IV, Note 2, Nr. 39—42). D. Ausg., Bd. V, Abh. XVI (1884), S. 433ff. Bd. VI, Abh. XX (1895), S. 585ff.

S. 619, Z. 5, 4 v. u. Vgl. die eben angeführte Abh. Math. Ann. XX.

S. 619, Z. 2, 1 v. u. Vielleicht denkt Lie an die schon auf S. *902* erwähnte Arbeit von Stäckel, in der im n-dimensionalen Raume ein Problem behandelt wird, das eine Verallgemeinerung von Lies eigenen Untersuchungen über geodätische Linien ist. Übrigens war diese Verallgemeinerung, wenigstens für den Fall einer Fläche, schon vorher von O. Staude betrachtet worden: „Über die Bahnkurven eines auf einer Oberfläche beweglichen Punktes, welche inf. Trff. zulassen.“ Leipz. Ber. 1892, S. 429--446.

S. 620, Z. 5—15. Ist Bf die inf. B. T., so läßt diese das vollst. System invariant, von dem ψ eine Lösung ist. Es wird also: $B\psi = \chi$, wo χ wieder eine und zwar im allg. eine neue Lösung ist. Da nun das betr. vollst. Syst. höchstens zwei unabh. Lös. hat, so wird: $B\chi = \omega\,(\psi, \chi)$. Durch Integration einer gew. Diffgl. zwischen ψ und χ und eine Quadratur kann man nun die endl. Trff. der eingl. Gr. aufstellen, durch die χ, ψ bei der eingl. Gr. Bf transformiert werden, und findet so die Gl. mit zwei Parametern, in die $\psi = \alpha$ bei der eingl. Gr. Bf übergeht. Vgl. Bd. III d. Ausg., S. *619*ff.

S. 620, Nr. 6. Vgl. auch noch hier Abh. III (1885), S. 195f. Abh. XX (1895), S. 544ff. und meine Anm. dazu.

S. 623ff., Nr. 7. Dieselbe Theorie hatte Lie schon 1885 ganz kurz dargestellt: d. Ausg. Bd. V, Abh. XXI, S. 503—505 und ausführlicher 1891 in den Leipz. Ber. S. 253—270 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. V).

S. 625, Z. 6—12. Die Bestimmung der Mann., die man schließlich findet, ist genauer auseinandergesetzt: Leipz. Ber. 1891, S. 260ff. (Bd. IV d. Ausg., Abh. V, § 3)..

S. 626, Z. 4—7. Vgl. hier Abh. III (1885), S. 185.

S. 627, Z. 9—11. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 387, Satz 7.

S. 628, Z. 4. E. Picard, Sur les groupes de transformation des équations différentielles linéaires. C. R. Bd. 96 (1883), S. 1131—1134. Ferner: Sur les équ. diff. lin. et les groupes algébriques de transformations. Ann. de Toulouse Bd. I (1887), A, S. 1—15. E. Vessiot, Sur les équ. diff. lin. C. R. Bd. 112 (1891), S. 778—780, ferner die schon auf S. *896* angeführte Thèse von 1892. E. Picard, Sur les groupes de transf. des équ. diff. lin. C. R. Bd. 119 (1894), S. 584—589. Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équ. diff. ebd. Bd. 121 (1895), S. 789—792.

S. 628, Z. 6f. Diese Gruppe ist offenbar die Gr., bei der eine der auf S. 627f. definierten kleinsten algebr. Mann. inv. bleibt; sie läßt überhaupt jede solche kleinste Mann. inv.

S. 629, Z. 6. Führt man diese Beschränkung nicht ein, so hat das in der Tat nur die Folge, daß die Darstellung weniger bequem wird.

S. 629, Z. 14—12 v. u. Das folgt aus der Voraussetzung, daß in den Gl. (1), S. 628 die Parameter c_k wesentlich sind.

S. 631, Z. 4—1 v. u., 632, Z. 1—3. Over en Classe geometriske Transformationer. Christ. Forh. 1871, S. 102 (d. Ausg. Bd. I, Abh. X, § 11, Nr. 29). Über Komplexe, Ann. Bd. V (1872), S. 179 (ebd. Bd. II, Abh. I, § 12, Nr. 34). Lie-Scheffers, Geom. d. B. T. (1896), S. 206, 234—236.

S. 632, Z. 11—13. Eine Abh. von 1873: Bd. III d. Ausg., Abh. XI, S. 126—147.

S. 632f., Nr. 12. In derselben Sitzung der Sächs. Ges. d. Wiss., in der Lie die gegenwärtige Abh. vorgelegt hat (26. Juli 1896), habe ich eine Arbeit: „Das Pfaffsche Problem“ vorgelegt, die hinter der Lieschen, auf S. 413—430 abgedruckt ist. Ohne es zu wissen, arbeitete ich in dieser Abh. mit den Gedankengängen, von denen Lie selbst bei seinen ersten Untersuchungen über das Pfaffsche Problem ausgegangen ist, also besonders mit den inf. Trff., deren Zuwachse die Pfaffsche Gl. erfüllen. Selbstverständlich hatte ich meine Arbeit Lie zu lesen gegeben, bevor ich sie vorlegte, aber er sagte kein Wort darüber, daß ich im Grunde einen großen Teil dessen auseinandersetzte, was er selber schon 1872 gemacht hatte. Zweifellos ist aber der ganze zweite Teil der Lieschen Arbeit, von S. 631 an, niedergeschrieben worden, um mir gegenüber seine Priorität zu wahren. Das „Ich sehe mich dazu veranlaßt“, S. 632, Z. 21 geht auf mich.

S. 632, Z. 2 v. u. Im ersten Drucke steht: „auf das Pfaffsche und simultane Systeme“.

S. 633, Z. 7—10. Hiernach darf ich wohl annehmen, daß meine Entwickelungen über „Pfaffsches Problem u. inf. Trff.“, Bd. III d. Ausg., S. *661—668* im wesentlichen die ursprünglichen Gedanken Lies wiedergeben.

S. 633—635, Nr. 13, 14. Alles das ist bis ins Einzelnste durchgeführt in der schon in Bd. III d. Ausg. S. *712*, Z. 6f. angeführten Diss. von R. Palm (1914).

S. 635, Z 12f. Siehe die Bd. III, S. *585* angeführten Abh. II und III von Clebsch, aus den Jahren 1862, 63.

S. 636, Nr. 15. Vgl. meine Abh.: „Die inf. Trff. einer Pfaffschen Gl.“, Leipz. Ber. 1899, S. 296—315.

S. 636, S. 6—1 v. u. Die Elementtrf. soll selbstverständlich eine B. T. sein. „In sich verschoben“ wird ein Element von: $W = 0$, wenn es derart in ein unendl. benachb. Element von: $W = 0$ übergeführt wird, daß der Punkt z, x_i des Elementes auf der Ebene: $\mathfrak{z} - z = \Sigma p_i (\mathfrak{x}_i - x_i)$ des Elementes verschoben wird. Ist also:

$$\delta x_i = U_{p_i} \delta t, \quad \delta z = (\Sigma p_\nu U_{p_\nu} - U)\delta t, \quad \delta p_i = -(U_{x_i} + p_i U_z)\delta t$$

die inf. B. T., so muß für jedes El. z, x_i, p_i, das die Gl.: $W = 0$ erfüllt, werden:

$$\frac{\delta W}{\delta t} = [UW] - UW_z = 0, \quad \frac{\delta z}{\delta t} - \Sigma p_i \frac{\delta x_i}{\delta t} = - U = 0.$$

Vgl. Bd. III d. Ausg., S. *596—598*.

S. 637, Z. 5. Sie ist vom Dez. 1879 datiert.

S. 637, Z. 19—22. Vgl. Bd. III, S. *661—663*.

S. 637, Z. 2 v. u. „in allgemeinster Weise lösen“, d. h. $Q_1, \ldots, Q_q$, $Y_1, \ldots, Y_q$ sind in allgemeinster Weise als Funktionen von: $X_1, \ldots, X_q$, $P_1, \ldots, P_q$ und von: $X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$ so zu bestimmen, daß eine Gl. von der Form Z. 3 v. u. besteht, wenn man: $X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$ als Konstanten betrachtet. Die Lösung dieser

Aufgabe geschieht auf dem Bd. III d. Ausg., Abh. IX (1873), S. 104 f. angegebenen Wege. Man bildet $l+1$ Gl. von der Form:

$$Z' - Z = \pi\,(X_1, \ldots, X_q,\ Y_1, \ldots, Y_q,\ X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}),$$
$$0 = \pi_k\,(X_1, \ldots, X_q, Y_1, \ldots, Y_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}) \qquad (k = 1, \ldots, l;\ 0 \leqq l \leqq q),$$

in denen: $X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$ nur die Rolle von Parametern spielen, und fügt die Gl.:

$$-P_i = \frac{\partial \pi}{\partial X_i} + \lambda_1 \frac{\partial \pi_1}{\partial X_i} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \pi_l}{\partial X_i},$$
$$Q_i = \frac{\partial \pi}{\partial Y_i} + \lambda_1 \frac{\partial \pi_1}{\partial Y_i} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \pi_l}{\partial Y_i} \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

hinzu. Sodann eliminiert man $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ und löst die übrig bleibenden Gl. nach: $Y_1, \ldots, Y_q, Q_1, \ldots, Q_q$, oder nach: $X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_q$ auf. Das ist immer möglich, es sei denn, daß die Fkt.: $\pi_1, \ldots, \pi_l$ gewissen Diffgl. genügen (a. a. O. Abh. XVII (1876), S. 252—256).

Ist die Gl.: $\Sigma Q_\mu d Y_\mu = \Sigma P_\mu d X_\mu + d\Pi$ auf allgemeinste Weise befriedigt, und setzt man:

$$\sum_\mu^{1 \ldots q} \left(\frac{\partial U}{\partial P_\mu}\frac{\partial V}{\partial X_\mu} - \frac{\partial U}{\partial X_\mu}\frac{\partial V}{\partial P_\mu}\right) = |UV|,$$

wo U, V beliebige Funktionen von: $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ sind, so ist (a. a. O. Abh. IX, S. 112 f.):

$$|Y_\mu Y_\nu| = |Q_\mu Q_\nu| = 0, \quad |Q_\mu Y_\nu| = \varepsilon_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, q).$$

Erinnert man sich nun, daß $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ Funktionen von: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ sind, und daß zwischen den X und P die kanonischen Relationen bestehen, so erkennt man, daß:

$$(UV) = \sum_\mu^{1 \ldots q} \left\{\frac{\partial U}{\partial X_\mu}\frac{\partial V}{\partial P_\mu}(X_\mu P_\mu) + \frac{\partial U}{\partial P_\mu}\frac{\partial V}{\partial X_\mu}(P_\mu X_\mu)\right\} = |UV|.$$

Demnach ist:

$$(Y_\mu Y_\nu) = (Q_\mu Q_\nu) = 0, \quad (Q_\mu Y_\nu) = \varepsilon_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, q),$$

während die Ausdrücke:

$$(Y_\mu Y_{q+j}), \quad (Q_\mu, Y_{q+j}) \qquad (\mu = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, m)$$

alle verschwinden. Es ist also wirklich: $Y_1, \ldots, Y_{q+m}, Q_1, \ldots, Q_q$ eine neue kanonische Form der Funktionengruppe, und zwar die allgemeinste.

