VII.

Sur les équations différentielles ordinaires, qui possèdent des systèmes fondamentaux d'intégrales. [1233

Comptes Rendus Bd. 116, S. 1233—1235, Paris 1893. Vorgelegt in der Sitzung vom 29. Mai 1893.

1. Les théories classiques du système simultané:

$$\frac{dx_k}{dz} = Z_{k1}(z)x_1 + \cdots + Z_{kn}(z)x_n \qquad (k=1,\ldots,n)$$

et de l'équation équivalente:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_{i,k}^{1\ldots n} Z_{ki}(z)\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

prennent au fond leur origine dans ce fait, que les n^2 transformations infinitésimales:

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

des variables $x_1, \ldots, x_n$ déterminent un groupe continu et fini. Cette remarque m'a conduit depuis longtemps (Société des Sciences à Christiania, novembre et décembre 1882 [d. Ausg. Bd. III, Abh. XXXIX, S. 548f., Abh. XL, S. 551—553], Math. Ann., t. XXV, p. 124—130 [d. Ausg. Bd. VI, Abh. III, S. 195—202]) à l'étude de l'équation générale:

$$(1) \qquad Af = \frac{\partial f}{\partial z} + Z_1(z) X_1 f + \cdots + Z_r(z) X_r f = 0,$$

dans laquelle les expressions:

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

définissent un groupe continu et fini quelconque.

2. J'ai de plus esquissé une théorie générale de l'intégration de l'équation: $Af = 0$, même en supposant connu d'avance, pour le système simultané:

$$(2) \qquad \frac{dx_k}{dz} = Z_1 \xi_{1k} + \cdots + Z_r \xi_{rk} \qquad (k=1,\ldots,n),$$

m intégrales: $\Omega_i(x_1, \ldots, x_n, z), \ldots, \Omega_m$, ou m systèmes d'équations intégrales:

$$\alpha_{i1}(x_1, \ldots, x_n, z) = 0, \ldots, \alpha_{iq}(x_1, \ldots, x_n, z) = 0 \qquad (i=1,\ldots,m).$$

La véritable raison de ces théories est, comme je le dis expressément (Math. Ann., t. XXV, p. 128 [d. Ausg. Bd. VI, Abh. III, S. 200]), qu'il est toujours possible de trouver les intégrales générales du système simul- [1234 tané (2), lorsqu'on connaît un certain nombre fini de systèmes de solutions particulières:

$$(3) \qquad x_1', \ldots, x_n'; \; x_1'', \ldots, x_n''; \; \ldots; \; x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}.$$

3. On trouve donc, dans les Mémoires cités, une catégorie extrêmement étendue de systèmes simultanés qui possèdent ce qu'on appelle des systèmes fondamentaux d'intégrales. Je ne crois pas qu'il sera possible de perfectionner, quant au fond, mes théories d'intégration pour ces équations.

Il faut se rappeler qu'il est possible de réduire mes équations auxiliaires de l'ordre l à des équations linéaires de l'ordre $l+1$ ou $l+2$, quand le groupe simple correspondant appartient à l'une des quatre grandes classes que j'ai considérées.

4. J'ajoute qu'on trouve les expressions des solutions générales $x_1, \ldots, x_n$ en fonction des quantités (3) en résolvant par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ certaines équations:

$$J_k(x_1, \ldots, x_n; \; x_1', \ldots, x_n'; \; \ldots; \; x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) = a_k,$$

les J_k désignant ce que j'appelle des invariants des $m+1$ points $x_k, x_k', \ldots, x_k^{(m)}$ par rapport au groupe $X_1 f, \ldots, X_r f$.

5. M. E. Vessiot, dont la thèse récente constitue un progrès si important dans la théorie des équations différentielles linéaires, a eu l'heureuse idée de chercher **toutes** les équations différentielles ordinaires qui possèdent des systèmes fondamentaux d'intégrales, et M. Alf Guldberg s'est aussi occupé de la même question.

Je viens de publier moi-même à ce sujet une petite Note (voir Leipziger Berichte, 8 mai 1893 [hier Abh. VI, S. 307—313]). Sans entrer dans des détails, je crois utile de faire ici quelques remarques dont la généralisation est évidente.

6. Etant donnée une équation différentielle du premier ordre:

$$dx = \varphi(x, z)dz,$$

le système simultané:

$$dz : dx : dx' = 1 : \varphi(x, z) : \varphi(x', z)$$

possède évidemment deux solutions de la forme $u(x, z)$, $u(x', z)$. Donc, en égalant à une constante arbitraire a une fonction quelconque de ces deux quantités, on obtient toujours une formule: $x = F(z, x', a)$ qui exprime la solution générale x par une solution particulière x' et par z.

Or cette formule ne détermine pas en général un groupe entre x et x'. Néanmoins, si l'on connaît par hasard une [1235 telle formule, on connaît en même temps des transformations (finies): $z = z', x = F(z, x', a)$, qui laissent invariante l'équation: $dx = \varphi(x, z) dz$, dont l'intégration s'achève immédiatement d'après mes théories générales (Math. Ann., t. XI; voir aussi t. XXV [D. Ausg. Bd. IV, Abh. III; Bd. VI, Abh. III]).

7. C'est un problème bien intéressant de chercher avec MM. Vessiot et Guldberg tous les systèmes simultanés dont les solutions générales $x_1, \ldots, x_n$ s'expriment par m systèmes de solutions particulières seules:

$$x_k = f_k(x_1', \ldots, x_n'; \ldots; x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}; a_1, \ldots, a_n). \tag{4}$$

Comme ces auteurs ne trouvent pas même tous mes systèmes (2), qui possèdent effectivement la propriété demandée, il me semble que leurs recherches doivent présenter une lacune. Je crois que ces auteurs introduisent implicitement une **restriction** essentielle, à savoir que les formules (4) les plus générales se déduisent d'un système donné de telles formules par un changement des constantes arbitraires.

Si je ne me trompe, je suis parvenu à démontrer, d'une manière rigoureuse et bien simple, que mes systèmes (2) sont les seuls qui possèdent la propriété demandée.

VIII.

Begleitwort zu der deutschen Übersetzung von E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

E. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen I. O. Autorisierte deutsche Ausgabe von H. Maser. Leipzig 1893 bei B. G. Teubner, S. V—VIII.

Begleitwort. [V

Auf Wunsch der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner gebe ich der vorliegenden Übersetzung einige begleitende Worte mit, nicht, weil das Goursatsche Werk an sich noch der Empfehlung bedarf — schon der Erfolg der Originalausgabe ist dafür ein deutlicher Beweis — sondern, weil ich meinerseits zur Verbreitung dieser Übersetzung etwas beitragen möchte. Ich glaube, diesem Zwecke am besten zu dienen, wenn ich kurz auf die so lehrreiche Entwickelungsgeschichte der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eingehe.

Die Anfänge der Theorie stammen aus den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts. Lagrange führte die Begriffe: allgemeine Lösung und vollständige Lösung ein und zeigte, daß die allgemeine Lösung aus einer vollständigen Lösung abgeleitet werden kann. Durch diese Betrachtungen gelang es ihm, jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung im gewöhnlichen Raume auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen. Durch geometrische Betrachtungen fand später Monge den inneren Grund für diesen Erfolg in dem Begriffe Charakteristik.

In der damaligen Zeit lag der Begriff des n-fach ausgedehnten Raumes den Mathematikern noch zu fern, sonst hätte es so hervorragenden Mathematikern wie Lagrange, Monge und deren Zeitgenossen nicht entgehen können, daß sich durch Ausdehnung des Charakteristikenbegriffs auf n Dimensionen überhaupt jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen läßt. So aber konnte es geschehen, daß im Jahre 1814 Pfaff diese Aufgabe, deren Lösung uns jetzt fast selbstverständlich erscheint, auf ein viel allgemeineres, außerordentlich [VI wichtiges Problem zurückführte, dessen Formulierung und Erledigung dem Namen Pfaff ein unvergängliches Gedächtnis sichert.

Erst einige Jahre später gelangte Cauchy zu demselben Ergebnisse, indem er den Begriff Charakteristik benutzte, allerdings in analytischer Einkleidung.

Durch Betrachtungen, die er über die Lichttheorien von Huygens und Newton anstellte, wurde Hamilton zu der Bemerkung geführt, daß das Problem der drei Körper und überhaupt alle dynamischen Probleme in einem merkwürdigen Zusammenhange mit den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung stehen. Jacobi brachte sodann diesen Zusammenhang noch schärfer zum Ausdruck, indem er zeigte, daß sich die Erledigung jedes dynamischen Problems mit der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung deckt. Einen noch höheren Grad von Durchsichtigkeit hat dieser Zusammenhang, beiläufig bemerkt, in neuerer Zeit durch die Einführung des Begriffes infinitesimale Berührungstransformation erhalten, eines Begriffes, der unter anderm auch verschiedene Untersuchungen von Thomson, Tait und Lipschitz in neuer Beleuchtung erscheinen läßt.

Jacobi war der erste, der eine von der Cauchyschen verschiedene Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gab, die sogenannte Hamilton-Jacobische, eine Methode, die später von verschiedenen Seiten kritisiert und durch andre Methoden ersetzt wurde, die auch gewisse bei ihr auftretende Ausnahmefälle erledigen. Inzwischen hat sich aber ergeben, daß man durch zweckmäßige Begriffserweiterungen die Cauchysche Methode so umgestalten kann, daß alle diese Methoden als besondere Fälle der Cauchyschen erscheinen.

Jacobi deutete ferner eine andre Methode an, die sich einer besonderen Berühmtheit erfreut. Es scheint aber nicht genügend beachtet worden zu sein, daß diese Jacobische Methode der ursprünglichen Methode Pfaffs sehr nahe steht; sie ist im Grunde, wie die Cauchysche, nur eine Verbesserung der Pfaffschen Methode, die allerdings gewisse Integrationen erspart, aber ebenso, wie die Pfaffsche, viele Ausnahmefälle besitzt.

Berühmt sind auch Jacobis hiermit zusammenhängende Untersuchungen über Störungstheorie, die, obwohl mit mancherlei Unvollkommenheiten behaftet, doch in Verbindung mit gewissen, der Zeit nach vorhergehenden Arbeiten von Lagrange, Legendre, Ampère und [VII Plücker die neuere Theorie der Berührungstransformationen vorbereitet haben. Im ganzen dürften als Jacobis wichtigste Leistungen auf diesen Gebieten zu betrachten sein: die Einführung und Verwertung der Funktionaldeterminanten, die damit zusammenhängende Multiplikatortheorie und endlich die Entdeckung der Jacobischen Identität, die wesentlich mehr leistet als das Poissonsche Theorem.

Das Jahr 1870 und die folgenden Jahre brachten für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung neue wesentliche Fortschritte. Es wurden nicht bloß die Unvollkommenheiten der älteren Methoden aufgedeckt, sondern man fand auch Mittel, um diesen Unvollkommenheiten abzuhelfen.

Durch die Begründung der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen und durch die damit zusammenhängenden Begriffserweiterungen, die aus einer Vereinigung der analytischen Betrachtungen Pfaffs und der geometrischen Ideen Poncelets und Plückers hervorgegangen sind, wurden alle Ausnahmefälle einfach beseitigt, und viele Probleme, die man früher als schwierig, ja als unlösbar betrachtet hatte, wurden geradezu trivial.

Durch Schneidungsprozesse wurden Integrationsvereinfachungen erreicht, die man früher lange vergeblich gesucht hatte. Wenn auch diese Leistungen vielfach nicht die richtige Würdigung gefunden haben, so ist doch unzweifelhaft, daß die durch sie gewonnenen Resultate wichtig sind. Die Entwickelung der neueren Lehre von den Differentialinvarianten wird das für jeden, der sehen will, klar machen.

Durch Einführung der Begriffe: infinitesimale Transformation und Funktionengruppe erhielt ferner die ganze Theorie eine rationelle Gestalt, die ihr früher gefehlt hatte. Die Invariantentheorie der Berührungstransformationen lieferte die Erledigung des Äquivalenzproblems und zeigte nicht bloß, daß noch sehr viel Neues geleistet werden konnte, sondern auch genau, was und wieviel. Durch die Theorie der Funktionengruppen und die Invariantentheorie der Berührungstransformationen war zugleich die Grundlage für die Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung geschaffen.

Von fast allen diesen Ergebnissen liefert das Goursatsche Werk zum ersten Male eine zusammenhängende Darstellung. In dieser Beziehung und auch sonst nach vielen Richtungen hin steht es nach meiner Ansicht hoch über allen früheren Lehrbüchern auf diesem Gebiete. Die wissen- [VIII schaftliche Welt ist daher Herrn Goursat und dem Bearbeiter seiner Vorlesungen, Herrn Bourlet, zu hohem Danke verpflichtet, und ich glaube, daß auch der Verfasser der vorliegenden Übersetzung, Herr Maser, auf den Dank aller deutschen Mathematiker ein Anrecht hat.

Im September 1893.

Sophus Lie.

IX.

Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. [53

Leipz. Ber. 1895, Heft I, abgeliefert 7. 5. 1895, S. 53—128, vorgelegt in der Sitzung vom 4. 2. 1895.

Die neuen Theorien dieser Abhandlung teilte ich der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am 16. Oktober 1893 mit. Sodann entwickelte ich sie eingehend in meinen Vorlesungen an der Universität Leipzig im Wintersemester 1893—1894.

Sophus Lie.

1. In der ganzen modernen Mathematik ist die Theorie der Differentialgleichungen die wichtigste Disziplin.

Es dürfte richtig sein, zu sagen, daß die Begriffe Differentialquotient und Integral, deren Ursprung jedenfalls bis auf Archimedes zurückgeht, dem Wesen der Sache nach durch die Untersuchungen von Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat und Wallis in die Wissenschaft eingeführt worden sind. Daß aber nichtsdestoweniger diese Forscher keineswegs als Begründer der Infinitesimalrechnung betrachtet werden können, dürfte schon daraus hervorgehen, daß sie noch nicht bemerkt hatten, daß Differentiation und Integration inverse Operationen sind.

Diese kapitale Entdeckung[1]), die uns jetzt als selbstverständlich erscheint, gehört Newton und Leibniz, die überdies die unermeßliche Tragweite der besprochenen Begriffe erkannten und gleichzeitig zweckmäßige Algorithmen einführten.

Ganz besonders wichtig waren einerseits Newtons Entdeckung der Binomialformel, die ja zeigte, wie man viele Differentiale und Integrale [54 findet, andererseits Leibnizs Einführung der Symbole dx, dy, sowie endlich die Betrachtung und Verwertung der höheren Differentialquotienten.

1) Die Frage, ob Newton oder Leibniz zuerst bemerkt hat, daß Differentiation und Integration inverse Operationen sind, hat offenbar die größte Bedeutung für die Entscheidung des alten Prioritätsstreites hinsichtlich der Begründung der Infinitesimalrechnung. Wenn ich eine mündliche Mitteilung des Herrn Zeuthen richtig verstanden habe, wird dieser Forscher, der schon so viel für die Geschichte der Mathematik geleistet hat, die soeben besprochene Frage in einer bald erscheinenden Arbeit behandeln.

2. Die Anwendungen der Begriffe Differential und Integral, die von Newtons und Leibnizs Vorgängern herrühren, bezogen sich fast nur auf das Ziehen von Tangenten, und die Bestimmung von Bogenlängen, Flächenräumen und Volumina. Bei der freieren Auffassung der beiden Begriffe, die von Newton und Leibniz herrührt, war es diesen großen Mathematikern möglich, solche Probleme ernstlich in Angriff zu nehmen, die wir jetzt als Differentialgleichungen bezeichnen. Vielleicht dürfte es richtig sein, zu behaupten, daß gerade die Formulierung und Integration von Differentialgleichungen die epochemachenden Fortschritte sind, die in erster Linie die **Newton-Leibniz**sche Ära und gleichzeitig die jetzige höhere Mathematik charakterisieren.

Ganz besonders berühmt, und zwar mit vollem Grunde, ist Newtons Ableitung der Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung aus dem von Newton selbst formulierten Gravitationsgesetze. Diese nicht allein für die Mechanik epochemachende Entdeckung beruht faktisch auf der Integration eines Systems von Differentialgleichungen; denn das Gravitationsgesetz gibt die Differentialgleichungen der Planetenbewegung, und die Keplerschen Gesetze sind weiter nichts als die zugehörigen Integralgleichungen.

3. Die Brüder Jacob und Johann Bernoulli (1654—1705, 1667 bis 1748) gaben mehrere Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen; besonders berühmt sind ihre Untersuchungen über geodätische Kurven und isoperimetrische Probleme, die als Anfänge der Variationsrechnung zu betrachten sind.

Der italienische Mathematiker Riccati (1676—1754) lenkte die Aufmerksamkeit auf einige Fälle der später so berühmten Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = X(x) + X_1(x)y + X_2(x)y^2,$$

die unter den nichtintegrablen Differentialgleichungen unzweifelhaft als die einfachste und wichtigste zu betrachten ist. Neuere gruppentheoretische Untersuchungen zeigen nämlich, daß diese Gleichung als ein Ana- [55 logon der algebraischen Gleichung fünften Grades aufgefaßt werden kann.

Clairaut (1713—1765), der besonders durch seine Untersuchungen über gewundene Kurven bekannt geworden ist, beschäftigte sich mit Gleichungen von der Form:

$$y - xy' - \varphi(y') = 0,$$

deren Integrationstheorie bekanntlich mit dem Begriffe Linienkoordinaten in Verbindung steht. Man darf daher behaupten, daß der Ursprung des Begriffes Linienkoordinaten (ja sogar Dualität) bis auf Clairaut zurückgeführt werden kann.

Noch mächtiger war der Einfluß d'Alemberts (1717—1783) auf die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen. Durch Aufstellung des allgemeinen mechanischen Prinzips[1]), das seinen Namen trägt, führte er alle Probleme der Dynamik auf Differentialgleichungen zurück und gab hiermit Newtons bahnbrechenden mechanischen Ideen eine allgemeingültige und definitive Form. Sehr wichtig waren ebenfalls d'Alemberts schöne Untersuchungen über gewöhnliche und partielle lineare Differentialgleichungen.

4. Die Namen: Euler, Lagrange und Laplace, Monge, Ampère und Pfaff bezeichnen eine neue Epoche in der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen, die sich unter anderm dadurch charakterisieren läßt, daß man anfing, auch die partiellen Differentialgleichungen unter allgemeinen Gesichtspunkten zu betrachten.

Bei dieser Gelegenheit kann ich selbstverständlich nicht auf alle Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen eingehen, die von diesen großen Mathematikern und ihren noch größeren Nachfolgern: Gauß, Cauchy, Fourier, Abel, Jacobi und Riemann herrühren. Ich will aber versuchen, in Kapitel I, wenn auch nur in großen Zügen, einige unter den wichtigsten Richtungen in den neueren Untersuchungen über Differentialgleichungen kurz zu charakterisieren. Ausführlicher gehe ich dabei nur auf diejenigen Richtungen ein, die mit meinen eigenen Untersuchun- [56
gen in Verbindung stehen. Sodann versuche ich in Kapitel II, einige von mir herrührende Theorien, die bis jetzt nur in norwegischer Sprache und in knapper Form skizziert waren, in die richtige Beleuchtung zu setzen. In den folgenden Kapiteln entwickele ich sodann ziemlich ausführlich wichtige und allgemeine Integrationstheorien, die ebenfalls von mir herrühren.

Kapitel I.

Vergleichende Betrachtungen über neuere Untersuchungen, die sich auf Differentialgleichungen beziehen.

5. In diesem Kapitel versuchen wir zuerst, eine Übersicht über die seit Euler und Lagrange ausgeführten Untersuchungen über Differentialgleichungen zu gewinnen. So unvollständig und unvollkommen auch

1) Neuerdings hat Herr Ostwald versucht, ein allgemeines Prinzip aufzustellen, das alle Naturgesetze umfassen soll. Es ist aber, wie schon früher von mir hervorgehoben, zu beklagen, daß die bisherige mathematische Formulierung dieses Prinzips so vag und unklar ist, daß Mathematiker den Sinn desselben nicht verstehen können. Erst wenn eine wirkliche Formulierung des Prinzips vorliegt, läßt sich die Frage, ob zum Beispiel Hertz ähnliche Ideen gehabt hat, entscheiden.

diese unsere Betrachtungen sein mögen, so werden sie doch dazu dienen, die Tendenz unserer eigenen Bestrebungen klarzustellen. Ganz besonders eingehend beschäftigen wir uns sodann mit der von Monge, Laplace, Ampère und Darboux entwickelten Theorie der Charakteristiken und gewinnen hierdurch die Grundlage für die Darstellung eigener Untersuchungen, die in den folgenden Kapiteln entwickelt werden.

§ 1. Verschiedene Richtungen innerhalb der Theorie der Differentialgleichungen.

Soweit ich es übersehe, dürfte es richtig sein, zu sagen, daß die in den letzten hundertundzwanzig Jahren veröffentlichten Untersuchungen über Differentialgleichungen sich größtenteils in vier oder fünf verschiedene Kategorien einordnen lassen, zwischen denen sich allerdings viele Berührungspunkte finden lassen.

6. Zu der ersten Kategorie rechne ich zunächst die von Euler, Lagrange und Monge angefangenen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, die von Pfaff, Cauchy, Hamilton, Jacobi, A. Mayer und anderen weiter geführt worden sind. [57
Hierher rechne ich ferner die von Monge und Laplace angefangenen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. Unter Laplaces und Monges Nachfolgern auf diesem Gebiete sind Ampère, Darboux und einige andere französische Mathematiker diejenigen, die die wichtigsten Fortschritte begründet haben. In allen diesen Arbeiten spielt der Mongesche Begriff Charakteristik implizite oder explizite eine wichtige Rolle.

7. Zu der zweiten Richtung rechne ich die von d'Alembert, Fourier und Cauchy angefangenen, von Riemann, Weierstraß, Méray, Schwarz, C. Neumann, Poincaré, Picard und vielen anderen hervorragenden Mathematikern weitergeführten Untersuchungen, die sich einerseits mit Integrabilitätsbedingungen beschäftigen, andererseits mit der Bestimmung derjenigen Integrale, die zu gegebenen Anfangsbedingungen gehören.

8. Zu der dritten Richtung rechne ich die meisten neueren Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen, deren Grundlage eigentlich die von Cauchy und Abel geschaffene allgemeine Funktionentheorie ist. Muß man auch sagen, daß Gauß und Riemann für diese Richtung die Bahn gebrochen haben, so muß man doch Fuchs (1866) als den eigentlichen Begründer dieser Richtung auffassen.

Diese Untersuchungsrichtung erhielt eine neue Tragweite durch die Einführung des Galoisschen Begriffs der diskontinuierlichen Gruppe.

In den mir bekannten Arbeiten Riemanns kommt dieser Begriff nicht explizite vor[1]); ebenso wenig in den älteren Untersuchungen von Fuchs. Die ersten Arbeiten, die, soweit mir bekannt, den Galoisschen Gruppenbegriff für die allgemeine Theorie der (linearen) Differentialgleichungen verwerten, sind C. Jordans Publikationen in der ersten Hälfte des Jahres 1874. Einen Fortschritt begründete andererseits Fuchs durch Verwertung (1875) der Cayleyschen Invariantentheorie für die linearen Differentialgleichungen. Dabei ist immerhin zu beachten, daß sich diese Resultate einfacher und sogar vollständiger durch Vereinigung von C. Jordans soeben zitierten Untersuchungen mit F. Kleins im Jahre 1874 durch- [58
geführter Bestimmung[2]) aller diskontinuierlichen projektiven Gruppen der Geraden ableiten ließen, wie Klein nachträglich zeigte.

Zu dieser Richtung gehören eine große Anzahl funktionentheoretischer Untersuchungen, die von Schwarz, Hermite, Thomé, Frobenius, Fuchs, Klein, Poincaré, Picard, Appell, Painlevé und anderen herrühren. Auf diese Untersuchungen brauchen wir hier nicht einzugehen; dagegen besprechen wir später, wenn auch nur flüchtig, Cockles, Laguerres und Halphens, sowie Picards und Vessiots Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen.

9. Zu der vierten Richtung rechne ich diejenigen Untersuchungen, die explizite oder implizite meinen allgemeinen Begriff der kontinuierlichen Gruppen für die Integrationstheorie verwerten. In den hierher gehörigen Arbeiten spielt gleichzeitig der aus dem Gruppenbegriffe fließende Begriff Differentialinvariante eine fundamentale Rolle.

Auf die geschichtliche Entwickelung dieser beiden Begriffe brauche ich bei dieser Gelegenheit nicht einzugehen. Diese ganze Richtung nimmt ihren Ursprung in meiner in den Jahren 1869—1870 gemachten Entdeckung, daß die Integrationstheorien der älteren Mathematiker, die

1) Es ist ja sicher genug, daß in Riemanns, wie in so vielen älteren Arbeiten, der Gruppenbegriff implizite vorkommt. Ob aber Riemann den Gruppenbegriff wirklich besaß, darüber weiß man doch wohl nichts. Der Umstand, daß Riemann in seinen Untersuchungen über Abelsche Integrale Galois gar nicht zitiert, deutet nicht gerade darauf hin, daß er mit Galois Arbeiten und Ideen genauer bekannt war.

2) Im November 1873 teilte ich Klein mit, daß ich alle kontinuierlichen Gruppen in einer Veränderlichen auf die projektive Form gebracht hatte. Diese meine Mitteilung war, wenn ich nicht irre, die äußere Veranlassung zu Kleins im Frühling 1874 durchgeführter Bestimmung aller diskontinuierlichen projektiven Gruppen in einer Veränderlichen.

Von Interesse dürfte es noch sein, zu notieren, daß sich Klein schon in dieser Zeit (Brief vom 30. April 1874) mit der Frage nach allen eindeutigen Funktionen mit einer diskontinuierlichen projektiven Gruppe beschäftigte.

früher als isolierte Theorien betrachtet wurden, durch Einführung des Begriffs der kontinuierlichen Gruppen auf eine gemeinsame Quelle zurückgeführt werden können. Diese Bemerkung führte mich sogleich zu einer Reihe neuer, allerdings einfacher Integrationstheorien, die sämtlich einen gruppentheoretischen Charakter besaßen (Ges. d. Wiss., Christiania 1871, Math. Ann. Bd. V).[1])

10. Im Jahre 1872 skizzierte ich, wenn auch in knappster Form, mehrere umfassende Integrationstheorien, die auf einer Invariantentheorie der unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen, sowie auf einer Invariantentheorie der unendlichen Gruppe aller Punkttransformationen [59
beruhen (vgl. kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien, April 1872; Zur Theorie der Differentialprobleme, Oktober 1872; Zur Invariantentheorie der Berührungstransformationen, Dezember 1872; Ges. d. Wiss., Christiania).[2]) Eine ausführlichere Darstellung dieser Theorien gab ich in denselben Verhandlungen für 1873—Febr. 1875; vgl. Math. Ann. Bd. VIII und XI.[3])

Es ist hier nicht notwendig, meine zahlreichen weiteren Publikationen über diese Gegenstände zu zitieren; nur möchte ich darauf hinweisen, daß meine wichtigsten Resultate in den Math. Annalen Bd. XXIV und XXV[4]) in knapper Form zusammengestellt sind.

Für alle diese meine Untersuchungen ist es charakteristisch, daß ich mich nicht darauf beschränke, gewisse Integrationen zu leisten, sondern in jedem einzelnen Falle genau angebe, welche Reduktionen möglich sind. Allerdings ist zu bemerken, daß meine Beweise dafür, daß weitere Reduktionen unmöglich sind, noch nicht alle in extenso vorliegen.

11. Zu dieser Richtung rechne ich ferner die schönen Arbeiten von Laguerre und Halphen über Transformation von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Diese Untersuchungen beziehen sich faktisch auf die unendliche Gruppe:

$$x_1 = \varphi(x), \quad y_1 = y\chi(x),$$

was allerdings von den beiden Verfassern nicht gesagt wird. Ich muß annehmen, daß Laguerre (1879) und Halphen (1882) meine Invariantentheorie der Berührungstransformationen und meine darauf begründeten Integrationstheorien ursprünglich nicht näher gekannt haben, sonst wür-

1) [D. Ausg. Bd. I, Abh. XI, XII; Bd. II, Abh. I.]

2) [Bd. III d. Ausg., Abh. I, V, VI.]

3) [Bd. III d. Ausg., Abh. VII—XVI; Bd. IV, Abh. I und III.]

4) [Bd. VI d. Ausg., Abh. II und III.]

den sie doch wohl auf die vielen Analogien zwischen diesen beiden Theorien hingewiesen haben.[1])

Zu bemerken ist übrigens, daß der englische Mathematiker Cockle schon im Jahre 1870 für lineare Differentialgleichungen Ideen entwickelt [60 hatte, die, obgleich partikulär, immerhin mit Laguerres Ideen verwandt sind.

Zu dieser Richtung rechne ich endlich eine Reihe neuer Untersuchungen von Picard und Vessiot, auf deren Wichtigkeit ich schon bei vielen Gelegenheiten hingewiesen habe.

12. Wenn die hier gegebene geschichtliche Darstellung korrekt ist, so kann ich darauf Anspruch machen, zuerst den Gruppenbegriff für die Integrationstheorie der Differentialgleichungen verwertet zu haben.

Innerhalb der Fuchsschen Richtung wurde ja der Gruppenbegriff, und zwar der Begriff der diskontinuierlichen Gruppe, zuerst im Jahre 1874 von C. Jordan verwertet. Dagegen stammt meine Theorie der Funktionengruppen aus dem Jahre 1872, während der Ursprung meiner Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannter endlicher oder unendlicher Gruppe sich noch weiter zurück verfolgen läßt.

13. Ich bin mir selbstverständlich sehr wohl bewußt, daß es viele wichtige Untersuchungen über Differentialgleichungen gibt, die sich nicht unter eine der vier besprochenen Richtungen unterordnen lassen. Als solche Untersuchungen nenne ich Briot und Bouquets funktionentheoretische Untersuchungen, ferner Darbouxs Arbeiten über algebraische Differentialgleichungen, sowie die von Bruns und Poincaré herrührenden, so wertvollen Untersuchungen über das Problem der drei Körper und endlich einige andere funktionentheoretische Untersuchungen.

Die vorhergehenden historischen Bemerkungen machen eben auf Vollständigkeit keinen Anspruch. Da aber die Zahl der Untersuchungen über Differentialgleichungen, besonders in den letzten Dezennien, so kolossal wächst, schien es mir berechtigt, einmal zu versuchen, auf die gegenseitigen Beziehungen aller dieser Untersuchungen einzugehen. Wenn ich erst

1) Daß meine älteren geometrischen Arbeiten über Kurven und Flächen mit unendlich vielen projektiven Transformationen Halphen nicht unbekannt waren, geht aus den Zitaten seiner Dissertation (1879) hervor. Daß er aber die Tragweite meiner Integrationstheorien ursprünglich nicht kannte, geht schon daraus hervor, daß seine in den Jahren 1879–1881 veröffentlichten Integrationstheorien nicht allein einen ganz speziellen Charakter haben, sondern überdies unvollkommen sind, indem sie die Ordnung und die Anzahl der erforderlichen Integrationsoperationen keineswegs auf ihr Minimum herabdrücken.

die erforderlichen bibliographischen Studien gemacht habe, werde ich an anderer Stelle ausführlich auf diesen Gegenstand zurückkommen.

14. Zwischen diesen verschiedenen Richtungen finden sich viele Berührungspunkte, die hohes Interesse darbieten. Meine eigenen Bestrebungen gehen in erster Linie darauf hinaus, den Begriff der kontinuierlichen Gruppen auch für die drei erstgenannten Richtungen zu verwerten.

Daß es naturgemäß ist, die ganze Theorie der partiellen Differential- [61 gleichungen 1. O. vom gruppentheoretischen Standpunkte aus zu behandeln, habe ich schon in meinen ältesten Arbeiten gezeigt.

In dieser Arbeit versuche ich, in so großer Ausdehnung wie möglich, die Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung auf diejenige der Gleichungen erster Ordnung zurückzuführen und dadurch die allgemeine Theorie einer gruppentheoretischen Behandlung zugänglich zu machen. Meine nächste Arbeit, deren Inhalt schon im Anfange des vorigen Jahres dieser Gesellschaft mitgeteilt wurde, geht in dieser Richtung noch wesentlich weiter.

§ 2. Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen.

15. Aus Lagranges Theorie der vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. O.:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

folgt, wie Monge betonte, daß alle Integralflächen einer solchen Gleichung, die einander in einem Punkte berühren, eine Kurve gemein haben und einander überdies längs dieser Kurve berühren. Monge bezeichnete diese Kurven[1]) als Charakteristiken; er fand, daß zu jeder Gleichung: $F = 0$ (höchstens) ∞^3 Charakteristiken gehören, sowie, daß jede Integralfläche ∞^1 Charakteristiken enthält. Hieraus zog er nun insbesondere den Schluß, daß sich durch jede Kurve, die keine Charakteristik ist, nur eine Integralfläche hindurchlegen läßt.

Monge dehnte den Begriff Charakteristik, wenn auch in wenig präziser Form, auf partielle Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung in x, y, z aus.

1) Monges große Bedeutung für die Theorie der Differentialgleichungen beruht wesentlich darauf, daß er diese Disziplin durch Einführung einfacher Elementarbegriffe einer begrifflichen Auffassung zugänglich machte. Ihm und seinen Zeitgenossen fehlte die freie Auffassung des Imaginären, die Kenntnis des Begriffs der n-fachen Räume, sowie teilweise die funktionentheoretische Stringenz.

16. Für Gleichungen zweiter Ordnung: [62

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

gestaltet sich diese Ausdehnung etwa folgendermaßen:

Monge bezeichnet auf jeder Integralfläche diejenigen Kurven als Charakteristiken, die die Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s} dy dx + \frac{\partial F}{\partial t} dx^2 = 0$$

erfüllen. Jede Integralfläche enthält somit ∞^1 Mongesche Charakteristiken, die, sobald der Ausdruck:

$$4 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} - \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2$$

nicht verschwindet, in zwei verschiedene Scharen zerfallen und somit die Fläche zweifach überdecken.

17. Man definiert diese Kurven am einfachsten indirekt. Zieht man nämlich auf einer beliebigen Integralfläche eine Kurve, die keine Charakteristik ist, so gibt es keine andere Integralfläche, die die gegebene Fläche nach dieser Kurve oskuliert.

In entsprechender Weise dehnt sich der Charakteristikenbegriff auf beliebige partielle Differentialgleichungen (in den Veränderlichen x, y, z) aus.

18. Diese Betrachtung führte Monge und Ampère zu Integrationstheorien, die jedenfalls einige partielle Differentialgleichungen von der Form:

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0 \tag{1}$$

auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen.

Monge und Ampère erkannten nämlich, daß es möglich ist, drei lineare Differentialgleichungen:

$$a_k dx + b_k dy + c_k dz + d_k dp + e_k dq = 0 \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1'}$$

aufzustellen, die von jeder Charakteristik der einen Schar erfüllt werden. Dem entsprechend befriedigen die Charakteristiken der zweiten Schar ein analoges totales System, das hier zunächst nicht in Betracht kommt.

Es können nun mehrere wesentlich verschiedene Fälle eintreten. Wir wollen mit Monge und Ampère insbesondere den Fall berücksichtigen, daß das totale System (1') integrabel ist, und zwar wollen wir annehmen, [63 daß zwei und nur zwei unabhängige Integrale:

$$u(x, y, z, p, q), \quad v(x, y, z, p, q)$$

vorhanden sind.

Längs einer Charakteristik haben auf jeder Integralfläche sowohl u wie v konstante Werte, die aber (im allgemeinen) bei dem Übergang zu einer anderen Charakteristik der betreffenden Fläche variieren. Auf jeder einzelnen Integralfläche sind daher u und v durch eine Relation:

$$v - \varphi(u) = 0$$

gebunden, deren Form natürlicherweise für die verschiedenen Integralflächen nicht immer dieselbe ist.

Nun aber sind u und v bestimmte Funktionen von x, y, z, p, q; dementsprechend ist die Gleichung:

$$v - \varphi(u) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, richtiger gesagt: die Gleichung:

$$v - \varphi(u) = 0$$

repräsentiert, wenn φ eine willkürliche Funktion bezeichnet, unendlich viele partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

19. Hieraus ergibt sich, daß man die allgemeinen Integralflächen der vorgelegten Monge-Ampèreschen Gleichung zweiter Ordnung dadurch findet, daß man alle Integralflächen aller Gleichungen erster Ordnung:

$$v - \varphi(u) = 0$$

aufsucht, und sodann unter diesen alle herausgreift, die die vorgelegte Gleichung zweiter Ordnung erfüllen.

Nun aber ist es leicht, zu sehen, daß es eine und nur eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung gibt, die von den Integralflächen aller Gleichungen:

$$v - \varphi(u) = 0$$

erfüllt wird. In der Tat: die beiden durch Differentiation gefundenen Gleichungen:

$$\frac{dv}{dx} - \varphi'(u) \cdot \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} - \varphi'(u) \cdot \frac{du}{dy} = 0$$ [64

ergeben durch Elimination von $\varphi'(u)$ die einzige Gleichung:

$$\frac{dv}{dx} \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dy} \frac{du}{dx} = 0,$$

die offenbar eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, die mit der vorgelegten Monge-Ampèreschen Gleichung identisch ist.

20. In dieser Weise ergibt sich der schöne von Monge und Ampère erhaltene

Satz. *Erfüllen auf den Integralflächen einer vorgelegten Monge-Ampèreschen Gleichung:*

$$Ar + Bs + Ct + D + E(rt - s^2) = 0$$

die charakteristischen Streifen erster Ordnung (der einen Schar) zwei Gleichungen von der Form:

$$u(x, y, z, p, q) = a = \mathit{Const.}, \quad v(x, y, z, p, q) = b = \mathit{Const.},$$

so lassen sich die allgemeinen Integralflächen dadurch finden, daß man das allgemeine intermediäre Integral:

$$v - \varphi(u) = 0$$

aufstellt und die zugehörigen Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung aufsucht.

21. Suchen wir insbesondere diejenige Integralfläche der vorgelegten Monge-Ampèreschen Gleichung (1), die eine gegebene Kurve: $x = X(\tau)$, $y = Y(\tau)$, $z = Z(\tau)$ enthält und längs dieser eine gegebene Developpable berührt, so berechnen wir zuerst vermöge der Gleichungen der Kurve und der hinzutretenden Relationen: $p = P(\tau)$, $q = Q(\tau)$ die beiden Größen: $u(x, y, z, p, q)$ und $v(x, y, z, p, q)$ als Funktionen von τ und finden sodann durch Elimination von τ eine Relation: $v - \varphi(u) = 0$, die als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung aufzufassen ist. Sodann suchen wir diejenige Integralfläche dieser Gleichung erster Ordnung, die die gegebene Kurve enthält. [65

Auf die in speziellen Fällen möglichen Integrationsvereinfachungen gehen wir hier nicht ein.

22. Nehmen wir jetzt eine ganz beliebige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Für alle Integralflächen erfüllen die charakteristischen Streifen zweiter Ordnung[1]) sechs lineare Differentialgleichungen von der Form:

$$(2) \qquad \begin{cases} a_k dx + b_k dy + c_k dz + d_k dp + e_k dq + \\ \qquad + f_k dr + g_k ds + h_k dt = 0 \end{cases} \qquad {\scriptstyle (k = 1, 2, 3, \ldots, 6)},$$

die ein totales System bilden.

1) Ich bezeichne eine Charakteristik als einen charakteristischen Streifen erster oder zweiter, . . . Ordnung, wenn ich nicht allein die Werte der Größen x, y, z, sondern auch die Werte der Differentialquotienten $p, q, r, s, t, \ldots$ längs der Charakteristik berücksichtige.

Setzen wir nun mit Darboux voraus, daß dieses totale System integrabel ist und zwar zwei und nur zwei unabhängige Integrale:

$$u(x, y, z, \ldots, r, s, t), \quad v(x, y, z, \ldots, r, s, t)$$

besitzt. Dann haben auf jeder Integralfläche die Größen u und v Werte, die längs einer Charakteristik (der einen Schar) nicht variieren, während sie sich, bei dem Übergang von einer Charakteristik zu einer anderen Charakteristik der betreffenden Integralfläche, im allgemeinen alle beide ändern. Hieraus zieht nun Darboux den Schluß, daß jede Integralfläche von: $F = 0$ eine gewisse Gleichung von der Form:

$$v - \varphi(u) = 0$$

erfüllt. Diese neue Gleichung ist aber, sobald die Form der Funktion φ gegeben ist, eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit: $F = 0$ gewisse Integralflächen gemein hat.

