SOPHUS LIE
GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

AUF GRUND EINER BEWILLIGUNG AUS DEM NORWEGISCHEN FORSCHUNGSFONDS VON 1919 UND MIT UNTERSTÜTZUNG DER VIDENSKAPSAKADEMI ZU OSLO UND DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG · HERAUSGEGEBEN VON DEM NORWEGISCHEN MATHEMATISCHEN VEREIN DURCH

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
OSLO

VIERTER BAND

ABHANDLUNGEN ZUR THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZWEITE ABTEILUNG

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1929

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1929

SOPHUS LIE

SOPHUS LIE

SAMLEDE AVHANDL

VED BEVILGNING FRA
STATENS FORSKNINGSFOND AV 1
OG MED UNDERSTØTTELSE AV
VIDENSKAPSAKADEMIET I OSLO
OG
VIDENSKAPERNES AKADEMI I LEIP
UTGIT AV
NORSK MATEMATISK FORENING

VED

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR VED UNIVERSITETET
I GIESSEN

POUL HEEG
PROFESSOR VED UNIV
I OSLO

FJERDE BIND

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1929

LEI
B. G. TE
19

SOPHUS LIE

GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

AUF GRUND EINER BEWILLIGUNG AUS DEM
NORWEGISCHEN FORSCHUNGSFONDS VON 1919
MIT UNTERSTÜTZUNG DER
VIDENSKAPSAKADEMI ZU OSLO
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG
HERAUSGEGEBEN VON DEM
NORWEGISCHEN MATHEMATISCHEN VEREIN

DURCH

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
OSLO

VIERTER BAND

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1929

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1929

SOPHUS LIE

SAMLEDE AVHANDLINGER

VED BEVILGNING FRA
STATENS FORSKNINGSFOND AV 1919
OG MED UNDERSTØTTELSE AV
VIDENSKAPSAKADEMIET I OSLO
OG
VIDENSKAPERNES AKADEMI I LEIPZIG
UTGIT AV
NORSK MATEMATISK FORENING

VED

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR VED UNIVERSITETET
I GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR VED UNIVERSITETET
I OSLO

FJERDE BIND

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1929

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1929

SOPHUS LIE

GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

AUF GRUND EINER BEWILLIGUNG AUS DEM
NORWEGISCHEN FORSCHUNGSFONDS VON 1919
MIT UNTERSTÜTZUNG DER
VIDENSKAPSAKADEMI ZU OSLO
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG
HERAUSGEGEBEN VON DEM
NORWEGISCHEN MATHEMATISCHEN VEREIN

DURCH

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
OSLO

VIERTER BAND

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1929

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1929

ABHANDLUNGEN ZUR

THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZWEITE ABTEILUNG

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL

AVHANDLINGER TIL

DIFFERENTIALLIGNINGERNES TEORI

ANDEN AVDELING

UTGIT AV

FRIEDRICH ENGEL

Vorwort des Herausgebers.

Der dritte Band, mit dem ich 1922 diese Ausgabe begonnen habe, enthielt einen Teil der Lieschen Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen. Der jetzt erscheinende vierte bringt die noch übrigen. In den vier vorliegenden Bänden III—VI sind nunmehr die Abhandlungen Lies vereinigt, die in das Gebiet der Differentialgleichungen und der kontinuierlichen Gruppen fallen. Freilich darf man nicht übersehen, daß diese Theorien auch in gar manchen der geometrischen Abhandlungen stark hervortreten, die den Inhalt des ersten und zweiten Bandes bilden werden.

Mehr als die Hälfte des vierten Bandes wird von den drei großen Abhandlungen I—III ausgefüllt, die Lie 1874—77 in Bd. VIII, IX und XI der Mathematischen Annalen veröffentlicht hat. Er gibt darin eine umgearbeitete und zum Teil sehr vervollständigte Darstellung des Inhaltes der Abhandlungen II—IV, VI—X, XII—XVIII von Bd. III.

Als Nr. IV folgt eine Arbeit von 1888, in der Lie die Theorie der Berührungstransformationen ungefähr auf dem Wege begründet, den er eingeschlagen hatte, als er sie zuerst für sich entwickelte. Diese Begründung ist vollständig verschieden von der 1873 veröffentlichten (Bd. III, Abh. IX, vgl. auch Bd. IV, Abh. I, S. 5—26), die Lie gewählt hatte, weil er hoffte, dadurch den Analytikern, namentlich A. Mayer, leichter verständlich zu sein.

In Nr. V (1891) wird eine Theorie ausführlich entwickelt, die Lie 1885 (Bd. V d. Ausg., Abh. XXI) nur kurz angedeutet hatte. Er zeigt hier, wie ein viel bearbeitetes Problem aus dem Gebiete der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen höherer Ordnung behandelt werden kann bei Benutzung seiner Gruppentheorie und seiner Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Er ist 1896 noch einmal auf dieses Problem zurückgekommen (Bd. VI, Abh. XXV, S. 623—628).

Nr. VI und VII (1893) sind dadurch veranlaßt, daß sich E. Vessiot und Alf Guldberg mit der Frage beschäftigt hatten, welche simultanen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen Fundamentalintegrale in dem Sinne besitzen, daß sich das allgemeinste Lösungssystem durch eine endliche Anzahl von partikulären Lösungssystemen ausdrücken läßt. Lie zeigt, daß zu jeder endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppe ein simultanes System von der verlangten Beschaffenheit gehört, und daß man damit zu einer allgemeinen Kategorie von simultanen Systemen kommt, deren Integrationstheorie er schon längst [Bd. III, Abh. XXXIX, XL (1882) und Bd. VI, Abh. III (1885), S. 195—200] eingehend betrachtet hatte. Er findet überdies, daß damit alle simultanen Systeme mit Fundamentalintegralen reschöpft sind.

Im Jahre 1891 hatte E. Goursat Vorlesungen über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. veröffentlicht, das erste Lehrbuch, das diese Theorie in der neuen Gestalt brachte, die Lie ihr gegeben hatte. Es ist daher begreiflich, daß Lie die deutsche Übersetzung dieser Vorlesungen, die Maser 1893 herausgab, mit Genugtuung begrüßte und ihr ein Begleitwort mitgab, das hier als Nr. VIII abgedruckt ist.

Abhandlung IX (1895) beginnt mit geschichtlichen Bemerkungen über die Entwickelung der höheren Analysis und über die verschiedenen Richtungen, die man in der Theorie der Differentialgleichungen verfolgt hat. Lie bespricht dann die Untersuchungen von Darboux und M. Lévy über partielle Differentialgleichungen 2. O. und gibt eine ausführliche Darstellung der sehr wesentlichen Ergänzung, die Lévys Theorie durch ihn erhalten hat. Erst hierdurch wird die kurze Mitteilung, die er 1880 darüber veröffentlicht hatte (Bd. III, Abh. XXVII), allgemein zugänglich. Hieran knüpfen sich weitergehende Untersuchungen, die Lie auch schon 1880 angedeutet hatte. Besonders bemerkenswert ist, daß Lie hier Veranlassung hatte, auf Ideen zurückzukommen, die schon aus dem Jahre 1872 (Bd. III, Abh. IV) stammten. Es handelt sich nämlich um die Betrachtung gewisser nichtlinearer partieller Differentialgleichungen 1. O. des R_n, die eine vollständige Lösung besitzen, welche aus Punktmannigfaltigkeiten von niedrigerer als $(n-1)$-ter Dimension besteht. Man findet hier verschiedene schöne Beispiele derartiger Differentialgleichungen, die Lie jetzt als semilinear bezeichnet.

Im zweiten Teile von Abhandlung IX beschäftigt sich Lie mit partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung, die bekannte infinitesimale Berührungstransformationen gestatten. Die Kenntnis dieser Transformationen läßt sich auf zwei verschiedene Arten verwerten. Erstens gibt es unter Umständen gewisse Lösungen, die bei den bekannten infinitesimalen Transformationen invariant bleiben; die Bestimmung dieser etwaigen Lösungen ist dann ein einfacheres Integrationsproblem. Zweitens wird der Inbegriff aller Lösungen durch die bekannten Transformationen in invariante Scharen zerlegt, wodurch eine Zerlegung des Integrationsproblems bewirkt wird. Lie verfolgt beide Wege, den zweiten allerdings nur für den Fall, daß die bekannten infinitesimalen Transformationen eine unendliche kontinuierliche Gruppe erzeugen. Die Zerlegung des Integrationsproblems wird dann dadurch erreicht, daß ein volles System von Differentialinvarianten dieser Gruppe eingeführt wird.

Abhandlung X gibt eine Verallgemeinerung des bekannten Meusnierschen Satzes über die Krümmungshalbmesser der Kurven einer Fläche, die einander in einem Punkte der Fläche berühren. Es zeigt sich nämlich, daß dieser Satz überhaupt für alle Integralkurven einer Mongeschen Gleichung gilt, die in einem Punkte die Tangente gemein haben. Diese Abhandlung hätte ebensogut in Bd. II untergebracht werden können. Ich habe sie hier eingereiht, weil Systeme von Mongeschen Gleichungen schon in Abhandlung IX auftreten und in X sogar eine sehr große Rolle spielen.

Abhandlung XI ist die erste und leider einzige Arbeit, in der sich Lie eingehend mit semilinearen partiellen Differentialgleichungen 1. O. beschäftigt, und zwar behandelt er die beiden Klassen dieser Gleichungen, die den linearen am nächsten stehen, nämlich die quasilinearen Gleichungen des R_n,

wie er sie nennt, die gerade ∞^n charakteristische Kurven haben, und die pseudolinearen mit ∞^{n+1} solchen Kurven.

In Kapitel I betrachtet Lie eine beliebige Schar von ∞^n Kurven:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

des $r_n: x_1, \ldots, x_n$ und untersucht die Beziehung, die zwischen dem r_n und dem R_n der Parameter $X_1, \ldots, X_n$ besteht. In jedem der beiden Räume tritt eine Schar von ∞^n Kurven auf und befriedigt jedesmal ein System von $n-2$ Mongeschen Gleichungen. Die Integralkurven dieser beiden Systeme sind einander innerhalb eines gewissen Bereiches eindeutig umkehrbar zugeordnet, und hierdurch ist eine Berührungstransformation zwischen diesen Kurven bestimmt, die zugleich zwischen den beiden Räumen eine Berührungstransformation im gewöhnlichen Sinne herstellt. Es ergibt sich, daß die ∞^n Kurven des R_n dann und nur dann die charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung 1. O. sind, wenn das Mongesche System, dem die ∞^n Kurven des r_n genügen, aus lauter Pfaffschen Gleichungen besteht. Jede solche quasilineare Gleichung besitzt ∞^∞ Integralgebilde, die als Punktmannigfaltigkeiten zweifach ausgedehnt sind.

Kapitel II ist den Systemen von Pfaffschen Gleichungen gewidmet. Als eine m-gliedrige vollständige Lösung eines solchen Systems im R_n bezeichnet Lie jede Schar von ∞^m $(n-m)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, die den Raum ausfüllt und deren Mannigfaltigkeiten dem Pfaffschen Systeme genügen. Er betrachtet zunächst zweigliedrige Pfaffsche Systeme, die eine m-gliedrige, aber keine $(m-1)$-gliedrige vollständige Lösung besitzen $(2 < m < n-2)$, und zwar erledigt er die Fälle $m = 3$ und $m = 4$ vollständig. Im ersten Falle kann das Pfaffsche System auf ein System in fünf Koordinaten zurückgeführt werden, nämlich auf die Bedingungen für die vereinigte Lage von zwei unendlich benachbarten Linienelementen des R_3, im zweiten Falle auf eines in acht Koordinaten, auf die Bedingungen für die vereinigte Lage von zwei unendlich benachbarten zweidimensionalen Elementen des R_4. Das Integrationsproblem ist verschieden je nach der Zahl der endlichen Relationen, durch die diese Koordinaten verknüpft sind. Es folgen dann Untersuchungen über $(n-2)$-gliedrige Pfaffsche Systeme des R_n. Kennt man eine den Raum ausfüllende Schar von ∞^{n-1} Integralkurven eines solchen Systems, so kann man alle Integralkurven des Systems auf die eines gewissen $(n-3)$-gliedrigen Mongeschen Systems des R_{n-1} abbilden. Umgekehrt kann man die ∞^n Linienelemente eines beliebigen $(n-3)$-gliedrigen Mongeschen Systems des R_{n-1} auf die Punkte des R_n abbilden und erhält in dem R_n ein $(n-2)$-gliedriges Pfaffsches System. Auf diese Weise gelangt Lie zu einem neuen Verfahren, das alle quasilinearen partiellen Differentialgleichungen 1. O. des R_n liefert. Er geht dabei aus von einem beliebigen $(n-3)$-gliedrigen Mongeschen Systeme des R_{n-1} mit einer Schar von ∞^n Integralkurven.

In Kapitel III endlich betrachtet Lie eine Schar von ∞^{n+1} Kurven:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n+1}, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

des $R_n: X_1, \ldots, X_n$ und setzt voraus, daß diese Gleichungen in dem r_{n+1} der Parameter x_i ∞^n verschiedene Flächen darstellen. Wieder untersucht er die Beziehung, die hierdurch zwischen den beiden Räumen R_n und r_{n+1} bestimmt ist. Es stellt sich heraus, daß die ∞^{n+1} Kurven des R_n dann und nur dann die charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung 1. O. sind, wenn die ∞^n Flächen des r_{n+1} ein $(n-3)$-gliedriges Pfaffsches System befriedigen. Man erhält auf diese Weise alle pseudolinearen Differentialgleichungen 1. O. des R_n.

In dem Vorworte zu Band VI dieser Ausgabe habe ich versucht, die leitenden Gedanken herauszuheben, die Lie bei seinen gesamten Untersuchungen über Differentialgleichungen und kontinuierliche Gruppen zugrunde gelegt hat. In bezug auf die von Lie geschaffene Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O., die bei weitem den größten Teil des IV. Bandes ausfüllt, würde manches noch näher ausgeführt werden können. Ich will das aber nicht tun, sondern mich damit begnügen, aus einem an F. Klein gerichteten Briefe vom Dezember 1885 eine Stelle anzuführen, die mir sehr geeignet scheint, das in jenem Vorworte Gesagte zu ergänzen. Lie schreibt da:

„Ich wundere mich häufig, wie sicher mein Instinkt mich schon in den Jahren 1872—74 führte. Denn alles ordnet sich unter den Begriff Gruppe und unter die Theorie der vollständigen Systeme mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Ganz kuriös ist es, wie viele, anscheinend absolut verschiedene, schwierige Theorien sich darauf reduzieren, die bei einer Gruppe invarianten Gebilde zu finden."

Gerade die Liesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. liefert ein ganz auffallendes Beispiel dafür, wie richtig Lies Instinkt war, als er 1872 die Frage aufnahm, bekannte infinitesimale Transformationen vorgelegter Differentialgleichungen für die Integration dieser Gleichungen zu verwerten (Bd. III, Abh. V, S. 27), und nun seine Integrationstheorie vollständiger Systeme mit bekannten infinitesimalen Transformationen aufbaute. Als er nämlich Anfang 1876 versuchte, diese Theorie auf die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen anzuwenden, da fand er, wie er selbst sagt, zu seinem größten Erstaunen, daß seine Theorie „sozusagen unmittelbar wesentliche Vereinfachungen in der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. bewirkt" [s. hier Abh. III (1877), S. 224]. Sie lieferte ihm geradezu den Schlußstein und die Krönung des Gebäudes, das er in den Jahren 1872/73 für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. errichtet hatte. Er selbst spricht sich im Oktober 1876 A. Mayer gegenüber dahin aus, daß er jedenfalls einen Teil der so gewonnenen Ergebnisse kaum in anderer Weise gefunden haben würde (hier S. *548*, Z. 25f.).

Erwähnen möchte ich noch, daß ich für die Anmerkungen zu den Abhandlungen I und III des vorliegenden Bandes wieder den Briefwechsel zwischen Lie und A. Mayer sehr ausgiebig habe verwerten können. Bei Abhandlung II versagt diese Quelle leider, und die wenigen Stellen aus Briefen von F. Klein an Lie, die ich hierzu mitteilen kann, füllen diese Lücke nicht aus.

Was die Teubnersche Buchdruckerei beim Drucke von Band IV geleistet hat, scheint mir die Leistung der früher erschienenen Bände fast noch zu übertreffen.

Der zuerst erschienene III. Band dieser Ausgabe war leider eine Zeitlang vergriffen. Der Norwegische Mathematische Verein läßt daher einen unveränderten Nachdruck herstellen, der demnächst erscheinen wird. In diesem sind kleinere Druckfehler der ersten Ausgabe im Texte verbessert, die sonstigen Druckfehler, Zusätze und Berichtigungen, die ich am Schlusse von Bd. III, V und VI mitgeteilt habe, sind auf S. *787—790* des Nachdrucks zusammengestellt. Die Anmerkungen erscheinen jetzt besonders gebunden. Sollte ein Besitzer der ersten Ausgabe von Bd. III den Wunsch haben, die Anmerkungen nachträglich besonders binden zu lassen, so kann er ein für diesen Zweck geeignetes Titelblatt von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner erhalten.
Als nächster soll der I. Band erscheinen, herausgegeben von P. Heegaard.

Gießen, im Juli 1929.

Friedrich Engel.

Inhaltsverzeichnis zum vierten Bande.

Anmerkungen.

I.

Begründung einer Invarianthentheorie der Berührungstransformationen. [215

Math. Ann. Bd. VIII, Heft 2, S. 215—288, ausgeg. 4. 12. 1874, Heft 3, S. 289—303, ausgeg. 4. 3. 1875.

Jacobis epochemachende Arbeiten über partielle Differentialgleichungen 1. O.[1]) werden ohne Zweifel immer einen ausgezeichneten Platz in der Wissenschaft einnehmen. Doch scheinen sie von einigen Mathematikern überschätzt oder jedenfalls nicht richtig beurteilt worden zu sein. Es verbreitete sich nämlich die Auffassung, daß durch Jacobis Untersuchungen die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. vollständig zum Abschluß gebracht worden sei. Eine solche Ansicht muß aber als unrichtig bezeichnet werden, nachdem neuere Arbeiten verbesserte und sogar neue Integrationsmethoden gegeben und gleichzeitig fruchtbare Untersuchungsrichtungen angebahnt haben.

In der nachstehenden Abhandlung gebe ich eine systematische Darstellung einer neuen Theorie, die ich 1872 und 1873 der Akademie in Christiania mitgeteilt habe. Ich schicke einige Bemerkungen voraus, die sich auf meine übrigen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen in ihrem Verhältnis zu gleichzeitigen Arbeiten Mayers beziehen. Unter den vielen wichtigen Arbeiten dieses Verfassers habe ich nur diejenigen zu besprechen, die in engem Zusammenhange mit meinen Arbeiten stehen.

Résumé einiger älterer Untersuchungen.

Ausgehend von geometrischen Untersuchungen über die Plückersche Liniengeometrie in ihrem Verhältnis zur allgemeinen Krümmungstheorie wurde ich sukzessive zu den partiellen Differentialgleichungen [216

1) Die erste Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. rührt von Pfaff her (1814). Etwas später (1819) gab Cauchy eine Methode, die 1837 von Jacobi und in der letzten Zeit von Mayer (Math. Ann. Bd. IV) in neuer Weise formuliert worden ist. Diese Methode muß die Cauchysche und nicht die Jacobi-Hamiltonsche heißen. Endlich fand Jacobi 1837—1840 eine neue Methode, die jedoch erst 1862 veröffentlicht wurde. Diese letztere Methode werde ich die Jacobische, nicht, wie gewöhnlich, die neue Jacobische Methode nennen.

hinübergezogen. Dabei war es mir sogleich auffallend, daß die Mathematiker die von Monge mit so großem Erfolge benutzte, gleichzeitig synthetische und analytische Methode verlassen hatten. Es schien mir wahrscheinlich (vgl. den Aufsatz „Über Komplexe etc.", diese Ann. Bd. V [d. Ausg. Bd. II, Abh. I]), daß eine solche gemischte Methode leichter zu neuen Resultaten führen würde, als die reine Analyse, die seit Monge fast ausschließlich bei Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen angewandt worden war. Ich hege die Hoffnung, daß die von mir gemachten Entdeckungen zur Verbreitung einer solchen Auffassung dienen können.

Ich stellte mir 1871 die Aufgabe, die Jacobische Integrationsmethode, insbesondere das Poisson-Jacobische Theorem begrifflich durchzudenken. Hierbei zeigte es sich fast unmittelbar, daß es möglich war, eine neue Integrationsmethode[1] zu geben, welche weniger Integrationen als die Jacobische verlangt und dabei das Poisson-Jacobische Theorem gar nicht benutzt. Diese neue Methode, die wie alle übrigen damit anfängt, ein Integral des bekannten simultanen Systems zu suchen, nimmt gewissermaßen eine Zwischenstelle zwischen der Cauchyschen und der Jacobischen Methode ein. Sie gründet sich auf meine Erweiterung der Cauchyschen Methode.

Zu derselben Zeit gab Mayer[2] ein fundamentales Theorem — ich nenne dasselbe das Mayersche Theorem —, welches ihm erlaubte, sowohl die Jacobische Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O., wie auch die Clebschsche Behandlung des Pfaffschen Problems wesentlich zu verbessern. Hierdurch erreichte er insbesondere, freilich auf ganz anderem Wege als ich, dieselbe Erniedrigung in der Zahl der zur Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. O. notwendigen Operationen.

Darnach entwickelte ich (Göttinger Nachrichten, 1872, Nr. 25 [d. Ausg. Bd. III, Abh. IV]) eine verallgemeinerte Auffassung des Begriffs vollständige Lösung, indem ich die Pfaffsche Formulierung des Integrationsproblems konsequent durchführte und weiter verwertete. Hierdurch entfernte ich unter anderm gewisse Mängel, die den bisherigen Integrationsmethoden noch angehaftet hatten.

Die eben zitierten Theorien fand ich durch rein synthetische Betrachtungen, indem ich den Mongeschen Begriff: Charakteristik konsequent verallgemeinerte und im übrigen nur einfache Überlegungen der modernen Mannigfaltigkeitslehre benutzte. Meine alte synthetische Darstellung dieser Theorien, die ich nur in großen Zügen [217 entwickelt habe, wird wahrscheinlicher Weise nur solche Leser befriedigen, die mit Mannigfaltigkeitsbetrachtungen sehr vertraut sind. Leider habe ich noch nicht Zeit gefunden, dies alles ausführlich darzustellen. Ich bin darum Mayer, der in mehreren eleganten Abhandlungen[1] eine klare analytische Formulierung und Begründung dieser Untersuchungen, insoweit sie im folgenden benutzt werden, gegeben hat, zu großem Danke verpflichtet. Ich verweise den Leser auf die zitierten Arbeiten Mayers.

1) Abhandlungen der Akademie zu Christiania, 3. und 10. Mai 1872; Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 16 [d. Ausg. Bd. III, Abh. I, II, III].

2) Math. Annalen Bd. V, S. 448; Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 15.

Über den Inhalt dieser Abhandlung.

Bei Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen verdienen solche Eigenschaften derselben eine besondere Aufmerksamkeit, die bei beliebigen Berührungstransformationen, das heißt, analytischen Umformungen ungeändert bleiben.[2] Wichtig ist ein solches Studium unter anderm deswegen, weil bei den gewöhnlichen Integrationsmethoden eben solche Eigenschaften in Betracht kommen.

Insbesondere für Gleichungen 1. O., denen diese Abhandlung gewidmet ist, gestalten sich solche Untersuchungen sehr schön und einfach. Es ist hier möglich, mehrere fundamentale Probleme der besprochenen Art zu erledigen. In dieser Weise gewinnt man unter anderm die Grundlage für eine rationelle Behandlung solcher partieller Differentialgleichungen 1. O., bei deren Integration man schon einige Schritte vorwärts gekommen ist. Es läßt sich immer entscheiden, wie man verfahren muß, um das noch übrige Integrationsgeschäft durch die einfachsten Mittel zu erledigen.

Um dies an einem guten Beispiele zu erklären, betrachte ich die Gleichung:

$$F(x_1, \ldots, x_9, p_1, \ldots . p_9) = a,$$

auf deren Integration Hamilton und Jacobi das Problem der drei Körper zurückgeführt haben. Man kennt bekanntlich acht Integrale des zugehörigen simultanen Systems. Meine allgemeinen Theorien gestatten nun, eine Gleichung:

$$f(x_1, \ldots, x_4, p_1, \ldots, p_4) = 0$$

1) Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 24; 1873, Nr. 11; Math. Ann. Bd. VI, S. 162—192.

2) Klein hat darauf aufmerksam gemacht, daß es sich bei sehr vielen mathematischen Untersuchungsrichtungen darum handelt, Eigenschaften, die bei einer gewissen Transformationsgruppe invariant bleiben, zu bestimmen.

aufzustellen, deren Integration diejenige von: $F = 0$ nach sich zieht. Hiermit ist dieses bekannte Resultat auf seinen innern Grund zurückgeführt.[1])

Im übrigen lege ich weniger Gewicht auf die neuen Integrationstheorien meiner Abhandlung, als auf die durch dieselbe gewonnene **tiefere** [218 **Einsicht in das Wesen der partiellen Differentialgleichungen** 1. O. Meine künftigen Arbeiten werden hoffentlich die Berechtigung dieser Auffassung zeigen.

Unter den neuen Theorien dieser Arbeit hebe ich auch die folgende schon hier hervor. Seien F, Φ_1 und Φ_2 solche Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, für welche:

$$(F\Phi_1) = 0, \quad (F\Phi_2) = 0$$

ist. Alsdann sagt das Poisson-Jacobische Theorem aus, daß auch:

$$(F(\Phi_1\Phi_2)) = 0$$

ist. Kennt man also zwei Lösungen: Φ_1, Φ_2 der Gleichung:

$$(F\Phi) = 0,$$

so gibt es eine Operation, welche im allgemeinen gestattet, mehrere solche Lösungen zu finden.

Ich beweise nun, daß eine jede Operation, welche dazu dient, neue Lösungen aus bekannten zu finden, sich wesentlich mit der genannten deckt; dabei wird nur vorausgesetzt, daß die Art der betreffenden Operation von der Form der Funktion F unabhängig sein soll.

Ich fand die nachstehenden Theorien durch Anwendung einer **gemischten, synthetisch-analytischen** Methode. Wenn die Redaktion mir weniger Mühe gemacht hätte, würde ich versucht haben, alles gleichzeitig synthetisch und analytisch nach Monges Muster zu entwickeln. Da ich indes nur wenig Vertrauen zu meiner Redaktionsfähigkeit hege und außerdem mit neuen Untersuchungen beschäftigt bin, so habe ich vorgezogen, meine Resultate in der gewöhnlichen analytischen Form darzustellen. Hierdurch hat jedoch insbesondere der erste Abschnitt an Einfachheit verloren. Glücklicher Weise kann ich den Leser auf eine schöne und **außerordentlich einfache** analytische Begründung verweisen, welche Mayer eben von den Resultaten des ersten Abschnitts gegeben hat.[2])

1) Die früher zitierten Arbeiten von Mayer und mir haben das Problem der drei Körper wesentlich reduziert, insofern sie die Integration der Gleichung: $f = 0$ vereinfacht haben.

2) Göttinger Nachrichten, 1874, Nr. 13: Über die Lieschen Berührungstransformationen. Vgl. auch die folgende Note von Mayer.

Erster Abschnitt.

Theorie der Berührungstransformationen.

Ich werde versuchen, die Theorie der Berührungstransformationen, die für meine bisherigen, wie für meine künftigen Arbeiten über partielle Differentialgleichungen die Grundlage bildet, analytisch und für n Variabeln zu entwickeln. Wie schon gesagt, gibt der zitierte Aufsatz [219 Mayers eine elegante Entwickelung dieser Theorie, welche unter anderm deswegen der meinigen vorzuziehen ist, weil sie direkt ist, während meine Behandlung auf der Clebschschen Theorie des Pfaffschen Problems beruht. (Vergl. § 8).

§ 1. Definition des Begriffs Berührungstransformation.

1. Die Theorie der Berührungstransformationen geht ihrem Ursprunge nach bis auf Euler zurück; später hat insbesondere Jacobi in Verbindung mit Arbeiten über die Störungstheorie Entwickelungen gegeben, die hierher gehören. Wenn ich nicht irre, bin ich jedoch derjenige, der zuerst die allgemeine Bedeutung dieser Theorie dargetan und hervorgehoben hat. Ich glaube auch, daß ich zuerst das eigentliche Wesen[1]) der Sache scharf und präzis dargelegt habe; die Bezeichnung Berührungstransformation rührt von mir her.[2])

Ehe ich den Begriff Berührungstransformation definiere, halte ich es für zweckmäßig, einige einfache geometrische Betrachtungen, welche naturgemäß auf diesen Begriff führen, vorauszuschicken. Dieselben beziehen sich zwar nur auf einen Raum von drei Dimensionen. Sie lassen sich indes auf beliebige Mannigfaltigkeiten ausdehnen.

Wird der Cartesische Punktraum im gewöhnlichen Sinne des Wortes einer Punkttransformation unterworfen, so gehen Flächen in Flächen, Flächen, die einander berühren, in eben solche über. Freilich gibt

1) Ich erinnere insbesondere daran, daß ich gezeigt habe, daß jede Berührungstransformation im Plückerschen Sinne auf einem Wechsel des Raumelements oder auf der Einführung eines neuen Koordinatensystems beruht. Für eine synthetische Behandlung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. ist diese Bemerkung fundamental.

2) Nachdem ich meine ersten Arbeiten über Berührungstransformationen veröffentlicht hatte, schrieb mir Darboux gelegentlich, daß er sich auch mit dieser Theorie beschäftigt hätte. Ich muß bedauern, daß ich aus seinen Untersuchungen, die noch nicht veröffentlicht worden sind, keinen Vorteil habe ziehen können.

Du Bois-Reymond hat sich mit den Berührungstransformationen eines dreifach ausgedehnten Raumes beschäftigt. Die Resultate, die sein Werk über partielle Differentialgleichungen enthält, sind jedoch nicht vollständig.

es einige Ausnahmegebilde, die sich in anderer Weise transformieren; dieselben treten aber nur in begrenzter Zahl auf. Es gibt aber außer den Punkttransformationen noch andere Umformungen, die einen verwandten Charakter besitzen. So führt zum Beispiel auch eine dualistische Transformation im allgemeinen Flächen in Flächen, Flächen, die einander berühren, in eben solche über. Hierbei ist indes zu bemerken, daß es unbegrenzt viele Flächen gibt, die Developpabeln nämlich, die sich bei [220
einer dualistischen Umformung nicht in Flächen, sondern in Kurven transformieren. Insbesondere gehen alle Ebenen in die Punkte des Raumes über.

Es läßt sich beweisen, daß es außer den Punkttransformationen eine ausgedehnte Kategorie von Umformungen gibt, bei denen im allgemeinen Flächen in Flächen, Flächen, die einander berühren, in eben solche übergehen. Bei einer jeden solchen Transformation, die keine Punkttransformation ist, treten unbegrenzt viele Flächen auf, die sich in Kurven transformieren. Insbesondere gibt es ∞^3 Flächen, die in die Punkte des Raumes übergehen.

Dieses ist indes keine Definition der Berührungstransformationen des Raumes; wir haben ja nur wesentliche Eigenschaften derselben angegeben.

2. In früheren Abhandlungen gab ich etwa folgende Definition: Sind die unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots, x_n$, die Funktion derselben z, und die partiellen Derivierten von z hinsichtlich $x_1, \ldots, x_n$, welche $p_1, \ldots, p_n$ heißen mögen, in solcher Weise mit einem entsprechenden Systeme von Variabeln: $z', x'_1, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_n$ verbunden, daß eine jede Größe aus einer der beiden Reihen:

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n,$$
$$z', x'_1, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_n$$

sich durch Größen der andern Reihe ausdrücken läßt, so nenne ich die betreffende Transformation eine Berührungstransformation. Diese Definiton ist indes nicht hinlänglich klar und vielleicht auch nicht ganz korrekt, insofern sie implizite auf Voraussetzungen beruht, die nicht immer stattfinden.

Ich ersetze daher diese Definition durch die folgende, die nach meiner Auffassung das Wesen der Sache vollständig trifft:

Definition. Sind $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ solche Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, für welche identisch:

$$dZ - \sum_k^{1\ldots n} P_k dX_k = \varrho\,(dz - \sum_k^{1\ldots n} p_k dx_k) \tag{1}$$

ist, so definieren die Gleichungen:

$$z' = Z, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i \tag{2}$$

eine Transformation, die eine Berührungstransformation heißen soll.

Daß die Gleichungen (2) immer eine Transformation definieren, beruht darauf, daß die Gleichung (1) mit Notwendigkeit verlangt, daß $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ von einander unabhängige Funktionen sind.

Terminologie. Sind F und Φ Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1,$ [221
$\ldots, p_n$, so schreibe ich wie üblich: $[F\Phi]$ statt:

$$\sum_k^{1\ldots n}\left\{\frac{\partial F}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right\}$$

und ebenso, wenn F und Φ beide z nicht enthalten, $(F\Phi)$ statt:

$$\sum_k^{1\ldots n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial x_k}\right).$$

Wünsche ich, hervorzuheben, daß F und Φ als Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ und nicht etwa von $x'_1, \ldots, p'_n$ betrachtet werden, so schreibe ich: $(F\Phi)_{xp}$.

Man weiß, daß der Pfaffsche Ausdruck:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} X_k dx_k$$

im allgemeinen auf eine Form mit n Gliedern:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} X_k dx_k = F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$$

reduziert werden kann. Hier sind die Funktionen f nach Clebsch (Crelles Journal Bd. 61, S. 153) ein beliebiges System Lösungen von $\frac{1}{2}\,n(n+1)$ Gleichungen, die ich mit den Symbolen:

$$((f_i)) = 0, \quad ((f_i f_k)) = 0$$

bezeichnen werde.

§ 2. Bestimmung aller Berührungstransformationen.

In diesem Paragraphen gebe ich zwei der Form nach sehr verschiedene Bestimmungen aller Berührungstransformationen. Dabei stütze ich mich auf die als bekannt vorausgesetzte Theorie des Pfaffschen Problems, welche überhaupt nach meiner Auffassung bei Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen 1. O. mehr in den Vordergrund zu stellen ist, als dies seit Cauchy und Jacobi geschehen ist.

Insbesondere kann ich nicht genug hervorheben, daß die Pfaffsche Auffassung des Problems, eine Gleichung:

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

zu integrieren, dieser Theorie eine Allgemeinheit gibt, die der gewöhnlichen Behandlungsweise desselben gänzlich abgeht. Freilich scheint niemand auf diesen fundamentalen Vorzug der Pfaffschen Betrachtungsweise aufmerksam geworden zu sein.

3. Sei: [222

$$X_1\,dx_1 + \cdots + X_{2n+1}\,dx_{2n+1}$$

ein vorgelegter Pfaffscher Ausdruck, dessen kanonische Form[1]) $n+1$ Glieder enthält. Ist:

$$\alpha\,(df_{n+1} + F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n)$$

eine gegebene solche Form, so ist es bekanntlich möglich, beliebig viele kanonische Formen:

$$\beta\,(d\varphi_{n+1} + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n)$$

zu finden. Um nämlich in allgemeinster Weise die Gleichung:

$$df_{n+1} + \sum_k^{1\ldots n} F_k df_k = \varrho\,(d\varphi_{n+1} + \sum_k^{1\ldots n} \Phi_k d\varphi_k) \tag{3}$$

zu befriedigen, wählt man willkürlich $q+1$ Gleichungen zwischen den f und φ:

$$\Pi_0 = 0, \quad \Pi_1 = 0, \ldots, \Pi_q = 0$$

und setzt:

$$F_i = \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial f_i} : \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial f_{n+1}},$$
$$\Phi_i = \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial \varphi_i} : \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial \varphi_{n+1}}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Eliminiert man $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ aus diesen $2n+q+1$ Gleichungen und löst dieselben sodann nach f_i und F_i auf, so findet man Werte für diese Größen, welche (3) identisch erfüllen.

4. Die Aufgabe, alle Berührungstransformationen zu bestimmen, kommt nach meiner Definition darauf hinaus, die Größen:

$$z', x_1', \ldots, x_n', p_1', \ldots, p_n'$$

1) Läßt sich ein Pfaffscher Ausdruck: $X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m$ auf eine p-gliedrige Form: $F_1 df_1 + \cdots + F_p df_p$ und nicht auf eine Form mit weniger als p Gliedern zurückführen, so nenne ich: $F_1 df_1 + \cdots + F_p df_p$ eine **kanonische Form** oder Normalform des vorgelegten Ausdruckes.

in allgemeinster Weise als Funktionen von: $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots p_n$ so zu bestimmen, daß die Gleichung:

$$dz' - \sum_k^{1\ldots n} p_k' dx_k' = \varrho\,(dz - \sum_k^{1\ldots n} p_k dx_k)$$

identisch stattfindet. Da nun $z, x_1, \ldots, p_n$ von einander unabhängige Größen sind, so ist es erlaubt, $dz - \Sigma\,p_k dx_k$ als kanonische Form eines $(2n+1)$-gliedrigen Pfaffschen Problems zu betrachten, und man erhält folglich aus den eben angegebenen bekannten Resultaten der Pfaffschen Theorie unmittelbar den Satz:

Satz 1. *Eine jede Berührungstransformation kann in folgender Weise* [223 *erhalten werden. Man nimmt $q+1$ Gleichungen an zwischen: $z, x_1, \ldots, x_n, z', x_1', \ldots, x_n'$:*

$$\Pi_0 = 0, \quad \Pi_1 = 0, \ldots, \Pi_q = 0$$

und setzt:

$$-p_i = \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial x_i} : \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial z},$$
$$-p_i' = \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial x_i'} : \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial z'}$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Eliminiert man $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ zwischen diesen $2n+q+1$ Gleichungen, so bestimmen die übrig bleibenden $2n+1$ Gleichungen immer eine Berührungstransformation zwischen den beiden Systemen von Variabeln: $z, x_1, \ldots, p_n$ und: $z', x_1', \ldots, p_n'$.

Jacobi betrachtet ebenfalls alle diese Transformationen und zwar behauptet er, daß dieselben die allgemeinsten Umformungen einer partiellen Differentialgleichung 1. O. sind. Auf diese Behauptung, deren Richtigkeit jedenfalls nicht a priori einleuchtend ist, soll hier nicht eingegangen werden. Im übrigen gibt Jacobi keine explizite Definition des Begriffs: allgemeinste Umformung einer partiellen Differentialgleichung 1. O.[1])

1) Ich benutze die Gelegenheit, um zwei Fragen aufzuwerfen, von denen insbesondere die letzte wichtig scheint.

1. Gibt es Transformationen, welche keine Berührungstransformationen sind, bei denen Berührung höherer Ordnung invariante Beziehung ist?

Diese Frage scheint mit Nein beantwortet werden zu müssen.

2. Gestatten partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung Umformungen, welche keine Berührungstransformationen sind?

Diese Frage muß wohl mit Ja beantwortet werden. Ist dies der Fall, so eröffnet sich hier ein wichtiges Gebiet für die Forschung.

5. Die eben gegebene Bestimmung aller Berührungstransformationen ist unter anderm deswegen nicht befriedigend, weil dieselbe, wenn auch nur implizite, eine Klassifikation der Berührungstransformationen nach dem Werte der Zahl q einführt; eine solche Klassifikation entspricht aber keineswegs dem Wesen der Sache, insofern sie gewissermaßen auf einer Zufälligkeit beruht.

Ich gebe daher eine neue allgemeine Methode zur Bestimmung von Berührungstransformationen. Würde man dieselbe in einem besonderen Falle anwenden, so wäre es freilich notwendig, nicht allein Differentiationen und Eliminationen, wie bei der ersten Methode, sondern überdies auch gewisse Integrationen auszuführen. Wo es sich aber nur darum handelt, den Begriff festzustellen, ist dies vollständig gleichgültig.

Aus der Theorie des Pfaffschen Problems ist es bekannt, daß man einen $(2n+1)$-gliedrigen Ausdruck: $\Sigma X_k dx_k$ in folgender [224
Weise auf einen $(n+1)$-gliedrigen reduziert:

Man nimmt eine beliebige Funktion φ von: $x_1, \ldots, x_{2n+1}$, schafft die Größen x_{2n+1} und dx_{2n+1} vermöge der Gleichungen:

$$\varphi = a, \qquad \sum_k^{1\ldots 2n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_k = 0$$

aus dem gegebenen Ausdrucke weg, und erhält so einen $2n$-gliedrigen Ausdruck:

$$X_1^a dx_1 + \cdots + X_{2n}^a dx_{2n},$$

dessen Koeffizienten außer $x_1, \ldots, x_{2n}$ noch a enthalten. Man bringt denselben in der gewöhnlichen Weise auf die Form:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} X_k^a dx_k = \sum_k^{1\ldots n} \Phi_k^a d\varphi_k^a$$

und ersetzt sodann in $\varphi_1^a, \ldots, \varphi_n^a$ die Größe a durch φ, wodurch diese Funktionen übergehen in Funktionen von $x_1, \ldots, x_{2n+1}$, die durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bezeichnet werden mögen. Alsdann kann der ursprüngliche $(2n+1)$-gliedrige Ausdruck die Form:

$$\Phi d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

erhalten, wobei $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ in der gewöhnlichen Weise bestimmt werden.

Ich füge nur noch hinzu, daß $\varphi_1^a, \ldots, \varphi_n^a$ durch die Clebschschen Gleichungen:

$$((\varphi_i^a)) = 0, \quad ((\varphi_i^a \varphi_k^a)) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n)$$

definiert sind.

6. Die Aufgabe, alle Berührungstransformationen zu bestimmen, kommt nach meiner Definition darauf hinaus, den Pfaffschen Ausdruck:

$$dz - \sum_k^{1\ldots n} p_k dx_k,$$

welcher schon die kanonische Form besitzt, in allgemeinster Weise auf eine neue kanonische Form zu bringen. Zu diesem Ende kann man nach dem Vorhergehenden folgendermaßen verfahren.

Man wählt beliebig eine Funktion Z von $z, x_1, \ldots, p_n$ und löst die Gleichung:

$$Z = a$$

nach p_n auf, wodurch sich ergeben möge:

$$p_n = f(z, x_1, \ldots, p_{n-1}, a).$$

Man bringt hierauf den Ausdruck:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_{n-1} dx_{n-1} - f dx_n$$

auf die Form:

$$Y_1^a dX_1^a + \cdots + Y_n^a dX_n^a,$$ [225

wo die X_i^a durch die Gleichungen:

$$((X_i^a)) = 0, \quad ((X_i^a X_k^a)) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n)$$

bestimmt sind. Diese Gleichungen nehmen in unserem Falle, wie man leicht findet, die Form an:

$$[p_n - f,\ X_i^a] = 0, \quad [X_i^a X_k^a] = 0 \quad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n).$$

Daraus folgt aber, daß die Größen X_i, das heißt, diejenigen Funktionen von $z, x_1, \ldots, p_n$, die hervorgehen, wenn in X_i^a die Größe a durch Z ersetzt wird, durch das System von Gleichungen:

$$\text{(A)} \qquad [ZX_i] = 0, \quad [X_i X_k] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n)$$

definiert sind[1]). Kennt man Funktionen: $Z, X_1, \ldots, X_n$, welche diese Relationen erfüllen, so ist es also möglich, die Gleichung:

$$dZ - \sum_k^{1\ldots n} P_k dX_k = \varrho\,(dz - \sum_k^{1\ldots n} p_k dx_k)$$

1) Hiermit ist im übrigen eine neue formale Behandlung des Pfaffschen Problems angedeutet. Dieselbe ist vollständig symmetrisch, was die Clebschsche nicht ist.

identisch zu befriedigen. Die Größen $\varrho, P_1, \ldots, P_n$ werden bestimmt durch $n+1$ von den $2n+1$ Gleichungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial z} = \varrho,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = -\varrho p_i, \quad \frac{\partial Z}{\partial p_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} = 0 \quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)}$$

Es ist wohl zu bemerken, daß die Funktionen: $Z, X_1, \ldots, X_n$ keiner andern Beschränkung unterworfen sind, als der Forderung, die Gleichungen (A) zu erfüllen.

Die erhaltenen Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Theorem I. *Kennt man $n+1$ von einander unabhängige Funktionen $Z, X_1, \ldots, X_n$ von $z, x_1, \ldots, p_n$, welche die Gleichungen:*

$$[ZX_i] = 0, \quad [X_i X_k] = 0 \quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,n)}$$

erfüllen, so ist es immer möglich, die Gleichung:

$$dZ - \sum_k^{1\ldots n} P_k\, dX_k = \varrho\,(dz - \sum_k^{1\ldots n} p_k dx_k)$$

identisch zu befriedigen, und dann definieren die Relationen:

$$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation. Die oben angegebenen Bedingungsgleichungen sind nicht allein hinreichend, sondern auch notwendig.

Daß es überhaupt möglich ist, $n+1$ Funktionen: $H_0, H_1, \ldots, H_n$ [226 von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ zu finden, welche paarweise den Bedingungen: $[H_i H_k] = 0$ genügen, beruht auf folgendem Satze:

Satz 2. *Sind $H_0, H_1, \ldots, H_q$ Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ und verschwinden alle: $[H_i H_k]$, so bilden die linearen Gleichungen:*

$$[H_0 H] = 0, \ldots, [H_q H] = 0$$

ein vollständiges System.[1])

Setzt man nämlich: $[H_k H] = A_k(H)$ und bildet die Ausdrücke: $A_i(A_k(H)) - A_k(A_i(H))$, so sieht man, daß dieselben sich linear durch die $A_i(H)$ ausdrücken lassen.