S. 638, Z. 7—1 v. u. Man sehe die Abh. „Über Komplexe", Ann. V (1872), S. 152—154 (d. Ausg. Bd. II, Abh. I, § 3, Nr. 7—9). Dieselbe Deutung findet man übrigens auch schon in der ersten Fassung des ersten Teiles dieser Abh.: „Over en Classe geometriske transformationer", Christ. Forh. 1871, S. 73—76 (ebd. Bd. I, Abh. XI, § 3, Nr. 7, 8). Die Ausdehnung des Meusnierschen Satzes beweist Lie Leipz. Ber. 1898, S. 1—3 (ebd. Bd. IV, Abh. X). Die Liesche Deutung des Integrationsproblems kommt auf folgendes hinaus:

Hat man einen beliebigen Komplex von ∞^3 Kurven, welche die zu der part. Diffgl. 1. O. gehörige Mongesche Gl. befriedigen, so ist die Integration der part. Diffgl. 1. O. gleichbedeutend mit der Aufgabe, alle Flächen zu finden, die mit je ∞^2 Kurven des Komplexes je drei zusammenfallende Punkte gemein haben.

Zu Abhandlung XXVI, S. 639—648.

S. 643, Z. 12, 11 v. u. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 14.

S. 644, Z. 16—14 v. u. Da das Element 1.0: x, y, z, p, q die Gl.: $1 + p^2 + q^2 = 0$ nicht erfüllt, so bestimmt das Element 2.0 in den ∞^1 Normalebenen ∞^1 Krümmungskreise, es sei denn, daß r, s, t alle drei verschwinden (S. 645, Z. 11). Die Figur dieser Krümmungskreise gestattet aber offenbar nur dann eine Bewegung, wenn alle Krümmungshalbmesser gleich sind.

S. 645, Z. 9 v. u. Vgl. z. B. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, 3. Aufl., Berlin u. Leipzig 1922, S. 447.

S. 646, Z. 15—17. Hier Abh. XV (1893), S. 381 ff.

S. 648, Z. 6. Dabei muß nach S. 645, Z. 9 v. u. entweder: $a = b$ sein, oder eine der beiden Konstanten unendlich.

S. 648, Z. 12 f. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), S. 214—217. Aus der dortigen Tabelle kann man entnehmen, daß die sechsgl. Gr. der Euklidischen Bewegungen sechs Typen von zweigliedrigen Untergruppen enthält, die in der dort gewählten Darstellung die folgenden Normalformen haben:

$$\boxed{2zp + yr,\ xp - yq} \qquad \boxed{2zp + yr + kq,\ p}$$
$$\boxed{xp - yq + kr,\ p} \qquad \boxed{xp - yq,\ r}$$
$$\boxed{p,\ q} \qquad \boxed{p,\ r}$$

Dabei ist k ein wesentlicher Parameter. Von diesen Gruppen scheidet aber die erste aus, weil die bei ihr invarianten Flächen den Kugeln entsprechen und daher jede von ihnen eine dreigliedrige Untergruppe gestattet. Ebenso fallen die beiden letzten Gruppen weg, weil sie nur Ebenen invariant lassen.

S. 648, Z. 3—1 v. u. Dieser Zusatz ist deswegen bemerkenswert, weil er zeigt, daß sich Lie darüber klar war, daß seine allgemeine Invariantentheorie nur „innerhalb passend gewählter Bereiche" die notwendigen und hinreichenden Kriterien für die Äquivalenz liefert. Er hätte das nur immer ausdrücklich hervorheben sollen, dann würde er seine Invariantentheorie weniger der Kritik ausgesetzt haben (vgl. die auf S. 878 erwähnte Kritik Studys).

Zu Abhandlung XXVII, S. 649—663.

Es ist merkwürdig, daß es Lie mit den Integralinvarianten genau so ergangen ist, wie mit den Differentialinvarianten. Während er den Begriff der Diffinv. längst besaß und schon 1874 (Bd. V d. Ausg., Abh. I) auf die Wichtigkeit des Begriffs hingewiesen hatte, kam ihm Halphen mit der Einführung der Benennung zuvor (s. ebd. Abh. VIII (1883), S. 237, Nr. 6; Abh. X (1883), S. 241, Anm. 3). Ebenso besaß er den Begriff Integralinvariants längst, aber die Benennung stammt von Poincaré (1890). Eigentümlich ist es auch, daß das von Lie geplante Werk über Differentialinvarianten nicht ausgeführt worden ist und daß noch heute eine umfassende, systematische Darstellung dieser Theorie fehlt, daß aber für die Theorie der Integralinvarianten eine Darstellung aus der Feder E. Cartans vorliegt: „Leçons sur les invariants intégraux." Paris 1922, X + 210 S. 8°.

S. 649. H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta Math. Bd. XIII (1890), S. 1—270.

K. Żorawski, Über Integralinvarianten der kont. Trfsgr. Anzeiger der Krakauer Akad. d. Wiss., April 1895, Nr. 26, S. 127—130. Darin eine Inhaltsangabe der Abh.: O całkach niezmiennych ciągłych grup przekształceń. Bd. XXVIII der Denkschriften der Akad., Krakau 1895, S. 232—273.

G. Koenigs, Application des invariants intégraux à la réduction au type canonique d'un système quelconque d'équations différentielles. C. R, Bd. 121 (1895), S. 875—878.

E. Cartan, Le principe de dualité de certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé. Bull. d. l. Soc. math., Bd. 24 (Paris 1896), S. 140—177.

A. Hurwitz, Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration. Gött. Nachr. 1897, S. 71—90.

S. 650, Z. 15—20. Bd. V d. Ausg. Abh. XXIV (1888), S. 558—560. Bd. VI, Abh. XI (1891), S. 325.

S. 651, Z. 12. Kap. 22, S. 486—497; Kap. 23, S. 500 ff.

S. 652, Z. 17 f. eine beliebige, nicht von φ freie Lösung.

S. 652, Z. 2, 1 v. u. Vgl. die S. 662, Z. 7—1 v. u. angeführte Stelle.

S. 653, Z. 4—1 v. u. Das ist nicht geschehen. Vgl. S. *886*.

S. 655, Z. 13 f. Siehe S. 658 f., Nr. 12.

S. 659, Z. 5—1 v. u. D. Ausg. Bd. III, Abh. V (1872), S. 28. Ferner: „Begründung einer Invariantenth. der B. T.", Math. Ann. Bd. VIII (1874), S. 282 bis 285 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. I, § 20).

S. 661, Z. 1—5. D. Ausg. Bd. III, Abh. XX (1877), S. 313—316.

S. 663, Z. 3—5. Vgl. S. 539, Z. 6 f.

S. 663, Z. 13—11 v. u. Vgl. Cartan a. a. O. S. 140. Das Wort „Integralinvarianten" auf Z. 11 v. u. ist von Lie hinzugefügt.

S. 663, Z. 10—4 v. u. Vgl. a. a. O. S. 162 f. Es ist bei der Absicht geblieben.

Zu Abhandlung XXVIII, S. 664—701.

S. 666, Z. 15—19. Nur einen Teil dieses Planes hat Lie ausführen können: siehe die folgende, nachgelassene Abh. In welcher Richtung die angekündigten Verallgemeinerungen gehen sollten, kann man nicht einmal vermuten.

S. 666, Z. 3—1 v. u. Vgl. hier Abh. II (1884), S. 123—125. Abh. XII (1891), S. 339—348.

S. 672, Z. 6 v. u. Siehe Nr. 10, S. 669.

S. 680, Z. 16—25. Vgl. S. 671 und Abh. XXVII, S. 653 f.

S. 680, Z. 7 v. u. — 681, Z. 5. Vgl. „Zur allg. Theorie der part. Diffgl. beliebiger O." Leipz. Ber. 1895, S. 94—96 (d. Ausg. Bd. IV, Abh. IX, Kap. III).

S. 681, Nr. 25. Th. d. Trfsgr. Bd. II (1890), S. 273, 275.

S. 685, Z. 8—2 v. u. Es liefert ja: $[\xi_x + \eta_y + \zeta_z, f]$ kein Glied mit einer Ableitung von f nach x, y oder z.

S. 688, Z. 6—9. Vgl. auch Bd. V d. Ausg., Abh. XVI (1884), S. 434; Bd. III, S. *683*; Bd. VI, Abh. XX (1895), S. 585.

S. 689, Z. 15, 1 v. u. Hier wird gar nicht berücksichtigt, daß: $\alpha_x + \beta_y + \gamma_z$ auch verschwinden kann. Nun ist, wenn wir die Bezeichnungen von Bd. III d. Ausg. S. *679—683* anwenden:

$$A_1 f = \overline{A}f, \quad A_2 f = Xf, \quad \Psi_{121} = \Sigma \xi_x, \quad \Psi_{122} = 0.$$

Demnach erhalten wir im Falle: $\Sigma \alpha_x = 0$ für den Multipl. N des zweigl. vollst. Syst.: $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$ die Diffgl.:

$$A_1 N + (0 + 0) N = 0, \quad A_2 N + (\Sigma \xi_x - \Sigma \xi_x) N = 0,$$

d. h., das vollst. Syst. hat den Mult. 1 und seine Lösung wird durch Quadratur gefunden. Besteht andrerseits eine Relation von der Form: $\overline{A}f = \varrho Xf$, und ist: $\Sigma \alpha_x = 0$, so ist ϱ ein Multiplikator von Xf.

S. 691, Z. 1 v. u., 692, Z. 1 und S. 693, Z. 3. Beide Male ist noch das zu berücksichtigen, was in der vorhergehenden Anm. gesagt ist.

S. 693, Z. 12—16. Lie hat hier übersehen, daß in diesem Falle deswegen, weil σ ein Multiplikator ist, $\Sigma \alpha_x = 0$ wird und also die angegebene Lösung verschwindet.

S. 693, Z. 17—20. Hier bleibt bei der inf. Trf. Xf die Mongesche Gl.: $\psi = 0$ inv. und also auch die zugehörige part. Diffgl. 1. O.

S. 695, Z. 10—6 v. u. Vgl. Abh. XII (1891), S. 362 und Abh. XX (1895), S. 557—560.

S. 697, Z. 2—9. Vgl. hier Abh. VII (1889), S. 248—257.

S. 697, Z. 17—21. Man gelangt dazu durch solche Betrachtungen, wie sie Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 390 ff. angestellt werden.

Da G die ausgezeichnete inf. Trf. Xf enthält, so ist es systatisch (a. a. O. Kap. 24). Wird also ein Punkt P von allgemeiner Lage des R_{m+n}: $z_1, \ldots, z_m$, $x_1, \ldots, x_n$ festgehalten, so bleiben zugleich ∞^l $(1 \leq l \leq m+n)$ Punkte in Ruhe, die wir durch das Symbol $P_{(u_1, \ldots, u_l)}$ mit den l Parametern: $u_1, \ldots, u_l$ darstellen können. Der ganze R_{m+n} wird auf diese Weise in eine invariante Schar von ∞^{m+n-l} l-fach ausgedehnten Mann. M_l zerlegt. Ist nun S eine beliebige Trf von G, und T eine Trf. von Γ, so haben wir: $(P)ST = (P)TS$. Läßt daher S den Punkt P in Ruhe, so läßt es auch den Punkt $(P)T$ in Ruhe, d. h., T führt jeden Punkt P in einen der Punkte $P_{(u_1, \ldots, u_l)}$ über, es läßt jede der ∞^{m+n-l} Mann. M_l inv.

Ist G transitiv, so enthält Γ eine und nur eine ganz bestimmte Trf. $T_{(u_1, \ldots, u_l)}$, bei der P in $P_{(u_1, \ldots, u_l)}$ übergeht. Setzt man nämlich für S nach und nach alle Trff. von G, so erfüllt $T_{(u_1, \ldots, u_l)}$ alle die unendlich vielen Gl.:

$$(P) S T_{(u_1, \ldots, u_l)} = P_{(u_1, \ldots, u_l)} S$$

und ist durch diese Gl. definiert. Hat man für P irgend einen bestimmten Punkt von allg. Lage gewählt, so besteht Γ aus den so definierten ∞^l Trff. $T_{(u_1, \ldots, u_l)}$. Hieraus folgt, daß Γ immer intransitiv ist, mit alleiniger Ausnahme des Falles, daß $l = n + m$ ist. Dann aber ist G einfach transitiv und Γ nach Abh. III (1885), S. 181 ebenfalls.