23. Wir wollen, obgleich Darboux darauf nicht eingeht, diejenige Integralfläche von: $F = 0$ suchen, die eine gegebene Kurve:

$$y = Y(x), \quad z = Z(x)$$

enthält und längs dieser eine gegebene Developpable berührt. Anders [66
ausgesprochen: wir denken uns in meiner Terminologie einen Elementstreifen:

$$y = Y(x), \quad z = Z(x), \quad p = P(x), \quad q = Q(x)$$

gegeben und suchen die zugehörige Integralfläche von: $F = 0$.

Jetzt genügen die Gleichungen:

$$P' = r + sY', \quad Q' = s + tY'$$

zusammen mit: $dF = 0$, jedenfalls im allgemeinen, zur Bestimmung der Größen r, s, t als Funktionen von x für alle Punkte der gegebenen Kurve. Diese Bestimmung wird nach Monge und Cauchy nur dann illusorisch, wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & Y' & 0 \\ 0 & 1 & Y' \\ F_r & F_s & F_t \end{vmatrix} = F_r Y'^2 - F_s Y' + F_t$$

für alle Punkte der gegebenen Kurve verschwindet, anders ausgesprochen, wenn die Kurve als Charakteristik auftritt.

Sehen wir von diesem Ausnahmefalle ab, so erkennen wir durch ganz ähnliche Betrachtungen, daß nicht allein r, s, t, sondern auch die Ableitungen dritter und höherer Ordnung als Funktionen von x längs der Kurve bestimmt sind. Durch Einsetzung der Werte:

$$y = Y(x), \quad z = Z(x), \quad p = P(x), \quad q = Q(x),$$
$$r = R(x), \quad s = S(x), \quad t = T(x)$$

finden wir daher, daß sich auch die Größen $u(x, \ldots, t)$ und $v(x, \ldots, t)$ längs der Kurve als Funktionen von x:

$$u = U(x), \quad v = V(x)$$

berechnen lassen. Sodann ergibt sich durch Elimination von x eine ganz bestimmte Relation:

$$v - \varphi(u) = 0,$$

die nur die Größen u und v enthält.

Da nun Cauchys allgemeine Theorie zeigt, daß zu den gegebenen Anfangsbedingungen wirklich eine Integralfläche von: $F = 0$ gehört, da es andererseits sicher ist, daß es eine und nur eine Gleichung: $v - \varphi(u) = 0$ gibt, die für alle Punkte unserer Integralfläche besteht, und da [67 wir endlich wissen, daß die eben gefundene Gleichung: $v - \varphi(u) = 0$ für ∞^1 Punkte unserer Integralfläche besteht, so können wir mit Sicherheit schließen, daß gerade diese Gleichung: $v - \varphi(u) = 0$ für alle Punkte unserer Fläche besteht. Wir zeigen später, wie sich hieraus die Bestimmung der Fläche ergibt.

24. Darboux bemerkt nun, daß die linearen Differentialgleichungen (2) eine Quadratwurzel enthalten und somit faktisch zwei totale Systeme darstellen. Er beschränkt sich auf den Fall, daß jedes unter diesen beiden totalen Systemen zwei unabhängige Integrale:

$$u_1, v_1 \quad \text{und:} \quad u_2, v_2$$

besitzt. Alsdann erfüllt jede Integralfläche von: $F = 0$ eine gewisse Gleichung: $v_1 - \varphi_1(u_1) = 0$ und zugleich eine gewisse Gleichung: $v_2 - \varphi_2(u_2) = 0$.

Sind umgekehrt φ_1 und φ_2 beliebig gewählte Funktionen ihrer Argumente, so findet Darboux, daß die drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$F = 0, \quad v_1 - \varphi_1(u_1) = 0, \quad v_2 - \varphi_2(u_2) = 0$$

immer ein unbeschränkt integrables System bilden; ihre ∞^3 gemeinsamen Integralflächen werden durch gewöhnliche Differentialgleichungen bestimmt.

25. Dies ist der Kern der Darbouxschen Theorie, die sich, wie er selbst angibt, nach mehreren Richtungen ausdehnen läßt.

Ganz besonders betrachtet er den Fall, daß für eine Gleichung zweiter Ordnung die beiden totalen Systeme der charakteristischen Streifen irgend einer Ordnung je zwei Integrale u_1, v_1 und u_2, v_2 haben. Er bemerkt, daß alsdann das Gleichungssystem:

$$F = 0, \quad v_1 - \varphi_1(u_1) = 0, \quad v_2 - \varphi_2(u_2) = 0$$

immer unbeschränkt integrabel ist. In dieser Weise integriert Darboux durch gewöhnliche Differentialgleichungen alle partiellen Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral **Ampères** erster Klasse angehört.

26. Es ist sehr zu bedauern, daß Darboux seine so wertvollen und weitreichenden Untersuchungen nur ganz knapp skizziert hat. Daher [68 enthalten seine Publikationen keineswegs die vollständige Verwertung seiner neuen Ideen.

M. Lévy[1]) vervollständigte gelegentlich Darbouxs Theorie durch eine wichtige, wenn auch naheliegende Bemerkung.

Lévy betrachtete eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung: $F = 0$, die mit einer Gleichung zweiter oder höherer Ordnung Integralflächen gemein hat, deren analytischer Ausdruck nicht nur von arbiträren Konstanten abhängt. Er erkannte, daß diese gemeinsamen Integralflächen charakteristische Streifen besitzen, die durch ein simultanes System gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt werden.

Präziser gesagt: Lévy erkannte, daß, sobald zwei solche Gleichungen zweiter Ordnung vorliegen, daß dann alle gemeinsamen Integralflächen, die einander in einem Punkte oskulieren, einander immer längs einer Kurve oskulieren, die für beide Differentialgleichungen eine Charakteristik darstellt.

Hieraus zog er nun den Schluß, daß eine Gleichung: $F = 0$ zweiter Ordnung durch Integration simultaner Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erledigt werden kann, sobald unter den beiden totalen Systemen der charakteristischen Streifen etwa m-ter Ordnung auch nur das eine System zwei unabhängige Integrale u, v besitzt. In dieser Weise erledigte **Lévy** partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren allgemeines Integral nicht **Ampères** erster Klasse angehört.

Lévy gab an, daß man drei Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen integrieren müsse.

27. Im Jahre 1874 bemerkte ich, daß es unter den von Lévy vorausgesetzten Umständen immer genügt, zwei simultane Systeme

1) Comptes Rendus 1872.

gewöhnlicher Differentialgleichungen zu integrieren. Nachdem nämlich durch Integration des so oft besprochenen totalen Systems zwei Größen u, v gefunden waren, konnte man sich die Aufgabe stellen, diejenige Integralfläche von: $F = 0$ zu finden, die eine gegebene Kurve enthält und längs dieser eine vorgelegte Developpable berührt. Diese Anfangsbedingungen liefern (vgl. S. 64 u. ff. [hier S. 330 ff.]) vier Relationen:

$$y = Y(x), \quad z = Z(x), \quad p = P(x), \quad q = Q(x),$$

die längs jener Kurve die Größen y, z, p, q als Funktionen von x be- [69
stimmen. Dabei erfüllen die Funktionen Y, Z, P, Q eo ipso die Relation:

$$Z' - P - QY' = 0.$$

Bezeichnen wir nun die Werte von r, s, t längs dieser Kurve mit $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$, so erhalten wir zur Bestimmung dieser drei Größen die Relationen:

$$P' - R - SY' = 0, \quad Q' - S - TY' = 0,$$
$$F(x, Y, Z, P, Q, R, S, T) = 0,$$

die im allgemeinen nach R, S und T auflösbar sind. Setzen wir dabei der Einfachheit wegen voraus, daß u und v nur Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung enthalten, so erhalten wir sogleich eine Bestimmung von u und v als Funktionen von x:

$$u = U(x), \quad v = V(x)$$

und sodann durch Elimination von x eine Relation:

$$v - \varphi(u) = 0.$$

Diese Gleichung hat nun nach Darboux Integralflächen mit: $F = 0$ gemein, die nicht nur von arbiträren Konstanten abhängen. Die zugehörigen charakteristischen Streifen werden nach Lévys Bemerkung durch Integration eines simultanen Systems gefunden. Unter diesen Streifen greift man diejenigen ∞^1 heraus, die mit dem Flächenstreifen:

$$y = Y, \quad z = Z, \quad p = P, \quad q = Q, \quad r = R(x), \quad s = S(x), \quad t = T(x)$$

ein Wertsystem x, y, z, p, q, r, s, t gemein haben.

Hiermit ist die gesuchte Integralfläche von: $F = 0$ gefunden.[1])

28. Ich will andeuten, durch welche Betrachtungen ich ursprünglich die Richtigkeit von Lévys Angaben erkannte.

Nehmen wir zuerst eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung: $F(x, y, z, p, q) = 0$. Betrachten wir nun alle Integralflächen einer solchen Gleichung,

1) Lie, Verhandl. der Ges. der Wissensch. zu Christiania 1874, S. 274 [d. Ausg. Bd. III, Abh. XIV, S. 205, Anm.].

die ein Element x, y, z, p, q gemein haben, so erfüllen die zugehörigen Werte von r, s, t zwei lineare Gleichungen. Bildet man sodann die Gleichung:

$$0 = \tfrac{1}{2} r (X - x)^2 + s (X - x)(Y - y) + \tfrac{1}{2} t (Y - y)^2 + \cdots,$$

die die Dupinsche Indikatrix aller dieser Flächen darstellt, so sieht man, daß diese [70
Kurven zweiter Ordnung ein Büschel bilden, und daß überdies dieses Büschel aus ∞^1 konzentrischen Kegelschnitten besteht, die einander in zwei Punkten berühren.

Diese Bemerkung führt unmittelbar zu dem Satze, der für Lagranges und Monges Integrationstheorie der Gleichung: $F(x, y, z, p, q) = 0$ die Grundlage bildet, nämlich zu dem Satze:

Haben zwei Integralflächen einer Gleichung: $F(x, y, z, p, q) = 0$ ein Element x, y, z, p, q gemeinsam, so haben sie auch ein benachbartes Element gemein.

Setzen wir nun andererseits mit Darboux und Lévy voraus, daß zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$r - f(x, y, z, p, q, s) = 0, \quad t - \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0$$

vorliegen, die ∞^∞ gemeinsame Integralflächen haben und somit jedenfalls die Bedingung: $f'\varphi' - 1 = 0$ erfüllen, so erkennt man unmittelbar, daß die Indikatrixkurven dritter Ordnung dieser Flächen:

$$\alpha(X - x)^3 + 3\beta(X - x)^2(Y - y) + 3\gamma(X - x)(Y - y)^2 + \delta(Y - y)^3 + \cdots = 0$$

∞^1 Kurven dritter Ordnung sind, die einander oskulieren.

Hieraus folgt unmittelbar, daß alle gemeinsamen Integralflächen, die einander in einem Punkte oskulieren, einander längs einer Kurve oskulieren.

Kapitel II.

Vervollständigung der Theorie der Mongeschen Charakteristiken.

29. Nachdem es mir gelungen war, die im vorigen Kapitel resumierten Theorien von Monge, Ampère, Darboux und Lévy vollständig zu verstehen, was wegen der knappen Redaktion, besonders von Lévys Untersuchungen, immerhin eine gewisse selbständige Arbeit verlangte, sah ich sogleich, daß die von Darboux herrührenden neuen Ideen von Lévy nicht vollständig verwertet waren. Ich begnügte mich vorläufig damit, im Februar 1880 in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania[1]) einige Methoden zu skizzieren, die faktisch die von meinen Vorgängern herrührende Theorie der Charakteristiken wesentlich vervollständigen.

Indem ich diese meine alten Theorien in diesem Kapitel ausführlicher darstelle, halte ich es für zweckmäßig, zuerst meine gewöhnliche Terminologie zu erklären.

1) [D. Ausg. Bd. III, Abh. XXVII.]

Wir sagen, daß ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$(3) \qquad F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad F_2(\ldots) = 0$$

unbeschränkt integrabel ist, wenn diese Gleichungen gemeinsame [71
Integralflächen besitzen, die keine weiteren Differentialgleichungen zweiter oder erster Ordnung erfüllen.

Dabei sind aber nach **Darboux**s allgemeiner Theorie zwei und nur zwei Fälle denkbar, je nachdem die Gleichungen ∞^4 oder ∞^∞ gemeinsame Integralflächen besitzen. Im letzten Falle sage ich, daß unser unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein **Involutionssystem** oder **Darboux**sches System bildet.

Dementsprechend sage ich, daß ein System von partiellen Differentialgleichungen m-ter Ordnung **unbeschränkt integrabel** ist, wenn diese Gleichungen gemeinsame Integralgebilde besitzen, die keine weitere Gleichung m-ter oder niedrigerer Ordnung erfüllen. Ich bezeichne ferner ein unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen als ein **Darboux**sches System, wenn die gemeinsamen Integralgebilde nicht nur von arbiträren Konstanten abhängen. Insbesondere bezeichne ich ein **Darboux**sches System als ein **Involutionssystem**, wenn die Zahl der gemeinsamen Integralgebilde ihren Maximumwert hat.

In dem speziellen von uns zuerst betrachteten Falle (3) ist jedes **Darboux**sche System ein **Involutionssytem**. Dies gilt aber keineswegs immer. Die Regel ist, daß sich unter den unbeschränkt integrablen Systemen mehrere **verschiedene** Klassen befinden, die nach meiner Terminologie als **Darboux**sche zu bezeichnen sind. Unter diesen Klassen bilden die **Involutionssysteme** eine Klasse für sich, die als die unbedingt **wichtigste** zu betrachten ist.

30. Wir wollen nun zuerst das von **Lévy** gefundene Resultat nochmals ableiten.

Wir wenden uns also zu den **unbeschränkt integrablen** Systemen zweiter Ordnung:

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad F_2(\ldots) = 0.$$

Greifen wir unter allen Integralflächen eines solchen Systems ∞^3 heraus, so können wir diese ∞^3 Flächen in unendlich vielen Weisen in ∞^1 Scharen anordnen, die etwa durch die Gleichung:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = c$$

definiert werden. Hier sind a, b, c arbiträre Konstanten, unter denen [72
die Konstante c für alle Flächen einer Schar einen bestimmten Wert hat.

Bildet man die beiden Gleichungen:

$$\Phi_x + \Phi_z p = 0, \quad \Phi_y + \Phi_z q = 0$$

und eliminiert sodann die Parameter a und b zwischen diesen beiden Gleichungen und: $\Phi = c$, so erhält man eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$V(x, y, z, p, q) = c,$$

die für jeden Wert des Parameters c (mindestens) ∞^2 Integralflächen mit den beiden Gleichungen: $F_1 = 0, F_2 = 0$ gemein hat. Man kann sich daher, sobald ein unbeschränkt integrables System: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ vorliegt, **die Aufgabe stellen, alle Gleichungen:** $V(x, y, z, p, q) = c$ **zu finden, die für jeden Wert von** c (mindestens) ∞^2 **Integralflächen mit:** $F_1 = 0$ **und** $F_2 = 0$ **gemein haben.** Diese Forderung kommt darauf hinaus, daß die vier Gleichungen zweiter Ordnung:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$

$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0, \quad V_y + V_z q + V_p s + F_q t = 0$$

(mindestens) ∞^3 gemeinsame Integralflächen haben sollen.

Eliminieren wir r, s und t zwischen diesen Gleichungen, so erhalten wir eine, oder unter Umständen zwei Gleichungen, die die Form:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0$$

besitzen und dabei in den Differentialquotienten von V homogen sind.

31. Indem wir nun weitergehen, können wir ohne wesentliche Beschränkung annehmen, daß die Gleichungen: $F_1 = 0, F_2 = 0$ in der Form:

$$r + R(x, y, z, p, q, s) = 0, \quad t + T(\ldots) = 0$$

vorliegen.[1]) Differentiieren wir diese beiden Gleichungen nach x und y, so erhalten wir zur Bestimmung der Differentialquotienten dritter Ordnung $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Relationen:

$$\begin{aligned} \alpha + R_s\beta + \quad & \ldots = 0, \\ \beta + R_s\gamma + \quad & \ldots = 0, \\ T_s\beta + \quad \gamma + \quad & \ldots = 0, \\ T_s\gamma + \delta + & \ldots = 0. \end{aligned}$$ [73

1) Auf diese Form läßt sich nämlich unser Gleichungssystem immer durch eine passende Berührungstransformation bringen.

Ist nun die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & R_s & 0 \\ 0 & T_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & T_s & 1 \end{vmatrix} = 1 - T_s R_s \equiv 1 - T'R'$$

von Null verschieden, so hat unser unbeschränkt integrables System gerade ∞^4 Integralflächen. Verschwindet dagegen diese Determinante identisch, so ist das System: $F_1 = 0, F_2 = 0$ ein Darbouxsches, oder, was jetzt auf dasselbe hinauskommt, ein Involutionssystem.

32. Eliminieren wir zwischen den vier Gleichungen:

$$r + R = 0, \quad t + T = 0,$$

$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0, \quad V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0$$

die Größen r, s und t, so erhalten wir eine oder zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung von V als Funktion der fünf Veränderlichen x, y, z, p, q, je nachdem in der Matrix:

$$\begin{vmatrix} 1 & R' & 0 \\ 0 & T' & 1 \\ V_p & V_q & 0 \\ 0 & V_p & V_q \end{vmatrix}$$

die dreireihigen Determinanten:

$$V_q - R'V_p, \quad T'V_q - V_p, \quad V_q(V_q - R'V_p), \quad V_p(T'V_q - V_p)$$

sämtlich identisch verschwinden oder nicht. Man übersieht hier unmittelbar, daß die beiden Ausdrücke: $V_q - R'V_p$ und: $T'V_q - V_p$ jedenfalls nur dann verschwinden können, wenn: $1 - R'T' = 0$ ist, das heißt, wenn [74 die Gleichungen: $r + R = 0$, $t + T = 0$ ein Involutionssystem bilden.

In diesem Falle wären aber die Größen:

$$R' = \frac{V_q}{V_p}, \quad T' = \frac{V_p}{V_q}$$

Funktionen von x, y, z, p, q, und dementsprechend hätten R und T die Form:

$$R = s\frac{V_q}{V_p} + m(x, y, z, p, q) = as + m$$

$$T = s\frac{V_p}{V_q} + n(x, y, z, p, q) = \frac{1}{a}s + n.$$

Infolgedessen fiele die Größe s aus den Gleichungen:

$$V_x + V_z p - V_p\left(s\frac{V_q}{V_p} + m\right) + V_q s = 0,$$

$$V_y + V_z q + V_p s - V_q\left(s\frac{V_p}{V_q} + n\right) = 0$$

heraus, und es müßte also V die Gleichungen:

$$V_x + V_z p - mV_p = 0, \quad V_y + V_z q - nV_q = 0,$$

$$V_q - aV_p = 0$$

erfüllen, die partielle Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen. Alsdann wäre aber: $V = c$ ein gemeinsames intermediäres Integral der Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, und von diesem Falle können wir hier absehen.

33. Liegt also ein unbeschränkt integrables System von zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vor:

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad F_2(\ldots) = 0,$$

so sind die drei folgenden Fälle denkbar:

Unsere Gleichungen können ein gemeinsames intermediäres Integral:

$$W(x, y, z, p, q) = c$$

besitzen, das durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung gefunden wird. In diesem Falle ist das Gleichungs- [75 system: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ äquivalent mit dem Inbegriff der beiden Gleichungen:

$$\frac{dW}{dx} = 0, \quad \frac{dW}{dy} = 0.$$

Es ist ferner denkbar, daß die Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ grade ∞^4 Integralflächen besitzen, deren Bestimmung durch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung geleistet wird.

Es ist endlich denkbar, daß: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ ∞^∞ gemeinsame Integralflächen besitzen, unter denen aber nie mehr als ∞^2 vorhanden sind, die ein und dieselbe partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen.

34. Zur Unterscheidung dieser drei Fälle führen die nachstehenden Kriterien.

Man bringt die beiden Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ auf die Form:

$$r + R(x, y, z, p, q, s) = 0, \quad t + T(\ldots) = 0$$

und bildet sodann die Gleichungen:

$$(4) \qquad V_x + V_z p - V_p R + V_q s = 0, \quad V_y + V_z q + V_p s - V_q T = 0.$$

Fällt nun die Größe s von selbst aus diesen beiden linearen partiellen Differentialgleichungen heraus, so liegt der erste Fall vor. Es besitzen dann R und S die Formen:

$$R = a(x, y, z, p, q)s + m(x, y, z, p, q), \qquad S = \frac{1}{a}s + n(x, y, z, p, q),$$

und es bestimmen die drei linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$V_q - aV_p = 0, \qquad V_x + pV_z - mV_p = 0, \qquad V_y + qV_z - nV_q = 0$$

zusammen mit einer vierten durch Klammeroperation gefundenen Gleichung ein vollständiges System, das eine und nur eine Lösung: [76 $V = W(x, y, z, p, q)$ besitzt; alsdann ist: $W = c$ das gesuchte intermediäre Integral.

Sind die hiermit angegebenen Kriterien nicht erfüllt, so findet man durch Elimination von s [aus (4)] eine einzige partielle Differentialgleichung:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0,$$

die V als Funktion von x, y, z, p, q bestimmt und dabei in den Differentialquotienten $V_x, \ldots$ homogen ist.

Ist nun $V(x, y, z, p, q)$ ein beliebige Lösung von: $\Omega = 0$, so bilden die Gleichungen:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad V = c$$

für jeden Wert der Konstanten c ein unbeschränkt integrables System mit ∞^2 gemeinsamen Integralflächen. Es gibt jetzt selbstverständlich immer ∞^∞ verschiedene Gleichungen: $V = c$, deren jede, wie gesagt, ∞^2 Integralflächen des Systems: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ liefert.

Es ist aber wohl zu beachten, daß hieraus keineswegs ohne weiteres folgt, daß die vorgelegten Gleichungen: $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ ∞^∞ gemeinsame Integralflächen haben. Dies tritt ein dann und nur dann, wenn die Größe: $R_s T_s - 1$ identisch verschwindet. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so haben die Gleichungen: $F_1 = 0, F_2 = 0$ nur ∞^4 gemeinsame Integralflächen.

35. Liegt daher ein unbeschränkt integrables System zweiter Ordnung:

$$(5) \qquad F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad F_2(\ldots) = 0$$

vor, so ist es unter allen Umständen naturgemäß, partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$V(x, y, z, p, q) = c$$

zu suchen, die von mindestens ∞^2 gemeinsamen Integralflächen der vorgelegten Gleichungen erfüllt werden. Man eliminiert zu diesem Zwecke die Größen r, s, t zwischen: $F_1 = 0, F_2 = 0$ und den beiden Gleichungen:

$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0, \qquad V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0$$

und erhält dadurch, wenn wir von dem Falle absehen, daß $F_1 = 0$ und [77 $F_2 = 0$ ein gemeinsames intermediäres Integral haben, eine einzige partielle Differentialgleichung 1. O.:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0,$$

die V als Funktion der Größen x, y, z, p, q bestimmt.

Wir wollen zeigen, daß diese partielle Differentialgleichung: $\Omega = 0$ immer semilinear[1]) ist. Wir zeigen ferner, daß, wenn:

$$z = f(x, y)$$

eine gemeinsame Integralfläche der beiden Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ darstellt, daß dann die drei Gleichungen:

$$z = f(x, y), \quad p = f_x, \quad q = f_y$$

im fünfdimensionalen Raume x, y, z, p, q immer eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit darstellen, die in meinem Sinne ein wirkliches Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung: $\Omega = 0$ liefert.

36. Es sei in der Tat:

$$z = f(x, y, a, b, c)$$

die Gleichung von ∞^3 gemeinsamen Integralflächen der beiden Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$. Es existieren dann (vgl. S. 71, 72, [hier S. 336 f.]) unendlich viele solche Funktionen $V(x, y, z, p, q)$, daß die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0, \quad V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0$$

bei der Substitution: $z = f$ erfüllt werden, welche Werte auch die drei Parameter a, b, c haben.

Lösen wir daher die Gleichungen: $z = f$, $p = f_x$, $q = f_y$ nach a, b, c auf:

$$a = A(x, y, z, p, q), \quad b = B, \quad c = C$$

und führen sodann die Bezeichnung:

$$\Phi(x, y, A, B, C) \equiv \Phi(x, y, a, b, c)$$

1) Vgl. meine Note in den Gött. Nachrichten Oktober 1872, S. 480 u. f. [d. Ausg. Bd. III, Abh. IV, S. 20–25].

ein, so sehen wir, daß die oben betrachteten Funktionen V und f immer [78
die Relationen:

$$(6)\qquad \begin{cases} V_x + V_z p + V_p \overline{f_{xx}} + V_q \overline{f_{xy}} \equiv 0, \\ V_y + V_z q + V_p \overline{f_{xy}} + V_q \overline{f_{yy}} \equiv 0 \end{cases}$$

identisch erfüllen.

Nun aber bestehen die Relationen:

$$(7)\qquad F_1(x, y, z, p, q, \overline{f_{xx}}, \overline{f_{xy}}, \overline{f_{yy}}) = 0, \quad F_2(\ldots) = 0$$

ebenfalls identisch. Also muß, wie schon früher bemerkt, auch die durch Elimination der Größen $\overline{f_{xx}}, \overline{f_{xy}}, \overline{f_{yy}}$ zwischen (6) und (7) hervorgehende Gleichung:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0$$

identisch bestehen. Dabei ist unsere einzige Voraussetzung, daß die Funktion V so gewählt ist, daß eine jede unter den ∞^1 Gleichungen: $V = c$ (mindestens) ∞^2 Integralflächen mit den beiden Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ gemein hat.

37. Setzen wir jetzt fortwährend voraus, daß die Gleichung: $z = f(x, y, a, b, c)$ uns ∞^3 gemeinsame Integralflächen der beiden Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ liefert, und schreiben wiederum:

$$\Psi(x, y, A, B, C) \equiv \Psi,$$

so findet unsere Voraussetzung wiederum darin ihren analytischen Ausdruck, daß die Gleichungen:

$$(7)\qquad F_1(x, y, z, p, q, \overline{f_{xx}}, \overline{f_{xy}}, \overline{f_{yy}}) = 0, \quad F_2(\ldots) = 0$$

identisch bestehen.

Es bestimmen nun die Gleichungen:

$$z = f(x, y, a, b, c), \quad p = f_x, \quad q = f_y$$

im fünffachen Raume x, y, z, p, q ∞^3 zweidimensionale Punktmannigfaltigkeiten, deren jede ∞^4 Elemente besitzt, deren Koordinaten (Math. Ann. Bd. IX, S. 250—251)[1]):

$$x, y, z, p, q, V_x : V_y : V_z : V_p : V_q$$

durch die fünf Gleichungen:

$$z = f, \quad p = f_x, \quad q = f_y, \qquad [79$$

$$V_x + V_z f_x + V_p f_{xx} + V_q f_{xy} = 0, \quad V_y + V_z f_y + V_p f_{xy} + V_q f_{yy} = 0$$

1) [Hier Abh. II, S. 102—104.]

bestimmt sind. Diese ∞^3 Punktmannigfaltigkeiten besitzen somit zusammen $\infty^3 . \infty^4 = \infty^7$ Elemente, die aus der Schar aller ∞^9 Elemente des fünffachen Raumes durch die beiden Gleichungen:

$$(6)\quad V_x + V_z p + V_p \overline{f_{xx}} + V_q \overline{f_{xy}} = 0, \quad V_y + V_z p + V_p \overline{f_{xy}} + V_q \overline{f_{yy}} = 0$$

ausgeschieden werden.

38. Besitzen die beiden partiellen Differentialgleichungen: $F_1(x, \ldots, t) = 0$, $F_2 = 0$, wie wir angenommen haben, mehr als ∞^3 gemeinsame Integralflächen, so können die beiden Gleichungen (6) ∞^∞ verschiedene Formen haben. Es ist aber leicht zu sehen, daß unsere ∞^7 Elemente im fünffachen Raume immer eine Gleichung erfüllen, die eine ganz bestimmte Form besitzt. Es ist dies die Gleichung:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0,$$

die, wie wir wissen, hervorgeht, wenn die Größen $\overline{f_{xx}}, \overline{f_{xy}}, \overline{f_{yy}}$ zwischen den Gleichungen (7) und (6) eliminiert werden.

Hiermit ist nachgewiesen, daß, wie früher angekündigt, die partielle Differentialgleichung erster Ordnung: $\Omega(\ldots) = 0$ im Raume x, y, z, p, q von jeder zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit: $y = f$, $p = f_x$, $q = f_y$ erfüllt wird, sobald die Gleichung: $z = f$ im dreidimensionalen Raume x, y, z eine Fläche darstellt, die die beiden Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ befriedigt.

39. Wenn das unbeschränkt integrable System: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ im Raume x, y, z nur ∞^4 Integralflächen: $z = \varphi(x, y, a, b, c, d)$ besitzt, ist dieses Resultat trivial.

Denn dann bestimmen die Gleichungen:

$$z = \varphi(x, y, a, b, c, d), \quad p = \varphi_x, \quad q = \varphi_y$$

im Raume x, y, z, p, q gerade ∞^4 zweidimensionale Punktmannigfaltigkeiten, deren $\infty^4 . \infty^4 = \infty^8$ Elemente:

$$x, y, z, p, q, V_x : V_y : V_z : V_p : V_q$$

selbstverständlich eine und nur eine Gleichung: [80

$$\Theta(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0$$

erfüllen. Dabei liefern jene ∞^4 Punktmannigfaltigkeiten eo ipso in meiner Terminologie eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung: $\Theta = 0$.

40. Dagegen besitzt das erhaltene Resultat sogar ein hervorragendes Interesse, sobald die beiden partiellen Differentialgleichungen: $F_1 = 0$,

$F_2 = 0$ ein Involutionssystem bilden, wenn sie also ∞^∞ gemeinsame Integralflächen: $z = f$ besitzen.

Denn aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. ist bekannt, daß jedes wirkliche Integralgebilde, das heißt, jedes Integralgebilde, das die größtmögliche Anzahl Elemente enthält, von charakteristischen Streifen erzeugt ist. Insbesondere ist bekannt, daß die Integralgebilde der Gleichung: $\Omega = 0$ von den vorhandenen ∞^7 charakteristischen Streifen erzeugt sind, und daß dabei jedes Integralgebilde ∞^3 charakteristische Streifen enthält.

Wir behaupten, daß der Punktort eines Streifens im fünffachen Raume eine Kurve und kein Punkt ist; anders ausgesprochen: wir behaupten, daß die Größen x, y, z, p, q nicht für jeden charakteristischen Streifen konstante Werte haben können. Dies folgt unmittelbar daraus, daß jedenfalls einige unter den fünf Großen V_x, V_y, V_z, V_p, V_q in $\Omega = 0$ vorkommen müssen.

Wir fügen hinzu, daß auch die drei Größen x, y, z nicht für jeden charakteristischen Streifen konstante Werte haben können. Dies folgt daraus, daß die Zahl der vorhandenen zweidimensionalen Integralgebilde mindestens ∞^4 ist, und daß der Inbegriff aller zweidimensionalen Integralgebilde keine andere partielle Differentialgleichung 1. O. als: $\Omega = 0$ erfüllt, sodaß jeder charakteristische Streifen mindestens zu einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit: $z = f,\ p = f_x,\ q = f_y$ gehört. Hierin liegt nämlich, daß, sobald x, y, z oder auch nur x, y für einen charakteristischen Streifen konstante Werte haben, daß dann z, p, q ebenfalls für diesen Streifen konstante Werte haben müssen.

Die ∞^7 charakteristischen Streifen im fünffachen Raume sind daher dargestellt durch: $\Omega = 0$ und sieben hinzutretende Gleichungen zwischen den Größen:

$$x, y, z, p, q, V_x : V_y : V_z : V_p : V_q,$$

mit sieben arbiträren Konstanten, aus denen sich zwei und nur zwei Gleichungen zwischen x, y, z und den arbiträren Konstanten ableiten [81
lassen:

$$\varphi_1(x, y, z, c_1, \ldots, c_7) = 0, \quad \varphi_2(\ldots) = 0.$$

Hieraus folgt aber, daß im dreifachen Raume die Flächen: $z = f$ sämtlich von unendlich vielen Kurven erzeugt werden, die der Schar: $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0$ angehören.

41. Es läßt sich nun nachweisen, daß die Kurvenschar: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ nicht ∞^7, sondern nur ∞^5 Kurven umfaßt, und dementsprechend, daß im fünffachen Raume zwar die Zahl der charakteristischen Streifen

gleich ∞^7, daß dagegen die Zahl der charakteristischen Kurven auch in diesem Raume gerade ∞^5 ist.[1])

Da nämlich die Zahl der vorhandenen zweidimensionalen Integralgebilde der Gleichung: $\Omega = 0$ durch das Symbol ∞^∞ ausgedrückt wird, so kann jedes [dieser] Integralgebilde nur ∞^1 charakteristische Kurven enthalten. Hieraus folgt, daß im fünffachen Raume jede charakteristische Kurve den Punktort von ∞^2 charakteristischen Streifen darstellt.

Hieraus folgt ferner, daß durch jeden Punkt des fünffachen Raumes nur ∞^1 charakteristische Kurven gehen. Diese Kurven erfüllen daher drei nichtlineare Gleichungen von der Form:

$$\varphi(x, y, z, p, q, dx, dy, dz, dp, dq) = 0.$$

Nimmt man im fünffachen Raume eine beliebige Kurve, die diese drei Gleichungen erfüllt, und konstruiert die ∞^1 berührenden Charakteristiken, so erhält man immer ein zweidimensionales wirkliches Integralgebilde der Gleichung: $\Omega = 0$ und gleichzeitig eine Integralfläche des Involutionssystems: $F_1 = 0,\ F_2 = 0$.

Hiermit hat nach meiner Ansicht **Lévys** Theorie ihre wahre Form erhalten. Jetzt ist die Verallgemeinerung naheliegend.

42. Wir betrachten jetzt ein unbeschränkt integrables System [82
erster Ordnung, bestehend aus drei Gleichungen:

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{F}_1(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2) = 0, \quad \mathfrak{F}_2 = 0, \quad \mathfrak{F}_3 = 0,$$

die z_1 und z_2 als Funktionen von x, y bestimmen. Erfüllen:

$$z_1 = f(x, y), \quad z_2 = \varphi(x, y)$$

dieses System, so definieren diese beiden Gleichungen im vierfachen Raume x, y, z_1, z_2 eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Da unser System: $\mathfrak{F}_1 = 0,\ \mathfrak{F}_2 = 0,\ \mathfrak{F}_3 = 0$ unbeschränkt integrabel sein soll, so existieren mindestens ∞^3 solche zweifach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeiten. Ist nun die Zahl dieser Mannigfaltigkeiten gerade

1) Schon in meiner ersten Arbeit über die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen lenkte ich die Aufmerksamkeit auf solche partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche die Zahl der charakteristischen Streifen größer als die Zahl der charakteristischen Kurven ist. (Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1872, Kurzes Résumé . . . [Bd. III d. Ausg., Abh. I, S. 2]).

Bei einer andern Gelegenheit werde ich unter anderm auf die wichtigen Beziehungen zwischen den beiden Begriffen: Darbouxsches System und Involutionssystem eingehen.

∞^3, so folgt unmittelbar aus meinen allgemeinen Theorien, daß eine ganze bestimmte semilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Phi\left(x, y, z_1, z_2, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z_1}, \frac{\partial V}{\partial z_2}\right) = 0$$

vorhanden ist, für welche diese ∞^3 Mannigfaltigkeiten in meinem Sinne des Wortes Lösungen sind und überdies eine vollständige Lösung bilden. Es ist aber, jedenfalls von vornherein, überraschend, daß unsre Integralmannigfaltigkeiten: $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ auch dann Lösungen einer partiellen Differentialgleichung: $\Phi = 0$ darstellen, wenn ihre Anzahl größer als ∞^3 ist.

43. Unter den Integralmannigfaltigkeiten des Involutionssystems: $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$ denken wir uns ∞^2 herausgegriffen, die keine von Parametern freie endliche Relation: $\psi(x, y, z_1, z_2) = 0$ erfüllen. Diese Mannigfaltigkeiten befriedigen zwei endliche Relationen zwischen x, y, z_1, z_2 und zwei Parametern a und b. Die eine unter diesen Relationen denken wir uns auf die Form:

$$V(x, y, z_1, z_2, a) - b = 0$$

gebracht und sodann nach x und y differentiiert:

$$V_x + V_{z_1} p_1 + V_{z_2} p_2 = 0, \quad V_y + V_{z_1} q_1 + V_{z_2} q_2 = 0.$$

Eliminieren wir sodann zwischen diesen beiden Gleichungen und: $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$ die Größen p_1, p_2, q_1, q_2, so erhalten wir eine (und, wie [83 wir hier ohne weitere Diskussion annehmen können, nur eine) Relation von der Form:

$$\Omega(x, y, z_1, z_2, V_x, V_y, V_{z_1}, V_{z_2}) = 0,$$

also eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir wollen beweisen, daß diese partielle Differentialgleichung semilinear ist, und daß jede Integralmannigfaltigkeit: $z_1 = f(x, y)$, $z_2 = \varphi(x, y)$ unseres Involutionssystems (A) eine Lösung von: $\Omega = 0$ darstellt.

44. Zum Beweis nehmen wir ∞^2 beliebige Integralmannigfaltigkeiten:

$$z_1 = f(x, y, a, b), \quad z_2 = \varphi(x, y, a, b)$$

des Involutionssystems (A) und bemerken, daß jede derartige Mannigfaltigkeit ∞^3 Elemente besitzt, deren Koordinaten:

$$x, y, z_1, z_2, \quad V_x : V_y : V_{z_1} : V_{z_2}$$

nach meinen allgemeinen Theorien durch: $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ zusammen mit den beiden Gleichungen:

$$V_x + V_{z_1} f_x + V_{z_2} \varphi_x = 0, \quad V_y + V_{z_1} f_y + V_{z_2} \varphi_y = 0$$

bestimmt sind.

Ergeben dann: $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ durch Auflösung:

$$a = A(x, y, z_1, z_2), \quad b = B(x, y, z_1, z_2),$$

und wird zur Abkürzung:

$$\psi(x, y, A, B) \equiv \overline{\psi}$$

gesetzt, so liefern die Formeln:

$$\text{(B)} \qquad V_x + V_{z_1} \overline{f_x} + V_{z_2} \overline{\varphi_x} = 0, \quad V_y + V_{z_1} \overline{f_y} + V_{z_2} \overline{\varphi_y} = 0$$

zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Lösungen die ∞^2 gewählten Integralmannigfaltigkeiten: $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ des Involutionssystems: $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$ darstellen.

Die Form der beiden Gleichungen (B) beruht nun mehr oder weniger darauf, welche Integralmannigfaltigkeiten des Involutionssystems grade gewählt wurden. Es ist aber möglich, eine partielle Differentialgleichung [84 erster Ordnung von ganz bestimmter Form zu finden, die von allen Integralmannigfaltigkeiten des Involutionssystems befriedigt wird.

In der Tat, es bestehen die drei Gleichungen:

$$\mathfrak{F}_k(x, y, f, \varphi, f_x, \varphi_x, f_y, \varphi_y) = 0$$

identisch in x, y, a, b, welche ∞^2 Integralmannigfaltigkeiten des Involutionssystems wir auch gewählt haben. Dementsprechend bestehen die drei Gleichungen:

$$\mathfrak{F}_k(x, y, z_1, z_2, \overline{f_x}, \overline{\varphi_x}, \overline{f_y}, \overline{\varphi_y}) = 0$$

ebenfalls immer identisch, und zwar in x, y, z_1, z_2.

Eliminiert man daher die vier Größen: $\overline{f_x}, \overline{\varphi_x}, \overline{f_y}, \overline{\varphi_y}$ zwischen den drei letzten Relationen und den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (B), so wird die hervorgehende partielle Differentialgleichung 1. O.:

$$\Omega(x, y, z_1, z_2, V_x, V_y, V_{z_1}, V_{z_2}) = 0,$$

deren Form offenbar eine ganz bestimmte ist, von jeder Integralmannigfaltigkeit des Involutionssystems: $\mathfrak{F}_1 = 0, \ldots, \mathfrak{F}_3 = 0$ erfüllt.

Hiermit ist die Richtigkeit meiner früher aufgestellten Behauptung erwiesen.

45. Wir ziehen nun hieraus den fundamentalen Schluß, daß jede Integralmannigfaltigkeit des Involutionssystems von Charakteristiken erzeugt ist.