---

1) Stehen q lineare partielle Differentialgleichungen mit n Variabeln:

$$A_1(H) = 0, \ldots, A_q(H) = 0,$$

die von einander unabhängig sind, in solcher gegenseitiger Beziehung, daß jedes: $A_i(A_k(H)) - A_k(A_i(H))$ sich linear durch die $A_i(H)$ ausdrücken läßt, so haben dieselben, wie Clebsch (Borchardts Journal Bd. 65) nachgewiesen hat, $n-q$ verschiedene gemeinsame Lösungen. Ein solches System nenne ich mit Clebsch ein vollständiges System. Auf die Betrachtung solcher Systeme gründet Clebsch die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit gemeinsamen Lösungen.

Die entsprechende Theorie für beliebige, das heißt nicht eben lineare Gleichungen ist zuerst von Mayer gegeben worden. Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß Mayer, wie auch Clebsch, seinen Ausgangspunkt in einer Idee nimmt, die von Bour herrührt. Mayer hat darauf aufmerksam gemacht, daß Bours Formulierung dieser Theorie nicht stringent ist.

§ 3. Berührungstransformationen, welche Funktionen von $x_1', \ldots, p_n'$ in Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ überführen.

Ich werde jetzt die Existenz einer sehr wichtigen Kategorie von Berührungstransformationen nachweisen. Die charakteristische Eigenschaft derselben besteht darin, daß sie Funktionen von $x_1', \ldots, p_n'$ in Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ überführen. Sind also:

$$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

die Gleichungen einer solchen Transformation, so enthalten die Größen X_i und P_i die Variable z gar nicht, sondern nur $x_1, \ldots, p_n$.

In den beiden ersten Nummern gebe ich zwei Methoden an, um beliebig viele solche Transformationen aufzufinden. In der letzten Nummer zeige ich, daß beide Methoden in dem Sinne allgemein sind, daß sowohl die eine wie die andere eine jede Transformation der besprochenen Art gibt.

In dem vorangehenden Paragraphen sahen wir, daß die Bestimmung aller Berührungstransformationen unmittelbar aus der Theorie des indeterminierten Falles des Pfaffschen Problems folgte. Es ließe sich [227 leicht zeigen, daß die Entwickelungen dieses Paragraphen im genauen Zusammenhange mit einer neuen Theorie des determinierten Falles stehen, die von Clebsch (Borchardts Journ., Bd. 61) herrührt.

7. Nehmen wir willkürlich $q+1$ Gleichungen an zwischen: $z', x_1', \ldots, x_n', z, x_1, \ldots, x_n$, welche z und z' nur in der Kombination: $z' - Az$ enthalten, wo A eine Konstante ist, bringen dieselben auf die Form:

$$z' - Az = \Pi\,(x_1', \ldots, x_n', x_1, \ldots, x_n),$$

$$\Pi_1\,(x_1', \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \Pi_q, (x_1', \ldots, x_n) = 0,$$

und suchen nun nach Satz 1 die Berührungstransformation, welche diesen Gleichungen zugehört, so erhalten wir die Formeln:

$$p_i' = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i'} + \lambda_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i'} + \cdots + \lambda_q \frac{\partial \Pi_q}{\partial x_i'},$$

$$-A p_i = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \frac{\partial \Pi_q}{\partial x_i}.$$

Diese $2n$ Gleichungen, verbunden mit den q Gleichungen: $\Pi_1 = 0, \ldots, \Pi_q = 0$, drücken die x'_i und p'_i durch: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ allein aus, und, indem man die so gefundenen Werte in die Gleichung: $z' - Az = \Pi$ einsetzt, erhält dieselbe die Form:

$$z' = Az + F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Also:

Satz 3. *Gleichungen zwischen: $z', x'_1, \ldots, x'_n, z, x_1, \ldots, x_n$, welche z und z' nur in der Kombination: $z' - Az$ enthalten, definieren eine Berührungstransformation, die sich durch Gleichungen von der folgenden Form ausdrückt:*

$$z' = Az + F, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i.$$

Hier ist A eine Konstante, F, X_i und P_i sind Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ allein.

Eine solche Transformation bezeichne ich zuweilen kurzweg als eine Transformation zwischen x, p.

8. Die eben entwickelte Methode zur Auffindung von Berührungstransformationen zwischen x, p hat das Mißliche, daß sie eine Klassifikation, die dem Wesen der Sache nicht entspricht, nämlich nach dem Werte der Zahl q einführt. Von diesem Übelstande ist die folgende Methode frei; im übrigen haben beide Methoden ihre selbständige Berechtigung. Ich schicke zunächst einen Hilfssatz voraus.

Satz 4. *Sind $X_1, \ldots, X_q$ [unabhängige] Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$, welche paarweise den Bedingungen: $(X_i X_k) = 0$ genügen, so gibt es unter den Lösungen F des vollständigen Systems (Satz 2):*

$$[X_1 F] = 0, \ldots, [X_q F] = 0$$

einige, welche die Form: $Az + \Pi$ besitzen. Hier ist A eine Konstante und Π eine Funktion von $x_1, \ldots, p_n$ allein.

Unser Satz kommt darauf hinaus, daß die Gleichungen: [228

$$[X_1 F] = 0, \ldots, [X_q F] = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = A$$

gemeinsame Lösungen besitzen. Um dies nachzuweisen, versuchen wir, eine solche Funktion Φ von: $z, x_1, \ldots, p_n$ und F zu finden, daß die Auflösung der Gleichung: $\Phi = \text{Const.}$ eine Funktion F der verlangten Eigenschaft gibt. Es zeigt sich, daß Φ die folgenden Relationen erfüllen muß:

$$[X_1 \Phi] = 0, \ldots, [X_q \Phi] = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + A \frac{\partial \Phi}{\partial F} = 0;$$

dieselben bilden aber, wie man leicht verifiziert, ein vollständiges System. Also ist unser Satz erwiesen.

Hier möge auch der folgende Satz, den ich später brauche, einen Platz finden:

Satz 5. *Kennt man eine Lösung F des vollständigen Systems:*

$$[X_1 F] = 0, \ldots, [X_n F] = 0,$$

welche die Form: $z + \Pi(x_1, \ldots, p_n)$ besitzt, so ist:

$$Az + A\Pi + \Omega(X_1, \ldots, X_n)$$

eine allgemeinere solche Lösung, und zwar die allgemeinste, die hinsichtlich z linear ist. Ω bezeichnet eine arbiträre Funktion der betreffenden Argumente.

Seien nämlich:

$$F_1 = A_1 z + \Pi_1, \quad F_2 = A_2 z + \Pi_2$$

zwei Lösungen von der besprochenen Form. Alsdann genügt auch: $A_2 F_1 - A_1 F_2$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $A_2 \Pi_1 - A_1 \Pi_2$, worin z gar nicht vorkommt, unserem vollständigen Systeme. Daraus folgt aber bekanntlich:

$$A_2 \Pi_1 - A_1 \Pi_2 = W(X_1, \ldots, X_n),$$

welche Gleichung unseren Satz beweist.

Satz 6. *Sind: $X_1, \ldots, X_n$ [unabhängige] Funktionen von: $x_1, \ldots, p_n$, welche paarweise den Bedingungen: $(X_i X_k) = 0$ genügen, so gibt es (Satz 4) Funktionen von der Form: $Az + \Pi(x_1, \ldots, p_n)$, welche alle Gleichungen:*

$$[X_i, Az + \Pi] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

erfüllen, und daher ist es (Theorem I) möglich, die Gleichung:

$$d(Az + \Pi) - \sum_k^{1 \ldots n} P_k dX_k = \varrho(dz - \sum_k^{1 \ldots n} p_k dx_k)$$

identisch zu befriedigen. Hierbei werden alle P_i, wie wir sogleich beweisen, Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$. Also besitzt die Berührungstransformation:

$$z' = Az + \Pi, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

die Eigenschaft, Funktionen von $x'_1, \ldots, p'_n$ in Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ zu transformieren.

Denn soll die Gleichung: [229

$$d(Az + \Pi) - \sum_k^{1 \ldots n} P_k dX_k = \varrho(dz - \sum_k^{1 \ldots n} p_k dx_k)$$

identisch stattfinden, so muß, da z in Π, $X_1, \ldots, X_n$ nicht vorkommt,

$$A = \varrho$$

und:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = -A p_i$$

sein, welche Gleichungen zeigen, daß alle P_i nur von $x_1, \ldots, p_n$ abhängen.

9. Eliminiert man $p_1, \ldots, p_n$ zwischen den Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad z' = Az + \Pi, \quad x_i' = X_i,$$

in denen:

$$(X_i X_k) = 0, \quad [Az + \Pi, X_i] = 0$$

ist, so findet man eine Anzahl Gleichungen von der Form:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} z' - Az = \Omega(x_1', \ldots, x_n', x_1, \ldots, x_n), \\ \Omega_1(x_1', \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \Omega_q(x_1', \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Also gibt die letzte Methode nur solche Transformationen, welche auch vermöge der früher entwickelten erhalten werden können. Da nun umgekehrt ein System Gleichungen von der Form (b), wie früher gezeigt, immer auf Transformationsgleichungen von der Form (a) führt, so ist klar, daß unsere beiden Methoden sich decken; ihr Unterschied ist nur formal.

Wir werden zeigen, daß dieselben **eine jede** Berührungstransformation zwischen x, p geben.

Man erhält alle Berührungstransformationen zwischen x, p, wenn man die Größen: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots P_n$ in allgemeinster Weise als Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ so bestimmt, daß die Gleichung:

$$\text{(c)} \qquad dZ - \sum_k^{1\ldots n} P_k dX_k = \varrho\,(dz - \sum_k^{1\ldots n} p_k dx_k)$$

identisch stattfindet. Dieselbe nimmt durch Entwickelung die Form an:

$$U dz + \sum_i V_i dx_i + \sum_i W_i dp_i = \varrho\,(dz - \sum_i p_i dx_i),$$

wo:

$$U = \frac{\partial Z}{\partial z}, \quad V_i = \frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i},$$
$$W_i = \frac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_i}.$$

Also erhalten wir $2n + 1$ Relationen:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \varrho, \quad \frac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \text{ [230}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i} = -\varrho p_i = -p_i \frac{\partial Z}{\partial z} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

welche zeigen, daß die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial Z}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial p_n}$$

nur von $x_1, \ldots, p_n$ abhängen. Also hat Z die Form:

$$Z = Z_1(z, x_1, \ldots, x_n) + Z_2(x_1, \ldots, p_n),$$

wo Z_1 folgenden Relationen genügen muß:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z} = \varrho, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial Z_2}{\partial x_i} - \sum_k^{1\ldots n} P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = -p_i \frac{\partial Z_1}{\partial z}.$$

Durch Differentiation nach z folgt aus der letzten:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right) = -p_i \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right),$$

und hieraus, da p_i in Z_1 nicht vorkommt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Also ist $\partial Z_1 : \partial z$ gleich einer Konstanten A, das heißt, Z_1 ist linear in bezug auf z. Hiermit ist bewiesen, daß Z die Form:

$$Z = Az + \Pi(x_1, \ldots, p_n)$$

besitzt. Im zweiten Paragraphen sahen wir aber, daß die Ausdrücke: $[ZX_i]$, $[X_i X_k]$ notwendigerweise verschwinden müssen, wenn die Bedingungsgleichung (c) stattfinden soll, und folglich können wir behaupten, daß die beiden in diesem Paragraphen gegebenen Methoden eine jede Berührungstransformation zwischen x, p geben.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen fasse ich in folgender Weise zusammen:

Theorem II. *Es gibt eine ausgedehnte Kategorie von Berührungstransformationen, welche die charakteristische Eigenschaft besitzen, Funktionen von $x_1', \ldots, p_n'$ in Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ überzuführen. Alle derartigen Transformationen besitzen die Form:*

$$z' = Az + \Pi(x_1, \ldots, p_n), \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i,$$

wo A eine Konstante bezeichnet. Relationen zwischen z', $x_1', \ldots, x_n', z, x_1, \ldots, x_n$, welche die Größen z' und z nur in der Kombination: $z' - Az$ enthalten, bestimmen immer eine solche Transformation. Sind andererseits: $X_1, \ldots, X_n$ solche [unabhängige] Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$, daß alle: $(X_i X_k)$ gleich Null sind, so existiert immer eine solche Funktion:

$Az + \Pi(x_1, \ldots, p_n)$, daß alle Ausdrücke: $[Az + \Pi, X_i]$ verschwinden, und die Gleichungen:

$$z' = Az + \Pi, \quad x'_i = X_i$$

definieren dann wiederum eine Berührungstransformation der besproche- [231
nen Art.

§ 4. Aufstellung einiger charakteristischer Relationen.

Definieren die Gleichungen:

$$z' = Z, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

eine Berührungstransformation zwischen x, p, so genügen die Funktionen X_i und P_i gewissen charakteristischen Relationen, die nun entwickelt werden sollen.

10. Ich erledige zuerst folgende Aufgabe:

Ich setze voraus, daß $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ gegebene Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ sind, und daß es möglich ist, eine solche Funktion: $Az + \Pi(x_1, \ldots, p_n)$ zu finden, daß die Gleichungen:

$$z' = Az + \Pi, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

eine Berührungstransformation definieren. Es wird verlangt, die Größen A und Π in allgemeinster Weise zu bestimmen.

Es wird sich zeigen, daß A vollkommen, und Π bis auf eine arbiträre Konstante durch die X_i und P_i definiert ist.

Die identisch stattfindende Gleichung:

$$\text{(d)} \qquad d(Az + \Pi) - \sum_k^{1\ldots n} P_k dX_k = \varrho\,(dz - \sum_k^{1\ldots n} p_k dx_k)$$

reduziert sich, da ϱ gleich A sein muß, auf:

$$d\Pi - \sum_k P_k dX_k = -A \sum_k p_k dx_k.$$

Diese Gleichung löst sich in die folgenden $2n$ auf:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = -A p_i, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} = 0.$$

Differentiiert man nun nach p_i und x_i und setzt die beiden erhaltenen Ausdrücke für $\partial^2 \Pi : \partial x_i \partial p_i$ einander gleich, so findet man:

$$A = \sum_k^{1\ldots n} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial X_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial x_i} \right) = W_i,$$

in welcher Gleichung i eine beliebige von den Zahlen $1, \ldots, n$ bezeichnet.

Oben bestimmten wir $\partial \Pi : \partial x_i$ und $\partial \Pi : \partial p_i$ als Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = M_i, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} = N_i,$$

woraus durch Integration: [232

$$\Pi = \int (M_1 dx_1 + \cdots + M_n dx_n + N_1 dp_1 + \cdots + N_n dp_n) + \text{Const.}$$

Die eingeführte Konstante ist arbiträr, da Π nur als Differential in (d) auftritt. Also:

Satz 7. *Sind $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ solche gegebene Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$, daß sich die Gleichung:*

$$dZ - \sum_k^{1\ldots n} P_k dX_k = \varrho\,(dz - \sum_k^{1\ldots n} p_k dx_k)$$

befriedigen läßt, so kann dies wesentlich nur auf eine Weise geschehen. Z hat (§ 3) die Form: $Az + \Pi(x_1, \ldots, p_n)$; A ist eine ganz bestimmte Konstante, und Π enthält eine arbiträre additive Konstante.

Korollar. *Sind $X_1, \ldots, P_n$ gegebene Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ und bestimmen die beiden Systeme von Gleichungen:*

$$z' = Z_1, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

und:

$$z'' = Z_2, \quad x''_i = X_i, \quad p''_i = P_i$$

zwei Berührungstransformationen zwischen x, p, so ist: $Z_1 - Z_2$ eine Konstante.

Im übrigen ist es einfacher, dies Korollar direkt zu beweisen.

11. Die angekündigten charakteristischen Relationen beruhen darauf, daß der Ausdruck: $(\omega_1 \omega_2)_{xp}$ in einem Sinne, den wir sogleich (Satz 8 und 11) definieren, bei Berührungstransformationen invariant bleibt.

Satz 8. *Seien ω'_1 und ω'_2 Funktionen von $z', x'_1, \ldots, p'_n$, die durch eine Berührungstransformation in Funktionen von $z, x_1, \ldots, p_n$, welche ω_1 und ω_2 heißen mögen, übergeführt werden. Verschwindet der Ausdruck: $[\omega'_1 \omega'_2]_{x'p'}$, so ist dies auch mit: $[\omega_1 \omega_2]_{xp}$ der Fall.*

Denn verschwindet: $[\omega'_1 \omega'_2]_{x'p'}$, so ist es (Satz 2) möglich, solche weitere Funktionen: $\omega'_3, \ldots, \omega'_{n+1}$ von $z', x'_1, \ldots, p'_n$ zu bestimmen, daß alle: $[\omega'_i \omega'_k]_{x'p'}$ gleich Null werden. Dann aber gilt (Theorem I) eine Identität von der Form:

$$dz' - \sum_k^{1\ldots n} p'_k dx'_k = \sum_k^{1\ldots n+1} \Omega'_k d\omega'_k.$$

Drücken wir nun $z', x'_1, \ldots, p'_n$ durch $z, x_1, \ldots, p_n$ aus, so geht die linke Seite unserer Gleichung in: $\varrho\,(dz - \sum p_k dx_k)$ über, und daher besitzt die transformierte Gleichung die Form:

$$\varrho\,(dz - \sum_k^{1\ldots n} p_k dx_k) = \sum_k^{1\ldots n+1} \Omega_k d\omega_k,$$

wenn $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$ diejenigen Funktionen von $z, x_1, \ldots, p_n$ bezeichnen, [233 in welche $\omega'_1, \ldots, \omega'_{n+1}$ übergehen. Diese neue Gleichung zeigt aber (Theorem I), daß alle: $[\omega_i\,\omega_k]_{xp} = 0$ sind. Also ist im besondern auch: $[\omega_1\,\omega_2]_{xp} = 0$.

Satz 9. *Definieren die Gleichungen:*

$$z' = Z, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

eine Berührungstransformation zwischen x, p, so verschwinden alle Ausdrücke: $(P_i\,P_k)$ und ebenso auch, außer wenn $i = k$, alle: $(X_i\,P_k)$.

Denn wir wissen, daß die Ausdrücke: $(x'_i p'_k)_{x'p'}$, $(p'_i p'_k)_{x'p'}$ gleich Null sind; also verschwinden nach dem vorangehenden Satze auch: $(X_i\,P_k)_{xp}$, $(P_i\,P_k)_{xp}$.

Satz 10. *Definieren die Gleichungen:*

$$z' = Az + \Pi, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

eine Berührungstransformation zwischen x, p, so sind alle Ausdrücke: $(P_1\,X_1), \ldots, (P_n\,X_n)$ gleich der Konstanten A.

Seien nämlich F' und Φ' zwei Funktionen von $x'_1, \ldots, p'_n$ und F, Φ die entsprechenden Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$. Wir wissen, daß die Ausdrücke: $(F'\Phi')_{x'p'}$ und: $(F\Phi)_{xp}$ gleichzeitig verschwinden. Berücksichtigen wir nun, daß:

$$(x'_i x'_k)_{xp} = (x'_i p'_k) = (p'_i p'_k) = 0,$$

so finden wir:

$$(F\Phi)_{xp} = \sum_k^{1\ldots n}\left(\frac{\partial F}{\partial x'_k}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_k} - \frac{\partial F}{\partial p'_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x'_k}\right)\cdot(x'_k p'_k)_{xp},$$

oder, wenn wir uns erinnern, daß F und Φ, als Funktionen von $x'_1, \ldots, p'_n$ aufgefaßt, mit F' und Φ' bezeichnet werden:

$$(F\Phi)_{xp} = \sum_k^{1\ldots n}\left(\frac{\partial F'}{\partial x'_k}\frac{\partial \Phi'}{\partial p'_k} - \frac{\partial F'}{\partial p'_k}\frac{\partial \Phi'}{\partial x'_k}\right)\cdot(x'_k p'_k)_{xp}.$$

Ferner ist:

$$(F'\Phi')_{x'p'} = \sum_k^{1\ldots n}\left(\frac{\partial F'}{\partial p'_k}\frac{\partial \Phi'}{\partial x'_k} - \frac{\partial F'}{\partial x'_k}\frac{\partial \Phi'}{\partial p'_k}\right).$$

Damit diese Ausdrücke gleichzeitig verschwinden, muß notwendig:

$$(x'_1 p'_1)_{xp} = (x'_2 p'_2)_{xp} = \cdots = (x'_n p'_n)_{xp} = \frac{1}{n}\sum_k^{1\ldots n}(x'_i p'_i)_{xp}$$

sein. Früher fanden wir aber:

$$\sum_k^{1\ldots n}\left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}\frac{\partial p'_k}{\partial p_i} - \frac{\partial x'_k}{\partial p_i}\frac{\partial p'_k}{\partial x_i}\right) = W_i = A,$$

also kommt:

$$\frac{1}{n}\sum_i^{1\ldots n} W_i = A. \qquad [234$$

Man verifiziert nun leicht, daß:

$$\frac{1}{n}\sum_i^{1\ldots n} W_i = \frac{1}{n}\sum_i^{1\ldots n}(p'_i x'_i)_{xp},$$

also ist:

$$\frac{1}{n}\sum_i^{1\ldots n}(p'_i x'_i)_{xp} = A,$$

und folglich sind alle Ausdrücke: $(p'_i x'_i)_{xp}$ gleich A.

Satz 11. *Sind F' und Φ' Funktionen von $x'_1, \ldots, p'_n$, die durch eine Berührungstransformation in die Funktionen F und Φ von $x_1, \ldots, p_n$ übergeführt werden, so geht gleichzeitig: $(F'\Phi')_{x'p'}$ in: $(1 : A)\,(F\Phi)_{xp}$ über.*

Denn wir sahen, daß:

$$(F\Phi)_{xp} = \sum_i^{1\ldots n}\left(\frac{\partial F'}{\partial x'_i}\frac{\partial \Phi'}{\partial p'_i} - \frac{\partial F'}{\partial p'_i}\frac{\partial \Phi'}{\partial x'_i}\right)(x'_i p'_i)_{xp}$$

ist, ferner daß:

$$(p'_i x'_i)_{xp} = A$$

ist. Also kommt:

$$(F\Phi)_{xp} = A\,(F'\Phi')_{x'p'}.$$

Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen.

12. Ich will jetzt zeigen, daß die gefundenen Relationen nicht allein notwendig, sondern auch hinreichend sind.

Satz 12. *Sind: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$, welche den Relationen:*

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = A = \text{Const.}$$

genügen, so gibt es immer eine und wesentlich nur e i n e Berührungstransformation von der Form:

$$z' = F, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i.$$

Beweis. Wir nehmen eine Funktion: $Az + \Psi$, welche allen Relationen:

$$[X_i, Az + \Psi] = 0$$

genügt, und bestimmen sodann wie früher solche Funktionen: $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$, daß die Gleichung:

$$d(Az + \Psi) - \sum \Pi_k dX_k = A(dz - \sum p_k dx_k)$$

identisch stattfindet; hierbei werden $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ im allgemeinen andere Funktionen als $P_1, \ldots, P_n$. Nach früheren Sätzen ist nun:

$$(X_i \Pi_k) = 0, \quad (\Pi_k X_k) = A,$$

und nach unserer Voraussetzung ist:

$$(X_i P_k) = 0, \quad (P_k X_k) = A, \qquad [235$$

also erhält man:

$$(X_i, \Pi_k - P_k) = 0, \quad (X_k, \Pi_k - P_k) = 0,$$

woraus:

$$\Pi_k - P_k = W_k(X_1, \ldots, X_n)$$

und:

$$P_k = \Pi_k - W_k.$$

Nun ist:

$$(P_i P_k) = 0,$$

oder:

$$(\Pi_i - W_i, \Pi_k - W_k) = 0,$$

woraus unter Berücksichtigung bekannter Relationen:

$$\frac{\partial W_k}{\partial X_i} = \frac{\partial W_i}{\partial X_k},$$

also:

$$W_i = \frac{\partial F(X_1, \ldots, X_n)}{\partial X_i}$$

und:

$$P_i = \Pi_i - \frac{\partial F}{\partial X_i}$$

folgt.

Schreiben wir nun die Gleichung:

$$d(Az + \Psi) - \sum \Pi_k dX_k = A(dz - \sum p_k dx_k)$$

in der äquivalenten Form:

$$d(Az + \Psi - F) - \sum\left(\Pi_k - \frac{\partial F}{\partial X_k}\right) dX_k = A(dz - \sum p_k dx_k),$$

so finden wir durch Einführung der Größen P_i:

$$d(Az + \Psi - F) - \sum P_k dX_k = A(dz - \sum p_k dx_k),$$

und also ist es uns gelungen, eine Funktion Z zu finden, welche die Gleichung:

$$dZ - \sum P_k dX_k = A(dz - \sum p_k dx_k)$$

befriedigt. Nach Satz 7 ist:

$$Az + \Psi - F + \text{Const.}$$

die allgemeinste Funktion, welche dieser Forderung genügt.

Da bei Berührungstransformationen zwischen x, p die Variabeln $x_1, \ldots, p_n$ unabhängig von z transformiert werden, so ist es im allgemeinen bequem, nur die Gleichungen:

$$x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

hinzuschreiben. Man kann dies um so mehr machen, als wesentlich diese Gleichungen die betreffende Transformation definieren.

Endlich resumiere ich die Resultate dieses Paragraphen:

Theorem III. *Definieren* $2n$ *Gleichungen:* [236

$$x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

eine Berührungstransformation zwischen x, p, *so finden folgende Relationen statt:*

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = A = \text{Const.}$$

Gelten andererseits diese Relationen, so bestimmen die ersten Gleichungen immer eine Berührungstransformation.

Dieser Satz läßt sich übrigens folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 13. *Zwischen den* $2n + 1$ *Funktionen* Z, X, P, *die eine Berührungstransformation bestimmen, gelten folgende charakteristische Relationen:*

$$[ZX_i] = [X_i X_k] = [X_i P_k] = [P_i P_k] = 0 = [ZP_i] - P_i[X_i P_i],$$
$$[P_1 X_1] = [P_2 X_2] = \cdots = [P_n X_n].$$

Dieser Satz, den ich hier nicht brauche und deshalb nicht beweisen werde, spielt eine wichtige Rolle in der Theorie des Pfaffschen Problems.

§ 5. Homogene Berührungstransformationen.

Es gibt eine wichtige Klasse Berührungstransformationen zwischen x, p, welche die charakteristische Eigenschaft besitzen, Funktionen von $x'_1, \ldots, p'_n$, die hinsichtlich der Differentialquotienten homogen sind, in eben solche Funktionen derselben Dimension überzuführen. Ich bestimme alle derartigen Transformationen, die ich **homogene Berührungstransformationen** nenne. Dementsprechend werde ich Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$, die hinsichtlich $p_1, \ldots, p_n$ homogen sind, kurzweg als **homogene** Funktionen bezeichnen.

Die Wichtigkeit dieser neuen Theorie liegt darin, daß sie sich bei einer gewissen Auffassung mit der **allgemeinen** Theorie der Berührungstransformationen deckt.

13. Satz 14. *Sind $X_1, \ldots, X_n$ [unabhängige] homogene Funktionen nullter Dimension, welche paarweise: $(X_i X_k) = 0$ ergeben, so ist es möglich, die Gleichung:*

$$dZ - \sum P_k dX_k = A\,(dz - \sum p_k dx_k)$$

in solcher Weise zu befriedigen, daß alle P_i homogene Funktionen erster Dimension werden. Die Berührungstransformation:

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

ist dann homogen, das heißt, sie transformiert homogene Funktionen in homogene Funktionen derselben Dimension.

Beweis. Daß alle X_i homogen von nullter Dimension sind, [237
drückt sich durch:

$$p_1 \frac{\partial X_i}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial X_i}{\partial p_n} = 0,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch:

$$[z X_i] = 0$$

aus. Da nun zugleich alle: $(X_i X_k)$ gleich Null sind, so kann die Gleichung:

$$dz - \sum P_k dX_k = dz - \sum p_k dx_k$$

befriedigt werden. Die Größen P_i genügen dann den Relationen

$$P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} + \cdots + P_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i} = p_i,$$

$$P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} + \cdots + P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_i} = 0$$

und sind folglich homogene Funktionen **erster** Dimension.

Wenden wir nun die Transformation:

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

auf irgend eine homogene Funktion s-ter Dimension, etwa:

$$p_n'^s \cdot H\,(x_1', \ldots, x_n', p_1' : p_n', \ldots, p_{n-1}' : p_n'),$$

an, so verwandelt sich dieselbe in:

$$P_n^s \cdot H\,(X_1, \ldots, X_n, P_1 : P_n, \ldots, P_{n-1} : P_n),$$

was wieder eine homogene Funktion s-ter Dimension ist.

14. Ich werde jetzt alle homogenen Berührungstransformationen bestimmen.

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ [unabhängige] homogene Funktionen nullter Dimension, welche paarweise: $(X_i X_k) = 0$ ergeben; alsdann gelten die Relationen:

$$[z X_1] = 0, \ldots, [z X_n] = 0,$$

und also ist (Satz 5): $Az + \Pi\,(X_1, \ldots, X_n)$, wenn A eine Konstante und Π eine arbiträre Funktion bezeichnet, die allgemeinste in bezug auf z lineare Funktion F, welche die Gleichungen:

$$[X_1 F] = 0, \ldots, [X_n F] = 0$$

erfüllt. Es handelt sich nun darum, Π in allgemeinster Weise so zu bestimmen, daß die Relationen:

$$z' = Az + \Pi, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine homogene Berührungstransformation definieren.

Die identische Gleichung:

$$d\,(Az + \Pi) - \sum P_k dX_k = A\,(dz - \sum p_k dx_k)$$ [238

gibt:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \sum P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} - A p_i, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} = \sum P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i}.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Größen $\partial \Pi : \partial x_i$ und $\partial \Pi : \partial p_i$ beziehungsweise von erster und von nullter Dimension sein müssen, wenn sie nicht etwa gleich Null sind. Nun ist aber Π selbst von nullter Dimension, und also $\partial \Pi : \partial x_i$ und $\partial \Pi : \partial p_i$ beziehungsweise von nullter und (—1)-ter Dimension, wenn sie von Null verschieden sind. Diese Betrachtungen zeigen, daß sowohl $\partial \Pi : \partial x_i$ wie $\partial \Pi : \partial p_i$ verschwinden müssen, also ist Π eine Konstante, etwa B, und $Az + B$ ist die allgemeinste Form der gesuchten Funktion F.

15. Eliminiert man aus den Gleichungen:

$$z' = Az + B, \quad x_i' = X_i$$

die Größen $p_1, \ldots, p_n$, so erhält man zwischen: $z', x_1', \ldots, x_n', z, x_1 \ldots, x_n$ Relationen von der Form:

$$z' = Az + B, \quad \Omega_1\,(x_1', \ldots, x_n', x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \Omega_q\,(x_1', \ldots, x_n) = 0.$$

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß Relationen von dieser Form immer eine homogene Berührungstransformation bestimmen.

Denn nach unserer allgemeinen Theorie hat man, um diese Berührungstransformation zu finden, den vorstehenden Relationen die folgenden hinzuzufügen:

$$p_i' = \frac{\partial(\lambda_1\Omega_1 + \cdots + \lambda_q\Omega_q)}{\partial x_i'}, \quad p_i = -\frac{1}{A}\frac{\partial(\lambda_1\Omega_1 + \cdots + \lambda_q\Omega_q)}{\partial x_i}.$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt aber, daß x_i' und p_i' homogene Funktionen respektive nullter und erster Dimension von $p_1, \ldots, p_n$ werden. Demnach:

Theorem IV. *Sind $X_1, \ldots, X_n$ [unabhängige] homogene Funktionen nullter Dimension, welche paarweise: $(X_i X_k) = 0$ ergeben, so bestimmen die Gleichungen:*

$$z' = Az + B, \quad x_i' = X_i$$

immer eine homogene Berührungstransformation. Eine jede solche Transformation kann auch dadurch erhalten werden, daß man $q+1$ Gleichungen von der Form:

$$z' = Az + B, \; \Omega_k(x_1', \ldots, x_n', x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k=1,\ldots,q)$$

nimmt und die entsprechende Berührungstransformation sucht. Endlich ist selbstverständlich (Theorem III), daß, wenn: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ homogene Funktionen respektive nullter und erster Dimension sind, welche [239
die Relationen:

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = A$$

erfüllen, die Gleichungen:

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

immer eine homogene Berührungstransformation bestimmen.

§ 6. Infinitesimale homogene Berührungstransformationen.

16. Ich sage, daß eine homogene Berührungstransformation:

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i, \quad (P_i X_i) = 1$$

infinitesimal ist, wenn sie die Form:

$$x_i' = x_i + \varepsilon M_i, \quad p_i' = p_i + \varepsilon \Pi_i$$

annehmen kann, wo ε eine infinitesimale Größe, M_i und Π_i homogene Funktionen von respektive nullter und erster Dimension sind. Ich werde zeigen, daß es immer eine homogene Funktion erster Dimension gibt, deren partielle Derivierte hinsichtlich p_i und x_i eben M_i und $-\Pi_i$ sind.

Diese Bemerkung, die in dieser Abhandlung nicht weiter benutzt wird, besitzt eine fundamentale Wichtigkeit; sie ist mir der Ausgangspunkt für neuere Untersuchungen über Transformationsgruppen gewesen.

Setzt man in den Relationen:

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = 1$$

statt X_i und P_i beziehungsweise: $x_i + \varepsilon M_i$ und: $p_i + \varepsilon \Pi_i$, so findet man durch Entwickelung und Wegwerfung infinitesimaler Größen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial M_i}{\partial p_k} = \frac{\partial M_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial M_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Pi_k}{\partial x_i},$$

wo i und k alle möglichen Werte, insbesondere auch denselben Wert annehmen dürfen. Diese Gleichungen zeigen, daß es eine Funktion Φ von $x_1, \ldots, p_n$ gibt, für welche:

$$M_i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}, \quad \Pi_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

ist. Hier ist Φ nur der Beschränkung unterworfen, daß $\partial\Phi : \partial p_i$ und $\partial\Phi : \partial x_i$ homogen, beziehungsweise von nullter und erster Dimension sein sollen. Also muß:

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\right) = 0, \quad \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$$

sein, woraus:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_k p_k \frac{\partial\Phi}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k p_k \frac{\partial\Phi}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$$ [240

und durch Integration und Weglassung einer unwesentlichen Konstanten:

$$\sum_k p_k \frac{\partial\Phi}{\partial p_k} = \Phi$$

folgt, das heißt, Φ muß selbst eine homogene Funktion erster Dimension sein. Es ist auch klar, daß $\partial\Phi : \partial p_i$ und $\partial\Phi : \partial x_i$ homogen, beziehungsweise von nullter und erster Dimension sind, wenn Φ homogen von erster Dimension ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen statt: $x_i' - x_i$ und $p_i' - p_i$ beziehungsweise: δx_i und δp_i, und bezeichnen mit t irgend eine Hilfsvariable, so können wir das obenstehende folgendermaßen zusammenfassen:

Theorem V. *Eine jede infinitesimale homogene Berührungstransformation besitzt die Form:*

$$\delta x_i : \frac{\partial H}{\partial p_i} = \delta p_i : -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \delta t;$$

hier bezeichnet H irgend eine homogene Funktion erster Dimension.[1])

1) Aus diesem Theoreme folgt unter anderm, wie man leicht einsieht, daß die Bestimmung aller infinitesimalen Berührungstransformationen, die eine Gleichung:

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{Const.}$$

in sich selbst überführen, sich mit der Integration dieser Gleichung deckt.

Für Gleichungen höherer Ordnung sind diese beiden Probleme im allgemeinen verschieden und haben deshalb beide ihre selbständige Berechtigung.

§ 7. Über eine Verbesserung der Jacobi-Mayerschen Integrationsmethode.

Die Jacobische Integrationsmethode, wie auch die Jacobi-Weilersche und die Jacobi-Mayersche Methode beruhen darauf, daß man, wenn n Funktionen $F_1, \ldots, F_n$ von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ paarweise:

$$(F_i F_k) = 0$$

ergeben, und es dabei möglich ist, die Gleichungen:

$$F_1 = a_1, \ldots, F_n = a_n$$

hinsichtlich der Differentialquotienten aufzulösen, eine jede von diesen partiellen Differentialgleichungen integrieren kann.

Die Forderung, daß unsere Gleichungen sich hinsichtlich der p auflösen lassen sollen, verursacht bekanntlich gewisse Schwierigkeiten, die Jacobi zwar reduziert, jedoch nicht vollständig überwunden hat. Man [241 muß es daher als eine wesentliche Verbesserung der betreffenden Methoden betrachten, daß man die besprochene Forderung, wie jetzt gezeigt werden soll, vollständig fallen lassen kann.

Ich betrachte zuerst Gleichungen, in denen die unbekannte Funktion explizite vorkommt, sodann solche, wo dies nicht der Fall ist.

17. Ich stütze mich auf die Clebschsche Theorie des Pfaffschen Problems. Sei:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} X_k dx_k$$

ein vorgelegter Pfaffscher Ausdruck, der auf eine n-gliedrige Form:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} X_k dx_k = \sum_k^{1\ldots n} F_k df_k$$

gebracht werden kann. Die Größen f werden nach Clebsch durch das simultane System:

$$((f_i)) = 0, \quad ((f_i f_k)) = 0$$

bestimmt. Sind n [unabhängige] Funktionen f gefunden, welche dasselbe befriedigen, so ist es möglich, vermöge ausführbarer Operationen alle $2n - 1$ Lösungen der Gleichung:

$$((f)) = 0$$

aufzustellen, das heißt, diese Gleichung zu integrieren.

Dieser bekannte Satz soll nun verwertet werden.

Es sei φ eine Funktion von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$ und:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_{n-1} dx_{n-1} - \varphi dx_n$$

der Pfaffsche Ausdruck, welcher auf eine n-gliedrige Form: $K_1 dH_1 + \cdots + K_n dH_n$ reduziert werden soll. Das oben angegebene simultane System nimmt dann die Form an:

$$[p_n - \varphi, H_i] = 0, \quad [H_i H_k] = 0,$$

und wir erhalten folglich den Satz:

Satz 15. *Sind $\varphi, H_1, \ldots, H_n$ gegebene [unabhängige] Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$, welche paarweise den Gleichungen:*

$$[p_n - \varphi, H_i] = 0, \quad [H_i H_k] = 0$$

genügen, so ist es immer möglich, alle $2n - 1$ Lösungen H der Gleichung: $[p_n - \varphi, H] = 0$ aufzustellen.

Berücksichtigt man, daß die Integration der Gleichung: $p_n - \varphi = 0$ nach der Cauchyschen Methode gerade auf die Bestimmung aller Lösungen H der Gleichung: $[p_n - \varphi, H] = 0$ hinauskommt, so kann man hiernach den folgenden Satz aussprechen:

Satz 16. *Die Integration der partiellen Differentialgleichung:*

$$p_n - \varphi(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0$$

kann immer geleistet werden, wenn man n von einander unabhängige [242 *Funktionen: $H_1, \ldots, H_n$* von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$ *gefunden hat, welche alle Gleichungen:*

$$[p_n - \varphi, H_i] = 0, \quad [H_i H_k] = 0$$

erfüllen. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob sich aus den Gleichungen:

$$H_1 = a_1, \ldots, H_n = a_n$$

alle p eliminieren lassen oder nicht. Es ist sogar denkbar, daß einige der Funktionen H_i diese Differentialquotienten gar nicht enthalten.

Dieser Satz läßt sich auch folgendermaßen wiedergeben:

Satz 17. *Sind $H_0, H_1, \ldots, H_n$ solche gegebene [unabhängige] Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, welche paarweise den Gleichungen: $[H_i H_k] = 0$ genügen, so kann eine jede von den Gleichungen: $H_i = a_i$ integriert werden.*

Hiernach können wir die Jacobi-Mayersche Integrationsmethode in folgender Weise formulieren:

Soll die Gleichung:

$$H_0(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_0$$

integriert werden, so sucht man zuerst eine von H_0 verschiedene Lösung H_1 von:

$$[H_0 H] = 0.$$

Dies verlangt eine Operation $2n-1$[1]). Sodann sucht man eine von H_0 und H_1 verschiedene Lösung H_2 des vollständigen Systems:

$$[H_0 H] = 0, \quad [H_1 H] = 0.$$

Vermöge des Mayerschen Theorems geschieht dies durch eine Operation $2n-3$. Sodann findet man vermöge einer Operation $2n-5$ eine von H_0, H_1 und H_2 verschiedene Lösung des vollständigen Systems:

$$[H_0 H] = 0, \quad [H_1 H] = 0, \quad [H_2 H] = 0,$$

und so weiter; endlich findet man vermöge einer Operation 1 eine von $H_0, H_1, \ldots, H_{n-1}$ verschiedene Lösung H_n des vollständigen Systems:

$$[H_0 H] = 0, \quad [H_1 H] = 0, \ldots, [H_{n-1} H] = 0.$$

Hiermit ist nach den obenstehenden Entwickelungen das Integrationsgeschäft als beendigt zu betrachten.

Der vorangehende Satz enthält zugleich die vollständige Lösung des wichtigen Problems:

Aus einer vollständigen Lösung einer gegebenen partiellen Differentialgleichung 1. O.:

$$H_0(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_0$$

eine vollständige Lösung jeder andern partiellen Differentialgleichung:

$$H_0'(z', x_1', \ldots, x_n', p_1', \ldots, p_n') = a_0$$

zu finden, die aus der gegebenen durch irgend eine Berührungstransformation hervorgeht, [243

eines Problems, mit dem sich schon Jacobi[2]) beschäftigt hat, und das, jedoch nur für spezielle Arten von Berührungstransformationen, zuerst von Mayer[3]) streng gelöst worden ist.

Ist nämlich:

$$z = Z(x_1, \ldots, x_n, a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung: $H_0 = a_0$, so müssen sich aus den $n+1$ Gleichungen:

$$z = Z, \quad p_1 = \frac{\partial Z}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial Z}{\partial x_n}$$

die $n+1$ Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bestimmen lassen, und der hierdurch

1) Unter „einer Operation m" verstehe ich die Auffindung eines Integrales von einem Systeme von m gewöhnlichen Differentialgleichungen.

2) Nova Methodus § 61 und Vorles. über Dynamik, S. 469.

3) Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 21.

erhaltene Wert von a_0 muß eben die gegebene Funktion H_0 sein. Bezeichnet man ferner durch:

$$a_1 = H_1, \ldots, a_n = H_n$$

die Werte der n übrigen Konstanten, so sind: $H_0, H_1, \ldots, H_n$ von einander unabhängige Funktionen, die in den gegenseitigen Beziehungen:

$$[H_i H_k] = 0$$

stehen.

Gehen nun durch Anwendung derjenigen Berührungstransformation, welche H_0 in H_0' transformiert, $H_1, \ldots, H_n$ über in: $H_1', \ldots, H_n'$, so sind auch: $H_0', H_1', \ldots, H_n'$ von einander unabhängige Funktionen, die nach Satz 8 paarweise den Gleichungen genügen:

$$[H_i' H_k'] = 0.$$

Nach Satz 17 kann man daher durch bloß algebraische Operationen eine vollständige Lösung der transformierten Gleichung: $H_0' = a_0$ erhalten.

Da die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung: $H_0 = a_0$ keinerlei Integrationen mehr erfordert, sobald man n von einander, wie von H_0 unabhängige Funktionen $H_1, \ldots, H_n$ gefunden hat, welche die Bedingungen:

$$[H_i H_k] = 0$$

erfüllen, so liegt es nahe, den Begriff der vollständigen Lösung dahin zu erweitern, daß man unmittelbar die n mit diesen Funktionen gebildeten Gleichungen:

$$H_1 = a_1, \ldots, H_n = a_n$$

eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung: $H_0 = a_0$ nennt.

Bei Zugrundelegung dieser erweiterten Definition der vollständigen Lösung kann man dann geradezu sagen:

Eine Berührungstransformation, welche die gegebene [244
partielle Differentialgleichung:

$$H_0(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_0$$

in die Gleichung:

$$H_0'(z', x_1', \ldots, x_n', p_1', \ldots, p_n') = a_0$$

überführt, führt gleichzeitig auch jede vollständige Lösung der ersten Gleichung in eine vollständige Lösung der zweiten über.

18. Um diese Theorie auf partielle Differentialgleichungen, welche die unbekannte Funktion selbst nicht enthalten, ausdehnen zu können, schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Satz 18. *Sei V eine Funktion von $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_q$, die durch q lineare partielle Differentialgleichungen:*

$$\sum_k^{1\ldots m} X_{ik} \frac{\partial V}{\partial x_k} + \sum_k^{1\ldots q} Y_{ik} \frac{\partial V}{\partial y_k} = W_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_q) \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

definiert wird. Besitzen diese Gleichungen eine gemeinsame Lösung von der Form:

$$V = F + \Phi(x_1, \ldots, x_m),$$

und bezeichnet Φ eine arbiträre Funktion, so sind alle X_{ik} gleich Null.

Denn nach Voraussetzung soll den vorgelegten Gleichungen gleichzeitig durch: $V = F$ und durch $V = F + \Phi$ genügt werden. Daher muß:

$$\sum_k^{1\ldots m} X_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0$$

sein. Diese Gleichung aber kann, wie die Annahme: $\Phi = x_k$ sofort zeigt, für eine willkürliche Funktion Φ nur dann bestehen, wenn jedes $X_{ik} = 0$ ist.

Satz 19. *Sei V eine Funktion von $x_1, \ldots, x_n$, die durch q lineare partielle Differentialgleichungen:*

$$\sum_k^{1\ldots n} X_{ik} \frac{\partial V}{\partial x_k} = W_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

definiert wird. Besitzen diese Gleichungen eine gemeinsame Lösung von der Form:

$$V = F + \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-q}),$$

und bezeichnet Φ eine arbiträre Funktion der Grössen ξ, die bekannt sein sollen, so verlangt die Bestimmung von V nur eine Quadratur.