Ist G intransitiv, so zerlegt es den R_{m+n} in ∞^{m+n-p} p-fach ausgedehnte inv. Mann. M_p, und zwar derart, daß die Punkte jeder einzelnen Mann. M_p transitiv transformiert werden. Es ist klar, daß diese Zerlegung auch bei der Gr. Γ inv. bleibt. Halten wir nun einen Punkt P von allgemeiner Lage fest, so werden auf der durch P gehenden inv. Mann. M_p etwa gerade ∞^h Punkte in Ruhe bleiben, wo: $0 \leq h \leq l$ und: $0 \leq h \leq p$. Ist dabei $h < l$, so muß es, wenn P festgehalten wird, unter den ∞^{m+n-p} M_p noch gerade ∞^{l-h} solche geben, auf deren jeder gerade ∞^h Punkte in Ruhe bleiben. Der Raum R_{m+n} wird also in ∞^{m+n-h} h-fach ausg. Mann. $\mathfrak{M}_h$ zerlegt, von denen auf jeder M_p gerade ∞^{p-h} und auf jeder M_l gerade ∞^{l-h} liegen. Diese bei G inv. Zerlegung bleibt offenbar auch bei Γ inv., denn Γ läßt ja, wie wir gesehen haben, jede einzelne Mann. M_l in Ruhe.

Es sei P' ein Punkt von allg. Lage und $\mathfrak{M}_h'$ die hindurchgehende $\mathfrak{M}_h$. Offenbar bleibt $\mathfrak{M}_h'$ bei einer Trf. von G dann und nur dann inv., wenn diese Trf. den Punkt P' in einen andern Punkt von $\mathfrak{M}_h'$ überführt. Andrerseits ist klar, daß P' in jeden andern Punkt P'' von $\mathfrak{M}'_h$ durch eine Trf. von G übergeführt werden kann. Da nun bei Festhaltung von P' alle Punkte von $\mathfrak{M}'_h$ in Ruhe bleiben, so folgt, daß alle Trff. von G, die $\mathfrak{M}'_h$ inv. lassen, die Punkte dieser Mann. durch eine h-gliedrige, einfach transitive Gr. transformieren. Führen wir alle Trff. von G aus, so nimmt $\mathfrak{M}'_h$ ∞^{p-h} verschiedene Lagen an, die eine der ∞^{m+n-p} Mann. M_p gerade einmal ausfüllen.

Jetzt seien $\mathfrak{M}'_h$ und $\mathfrak{M}''_h$ zwei Mann. $\mathfrak{M}_h$, die beide auf derselben Mann. M_l liegen und die auch zusammenfallen können; P' sei ein Punkt von allg. Lage auf $\mathfrak{M}'_h$ und P'' einer auf $\mathfrak{M}''_h$. Wir denken uns alle Trff. von G ausgeführt und zwar jede gleichzeitig auf $\mathfrak{M}'_h$ und P', $\mathfrak{M}''_h$ und P''. Dann beschreiben $\mathfrak{M}'_h$ und $\mathfrak{M}''_h$ zwei Mann. M_p, die wir M'_p und M''_p nennen wollen, und das Punktepaar P', P'' nimmt gerade ∞^p verschiedene Lagen an, die eine eindeutig umkehrbare Beziehung zwischen den Punkten von M'_p und denen von M''_p bestimmen. In der Tat, ist $\mathfrak{S}$ die allgemeinste Trf. von G, die den Punkt P' inv. läßt, und also zugleich auch die allgemeinste, die P'' in Ruhe läßt, ist ferner S eine beliebige Trf. von G, so ist $\mathfrak{S}S$ die allgemeinste Trf. von G, bei der der Punkt P' in den Punkt $(P')S$ übergeht. Alle diese Trff. aber führen P'' in $(P'')\mathfrak{S}S$ über, also in $(P'')S$, d. h. alle in denselben Punkt. Demnach ist jedem Punkte $(P')S$ von M'_p der Punkt $(P'')S$ von M''_p zugeordnet, und diese eindeutig-umkehrbare Zuordnung bleibt bei allen Trff. von G erhalten.

Nunmehr ist es leicht, die allgemeinste Trf. T aufzustellen, die mit allen Trff. von G vertauschbar ist.

Wir wählen unter den ∞^{m+n-h} Mann. $\mathfrak{M}_h$ eine Schar von ∞^{m+n-p} so aus, daß auf jeder der ∞^{m+n-p} M_p eine Mann. der Schar liegt, und daß sich andrerseits die Mann. der Schar auf gerade $\infty^{m+n-p-(l-h)}$ Mann. M_l verteilen. Zu diesem Zwecke wählen wir irgend eine bestimmte M_l aus, etwa M_l^0, und legen durch M_l^0 in allgemeinster Weise eine Schar von $\infty^{m+n-l-(p-h)}$ M_l derart, daß die darin enthaltene Schar von ∞^{m+n-p} $\mathfrak{M}_h$ mit jeder der ∞^{m+n-p} M_p eine $\mathfrak{M}_h$ gemein hat. Auf jeder einzelnen der ausgewählten M_l stellen wir in allgemeinster Weise eine eindeutig-umkehrbare Zuordnung zwischen den ∞^{l-h} auf der M_l liegenden $\mathfrak{M}_h$ her. Ist endlich $\mathfrak{M}_h$ eine der ausgewählten ∞^{m+n-p} h-fach ausged. Mann und $\mathfrak{M}'_h$ die ihr zugeordnete, die auf derselben M_l liegt wie $\mathfrak{M}_h$, so wählen wir immer auf $\mathfrak{M}_h$ einen beliebigen aber festen Punkt P von allgemeiner Lage und ordnen diesem in allgemeinster Weise auf $\mathfrak{M}'_h$ einen Punkt P' von allgemeiner Lage zu. Das machen wir für jede der ausgewählten ∞^{m+n-p} $\mathfrak{M}_h$. Endlich führen wir auf jedes Paar $\mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{M}'_h$ und auf das zugehörige Punktepaar P, P' alle Trff. von G aus. Dann erhalten wir eine eindeutig umkehrbare Beziehung zwischen den Punkten der beiden Mann. M_p, die durch $\mathfrak{M}_h$ und $\mathfrak{M}'_h$ gehen, und da jede der ∞^{m+n-p} M_p eine der ausgewählten $\mathfrak{M}_h$ enthält, so bekommen wir eine eindeutig umkehrbare Beziehung zwischen den Punkten des R_{m+n}, also eine Trf. T dieses Raumes. Diese Trf. bleibt bei allen Trff. von G inv., d. h. sie ist mit allen Trff. von G vertauschbar und sie ist die allgemeinste Trf. dieser Art, also die allgemeinste Trf. der Gruppe Γ.

S. 697, Z. 25—33. Die Trff. von G und die von Γ bestimmen zusammengenommen eine Gruppe $\mathfrak{G}$, deren endliche Trff. man aufstellen kann. Die Gruppe g besteht offenbar aus allen Trff., die mit allen Trff. von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind; demnach kann man auch ihre endlichen Trff. aufstellen und zugleich alle ihre Invarianten. Da Xf der Gruppe g angehört, so sind diese Inv. sämtlich Lös. von: $Xf=0$. Werden die Inv. von g als neue Veränd. eingeführt und dann als Konstanten betrachtet, so stellt g in den noch übrigen Veränd. eine transitive Gruppe dar. Diese trans. Gr. besteht ebenso wie g aus paarweise vertauschbaren Trff.

und ist daher einfach transitiv. Da sie die inf. Trf. Xf enthält, so erfordert die Integration von: $Xf=0$ in den neuen Veränderlichen nur eine Anzahl von einander unabhängiger Quadraturen.

S. 697, Z. 3—1 v. u. Zur Ausführung ist nur die folgende Abh. gekommen, in der wenigstens ein Beispiel eingehend behandelt wird.

S. 698, Z. 12—9 v. u. Vgl. Abh. XXV (1896), S. 619, Nr. 3 und S. *904*.

S. 699, Z. 6—1 v. u. Carda, Elementare Bestimmung der P. T. des Raumes, welche alle Flächeninhalte inv. lassen. Wiener Ber. Bd. 105, Abt. IIa (1896), S. 787—790. Bestimmung der P. T. des Raumes, welche alle Flächeninhalte inv. lassen. Monatsh. f. Math. Bd. 8 (1897), S. 170—174.

Zu Abhandlung XXIX, S. 702—749.

Die Handschrift, nach der A. Guldberg und C. Størmer die Abh. herausgegeben haben, bildet das Paket XLVII von Lies handschriftlichem Nachlasse, der auf der Universitätsbibliothek in Oslo (Kristiania) aufbewahrt wird. Die von den Herausgebern am Schluß der Abh. beigefügten Anm. habe ich im folgenden mit verwertet.

S. 702, Z. 15, 14 v. u. Es liegt nur der erste Abschnitt vor.

S. 703, Z. 5—1 v. u. Ich weiß nicht, auf wen das gemünzt ist. Es kann aber sein, daß Lie dabei auch an mich gedacht hat; denn ich habe, solange Lie lebte, in keiner meiner Arbeiten an seine Integrationstheorie angeknüpft.

S. 703, Nr. 3. Die Diffgl.:

$$y^{(n-q)} = \omega(x, y, y', \ldots, y^{(n-q-1)})$$

kann durch ein q-gliedriges vollst. System von der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + \omega\frac{\partial f}{\partial y^{(n-q-1)}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} = 0,$$

in den n Veränderlichen: $x, y, y', \ldots, y^{(n-q-1)}, x_1, \ldots, x_{q-1}$ ersetzt werden.

S. 703, Z. 9—6 v. u. Das vollständige System kann ja auf eine lin. part. Diffgl. 1. O. in $n-q+1$ Veränderlichen zurückgeführt werden (Bd. III d. Ausg., S. *628*) und diese ihrerseits auf eine gew. Diffgl. $(n-q)$-ter O.

S. 704, Z. 3—1 v. u. Ich kann nicht sagen, wen Lie damit meint.

S. 705, Z. 5—7. Die Gruppe ist dann asystatisch. Vgl. Abh. VII (1889), S. 259, Z. 3—7 und meine Anm. dazu, S. *857*.

S. 705, Z. 16—22. Das vollst. Syst. (2) hat unter den gemachten Voraussetzungen $n-q$ unabh. Lös., die etwa: $u_{q+1}, \ldots, u_n$ heißen mögen. Denkt man sich diese nebst q geeignetem x, etwa: $x_1, \ldots, x_q$ als neue Veränd. eingeführt, so wird:

$$X_k f = \sum_i^{1 \ldots q} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_q; u_{q+1}, \ldots, u_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} = X_k f \qquad (k=1, \ldots$$

und betrachtet man: $u_{q+1}, \ldots, u_n$ als Konstanten, so erzeugen: $\overline{X}_1 f, \ldots, \overline{X}_r f$ in den Veränd.: $x_1, \ldots, x_q$ eine transitive Gruppe.

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder nämlich ist die transitive Gruppe $\overline{X}_k f$ in den Veränd.: $x_1, \ldots, x_q$ auch r-gliedrig, also mit der r-gliedrigen Gr. $X_k f$ gleichzusammengesetzt (holoedrisch isomorph), oder sie hat eine Gliederzahl kleiner als r und ist demnach mit der Gr. $X_k f$ bloß meroedrisch isomorph. Wir können aber zeigen, daß sich der zweite Fall stets auf den ersten zurückführen läßt.