Unsere partielle Differentialgleichung: $\Omega = 0$ im vierfachen Raume x, y, z_1, z_2 hat ∞^5 charakteristische Streifen. Jede Integralmannigfaltigkeit des Involutionssystems (A), aufgefaßt als Integralgebilde von: $\Omega = 0$, enthält ∞^2 charakteristische Streifen. Hieraus folgt aber keineswegs, daß jede Integralmannigfaltigkeit ∞^2 verschiedene charakteristische Kurven enthält. Das kann auch nicht der Fall sein, weil sonst nicht ∞^∞ verschiedene zweidimensionale Integralmannigfaltigkeiten des Involutionssystems (A) vorhanden sein könnten.

Jede zweidimensionale Integralmannigfaltigkeit: $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ unseres Involutionssystems: $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$ enthält somit zwar ∞^2 verschiedene charakteristische Streifen, dagegen aber nur ∞^1 verschiedene charakteristische Kurven. Jede solche Kurve ist der Ort von ∞^1 charakteristischen Streifen.

46. Die semilineare partielle Differentialgleichung: $\Omega = 0$ im [85 vierfachen Raume hat somit zwar ∞^5 charakteristische Streifen, dagegen aber nur ∞^4 charakteristische Kurven, unter denen jedesmal ∞^1 durch einen Punkt x, y, z_1, z_2 von allgemeiner Lage gehen.

Hieraus ziehen wir nun zunächst den Schluß, daß jedem Punkte x, y, z_1, z_2 ein Elementarkegel zugeordnet ist, der nur ∞^1 Fortschreitungsrichtungen enthält und somit nicht durch eine Mongesche Gleichung, sondern durch zwei solche Gleichungen:

$$\Phi_1(x, y, z_1, z_2, dx_1, dy_1, dz_1, dz_2) = 0, \quad \Phi_2 = 0$$

definiert wird.

Wir schließen ferner, daß der Punktort aller ∞^2 charakteristischen Streifen, die durch einen Punkt gehen, eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit ist, die eo ipso eine Integralmannigfaltigkeit des Involutionssystems ist.

47. Es ist wohl zu beachten, daß die hiermit gefundenen Eigenschaften unserer Gleichung: $\Omega = 0$ keineswegs unmittelbar daraus hervorgehen, daß diese partielle Differentialgleichung erster Ordnung semilinear ist.

Liegt überhaupt eine semilineare Gleichung in vier Veränderlichen: x_1, x_2, x_3, x_4 vor:

$$\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4) = 0,$$

so kann man[1]), wenn den x feste Werte erteilt werden, und die p als homogene Ebenenkoordinaten in einem dreifachen Raume gedeutet werden, schließen, daß $\Pi = 0$ in diesem dreifachen Raume eine Regelfläche darstellt. In dem vorliegenden Falle kommt etwas hinzu, nämlich, daß sich die Regelfläche auf eine Kurve des dreifachen Raumes reduziert.

1) Göttinger Nachrichten. Oktober 1872 [d. Ausg. Bd. III, Abh. IV].

48. Es lassen sich hier noch weitere Schlüsse ziehen.

Es gibt offenbar im Raume x, y, z_1, z_2 unendlich viele und zwar ∞^∞ viele Kurven, die unsere beiden Mongeschen Gleichungen: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ erfüllen. Nehmen wir nun eine ganz beliebige derartige Integralkurve des Gleichungssystems: $\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0$, so berührt diese in jedem Punkte eine ganz bestimmte charakteristische Kurve der Gleichung: [86 $\Omega = 0$. Die ∞^1 hierdurch definierten charakteristischen Kurven erzeugen eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit, die eine Integralmannigfaltigkeit von: $\Omega = 0$, sowie des Involutionssystems liefert.

Hiermit ist die Integration des Involutionssystems:

$$\mathfrak{F}_1(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2) = 0, \quad \mathfrak{F}_2 = 0, \quad \mathfrak{F}_3 = 0$$

auf die einfachst möglichen Operationen zurückgeführt.

49. Betrachten wir jetzt ein ganz beliebiges unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen und setzen wir dabei voraus — wie wir ohne Beschränkung können — daß dieses System von erster Ordnung ist. Die unabhängigen Veränderlichen nennen wir $x_1, \ldots, x_n$ und die gesuchten Funktionen $z_1, \ldots, z_m$. Wir setzen ferner:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = p_{ik}.$$

Die Gleichungen unseres unbeschränkt integrablen Systems haben somit die Form:

$$\text{(a)} \qquad F_j(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, p_{11}, \ldots, p_{mn}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots q).$$

Wir bilden die n Gleichungen:

$$\text{(b)} \qquad V_{x_k} + V_{z_1} \cdot p_{1k} + V_{z_2} \cdot p_{2k} + \cdots + V_{z_m} \cdot p_{mk} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und setzen dabei voraus, (daß die Zahl q so groß ist), daß sich die mn Größen p_{ik} zwischen den $q + n$ Gleichungen (a) und (b) eliminieren lassen. In dieser Weise erhalten wir ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer einzigen unbekannten Funktion V:

$$\Omega_k(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}, V_{z_1}, \ldots, V_{z_m}) = 0.$$

Wir behaupten, daß dieses System von partiellen Differential- [87 gleichungen 1. O. semilinear ist; wir behaupten ferner, daß, wenn die Gleichungen:

$$z_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \quad z_2 = \varphi_2, \ldots, z_m = \varphi_m$$

eine Lösung des ursprünglichen unbeschränkt integrablen Systems: $F_1 = 0, \ldots, F_q = 0$ darstellen, daß dann dieselben Gleichungen:

$z_1 = \varphi_1, \ldots, z_m = \varphi_m$ in meinem Sinne des Wortes eine Lösung des Gleichungssystems: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0, \ldots$ liefern.

50. Zum Beweis bemerken wir, daß die Gleichungen: $z_1 = \varphi_1, \ldots, z_m = \varphi_m$ im Raume $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m$ eine n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit darstellen. Die Elemente:

$$x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}, V_{z_1}, \ldots, V_{z_m}$$

dieser Mannigfaltigkeit werden nach meiner allgemeinen Theorie bestimmt durch die n hinzutretenden Gleichungen:

$$V_{x_i} + V_{z_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots + V_{z_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0.$$

Wir können dabei annehmen, daß die Gleichungen: $z_1 = \varphi_1, \ldots, z_m = \varphi_m$ etwa m arbiträre Parameter $a_1, \ldots, a_m$ enthalten, und daß sie nach diesen Parametern auflösbar sind:

$$a_i = A_i(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) = A_i(x, z).$$

Benutzen wir überdies die Bezeichnungen:

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m) \equiv [\psi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)],$$

so liefern die n Gleichungen:

$$\text{(c)} \qquad V_{x_i} + V_{z_1}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\right] + \cdots + V_{z_m}\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}\right] = 0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

ein lineares System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, für welches in meinem Sinne des Wortes die Gleichungen:

$$z_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m), \ldots, z_m = \varphi_m$$

eine vollständige Lösung bilden.

51. Es ist nun aber zu bemerken, daß die Form der Gleichungen (c) [88 nicht nur durch die Form der ursprünglich vorgelegten Gleichungen: $F_j = 0$ bestimmt wird. Indem man nach und nach verschiedene Gleichungssysteme: $z_1 = \varphi_1(x, a), \ldots, z_m = \varphi_m(x, a)$ zugrundelegt, erhält man mehrere verschiedene Gleichungssysteme (c). Es ist aber möglich, ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in den unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m$ mit einer einzigen [unbekannten] Funktion V aufzustellen, das von allen Mannigfaltigkeiten: $z_1 = \varphi_1, \ldots, z_m = \varphi_m$ befriedigt wird.

In der Tat, die Gleichungen:

$$F_j\left(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right], \ldots, \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}\right]\right) \equiv 0$$

bestehen identisch für alle Mannigfaltigkeiten: $z_1 = \varphi_1, \ldots, z_m = \varphi_m$. Eliminiert man daher die Größen $[\partial \varphi_i : \partial x_k]$ zwischen den letzten Gleichungen und den Gleichungen (c), so erhält man ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Omega_k(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}, V_{z_1}, \ldots, V_{z_m}) = 0,$$

das von allen Mannigfaltigkeiten: $z_1 = \varphi_1, \ldots, z_m = \varphi_m$ befriedigt wird, das gleichzeitig eine ganz bestimmte Form besitzt und überdies durch einfache Elimination gefunden werden kann, wenn es überhaupt existiert.

52. Hiermit ist das angekündigte Resultat erhalten, und es gilt somit der folgende Satz, dessen Tragweite sich auf partielle Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung ausdehnt, weil sich derartige Gleichungen immer auf Gleichungen erster Ordnung zurückführen lassen:

Satz. *Liegt ein unbeschränkt integrables System von q partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n unabhängigen und m abhängigen Veränderlichen vor:*

$$F_j(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, p_{11}, \ldots, p_{mn}) = 0 \quad \left(p_{ik} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right),$$

so bildet man die Gleichungen:

$$V_{x_i} + V_{z_1} p_{1i} + \cdots + V_{z_m} p_{mi} = 0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Gelingt es nun, die nm Größen p_{ik} zwischen diesen $q + n$ Gleichungen zu [89 *eliminieren, so bilden die hervorgehenden Relationen:*

$$\Omega_k(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}, V_{z_1}, \ldots, V_{z_m}) = 0$$

ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer einzigen unbekannten Funktion V, das von allen Integralmannigfaltigkeiten: $z_1 = \varphi_1, \ldots, z_m = \varphi_m$ des Gleichungssystems: $F_1 = 0, \ldots, F_q = 0$ befriedigt wird.

53. Es stellt sich nun sogleich die Frage, welche praktische Bedeutung dieser Satz besitzt.

Hierauf ist zunächst zu antworten, daß wir, sobald die besprochene Elimination möglich ist, sobald also ein Gleichungssystem: $\Omega_k = 0$ vorhanden ist, immer durch Integration eines gewöhnlichen simultanen Systems eine Schar von Punktmannigfaltigkeiten finden, von denen alle Integralgebilde erzeugt sind.

Noch präziser[1]) und vollständiger charakterisieren wir die Bedeutung

1) Die vorhergehenden Entwickelungen dieses Kapitels finden sich alle, wenn auch in knapper Form, in meiner früher zitierten Arbeit aus dem Jahre 1880 [d. Ausg. Bd. III, Abh. XXVII].

Die nachstehende wichtige Bemerkung wurde damals nicht explizite gemacht.

des gefundenen Satzes, wenn wir sagen, daß jedes System: $F_j = 0$, für welches ein System: $\Omega_k = 0$ wirklich vorhanden ist, auf ein anderes unbeschränkt integrables System:

$$F'_j(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-r}, z'_1, z'_2, \ldots, p'_{11}, \ldots) = 0$$

reduziert werden kann, das weniger als n unabhängige Veränderliche enthält.

Ist zum Beispiel die Zahl n der unabhängigen Veränderlichen des ursprünglich vorgelegten Systems: $F_j = 0$ gleich zwei, so läßt sich die Integration des Systems: $F_j = 0$, sobald das System: $\Omega_k = 0$ existiert, auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen.

Eine Erniedrigung in der Zahl der unabhängigen Veränderlichen ist im allgemeinen eine wesentlich größere Leistung als eine Verminderung in der Zahl der abhängigen Veränderlichen, die ihrerseits mit der Erniedrigung der Ordnung eines Systems zu vergleichen ist.

Kapitel III. [90

Jede infinitesimale Berührungstransformation einer partiellen Differentialgleichung erzeugt spezielle Integralgebilde.

54. Wenn eine vorgelegte partielle Differentialgleichung eine infinitesimale Punkt- oder Berührungstransformation gestattet, so werden in gewissen Fällen **alle** Integralgebilde von der infinitesimalen Transformation in sich verschoben.

Betrachten wir zum Beispiel die lineare partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$ap + bq - c = 0,$$

die bekanntlich auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Die zugehörigen Integralflächen:

$$\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = \Omega\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

sind lauter Zylinderflächen mit parallelen Erzeugenden; jede einzelne derartige Fläche wird in sich von der infinitesimalen Translation:

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}$$

verschoben.

Liegt ferner eine beliebige lineare partielle Differentialgleichung:

$$\xi(x, y, z)p + \eta(x, y, z)q - \zeta(x, y, z) = 0$$

vor, so gestattet jede Integralfläche die infinitesimale Transformation, deren Symbol ist:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Dieser Satz ist weiter nichts als eine gruppentheoretische Auffassung von Lagranges berühmter Theorie der linearen partiellen Differential- [91
gleichungen in drei Veränderlichen.

55. Betrachten wir andererseits nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$W(x, y, z, p, q) = 0.$$

Auch jetzt ist es möglich, infinitesimale Transformationen anzugeben, die jede Integralfläche in sich verschieben. Dies ist ja nämlich der Fall mit jeder infinitesimalen Berührungstransformation, deren charakteristische Funktion die Form:

$$\varrho(x, y, z, p, q) \cdot W$$

besitzt, dabei vorausgesetzt, daß sich ϱ für Wertsysteme x, y, z, p, q von allgemeiner Lage, die $W = 0$ erfüllen, regulär verhält.

Auf dieser Bemerkung, die sich auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen Veränderlichen ausdehnt, beruhen im Grunde alle Integrationstheorien, die derartige Gleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen.[1])

56. Es gibt nun aber auch infinitesimale Berührungstransformationen, die zwar eine partielle Differentialgleichung (erster Ordnung) in sich transformieren, nicht aber alle Integralgebilde invariant lassen, während sie allerdings selbstverständlich jedes Integralgebilde in ein Integralgebilde überführen.

Mit derartigen Vorkommnissen beschäftigen wir uns in diesem Kapitel und stellen uns insbesondere die Frage, welchen Vorteil man bei der Integration partieller Differentialgleichungen aus dem Vorhandensein derartiger Transformationen ziehen kann. Wir werden nachweisen, daß man das Auftreten derartiger Transformationen jedenfalls dazu benutzen kann, durch relativ einfache Integrationsprozesse gewisse ausgezeichnete Inte-

1) An anderer Stelle habe ich längst nachgewiesen, daß eine infinitesimale Berührungstransformation nie alle Integralgebilde einer partiellen Differentialgleichung zweiter oder höherer Ordnung in sich verschiebt.

gralgebilde zu finden, die dadurch charakterisiert sind, daß sie bei der betreffenden infinitesimalen Transformation in sich verschoben werden.

Im nächsten Kapitel zeigen wir sodann, daß man die Existenz der- [92
artiger Transformationen in noch viel weiter gehender Weise verwerten kann.

Um das Verständnis meiner Theorie zu erleichtern, schicke ich zuerst einige einfache aber lehrreiche Beispiele voraus.

57. Betrachten wir eine lineare partielle Differentialgleichung:

$$\text{(A)} \qquad \alpha(y,z)p + \beta(y,z)q - \gamma(y,z) = 0,$$

deren Koeffizienten von x frei sind. Führt man nun neue Veränderliche x_1, y_1, z_1 vermöge einer Transformation:

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z \quad (a = \text{Const.})$$

ein, so wird die Form der Gleichung bewahrt. Für eine geometrische Auffassung heißt dies, daß jede Translation längs der x-Achse jede Integralfläche in eine Integralfläche überführt. Diese Sachlage findet darin ihren vollen Ausdruck, daß die infinitesimale Translation:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

jede Integralfläche in eine ebensolche überführt.

Die allgemeine Theorie, die in diesem Kapitel in ihren Hauptzügen entwickelt wird, besagt nun für diesen speziellen Fall, daß unter den Integralflächen unserer Gleichung (A) solche vorhanden sind, die von der infinitesimalen Translation $\partial f : \partial x$ in sich verschoben werden.

In der Tat, machen wir in unserer linearen partiellen Differentialgleichung (A) die Substitution:

$$z = \mathrm{Y}(y),$$

so erhalten wir zur Bestimmung von Y die Gleichung:

$$\beta(y, \mathrm{Y})\frac{d\mathrm{Y}}{dy} - \gamma(y, \mathrm{Y}) = 0,$$

die, als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den beiden Veränderlichen y und Y, sicher integrabel ist und zwar in all- [93
gemeinster Weise durch eine Funktion $\mathrm{Y}(y)$ befriedigt wird, die eine arbiträre Konstante enthält.

Daher befinden sich unter den ∞^{∞} Integralflächen einer jeden linearen partiellen Differentialgleichung in x, y, z, die eine infinitesimale Translation längs der x-Achse gestattet und somit die Form:

$$\alpha(y,z)p + \beta(y,z)q - \gamma(y,z) = 0$$

besitzt, gewisse und zwar ∞^1 Zylinderflächen, die bei jener infinitesimalen Translation in sich verschoben werden.

58. Denken wir uns jetzt ganz allgemein eine beliebige lineare partielle Differentialgleichung, und zwar der Einfachheit wegen eine mit drei unabhängigen Veränderlichen:

$$Af = 0 = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}$$

vorgelegt, und setzen wir dabei voraus, daß zufälligerweise eine infinitesimale Transformation:

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

bekannt ist, die unsere Gleichung: $Af = 0$ in sich transformiert.

Diese Annahme findet nach meinen allgemeinen Theorien ihren analytischen Ausdruck in dem Stattfinden einer Relation von der Form:

$$X(A(f)) - A(X(f)) = \varrho \cdot Af.$$

Diese Relation zeigt aber nach Jacobis und Bours allgemeinen Theorien, daß die beiden Gleichungen:

$$Af = 0, \quad Xf = 0$$

eine gemeinsame Lösung $\varphi(x, y, z)$ besitzen. Setzen wir daher φ gleich einer arbiträren Konstanten, so erhalten wir ∞^1 Flächen:

$$\varphi(x, y, z) = a,$$

die von Bahnkurven der infinitesimalen Transformation Xf erzeugt sind und überdies die partielle Differentialgleichung:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0$$

erfüllen.

Diesen Satz sprechen wir folgendermaßen aus: [94

Satz. *Führt eine infinitesimale Transformation:*

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

jede Integralfläche der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0 = Af$$

in eine Integralfläche über, so gibt es immer ∞^1 Integralflächen von: $Af = 0$, die bei jener infinitesimalen Transformation in sich verschoben werden.

59. Es ist nun aber leicht, diesen Satz auf beliebige partielle Differentialgleichungen auszudehnen, die eine bekannte oder unbekannte infinitesimale Berührungstransformation gestatten.

Betrachten wir zuerst der Einfachheit wegen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in drei Veränderlichen:

$$F(x, y, z, p, q) = a = \text{Const.}$$

und setzen wir voraus, daß $F = a$ [für jeden Wert von a] die infinitesimale Berührungstransformation:

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

gestattet.

Setzen wir:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad -p = p_1 : p_3, \quad -q = p_2 : p_3,$$

so nimmt unsere partielle Differentialgleichung die Form an:

$$N(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a,$$

und das Symbol der infinitesimalen Berührungstransformation wird der Poissonsche Klammerausdruck:

$$(Hf), \quad \text{wo:} \quad H = -p_3 W(x_1, x_2, x_3, -p_1 : p_3, -p_2 : p_3).$$

Dabei sind N und H homogen in den p, und zwar ist N homogen von nullter Ordnung, H dagegen homogen von erster Ordnung in den p.

Unsere Annahme, daß die infinitesimale Berührungstransformation [95
(Hf) eine jede unter den ∞^1 partiellen Differentialgleichungen: $N = a$ invariant läßt, findet darin ihren analytischen Ausdruck, daß die bekannte Relation:

$$(HN) = 0$$

identisch besteht. Hieraus läßt sich nun, wenn wir die Bezeichnung:

$$H : p_3 = M(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = -W$$

einführen, der Schluß ziehen, daß die beiden Gleichungen:

$$N = a, \quad M = 0$$

für jeden Wert von a gewisse und zwar ∞^1 gemeinsame Integralflächen haben.

In der Tat, die Relation: $(HN) = 0$ liefert unmittelbar die Gleichung:

$$(p_3 M, N) = 0 = p_3(MN) + \frac{\partial N}{\partial x_3} M,$$

die uns zeigt, daß der Klammerausdruck (MN) vermöge: $M = 0$ verschwindet.

Die hiermit gefundenen Integralflächen jeder einzelnen Gleichung: $N = a$ werden wirklich von der infinitesimalen Berührungstransformation (Hf) in sich verschoben.

60. Der Beweis gestaltet sich übrigens unter gewissen Gesichtspunkten einfacher, wenn wir die ursprünglichen Koordinaten x, y, z, p, q beibehalten. Denn unsre Annahme, daß eine jede unter den ∞^1 partiellen Differentialgleichungen:

$$F(x, y, z, p, q) = a$$

die infinitesimale Berührungstransformation:

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

gestatten solle, deckt sich damit, daß der Ausdruck:

$$[WF] - W\frac{\partial F}{\partial z}$$

identisch verschwinden soll, und daraus folgt, daß der eckige Klammer- [96
ausdruck:

$$[WF]$$

vermöge: $W = 0$ verschwindet, was wiederum zeigt, daß die Gleichungen:

$$F = a, \quad W = 0$$

∞^1 gemeinsame Integralflächen haben, die von unserer infinitesimalen Berührungstransformation in sich verschoben werden.

61. Diese Theorie, die sich ohne weiteres auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in n Veränderlichen ausdehnt, gibt den wirklichen Schlüssel zu allen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, die von Lagrange und dessen Nachfolgern, bis Jacobi inklusive, ausgeführt worden sind. Mit der Entdeckung der hier skizzierten Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung fingen meine allgemeinen Untersuchungen auf diesem Gebiete an[1]).

Bei dieser Gelegenheit brauche ich nicht auszuführen, wie diese Betrachtungen, die aus den Jahren 1871—1872 herrühren, mich zur Entwickelung der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen, sowie zur Begründung meiner Theorie der Transformationsgruppen führten. Dagegen scheint es mir zweckmäßig, einmal meine längst angedeutete[2]) Ausdehnung der soeben resumierten Entwickelungen auf beliebige partielle Differentialgleichungen von zweiter und höherer Ordnung wirklich durchzuführen.

---

1) Vgl. die kurze Note: Kurzes Résumé usw. Verh. der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, April 1872 [d. Ausg. Bd. III, Abh. I].

2) Math. Annalen Bd. XI, S. 490, Fußnote [hier Abh. III, S. 190, Anm. 2].

Im nächsten Kapitel zeige ich sodann, daß man aus dem Vorhandensein (bekannter) infinitesimaler Berührungstransformationen einer zur Integration vorgelegten partiellen Differentialgleichung im allgemeinen einen noch größeren Vorteil ziehen kann. Die weitergehenden Entwickelungen des nächsten Kapitels, die wesentlich mehr leisten, beruhen für eine oberflächliche Betrachtung auf ganz anderen Prinzipien. Es ist indes möglich, die Entwickelungen beider Kapitel von einem höheren Gesichtspunkte aus zu sehen; alsdann erkennt man, daß beide Theorien aus [97 einer gemeinsamen Quelle fließen.

62. Setzen wir voraus, daß eine zur Integration vorgelegte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

eine bekannte infinitesimale Berührungstransformation:

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

gestattet. Es ist dann immer möglich, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich die Gleichung:

$$W(x, y, z, p, q) = 0$$

aufzustellen, die mit: $F = 0$ ∞^2 Integralflächen gemein hat.

Um dies zu beweisen, führen wir durch Berührungstransformation:

$$x' = X(x, y, z, p, q), \quad y' = Y, \quad z' = Z, \quad p' = P, \quad q' = Q$$

neue Veränderliche ein, die so gewählt sind, daß die infinitesimale Berührungstransformation die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x'}$$

annimmt. Durch Einführung dieser Veränderlichen verwandelt sich $F = 0$ in eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die alle Translationen längs der x'-Achse gestattet; sie ist daher von x' frei und besitzt dementsprechend die Form:

$$\Phi(y', z', p', q', r', s', t') = 0.$$

Machen wir hier die Substitution:

$$z' = Y(y'),$$

so erhalten wir zur Bestimmung von $Y(y')$ die Gleichung:

$$\Phi\left(y', Y, 0, \frac{dY}{dy'}, 0, 0, \frac{d^2Y}{dy'^2}\right) = 0,$$

die als eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung sicher [98 integrabel ist und daher in allgemeinster Weise von einer Funktion $Y(y')$ befriedigt wird, die zwei arbiträre Parameter enthält.

Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen; bei den Betrachtungen, die uns zu diesem Resultate führten, haben wir implizite vorausgesetzt, daß unter den Wertsystemen x, y, z, p, q, die $W = 0$ erfüllen, solche vorhanden sind, für welche sich nicht allein W, sondern auch F regulär verhält.

63. Wir formulieren das erhaltene spezielle, aber doch wichtige Resultat folgendermaßen:

Gestattet eine vorgelegte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

die infinitesimale Berührungstransformation:

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z},$$

und gibt es dabei unter den Wertsystemen x, y, z, p, q, die $W = 0$ erfüllen, solche, für welche sich nicht allein W, sondern auch F regulär verhält, so haben die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$F = 0, \quad W = 0$$

∞^2 gemeinsame Integralflächen; anders ausgesprochen: es hat dann $F = 0$ im allgemeinen ∞^2 Integralflächen, die von der infinitesimalen Transformation in sich verschoben werden.[1])

64. So einfach dieser Satz auch ist, so genügt er schon, um eine Reihe längst bekannter, aber isoliert stehender Resultate auf ihre wirkliche Quelle zurückzuführen.

Wenn eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung alle Bewegungen gestattet, so besteht sie einfach in einer Relation zwischen den beiden Krümmungsradien:

$$\Omega(R_1, R_2) = 0.$$

Unter den Integralflächen einer derartigen Gleichung befinden sich daher immer gewisse Zylinder, Rotationsflächen und Schraubenflächen, und [99

1) Unter Umständen erfüllen alle Integralflächen von: $W = 0$ zugleich: $F = 0$.

zwar erhält man in jedem einzelnen Falle (mindestens) ∞^7 Integralflächen, die eine infinitesimale Bewegung gestatten.

So zum Beispiel gibt es Rotationsflächen und Schraubenflächen, die zugleich Minimalflächen sind, oder aber konstante Krümmung, respektive konstante mittlere Krümmung haben.

Unter den partiellen Differentialgleichungen:

$$\Omega(R_1, R_2) = 0$$

gibt es einige, die nicht allein alle ∞^6 Bewegungen, sondern überhaupt alle ∞^7 Ähnlichkeitstransformationen gestatten. Das ist der Fall mit den Gleichungen:

$$R_1 : R_2 = a = \text{Const.}$$

Daher dürfen wir schließen, daß sich unter den Flächen, deren Krümmungsradien in einem gegebenen konstanten Verhältnisse stehen, immer solche finden lassen, die Spiralflächen sind, solche also, die eine unendlich kleine Transformation gestatten, die die Form:

$$c_1(xp + yq + zr) + c_2(yp - xq) + c_3(zq - yr) + c_4(xr - zp) + \\ + c_5 p + c_6 q + c_7 r$$

besitzt. Es waren gerade diese Betrachtungen, die mich seinerzeit zur Entdeckung derjenigen Miminimalflächen führten, die Spiralflächen sind.

65. Der aufgestellte Satz gestattet mehrere Verallgemeinerungen, die großes Interesse darbieten, wenn sie auch als ein selbstverständlicher Ausfluß meiner allgemeinen Theorien aufgefaßt werden können.

Beschränken wir uns zunächst auf partielle Differentialgleichungen in x, y, z, so erhalten wir sogleich durch fast wörtliche Wiederholung der oben angestellten Betrachtungen den Satz:

Satz. *Gestattet eine partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung in x, y, z:*

$$F\left(x, y, z, p, q, r, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right) = 0$$

die infinitesimale Berührungstransformation: [100

$$[Wf] - W \frac{\partial f}{\partial z},$$

so haben die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$F = 0, \quad W = 0$$

im allgemeinen ∞^m gemeinsame Integralflächen, deren Bestimmung nur die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung m-ter Ordnung ver-

langt. Diese Hilfsgleichung enthält arbiträre Konstanten, die in Wegfall kommen, wenn die Gleichung erster Ordnung: $W = 0$ schon integriert vorliegt.

66. Zur Illustration dieses Satzes betrachten wir zuerst die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung, die alle *isothermen* Flächen bestimmt. Diese Differentialgleichung gestattet offenbar die zehngliedrige Gruppe aller konformen Punkttransformationen. Daher liefern unsere Theorien ∞^{9+4} isotherme Flächen, deren jede eine infinitesimale konforme Punkttransformation gestattet.

Als zweites Beispiel betrachten wir die partielle Differentialgleichung **vierter** Ordnung, die alle Translationsflächen definiert. Diese Gleichung gestattet alle ∞^{12} linearen Punkttransformationen des Raumes; daher läßt sich schließen, daß:

$$\infty^{11+4}$$

Translationsflächen vorhanden sind, die jedesmal eine infinitesimale lineare Transformation gestatten.

Es ist nun möglich, diese an sich interessanten Translationsflächen wirklich zu bestimmen. Die betreffenden Flächen zerfallen in zwei Kategorien, je nachdem bei der infinitesimalen linearen Transformation die unendlich fernen Punkte in Ruhe bleiben oder unter einander vertauscht werden.

Von der ersten Kategorie können wir aber absehen, da es von vornherein klar ist, daß sie nur abwickelbare Flächen, ja sogar nur Zylinderflächen umfaßt.

Wir können somit annehmen, daß unsere infinitesimale Transformation die unendlich fernen Punkte unter einander vertauscht. Alsdann wird die unendlich ferne Ebene projektiv transformiert, und somit treten in dieser Ebene ∞^1 Kurven auf, die sämtlich invariant bleiben. Unter diesen [101 Kurven, deren Gleichungen die Form haben:

$$\omega\left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = a = \text{Const.}$$

greifen wir zwei beliebige heraus, indem wir dem Parameter a zwei bestimmte Werte a_1 und a_2 erteilen. Meine allgemeine Theorie der Translationsflächen gibt sodann unmittelbar eine partielle Differentialgleichung:

$$R(p, q)r + S(p, q)s + T(p, q)t = 0,$$

deren Integralflächen Translationsflächen sind, deren erzeugende Kurven jedesmal ∞^1 Tangenten besitzen, die eine der beiden früher besprochenen unendlich fernen Kurven schneiden.

Ist nun:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} \tag{D}$$

das Symbol der betreffenden infinitesimalen Transformation, so sind die gesuchten Translationsflächen bestimmt durch die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\xi p + \eta q - \zeta = 0, \tag{E}$$

$$Rr + Ss + Tt = 0, \tag{F}$$

unter denen die erste elf wesentliche arbiträre Konstanten enthält, während in der letzten Gleichung überdies die Parameter a_1, a_2 auftreten. Diese beiden partiellen Differentialgleichungen haben nun für allgemeine Werte der besprochenen dreizehn Parameter jedesmal ∞^2 gemeinsame Integralflächen. Dies folgt daraus, daß die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (F), wie eine evidente geometrische Betrachtung zeigt, die infinitesimale Transformation (D) gestattet.

67. Will man die endliche Gleichung dieser Flächen finden, so kann man zuerst die Bahnkurven:

$$\mathfrak{x} = a, \quad \mathfrak{y} = b$$

der infinitesimalen Transformation (D) bestimmen; sodann erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$:

$$W(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'') = 0,$$ [102

deren Integralgleichung:

$$\Pi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \alpha, \beta) = 0$$

die gesuchten Flächen darstellt.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß die hier angegebenen Operationen wirklich durchgeführt werden können; zu diesem Zwecke stellen wir die folgenden Betrachtungen an.

Da eine lineare Transformation jedes Parallelogramm in ein Parallelogramm überführt und infolgedessen kongruente Kurven in ebensolche verwandelt, so haben wir früher behaupten können, daß eine derartige Transformation immer Translationsfläche in Translationsfläche überführt. Wenn nun eine Translationsfläche eine infinitesimale lineare Transformation gestattet, so sind von vornherein zwei Möglichkeiten denkbar: es ist denkbar, daß die ∞^1 kongruenten und gleichgestellten Kurven unsrer Fläche unter einander vertauscht werden, oder aber, daß sie nach und nach in andere Scharen kongruenter Kurven übergehen. Mit der

letzten Möglichkeit brauchen wir uns aber nicht zu beschäftigen; denn diese könnte jedenfalls nur für die von mir bestimmten Flächen eintreten, die in ∞ vielen Weisen als Translationsflächen aufgefaßt werden können. Es bleibt also nur noch die Möglichkeit zu erledigen, daß die betreffende infinitesimale lineare Transformation jede Schar kongruenter Kurven invariant läßt. In diesem Falle muß jede Kurve einer derartigen Schar selbst eine infinitesimale lineare Transformation gestatten, da jede Kurve der Schar von zwei unabhängigen linearen [infinitesimalen] Transformationen in dieselbe benachbarte Kurve übergeführt wird. Hieraus folgt, daß es immer möglich ist, beide Scharen kongruenter Kurven, die auf unsrer Fläche liegen, und also die Fläche selbst zu bestimmen.

Unter den hiermit bestimmten Translationsflächen, die eine infinitesimale lineare Transformation gestatten, befinden sich insbesondere die geradlinigen Minimalflächen. Diese Schraubenflächen sind, beiläufig bemerkt, die einzigen geradlinigen Translationsflächen, die nicht gleichzeitig Zylinder sind.

68. Wir wollen angeben, wie man alle diese Flächen durch möglichst einfache Rechnungen finden kann.

In älteren Arbeiten zeigte ich, daß man alle linearen homogenen [103 infinitesimalen Transformationen auf kanonische Form bringen kann. Ist nun:

$$\sum_{i,k}^{1\ldots 3} c_{ik} x_i p_k$$

eine solche kanonische Form, so bildet man die Transformation:

$$\Sigma\, c_{ik} x_i p_k + d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3$$

und versucht sodann durch die Variabelnänderung:

$$x_k' = x_k + \alpha_k$$

die Konstanten d_1, d_2, d_3 sämtlich oder wenigstens einige unter ihnen wegzuschaffen.

Ist insbesondere die Determinante:

$$\left| c_{ik} \right|$$

von Null verschieden, so können alle d_k ohne weiteres gleich Null gesetzt werden.

Sucht man nun alle Translationsflächen, die die infinitesimale Transformation:

$$\sum_{ik} c_{ik} x_i p_k + \sum_k d_k p_k \tag{G}$$

gestatten, so bemerkt man zunächst, daß jede erzeugende Kurve nach dem Früheren eine gewisse infinitesimale Transformation zuläßt, die die Form:

$$\Sigma c_{ik} x_i p_k + \Sigma e_k p_k$$

besitzt. Man bestimmt die ∞^2 Bahnkurven dieser letzten Transformation, und greift unter ihnen eine, etwa C heraus; sodann erzeugen alle ∞^1 Bahnkurven der ersten infinitesimalen Transformation, die C schneiden, eine Fläche, die die verlangte Eigenschaft besitzt.

In dieser Weise liefern leicht ausführbare Rechnungen die gesuchten Translationsflächen.

69. Nehmen wir zum Beispiel die infinitesimale Transformation:

$$axp + byq + czr \quad (abc \neq 0)$$

und fügen einen Ausdruck nullter Ordnung hinzu, so erhalten wir die [104
Transformation:

$$(ax + l)p + (by + m)q + (cz + n)r.$$

Die Bahnkurven dieser letzten Transformation sind gegeben durch die Gleichungen:

$$ax + l = (ax_0 + l)e^{at},$$
$$by + m = (by_0 + m)e^{bt},$$
$$cz + n = (cz_0 + n)e^{ct}.$$

Dementsprechend werden die Bahnkurven der ersten Transformation bestimmt durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = xe^{a\tau}, \quad \mathfrak{y} = ye^{b\tau}, \quad \mathfrak{z} = ze^{c\tau}.$$

Eliminiert man zwischen diesen sechs Gleichungen die Größen x, y, z, erteilt sodann den Größen x_0, y_0, z_0 bestimmte Werte und deutet endlich t und τ als Parameter, so bestimmen die drei Gleichungen:

$$a\mathfrak{x} = -le^{a\tau} + (ax_0 + l)e^{a(\tau+t)}$$
$$b\mathfrak{y} = -me^{b\tau} + (by_0 + m)e^{b(\tau+t)}$$
$$c\mathfrak{z} = -ne^{c\tau} + (cz_0 + n)e^{c(\tau+t)}$$

offenbar eine Translationsfläche, die die verlangten Eigenschaften besitzt.

70. Betrachten wir jetzt eine partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung in $n + 1$ Veränderlichen:

$$F\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m}\right) = 0$$

mit q bekannten infinitesimalen Berührungstransformationen:

$$B_k f = [W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z},$$

die paarweise vertauschbar sind: [105

$$B_i B_k f - B_k B_i f \equiv 0,$$

während die charakteristischen Funktionen keine homogene Relation:

$$\Phi(W_1, \ldots, W_q) = 0$$

erfüllen. Gibt es dann Wertsysteme $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, die die Gleichungen:

$$W_1 = 0, \ldots, \quad W_q = 0$$

erfüllen, für welche sich überdies die Gleichung: $F = 0$ regulär verhält, so haben die Gleichungen:

$$W_1 = 0, \ldots, W_q = 0, \quad F = 0$$

gemeinsame Lösungen.

Um diesen Satz zu beweisen und gleichzeitig zu präzisieren, denken wir uns, wie immer möglich, neue Veränderliche:

$$Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$$

eingeführt, die so gewählt sind, daß die charakteristischen Funktionen unserer infinitesimalen Transformationen die Form:

$$P_n, P_{n-1}, \ldots, P_{n-q+1}$$

annehmen. Geschrieben in diesen Veränderlichen erhält dann $F = 0$ eine Form:

$$\Phi\left(Z, X_1, \ldots, X_{n-q}, P_1, \ldots, P_n, \frac{\partial^2 Z}{\partial X_1^2}, \ldots\right) = 0,$$

die von $X_{n-q+1}, \ldots, X_n$ frei ist.

Setzen wir daher:

$$Z = \Theta(X_1, \ldots, X_{n-q}),$$

so erhalten wir zur Bestimmung von Θ eine sicher integrable partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung in den Veränderlichen:

$$Z, X_1, \ldots, X_{n-q}.$$

Hiermit ist das angekündigte Resultat erwiesen, und gleich- [106
zeitig eine Integrationsmethode angegeben, die sich oft als praktisch erweisen wird, obgleich sie mehr Integrationsoperationen verlangt, als streng [genommen] notwendig ist.

71. Die in dem vorigen Beispiel gemachte Annahme, daß die Klammerausdrücke: $B_i B_k f - B_k B_i f$ alle Null sind, läßt sich durch allgemeinere Voraussetzungen ersetzen.

Nehmen wir zum Beispiel an, daß die Gleichung:

$$F\left(z, x_1, \ldots, x_n, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m}\right) = 0$$

zwei infinitesimale Berührungstransformationen gestattet, die eine Gruppe mit zwei Parametern erzeugen. Sind nun diese Transformationen nicht vertauschbar, so können wir annehmen, daß die Veränderlichen schon so gewählt sind, daß unsere infinitesimalen Transformationen in der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \; x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + z \frac{\partial f}{\partial z}$$

vorliegen. Unter dieser Voraussetzung ist die Gleichung: $F = 0$ frei von x_1 und homogen in den Größen:

$$x_2, \ldots, x_n, z, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, dz,$$

sodaß sie die Form:

$$\Phi\left(x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, z \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots\right) = 0$$

besitzt.

Setzen wir nun:

$$z = Z(x_2, \ldots, x_n) = x_n W(x_2 : x_n, \ldots, x_{n-1} : x_n)$$

und:

$$x_2 : x_n = y_2, \ldots, x_{n-1} : x_n = y_{n-1},$$

so kommt:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 0, \; \frac{\partial Z}{\partial x_2} = \frac{\partial W}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial W}{\partial y_{n-1}}, \qquad [107$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} = W - y_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} - \cdots - y_{n-1} \frac{\partial W}{\partial y_{n-1}}, \ldots,$$

sodaß unsere partielle Differentialgleichung die Form:

$$\Pi\left(W, y_2, \ldots, y_{n-1}, \frac{\partial W}{\partial y_2}, \ldots\right) = 0$$

annimmt, die nur die Größen: $y_2, \ldots, y_{n-1}, W$ und die zugehörigen Differentialquotienten erster bis m-ter Ordnung enthält.

71.* Gestattet daher eine partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung: $F = 0$ in den Veränderlichen $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 2)$ eine zweigliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, die von den beiden infinitesimalen Transformationen:

$$[W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k=1,2)$$

erzeugt wird, so haben die partiellen Differentialgleichungen:

$$F = 0, \quad W_1 = 0, \quad W_2 = 0$$

die größtmögliche Anzahl gemeinsamer Lösungen.