Wählt man nämlich, was immer möglich ist, q solche Funktionen $y_1, \ldots, y_q$ von $x_1, \ldots, x_n$, daß keine Relation zwischen $\xi_1, \ldots, \xi_{n-q}, y_1, \ldots, y_q$ stattfindet, und führt sodann diese Größen als unabhängige Variabeln in unsere partiellen Differentialgleichungen ein, so erhalten diese Gleichungen nach dem vorhergehenden Satze die Form:

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = \Omega_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-q}, y_1, \ldots, y_q) \qquad (i = 1, \ldots, q);$$ [245

hiernach findet man V durch Quadratur.

Satz 20. *Sind $X_1, \ldots, X_n$ gegebene [unabhängige] Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, welche paarweise: $(X_i X_k) = 0$ ergeben, so ist es immer möglich, durch bloße Quadratur eine solche Funktion F von $z, x_1, \ldots, p_n$ zu finden, welche alle n Gleichungen: $[X_i F] = 0$ erfüllt.*

Früher (Satz 6) sahen wir nämlich, daß die Gleichungen:

$$[X_1, Az + \Pi] = 0, \ldots, [X_n, Az + \Pi] = 0,$$

in denen Π eine unbekannte Funktion von $x_1, \ldots, p_n$ bezeichnet, eine gemeinsame Lösung von der Form:

$$\Pi + \Phi(X_1, \ldots, X_n)$$

besitzen; hier ist Φ eine arbiträre Funktion von $X_1, \ldots, X_n$, und also verlangt die Bestimmung von Π nach dem vorangehenden Satze nur eine Quadratur.

Nunmehr können wir die Jacobi-Mayersche Methode auch für den Fall formulieren, daß die betreffende Gleichung die unbekannte Funktion z nicht enthält.

Soll die Gleichung:

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_1$$

integriert werden, so sucht man zuerst vermöge einer Operation $2n - 2$ eine von X_1 verschiedene Lösung X_2 der Gleichung:

$$(X_1 X) = 0,$$

sodann vermöge einer Operation $2n - 4$ eine von X_1 und X_2 verschiedene Lösung X_3 des vollständigen Systems:

$$(X_1 X) = 0, \quad (X_2 X) = 0,$$

und so weiter; endlich findet man vermöge einer Operation 2 eine Lösung X_n des vollständigen Systems:

$$(X_1 X) = 0, \ldots, (X_{n-1} X) = 0.$$

Ist dies geschehen, so bestimmt man durch bloße Quadratur eine Funktion: $Az + \Pi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$, welche allen Gleichungen:

$$[X_1, Az + \Pi] = 0, \ldots, [X_n, Az + \Pi] = 0$$

genügt. Hiermit ist das Integrationsgeschäft nach der vorangehenden Nummer beendigt.

§ 8. Antwort auf eine Bemerkung Mayers.

19. Seit 1872 sind Mayer und ich in einen lebhaften Verkehr getreten, der mir in mehreren Richtungen anregend gewesen ist. Insbesondere war es auf Mayers Aufforderung, daß ich 1873 eine algebraische Dar- [246
stellung der vorangehenden Theorien versuchte, die ich zum größten Teil durch Mannigfaltigkeitsbetrachtungen gefunden hatte.

Dabei war ich darauf vorbereitet, daß meine analytische Form unvollkommen erscheinen würde. Mayer machte mich in der Tat sogleich auf einige Ungenauigkeiten aufmerksam, die ich in jener Abhandlung begangen habe. Gleichzeitig machte er die wesentliche Einwendung[1]), daß ich die Clebschsche Theorie des Pfaffschen Problems:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} X_k dx_k = F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$$

in einer größeren Ausdehnung benutzte, als dieselbe von Clebsch bewiesen war. Es ist nämlich nur unter der Voraussetzung, daß die aus den Elementen:

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildete Determinante R nicht verschwindet, daß Clebsch beweist, daß die f ein beliebiges System Lösungen der simultanen Gleichungen:

$$((f_i)) = 0, \quad ((f_i f_k)) = 0$$

sind.

Ich konnte ihm antworten, daß diese Gleichungen, multipliziert mit der Determinante selbst:

$$R((f_i)) = 0, \quad R((f_i f_k)) = 0$$

unter allen Umständen die Größen f definieren.

Seien nämlich:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} X_k dx_k = F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$$

und:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} Y_k dy_k = \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

zwei Pfaffsche Ausdrücke, beziehungsweise in den Variabeln x und y, deren kanonische Formen n Glieder enthalten. Alsdann besteht eine jede der Reihen:

$$f_1, \ldots, f_n, F_1 : F_n, \ldots, F_{n-1} : F_n$$

und:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1 : \Phi_n, \ldots, \Phi_{n-1} : \Phi_n$$

aus Funktionen, zwischen denen keine Funktionalrelation stattfindet. Also kann man zwei solche Funktionen: $F(x_1, \ldots, x_{2n})$ und: $\Phi(y_1, \ldots, y_{2n})$ wählen, daß die $2n$ Gleichungen: [247

$$f_i = \varphi_i, \quad F_k : F_n = \Phi_k : \Phi_n, \quad F = \Phi$$

1) Vgl. seine Note Göttinger Nachr. 1874, Nr. 13: Über die Lieschen Berührungstransformationen.

eine Transformation zwischen den beiden Systemen von Variabeln x und y bestimmen. Eine solche Transformation führt aber den einen Pfaffschen Ausdruck in den anderen, multipliziert mit einer gewissen Größe, über. Also:

Sind:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} X_k dx_k \quad \text{und:} \quad \sum_k^{1\ldots 2n} Y_k dy_k$$

zwei Pfaffsche Ausdrücke, deren kanonische Formen n Glieder enthalten, so kann der eine Ausdruck alle solchen Eigenschaften des andern, die durch Änderung der unabhängigen Variabeln ungestört bleiben, durch Multiplikation mit einer passenden Größe erhalten.

20. Diese wichtige Bemerkung, die sich unmittelbar auf beliebige Pfaffsche Probleme ausdehnen läßt, erledigt insbesondere auch die besprochene Schwierigkeit leicht.

Das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Determinante R ist in der Tat eine Eigenschaft, die ungestört bleibt, wenn neue Variabeln eingeführt werden. Daß R gleich Null ist, heißt nämlich nach Clebsch, daß eine Gleichung von der Form:

$$\sum_k^{1\ldots 2n} X_k dx_k = d\pi_1 + \Pi_2 d\pi_2 + \cdots + \Pi_n d\pi_n$$

möglich ist. Folglich kann das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Determinante durch Multiplikation mit einer passenden Größe erreicht werden.

Sei nun $\sum X_k dx_k$ ein Ausdruck, dessen Determinante nicht verschwindet. Wir wählen eine solche Größe ϱ, daß auch die Determinante des Ausdrucks $\sum \varrho X_k dx_k$ von Null verschieden ist. Sind dann:

(a) $$((f_i)) = 0, \quad ((f_i f_k)) = 0$$

und:

(b) $$((f_i))_\varrho = 0, \quad ((f_i f_k))_\varrho = 0$$

die beiden simultanen Systeme, welche diesen beiden Ausdrücken entsprechen, so ist einleuchtend, daß dieselben nur hinsichtlich eines Faktors verschieden sein können; denn Größen $f_1, \ldots, f_n$, welche das eine System befriedigen, müssen der Natur der Sache nach auch das zweite erfüllen. Deshalb können unsere Gleichungen (a) und (b) eine gemeinsame Form erhalten, die geltend bleibt, selbst wenn die Determinante verschwindet. Bei Clebsch haben unsere Gleichungen die Form: [248

$$\frac{1}{R}\sum_i \sum_k X_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} R_{ik} = 0, \quad \frac{1}{R}\sum_i \sum_k \frac{\partial f_\alpha}{\partial f x_i} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_k} R_{ik}^{\bullet} = 0,$$

die illusorisch wird, wenn $R = 0$ ist. Dagegen werden die äquivalenten Gleichungen:

$$\sum_i \sum_k X_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} R_{ik} = 0, \qquad \sum_i \sum_k \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_k} R_{ik} = 0$$

niemals illusorisch, weil nämlich die Unterdeterminanten R_{ik} nicht sämtlich verschwinden dürfen. Diese Gleichungen sind es, die unter allen Umständen die Größen f definieren; und in dieser Form habe ich auch die Clebschschen Gleichungen im vorangehenden benutzt.

Zugefügt soll hier nur sein, daß der früher besprochene Multiplikator als ein Integrabilitätsfaktor aufzufassen ist.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Gruppen.

In diesem Abschnitte betrachte ich eine Reihe Funktionen: $F_1, \ldots, F_r$ von: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ und bestimme alle zwischen denselben stattfindenden Beziehungen, die bei beliebigen Berührungstransformationen zwischen x, p:

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

ungestört bleiben. Um den Resultaten eine möglichst einfache Form geben zu können, setze ich voraus, daß die Konstante $(P_i X_i)$ gleich 1 ist. Dies ist indes nur eine formale Beschränkung.

Im Anschluß an die gewonnenen Resultate entwickele ich eine rationelle Methode, welche lehrt, die bei der Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. O. eintretenden Umstände möglichst gut zu verwerten.

§ 9. Gruppe. Involutionssystem. Aufstellung zweier Probleme.

21. Die nachstehenden Theorien nehmen ihren Ursprung in der expliziten Einführung zweier Begriffe, von denen der erste dem Wesen der Sache nach Jacobi angehört.

Definition. Ich sage, daß r von einander unabhängige Funktionen: $u_1, \ldots, u_r$ von: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ eine **r-gliedrige Gruppe** bilden, wenn sich jedes $(u_i u_k)$ als Funktion der u ausdrücken läßt. Jede Funktion der Größen u **gehört,** sage ich, der Gruppe **an.**

Gehören die Funktionen einer ϱ-gliedrigen Gruppe: $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ [249 einer Gruppe mit mehr Gliedern: $u_1, \ldots, u_\varrho, u_{\varrho+1}, \ldots, u_r$ an, so sage ich,

daß die letzte Gruppe die erste enthält, oder daß diese eine Untergruppe der zweiten ist.

Satz 21. *Bestehen zwischen $u_1, \ldots, u_r$ [gerade] q Relationen, und drückt sich dabei jedes $(u_i u_k)$ durch die u aus, sodaß:*

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1, \ldots, u_r)$$

ist, so gibt es eine $(r-q)$-gliedrige Gruppe, welcher alle u angehören.

Denn nach unserer Voraussetzung ist es möglich, unter den Größen u $r-q$ solche, etwa: $u_1, \ldots, u_{r-q}$, zu finden, durch die sich die übrigen ausdrücken lassen. Setzt man die so gefundenen Werte von $u_{r-q+1}, \ldots, u_r$ in:

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1, \ldots, u_r)$$

ein, so erhält dieser Ausdruck die Form:

$$(u_i u_k) = \varphi_{ik}(u_1, \ldots, u_{r-q}),$$

und folglich bilden $u_1, \ldots, u_{r-q}$ eine Gruppe, welcher auch $u_{r-q+1}, \ldots, u_r$ angehören.

Satz 22. *Gehören $v_1, \ldots, v_r$ der Gruppe: $u_1, \ldots, u_r$ an, sodaß:*

$$v_i = V_i(u_1, \ldots, u_r)$$

ist, und sind: $V_1, \ldots, V_r$ von einander unabhängige Funktionen der u, so bilden auch $v_1, \ldots, v_r$ eine r-gliedrige Gruppe, die ich als eine andere Form der vorgelegten betrachte.

Denn nach unserer Voraussetzung sind $v_1, \ldots, v_r$, auch als Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ aufgefaßt, von einander unabhängig. Ferner ist:

$$(v_i v_k) = \sum_m^{1\ldots r} \sum_n^{1\ldots r} \frac{\partial V_i}{\partial u_m} \frac{\partial V_k}{\partial u_n} (u_m u_n),$$

woraus folgt, daß $(v_i v_k)$ eine Funktion der Größen u und also zugleich eine Funktion der Größen v ist.

Definition. *Bilden $u_1, \ldots, u_r$ eine Gruppe, und verschwinden dabei alle $(u_i u_k)$, so soll die Gruppe ein r-gliedriges Involutionssystem heißen.*

Ich nenne zwei Gruppen: $u_1, \ldots, u_r$ und: $w_1, \ldots, w_\varrho$ involutorische Gruppen, wenn jedes: $(u_i w_k) = 0$ ist.

In Jacobis Theorien spielen Involutionssysteme: $u_1, \ldots, u_r$, welche der lästigen Beschränkung unterworfen sind, daß sich die Gleichungen:

$$u_1 = a_1, \ldots, u_r = a_r$$

nach r von den Größen p auflösen lassen sollen, eine fundamentale Rolle. Die Einführung des allgemeinen Begriffs Involutionssystem gehört mir.

Satz 23. *Eine Berührungstransformation zwischen:* $x_1, \ldots, p_n, x'_1,$ [250
$\ldots, p'_n$:

$$x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i, \quad (P_i X_i) = 1$$

führt die Funktionen einer r-gliedrigen Gruppe $u'_1, \ldots, u'_r$ *in die Funktionen einer neuen r-gliedrigen Gruppe* $u_1, \ldots, u_r$ *über. Hierbei drückt sich jedes* $(u_i u_k)$ *in derselben Weise durch* $u_1, \ldots, u_r$ *aus, wie das entsprechende* $(u'_i u'_k)$ *durch* $u'_1, \ldots, u'_r$.

Wir haben nämlich gesehen (Satz 11), daß:

$$(u'_i u'_k)_{x'p'} = (u_i u_k)_{xp}.$$

Nun setzen wir voraus, daß:

$$(u'_i u'_k)_{x'p'} = f_{ik}(u'_1, \ldots, u'_r),$$

also finden wir:

$$(u_i u_k)_{xp} = f_{ik}(u'_1, \ldots, u'_r),$$

oder, wenn wir uns erinnern, daß $u'_1, \ldots, u'_r$, als Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ aufgefaßt, mit $u_1, \ldots, u_r$ zu bezeichnen sind:

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1, \ldots, u_r),$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Korollar. *Eine Berührungstransformation führt ein Involutionssystem wiederum in ein Involutionssystem über.*

22. Nunmehr kann ich die beiden Hauptprobleme dieses Abschnitts formulieren.

Problem I. Vorgelegt seien zwei r-gliedrige Gruppen $v'_1, \ldots, v'_r$ und $v_1, \ldots, v_r$. Es soll entschieden werden, ob es eine Berührungstransformation gibt, welche jedes v'_i in eine Funktion von $v_1, \ldots v_r$, oder, wie ich kurzweg sage, welche die eine Gruppe in die andere transformiert.

Wir werden sehen, daß sich jede r-gliedrige Gruppe durch eine gewisse ganze positive Zahl, die kleiner als r ist, charakterisieren läßt. Soll sich eine r-gliedrige Gruppe in eine andere solche überführen lassen, so ist hierzu notwendig und hinreichend, daß diese Zahl für beide Gruppen dieselbe ist. Dieser wichtige Satz läßt sich auch folgendermaßen aussprechen: Eine r-gliedrige Gruppe besitzt nur eine einzige von ihrer Form unabhängige Eigenschaft, welche bei Berührungstransformationen invariant bleibt. Diese Eigenschaft läßt sich durch eine ganze positive Zahl, die kleiner als r ist, ausdrücken.

Problem II. Vorgelegt seien zwei Systeme von je r Funktionen, beziehungsweise von: $x'_1, \ldots, p'_n$ und: $x_1, \ldots, p_n$:

$$F'_1, \ldots, F'_r \text{ und}: F_1, \ldots, F_r.$$

Es soll entschieden werden, ob es eine Berührungstransformation:

$$x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i, \quad (P_i X_i) = 1$$

gibt, welche jedes F'_k in das entsprechende F_k transformiert.

Auch die Lösung dieses Problems, die wir in § 16 geben, ist [251
sehr einfach.

§ 10. Reziproke Gruppen.

23. Der analytische[1]) Ausgangspunkt für meine Untersuchungen über Gruppen war der folgende Satz:

Satz 24. *Ist:* $u_1, \ldots, u_r$ *eine Gruppe und* V *eine unbekannte Funktion von* $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, *so bilden die* r *linearen Gleichungen:*

$$(u_1 V) = 0, \ldots, (u_r V) = 0$$

ein vollständiges System.

Beweis. Es ist zunächst klar, daß diese Gleichungen von einander unabhängig sind, denn sonst verschwänden eine Reihe von Funktionaldeterminanten, und demzufolge existierten Relationen zwischen $u_1, \ldots, u_r$, aufgefaßt als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Dies steht aber im Widerspruch mit unseren Voraussetzungen.

Schreiben wir nun $A_i(V)$ statt $(u_i V)$, so finden wir durch Ausführung:

$$A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V)) = ((u_i, u_k)V)^{2)}.$$

Nun ist aber (Nr. 21):

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1, \ldots, u_r),$$

also kommt:

$$((u_i u_k)V) = \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_1}(u_1 V) + \cdots + \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_r}(u_r V),$$

---

1) Es war bei synthetischen Spekulationen über das Poisson-Jacobische Theorem und den eigentlichen Kern desselben, daß ich auf dieses Theorem geführt wurde. Ich bemerkte, daß die Mannigfaltigkeiten, die von den charakteristischen Streifen zweier oder mehrerer Gleichungen erzeugt werden, zu untersuchen sind.

2) Daß die beiden Gleichungen: $(u_1 V) = 0$, $(u_2 V) = 0$ die folgende: $((u_1 u_2) V) = 0$ nach sich ziehen, ist bekanntlich ein Beweis des Poisson-Jacobischen Theorems.

das heißt:

$$A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V)) = \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_1} A_1(V) + \cdots + \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_r} A_r(V),$$

womit unser Satz bewiesen ist. —

Das vollständige System:

$$(u_1 V) = 0, \ldots, (u_r V) = 0$$

hat $2n-r$ Lösungen: $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-r}$, zwischen denen keine Funktionalrelation stattfindet, und jede andere Lösung läßt sich als Funktion dieser Größen darstellen. Nun besagt das Poisson-Jacobische Theorem, daß jedes $(v_i v_k)$ ebenfalls eine solche Lösung ist. Folglich ist $(v_i v_k)$ eine Funktion der v:

$$(v_i v_k) = \varphi_{ik}(v_1, \ldots, v_{2n-r}),$$ [252

das heißt, $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ bilden eine neue Gruppe.

Also bilden auch die Gleichungen:

$$(v_1 U) = 0, \ldots, (v_{2n-r} U) = 0$$

ein vollständiges System mit $2n - (2n - r) = r$ Lösungen. Offenbar genügen $u_1, \ldots, u_r$ diesem Systeme, dessen sämtliche Lösungen also der ursprünglichen Gruppe angehören. Also:

Theorem VI. *Eine jede Gruppe $u_1, \ldots, u_r$ bestimmt eine zweite Gruppe mit $2n - r$ Gliedern, die in einem vollständigen Reziprozitätsverhältnisse zu der ersten steht. Jede Gruppe besteht aus allen Funktionen, die mit allen Funktionen der andern Gruppe in Involution liegen. Zwei solche Gruppen sollen reziproke Gruppen heißen. Ich nenne auch häufig die eine Gruppe die Polargruppe der andern.*[1])

Sind: $u_1, \ldots, u_r$ und: $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ zwei reziproke Gruppen, die durch eine Berührungstransformation beziehungsweise in: $u_1', \ldots, u_r'$ und: $v_1', \ldots, v_{2n-r}'$ übergeführt werden, so sind auch diese beiden neuen Gruppen reziproke Gruppen. Denn da jedes $(u_i v_k)$ verschwindet, so ist dies auch (Satz 8) mit jedem Ausdrucke $(u_i' v_i')$ der Fall.

§ 11. Die ausgezeichneten Funktionen einer Gruppe.

24. In diesem Paragraphen wird ein neuer Fundamentalbegriff eingeführt.

1) Auf diesen Satz gründet sich eine allgemeine Reziprozitätstheorie. Einem jeden Satze über Gruppen entspricht ein reziproker Satz. Andererseits ordnen sich auch die zwischen Gruppen möglichen Beziehungen paarweise als reziproke zusammen. Diese Andeutungen sollen hier nicht weiter entwickelt werden.

Definition. Funktionen U, die einer Gruppe $u_1, \ldots, u_r$ angehören und alle Relationen:

$$(u_1 U) = 0, \ldots, (u_r U) = 0$$

erfüllen, sollen ausgezeichnete Funktionen heißen.

Es ist klar, daß die Zahl der von einander unabhängigen ausgezeichneten Funktionen einer Gruppe von der Form der Gruppe unabhängig ist. Es ist auch klar, daß eine Gruppe mit m ausgezeichneten Funktionen durch eine jede Berührungstransformation in eine Gruppe mit m ausgezeichneten Funktionen übergeführt wird.

Satz 25. *Bestehen [gerade] m Relationen zwischen den Funktionen zweier reziproker Gruppen, so gibt es m Funktionen, welche gleichzeitig beiden Gruppen angehören.*

Beweis. Ich setze voraus, daß $u_1, \ldots, u_r$ und $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ zwei reziproke Gruppen sind, zwischen deren Funktionen [gerade] m Rela- [253
tionen stattfinden. Erinnern wir uns nun, daß:

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1, \ldots, u_r), \quad (v_i v_k) = \varphi_{ik}(v_1, \ldots, v_{2n-r}), \quad (u_i v_k) = 0,$$

und berücksichtigen ferner Satz 21, so ergibt sich, daß $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{2n-r}$ einer gewissen $(2n - m)$-gliedrigen Gruppe:

$$W_1, \ldots, W_{2n-m}$$

angehören, welche sowohl die Form:

$$u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{2n-r-m},$$

als auch die Form:

$$v_1, \ldots, v_{2n-r}, u_1, \ldots, u_{r-m}$$

annehmen kann. Hieraus folgt, daß die m Lösungen: $F_1, \ldots, F_m$ des vollständigen Systems:

$$(W_1 F) = 0, \ldots, (W_{2n-m} F) = 0$$

einerseits den Gleichungen:

$$(u_1 F) = 0, \ldots, (u_r F) = 0$$

genügen und also der Gruppe $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ angehören, andererseits die Gleichungen:

$$(v_1 F) = 0, \ldots, (v_{2n-r} F) = 0$$

erfüllen und also zugleich der Gruppe $u_1, \ldots, u_r$ angehören. Es gibt also wirklich m Funktionen, welche beiden Gruppen angehören.

Satz 26. *Gehört eine Funktion F gleichzeitig zweien reziproken Gruppen an, so ist sie ausgezeichnete Funktion in beiden Gruppen.*

Denn als zugehörig der Gruppe $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ genügt F den Gleichungen:

$$(u_1 F) = 0, \ldots, (u_r F) = 0;$$

nun ist F eine Funktion der Größen u, und jede solche Funktion, welche die eben aufgestellten Gleichungen erfüllt, ist eine ausgezeichnete Funktion der Gruppe $u_1, \ldots, u_r$. In entsprechender Weise sieht man, daß F eine ausgezeichnete Funktion der Gruppe v ist.

Satz 27. *Jede ausgezeichnete Funktion einer Gruppe gehört der reziproken Gruppe an.*

Denn ist U eine ausgezeichnete Funktion der Gruppe $u_1, \ldots, u_r$, so gelten die Relationen:

$$(u_1 U) = 0, \ldots, (u_r U) = 0;$$

dies sind aber eben diejenigen Gleichungen, die stattfinden müssen, wenn U der reziproken Gruppe angehören soll.

Satz 28. *Jede ausgezeichnete Funktion einer Gruppe ist ausgezeichnete Funktion in der reziproken Gruppe.*

Dieser Satz folgt als Corollar aus den beiden vorangehenden.

Satz 29. *Enthält eine Gruppe $u_1, \ldots, u_r$ m ausgezeichnete Funk-* [254 *tionen: $U_1, \ldots, U_m$, so bestehen m Relationen zwischen den Funktionen dieser Gruppe und denjenigen der reziproken Gruppe $v_1, \ldots, v_{2n-r}$.*

Denn $U_1, \ldots, U_m$ gehören beiden Gruppen an; drückt man sie also einmal als Funktionen der u, das andere Mal als Funktionen der v aus und setzt diese Ausdrücke einander paarweise gleich, so findet man die besprochenen Relationen:

$$\begin{aligned} F_1(u_1, \ldots, u_r) &= \Phi_1(v_1, \ldots, v_{2n-r}), \\ \cdots \quad &\cdot \quad \cdots \\ F_m(u_1, \ldots, u_r) &= \Phi_m(v_1, \ldots, v_{2n-r}). \end{aligned}$$

Die Ergebnisse dieser Nummer fasse ich folgendermaßen zusammen:

Theorem VII. *Zwei reziproke Gruppen enthalten dieselben ausgezeichneten Funktionen, und zwischen den Funktionen zweier reziproker Gruppen bestehen soviel und nur soviel Relationen, als die Gruppen ausgezeichnete Funktionen enthalten. Diese Relationen haben immer die Form:*

$$F_i(u_1, \ldots, u_r) = \Phi_i(v_1, \ldots, v_{2n-r}) \qquad (i=1, \ldots, m);$$

sie sagen eben aus, daß die m ausgezeichneten Funktionen sowohl der einen wie der anderen Gruppe angehören.

25. Ich werde zeigen, daß sich die Zahl der ausgezeichneten Funktionen in der Weise bestimmen läßt, daß man eine gewisse Determinante

aufstellt und sodann untersucht, ob dieselbe und ihre Unterdeterminanten erster, zweiter, ..., Ordnung verschwinden. Enthält unsere Gruppe m ausgezeichnete Funktionen, so verlangt die Bestimmung derselben die Operationen: $m, m-1, \ldots, 3, 2, 1$.

Sei $u_1, \ldots, u_r$ eine Gruppe und U eine Funktion von $u_1, \ldots, u_r$. Soll dieselbe eine ausgezeichnete Funktion sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen:

$$(u_1 U) = 0, \ldots, (u_r U) = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{aligned} A_1(U) &= (u_1 u_1)\frac{\partial U}{\partial u_1} + (u_1 u_2)\frac{\partial U}{\partial u_2} + \cdots + (u_1 u_r)\frac{\partial U}{\partial u_r} = 0, \\ A_2(U) &= (u_2 u_1)\frac{\partial U}{\partial u_1} + (u_2 u_2)\frac{\partial U}{\partial u_2} + \cdots + (u_2 u_r)\frac{\partial U}{\partial u_r} = 0, \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ A_r(U) &= (u_r u_1)\frac{\partial U}{\partial u_1} + (u_r u_2)\frac{\partial U}{\partial u_2} + \cdots + (u_r u_r)\frac{\partial U}{\partial u_r} = 0 \end{aligned}$$

stattfinden. Setzt man hier überall statt $(u_i u_k)$ die entsprechende Funktion $f_{ik}(u_1, \ldots, u_r)$, so erhält man r lineare partielle Differentialgleichungen mit r unabhängigen Variabeln zur Bestimmung von U. Soll also die Gruppe m ausgezeichnete Funktionen enthalten, so müssen sich unsere r Gleichungen durch $r-m$ von denselben, etwa durch:

$$A_1(U) = 0, \ldots, A_{r-m}(U) = 0, \qquad [255$$

die ein vollständiges System bilden, ersetzen lassen. Hierzu ist offenbar erforderlich, daß sich: $A_{r-m+1}(U), \ldots, A_r(U)$ linear durch: $A_1(U), \ldots, A_{r-m}(U)$ ausdrücken lassen. Umgekehrt ist klar, daß unsere $r-m$ Gleichungen ein vollständiges System bilden, wenn diese Forderung erfüllt ist. Denn der Ausdruck: $A_i(A_k(U)) - A_k(A_i(U))$ drückt sich linear durch: $A_1(U), \ldots, A_r(U)$ aus:

$$A_i(A_k(U)) - A_k(A_i(U)) = \lambda_1 A_1(U) + \cdots + \lambda_r A_r(U).$$

Setzt man aber hierin für $A_{r-m+1}(U), \ldots, A_r(U)$ ihre Ausdrücke in $A_1(U), \ldots, A_{r-m}(U)$, so erhält man Relationen von der Form:

$$A_i(A_k(U)) - A_k(A_i(U)) = \varrho_1 A_1(U) + \cdots + \varrho_{r-m} A_{r-m}(U),$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Es zeigt sich also, daß man die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} (u_1 u_1) & (u_1 u_2) & \dots & (u_1 u_r) \\ (u_2 u_1) & (u_2 u_2) & \dots & (u_2 u_r) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (u_r u_1) & \cdot & \dots & (u_r u_r) \end{vmatrix}$$

aufstellen muß. Ist dieselbe von Null verschieden, so sind die Ausdrücke $A_1(U), \dots, A_r(U)$ von einander unabhängig, und also hat unsere Gruppe keine ausgezeichnete Funktion. Verschwindet dagegen diese Determinante und ihre Unterdeterminanten erster, zweiter, ..., $(m-1)$-ter Ordnung, während die Unterdeterminanten m-ter Ordnung nicht sämtlich verschwinden, so gibt es unter den $A_i(U)$ m solche, die sich durch die übrigen linear ausdrücken lassen, und also enthält die Gruppe m ausgezeichnete Funktionen.

Man kann bemerken, daß D eine schiefe Determinante ist. Bezeichnet also r eine beliebige ungerade Zahl, so ist D gleich Null, und die Gruppe enthält jedenfalls eine ausgezeichnete Funktion.

Findet man, daß unsere r-gliedrige Gruppe $u_1, \dots, u_r$ m ausgezeichnete Funktionen enthält, so nehme man, was immer möglich ist, $r-m$ von den Ausdrücken $A_k(U)$, etwa $A_1(U), \dots, A_{r-m}(U)$, die von einander unabhängig sind. Alsdann bilden die Gleichungen:

$$A_1(U) = 0, \dots, A_{r-m}(U) = 0$$

ein vollständiges System, dessen m Lösungen eben die ausgezeichneten Funktionen der Gruppe sind. Ihre Bestimmung verlangt, wie Mayer und ich in unseren früheren Arbeiten bemerkt haben, nur die Operationen:

$$m, m-1, \dots, 3, 2, 1.$$

Wendet man das Mayersche Theorem an, so wird man sehr häufig die ausgezeichneten Funktionen durch noch einfachere Operationen [256 bestimmen können.

Es ist einleuchtend, daß, wenn μ ausgezeichnete Funktionen schon bekannt sind, die Bestimmung der übrigen alsdann nur die Operationen: $m-\mu, m-\mu-1, \dots, 3, 2, 1$ verlangt.

Theorem VIII. *Soll man entscheiden, wie viele ausgezeichnete Funktionen eine Gruppe $u_1, \dots, u_r$ enthält, so bildet man die Determinante mit r Reihen und Kolonnen, deren Elemente die Größen $(u_i u_k)$, ausgedrückt als Funktionen von $u_1, \dots, u_r$, sind. Verschwindet diese Determinante nebst ihren Unterdeterminanten erster, zweiter, ... bis $(m-1)$-ter Ordnung,*

so hat die Gruppe m ausgezeichnete Funktionen. Man findet dieselben, indem man unter den r Ausdrücken:

$$A_i(U) = (u_i u_1)\frac{\partial U}{\partial u_1} + (u_i u_2)\frac{\partial U}{\partial u_2} + \dots + (u_i u_r)\frac{\partial U}{\partial u_r}$$

$r-m$ solche, etwa $A_1(U), \dots, A_{r-m}(U)$, auswählt, die von einander unabhängig sind. Die Gleichungen:

$$A_1(U) = 0, \dots, A_{r-m}(U) = 0$$

bilden alsdann ein vollständiges System, dessen m Lösungen eben die ausgezeichneten Funktionen der Gruppe sind. Man findet dieselben also vermöge der Operationen: $m, m-1, \dots, 3, 2, 1$.

§ 12. Kanonische Form einer Gruppe.

In diesem Paragraphen beweisen wir zuerst einige Hilfssätze und zeigen hierauf, daß eine jede Gruppe auf eine bemerkenswerte Form, die ich „kanonisch" nenne, gebracht werden kann.

26. Satz 30. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe mehr als $r-2$ ausgezeichnete Funktionen, so ist sie ein Involutionssystem und besitzt also r ausgezeichnete Funktionen.*

Beweis. Gesetzt, die Gruppe $u_1, \dots, u_r$ besitze $r-1$ ausgezeichnete Funktionen: $U_1, \dots, U_{r-1}$; wir werden sehen, daß dieselbe dann notwendigerweise noch eine solche Funktion enthalten muß. Denn bringen wir die Gruppe auf die äquivalente Form: $U_1, \dots, U_{r-1}\, V$, so muß, weil U_1 ausgezeichnete Funktion ist,

$$(U_1 V) = 0$$

sein; ebenso verschwindet $(U_2 V)$, weil U_2 ausgezeichnete Funktion ist; in dieser Weise erkennen wir die Existenz der Relationen:

$$(U_1 V) = 0, \dots, (U_{r-1} V) = 0,$$

welche zeigen, daß auch V ausgezeichnete Funktion ist. Unsere Gruppe besitzt also wirklich r ausgezeichnete Funktionen.

Satz 31. *Ist u_1 keine ausgezeichnete Funktion einer Gruppe $u_1, \dots, u_r$,* [257 *so gibt es immer Funktionen $F(u_1, \dots, u_r)$, welche die Gleichung: $(u_1 F) = 1$ erfüllen.*

Denn nach unserer Voraussetzung gibt es jedenfalls einige unter den Ausdrücken: $(u_1 u_2), (u_1 u_3), \dots, (u_1 u_r)$, die nicht identisch verschwinden. Bezeichnet daher F eine unbestimmte Funktion von $u_1, \dots, u_r$, so ist:

$$(u_1 u_2)\frac{\partial F}{\partial u_2} + (u_1 u_3)\frac{\partial F}{\partial u_3} + \dots + (u_1 u_r)\frac{\partial F}{\partial u_r},$$

oder, wenn man statt $(u_1 u_k)$ die entsprechende Funktion $f_{1k}(u_1, \ldots, u_r)$ einführt:

$$f_{12}\frac{\partial F}{\partial u_2} + f_{13}\frac{\partial F}{\partial u_3} + \cdots + f_{1r}\frac{\partial F}{\partial u_r}$$

von Null verschieden. Also ist:

$$f_{12}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \cdots + f_{1r}\frac{\partial F}{\partial u_r} = 1$$

eine lineare partielle Differentialgleichung, deren Lösungen F der Bedingung:

$$(u_1 F) = 1$$

genügen.

Satz 32. *Enthält die Gruppe $u_1, \ldots, u_r$ eine Untergruppe $u_1, \ldots, u_\varrho$, so ist die Polargruppe der ersten in der Polargruppe der zweiten enthalten.*

Denn die Glieder der Polargruppe von $u_1, \ldots, u_r$ sind definiert durch:

$$(u_1 v) = 0, \ldots, (u_\varrho v) = 0, \ldots, (u_r v) = 0,$$

und die Glieder der Polargruppe von $u_1, \ldots, u_\varrho$ genügen den Gleichungen:

$$(u_1 V) = 0, \ldots, (u_\varrho V) = 0.$$

Wir sehen, daß die Lösungen des ersten Systems auch das letzte befriedigen, während das Umgekehrte nicht gilt; also ist der Satz bewiesen.

Satz 33. *Ist der Ausdruck $(u_1 u_2)$ gleich 1, so kann eine jede Gruppe $u_1, u_2, \ldots, u_r$ auf die Form $u_1, u_2, u'_1, \ldots, u'_{r-2}$ gebracht werden, wo alle $(u_1 u'_i)$ und $(u_2 u'_k)$ gleich Null sind, während alle $(u'_i u'_k)$ sich als Funktionen von $u'_1, \ldots, u'_{r-2}$ ausdrücken lassen.*

Ist nämlich:

$$v_1, \ldots, v_{2n-r}$$

die Polargruppe von $u_1, \ldots, u_r$, so ist bei unserer Voraussetzung auch:

$$u_1, u_2, v_1, \ldots, v_{2n-r}$$

eine Gruppe, deren $(r-2)$-gliedrige Polargruppe:

$$u'_1, \ldots, u'_{r-2}$$

in $u_1, \ldots, u_r$ enthalten ist (Satz 32) und mit der Gruppe u_1, u_2 in Involution liegt. Es ist klar, daß keine Relation zwischen $u_1, u_2, u'_1,$ [258
$\ldots, u'_{r-2}$ stattfinden kann; denn eine solche ließe sich auf die Form:

$$u_1 = \Psi(u_2, u'_1, \ldots, u'_{r-2})$$

bringen, und also wäre:

$$(u_1 u_2) = (u'_1 u_2)\frac{\partial \Psi}{\partial u'_1} + \cdots + (u'_{r-2} u_2)\frac{\partial \Psi}{\partial u'_{r-2}},$$

in welcher Gleichung die rechte Seite verschwindet, während die linke gleich 1 ist. Dies ist aber absurd. Also ist $u_1, u_2, u'_1, \ldots, u'_{r-2}$ eine Form unserer Gruppe, welche die verlangten Eigenschaften besitzt.

Satz 34. *Eine jede r-gliedrige Gruppe, die kein Involutionssystem ist, läßt sich zerlegen in eine zweigliedrige und eine $(r-2)$-gliedrige Gruppe, die mit jener in Involution liegt.*

Denn die vorgelegte Gruppe $u_1, \ldots, u_r$ enthält nach unserer Voraussetzung Funktionen, die nicht mit allen übrigen Funktionen der Gruppe in Involution liegen; wir nehmen eine solche, etwa u_1, und bestimmen (Satz 31) eine zweite Funktion u_2 der Gruppe, welche:

$$(u_1 u_2) = 1$$

gibt. Berücksichtigen wir dann den vorangehenden Satz, so sehen wir die Richtigkeit unseres Satzes ein.

27. Aus den vorangehenden Sätzen fließt eine allgemeine und äußerst wichtige Reduktion einer jeden Gruppe auf eine kanonische Form.

Satz 35. *Eine jede Gruppe kann die Form: $X_1, \ldots, X_\nu, P_1, \ldots, P_\mu$ erhalten, wo die Ausdrücke: $(X_i X_k)$, $(X_i P_k)$, $(P_i P_k)$ gleich Null und alle $(P_i X_i)$ gleich 1 sind. Diese Form nenne ich eine kanonische Form.*

Ist nämlich unsere r-gliedrige Gruppe ein Involutionssystem, so hat sie bereits die kanonische Form, und zwar ist $\nu = r$, $\mu = 0$.

Ist $u_1, \ldots, u_r$ dagegen kein Involutionssystem, so zerlege man dieselbe (Satz 34) in eine zweigliedrige und eine $(r-2)$-gliedrige Gruppe:

$$\text{(A)} \qquad X_1, P_1, u'_1, \ldots, u'_{r-2},$$

welche beide in Involution liegen. Ist die $(r-2)$-gliedrige Gruppe ein Involutionssystem, so ist (A) die kanonische Form der ursprünglichen Gruppe, wobei $\nu = r-1$, $\mu = 1$ ist.

Ist $u'_1, \ldots, u'_{r-2}$ kein Involutionssystem, so zerlege man diese $(r-2)$-gliedrige Gruppe in eine zweigliedrige und eine $(r-4)$-gliedrige Gruppe:

$$X_2, P_2, u''_1, \ldots, u''_{r-4}.$$

Hierbei nimmt die ursprüngliche Gruppe die Form an:

$$X_1, P_1, X_2, P_2, u''_1, \ldots, u''_{r-4},$$

welche die verlangte kanonische Form ist, wenn die $(r-4)$-gliedrige Gruppe ein Involutionssystem ist. In dieser Weise fährt man fort, bis man zuletzt, etwa nach q Zerlegungen, zu einer $(r-2q)$-gliedrigen Gruppe: $u_1^{(q)}, \ldots, u_{r-2q}^{(q)}$ kommt, die ein Involutionssystem ist. Alsdann ist: [259

$$X_1, P_1, X_2, P_2, \ldots, X_q, P_q, u_1^{(q)}, \ldots, u_{r-2q}^{(q)}$$

die kanonische Form der r-gliedrigen Gruppe; hier ist: $\nu = r - q, \mu = q$.

Satz 36. *In einer kanonischen Gruppe:* $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ *sind:* $X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$ *die einzigen ausgezeichneten Funktionen.*

Wenn nämlich Π der vorgelegten kanonischen Gruppe angehört, so wird für $i = 1, \ldots, q$:

$$(X_i \Pi) = -\frac{\partial \Pi}{\partial P_i}, \quad (P_i \Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial X_i}.$$

Soll also Π eine ausgezeichnete Funktion sein, so muß für $i = 1, \ldots, q$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = 0$$

werden, das heißt, Π eine Funktion von $X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$ allein sein.

Satz 37. *Stehen:* $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ *in den Beziehungen:*

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = 1,$$

und besteht dabei keine Relation zwischen: $X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$, *so bilden unsere* $2q+m$ *Funktionen eine* $(2q+m)$*-gliedrige Gruppe.*

Unser Satz kommt darauf hinaus, daß unter den gemachten Voraussetzungen keine Relation zwischen unseren $2q+m$ Funktionen stattfinden kann. Denn eine solche würde jedenfalls eine von den $2q$ Größen $X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_q$, etwa X_1, enthalten und könnte also die Form:

$$X_1 = W(X_2, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q)$$

erhalten. Hieraus würde aber folgen:

$$(P_1 X_1) = (P_1 W),$$

was kontradiktorisch ist, weil die linke Seite gleich 1 und die rechte gleich Null ist.

Satz 38. *Die Differenz zwischen der Zahl der Glieder einer Gruppe und der Zahl ihrer ausgezeichneten Funktionen ist eine gerade Zahl.*

Denn jede Gruppe kann die Form:

$$X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$$

erhalten, wo $X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$ die ausgezeichneten Funktionen sind; also ist die erwähnte Differenz gleich $2q$.

Korollar 1. *Eine* $2q$*-gliedrige Gruppe enthält entweder* $2q$, *oder* $2q-2$, *oder* $2q-4, \ldots,$ *oder* 2, *oder keine ausgezeichneten Funktionen.*

Korollar 2. *Eine* $(2q+1)$*-gliedrige Gruppe enthält entweder* $2q+1$, *oder* $2q-1, \ldots,$ *oder* 3, *oder* 1 *ausgezeichnete Funktion. Eine solche Gruppe enthält also stets wenigstens e i n e ausgezeichnete Funktion.*

Wir fassen endlich unsere Resultate zusammen: [260

Theorem IX. *Eine jede Gruppe kann die Form:*

$$X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$$

erhalten, wobei folgende Relationen stattfinden:

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = 1.$$

Hier sind $X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$ *die ausgezeichneten Funktionen der Gruppe. Die Differenz zwischen der Zahl der Glieder und der Zahl der ausgezeichneten Funktionen ist stets eine gerade Zahl.*

§ 13. Bestimmung der invarianten Eigenschaften einer Gruppe.

28. Wir zeigen zunächst, daß man immer kanonische Gruppen finden kann, die eine gegebene kanonische Gruppe enthalten. Sodann erledigen wir das erste der beiden Probleme, die wir im Anfange dieses Abschnittes aufstellten.

Satz 39. *Ist:* $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ *eine kanonische Gruppe, so gibt es immer solche Funktionen* P_{q+1}, *welche die Gleichungen:*

$$(X_i P_{q+1}) = (P_i P_{q+1}) = 0, \quad (P_{q+1} X_{q+1}) = 1$$

erfüllen. Alsdann ist $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_{q+1}$ *eine neue kanonische Gruppe, welche die vorgelegte umfaßt.*

Offenbar ist nämlich:

$$\text{(A)} \qquad X_1, \ldots, X_q, X_{q+2}, \ldots, X_{q+m}, P_1, P_q \ldots,$$

eine Gruppe, deren Polargruppe X_{q+1} enthält und also etwa die Form:

$$\text{(B)} \qquad X_{q+1}, U_1, U_2, \ldots$$

besitzt. Nun gehört X_{q+1} der Gruppe (A) nicht an und ist also (Satz 27) keine ausgezeichnete Funktion von (B), welche letzte Gruppe somit (Satz 31) Funktionen P_{q+1} enthält, die:

$$(P_{q+1} X_{q+1}) = 1$$

ergeben. Aber eine jede solche Funktion P_{q+1} liegt, weil sie der Gruppe (B) angehört, mit allen Funktionen der Gruppe (A) in Involution, und besitzt also alle verlangten Eigenschaften.

Satz 40. *Ist:* $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ *eine kanonische Gruppe, so gibt es immer solche weitere Funktionen:* $P_{q+1}, P_{q+2}, \ldots, P_{q+m}$*, daß:*

$$X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_{q+m}$$

eine neue kanonische Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfaßt.

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar durch m-malige Anwendung des vorhergehenden.

Satz 41. *Ist:* $X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_q$ *eine kanonische Gruppe und* $q < n$*, so gibt es immer Funktionen* X_{q+1}*, die mit den Funktionen* [261 *unserer Gruppe in Involution liegen; alsdann ist:*

$$X_1, \ldots, X_{q+1}, P_1, \ldots, P_q$$

eine neue kanonische Gruppe, welche die vorgelegte umfaßt.

Denn eine jede Funktion, die der Polargruppe der vorgelegten Gruppe angehört, besitzt die Eigenschaften, die wir von der gesuchten Funktion X_{q+1} verlangten.

Satz 42. *Ist:* $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ *eine kanonische Gruppe, so gibt es immer solche weitere Funktionen:* $X_{q+m+1}, \ldots, X_n, P_{q+1}, \ldots, P_n$*, daß auch:*

$$X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$$

eine kanonische Gruppe ist.