Ob der zweite Fall eintritt oder nicht, hängt davon ab, ob zwischen den $X_k f$ eine lin. hom. Relation von der Form:

$$\text{(A)} \qquad \sum_k^{1\ldots r} \chi_k(u_{q+1}, \ldots, u_n) X_k f = 0$$

besteht oder nicht. Sehen wir zu, wie man darüber entscheidet.

Vor allen Dingen erinnern wir daran, daß Relationen von der Form:

$$\text{(B)} \qquad (X_i X_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

bestehen, und daß: $X_1 f, \ldots, X_q f$ durch keine lin. hom. Rel. verknüpft sind, während die $X_{q+j} f$ sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$\text{(C)} \qquad X_{q+j} f \equiv \sum_\mu^{1\ldots q} \varphi_{j\mu}(x_1, \ldots, x_n) X_\mu f \qquad (j = 1, \ldots, r-q).$$

Aus (C) folgt:

$$\sum_k^{1\ldots r} e_k X_k f = \sum_\mu^{1\ldots q} \Big(e_\mu + \sum_j^{1\ldots r-q} \varphi_{j\mu}(x) e_{q+j}\Big) X_\mu f;$$

daher kommt die Frage, ob eine Rel. von der Form (A) besteht, darauf hinaus, ob es möglich ist, für: $e_1, \ldots, e_r$ solche Lös. des q-gl. vollst. Systems (2) einzusetzen, daß die q Gl.:

$$\text{(D)} \qquad e_\mu + \sum^{1\ldots r-q} \varphi_{j\mu} e_{q+j} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, q)$$

identisch erfüllt sind.

Da die e_k Lösungen sein sein sollen, ziehen die Gl. (D) die folgenden Gl. nach sich:

$$\text{(E}_1\text{)} \qquad \sum^{1\ldots r-q} X_k \varphi_{j\mu} \cdot e_{q+j} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r;\ \mu = 1, \ldots, q).$$

Hier sind die $X_k \varphi_{j\mu}$ ganze Fkt. zweiten Grades der $\varphi_{k\nu}$ (Bd. V d. Ausg., Abh. IV (1878), S. 100. Bd. VI, Abh. III (1885), S. 170, Gl. (Ω). Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 343, Gl. (12)). Bedingen die Gl. (E_1) noch nicht das Verschwinden aller e_{q+j}, so fügt man die Gl.:

$$\text{(E}_2\text{)} \qquad \sum_j^{1\ldots r-q} X_\tau X_k \varphi_{j\mu} \cdot e_{q+j} = 0 \qquad (\tau, k = 1, \ldots, r;\ \mu = 1, \ldots, q)$$

hinzu, leitet daraus in derselben Weise ein Glsyst. (E_3) ab, und so fort. Man gelangt auf diese Weise zu einer Reihe von Glsyst. für die e_{q+j}:

$$\text{(F}_\lambda\text{)} \qquad (E_1), (E_2), \ldots, (E_\lambda).$$

Ist: $q_\lambda - q$ der Rang des Systems (F_λ), so ist: $r \geqq q_\lambda$ und: $q_{\lambda+1} \geqq q_\lambda$, und es gibt eine bestimmte positive ganze Zahl l derart, daß $q_{\lambda+1} > q_\lambda$ für: $\lambda < l$, aber: $q_{\lambda+1} = q_\lambda$ für: $\lambda \geqq l$. Hat q_l den Wert r, so verschwinden alle e_{q+j}, es gibt überhaupt keine Gl. (A), und wir haben den ersten der beiden vorhin unterschiedenen Fälle. Ist aber: $q_l < r$, so liefert (D) zusammen mit (F_l) ein Glsyst. von der Gestalt:

$$\text{(G)} \qquad e_\tau = \sum^{1\ldots r-q_l} \omega_{\tau\mu}(x) e_{q_l+\mu} \qquad (\tau = 1, \ldots, q_l),$$

aus dem durch Anwendung der inf. Trff. $X_k f$ keine Relation zwischen den $e_{q_l+\mu}$ hervorgeht. Demnach sind die $\omega_{\tau\mu}(x)$, die man durch Differentiation und durch Auflösung von lin. hom. Gl. berechnen kann, Lös. des vollst. Systems (2). Die $e_{q_l+\mu}$ aber sind ganz beliebige Lösungen dieses vollst. Syst.

Wir sehen hieraus, daß die folgenden Gleichungen:

$$\text{(H)} \qquad Z_{q_l+\mu} f = X_{q_l+\mu} f + \sum_\tau^{1\ldots q_l} \omega_{\tau\mu}(x) X_\tau f = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, r-q_l)$$

identisch erfüllt sind, die alle die Form (A) haben, während: $X_1 f, \ldots, X_{q_l} f$ durch keine Beziehung von der Form (A) verknüpft sind. Alle Gl. von der Form (A), die überhaupt bestehen, haben die Gestalt: $\Sigma \psi_\mu(u_{q+1}, \ldots, u_n) Z_{q_l+\mu} f = 0$, wo die ψ_μ willk. Fkt. der u sind.

Da die Gl. (H) identisch bestehen, und da die $\omega_{\tau\mu}$ Lösungen sind, so sind auch die nachstehenden Gl.:

$$\text{(J)} \qquad (X_k Z_{q_l+\mu}) = \sum_s^{1\ldots r} c_{k, q_l+\mu, s} X_s f + \sum_\tau^{1\ldots q_l} \omega_{\tau\mu}(x) \sum_s^{1\ldots r} c_{k\tau s} X_s f = 0$$

identisch erfüllt. Als lin. hom. Gl. zwischen: $X_1 f, \ldots, X_r f$ müssen diese Gl. eine Folge von (H) sein. Drücken wir daher rechts die $X_{q_l+\mu} f$ vermöge (H) durch die $Z_{q_l+\mu} f$ aus, die identisch verschwinden, und erinnern wir uns, daß zwischen: $X_1 f, \ldots, X_{q_l} f$ keine Rel. (A) besteht, so erkennen wir, daß die Gl.:

$$\text{(K)} \qquad c_{k, q_l+\mu, \tau} - \sum_\nu^{1\ldots r-q_l} c_{k, q_l+\mu, q_l+\nu} \omega_{\tau\nu}(x) + \sum_s^{1\ldots q_l} \omega_{s\mu}(x) \Big(c_{ks\tau} - \sum_\nu^{1\ldots r-q_l} c_{k, s, q_l+\nu} \omega_{\tau\nu}(x)\Big) = 0$$
$$(k = 1, \ldots, r;\ \mu = 1, \ldots, r-q_l;\ \tau = 1, \ldots, q_l)$$

für alle Werte der x identisch bestehen.

Ersetzen wir jetzt in den Koeff. $\omega_{\tau\mu}(x)$ der Gl. (H) die Veränd.: $x_1, \ldots, x_n$ durch beliebige Konstanten: $a_1, \ldots, a_n$ und bezeichnen wir die dadurch aus den $Z_{q_l+\mu} f$ entstehenden inf. Trff. mit:

$$\text{(L)} \qquad \mathfrak{Z}_{q_l+\mu} f = X_{q_l+\mu} f + \sum_\tau^{1\ldots q_l} \omega_{\tau\mu}(a) X_\tau f \qquad (\mu = 1, \ldots, r-q_l),$$

so nehmen die Klammerausdrücke $(X_k \mathfrak{Z}_{q_l+\mu})$ dieselbe Form an, wie die $(X_k Z_{q_l+\mu})$ in (J), wenn wir nur auch darin jedes $\omega_{\tau\nu}(x)$ durch $\omega_{\tau\nu}(a)$ ersetzen. Drücken wir nun in den $(X_k \mathfrak{Z}_{q_l+\mu})$ die $X_{q_l+\mu} f$ vermöge (L) durch die $\mathfrak{Z}_{q_l+\mu} f$ aus und erinnern wir uns der Gl. (K), die auch für: $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ gelten, so finden wir, daß Relationen von der Form:

$$\text{(M)} \qquad (X_k \mathfrak{Z}_{q_l+\mu}) = \sum_\nu^{1\ldots r-q_l} \Big\{ c_{k, q_l+\mu, q_l+\nu} + \sum_\tau^{1\ldots q_l} \omega_{\tau\mu}(a)\, c_{k, \tau, q_l+\nu} \Big\} \mathfrak{Z}_{q_l+\nu} f$$
$$(k = 1, \ldots, r;\ \mu = 1, \ldots, r-q_l)$$

bestehen. Aber die $\mathfrak{Z}_{q_l+\mu} f$ sind $r - q_l$ unabh. inf. Trff. der Gruppe $X_1 f, \ldots X_r f$. Es ist daher klar, daß die inf. Trff. (L) eine $(r - q_l)$-gliedrige Untergr., und zwar eine invariante Untergruppe der Gr.: $X_1 f, \ldots, X_r f$ erzeugen. Das gilt für alle Werte der Konstanten: $a_1, \ldots, a_n$. Also ergibt sich, daß in dem zweiten der im Anfange unterschiedenen beiden Fälle die r-gl. Gruppe: $X_1 f, \ldots, X_r f$ eine kontinuierliche Schar[1]) von $(r - q_1)$-gliedrigen invarianten Untergruppen enthält, wo $q_1 > q$ ist.

Außerdem haben wir gesehen, daß in dem zweiten unsrer beiden Fälle gewisse Lösungen des vollst. Syst. (2), S. 704 ohne Integr. gefunden werden können, nämlich die Funktionen $\omega_{\tau\mu}(x)$. Gibt es unter diesen gerade $n - q - m$ von einander unabhängige, die wir $u_{q+m+1}, \ldots, u_n$ nennen wollen, und führen wir diese nebst $q + m$ geeigneten von den x, etwa: $x_1, \ldots, x_{q+m}$, als neue Veränderliche ein, so wird:

$$X_k f = \sum_i^{1 \ldots q+m} \eta_{ki}(x_1, \ldots, x_{q+m}; u_{q+m+1}, \ldots, u_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = Y_k f \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

und es bestehen Identitäten von der Form:

$$Y_{q_1+\mu} f + \sum_\tau^{1 \ldots q_1} \omega_{\tau\mu}(u_{q+m+1}, \ldots, u_n) Y_\tau f = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, r - q_1),$$

während zwischen $Y_1 f, \ldots, Y_{q_1} f$ keine Relation von der Form: $\Sigma \Psi_k Y_k f = 0$ besteht, in der die Ψ_k Lösungen des q-gl. vollst. Syst.: $Y_1 f = 0, \ldots, Y_q f = 0$ sind. Betrachten wir nun, wie es offenbar erlaubt ist, die $u_{q+m+\mu}$ als Konstanten, so gibt es unter den inf. Trff.: $Y_1 f, \ldots, Y_r f$ nur noch q_1 von einander unabh., nämlich $Y_1 f, \ldots, Y_{q_1} f$, und diese stehen in Beziehungen von der Form:

$$\text{(N)} \qquad (Y_i Y_k) = \sum_s^{1 \ldots q_1} \Big(c_{iks} - \sum_\mu^{1 \ldots r - q_1} \omega_{s\mu}(u) c_{i,k,q_1+\mu} \Big) Y_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, q_1),$$

sie erzeugen also eine q_1-gliedrige Gr. in den $q + m$ Veränd.: $x_1, \ldots, x_{q+m}$. Die Bestimmung der Invarianten der ursprünglich vorgelegten r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f, \ldots, X_r f$ in n Veränd. ist hierdurch ohne Integration zurückgeführt auf die Bestimmung der Invarianten der q_1-gliedr Gr.: $Y_1 f, \ldots, Y_{q_1} f$ in: $n - (n - q - m) = q + m$ Veränderlichen, und zwar liegt jetzt der erste der beiden im Anfange unterschiedenen Fälle vor. Führt man nämlich m unabhängige Lös. des q-gliedr. vollständ. Syst.: $Y_1 f = 0, \ldots, Y_q f = 0$ als neue Veränderliche ein und betrachtet dann diese Lösungen als Konstanten, so sind: $Y_1 f, \ldots, Y_{q_1} f$ unabh. inf. Trff. in den noch übrigen q Veränderlichen.