72. Setzen wir jetzt allgemein voraus, daß eine vorgelegte partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n$ eine q-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen:

$$[W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k=1,2,\ldots,q)$$

gestattet, und nehmen wir überdies noch an, daß die W keine Relation erfüllen, die die Form:

$$\Omega(W_1 : W_q, W_2 : W_q, \ldots, W_{q-1} : W_q) = 0 \qquad [108$$

besitzt. Dann haben, [behaupte ich], die Gleichungen:

$$F = 0, \quad W_1 = 0, \ldots, W_q = 0$$

die größtmögliche Anzahl gemeinsamer Lösungen, und dabei bleibt jede einzelne unter diesen Lösungen bei der q-gliedrigen Gruppe invariant.[1]

73. Um dies zu beweisen, stellen wir die folgenden Überlegungen an.

Der Raum $z, x_1, \ldots, x_n$ enthält ∞^{2n+1} Elemente: $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Unter diesen gibt es im allgemeinen ∞^{2n+1-q}, die die q Gleichungen:

$$W_1 = 0, \ldots, W_q = 0$$

erfüllen. Die Elemente der hierdurch bestimmten Schar besitzen die Eigenschaft, daß jedes derartige Element von jeder infinitesimalen Transformation der vorgelegten Gruppe in sich verschoben wird. Da nun diese Eigenschaft nach der Natur der Sache eine bei jeder endlichen wie infinitesimalen Transformation unserer Gruppe invariante ist, folgt zunächst, daß die von den Gleichungen: $W_1 = 0, \ldots, W_q = 0$ bestimmte Schar von Elementen bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleibt.

Die $\infty^{2n+1-q+s}$ Elemente unserer invarianten Schar ordnen sich in Teilgebiete, die einzeln invariant bleiben. Die kleinsten invarianten Teil-

1) Im Texte setzen wir stillschweigend voraus, daß sich unter den Wertsystemen $z, x_1, \ldots,$ die unser Gleichungssystem erfüllen, solche finden lassen, für welche sich die in Betracht kommenden Funktionen regulär verhalten.

gebiete umfassen höchstens ∞^q Elemente, unter denen jedes einzelne mit allen benachbarten Elementen desselben Gebietes vereinigt liegt.

Die ∞^{n+r} Elemente der Schar: $W_1 = 0, \ldots, W_q = 0$ ordnen sich somit in etwa ∞^n kleinste invariante Teilgebiete E_r, unter denen jedes ∞^r Elemente umfaßt, die einen Elementverein bilden.

Zwischen benachbarten Elementvereinen E_r finden nun eigentüm- [109 liche Beziehungen statt, die darin bestehen, daß, sobald irgend zwei benachbarte Elemente, die zu zwei verschiedenen E_r gehören, vereinigt liegen, daß dann zwei beliebige benachbarte Elemente dieser beiden E_r vereinigt liegen. Insofern finden also zwischen den ∞^n Elementvereinen E_r genau dieselben Beziehungen statt, wie zwischen den charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

74. Es ist auch nicht schwer, das erhaltene Resultat auf seinen inneren Grund zurückzuführen.

Unsere Annahme, daß die q infinitesimalen Berührungstransformationen:

$$[W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k=1,2,\ldots,q)$$

eine q-gliedrige Gruppe erzeugen, findet darin ihren analytischen Ausdruck, daß die q charakteristischen Funktionen $W_1, \ldots, W_q$ paarweise Relationen von der Form:

$$[W_i W_k] - W_i \frac{\partial W_k}{\partial z} + W_k \frac{\partial W_i}{\partial z} = \sum_s c_{iks} W_s$$

erfüllen. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß die partiellen Differentialgleichungen 1. O.:

$$W_1 = 0, \ldots, W_q = 0$$

in meinem Sinne des Wortes ein Involutionssystem bilden. Dieses Involutionssystem hat charakteristische Mannigfaltigkeiten, und das sind gerade die Elementvereine, die wir früher mit E_r bezeichnet haben.

Unsere frühere ausdrückliche Voraussetzung, daß die W_k keine homogene Relation: $\Omega = 0$ erfüllen, läßt sich offenbar durch allgemeinere Annahmen ersetzen.

75. Es ist nun ein allgemeiner, von mir herrührender Satz, daß sich die charakteristischen Mannigfaltigkeiten eines Involutionssystems erster Ordnung immer eineindeutig (das heißt, nicht unendlichdeutig), auf die Elemente erster Ordnung eines passend gewählten Punktraumes $\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_{n'}$ in solcher Weise beziehen lassen, daß zwei benachbarte charakteristische Mannigfaltigkeiten, deren benachbarte Elemente immer vereinigt [110 liegen, sich im Raume $\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_{n'}$ als zwei Elemente (ζ, ξ, π) abbilden, die vereinigt liegen.

Hieraus folgt nun, daß die ursprünglich vorgelegte partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung und die hinzutretenden Gleichungen erster Ordnung: $W_1 = 0, \ldots, W_q = 0$, das heißt also, daß das ganze Gleichungssystem:

$$\text{(L)} \qquad F = 0, \quad W_1 = 0, \ldots, W_q = 0$$

sich durch eine einzige partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung:

$$\Phi\left(\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_{n'}, \pi_1, \ldots, \pi_{n'}, \ldots, \frac{\partial^m \zeta}{\partial \xi_{n'}^m}\right) = 0$$

ersetzen läßt. Da diese letzte Gleichung immer Lösungen besitzt, so gilt dasselbe für das Gleichungssystem (L).

76. Hiermit ist das angekündigte Resultat bewiesen. Dabei leuchtet unmittelbar ein, daß die obenstehenden Entwickelungen ohne Änderung gültig bleiben, wenn nicht eine einzelne Gleichung m-ter Ordnung, sondern ein unbeschränkt integrables System m-ter Ordnung vorgelegt ist.

Wir können daher den folgenden Satz formulieren:

Satz. *Liegt ein unbeschränkt integrables System von partiellen Differentialgleichungen m-ter Ordnung vor:*

$$F_k\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m}\right) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots),$$

das eine kontinuierliche Gruppe von Berührungstransformationen:

$$[W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k=1,2,\ldots,q)$$

gestattet, so findet man alle Integralgebilde des Systems: $F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots$, die bei der Gruppe invariant bleiben, indem man zu den Gleichungen: $F_k = 0$ noch die q Gleichungen:

$$W_1 = 0, \ldots, W_q = 0$$

hinzufügt. Diese q letzten Gleichungen bilden, wenn sie einander nicht [111 *widersprechen, immer ein Involutionssystem erster Ordnung, dessen charakteristische Mannigfaltigkeiten, wenn sie in hinlänglich großer Anzahl vorhanden sind, sich zu Integralgebilden des ursprünglich vorgelegten Gleichungssystems: $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots$, zusammenfassen lassen.*

77. Wir betrachten jetzt ein System von partiellen Differentialgleichungen [erster Ordnung], das die m Größen: $z_1, z_2, \ldots, z_m$ als Funktionen von: $x_1, \ldots, x_n$ bestimmt. Setzen wir zur Abkürzung:

$$p_k^{(i)} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k},$$

so hat unser Gleichungssystem die Form:

$$F_\nu(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Jedes Wertsystem: $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}$ nennen wir ein Element. Wir sagen ferner, daß eine Schar von Elementen einen Elementverein bildet, wenn zwei benachbarte Elemente der Schar immer das Gleichungssystem:

$$dz_i - p_1^{(i)} dx_1 - \dots - p_n^{(i)} dx_n = 0 \qquad (i = 1, \dots, m)$$

erfüllen. Ein Elementverein enthält höchstens ∞^n und mindestens ∞^1 Elemente.

Wir bezeichnen einen Elementverein als einen Integralverein eines Systems von Differentialgleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \dots$, wenn die Elemente des Elementvereins sämtlich die Gleichungen: $F_k = 0$ erfüllen. Wir unterscheiden zwischen Integral-V_1, Integral-$V_2, \dots$, Integral-V_n, je nach der Dimensionenzahl des betreffenden Integralvereins.

Wir sagen nun, daß das System von Differentialgleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \dots$ unbeschränkt integrabel ist, wenn jedes Element des Gleichungssystems mindestens einem Integral-V_n angehört.

Wir nennen andererseits das System von Differentialgleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \dots$ ein Involutionssystem, wenn jeder Integral-V_q [112 *von allgemeiner Lage des Gleichungssystems in mindestens einem Integral-V_n enthalten ist.*

78. Wir wollen nun annehmen, daß ein Involutionssystem erster Ordnung:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots$$

zwischen den unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ und deren Funktionen $z_1, \dots, z_m$ gewisse (bekannte) infinitesimale Transformationen:

$$U_k f = \Sigma \xi_{ki}(x, z) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \Sigma \zeta_{ki}(x, z) \frac{\partial f}{\partial z_i} \qquad (k = 1, 2, \dots, r)$$

gestattet, die eine r-gliedrige Gruppe bilden, (sowie, daß die größten Determinanten der Matrix:

$$\left| \xi_{k1} \dots \xi_{kn} \zeta_{k1} \dots \zeta_{km} \right|$$

nicht identisch verschwinden).

Gibt es nun hinlänglich viele Elemente von allgemeiner Lage, die alle nachstehenden Gleichungen erster Ordnung:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots,$$

$$\zeta_{ki} - p_1^{(i)} \xi_{k1} - p_2^{(i)} \xi_{k2} - \dots - p_n^{(i)} \xi_{kn} = 0 \quad (k = 1, \dots, r;\ i = 1, \dots, m)$$

erfüllen, so ist das hiermit erhaltene System von Differentialgleichungen unbeschränkt integrabel.

Der Beweis wird genau in derselben Weise geführt, wie in dem vorigen Beispiele.

Kapitel IV.

Partielle Differentialgleichungen, die eine unendliche Gruppe gestatten.

79. Im vorigen Kapitel beschäftigten wir uns mit partiellen Differentialgleichungen, die eine kontinuierliche Gruppe gestatten. Wir zeigten, daß, sobald eine infinitesimale Transformation einer derartigen Gleichung vorliegt, im allgemeinen spezielle Integralmannigfaltigkeiten vorhanden sind, die [113 bei jener Transformation nicht in neue Integralgebilde übergeführt werden, sondern in sich verschoben werden. Gestattet daher eine vorgelegte partielle Differentialgleichung eine endliche oder unendliche kontinuierliche Gruppe, so ergeben die vorhergehenden Theorien Methoden zur Bestimmung gewisser Kategorien von Integralgebilden, die, sobald die vorgelegte Gruppe unendlich ist, im allgemeinen nicht nur von arbiträren Konstanten abhängen.

Es ist nun aber möglich, wie wir in diesem Kapitel an einfachen Beispielen nachweisen werden, noch größeren Vorteil aus dem betreffenden Umstande zu ziehen. Wir stützen uns bei der Entwickelung dieser neuen Methoden, die nach unserer Ansicht eine hervorragende Wichtigkeit besitzen, auf unsere allgemeine Theorie der Differentialinvarianten. Diese unsre Methoden beruhen sämtlich darauf, daß wir bei der Behandlung einer partiellen Differentialgleichung, die eine bekannte unendliche kontinuierliche Gruppe gestattet, neue Veränderliche einführen und zwar ein (volles) System von Differentialinvarianten, das nach unsrer allgemeinen Theorie zu jeder kontinuierlichen Gruppe gehört.

80. Beispiel 1. Betrachten wir zuerst die unendliche kontinuierliche Gruppe, deren infinitesimale Transformationen die allgemeine Form:

$$Z(z) \frac{\partial f}{\partial z}$$

besitzen, wobei Z eine arbiträre Funktion des Argumentes z bezeichnet.

Bezeichnen wir nun, wie gewöhnlich, die Differentialquotienten von Z mit $Z', Z'', \dots$, so besitzen die infinitesimalen Transformationen der zugehörigen erweiterten Gruppen die Form:

$$Z \frac{\partial f}{\partial z} + Z' \left(p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} + r \frac{\partial f}{\partial r} + s \frac{\partial f}{\partial s} + t \frac{\partial f}{\partial t} + \cdots\right) +$$
$$+ Z'' \left(p^2 \frac{\partial f}{\partial r} + pq \frac{\partial f}{\partial s} + q^2 \frac{\partial f}{\partial t} + \cdots\right) +$$
$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wünschen wir daher, alle zugehörigen Differentialinvarianten nullter, [114
erster und zweiter Ordnung zu finden, so bilden wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0,\quad p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}+r\frac{\partial f}{\partial r}+s\frac{\partial f}{\partial s}+t\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

$$p^2\frac{\partial f}{\partial r}+pq\frac{\partial f}{\partial s}+q^2\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

die in Übereinstimmung mit unseren allgemeinen Theorien ein vollständiges System bestimmen. Unter dessen Lösungen befinden sich zwei von nullter Ordnung, nämlich:

$$x \quad \text{und:} \quad y,$$

eine von erster Ordnung:

$$u=p:q,$$

und zwei von zweiter Ordnung:

$$\frac{qr-ps}{q^2}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{qs-pt}{q^2}=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Nach unseren allgemeinen Theorien drückt sich jede Differentialinvariante durch:

$$x,\ y,\ u$$

und die sukzessiven Differentialquotienten:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \cdots$$

aus. Es bilden dabei die drei Größen x, y und u nach unsrer Terminologie ein volles System von Differentialinvarianten.

81. Jede Relation von der Form:

$$\Omega\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \ldots\right)=0$$

liefert nun eine invariante Differentialgleichung:

$$W(x,y,z,p,q,r,s,t,\ldots)=0.$$

Existierte eine invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung, [115
die sich nicht auf die Form:

$$\Omega\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

zurückführen ließe, so müßten vermöge dieser Gleichung zweiter Ordnung die dreireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & r & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 & pq & q^2 \end{vmatrix}$$

verschwinden. Da eine solche Gleichung nicht vorhanden ist, schließen wir:

Gestattet eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung alle Transformationen der unendlichen Gruppe:

$$Z(z)\frac{\partial f}{\partial z},$$

für welche:

$$x,\ y,\ u=p:q$$

ein volles System von Differentialinvarianten liefern, so kann sie die Form:

$$\Omega\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

erhalten, womit ihre Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen geleistet ist.

82. Entsprechende Überlegungen ergeben den allgemeinen Satz:

Gestattet eine partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung in den Veränderlichen x, y, z alle Transformationen der unendlichen Gruppe $Z(z)(\partial f:\partial z)$, so läßt sie sich ohne Integration auf eine Gleichung $(m-1)$-ter Ordnung zurückführen, die selbst eine allgemeine Form in den Veränderlichen x, y, u besitzt. Gelingt es, diese Hilfsgleichung $(m-1)$-ter Ordnung zu integrieren, so bleibt nur übrig, eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$p-\alpha(x,y)q=0 \qquad [116$$

zu integrieren.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß bei der Erledigung unserer beiden Hilfsgleichungen die bekannte Gruppe $Z(z)(\partial f:\partial z)$ in keiner Weise verwertet werden kann.

83. Beispiel 2. Betrachten wir jetzt die unendliche Gruppe:

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}-\xi' z\frac{\partial f}{\partial z},$$

die ich im Jahre 1883 (Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania) bei meiner Bestimmung aller unendlichen Gruppen in zwei Veränderlichen als eine kanonische Form aufstellte.[1]) Bezeichnen wir nun die Inkremente der Größen x, y, z wie gewöhnlich mit δx, δy, δz, und setzen dementsprechend:

$$\delta x=\xi\delta\tau,\quad \delta y=0,\quad \delta z=-\xi' z\delta\tau,$$

1) Verhandl. der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1883 [d. Ausg. Bd. V, Abh. XIII, S. 351].

so finden wir nach bekannten Regeln:

$$\delta p = (-2\xi' p - \xi'' z)\delta\tau, \quad \delta q = -\xi' q \delta\tau,$$
$$\delta r = (-3\xi' r - 3\xi'' p - \xi''' z)\delta\tau,$$
$$\delta s = (-2\xi' s - \xi'' q)\delta\tau, \quad \delta t = -\xi' t \delta\tau.$$

Es ist daher:

$$X''f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} - \xi'\left(z\frac{\partial f}{\partial z} + 2p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + 3r\frac{\partial f}{\partial r} + 2s\frac{\partial f}{\partial s} + t\frac{\partial f}{\partial t}\right) -$$
$$- \xi''\left(z\frac{\partial f}{\partial p} + 3p\frac{\partial f}{\partial r} + q\frac{\partial f}{\partial s}\right) - \xi''' z\frac{\partial f}{\partial r}$$

das Symbol der allgemeinen infinitesimalen Transformation unserer zweimal erweiterten Gruppe.

Die zugehörigen Differentialinvarianten von nullter, erster und zweiter Ordnung sind daher bestimmt als Lösungen des vollständigen Systems:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad z\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \qquad [117$$
$$z\frac{\partial f}{\partial z} + 2p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + 2s\frac{\partial f}{\partial s} + t\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Wir finden also eine Differentialinvariante nullter Ordnung, nämlich y, die wir mit μ bezeichnen, eine von erster Ordnung: $\nu = q : z$, und zwei von zweiter Ordnung, nämlich:

$$u = \frac{zs - pq}{z^3}, \quad v = \frac{t}{z}.$$

Dementsprechend ist:

$$\Omega(\mu, \nu, u, v) = 0$$

die allgemeine Form einer invarianten Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Daß hiermit wirklich alle invarianten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gefunden sind, ergibt sich am einfachsten daraus, daß unter den vierreihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 2p & q & 3r & 2s & t \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & 3p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

solche vorhanden sind, zum Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 2p & 3r \\ 0 & 0 & z & 3p \\ 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} = z^3,$$

die weder identisch, noch vermöge einer wirklichen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung verschwinden.

84. Im vorliegenden Falle ist es leicht, einzusehen, daß sich alle Differentialinvarianten dritter und höherer Ordnung durch Differentiation [118 aus μ, ν, u, v ableiten lassen, und daß somit diese vier Größen nach meiner Terminologie ein volles System von Differentialinvarianten bilden.

Betrachten wir nämlich eine beliebige Fläche, die keine Relation von der Form:

$$W(y, q : z) = 0 = W(\mu, \nu)$$

erfüllt, so können wir die Größen μ, ν als Gaußische Koordinaten für die Punkte dieser Fläche benutzen, anders ausgesprochen, wir können statt x, y die Größen μ, ν als unabhängige Veränderliche einführen. Indem wir dies tun, können wir nachweisen, daß die vier Größen:

$$\text{(M)} \qquad \frac{\partial u}{\partial \mu}, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}, \ \frac{\partial v}{\partial \mu}, \ \frac{\partial v}{\partial \nu}$$

Differentialinvarianten, und offenbar Differentialinvarianten dritter Ordnung, unserer Gruppe sind.

Um das zu beweisen, wählen wir zwei beliebige Differentialinvarianten m-ter Ordnung, etwa U und V, und bilden die allgemeine Gleichung:

$$\Phi(U, V) = 0$$

mit der arbiträren Funktion Φ. Indem wir Φ nach und nach auf alle möglichen Weisen wählen, erhalten wir unendlich viele Differentialgleichungen m-ter Ordnung, die sämtlich intermediäre Integrale, und zwar die allgemeinsten intermediären Integrale, der Differentialgleichung $(m+1)$-ter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} \\ \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} \end{vmatrix} = 0 = \Delta$$

sind. Da nun der allgemeine Ausdruck $\Phi(U, V)$ immer eine Differentialinvariante darstellt, so ist: $\Delta = 0$ sicher eine invariante Differentialgleichung.

Sind daher U, V, W drei Differentialinvarianten, so ist die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dV}{dx} - c\frac{dW}{dx} \\ \frac{dU}{dy} & \frac{dV}{dy} - c\frac{dW}{dy} \end{vmatrix} = 0 \qquad [119$$

immer eine invariante Differentialgleichung, welchen Wert auch die Konstante c haben möge. Diese Gleichung läßt sich aber auf die Form bringen:

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dV}{dx} \\ \frac{dU}{dy} & \frac{dV}{dy} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dW}{dx} \\ \frac{dU}{dy} & \frac{dW}{dy} \end{vmatrix} = c,$$

und hier ist die linke Seite gerade, weil c eine arbiträre Konstante darstellt, sicher eine Differentialinvariante.

Die gefundene Differentialinvariante läßt sich nun, wenn wir U und W als unabhängige Veränderliche statt x, y einführen, durch die Funktionaldeterminante der Größen U, V hinsichtlich der unabhängigen Veränderlichen U, W:

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dU} & \frac{dV}{dU} \\ \frac{dU}{dW} & \frac{dV}{dW} \end{vmatrix} = \frac{dV}{dW}$$

ersetzen.

85. In unserem Falle sind also wirklich die Größen (M), die wir kurz durch:

$$u_\mu,\ u_\nu,\ v_\mu,\ v_\nu$$

bezeichnen, Differentialinvarianten. Wir kennen somit acht Differentialinvarianten, nämlich:

$$\text{(N)} \qquad \mu,\ \nu,\ u,\ v,\ u_\mu,\ u_\nu,\ v_\mu,\ v_\nu,$$

deren Ordnung kleiner als vier ist.

Nun aber läßt sich nachweisen, daß es nicht mehr als sieben unabhängige Differentialinvarianten gibt, deren Ordnung kleiner als vier ist.

Wollen wir nämlich alle diese Differentialinvarianten berechnen, so müssen wir zu den früher gefundenen Formeln:

$$\begin{aligned} &\delta x = \xi(x)\delta\tau, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = -\xi' z\delta\tau, \qquad [120 \\ &\delta p = (-2\xi' p - \xi'' z)\delta\tau, \quad \delta q = -\xi' q\delta\tau, \\ &\delta r = (-3\xi' r - 3\xi'' p - \xi''' z)\delta\tau, \\ &\delta s = (-2\xi' s - \xi'' q)\delta\tau, \quad \delta t = -\xi' t\delta\tau \end{aligned}$$

noch die Ausdrücke der Inkremente:

$$\begin{aligned} &\delta\alpha = (-4\xi'\alpha - 6\xi'' r - 4\xi''' p - \xi^{(4)} z)\delta\tau, \\ &\delta\beta = (-3\xi'\beta - 3\xi'' s - \xi''' q)\delta\tau, \\ &\delta\gamma = (-2\xi'\gamma - \xi'' t)\delta\tau, \\ &\delta\delta = -\xi'\delta \cdot \delta\tau \end{aligned}$$

hinzufügen.

Die gesuchten Differentialinvarianten sind Lösungen des vollständigen Systems:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad z\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

$$z\frac{\partial f}{\partial z} + 2p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + 3r\frac{\partial f}{\partial r} + 2s\frac{\partial f}{\partial s} + t\frac{\partial f}{\partial t} + 4\alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} + 3\beta\frac{\partial f}{\partial \beta} + {}$$
$$+ 2\gamma\frac{\partial f}{\partial \gamma} + \delta\frac{\partial f}{\partial \delta} = 0,$$

$$z\frac{\partial f}{\partial p} + 3p\frac{\partial f}{\partial r} + q\frac{\partial f}{\partial s} + 6r\frac{\partial f}{\partial \alpha} + 3s\frac{\partial f}{\partial \beta} + t\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0,$$

$$z\frac{\partial f}{\partial r} + 4p\frac{\partial f}{\partial \alpha} + q\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

das zwölf unabhängige Veränderliche enthält und aus fünf unabhängigen Gleichungen besteht, weil die eine fünfreihige Determinante der zugehörigen Matrix den Wert z^4 besitzt. Hieraus ergibt sich einerseits, daß sich jede invariante Differentialgleichung dritter Ordnung als eine Relation zwischen Differentialinvarianten darstellen läßt, andererseits, daß die Zahl der unabhängigen Differentialinvarianten dritter Ordnung gleich:

$$12 - 5 = 7$$

ist.

Hieraus ziehen wir den Schluß, daß die acht Größen (N) durch eine [121
und nur durch eine identische Relation:

$$W(\mu, \nu, u, v, u_\mu, u_\nu, v_\mu, v_\nu) \equiv 0$$

verbunden sind.

86. Jetzt können wir eine allgemeine Integrationstheorie für alle partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickeln, die unsere Gruppe gestatten.

Liegt in der Tat eine invariante partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vor, so können wir sie nach den früheren Auseinandersetzungen auf die Form:

$$\Omega(\mu, \nu, u, v) = 0$$

bringen. Sodann lösen wir diese Gleichung nach u oder v, etwa nach v auf:

$$v = V(\mu, \nu, u)$$

und berechnen die Differentialquotienten v_μ und v_ν. In dieser Weise gelingt es, aus der identischen Gleichung: $W = 0$ eine Relation von der Form:

$$\Pi(\mu, \nu, u, u_\mu, u_\nu) = 0$$

abzuleiten. Hiermit ist es uns gelungen, die Bestimmung von u als Funktion von μ und ν auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, also auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen.

Es liegt in der Natur der Sache, daß sich über die Integration von $\Pi = 0$ nichts besonderes sagen läßt, da Π eine ganz beliebige Funktion von seinen fünf Argumenten ist. Setzen wir aber voraus, daß die Integration von: $\Pi = 0$ schon geleistet ist, so gestattet uns die zugehörige Integralgleichung:

$$u - U(\mu, \nu) = 0,$$

zusammen mit der vorgelegten Gleichung: $\Omega = 0$, auch die Größe v als Funktion von μ, ν zu berechnen: $v = V(\mu, \nu)$.

Die beiden in dieser Weise gefundenen Gleichungen:

$$u - U(\mu, \nu) = 0, \quad v - V(\mu, \nu) = 0$$

liefern aber nach Substitution der Werte: [122

$$\mu = y, \quad \nu = \frac{q}{z}, \quad u = \frac{zs - pq}{z^2}, \quad v = \frac{t}{z}$$

die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{zs - pq}{z^2} - U\left(y, \frac{q}{z}\right) = 0, \quad \frac{t}{z} - V\left(y, \frac{q}{z}\right) = 0,$$

die gemeinsame Integralflächen haben und sogar ein Involutionssystem zweiter Ordnung bilden. Daher läßt sich die Bestimmung der gemeinsamen Integralflächen (vgl. S. 71—81 [hier S. 336—345]) durch die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen leisten.

Gestattet daher eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y, z die unendliche Gruppe:

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} - \xi' . z \frac{\partial f}{\partial z},$$

so verlangt ihre Integration nur die sukzessive Integration von drei gewöhnlichen simultanen Systemen.

87. Entsprechende Theorien lassen sich entwickeln für beliebige Systeme partieller Differentialgleichungen in x, y, z, die unsere Gruppe gestatten. Wir beschränken uns auf die folgenden einfachen Bemerkungen.

Wir wollen annehmen, daß ein Involutionssystem dritter Ordnung:

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0, \quad F_2 = 0$$

vorliegt, das unsere unendliche Gruppe gestattet. Nach unseren früheren Auseinandersetzungen können wir mit Sicherheit schließen, daß dieses Gleichungssystem auf die Form:

$$\Phi_1(\mu, \nu, u, v, u_\mu, u_\nu, v_\mu, v_\nu) = 0, \quad \Phi_2 = 0$$

gebracht werden kann. Erinnern wir uns nun überdies der identischen Relation: $W = 0$, so sehen wir, daß die beiden Größen u und v als Funktionen von μ und ν durch drei partielle Differentialgleichungen erster [123
Ordnung:

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad W = 0$$

bestimmt sind. Wir finden daher (vgl. S. 82 u. ff. [hier S. 345 ff.]) die Größen u und v als Funktionen von μ und ν durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Sodann behandeln wir die gefundenen Integralgleichungen:

$$u = U(\mu, \nu), \quad v = V(\mu, \nu)$$

wie im vorigen Beispiele.

88. Ist nur eine Gleichung dritter Ordnung vorgelegt, die unsere Gruppe gestattet, etwa die Gleichung:

$$F(x, y, z, \ldots, \gamma, \delta) = 0,$$

so bringen wir sie auf die Form:

$$\Omega(\mu, \nu, u, v, u_\mu, u_\nu, v_\mu, v_\nu) = 0,$$

fügen sodann die Gleichung: $W = 0$ hinzu und müssen nunmehr das Involutionssystem erster Ordnung:

$$\Phi = 0, \quad W = 0$$

mit den beiden unbekannten Funktionen u und v integrieren. Durch zweimalige Differentiation und Elimination von v ersetzen wir dieses Involutionssystem erster Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen durch ein einziges Involutionssystem dritter Ordnung mit der einzigen Funktion u:

$$\Theta_1(\mu, \nu, u, u_\mu, \ldots, u_{\nu\nu\nu}) = 0, \quad \Theta_2 = 0.$$

89. Um das hiermit erhaltene Resultat zu verallgemeinern, stelle ich die folgenden Überlegungen an.

Ein Involutionssystem in den Veränderlichen x, y, z besitzt mehrere charakteristische Zahlen, unter denen aber eine ganz bestimmte, die ich mit ω bezeichne, ohne Vergleich die wichtigste ist. Diese Zahl ω, die ich als die Klasse des Involutionssystems bezeichne, definiere ich folgendermaßen:

Liegt in den Veränderlichen x, y, z ein Involutionssystem m-ter Ordnung vor, so ist die Differenz zwischen der Zahl der Differentialquotienten $(m+q)$-ter Ordnung und der Zahl der durch Differentiation hervorgehenden unabhängigen Differentialgleichungen $(m+q)$-ter Ordnung immer dieselbe, gleichgültig, ob q gleich oder größer als Null ist. Diese Zahl bezeichne ich mit ω und nenne sie die Klasse des Involutionssystems. [124

Benutze ich diese Terminologie, so ergeben die Entwickelungen des Kapitels II, sozusagen unmittelbar, den folgenden Satz:

Theorem. *Wenn die Klasse eines Involutionssystems in den Veränderlichen x, y, z gleich Null oder 1 ist, so läßt sich die Erledigung des Involutionssystems auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen.*

90. Wir können aber jetzt auch noch den folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

Theorem. *Gestattet ein Involutionssystem ω-ter Klasse die unendliche Gruppe:*

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} - \xi' z\frac{\partial f}{\partial z},$$

so läßt es sich immer zurückführen auf ein Involutionssystem $(\omega - 1)$-ter Klasse, verbunden mit einem Involutionssystem erster Klasse.

Nach unseren früheren Auseinandersetzungen gilt genau dasselbe für Involutionssysteme, die die unendliche Gruppe $Z(z)(\partial f : \partial z)$ gestatten. In der Tat: das soeben formulierte Theorem ist nur ein spezieller Fall eines allgemeinen Theorems, das sich auf alle Involutionssysteme in beliebig vielen Veränderlichen und ebenso auf alle unendlichen Gruppen ausdehnen läßt.

In dieser Abhandlung beschränken wir uns aber auf spezielle Fälle dieser allgemeinen Theorie, die wir an anderen Stellen eingehend entwickeln wollen.

91. Betrachten wir jetzt partielle Differentialgleichungen, die die Gruppe:

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

gestatten.

Hier hat die zweimal erweiterte infinitesimale Transformation die Form:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} - \xi' p\frac{\partial f}{\partial p} - \eta' q\frac{\partial f}{\partial q} - (2\xi' r + \xi'' p)\frac{\partial f}{\partial r} -$$
$$- (\xi' + \eta')s\frac{\partial f}{\partial s} - (2\eta' t + \eta'' q)\frac{\partial f}{\partial t}. \qquad [125$$

Es sind daher die Differentialinvarianten zweiter Ordnung die Lösungen des vollständigen Systems:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$
$$p\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \quad q\frac{\partial f}{\partial q} + s\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

das heißt, sie sind Funktionen von:

$$z \quad \text{und:} \quad s : pq.$$

Hieraus schließen wir, daß die invarianten Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die allgemeine Formel:

$$s : pq = \varphi(z)$$

dargestellt werden.

Hier ergeben die auf S. 113 u. ff. [hier S. 371 ff.] entwickelten Methoden die beiden intermediären Integrale:

$$e^{-\int\varphi\,dz}\frac{\partial z}{\partial x} = A'(x), \quad e^{-\int\varphi\,dz}\frac{\partial z}{\partial y} = B'(y),$$

woraus durch Quadratur die allgemeine Integralgleichung:

$$\int e^{-\int\varphi\,dz}\,dz = A(x) + B(y)$$

hervorgeht.

92. Unsere Gruppe hat vier Differentialinvarianten dritter Ordnung, die wir mit:

$$z = \mu, \quad s : pq = \nu, \quad u, \quad v$$

bezeichnen; ferner sieben Invarianten vierter Ordnung. Da nun aber:

$$\mu, \nu, u, v, u_\mu, u_\nu, v_\mu, v_\nu$$

solche Invarianten sind, so besteht eine identische Relation: [126

$$W(\mu, \nu, u, v, u_\mu, u_\nu, v_\mu, v_\nu) \equiv 0.$$

Liegt nun irgend eine invariante Differentialgleichung dritter Ordnung vor, so bringen wir sie zunächst auf die Form:

$$\Omega(\mu, \nu, u, v) = 0$$

und schaffen sodann aus $W = 0$ etwa die Größe v weg. Hierdurch erhalten wir zur Bestimmung von u als Funktion von μ und ν eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Ist diese integriert, so bilden die beiden in dieser Weise erhaltenen Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$u - U(\mu, \nu) = 0, \quad v - V(\mu, \nu) = 0$$

ein Involutionssystem dritter Ordnung, zweiter Klasse.

Um nun eine weitere Reduktion zu erreichen, verwerten wir den Umstand, daß die bekannte Gruppe zwei uns bekannte unendliche Untergruppen enthält, nämlich die Gruppen:

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und:} \quad \eta(y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

die überdies alle beide invariante Untergruppen sind.

Infolgedessen gelingt es uns, sogar auf zwei verschiedene Weisen, unser Involutionssystem zweiter Klasse auf ein System erster Klasse, also auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen. Indem wir uns an dieser Stelle mit diesem Resultate begnügen, gehen wir auf die Frage,

ob die gefundenen gewöhnlichen Differentialgleichungen besondere Vereinfachungen gestatten, gar nicht ein.

93. Durch Weiterführung dieser Betrachtungen erhält man den Satz:

Theorem. *Gestattet ein Involutionssystem n-ter Klasse in x, y, z die unendliche Gruppe:*

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

so läßt es sich zurückführen auf ein Involutionssystem $(n-2)$-ter Klasse und gewöhnliche Differentialgleichungen.

Ähnliche Betrachtungen zeigen, daß dieser Satz auch für solche [127
Involutionssysteme in x, y, z besteht, die die unendliche Gruppe:

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial f}{\partial y} - z(\xi' + \eta')\frac{\partial f}{\partial z}$$

gestatten.

Gestattet andererseits ein Involutionssystem n-ter Klasse in x, y, z die unendliche Gruppe:

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

mit mehreren bekannten invarianten Untergruppen, so läßt sich unser Problem zurückführen auf die Integration eines Involutionssystems $(n-3)$-ter Klasse, und so weiter.

Wie groß die mögliche Erniedrigung ist, beruht eben in jedem Falle auf der Zahl der willkürlichen Funktionen, die in der bekannten unendlichen Gruppe auftreten, präziser gesagt, auf den Klassenzahlen der Definitionsgleichungen der betreffenden Gruppe.

94. Denken wir uns andererseits, daß ein Involutionssystem in x, y, z vorliegt, das eine unbekannte Gruppe von Berührungstransformationen gestattet, so stellt sich zunächst die Frage, wie man diese Gruppe in einfachster Weise bestimmt. Zur allgemeinen Erledigung dieser Frage muß man zuerst alle Gruppen auf kanonische Formen bringen. Meine allgemeinen Theorien gestatten, wie längst von mir angegeben, alle diese Probleme rationell zu erledigen.

Alle Entwickelungen dieser Abhandlung beruhen, explizite oder implizite, auf meiner allgemeinen Transformationstheorie. In meiner nächsten Arbeit, deren Inhalt ich übrigens schon seit längerer Zeit dieser Gesellschaft mitgeteilt habe, versuche ich, die Frage, wie man den Gruppenbegriff in rationeller Weise für die Theorie der Differentialgleichungen verwertet, ganz allgemein zu behandeln. Kann auch davon nicht die Rede sein, diese Frage in definitiver Weise zu erledigen, so wage ich doch zu behaupten, daß meine allgemeinen Resultate die Aufmerksamkeit der Mathematiker verdienen.

95. In meinen Vorlesungen im Wintersemester 1893—1894 illu- [128
strierte ich die Theorien des letzten Kapitels durch einige weitere Beispiele. Zwei unter meinen Zuhörern, nämlich die Herren Beudon und Williams, werden wahrscheinlich versuchen, die von mir skizzierten Theorien, auf die die Jablonowskische Gesellschaft inzwischen die Aufmerksamkeit gelenkt hat, zu verwerten.[1])

---

1) In einer bald erscheinenden Arbeit gebe ich eine ausführlichere Darstellung meiner längst veröffentlichten Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuierliche projektive Gruppe gestatten. Ich sehe mich dazu veranlaßt, da es sich gezeigt hat, daß Mathematiker, die sich für diese Untersuchung interessieren, nicht dazu imstande gewesen sind, einige von mir unterdrückte einfache Rechnungen auf eigene Hand zu reproduzieren. (Vgl. Archiv for Math. . . . Bd. VII, Christiania 1882 [d. Ausg. Bd. V, Abh. VII], sowie Theorie der Transfgr. Bd. III, Leipzig 1893.)

X.

Zur Geometrie einer Mongeschen Gleichung. [1

Leipz. Ber. 1898, Heft I, II, ausgegeben 6. 7. 1898, S. 1, 2. Vorgelegt in der Sitzung vom 10. 1. 1898.

1. Eine Mongesche Gleichung:

$$f(x, y, z, dx : dy : dz) = 0$$

hat immer ∞^∞ viele Integralkurven, und zwischen allen Integralkurven einer bestimmten Mongeschen Gleichung bestehen, wie ich oft hervorgehoben habe, viele Beziehungen, deren Inbegriff als eine Geometrie der Mongeschen Gleichungen aufgefaßt werden kann. Diese Geometrie umfaßt die Kurvengeometrie einer vorgelegten Fläche: $w(x, y, z) = 0$ als speziellen Fall; denn die Kurven dieser Fläche erfüllen sämtlich die lineare Mongesche Gleichung:

$$w_x dx + w_y dy + w_z dz = 0.$$

In meinen Vorlesungen habe ich bei vielen Gelegenheiten gezeigt, daß der Satz von Meusnier in der Geometrie einer Mongesche Gleichung sein Analogon hat. In der folgenden Note werde ich diese wichtige Bemerkung im einzelnen durchführen. Dabei sehe ich aus naheliegenden Gründen von der Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

der Minimalkurven ab.

2. Wir benutzen die Bogenlänge s einer Kurve als unabhängige Veränderliche und setzen:

$$\frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{dy}{ds} = y', \quad \frac{dz}{ds} = z', \quad \frac{d^2x}{ds^2} = x'', \ldots .$$

Sodann erhalten wir durch Differentiation der vorgelegten Gleichung:

$$f(x, y, z; x' : y' : z') = 0$$

die Differentialgleichung:

$$f_{x'} x'' + f_{y'} y'' + f_{z'} z'' + f_x x' + f_y y' + f_z z' = 0, \qquad [2$$

die wir mit der Größe:

$$\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} \cdot \sqrt{f_{x'}^2 + f_{y'}^2 + f_{z'}^2}$$

dividieren. Setzen wir hier noch:

$$\frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = R,$$

$$\frac{f_{x'} x'' + f_{y'} y'' + f_{z'} z''}{\sqrt{f_{x'}^2 + f_{y'}^2 + f_{z'}^2} \cdot \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = \sin \Theta,$$

so erhalten wir unmittelbar die angekündigte Formel:

$$R = -\sin \Theta \cdot \frac{\sqrt{f_{x'}^2 + f_{y'}^2 + f_{z'}^2}}{f_x x' + f_y y' + f_z z'},$$

die ganz dieselbe Form besitzt, wie eine wohlbekannte Formel der Flächentheorie.

3. In dieser Formel ist R der Krümmungsradius einer Integralkurve, Θ ist der Winkel zwischen der Oskulationsebene der Kurve und der Ebene, die den Elementarkegel der Mongeschen Gleichung längs der Kurventangente berührt.