Denn nach Satz 40 gibt es eine kanonische Gruppe:

$$X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_{q+m},$$

welche die vorgelegte umfaßt; darnach findet man vermöge Satz 41 eine kanonische Gruppe:

$$X_1, \ldots, X_{q+m+1}, P_1, \ldots, P_{q+m},$$

sodann (Satz 39) eine kanonische Gruppe:

$$X_1, \ldots, X_{q+m+1}, P_1, \ldots, P_{q+m+1},$$

und so weiter.

29. Im ersten Abschnitte (Theorem III) sahen wir, daß Gleichungen von der Form:

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i,$$

in denen X_i und P_i Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$ bezeichnen, welche die Bedingungen:

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = 1$$

erfüllen, immer eine Berührungstransformation bestimmen. Mit Benutzung dieses Satzes können wir jetzt folgendes Theorem beweisen und dadurch gleichzeitig Problem I erledigen:

Theorem X. *Besitzen zwei r-gliedrige Gruppen gleichviele ausgezeichnete Funktionen, so gibt es immer eine Berührungsformation, welche die eine Gruppe in die andere überführt. Andererseits ist diese Bedingung nicht allein hinreichend, sondern auch notwendig.*

Es seien: $u_1, \ldots, u_r$ Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, und: $w_1, \ldots, w_r$ Funktionen von $y_1, \ldots, y_n, \pi_1, \ldots, \pi_n$. Bilden dann sowohl $u_1, \ldots, u_r$, als auch $w_1, \ldots, w_r$ eine Gruppe, und besitzen beide Gruppen dieselbe Anzahl von ausgezeichneten Funktionen, so können die beiden Gruppen beziehungsweise die kanonischen Formen:

$$X_1, \ldots, X_\mu, P_1, \ldots, P_\nu \text{ und: } Y_1, \ldots, Y_\mu, \Pi_1, \ldots, \Pi_\nu$$

erhalten. Nach Satz 42 gibt es ferner stets solche weitere Funktionen X, P von $x_1, \ldots, p_n$ und Y, Π von $y_1, \ldots, \pi_n$, daß auch:

$$X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n \text{ und: } Y_1, \ldots, Y_n, \Pi_1, \ldots, \Pi_n$$ [262

wiederum kanonische Gruppen sind. Es ist daher sowohl:

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i,$$

als auch:

$$x_i' = Y_i, \quad p_i' = \Pi_i$$

eine Berührungstransformation. Hieraus aber folgt, daß auch die $2n$ Gleichungen:

$$X_i = Y_i, \quad P_i = \Pi_i$$

eine Berührungstransformation definieren, und man sieht, daß diese Transformation die eine Gruppe in die andere überführt.

Hiermit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen. Der letzte Teil desselben folgt unmittelbar daraus, daß bei jeder Berührungstransformation die Zahl der Glieder und die Zahl der ausgezeichneten Funktionen einer Gruppe ungeändert bleibt (§ 9 und § 11).

Korollar. Die einzigen Eigenschaften einer Gruppe, die von der Form der Gruppe unabhängig sind und bei Berührungstransformationen ungeändert bleiben, sind die Zahl der Glieder und die Zahl der ausgezeichneten Funktionen.

§ 14. Invariante Beziehungen zwischen einer Gruppe und einer Untergruppe derselben.

Ich erledige jetzt folgendes Problem:

Problem. *Vorgelegt seien zwei r-gliedrige Gruppen, von denen jede eine ρ-gliedrige Untergruppe enthält. Es soll entschieden werden, ob es eine Berührungstransformation gibt, welche die eine r-gliedrige Gruppe und deren*

Untergruppe beziehungsweise in die zweite r-gliedrige Gruppe und deren Untergruppe überführt.

30. Zunächst einige Hilfssätze.

Satz 43. *Sei: $u_1, \ldots, u_\varrho$ eine Gruppe, die in einer größeren Gruppe: $u_1, \ldots, u_\varrho, \ldots, u_r$ enthalten ist. Es bezeichne ferner U eine Funktion der letzten Gruppe. Enthalten unsere Gruppen keine gemeinsame ausgezeichnete Funktion, so bilden die Gleichungen:*

$$(u_1 U) = 0, \ldots, (u_\varrho U) = 0$$

ein vollständiges System, dessen $r - \varrho$ Lösungen: $w_1, \ldots, w_{r-\varrho}$ eine neue Gruppe bilden. Enthält insbesondere $u_1, \ldots, u_\varrho$ keine ausgezeichnete Funktion, so ist:

$$u_1, \ldots, u_\varrho, w_1, \ldots, w_{r-\varrho}$$

eine Form der Gruppe $u_1, \ldots, u_r$, die hierdurch in zwei involutorische Gruppen: $u_1, \ldots, u_\varrho$ und: *$w_1, \ldots, w_{r-\varrho}$ zerlegt ist.*

Sei nämlich $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ die Polargruppe von $u_1, \ldots, u_r$. Früher [263 (Theorem VII) sahen wir, daß eine jede Relation zwischen den u und v die Form besitzt:

$$F(u_1, \ldots, u_r) = \Phi(v_1, \ldots, v_{2n-r}),$$

wobei F eine ausgezeichnete Funktion der Gruppe $u_1, \ldots, u_r$ ist. Nach unserer Voraussetzung enthält diese Gruppe keine ausgezeichnete Funktion von der Form $F(u_1, \ldots, u_\varrho)$; also existiert keine Funktionalrelation zwischen: $u_1, \ldots, u_\varrho, v_1, \ldots, v_{2n-r}$. Folglich bilden diese Größen eine Gruppe, und die Gleichungen:

$$\text{(A)} \quad (u_1 W) = 0, \ldots, (u_\varrho W) = 0, \quad (v_1 W) = 0, \ldots, (v_{2n-r} W) = 0$$

ein vollständiges System, dessen $r - \varrho$ Lösungen: $w_1, \ldots, w_{r-\varrho}$ als Lösungen von:

$$(v_1 W) = 0, \ldots, (v_{2n-r} W) = 0$$

der Gruppe $u_1, \ldots, u_r$ angehören.

Daß $w_1, \ldots, w_{r-\varrho}$ eine Gruppe bilden, folgt daraus, daß jedes $(w_i w_k)$ nach dem Poisson-Jacobischen Theorem eine Lösung des Systems (A) ist.

Enthält im besondern $u_1, \ldots, u_\varrho$ keine ausgezeichnete Funktion, so existiert keine Relation zwischen: $u_1, \ldots, u_\varrho$ und: $w_1, \ldots, w_{r-\varrho}$, denn eine solche (Theorem VII) hätte die Form:

$$F(u_1, \ldots, u_\varrho) = \Phi(w_1, \ldots, w_{r-\varrho}),$$

wo F eine ausgezeichnete Funktion der Gruppe $u_1, \ldots, u_\varrho$ wäre. Also ist:

$$u_1, \ldots, u_\varrho, w_1, \ldots, w_{r-\varrho}$$

eine Form der Gruppe $u_1, \ldots, u_r$, die somit in zwei involutorische Gruppen zerlegt ist.

Satz 44. *Ist: $X_1, \ldots, X_\alpha, P_1, \ldots, P_\alpha$ eine kanonische Gruppe, die in einer Gruppe G enthalten ist, so kann G die kanonische Form: $X_1, \ldots, X_\alpha, X_{\alpha+1}, \ldots, X_\beta, P_1, \ldots, P_\alpha, P_{\alpha+1} \ldots, P_\gamma$ erhalten.*

Denn zerlegen wir G nach dem vorangehenden Satze in die beiden involutorischen Gruppen:

$$X_1, \ldots, X_\alpha, P_1, \ldots, P_\alpha \text{ und: } w_1, \ldots, w_\varrho$$

und bringen sodann $w_1, \ldots, w_\varrho$ auf eine kanonische Form:

$$X_{\alpha+1}, \ldots, X_\beta, P_{\alpha+1}, \ldots, P_\gamma,$$

so ist offenbar:

$$X_1, \ldots, X_\beta, P_1, \ldots, P_\gamma$$

die verlangte kanonische Form von G.

Satz 45. *Enthält eine Gruppe G ein Involutionssystem: $X_1, \ldots, X_\varrho$, und ist keine Funktion der X ausgezeichnete Funktion in G, so kann diese Gruppe die kanonische Form:*

$$X_1, \ldots, X_\varrho, X_{\varrho+1}, \ldots, X_\alpha, P_1, \ldots, P_\varrho, P_{\varrho+1}, \ldots, P_\beta$$

annehmen.

Sei nämlich: $X_1, \ldots, X_\varrho, u_1, \ldots, u_{r-\varrho}$ eine Form von G und: [264 $v_1, \ldots, v_{2n-r}$ ihre Polargruppe. Nach unserer Voraussetzung existiert keine Relation zwischen den X und v; also bilden:

$$X_2, \ldots, X_\varrho, v_1, \ldots, v_{2n-r}$$

eine Gruppe, deren Polargruppe (Satz 32) in G enthalten ist und X_1 enthält; diese Polargruppe besitzt daher die Form:

$$(G') \qquad X_1, \ldots, X_\varrho, w_1, \ldots, w_{r-2\varrho+1}.$$

X_1 ist (Satz 27) keine ausgezeichnete Funktion in G', welche Gruppe folglich eine Funktion P_1 enthält (Satz 31), die:

$$(P_1 X_1) = 1$$

ergibt. Hiermit ist die Gruppe G, die G' umfaßt, auf die Form:

$$X_1, P_1, X_2, \ldots, X_\varrho, \varphi_1, \ldots$$

gebracht. Sie läßt sich daher (Satz 43) in zwei involutorische Gruppen zerlegen, von denen: X_1, P_1 die eine ist, während die andere: $X_2, \ldots, X_\varrho$ enthält und die Form:

$$X_2, \ldots, X_\varrho, u'_1, \ldots, u'_{r-\varrho-1}$$

besitzt. Diese Gruppe enthält keine ausgezeichnete Funktion von der Form $F(X_2, \ldots, X_\varrho)$; also kann sie ebenfalls in zwei involutorische Gruppen:

$$X_2, P_2 \text{ und: } X_3, \ldots, X_\varrho, u_1'', \ldots, u_{r-\varrho-2}''$$

zerlegt werden. Indem wir in dieser Weise weiter gehen, bringen wir zuletzt G auf die verlangte Form.

Satz 46. *Sei nun vorgelegt eine Gruppe G mit r Gliedern: $u_1, \ldots, u_r$ und eine Untergruppe derselben: $u_1, \ldots, u_\varrho$, welche [gerade] $\tilde{\omega}$ ausgezeichnete Funktionen: $X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}$ mit G gemein hat. Ist:*

$$X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}, X_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha}, P_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, P_{\tilde{\omega}+\alpha}, X_{\tilde{\omega}+\alpha+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha+\beta}$$

eine kanonische Form der Untergruppe, so kann G immer die kanonische Form:

$$X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}, X_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha+\beta}, \ldots, X_\gamma, P_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, P_{\tilde{\omega}+\alpha+\beta}, \ldots, P_\delta$$

annehmen.

Denn nach unserer Voraussetzung bilden:

$$(G') \qquad X_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha}, P_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, P_{\tilde{\omega}+\alpha}$$

eine Gruppe G', die in G enthalten ist. Daher kann G nach Satz 43 in zwei involutorische Gruppen G' und G'' zerlegt werden, von denen die letzte offenbar die Funktionen: $X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}, X_{\tilde{\omega}+\alpha+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha+\beta}$ enthält und also die Form:

$$(G'') \qquad X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}, X_{\tilde{\omega}+\alpha+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha+\beta}, U_1, U_2, \ldots$$

besitzt. Nun umfaßt G'' das Involutionssystem: $X_{\tilde{\omega}+\alpha+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha+\beta}$, welches keine ausgezeichnete Funktion von G'' enthält; wenden wir [265
daher den vorangehenden Satz an, so sehen wir, daß G'' die Form:

$$X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}, X_{\tilde{\omega}+\alpha+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha+\beta}, \ldots, X_\gamma, P_{\tilde{\omega}+\alpha+1}, \ldots, P_{\tilde{\omega}+\alpha+\beta}, \ldots, P_\delta$$

annehmen kann. Hiermit ist die Gruppe G, die aus den Funktionen der beiden Gruppen G' und G'' besteht, auf die verlangte Form gebracht.

Korollar. *Hat eine Gruppe [gerade] $\tilde{\omega}$ ausgezeichnete Funktionen mit einer Untergruppe gemein, so können diese beiden Gruppen die kanonischen Formen:*

$$X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}, X_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha}, \quad P_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, P_{\tilde{\omega}+\alpha}, X_{\tilde{\omega}+\alpha+1}, \ldots, X_\beta$$
$$X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}, X_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, X_\beta, \ldots, X_\gamma, P_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, P_\beta, \ldots, P_\delta$$

annehmen.

31. Nun können wir das im Anfange dieses Paragraphen gestellte Problem erledigen.

Theorem XI. *Seien vorgelegt zwei Gruppen G und G' mit gleichvielen Gliedern und gleichvielen ausgezeichneten Funktionen. Jede der beiden Gruppen enthalte ferner eine Untergruppe g, respektive g', mit gleichvielen Gliedern und gleichvielen ausgezeichneten Funktionen. Endlich möge sowohl G wie G' mit der betreffenden Untergruppe [gerade] $\tilde{\omega}$ ausgezeichnete Funktionen gemein haben. Alsdann gibt es eine Berührungstransformation, welche gleichzeitig G und g in G' und g' überführt. Umgekehrt ist eine solche Transformation nur möglich, wenn alle genannten Forderungen erfüllt sind.*

Bringen wir nämlich g und G nach dem vorangehenden Korollar auf die simultanen kanonischen Formen:

$$X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}, X_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha}, \quad P_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, P_{\tilde{\omega}+\alpha}, \quad X_{\tilde{\omega}+\alpha+1}, \ldots, X_\beta$$
$$X_1, \ldots, X_{\tilde{\omega}}, X_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, X_\beta, \ldots, X_\gamma, P_{\tilde{\omega}+1}, \ldots, P_\beta, \ldots, P_\delta,$$

so ist es möglich, g' und G' auf die simultanen kanonischen Formen:

$$X_1', \ldots, X_{\tilde{\omega}}', X_{\tilde{\omega}+1}', \ldots, X_{\tilde{\omega}+\alpha}', \quad P_{\tilde{\omega}+1}', \ldots, P_{\tilde{\omega}+\alpha}', \quad X_{\tilde{\omega}+\alpha+1}', \ldots, X_\beta'$$
$$X_1', \ldots, X_{\tilde{\omega}}', X_{\tilde{\omega}+1}', \ldots, X_\beta', \ldots, X_\gamma', P_{\tilde{\omega}+1}', \ldots, P_\beta', \ldots, P_\delta'$$

zu bringen. Also kann G (siehe den Beweis von Theorem X) auf solche Weise in G' transformiert werden, daß jedes X_i und P_i in das entsprechende X_i' und P_i' übergeht. Hierbei wird aber offenbar gleichzeitig g in g' übergeführt.

Also sind die aufgestellten Forderungen hinreichend; daß sie notwendig sind, liegt darin, daß sie sich auf Relationen beziehen, die bei Berührungstransformationen invariant bleiben.

Korollar. *Alle invarianten Beziehungen zwischen einer Gruppe und* [266
einer Untergruppe werden bestimmt durch die Zahl der gemeinsamen ausgezeichneten Funktionen, verbunden mit der Zahl der Glieder und der Zahl der ausgezeichneten Funktionen jeder der beiden Gruppen. Diese letzten Zahlen definieren nach dem früheren die individuellen invarianten Eigenschaften jeder der beiden Gruppen.

Es drängt sich nun die Frage auf, wie man verfahren muß, wenn man untersuchen will, wie viele gemeinsame ausgezeichnete Funktionen eine Gruppe: $u_1, \ldots, u_\varrho, \ldots, u_r$ und eine Untergruppe derselben: $u_1, \ldots, u_\varrho$ enthalten.

Bezeichnet man mit F eine Funktion von $u_1, \ldots, u_r$, so ist klar, daß die genannten Funktionen durch die simultanen Gleichungen:

$$(u_1 F) = 0, \ldots, (u_r F) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_{\varrho+1}} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_r} = 0$$

definiert sind. Man untersucht also in der gewöhnlichen Weise, wie viele gemeinsame Lösungen diese Gleichungen haben. Gibt es $\bar{\omega}$ solche, so verlangt deren Bestimmung die Operationen: $\bar{\omega}, \bar{\omega}-1, \ldots, 3, 2, 1$. Also:

Satz 47. *Kennt man eine Gruppe und eine Untergruppe derselben, so kann man ohne Integration entscheiden, wie viele ausgezeichnete Funktionen diese beiden Gruppen gemein haben. Gibt es $\bar{\omega}$ solche, so findet man dieselben durch die Operationen: $\bar{\omega}, \bar{\omega}-1, \ldots, 3, 2, 1$.*

Endlich brauche ich auch den folgenden Satz:

Satz 48. *Sei: $u_1, \ldots, u_\varrho, \ldots, u_r$ eine Gruppe und: $u_1, \ldots, u_\varrho$ eine Untergruppe derselben, die mit ihr $\bar{\omega}$ ausgezeichnete Funktionen gemein hat. Bezeichnet dann F eine Funktion von $u_1, \ldots, u_r$, so haben die Gleichungen:*

$$(u_1 F) = 0, \ldots, (u_\varrho F) = 0$$

$r - \varrho + \bar{\omega}$ gemeinsame Lösungen und lassen sich daher durch $\varrho - \bar{\omega}$ Gleichungen ersetzen, die ein vollständiges System bilden.

Denn unsere Gruppen lassen sich auf die simultanen kanonischen Formen:

$$X_1, \ldots, X_{\bar{\omega}}, X_{\bar{\omega}+1}, \ldots, X_{\bar{\omega}+\alpha}, \quad P_{\bar{\omega}+1}, \ldots, P_{\bar{\omega}+\alpha}, \quad X_{\bar{\omega}+\alpha+1}, \ldots, X_{\bar{\omega}+\alpha+\beta}$$

$$X_1, \ldots, X_{\bar{\omega}}, X_{\bar{\omega}+1}, \ldots, X_{\bar{\omega}+\alpha+\beta}, \ldots, X_\gamma, \quad P_{\bar{\omega}+1}, \ldots, P_{\bar{\omega}+\alpha+\beta}, \ldots, P_\delta$$

bringen. Folglich sind:

$$X_1, \ldots, X_{\bar{\omega}}, X_{\bar{\omega}+\alpha+1}, \ldots, X_\gamma, \quad P_{\bar{\omega}+\alpha+\beta+1}, \ldots, P_\delta$$

diejenigen Funktionen der großen Gruppe, die mit allen Funktionen der Untergruppe in Involution liegen. Macht man nun eine einfache Abzählung, so sieht man die Richtigkeit unseres Satzes ein.

§ 15. Bestimmung der in einer Gruppe enthaltenen Involutionssysteme. [267

32. Satz 49. *Aus einer Gruppe mit m ausgezeichneten Funktionen und $m + 2q$ Gliedern können $(m + q)$-gliedrige Involutionssysteme ausgeschieden werden.*

Denn eine solche Gruppe besitzt die kanonische Form:

$$X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q,$$

und hier bilden: $X_1, \ldots, X_{q+m}$ ein Involutionssystem mit $q + m$ Gliedern.

Satz 50. *Ein Involutionssystem, das in einer $(2q + m)$-gliedrigen Gruppe mit m ausgezeichneten Funktionen enthalten ist, kann höchstens aus $q + m$ Funktionen bestehen.*

Denn sei $\Phi_1, \ldots, \Phi_\nu$ ein Involutionssystem, welches in der Gruppe $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ enthalten ist. Man bestimme solche weitere Funktionen X und P, daß:

$$X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$$

eine kanonische Gruppe ist, zwischen deren Funktionen bekanntlich keine Relation bestehen kann. Es liegt nun eine jede Funktion des Involutionssystems:

$$X_{q+m+1}, \ldots, X_n$$

in Involution mit allen Funktionen der ursprünglichen Gruppe, insbesondere also auch mit $\Phi_1, \ldots, \Phi_\nu$. Also ist:

$$X_{q+m+1}, \ldots, X_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_\nu$$

ein Involutionssystem mit $\nu + n - q - m$ von einander unabhängigen Funktionen. Es ist aber bekannt, daß ein Involutionssystem höchstens n Glieder enthält; also muß:

$$\nu + n - q - m \leqq n,$$

das heißt:

$$\nu \leqq q + m$$

sein, und das war eben unsere Behauptung.

Wir zeigen jetzt, wie man im allgemeinen verfahren muß, um Involutionssysteme mit möglichst vielen Gliedern aus einer vorgelegten Gruppe auszuscheiden.

Ist $u_1, \ldots, u_{2q+m}$ eine gegebene Gruppe mit m ausgezeichneten Funktionen $U_1, \ldots, U_m$, so findet man zuerst die letzteren durch Integration des Systems:

$$(u_1 U) = 0, \ldots, (u_{2q+m} U) = 0,$$

was die Operationen: $m, m-1, \ldots, 3, 2, 1$ verlangt. Wir wissen, daß $U_1, \ldots, U_m$ einem jeden $(q + m)$-gliedrigen Involutionssysteme unserer Gruppe angehören.

Sodann nimmt man eine beliebige, nur keine ausgezeichnete Funk- [268 tion der Gruppe, zum Beispiel u_1, und bestimmt eine weitere Funktion: $F(u_1, u_2, \ldots)$ aus der Gleichung:

$$(u_1 F) = \sum_k^{1 \ldots 2q+m} (u_1 u_k) \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung, in welcher überall statt $(u_1 u_k)$ die entsprechende Funktion der u zu setzen ist, besitzt $m + 1$ bekannte

Lösungen, nämlich $U_1, \ldots, U_m, u_1$; also findet man eine weitere Lösung $F = w_2$ vermöge einer Operation: $2q - 2$.

Mit den beiden Funktionen u_1 und w_2 bildet man alsdann:

$$(u_1 F) = 0, \quad (w_2 F) = 0,$$

ersetzt in den entwickelten Gleichungen überall $(u_1 u_k)$ und $(w_2 u_k)$ durch die betreffenden Funktionen der u, und erhält so ein vollständiges System, bestehend aus zwei Gleichungen zwischen $2q + m$ Variabeln mit $m + 2$ bekannten Lösungen, nämlich $U_1, \ldots, U_m, u_1, w_2$. Man findet also eine weitere gemeinsame Lösung w_3 durch eine Operation $2q - 4$.

Indem man in dieser Weise weiter geht, erkennt man, daß die Bestimmung eines $(q + m)$-gliedrigen Involutionssystems in einer $(2q + m)$-gliedrigen Gruppe mit m ausgezeichneten Funktionen im allgemeinen die Operationen verlangt:

$$m, m - 1, \ldots, 3, 2, 1, 2q - 2, 2q - 4, \ldots, 4, 2.$$

33. Diese Methode läßt sich durch eine andere ersetzen, welche einfachere Integrationen verlangt, so oft die vorgelegte Gruppe eine bekannte Untergruppe enthält.

Sei also vorgelegt eine Gruppe G mit einer bekannten Untergruppe g; man sucht ein in G enthaltenes Involutionssystem mit möglichst vielen Gliedern.

Zu diesem Zwecke bestimmt man zuerst die $\bar{\omega}$ gemeinsamen ausgezeichneten Funktionen $U_1, \ldots, U_{\bar{\omega}}$ unserer beiden Gruppen; dies verlangt (Satz 47) die Operationen:

$$\bar{\omega}, \bar{\omega} - 1, \ldots, 3, 2, 1.$$

Sodann sucht man die $m' - \bar{\omega}$ übrigen ausgezeichneten Funktionen, welche g enthält, durch die Operationen (§ 11, Schluß):

$$m' - \bar{\omega}, m' - \bar{\omega} - 1, \ldots, 3, 2, 1.$$

Nachdem man in dieser Weise sämtliche ausgezeichnete Funktionen der Gruppe g gefunden hat, bestimmt man nach der früher auseinandergesetzten Methode ein in g enthaltenes Involutionssystem mit möglichst vielen Gliedern:

$$U_1, \ldots, U_{\bar{\omega}}, u_1, \ldots, u_\varrho.$$

Von den m ausgezeichneten Funktionen der Gruppe G kennt man [269 nun schon $\bar{\omega}$, nämlich: $U_1, \ldots, U_{\bar{\omega}}$; also findet man die $m - \bar{\omega}$ übrigen: $U_{\bar{\omega}+1}, \ldots, U_m$ durch die Operationen:

$$m - \bar{\omega}, m - \bar{\omega} - 1, \ldots, 3, 2, 1.$$

Man kennt dann sämtliche ausgezeichnete Funktionen:

$$U_1, \ldots, U_m$$

der Gruppe G und außerdem ein in G enthaltenes Involutionssystem:

$$u_1, \ldots, u_\varrho,$$

dessen Funktionen von den U unabhängig sind. Nun geht man weiter, wie im allgemeinen Falle.

Noch größere Vereinfachungen treten zum Beispiel ein, wenn die Untergruppe g selbst eine bekannte Untergruppe enthält. Ohne auf alle Fälle, die überhaupt eintreten können, einzugehen, hebe ich nur hervor, daß meine allgemeine Theorie in jedem einzelnen Falle die Zahl und die Ordnung der notwendigen Integrationen a priori anzugeben erlaubt. Also:

Theorem XII. *Eine Gruppe mit m ausgezeichneten Funktionen und $2q + m$ Gliedern enthält Involutionssysteme mit $q + m$ Gliedern; die Bestimmung eines solchen Systems verlangt im allgemeinen die Operationen:*

$$m, m - 1, \ldots, 3, 2, 1, 2q - 2, 2q - 4, \ldots, 4, 2.$$

Kennt man schon Untergruppen, so treten Integrationsvereinfachungen ein, die sich immer a priori angeben lassen. Unsere Gruppe enthält kein Involutionssystem mit mehr als $q + m$ Gliedern.

34. In dieser Nummer beweise ich, daß es in einer Gruppe mit mehr als n Gliedern einen Maximumswert für die Zahl der ausgezeichneten Funktionen gibt. Sodann folgt ein wichtiges Theorem über Gruppen, welche die größtmögliche Zahl ausgezeichneter Funktionen enthalten.

Eine Gruppe mit m ausgezeichneten Funktionen und $2q + m$ Gliedern enthält $(q + m)$-gliedrige Involutionssysteme, also muß:

$$q + m \leqq n$$

sein. Nennen wir die Zahl der Glieder r, so nimmt diese Bedingung die Form an:

$$\tfrac{1}{2}(r + m) \leqq n.$$

Nennen wir endlich die Zahl der Glieder $n + k$, so erhalten wir die dritte Form:

$$m \leqq n - k,$$

welche zeigt, daß, wenn die Zahl der Glieder größer als n ist, die Zahl der ausgezeichneten Funktionen einen Maximumswert hat.

Theorem XIII. *Besitzt eine gegebene Gruppe:* $u_1, \ldots, u_{n+k}$ *die größt-* [270
mögliche Zahl ausgezeichneter Funktionen: $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-k}$, *so verlangt die Integration des Involutionssystems:*

$$\Phi_1 = a_1, \ldots, \Phi_{n-k} = a_{n-k}$$

nur ausführbare Operationen.

Denn meine Erweiterung der Cauchyschen Methode sagt aus, daß die Integration eines Involutionssystems:

$$\Phi_1 = a_1, \ldots, \Phi_{n-k} = a_{n-k}$$

geleistet werden kann, wenn alle Lösungen des vollständigen Systems:

$$(\Phi_1 F) = 0, \ldots, (\Phi_{n-k} F) = 0$$

gefunden sind. Aber solche Lösungen sind eben: $u_1, \ldots, u_{n+k}$, und zwar gibt es keine anderen. Also ist mein Theorem bewiesen.

§ 16. Erledigung des zweiten Hauptproblems.

Wir erledigen zuerst einen speziellen Fall des zweiten Hauptproblems und zeigen darnach, daß das allgemeine Problem sich auf diesen speziellen Fall zurückführen läßt.

35. Wir setzen voraus, daß: $F_1, \ldots, F_r$ und $F'_1, \ldots, F'_r$ zwei r-gliedrige Gruppen sind; wir werden entscheiden, ob es eine Berührungstransformation gibt, welche jedes F_i in das entsprechende F'_i überführt.

Existiert eine solche Transformation, so führt sie (Satz 11) die Gleichung:

$$(F_i F_k)_{xp} = \Omega_{ik}(F_1, \ldots, F_r)$$

in:

$$(F'_i F'_k)_{x'p'} = \Omega_{ik}(F'_1, \ldots, F'_r)$$

über. Soll also die besprochene Transformation möglich sein, so muß sich jedes $(F'_i F'_k)_{x'p'}$ in derselben Weise durch $F'_1, \ldots, F'_r$, wie das entsprechende $(F_i F_k)_{xp}$ durch $F_1, \ldots, F_r$ ausdrücken lassen.

Es läßt sich umgekehrt zeigen, daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist.

Seien in der Tat: $F_1, \ldots, F_r$ und: $F'_1, \ldots, F'_r$ zwei solche r-gliedrige Gruppen, daß:

$$\text{(A)} \qquad (F_i F_k) = \Omega_{ik}(F_1, \ldots, F_r), \quad (F'_i F'_k) = \Omega_{ik}(F'_1, \ldots, F'_r),$$

und sei: $X_1, \ldots, X_\alpha, P_1, \ldots, P_\beta$, wo:

$$X_i = \Phi_i(F_1, \ldots, F_r), \quad P_i = \Psi_i(F_1, \ldots, F_r),$$

eine kanonische Form der ersten Gruppe.

Ich bilde die Funktionen:

$$X'_i = \Phi_i(F'_1, \ldots, F'_r), \quad P'_i = \Psi_i(F'_1, \ldots, F'_r)$$

und die Ausdrücke:

$$(X'_i X'_k), (X'_i P'_k), (P'_i P'_k),$$ [271

welche wegen (A) dieselben Funktionen von $F'_1, \ldots, F'_r$, wie:

$$(X_i X_k), (X_i P_k), (P_i P_k)$$

von $F_1, \ldots, F_r$ sind. Nun gelten aber nach unserer Voraussetzung die Relationen:

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = 1,$$

also finden auch die entsprechenden Gleichungen:

$$(X'_i X'_k) = (X'_i P'_k) = (P'_i P'_k) = 0, \quad (P'_i X'_i) = 1$$

statt. Ferner sind offenbar $X'_1, \ldots, X'_\alpha, P'_1, \ldots, P'_\beta$ von einander unabhängige Funktionen, und also ist:

$$X'_1, \ldots, X'_\alpha, P'_1, \ldots, P'_\beta$$

eine kanonische Form der Gruppe: $F'_1, \ldots, F'_r$. Folglich gibt es (Theorem X) eine Berührungstransformation, welche jedes X_i und P_i in das entsprechende X'_i und P'_i transformiert. Dabei geht, wie man unmittelbar sieht, jedes F_i in das entsprechende F'_i über. Also:

Satz 51. *Seien* $F_1, \ldots, F_r$ *und* $F'_1, \ldots, F'_r$ *zwei r-gliedrige Gruppen. Soll es Berührungstransformationen geben, welche jedes* F_i *in das entsprechende* F'_i *überführen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß jedes:* $(F_i F_k)$ *sich in derselben Weise durch* $F_1, \ldots, F_r$, *wie das entsprechende:* $(F'_i F'_k)$ *durch* $F'_1, \ldots, F'_r$ *ausdrückt.*

36. Nun können wir das allgemeine Problem angreifen.

Seien also vorgelegt zwei Systeme von Funktionen: $F_1, \ldots, F_r$ und $F'_1, \ldots, F'_r$. Es soll entschieden werden, ob es eine Berührungstransformation gibt, welche jedes F_i in das entsprechende F'_i überführt.

Zunächst ist klar, daß wir voraussetzen können, daß alle F_i (und ebenso alle F'_i) von einander unabhängig sind; denn wären zum Beispiel nur $F_1, \ldots, F_\alpha$ von einander unabhängig, dagegen:

$$F_{\alpha+k} = W_k(F_1, \ldots, F_\alpha) \qquad (k = 1, \ldots, r - \alpha),$$

so müßten offenbar auch $F'_1, \ldots, F'_\alpha$ von einander unabhängig sein, und die übrigen $F'_{\alpha+k}$ sich folgendermaßen durch $F'_1, \ldots, F'_\alpha$ ausdrücken:

$$F'_{\alpha+k} = W_k(F'_1, \ldots, F'_\alpha).$$

Ist dies aber der Fall, so ist auch klar, daß eine Berührungstransformation, welche $F_1, \ldots, F_\alpha$ beziehungsweise in $F'_1, \ldots, F'_\alpha$ transformiert, gleichzeitig: $F_{\alpha+1}, \ldots, F_r$ in: $F'_{\alpha+1}, \ldots, F'_r$ überführt.

Seien also: $F_1, \ldots, F_r$ und ebenso: $F'_1, \ldots, F'_r$ von einander unabhängig. Existiert die verlangte Berührungstransformation, so führt dieselbe jedes $(F_i F_k)$ in das entsprechende $(F'_i F'_k)$ über. Ich bilde nun neue Funktionen, indem ich setze:

$$(F_{a^{(1)}} F_{b^{(1)}}) = F_{r+1}, \quad (F_{a^{(2)}} F_{b^{(2)}}) = F_{r+2}, \ldots, (F_{a^{(\varrho)}} F_{b^{(\varrho)}}) = F_{r+\varrho}, \quad [272$$

wo die Zahlen $a^{(k)}$ und $b^{(k)}$ der Beschränkung unterworfen sind, daß:

$$a^{(k)} < r + k, \quad b^{(k)} < r + k$$

sein muß, und daß sich F_{r+k} nicht durch $F_1, \ldots, F_r, \ldots, F_{r+k-1}$ ausdrücken lassen soll. In dieser Weise fahre ich fort so lange wie möglich, das heißt, bis ich die durch $F_1, \ldots, F_r$ bestimmte Gruppe:

$$F_1, \ldots, F_r, \ldots, F_{r+\varrho},$$

welche höchstens $2n$ Glieder enthält, gefunden habe.

Setze ich nun in entsprechender Weise:

$$(F'_{a^{(k)}} F'_{b^{(k)}}) = F'_{r+k},$$

so muß die gesuchte Berührungstransformation jedes F_{r+k} in das entsprechende F'_{r+k} transformieren. Also müssen auch:

$$F'_1, \ldots, F'_r, \ldots, F'_{r+\varrho}$$

eine Gruppe bilden; ferner muß sich nach dem vorangehenden Satze jedes: $(F'_i F'_k)$ in derselben Weise durch: $F'_1, \ldots, F'_{r+\varrho}$, wie das entsprechende: $(F_i F_k)$ durch: $F_1, \ldots, F_{r+\varrho}$ ausdrücken lassen. Andererseits ist diese notwendige Forderung nach dem obenstehenden auch hinreichend. Demnach:

Theorem XIV. *Seien vorgelegt zwei Systeme Funktionen, beziehungsweise von x, p und von x', p':*

$$F_1, \ldots, F_\alpha \text{ und: } F'_1, \ldots, F'_\alpha.$$

Soll man entscheiden, ob es Berührungstransformationen gibt, welche jedes F_i in das entsprechende F'_i transformieren, so verfährt man in folgender Weise: Unter den F nimmt man r von einander unabhängige, etwa $F_1, \ldots, F_r$, durch die sich die übrigen ausdrücken lassen:

$$F_{r+k} = W_k(F_1, \ldots, F_r) \qquad (k = 1, \ldots, \alpha - r).$$

Eine erste Bedingung ist dann, daß $F'_1, \ldots, F'_r$ unabhängige Funktionen sind, durch die sich die F'_{r+k} in entsprechender Weise ausdrücken:

$$F'_{r+k} = W_k(F'_1, \ldots, F'_r).$$

Ist dies der Fall, so bildet man die durch $F_1, \ldots, F_r$ bestimmte Gruppe, indem man setzt:

$$(F_{a^{(1)}} F_{b^{(1)}}) = F_{r+1}, \ldots, (F_{a^{(k)}} F_{b^{(k)}}) = F_{r+k}$$

und dabei die Zahlen $a^{(k)}, b^{(k)}$ so wählt, daß immer:

$$a^{(k)} < r + k, \quad b^{(k)} < r + k,$$

und daß sich kein F_{r+k} durch $F_1, \ldots, F_{r+k-1}$ ausdrücken läßt. Sei:

$$F_1, \ldots, F_{r+\varrho}$$

die in dieser Weise erhaltene Gruppe. Setzt man dann in entsprechender [273 *Weise:*

$$(F'_{a^{(1)}} F'_{b^{(1)}}) = F'_{r+1}, \ldots, (F'_{a^{(\varrho)}} F'_{b^{(\varrho)}}) = F'_{r+\varrho},$$

so müssen auch die Funktionen:

$$F'_1, \ldots, F'_{r+\varrho}$$

eine Gruppe mit $r + \varrho$ Gliedern bilden, und überdies muß sich jedes: $(F'_i F'_k)$ dieser Gruppe in derselben Weise durch: $F'_1, \ldots, F'_{r+\varrho}$, wie das entsprechende: $(F_i F_k)$ durch: $F_1, \ldots, F_{r+\varrho}$ ausdrücken lassen. Finden alle diese Bedingungen statt, so ist die verlangte Transformation möglich.

Dieses Theorem bestimmt alle zwischen den gegebenen Funktionen: $F_1, \ldots, F_\alpha$ stattfindenden Beziehungen, die bei beliebigen Berührungstransformationen ungeändert bleiben. Wie man sieht, lassen sich alle derartigen Beziehungen vermöge des Differentialsymbols $(\Phi\Pi)$ in Verbindung mit endlichen Funktionalrelationen ausdrücken.

§ 17. Integrationsmethoden, die sich auf die früheren Entwickelungen stützen.

37. Ich setze voraus, daß ein Involutionssystem:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_q = C_q$$

integriert werden soll, und daß man bereits eine Reihe Funktionen: $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ kennt, die allen Gleichungen:

$$(F_i \Phi) = 0$$

genügen.

Kann man vermöge des Poisson-Jacobischen Theorems keine weiteren Lösungen auffinden, so bilden: $F_1, \ldots, F_q, \Phi_1, \ldots, \Phi_r$ eine

Gruppe, in welcher $F_1, \ldots, F_q$ ausgezeichnete Funktionen sind. Gibt es außerdem noch μ solche Funktionen:

$$F_{q+1}, \ldots, F_{q+\mu},$$

so bestimme man dieselben (§ 11, Schluß) vermöge der Operationen:

$$\mu, \mu - 1, \ldots, 3, 2, 1.$$

Alsdann ist:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_{q+\mu} = C_{q+\mu}$$

ein neues Involutionssystem mit $r - \mu$ bekannten Lösungen: $\Phi_1, \ldots, \Phi_{r-\mu}$ der $q + \mu$ Gleichungen: $(F_i \Phi) = 0$, und die Integration des vorgelegten Involutionssystems ist auf diejenige des neuen Systems zurückgeführt.

Man kann bemerken, daß $r - \mu$ eine gerade Zahl sein muß; denn $r - \mu$ ist die Differenz zwischen der Zahl der Glieder $r + q$ und der Zahl der ausgezeichneten Funktionen $q + \mu$, und ist also nach einem früheren Satze (Theorem IX) eine gerade Zahl.

38. Wir werden hierdurch auf die äußerst wichtige Aufgabe ge- [274
führt, ein Involutionssystem:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_m = C_m$$

in möglichst einfacher Weise zu integrieren, wenn man $2q$ Lösungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2q}$ des Systems: $(F_i \Phi) = 0$ kennt, welche zusammen mit den F eine Gruppe bilden, deren einzige ausgezeichnete Funktionen die F sind.

Zu dem Ende stellt man das vollständige System auf:

$$(F_1 F) = 0, \ldots, (F_m F) = 0, \quad (\Phi_1 F) = 0, \ldots, (\Phi_{2q} F) = 0,$$

unter dessen $2n - 2q - m$ Lösungen m schon bekannt sind, nämlich: $F_1, \ldots, F_m$. Man bestimmt eine weitere Lösung F_{m+1} vermöge einer Operation:

$$2n - 2q - 2m.$$

Hierbei ist zu bemerken, daß F_{m+1} nicht der Gruppe: $F_1, \ldots, F_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_{2q}$ angehören kann. Denn $F_1, \ldots, F_m$ sind die einzigen Funktionen dieser Gruppe, welche zugleich der Polargruppe angehören, und F_{m+1} ist nach unserem Verfahren keine Funktion von $F_1, \ldots, F_m$.

Hiermit ist unser Problem zurückgeführt auf die Integration des Involutionssystems:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_{m+1} = C_{m+1}$$

mit $2q$ Lösungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2q}$ des entsprechenden vollständigen Systems $(F_i \Phi) = 0$. Hier gehen wir in derselben Weise weiter. Wir stellen also das vollständige System auf:

$$(F_1 F) = 0, \ldots, (F_{m+1} F) = 0, \quad (\Phi_1 F) = 0, \ldots, (\Phi_{2q} F) = 0,$$

unter dessen $2n - 2q - m - 1$ Lösungen $m + 1$ bekannt sind, nämlich $F_1, \ldots, F_{m+1}$. Wir bestimmen eine weitere Lösung F_{m+2} vermöge einer Operation:

$$2n - 2q - 2m - 2$$

und bemerken dabei wie oben, daß F_{m+2} nicht der Gruppe: $F_1, \ldots, F_{m+1}, \Phi_1, \ldots, \Phi_{2q}$ angehören kann.

Sodann behandeln wir das Involutionssystem:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_{m+2} = C_{m+2}$$

mit den bekannten Lösungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2q}$ der Gleichungen: $(F_i \Phi) = 0$ und finden eine Funktion F_{m+3} durch eine Operation:

$$2n - 2q - 2m - 4,$$

darnach eine Funktion F_{m+4} durch eine Operation:

$$2n - 2q - 2m - 6,$$

und so weiter, und endlich eine Funktion F_{n-q} durch eine Operation:

$$2.$$

Hiermit ist die Integration des ursprünglichen Involutions- [275
systems zurückgeführt auf diejenige des Involutionssystems:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_{n-q} = C_{n-q}$$

mit $2q$ bekannten Lösungen:

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_{2q}$$

der $n - q$ Gleichungen: $(F_i \Phi) = 0$. Aber die Integration dieses Systems wird (Theorem XIII) durch meine Erweiterung der Cauchyschen Methode ohne weiteres geleistet. Demnach:

Satz 52. *Die Integration eines Involutionssystems:*

$$F_1 = C_1, \ldots, F_m = C_m$$

mit $2q$ *bekannten Lösungen:* $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2q}$ *der* m *Gleichungen:*

$$(F_1 \Phi) = 0, \ldots, (F_m \Phi) = 0$$

verlangt die Operationen:

$$2n - 2q - 2m, \; 2n - 2q - 2m - 2, \ldots, 6, 4, 2,$$

während bei der direkten Anwendung der erweiterten Cauchyschen Methode die Operationen:

$$2n-2q-2m,\ 2n-2q-2m-1,\ 2n-2q-2m-2, \ldots, 3, 2, 1$$

erforderlich waren. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems keine weiteren Lösungen Φ gibt, das heißt, daß $F_1, \ldots, F_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_{2q}$ eine Gruppe bilden, und daß die F die einzigen ausgezeichneten Funktionen dieser Gruppe sind.

Kombinieren wir hiermit den Inhalt der vorangehenden Nummer, so erhalten wir das folgende Theorem, welches in schematischer Weise die wichtigsten Integrationserleichterungen angibt, die sich aus dem Vorhergehenden ziehen lassen:

Theorem XV. *Soll ein Involutionssystem:*

$$F_1 = C_1, \ldots, F_q = C_q$$

integriert werden, und kennt man dabei $2\nu + m$ Lösungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2\nu+m}$ der q Gleichungen: $(F_i\Phi) = 0$, die mit $F_1, \ldots, F_q$ eine Gruppe bilden, welche außer den F noch m ausgezeichnete Funktionen enthält, so verlangt die Ausführung unseres Integrationsgeschäfts die folgenden Operationen:

$$m,\ m-1,\ m-2, \ldots, 3, 2, 1,$$

$$2n-2q-2\nu-2m,\ 2n-2q-2\nu-2m-2, \ldots, 6, 4, 2.$$

Die direkte Anwendung der erweiterten Cauchyschen Methode verlangte die Operationen:

$$2n-2q-2\nu-m,\ 2n-2q-2\nu-m-1, \ldots, 3, 2, 1.$$

Die Jacobische Methode würde im allgemeinen noch viel weniger Nutzen aus den Funktionen Φ ziehen.

Man erkennt übrigens leicht, daß sich häufig noch größere Integra- [276
tionsvereinfachungen erreichen lassen, nämlich dann, wenn man bereits Untergruppen kennt.