Allerdings ist zu beachten, daß die Zusammensetzung der Gruppe: $Y_1 f, \ldots, Y_{q_1} f$ gewisse Parameter enthält, und daß unter diesen Parametern wesentliche vorhanden sein können (vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 297—300).

Wir können uns nunmehr auf die Betrachtung des ersten Falles beschränken und also voraussetzen, daß die inf Trff. $X_k f$ auf S. *911* auch dann noch von einander unabhängig sind, wenn man: $u_{q+1}, \ldots, u_n$ als konstant betrachtet.

1) Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), S. 455—458, wo es auch darauf ankommt, ob eine kont. Schar von inv. Untergr. auftritt oder nicht. Das Problem, alle r-gliedrigen intransitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen, wird dort auf S. 458 nur gestreift. Es leuchtet ein, daß die hier von uns angestellten Betrachtungen dieses Problem der Behandlung zugänglicher machen.

Die inf. Trff. $X_k f$ erzeugen eine r-gliedr. trans. Gr. in den Veränd.: $x_1, \ldots, x_q$ und es ist offenbar:

$$\bar{\xi}_{k\nu}(x_1, \ldots, x_n, u_{q+1}, \ldots, u_n) = \xi_{k\nu}(x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, q).$$

Aber die $\bar{\xi}_{k\nu}$ sind unbekannt, und wir wissen nur, daß die inf. Trff. $\bar{X}_k f$ auch in den Beziehungen:

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

stehen. Wenn wir nun auch die $X_k f$ selbst nicht angeben können, so können wir doch in q Veränd. eine r-gl. trans. Gr. von der Zusammensetzung c_{iks} aufstellen, die mit der Gruppe $\bar{X}_k f$ ähnlich ist.

Wir denken uns zunächst in r Veränd. zwei r-gl. reziproke einfach trans. Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} bestimmt. Das ist nach Abh. X (1890), S. 288—299 möglich, und zwar können wir zuerst durch ausführbare Oper. die inf. Trff. dieser beiden Gruppen aufstellen und finden dann auch die endl. Trff. beider Gruppen in kanonischer Form, wozu außer ausführb. Oper. im ungünstigsten Falle eine Anzahl von Quadraturen erforderlich ist.

Nun bestimmt jede r-gl. trans. Gr. des R_q, die eine gegebene Zusammensetzung c_{iks} hat, eine Schar von ∞^q $(r - q)$-gl. Untergruppen, die alle gleichzusammengesetzt und innerhalb der Gruppe gleichberechtigt sind. Repräsentant dieses Typus von Untergr. ist jede größte kont. Untergruppe, die einen Punkt von allg. Lage im R_q in Ruhe läßt. Sind: $U_1 f, \ldots, U_r f$ unabh. inf. der r-gl. Gr., die in den Beziehungen: $(U_i U_k) = \Sigma c_{iks} U_s f$ stehen, und kennt man die inf. Trff. einer jener $(r - q)$-gl. Untergr., so kann man stets eine mit der r-gliedr. Gr. ähnliche trans. Gr. des R_q aufstellen (Th. d. Trfsgr. Bd. I (1888), Kap. 22; Bd. III, S. 797—799).

Wir nehmen jetzt an, daß: $u_{q+1}, \ldots, u_n$ die Hauptlösungen des vollst. Syst. (2) i. B. auf: $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ sind, unter: $x_1^0, \ldots, x_q^0$ ein Wertsystem von allgemeiner Lage verstanden. Obwohl wir auch unter dieser Voraussetzung die inf. Trff. $\bar{X}_k f$ nicht hinschreiben können, so sind wir doch imstande anzugeben, welche inf. Trff. $\Sigma e_k \bar{X}_k f$ den Punkt: $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ in Ruhe lassen.

In der Tat, es handelt sich darum, die Gl.:

$$\sum_k^{1 \ldots r} \bar{\xi}_{k\nu}(x_1^0, \ldots, x_q^0; u_{q+1}, \ldots, u_n) e_k = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, q)$$

zu befriedigen. Wegen der bekannten Eigenschaften der Hauptlösungen $u_{q+\mu}$ ist aber:

$$\bar{\xi}_{k\nu}(x_1^0, \ldots, x_q^0; x_{q+1}, \ldots, x_n) = \xi_{k\nu}(x_1^0, \ldots, x_q^0, x_{q+1}, \ldots, x_n),$$

also brauchen wir nur die Gl.:

$$\sum_k^{1 \ldots r} \xi_{k\nu}(x_1^0, \ldots, x_q^0; u_{q+1}, \ldots, u_n) e_k = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, q)$$

zu befriedigen, deren Koeff. bekannt sind. Liefern diese Gl., die sicher von einander unabhängig sind:

$$e_\mu = \sum_j^{1 \ldots r-q} \vartheta_{\mu j}(x_1^0, \ldots, x_q^0; u_{q+1}, \ldots, u_n) e_{q+j} \qquad (\mu = 1, \ldots, q),$$

so erzeugen die inf. Trff.:

$$\overline{X}_{q+j}f + \sum_{\mu}^{1\ldots q} \vartheta_{\mu j}\overline{X}_{\mu}f \qquad (j=1,\ldots,r-q)$$

eine $(r-q)$-gl. Untergr. von der verlangten Art.

Es seien endlich:

$$A_k f = \sum_{j}^{1\ldots r} \alpha_{kj}(z_1, \ldots, z_r)\frac{\partial f}{\partial z_j} \qquad (k=1,\ldots,r),$$

$$B_k f = \sum_{j}^{1\ldots r} \beta_{kj}(z_1, \ldots, z_r)\frac{\partial f}{\partial z_j} \qquad (k=1,\ldots,r)$$

zwei reziproke einf. trans. Gr. von der Zusammensetzung c_{iks}, es mögen also die Relationen: $(A_i B_k) = 0$ und:

$$(A_i A_k) = \Sigma c_{iks} A_s f, \quad (B_i B_k) = \Sigma c_{iks} B_s f$$

bestehen. Wir bilden das $(r-q)$-gl. vollst. Syst.:

$$B_{q+j}f + \sum_{\mu}^{1\ldots q} \vartheta_{\mu j} B_{\mu} f = 0 \qquad (j=1,\ldots,r-q)$$

und bestimmen q unabh. Lös.: $v_1, \ldots, v_q$ dieses Systems. Dann stellen die Ausdrücke:

$$V_k f = \sum_{\nu}^{1\ldots q} A_k v_\nu \frac{\partial f}{\partial v_\nu} \qquad (k=1,\ldots,r),$$

in denen die $A_k v_\nu$ Fkt. von $v_1, \ldots, v_q$ allein sind, die inf. Trff. einer r-gl. transitiven Gruppe dar, die mit der unbekannten Gr. $\overline{X}_k f$ und infolgedessen auch mit der vorgelegten Gr. ähnlich ist. Da die kanonischen endl. Gl. der Gruppe $B_k f$ bekannt sind, so erfordert die Bestimmung der v_μ und der $V_k f$ nur ausführbare Oper., und da die kanon. endl. Gl. der Gr. $A_k f$ bekannt sind, so findet man durch ausführbare Oper. auch die endl. Gl. der Gruppe $V_k f$.

Schließlich findet man durch ausführb. Oper. auch die zur Gr. $V_k f$ reziproke Gr., d. h. die Gr. aller Trff., die mit allen Trff. der Gr. $V_k f$ vertauschbar sind. Wie, das ist auf S. *909* f. auseinandergesetzt.

Hiermit ist gezeigt, daß die Annahmen, die Lie S. 705, Z. 17—22 macht, immer verwirklicht werden können.

Daß hier zunächst zwei Fälle unterschieden werden müssen, hat Lie offenbar deshalb nicht erwähnt, weil sich der zweite Fall, wie wir gesehen haben, immer auf den ersten zurückführen läßt. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß sich Lie über diese Zurückführbarkeit vollkommen klar war und daß er sich die Sache ungefähr in der Weise zurechtgelegt hat, wie ich es vorhin auseinandergesetzt habe.

Die beim zweiten Falle angestellten Betrachtungen sind aus einem besonderen Grunde bemerkenswert. Sie liefern nämlich ohne Integration gewisse Lösungen des vollst. Syst. (2), das die bekannten inf. Trff.: $X_1 f, \ldots, X_r f$ gestattet. Diese Lö-ungen werden aber durch die in Abh. III (1885), S. 146 f. zusammengestellten Regeln nicht geliefert, denn die bekannten inf. Trff. haben alle die Form: $\varphi_1(x)X_1 f + \ldots + \varphi_q(x)X_q f$, und über die Verwertung solcher inf. Tiff. wird dort nichts gesagt. Die vorliegende Stelle S. 705, Nr. 5 ist nun ein deutlicher Beweis dafür, daß Lie auch diese Möglichkeit, aus bekannten inf. Trff. eines vollst. Syst. ohne Integration Lösungen abzuleiten, gekannt hat.

Das Bd. V d. Ausg., S. *663*, Z. 6—3 v. u. Gesagte wird hierdurch ergänzt und in gewissem Sinne berichtigt.

S. 706, Z. 1—4. Das gilt natürlich nur, wenn die Gruppe $Y'_k f$ endlich ist; dann kann man Abh. III (1885), S. 186 ff., Nr. 19 anwenden. Ist die Gr. $Y'_k f$ unendlich, so verfährt man nach Abh. XX (1895), S. 557 ff,

S. 706, Z. 11 v. u. Vgl. z. B. Bd. III d. Ausg., Abh. XX (1877), S. 317.

S. 706, Z. 7 v. u.—707, Z. 6. Der Inbegriff aller endlichen Trff., bei denen die bekannten Systeme inv. bleiben, bildet eine Gruppe, die durch gewisse Diffgl. definiert wird. Diese Diffgl. kann man immer aufstellen. Besteht die Gr. aus mehreren getrennten Scharen von Trff., so erhält man mehrere Systeme von Diffgl., unter denen eines von der identischen Trf. befriedigt wird. Dieses definiert die größte kont. Gr. der betreffenden Art. Aus den Definitionsgl. dieser Gr. eliminiert man, wenn das möglich ist, alle Differentialquotienten und erhält eine gewisse Anzahl von Gl. nullter O., die man nach so vielen Veränderlichen auflöst wie möglich. Erhält man auf diese Weise die Gl.:

$$x'_{m+k} = w_k(x'_1, \ldots, x'_m;\ x_1, \ldots, x_n) \qquad (k=1,\ldots,n-m),$$

so sind die w_k, wenn man $x'_1, \ldots, x'_m$ als Konstanten betrachtet, die Invarianten der betreffenden kont. Gr. und daher zugleich die Lösungen des vollst. Systems S. 707, Z. 5. Vgl. Th. d. Trfsgr. Bd. I, S. 218.

S. 707, Z. 7 f. Dazu ist Lie nicht mehr gekommen.

S. 707, Z. 19 f. Wie schon S. ***911***, Z. 17 erwähnt, ist dieser zweite Abschnitt nicht zur Ausführung gekommen.

S. 707, Z. 3 v. u. Für eine endl. kont. Gr. hier Abh. VII (1889), S. 248—258. Th. d. Trfsgr. Bd. III (1893), Kap. 26. Allerdings geht Lie dabei nicht auf die Vereinfachungen ein, die für einzelne inf. Trff. der Gr. eintreten können. Für unendl kont. Gr. hier Abh. XX (1895), S. 542—557.