Diese Formel wird illusorisch, wenn:

$$f_x x' + f_y y' + f_z z' = 0$$

ist, das heißt, wenn die Mongesche Gleichung die Form:

$$0 = f \equiv F(x', y', z', yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y)$$

besitzt und also einen Linienkomplex definiert. In diesem Falle ist aber auch $\Theta = 0$, und R hat daher die unbestimmte Form:

$$R = \frac{0}{0}.$$

Selbstverständlich sehen wir von den evidenten analytischen Ausnahmefällen ab. Mit dieser selbstverständlichen Begrenzung dürfen wir sagen, daß die Krümmungsmittelpunkte aller Integralkurven mit einem gemeinsamen Linienelemente auf einem Kreise liegen.

Jedem Linienelemente einer Mongeschen Gleichung: $f = 0$ ist somit ein Kreis zugeordnet.

XI.

Über Berührungstransformationen und Differentialgleichungen. [113

Leipz. Ber. 1898, Heft III, IV, ausgegeben 5. 8. 1898. S. 113—180. Vorgetragen in der Sitzung vom 7. 2. 1898, das Manuskript eingeliefert am 6. 6. 1898.

1. In meinen ersten geometrischen Untersuchungen über Differentialgleichungen, die in den Verhandlungen der Ges. d. Wiss. zu Christiania 1869—1872 skizziert wurden[1]), führte ich mehrere Begriffe ein, die sich später als sehr nützlich gezeigt haben. Ich denke hier in erster Linie an die Begriffe: Element einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit des n-fachen Raumes, Berührungstransformation, charakteristische Kurve und charakteristischer Streifen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, q-dimensionale Integralgebilde einer partiellen Differentialgleichung (erster Ordnung) mit mehr als $q+1$ Veränderlichen, semilineare Differentialgleichung erster Ordnung, Berührungstransformation zweiter und höherer Ordnung.

Ich dehnte diese Untersuchungen auch auf partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme Pfaffscher Gleichungen aus, beschränkte mich aber damals auf ganz knappe Andeutungen, die ich im Laufe der Jahre in gedruckten Schriften nur unvollständig durchgeführt habe.

Wenn ich in neuerer Zeit diese Untersuchungen wieder aufgenommen habe und jetzt beabsichtige, meine alten Ideen im einzelnen durchzuführen und den Mathematikern vorzulegen, so liegt das in erster Linie daran, daß der Wert der Mannigfaltigkeitsbetrachtungen und der synthetischen Räsonnements in den letzten Jahren richtiger als früher beurteilt wird.

2. Schon im Jahre 1872 lenkte ich die Aufmerksamkeit auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$W(x_1, \ldots, x_{n-1}, z, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) = 0,$$

deren ∞^{2n-3} charakteristische Streifen sich derart in Scharen anordnen lassen, daß die Streifen jeder Schar denselben Punktort haben. Hierher

1) [d. Ausg. Bd. I, Abh. IV, IX, XI, XII; Bd. III, Abh. I, II, V.]

gehören in erster Linie die in den p linearen Differentialgleichungen, die [114 ∞^{n-1} charakteristische Kurven haben, unter denen jede für ∞^{n-2} charakteristische Streifen den gemeinsamen Punktort liefert. Die linearen Differentialgleichungen sind aber keineswegs die einzigen, welche die besprochene Eigenschaft haben.

Unter den Gleichungen: $W = 0$, die sämtlich ∞^{2n-3} charakteristische Streifen besitzen, gibt es einige, die ∞^n charakteristische Kurven besitzen, andere mit ∞^{n+1} charakteristischen Kurven, und so weiter. Es ist nun zunächst meine Absicht, eine vollständige Theorie für diese Differentialgleichungen, die ich als quasilinear oder pseudolinear bezeichne, zu entwickeln.

Die Theorie der quasilinearen Differentialgleichungen steht in genauestem Zusammenhange, ja deckt sich gewissermaßen mit der Theorie der Pfaffschen Systeme.

Es hat sich andererseits ergeben, daß jedes System partieller Differentialgleichungen m-ter Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen und abhängigen Veränderlichen sich in gewissem Sinne auf pseudolineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer einzigen unbekannten Funktion zurückführen läßt.

Mit diesem allgemeinen Satze, den ich unserer Gesellschaft im Januar dieses Jahres mitgeteilt habe, steht eine von mir schon im Jahre 1895 angekündigte rationelle Klassifikation aller Integrationsprobleme in Verbindung.

Kapitel I.

Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung in n Veränderlichen und mit ∞^n Charakteristiken.

3. Wir wollen annehmen, daß die Punktkoordinaten:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \text{und:} \quad X_1, X_2, \ldots, X_n$$

zweier n-dimensionaler Räume durch $n-1$ unabhängige Gleichungen:

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,n-1) \tag{1}$$

verbunden sind. Wir setzen dabei ausdrücklich voraus, daß sich aus diesen $n-1$ Gleichungen keine Relation zwischen den x allein und auch keine Relation zwischen den X allein ableiten läßt. Alsdann ist es immer möglich, unser Gleichungssystem nach $n-1$ passend gewählten Größen x, [115 und ebenso nach $n-1$ Größen X aufzulösen.

Deuten wir für einen Augenblick die Größen X als Parameter, die x dagegen fortwährend als laufende Koordinaten des Raumes (x), so bestimmt

unser Gleichungssystem unendlich viele Kurven k im Raume der x, und wir können offenbar sagen, daß es jedem Punkte:

$$X_1 = A_1, \ldots, X_n = A_n$$

des Raumes (X) eine ganz bestimmte Kurve k zuordnet, nämlich die Kurve:

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, A_1, A_2, \ldots, A_n) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,n-1). \tag{2}$$

Dementsprechend dürfen wir sagen, daß unser Gleichungssystem jedem Punkte:

$$x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$$

des Raumes (x) eine ganz bestimmte Kurve K des Raumes (X) zuordnet, die durch die Gleichungen:

$$\varphi_k(a_1, a_2, \ldots, a_n, X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,n-1)$$

definiert wird.

4. Da die Gleichungen (2) der Kurven k gerade n willkürliche Parameter enthalten, so kann die Anzahl der Kurven k nicht größer als ∞^n sein. Und da die Gleichungen (2), wie wir ausdrücklich angenommen haben, nach $n-1$ passend gewählten Parametern aufgelöst werden können, so gibt es mindestens ∞^{n-1} verschiedene Kurven k. Eine analoge Überlegung zeigt uns, daß auch die Zahl der Kurven K höchstens gleich ∞^n und mindestens gleich ∞^{n-1} sein muß.

Von vornherein sind also vier verschiedene Fälle denkbar; wir können aber nachweisen, daß zwei unter diesen vier Fällen nie eintreten können. Präziser gesagt, wir können beweisen, daß die Anzahl der Kurven k immer gleich der Anzahl der Kurven K sein muß.

Ordnen in der Tat unsere Gleichungen (1) den ∞^n Punkten (x) n-fach unendlich viele verschiedene Kurven K zu, so gehen, eben weil die K den Raum (X) ausfüllen sollen, durch jeden Punkt: $X_k = A_k$ einfach unendlich viele Kurven K. Eine jede unter diesen ∞^1 Kurven hat im Raume der (x) einen bestimmten Bildpunkt, und der Ort dieser ∞^1 Bildpunkte ist grade die Kurve k, die dem Punkte: $X_k = A_k$ zugeordnet ist. Wäre [116 nun die Anzahl der Kurven k kleiner als ∞^n, so wäre jede Kurve k unendlich vielen Punkten: $X_k = A_k$ zugeordnet, und dann wäre wiederum jeder Punkt einer k der Bildpunkt von unendlich vielen Kurven K. Hiermit würden wir aber auf Widerspruch geführt, und also zieht die Annahme, daß unser Gleichungssystem in einem Raume ∞^n verschiedene Kurven bestimmt, mit Notwendigkeit nach sich, daß auch im anderen Raume ∞^n verschiedene Kurven auftreten.

Das hiermit erhaltene Resultat gibt den

Satz 1. *Kann das $(n-1)$-gliedrige Gleichungssystem:*

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n) = 0 \qquad (k=1,2,\dots,n-1)$$

in den Veränderlichen:

$$x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n$$

nach $n-1$ Größen x und gleichzeitig nach $n-1$ Größen X aufgelöst werden, so ordnet es jedem Punkte des Raumes (x) und gleichzeitig jedem Punkte (X) eine Kurve im anderen Raume zu. Dabei sind von vornherein zwei und nur zwei wesentlich verschiedene Fälle möglich:

Es ist denkbar, daß den ∞^n Punkten (x) n-fach unendlich viele verschiedene Kurven des Raumes (X) und gleichzeitig den ∞^n Punkten (X) n-fach unendlich viele verschiedene Kurven im Raume (x) zugeordnet sind.

Liegt dieser Fall nicht vor, so besteht in jedem Raume die betreffende Kurvenschar aus ∞^{n-1} Kurven, unter denen jede einfach unendlich vielen Punkten des zweiten Raumes zugeordnet ist.

Der hiermit abgeleitete Satz ist eigentlich nur ein spezieller Fall eines allgemeinen Satzes in unserer analytischen Theorie der Berührungstransformationen. Da wir aber in dieser Abhandlung meistens synthetisch (das heißt, begrifflich) räsonnieren wollen, so erschien es zweckmäßig, eine selbständige Begründung dieses Satzes vorauszuschicken.

5. Im folgenden richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den ersten unter den beiden besprochenen möglichen Fällen. Wir nehmen also an, daß ein Gleichungssystem:

$$(1) \qquad \varphi_k(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\dots,n-1)$$

vorliegt, das den Punkten (x) n-fach unendlich viele verschiedene Kurven K und gleichzeitig den Punkten (X) n-fach unendlich viele verschiedene [117
Kurven k zuordnet, wobei die Kurven jeder Schar eo ipso den betreffenden Raum ausfüllen.

Jede Kurve k hat einfach unendlich viele Linienelemente $x_1, \dots, x_n, dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n$, die durch die Gleichungen (1) zusammen mit den zugehörigen Differentialgleichungen:

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0 \qquad (k=1,2,\dots,n-1)$$

bestimmt werden. Die Schar aller ∞^n Kurven k bestimmt also ∞^{n+1} Linienelemente, die wir mit dem gemeinsamen Symbole l bezeichnen wollen.

Eliminieren wir zwischen den $2n-2$ Gleichungen (1) und (3) die n Größen $X_1, \dots, X_n$, so erhalten wir ein System Mongescher Gleichungen:

$$(4) \qquad f_i(x_1, \dots, x_n, dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n) = 0,$$

das die Schar aller ∞^{n+1} Linienelemente l definiert. Da sich die Gleichungen: $\varphi_k(x, X) = 0$ nach $n-1$ Größen X auflösen lassen, so leuchtet ein, daß unser System Mongescher Gleichungen: $f_i(x, dx) = 0$ höchstens $n-1$ und mindestens $n-2$ unabhängige Gleichungen umfaßt. Und da es nach unseren ausdrücklichen Voraussetzungen ∞^{n+1} verschiedene Linienelemente l gibt, so besteht unser System Mongescher Gleichungen: $f_i(x, dx) = 0$ sicher aus $n-2$ unabhängigen Gleichungen.

Durch genau dieselben Überlegungen erkennen wir, wenn wir die ∞^1 Linienelemente einer Kurve K mit L bezeichnen, daß die ∞^n Kurven K ein $(n-2)$-gliedriges Mongesches System:

$$(5) \qquad F_i(X_1, \dots, X_n, dX_1 : \dots : dX_n) = 0 \qquad (i=1,2,\dots,n-2)$$

erfüllen, das als analytische Definition der ∞^{n+1} Linienelemente L aller ∞^n Kurven K aufgefaßt werden kann.

6. Es ist nun leicht nachzuweisen und für das Folgende sehr wichtig, daß die beiden soeben aufgestellten Mongeschen Systeme noch in anderer Weise begrifflich gedeutet werden können.

Wählen wir in der Tat im Raume (x) zwei unendlich benachbarte Punkte mit den Koordinaten x_i, beziehungsweise $x_i + dx_i$, und stellen wir das Verlangen, daß die beiden Bildkurven dieser Punkte, unter denen die erste durch die Gleichungen:

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\dots,n-1),$$

die benachbarte durch die Gleichungen:

$$\varphi_k(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n, X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (k=1,\dots,n-1)$$ [118

dargestellt wird, einander in einem gemeinsamen Punkte: $X_1, \dots, X_n$ schneiden sollen, so finden wir die hierzu erforderlichen Bedingungsgleichungen, indem wir zwischen den Gleichungen:

$$(6) \qquad \varphi_k(x, X) = 0, \quad \sum_i^{1\dots n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i = 0 \qquad (k=1,\dots,n-1)$$

die n Größen $X_1, \dots, X_n$ eliminieren. In dieser Weise erhalten wir aber grade das Mongesche System (4): denn die Gleichungen (6) sind mit den vereinigten Gleichungen (1) und (3) identisch.

Hiermit ist eine neue begriffliche Deutung des Mongeschen Systems (4) gefunden, und wir können daher den folgenden Satz aufstellen:

Satz 2. *Die ∞^n Kurven k sind Integralkurven eines ganz bestimmten $(n-2)$-gliedrigen Mongeschen Systems:*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n-2). \tag{4}$$

Dieses Gleichungssystem liefert andererseits die analytische Bedingung für das Schneiden zweier benachbarter Kurven K.

7. Die ∞^n Kurven k sind selbstverständlich nicht die einzigen Integralkurven des Mongeschen Systems (4). Stellen wir nämlich eine ganz beliebige Relation:

$$w(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

zwischen den x fest, so gibt es offenbar immer Integralkurven und zwar ∞^{n-2} Integralkurven des Mongeschen Systems (4), die diese endliche Relation erfüllen. Unser Mongesches System hat daher ∞^∞ viele Integralkurven, die wir mit dem gemeinsamen Symbole c bezeichnen wollen.

Greifen wir unter allen diesen Integralkurven c eine bestimmte heraus, die nicht der Schar der k angehört, so wird diese Kurve c in jedem Punkte von einer bestimmten Kurve k berührt, und es läßt sich daher jede Integralkurve des Mongeschen Systems (4) als die Umhüllungskurve von ∞^1 Kurven k auffassen.

Liegt andererseits eine Schar, bestehend aus ∞^1 Kurven k vor, so sind von vornherein zwei wesentlich verschiedene Fälle möglich. Es ist denkbar, daß unter diesen ∞^1 Kurven k zwei benachbarte einander immer schneiden; alsdann haben diese Kurven eine Umhüllungskurve, die [119
selbstverständlich eine Integralkurve des Mongeschen Systems (4) darstellt. Es ist aber auch denkbar, ja es ist sogar der allgemeine Fall, daß zwei benachbarte Kurven k unserer Schar einander nicht schneiden, und dann haben die ∞^1 Kurven k eo ipso keine Umhüllungskurve.

8. Zwischen den Integralkurven c des Systems (4) und den Integralkurven C des Mongeschen Systems (5) können wir, und das sogar in zwei verschiedenen Weisen, ein Entsprechen feststellen.

Ist nämlich eine beliebige Integralkurve c des Systems: $f_i = 0$ vorgelegt, so ist jeder Punkt dieser Kurve der Bildpunkt einer Kurve K, und die hiermit bestimmten ∞^1 Kurven K haben, wie wir wissen, immer eine Umhüllungskurve C, die wir als der Kurve c zugeordnet auffassen können.

Es ist andererseits die gegebene Kurve c die Umhüllungskurve von ∞^1 Kurven k, und die Bildpunkte dieser k erzeugen eine Integralkurve C'

des Systems: $F_i = 0$. Wir wollen zeigen, daß die beiden Integralkurven C und C' identisch sind.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar, wenn wir die angegebenen Konstruktionen analytisch durchführen. Besitzen die Gleichungen der Kurve c die Form:

$$x_k = m_k(x_1) \qquad (k=2,3,\ldots,n),$$

so bestimmt das Gleichungssystem:

$$\varphi_k(x_1, m_2(x_1), \ldots, m_n(x_1), X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1) \tag{7}$$

mit dem Parameter x_1 die ∞^1 Kurven K, deren Bildpunkte auf der Kurve c liegen. Wir wissen, daß diese ∞^1 Kurven K eine Umhüllungskurve C bestimmen, und wir finden diese Umhüllungskurve, indem wir x_1 zwischen den Gleichungen (7) und den entsprechenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \sum_i^{2\ldots n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} m_i'(x_1) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1) \tag{7'}$$

eliminieren. Da zwei benachbarte Kurven K der vorliegenden Kurvenschar einander immer schneiden, gibt diese Elimination nur $n-1$ Relationen zwischen den X, und diese Relationen definieren die gesuchte Umhüllungskurve C.

Wir werden zeigen, daß die Bestimmung der Kurve C' genau die- [120
selben analytischen Operationen verlangt. Die Forderung, daß eine Kurve k die gegebene Integralkurve c mit den Gleichungen:

$$x_2 = m_2(x_1), \ldots, x_n = m_n(x_1)$$

berühren soll, findet ihren analytischen Ausdruck in den Gleichungen:

$$\left|\begin{aligned} &\varphi_k(x_1, m_2(x_1), \ldots, m_n(x_1), X_1, \ldots, X_n) = 0, \\ &\qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \sum \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} m_i'(x_1) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

die mit den vereinigten Gleichungen (7) und (7') identisch sind. Der Ort C' der Bildpunkte (X) aller Kurven k, welche die vorgelegte Kurve c berühren, ist daher wirklich die früher bestimmte Kurve C.

Das hiermit festgestellte Entsprechen zwischen den Integralkurven c des Mongeschen Systems: $f_i = 0$ und den Integralkurven C des Mongeschen Systems: $F_i = 0$ besitzt offenbar die beiden folgenden Eigenschaften:

Durchläuft ein Punkt (x) eine Integralkurve c, so umhüllt die diesem Punkte zugeordnete Kurve K die Bildkurve C der vorgelegten Kurve c. Durchläuft andererseits ein Punkt (X) die Kurve C, so umhüllt die dem Punkte (X) zugeordnete Kurve k die Integralkurve c.

9. Das vorliegende Entsprechen zwischen den Integralkurven c des Mongeschen Systems: $f_i = 0$ und den Integralkurven C des Mongeschen Systems: $F_i = 0$ läßt sich als eine Transformation auffassen, die jedem Linienelemente l des Mongeschen Systems: $f_i = 0$ ein bestimmtes Linienelement L des Mongeschen Systems: $F_i = 0$ zuordnet.

Aus den $2n-2$ Gleichungen (8), die durch die Substitution:

$$x_2 = m_2(x_1), \ldots, x_n = m_n(x_1), \quad x_2' = m_2'(x_1), \ldots, x_n' = m_n'(x_1)$$

die Form:

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} x_2' + \cdots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} x_n' = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

annehmen, lassen sich, wie wir wissen, durch Elimination der X_k nur [121 $n-2$ Relationen zwischen den x_i und den x_k' herleiten, nämlich die Gleichungen:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1, x_2', \ldots, x_n') = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-2).$$

Also bestimmen die obenstehenden Gleichungen die Größen: $X_1, \ldots, X_n$ als Funktionen der x und x':

$$\text{(9)} \qquad X_i = \Psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_2', \ldots, x_n') \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt uns, daß zwei Integralkurven c_1 und c_2 des Mongeschen Systems: $f_i = 0$, die einander berühren, im Raume der X zwei Integralkurven C_1 und C_2 des Mongeschen Systems: $F_i = 0$ zugeordnet sind, die einander schneiden. Wir können aber einen Schritt weiter gehen und beweisen, daß Kurven: $c_1, c_2, c_3, \ldots$ mit einem gemeinsamen Linienelemente l im Raume der X Kurven: $C_1, C_2, C_3, \ldots$ zugeordnet sind, die ebenfalls ein gemeinsames Linienelement L haben.

10. Da nämlich in den vorhergehenden Entwickelungen die kleinen und die großen Buchstaben überall vertauscht werden können, so bestehen auch Gleichungen von der Form:

$$\text{(10)} \qquad x_i = \psi_i(X_1, X_2, \ldots, X_n, X_2', \ldots, X_n') \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Erteilen wir nun den Größen $x_1, \ldots, x_n, x_2', \ldots, x_n'$ bestimmte Zahlenwerte, die selbstverständlich das Mongesche System: $f_i = 0$ erfüllen müssen, anders ausgesprochen: wählen wir ein bestimmtes Linienelement l, so erkennen wir zunächst durch Betrachtung der Relationen:

$$X_i = \Psi_i(x_1, \ldots, x_n, x_2', \ldots, x_n'),$$

daß die entsprechenden Werte der X_i innerhalb passender Bereiche eindeutig bestimmt sind. Tragen wir sodann die hiermit gefundenen Werte der X_i in die $n-2$ Gleichungen: $F_i = 0$ und in eine passend gewählte

Gleichung: $x_i - \psi_i = 0$ ein, so erkennen wir ohne Schwierigkeit, daß auch die Zahlenwerte der Größen: $X_2', \ldots, X_n'$ innerhalb gewisser Bereiche eindeutig bestimmt sind.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, gehörten also zu allen ∞^1 Linienelementen (X, X') eines bestimmten Punktes X von allgemeiner Lage dieselben Werte der n Größen x, so wäre die Beziehung zwischen den beiden Räumen weiter nichts als eine gewöhnliche Punkttransformation. Der [122 Zusammenhang zwischen den Integralkurven c des Mongeschen Systems: $f_i = 0$ und den Integralkurven C des Mongeschen Systems: $F_i = 0$ wird daher vermittelt durch $2n-1$ Gleichungen von der Form:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} X_i = \Psi_i(x_1, \ldots, x_n, x_2', x_3', \ldots, x_n'), \\ X_j' = \Omega_j(x_1, \ldots, x_n, x_2', x_3', \ldots, x_n') \end{cases} \qquad (i=1,\ldots,n;\ j=2,\ldots,n),$$

die eo ipso auch nach den x_i, x_j' aufgelöst werden können.

Das Gleichungssystem (11) bestimmt eine Transformation zwischen den ∞^{n+1} Linienelementen l des Mongeschen Systems: $f_i = 0$ und den ∞^{n+1} Linienelementen L des Mongeschen Systems: $F_i = 0$. Diese Transformation der Linienelemente führt Integralkurven c des Systems: $f_i = 0$ in Integralkurven des Systems: $F_i = 0$ über; und offenbar gehen Integralkurven c mit einem gemeinsamen Linienelemente l in Kurven C mit einem gemeinsamen Linienelemente L über.

11. Wir fassen unsre bisherigen Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammen:

Theorem I. *Ordnen* $n-1$ *vorgelegte Gleichungen:*

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

den ∞^n *Punkten des Raumes* (x) n*-fach unendlich viele verschiedene Kurven* K *zu, die den Raum* (X) *ausfüllen*[1]*, so ordnen diese Gleichungen gleichzeitig den* ∞^n *Punkten* (X) n*-fach unendlich viele Kurven* k *zu, die den Raum* (x) *ausfüllen. Dabei sind die Kurven* k *Integralkurven eines ganz bestimmten* $(n-2)$*-gliedrigen Mongeschen Systems:*

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-2),$$

1) Die im Texte gemachte Annahme, daß die Kurven K den Raum $X_1, \ldots, X_n$ ausfüllen, deckt sich damit, daß die Gleichungen: $\varphi_k = 0$ nach $n-1$ Größen x aufgelöst werden können. Und die Annahme, daß es ∞^n verschiedene Kurven K gibt, zieht nach sich, daß die x durch keine Relation gebunden sind, daß also das Gleichungssystem: $\varphi_k = 0$ auch nach $n-1$ gewissen X aufgelöst werden kann.

während die ∞^n Kurven K ein anderes Mongesches System:

$$F_i(X_1, \ldots, X_n, dX_1 : dX_2 : \cdots : dX_n) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-2)$$

bestimmen. [123

Unsere $n-1$ Gleichungen: $\varphi_k = 0$ definieren eine Transformation zwischen den ∞^{n+1} Linienelementen l des Systems: $f_i = 0$ und den ∞^{n+1} Linienelementen L des Systems: $F_i = 0$. Diese Transformation zwischen den Linienelementen l und L stellt gleichzeitig ein Entsprechen zwischen den Integralkurven c des Systems: $f_i = 0$ und den Integralkurven C des Systems: $F_i = 0$ fest. Und zwar können wir diese Linienelementtransformation insofern als eine Berührungstransformation auffassen, wie Integralkurven c, die einander in einem gemeinsamen Punkte berühren, in Kurven C übergehen, die in derselben Beziehung zu einander stehen.

12. Eine Schar, bestehend aus ∞^1 Integralkurven c des Systems: $f_i = 0$, erzeugt eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit m_2 des Raumes x. Die ∞^1 zugehörigen Bildkurven C erzeugen ebenso eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit M_2, die dem Raume X angehört.

Hierbei ist nun aber wohl zu bemerken, daß, sobald $n > 3$ ist, keineswegs jede zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit des Raumes x von ∞^1 Integralkurven c des Mongeschen Systems: $f_i = 0$ erzeugt wird. Zwischen zweidimensionalen (und überhaupt zwischen q-dimensionalen) Punktmannigfaltigkeiten der beiden Räume, die von Integralkurven des zugehörigen Mongeschen Systems erzeugt sind, stellt [dagegen] unsere Transformation der Linienelemente eo ipso eine Beziehung fest, die im allgemeinen als eine endlichdeutige bezeichnet werden kann.

Selbstverständlich hat diese Regel ihre Ausnahmen. Liegt zum Beispiel im Raume (x) eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit vor, die von ∞^1 Kurven k erzeugt wird, so ist die zugeordnete Punktfigur im Raume (X) nicht zweidimensional, sondern eindimensional. Mit diesem besondern Falle werden wir uns später beschäftigen.

Alle zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten m_2, die von ∞^1 Integralkurven c des Systems: $f_i = 0$ erzeugt sind, können als Integralmannigfaltigkeiten eines Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und $n-2$ abhängigen Veränderlichen definiert werden.

Jedes Linienelement l des Raumes $x_1, \ldots, x_n$ liegt [nämlich] auf ∞^{n-2} zweidimensionalen Elementen. Es gibt daher:

$$\infty^{n+1} \cdot \infty^{n-2} = \infty^{2n-1} \qquad [124$$

zweidimensionale Elemente, die ein Linienelement l enthalten. Der n-fache Raum enthält aber im ganzen ∞^{3n-4} zweidimensionale Elemente. In dieser Weise ergibt sich, daß die Mannigfaltigkeiten m_2 des Textes, die ja grade dadurch charakterisiert sind, daß ihre zweidimensionalen Elemente jedesmal ein Linienelement l enthalten, durch:

$$3n - 4 - (2n - 1) = n - 3$$

partielle Differentialgleichungen erster Ordnung vollständig definiert sind.

Selbstverständlich können ebenso alle zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten M_2 des Raumes (X), die von ∞^1 Integralkurven C des Systems: $F_i = 0$ erzeugt sind, in ähnlicher Weise definiert werden.

Ist zum Beispiel $n = 3$, so wird $n - 3 = 0$, und wirklich sind in diesem Falle alle Flächen von Integralkurven erzeugt.

Unsere Transformation (11) zwischen den Linienelementen l und L läßt sich daher auch als eine Transformation auffassen, die ein gewisses System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und $n-2$ abhängigen Veränderlichen in ein ebensolches System partieller Differentialgleichungen überführt.

13. Wir bemerkten schon früher, daß man in ähnlicher Weise überhaupt zwischen q-dimensionalen Punktmannigfaltigkeiten unserer Räume die von Integralkurven des betreffenden Mongeschen Systems erzeugt sind, eine Beziehung feststellen kann. Ist dabei $q < n - 1$, so erhält man jedesmal eine Beziehung zwischen zwei Systemen partieller Differentialgleichungen.

Eine $(n-1)$-dimensionale Punktmannigfaltigkeit des Raumes (x) oder (X) ist eo ipso immer von Integralkurven des zugehörigen Mongeschen Systems erzeugt. Daher begründet das Entsprechen zwischen den Linienelementen l und L unmittelbar eine Beziehung, und zwar eine Berührungsbeziehung, zwischen allen $(n-1)$-dimensionalen Punktmannigfaltigkeiten unserer beiden Räume. Aus dieser Bemerkung fließt, sozusagen unmittelbar, eine einfache, synthetische Begründung meines allgemeinen Satzes, daß ein Gleichungssystem: $\varphi_k = 0$, das unsere Bedingungen erfüllt, immer eine Berührungstransformation bestimmt.

Auf diese allgemeine Theorie, die wir an anderen Stellen ausführlich, wenngleich in analytischer Form, dargestellt haben, brauchen wir [125 bei dieser Gelegenheit nicht weiter einzugehen. Uns interessieren hier diejenigen *Gebilde, die bei unserer Berührungstransformation eine spezielle oder gar singuläre Rolle spielen*. Durch Betrachtung dieser Gebilde erkennen wir unter anderm, daß der Fall, daß unter den beiden *Monge*schen Systemen: $f_i = 0$ und: $F_i = 0$ das eine oder alle beide aus lauter *linearen* Gleichungen in den Differentialen bestehen, ein ganz besonderes Interesse darbietet. Mit diesem speziellen Falle werden wir uns später eingehend beschäftigen.

14. Durchläuft ein Punkt (x) eine Integralkurve c des Systems: $f_i = 0$, so umhüllt die zugeordnete Kurve K, wie wir wissen, eine Integralkurve C des Systems: $F_i = 0$. Gleichzeitig aber beschreibt diese zugeordnete Kurve K eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit M_2 des Raumes (X). Zu jeder Integralkurve c des *Monge*schen Systems: $f_i = 0$ gehört somit eine bestimmte zweidimensionale Mannigfaltigkeit M_2, und da es ∞^n viele Kurven c gibt, so ist auch die Zahl der Mannigfaltigkeiten M_2 gleich ∞^n.

Alle in dieser Weise konstruierten Punktmannigfaltigkeiten M_2 haben eine gemeinsame Erzeugung: sie sind ja sämtlich von ∞^1 Kurven K erzeugt; und überdies wissen wir, daß je zwei benachbarte Kurven K einer M_2 einander schneiden.

Es ist nicht schwer, zu erkennen, daß sich alle M_2 als die Integralgebilde eines Systems partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen und $n-2$ abhängigen Veränderlichen definieren lassen. Indem wir dies beweisen, werden wir überdies finden, daß dieses System partieller Differentialgleichungen im allgemeinen nicht nur aus Gleichungen *erster* Ordnung besteht, sondern daß es auch Gleichungen *zweiter* Ordnung umfaßt. Es ergibt sich aber, daß dieses Gleichungssystem in einem besonderen Falle, wenn nämlich das *Monge*sche System: $f_i = 0$ aus lauter *linearen* Gleichungen besteht, nur partielle Differentialgleichungen *erster* Ordnung umfaßt.

15. Im n-fachen Raume mögen zwei benachbarte, sonst aber beliebige Kurven Σ und Σ' vorgelegt sein. Dann gibt es ∞^n viele zweidimensionale Punktmannigfaltigkeiten, welche diese beiden Kurven enthalten, und zwei beliebige derartige Mannigfaltigkeiten berühren einander immer nach der Kurve Σ. Wir wollen sagen, daß die beiden benach- [126
barten Kurven einen *Streifen* bestimmen, und daß die besprochenen zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten diesen Streifen enthalten.

Betrachten wir insbesondere alle ∞^n Kurven K und greifen unter ihnen zwei benachbarte heraus, so bekommen wir einen Streifen, den wir

beiläufig mit dem Symbole R_2 bezeichnen wollen. Eine einfache Abzählung zeigt uns, daß es:

$$\infty^n \cdot \infty^{n-1} = \infty^{2n-1}$$

derartige Streifen R_2 gibt.

Uns interessieren besonders solche Streifen R_2, die von *zwei einander schneidenden* benachbarten Kurven K begrenzt werden. Da jede K in jedem Punkte nur von *einer* benachbarten K durchschnitten wird, so gibt es entschieden nicht mehr als ∞^{n+1} derartige Streifen — wir bezeichnen sie mit dem Symbole S_2 —, die von zwei benachbarten *einander schneidenden* Kurven K begrenzt werden.

Immerhin ist es denkbar, daß die Zahl der Streifen S_2 kleiner als ∞^{n+1} werden kann. Dies wird eintreten, wenn die ∞^1 Streifen, die von einer *bestimmten* K und [je] einer benachbarten, [diese schneidenden] K definiert werden, nicht unter einander verschieden sind. In diesem besonderen Falle gibt es nicht ∞^{n+1}, sondern nur ∞^n Streifen S_2. Dieser Fall tritt, wie wir später zeigen, wirklich ein, wenn die Gleichungen des *Monge*schen Systems: $f_i = 0$ sämtlich auf die *lineare* Form gebracht werden können, anders ausgesprochen, *wenn das Monge*sche *System*: $f_i = 0$ *ein Pfaffsches System ist*.

16. Wir wollen bis auf weiteres:

$$X_1 = X,\ X_2 = Y,\ X_3 = Z_1, \ldots, X_n = Z_{n-2}$$

setzen; dann wird eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit durch $n-2$ Gleichungen:

$$Z_1 = \Omega_1(X, Y), \ldots, Z_{n-2} = \Omega_{n-2}(X, Y)$$

dargestellt. Für die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Z_k nach X und Y führen wir die gewöhnlichen Bezeichnungen:

$$\frac{\partial Z_k}{\partial X} = P_k,\ \frac{\partial Z_k}{\partial Y} = Q_k$$

ein. Jedes Wertsystem:

$$X, Y, Z_1, \ldots, Z_{n-2}, P_1, \ldots, P_{n-2}, Q_1, \ldots, Q_{n-2}$$

bezeichnen wir, wie in älteren Arbeiten, als ein *Element der be-* [127
treffenden zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit; und für derartige Elemente wollen wir das Symbol E_2 benutzen. Dabei sagen wir, daß *zwei benachbarte Elemente* E_2 mit den Koordinaten:

$$X, Y, Z_k, P_k, Q_k \quad \text{und:} \quad X + dX, Y + dY, Z_k + dZ_k, P_k + dP_k, Q_k + dQ_k$$

vereinigt liegen, wenn die Bedingungsgleichungen:

$$dZ_k - P_k dX - Q_k dY = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-2)$$

erfüllt sind, anders ausgesprochen, wenn die beiden benachbarten Elemente derselben zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit angehören.

17. Jeder Streifen R_2 enthält ∞^1 Elemente E_2, unter denen zwei benachbarte immer vereinigt liegen. Betrachten wir überhaupt alle ∞^{2n-1} Streifen R_2, die von zwei beliebigen benachbarten Kurven K bestimmt werden, so ist die Zahl aller Elemente E_2, die irgend einem Streifen R_2 angehören, scheinbar gleich:

$$\infty^{2n-1} \cdot \infty^1 = \infty^{2n};$$

eine einfache Überlegung zeigt aber, daß hierbei jedes Element E_2 unendlich oft auftritt, und daß daher faktisch nur ∞^{2n-1} derartige Elemente E_2 vorhanden sind.

Nun aber gibt es im n-fachen Raum offenbar ∞^{3n-4} zweidimensionale Elemente:

$$X, Y, Z_1, \ldots, Z_{n-2}, P_1, \ldots, P_{n-2}, Q_1, \ldots, Q_{n-2}.$$

Es ergibt sich daher, daß alle zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten:

$$Z_1 = \Omega_1(X, Y), \ldots, Z_{2n-2} = \Omega_{2n-2}(X, Y),$$

die einfach unendlich viele Integralkurven K des Mongeschen Systems: $F_i = 0$ enthalten:

$$3n - 4 - (2n - 1) = n - 3$$

unabhängige partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\psi_k(X, Y, Z_1, \ldots, Z_{n-2}, P_1, \ldots, P_{n-2}, Q_1, \ldots, Q_{n-2}) = 0$$

befriedigen.

Hiermit sind aber diese zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten keineswegs vollständig definiert.[1]) Setzen wir in der Tat $n = 3$, so ist $n - 3 = 0$, [128 und daher erfüllen in diesem Falle die betreffenden Mannigfaltigkeiten, die faktisch Flächen des dreifachen Raumes darstellen, gar keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Wenn aber im dreifachen Raume eine Kurvenschar, bestehend aus ∞^3 Kurven, die den Raum ausfüllen, vorliegt, so lassen sich alle Flächen, die von ∞^1 Kurven dieser Schar er-

1) Vergleicht man die Entwickelungen des Textes mit den auf S. 124 [hier S. 397] angestellten Betrachtungen, so erkennt man, daß die im Texte aufgestellten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nur aussagen, daß die betreffenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten jedesmal von ∞^1 Integralkurven des Mongeschen Systems: $F_i = 0$ erzeugt sind.

zeugt sind, als die Integralflächen einer einzigen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung charakterisieren.

Analoge Überlegungen, die wir aber nicht durchzuführen brauchen, zeigen, daß im n-fachen Raume $X, Y, Z_1, \ldots, Z_{n-2}$ alle M_2, die ∞^1 Streifen R_2 enthalten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die von ∞^1 Kurven K erzeugt sind, dadurch vollständig definiert sind, daß sie $n - 3$ partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und gewisse leicht angebbare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung befriedigen.

18. Unter den zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten M_2, die ∞^1 Kurven K enthalten, interessieren uns, wie wir schon früher bemerkten, ganz besonders diejenigen Mannigfaltigkeiten M_2, deren ∞^1 Kurven K eine Umhüllungskurve haben, anders ausgesprochen, diejenigen zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten M_2, deren jede von ∞^1 Streifen S_2 erzeugt wird.

Schon früher erkannten wir, daß es im allgemeinen ∞^{n+1} Streifen S_2 gibt, deren jeder ∞^1 Elemente X, Y, Z_k, P_k, Q_k enthält. Die Schar aller derartigen Elemente, die einer M_2 angehören, umfaßt daher im allgemeinen ∞^{n+2} Elemente. Auf der anderen Seite enthält der Raum (X) ∞^{3n-4} zweidimensionale Elemente. Also befriedigen die Mannigfaltigkeiten M_2, die ∞^1 Streifen S_2 enthalten, im allgemeinen $2n - 6$ und höchstens $2n - 5$ partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Phi_k(X, Y, Z_1, \ldots, Z_{n-2}, P_1, \ldots, P_{n-2}, Q_1, \ldots, Q_{n-2}) = 0.$$

Es ist leicht, durch Betrachtung eines einfachen Beispiels, nachzuweisen, daß diese Gleichungen erster Ordnung jedenfalls nicht immer die Mannigfaltigkeiten M_2 vollständig definieren. Es sei in der Tat $n = 3$; dabei setzen wir ausdrücklich voraus, daß weder die Kurven k noch die Kurven K eine Pfaffsche Gleichung erfüllen. Alsdann gibt es (vgl. zum Beispiel Leipziger Berichte, 1897, S. 724)[1]) vierfach unendlich viele Streifen S_2, deren jeder einfach unendlich viele Elemente E_2 enthält. Die Elemente E_2 der Mannigfaltigkeiten M_2 erfüllen also gar keine partielle [129 Differentialgleichung erster Ordnung. Und in der Tat ist ja auch im vorliegenden Falle die früher bestimmte Anzahl:

$$2n - 6$$

der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung: $\Phi_k = 0$ gleich Null.

Im vorliegenden Falle erfüllen die Flächen M_2, wie soeben hervorgehoben, keine Gleichungen erster Ordnung, dagegen befriedigen sie zwei verschiedene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, unter

1) [d. Ausg. Bd. II, Abh. XV, § 2, nach Theorem IV.]

denen die eine ausdrückt, daß die Flächen M_2 von Kurven K erzeugt sind, während die andere aussagt, daß unter den erzeugenden Kurven K zwei benachbarte einander immer schneiden. Im vorliegenden Falle werden also die Mannigfaltigkeiten M_2 durch zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung definiert.

Hiermit ist nachgewiesen, daß im n-fachen Raume $X, Y, Z_1, \ldots, Z_{n-2}$ die Mannigfaltigkeiten, die von ∞^1 Streifen S_2 erzeugt sind, jedenfalls nicht immer durch ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung definiert werden können. Es wäre leicht, überdies zu beweisen, daß auch für $n > 3$ die Punktmannigfaltigkeiten M_2 immer als die Integralgebilde eines Systems partieller Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung definiert werden können. Für uns ist es aber nicht notwendig, hierauf ausführlich einzugehen.