39. Um die Leistungen dieser Theorie mit denen der erweiterten Cauchyschen Methode zu vergleichen, gehe ich zurück auf die früher (Nr. 34) gefundene Relation zwischen der Zahl r der Glieder und der Zahl m der ausgezeichneten Funktionen einer Gruppe:

$$\tfrac{1}{2}(r+m) \lesseqgtr n.$$

Diese Gleichung nimmt im vorliegenden Falle, da die Gruppe:

$$F_1, \ldots, F_q, \Phi_1, \ldots, \Phi_{2\nu+m}$$

$2\nu + m + q$ Glieder und $q + m$ ausgezeichnete Funktionen enthält, die folgende Form an:

$$\tfrac{1}{2}(2\nu + 2q + 2m) \lesseqgtr n,$$

oder:

$$2n - 2\nu - 2q - 2m \gtreqless 0.$$

Wir betrachten zuerst den Fall:

$$2n - 2\nu - 2q - 2m > 0,$$

hierauf den Fall:

$$2n - 2\nu - 2q - 2m = 0.$$

A. Ist:

$$2n - 2\nu - 2q - 2m > 0,$$

so überzeugt man sich leicht davon, daß die neue Methode einfachere Integrationen als die frühere Methode verlangt. Denn in diesem Falle ist:

$$2n - 2\nu - 2q - m > m,$$

und daher sind die Zahlen:

$$m,\ m-1, \ldots, 3, 2, 1,$$

$$2n-2q-2\nu-2m,\ 2n-2q-2\nu-2m-2, \ldots, 4, 2$$

kleiner als die Zahlen:

$$2n-2q-2\nu-m,\ 2n-2q-2\nu-m-1, \ldots, 3, 2, 1.$$

B. In dem Falle:

$$2n - 2\nu - 2q - 2m = 0$$

dagegen verlangen die beiden Methoden gleich hohe Operationen. Die neue Methode verlangt nämlich in diesem Falle die Operationen:

$$m,\ m-1, \ldots, 3, 2, 1,$$

während die alte die Operationen verlangt:

$$2n-2q-2\nu-m,\ 2n-2q-2\nu-m-1, \ldots, 3, 2, 1,$$

was eben auf dasselbe hinauskommt.

Wir wollen endlich noch den Fall $q = 1$ etwas näher betrachten. [277
Eine Gleichung:

$$F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{Const.}$$

soll integriert werden, und man kennt $2\nu + m$ Lösungen: $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2\nu+m}$ der Gleichung: $(F\Phi) = 0$, aus denen keine neue Lösung durch

Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems gefunden werden kann. Die Gruppe:

$$F, \Phi_1, \ldots, \Phi_{2\nu+m}$$

enthält, setzen wir voraus, außer F noch m ausgezeichnete Funktionen.

Ist hier die Zahl der bekannten Lösungen:

$$2\nu + m < n - 1,$$

und also auch:

$$m < n - 1,$$

so ist:

$$2\nu + 2m < 2n - 2,$$

und also:

$$2n - 2\nu - 2m - 2 > 0.$$

Nach unseren obenstehenden Entwickelungen verlangt also unsere Methode in diesem Falle einfachere Integrationen als die Cauchysche.

Sei jetzt:

$$2\nu + m = n - 1;$$

ist dann $\nu = 0$, so ist $m = n - 1$ und die Gleichungen:

$$F = C, \quad \Phi_1 = C_1, \ldots, \Phi_{n-1} = C_{n-1}$$

bilden ein Involutionssystem, dessen Integration nach der von mir verbesserten Jacobischen Methode unter allen Umständen nur noch eine Quadratur erheischt.

Ist dagegen:

$$2\nu + m = n - 1$$

und:

$$\nu > 0,$$

so ist:

$$m \leqq n - 3$$

und also:

$$2\nu + 2m \leqq 2n - 4,$$

oder:

$$2n - 2\nu - 2m - 2 > 0.$$

In diesem Falle verlangt also die neue Theorie wiederum einfachere Operationen als die Cauchysche.

Ist endlich $2\nu + m$ gleich 2, so kann man entweder die eine der beiden bekannten Lösungen wählen, und sodann die Jacobische Methode anwenden, oder auch beide benutzen und der obenstehenden

Theorie folgen. Beide Methoden verlangen gleich hohe Integrationen. Dieser Umstand, daß man aus einer bekannten Lösung denselben Nutzen ziehen kann, wie aus zwei solchen, beruht keineswegs auf einem Mangel der Methode. Es ließe sich beweisen, daß dies in der Natur der Sache [278
liegt. Ist $2\nu + m$ größer als 2, so brauche ich meine neue Theorie nicht mit der Jacobischen zu vergleichen; denn diese letzte steht in diesem Falle selbst gegen die Cauchysche zurück.

Wir betrachten nun den Fall:

$$2\nu + m \geqq n.$$

Nach meinen früheren Entwickelungen soll der ungünstige Fall, in dem meine Methode keine Vereinfachung leistet, dann eintreten, wenn:

$$2n - 2\nu - 2m - 2 = 0.$$

Diese Bedingung tritt ein, wenn die Gruppe:

$$F, \Phi_1, \ldots, \Phi_{2\nu+m}$$

die größtmögliche Zahl ausgezeichneter Funktionen enthält, und sonst niemals. Also:

Theorem XVI. *Soll eine Gleichung:*

$$F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{Const.}$$

integriert werden, und kennt man mehr als zwei Lösungen: $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ *der Gleichung:* $(F\Phi) = 0$, *so vereinfacht meine neue Theorie immer die zurückstehenden Integrationsschwierigkeiten, ausgenommen allein, wenn:*

$$r \geqq n$$

und überdies die Gruppe: $F, \Phi_1, \ldots, \Phi_r$ *die größtmögliche Zahl ausgezeichnete Funktionen enthält, in welchem Falle meine Methode ebenso hohe Integrationen erfordert, wie die alte Theorie.*

§ 18. Schematisch ausgeführte Beispiele.

40. Um die Bedeutung der vorangehenden Theorien klar hervortreten zu lassen, behandle ich einige Beispiele schematisch.

A. Sei vorgelegt:

$$p_{10} - f(x_1, \ldots, x_{10}, p_1, \ldots, p_9) = 0$$

mit sieben bekannten Lösungen: $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$ der Gleichung: $(p_{10} - f, \varphi) = 0$, die zusammen mit: $p_{10} - f$ eine Gruppe bilden. Es sind hier vier verschiedene Fälle denkbar, die eine verschiedene Behandlung verlangen.

1. Unsere Gruppe enthält nur eine ausgezeichnete Funktion außer $p_{10} - f$. Alsdann verlangt das zurückstehende Integrationsgeschäft die Operationen:

$$1,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2.$$

2. Unsere Gruppe enthält drei ausgezeichnete Funktionen außer: $p_{10} - f$. Alsdann sind folgende Operationen notwendig:

$$3,\ 2,\ 1,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2.$$

3. Enthält die Gruppe fünf ausgezeichnete Funktionen außer: [279 $p_{10} - f$, so sind folgende Operationen notwendig:

$$5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 6,\ 4,\ 2.$$

4. Ist endlich die Gruppe ein Involutionssystem, so sind nur die Operationen notwendig:

$$4,\ 2.$$

Früher wußte man nur den letzten Fall in so einfacher Weise zu behandeln, und dies sogar nur, wenn das betreffende Involutionssystem die bekannte Bedingung erfüllte (§ 7). Die übrigen Fälle waren nicht bekannt; man verlangte immer die Operationen:

$$11,\ 10,\ 9,\ 8, \ldots, 3,\ 2,\ 1,$$

oder mit Benutzung der Jacobischen Multiplikatortheorie die Operationen:

$$11,\ 10,\ 9, \ldots, 4,\ 3,\ 2.$$

Ich resumiere dieses Beispiel durch folgendes Schema:

1 ausgezeichnete Funktion	1, 10, 8, 6, 4, 2.
3 ausgezeichnete Funktionen	3, 2, 1, 8, 6, 4, 2.
5 ausgezeichnete Funktionen	5, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 2.
7 ausgezeichnete Funktionen	4, 2.
Außer im letzten Falle verlangte man früher mit Benutzung der Multiplikatortheorie die Operationen	11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

B. Sei vorgelegt:

$$p_{10} - f = 0$$

mit 8 bekannten Lösungen: $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ der Gleichung: $(p_{10} - f, \varphi) = 0$. Dieselben bilden mit $p_{10} - f$ eine Gruppe, welche außer: $p_{10} - f$ noch 8 oder 6 oder 4 oder 2 oder keine ausgezeichneten Funktionen enthält. Das folgende Schema gibt die in diesen Fällen notwendigen Operationen an.

keine ausgezeichnete Funktion	10, 8, 6, 4, 2.
2 ausgezeichnete Funktionen	2, 1, 8, 6, 4, 2.
4 ausgezeichnete Funktionen	4, 3, 2, 1, 6, 4, 2.
6 ausgezeichnete Funktionen	6, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 2.
8 ausgezeichnete Funktionen	2.
Außer im letzten Falle brauchte man früher mit Benutzung der Multiplikatortheorie die Operationen	10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

C. Sei vorgelegt: [280

$$p_{10} - f = 0$$

mit 12 bekannten Lösungen: $\varphi_1, \ldots, \varphi_{12}$ von $(p_{10} - f, \varphi) = 0$, aus denen sich keine weitere solche durch Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems ableiten läßt. Das folgende Schema erklärt die möglichen Fälle, verglichen mit der alten Methode.

keine ausgezeichnete Funktion	6, 4, 2.
2 ausgezeichnete Funktionen	2, 1, 4, 2.
4 ausgezeichnete Funktionen	4, 3, 2, 1, 2.
6 ausgezeichnete Funktionen	6, 5, 4, 3, 2, 1.
Die alte Theorie verlangt mit Benutzung der Multiplikatortheorie immer	6, 5, 4, 3, 2.

Außer im letzten Falle gibt also meine Theorie immer eine Integrationserniedrigung.

§ 19. Andeutung einiger weiterer Integrationsvereinfachungen.

41. Die große Wichtigkeit der entwickelten Integrationstheorien beruht insbesondere darauf, daß man bei der Behandlung einer partiellen Differentialgleichung 1. O. nach den beiden Methoden, welche Mayer und ich im Frühlinge 1872 gaben, häufig in die folgende Lage kommt:

Ein Involutionssystem:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_m = C_m$$

soll integriert werden, und man kennt schon eine Reihe Funktionen: $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, welche allen Gleichungen: $(F_i \Phi) = 0$ genügen.

Es schien daher naturgemäß, sich die Frage zu stellen: Wie muß man verfahren, um die zurückstehenden Integrationen hinsichtlich der Zahl und der Ordnung möglichst zu erniedrigen?

Diejenigen Vereinfachungen, die sich hierbei immer erreichen lassen, sind in dem vorletzten Paragraphen angegeben. Es bleibt übrig, zu zeigen, wie man die Umstände, die bei der weiteren Behandlung des Problems eintreten können, am vorteilhaftesten verwerten kann.

Sei vorgelegt ein Involutionssystem:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_m = C_m$$

mit r Lösungen: $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ der m Gleichungen: $(F_i \Phi) = 0$, aus denen sich keine weitere Lösung durch Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems berechnen läßt. Hierbei können wir voraussetzen, daß die Gruppe: $F_1, \ldots, F_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_r$ keine [anderen] ausgezeichneten [281
Funktionen als die F enthält; denn im entgegengesetzten Falle könnte man dieselben bestimmen und dann diese Funktionen den F hinzufügen.

Nach unserer allgemeinen Theorie stellen wir das vollständige System:

$$(F_1 F) = 0, \ldots, (F_m F) = 0, \quad (\Phi_1 F) = 0, \ldots, (\Phi_r F) = 0$$

auf und suchen durch Anwendung des Mayerschen Theorems eine von $F_1, \ldots, F_m$ verschiedene Lösung desselben. Gelingt es, eine solche zu bestimmen, so findet man bekanntlich sehr häufig gleichzeitig mehrere, etwa ϱ solche:

$$\Pi_1, \ldots, \Pi_\varrho.$$

Es ist nun denkbar, daß die Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems noch weitere Lösungen Π gibt.[1]) Jedenfalls kann man die durch unsere Funktionen bestimmte Gruppe:

$$F_1, \ldots, F_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_r, \Pi_1, \ldots, \Pi_\sigma$$

immer berechnen. Das ursprüngliche Problem ist hierdurch auf die Integration des Involutionssystems:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_m = C_m$$

mit den bekannten Lösungen: $\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \Pi_1, \ldots, \Pi_\sigma$ zurückgeführt.

1) Ich habe mich an einem Beispiel überzeugt, daß dieser Fall wirklich eintreten kann.

Ehe man hier weiter geht, muß man wie gewöhnlich untersuchen, ob die Gruppe: $F_1, \ldots, F_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_r, \Pi_1, \ldots, \Pi_\sigma$ noch andere ausgezeichnete Funktionen als die F enthält. Wenn solche existieren, so bestimmt man dieselben, und dabei nimmt unser Problem wieder die ursprüngliche Form an:

Ein Involutionssystem:

$$F_1 = C_1, \ldots, F_{m+q} = C_{m+q}$$

mit k bekannten Lösungen: $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ der $m+q$ Gleichungen: $(F_i \Omega) = 0$ soll integriert werden, wobei die F die einzigen ausgezeichneten Funktionen der betreffenden Gruppe sind. Hier geht man in derselben Weise weiter.

Hier kann die Bemerkung ihren Platz finden, daß die vorangehenden Theorien teilweise eine andere Form erhalten könnten, nämlich durch Anwendung eines Satzes, der im engsten Zusammenhange mit meiner neuen Integrationstheorie (1872) steht:

Theorem XVII. *Sei vorgelegt ein Involutionssystem:*

$$F_1 = C_1, \ldots, F_m = C_m$$

zwischen den Variabeln $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, *und seien:* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ *bekannte Lösungen der* m *Gleichungen:* $(F_i \Phi) = 0$. *Alsdann kann man* [282
das Involutionssystem zurückführen auf eine einzige Gleichung von der Form:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-m+1}, p_1, \ldots, p_{n-m+1}) = \text{Const.},$$

in der Art, daß die Integration dieser einen Gleichung diejenige des Involutionssystems nach sich zieht, und kann zugleich q *Lösungen:* $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ *von:* $(f\varphi) = 0$ *angeben.*

§ 20. Behandlung des Problems der drei Körper nach meiner allgemeinen Theorie.

42. Hamilton und Jacobi haben bekanntlich gezeigt, daß sich jedes Problem der Mécanique céleste durch eine gewisse partielle Differentialgleichung 1. O.:

$$H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$

ausdrücken läßt. Die bekannten Integrale der simultanen Differentialgleichungen, welche unmittelbar das betreffende Problem definieren, geben gleichviele Lösungen der linearen Gleichung:

$$(HF) = 0.$$

Meine allgemeine Theorie lehrt nun, wie man in jedem einzelnen Falle die bekannten Lösungen benutzen muß, um die zurückstehenden Integrationen soviel wie möglich hinsichtlich der Zahl und der Ordnung zu reduzieren. Als Beispiel wähle ich das Problem der drei Körper und setze dabei zunächst voraus, daß der eine Körper fest ist; sodann gebe ich eine direkte Behandlung des allgemeinen Falles.

Bewegen sich drei materielle Körper, von denen der eine fest ist, vermöge ihrer gegenseitigen Anziehung, so gelten die drei Flächensätze. Ich bezeichne die partielle Differentialgleichung, welche das Problem ausdrückt, mit:

$$H(x_1, \ldots, x_6, p_1, \ldots, p_6) = a,$$

und die drei Lösungen der Gleichung: $(HF) = 0$, die den Flächensätzen entsprechen, mit:

$$F_1, F_2, F_3.$$

Zwischen denselben bestehen bekanntlich die Relationen:

$$(F_1F_2) = F_3, \quad (F_2F_3) = F_1, \quad (F_3F_1) = F_2,$$

und also bilden F_1, F_2, F_3 eine dreigliedrige Gruppe, die kein Involutionssystem ist und daher eine ausgezeichnete Funktion Φ enthält. Dieselbe wird bestimmt durch zwei beliebige von den Gleichungen:

$$(F_1\Phi) = 0 = \qquad F_3\frac{\partial\Phi}{\partial F_2} - F_2\frac{\partial\Phi}{\partial F_3},$$ [283

$$(F_2\Phi) = 0 = -F_3\frac{\partial\Phi}{\partial F_1} \qquad + F_1\frac{\partial\Phi}{\partial F_3},$$

$$(F_3\Phi) = 0 = \quad F_2\frac{\partial\Phi}{\partial F_1} - F_1\frac{\partial\Phi}{\partial F_2}.$$

Integriert man hier nach den gewöhnlichen Regeln, so findet man:

$$\Phi = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Es ist klar, daß die viergliedrige Gruppe:

$$H, \; F_1, \; F_2, \; F_3$$

zwei ausgezeichnete Funktionen:

$$H \text{ und: } F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$$

enthält; also besteht jedes Involutionssystem, welches dieser Gruppe angehört, höchstens aus drei Gliedern. Ein solches ist:

$$H = a, \quad F_1 = b, \quad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = c;$$

auf die Integration dieses Systems ist also das ursprüngliche Problem zurückgeführt. Meine neue Integrationsmethode lehrt aber, daß es immer möglich ist, eine Gleichung von der Form:

$$f(x_1, \ldots, x_4, p_1, \ldots p_4) = 0$$

aufzustellen, die dem obenstehenden Involutionssysteme äquivalent ist. Nach Mayers und meiner alten Theorie verlangt also die Erledigung des ursprünglichen Problemes nur noch die Operationen:

6, 4, 2.

43. Sei nun:

$$H(x_1, \ldots, x_9, p_1, \ldots, p_9) = a$$

die partielle Differentialgleichung, die dem allgemeinen Probleme der drei Körper äquivalent ist. Seien:

$$\varphi_1, \; \varphi_2, \; \varphi_3$$

die drei Lösungen der Gleichung: $(H\varphi) = 0$, die den drei Schwerpunktsintegralen entsprechen, ferner:

$$\varphi_4, \; \varphi_5, \; \varphi_6$$

die drei Lösungen, die den Flächensätzen entsprechen, endlich:

$$\varphi_7, \; \varphi_8, \; \varphi_9$$

die Lösungen, die aus den zweiten Schwerpunktsintegralen durch Elimination der Zeit hervorgehen. Zu bemerken ist dabei, daß zwischen den neun Funktionen φ eine Relation:

$$\varphi_1\varphi_7 + \varphi_2\varphi_8 + \varphi_3\varphi_9 = 0$$

besteht. Die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ bilden eine achtgliedrige Gruppe. Wir werden finden, daß dieselbe zwei ausgezeichnete Funktionen enthält, und daß es folglich möglich ist, fünfgliedrige Involutionssysteme [284 aus unserer Gruppe auszuscheiden.

Wir müssen nach unserer allgemeinen Theorie die von allen $(\varphi_i\varphi_k)$ gebildete Determinante mit acht Reihen und Kolonnen:

$$\triangle = \begin{vmatrix} (\varphi_1\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1\varphi_8) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (\varphi_8\varphi_1) & \cdots & (\varphi_8\varphi_8) \end{vmatrix}$$

aufstellen. Man findet:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 & 0 & M\varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 & -M\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 & M\varphi_2 & -M\varphi_1 \\ 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 & 0 & \varphi_6 & -\varphi_5 & 0 & \varphi_9 \\ -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 & -\varphi_6 & 0 & \varphi_4 & -\varphi_9 & 0 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 & \varphi_5 & -\varphi_4 & 0 & \varphi_8 & -\varphi_7 \\ 0 & M\varphi_3 & -M\varphi_2 & 0 & \varphi_9 & -\varphi_8 & 0 & M\varphi_9 \\ -M\varphi_3 & 0 & M\varphi_1 & -\varphi_9 & 0 & \varphi_7 & -M\varphi_9 & 0 \end{vmatrix},$$

wo M eine Konstante ist, und φ_9 durch die Identität:

$$\varphi_1\varphi_7 + \varphi_2\varphi_8 + \varphi_3\varphi_9 = 0$$

bestimmt wird. Die Berechnung der Determinante zeigt, daß sie gleich Null ist. Also enthält unsere Gruppe jedenfalls eine und demzufolge mindestens zwei ausgezeichnete Funktionen. Hätte sie mehr als zwei solche Funktionen, so würde deren Zahl vier oder noch größer sein. Dann müßten aber alle Unterdeterminanten zweiter und dritter Ordnung verschwinden, und man verifiziert ohne Schwierigkeit, daß es Unterdeterminanten dritter (und auch zweiter) Ordnung gibt, welche von Null verschieden sind. Also hat unsere Gruppe zwei ausgezeichnete Funktionen und enthält demzufolge Involutionssysteme mit fünf Gliedern und keins mit mehr als fünf Gliedern. Ist ein solches System gefunden, so bilden seine Glieder zusammen mit H ein sechsgliedriges Involutionssystem, dessen Integration sich nach meiner Methode auf diejenige einer einzigen Gleichung:

$$f(x_1, \ldots, x_4, p_1, \ldots, p_4) = 0$$

zurückführen läßt.

Um ein fünfgliedriges Involutionssystem durch möglichst einfache Operationen (§ 15, Nr. 33) aus der achtgliedrigen Gruppe auszuscheiden, bemerken wir, daß $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ eine sechsgliedrige Untergruppe bilden, welche das Involutionssystem: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ enthält. Untersuchen wir die Determinante der sechsgliedrigen Gruppe, so finden wir, daß auch diese Gruppe zwei ausgezeichnete Funktionen besitzt. Also enthält sie Involutionssysteme mit vier und kein solches mit mehr als [285
vier Gliedern. Wir suchen ein solches, welches die Form:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$$

besitzt. Die Funktion Φ wird bestimmt durch zwei von den Gleichungen:

$$(\varphi_1\Phi) = 0, \quad (\varphi_2\Phi) = 0, \quad (\varphi_3\Phi) = 0,$$

die durch Entwickelung und Einsetzung der Werte der $(\varphi_i\varphi_k)$ die Form erhalten:

$$\varphi_3 \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_5} - \varphi_2 \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_6} = 0, \quad -\varphi_3 \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_4} + \varphi_1 \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_4} = 0.$$

Integriert man nach den gewöhnlichen Regeln, so findet man:

$$\Phi = \varphi_1\varphi_4 + \varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_6.$$

Wir kennen also ein viergliedriges Involutionssystem:

(A) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_1\varphi_4 + \varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_6$

der achtgliedrigen Gruppe.

Um nun das gesuchte fünfgliedrige Involutionssystem zu finden, brauchen wir nur eine Funktion Π der Gruppe zu bestimmen, die zu den Funktionen (A) in Involutionsbeziehung steht. Indem man den gewöhnlichen Regeln folgt, findet man für Π die Funktion:

$$(M\varphi_4 - \varphi_7)^2 + (M\varphi_5 - \varphi_8)^2 + (M\varphi_6 - \varphi_9)^2.$$

Hiermit ist das gesuchte Involutionssystem gefunden.[1]) Darnach gibt eine Elimination eine Gleichung von der Form:

$$f(x_1, \ldots, x_4, p_1, \ldots, p_4) = 0,$$

auf deren Integration sich das Problem der drei Körper zurückführen läßt. Dieses bekannte Resultat ist hiermit auf seinen inneren Grund zurückgeführt.

Ehe Mayer und ich unsere neuen Integrationsmethoden im Jahre 1872 veröffentlicht hatten, verlangte die Erledigung des Problems der drei Körper nach der Jacobi-Weilerschen Methode die Operationen:

$$6, 4, 4, 2, 2.$$

Unsere Arbeiten zeigen, daß nur die Operationen:

$$6, 4, 2$$

erforderlich sind.

Es ist selbstverständlich, daß sich die Entwickelungen dieses Paragraphen ohne weiteres auf das allgemeine Problem von n Körpern ausdehnen.[2])

1) Clebsch führte in seinen Vorlesungen das Problem der drei Körper auf die Integration des aufgestellten Involutionssystems zurück.

2) Bei einer anderen Gelegenheit werde ich die Mechanik einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit konstantem Krümmungsmaß entwickeln. Diejenigen Integrale der Bewegungsgleichungen, die ihren Grund in der freien Beweglichkeit des betreffenden Raumes in sich selbst haben, können vermöge eines allgemeinen Prinzips, welches ich ein andermal geben werde, aufgestellt werden. Wie dann hinterher diese Integrale am besten ausgenutzt werden, zeigt diese Abhandlung. Es ist mir nicht bekannt, ob die hiermit angedeutete Theorie schon gegeben ist.

Dritter Abschnitt. [286

Theorie der homogenen Gruppen.

In diesem Abschnitte betrachte ich eine Anzahl homogener Funktionen: $H_1, \ldots, H_r$ von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ und bestimme alle zwischen denselben stattfindenden Beziehungen, die bei homogenen Berührungstransformationen ungeändert bleiben. Gleichzeitig erledigt sich das entsprechende Problem für beliebige Funktionen von: $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, welche beliebigen Berührungstransformationen unterworfen werden.

§ 21. Homogene Gruppen.

44. Zuerst soll ein neuer Begriff eingeführt werden; derselbe beruht auf dem folgenden Satze:

Satz 53. *Sind H_α und H_β homogene Funktionen von α-ter und β-ter Dimension, so ist $(H_\alpha H_\beta)$ homogen von $(\alpha + \beta - 1)$-ter Dimension.*

Denn man hat:

$$(H_\alpha H_\beta) = \sum_i^{1\ldots n}\left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial H_\beta}{\partial x_i} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial H_\beta}{\partial p_i}\right);$$

nun sind $\partial H_\alpha : \partial x_i$ und $\partial H_\beta : \partial x_i$ homogen beziehungsweise von α-ter und β-ter Dimension; ferner sind $\partial H_\alpha : \partial p_i$ und $\partial H_\beta : \partial p_i$ homogen beziehungsweise von $(\alpha-1)$-ter und $(\beta-1)$-ter Dimension. Also ist sowohl:

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial H_\beta}{\partial p_i} \quad\text{wie:}\quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H_\beta}{\partial x_i}$$

von der $(\alpha + \beta - 1)$-ten Dimension; also ist auch $(H_\alpha H_\beta)$ homogen von $(\alpha + \beta - 1)$-ter Dimension.

Korollar. *Erzeugen zwei oder mehrere homogene Funktionen $H_1, \ldots, H_q$ eine r-gliedrige Gruppe, so besteht dieselbe in derjenigen Form, in welcher sie sich zunächst darbietet, aus r Gliedern, die homogen sind. Hierbei ist zu bemerken, daß Funktionen, die einer solchen Gruppe angehören, im allgemeinen nicht homogen sind.*

Definition. Eine r-gliedrige Gruppe heißt homogen, wenn sie r homogene von einander unabhängige Funktionen enthält.

Satz 54. *Sind $H_1, \ldots, H_r$ homogene Funktionen, die eine Gruppe bilden, und bezeichnet F eine beliebige Funktion dieser Gruppe, so gehört auch:* [287

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}$$

unserer Gruppe an.

Denn die Gleichung:

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = \sum_k^{1\ldots n}\sum_i^{1\ldots r} p_k \frac{\partial F}{\partial H_i}\frac{\partial H_i}{\partial p_k}$$

geht, wenn man zuerst hinsichtlich k summiert und sich dabei erinnert, daß alle H_i homogen, etwa von der s_i-ten Dimension sind, in:

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = \sum_i^{1\ldots r} s_i \frac{\partial F}{\partial H_i}\cdot H_i$$

über; hier ist aber die rechte Seite eine Funktion von $H_1, \ldots, H_r$.

Satz 55. *Bilden $K_1, \ldots, K_r$ eine Gruppe, welche die Eigenschaft besitzt, daß sich jedes:*

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial K_i}{\partial p_k}$$

durch die K ausdrückt, so ist die Gruppe homogen.

Sind nämlich einige der Ausdrücke:

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial K_i}{\partial p_k} = \Omega_i(K_1, \ldots, K_r)$$

von Null verschieden, so ist die Gleichung:

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = \Phi,$$

oder die entsprechende:

$$\sum_i^{1\ldots r} \Omega_i \frac{\partial \Phi}{\partial K_i} = \Phi$$

eine lineare partielle Differentialgleichung mit r von einander unabhängigen Lösungen:

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_r,$$

welche homogen von erster Dimension sind und unserer Gruppe angehören. Also ist die Gruppe homogen.

Sind endlich alle Ω_i gleich Null, so heißt dies, daß alle K von nullter Dimension sind; auch in diesem Falle ist also die Gruppe homogen.

Satz 56. *Sind alle Funktionen einer homogenen Gruppe von nullter Dimension, so ist die Gruppe ein Involutionssystem.*

Seien nämlich: $N_1, \ldots, N_r$ Funktionen nullter Dimension, die eine r-gliedrige Gruppe bilden. Ist der Ausdruck: $(N_i N_k)$ von Null verschieden, so muß derselbe (Satz 53) von (-1)-ter Dimension sein. Nun ist es aber unmöglich, eine Funktion (-1)-ter Dimension durch Größen [288 nullter Dimension: $N_1, \ldots, N_r$ auszudrücken; also müssen alle: $(N_i N_k)$ gleich Null, und die Gruppe [muß] ein Involutionssystem sein.

Satz 57. *Enthält eine homogene Gruppe Funktionen, die nicht von nullter Dimension sind, so kann die Gruppe die Form: $N_1, \ldots, N_{r-1}, H$ erhalten; hier bezeichnen alle N Funktionen nullter Dimension und H eine Funktion erster Dimension.*

Sind nämlich $H_1, \ldots, H_r$ homogene Funktionen unserer Gruppe, so ist es immer möglich, indem man jedes H durch eine gewisse Potenz desselben ersetzt, der Gruppe eine solche Form:

$$N_1, \ldots, N_\varrho, H_{\varrho+1}, \ldots, H_r$$

zu geben, daß sie nur Glieder von nullter und erster Dimension enthält. Setzt man nun:

$$\frac{H_{\varrho+1}}{H_r} = N_{\varrho+1}, \ldots, \frac{H_{r-1}}{H_r} = N_{r-1},$$

so ist:

$$N_1, \ldots, N_{r-1}, H_r$$

eine Form unserer Gruppe, welche die gestellten Forderungen erfüllt.

§ 22. Die Polargruppe und die ausgezeichneten Funktionen einer homogenen Gruppe sind homogen.

45. Die Theorien dieses Abschnittes beruhen auf einem Theoreme, welches wir jetzt beweisen werden. Zuerst jedoch ein Hilfssatz.

Satz 58. *Die Gleichungen:*

$$(HK) = 0, \quad \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} = sH,$$

in denen s eine Konstante bezeichnet, ziehen die folgende:

$$\Big(H, \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial K}{\partial p_k}\Big) = 0$$

nach sich.

Denn setzen wir:

$$A(H) = (HK), \quad B(H) = \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} = sH,$$

so genügt, weil $A(0) = B(0) = 0$ ist, jede gemeinsame Lösung H unserer beiden Gleichungen zugleich auch der Gleichung:

$$A(B(H)) - B(A(H)) = 0.$$

Durch Ausführung findet man aber:

$$A(B(H)) - B(A(H)) = (H, K) - \Big(H, \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial K}{\partial p_k}\Big). \qquad [289$$

Also ziehen in der Tat unsere beiden Gleichungen die dritte:

$$\Big(H, \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial K}{\partial p_k}\Big) = 0$$

nach sich.

Theorem XVIII. *Die Polargruppe einer homogenen Gruppe ist homogen.*

Beweis. Seien: $H_1, \ldots, H_r$ homogene Funktionen, die eine r-gliedrige Gruppe bilden, und sei: $K_1, \ldots, K_{2n-r}$ die Polargruppe. Alsdann gelten die Gleichungen:

$$(H_i K_\varrho) = 0, \quad \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial H_i}{\partial p_k} = s_i H_i,$$

die nach dem vorangehenden Satze die folgenden:

$$\Big(H_i, \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial K_\varrho}{\partial p_k}\Big) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

nach sich ziehen. Also besitzt die Gruppe $K_1, \ldots, K_{2n-r}$ die Eigenschaft, daß der Ausdruck:

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial K_\varrho}{\partial p_k}$$

jedesmal eine Funktion der Größen: $K_1, \ldots, K_{2n-r}$ ist. Also (Satz 55) bilden: $K_1, \ldots, K_{2n-r}$ eine homogene Gruppe.

Satz 59. *Sei $H_1, \ldots, H_r$ eine homogene Gruppe. Alsdann bilden die Gleichungen:*

$$(H_1 \Phi) = 0, \ldots, (H_r \Phi) = 0, \quad \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = 0$$

ein vollständiges System, wenn nicht zufälligerweise die letzte Gleichung eine algebraische Konsequenz der übrigen ist.

Die Polargruppe von $H_1, \ldots, H_r$ ist nämlich homogen und besitzt daher (Satz 57) entweder die Form: $N_1, \ldots, N_{2n-r-1}, H$ oder die Form $N_1, \ldots, N_{2n-r}$. Im ersten Falle gibt es unter den $2n - r$ Lösungen des vollständigen Systems:

$$\text{(A)} \qquad (H_1 \Phi) = 0, \ldots, (H_r \Phi) = 0$$

$2n-r-1$, nämlich: $N_1, \ldots, N_{2n-r-1}$, welche zugleich der Gleichung:

$$\text{(B)} \qquad \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = 0$$

genügen. Alsdann bilden also:

$$(H_1\Phi) = 0, \ldots, (H_r\Phi) = 0, \quad \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = 0 \qquad [290$$

ein vollständiges System.

Im zweiten Falle sind sämtliche Lösungen der Gleichungen (A) zugleich Lösungen von (B), welche Gleichung also eine Konsequenz, und zwar eine algebraische Konsequenz von (A) ist.

Es ist zu bemerken, daß in diesem letzten Falle $r \gtreqless n$ sein muß. Denn die Polargruppe, da sie aus Funktionen nullter Dimension besteht, ist (Satz 56) ein Involutionssystem, und kann also höchstens n Glieder enthalten.

Ich werde mit Benutzung des letzten Satzes eine Integrationsmethode der Gleichungen:

$$N_1(x_1, \ldots, x_n, p_1 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n) = \text{Const.}$$

angeben, die hinsichtlich der Zahl und der Ordnung der notwendigen Integrationen mit Mayers und meinen früheren Theorien übereinstimmt.

Ich stelle das vollständige System auf:

$$(N_1F) = 0, \quad \sum p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = 0$$

und bestimme eine Lösung N_2 desselben vermöge einer Operation $2n-3$. Alsdann ist N_1, N_2 ein Involutionssystem. Ich stelle das vollständige System auf:

$$(N_1F) = 0, \quad (N_2F) = 0, \quad \sum p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = 0$$

und bestimme eine Lösung desselben N_3, die von N_1 und N_2 verschieden ist, durch eine Operation $2n-5$. In dieser Weise findet man zuletzt ein Involutionssystem:

$$N_1 = a_1, \quad N_2 = a_2, \ldots, N_n = a_n.$$

Eliminiert man zwischen diesen Gleichungen die Differentialquotienten $p_1, \ldots, p_n$, was immer möglich ist, da die p nur als Verhältnisse auftreten, so erhält man eine Gleichung zwischen $x_1, \ldots, x_n$ oder unter Umständen mehrere, die eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichung darstellen.

46. Wir wenden uns nun zu den ausgezeichneten Funktionen der homogenen Gruppen.

Theorem XIX. *Die ausgezeichneten Funktionen einer homogenen Gruppe bilden eine homogene Gruppe.*

Sei nämlich: $H_1, \ldots, H_r$ eine homogene Gruppe und: $K_1, \ldots, K_{2n-r}$ die homogene Polargruppe derselben. Besitzen diese beiden Gruppen m gemeinsame ausgezeichnete Funktionen, so ist es (Theorem VII) immer möglich, $r-m$ solche Glieder in der ersten Gruppe, etwa $H_1, \ldots,$ [291 H_{r-m} zu wählen, daß zwischen den $2n-m$ Größen:

$$H_1, \ldots, H_{r-m}, K_1, \ldots, K_{2n-r}$$

keine Relation stattfindet. Alsdann bilden diese Funktionen eine Gruppe und zwar eine homogene Gruppe, deren Polargruppe, die ebenfalls homogen sein muß, aus den ausgezeichneten Funktionen der ursprünglichen Gruppe besteht (Satz 25, Beweis). Hiermit ist unser Theorem erwiesen.

Satz 60. *Gibt es unter den m ausgezeichneten Funktionen einer homogenen Gruppe einige, deren Dimensionen von Null verschieden sind, so kann man sämtliche ausgezeichnete Funktionen vermöge der Operationen:*

$$m-1, \quad m-2, \ldots, 3, 2, 1, 1$$

bestimmen. Meine alte Methode verlangte die Operationen: m, $m-1$, $\ldots, 3, 2, 1$.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, daß unsere Gruppe schon die Form: $N_1, \ldots, N_{r-1}, H$ besitzt. Bezeichne ich mit N eine Funktion von $N_1, \ldots, N_{r-1}$, so bestimmen die Gleichungen:

$$(N_1\mathsf{N}) = 0, \ldots, (N_{r-1}\mathsf{N}) = 0, \quad (H\mathsf{N}) = 0,$$

oder entwickelt:

$$(\alpha) \qquad \sum_k^{1\ldots r-1} (N_1N_k) \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k} = 0, \ldots, \sum_k^{1\ldots r-1} (HN_k) \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k} = 0$$

die ausgezeichneten Funktionen nullter Dimension. Nun sind die (N_iN_k) Funktionen (-1)-ter Ordnung und (HN_k) ist eine Funktion nullter Ordnung von: $N_1, \ldots, N_{r-1}, H$. Es müssen daher diese Ausdrücke die Form:

$$(N_iN_k) = \frac{1}{H} f_{ik}(N_1, \ldots, N_{r-1}), \quad (HN_k) = \varphi_{ik}(N_1, \ldots, N_{r-1})$$

haben. Durch Substitution dieser Werte verwandeln sich die Gleichungen (α), wenn man die $r-1$ ersten noch mit H multipliziert, in r Gleichungen, die nur noch die $r-1$ unabhängigen Variabeln $N_1, \ldots,$

N_{r-1} enthalten; die Variable H ist gänzlich verschwunden. Man entscheidet nun in der gewöhnlichen Weise, wie viele gemeinsame Lösungen unsere r linearen Gleichungen besitzen. Haben sie m solche, das heißt, sind sämtliche ausgezeichnete Funktionen von nullter Dimension, so verlangt ihre Bestimmung wie gewöhnlich die Operationen: m, $m-1$, $\ldots, 3, 2, 1$. Haben dagegen unsere Gleichungen nur $m-1$ gemeinsame Lösungen, so findet man dieselben durch die Operationen:

$$m-1, \quad m-2, \ldots, 3, 2, 1.$$

Nachdem man in dieser Weise $m-1$ ausgezeichnete Funktionen [292
nullter Dimension bestimmt hat, findet man eine weitere ausgezeichnete Funktion, die nicht von nullter Dimension ist, durch eine Operation 1.

§ 23. Kanonische Formen der homogenen Gruppen.

Zuerst beweisen wir einige Hilfssätze. Sodann stellen wir zwei kanonische Formen auf; eine jede homogene Gruppe kann [entweder] die eine oder die andere dieser beiden Formen annehmen. Der Bequemlichkeit wegen gebrauche ich im folgenden immer das Symbol P, um eine homogene Funktion erster Dimension zu bezeichnen.

47. Satz 61. *Unter den Funktionen F einer homogenen Gruppe $N_1, \ldots, N_{r-1}, P$, welche der Gleichung:*

$$(N_1 F) = 1$$

genügen, gibt es einige, die von erster Dimension sind und also die Form $P \,.\, \mathsf{N}(N_1, \ldots, N_{r-1})$ besitzen. N_1 darf selbstverständlich keine ausgezeichnete Funktion sein.

Denn durch Ausführung finden wir:

$$(N_1, P\mathsf{N}) = (N_1 P)\mathsf{N} + (N_1 \mathsf{N})P,$$

oder:

$$(N_1, P\mathsf{N}) = (N_1 P)\mathsf{N} + \sum_k^{1 \ldots r-1} (N_1 N_k) P \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k}.$$

Hier ist $(N_1 P)$ von nullter Dimension, $(N_1 N_k)$ dagegen von (-1)-ter Dimension, und also auch $(N_1 N_k)P$ von nullter Dimension. Es müssen daher diese Ausdrücke, die bekanntlich Funktionen von $N_1, \ldots, N_{r-1}, P$ sind, die Form haben:

$$(N_1 P) = \varphi(N_1, \ldots, N_{r-1}), \quad (N_1 N_k)P = f_k(N_1, \ldots, N_{r-1}).$$

Durch Substitution dieser Werte verwandelt sich aber die Gleichung $(N_1, P\mathsf{N}) = 1$ in die folgende:

$$\varphi \,.\, \mathsf{N} + \sum_k^{1 \ldots r-1} f_k \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k} = 1,$$

welche P gar nicht mehr enthält und eine lineare partielle Differentialgleichung mit den unabhängigen Variabeln: $N_1, \ldots, N_{r-1}$ ist. Ist N eine beliebige Lösung derselben, so ist $P \,.\, \mathsf{N}$ eine Funktion erster Ordnung unserer Gruppe, welche die Forderungen unseres Satzes erfüllt.

Satz 62. *Eine homogene Gruppe von der Form: $N_1, \ldots, N_{r-1}, P$ enthält Funktionen nullter Dimension: $\mathsf{N}(N_1, \ldots, N_{r-1})$, welche die Gleichung:*

$$(P\mathsf{N}) = 1$$ [293

befriedigen, vorausgesetzt natürlich, daß P keine ausgezeichnete Funktion ist.

Denn man hat:

$$(P\mathsf{N}) = \sum_k^{1 \ldots r-1} (PN_k) \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k},$$

und (PN_k), als eine Funktion nullter Dimension, muß sich durch $N_1, \ldots, N_{r-1}$ allein ausdrücken lassen. Wenn daher:

$$(PN_k) = f_k(N_1, \ldots, N_{r-1})$$

ist, so ist:

$$\sum_k^{1 \ldots r-1} f_k \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k} = 1$$

eine lineare partielle Differentialgleichung zwischen N und den unabhängigen Variabeln: $N_1, \ldots, N_{r-1}$, deren Lösungen unserer Gruppe angehören und in der verlangten Beziehung zu der vorgelegten Funktion P stehen.

Satz 63. *Enthält eine homogene Gruppe: $N_1, \ldots, N_{r-1}, P$ eine zweigliedrige Untergruppe N_1, P, [wo $(PN_1) = 1$], so ist auch die $(r-2)$-gliedrige Untergruppe, die mit der zweigliedrigen in Involution liegt (Satz 34), homogen.*

Ist nämlich: $H_1, \ldots, H_{2n-r}$ die Polargruppe von: $N_1, \ldots, N_{r-1}, P$, so ist bekanntlich:

$$H_1, \ldots, H_{2n-r}, N_1, P$$

eine homogene Gruppe, deren homogene Polargruppe eben die besprochene $(r-2)$-gliedrige Untergruppe ist. Also ist unser Satz bewiesen.

48. Theorem XX. *Eine homogene Gruppe kann immer die Form:*

$$X_1, P_1, \ldots, X_q, P_q, U_1, \ldots, U_m$$

erhalten. Hier sind X_i und P_i Funktionen beziehungsweise nullter und erster Ordnung, die in den bekannten gegenseitigen Beziehungen stehen. $U_1, \ldots, U_m$ sind die ausgezeichneten Funktionen der Gruppe, die selbst eine homogene Gruppe bilden.

Beweis. Wenn die gegebene homogene Gruppe $H_1, \ldots, H_r$ ein Involutionssystem ist, so hat sie schon unmittelbar die verlangte Form. Ist dies nicht der Fall, so nehme man für X_1 eine Funktion nullter Ordnung der Gruppe und bestimme nach dem ersten Satze dieses Paragraphen eine Funktion erster Ordnung P_1 der Gruppe aus der Gleichung:

$$(P_1 X_1) = 1.$$

Sodann bestimme man (vorangehender Satz) die homogene $(r-2)$-gliedrige Untergruppe:

$$H_1^{(1)}, \ldots, H_{r-2}^{(1)}, \qquad [294$$

die mit X_1, P_1 in Involution liegt. Hierdurch erhält die ursprüngliche Gruppe die Form:

$$X_1, P_1, H_1^{(1)}, \ldots, H_{r-2}^{(1)}.$$

Ist: $H_1^{(1)}, \ldots, H_{r-2}^{(1)}$ ein Involutionssystem, so ist die ursprüngliche Gruppe schon auf die verlangte Form gebracht. Ist dies nicht der Fall, so zerlegen wir $H_1^{(1)}, \ldots, H_{r-2}^{(1)}$ in die beiden, involutorisch gelegenen, homogenen Gruppen: X_2, P_2 und: $H_1^{(2)}, \ldots, H_{r-4}^{(2)}$, wodurch die ursprüngliche Gruppe die Form:

$$X_1, P_1, X_2, P_2, H_1^{(2)}, \ldots, H_{r-4}^{(2)}$$

annimmt. Ist hier: $H_1^{(2)}, \ldots, H_{r-4}^{(2)}$ ein Involutionssystem, so ist die verlangte Form gefunden. Im entgegengesetzten Falle führen wir eine neue Zerlegung aus, und so weiter.

Sind endlich so viele Zerlegungen wie möglich, etwa q solche, ausgeführt, so hat unsere Gruppe die verlangte Form:

$$X_1, P_1, \ldots, X_q P_q, , H_1^{(q)}, \ldots, H_{r-2q}^{(q)}$$

erhalten. — Hier sind nun noch zwei Fälle denkbar. Entweder sind sämtliche ausgezeichnete Funktionen von nullter Dimension, oder aber es gibt einige ausgezeichnete Funktionen, deren Dimension von Null verschieden ist. Also:

Korollar 1. *Sind sämtliche ausgezeichnete Funktionen einer homogenen Gruppe von nullter Dimension, so ist:*

$$X_1, P_1, \ldots, X_q, P_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$$

die kanonische Form der Gruppe. Hier bezeichnen X_i und P_i Funktionen beziehungsweise nullter und erster Ordnung, die in den bekannten gegenseitigen Beziehungen stehen.

Korollar 2. *Enthält eine homogene Gruppe ausgezeichnete Funktionen, die nicht von nullter Ordnung sind, so ist:*

$$X_1, P_1, \ldots, X_q, P_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q+m-1}, P_{q+m},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$X_1, P_1, \ldots, X_q, P_q, P_{q+1}, \ldots, P_{q+m}$$

die kanonische Form der Gruppe.