S. 708, Z. 10—6 v. u. Die Darstellung des folgenden würde ungemein gewonnen haben, wenn Lie das Integral in der Form:

$$\int \sum_{ik}^{1\ldots 4} \psi_{ik}(x_1, \ldots, x_4) \begin{vmatrix} d_1x_i & d_1x_k \\ d_2x_i & d_2x_k \end{vmatrix}$$

geschrieben hätte, wo die $d_1 x_i$ und $d_2 x_i$ zwei verschiedene Reihen von Differentialen sind, und wo $\psi_{ik} + \psi_{ki} = 0$. Die Rechnungen auf S. 709 f. wären dann erspart worden; die Betrachtungen auf S. 711 f. wären durchsichtiger geworden, da ja die: $d_1x_i\,d_2x_k - d_1x_k\,d_2x_i$ nichts andres sind als die Plückerschen homogenen Koordinaten der zu dem Punkte: $x_1, \ldots, x_4$ gehörigen Elemente zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten; auch die Eigenschaft von ω (S. 718 f, Nr. 17) würde unmittelbar einleuchten.

S. 709, Z. 13 (erster Druck S. 9, Z. 10 v. u.). Hier und im folgenden hatte Lie ursprünglich X_i statt F_i geschrieben, später aber X_i in F_i verbessert, ohne das überall durchzuführen. In der von Guldberg und Størmer besorgten Ausgabe, die meinem Abdrucke zugrunde liegt, ist X_i überall, wo es noch stehen geblieben war, durch F_i ersetzt.

S. 713, Z. 8 (erster Druck, S. 13, Z. 11 v. u.). Hier hatte Lie geschr.: $\int \psi\, dx\, dy$; von Guldberg u. Størmer berichtigt.

S. 713, Z. 10—5 v. u. Es ist eigentlich kein Grund ersichtlich, warum Lie diese Normalform wählt statt der einfacheren:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Hätte er diese benutzt, so hätten sich die folgenden Rechnungen viel bequemer gestaltet, da ja alle die vielen Nenner: z, $\mathfrak{z}$, $z\mathfrak{z}$ weggefallen wären.

S. 714, Z. 8 (erster Druck, S. 14, Z. 1 v. u.) hat Lie bei $z\gamma_z\mathfrak{p} + z\delta_z\mathfrak{q}$ den Faktor z vergessen; von G. u. St. berichtigt.

S. 715, Z. 3—6. Vgl. Abh. XXVII (1897), S. 653f.

S. 718, Z. 10 (erster Druck, S. 20, Z. 7). Das in Lies Handschrift fehlende Glied: $(\Omega_x V_y - \Omega_y V_x) : \Omega V$ ist von G. u. St. ergänzt.

S. 720, Z. 17. $\overline{U}f$ ist ja die verkürzte inf. Trf. Uf, vgl. S. 715, Z. 13.

S. 720, Z. 3 v. u. Hier hätte noch hinzugefügt werden sollen, daß die in Nr. 19 abgeleiteten Gl. im Falle: $C \neq 0$ die einzigen von α, β freien Gl. sind, denen ξ, η genügen.

S. 722, Z. 10—18 (erster Druck, S. 25, Z. 9—2 v. u.). Nach einer von St. zu dieser Stelle gemachten Anm. (a. a. O. S. 66, Anm. 24) hatte Lie zuerst eine andre Darstellung gegeben, dann aber diese durch die hier abgedruckte ersetzt. Ich wiederhole hier den Auszug aus Lies ursprünglicher Darstellung, den St. mitteilt. „Wenn wir die neuen Veränderlichen:

$$\text{(a)} \qquad x_1 = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad y_1 = Y(x, y), \quad z_1 = z, \ \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}$$

einführen, so geht $\overline{U}f$ über in:

$$\overline{U}\left(\frac{M}{N}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \overline{U}(Y)\frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Aber infolge von Satz 2 [hier S. 721] ist $\overline{U}(M : N) = 0$, und wenn wir Y durch die Gl.:

$$\xi\frac{\partial Y}{\partial x} + \eta\frac{\partial Y}{\partial y} = \mu\left(\frac{M}{N}\right) = \mu(x_1)$$

bestimmen, so wird unsre Transformation $\overline{U}f$ die Form:

$$\mu(x_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}$$

erhalten.

„Durch die Variabelnänderung (a) gehen andrerseits die inf. Trff.:

$$z\frac{\partial f}{\partial z} \text{ und: } \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} \text{ in: } z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} \text{ und: } \mathfrak{z}_1\frac{\partial f}{d\mathfrak{z}_1}$$

über (d. i. sie bleiben invariant), während das Integral die Form:

$$\int\left\{\frac{A_1 p_1 + B_1 q_1}{z_1} + \frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{B}_1\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{z}_1} + \frac{C(p\mathfrak{q}_1 - q\mathfrak{p}_1)}{z_1\mathfrak{z}_1} + D_1\right\} dx_1\, dy_1$$

erhält, und dabei sind die Koeff.: $A_1, B_1, \ldots, D_1$ Fkt. von x_1, y_1, die allerdings im allg. eine andere Form als die alten Koeff.: $A, B, \ldots, D$ haben."

„Durch diese Betrachtungen erkennen wir, daß es im vorliegenden Falle möglich ist, die kanonischen Veränd.: $x, y, z, \mathfrak{z}$ von vornherein derart zu wählen, daß die Gr. Uf die Form:

$$\mu(x)\frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha(x, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta(x, y)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

erhält."

S. 723, Z. 12—18 (erster Dr. S. 27, Z. 3—9). Wie schon St. in den Anm. zu der Stelle (a. a. O. S. 67, Anm. 25, 26) bemerkt, ist es nicht nötig, $\mu = 1$ zu setzen. Aus der letzten Gl. (6), S. 715 ergibt sich nämlich für D:

$$0 = \mu(x) D_y + X \cdot \frac{X_1\mu'}{C} + X_1 \cdot \frac{-X\mu'}{C},$$

also: $D_y = 0$, $\omega = CD$, $\varrho = A_x + B_y = X'$, $\sigma = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y = X_1'$. Außerdem erinnere man sich, daß in Θ, S. 721, nicht alle zweihreihigen Det. verschwinden. Darauf beruht das S. 723, Z. 14—17 Gesagte.

S. 723, Z. 2 v. u.—724, Z. 3. Vgl. hier Abh. XVIII (1895), S. 444f.

S. 724, Z. 10—14 (erster Dr. S. 28, Z. 5—9). Wie St. bemerkt (a. a. O. S. 67f., Anm. 28) ist es etwas einfacher, so zu schließen: Aus dem Verschwinden der zweireihigen Unterdet. von Θ (S. 721) folgen die Gl.:

$$\omega\varrho_x = \varrho\omega_x, \quad \omega\varrho_y = \varrho\omega_y, \quad \omega\sigma_x = \sigma\omega_x, \quad \ldots.$$

Da nun $N = \omega = 1$ ist, so sind ϱ und σ offenbar Konstanten.

S. 725, Z. 16f. (erster Dr. S. 29, Z. 2, 1 v. u.). Diese Einschaltung rührt von G. u. St. her. Überdies (a. a. O S. 68, Anm. 29) bemerkt St., daß Lie im letzten Falle (hier S. 725, Nr. 24) vergessen hat, zu erwähnen, daß dann Uf die Form:

$$Uf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

hat, wo: ξ, η, α, β willk. Fkt. von x, y sind.

S. 726, Z. 18. Wegen ω, ϱ, σ vgl. S. 721.

S. 727, Z. 1—15 (erster Dr. S. 31, Z. 8—1 v. u., S. 32, Z. 1—7). Lie hatte hier eine Lücke gelassen, die G. u. St. ausgefüllt haben.

S. 728, Z. 8 (erster Dr. S. 33, Z. 6). Lie hatte geschrieben:

$$(\mathfrak{A}B_x - A\mathfrak{B}_x)\xi + (\mathfrak{A}B_y - A\mathfrak{B}_y)\eta,$$

was G. und St. berichtigt haben.

S. 728, Z. 15—19 (erster Dr. S. 33, Z. 13—17). „Wie im vorigen Falle", s. S. 720. G. u. St. bemerken mit Recht (a. a. O. S. 68, Anm. 32), daß man die erste Gl. nicht ebenso ableiten kann wie damals, weil man nicht mit C multiplizieren kann. Man erhält sie aber durch Addition der Gl. S. 728, Z. 5, 8.

S. 728, Z. 11—3 v. u. Auf Grund der Gl. S. 719, Z. 9 v. u. kann man $\omega = 1$ machen.

S. 729, Z. 2—5. Vgl. Abh. XX (1895), S. 568—570.

S. 729, Z. 17 (erster Dr. S. 34, Z. 8 v. u.). Wie St. bemerkt (a. a. O. S. 69, Anm. 36) braucht man nur $y - (X_1 : x)$ als neues y einzuführen.

S. 730, Z. 10—12. Diese Bedingungsgl. vereinfacht sich wegen: $D = 0$.

S. 732, Z. 9 (erster Dr. S. 38, Z. 8). Hier liegt, wie St. bemerkt hat (a. a. O. S. 69, Anm. 41) ein Versehen vor. Es wird ja:

$$\Delta = \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

andrerseits aber (S. 718):

$$\Delta \,.\, \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \,.\, \varphi'(x),$$

also wird $\mathfrak{A}_1$ nicht $= 0$.

Sind A und $\mathfrak{A}$ beide $\neq 0$, so führt die von St. a. a. O. angegebene Trf.:

$$x_1 = y - \int\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\,dx, \quad y_1 = y - \int\frac{B}{A}\,dx$$

zum Ziele. Ist $\mathfrak{A} = 0$, so verschwindet A nicht, und man setzt:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - \int\frac{B}{A}\,dx.$$

Ist $A = 0$ und also: $\mathfrak{A} \neq 0$, so vertauscht man erst z mit $\mathfrak{z}$.

S. 732, Nr. 30a (erster Dr. S. 38, hinter Z. 10). Lie hatte hier, wie G. und St. mitteilen (a. a. O. S. 70, Anm. 42), an den Rand geschrieben:

!! (gar keine inf. Trfn., $\xi = 0$, $\eta = 0$).

Ich habe deshalb die Nr. 30a eingeschaltet. Ist $\xi = \eta = 0$, so liefern die Gl. (15), S. 727 nur: $0 = A\alpha_x + B\alpha_y + \mathfrak{A}\beta_x + \mathfrak{B}\beta_y$. Außerdem ist: $C = 0$, $A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A} \neq 0$.

S. 732, Z. 1 v. u. — 733, Z. 1. Das geht auf Grund der Gl. S. 719, Z 1 v. u.

S. 733, Nr. 33. St. bemerkt (erster Dr. S. 70, Anm. 45), daß die Integralinv. in dem hier betrachteten Falle die Form:

$$\int\left(\frac{Bq}{z} + \frac{kBq}{\mathfrak{z}}\right) dx\,dy$$

erhalten kann.

S. 734, Z. 8 (erster Dr. S. 40, Z. 5 v. u.). Lie hatte Xf statt Uf geschrieben; von G. und St. berichtigt.

S. 734, Nr. 34. Führt man mit St. (erster Dr. S. 70f., Anm. 48) $\int (dx:\xi)$ als neues x ein und $\mathfrak{B}:B$ als neues y, so wird: $\xi = 1$, $\eta = 0$, während A, $\mathfrak{A}$, C nach S. 719 Null bleiben. Die Formeln S. 734, Z. 9f. zeigen daher, daß B von x frei wird: $B = Y(y)$, während: $\mathfrak{B} = y\,.\,Y(y)$. Endlich kann man solche neue Veränd. z und $\mathfrak{z}$ einführen, daß $D = 0$ wird. Dann hat die Integralinv. die Form:

$$\int Y(y)\left(\frac{q}{z} + \frac{yq}{\mathfrak{z}}\right) dx\,dy,$$

und es ist:

$$Uf = c\frac{\partial f}{\partial x} + z\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial y},$$

wo $\alpha_y + y\beta_y = 0$. Vgl. S. 747, Fall XII, Nr. 54.