19. Ist $n = 3$, und ist die Mongesche Gleichung:

$$f(x, y, z, dx : dy : dz) = 0$$

linear in den Differentialen dx, dy, dz, besitzt sie also die Pfaffsche Form:

$$0 = f \equiv A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

während die Mongesche Gleichung:

$$F(X, Y, Z, dX : dY : dZ) = 0$$

nicht linear ist, dann gibt es (vgl. Leipziger Berichte, 1897, S. 722)[1]) nicht ∞^4, sondern nur ∞^3 Streifen S_2. Die Elemente aller Flächen M_2 erfüllen in diesem Falle eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Phi(X, Y, Z, P, Q) = 0,$$

und die Flächen M_2 lassen sich gradezu als die Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichung erster Ordnung definieren.

Diese Theorie, deren Ursprung bis auf Lagrange und Monge [130
zurückgeht, wenn sie gleich zuerst in meinen geometrischen Arbeiten zum Abschluß gebracht worden ist, können wir jetzt, wie früher von uns angekündigt wurde, auf n Dimensionen ausdehnen. Zu diesem Zwecke wollen wir an passender Stelle die spezielle Annahme einführen, daß das Mongesche System: $f_i = 0$ aus lauter linearen Gleichungen besteht, anders ausgedrückt, daß unser System: $f_i = 0$ ein Pfaffsches System ist. Wir beweisen, daß in diesem speziellen Falle die Zahl der Streifen S_2 nicht gleich ∞^{n+1}, sondern gleich:

$$\infty^n$$

1) [a. a. O., Satz 3.]

ist. Hieraus schließen wir, daß in diesem Falle die zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten M_2 nicht $2n - 6$, sondern:

$$2n - 5$$

partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Phi_k(X, Y, Z_1, \ldots, Z_{n-2}, P_1, \ldots, Q_{n-2}) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 2n-5)$$

erfüllen, und noch mehr: wir erkennen, daß die M_2 dadurch vollständig bestimmt sind, daß sie alle Gleichungen: $\Phi_k = 0$ befriedigen.

20. Um die angekündigte Theorie in exakter Weise begründen zu können, wollen wir das früher besprochene Entsprechen zwischen den ∞^{n+1} Linienelementen l des Raumes (x) und den ∞^{n+1} Linienelementen L des Raumes (X) genauer untersuchen; und dabei machen wir zunächst keine speziellen Voraussetzungen über die Form der beiden Mongeschen Systeme: $f_i = 0$ und: $F_i = 0$.

Wir betrachten zwei zugeordnete Linienelemente l und L; wir bezeichnen die zu l benachbarten Linienelemente des Mongeschen Systems: $f_i = 0$ mit l', und die entsprechenden Linienelemente im Raume (X) mit L'. Es möge ferner der Punkt des Elementes l mit p, der Punkt eines Elementes l' mit p', und dementsprechend die Punkte der Elemente L und L' mit P und P' bezeichnet werden. Betrachten wir nun das Gebiet aller zu p benachbarten Punkte, so gehört zu jedem Punkte p' dieses infinitesimalen Gebietes nur ein zu l benachbartes Linienelement l', wohlbemerkt, wenn von infinitesimalen Größen zweiter Ordnung abgesehen wird. Dementsprechend gehört zu jedem Punkte P' in der Umgebung von P nur ein zu L benachbartes Linienelement L'.

Unsere Transformation zwischen den Linienelementen l' und L' [131
bestimmt somit ein Entsprechen zwischen den Punkten p', die in der Umgebung des Punktes p liegen, und den Punkten P', die der Umgebung des Punktes P angehören. Und das hiermit festgestellte Entsprechen zwischen den infinitesimalen Punktgebieten p' und P' ist eo ipso projektiv.

Die hiermit definierte projektive Transformation zwischen den beiden infinitesimalen Punktgebieten p' und P' ist aber keine reguläre, sondern eine ausgeartete Transformation. Geht man nämlich von dem Punkte p des Linienelementes l zu einem benachbarten Punkte p' über, der auf der Geraden des Linienelementes l gelegen ist, anders ausgesprochen, setzt man voraus, daß die beiden Linienelemente l und l' vereinigt liegen, so fallen die beiden Punkte P und P' zusammen.

21. Um diese Schwierigkeit zu bewältigen, wollen wir aus dem infinitesimalen n-dimensionalen Punktgebiete p' ein kleineres Punktgebiet π' ausscheiden, das infinitesimal, eben und $(n-1)$-dimensional ist, und im übrigen nur der Beschränkung unterworfen ist, daß es den Punkt p, nicht aber das Linienelement l enthalten darf. Es liegt nun auf der Hand, daß zwei verschiedene Punkte π' immer zwei verschiedene Bildpunkte Π' in der Umgebung des Punktes P haben werden. Also ist auch das infinitesimale Punktgebiet Π' eben und $(n-1)$-dimensional, und zwischen den beiden infinitesimalen ebenen und $(n-1)$-dimensionalen Punktgebieten π' und Π' besteht eo ipso eine projektive Beziehung, die nicht ausgeartet, sondern regulär ist. Wir fügen ausdrücklich hinzu, daß das $(n-1)$-dimensionale Punktgebiet Π' das Linienelement L nicht enthalten kann, weil das zugeordnete Gebiet des Raumes (x) sonst nur $(n-2)$-dimensional wäre.

Der hiermit abgeleitete Satz gibt uns eine feste Grundlage für die folgenden Entwickelungen dieses Kapitels. In dieser Weise ergibt sich in erster Linie die für das Folgende fundamentale Bemerkung, daß drei benachbarten und getrennten Linienelementen[1] l, l' und l'', die in demselben zweidimensionalen Elemente e_2 enthalten sind, im Raume der X drei getrennte Linienelemente L, L' und L'' zugeordnet sind, die ebenfalls in einem zweidimensionalen Elemente E_2 enthalten sind. Hieraus folgt unmittelbar, daß drei Ele- [132 menten: l, l' und l'', die nicht in einem zweidimensionalen Elemente e_2 enthalten sind, im anderen Raume drei Linienelemente L, L' und L'' zugeordnet sind, die auch nicht in einem zweidimensionalen Elemente enthalten sind.

Wir fassen diese Tatsachen zusammen, indem wir sagen, daß die vorliegenden Beziehungen zwischen den Linienelementen l und L der beiden Räume unmittelbar ein Entsprechen zwischen allen zweidimensionalen Elementen e_2, die ein Linienelement l enthalten, und allen Elementen E_2, die die entsprechenden Linienelemente L enthalten, liefert.

Es wird sich aber zeigen, daß dieses Entsprechen unter Umständen unendlichdeutig sein kann.

22. Im Raume (x) nehmen wir zwei unendlich benachbarte Punkte p und p', deren Koordinaten die Werte x_k und $x_k + dx_k$ haben mögen; diesen Punkten sind im anderen Raume zwei benachbarte Kurven K und

1) Um die Sprache zu erleichtern, erlaube ich mir, benachbarte Linienelemente, die nicht vereinigt liegen, als getrennt zu bezeichnen.

K' zugeordnet, und diese Kurven schneiden einander, wenn, wie wir annehmen wollen, die Gleichungen:

$$0 = f_i(x_1, \ldots, x_n, dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n) \qquad (i = 1, \ldots, n-2)$$

sämtlich erfüllt sind, anders ausgesprochen, wenn das Linienelement pp' ein Element l ist.

Die beiden benachbarten, einander schneidenden Kurven K und K' definieren einen Elementstreifen KK' mit einfach unendlichen vielen Elementen E_2.

Wir wollen die zugeordneten zweidimensionalen Elemente e_2 des Raumes (x) bestimmen.

Durch den Punkt p gehen ∞^1 Linienelemente l, und die zugeordneten Linienelemente L sind grade die Elemente der Kurve K, deren Bildpunkt p ist. Dementsprechend sind die Linienelemente L' der Kurve K' den ∞^1 Linienlementen l des Punktes p' zugeordnet. Lassen wir insbesondere l und l' benachbarte Linienelemente bezeichnen, so sind auch die zugeordneten Linienelemente L und L' unendlich benachbart. Alsdann bestimmen l und l' ein zweidimensionales Element e_2, und ebenso gehören L und L' einem zweidimensionalen Elemente an, und zwar einem Elemente E_2 des Streifens KK'. Den ∞^1 Elementen des Streifens KK' sind somit im Raume (x) ∞^1 zweidimensionale Elemente zugeordnet, deren jedes das Linienelement pp' und gleichzeitig ein gewisses anderes durch p gehendes Linienelement l enthält.

23. Hier zeigt es sich nun deutlich, daß der Fall, daß unser [133 Mongesches System:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, dx_1 : \cdots : dx_n) = 0$$

aus lauter linearen Gleichungen besteht, eine besondere Rolle spielt. In diesem Falle bilden nämlich alle durch p gehenden Linienelemente l ein ebenes Büschel, zu dem auch das Element pp' gehört, und es gibt daher nur ein zweidimensionales Element ll', obgleich ∞^1 Linienelemente l durch den Punkt p gehen.

Wir notieren dieses erste Resultat als Satz:

Theorem II. *Besteht das Mongesche System: $f_i(x, dx) = 0$ aus lauter linearen Gleichungen, und bilden infolgedessen alle ∞^1 durch einen Punkt p gehenden Linienelemente l ein ebenes Büschel, so haben die ∞^1 zweidimensionalen Elemente E_2 eines Streifens, der von zwei benachbarten, einander schneidenden Kurven K und K' gebildet wird, im Raume der (x) nur ein zugeordnetes zweidimensionales Element, dasjenige nämlich, das* *den Bildpunkt p der Kurve K und alle durch p hindurchgehenden Linienelemente l enthält.*

Besitzt dagegen das Mongesche System: $f_i = 0$ nicht die Pfaffsche Form, so haben die ∞^1 zweidimensionalen Elemente E_2 eines Streifens KK' immer verschiedene zugeordnete zweidimensionale Elemente im Raume (x).

24. Eine Kurve K wird in jedem Punkte von einer benachbarten Kurve K' geschnitten; daher gehört eine Kurve K im allgemeinen einfach unendlich vielen verschiedenen zweidimensionalen Streifen KK' an. Besitzt indes das Mongesche System: $f_i = 0$ zufälligerweise die Pfaffsche Form, so sind diese ∞^1 Streifen nicht wesentlich verschieden, weil zwei derartige Streifen, wie wir jetzt zeigen werden, genau dieselben zweidimensionalen Elemente E_2 enthalten.

Zum Beweis stellen wir die folgenden Überlegungen an. Wir wählen zwei zum Punkte p benachbarte Punkte p' und p'', und setzen dabei voraus, daß sowohl das Linienelement pp' wie das Linienelement pp'' die Pfaffschen Gleichungen: $f_i = 0$ befriedigt. Diese drei Punkte sind die Bildpunkte dreier Kurven K, K' und K'', unter denen sowohl K', wie K'' die Kurve K schneidet.

Es ist nun unsere Behauptung, daß die beiden Streifen KK' und KK'' dieselben ∞^1 zweidimensionalen Elemente enthalten. Ziehen [134 wir in der Tat durch p ein beliebiges Linienelement l und durch p', beziehungsweise p'' das benachbarte Linienelement l', beziehungsweise l'', so schließen wir daraus, daß die drei getrennten Linienelemente l, l' und l'' in einem gemeinsamen zweidimensionalen Elemente e_2 gelegen sind, daß auch die drei entsprechenden Linienelemente L, L' und L'' im Raume (X) in demselben zweidimensionalen Elemente E_2 enthalten sind. Nun aber gehört das zweidimensionale Element LL' dem Streifen KK' an, und dementsprechend gehört das zweidimensionale Element LL'' dem Streifen KK'' an. Und da LL' ein beliebiges Element des Streifen KK' darstellen kann, erkennen wir, daß die beiden Streifen KK' und KK'' wirklich dieselben zweidimensionalen Elemente enthalten.

Satz 3. *Besteht das Mongesche System:*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, dx_1 : \cdots : dx_n) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-2)$$

der ∞^n Kurven k aus lauter Gleichungen, die in den Differentialen dx linear sind, so wird allerdings jede Kurve K, wie im allgemeinen Falle, von ∞^1 verschiedenen benachbarten Kurven K' geschnitten; der Elementstreifen KK' bleibt aber immer derselbe, welche unter diesen zu K benachbarten Kurven K' man auch wählt, und es gehört daher jede Kurve K nur einem derartigen Streifen an.

25. Es ist nicht schwer, das hiermit erhaltene wichtige Resultat zu vervollständigen.

Wir wollen annehmen, daß ein vorgelegtes Gleichungssystem:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

den ∞^n Punkten (x) n-fach unendlich viele Kurven K im Raume (X) zuordnet, und daß es ebenso den ∞^n Punkten (X) n-fach unendlich viele Kurven k des Raumes (x) zuordnet; wir setzen ferner voraus, daß wir immer denselben zweidimensionalen Streifen KK' erhalten, wenn wir eine bestimmte Kurve K mit einer beliebigen, die Kurve K schneidenden, benachbarten Kurve K' verbinden. Wir behaupten, daß in einem solchen Falle das Mongesche System:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, dx_1 : \cdots : dx_n) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-2)$$

der Kurven k aus lauter Gleichungen besteht, die in den Differentialen dx linear sind.

Es möge in der Tat die Kurve K sowohl von der benachbarten Kurve K', wie von der benachbarten Kurve K'' geschnitten werden. Ist dann [135 L ein beliebiges Linienelement der Kurve K, und ist L', beziehungsweise L'' das benachbarte Linienelement der Kurve K', beziehungsweise K'', so müssen die drei Linienelemente L, L' und L'' in demselben zweidimensionalen Elemente E_2 enthalten sein. Sind nun p, p' und p'' die Bildpunkte der Kurven K, K', beziehungsweise K'', sind andererseits l, l' und l'' den Linienelementen L, L', beziehungsweise L'' zugeordnet, so müssen auch die drei Linienelemente l, l' und l'' in demselben zweidimensionalen Elemente e_2 enthalten sein. Und dieses Element e_2 ist durch die Lage der drei Punkte p, p', p'' vollständig bestimmt.

Nun aber bezeichnet l ein beliebiges unter den ∞^1 durch p gehenden Linienelementen, die das Mongesche System: $f_i = 0$ befriedigen. Halten wir die drei Punkte p, p' und p'' fest, variieren dagegen das Linienelement l, so erkennen wir, daß unsere ursprüngliche Forderung nur dann erfüllt ist, wenn alle ∞^1 Linienelemente l, die durch denselben Punkt p gehen, ein ebenes Büschel bilden, das heißt, wenn das Mongesche System: $f_i = 0$ ein Pfaffsches System ist.

26. Hiermit ist das folgende Theorem erwiesen:

Theorem III. *Ordnet das $(n-1)$-gliedrige Gleichungssystem:*

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

den ∞^n *Punkten* (x) *n-fach unendlich viele Kurven* K, *und gleichzeitig den* ∞^n *Punkten* (X) *n-fach unendlich viele Kurven* k *zu, so wird jede Kurve* K *von* ∞^1 *benachbarten Kurven* K' *geschnitten, und es gehören daher im allgemeinen zu jeder Kurve* K *einfach unendlich viele zweidimensionale Streifen* KK'. *Ausnahmsweise können diese* ∞^1 *Streifen in dem Sinne identisch sein, daß sie genau dieselben zweidimensionalen Elemente* E_2 *enthalten. Dieser Ausnahmefall tritt ein dann und nur dann, wenn das Mongesche System:*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, dx_1 : \cdots : dx_n) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-2)$$

der ∞^n *Kurven* k *auf eine solche Form gebracht werden kann, daß es aus lauter Gleichungen besteht, die in den Differentialen* dx *linear sind.*

27. Wir setzen fortwährend voraus, daß alle ∞^n Kurven k ein Pfaffsches System, bestehend aus $n-2$ unabhängigen Gleichungen:

$$\psi_{k1} dx_1 + \cdots + \psi_{kn} dx_n = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-2)$$

befriedigen. Ist c eine ganz beliebige Integralkurve dieses [136 Pfaffschen Systems, die von einem Punkte p beschrieben wird, so erzeugt die dem Punkte p zugeordnete Kurve K immer eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit M_2, die jedesmal von ∞^1 Streifen KK' erzeugt ist.

Mit allen diesen Mannigfaltigkeiten M_2 werden wir uns nochmals beschäftigen. Wir beweisen, daß diese M_2, wie früher angekündigt, als die Integralgebilde eines Systems partieller Differentialgleichungen definiert werden können, das nur Gleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und $n-2$ abhängigen Veränderlichen enthält. Wir beweisen andererseits, daß alle M_2 durch eine einzige partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit $n-1$ unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen definiert werden können.

28. Im vorliegenden Falle ist die Anzahl der Streifen KK' gleich ∞^n, und jeder Streifen hat ∞^1 zweidimensionale Elemente E_2. Deshalb ist die Anzahl aller E_2, die den Mannigfaltigkeiten M_2 angehören, gleich:

$$\infty^{n+1}.$$

Um nun weiter gehen zu können, müssen wir den Begriff eines $(n-1)$-dimensionalen Elements E_{n-1} einführen. Liegt im Raume (X) eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit:

$$\Omega(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

vor, so bezeichne ich, wie bei so vielen früheren Gelegenheiten, das Wertsystem:

$$X_1, \ldots, X_n, \frac{\partial \Omega}{\partial X_1} : \frac{\partial \Omega}{\partial X_2} : \cdots : \frac{\partial \Omega}{\partial X_n}$$

als ein $(n-1)$-dimensionales Element E_{n-1}. Der Raum: $X_1, \ldots, X_n$ enthält:

$$\infty^n \cdot \infty^{n-1} = \infty^{2n-1}$$

$(n-1)$-dimensionale Elemente E_{n-1}. Zu jedem Punkte X gehören ∞^{n-1} Elemente E_{n-1}. Jedes Linienelement liegt auf ∞^{n-2} Elementen E_{n-1}. Jedes zweidimensionale Element E_2 ist in ∞^{n-3} Elementen E_{n-1} enthalten.

29. Wir können nun unsere zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten M_2, die wir früher als von je ∞^2 zweidimensionalen Elementen E_2 erzeugt aufgefaßt haben, zugleich als Örter von je:

$$\infty^2 \cdot \infty^{n-3} = \infty^{n-1}$$ [137

Elementen E_{n-1} betrachten. Und da alle M_2 von ∞^{n+1} Elementen E_2 erzeugt sind, und jedes Element E_2 auf ∞^{n-3} Elementen E_{n-1} gelegen ist, so erkennen wir, daß die Zahl aller E_{n-1}, die unsere M_2 erzeugen, gleich:

$$\infty^{n+1} \cdot \infty^{n-3} = \infty^{2n-2}$$

ist. Nun aber enthält der Raum (X), wie wir schon bemerkten, ∞^{2n-1} Elemente E_{n-1}; also erkennen wir, daß die E_{n-1} aller M_2 wirklich eine Relation:

$$W\left(X_1, \ldots, X_n, \frac{\partial f}{\partial X_1} : \frac{\partial f}{\partial X_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) = 0$$

erfüllen.

Diese Gleichung ist aber eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, und zwar eine semilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die ∞^∞ viele zweidimensionale Integralgebilde besitzt. Diese semilineare partielle Differentialgleichung gehört überdies zu der speziellen Kategorie semilinearer Differentialgleichungen, die ich als quasilinear bezeichnet habe. Unsre partielle Differentialgleichung hat nämlich nur:

$$\infty^n$$

charakteristische Kurven; denn die Kurven K sind offenbar Charakteristiken unserer partiellen Differentialgleichung, da alle M_2 von je ∞^1 Kurven K erzeugt sind.

30. Ehe wir die hiermit erhaltenen schönen Resultate zu einem Theoreme zusammenfassen, wollen wir unsere Ergebnisse noch wesentlich vervollständigen.

Wir behaupten, daß die obenstehenden Entwickelungen alle **quasilinearen** partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung des Raumes $X_1, \ldots, X_n$ geben, welche grade ∞^n charakteristische Kurven besitzen.

Wir wollen annehmen, daß in den Veränderlichen $X_1, \ldots, X_n$ eine beliebige quasilineare partielle Differentialgleichung:

$$W\left(X_1, \ldots, X_n, \frac{\partial f}{\partial X_1} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) = 0$$

mit ∞^n Charakteristiken vorgelegt ist, und daß diese ∞^n Kurven K durch die Gleichungen:

$$\varphi_k(a_1, \ldots, a_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

dargestellt sind.

Da die ∞^n Charakteristiken K eo ipso den Raum (X) ausfüllen, so [138 besitzt das Gleichungssystem:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

alle im Anfange dieses Kapitels verlangten Eigenschaften. Es ordnet daher dieses Gleichungssystem auch jedem Punkte (X) eine Kurve k des Raumes (x) zu, und dabei ist die Anzahl der Kurven k, die sicher den Raum (x) ausfüllen, ebenfalls gleich ∞^n.

Alle ∞^1 Charakteristiken K, die durch einen bestimmten Punkt P gehen, erzeugen eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit M_2, die in meinem Sinne des Wortes ein Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung: $W = 0$ darstellt. Wir erhalten ∞^n solche M_2, und jede Kurve K liegt offenbar auf einfach unendlich vielen derartigen M_2.

Wir können aber noch weitere zweidimensionale Integralmannigfaltigkeiten von $W = 0$ angeben.

Alle ∞^n Kurven K erfüllen ein $(n-2)$-gliedriges Mongesches System:

$$F_i(X_1, \ldots, X_n, dX_1 : \cdots : dX_n) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-2).$$

Ist C eine ganz beliebige Integralkurve dieses Gleichungssystems, so gibt es ∞^1 Charakteristiken K, die C berühren, und diese ∞^1 Kurven K erzeugen nach meinen allgemeinen Theorien immer eine Integralmannigfaltigkeit M_2 der partiellen Differentialgleichung: $W = 0$.

Hier liegt nun grade so ein Fall vor, wie auf der S. 135 [hier S. 407 f.]. Wir behaupten [nämlich], daß ein zweidimensionaler Streifen S_2, der von zwei benachbarten, einander schneidenden Charakteristiken K und K' begrenzt wird, vollständig bestimmt ist, sobald die Kurve K gegeben ist.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, wäre also die betreffende Kurve K auf ∞^1 zweidimensionalen Streifen S_2 gelegen, so lieferte jeder unter diesen ∞^1 Streifen S_2:

$$\infty^{n-3} \cdot \infty^1 = \infty^{n-2}$$

$(n-1)$-dimensionale Elemente E_{n-1}, und es gehörten also zu jeder Kurve K:

$$\infty^{n-2} \cdot \infty^1 = \infty^{n-1}$$

Elemente E_{n-1}, zu allen ∞^n Charakteristiken K also:

$$\infty^n \cdot \infty^{n-1} = \infty^{2n-1}$$

Elemente E_{n-1}. Dann befriedigten aber unsere ∞^∞ Mannigfaltigkeiten M_2 keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung: $W = 0$.

Wir erhalten daher immer denselben zweidimensionalen Streifen [139 S_2, wenn wir eine gegebene Kurve K mit einer beliebigen benachbarten charakteristischen Kurve K' schneiden. Aber hieraus folgt (Theorem III), daß die ∞^n Kurven k im Raume (x) Integralkurven eines $(n-2)$-gliedrigen Pfaffschen Systems sind.

31. Hiermit ist das angekündigte wichtige Resultat erreicht, und wir können daher den folgenden interessanten Satz aufstellen:

Theorem IV. *Liegt ein nichtintegrables $(n-2)$-gliedriges Pfaffsches System:*

$$\alpha_{k1} dx_1 + \cdots + \alpha_{kn} dx_n = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-2)$$

in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ vor, und bestimmen die Gleichungen:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

mit den willkürlichen Konstanten: $a_1, \ldots, a_n$ n-fach unendlich viele Integralkurven k, die den Raum (x) ausfüllen, so bestimmen die entsprechenden Gleichungen:

$$\varphi_k(c_1, \ldots, c_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

n-fach unendlich viele Kurven K des Raumes (X), und diese Kurven K sind die ∞^n charakteristischen Kurven einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

In dieser Weise können alle quasilinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n Veränderlichen und ∞^n charakteristischen Kurven erhalten werden.

32. Es läßt sich beweisen, daß die früher konstruierten Mannigfaltigkeiten M_2 die einzigen zweidimensionalen Integralgebilde unsrer quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung darstellen.

Jedes zweidimensionale Integralgebilde ist nämlich von charakteristischen Kurven K erzeugt und enthält dabei offenbar nur einfach unendlich viele Kurven K. Eine jede unter diesen ∞^1 Kurven K ist also der Punktort von ∞^{n-3} $(n-1)$-dimensionalen charakteristischen Streifen, die zu unserem Integralgebilde gehören. Wir übersehen aber andererseits, daß jede Kurve K den Punktort für gerade ∞^{n-3} charakteristische Streifen unserer partiellen Differentialgleichung liefert. Nehmen wir daher zwei benachbarte Kurven K unseres Integralgebildes, und konstruieren für jede Kurve alle ∞^{n-3} charakteristischen Streifen, die zu dieser Kurve gehören, so muß jeder Streifen der einen Schar mit jedem Streifen [140 der zweiten Schar vereinigt liegen. Das tritt aber dann und nur dann ein, wenn die beiden zweidimensionalen Streifen S_2 unserer Kurven vereinigt liegen, das heißt, wenn die beiden benachbarten charakteristischen Kurven einander schneiden.

Also ist jedes zweidimensionale Integralgebilde unserer partiellen Differentialgleichung von ∞^1 charakteristischen Kurven erzeugt, unter denen zwei benachbarte einander immer schneiden.

Früher (S. 130 [hier S. 402 f.]) sahen wir, daß alle zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten M_2, die ∞^1 Kurven K enthalten, unter denen zwei benachbarte einander immer schneiden:

$$2n-5$$

partielle Differentialgleichungen erster Ordnung: $\Phi_k = 0$ mit $n-2$ unabhängigen und 2 abhängigen Veränderlichen befriedigen. Wären nun die Mannigfaltigkeiten M_2 nicht die einzigen Integralmannigfaltigkeiten des Gleichungssystems: $\Phi_k = 0$, so würde jede andere Integralmannigfaltigkeit ein zweidimensionales Integralgebilde unsrer quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung liefern. Also sind die Mannigfaltigkeiten M_2 wirklich vollständig definiert durch die Gleichungen: $\Phi_k = 0$.

33. Also gilt das

Theorem V. *Liegt eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$W\left(X_1, \ldots, X_n, \frac{\partial f}{\partial X_1} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) = 0$$

mit n Veränderlichen und ∞^n charakteristischen Kurven K vor, so sind alle zweidimensionalen Integralgebilde von je ∞^1 *Kurven K erzeugt, unter denen zwei benachbarte einander immer schneiden. Diese zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten*

sind gleichzeitig die allgemeinsten Integralmannigfaltigkeiten eines Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Phi_k = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,2n-5)$$

mit $n-2$ unabhängigen und zwei abhängigen Veränderlichen.

34. Die soeben besprochenen $2n-5$ partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Phi_k(X, Y, Z_1, \ldots, Z_{n-2}, P_1, \ldots, P_{n-2}, Q_1, \ldots, Q_{n-2}) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,2n-5)$$

bilden in meinem Sinne des Wortes ein Involutionssystem. [141

Daß die Integralgebilde dieses Involutionssystems von Charakteristiken erzeugt sind, folgt nach meinen allgemeinen Theorien unmittelbar daraus, daß die Zahl $2n-5$ der Gleichungen unseres Involutionssystems nur um eine Einheit kleiner als die Zahl der Differentialquotienten P, Q ist. Diesen letzten Satz und noch weiter gehende Sätze veröffentlichte ich in den Verhandl. der Ges. d. W. zu Christiania für Januar 1880[1]) Später habe ich diese Theorie eingehend an der Universität Leipzig vorgetragen.

Einer unter meinen damaligen Zuhörern hat es passend gefunden, diese und andere wichtige, von mir herrührende Theorien als seine eigenen zu veröffentlichen. Unter diesen Umständen kann ich nicht unterlassen, auf die wirkliche Sachlage hinzuweisen.

35. Es ist denkbar, daß nicht allein das Mongesche System: $f_i(x, dx) = 0$, sondern auch das Mongesche System: $F_i(X, dX) = 0$ die Pfaffsche Form besitzt. In diesem Falle beweist man leicht, daß beide Pfaffsche Systeme unbeschränkt integrabel sind. Für den Fall $n = 3$ kündigte ich diesen Satz schon im Jahre 1871 in den Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania ausdrücklich an[2]); den Beweis gab ich aber erst im vorigen Jahre in diesen Berichten.[3]) Der Beweis des allgemeinen Satzes wird in genau derselben Weise geführt.

Jedem Punkte (x) ordnet [ja] das Pfaffsche System: $f_i = 0$ ein zweidimensionales Element e_2 zu; und dementsprechend ordnet das Pfaffsche System $F_i = 0$ jedem Punkte (X) ein bestimmtes zweidimensionales Element E_2 zu. Im Raume x treten somit ∞^n Elemente e_2 auf, und im Raume X befinden sich ebensoviele Elemente E_2. Jedem Elemente e_2 ist ein zweidimensionaler Streifen S_2 mit einfach unendlich vielen Elementen E_2 zugeordnet. Und jetzt ist auch jedem Elemente E_2 im Raume (x) ein zweidimensionaler Streifen s_2 mit ∞^1 Elementen e_2 zugeordnet.

Im vorliegenden Falle ist also die Beziehung zwischen den Elementen e_2 und E_2 eine unendlichunendlichdeutige.

1) [D. Ausg. Bd. III, Abh. XXVII.]
2) Vgl. Math. Ann. Bd. V, S. 163, [d. Ausg. Bd. II, Abh. I, § 6, Nr. 20a].
3) [Leipz. Ber. 1897, S. 723, d. Ausg. Bd. II, Abh. XV, Theorem III].

Nehmen wir im Raume (x) eine ganz beliebige Integralkurve c des Pfaffschen Systems: $f_i = 0$ und konstruieren die ∞^1 Kurven K, deren Bildpunkte auf c liegen, so erzeugen diese Kurven eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die ∞^2 Elemente E_2 enthält.

Hieraus ergibt sich, daß wirklich das Pfaffsche System: $F_i = 0$ unbeschränkt integrabel ist. Gleichzeitig erkennen wir, daß auch das System: $f_i = 0$ unbeschränkt ist.

36. Hieraus ergibt sich das [142

Theorem VI. *Stellen die Gleichungen:*

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n-1)}$$

in beiden Räumen ∞^n verschiedene Kurven k, beziehungsweise K dar, und erfüllen dabei die ∞^n Kurven k ein Pfaffsches System:

$$a_{k1}dx_1 + \cdots + a_{kn}dx_n = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n-2),}$$

während die Kurven K das Pfaffsche System:

$$A_{k1}dX_1 + \cdots + A_{kn}dX_n = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n-2)}$$

befriedigen, so sind unsere Pfaffschen Systeme beide unbeschränkt integrabel.

37. Aus diesem allgemeinen Satze wollen wir ein spezielles Korollar ziehen.

Es mögen die beiden Ebenen (x, y) und (X, Y) mit ihren Elementen n-ter Ordnung:

$$x,\ y,\ p_1 = \frac{dy}{dx},\ p_2 = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots,\ p_n = \frac{d^ny}{dx^n},$$

$$X,\ Y,\ P_1 = \frac{dY}{dX},\ P_2 = \frac{d^2Y}{dX^2}, \ldots,\ P_n = \frac{d^nY}{dX^n}$$

auf einander durch Gleichungen von der Form:

$$(\omega) \qquad \left\{\begin{array}{l} X = A(x, y, p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ Y = B(x, y, p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_n = L(x, y, p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{array}\right.$$

bezogen sein, und wir setzen dabei voraus, daß diese Gleichungen in meinem Sinne des Wortes eine Berührungstransformation n-ter Ordnung definieren. Diese Forderung findet, wie Bäcklund zuerst explizite bemerkt hat, ihren analytischen Ausdruck darin, daß die Gleichungen (ω),

[nach Elimination von P_n und p_n], durch Differentiation nach den kleinen Buchstaben und Elimination der großen Buchstaben das Pfaffsche System:

$$dy - p_1dx = 0, \quad dp_1 - p_2dx = 0, \ldots, dp_{n-2} - p_{n-1}dx = 0$$

ergeben, während sich durch Differentiation nach den großen Buchstaben und Elimination der kleinen Buchstaben das Pfaffsche System:

$$dY - P_1dX = 0, \ldots, dP_{n-2} - P_{n-1}dX = 0$$

ergibt.

Unser Theorem VI umfaßt also als ganz speziellen Fall den Satz, daß [143 jede Berührungstransformation n-ter Ordnung zwischen zwei Ebenen eine Berührungstransformation im gewöhnlichen Sinne des Wortes darstellt.

38. Die allgemeine Frage nach allen Berührungstransformationen beliebiger Ordnung des n-fachen Raumes stellte ich in den Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania für November 1872.[1]) Gleichzeitig formulierte ich die entsprechende Frage für Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. In einer Abhandlung (Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen), die im Juli 1874 der Redaktion der Math. Ann. zugestellt wurde und im Laufe dieses Jahres in dieser Zeitschrift, Bd. VIII, erschien, kam ich (Seite 223)[2]) auf diese beiden Probleme mit den folgenden Worten zurück:

„Ich benutze die Gelegenheit, um zwei Fragen aufzuwerfen, von denen insbesondere die letzte wichtig scheint.

„1. Gibt es Transformationen, welche keine Berührungstransformationen sind, bei denen Berührung höherer Ordnung invariante Beziehung ist?

„Diese Frage scheint mit Nein beantwortet werden zu müssen.

„2. Gestatten partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung Umformungen, welche keine Berührungstransformationen sind?

„Diese Frage muß wohl mit Ja beantwortet werden. Ist das der Fall, so eröffnet sich hier ein wichtiges Gebiet für die Forschung.“

Herr Bäcklund gab eine definitive Erledigung des ersten von mir gestellten Problems in einer schönen Abhandlung, die der Ges. d. Wiss. in Lund im September 1874 vorgelegt wurde und am Schlusse dieses Jahres erschien. Sodann zeigte ich, daß Differentialgleichungen oder Systeme derartiger Gleichungen keine endlichdeutige Berührungstransformation höherer Ordnung gestatten können.

In dieser Verbindung gestatte ich mir auch, daran zu erinnern, daß ich zuerst bemerkte, daß die von Bianchi gegebene Konstruktion von Flächen konstanter Krümmung faktisch eine unendlichdeutige Berührungstransformation darstellt, welche die partielle Differentialgleichung dieser Flächen invariant läßt.

Bäcklunds schöne Untersuchungen über unendlichdeutige Transformationen haben unter mehreren Gesichtspunkten wesentliche Berührungspunkte mit meinen älteren Arbeiten.

39. In den Untersuchungen dieses Kapitels traten drei verschiedene Fälle auf.

1) [D. Ausg. Bd. III, Abh. V, S. 27, Anm.]

2) [Hier Abh. I, S. 9.]

Im allgemeinen Falle hatte weder das Mongesche System: $f_i(x, dx) = 0$ noch das System: $F_i(X, dX) = 0$ die Pfaffsche Form. Der zweite und besonders interessante Fall war dadurch charakterisiert, daß zwar das System: $f_i = 0$, nicht aber das System: $F_i = 0$ die Pfaffsche Form besaß. Im dritten Falle endlich stellten sowohl die Gleichungen: $f_i = 0$ wie die Gleichungen: $F_i = 0$ Pfaffsche Systeme dar.

Es gibt nun noch verschiedene Unterfälle, welche aber für unsere [144
jetzigen Gesichtspunkte nur ein untergeordnetes Interesse darbieten.

Es ist nämlich denkbar, daß sich unter den Gleichungen: $f_i = 0$ einige befinden, die in den Differentialen linear sind. Bilden dabei diese Gleichungen ein unbeschränkt oder beschränkt integrables System, so befinden sich auch im Gleichungssysteme: $F_i = 0$ gewisse Gleichungen, die ein integrables System bilden. Diese an sich evidente Bemerkung wirft Licht über die besprochenen Unterfälle, deren Theorie unmittelbar aus unseren früheren Entwickelungen hervorgeht.

Bei Verwertung dieser Theorien für die Integralrechnung müssen allerdings diese Unterfälle berücksichtigt werden.

Kapitel II.

Über Pfaffsche Systeme.

40. Eine Gleichung von der Form:

$$\alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n = 0,$$

deren Koeffizienten Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ darstellen, bezeichnet man als eine Pfaffsche Gleichung. Es ist bekannt, daß die Theorie dieser Gleichungen in vielen Gebieten der Mathematik, insbesondere in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, in der Theorie der Berührungstransformationen und überhaupt in der allgemeinen Transformationstheorie eine sehr hervorragende Rolle gespielt hat und fortwährend spielen wird.

Nicht minder wichtig, wenn auch wesentlich schwieriger und ungleich weniger ausgebildet ist die allgemeine Lehre über: Systeme Pfaffscher Gleichungen:

$$\alpha_{k1}(x) dx_1 + \cdots + \alpha_{kn}(x) dx_n = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

In älteren Arbeiten habe ich diese Theorie öfter gestreift; meine (veröffentlichten) Untersuchungen in dieser Richtung hatten aber meistens einen ziemlich speziellen Charakter. Jetzt werde ich nach und nach allgemeine Untersuchungen über Pfaffsche Systeme entwickeln; dabei

interessieren mich in erster Linie die Transformationstheorie, beziehungsweise Integrationstheorie Pfaffscher Systeme, und andererseits der Zusammenhang zwischen der Theorie der Pfaffschen Systeme und anderen Gebieten der Mathematik.

In diesem Kapitel beschränke ich mich auf zweigliedrige und [145
$(n-2)$-gliedrige Systeme in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$. Die einfachen Betrachtungen, die ich hier durchführe, dehnen sich aber ohne weiteres auf q-gliedrige Pfaffsche Systeme aus. Wenn ich mich hier auf die einfachsten Fälle beschränke, so geschieht es nur, um die Sprache zu vereinfachen und dem Leser das Verständnis der ganzen Betrachtungsweise zu erleichtern.

I.

Zweigliedrige Pfaffsche Systeme mit dreigliedrigen vollständigen Lösungen.

41. Wir betrachten zuerst ein System zweier Pfaffscher Gleichungen in n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$:

$$\alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n = 0, \quad \beta_1 dx_1 + \cdots + \beta_n dx_n = 0 \tag{1}$$

und nehmen dabei an, daß die Koeffizienten α_i und β_i gegebene Funktionen der x darstellen. Wir setzen ausdrücklich voraus, daß unser Gleichungssystem nicht durch eine einzige Gleichung:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = c = \text{Const.}$$

integriert werden kann, anders ausgedrückt, daß es nicht möglich ist, zwei solche Multiplikatoren ϱ und σ zu finden, daß eine Gleichung von der Form:

$$\varrho \sum_k \alpha_k dx_k + \sigma \sum_k \beta_k dx_k = du$$

besteht.

Wir sagen, daß q Gleichungen:

$$u_1(x) = c_1, \; u_2(x) = c_2, \ldots, u_q(x) = c_q \tag{1'}$$

mit den willkürlichen Konstanten $c_1, \ldots, c_q$ eine vollständige Lösung unseres zweigliedrigen Pfaffschen Systems bestimmen, wenn Gleichungen von der Form:

$$\sum_k^{1\ldots n} \alpha_k dx_k = \varrho_1 du_1 + \cdots + \varrho_q du_q,$$

$$\sum_k^{1\ldots n} \beta_k dx_k = \sigma_1 du_1 + \cdots + \sigma_q du_q$$

bestehen. Alsdann zerlegen die Gleichungen (1′) den Raum $(x_1, \ldots, x_n)$ [146
in ∞^q $(n-q)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, deren jede eine **Integralmannigfaltigkeit** unseres **Pfaffschen** Systems darstellt.

Jede vollständige Lösung: $u_1 = c_1, \ldots, u_q = c_q$ des **Pfaffschen** Systems: $\Sigma \alpha dx = 0$, $\Sigma \beta dx = 0$ definiert somit ∞^q Integralmannigfaltigkeiten, die $(n-q)$-fach ausgedehnt sind und den n-fachen Raum ausfüllen. Von isolierten Integralmannigfaltigkeiten wird im folgenden überall abgesehen.

42. Es liegt in der Natur der Sache, daß q unmöglich gleich 1 sein kann; denn beständen zwei Gleichungen von der Form:

$$\Sigma \alpha_k dx_k = \varrho du, \quad \Sigma \beta_k dx_k = \sigma du,$$

so wären die beiden Gleichungen unseres **Pfaffschen** Systems nicht unabhängig.