Die Entwickelungen am Schlusse des vorangehenden Paragraphen zeigen, wie man entscheidet, ob eine vorgelegte homogene Gruppe der einen oder der anderen von den besprochenen beiden Kategorien angehört.

§ 24. Invariante Eigenschaften einer homogenen Gruppe. [295

Ich werde jetzt beweisen, daß die einzigen Eigenschaften einer homogenen Gruppe, die von der Form derselben unabhängig sind und dabei bei beliebigen homogenen Berührungstransformationen (welche offenbar die vorgelegte Gruppe immer in eine neue h o m o g e n e Gruppe überführen) ungeändert bleiben, sich durch drei ganze positive Zahlen ausdrücken lassen: 1. die Zahl der Glieder, 2. die Zahl der ausgezeichneten Funktionen, 3. die Zahl der ausgezeichneten Funktionen nullter Ordnung.

Ich schlage bei dieser Untersuchung einen Weg ein, der demjenigen sehr ähnlich ist, dem ich in § 13, auf den ich verweise, gefolgt bin.

49. Zuerst betrachte ich Gruppen, deren sämtliche ausgezeichnete Funktionen von nullter Dimension sind.

Satz 64. *Bilden: $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ eine homogene Gruppe, so gibt es immer solche Funktionen P_{q+1}, daß: $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_{q+1}$ eine neue kanonische homogene Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfaßt.*

Denn die Polargruppe von: $X_1, \ldots, X_q, X_{q+2}, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ ist homogen und enthält X_{q+1}, welches keine ausgezeichnete Funktion ist. Nach dem ersten Satze des vorangehenden Paragraphen enthält daher unsere Polargruppe Funktionen erster Dimension, etwa P_{q+1}, welche:

$$(P_{q+1} X_{q+1}) = 1$$

ergeben und somit allen unseren Forderungen genügen.

Satz 65. *Bilden: $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ eine homogene Gruppe, so gibt es immer solche Funktionen: $P_{q+1}, \ldots, P_{q+m}$, daß: $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_{q+m}$ eine kanonische homogene Gruppe ist, welche die ursprüngliche umfaßt.*

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus der m-maligen Anwendung des vorhergehenden.

Satz 66. *Bilden: $X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_q$ eine homogene Gruppe, und ist $q < n$, so gibt es immer eine Funktion nullter Dimension X_{q+1}, die mit unserer Gruppe in Involution liegt. Alsdann ist: $X_1, \ldots, X_{q+1}, P_1, \ldots, P_q$ eine neue kanonische Gruppe, welche die vorgelegte Gruppe umfaßt.*

Denn die Polargruppe von: $X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_q$ ist homogen und besteht aus wenigstens zwei Gliedern. Sie enthält daher wenigstens eine Funktion nullter Ordnung, die unseren Forderungen genügt.

Satz 67. *Ist: $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q$ eine homogene Gruppe, so gibt es immer solche weitere Funktionen X und P, beziehungsweise nullter und erster Ordnung, daß: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ eine kanonische* [296
homogene Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfaßt.

Dieser Satz folgt als Korollar aus den vorangehenden.

Theorem XXI. *Besitzen zwei homogene Gruppen, deren ausgezeichnete Funktionen sämtlich von nullter Ordnung sind, gleichviele Glieder und gleichviele ausgezeichnete Funktionen, so gibt es immer homogene Berührungstransformationen, welche die eine Gruppe in die andere überführen.*

Beweis. Es seien die Glieder der einen Gruppe Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$, die der anderen Funktionen von $x'_1, \ldots, p'_n$. Nach den gemachten Voraussetzungen können die beiden Gruppen respektive die kanonischen Formen erhalten:

$$X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_q,$$

$$X'_1, \ldots, X'_{q+m}, P'_1, \ldots, P'_q,$$

wo natürlich die X, P Funktionen von den x, p und die X', P' Funktionen der x', p' sind.

Nach dem vorangehenden Satze gibt es nun immer solche weitere Funktionen X, P, respektive X', P', daß:

$$X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n \text{ und: } X'_1, \ldots, X'_n, P'_1, \ldots, P'_n$$

wiederum kanonische homogene Gruppen bilden.

Nach Theorem X (Beweis) bestimmen daher die $2n$ Gleichungen:

$$X_i = X'_i, \quad P_i = P'_i$$

eine Berührungstransformation. Diese führt aber die eine Gruppe in die andere über; sie ist überdies homogen, also ist der Satz erwiesen.

50. Wir wenden uns nun zu homogenen Gruppen mit ausgezeichneten Funktionen, die nicht sämtlich von nullter Ordnung sind.

Satz 68. *Bilden: $X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_{q+m}$ eine kanonische homogene Gruppe, so gibt es immer solche Funktionen X_{q+1}, daß: $X_1, \ldots, X_{q+1}, P_1, \ldots, P_{q+m}$ wiederum eine kanonische homogene Gruppe ist, welche die vorgelegte umfaßt.*

Denn die Polargruppe von: $X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_q, P_{q+2}, \ldots, P_{q+m}$ ist homogen und enthält P_{q+1}, welches keine ausgezeichnete Funktion derselben ist. Daher enthält diese Gruppe (Satz 62) Funktionen nullter Ordnung X_{q+1}, welche:

$$(P_{q+1} X_{q+1}) = 1$$

ergeben und also unseren Forderungen genügen.

Satz 69. *Ist: $X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_{q+m}$ eine kanonische homogene Gruppe, so gibt es solche Funktionen: $X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}$, daß $X_1, \ldots, X_{q+m}, P_1, \ldots, P_{q+m}$ eine homogene kanonische Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfaßt.*

Dieser Satz entspringt unmittelbar aus der m-maligen Anwendung [297
des vorhergehenden.

Satz 70. *Bilden: $X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_{q+m}$ eine kanonische homogene Gruppe, so gibt es solche weitere Funktionen X und P, daß: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ eine kanonische homogene Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfaßt.*

Dieser Satz folgt durch sukzessive Anwendung der vorhergehenden Sätze dieses Paragraphen.

Theorem XXII. *Besitzen zwei homogene Gruppen, deren ausgezeichnete Funktionen nicht sämtlich von nullter Ordnung sind, gleichviele Glieder und gleichviele ausgezeichnete Funktionen, so gibt es immer homogene Berührungstransformationen, welche die eine Gruppe in die andere überführen.*

Denn nach unseren Voraussetzungen können unsere Gruppen beziehungsweise die beiden kanonischen Formen:

$$X_1, \ldots, X_q, P_1, \ldots, P_{q+m} \text{ und: } X'_1, \ldots, X'_q, P'_1, \ldots, P'_{q+m}$$

erhalten, wobei alle X, P Funktionen von $x_1, \ldots, p_n$, alle X', P' Funktionen von $x'_1, \ldots, p'_n$ sind. Alsdann gibt es solche weitere Funktionen: X, P und: X', P', daß auch:

$$X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n \text{ und: } X'_1, \ldots, X'_n, P'_1, \ldots P'_n$$

kanonische homogene Gruppen sind. Also definieren die $2n$ Gleichungen:

$$X_i = X'_i, \quad P_i = P'_i$$

wiederum eine homogene Berührungstransformation, welche die eine der beiden Gruppen in die andere überführt.

Korollar. *Die einzigen Eigenschaften einer homogenen Gruppe, die von der Form der Gruppe unabhängig sind und bei beliebigen homogenen Berührungstransformationen ungeändert bleiben, sind:* 1. *die Zahl der Glieder r,* 2. *die Zahl der ausgezeichneten Funktionen* m, 3. *die Zahl der ausgezeichneten Funktionen nullter Dimension, welche entweder gleich* m *oder* $m-1$ *sein muß. Hier ist r eine ganze positive Zahl, die nicht größer als* $2n$ *sein kann; wir haben ferner in dem vorangehenden Abschnitte gefunden, daß* $r-m$ *eine positive gerade Zahl sein muß, und endlich, daß* $r+m$ *höchstens gleich* $2n$ ist.

51. Es hat nun gar keine Schwierigkeiten, die Theorien der Paragraphen 14, 15 und 16 auf homogene Funktionen und homogene Berührungstransformationen auszudehnen.

Es zeigt sich, daß die invarianten Beziehungen zwischen einer homogenen Gruppe und einer homogenen Untergruppe vollständig durch acht Zahlen bestimmt sind. Die sechs ersten definieren die individuellen [298 invarianten Eigenschaften jeder der beiden homogenen Gruppen. Die zwei letzten sind die Zahl $\bar{\omega}$ der gemeinsamen ausgezeichneten Funktionen, und die Zahl $\bar{\omega}$ oder $\bar{\omega}-1$ der gemeinsamen ausgezeichneten Funktionen nullter Ordnung.

Soll man ein Involutionssystem aus einer homogenen Gruppe ausscheiden, so ist es immer möglich, eine Erniedrigung in der Ordnung der notwendigen Integrationen zu erreichen.

Soll man entscheiden, ob sich r gegebene homogene Funktionen $H_1, \ldots, H_r$ durch eine homogene Berührungstransformation beziehungsweise in $H'_1, \ldots, H'_r$ überführen lassen, so kann man immer (§ 16) voraussetzen, daß alle H_i und ebenso alle H'_i von einander unabhängig sind.

Eine erste Forderung ist, daß die entsprechenden Funktionen der beiden Systeme von derselben Ordnung sind. Ist diese Forderung erfüllt, so bestimmt man wie in § 16 die beiden durch unsere Funktionen bestimmten Gruppen:

$$H_1, \ldots, H_r, \ldots, H_\alpha \text{ und: } H'_1, \ldots, H'_r, \ldots, H'_{\alpha'}.$$

Hier muß α' gleich α sein, und ferner muß sich jedes $(H'_i H'_k)$ in derselben Weise durch die H'_i, wie das entsprechende $(H_i H_k)$ durch die H_i ausdrücken lassen. Sind alle diese Forderungen erfüllt, so sieht man wie damals ein, daß die verlangte Transformation möglich ist; und zwar wird dieselbe offenbar eine homogene Transformation.

Hiermit sind alle zwischen $H_1, \ldots, H_r$ stattfindenden Beziehungen bestimmt, die bei beliebigen homogenen Berührungstransformationen invariant bleiben.

§ 25. Integrationserniedrigungen, die sich auf die vorhergehenden Entwickelungen stützen.

Die vorangehenden Theorien zeigen, wie man die bei der Integration einer partiellen Differentialgleichung:

$$F(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0$$

eintretenden Umstände am vorteilhaftesten ausnutzen kann. Indem ich insbesondere auf § 17, 18 und 19 verweise, kann ich mich auf das folgende beschränken.

52. Ich setze voraus, daß ein Involutionssystem nullter Ordnung:

$$N_1 = C_1, \ldots, N_q = C_q$$

integriert werden soll, und daß man eine Anzahl homogene Funktionen $H_1, \ldots, H_r$ kennt, welche allen Gleichungen: $(N_i H_k) = 0$ genügen. Ist es unmöglich, vermöge des Poisson-Jacobischen Theorems weitere Funktionen H zu bestimmen, so bilden: $N_1, \ldots, N_q, H_1, \ldots, H_r$ eine [299 homogene Gruppe. Wir betrachten nun zuerst den Fall, daß diese Gruppe ausgezeichnete Funktionen enthält, die nicht von nullter Dimension sind; sodann den Fall, daß sämtliche ausgezeichnete Funktionen von nullter Ordnung sind.

A. Enthält die Gruppe: $N_1, \ldots, N_q, H_1, \ldots, H_r$ außer: $N_1, \ldots, N_q$ m ausgezeichnete Funktionen:

$$N_{q+1}, \ldots, N_{q+m-1}, H,$$

die nicht sämtlich von nullter Ordnung sind, so bestimmt man dieselben (Satz 60) vermöge der Operationen:

$$m-1,\quad m-2,\ldots,3,\ 2,\ 1,\ 1.$$

Hinterher behandelt man das Involutionssystem:

$$N_1 = C_1,\ldots, N_{q+m-1} = C_{q+m-1},\quad H = C$$

nach den in Nr. 38 gegebenen allgemeinen Regeln.

B. Enthält die Gruppe: $N_1,\ldots,N_q, H_1,\ldots,H_r$ außer: $N_1,\ldots,N_q$ noch m ausgezeichnete Funktionen, die sämtlich von der nullten Ordnung sind:

$$N_{q+1},\ldots,N_{q+m},$$

so bestimmt man dieselben vermöge der Operationen:

$$m,\quad m-1,\ldots,3,\ 2,\ 1.$$

Hinterher stellt sich die Aufgabe, das Involutionssystem nullter Ordnung:

$$N_1 = C_1,\ldots,N_{q+m} = C_{q+m}$$

mit $r-m$ homogenen Lösungen: $H_1,\ldots,H_{r-m}$ der $q+m$ Gleichungen: $(N_k H) = 0$ in möglichst einfacher Weise zu integrieren.

Zu diesem Zwecke stellt man die Gleichungen auf:

$$(\mathrm{A})\left|\begin{array}{c}(N_1N) = 0,\ldots,(N_{q+m}N) = 0,\quad (H_1N) = 0,\ldots,(H_{r-m}N) = 0,\\ \sum_k^{1\ldots n} p_k \dfrac{\partial N}{\partial p_k} = 0,\end{array}\right.$$

die ein vollständiges System bilden müssen. Bestände nämlich die Polargruppe der Gruppe:

$$N_1,\ldots,N_{q+m} H_1,\ldots,H_{r-m}$$

nur aus Funktionen nullter Ordnung, so wäre diese Polargruppe mit dem Inbegriffe der ausgezeichneten Funktionen: $N_1,\ldots,N_{q+m}$ identisch. Dann aber wäre die Integration unseres Involutionssystems (Theorem XIII) schon als geleistet zu betrachten; diesen Fall brauchen wir also nicht zu berücksichtigen. Von dem vollständigen Systeme (A) kennt man nun $m+q$ Lösungen: $N_1,\ldots,N_{q+m}$; also findet man eine weitere Lösung N_{q+m+1} vermöge einer Operation:

$$2n-2q-r-m-1.$$ [300

Hiermit ist alles zurückgeführt auf die Integration des Involutionssystems:

$$N_1 = C_1,\ldots,N_{q+m+1} = C_{q+m+1}$$

mit $r-m$ Lösungen: $H_1,\ldots,H_{r-m}$ des Systems: $(N_i H) = 0$. Man geht nun in entsprechender Weise weiter und bestimmt eine Funktion N_{q+m+2} vermöge einer Operation:

$$2n-2q-r-m-3,$$

und so weiter, und endlich eine letzte Funktion N vermöge einer Operation 1.

Hiermit ist nach meinen früheren Entwickelungen (Theorem XIII) das Integrationsgeschäft abgeschlossen.

§ 26. Vervollständigung der Theorie des Poisson-Jacobischen Theorems.

Das Poisson-Jacobische Theorem ist einer Vervollständigung fähig, die ich jetzt geben werde. Zunächst betrachte ich beliebige Funktionen von $x_1,\ldots,p_n$, sodann homogene Funktionen von x, p.

53. Sind φ_1 und φ_2 Lösungen der Gleichung:

$$(f\varphi) = 0,$$

so sagt das Poisson-Jacobische Theorem aus, daß auch $(\varphi_1\varphi_2)$ eine solche Lösung ist.

Es existieren mehrere verwandte Theoreme, von denen ich hier das folgende, von Laurent herrührende anführe:

Sind: $\varphi = \varphi_1,\ldots,\varphi_k,\ \psi_1,\ldots,\psi_k$ irgend $2k$ Lösungen der Gleichung: $(f\varphi) = 0$, so ist immer auch:

$$\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_k}\sum \pm \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{\lambda_k}}\frac{\partial\psi_1}{\partial p_{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial\psi_k}{\partial p_{\lambda_k}}$$

eine solche.

Mayer machte mich gelegentlich auf diesen Satz aufmerksam und bemerkte dabei, daß derselbe wahrscheinlicherweise nur solche Lösungen geben würde, die man auch durch sukzessive Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems erhalten könnte. Als Antwort konnte ich ihm die Theorie dieser Nummer mitteilen.

Satz 71. *Genügen alle gemeinsamen Lösungen F der Gleichungen:*

$$(\Phi_1 F) = 0,\ldots,(\Phi_q F) = 0$$

gleichzeitig auch der Gleichung:

$$(\Pi F) = 0,$$

so gehört Π *der durch* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ *bestimmten Gruppe:* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q, \ldots, \Phi_r$ *an.*

Denn die gemeinsamen Lösungen der gegebenen q Gleichungen [301 sind die Lösungen des vollständigen Systems:

$$(\Phi_1 F) = 0, \ldots, (\Phi_r F) = 0.$$

Bezeichnet man dieselben durch: $F_1, \ldots, F_{2n-r}$, so muß:

$$(\Pi F_1) = 0, \ldots, (\Pi F_{2n-r}) = 0$$

sein, das heißt Π muß der Polargruppe von $F_1, \ldots, F_{2n-r}$ angehören. Diese Polargruppe ist aber eben $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ selbst.

Hieraus ergibt sich sogleich das nachstehende bemerkenswerte Theorem:

Theorem XXIII. *Kennt man irgend* q *Lösungen:* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ *der Gleichung:*

$$(F\Phi) = 0$$

und findet man aus diesen Lösungen durch irgend welche Operationen, die ganz unabhängig sind von der Form der Funktion F, *eine weitere Lösung* Π, *so gehört* Π *stets der durch* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ *bestimmten Gruppe an.*

54. Dieses Theorem bleibt nicht mehr richtig, wenn die Funktion F gewissen Beschränkungen unterworfen ist. Ich werde den wichtigen Fall, daß F eine homogene Funktion ist, betrachten und für denselben eine entsprechende Theorie entwickeln.

Wir haben früher gesehen (Satz 54), daß eine jede homogene Gruppe, die eine Funktion Φ enthält, zugleich die Funktion:

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}$$

enthalten muß, und (Satz 55), daß umgekehrt eine Gruppe: $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ homogen ist, wenn jedes:

$$\sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_k}$$

sich durch die Φ ausdrücken läßt. Folglich kann ich von der durch eine gegebene Funktion bestimmten homogenen Gruppe, und ebenso von der durch mehrere gegebene Funktionen bestimmten homogenen Gruppe sprechen.

Satz 72. *Sei* F *eine homogene Funktion,* Φ *irgend eine Funktion, welche zu jener in der Beziehung:*

$$(F\Phi) = 0$$

steht, und endlich $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ *die durch* Φ *bestimmte homogene Gruppe. Alsdann gelten sämtliche Gleichungen:* $(F\Phi_k) = 0$.

Dieser Satz ist eine Konsequenz eines früheren (Satz 58), daß nämlich die Gleichung:

$$(F\Phi) = 0$$

die folgende: [302

$$\left(F, \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\right) = 0$$

nach sich zieht, in Verbindung mit dem Poisson-Jacobischen Satze.

Satz 73. *Sei* F *eine homogene Funktion und* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ *gegebene Funktionen, deren jede mit* F *in Involution liegt, das heißt,* $(F\Phi_k) = 0$ *ergibt. Bezeichnet dann:* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q, \ldots, \Phi_r$ *die durch:* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ *bestimmte homogene Gruppe, so stehen auch die neuen Funktionen* Φ *in Involutionsbeziehung zu* F.

Dieser Satz ist eine Konsequenz des vorangehenden in Verbindung mit dem Poisson-Jacobischen Theorem.

Satz 74. *Genügen alle gemeinsamen homogenen Lösungen* F *der Gleichungen:*

$$(\Phi_1 F) = 0, \ldots, (\Phi_q F) = 0$$

zugleich der Relation:

$$(\Pi F) = 0,$$

so gehört Π *der durch:* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ *bestimmten homogenen Gruppe:* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q, \ldots, \Phi_r$ *an.*

Denn die gemeinsamen homogenen Lösungen F der gegebenen q Gleichungen sind die homogenen Lösungen des vollständigen Systems:

$$(\Phi_1 F) = 0, \ldots, (\Phi_r F) = 0.$$

Es gibt $2n - r$ solche Lösungen $F_1, \ldots, F_{2n-r}$, welche eben die Polargruppe von $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ bilden. Also genügt Π den Gleichungen:

$$(\Pi F_1) = 0, \ldots, (\Pi F_{2n-r}) = 0,$$

das heißt, Π muß der Polargruppe von $F_1, \ldots, F_{2n-r}$ angehören. Diese Polargruppe ist aber eben: $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$.

Also haben wir den Satz:

Theorem XXIV. *Kennt man irgend* q *Lösungen:* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ *der Gleichung:*

$$(F\Phi) = 0,$$

in welcher F *eine homogene Funktion bezeichnet, und findet man durch irgend welche Operationen, die von der Form der homogenen Funktion* F

unabhängig sind, eine weitere Lösung Π, *so gehört* Π *der durch* $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ *bestimmten homogenen Gruppe an.*

Endlich könnte man eine entsprechende Theorie für den Fall entwickeln, daß F homogen von nullter Ordnung ist. Hierdurch würde man einige bemerkenswerte Resultate erhalten. Man würde nämlich a priori die Möglichkeit einiger Integrationsvereinfachungen einsehen, die ich in § 25 in anderer Weise erreicht habe.

55. Indem ich schließe, stelle ich ein allgemeines Problem: [303

Seien $H_1, \ldots, H_\alpha$ homogene Funktionen erster Dimension, die in solchen gegenseitigen Beziehungen stehen, daß sich jedes $(H_i H_k)$ als lineare Funktion der H, mit konstanten Koeffizienten, ausdrückt:

$$(H_i H_k) = \sum_\omega^{1 \ldots \alpha} C_\omega^{ik} H_\omega .$$

Alsdann sage ich, daß alle H eine **Transformationsgruppe** bilden, und betrachte dabei alle linearen Funktionen der H von der Form:

$$d_1 H_1 + d_2 H_2 + \cdots + d_\alpha H_\alpha$$

als mit den H selbst gleichberechtigt.

Ich frage nun nach den Eigenschaften einer gegebenen Transformationsgruppe, die bei homogenen Berührungstransformationen invariant bleiben.

Ich habe gefunden, daß es eine begrenzte Zahl Typen von Transformationsgruppen gibt. Es muß späteren Arbeiten vorbehalten werden, den präzisen Sinn, die Richtigkeit und Bedeutung dieser Behauptung darzulegen.

Christiania, 5. Juli 1874.

II.

Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. [245

Math. Ann. Bd. IX, Heft 2, S. 245—288, ausgeg. 21. 10. 1875, Heft 3, S. 289—296, ausgeg. 4. 1. 1876.

In der nachstehenden Abhandlung versuche ich eine systematische Darstellung meiner früheren Untersuchungen über die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die ich 1872 in einigen kurzen Mitteilungen an die Gesellschaften der Wissenschaften in Göttingen und Christiania skizzierte[1]), und welche ich neuerdings in zwei ausführlicheren Arbeiten in den Verhandlungen der letztgenannten Gesellschaft dargestellt habe (Christiania, 20. November 1874 und Februar 1875).[2])

Dabei setze ich nur einen von Cauchy bewiesenen Satz als bekannt voraus, daß nämlich jede lineare partielle Differentialgleichung 1. O. zwischen n unabhängigen Variabeln:

$$Af = X_1 \frac{df}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{df}{dx_n} = 0$$

$n-1$ von einander unabhängige Funktionen, die sogenannten Lösungen, bestimmt, welche $Af = 0$ identisch befriedigen. Im übrigen beweise ich alle früher bekannten Sätze, die zur Anwendung kommen. Insbesondere reproduziere ich in der Einleitung die Mayersche Begründung der von Jacobi und Clebsch herrührenden Theorie linearer partieller Differentialgleichungen 1. O., welche gemeinsame Lösungen besitzen.

Im ersten Abschnitte formuliere und erledige ich ein allgemeines Problem, welches das allgemeinste Problem, das man bis jetzt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. behandelt hat, als speziellen Fall umfaßt. Gleichzeitig erweitere ich die Fundamentalbegriffe dieser Theorie, insbesondere den Begriff: partielle Differentialgleichung 1. O., und den Begriff: vollständige Lösung.

1) Christiania 3. und 10. Mai 1872, Göttinger Nachr. 19. Juni, 30. Oktober 1872. [D. Ausg. Bd. III, Abh. I, II, III, IV.]

2) [D. Ausg. Bd. III, Abh. XII, XV.]

In dieser Weise erreiche ich eine Allgemeinheit und Einfachheit in dieser Theorie, die früher vollständig gefehlt hat. Dabei ist es sehr bemerkenswert, daß meine Auffassung des Integrationsproblems sich eigentlich im Grunde mit der alten Pfaffschen Theorie deckt; ich kann [246 sagen, daß ich nur die Pfaffsche Fragestellung, die von Cauchy und Jacobi, wie von deren Nachfolgern verlassen wurde, konsequent durchgeführt und gleichzeitig ihre wesentliche Berechtigung nachgewiesen habe.

Noch will ich zufügen, daß meine Begriffserweiterungen für einen Schüler Plückers sehr naheliegend sind; Plücker würde es [so] gemacht haben, wenn er sich überhaupt mit partiellen Differentialgleichungen 1. O. beschäftigt hätte. — Endlich hebe ich auch hervor, daß sich unter diese erweiterte Theorie die Theorie aller mechanischen Probleme, die sich durch kanonische Differentialgleichungen ausdrücken lassen, vollständig subsumiert; früher war dies, wie Mayer hervorgehoben hat, nicht immer der Fall.

Im zweiten Abschnitte gebe ich eine ausführliche Darstellung derjenigen neuen Integrationsmethode, die ich 1872 skizzierte, und welche hinterher Mayer — der übrigens gleichzeitig auf einem ganz anderen Wege entsprechende Vereinfachungen in der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. erreichte — zum Gegenstand mehrerer eleganter und präziser analytischer Abhandlungen gemacht hat.

Wenn ich die Veröffentlichung dieser Untersuchungen, die meinen übrigen Arbeiten auf diesem Gebiete zu Grunde liegen, so lange verschoben habe, so liegt das wesentlich an folgendem.

Ich fand diese Theorien ursprünglich durch synthetische Betrachtungen. Nun aber bemerkte ich bald, daß, so zweckmäßig die synthetische Methode für die Entdeckung ist, so schwierig ist es, eine klare Redaktion synthetischer Untersuchungen zu geben, die sich auf Gegenstände beziehen, welche bis jetzt fast nur analytisch behandelt worden sind. Nach langem Schwanken habe ich mich dazu entschlossen, eine halb synthetische, halb analytische Form zu benutzen. Möchte meine Arbeit dazu dienen, die Berechtigung der synthetischen Denkweise neben der analytischen Methode auch auf diesem Gebiete zur Anerkennung zu bringen!

Vollständige Systeme.

Mit Clebsch sage ich, daß q lineare partielle Differentialgleichungen zwischen n unabhängigen Variabeln:

$$A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0$$

ein vollständiges System bilden, wenn sie $n-q$ gemeinsame Lösungen besitzen. Der Vollständigkeit wegen reproduziere ich Mayers Darstellung dieser fundamentalen Theorie, die von Jacobi und Clebsch herrührt.[1])

Satz 1. *Die gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen:* [247

$$Af = X_1 \frac{df}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{df}{dx_n} = 0,$$

$$Bf = Y_1 \frac{df}{dx_1} + \cdots + Y_n \frac{df}{dx_n} = 0$$

genügen zugleich der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(AY_1 - BX_1)\frac{df}{dx_1} + \cdots + (AY_n - BX_n)\frac{df}{dx_n} = 0,$$

deren linke Seite auch in der Form: $A(B(f)) - B(A(f))$ *geschrieben werden kann.*

Eine jede Lösung von $Bf = 0$ gibt nämlich eo ipso: $A(B(f)) = 0$, und jede Lösung von $Af = 0$ gibt: $B(A(f)) = 0$. Die gemeinsamen Lösungen von $Bf = 0$ und $Af = 0$ erfüllen also die Gleichung:

$$A(B(f)) - B(A(f)) = 0,$$

die durch Ausführung die in unserem Satze angegebene Form annimmt.

Satz 2. *Gehen die beiden Gleichungen:* $Af = 0$, $Bf = 0$ *durch Einführung neuer unabhängiger Variabeln beziehungsweise in:* $A'f = 0$ *und* $B'f = 0$ *über, so nimmt der Ausdruck:* $A(B(f)) - B(A(f))$ *durch dieselbe Änderung der Variabeln die Form:* $A'(B'(f)) - B'(A'(f))$ *an.*

Sind [nämlich] $x_1, \ldots, x_n$ die ursprünglichen, $x_1', \ldots, x_n'$ die neuen unabhängigen Variabeln, so ist:

$$A'f = Ax_1' \frac{df}{dx_1'} + \cdots + Ax_n' \frac{df}{dx_n'},$$

$$B'f = Bx_1' \frac{df}{dx_1'} + \cdots + Bx_n' \frac{df}{dx_n'}$$

und:

$$A'(B'(f)) - B'(A'(f)) = \alpha_1 \frac{df}{dx_1'} + \cdots + \alpha_n \frac{df}{dx_n'},$$

wo:

$$\alpha_i = \sum_r^{1\ldots n}\left(Ax_r' \frac{d}{dx_r'} Bx_i' - Bx_r' \frac{d}{dx_r'} Ax_i'\right).$$

1) Auch Bour und Cayley haben zur Entwickelung dieser Theorie wesentlich beigetragen.

7*

Durch Ausführung kommt:

$$\alpha_i = \sum_{r,k}^{1\ldots n}\left(A x'_r \frac{d x'_i}{d x_k}\frac{d Y_k}{d x'_r} - B x'_r \frac{d x'_i}{d x_k}\frac{d X_k}{d x'_r}\right) +$$

$$+ \sum_{r,k}^{1\ldots n}\left(A x'_r . Y_k \frac{d}{d x'_r}\left(\frac{d x'_i}{d x_k}\right) - B x'_r . X_k \frac{d}{d x'_r}\left(\frac{d x'_i}{d x_k}\right)\right),$$

oder:

$$\alpha_i = \sum_k^{1\ldots n}(A Y_k - B X_k)\frac{d x'_i}{d x_k} + \sum_k^{1\ldots n}\left[Y_k . A\left(\frac{d x'_i}{d x_k}\right) - X_k . B\left(\frac{d x'_i}{d x_k}\right)\right],$$

oder endlich, da das letzte Glied rechts identisch verschwindet: [248

$$\alpha_i = \sum_k^{1\ldots n}(A Y_k - B X_k)\frac{d x'_i}{d x_k}.$$

Also finden wir:

$$A'(B'(f)) - B'(A'(f)) = \sum_{i,k}^{1\ldots n}(A Y_k - B X_k)\frac{d x'_i}{d x_k}\frac{d f}{d x'_i}.$$

Nun aber ist die rechte Seite dieser Gleichung eben der Ausdruck, in den sich: $A(B(f)) - B(A(f))$, das heißt:

$$\sum (A Y_k - B X_k)\frac{d f}{d x_k},$$

durch die Einführung der Variabeln $x'_1, \ldots, x'_n$ verwandelt. Also ist unser Satz erwiesen.

Satz 3. *Die gemeinsamen Lösungen von q Gleichungen:*

$$A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0,$$

welche paarweise in der Beziehung: $A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0$ stehen, lassen sich auch definieren als die gemeinsamen Lösungen von nur $q-1$ Gleichungen mit $n-1$ Variabeln:

$$A'_1 f = 0, \ldots, A'_{q-1} f = 0,$$

welche paarweise: $A'_i(A'_k(f)) - A'_k(A'_i(f)) = 0$ ergeben.

Zum Beweis bezeichnen wir $n-1$ unabhängige Lösungen von $A_q f = 0$ mit $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$ und führen sodann die Größen:

$$x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n,$$

die wir von einander unabhängig annehmen können, als neue Variabeln ein. Hierdurch nimmt $A_q f = 0$ die Form an:

$$A'_q f = X'_n \frac{d f}{d x_n} = 0,$$

und die $q-1$ übrigen Gleichungen beziehungsweise die Form:

$$B'_k f = X'_{k,1}\frac{d f}{d x'_1} + \cdots + X'_{k,n-1}\frac{d f}{d x'_{n-1}} + X'_k \frac{d f}{d x_n} = 0.$$

Da nun nach dem vorangehenden Satze:

$$A'_q(B'_k(f)) - B'_k(A'_q(f)) = 0$$

ist, so sind alle Größen $X'_{k,i}$ Funktionen von $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$ allein. Setzen wir daher:

$$A'_k f = X'_{k,1}\frac{d f}{d x'_1} + \cdots + X'_{k,n-1}\frac{d f}{d x'_{n-1}}$$

und nehmen f frei von x_n an, so wird:

$$A'_i(A'_k(f)) - A'_k(A'_i(f)) = B'_i(B'_k(f)) - B'_k(B'_i(f)),$$

und da hier die rechte Seite nach dem vorangehenden Satze gleich [249 Null ist, so verschwindet auch die linke Seite.

Andererseits ist klar, daß die Lösungen der $q-1$ Gleichungen: $A'_i f = 0$ zwischen $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$ eben die Lösungen der q Gleichungen: $A_i f = 0$ sind. Also ist unser Satz bewiesen.

Durch sukzessive Anwendung dieses Satzes erhalten wir folgendes Korollar:

Satz 4. *Die gemeinsamen Lösungen von q Gleichungen:*

$$A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0,$$

die paarweise: $A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0$ geben, lassen sich auch definieren als die Lösungen einer einzigen Gleichung zwischen $n-q+1$ Variabeln. Die q Gleichungen: $A_i f = 0$ haben also $n-q$ von einander unabhängige Lösungen.

Dieser Satz gehört Jacobi. Endlich hat Clebsch folgenden Satz gegeben:

Satz 5. *Stehen q von einander unabhängige Gleichungen:*

$$A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0$$

zwischen $x_1, \ldots, x_n$ paarweise in solcher Beziehung, daß jedes: $A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f))$ sich als Summe der $A_i f$, multipliziert mit gewissen Funktionen der x, ausdrücken läßt, so haben unsere q Gleichungen $n-q$ von einander unabhängige Lösungen.

Zum Beweis bemerken wir, daß q von einander unabhängige Gleichungen von der Form:

$$B_k f = \alpha_1^k A_1 f + \cdots + \alpha_q^k A_q f = 0 \qquad (k=1,\ldots,q)$$

wiederum in solcher Beziehung stehen, daß jedes: $B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f))$ sich linear durch die $B_k f$ ausdrückt. Hieraus schließen wir mit Mayer, daß die Auflösung der $A_i f = 0$ hinsichtlich q der Differentialquotienten, etwa $df : dx_1, \ldots, df : dx_q$ q Gleichungen ergibt:

$$C_k f = \frac{df}{dx_k} - \left(X_{q+1}^k \frac{df}{dx_{q+1}} + \cdots + X_n^k \frac{df}{dx_n}\right) = 0 \qquad (k = 1 \ldots q),$$

welche wiederum Relationen von der Form:

$$C_i(C_k(f)) - C_k(C_i(f)) = \beta_1 C_1 f + \cdots + \beta_q C_q f$$

ergeben. Nun aber findet man durch Ausführung, daß die linke Seite dieser Gleichung keine der Größen $df : dx_1, \ldots, df : dx_q$ enthält. Also sind alle β gleich Null. Nach dem vorangehenden Satze haben daher die Gleichungen $C_k f = 0$ $n - q$ gemeinsame Lösungen. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Die entwickelten Sätze genügen für das Folgende. Darum gehe ich [250
an diesem Orte nicht auf die von Mayer und mir herrührende einfache Integrationstheorie der vollständigen Systeme ein.

Abschnitt I.

Dieser Abschnitt ist im wesentlichen die Reproduktion einer Arbeit, die ich im November 1874 der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania vorgelegt habe.[1]) Die hier entwickelten Theorien skizzierte ich übrigens schon im Oktober 1872 in einer der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegten Note.[2])

§ 1. Erledigung eines Hilfsproblems.

1. Ich erledige zuerst ein Hilfsproblem, welches in genauestem Zusammenhange mit dem sogenannten Pfaffschen Probleme für eine ungerade Zahl der Variabeln steht. Dasselbe ist vielleicht früher von anderen gelöst worden; jedenfalls halte ich es für richtig, es ausführlich zu behandeln.

Hilfsproblem. *Man soll alle Gleichungssysteme von der Form:*

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

bestimmen, vermöge deren die Differentialrelation:

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch stattfindet.

1) [D. Ausg. Bd. III, Abh. XII.]
2) [D. Ausg. Bd. III, Abh. IV].

Die gesuchten Gleichungssysteme ordnen sich naturgemäß in zwei Kategorien, solche nämlich, die keine Relationen zwischen den x allein bestimmen, und solche, die dies tun, zwischen deren Gleichungen sich also alle p eliminieren lassen.

Ein System der ersten Art bestimmt offenbar auch keine Relation zwischen den Differentialen dx. Soll aber der Ausdruck $\Sigma p dx$ für alle Werte der Größen dx verschwinden, so müssen alle p gleich Null sein. Daher enthält jedes System der ersten Art die Gleichungen:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \ldots, p_n = 0,$$

und andererseits ist auch klar, daß es keine weiteren Gleichungen enthalten darf, denn sonst ließen sich die p eliminieren. Nun aber fassen wir im folgenden die p als Verhältnisgrößen auf und können daher von dem gefundenen Systeme als einem uneigentlichen absehen.

Also brauchen wir uns nur mit dem Falle zu beschäftigen, daß sich die p zwischen den Gleichungen des Systems eliminieren lassen. Die in dieser Weise gefundenen Relationen zwischen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren Anzahl q sein mag, können immer hinsichtlich q unter den x, etwa $x_1, x_2, \ldots, x_q$ aufgelöst werden; hierdurch nehmen sie die Form an:

$$(1) \qquad x_k = f_k(x_{q+1}, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q), \qquad [251$$

und durch Differentiation findet man q Relationen zwischen den dx:

$$dx_k = \sum_i^{q+1 \ldots n} \frac{df_k}{dx_i} dx_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

welche den Ausdruck $\Sigma p dx$ auf die Form:

$$\sum_i^{q+1 \ldots n} \left(p_1 \frac{df_1}{dx_i} + p_2 \frac{df_2}{dx_i} + \cdots + p_q \frac{df_q}{dx_i} + p_i\right) dx_i$$

reduzieren. Hier sind nun alle zurückgebliebenen dx von einander unabhängig, und daher müssen für $i = q + 1, \ldots, n$ folgende Relationen bestehen:

$$(2) \qquad p_1 \frac{df_1}{dx_i} + p_2 \frac{df_2}{dx_i} + \cdots + p_q \frac{df_q}{dx_i} + p_i = 0.$$

Also enthält jedes Gleichungssystem, welches $\Sigma p dx = 0$ identisch befriedigt, n Gleichungen von der Form (1) und (2).

Umgekehrt ist einleuchtend, daß diese Gleichungen an und für sich den Ausdruck $\Sigma p dx$ identisch verschwinden lassen. Enthält daher unser Gleichungssystem noch weitere Gleichungen, so sind dieselben nur der Beschränkung unterworfen, mit dem Systeme (1), (2) algebraisch vereinbar zu sein.

Das gefundene Resultat kann eine elegante Form erhalten. Setzen wir nämlich:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_q p_q = f_1 p_1 + \cdots + f_q p_q = H,$$

so nehmen die Gleichungen (1) und (2) die Form an:

$$x_k = \frac{dH}{dp_k}, \qquad p_i = -\frac{dH}{dx_i},$$

wo k sukzessive die Werte $1, 2, \ldots, q$ und i die Werte $q+1, \ldots, n$ zu durchlaufen hat.

Es ist übrigens leicht, ein scheinbar noch allgemeineres Gleichungssystem anzugeben, das $\Sigma\, p\,dx$ identisch verschwinden läßt. Man setze nämlich:

$$x_k = \frac{dH}{dp_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, q), \qquad p_i = -\frac{dH}{dx_i} \quad (i = q+1, \ldots, n),$$

vorausgesetzt, daß H irgend eine hinsichtlich $p_1, p_2, \ldots, p_q$ homogene Funktion 1. O. von $p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n$ bezeichnet. Unsere Gleichungen ergeben nämlich:

$$\sum p\,dx = \sum_k^{1\ldots q} p_k \,.\, d\frac{dH}{dp_k} - \sum_i^{q+1\ldots n} \frac{dH}{dx_i}\,dx_i.$$

Nun ist H homogen von 1. O. hinsichtlich $p_1, \ldots, p_q$, das heißt: [252

$$\sum_i^{1\ldots q} p_k \frac{dH}{dp_k} - H = 0,$$

woraus durch totale Differentiation:

$$\sum_k^{1\ldots q} p_k \,.\, d\frac{dH}{dp_k} + \sum_k^{1\ldots q} \frac{dH}{dp_k}\,dp_k - dH = 0.$$

Mit Benutzung dieser Gleichung finden wir:

$$\sum p\,dx = -\sum_k^{1\ldots q} \frac{dH}{dp_k}\,dp_k - \sum_i^{q+1\ldots n} \frac{dH}{dx_i}\,dx_i + dH,$$

oder:

$$\Sigma\, p\,dx = -dH + dH = 0,$$

womit meine Behauptung erwiesen ist.

Zugefügt soll nur sein, daß unsere n Gleichungen, die $\Sigma\, p\,dx$ identisch verschwinden lassen, nach dem Theoreme der homogenen Funktionen die charakteristische Gleichung:

$$x_1 p_1 + \cdots + x_q p_q = H,$$

die allein das n-gliedrige System definiert, nach sich ziehen.

Wir fassen das Vorangehende folgendermaßen zusammen:

Theorem 1. *Faßt man $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als Verhältnisgrößen auf, so enthält jedes System von Gleichungen zwischen $p_1, \ldots, p_n$, $x_1, \ldots, x_n$, welches die Differentialrelation:*

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch befriedigt, n Gleichungen von der Form:

$$x_k = \frac{dH}{dp_k} \quad (k = a, b, \ldots, l),$$

$$p_i = -\frac{dH}{dx_i} \quad (i = m, n, \ldots, t),$$

welche an und für sich den Ausdruck $\Sigma\, pdx$ verschwinden lassen. Hier bezeichnen: $a, b, \ldots, l, m, n, \ldots, t$ eine Permutation der Zahlen: $1, 2, \ldots, n$, und H ist irgend eine Funktion von $p_a, \ldots, p_l, x_m, \ldots, x_t$, die hinsichtlich der p homogen von erster Ordnung ist.

Unsere n Gleichungen können im allgemeinen auf mehrere Weisen die aufgestellte kanonische Form erhalten. Insbesondere kann man immer erreichen, daß H eine lineare Funktion der p ist.

2. Um die Sprache zu erleichtern, werden wir die Terminologie der Mannigfaltigkeitslehre anwenden, und gleichzeitig ein neues Symbol einführen, welches wir sogleich definieren.

Da wir die Größen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als Verhältnisgrößen auffassen und [253 also zwei Wertsysteme: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ und: $x'_1, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_n$ als äquivalent betrachten, wenn:

$$x_i = x'_i, \quad p_i : p_k = p'_i : p'_k$$

ist, so müssen wir sagen, daß es ∞^{2n-1} und nicht ∞^{2n} Wertsysteme x, p gibt. Stellen wir nun etwa m Gleichungen zwischen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ fest, so bestimmen wir ∞^{2n-1-m}, oder sagen wir ∞^k Wertsysteme x, p. Den Inbegriff derselben bezeichnen wir, wenn die betreffenden m Gleichungen $\Sigma\, pdx$ verschwinden lassen, mit dem Symbole:

$$M_k.$$

Nach dem Vorangehenden kann k höchstens gleich $n-1$ sein.

Wir gehen dazu über, die Entwickelungen der vorangehenden Nummer zu interpretieren. Dabei wird es bequem sein, sich vorläufig auf den Fall $n = 3$ zu beschränken.

Fassen wir x_1, x_2, x_3 als Cartesische Punktkoordinaten auf, und p_1, p_2, p_3 als Verhältnisgrößen, welche die Lage einer durch den Punkt x_1, x_2, x_3 hindurchgehenden Ebene:

$$p_1(x_1' - x_1) + p_2(x_2' - x_2) + p_3(x_3' - x_3) = 0$$

bestimmen, so können wir x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3 als Koordinaten eines Flächenelements betrachten. Dabei fassen wir, können wir sagen, jedes Flächenelement als den Inbegriff eines Punktes und einer hindurchgehenden Ebene auf.

Bei dieser Interpretation sagt die Gleichung:

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 = 0$$

aus, daß die Ebene des Flächenelements $(x_1, \ldots, p_3)$ den Punkt des benachbarten Elements $(x_1 + dx_1, \ldots, p_3 + dp_3)$ enthält. Findet diese Relation statt, so sagen wir der Kürze wegen, daß unsere beiden benachbarten Elemente vereinigt liegen. Mit Anwendung dieses Ausdrucks können wir unser allgemeines Problem für den Fall $n = 3$ folgendermaßen aussprechen:

Man soll aus den Flächenelementen des Raumes auf alle möglichen Weisen zweifach unendliche Scharen aussuchen, derart, daß jedes Element mit allen benachbarten Elementen derselben Schar vereinigt liegt.

Um die gefundene Lösung dieses Problems interpretieren zu können, bemerken wir folgendes: Nehmen wir irgend eine Fläche, so bestimmt ihre Gleichung:

$$x_1 = f_1(x_2, x_3)$$

zusammen mit den beiden Relationen:

$$p_2 + p_1 \frac{df_1}{dx_2} = 0, \qquad p_3 + p_1 \frac{df_1}{dx_3} = 0$$

alle Flächenelemente, welche die Fläche bedecken. Nehmen wir [254
andererseits eine Kurve, so bestimmen ihre Gleichungen:

$$x_1 = f_1(x_3), \qquad x_2 = f_2(x_3),$$

zusammen mit:

$$p_3 + p_1 \frac{df_1}{dx_3} + p_2 \frac{df_2}{dx_3} = 0,$$

alle Flächenelemente, welche die Kurve umhüllen. Endlich kann man die Gleichungen eines Punktes:

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3$$

auch als analytische Definition aller durch diesen Punkt hindurchgehenden Elemente auffassen.