S. 734, Nr. 34a. Mit St. (erster Dr. S. 71, Anm. 49) setzen wir:

$$x_1 = \varphi(x), \quad y_1 = \frac{B}{\varphi'(x)},$$

dann wird nach S. 719: $A_1 = \mathfrak{A}_1 = 0$, $C_1 = 0$,

$$B_1 = \frac{B}{\varphi'(x)} = y_1, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\varphi'(x)} = \frac{B\varphi(x)}{\varphi'(x)} = x_1 y_1,$$

während $D_1 = 0$ gemacht werden kann. Vgl. S. 747, Fall XIII, Nr. 55.

S. 735, Nr. 34b. Führen wir mit St. (erster Dr. S. 71f., Anm. 50) $\varphi(x)$ als neues x ein, so bleiben: A, $\mathfrak{A}$, C gleich Null, B wird $= B(x)$, $\mathfrak{B} = x\,.\,\mathfrak{B}(x)$. Vgl S. 747, Fall XIV, Nr. 56.

S. 735, Nr. 36. Mit St. (erster Dr. S. 72, Anm. 51) führen wir W als neues y ein, dann bleiben A, B und C nach S. 719 gleich Null und es wird: $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{B} = 0$, während $D = 0$ gemacht werden kann. Es ist somit η konstant und ξ bleibt ganz willkürlich. Vgl. S. 748, Fall XV, Nr. 57.

Vertauscht man x mit y und z mit $\mathfrak{z}$, so kommt man auf den Fall von Nr. 33a, S. 733 für den Wert: $k = 0$.

S. 736, Z. 5 v. u. — 737, Z. 4. Wie St. bemerkt (erster Dr. S. 72, Anm. 53) muß zu den drei Gl. noch die vierte:

$$\mathfrak{A}\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \mathfrak{B}\frac{\partial Y_1}{\partial y} = Y_1$$

hinzugefügt werden. Hat man diese Gleichung befriedigt, so ergibt sich:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = \frac{\mathfrak{B}}{Y_1}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = -\frac{\mathfrak{A}}{Y_1}.$$

ein System, das wegen: $\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y = 1$ unbeschränkt integrabel ist. Daß $\overline{U}f$ bei dieser Variabelnänderung seine Form behält, folgt aus Abh. XX (1895), S. 568.

S. 738, Z. 14 v. u. (erster Dr. S. 47, Z. 1). Lie hatte die Gl. nicht vollständig hingeschrieben. G. und St. haben das Fehlende ergänzt.

S. 740, Z. 1—5. Nach den Gl. (18), S. 737 ist:

$$\beta_y = 0, \quad x\beta_x = \mu(x), \quad \alpha_y = 0, \quad -x\alpha_x = \mu(x)\varphi(x).$$

S. 740, Z. 2, 1 v. u. Dieses Kapitel ist nicht vorhanden.

S. 741, Z. 15—17. Nämlich aus den Definitionsgl. der endl. Trff., bei denen: $X_1 f$, $X_2 f$ und die Integralinv. invariant bleiben. Vgl. S. 706, Nr. 6.

S. 741, Z. 11 v. u. (e. Dr. S. 51, Z. 6). Lie hatte $X(x)$ statt $\mu(x)$ geschrieben, was Guldberg u. Størmer verbessert haben. Man erinnere sich, daß $\mu(x)$ eine willk. Fkt. ist.

S. 741, Z. 10, 9 v. u. Nach S. 706, Nr 6.

S. 742, Z. 8—11. Die inf. Trff. der Gruppe G unsres Problems (S. 713), die ja mit der Gruppe aller Uf ähnlich ist, werden durch gewisse Diffgl. definiert. In diese Definitionsgl. von G, die wir aufstellen können, führen wir die gefundene Invariante x von G, nebst etwa: x_1, x_2, x_3 als neue Veränd. ein. Sodann betrachten wir x als konstant, wir eliminieren also aus den Definitionsgl. alle Ableitungen, die nach x genommen sind. Wir erhalten dadurch ein System von lin. hom. part. Diffgl. für ξ_1, ξ_2, ξ_3, dessen allgemeinstes Lösungssystem aus drei Lösungssystemen linear ableitbar ist, das also auf eine gew. lin. hom. Diffgl. 3. O. hinauskommt. Da wir von dieser Diffgl. 3. O. die zwei partikulären Lösungen kennen, die den gegebenen inf. Trff.: $X_1 f$, $X_2 f$ entsprechen, so erfordert die Bestimmung der allg. Lösung nur Quadratur, nämlich die Integration einer gew. lin. Diffgl. 1. O., die durch zwei aufeinanderfolgende Quadraturen geleistet werden kann. Ist das ausgeführt, so kennen wir von dem zweigl. vollst. Syst.: $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ in den Veränd.: x_1, x_2, x_3 eine inf. Trf und damit einen Multiplikator, sodaß zur Bestimmung der fehlenden Lösung noch eine Quadratur erforderlich ist.

Wir brauchen also auf diesem Wege erst zwei auf einanderfolgende Quadraturen und dann noch eine Quadratur, während Lie bloß zwei Quadr. verlangt. Das liegt daran, daß wir die allg. inf. Trf. der Gruppe G bestimmt haben, die sich ergibt, wenn x als konstant betrachtet wird. Das ist aber nicht nötig, wenn wir uns damit begnügen, eine inf Trf. des vollst. Syst.: $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ zu suchen, und uns nicht darauf versteifen, daß diese inf. Trf. der Gruppe G angehören soll.

In der Tat, ist Xf die allg. inf. Trf. von G, so gestattet unser vollst. Syst. jede inf. Trf. von der Form: $Xf - \varrho_1 X_1 f - \varrho_2 X_2 f = Yf$. Haben wir nun x als neue Veränderliche eingeführt, so sind: Xf, $X_1 f$, $X_2 f$ frei von $\partial f : \partial x$. Ist ferner das vollst. Syst. nach $\partial f : \partial x_1$ und $\partial f : \partial x_2$ auflösbar, so können wir ϱ_1, ϱ_2 so bestimmen, daß Yf auch von diesen beiden Ableitungen frei wird. Wir haben dann die beiden Gl.:

$$\xi_1 - \varrho_1 \xi_{11} - \varrho_2 \xi_{21} = 0, \quad \xi_2 - \varrho_1 \xi_{12} - \varrho_2 \xi_{22} = 0$$

und setzen:

$$\xi_3 - \varrho_1 \xi_{13} - \varrho_2 \xi_{23} = \eta.$$

Zur Bestimmung von $\varrho_1, \varrho_2, \eta$ als Fkt. von: x_1, x_2, x_3 haben wir dann ein Syst. von lin. hom. part. Diffgl., dessen allgemeinste Lösung von drei willk. Konstanten abhängt, das also auf ein Syst. von lin. hom. gew. Diffgl. 1. O. von der Form:

$$\frac{d\varrho_1}{du} = \alpha_{11}\varrho_1 + \alpha_{12}\varrho_2 + \alpha_{13}\eta,$$

$$\frac{d\varrho_2}{du} = \alpha_{21}\varrho_1 + \alpha_{22}\varrho_2 + \alpha_{23}\eta,$$

$$\frac{d\eta}{du} = \alpha_{31}\varrho_1 + \alpha_{32}\varrho_2 + \alpha_{33}\eta$$

hinauskommt. Da aber dieses System offenbar die beiden partik. Lösungssyst.: $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$, $\eta = 0$ und: $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 1$, $\eta = 0$ besitzt, so sind die Koeff. von ϱ_1 und ϱ_2 alle gleich Null. Wir finden daher η durch eine Quadratur. Die Größen ϱ_1 und ϱ_2 brauchen wir gar nicht zu berechnen, denn:

$$Yf = \eta \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

ist jetzt eine bekannte inf. Trf. unsers vollst. Systems, die allerdings der Gr. G im allgemeinen nicht angehören wird.

S. 742, Z. 7—2 v. u. Vgl. Abh. XX (1895), S. 568, 570, 574 f. Weil die Gruppe einfach ist, läßt die Auffindung einer ersten Lösung keine Vereinfachung zu, vgl. S. 564 f.

S. 744, Z. 5—7. Vgl. Abh. V (1888), S. 234 f.

S. 744, Z. 13—7 v. u. Vgl. Bd. V d. Ausg. Abh. XIV (1883), S. 419, Nr. 39; S. 420 f., Nr. 42.

S. 746, Z. 6 v. u. Setzt man $k = 0$ und vertauscht man x mit y, z mit $\mathfrak{z}$, so kommt man auf Fall XV.

S. 746, Nr. 52, 53. Die Gruppe G läßt das zweigl. vollst. Syst.: $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ inv., das in einem dreigl., ebenfalls inv. vollst. Syst. steckt, dessen Lösung x ist. Man bestimme in der Umgebung eines Punktes: $x_1^0, \ldots, x_4^0$ von allgemeiner Lage die Glieder 1. O. in den Reihenentw. der inf. Trff. 1. O. von G, was auf Grund der bekannten Defingl. von G möglich ist. Dann erhält man in den Differentialen dx eine lin. hom. Gr., die ein ebenes Büschel von ∞^1 Richtungen inv. läßt und ein dieses umfassendes ebenes Bündel von ∞^2 Richtungen. Dieses Bündel bestimmt die unbeschränkt integrable Gl., die dem dreigl. vollst. Systeme entspricht. Im Falle X muß man dieses vollst. Syst. integrieren, was auf eine gew. Diffgl. 1. O. hinauskommt, und findet so x. Im Falle XI findet man ähnlich wie es in der Anm. zu S. 742, Z. 8—11 auseinandergesetzt ist, durch eine Quadratur eine inf. Trf. des vollst. Syst. und durch eine zweite Quadratur x.

S. 747, Nr. 54—56. Vgl. die Anm. zu S. 734 f., Nr. 34, 34 a, 34 b.

S. 748, Nr. 57. Vgl. die Anm. zu S. 735, Nr. 36.

S. 749, Nr. 60, 61. Man verfährt, wie in der Anm. zu S. 742, Z. 8—11.

Zu Nr. XXX, S. 750—752.

S. 750, Z. 10—13. Study, Über Systeme von komplexen Zahlen, Gött. Nachr. 1889, Nr. 9 vom 2. März, S. 237—268. Komplexe Zahlen und Transformationsgruppen. Leipz. Ber. 1889, Sitzung vom 6. Mai, S. 177—228.

S. 750, Z. 14—18. Vgl. die Anm. zu Abh. VIII (1889), S. 265, Z. 17 v. u.

S. 751, Z. 17. E. Study, in der zuletzt genannten Abh. S. 194, 210.

S. 751, Z. 19. F. Engel, Die Erzeugung der endl. Trff. einer proj. Gr. durch die inf. Trff. der Gr. I. Mitt. Leipz. Ber. 1892, S. 279—291. II. Mitt., mit Beiträgen von E. Study, ebd. 1893, S. 659—696.

S. 751, Z. 21—27. N. H. Abel, Œuvres compl., 2. Ausg. Bd. II (1881), Abh. VI, Détermination d'une fonction au moyen d'une équation, qui ne contient qu'une seule variable. S. 36 f.