Wäre andererseits $q = 2$, und beständen dementsprechend zwei Gleichungen von der Form:

$$\Sigma \alpha_k dx_k = \varrho_1 du_1 + \varrho_2 du_2, \qquad \Sigma \beta_k dx_k = \sigma_1 du_1 + \sigma_2 du_2,$$

so käme:

$$\frac{1}{\varrho_1\sigma_2 - \varrho_2\sigma_1}\,(+\,\sigma_2 \Sigma \alpha_k dx_k - \varrho_2 \Sigma \beta_k dx_k) = du_1,$$

$$\frac{1}{\varrho_1\sigma_2 - \varrho_2\sigma_1}\,(-\,\sigma_1 \Sigma \alpha_k dx_k + \varrho_1 \Sigma \beta_k dx_k) = du_2;$$

wir haben aber ausdrücklich vorausgesetzt, daß Relationen von dieser Form nicht vorhanden sind.

43. Wir wollen jetzt annehmen, daß $q = 3$ ist, daß also unser **Pfaffsches** System eine vollständige Lösung oder mehrere Lösungen besitzt, welche die Form:

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c$$

haben. Alsdann bestehen Relationen von der Form:

$$\Sigma \alpha_k dx_k = \varrho_1 du + \varrho_2 dv + \varrho_3 dw,$$

$$\Sigma \beta_k dx_k = \sigma_1 du + \sigma_2 dv + \sigma_3 dw,$$

und es kann daher unser **Pfaffsches** System auf die Form:

$$(2) \qquad dv - \gamma du = 0, \quad dw - \varepsilon du = 0$$

gebracht werden. [147

Hierbei sind aber verschiedene Fälle zu berücksichtigen, weil die fünf Größen:

$$u, \ v, \ w, \ \gamma, \ \varepsilon$$

unabhängig oder durch Relationen verbunden sein können.

44. Sind unsere fünf Größen unabhängig, so können wir u, v, w als Punktkoordinaten in einem dreifachen Raume deuten, und dann sind die fünf Größen: $u, v, w, \gamma, \varepsilon$ die Bestimmungsstücke eines **beliebigen** Linienelementes in diesem Raume. Bestimmen nun die drei Gleichungen:

$$U = A, \quad V = B, \quad W = C$$

irgend eine andere vollständige Lösung des **Pfaffschen** System (1), und bestehen also Relationen von der Form:

$$\Sigma \alpha_k dx_k = \varrho_1' dU + \varrho_2' dV + \varrho_3' dW,$$

$$\Sigma \beta_k dx_k = \sigma_1' dU + \sigma_2' dV + \sigma_3' dW,$$

so bestehen auch identische Gleichungen von der Form:

$$dv - \gamma du = \omega_1 dU + \omega_2 dV + \omega_3 dW,$$

$$dw - \varepsilon du = \tau_1 dU + \tau_2 dV + \tau_3 dW,$$

und also können wir ohne Beschränkung annehmen, daß die Größen: $U, V, W, \omega_1, \ldots, \tau_3$ als Funktionen von: $u, v, w, \gamma, \varepsilon$ ausgedrückt werden können. Erteilen wir dabei den drei Größen U, V, W konstante Werte: A, B und C, so bestimmen die Gleichungen: $U = A$, $V = B$, $W = C$ zweifach unendlich viele Linienelemente des Raumes u, v, w, die einen Elementverein bilden.

Hiermit ist das Integrationsproblem des vorgelegten **Pfaffschen** Systems: $\Sigma \alpha dx = 0$, $\Sigma \beta dx = 0$, präziser gesagt: die Ableitung aller vollständigen Lösungen: $u' = a'$, $v' = b'$, $w' = c'$ des **Pfaffschen** Systems: $\Sigma \alpha dx = 0$, $\Sigma \beta dx = 0$ aus einer bekannten derartigen Lösung, auf ein wohlbekanntes und triviales Problem zurückgeführt: nämlich auf die allgemeinste Zerlegung der Schar aller Linienelemente des dreifachen Raumes u, v, w in ∞^3 Scharen, jede bestehend aus ∞^2 Linienelementen, die einen **Elementverein** bilden. Im dreifachen Raume gibt es aber keine anderen Elementvereine, die ∞^2 Linienelemente enthalten, als die Schar aller ∞^2 Linienelemente, die einen gemeinsamen Punkt haben.

Daher liefert im vorliegenden Falle das Gleichungssystem: [148

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c$$

die einzige durch ***drei*** *Gleichungen definierbare vollständige Lösung des vorgelegten* ***Pfaffschen*** *Systems:* $\Sigma \alpha dx = 0$, $\Sigma \beta dx = 0$.

Es liegt auf der Hand, daß die Auffindung der ∞^3 *Integralmannigfaltigkeiten:* $u = a$, $v = b$, $w = c$ *die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung verlangt.*

45. Sodann wollen wir annehmen, daß unser Pfaffsches System: $\Sigma\alpha dx = 0$, $\Sigma\beta dx = 0$ eine solche vollständige Lösung:

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c$$

besitzt, daß bei der Reduktion des vorgelegten Systems auf die Form:

$$dv - \gamma du = 0, \quad dw - \varepsilon du = 0$$

die fünf Größen: $u, v, w, \gamma, \varepsilon$ durch eine und nur eine Relation verbunden sind, die wir ohne Beschränkung auf die Form: $\varepsilon = E(u, v, w, \gamma)$ bringen können.

In diesem Falle wollen wir wiederum u, v, w als Punktkoordinaten eines dreifachen Raumes deuten. Dann werden: u, v, w, γ und ε wie soeben die Bestimmungsstücke eines Linienelementes, das aber im vorliegenden Falle die Mongesche Gleichung: $\varepsilon = E(u, v, w, \gamma)$, das heißt:

$$dw : du = E(u, v, w, dv : du),$$

befriedigen muß. Bestimmen nun die drei Gleichungen:

$$U(x) = A, \quad V(x) = B, \quad W(x) = C$$

irgend eine andere vollständige Lösung des Pfaffschen Systems: $\Sigma\alpha dx = 0$, $\Sigma\beta dx = 0$, so ergibt sich genau wie im vorigen Falle, daß Relationen von der Form:

$$dv - \gamma du = \omega_1 dU + \omega_2 dV + \omega_3 dW,$$
$$dw - \varepsilon du = \tau_1 dU + \tau_2 dV + \tau_3 dW$$

bestehen, und daß wir überdies ohne Beschränkung annehmen können, daß die Größen: U, V, W, ω_k und τ_i Funktionen der fünf Größen: u, v, w, γ und: $\varepsilon = E(u, v, w, \gamma)$, gleichzeitig also Funktionen der vier unabhängigen Größen: u, v, w und γ darstellen.

Jetzt aber definieren die drei Gleichungen:

$$U(u, v, w, \gamma) = A, \quad V = B, \quad W = C,$$

wenn A, B und C bestimmte Konstanten bezeichnen, einen Element- [149
verein des Raumes u, v, w, der nur ∞^1 Linienelemente der Mongeschen Gleichung: $\varepsilon = E(u, v, w, \gamma)$ umfaßt. Eine Mongesche Gleichung des dreifachen Raumes hat aber ∞^∞ viele solche Elementvereine, denn jede Integralkurve der Mongeschen Gleichung: $\varepsilon - E = 0$ stellt einen Elementverein dar. Im vorliegenden Falle hat daher das vorgelegte Pfaffsche System: $\Sigma\alpha dx = 0$, $\Sigma\beta dx = 0$ ∞^∞ viele vollständige Lösungen:

$$U = A, \quad V = B, \quad W = C.$$

Kennt man eine solche Lösung: $u = a$, $v = b$, $w = c$, so verlangt die Auffindung der allgemeinsten derartigen Lösung, wie die Entwickelungen des Textes zeigen, nur noch die Auffindung aller Integralkurven einer Mongeschen Gleichung.

Kennt man dagegen keine solche vollständige Lösung, weiß aber, daß ein vorgelegtes Pfaffsches System: $\Sigma\alpha dx = 0$, $\Sigma\beta dx = 0$ unendlich viele vollständige Lösungen besitzt, die jedesmal durch drei Gleichungen:

$$U = A, \quad V = B, \quad W = C$$

definiert werden, so zeigen die vorangehenden Entwickelungen in erster Linie, daß es ∞^∞ viele derartige Lösungen gibt. Sie liefern überdies, wie wir bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher zeigen werden, die rationelle Grundlage für die Integrationstheorie des betreffenden Pfaffschen Systems.

Im vorliegenden Falle ist es, wie wir schon heute beiläufig bemerken, die Gruppe aller Berührungstransformationen einer Ebene, welche die angekündigte Integrationstheorie beherrscht.

46. Wir müssen endlich die Hypothese machen, daß unser Pfaffsches System: $\Sigma\alpha dx = 0$, $\Sigma\beta dx = 0$ eine solche vollständige Lösung:

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c$$

besitzt, daß sich nach der Reduktion des Systems auf die Form:

$$dv - \gamma du = 0, \quad dw - \varepsilon du = 0$$

zwei Relationen:

$$\gamma = \Gamma(u, v, w), \quad \varepsilon = E(u, v, w)$$

ergeben. [150

In diesem Falle träte [aber] im dreidimensionalen Raume: u, v, w ein simultanes System:

$$\frac{dv}{du} = \Gamma(u, v, w), \quad \frac{dw}{du} = E(u, v, w)$$

auf, das zweifach unendlich viele Integralkurven:

$$\Phi(u, v, w) = \text{Const.}, \quad \Psi(u, v, w) = \text{Const.}$$

besäße. Und dann beständen Relationen von der Form:

$$dv - \Gamma(u, v, w)du = \varphi_1 d\Phi + \psi_1 d\Psi,$$
$$dw - E(u, v, w)du = \varphi_2 d\Phi + \psi_2 d\Psi,$$

das heißt, das vorgelegte Pfaffsche System: $\Sigma\alpha dx = 0$, $\Sigma\beta dx = 0$ besäße eine vollständige Lösung:

$$\Phi = \text{Const.}, \quad \Psi = \text{Const.},$$

die durch zwei Gleichungen definiert würde. Von diesem Falle haben wir aber von vornherein abgesehen.

47. Wir fassen die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels zu dem folgenden Satze zusammen:

Theorem VII. *Kann ein nichtintegrables zweigliedriges Pfaffsches System:*

$$\alpha_1(x)dx_1 + \cdots + \alpha_n(x)dx_n = 0, \quad \beta_1(x)dx_1 + \cdots + \beta_n(x)dx_n = 0$$

durch drei Gleichungen:

$$u(x) = a, \quad v(x) = b, \quad w(x) = c$$

mit den willkürlichen Konstanten a, b, c integriert werden, während keine vollständige Lösung vorhanden ist, die durch weniger als drei Gleichungen definiert wird, so sind zwei Fälle denkbar.

Es ist möglich, daß der n-fache Raum nur in einer einzigen Weise in $(n-3)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeiten zerlegt werden kann; in diesem Falle verlangt die Reduktion des vorgelegten Pfaffschen Systems auf die Normalform:

$$dv - \alpha du = 0, \quad dw - \beta du = 0$$

die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung, die keine Vereinfachung gestattet. Die fünf Größen: u, v, w, α, β sind in diesem Falle durch keine Relation verbunden.

Liegt dieser Fall nicht vor, so kann der Raum in ∞^{∞} vielen [151 *Weisen in $(n-3)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeiten zerlegt werden. Auch in diesem Falle kann das vorgelegte Pfaffsche System auf die Normalform:*

$$dv - \alpha du = 0, \qquad dw - \beta du = 0$$

gebracht werden; jetzt sind aber die fünf Größen: u, v, w, α und β durch eine und nur durch eine endliche Relation:

$$\Pi(u, v, w, \alpha, \beta) = 0$$

verbunden. In diesem Falle kann also die Zahl der unabhängigen Veränderlichen unseres Pfaffschen Systems auf vier reduziert werden.

48. In meinen alten geometrischen Arbeiten habe ich nun gezeigt, daß es immer möglich ist, die Linienelemente zweier beliebiger Mongescher Gleichungen des dreifachen Raumes derart auf einander zu beziehen, daß vereinigte Lage bewahrt wird. Deshalb können wir, wenn die Größen u, v, w, α, β durch eine und nur durch eine Relation gebunden sind, immer annehmen, daß diese Relation zum Beispiel die Form:

$$\alpha = w$$

besitzt.

Wenn daher das Pfaffsche System: $\Sigma \alpha dx = 0$, $\Sigma \beta dx = 0$ durch drei und nicht durch weniger als drei Gleichungen integriert werden kann, wenn ferner der n-dimensionale Raum $x_1, \ldots, x_n$ in unendlich vielen Weisen in $(n-3)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeiten zerlegt werden kann, so läßt sich das vorgelegte Pfaffsche System immer auf die kanonische Form:

$$dv - \alpha du = 0, \quad d\alpha - \beta du = 0$$

bringen. Nun aber kennen wir die allgemeinste Transformation in vier Veränderlichen, welche diese kanonische Form bewahrt, und daher geben meine allgemeinen auf Gruppentheorie begründeten Integrationstheorien den einfachsten Weg zur Reduktion des vorgelegten Pfaffschen Systems auf die betreffende kanonische Form. Gleichzeitig finden wir sowohl die allgemeinste vollständige Lösung, wie die allgemeinste Transformation unseres Pfaffschen Systems.

49. Wir behalten uns vor, die hiermit angekündigte lehrreiche Integrationstheorie gelegentlich ausführlich darzustellen. Gleichzeitig beschäftigen wir uns [152 mit den Beziehungen, die zwischen diesen Theorien und meinen älteren Arbeiten, sowie einigen sich daran anschließenden Untersuchungen anderer Forscher stattfinden.

Ich nenne hier zuerst Bäcklunds definitive Erledigung der von mir im Jahre 1872 in den Verhandlungen der norwegischen Gesellschaft der Wissenschaften gestellten Frage nach allen Berührungstransformationen zweiter und höherer Ordnung. Ferner Engels interessante, wenngleich unnötig umständliche Diskussion der zweigliedrigen Pfaffschen Systeme in vier Veränderlichen. Hier kommen auch einige, unter formellem Gesichtspunkte wertvolle Untersuchungen von Koenigs in Betracht, die übrigens nicht allein mit meinen, sondern insbesondere auch mit Bäcklunds, von ihm nicht berücksichtigten Untersuchungen sehr verwandt sind; ebenso schöne Arbeiten von Duport und de Tannenberg.

II.

Zweigliedrige Pfaffsche Systeme mit viergliedrigen vollständigen Lösungen.

50. Wir betrachten jetzt ein zweigliedriges Pfaffsches System:

$$(1) \qquad \alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n = 0, \qquad \beta_1 dx_1 + \cdots + \beta_n dx_n = 0,$$

das eine vollständige Lösung von der Form:

$$(2) \qquad u = a, \quad v = b, \quad w_1 = c_1, \quad w_2 = c_2$$

mit den willkürlichen Konstanten: a, b, c_1, c_2 besitzt. Dabei setzen wir ausdrücklich voraus, daß keine vollständige Lösung vorhanden ist, die durch weniger als vier Gleichungen definiert wird.

Unter diesen Umständen kann unser Pfaffsches System die kanonische Form:

$$dw_1 - \varepsilon_1 du - \varphi_1 dv = 0, \qquad dw_2 - \varepsilon_2 du - \varphi_2 dv = 0 \tag{3}$$

erhalten, und dabei wollen wir die Größen u, v, w_1, w_2 als Punktkoordinaten in einem vierfachen Raume deuten. Alsdann sind die acht Größen:

$$u, v, w_1, w_2, \varepsilon_1, \varphi_1, \varepsilon_2, \varphi_2 \tag{4}$$

die Bestimmungsstücke eines zweidimensionalen Elementes des vierfachen Raumes.

51. Setzen wir nun zunächst voraus, daß die acht Größen (4) durch keine endliche Relation verbunden sind, so ist es nicht schwer, zu erkennen, daß der n-fache Raum: $x_1, \ldots, x_n$ nur in einziger Weise (oder jedenfalls nicht in unendlich vielen Weisen) in ∞^4 $(n-4)$-dimensionale [153 Integralmannigfaltigkeiten zerlegt werden kann.

Definieren nämlich die Gleichungen:

$$U = A, \quad V = B, \quad W_1 = C_1, \quad W_2 = C_2$$

eine beliebige vollständige Lösung, und ist:

$$dW_1 - E_1 dU - F_1 dV = 0, \quad dW_2 - E_2 dU - F_2 dV = 0$$

die entsprechende Form des vorgelegten Pfaffschen Systems, so können wir ohne Beschränkung annehmen, daß sich die acht Größen:

$$U, V, W_1, W_2, E_1, F_1, E_2, F_2$$

als Funktionen der acht Größen (4) darstellen lassen; daß also etwa:

$$U = \mathfrak{U}(u, v, \ldots, \varepsilon_2, \varphi_2), \ldots, F_2 = \mathfrak{F}_2(u, v, \ldots, \varepsilon_2, \varphi_2)$$

ist. Diese Gleichungen bestimmen eine Transformation der ∞^8 zweidimensionalen Elemente des vierfachen Raumes, bei welcher Elementverein in Elementverein übergeht. Da aber die ∞^4 Punkte des Raumes die einzigen Elementvereine liefern, die ∞^4 Elemente enthalten, so sind die Punkttransformationen des vierfachen Raumes: u, v, w_1, w_2 die einzigen Transformationen der ∞^8 zweidimensionalen Elemente (4), bei denen vereinigte Lage bewahrt wird. Und also drücken sich U, V, W_1 und W_2 als Funktionen von u, v, w_1 und w_2 aus; anders ausgesprochen: der

Raum $x_1, \ldots, x_n$ kann nur in einer Weise in ∞^4 $(n-4)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeiten des Pfaffschen Systems (1) zerlegt werden.

Hieraus läßt sich der wichtige Schluß ziehen, daß die Reduktion des vorgelegten Pfaffschen Systems (1) auf die Normalform (3) die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung verlangt, die keine Integrationsvereinfachungen gestattet.

52. Sodann setzen wir voraus, daß die acht Funktionen, die in der Normalform (3) des vorgelegten Pfaffschen Systems auftreten, durch eine und nur durch eine endliche Relation verbunden sind:

$$\Omega(u, v, w_1, w_2, \varepsilon_1, \varphi_1, \varepsilon_2, \varphi_2) = 0.$$

Wie im vorigen Falle deuten wir: u, v, w_1, w_2 als Punkt- [154 koordinaten in einem vierfachen Raume; dann sind die acht Größen: $u, v, \ldots, \varphi_2$ wiederum Koordinaten eines zweidimensionalen Elementes in unserem Raume; und die Gleichung: $\Omega = 0$ bestimmt ∞^7 solche zweidimensionale Elemente.

Besäße nun das vorgelegte Pfaffsche System: $\Sigma \alpha dx = 0$, $\Sigma \beta dx = 0$ noch weitere vollständige Lösungen:

$$U = A, \quad V = B, \quad W_1 = C_1, \quad W_2 = C_2,$$

und wäre dabei:

$$dW_1 - E_1 dU - F_1 dV = 0, \quad dW_2 - E_2 dU - F_2 dV = 0$$

die entsprechende Form des Pfaffschen Systems, so beständen Gleichungen von der Form:

$$U = \mathfrak{U}(u, v, \ldots, \varphi_2), \ldots, F_2 = \mathfrak{F}_2(u, v, \ldots, \varphi_2), \tag{5}$$

und die hiermit bestimmte Transformation der ∞^7 zweidimensionalen Elemente führte Elementverein in Elementverein über. Die Punkte des vierfachen Raumes stellen aber dreidimensionale Elementvereine der Gleichung: $\Omega = 0$ dar. Ist daher die Transformation (5) keine Punkttransformation des vierfachen Raumes, so müssen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen, die ebenfalls dreidimensionale Elementvereine darstellen. Dies ist dann und nur dann möglich, wenn die Gleichung:

$$\Omega(u, v, w_1, w_2, \varepsilon_1, \ldots, \varphi_2) = 0$$

∞^7 zweidimensionale Elemente definiert, die in ∞^4 Scharen angeordnet werden können, deren jede aus den ∞^3 zweidimensionalen Elementen einer Kurve besteht. In einem solchen Falle ordnen sich die ∞^7 zweidimensionalen Elemente: $u, \ldots, \varphi_2$ in ∞^5 Scharen, jede bestehend aus

∞^2 Elementen, die ein gemeinsames Linienelement enthalten. Die ∞^5 Scharen bilden ein invariantes Ganzes.

Der Übergang von einer vollständigen Lösung: u, v, w_1, w_2 zu einer anderen vollständigen Lösung: u', v', w_1', w_2' wird durch eine Berührungstransformation des vierfachen Raumes vermittelt; die entsprechenden aequationes directrices:

$$\Theta_1(u, v, w_1, w_2; u', v', w_1', w_2') = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Theta_3 = 0$$

ordnen den Punkten: u', v', w_1', w_2' ∞^4 Kurven zu, deren zweidimen- [155
sionale Elemente die Gleichung: $\Omega = 0$ erfüllen.

Liegt ein zweigliedriges Pfaffsches System: $\Sigma \alpha dx = 0, \Sigma \beta dx = 0$ vor, das zu der hier besprochenen Kategorie gehört, so verlangt seine Reduktion auf die Normalform jedenfalls nur die sukzessive Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen, unter denen die erste von fünfter Ordnung, die andere von dritter Ordnung ist. Ob eine noch weiter gehende Vereinfachung dieses Integrationsproblems möglich ist, soll bei einer anderen Gelegenheit untersucht werden.

53. Sind die acht Größen: $u, v, \ldots, \varphi_2$, die in der kanonischen Form auftreten, durch zwei und nur durch zwei Relationen:

$$\Omega_1(u, v, \ldots, \varphi_2) = 0, \quad \Omega_2(u, v, \ldots, \varphi_2) = 0$$

verknüpft, so gibt es immer ∞^∞ viele vollständige Lösungen, die durch vier Gleichungen definiert werden. Der Übergang von einer solchen vollständigen Lösung: $u = a, \ v = b, \ w_1 = c_1, \ w_2 = c_2$ zu einer anderen derartigen Lösung: $u' = a', v' = b', w_1' = c_1', w_2' = c_2'$ wird durch eine Berührungstransformation des vierfachen Raumes mit zwei aequationes directrices:

$$\Theta_1(u, v, w_1, w_2; u', v', w_1', w_2') = 0, \quad \Theta_2 = 0$$

vermittelt; und diese beiden Gleichungen ordnen jedem Punkte u', v', w_1', w_2' eine gemeinsame zweidimensionale Integralmannigfaltigkeit der partiellen Differentialgleichungen: $\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0$ zu.

Liegt ein Pfaffsches System: $\Sigma \alpha dx = 0, \ \Sigma \beta dx = 0$ vor, das zu dieser Kategorie gehört, so bildet man zuerst ein vollständiges System in den x, dessen Lösungen die Größen: $u, v, w_1, w_2, \varepsilon_1, \varphi_1, \varepsilon_2, \varphi_2$ sind. Die Integration dieses vollständigen Systems reduziert sich auf eine gewöhnliche Differentialgleichung sechster Ordnung. Sind $y_1, y_2, \ldots, y_6$ unabhängige Lösungen jenes vollständigen Systems, so kann das gegebene Pfaffsche System die Form:

$$Y_1 dy_1 + \cdots + Y_6 dy_6 = 0, \quad Z_1 dy_1 + \cdots + Z_6 dy_6 = 0$$

erhalten, wobei die Koeffizienten Y_k und Z_k nur von den y abhängen.

Die weitere Reduktion unseres Pfaffschen Systems kann, wie wir [156
sogleich beweisen werden, nicht durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen geleistet werden.

54. Um die Richtigkeit der letzten Behauptung nachzuweisen, genügt die Bemerkung, daß die Integration eines ganz beliebigen Systems zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und zwei abhängigen Veränderlichen sich mit der Integration eines zweigliedrigen Pfaffschen Systems deckt, das zu der vorliegenden Kategorie gehört. Liegen in der Tat zum Beispiel die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$q_1 = Q_1(x, y, z_1, z_2, p_1, p_2), \qquad q_2 = Q_2(x, y, z_1, z_2, p_1, p_2)$$

vor, so deckt sich die Integration dieses Gleichungssystems mit der Auffindung aller zweidimensionalen Integralmannigfaltigkeiten des Pfaffschen Systems:

$$(6) \qquad dz_1 - p_1 dx - Q_1 dy = 0, \quad dz_2 - p_2 dx - Q_2 dy = 0.$$

Es darf aber als selbstverständlich betrachtet werden, daß die Integration des Gleichungssystems: $q_1 = Q_1, \ q_2 = Q_2$ nicht auf die Erledigung gewöhnlicher (das heißt, nichtpartieller) Differentialgleichungen reduziert werden kann. Also kann auch die Integration des Pfaffschen Systems (6) nicht durch gewöhnliche Differentialgleichungen geleistet werden.

55. Endlich wollen wir annehmen, daß die acht Funktionen: $u, v, w_1, w_2, \varepsilon_1, \varphi_1, \varepsilon_2, \varphi_2$, die in der Normalform:

$$(7) \qquad dw_1 - \varepsilon_1 du - \varphi_1 dv = 0, \quad dw_2 - \varepsilon_2 du - \varphi_2 dv = 0$$

auftreten, durch drei unabhängige Relationen:

$$\Omega_1(u, v, \ldots, \varphi_2) = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0$$

verbunden sind. Wir werden zeigen, daß in diesem Falle das vorgelegte Pfaffsche System: $\Sigma \alpha dx = 0, \ \Sigma \beta dx = 0$ durch drei Gleichungen: $\lambda = \text{Const.}, \ \mu = \text{Const.}, \ \nu = \text{Const.}$ integriert werden kann, und daß daher unsere jetzige Annahme mit den früher gemachten Voraussetzungen im Widerspruche steht.

Die Integration des auf die Normalform (7) gebrachten Pfaffschen Systems deckt sich mit der Integration des Systems partieller Differen- [157
tialgleichungen: $\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = 0$. Ein derartiges Gleichungs-

system wird aber nach meiner allgemeinen Theorie[1]) dadurch integriert, daß man eine Gleichung:

$$U(x, y, z_1, z_2) = \text{Const.}$$

nach x und y differenziert und sodann die Differentialquotienten p_1, q_1, p_2, q_2 zwischen den beiden Gleichungen:

$$U_x + U_{z_1} p_1 + U_{z_2} p_2 = 0, \quad U_y + U_{z_1} q_1 + U_{z_2} q_2 = 0$$

und den drei Gleichungen: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$ eliminiert. Hierdurch entsteht eine quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$W\left(x, y, z_1, z_2, \frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} : \frac{\partial U}{\partial z_1} : \frac{\partial U}{\partial z_2}\right) = 0,$$

deren zweidimensionale Integralgebilde von Charakteristiken erzeugt sind. In dieser Weise ergibt sich, daß im vierfachen Raume x, y, z_1, z_2 die zweidimensionalen Integralmannigfaltigkeiten des Gleichungssystems: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$ von ∞^4 Charakteristiken erzeugt sind. Aber hieraus folgt, daß unser Pfaffsches System:

$$dw_1 - \varepsilon_1 du - \varphi_1 dv = 0, \quad dw_2 - \varepsilon_2 du - \varphi_2 dv = 0$$

durch passende Wahl der Veränderlichen auf eine äquivalente Form gebracht werden kann, die nur vier Veränderliche enthält. Und also besitzt auch das ursprünglich vorgelegte Pfaffsche System: $\Sigma \alpha dx = 0$, $\Sigma \beta dx = 0$ gegen unsere Voraussetzung vollständige Lösungen, die durch drei endliche Gleichungen definiert werden.

56. Sodann noch einige flüchtige Andeutungen über zweigliedrige Pfaffsche Systeme: $\Sigma \alpha dx = 0$, $\Sigma \beta dx = 0$, die fünfgliedrige vollständige Lösungen:

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c, \quad \varrho_1 = d, \quad \varrho_2 = e$$

besitzen, während keine vollständige Lösung vorhanden ist, die durch weniger Gleichungen definiert wird.

In diesem Falle kann das vorgelegte Pfaffsche System auf die [158 kanonische Form:

$$d\varrho_1 - e_1 du - \varphi_1 dv - \psi_1 dw = 0,$$
$$d\varrho_2 - e_2 du - \varphi_2 dv - \psi_2 dw = 0$$

gebracht werden. Und wiederum können verschiedene Fälle eintreten, da die Größen $\varrho, u, v, w, e, \varphi, \psi$ unabhängig oder durch Relationen verbunden sein können.

1) Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania, Januar 1880; Leipziger Berichte 1893—95 [d. Ausg. Bd. III, Abh. XXVII; Bd. IV, Abh. IX, S. 345—349].

Besteht keine derartige Relation, so ergibt sich unmittelbar, daß der n-fache Raum nur in einziger Weise in ∞^5 $(n-5)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeiten zerlegt werden kann, und daß daher die Reduktion des vorgelegten Pfaffschen Systems auf die Normalform nur die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung fünfter Ordnung verlangt, die keine Vereinfachung gestattet.

In ganz ähnlicher Weise erledigt man die übrigen möglichen Fälle, mit denen wir uns aber hier nicht weiter beschäftigen können.

III.

Nichtintegrable $(n-2)$-gliedrige Pfaffsche Systeme in n Veränderlichen.

57. Wir betrachten ein $(n-2)$-gliedriges Pfaffsches System:

$$(8) \qquad a_{k1} dx_1 + \cdots + a_{kn} dx_n = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2)$$

in den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und setzen dabei, um triviale Möglichkeiten von vornherein auszuschließen, ausdrücklich voraus, daß keine identische Relation von der Form:

$$\varrho_1 \Sigma \alpha_{1i} dx_i + \varrho_2 \Sigma \alpha_{2i} dx_i + \cdots + \varrho_{n-2} \Sigma \alpha_{n-2,i} dx_i = du$$

besteht.

Unter den ∞^∞ vielen Integralkurven des vorgelegten Pfaffschen Systems denken wir uns ∞^{n-1} herausgegriffen, die den Raum ausfüllen und somit durch $n-1$ Gleichungen:

$$u = a, u_1 = a_1, \ldots, u_{n-2} = a_{n-2}$$

mit den willkürlichen Konstanten $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ dargestellt werden. Alsdann kann das System (8) auf die Form:

$$du_1 - v_1 du = 0, \; du_2 - v_2 du = 0, \ldots, du_{n-2} - v_{n-2} du = 0 \qquad [159$$

gebracht werden. Und dabei ist es klar, daß die $2n-3$ Größen:

$$u, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2},$$

die ja Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ darstellen, durch mindestens $n-3$ unabhängige Relationen:

$$W_k(u, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1, \ldots, v_{n-2}) = 0$$

verbunden sind. Da andererseits $u, u_1, \ldots, u_{n-2}$ von einander unabhängige Funktionen der x bezeichnen, so sind von vornherein nur zwei Fälle denkbar, präziser gesagt, es gibt entweder $n-3$ oder $n-2$ unabhängige Relationen: $W_k = 0$.

Im letzten Falle beständen aber Gleichungen von der Form:

$$v_k = V_k(u, u_1, \ldots, u_{n-2}) \qquad (k=1,\ldots,n-2),$$

und wenn $\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}$ ein System Lösungen des simultanen Systems:

$$\frac{du_k}{du} = V_k(u, u_1, \ldots, u_{n-2}) \qquad (k=1,\ldots,n-2)$$

bezeichneten, so ließe sich unser Pfaffsches System auf die Form:

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0, \ldots, d\omega_{n-2} = 0$$

bringen. Da wir aber diesen Fall von vornherein ausdrücklich ausgeschlossen haben, so ist die Anzahl der unabhängigen Gleichungen: $W_k = 0$ sicher gleich $n-3$, und wir können daher dieses Gleichungssystem etwa auf die Form:

$$v_2 = \Theta_2(u, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1), \ldots, v_{n-2} = \Theta_{n-2}(u, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1)$$

bringen.

58. Hiermit hat unser Pfaffsches System die Form:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} du_1 - v_1 du = 0, \\ du_k - \Theta_k(u, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1) du = 0 \qquad (k=2,\ldots,n-2) \end{cases}$$

angenommen. Deuten wir hier $u, u_1, \ldots, u_{n-2}$ als Punktkoordinaten eines $(n-1)$-fachen Raumes, so können wir die Größen:

$$u, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1, \ldots, v_{n-2}$$

als Bestimmungsstücke eines Linienelementes in diesem Raume auf- [160 fassen. Die $n-3$ Gleichungen:

$$W_k(u, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1, \ldots, v_{n-2}) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-3),$$

sowie die damit äquivalenten Gleichungen:

$$\text{(10)} \qquad W_k\left(u, u_1, \ldots, u_{n-2}, \frac{du_1}{du}, \ldots, \frac{du_{n-2}}{du}\right) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-3)$$

bilden ein $(n-3)$-gliedriges Mongesches System, das ∞^n Linienelemente des Raumes $u, u_1, \ldots, u_{n-2}$ definiert. Dieses Mongesche System hat ∞^∞ viele Integralkurven, und jede derartige Integralkurve liefert, wenn in ihren Gleichungen die u durch ihre Werte als Funktionen der x ersetzt werden, eine Integralkurve des ursprünglich vorgelegten Pfaffschen Systems:

$$\text{(8)} \qquad \alpha_{k1}dx_1 + \cdots + \alpha_{kn}dx_n = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-2).$$

Hiermit ist es uns gelungen, eine Beziehung zwischen einem $(n-2)$-gliedrigen Pfaffschen Systeme (8) in n Veränderlichen und einem $(n-3)$-gliedrigen Mongeschen Systeme (10) in $n-1$ Veränderlichen $u, u_1, \ldots, u_{n-2}$ zu Stande zu bringen. Jeder Punkt des Raumes x ist einem Linienelemente des Mongeschen Systems (10) zugeordnet. Und dabei ist jeder Integralkurve des Pfaffschen Systems (8) eine Integralkurve des Mongeschen Systems zugeordnet.

59. Um den hiermit aufgedeckten Zusammenhang in die richtige Beleuchtung zu setzen, zeigen wir, daß umgekehrt jedes $(n-3)$-gliedrige Mongesche System in $n-1$ Veränderlichen:

$$W_k\left(y, y_1, \ldots, y_{n-2}, \frac{dy_1}{dy}, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dy}\right) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-3)$$

in der angegebenen Weise auf ein $(n-2)$-gliedriges Pfaffsches System in n Veränderlichen bezogen werden kann.

Wir denken uns die $n-3$ Gleichungen: $W_k = 0$ nach $n-3$ Differentialquotienten, etwa:

$$\frac{dy_2}{dy}, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dy}$$

aufgelöst:

$$\frac{dy_k}{dy} = \varphi_{k+1}\left(y, y_1, \ldots, y_{n-2}, \frac{dy_1}{dy}\right) \qquad (k=2,3,\ldots,n-2),$$ [161

und setzen sodann:

$$y = x_1, \; y_1 = x_2, \; y_2 = x_3, \ldots, y_{n-2} = x_{n-1}, \frac{dy_1}{dy} = x_n.$$

Alsdann erhalten wir in den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ das $(n-2)$-gliedrige Pfaffsche System:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} dx_2 - x_n dx_1 = 0, \\ dx_3 - \varphi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ dx_{n-1} - \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 = 0, \end{cases}$$

und dabei ist jedem Linienelemente des Mongeschen Systems: $W_k = 0$ ein Punkt des Raumes (x) zugeordnet.

Zwei Linienelemente des Mongeschen Systems, die vereinigt liegen, bilden sich im Raume der x als zwei benachbarte Punkte x_k und $x_k + dx_k$ ab, die das Pfaffsche System (11) befriedigen. Zwischen den Integralkurven des Mongeschen Systems: $W_k = 0$ und den Integralkurven des Pfaffschen Systems (11) besteht somit die folgende Beziehung: Integralkurven des Mongeschen Systems, die einander in einem Punkte berühren, liefern im Raume der x Integralkurven des Pfaffschen Systems mit einem gemeinsamen Punkte.

60. Die hiermit erhaltenen Ergebnisse fassen wir zu dem folgenden Theoreme zusammen:

Theorem VIII. *Zwischen den nichtintegrablen $(n-2)$-gliedrigen Pfaffschen Systemen:*

$$\alpha_{k1}dx_1 + \cdots + \alpha_{kn}dx_n = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-2) \tag{8}$$

in n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ und den $(n-3)$-gliedrigen Mongeschen Systemen:

$$W_k(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, dy_1 : dy_2 : \cdots : dy_{n-1}) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,n-3)$$

in $n-1$ Veränderlichen besteht ein fundamentaler Zusammenhang.

Liegt nämlich ein $(n-2)$-gliedriges Pfaffsches System in $x_1, \ldots, x_n$ vor, das nicht integrabel ist, so kann dieses Pfaffsche System immer auf die Form:

$$du_1 - v_1 du = 0, \ldots, du_{n-2} - v_{n-2}du = 0 \qquad [162$$

gebracht werden, nachdem zuerst ∞^{n-1} Integralkurven:

$$u = c, u_1 = c_1, \ldots, u_{n-2} = c_{n-2},$$

die den Raum x ausfüllen, gefunden sind. Alsdann sind die Größen:

$$u, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1 = \frac{du_1}{du}, \ldots, v_{n-2} = \frac{du_{n-2}}{du}$$

immer durch $n-3$ unabhängige Relationen:

$$W_k\left(u, u_1, \ldots, u_{n-2}, \frac{du_1}{du}, \ldots, \frac{du_{n-2}}{du}\right) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-3)$$

verbunden, die ein $(n-3)$-gliedriges Mongesches System bilden. Jede Integralkurve des Pfaffschen Systems liefert eine Integralkurve des Mongeschen Systems. Dabei gehen aber Integralkurven des Pfaffschen Systems, die einander schneiden, in Kurven des Mongeschen Systems über, die einander berühren. Jedes Linienelement des Mongeschen Systems: $W_k = 0$ ist einem Punkte (x) zugeordnet, und das Pfaffsche System (8) ist weiter nichts als die Bedingung für die vereinigte Lage zweier benachbarter Linienelemente des Mongeschen Systems.

Liegt andererseits ein beliebiges $(n-3)$-gliedriges Mongesches System in $n-1$ Veränderlichen vor, und bezieht man die ∞^n Linienelemente dieses Systems auf den Punktraum $x_1, \ldots, x_n$, so liefert die Forderung, daß zwei benachbarte Linienelemente

des Mongeschen Systems vereinigt liegen sollen, ein $(n-2)$-gliedriges Pfaffsches System in $x_1, \ldots, x_n$.

61. Setzen wir insbesondere $n = 3$, so erhalten wir die von mir so eingehend untersuchte Abbildung aller Linienelemente x, y, p der x, y-Ebene auf den Punktraum x, y, p.

Zwei Linienelemente: x, y, p und: $x + dx,\ y + dy,\ p + dp$ liegen in der Tat vereinigt, wenn die Pfaffsche Gleichung:

$$dy - p\,dx = 0$$

erfüllt ist. Liegt andererseits eine beliebige nichtintegrable Pfaffsche Gleichung:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

vor, so kann diese Gleichung bekanntlich auf die kanonische Form:

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\,d\mathfrak{x} = 0 \qquad [163$$

gebracht werden; und hierdurch sind die Linienelemente $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$-Ebene auf den Punktraum x, y, z bezogen worden.

Setzen wir sodann $n = 4$, so erhalten wir eine Beziehung zwischen einer Mongeschen Gleichung:

$$W(y_1, y_2, y_3, dy_1 : dy_2 : dy_3) = 0$$

des dreifachen Raumes und einem zweigliedrigen nichtintegrablen Pfaffschen Systeme in vier Veränderlichen, und so weiter.

62. Die im Theoreme VIII zusammengestellten Ergebnisse wollen wir jetzt mit den Entwickelungen des ersten Kapitels über quasilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in Verbindung bringen.