Vergleichen wir nun dies mit Theorem 1, so sehen wir, daß die Elemente, welche eine Fläche bedecken, eine Kurve umhüllen oder durch einen Punkt gehen, Scharen mit der verlangten Eigenschaft bilden, und daß es keine weiteren solchen Scharen gibt.

Um die allgemeine Theorie in entsprechender Weise interpretieren zu können, fassen wir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Punktkoordinaten eines n-fach ausgedehnten Raumes auf, ferner $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als Verhältnisgrößen, welche die Lage einer durch den Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hindurchgehenden ebenen Mannigfaltigkeit:

$$p_1(x_1' - x_1) + p_2(x_2' - x_2) + \cdots + p_n(x_n' - x_n) = 0$$

bestimmen. Wir bezeichnen den Inbegriff des Punktes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und der hindurchgehenden ebenen Mannigfaltigkeit als ein Element, und betrachten die Größen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ als Elementkoordinaten. Die Gleichung:

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

sagt dann aus, daß die Ebene des Elements: $x_1, \ldots, p_n$ den Punkt des benachbarten Elements: $x_1 + dx_1, \ldots, p_n + dp_n$ enthält, oder, wie ich der Kürze wegen mich ausdrücken werde, daß diese beiden Elemente vereinigt liegen. Und unser allgemeines Problem kommt darauf hinaus, aus den ∞^{2n-1} Elementen $x_1, \ldots, p_n$ auf alle möglichen Weisen $(n-1)$-fach unendliche Scharen auszusuchen, derart, daß jedes Element mit allen benachbarten Elementen derselben Schar vereinigt liegt.

Um die schon gegebene Lösung dieses Problems zu interpretieren, bemerken wir, daß die Elemente, die sich an eine $(n-q)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit:

$$x_k = f_k(x_{q+1}, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

anschließen, durch die eben geschriebenen q Gleichungen zusammen mit den $n - q$ folgenden:

$$p_1 \frac{df_1}{dx_i} + p_2 \frac{df_2}{dx_i} + \cdots + p_q \frac{df_q}{dx_i} + p_i = 0 \qquad (i = q+1, \ldots, n)$$

bestimmt sind.

Es ist also möglich, die ∞^{2n-1} Elemente eines n-fach [255
ausgedehnten Raumes in $(n-1)$-fach unendliche Scharen zusammenzufassen, derart, daß jedes Element mit allen benachbarten Elementen derselben Schar vereinigt liegt. Solche Scharen werden von allen Elementen gebildet, die sich an irgend eine q-fach ausgedehnte Punktmannigfaltig-

keit anschließen, und andere derartige Scharen gibt es nicht.

Die Elementmannigfaltigkeiten M_{n-1} ordnen sich hiernach in n Kategorien nach dem Werte der Zahl q, oder, was auf dasselbe hinauskommt, nach der Dimension der zugehörigen Punktmannigfaltigkeit. Ich benutze das Symbol:

$$M^k_{n-1},$$

um eine Elementmannigfaltigkeit M_{n-1} zu bezeichnen, die sich an eine k-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit anschließt. Dementsprechend bezeichne ich zuweilen mit:

$$M^k_i$$

den Inbegriff von ∞^i vereinigt liegenden Elementen, die sich an eine k-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit anschließen.

§ 2. Formulierung eines allgemeinen Problems.

3. Nun können wir unser allgemeines Problem formulieren. Dasselbe umfaßt als speziellen Fall das allgemeinste Problem, welches man bis jetzt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen [erster Ordnung] behandelt hat.

Problem. *Vorgelegt seien q Gleichungen von der Form:*

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

die hinsichtlich der p von nullter Ordnung sind. Man soll in allgemeinster Weise $n - q$ weitere Gleichungen finden, welche zusammen mit den gegebenen die Differentialrelation:

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch befriedigen.

Unser Problem kommt darauf hinaus, alle M_{n-1} zu finden, deren Elemente q gegebene Relationen zwischen den Elementkoordinaten befriedigen. Nennen wir solche Mannigfaltigkeiten Integral-M_{n-1} der betreffenden Gleichungen, so können wir unser Problem folgendermaßen aussprechen:

Man soll alle Integral-M_{n-1} von q gegebenen Gleichungen zwischen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ bestimmen.

Früher stellte man die Forderung, daß die gesuchten Mannig- [256 faltigkeiten auch als Punktgebilde $(n-1)$-fach ausgedehnt seien; man suchte alle Integral-M^{n-1}_{n-1} der vorgelegten Gleichungen.

Es gibt einen ausgezeichneten Fall, in dem sich unser Problem durch ausführbare Operationen, das heißt, Differentiationen und Eliminationen erledigen läßt.

Enthalten nämlich unsere Gleichungen nur die x:

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

so findet man nach den Entwickelungen des ersten Paragraphen die allgemeinste Integral-M_{n-1} dieses Gleichungssystems, indem man weitere Gleichungen zwischen den x zufügt und das erhaltene System hinsichtlich $q + m$ unter den x etwa $x_1, x_2, \ldots, x_{q+m}$ auflöst:

$$x_k = \varphi_k(x_{q+m+1}, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, q + m)$$

und endlich die bekannten Gleichungen:

$$p_i + \sum \frac{d\varphi_k}{dx_i} p_k = 0 \qquad (i = q + m + 1, \ldots, n)$$

zufügt. Diese n Gleichungen bestimmen die allgemeinste gemeinsame Integral-M_{n-1} der vorgelegten Gleichungen. Wir können uns deshalb im folgenden auf den Fall beschränken, daß jedenfalls eine der vorgelegten Gleichungen eine oder mehrere Größen p enthält.

4. Im allgemeinen verlangt die Erledigung unseres Problems gewisse Integrationsoperationen. Ehe wir dasselbe angreifen, werden wir ein Hilfsproblem, welches nur ausführbare Operationen verlangt, erledigen. Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall dieses Hilfsproblems.

Hilfsproblem 1. *Vorgelegt sei eine Gleichung: $F = 0$ zwischen $x_1, \ldots, p_n$. Man bestimme alle Integral-M_{n-2} derselben.*[1]

Man nehme irgend eine M_{n-1}. Ist sie zufälligerweise eine Integral-M_{n-1} von $F = 0$, so unterwerfe man ihre Elemente irgend einer neuen Relation; die in dieser Weise gefundenen ∞^{n-2} Elemente bilden offenbar eine Integral-M_{n-2}. Ist dagegen die gewählte M_{n-1} keine Integral-M_{n-1}, so erzeugen alle Elemente derselben, deren Koordinaten $F = 0$ befriedigen, eine Integral-M_{n-2} dieser Gleichung. Es ist selbstverständlich, daß in dieser Weise alle Integral-M_{n-2} von $F = 0$ erhalten werden können.

Hilfsproblem 2. *Vorgelegt seien q Gleichungen zwischen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Man bestimme ihre gemeinsamen Integral-M_{n-q-1}.*

Um dieses Problem, auf welches wir später unser Hauptproblem [257 zurückführen, zu erledigen, nehmen wir wiederum irgend eine M_{n-1}.

1) Wir setzen hier und im folgenden immer voraus, daß die zur Betrachtung kommenden Gleichungen: $F(x_1, \ldots, p_n) = 0$ hinsichtlich der p homogen sind.

Wenn ich im folgenden sage, daß eine Funktion der x und p von nullter oder erster Ordnung ist, so heißt dies immer hinsichtlich der Größen p.

Unter den Elementen derselben gibt es jedenfalls ∞^{n-q-1} und unter Umständen noch mehr, etwa ∞^{n-q+k}, deren Koordinaten den q vorgelegten Gleichungen genügen. Wählen wir unter ihnen nach arbiträrem Gesetze ∞^{n-q-1}, so bilden diese Elemente immer eine gemeinsame Integral-M_{n-q-1} der q Gleichungen; und es ist klar, daß alle Integral-M_{n-q-1} in dieser Weise erhalten werden können.

§ 3. Ein Fundamentalsatz.

5. Jacobi hat bekanntlich bewiesen, daß n Funktionen nullter Ordnung $F_1, F_2, \ldots, F_n$ von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, die in solcher gegenseitiger Beziehung stehen, daß die Elimination der p zwischen den Gleichungen:

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ldots, F_n = a_n$$

eine vollständige Lösung jeder Gleichung: $F_i = a_i$ gibt, die Bedingungsgleichung:

$$\sum_a^{1\ldots n}\left(\frac{dF_i}{dp_a}\frac{dF_k}{dx_a} - \frac{dF_i}{dx_a}\frac{dF_k}{dp_a}\right) = 0,$$

die wir in der gewöhnlichen Form:

$$(F_i F_k) = 0$$

schreiben, befriedigen.

Dieser Satz ist einer wichtigen von mir herrührenden Verallgemeinerung fähig, die ich sogleich geben werde. Zuerst ein Hilfssatz:

Satz 6. *Befriedigen die Funktionen:* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, F_1, F_2, \ldots, F_n$ *die Bedingungsgleichung:*

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

so bestehen die Relationen:

$$(F_i F_k) = (\Phi_i F_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i F_i) = 1.$$

Ich reproduziere Mayers Beweis dieses Satzes, den ich aus der Clebschschen Theorie des Pfaffschen Problems abgeleitet hatte. (Math. Annalen Bd. VIII, S. 215ff., Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 3. Mai 1872, 21. März 1873.)[1]

Unsere Bedingungsgleichung löst sich in die $2n$ folgenden auf:

$$\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_k} = p_k, \qquad \sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_k} = 0,$$

1) [D. Ausg. Bd. IV, Abh. I, S. 1ff.; Bd. III, Abh. 1, S. 1; Abh. VIII, S. 65.]

woraus durch Differentiation, indem wir die x und p als von einander [258
unabhängig auffassen:

$$\frac{d}{dx_h}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d}{dx_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_h} = 0,$$

$$\frac{d}{dp_h}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d}{dx_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_h} = 0,$$

$$\frac{d}{dp_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d}{dx_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_k} = 1,$$

$$\frac{d}{dp_h}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_k} - \frac{d}{dp_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_h} = 0,$$

und durch Ausführung:

$$\sum_i^{1\ldots n}\left(\frac{d\Phi_i}{dx_h}\frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d\Phi_i}{dx_k}\frac{dF_i}{dx_h}\right) = 0, \quad \sum_i^{1\ldots n}\left(\frac{d\Phi_i}{dp_h}\frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d\Phi_i}{dx_k}\frac{dF_i}{dp_h}\right) = 0,$$

$$\sum_i^{1\ldots n}\left(\frac{d\Phi_i}{dp_k}\frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d\Phi_i}{dx_k}\frac{dF_i}{dp_k}\right) = 1, \quad \sum_i^{1\ldots n}\left(\frac{d\Phi_i}{dp_h}\frac{dF_i}{dp_k} - \frac{d\Phi_i}{dp_k}\frac{dF_i}{dp_h}\right) = 0.$$

Diese Relationen zeigen, daß die Gleichungen:

$$u_i = \sum_k^{1\ldots n}\left(\frac{dF_i}{dx_k} y_k + \frac{dF_i}{dp_k} z_k\right), \quad v_i = \sum_k^{1\ldots n}\left(\frac{d\Phi_i}{dx_k} y_k + \frac{d\Phi_i}{dp_k} z_k\right)$$

die $2n$ folgenden nach sich ziehen:

$$\sum_i^{1\ldots n}\left(u_i \frac{d\Phi_i}{dp_h} - v_i \frac{dF_i}{dp_h}\right) = y_h, \quad \sum_i^{1\ldots n}\left(u_i \frac{d\Phi_i}{dx_h} - v_i \frac{dF_i}{dx_h}\right) = -z_h.$$

Setzen wir diese Werte der y und z in die vorangehenden Gleichungen ein, so müssen Identitäten herauskommen. In dieser Weise finden wir, daß:

$$(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i F_i) = 1$$

ist, wie behauptet wurde.

Theorem 2. *Sind* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *solche Funktionen nullter* [259
Ordnung von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$*, daß die Gleichungen:*

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ldots, F_n = a_n$$

für alle Werte der Parameter a Elementmannigfaltigkeiten M_{n-1} *bestimmen, so stehen die F paarweise in der Beziehung:*

$$(F_i F_k) = 0.$$

Nach unserer Voraussetzung sollen [nämlich] die Gleichungen:

$$F_1 = a_1, \ldots, F_n = a_n$$

zusammen mit den daraus folgenden Differentialgleichungen:

$$dF_1 = 0, \ldots, dF_n = 0$$

den Ausdruck:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

identisch verschwinden lassen, und zwar für alle möglichen Werte der Größen a. Dies heißt aber, daß es solche Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ gibt, daß eine Identität von der Form:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

besteht. Also ist unsere Behauptung mit Berücksichtigung des vorangehenden Satzes erwiesen.

Satz 7. *Die n Gleichungen: $F_k = a_k$ bestimmen, welche Werte man auch den a beilegt, nie mehr als ∞^{n-1} Elemente.*

Denn eine Schar von vereinigt liegenden Elementen enthält nie mehr als ∞^{n-1} Elemente.

6. Definition. *Bestimmen die Gleichungen:*

$$F_1 = a_1, \ldots, F_n = a_n,$$

wie in den vorangehenden Sätzen, ∞^n Mannigfaltigkeiten M_{n-1}, so nenne ich den Inbegriff solcher M_{n-1}, die einem bestimmten Werte a_1^0 des Parameters a_1 entsprechen, eine vollständige Lösung der Gleichung: $F_1 = a_1^0$.

Nach den Entwickelungen des ersten Paragraphen können unsere n Gleichungen immer die folgende kanonische Form erhalten:

$$x_a p_a + \cdots + x_l p_l = H(p_a, \ldots, p_l, x_m, \ldots, x_t, a_1 \ldots, a_n),$$

$$x_i = \frac{dH}{dp_i}\,{\scriptstyle (i = a, \ldots, l)}, \quad p_k = -\frac{dH}{dx_k}\,{\scriptstyle (k = m, \ldots, t)}.$$

Hier ist: $a, \ldots, l, m, \ldots, t$ eine Permutation der Zahlen: $1, \ldots, n$.

In dem folgenden Paragraphen beweisen wir, daß jede Gleichung:

$$F_1 = a_1$$

vollständige Lösungen besitzt. Hier begnügen wir uns damit, nochmals hervorzuheben, daß, wenn $F_1 = a_1$ eine vollständige Lösung besitzt:

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ldots, F_n = a_n,$$

daß dann jede Funktion F_i eine Lösung der Gleichung:

$$(F_1 F) = 0$$

ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein Integral des simultanen [260
Systems:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} dx_1 : \cdots : dx_n : \quad dp_1 : \cdots : \quad dp_n = \\ = \dfrac{dF_1}{dp_1} : \cdots : \dfrac{dF_1}{dp_n} : -\dfrac{dF_1}{dx_1} : \cdots : -\dfrac{dF_1}{dx_n} \end{cases}$$

ist.

Zu bemerken ist, daß sich aus diesem simultanen Systeme ein neues System zwischen den Variabeln:

$$x_1, \ldots, x_n, \; p_1 : p_n, \; \ldots, \; p_{n-1} : p_n$$

herleiten läßt:

$$\frac{dx_1}{p_n \dfrac{dF_1}{dp_1}} = \frac{dx_2}{p_n \dfrac{dF_1}{dp_2}} = \cdots = \frac{d\left(\dfrac{p_1}{p_n}\right)}{\dfrac{p_1}{p_n}\dfrac{dF_1}{dx_n} - \dfrac{dF_1}{dx_1}} = \cdots,$$

daß daher unter den $2n - 1$ Integralen des ersten Systems $2n - 2$ von nullter Ordnung sind. Ein solches ist insbesondere F_1 selbst.

Bezeichnen wir die übrigen Integrale nullter Ordnung mit: $\Pi_1, \ldots, \Pi_{2n-3}$ und mit: $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-3}$ Parameter, so fassen die Gleichungen: $\Pi_k = \alpha_k$ die Elemente der Gleichung: $F_1 = a_1$ in ∞^{2n-3} Scharen zusammen, deren jede ∞^1 Elemente enthält. Also:

Satz 8. Die ∞^{2n-2} *Elemente der Gleichung: $F_1 = a_1$ werden durch das simultane System* (A) *in ∞^{2n-3} Scharen, jede bestehend aus ∞^1 Elementen, zusammengefaßt. Diese Elementscharen nennen wir die charakteristischen Streifen der Gleichung: $F_1 = a_1$.*

Zu bemerken ist ferner, daß der Ausdruck $\Sigma\, p\, dx$ bei Einsetzung der Werte der dx vermöge des simultanen Systems (A) die Form:

$$p_1 \frac{dF_1}{dp_1} + \cdots + p_n \frac{dF_1}{dp_n}$$

annimmt und somit identisch verschwindet. Also:

Satz 9. *Zwei benachbarte Elemente eines charakteristischen Streifens liegen vereinigt.*

Endlich sprechen wir den Satz, daß die Funktionen einer vollständigen Lösung:

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ldots, F_n = a_n$$

der Gleichung: $F_1 = a_1$ sämtlich die Relation:

$$(F_1 F) = 0$$

befriedigen, synthetisch aus:

Satz 10. *Lassen sich die Elemente einer Gleichung: $F = a$ in ∞^{n-1} Integral-M_{n-1} zusammenfassen, so ist jede solche M_{n-1} von charakteristischen Streifen erzeugt.*

§ 4. Jede Gleichung besitzt vollständige Lösungen. [261

7. Ich werde jetzt zeigen, daß sich die Elemente einer Gleichung:

$$F(x_1, \ldots, x_n, p_1 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n) = a$$

immer zu $(n-1)$-fach unendlich vielen M_{n-1} zusammenfassen lassen, oder, anders ausgesprochen, daß die Gleichung: $F = a$ immer vollständige Lösungen besitzt.

Hierzu brauchen wir folgenden wichtigen Satz:

Satz 11. *Enthalten zwei benachbarte charakteristische Streifen der Gleichung: $F = a$ zwei Elemente, die vereinigt liegen, so stehen alle benachbarten Elemente dieser Streifen in derselben Beziehung.*[1])

Zum Beweise nehmen wir unter den ∞^{2n-3} charakteristischen Streifen der Gleichung: $F = a$ nach einem arbiträren Gesetze einfach unendlich viele, die jedoch eine kontinuierliche Schar bilden sollen. Sei t ein Parameter, dessen verschiedene Werte den verschiedenen Streifen unserer Schar entsprechen; sei ferner τ ein Parameter, dessen verschiedene Werte den verschiedenen Elementen eines Streifens entsprechen. Geben wir also zuerst t und sodann τ bestimmte Werte, so heißt dies, daß wir unter den ∞^1 Streifen unserer Schar einen bestimmten wählen und darnach unter den Elementen dieses Streifens ein bestimmtes aussuchen.

Wir nehmen die beiden Elemente, welche beziehungsweise den Parametern t, τ und $t + \Delta t,\ \tau + \Delta\tau$ entsprechen:

$$x_1, \ldots, p_n \quad \text{und:} \quad x_1 + \frac{dx_1}{dt}\Delta t + \frac{dx_1}{d\tau}\Delta\tau, \ldots,$$

und bilden für sie die Funktion:

$$\sum p_k dx_k = \sum p_k \left(\frac{dx_k}{dt}\Delta t + \frac{dx_k}{d\tau}\Delta\tau\right).$$

Nun ist nach unserer Voraussetzung:

$$\sum p_k \frac{dx_k}{d\tau}\Delta\tau = 0,$$

also kommt:

$$\sum p_k dx_k = \Delta t \sum p_k \frac{dx_k}{dt},$$

1) Dieser Satz steht im genauesten Zusammenhange mit dem Pfaffschen Fundamentalsatze, daß jeder $2n$-gliedrige Ausdruck: $X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$ auf eine $(2n-1)$-gliedrige Form gebracht werden kann.

das heißt, es besteht eine Gleichung von der Form:

$$\sum p_k dx_k = \Delta t \,.\, f(t, \tau).$$

Wir haben zu zeigen, daß f nur von t abhängt; darauf kommt in [262 der Tat unser Satz hinaus.

Es ist:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\sum p_k \frac{dx_k}{dt},$$

und es handelt sich somit darum, nachzuweisen, daß der Ausdruck rechts verschwindet. Wir finden:

$$\frac{df}{d\tau} = \sum\left(\frac{dp_k}{d\tau}\frac{dx_k}{dt} + p_k \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx_k}{dt}\right)\right),$$

oder:

$$\frac{df}{d\tau} = \sum\left(\frac{dp_k}{d\tau}\frac{dx_k}{dt} + p_k \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_k}{d\tau}\right)\right).$$

Nun aber können wir setzen:

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \frac{dF}{dp_k}, \qquad \frac{dp_k}{d\tau} = -\frac{dF}{dx_k},$$

also kommt:

$$\frac{df}{d\tau} = \sum\left(-\frac{dF}{dx_k}\frac{dx_k}{dt} + p_k \frac{d}{dt}\left(\frac{dF}{dp_k}\right)\right),$$

woraus mit Benutzung der Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\sum p_k \frac{dF}{dp_k} = 0 = \sum\left(\frac{dp_k}{dt}\frac{dF}{dp_k} + p_k \frac{d}{dt}\left(\frac{dF}{dp_k}\right)\right)$$

folgt:

$$\frac{df}{d\tau} = -\sum\left(\frac{dF}{dx_k}\frac{dx_k}{dt} + \frac{dF}{dp_k}\frac{dp_k}{dt}\right) = -\frac{dF}{dt} = 0.$$

Hiermit ist nach dem Vorangehenden die Richtigkeit unseres Satzes nachgewiesen.

8. Dieser Satz erlaubt, beliebig viele Integral-M_{n-1} von $F = a$ zu konstruieren, nachdem wir das simultane System der charakteristischen Streifen:

$$dx_1 : \cdots : dp_n = \frac{dF}{dp_1} : \cdots : -\frac{dF}{dx_n}$$

integriert haben.

Man nehme in der Tat eine beliebige Integral-M_{n-2} von $F = a$; untersuche sodann, ob diese M_{n-2} von charakteristischen Streifen erzeugt ist. Ist dies nicht der Fall, so lege man durch alle Elemente der M_{n-2} die hindurchgehenden charakteristischen Streifen. Diese Streifen erzeugen nach dem vorangehenden Satze eine Integral-M_{n-1}.[1]) — Und es ist klar, daß alle Integral-M_{n-1} von $F = a$, die von charakteristischen Streifen erzeugt sind, in dieser Weise konstruiert werden können.

Wünscht man insbesondere, Integral-M_{n-1} zu konstruieren, die [263 auch als Punktgebilde $(n-1)$-fach ausgedehnt sind, welche also durch Gleichungen von der Form:

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \text{Const.}, \quad p_k = \frac{dW}{dx_k} \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

definiert sind, so ist zunächst klar, daß solche Integral-M_{n-1} nur dann existieren, wenn die Charakteristiken einfach ausgedehnte Punktgebilde sind[2]); dies ist immer der Fall, wenn F eine, und infolgedessen zwei Größen p enthält. Nimmt man in diesem Falle eine beliebige Integral-M_{n-2}, die, als Punktgebilde aufgefaßt, $(n-2)$-fach ausgedehnt ist, und die nicht von Charakteristiken erzeugt ist, so ist klar, daß alle charakteristischen Streifen, die durch die Elemente dieser M_{n-2} hindurchgehen, eine Integral-M_{n-1}^{n-1} erzeugen. Und in dieser Weise können offenbar alle Integral-M_{n-1}^{n-1}, die von charakteristischen Streifen erzeugt sind, erhalten werden; dies folgt aus der evidenten Bemerkung, daß jede M_{n-1}^{n-1} eine M_{n-2}^{n-2} enthält.

Aus dem Obenstehenden folgt:

Theorem 3. *Die Elemente der Gleichung: $F = a$ können immer zu ∞^{n-1} Integral-M_{n-1} zusammengefaßt werden; das heißt, unsere Gleichung besitzt vollständige Lösungen.*

Oder analytisch ausgesprochen:

Zu einer gegebenen Funktion F_1 nullter Ordnung lassen sich immer weitere Funktionen: $F_2, \ldots, F_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$, beziehungsweise nullter und erster Ordnung, bestimmen derart, daß die Gleichung:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

identisch besteht.

Da nämlich $F = a$ nur ∞^{2n-3} charakteristische Streifen besitzt, so ist klar, daß es solche Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$ gibt, daß die Elemente, die den beiden Gleichungen:

$$F = a, \quad f = 0$$

1) Dieser Schluß ist richtig, wenn durch jedes Element der gegebenen M_{n-2} nur ein charakteristischer Streifen hindurchgeht (oder einige), was offenbar im allgemeinen der Fall ist.

2) Hat $F = a$ die Form: $F(x_1, \ldots, x_n) = a$, so gehen alle Elemente eines charakteristischen Streifens durch einen gemeinsamen Punkt; alsdann gibt es nur eine Integral-M_{n-1}^{n-1}, nämlich $F = a$ selbst, die $(n-1)$-fach ausgedehnt ist.

genügen, sich nicht zu charakteristischen Streifen zusammenfassen lassen. Folglich erzeugen die durch einen auf der Mannigfaltigkeit $f = 0$ gelegenen Punkt von allgemeiner Lage:

$$x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$$

gehenden Charakteristiken eine Integral-M_{n-1} von $F = a$. Und der Inbegriff aller dieser M_{n-1} ist eine vollständige Lösung, insofern jeder charakteristische Streifen jedenfalls durch einen Punkt der Mannigfaltig- [264 keit $f = 0$ hindurchgeht.

Dieser Beweis für die allgemeine Existenz der vollständigen Lösungen ist dem Wesen der Sache nach stringent. Ich werde andeuten, wie man ihn rein analytisch führen könnte.

Man könnte zuerst beweisen, daß $2n$ Funktionen:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, F_1, F_2, \ldots, F_n,$$

die den folgenden Relationen genügen:

$$(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i F_i) = 1,$$

immer die Gleichung:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

befriedigen, dabei vorausgesetzt, daß die Größen F und Φ beziehungsweise von nullter und erster Ordnung sind. Den Beweis für die Richtigkeit dieses von mir herrührenden Satzes führt man am besten, wie Mayer es getan hat.

Sodann wäre es notwendig, nachzuweisen, daß sich zu einer beliebigen gegebenen Funktion F weitere Funktionen F und Φ finden lassen, die zu einander gegenseitig und zu F in den verlangten Beziehungen stehen. Um diesen Beweis zu führen, scheint es zweckmäßig, sich auf die Theorie der homogenen Gruppen zu stützen. (Math. Annalen Bd. VIII, S. 295 und folg.)[1])

§ 5. Variation der Constanten.

9. Sei jetzt vorgelegt eine Gleichung:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

und eine vollständige Lösung derselben:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_q p_q = H(p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

$$x_i = \frac{dH}{dp_i} \quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,q)}, \quad p_{q+k} = -\frac{dH}{dx_{q+k}} \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n-q)}$$

1) [Hier Abh. I, S. 87ff.]

mit den Parametern $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Wir werden allgemeine Operationen angeben, die zur Bestimmung neuer Integral-M_{n-1} dienen können; darnach zeigen wir, daß alle Integral-M_{n-1} in dieser Weise erhalten werden können. Hierbei ergibt sich der merkwürdige Satz, daß $F = 0$ höchstens eine Integral-M_{n-1} besitzt, die nicht von charakteristischen Streifen erzeugt ist. Dies ist die Verallgemeinerung eines von Cauchy herrührenden Satzes.

Unter den M_{n-1} der vollständigen Lösung, die mit dem gemeinsamen Symbole A bezeichnet werden mögen, wählen wir irgend eine Schar, die durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Parametern a defi- [265
niert wird. Wir zeigen, daß eine solche Schar zur Konstruktion einer neuen Integralmannigfaltigkeit Anlaß geben kann.

Wir betrachten zuerst den Fall einer Gleichung zwischen den a:

$$\Phi(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0.$$

Um die Sprache zu erleichtern, bezeichnen wir alle M_{n-1} der hiermit definierten Schar mit dem Symbole A_0, eine bestimmte solche mit A_0^0 und endlich eine beliebige zu A_0^0 benachbarte Mannigfaltigkeit mit A_0'.

Wir suchen die auf A_0^0 gelegenen Elemente, die mit den benachbarten Elementen von A_0' vereinigt liegen. Zu diesem Zwecke setzen wir die Bedingungsgleichung:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

in die Form:

$$d(x_1 p_1 + \cdots + x_q p_q) - x_1 dp_1 - \cdots - x_q dp_q + \\ + p_{q+1} dx_{q+1} + \ldots + p_n dx_n = 0,$$

woraus, durch Benutzung der Gleichungen der vollständigen Lösung, folgt:

$$dH - \frac{dH}{dp_1} dp_1 - \cdots - \frac{dH}{dp_q} dp_q - \frac{dH}{dx_{q+1}} dx_{q+1} - \cdots - \frac{dH}{dx_n} dx_n = 0,$$

oder:

$$\frac{dH}{da_1} da_1 + \cdots + \frac{dH}{da_{n-1}} da_{n-1} = 0.$$

Hier sind $da_1, \ldots, da_{n-1}$ die Inkremente der Parameter, die dem Übergange von A_0^0 zu A_0' entsprechen; sie befriedigen daher die Relation:

$$\frac{d\Phi}{da_1} da_1 + \cdots + \frac{d\Phi}{da_{n-1}} da_{n-1} = 0.$$

Diejenigen Elemente auf A_0^0, die mit den benachbarten aller A_0' vereinigt liegen, erfüllen folglich die $n - 1$ Gleichungen:

$$\frac{dH}{da_k} + \lambda \frac{d\Phi}{da_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1),$$

oder eigentlich die $n - 2$ nach der Elimination von λ zurückgebliebenen Gleichungen. Den Inbegriff dieser Elemente bezeichnen wir mit dem Symbole P^0. Durch entsprechende Konstruktion bestimmen wir auf jeder A_0 eine Mannigfaltigkeit P.

Ich behaupte, daß der Inbegriff aller P eine Integralmannigfaltigkeit bildet.

Sind in der Tat P^0 und P' die beiden P, welche beziehungsweise A_0^0 und A_0' entsprechen, so muß jedes Element von P^0, welches ja mit allen benachbarten Elementen von A_0' vereinigt liegt, insbesondere auch zu den benachbarten Elementen von P' in dieser Beziehung stehen. Da nun die P selbst Integralmannigfaltigkeiten von $F = 0$ sind, so ist hiermit nachgewiesen, daß alle P eine Integralmannigfaltigkeit bilden; freilich ist die Dimension dieser Mannigfaltigkeit, wie auch die der P, noch unbestimmt.

Zu bemerken ist, daß die Gleichungen, die P bestimmen, nur 1. von [266
der Form der Funktion H, das heißt, von der gegebenen vollständigen Lösung, 2. von den Differentialquotienten von Φ, hinsichtlich der a, 3. von den Werten der Parameter a abhängen. Gibt man daher, nachdem man eine bestimmte vollständige Lösung gewählt hat, den Größen:

$$a_1, \ldots, a_{n-1}, \frac{d\Phi}{da_1}, \ldots, \frac{d\Phi}{da_{n-1}}$$

bestimmte Werte, so erhält man eine ganz bestimmte Mannigfaltigkeit P. Da nun die Differentialquotienten von Φ hinsichtlich der a Verhältnisgrößen sind, so gibt es nicht mehr als ∞^{2n-3} Mannigfaltigkeiten P. Freilich ist es noch denkbar, daß die Zahl der P geringer ist.

Jetzt betrachten wir eine Schar von Mannigfaltigkeiten A, die durch zwei Gleichungen zwischen den a: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ definiert wird, und zeigen, daß sie zur Konstruktion einer neuen Integralmannigfaltigkeit Anlaß gibt. Wir benutzen die Symbole A_0, A_0^0, A_0' in derselben Bedeutung wie soeben. Die auf A_0^0 gelegenen Elemente, die mit den benachbarten Elementen aller A_0' vereinigt liegen, befriedigen wie im vorangehenden Falle die Gleichung:

$$\frac{dH}{da_1} da_1 + \cdots + \frac{dH}{da_{n-1}} da_{n-1} = 0,$$

wo indes jetzt die Inkremente da den *beiden* Gleichungen:

$$\frac{d\Phi_1}{da_1}da_1 + \cdots + \frac{d\Phi_1}{da_{n-1}}da_{n-1} = 0,$$
$$\frac{d\Phi_2}{da_1}da_1 + \cdots + \frac{d\Phi_2}{da_{n-1}}da_{n-1} = 0$$

genügen. Folglich erfüllen die auf A_0^0 gelegenen Elemente, die mit den Elementen aller A_0' vereinigt liegen, die $n-3$ Gleichungen, die aus den $n-1$ Gleichungen:

$$\frac{dH}{da_k} + \lambda_1 \frac{d\Phi_1}{da_k} + \lambda_2 \frac{d\Phi_2}{da_k} = 0$$

durch Elimination von λ_1 und λ_2 hervorgehen. Wir bezeichnen den Inbegriff dieser Elemente mit Q und bemerken dabei, daß jede Q von Mannigfaltigkeiten P erzeugt ist. Räsonnieren wir nun, wie soeben, so erkennen wir, daß der Inbegriff aller Q eine Integralmannigfaltigkeit bestimmt, und zwar eine, die von Mannigfaltigkeiten P erzeugt ist.

In entsprechender Weise könnte man den Fall von drei oder noch mehr Gleichungen zwischen den a erledigen. Man erhält immer Integral-M, die von Mannigfaltigkeiten P erzeugt sind.

Endlich werden wir zeigen, daß die Gesamtheit der Integral-M_{n-1} [267
der vollständigen Lösung ein Umhüllungsgebilde bestimmen kann, welches selbst eine Integral-M_{n-1} ist.

Nach dem Vorangehenden wird die Gleichung:

$$\frac{dH}{da_1}da_1 + \cdots + \frac{dH}{da_n}da_n = 0,$$

in welcher *alle* da von einander unabhängig sind, von den auf einer bestimmten A gelegenen Elementen befriedigt, die mit den benachbarten Elementen *aller* benachbarten A vereinigt liegen. Daher gibt die Elimination der Parameter a zwischen den $2n-1$ Gleichungen:

$$\frac{dH}{da_1} = 0, \ldots, \frac{dH}{da_{n-1}} = 0, \qquad x_i = \frac{dH}{dp_i}, \qquad p_{q+k} = -\frac{dH}{dx_{q+k}}$$

im allgemeinen eine Integral-M_{n-1} der vorgelegten Gleichung. Diese M_{n-1} soll, wenn sie überhaupt existiert, die *singuläre* Integral-M_{n-1} heißen.

Wenn ich soeben gesagt habe, daß eine singuläre Integral-M_{n-1} im *allgemeinen* existiert, so ist das unter der Voraussetzung, daß die vollständige Lösung selbst, und nicht die Gleichung: $F = 0$ als arbiträr gewählt gedacht wird. Denkt man sich dagegen die Gleichung: $F = 0$ als arbiträr gegeben, so wird es sich wohl zeigen, daß eine singuläre Integral-M_{n-1} nur ausnahmsweise existiert, insofern die Integral-M_{n-1} einer be-

liebigen vollständigen Lösung mit Singularitäten behaftet sind, die ein Umhüllungsgebilde nicht zustandekommen lassen.

10. Wir beweisen jetzt, daß alle Integral-M_{n-1} der vorgelegten Gleichung durch die angegebenen Operationen aus der bekannten vollständigen Lösung deriviert werden können.

Man nehme in der Tat eine beliebige Integralmannigfaltigkeit M_{n-1}. Jedes Element derselben gehört einer (oder mehreren) Mannigfaltigkeiten A an; und diejenigen A, die zu M_{n-1} in dieser Beziehung stehen, bilden eine Schar, die durch etwa q Gleichungen zwischen den a:

$$\Phi_k(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q)$$

definiert wird. Man wähle zwei benachbarte A dieser Schar und bezeichne sie mit A^0 und A'; es seien ferner ε^0 und ε' zwei benachbarte Elemente, welche A^0 und A' beziehungsweise mit M_{n-1} gemein haben. Diese beiden Elemente liegen als M_{n-1} angehörig vereinigt und befriedigen daher die $n-1$ Gleichungen:

$$\frac{dH}{da_k} + \lambda_1 \frac{d\Phi_1}{da_k} + \lambda_2 \frac{d\Phi_2}{da_k} + \cdots + \lambda_q \frac{d\Phi_q}{da_k} = 0.$$

Also ist M_{n-1} entweder mit der von unserer Schar bestimmten [268
Integralmannigfaltigkeit identisch, oder in derselben als reduzibler Teil enthalten.

Wir erkennen in dieser Weise, daß alle Integral-M_{n-1}, ausgenommen die singuläre M_{n-1}, durch Mannigfaltigkeiten P erzeugt werden. Andererseits haben wir gefunden, daß jede Integral-M_{n-1}, die einer vollständigen Lösung angehören kann, von charakteristischen Streifen erzeugt ist. Also liegt die Vermutung sehr nahe, daß die P Charakteristiken sind, oder aus diskreten Charakteristiken bestehen.

Um dies zu beweisen, haben wir die beiden Möglichkeiten zu berücksichtigen, daß die P, die von α-ter Dimension sein mögen, von Charakteristiken erzeugt sind, und daß sie es nicht sind. Im ersten Falle ist es, wenn α größer als 1 ist, klar, daß Integral-M_{n-1}, die eine gewisse Anzahl passend gewählte, einander benachbarte Charakteristiken enthalten, eine gewisse P in ihrer ganzen Ausdehnung enthalten müssen. Der Umstand also, daß eine Integral-M_{n-1} gewisse benachbarte Charakteristiken enthielte, würde bewirken, daß Charakteristiken, die zu jenen nicht benachbart sind, der M_{n-1} angehörten. Dies steht aber im Widerspruche mit den Konstruktionen des vorangehenden Paragraphen. Also kann α in diesem Falle nicht größer als 1 sein. Setzen wir andererseits voraus, daß die P nicht von charakteristischen Streifen erzeugt sind, so zeigt ein vollständig analoges Räsonnement, daß die P von nullter Dimension sein müssen. Nun aber sind die P nach dem Vorangehenden jedenfalls von erster Dimension. Also sind die P charakteristische Streifen oder bestehen aus diskreten Charakteristiken.

Theorem 4. *Hiermit ist nachgewiesen, daß die Integral-M_{n-1} der Gleichung: $F=0$ im allgemeinen von charakteristischen Streifen erzeugt sind. Die einzige Ausnahme bildet die singuläre Integral-M_{n-1}, wenn eine solche existiert.*

§ 6. Spezielle Involutionssysteme.

11. In diesem Paragraphen betrachten wir Gleichungen von der Form:

$$p_k = h_k = p_n \varphi_k (x_1, \ldots, x_n, p_{q+1} : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n) \quad (k=1,\ldots,q)$$

die paarweise in der Beziehung:

$$(p_i - h_i, p_k - h_k) = 0$$

stehen. Wir zeigen, daß ein solches System von Gleichungen, welches ein spezielles Involutionssystem heißen mag, gemeinsame Integral-M_{n-1} besitzt; gleichzeitig geben wir eine allgemeine Methode zu deren [269
Bestimmung.

Die Theorie eines zweigliedrigen Involutionssystems läßt sich auf die folgenden Sätze begründen:

Satz 12. *Stehen die beiden Funktionen: $p_1 - h_1$, $p_2 - h_2$ in Involutionsbeziehung, so bilden die linearen Gleichungen:*

$$(p_1 - h_1, V) = 0, \quad (p_2 - h_2, V) = 0, \quad \sum p \frac{dV}{dp} = 0,$$

welche V als Funktion von $x_1, \ldots, x_n, p_3, \ldots, p_n$ bestimmen, ein vollständiges System.

Setzen wir nämlich:

$$(p_1 - h_1, V) = A_1 V, \quad (p_2 - h_2, V) = A_2 V, \quad \sum p \frac{dV}{dp} = A_3 V,$$

so finden wir durch Ausführung, indem wir uns erinnern, daß h homogen von erster Ordnung ist:

$$A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V)) = 0,$$

das heißt, die Größen: $A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V))$ drücken sich linear durch: $A_1 V$, $A_2 V$ und $A_3 V$ aus. Es ist also nur noch nachzuweisen, daß zwischen A_1, A_2 und A_3 selbst keine solche Relation besteht. Dies folgt aber daraus, daß die Größe $dV : dx_1$ sich nur in $A_1 V$ und die Größe $dV : dx_2$ sich nur in $A_2 V$ findet. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Sind $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2n-5}$ ein System Lösungen unseres vollständigen Systems, so fassen die Gleichungen:

$$\Phi_1 = a_1, \ldots, \Phi_{2n-5} = a_{2n-5}$$

mit den Parametern: $a_1, \ldots, a_{2n-5}$ die Elemente des vorgelegten Involutionssystems in ∞^{2n-5} Scharen, jede bestehend aus ∞^2 Elementen, zusammen.

Wir nennen diese Scharen von Elementen: charakteristische M_2 des Involutionssystems, und bemerken dabei, daß jede solche Elementenschar einfach unendlich viele charakteristische Streifen der Gleichung: $p_1 - h_1 = 0$ und ebenso einfach unendlich viele charakteristische Streifen der Gleichung: $p_2 - h_2 = 0$ enthält. Hieraus läßt sich leicht schließen, daß benachbarte Elemente einer charakteristischen M_2 immer vereinigt liegen. In der Tat, wir kennen zwei Fortschreitungsrichtungen $dx_1, \ldots, dx_n, dp_1, \ldots, dp_n$, die von einem Elemente einer M_2 zu einem benachbarten Elemente derselben M_2 führen, nämlich die beiden, die den charakteristischen Streifen der beiden vorgelegten Gleichungen entsprechen:

$$dx_1 : dx_2 : \; dx_3 \; : \cdots : \; dx_n \; : dp_1 : \cdots : dp_n =$$
$$= 1 : 0 : -\frac{dh_1}{dp_3} : \cdots : -\frac{dh_1}{dp_n} : \frac{dh_1}{dx_1} : \cdots : \frac{dh_1}{dx_n}$$

und:

$$dx_1 : dx_2 : \; dx_3 \; : \cdots : \; dx_n \; : dp_1 : \cdots : dp_n =$$ [270
$$= 0 : 1 : -\frac{dh_2}{dp_3} : \cdots : -\frac{dh_2}{dp_n} : \frac{dh_2}{dx_1} : \cdots : \frac{dh_2}{dx_n}.$$

Lassen wir daher λ_1 und λ_2 Parameter bezeichnen, so bestimmen die Gleichungen:

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : \cdots : dx_n : dp_1 : \cdots : dp_n =$$
$$= \lambda_1 : \lambda_2 : -\left(\lambda_1 \frac{dh_1}{dp_3} + \lambda_2 \frac{dh_2}{dp_3}\right) : \cdots : \left(\lambda_1 \frac{dh_1}{dx_n} + \lambda_2 \frac{dh_2}{dx_n}\right)$$

die allgemeinste Fortschreitungsrichtung innerhalb der M_2. Und da h_1 und h_2 homogen von erster Ordnung sind, so ist es einleuchtend, daß diese Werte der Größen $dx_1, \ldots, dx_n$ den Ausdruck $\Sigma p dx$ verschwinden lassen. Also:

Satz 13. *Die Elemente eines zweigliedrigen Involutionssystems:*

$$p_1 - h_1 = 0, \quad p_2 - h_2 = 0$$

lassen sich in ∞^{2n-5} Scharen, jede bestehend aus ∞^2 vereinigt liegenden Elementen, zusammenfassen. Jede solche Schar, die eine charakteristische

M_2 des Involutionssystems heißen mag, ist von ∞^1 charakteristischen Streifen jeder Gleichung des Involutionssystems erzeugt.

In der Theorie des vorgelegten Involutionssystems spielen die charakteristischen M_2 ganz dieselbe Rolle, wie die charakteristischen Streifen für eine einzige Gleichung. Dies geht aus den folgenden fundamentalen Sätzen hervor:

Satz 14. *Integral-M_{n-1} des zweigliedrigen Involutionssystems:*

$$p_1 - h_1 = 0, \quad p_2 - h_2 = 0,$$

die durch ein gegebenes Element gehen, enthalten im allgemeinen die diesem Elemente zugehörige charakteristische M_2.

Legen wir nämlich durch das gegebene Element e den charakteristischen Streifen der Gleichung: $p_1 - h_1 = 0$, so muß jedes Element ε desselben den besprochenen Integral-M_{n-1} angehören. Legen wir entsprechender Weise eine Charakteristik der zweiten Gleichung durch ε, so muß ebenso jedes Element E dieses Streifens allen unseren Integral-M_{n-1} angehören. Nun aber erzeugen alle Elemente E eben die dem gegebenen Elemente e zugehörige charakteristische M_2. Also ist unser Satz bewiesen.

Satz 15. *Enthalten zwei benachbarte charakteristische M_2 zwei vereinigt liegende Elemente e und e', so liegt jedes Element E der einen M_2 mit allen benachbarten Elementen E' der zweiten M_2 vereinigt.*

Zum Beweise legen wir eine Charakteristik der Gleichung: $p_1 - h_1 = 0$ durch e und eine Charakteristik der zweiten Gleichung durch E. Diese beiden Streifen sind in der einen charakteristischen M_2 enthalten und haben also ein Element ε gemein. Durch eine ähnliche Konstruktion finden wir ein Element ε' in der zweiten charakteristischen M_2. Wenden [271
wir nun Satz 11 auf die beiden, durch die vereinigt liegenden Elemente e und e' gehenden Streifen der Gleichung: $p_1 - h_1 = 0$ an, so erkennen wir, daß auch die Elemente ε und ε' vereinigt liegen. Also können wir denselben Satz auf die beiden durch ε und ε' gehenden Streifen der zweiten Gleichung anwenden; in dieser Weise finden wir, daß E und E' vereinigt liegen, wie behauptet wurde.