S. 752, Z. 1. Die Arbeiten von Maurer sind zusammengestellt in der Anm. zu Abh. XIV (1892), S. 374, Z. 10, 9 v. u. Bei Christoffel denkt Lie wohl an dessen „Bemerkungen zur Invariantentheorie", Math. Ann. Bd. XIX (1882), S. 280 bis 290. Ges. math. Abh. Bd. II (1910), S. 204—215. Bei Hilbert an dessen Abh. „Zur Theorie der algebraischen Gebilde", Note I, II, III, Gött. Nachr. 1888, S. 450—457; 1889, S. 25—34; 423—430. „Über die Theorie der algebraischen Formen." Math. Ann. Bd. XXXVI (1890), S. 473—534. Bei Study an dessen „Methoden zur Theorie der ternären Formen". Leipz. 1889.

Verzeichnis der aus Briefen abgedruckten Stücke.[1])

Lie an A. Mayer.

Lie an F. Klein.

F. Klein an Lie.

Sachregister.[3])

1) Da Lie nur selten den Tag angibt, an dem er schreibt, so muß meistens der Tag aushelfen, an dem der Empfänger den Brief erhalten oder beantwortet hat. Die kursiv gesetzten Zahlen beziehen sich hier wie im folgenden auf die Anmerkungen.

2) Durch Postkarte, S. *781*, Anm. 4.

3) Kunstausdrücke, die nur in den Anmerkungen vorkommen, sind mit einem * versehen.

Namenregister.[1]

1) Die kursiv gesetzten Seitenzahlen beziehen sich auf die Anmerkungen. Namen, die nur in den Anmerkungen vorkommen, sind mit einem * versehen.

Druckfehler, Berichtigungen und Zusätze.

Zu Band III.

S. 24, Z. 7 v. u. hätte F durch f ersetzt werden sollen.

S. 309—316. Vgl. Bd. VI, Abh. XXVII (1897), S. 660f.

S. 328, Z. 7—3 v. u. Vgl. Brioschi, Sur l'analogie entre une classe de déterminants d'ordre pair, et sur les déterminants binaires. Crelle Bd. 52 (1856), S. 133—141. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipz. 1909, § 66. Den Hinweis auf diese Stellen verdanke ich U. Amaldi.

S. *613*f. Vgl. Bd. VI. Abh. XXV (1896), S. 633—636.

S. *625*, Z. 18f.: Abh. XXV, S. 620.

S. *628*f. Vgl. auch A. Mayer, „Über die Zurückführung eines vollst. Systems auf ein einziges Syst. gewöhnlicher Diffgl." Leipz. Ber. 1891, S. 448—458.

S. *636*, Z. 9f. Vgl. auch Bd. VI, Abh. II, S. 103, Z. 18—14 v. u. und Bd. V, Abh. VII (1882), S. 234, *640*.

S. *661—664*. Vgl. Bd. VI, Abh. XXV (1896), S. 632—637.

S. *760*, Z. 22. Abgedruckt in den Oeuvres de G. H. Halphen, Bd. II, 1918, S. 197—253. Hier hätte auch die in Bd. VI d. Ausg. S. 794, Z. 15—11 v. u. angeführte Abh. von 1876 genannt werden sollen.

S. *760*, Anm. zu S. 545, Z. 6, 5 v. u. Vgl. auch Bd. V d. Ausg., Abh. X (1883), S. 242, Z. 6—12.

S. *763*, Z. 3 ist hinzuzufügen: Vgl. ferner Bd. VI d. Ausg. S. 822, Z. 18—13 v. u.

S. *767*, Z. 5 v. o., 7 v. u. lies: $a^2\Theta_{s\bar{s}} = \sin\Theta$.

Zu Band V.

S. XI, Z. 11 v. u. fehlt hinter 1883: Nr. 10.

S. 177, Kopf. lies: Nr. 27—31.

S. 191, Kopf. lies: B. T. der Ebene.

S. 236, Z. 7f. Vgl. den Brief an A. Mayer, Bd. VI d. Ausg. S. *800*.

S. 243, Z 1 v. u. fehlt der Punkt.

S. 247, Z. 2 v. u. hätte $r-1$ in $r-2$ verbessert werden sollen.

S. 253, Z. 4—2 v. u., *774*, Z. 10, 9 v. u. Siehe: Monge, Sur les équations différentielles des courbes du second degré, Corresp. sur l'École polyt. Bd. II, Nr. II, Januar 1810, S. 51—54. Den Hinweis auf diese Stelle verdanke ich É. Cartan.

S. 337, Z. 18, 22. Hier hätten X_1 und X_2 mit andern Typen gesetzt werden sollen.

S. 348, Z. 1 v. u. lies: $f(x)q$.

S. 381, Z. 8 v. u. lies: „un-".

S. 416, Z. 10 lies: $y + \Pi(x)$.

S. 421, Z. 13 v. u. lies: „mehr-".

S. *583*, Z. 24f. Hier hätte auch die vom 5. 7. 1884 datierte Stelle, Math. Ann. Bd. VIII, S. 303 erwähnt werden sollen, die allerdings erst 1875 erschienen ist. Vgl. Bd VI d. Ausg. S. *769*, Z. 10—14.

S. *596*, Z. 2f. lies: „erzeugt, sie ist".

S. *596*, Z. 10 lies: „so wäre es nach".

S. *598*, Z. 1f. lies: „Form erhält, die".

S. *598*, Z. 16 v. u. lies: $\sum\limits_{k}^{1\ldots n}$.

S. *601* im Kopfe lies: Gruppe auf der Geraden.

S. *615*, Z. 17. In Abh. II, S. 22f. verfährt Lie anders.

S. *618*, Z. 1—5. Lie kehrt damit zu dem Verfahren zurück, das er in Abh. II, S 22f., 35f., 40 benutzt hat.

S. *653*, Z. 25 lies: „eine dreigliedrige".

S. *658*, Z. 23 v. u. lies: „Integralk."

S. *659*, Z. 22 lies: „die eiuzige inv."

S. *663*, Z. 6—3 v. u. Die Stelle in Bd. V, Abh. XIV (1883), S. 413, Z. 14 bis 12 v. u. ist genau genommen eine Anwendung des Satzes. Vgl. auch Bd. VI d. Ausg. Abh. XXIX (1902), S. 705, *911* ff.

S. *703*, Z. 8 lies: $+\,x\dfrac{y_3}{y_2^2}$.

S. *703*, Anm. zu S. 310, Z. 9—11. Vgl. auch einen Brief an F. Klein, Bd. VI d. Ausg. S. *785*.

S. *707*, Z. 5—3 v. u. Vgl. auch die Briefe an A. Mayer und F. Klein Bd. VI d. Ausg. S. *777—779*, I; *786*f., X, XI.

S. *712*, Z. 1 v. u. lies: Abh. XVIII, Kap. I, § V, S. 419—428.

S. *713*, Z. 16 lies: Ber. 1891.

S. *719*, Z 18—15 v. u. Das geht deswegen, weil die $D_k^{(s)}f$ in den Veränd. $z_1, \ldots, z_\varrho$ eine einfach transitive Gruppe erzeugen, deren endliche Trff. bekannt sind. Vgl Bd. VI d. Ausg., S *838—842*.

S *719*, Z 12 v. u. lies: $\overline{D}_k f$.

S. *739*, Anm. zu S. 426, Z. 16—11 v. u. Daß man im Falle einer algebr. Diffgl. nur algebr. Hilfsgl braucht, ergibt sich aus dem Schlußparagraphen der großen Abh. II in Bd. VI d. Ausg, S. 222f., wo Lie eine allgemeine Methode andeutet, um eine endliche kont. Gr. aus den Definitionsgl. ihrer inf. Trff. zu bestimmen, s. ebd. S. *847—853*.

S *740*, Anm. zu S. 433—440. Vgl einen Brief von 1873 an A. Mayer, Bd. III d. Ausg., S *676*f. Ferner einen an F. Klein von Ende 1882 oder Anf. 1883, Bd. VI, S. *893*.

S. *757*, Spalte rechts, Z. 8 v. u.: XI, 31f; XIV, 363 ff.

S *759*, ebd., Z. 4, 3 v. u.: IV, 87, *622*; V, 195, *634*; XIV, 376, 420; XIX, 457.

S. *761*, Spalte links, Z. 12: 502, *605*.

S. *767*, Z. 7 ist xp zu tilgen.

S. *774*, Z. 24 v. u. lies: Seiten.

Zu Band VI.

S. 3 im Kopf lies: Ähnlichkeit.

S. 19 im Kopf lies: Trff.

S. 41, Z. 15 v. u. hätte gesetzt werden sollen: „Transformationen erster Ordnung läßt".

S. 58, Z. 1 v. u. lies: $(B_i B_j) = \sum\limits_s c_{ijs} B_s$.

S. 144, Z. 20f. lies: § 6, S. 23.

S. 211, Z. 1 v. u. lies: $B_k' f$.

S. 243 im Kopf lies: Krümmungslinien.

S. 423, Z. 14 hätte „invariante" gesperrt werden sollen.

S. 437, Z. 10 lies: S. 432.

Auf meinen Wunsch hat P. Heegaard den ersten Abdruck von Abh. XXIX mit der Urschrift verglichen, da ich das nicht hatte tun können. Es haben sich dabei noch einige mitteilenswerte Abweichungen des ersten Abdrucks ergeben.

S. 714, Z. 16 (1. Druck 15, Z. 8). In der Urschrift steht: „Das vorgelegte Integral."

S. 717, Z. 6 v. u. (19, Z. 15). In der Urschrift steht: „lineare."

S. 725, Z. 4 (29, Z. 11). In der Urschr.: „Es steht jetzt nur noch zurück, den Fall."

S. 726, Z. 12, 7 v. u. (31, Z. 3, 8). Die Urschr. hat ψ statt Θ.

S. 727, Z. 16 (32, Z. 8). Die Überschrift: $C = 0$ fehlt in der Urschr.

S. 732, Z. 16 (38, Z. 13). Lie hat am Rande hinzugefügt: „Wir können, wenn A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nicht alle verschwinden, $D = 0$ setzen."

S. 736, Z. 7 (43, Z. 12). $\mathfrak{B}_1$ steht in der Urschr.

S. 738, Z. 7 (46, Z. 12). In der Urschr. fehlt: „unterwerfen."

S. 738, Z. 17 (46, Z. 1 v. u.). In der Urschr. steht: „daß U und V."

S. 746, Z. 4 v. u. (57, Z. 1); S. 747, Z. 15 (57, Z. 10 v. u.): S. 747, Z. 11 v. u. (58, Z. 2); S. 748, Z. 12 (58, Z. 4 v. u.); S. 748, Z. 13 v. u. (59, Z. 8); S. 748, Z. 1 v. u. (59, Z. 10 v. u.); S. 749, Z. 13 (60, Z. 3); S. 749, Z. 6 v. u. (60, Z. 6 v. u.). An allen diesen Stellen hatte Lie die Faktoren von $\partial f : \partial z$ und $\partial f : \partial \mathfrak{z}$ nur durch eine Klammer oder durch einen leeren Raum angedeutet. Guldberg und Størmer haben daher in ihrem Abdrucke das Fehleude ergänzt.

S. *769*, Z. 13 lies: Bd. VIII (1875), S. 303.

S. *769*, Z. 15 v. u. lies: „Verfahren von Bd. V, Abh. II wieder."

S. *771*, Z. 16 ist hinter 210 hinzuzufügen: Oeuvres, II. Ser. Bd. VI, S. 252—255; Bd. VII, S. 40—54, 255—266.

S. *776*, Z. 21 v. u. lies: „ganzer homogener."

S. *777* im Kopfe lies: „Brief."

S. *818* im Kopfe lies: 185—188.

S. *834* im Kopfe lies: III, S. 197.

S. *855* im Kopfe lies: „Gruppen.