Wir setzen voraus, daß in $n-1$ Veränderlichen: $y_1, \ldots, y_{n-1}$ ein beliebiges $(n-3)$-gliedriges Mongesches System:

$$W_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, dy_1 : \cdots : dy_{n-1}) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-3)$$

vorgelegt ist. Wir beziehen die ∞^n Linienelemente dieses Mongeschen Systems in der früher angegebenen Weise auf den Punktraum $x_1, \ldots, x_n$ und erhalten so als Bedingung für die vereinigte Lage zweier benachbarter Linienelemente ein $(n-2)$-gliedriges Pfaffsches System:

$$\alpha_{k1}dx_1 + \cdots + \alpha_{kn}dx_n = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-2).$$

Sodann denken wir uns ∞^n Integralkurven dieses Pfaffschen Systems durch das $(n-1)$-gliedrige Gleichungssystem:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

bestimmt und deuten wie im vorigen Kapitel die Größen $X_1, \ldots, X_n$ als Punktkoordinaten eines n-fachen Raumes. Alsdann ordnet das Gleichungssystem: $\varphi_k = 0$ den ∞^n Punkten (x) n-fach unendlich viele Kurven K zu, deren ∞^{n+1} Linienelemente ein $(n-2)$-gliedriges Mongesches System:

$$F_i(X_1, \ldots, X_n, dX_1 : \cdots : dX_n) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-2)$$

befriedigen. Dabei sind die ∞^n Kurven K die Charakteristiken einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

63. Hiermit ist ein merkwürdiger und fundamentaler Zusammenhang zwischen den beiden Mongeschen Systemen: $W_k = 0$ und: $F_i = 0$ zustandegebracht. Dabei erinnern wir uns, [164 daß die $n-3$ Gleichungen:

$$W_k(y_1, \ldots, y_{n-1}, dy_1 : \cdots : dy_{n-1}) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-3)$$

ein ganz beliebiges $(n-3)$-gliedriges Mongesches System in $n-1$ Veränderlichen darstellen, während die $n-2$ Gleichungen:

$$F_i(X_1, \ldots, X_n, dX_1 : \cdots : dX_n) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n-2)$$

das allgemeinste Mongesche System in n Veränderlichen darstellen, das die ∞^n Charakteristiken einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen.

64. Es ist nun leicht, zu sehen, daß zwischen den Integralkurven der beiden Mongeschen Systeme: $W_k(y, dy) = 0$ und $F_i(X, dX) = 0$ ein eineindeutiges Entsprechen besteht. Jeder Integralkurve C des Mongeschen Systems $F_i(X, dX) = 0$ ist nämlich im Raume (x) eine Integralkurve c des Pfaffschen Systems zugeordnet, und jeder Kurve c ist eine Kurve $\varkappa$ des Mongeschen Systems $W_k(y, dy) = 0$ zugeordnet.

Die ∞^1 Linienelemente des Mongeschen Systems: $F_i(X, dX) = 0$, die durch einen Punkt (X) gehen, liefern im Raume (x) alle ∞^1 Linienelemente einer Kurve k, und dieser k ist wiederum im Raume y eine Kurve $\varkappa$ zugeordnet. Im Raume (y) treten somit ∞^n Integralkurven $\varkappa$ des Mongeschen Systems $W_k(y, dy) = 0$ auf, die eineindeutig auf die Punkte des Raumes (X) bezogen sind.

Dies gibt uns eine schöne begriffliche Deutung des Mongeschen Systems: $F_i(X, dX) = 0$. Wenn nämlich zwei unendliche benachbarte Kurven $\varkappa$ einander berühren, so schneiden die beiden zugeordneten Kurven k des Raumes (x) einander, und dann erfüllen die beiden Bildpunkte X_k und $X_k + dX_k$ die Gleichungen: $F_i(X, dX) = 0$.

Es liefert daher das Mongeschen System: $F_i(X, dX) = 0$ gradezu die Bedingung dafür, daß zwei unendliche benachbarte Kurven $\varkappa$ einander berühren.

65. Hierzu fügen wir die fundamentale Bemerkung, daß die ∞^n Kurven $\varkappa$ ganz beliebig unter den Integralkurven des Mongeschen Systems: $W_k(y, dy) = 0$ gewählt werden können.

Ist in der Tat irgend ein $(n-3)$-gliedriges Mongesches System:

$$W_k(y_1, \ldots, y_{n-1}, dy_1 : \cdots : dy_{n-1}) = 0$$

in den Veränderlichen: $y_1, \ldots, y_{n-1}$ vorgelegt, und sind ∞^n Integral- [165 kurven $\varkappa$ dieses Mongeschen Systems gegeben, so beziehen wir die ∞^n Linienelemente des Mongeschen Systems auf den Punktraum $x_1, \ldots, x_n$ und erhalten dabei ein Pfaffsches System:

$$\alpha_{k1} dx_1 + \cdots + \alpha_{kn} dx_n = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-2),$$

dessen Integralkurven eindeutig den Integralkurven des Gleichungssystems: $W_k = 0$ zugeordnet sind. Wir wählen sodann diejenigen ∞^n Integralkurven k des Pfaffschen Systems, die den $\varkappa$ entsprechen, und beziehen endlich die Kurven k auf den Punktraum $X_1, \ldots, X_n$. Hierdurch erhalten wir ein Mongesches Gleichungssystem: $F_i(X, dX) = 0$, das uns die Kriterien für die Berührung zweier unendlich benachbarter Kurven $\varkappa$ liefert.

66. Die hiermit gefundenen schönen Resultate fassen wir zu dem folgenden Satze zusammen:

Theorem IX. *Man findet alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$\Omega\left(X_1, \ldots, X_n, \frac{\partial f}{\partial X_1} : \frac{\partial f}{\partial X_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) = 0$$

mit ∞^n charakteristischen Kurven in der folgenden Weise: Man nimmt ein ganz beliebiges $(n-3)$-gliedriges Mongesches System:

$$(12) \qquad W_k(y_1, \ldots, y_{n-1}, dy_1 : \cdots : dy_{n-1}) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-3)$$

in $n-1$ Veränderlichen und greift unter dessen ∞^∞ Integralkurven irgend eine Schar, bestehend aus ∞^n Kurven:

$$(13) \qquad \psi_k(y_1, \ldots, y_{n-1}, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-2)$$

heraus. Erteilt man sodann den y und dy bestimmte Werte, die das Gleichungssystem: $W_k = 0$ erfüllen, so gibt es jedesmal ∞^1 Kurven der Schar (13), die das betreffende Linienelement (y, dy) enthalten. Diese Kurven werden durch $n-1$ Relationen zwischen $X_1, \ldots, X_n$ und n Parametern:

$$\varphi_k(X_1, \ldots, X_n, a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

definiert. Das hiermit gefundene Gleichungssystem liefert im Raume (X) ∞^n Kurven, und diese Kurven sind immer die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

67. Wollen wir zum Beispiel in vier Veränderlichen $X_1, \ldots, X_4$ [166 alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit ∞^4 Charakteristiken konstruieren, so nehmen wir im dreifachen Raume x, y, z eine beliebige Mongesche Gleichung:

$$W(x, y, z, dx : dy : dz) = 0,$$

greifen unter ihren Integralkurven ∞^4 heraus und suchen die Bedingung für die Berührung zweier benachbarter Kurven $\varkappa$ der gewählten Schar.

Wir können aber diese letzten Konstruktionen auf eine noch einfachere Form bringen. Es ist ja möglich, zwischen den Integralkurven der Mongeschen Gleichung: $W(x, y, z, dx : dy : dz) = 0$ und allen Kurven einer Ebene ein eineindeutiges Entsprechen festzustellen, so zwar, daß zwei Integralkurven von: $W = 0$ einander berühren, wenn die beiden entsprechenden Kurven der Ebene einander oskulieren. Hieraus folgt unmittelbar der folgende Satz:

Satz 4. *Man findet alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in vier Veränderlichen und mit ∞^4 Charakteristiken in der folgenden Weise: Man nimmt eine beliebige Kurvenschar in der x, y-Ebene, die ∞^4 Kurven:*

$$y - \omega(x, X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

umfaßt. Man bildet sodann die beiden Gleichungen:

$$p - \frac{d\omega}{dx} = 0, \quad r - \frac{d^2\omega}{dx^2} = 0.$$

Deutet man nun in diesen drei Gleichungen die Größen x, y, p, r als Parameter, die Größen X_1, X_2, X_3, X_4 dagegen als Punktkoordinaten in einem vierfachen Raume, so stellen unsere drei Gleichungen ∞^4 Kurven des Raumes (X) dar, und diese ∞^4 Kurven sind immer die Charakteristiken einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

68. In entsprechender Weise findet man durch Betrachtung von Kurven in der Ebene einige, nicht aber alle quasilinearen Differentialgleichungen mit mehr als vier Veränderlichen. Nimmt man zum Beispiel eine Kurvenschar, bestehend aus ∞^5 Kurven:

$$y = f(x, X_1, X_2, \ldots, X_5)$$

und bestimmt alle ∞^1 Kurven dieser Schar, die ein gegebenes Element dritter Ordnung:

$$x, y, p = \frac{dy}{dx}, \quad r = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad s = \frac{d^3y}{dx^3}$$

enthalten, so erhält man im Raume (X) fünffach unendlich viele Kurven, [167 die [die] Charakteristiken einer, allerdings speziellen, quasilinearen partiellen Differentialgleichung darstellen.

Kapitel III.

Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung in n Veränderlichen und mit ∞^{n+1} Charakteristiken.

69. Wir stellen uns jetzt die schwierige Aufgabe: alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in n Veränderlichen:

$$W\left(X_1, X_2, \ldots, X_n;\ \frac{\partial f}{\partial X_1} : \frac{\partial f}{\partial X_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) = 0$$

zu bestimmen, die ∞^{n+1} charakteristische Kurven besitzen.

Da es immer:

$$\infty^{2n-2}$$

$(n-1)$-dimensionale Elemente E_{n-1} gibt, die eine solche Gleichung befriedigen, und da diese ∞^{2n-2} Elemente immer:

$$\infty^{2n-3}$$

charakteristische Streifen erzeugen, so ist jede charakteristische Kurve einer derartigen Gleichung: $W = 0$ der gemeinsame Punktort für ∞^{n-4} charakteristische Streifen. Ist $n = 4$, so wird unser Problem trivial, weil dann jede nicht lineare und auch nicht quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung die gestellte Forderung erfüllt. Wir können daher ohne Beschränkung annehmen, daß $n > 4$ ist.

70. Zunächst wollen wir durch synthetische Betrachtungen im n-fachen Raume $X_1, \ldots, X_n$ pseudolineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit ∞^{n+1} charakteristischen Kurven konstruieren. Sodann zeigen wir, und wiederum durch synthetische Betrachtungen, daß die betreffenden Konstruktionen alle partiellen Differentialgleichungen liefern, die unsere Forderungen erfüllen.

Es mögen $n-1$ Gleichungen von der Form:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n+1}, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1, \ldots, n-1)$$

vorgelegt sein. Wir setzen dabei ausdrücklich voraus, daß sich aus diesen Gleichungen keine Relation zwischen den x allein, und auch keine [168

Relation zwischen den X allein herleiten läßt. Alsdann ordnet unser Gleichungssystem jedem Punkte des Raumes (x) eine Kurve K des Raumes (X) zu, und jedem Punkte (X) wird eine Fläche[1] f des Raumes (x) zugeordnet. Unsere Annahme, daß weder die x noch die X durch eine Relation verknüpft sind, zieht nach sich, daß die Kurven K den Raum (X), und die Flächen f den Raum (x) ausfüllen. Aus unseren Voraussetzungen lassen sich aber keine ganz präzisen Schlüsse über die Anzahl der Kurven K und der Flächen f ziehen, wenn wir auch unmittelbar erkennen, daß die Anzahl der Kurven K höchstens gleich ∞^{n+1} und mindestens gleich ∞^{n-1} ist, daß andererseits die Anzahl der Flächen f höchstens gleich ∞^n und mindestens gleich ∞^{n-1} sein muß.

71. Wir wollen daher ausdrücklich die weitergehende Forderung stellen, daß unser Gleichungssystem: $\varphi_k = 0$ den ∞^{n+1} Punkten (x) ∞^{n+1} verschiedene Kurven K zuordnet.[2]) Alsdann können wir beweisen, daß dieses Gleichungssystem den ∞^n Punkten (X) ∞^n verschiedene Flächen f zuordnet.

Ordnet in der Tat das Gleichungssystem: $\varphi_k = 0$ den ∞^{n+1} Punkten (x) ∞^{n+1} verschiedene Kurven K zu, so gehen, eben weil diese Kurven den Raum (X) ausfüllen, durch jeden Punkt: $X_k = A_k$ zweifach unendlich viele Kurven K. Eine jede unter diesen ∞^2 Kurven K hat einen bestimmten Bildpunkt (x), und der Ort dieser ∞^2 Bildpunkte ist grade die Fläche f, die dem Punkte: $X_k = A_k$ zugeordnet ist. Wäre nun die Anzahl der Flächen f kleiner als ∞^n, so wäre jede Fläche f unendlich vielen Punkten X_k zugeordnet, und dann wäre jeder Punkt einer f der Bildpunkt von unendlich vielen Kurven K. Hiermit sind wir aber auf Widerspruch geführt worden, und also zieht die Annahme, daß unser Gleichungssystem ∞^{n+1} Kurven K bestimmt, mit Notwendigkeit nach sich, daß die Zahl der Flächen f gleich ∞^n ist.

72. Hiermit haben wir den Satz:

Satz 5. *Kann das $(n-1)$-gliedrige Gleichungssystem:*

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1, \ldots, n-1)$$

in den Veränderlichen: [169

$$x_1, \ldots, x_{n+1}, X_1, \ldots, X_n$$

nach $n-1$ Größen x und gleichzeitig nach $n-1$ Größen X aufgelöst werden, so ordnet es jedem Punkte des Raumes $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ eine Kurve K des

1) Es möge uns gestattet sein, die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten kurz als Flächen zu bezeichnen.

2) Die soeben gestellte Forderung deckt sich damit, daß die Flächen f des Raumes (x) keine lineare partielle Differentialgleichung erfüllen.

Raumes (X) und andererseits jedem Punkte (X) eine Fläche f des Raumes (x) zu. Hier können aber mehrere Fälle eintreten. Ordnet insbesondere das Gleichungssystem: $\varphi_k = 0$ den ∞^{n+1} Punkten (x) $(n+1)$-fach unendlich viele verschiedene Kurven K zu, so treten im Raume der (x) n-fach unendlich viele verschiedene Flächen f auf, deren jede einen bestimmten Bildpunkt (X) besitzt.

Im folgenden halten wir an der Annahme fest, daß unser Gleichungssystem: $\varphi_k = 0$ $(n+1)$-fach unendlich viele Kurven K und n-fach unendlich viele Flächen f bestimmt.

73. Jede Kurve K hat ∞^1 Linienelemente L, deren Koordinaten:

$$X_1, \ldots, X_n, dX_1 : \cdots : dX_n$$

$n-3$ Mongesche Gleichungen:

$$f_i(X_1, \ldots, X_n, dX_1 : \cdots : dX_n) = 0 \qquad (i=1, \ldots, n-3)$$

erfüllen. Die Flächen f befriedigen andererseits gewisse partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und $n-1$ abhängigen Veränderlichen. Diese partiellen Differentialgleichungen werden aber im folgenden keine explizite Rolle spielen.

Jede Fläche f enthält ∞^2 zweidimensionale Elemente e_2. Die Schar aller f bestimmt somit:

$$\infty^n \cdot \infty^2 = \infty^{n+2}$$

zweidimensionale Elemente e_2. Daher gehen durch jeden Punkt p des Raumes $x_1, \ldots, x_{n+1}$ einfach unendlich viele Elemente e_2.

74. Will man einen wirklich tiefen Einblick in die Beziehung erhalten, die unsere Gleichungen: $\varphi_k = 0$ zwischen dem $(n+1)$-dimensionalen Raume $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ und dem n-dimensionalen Raume $X_1, \ldots, X_n$ feststellen, so muß man seine Aufmerksamkeit auf die Linienelemente L des Raumes (X) und die zweidimensionalen Elemente e_2 des Raumes (x) richten.

Wir bemerken zunächst, daß es ∞^{n+2} Linienelemente L gibt, und daß ebensoviele Elemente e_2 vorhanden sind. Wir können überdies nach- [170 weisen, daß die ∞^{n+2} Linienelemente L und die ∞^{n+2} Elemente e_2 innerhalb passender Bereiche eineindeutig auf einander bezogen sind.

Erteilen wir den x bestimmte Zahlenwerte, so ist dem hiermit gewählten Punkte p im Raume (X) eine ganz bestimmte Kurve K zugeordnet. Wählen wir sodann unter den ∞^1 Linienelementen dieser Kurve ein bestimmtes L, so ist dem Punkte P dieses Linienelementes eine ganz bestimmte Fläche f zugeordnet, die durch den Punkt p hindurchgeht und in diesem Punkte ein bestimmtes zweidimensionales Element e_2 besitzt.

Hiermit ist jedem Linienelemente L ein bestimmtes Element e_2 zugeordnet, und eine leichte Änderung unserer Überlegungen zeigt, daß umgekehrt jedem Elemente e_2 des Raumes (x) ein bestimmtes Linienelement L des Raumes (X) zugeordnet ist. Hieraus folgt, daß zwischen den ∞^{n+2} zweidimensionalen Elementen e_2 des Raumes (x) und den ∞^{n+2} Linienelementen L des Raumes (X) ein eineindeutiges Entsprechen festgestellt ist.

75. Wir werden nun dieses Entsprechen im Infinitesimalen genauer untersuchen.

Wir wählen ein bestimmtes Linienelement L im Raume (X) und bezeichnen die benachbarten Linienelemente unserer Schar mit L'. Dem Linienelemente L ist im Raume (x) ein bestimmtes zweidimensionales Element e_2 zugeordnet, dessen benachbarte Elemente e_2' heißen mögen. Wir bezeichnen den Punkt des Linienelementes L, beziehungsweise L', mit P, beziehungsweise P', und dementsprechend den Punkt des Elementes e_2, beziehungsweise e_2', mit p, beziehungsweise p'. Betrachten wir nun das Gebiet aller zu p benachbarten Punkte, so liegt jeder Punkt p' dieses infinitesimalen Gebietes auf einem ganz bestimmten Elemente e_2', dabei vorausgesetzt, daß von infinitesimalen Größen zweiter Ordnung abgesehen wird. Dementsprechend liegt auch jeder zu P benachbarte Punkt P' auf einem ganz bestimmten Linienelemente L'.

Unsere Transformation zwischen den Elementen e_2' und L' der beiden Räume bestimmt somit ein eindeutiges Entsprechen zwischen den Punkten p', die in der Umgebung des Punktes p liegen, und den Punkten P', die der Umgebung des Punktes P angehören. Und das hiermit definierte Entsprechen zwischen den infinitesimalen Punktgebieten p' und P' ist eo ipso projektiv.

Es ist selbstverständlich, daß die projektive Beziehung zwischen den beiden infinitesimalen Punktgebieten p' und P', unter denen das erste [171 $(n+1)$-dimensional, das andere n-dimensional ist, eine ausgeartete Transformation sein muß. Geht man vom Punkte p des zweidimensionalen Elementes e_2 zu einem benachbarten Punkte p' über, der in der zweidimensionalen Ebene des Elementes e_2 gelegen ist, anders ausgesprochen: setzt man voraus, daß die beiden benachbarten Elemente e_2 und e_2' vereinigt liegen, so können die beiden Punkte P und P' zusammenfallen.

76. Um diese Schwierigkeit zu bewältigen, wollen wir aus dem infinitesimalen $(n+1)$-dimensionalen Punktgebiete p' ein kleineres Punktgebiet π' ausscheiden, das eben und $(n-1)$-dimensional und im übrigen nur der Beschränkung unterworfen ist, daß es zwar den Punkt p, dagegen

weder das Element e_2 noch irgend ein in e_2 gelegenes Linienelement enthalten darf.

Es liegt jetzt auf der Hand, daß zwei verschiedene Punkte π' dieses Gebietes immer zwei getrennte Bildpunkte Π' in der Umgebung des Punktes P haben werden. Also können wir auch das Punktgebiet Π' als eben und $(n-1)$-dimensional betrachten. Zwischen den beiden hiermit definierten infinitesimalen und $(n-1)$-dimensionalen Gebieten π' und Π' besteht eo ipso eine projektive Beziehung, die nicht ausgeartet ist.

Der hiermit abgeleitete Satz gibt uns eine feste Grundlage für die folgenden Entwickelungen. Wir ziehen in erster Linie den wichtigen Schluß, daß q benachbarte und getrennte Elemente $e_2', e_2'', \dots, e_2^{(q)}$, die in einem und nur einem $(\omega+1)$-dimensionalen Elemente des Raumes (x) enthalten sind, sich als q getrennte und benachbarte Linienelemente $L', L'', \dots, L^{(q)}$ abbilden, die in einem und nur in einem ω-dimensionalen Elemente des Raumes (X) enthalten sind.

77. Jetzt führen wir eine neue und wesentliche Voraussetzung ein, daß nämlich unsere ∞^n Flächen f das $(n-3)$-gliedrige Pfaffsche System:

$$\alpha_{k1} dx_1 + \cdots + \alpha_{k,n+1} dx_{n+1} = 0 \qquad (k = 1, \dots, n-3) \tag{1}$$

erfüllen.

Betrachten wir einen bestimmten Punkt p, so gehen jedesmal ∞^1 Flächen f durch diesen Punkt, und diese ∞^1 Flächen ordnen dem Punkte p einfach unendlich viele zweidimensionale Elemente e_2 zu. Das Pfaffsche System ordnet andererseits dem Punkte p dreifach unendlich viele [172 Linienelemente zu, die ein vierdimensionales Element e_4 erzeugen. Unsere Annahme, daß die Flächen f Integralgebilde des Pfaffschen Systems (1) sind, kommt darauf hinaus, daß die ∞^1 dem Punkte p zugeordneten Elemente e_2 in dem soeben besprochenen vierdimensionalen Elemente e_4 enthalten sind.

78. Im Raume (x) wählen wir eine bestimmte Fläche f, die wir mit f_0 bezeichnen; der Bildpunkt im anderen Raume möge P_0 heißen. Durchläuft nun ein Punkt p die Fläche f_0, so wissen wir, daß die zugeordnete Kurve K immer durch den Punkt P_0 hindurchgeht. Die ∞^2 hiermit konstruierten Kurven K umfassen eo ipso alle durch P_0 gehenden Kurven K, und sie erzeugen also eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit M_3^0. Zu jedem Punkte P_0 gehört eine solche Mannigfaltigkeit M_3, und es gibt offenbar ∞^n derartige Mannigfaltigkeiten M_3.

Lassen wir den Punkt P_0 sich nach einer Kurve K bewegen, so enthalten die ∞^1 Mannigfaltigkeiten M_3 sämtlich diese Kurve K. Es ist aber nicht schwer, zu erkennen, daß die ∞^1 Mannigfaltigkeiten M_3, die eine Kurve K gemeinsam haben, einander nach dieser Kurve berühren. Ist das erst bewiesen, so ist es leicht, den nächsten Schritt zu machen und zu beweisen, daß alle ∞^{n+1} Kurven K die Charakteristiken einer pseudolinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sind, für welche die besprochenen M_3 Integralmannigfaltigkeiten darstellen.

79. Auf der Kurve K_0 wählen wir zwei Punkte P_0 und $\mathfrak{P}_0$ und bezeichnen die zugehörigen M_3 mit M_3^0 und $\mathfrak{M}_3^0$. Unter den ∞^2 durch P_0 gehenden Kurven K greifen wir drei unendlich benachbarte heraus, nämlich K_0, K' und K''. Ebenso greifen wir unter den ∞^2 durch $\mathfrak{P}_0$ gehenden Kurven drei unendlich benachbarte heraus, nämlich K_0, $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$. Sodann nehmen wir unter den ∞^1 Linienelementen der Kurve K_0 ein bestimmtes, das L_0 heißen möge; wir bezeichnen ferner ein benachbartes Linienelement der Kurven K', K'', $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ der Reihe nach mit L', L'', $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$.

Es ist dann klar, daß die drei Linienelemente L_0, L', L'' (im allgemeinen jedenfalls) ein dreidimensionales Element E_3^0 der Mannigfaltigkeit M_3^0 bestimmen, und daß andererseits die drei benachbarten Linienelemente L_0, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$ ein dreidimensionales Element $\mathfrak{E}_3^0$ der Mannigfaltig- [173
keit $\mathfrak{M}_3^0$ bestimmen. Wir behaupten, daß diese beiden dreidimensionalen Elemente E_3^0 und $\mathfrak{E}_3^0$ identisch sind, und daß dementsprechend die Mannigfaltigkeiten M_3^0 und $\mathfrak{M}_3^0$ einander in dem betreffenden gemeinsamen Punkte berühren.

80. Um die Richtigkeit dieser Behauptung nachzuweisen, brauchen wir nur die fünf zweidimensionalen Elemente: e_2^0, e_2', e_2'', $\mathfrak{e}_2'$, $\mathfrak{e}_2''$ des Raumes (x) zu betrachten, die den fünf Linienelementen: L, L', L'', $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$ zugeordnet sind. Die Punkte p, p', p'', $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ dieser fünf zweidimensionalen Elemente liegen sämtlich in dem vierdimensionalen Elemente e_4, das von unserem Pfaffschen Systeme dem Punkte p zugeordnet wird. Aber hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung nachgewiesen, denn früher (S. 171 [hier S. 441]) haben wir gezeigt, daß beliebig viele benachbarte und getrennte Elemente e_2, die in einem $(\omega+1)$-dimensionalen Elemente des Raumes (x) enthalten sind, im Raume (X) Linienelemente L liefern, die in einem ω-dimensionalen Elemente enthalten sind.

Wir formulieren das erhaltene Resultat als Satz:

Satz 6. *Zieht man in einem Punkte (X) von allgemeiner Lage alle ∞^2 hindurchgehenden Kurven K, so erzeugen diese Kurven jedesmal eine drei-*

dimensionale Mannigfaltigkeit M_3, die zu dem gewählten Punkte gehört. Es gibt selbstverständlich ∞^n verschiedene derartige M_3; jede Kurve K liegt auf einfach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten M_2 unsrer Schar, und diese M_3 berühren einander jedesmal nach der gemeinsamen Kurve K.

81. Eine jede unter den eben konstruierten M_3 enthält eo ipso dreifach unendlich viele dreidimensionale Elemente E_3. Nun ist allerdings die Anzahl dieser M_3 gleich ∞^n; da aber jedes dreidimensionale Element E_3 einer solchen M_3 gleichzeitig ∞^1 anderen M_3 angehört, so schließen wir, daß die Schar aller E_3, die unseren ∞^n Mannigfaltigkeiten M_3 angehören, nicht ∞^{n+3}, sondern nur ∞^{n+2} Elemente umfaßt.

Hieraus lassen sich verschiedene Schlüsse ziehen. Fassen wir eine jede M_3 als Ort von ∞^{n-1} $(n-1)$-dimensionalen Elementen E_{n-1} auf und beachten wir dabei, daß durch jedes dreidimensionale Element E_3 immer ∞^{n-4} Elemente E_{n-1} hindurchgehen, so erkennen wir, daß die Schar aller E_{n-1}, die unseren ∞^n Mannigfaltigkeiten M_3 angehören, nicht:

$$\infty^n \cdot \infty^{n-1},$$

sondern nur: [174

$$\infty^{n+2} \cdot \infty^{n-4} = \infty^{2n-2}$$

Elemente umfaßt. Nun aber enthält der Raum: $X_1, \ldots, X_n$, wie wir wissen, grade:

$$\infty^{2n-1}$$

$(n-1)$-dimensionale Elemente E_{n-1}, und also sind unsere ∞^n Mannigfaltigkeiten M_3 Integralgebilde einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$W\left(X_1, X_2, \ldots, X_n, \frac{\partial f}{\partial X_1} : \frac{\partial f}{\partial X_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung ist immer pseudolinear, da ihre Charakteristiken, wie man leicht übersieht, grade die ∞^{n+1} Kurven K sein müssen.

82. Hiermit ist das folgende beachtenswerte Resultat erhalten:

Theorem X. *Liegt in $n+1$ Veränderlichen:*

$$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$$

ein nichtintegrables $(n-3)$-gliedriges Pfaffsches System:

$$a_{k1} dx_1 + \cdots + a_{k,n+1} dx_{n+1} = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-3)$$

vor, und kennt man ∞^n zweidimensionale Integralmannigfaltigkeiten:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n+1}, c_1, \ldots, c_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1),$$

die den Raum ausfüllen und keine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen, so stellen die entsprechenden Gleichungen:

$$\varphi_k(a_1, \ldots, a_{n+1}, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1),$$

wenn die a als willkürliche Konstanten, die X als laufende Koordinaten eines n-fachen Raumes gedeutet werden, ∞^{n+1} *verschiedene Kurven K des n-dimensionalen Raumes (X) dar. Diese* ∞^{n+1} *Kurven K sind die Charakteristiken einer pseudolinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die jedenfalls* ∞^n *dreidimensionale Integralmannigfaltigkeiten besitzt. Durch jeden Punkt (X) gehen ja* ∞^2 *Charakteristiken, die eine Integralmannigfaltigkeit erzeugen.*

83. Wirklich interessante Resultate gibt dieser Satz erst dann, [175
wenn n größer als 4 ist. Nichtsdestoweniger kann es gut sein, einen Augenblick den Fall $n = 4$ zu untersuchen.

Wir betrachten die Pfaffsche Gleichung:

$$(1) \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

in den fünf Veränderlichen x, y, z, p, q. Nimmt man im dreifachen Raume x, y, z irgend eine Flächenschar, bestehend aus ∞^4 verschiedenen Flächen:

$$(2) \qquad z - \varphi(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0,$$

die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen, so bestimmen die drei Gleichungen:

$$(3) \qquad z - \varphi(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0, \quad p - \varphi_x = 0, q - \varphi_y = 0$$

bekanntlich vierfach unendlich viele Integralmannigfaltigkeiten der Pfaffschen Gleichung (1). Deutet man daher in (3) die Größen x, y, z, p, q als Parameter, die Größen $a_1, \ldots, a_4$ dagegen als laufende Koordinaten eines vierfachen Raumes, so definieren diese drei Gleichungen alle ∞^5 Charakteristiken einer wohlbekannten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

84. Es stellt sich nun die interessante Frage, ob das Theorem X alle pseudolinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung liefert, die n Veränderliche enthalten und ∞^{n+1} Charakteristiken besitzen. Die nachstehende Diskussion wird uns zeigen, daß diese Frage mit „ja" zu beantworten ist.

Wir wollen annehmen, daß die Gleichungen:

$$\varphi_k(a_1, \ldots, a_{n+1}, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

alle ∞^{n+1} Charakteristiken einer pseudolinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Omega\left(X_1, \ldots, X_n, \frac{\partial f}{\partial X_1} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) = 0$$

darstellen. Dann erfüllen die Gleichungen:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n+1}, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

die im Anfange dieses Kapitels (S. 167 [hier S. 437]) gestellten For- [176
derungen; sie ordnen daher jedem Punkte (X) eine Fläche f zu, und in dieser Weise erhalten wir ∞^n verschiedene Flächen, die eo ipso keine lineare partielle Differentialgleichung erfüllen.

Bezeichnen wir nun, wie früher, die Linienelemente der Kurven K mit L, und die zweidimensionalen Elemente der Flächen f mit e_2, so wissen wir, daß die ∞^{n+2} Linienelemente L eineindeutig auf die Elemente e_2 bezogen sind, so zwar, daß vereinigte Lage benachbarter Elemente bewahrt wird.

85. Ehe wir nun weiter gehen, müssen wir die vorgelegte pseudolineare partielle Differentialgleichung: $\Omega = 0$ genauer untersuchen.

Durch jeden Punkt (X) gehen eo ipso ∞^2 Charakteristiken K, die eine dreidimensionale Integralmannigfaltigkeit M_3 erzeugen. Und offenbar finden wir in dieser Weise ∞^n solche M_3, die sämtlich unsere partielle Differentialgleichung: $\Omega = 0$ befriedigen. Wir behaupten, daß die ∞^1 Mannigfaltigkeiten M_3 dieser Schar, die eine Charakteristik K gemein haben, einander nach dieser Kurve berühren.

Jede M_3 enthält ∞^2 charakteristische Kurven K und ∞^{n-2} $(n-1)$-dimensionale charakteristische Streifen S_{n-1}. Also ist jede Charakteristik K einer M_3 der gemeinsame Punktort für ∞^{n-4} charakteristische Streifen dieser M_3. Wir wissen aber andererseits, daß die pseudolineare Gleichung: $\Omega = 0$ ∞^{2n-2} Elemente E_{n-1}, ferner ∞^{2n-3} charakteristische Streifen S_{n-1} und ∞^{n+1} charakteristische Kurven K besitzt. Also ist jede Kurve K der gemeinsame Punktort für ∞^{n-4} charakteristische Streifen der Gleichung: $\Omega = 0$. Nehmen wir daher einen bestimmten Punkt P einer Kurve K und betrachten auf den ∞^{n-4} zugehörigen charakteristischen Streifen S_{n-1} alle Elemente E_{n-1}, die durch P gehen, so bilden diese ∞^{n-4} Elemente E_{n-1} ein Bündel, das heißt: die betreffenden E_{n-1} enthalten ein gemeinsames dreidimensionales Element E_3.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß alle dreidimensionalen Integralmannigfaltigkeiten, die eine gewisse Charakteristik K gemein haben, in jedem Punkte dieser Kurve ein dreidimensionales Element E_3 gemein haben; anders ausgesprochen: die betreffenden dreidimensionalen Integralmannigfaltigkeiten berühren einander nach der gemeinsamen charakteristischen Kurve K.

86. Wir nehmen jetzt eine Charakteristik K^0, wählen auf dieser [177 Kurve zwei Punkte P^0 und $\mathfrak{P}^0$ und konstruieren die beiden dreidimensionalen Integralmannigfaltigkeiten M_3^0 und $\mathfrak{M}_3^0$, die von den ∞^2 durch P^0, beziehungsweise $\mathfrak{P}^0$ gehenden K erzeugt werden. Auf M_3^0 wählen wir zwei zu K^0 benachbarte Charakteristiken allgemeiner Lage: K' und K''; in entsprechender Weise bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ zwei zu K^0 benachbarte Charakteristiken der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^0$. Auf K^0 wählen wir ein bestimmtes Linienelement L^0 und bezeichnen das benachbarte Linienelement der Kurven K', K'', $\mathfrak{K}'$, beziehungsweise $\mathfrak{K}''$, der Reihe nach mit L', L'', $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$. Diese fünf Linienelemente liegen auf einem Elemente E_3 des Raumes (X). Also liegen die fünf zugeordneten zweidimensionalen Elemente:

$$e_2^0,\ e_2',\ e_2'',\ \mathfrak{e}_2',\ \mathfrak{e}_2'' \tag{4}$$

in einem vierdimensionalen Elemente e_4 des Raumes (x). In diesem Elemente e_4 sind dann offenbar auch die Punkte:

$$p^0,\ p',\ p'',\ \mathfrak{p}',\ \mathfrak{p}''$$

der fünf Elemente (4) enthalten.

Halten wir nun im Raume (X) den Punkt P^0 sowie die Kurve K^0 fest, lassen aber $\mathfrak{P}^0$ diese Kurve durchlaufen, so bleiben die drei Elemente e_2^0, e_2', e_2'' in Ruhe, gleichzeitig also auch ihre Punkte p^0, p', p'', sowie das Element e_4. Dagegen nehmen die Elemente $\mathfrak{e}_2'$ und $\mathfrak{e}_2''$, sowie die zugehörigen Punkte $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$, nach und nach unendlich viele Lagen an; in dem festen Elemente e_4 bleiben sie aber immer.

Also sehen wir, daß alle Elemente e_2 des Raumes (x), die einen gemeinsamen Punkt p haben, sämtlich in einem gewissen vierdimensionalen Elemente e_4 enthalten sind. Mit anderen Worten: die Flächen f sind Integralmannigfaltigkeiten eines $(n-3)$-gliedrigen Pfaffschen Systems.

87. Wir können also sagen:

Theorem XI. *Die im Theoreme X gegebene Methode liefert alle pseudolinearen partiellen Differentialgleichungen:*

$$W\left(X_1, \ldots, X_n, \frac{\partial f}{\partial X_1} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) = 0$$

mit ∞^{n+1} charakteristischen Kurven.

88. Es ist nun leicht, eine Reihe weiterer Resultate abzuleiten. [178 Hier begnügen wir uns mit einigen einfachen Bemerkungen.

Wir wollen annehmen, daß die ∞^{n+1} Charakteristiken einer pseudolinearen Differentialgleichung: $W = 0$ durch die Gleichungen:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n+1}, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

definiert werden. Es befriedigen dann die ∞^n Flächen f ein $(n-3)$-gliedriges Pfaffsches System:

$$\alpha_{k1} dx_1 + \cdots + \alpha_{kn} dx_n = 0 \qquad (k=1,\ldots,n-3).$$

Es ist nun denkbar, daß dieses Pfaffsche System noch weitere zweidimensionale Integralmannigfaltigkeiten f' besitzt. Alsdann erzeugen die ∞^2 Charakteristiken K, deren ∞^2 Bildpunkte auf einer f' liegen, immer eine dreidimensionale Integralmannigfaltigkeit der pseudolinearen partiellen Differentialgleichung: $W = 0$.

Wir wollen diese letzten Theorien durch lehrreiche Beispiele illustrieren.

89. Beispiel I. Sei:

$$t = T(x, y, z, p, q, r, s)$$

eine beliebige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, unter deren Integralflächen sechsfach unendlich viele durch die Gleichung:

$$z - V(x, y, X_1, X_2, \ldots, X_6) = 0$$

mit den Parametern $X_1, \ldots, X_6$ dargestellt sein mögen. Wir bilden die Gleichungen:

$$(\omega) \quad z - V = 0, \quad p - V_x = 0, \quad q - V_y = 0, \quad r - V_{xx} = 0, \quad s - V_{xy} = 0$$

und erhalten hierdurch im Raume: x, y, z, p, q, r, s eine Schar, bestehend aus ∞^6 zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, die das dreigliedrige Pfaffsche System:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dp - r\,dx - s\,dy = 0, \quad dq - s\,dx - T\,dy = 0$$

befriedigen. Deuten wir daher in den Gleichungen (ω) die Größen $x, y, z, \ldots, s$ als Parameter, die X dagegen als laufende Koordinaten, so definieren diese Gleichungen alle ∞^7 Charakteristiken einer pseudo- [179 linearen Differentialgleichung:

$$W\left(X_1, \ldots, X_6, \frac{\partial f}{\partial X_1} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial X_6}\right) = 0,$$

die ∞^∞ viele dreidimensionale Integralgebilde besitzt. Es ergibt ja jede Integralfläche der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung: $t - T = 0$ ein solches Integralgebilde.

90. Beispiel II. Noch einfacher ist in gewissem Sinne das folgende Beispiel.

Wir denken uns zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen x, y und zwei abhängigen Veränderlichen z_1, z_2 vorgelegt und auf die Form:

$$q_1 - Q_1(x, y, z_1, z_2, p_1, p_2) = 0, \quad q_2 - Q_2(x, y, z_1, z_2, p_1, p_2) = 0$$

gebracht. Sodann ersetzen wir dieses Gleichungssystem durch das äquivalente zweigliedrige Pfaffsche System:

$$dz_1 - p_1 dx - Q_1 dy = 0, \quad dz_2 - p_2 dx - Q_2 dy = 0. \tag{5}$$

Kennen wir nun ∞^5 gemeinsame Integralmannigfaltigkeiten:

$$z_k - V_k(x, y, X_1, \ldots, X_5) = 0 \qquad (k=1,2)$$

der beiden Gleichungen: $q_1 - Q_1 = 0$, $q_2 - Q_2 = 0$, so bestimmen die vier Gleichungen:

$$z_k - V_k = 0, \quad p_k - \frac{\partial V_k}{\partial x} = 0 \qquad (k=1,2) \tag{6}$$

fünffach unendlich viele zweidimensionale Integralmannigfaltigkeiten des Pfaffschen Systems (5).

Deutet man daher die Größen: x, y, z_1, z_2, p_1, p_2 als Parameter, die Größen X dagegen als laufende Koordinaten, so definieren die Gleichungen (6) sechsfach unendlich viele Kurven des Raumes (X), und diese Kurven sind die Charakteristiken einer pseudolinearen partiellen Differentialgleichung:

$$W\left(X_1, \ldots, X_5, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_5}\right) = 0.$$

Dabei beachten wir, daß jede Lösung: $z_1 - \Theta_1(x, y) = 0$, [180
$z_2 - \Theta_2 = 0$ des Gleichungssystems: $q_1 - Q_1 = 0$, $q_2 - Q_2 = 0$ eine dreidimensionale Integralmannigfaltigkeit der Gleichung: $W = 0$ liefert.

Liegt umgekehrt eine pseudolineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung: $W = 0$ in $X_1, \ldots, X_5$ vor, deren ∞^6 Charakteristiken wir schon kennen, so reduziert sich ihre Integration unmittelbar auf die Integration eines Systems: $q_1 - Q_1 = 0$, $q_2 - Q_2 = 0$.

In einer folgenden Abhandlung verallgemeinern wir die Entwickelungen dieser Arbeit.