Satz 16. *Die charakteristischen M_2 des Involutionssystems:*

$$p_1 - h_1 = 0, \quad p_2 - h_2 = 0,$$

die durch die Elemente einer Integral-M_{n-3} hindurchgehen, erzeugen im allgemeinen eine Integral-M_{n-1} des Involutionssystems.

Im allgemeinen geht durch jedes Element der vorgelegten Integral-M_{n-3} nur **eine** charakteristische M_2, und zwar eine, die keine weiteren Elemente mit der M_{n-3} gemein hat. Diese ∞^{n-3} M_2 müssen nach dem

vorangehenden Satze immer eine Integral-M_{n-1} erzeugen. Ausnahmsweise kann es eintreten, daß jede M_2 unendlich viele Elemente mit der vorgelegten Integral-M_{n-3} gemein hat; alsdann erhält man nur ∞^{n-4} M_2, die offenbar eine Integral-M_{n-2} erzeugen. Endlich ist es auch denkbar, daß die vorgelegte M_{n-3} von charakteristischen M_2 erzeugt ist. In diesem Falle gibt unsere Konstruktion nichts.

Theorem 5. *Die Elemente des zweigliedrigen Involutionssystems:*

$$p_1 - h_1 = 0, \quad p_2 - h_2 = 0$$

lassen sich zu ∞^{n-2} gemeinsamen Integral-M_{n-1} zusammenfassen. Den Inbegriff dieser M_{n-1} nennen wir eine vollständige Lösung des Involutionssystems.

Es ist [nämlich] a priori einleuchtend, daß es solche Funktionen f_1, f_2 von $x_1, \ldots, x_n$ gibt, daß eine charakteristische M_2 von allgemeiner Lage nur eine endliche Anzahl Elemente enthält, deren Koordinaten den Gleichungen: $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ genügen.

Nehmen wir nun einen **allgemeinen** auf der Mannigfaltigkeit: $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ gelegenen Punkt, so gehen durch ihn ∞^{n-3} Elemente des Involutionssystems, deren Inbegriff eine Integral-M_{n-3} ist. Also erzeugen die durch die Elemente dieser M_{n-3}, das heißt, die durch den gegebenen Punkt gehenden charakteristischen M_2 eine Integral-M_{n-1} des Involutionssystems. Lassen wir den betreffenden Punkt alle möglichen Lagen auf $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ annehmen, so erhalten wir ∞^{n-2} Integral-M_{n-1}. Und jedes Element des Involutionssystems gehört einer solchen M_{n-1} an; denn die dem betreffenden Elemente zugehörige charakteristische M_2 schneidet: $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ jedenfalls in einem Punkte.

12. Unsere vollständige Lösung wird durch Gleichungen von der Form:

$$x_{q+1} p_{q+1} + \cdots + x_n p_n = H(x_1, \ldots, x_q, p_{q+1}, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_{n-2}), \quad [272$$

$$x_{q+k} = \frac{dH}{dp_{q+k}}, \qquad p_{q-k} = -\frac{dH}{dx_{q-k}}$$

definiert; hier ist H wie gewöhnlich von erster Ordnung hinsichtlich $p_{q+1}, \ldots, p_n$ und $a_1, \ldots, a_{n-2}$ sind Parameter.

Stellen wir zwischen den Parametern a eine oder mehrere Gleichungen fest:

$$\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_i = 0,$$

so erhalten wir eine Schar Integral-M_{n-1}, die der vollständigen Lösung angehören. Räsonnieren wir nun wie im Paragraphen 5, so erkennen wir, daß diese M_{n-1} ein Umhüllungsgebilde bestimmen, das selbst eine Integralmannigfaltigkeit ist.

Umhüllen insbesondere alle M_{n-1} der vollständigen Lösung eine M_{n-1}, so ist dieselbe eine Integral-M_{n-1}, die wir die singuläre Integral-M_{n-1} des Involutionssystems nennen. Andererseits finden wir auch, daß alle Integral-M_{n-1} des Involutionssystems durch die angegebenen Operationen aus der gegebenen vollständigen Lösung deriviert werden können. Hieraus fließt der Satz:

Satz 17. *Die Integral-M_{n-1} des Involutionssystems: $p_1 - h_1 = 0$, $p_2 - h_2 = 0$ sind im allgemeinen von charakteristischen M_2 erzeugt. Die einzige Ausnahme bildet die singuläre M_{n-1}, wenn eine solche existiert.*

13. Diese Theorie dehnt sich nun mit größter Leichtigkeit auf spezielle Involutionssysteme mit beliebig vielen Gliedern:

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0$$

aus. Wir können uns darauf beschränken, die betreffenden Sätze aufzustellen:

Satz 18. *Stehen die Funktionen: $p_1 - h_1, \ldots, p_q - h_q$ paarweise in Involutionsbeziehung, so bilden die linearen Gleichungen:*

$$(p_1 - h_1, V) = 0, \ldots, (p_q - h_q, V) = 0, \quad \sum p \frac{dV}{dp} = 0,$$

die V als Funktion von $x_1, \ldots, x_n, p_{q+1}, \ldots, p_n$ bestimmen, ein vollständiges System.

Satz 19. *Dieses vollständige System faßt die Elemente unseres Involutionssystems in M_q zusammen, welche die charakteristischen M_q des Involutionssystems heißen mögen. Jede charakteristische M_q enthält ∞^{q-1} charakteristische Streifen einer jeden Gleichung:*

$$p_k - h_k = 0,$$

sie enthält ferner ∞^{q-2} charakteristische M_2 eines jeden zweigliedrigen Involutionssystems:

$$p_i - h_i = 0, \quad p_k - h_k = 0,$$

und so weiter.

Satz 20. *Enthalten zwei benachbarte charakteristische M_q zwei vereinigt liegende Elemente, so liegt jedes Element der einen M_q mit jedem benachbarten Elemente der zweiten M_q vereinigt.* [273

Satz 21. *Die charakteristischen M_q, die durch die Elemente einer Integral-M_{n-q-1} hindurchgehen, erzeugen im allgemeinen eine Integral-M_{n-1}, ausnahmsweise eine Integral-M_{n-2}, und so weiter.*

Satz 22. *Die Elemente des q-gliedrigen Involutionssystems:*

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0$$

lassen sich zu ∞^{n-q} Integral-M_{n-1} zusammenfassen. Den Inbegriff dieser M_{n-1} nennen wir eine vollständige Lösung des Involutionssystems.

Satz 23. *Die Integral-M_{n-1} des Involutionssystems:*

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0$$

sind im allgemeinen von charakteristischen M_q erzeugt. Die einzige Ausnahme bildet die sogenannte singuläre Integral-M_{n-1} des Involutionssystems, wenn eine solche existiert.

§ 7. Allgemeine Involutionssysteme.

14. Wir betrachten jetzt Gleichungen von der Form:

$$x_k - \varphi_k(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$p_i - h_i(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, p_{q+m+1}, \ldots, p_n) = 0 \quad (i = q+1, \ldots, q+m),$$

die den Relationen:

$$(x_k - \varphi_k, p_i - h_i) = 0 = (p_i - h_i, p_r - h_r)$$

genügen. Wir zeigen, daß sie gemeinsame Integral-M_{n-1} besitzen, und geben eine allgemeine Methode zu deren Bestimmung. Hierzu müssen wir eine wichtige Hilfstheorie entwickeln.

Das Problem, die gemeinsamen Integral-M_{n-1} von q gegebenen Gleichungen:

$$F_1 = 0, \ldots, F_q = 0$$

zu bestimmen, besteht nach unserer Definition darin, in allgemeinster Weise $n - q$ weitere Gleichungen zwischen den x und p aufzufinden, die mit den vorgelegten die Differentialrelation:

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch befriedigen. Führen wir nun statt:

$$x_1, \ldots, x_n, p_1 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n$$

neue Variabeln:

$$y_1, \ldots, y_{2n-1}$$

ein, so nimmt unser Problem die Form an: in allgemeinster Weise $n - q$ [274
Gleichungen zwischen den y zu finden, die zusammen mit q vorgelegten

Relationen zwischen diesen Größen einen gewissen linearen Differentialausdruck:

$$Y_1 dy_1 + \cdots + Y_{2n-1} dy_{2n-1} = \Sigma p dx : p_n$$

zum Verschwinden bringen.

Wir werden insbesondere voraussetzen, daß wir statt $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ $2n$ Variabeln:

$$x'_1, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_n$$

einführen, die derart gewählt sind, daß die Bedingungsgleichung:

$$\sum_i^{1\ldots n} p_i dx_i = \sum_i^{1\ldots n} p'_i dx'_i$$

besteht. *Alsdann besitzt das transformierte Problem denselben Charakter, wie das ursprünglich vorgelegte.*

Unter allen hiermit definierten Transformationen genügt es für den Augenblick, solche zu betrachten, deren Gleichungen die Form:

$$x_k = X_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n), \quad p_k = \sum_s^{1\ldots n} p'_s \frac{dx'_s}{dx_k}$$

haben. Wir werden zeigen, daß bei einer derartigen Transformation der bekannte Differentialausdruck:

$$(F\Phi) = \sum \left(\frac{dF}{dp_i} \frac{d\Phi}{dx_i} - \frac{dF}{dx_i} \frac{d\Phi}{dp_i} \right)$$

sich als Invariante verhält.

Es ist nämlich:

$$\frac{dF}{dx'_m} = \sum_i \frac{dF}{dx_i} \frac{dx_i}{dx'_m} + \sum_i \frac{dF}{dp_i} \sum_s p'_s \frac{d}{dx'_m} \left(\frac{dx'_s}{dx_i} \right),$$

$$\frac{dF}{dp'_m} = \sum_k \frac{dF}{dp_k} \frac{dx'_m}{dx_k},$$

woraus:

$$\frac{dF}{dp'_m} \frac{d\Phi}{dx'_m} - \frac{dF}{dx'_m} \frac{d\Phi}{dp'_m} = \sum_{i,k} \left(\frac{dF}{dp_k} \frac{d\Phi}{dx_i} - \frac{dF}{dx_i} \frac{d\Phi}{dp_k} \right) \frac{dx_i}{dx'_m} \frac{dx'_m}{dx_k} +$$

$$+ \sum_{i,k,s} \frac{dF}{dp_k} \frac{d\Phi}{dp_i} p'_s \frac{d}{dx'_m} \left(\frac{dx'_s}{dx_i} \right) \frac{dx'_m}{dx_k} -$$

$$- \sum_{i,k,s} \frac{d\Phi}{dp_k} \frac{dF}{dp_i} p'_s \frac{d}{dx'_m} \left(\frac{dx'_s}{dx_i} \right) \frac{dx'_m}{dx_k},$$

und, wenn wir hinsichtlich m summieren und darnach die Identität:

$$\sum_m \frac{dU}{dx'_m} \frac{dx'_m}{dx_k} = \frac{dU}{dx_k}$$ [275

berücksichtigen:

$$(F\Phi)_{x'p'} = (F\Phi)_{xp} + \sum_{iks} \frac{dF}{dp_k} \frac{d\Phi}{dp_i} p'_s \frac{d^2 x'_s}{dx_i dx_k} -$$

$$- \sum_{iks} \frac{d\Phi}{dp_k} \frac{dF}{dp_i} p'_s \frac{d^2 x'_s}{dx_i dx_k};$$

das heißt, es ist:

$$(F\Phi)_{x'p'} = (F\Phi)_{xp},$$

wie behauptet wurde.

15. Diese Theorie wenden wir nun auf das vorgelegte Involutionssystem an:

$$x_k - \varphi_k(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q),$$

$$p_i - h_i(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, p_{q+m+1}, \ldots, p_n) = 0 \qquad (i = q+1, \ldots, q+m).$$

Wir führen neue Variabeln ein vermöge der Gleichungen:

$$x'_{q-k} = x_{q-k} - \varphi_{q-k}, \quad x'_{q+k} = x_{q+k}, \quad p_m = \sum_s^{1\ldots n} p'_s \frac{dx'_s}{dx_m}$$

und bringen hierdurch unser Involutionssystem auf die Form:

$$x'_1 = 0, \ldots, x'_q = 0,$$

$$p'_i - H_i(x'_{q+1}, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_q, p'_{q+m+1}, \ldots, p'_n) = 0 \quad (i = q+1, \ldots, q+m).$$

Es handelt sich darum, in allgemeinster Weise $n - q - m$ weitere Gleichungen zwischen den x', p' zu finden, die zusammen mit jenen den Ausdruck:

$$p'_1 dx'_1 + \cdots + p'_n dx'_n,$$

oder wegen: $x'_1 = 0, \ldots, x'_q = 0$, den reduzierten Ausdruck:

$$p'_{q+1} dx'_{q+1} + \cdots + p'_n dx'_n$$

zum Verschwinden bringen.

Berücksichtigen wir nun, daß nach unseren früheren Entwickelungen auch die transformierten Gleichungen in Involutionsbeziehung stehen:

$$(x'_k, p'_i - H_i) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$(p'_i - H_i, p'_k - H_k) = 0,$$

und daß infolgedessen die Größen $p'_1, \ldots, p'_q$ in den H nicht vorkommen, so erkennen wir, daß unser Problem die folgende Gestalt angenommen hat:

Vorgelegt ist ein m-gliedriges spezielles Involutionssystem zwischen den Variabeln:

$$x'_{q+1}, \ldots, x'_n, p'_{q+1}, \ldots, p'_n,$$ [276

$$p'_i - h_i(x'_{q+1}, \ldots, x'_n, p'_{q+m+1}, \ldots, p'_n) = 0 \quad (i = q+1, \ldots, q+m).$$

Man soll die allgemeinste Integralmannigfaltigkeit desselben bestimmen.

Dieses Problem lernten wir aber in dem vorangehenden Paragraphen erledigen. Und also ist hiermit auch das im Anfange dieses Paragraphen gestellte Problem erledigt.

Kehren wir nun zu den Variabeln: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ zurück, so können wir folgenden Satz aufstellen:

Theorem 6. *Die Elemente des Involutionssystems:*

$$x_k - \varphi_k(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0 \quad (k = 1, \ldots, q)$$

$$p_i - h_i(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, p_{q+m+1}, \ldots, p_n) = 0 \quad (i = q+1, \ldots, q+m)$$

lassen sich zu Integral-M_{n-1} vereinigen, deren Inbegriff eine vollständige Lösung des Involutionssystems heißen mag. Um eine solche zu finden, genügt es, ein m-gliedriges Involutionssystem von der Form: $p'_i - h'_i = 0$ [in $2(n-q)$ Veränderlichen: $x'_{q+1}, \ldots, x'_n, p'_{q+1}, \ldots, p'_n$] aufzustellen und eine vollständige Lösung desselben zu bestimmen.

Aus diesem Satze, dessen Beweis in dem Vorangehenden liegt, schließen wir in der gewöhnlichen Weise, daß die allgemeinste Integral-M_{n-1} durch Variation der Konstanten der vollständigen Lösung erhalten werden kann. Ebenso läßt sich die Theorie der charakteristischen Mannigfaltigkeiten, und so weiter, auf solche Involutionssysteme ausdehnen. Da dies indes keine Schwierigkeit darbietet, gehen wir hierauf nicht näher ein.

§ 8. Erledigung des allgemeinen Problems.

16. Herr Mayer hat gezeigt, daß die Bestimmung aller gemeinsamen Integral-M_{n-1}^{n-1} von beliebigen gegebenen Gleichungen sich auf die Integration eines speziellen Involutionssystems von der Form: $p_k - h_k = 0$ reduzieren läßt. Dieser fundamentale Satz[1]) läßt sich dahin verallgemeinern, daß die Bestimmung aller Integral-M_{n-1} von beliebigen gegebenen Gleichungen in jener Weise geschehen kann.

1) Bour hatte einen analogen Satz aufgestellt, der indes nicht stringent formuliert war.

Dies soll jetzt gezeigt werden. Hierzu brauchen wir zwei Hilfssätze.

Satz 24. *Die gemeinsamen Integral-M_{n-1} zweier Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ genügen auch der Gleichung: $(F_1 F_2) = 0$.*

Denn die Integral-M_{n-1} von: $F_1 = 0$ genügen dem simultanen Systeme:

$$dx_1 : \cdots = \frac{dF_1}{dp_1} : \cdots,$$ [277

und die Integral-M_{n-1} von: $F_2 = 0$ befriedigen die Gleichung:

$$\frac{dF_2}{dx_1} dx_1 + \cdots + \frac{dF_2}{dp_n} dp_n = 0.$$

Also genügen die gemeinsamen Integral-M_{n-1} von: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ derjenigen Relation, die hervorgeht, wenn man in der letzten Differentialgleichung statt dx_k und dp_k beziehungsweise $dF_1 : dp_k$ und $-dF_1 : dx_k$ einsetzt, das heißt, der Relation:

$$(F_1 F_2) = 0.$$

Zu bemerken ist, daß dieser Satz nicht mehr gültig bleibt, wenn die betreffende Integral-M_{n-1} die singuläre Integral-M_{n-1} von $F_1 = 0$ oder $F_2 = 0$ ist.

Satz 25. *Haben q Gleichungen zwischen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ gemeinsame Integral-M_{n-1}, so ist es immer möglich, q solche unter den Zahlen $1, \ldots, n$ zu wählen, etwa: $a, \ldots, l, m, \ldots, s$, daß unsere Gleichungen sich hinsichtlich der Größen:*

$$p_a, \ldots, p_l, x_m, \ldots, x_s$$

auflösen lassen, und daß sich dabei die Größen: $x_m, \ldots, x_s$ als Funktionen der übrigen x ausdrücken.

Laß uns voraussetzen, daß sich aus den q gegebenen Gleichungen etwa m Relationen zwischen den x herleiten lassen; dann ist es möglich, die $q - m$ übrigen Gleichungen hinsichtlich $q - m$ der Größen p, etwa $p_1, \ldots, p_{q-m}$, aufzulösen:

$$p_k = h_k(p_{q-m+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n) \quad (k = 1, \ldots, q-m).$$

Wäre es nun möglich, aus den m Relationen zwischen den x eine herzuleiten, die nur die Größen $x_1, \ldots, x_{q-m}$ enthielte, so könnte man diese etwa hinsichtlich x_1 auflösen:

$$x_1 - \psi_1(x_2, \ldots, x_{q-m}) = 0.$$

Dann aber müßten nach dem vorangehenden Satze die gemeinsamen Integral-M_{n-1} der q vorgelegten Gleichungen zugleich der Relation:

$$(x_1 - \psi_1, p_1 - h_1) = 0,$$

das heißt:

$$-1 = 0$$

genügen. Dies ist aber absurd. Also ist unsere Annahme, daß sich aus den m Relationen zwischen den x eine zwischen $x_1, \ldots, x_{q-m}$ herleiten ließe, verkehrt. Folglich können diese m Gleichungen hinsichtlich m unter den Größen $x_{q-m+1}, \ldots, x_n$ aufgelöst werden, womit unser Satz bewiesen ist.

Satz 26. *Die Bestimmung der gemeinsamen Integral-M_{n-1} von beliebigen gegebenen Gleichungen läßt sich immer auf die Integration eines In-* [278 *volutionssystems von der Form: $p_k - h_k = 0$, $x_i - f_i = 0$ zurückführen.*

Wir bringen die vorgelegten Gleichungen nach dem vorangehenden Satze auf die Form:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} p_k - h_k(p_{q+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_q, x_{q+m+1}, \ldots, x_n) = 0 & (k = 1, \ldots, q), \\ x_i - f_i(x_1, \ldots, x_q, x_{q+m+1}, \ldots, x_n) = 0 & (i = q+1, \ldots, q+m) \end{cases}$$

und bilden die Gleichungen:

$$\text{(B)} \qquad (p_k - h_k, p_m - h_m) = 0, \quad (p_k - h_k, x_i - f_i) = 0,$$

die offenbar nur die Größen:

$$p_{q+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_q, x_{q+m+1}, \ldots, x_n$$

enthalten.

Hier sind nun zwei Fälle denkbar. Entweder sind diese neuen Gleichungen algebraische Konsequenzen der vorgelegten; und dies kommt nach der Form unserer Gleichungen (A) und (B) darauf hinaus, daß die Gleichungen identisch Null sind, und daß also die Gleichungen (A) schon ein Involutionssystem bilden[1]); oder auch, es sind die Gleichungen (B) nicht sämtlich algebraische Konsequenzen der (A). Alsdann fügen wir die neuen Gleichungen zu den alten hinzu und behandeln das hiermit erhaltene Gleichungssystem in derselben Weise. Entweder kann es durch Auflösung auf die verlangte Form gebracht werden, oder auch, wir finden wieder neue Gleichungen, die hinzugefügt werden müssen. Indem man nun weiter geht, darf man, wenn die vorgelegten Gleichungen überhaupt gemeinsame Integral-M_{n-1} besitzen, nie mehr als n Gleichungen finden.

1) Sind die Gleichungen (A) und (B) kontradiktorisch, so haben sie eo ipso keine gemeinsame Integral-M_{n-1} (jedenfalls nicht in dem früher definierten Sinne).

Existieren also solche Integral-M_{n-1}, so erhält man zuletzt notwendigerweise ein Involutionssystem von der verlangten Form, dessen Integral-M_{n-1} eben die Integral-M_{n-1} der ursprünglichen Gleichungen sind.

Theorem 7. *Die Bestimmung der gemeinsamen Integral-M_{n-1} von beliebigen gegebenen Gleichungen läßt sich immer auf die Integration eines Involutionssystems von der Form: $p_k - h_k = 0$ zurückführen.*

Denn nach dem vorangehenden Satze läßt sich unser Problem auf die Integration eines Involutionssystems von der Form:

$$p_k - h_k = 0, \qquad x_i - f_i = 0$$

reduzieren, und dieses neue Problem verlangt nach den Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen nur die Integration eines Involutionssystems von der Form: $p_k - h_k = 0$.

Abschnitt II. [279

In dem ersten Abschnitte habe ich das Hauptproblem dieser Abhandlung auf die Integration eines Involutionssystems von der Form:

$$p_k - h_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q)$$

zurückgeführt. Ich zeigte ferner, daß die Erledigung dieses letzten Problems nur die sukzessive Integration mehrerer simultaner Systeme verlangte.

Jetzt werde ich eine einfachere Integrationsweise des Involutionssystems: $p_k - h_k = 0$ entwickeln, und zwar ist es diejenige Methode, die ich im Mai und Juni 1872 in einigen an die Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania [und an die zu Göttingen] gerichteten Mitteilungen[1]) skizzierte und welche hinterher mein Freund Mayer in mehreren schönen analytischen Abhandlungen näher ausgeführt hat, die ich jetzt endlich ausführlich darstellen werde.

§ 9. Vorbereitende Entwickelungen.

17. Die Sätze dieses Paragraphen beziehen sich auf ein Involutionssystem von der Form:

$$p_1 - f_1 = \cdots = p_q - f_q = 0,$$

wo $f_1, \ldots, f_q$ Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_{q+1}, \ldots, p_n$ sind.

1) [Bd. III d. Ausg. Abh. I, II, III.]

Satz 27. *Es ist immer möglich, q solche Konstanten $a_1, \ldots, a_q$ zu wählen, daß eine charakteristische M_q von allgemeiner Lage nur eine diskrete Anzahl Elemente enthält, welche die Gleichungen:*

$$x_1 = a_1, \ldots, x_q = a_q$$

befriedigen.

Der Kürze wegen bezeichnen wir beiläufig ein Element, für welches

$$x_1 = a_1, \ldots, x_q = a_q, \quad p_1 = f_1, \ldots, p_q = f_q,$$

das heißt, ein beliebiges Element des Involutionssystems, dessen Punkt auf der $(n-q)$-fachen Punktmannigfaltigkeit: $x_1 = a_1, \ldots, x_q = a_q$ liegt, mit dem Symbole e_a.

Setzen wir zunächst voraus, daß jede charakteristische M_q unendlich viele Elemente e_a enthielte. Dann sind zwei Fälle denkbar. Entweder bilden alle diese Elemente eine kontinuierliche Schar, sodaß jedes Element in derselben Schar ein benachbartes hat; oder auch, sie zerfallen in zwei Scharen, von denen die eine nur vereinzelte Elemente enthält, während die andere eine kontinuierliche Schar ist.

1. Wir erledigen zuerst den Fall, daß jede charakteristische M_q unendlich viele Elemente e_a enthält, die sämtlich kontinuierlich an einander liegen. Legen wir in diesem Falle durch ein beliebiges Element e_a die [280
hindurchgehende charakteristische M_q, so gibt es unter den benachbarten Elementen: $a_1 + dx_1, \ldots, a_q + dx_q, \ldots$ dieser M_q jedenfalls eines, das selbst ein Element e_a ist, für welches also:

$$dx_1 = 0, \ldots, dx_q = 0$$

ist. Wir werden zeigen, daß man immer die Konstanten $a_1, \ldots, a_q$ derart wählen kann, daß solche Gleichungen nicht für alle Wertsysteme: $x_{q+1}, \ldots, x_n, p_{q+1}, \ldots, p_n$ bestehen können.

Wir kennen q von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen: $dx_1, \ldots, dp_n$, die von einem Elemente einer charakteristischen M_q zu einem benachbarten Elemente derselben M_q führen, diejenigen nämlich, welche den q charakteristischen Streifen der Gleichungen:

$$p_k - f_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q)$$

entsprechen:

$$dx_1 : \cdots : dx_k : \cdots : dx_q : dx_{q+1} : \cdots : dx_n : dp_1 : \cdots : dp_n =$$
$$= 0 : \cdots : 1 : \cdots : 0 : -\frac{df_k}{dp_{q+1}} : \cdots : -\frac{df_k}{dp_n} : \frac{df_k}{dx_1} : \cdots : \frac{df_k}{dx_n}.$$

Läßt man daher $\tau_1, \ldots, \tau_q$ Parameter bezeichnen, so bestimmen die Gleichungen:

$$dx_1 : \cdots : dx_q : dx_{q+1} : \cdots : dx_n : dp_1 : \cdots : dp_n =$$
$$= \tau_1 : \cdots : \tau_q : -\sum_k^{1 \ldots q} \tau_k \frac{df_k}{dp_{q+1}} : \cdots : -\sum_k^{1 \ldots q} \tau_k \frac{df_k}{dp_n} : \sum_k^{1 \ldots q} \tau_k \frac{df_k}{dx_1} : \cdots : \sum_k^{1 \ldots q} \tau_k \frac{df_k}{dx_n}$$

die allgemeinste Fortschreitungsrichtung innerhalb der M_q. Sollen also $dx_1, \ldots, dx_q$ verschwinden, so müssen $\tau_1, \ldots, \tau_q$ gleich Null sein. Dann aber verschwänden alle übrigen Differentiale dx und dp, vorausgesetzt, daß alle Differentialquotienten der Funktionen f_k hinsichtlich der x oder p bestimmte endliche Werte haben. Der Fall 1 kann somit nur eintreten, wenn eine Größe von der Form:

$$\frac{df_k}{dx_i}, \quad \frac{df_k}{dp_i}$$

für alle Werte der Größen: $x_{q+1}, \ldots, x_n, p_{q+1}, \ldots, p_n$ unendlich oder unbestimmt ist. Es ist aber einleuchtend, daß dies nur für Ausnahmewerte der Konstanten: $a_1, \ldots, a_q$, die man immer vermeiden kann, möglich ist.

2. Wir müssen nun die Möglichkeit berücksichtigen, daß sich die Elemente e_a einer jeden charakteristischen M_q in zwei Scharen ordnen, so zwar, daß die Elemente e_1 der einen Schar vereinzelt, während die Elemente e_2 der zweiten Schar kontinuierlich an einander liegen.

Wäre nun dies der Fall, nicht allein für einige partikuläre Wertsysteme: $a_1, \ldots, a_q$, die man immer vermeiden könnte, sondern über- [281
haupt für alle Wertsysteme: $a_1, \ldots, a_q$, so zerfiele das Involutionssystem in zwei solche: I_1 und I_2, indem die Elemente e_1 dem ersten und die Elemente e_2 dem zweiten Involutionssysteme angehörten. Dann aber würde jede charakteristische M_q des Systems I_2 für jedes Wertsystem $a_1, \ldots, a_q$ unendlich viele Elemente e_a enthalten, die eine kontinuierliche Schar bildeten. Und ein solches Involutionssystem existiert nicht, wie wir bei der Behandlung des Falles 1 nachgewiesen haben.

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

18. Wir wählen eine Mannigfaltigkeit:

$$x_1 = a_1, \ldots, x_q = a_q,$$

die nur eine diskrete Anzahl Elemente mit einer allgemeinen charakteristischen M_q gemein hat, und bezeichnen diese M^{n-q} mit A. Durch A

gehen ∞^{q-1} $(n-q+1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeiten, die durch Gleichungen von der Form:

$$\frac{x_1-a_1}{\tau_1}=\frac{x_2-a_2}{\tau_2}=\cdots=\frac{x_q-a_q}{\tau_q}$$

definiert werden, wobei $\tau_1,\ldots,\tau_q$ Parameter sind. Zu Punktkoordinaten in einer solchen Mannigfaltigkeit, die ich einigemal mit E^{n-q+1} bezeichne, kann man $x_{q+1},\ldots,x_n$ zusammen mit einer der Größen $x_1,\ldots,x_q$ wählen. Doch ist es mehr symmetrisch, und außerdem für meine gleichzeitig synthetische und analytische Behandlung mehr naturgemäß, eine neue Variable x einzuführen, indem man die obenstehenden Gleichungen durch die äquivalenten:

$$x_1-a_1=\tau_1 x,\quad x_2-a_2=\tau_2 x,\ldots,x_q-a_q=\tau_q x$$

ersetzt, — und sodann die Größen $x, x_{q+1},\ldots,x_n$ als Punktkoordinaten jeder E^{n-q+1} aufzufassen.

Ist insbesondere $n=3$ und $q=2$, so ist A eine gerade Linie; die Mannigfaltigkeiten E^{n-q+1} sind Ebenen, die durch diese Gerade gehen, welche also nach gewöhnlicher Sprechweise ein Büschel bilden. Dementsprechend sage ich immer, das heißt, welches auch die Zahlen n und q sind, daß die E^{n-q+1}:

$$x_1-a_1=\tau_1 x,\ldots,x_q-a_q=\tau_q x$$

ein Büschel bilden, dessen Axe A ist.

Satz 28. *Die charakteristischen M_q des Involutionssystems, die durch einen auf der Axe A gelegenen Punkt von allgemeiner Lage:*

$$x=0,\quad x_{q+1}=c_{q+1},\ldots,x_n=c_n$$

gehen, erzeugen eine Integral-M_{n-1} des Involutionssystems. Faßt man die c als Parameter auf, so bilden die betreffenden Integral-M_{n-1} eine vollständige Lösung des Involutionssystems.

Denn die Elemente des Involutionssystems, welche: [282

$$x_1=a_1,\ldots,x_q=a_q$$

befriedigen, lassen sich nicht in kontinuierliche Scharen ordnen, die jedesmal einer charakteristischen M_q angehören.

§ 10. Reduktion eines Involutionssystems auf eine einzige Gleichung.

19. In diesem Paragraphen benutzen wir die Bezeichnungsweise des vorangehenden Paragraphen.

Satz 29. *Die Integral-M_{n-1}^{n-1} des Involutionssystems:*

$$p_1=f_1,\ldots,p_q=f_q$$

schneiden jede Mannigfaltigkeit des Büschels:

$$x_1-a_1=\tau_1 x,\ldots,x_q-a_q=\tau_q x$$

nach $(n-q)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, die einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $x, x_{q+1},\ldots,x_n$ genügen.[1]

Ehe wir diesen wichtigen Satz beweisen, sprechen wir ihn analytisch aus und formulieren ihn gleichzeitig schärfer. Dabei bemerken wir, daß wir überhaupt im folgenden diejenige Funktion, in welche

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)$$

vermöge der Substitution:

$$x_1=a_1+\tau_1 x,\ldots,x_q=a_q+\tau_q x$$

übergeht, mit dem Symbole $\varphi^{(\tau)}$ bezeichnen.

Analytische Form des vorangehenden Satzes: *Ist:*

$$W(x_1,\ldots,x_n)=\text{Const.},\quad p_k=\frac{dW}{dx_k}\qquad (k=1,\ldots,n)$$

irgend eine Integral-M_{n-1}^{n-1} des Involutionssystems:

$$p_1=f_1,\ldots,p_q=f_q,$$

so bestimmen die Gleichungen:

$$W^{(\tau)}=\text{Const.},\quad p_k=\frac{dW^{(\tau)}}{dx_k}\qquad (k=0,\ q+1,\ldots,n)$$

eine Integral-M_{n-q}^{n-q} der Gleichung:

$$p-\sum_k^{1\ldots q}\tau_k f_k^{(\tau)}=0$$

zwischen den unabhängigen Variabeln $x, x_{q+1},\ldots,x_n$.

Da $W=\text{Const.}$ eine Integral-M_{n-1}^{n-1} des Involutionssystems be- [283 stimmt, so bestehen für $k=1,\ldots,q$ die Gleichungen:

$$\frac{dW}{dx_k}=f_k\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{dW}{dx_{q+1}},\ldots,\frac{dW}{dx_n}\right).$$

Auf diese führen wir die Substitution:

$$x_1=a_1+\tau_1 x,\ldots,x_q=a_q+\tau_q x$$

aus und finden so, da:

$$\left(\frac{dW}{dx_{q+i}}\right)^\tau=\frac{d}{dx_{q+i}}W^\tau\qquad (i=1,\ldots,n-q)$$

ist, die q Gleichungen:

$$\left(\frac{dW}{dx_k}\right)^\tau=f_k\left(a_1+\tau_1 x,\ldots,a_q+\tau_q x,\ x_{q+1},\ldots,x_n,\frac{dW^\tau}{dx_{q+1}},\ldots,\frac{dW^\tau}{dx_n}\right),$$

1) Dieser Satz läßt sich übrigens auf alle Integral-M_{n-1} ausdehnen.

die durch Multiplikation respektive mit τ_k und Addition:

$$\sum_k^{1\ldots q} \tau_k \left(\frac{dW}{dx_k}\right)^\tau = \sum_k^{1\ldots q} \tau_k f_k\left(a_1 + \tau_1 x, \ldots, \frac{dW^\tau}{dx_n}\right)$$

ergeben. Nun ist aber:

$$\frac{d}{dx} W^\tau = \sum_k^{1\ldots q} \tau_k \left(\frac{dW}{dx_k}\right)^\tau,$$

also kommt:

$$\frac{dW^\tau}{dx} = \sum_k^{1\ldots q} \tau_k f_k\left(a_1 + \tau_1 x, \ldots, \frac{dW^\tau}{dx_n}\right),$$

welche Gleichung eben besagt, daß die Gleichung:

$$W^\tau = \text{Const.}$$

eine Integral-M_{n-q}^{n-q} von:

$$p - \sum_k^{1\ldots q} \tau_k f_k^\tau = 0$$

bestimmt.

Es ist zu bemerken, daß die Gleichung: $p - \Sigma \tau_k f_k^\tau = 0$ je nach den Werten der Parameter τ ∞^{q-1} verschiedene Gleichungen repräsentiert.

Satz 30. *Die charakteristischen M_q schneiden jede Mannigfaltigkeit des Büschels:*

$$x_1 - a_1 = \tau_1 x, \ldots, x_q - a_q = \tau_q x$$

nach den Charakteristiken der entsprechenden Gleichung: $p - \Sigma \tau_k f_k^\tau = 0.$

Oder analytisch ausgesprochen:

Bilden $2n - 2q - 1$ Funktionen: $\Pi_1, \ldots, \Pi_{2n-2q-1}$ *von* $x_1, \ldots, x_n$, $p_{q+1}, \ldots, p_n$ *ein System von Lösungen der Gleichungen:*

$$(p_1 - f_1, \Pi) = 0, \ldots, (p_q - f_q, \Pi) = 0, \quad \sum p \frac{d\Pi}{dp} = 0,$$

so sind die durch die Substitution: [284

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \ldots, x_q = a_q + \tau_q x$$

hervorgehenden Funktionen Π^τ *ein System Lösungen von:*

$$\left(p - \sum_k^{1\ldots q} \tau_k f_k^\tau, \Pi\right) = 0, \quad \sum p \frac{d\Pi}{dp} = 0.$$

Denn die Gleichungen:

$$(p_k - f_k, \Pi) = 0,$$

oder entwickelt:

$$\frac{d\Pi}{dx_k} + \sum_i^{q+1\ldots n} \left(\frac{df_k}{dx_i}\frac{d\Pi}{dp_i} - \frac{df_k}{dp_i}\frac{d\Pi}{dx_i}\right) = 0,$$

gehen durch Ausführung der Substitution:

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \ldots, x_q = a_q + \tau_q x,$$

indem man die, für i gleich $q + 1, \ldots, n$ stattfindenden Relationen:

$$\left(\frac{df_k}{dx_i}\right)^\tau = \frac{df_k^\tau}{dx_i}, \qquad \left(\frac{d\Pi}{dx_i}\right)^\tau = \frac{d\Pi^\tau}{dx_i},$$

$$\left(\frac{df_k}{dp_i}\right)^\tau = \frac{df_k^\tau}{dp_i}, \qquad \left(\frac{d\Pi}{dp_i}\right)^\tau = \frac{d\Pi^\tau}{dp_i}$$

berücksichtigt, in:

$$\left(\frac{d\Pi}{dx_k}\right)^\tau = -\sum_i^{q+1\ldots n} \left(\frac{df_k^\tau}{dx_i}\frac{d\Pi^\tau}{dp_i} - \frac{df_k^\tau}{dp_i}\frac{d\Pi^\tau}{dx_i}\right) = (f_k^\tau, \Pi^\tau)$$

über. Multipliziert man hier mit τ_k und addiert die $k = 1, \ldots, q$ entsprechenden q Gleichungen, so findet man:

$$\sum_k^{1\ldots q} \tau_k \left(\frac{d\Pi}{dx_k}\right)^\tau = (\tau_1 f_1^\tau + \cdots + \tau_q f_q^\tau, \Pi^\tau),$$

woraus wegen:

$$\frac{d\Pi^\tau}{dx} = \sum_k^{1\ldots q} \tau_k \left(\frac{d\Pi}{dx_k}\right)^\tau$$

folgt:

$$\frac{d\Pi^\tau}{dx} = (\tau_1 f_1^\tau + \cdots + \tau_q f_q^\tau, \Pi^\tau),$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$\left(p - \sum \tau_k f_k^\tau, \Pi^\tau\right) = 0.$$

Bemerkt man endlich, daß die Π^τ wie die Π von nullter Ordnung hinsichtlich der p sind, so folgt, daß die Π^τ Lösungen des vollständigen Systems:

$$\left(p - \sum_k^{1\ldots q} \tau_k f_k^\tau, \Pi\right) = 0, \qquad p\frac{d\Pi}{dp} + \sum_i^{q+1\ldots n} p_i \frac{d\Pi}{dp_i} = 0$$ [285

sind.

Es bleibt noch nachzuweisen, daß sie von einander unabhängig sind, das heißt, daß keine Relation von der Form:

$$\Omega(\Pi_1^\tau, \ldots, \Pi_{2n-2q-1}^\tau, \tau_1, \ldots, \tau_q) = 0$$

stattfindet. Bestände in der Tat eine solche, so ergäbe sich durch die Substitution:

$$\tau_k = \frac{x_k - a_k}{x}$$

die Identität:

$$\Omega\left(\Pi_1, \ldots, \Pi_{2n-2q-1}, \frac{x_1 - a_1}{x}, \ldots, \frac{x_q - a_q}{x}\right) = 0,$$

woraus bei der Substitution $x = 1$ eine Relation zwischen: $\Pi_1, \ldots, \Pi_{2n-2q-1}, x_1, \ldots, x_q$ resultieren würde. Demzufolge würden die Gleichungen:

$$\Pi_1 = k_1, \ldots, \Pi_{2n-2q-1} = k_{2n-2q-1}, \quad x_1 = a_1, \ldots, x_q = a_q$$

für alle Wertsysteme k und a von unendlich vielen Wertsystemen $x_{q+1}, \ldots, x_n, p_{q+1}, \ldots, p_n$ befriedigt werden. Dies steht aber im Widerspruche mit Paragraph 9; also ist unsere Annahme nicht richtig.

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

20. Die Gleichung:

$$p - \sum_k \tau_k f_k^\tau = 0$$

enthält die Verhältnisgrößen $\tau_1, \ldots, \tau_q$ und repräsentiert daher, wie schon bemerkt, je nach den Werten dieser Parameter ∞^{q-1} verschiedene partielle Differentialgleichungen, deren Charakteristiken beiläufig mit dem gemeinsamen Symbole K bezeichnet werden sollen.

Früher (Satz 30) sahen wir, daß eine allgemeine charakteristische M^q ∞^{q-1} Charakteristiken K enthält, eine nämlich für jede Gleichung $p - \Sigma \tau_k f_k^\tau = 0$; und alle diese K gehen, als Durchschnitte der charakteristischen M^q mit den E^{n-q+1} des Büschels, durch einen gemeinsamen Punkt P: den Schnittpunkt der M^q mit der Achse aller E^{n-q+1}.

Durch P gehen nun im allgemeinen ∞^{n-q-1} charakteristische M^q, deren jede ∞^{q-1} Charakteristiken K enthält; und alle diese K erzeugen eo ipso dasselbe Punktgebilde wie die ∞^{n-q-1} charakteristischen M^q, die durch P gehen. Da aber diese K auch als der Inbegriff aller durch P gehenden K definiert werden können, so ist hiermit folgender Satz bewiesen:

Satz 31. *Die durch einen Punkt der Achse gehenden Charakteristiken K aller Gleichungen: $p - \Sigma \tau_k f_k^\tau = 0$ erzeugen dasselbe Punktgebilde, wie* [286 *die durch denselben Punkt gehenden charakteristischen M^q des Involutionssystems.*

Nun wissen wir aber schon (Satz 28), daß die durch einen Punkt der Achse gehenden charakteristischen M^q ein Punktgebilde erzeugen,

das, als Elementgebilde aufgefaßt, eine Integral-M_{n-1} ist, daß ferner der Inbegriff aller in dieser Weise erhaltenen M_{n-1} eine vollständige Lösung ist. Also:

Satz 31a. *Die durch einen Punkt:*

$$x = 0, \quad x_{q+1} = c_{q+1}, \ldots, x_n = c_n$$

allgemeiner Lage auf der Achse gehenden Charakteristiken aller Gleichungen: $p - \Sigma \tau_k f_k^\tau = 0$ erzeugen ein Punktgebilde, das, als Elementgebilde aufgefaßt, eine Integral-M_{n-1} des Involutionssystems ist. Und zwar erhält man hierdurch eine vollständige Lösung mit den Parametern: $c_{q+1}, \ldots, c_n$.

Endlich werden wir dieses Theorem analytisch aussprechen:

Theorem 8. *Soll das Involutionssystem:*

$$p_1 - f_1 = 0, \ldots, p_q - f_q = 0$$

integriert werden, so wählt man q Konstanten: $a_1, \ldots, a_q$ nach den Bedingungen des vorangehenden Paragraphen, führt sodann die Funktionen f_k durch die Substitution:

$$x_k = a_k + \tau_k x \qquad (k = 1, \ldots, q)$$

in die Funktionen f_k^τ über und bildet die Gleichung:

$$(\alpha) \qquad p - \sum_k \tau_k f_k^\tau = 0$$

zwischen den Variabeln: $x, x_{q+1}, \ldots, x_n, p, p_{q+1}, \ldots, p_n$. Man integriert diese Gleichung, das heißt, man sucht Funktionen Ω von $x, x_{q+1}, \ldots, x_n, p_{q+1} : p, \ldots, p_n : p$, welche:

$$\left(p - \sum \tau_k f_k^\tau, \ \Omega\right) = 0$$

ergeben; bildet sodann eine vollständige Lösung der reduzierten Gleichung (α), indem man zwischen den Gleichungen:

$$\Omega_k(x, x_{q+1}, \ldots, x_n, p, p_{q+1}, \ldots, p_n) = \Omega_k(0, c_{q+1}, \ldots, c_n, p^0, p_{q+1}^0, \ldots, p_n^0)$$

die Größen: $p, p_{q+1}, \ldots, p_n, p^0, p_{q+1}^0, \ldots, p_n^0$ eliminiert. Macht man endlich in den hierdurch gefundenen Gleichungen der vollständigen Lösung:

$$W_k(x, x_{q+1}, \ldots, x_n, c_{q+1}, \ldots, c_n, \tau_1, \ldots, \tau_q) = 0$$

die Substitution:

$$\tau_k = \frac{x_k - a_k}{x},$$

so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen, aus denen [287 *nicht allein* $\tau_1, \ldots, \tau_q$, *sondern auch* x *verschwunden ist, eine vollständige Lösung des ursprünglichen Involutionssystems.*

§ 13. Meine neue Integrationsmethode.

21. Zur Begründung meiner neuen Methode brauche ich nun nur noch zwei Hilfssätze, die Jacobi in allgemeinerer Form ausgesprochen hat.

Satz 32. *Es sei:* $p_1 - f = 0$ *irgend eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die hinsichtlich* p_1 *aufgelöst ist, und* N *eine Funktion von:* $x_1, \ldots, x_n, p_2 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n$, *die zu* $p_1 - f$ *in Involutionsbeziehung steht:*

$$(p_1 - f, N) = 0.$$

Lassen die beiden Gleichungen: $p_1 - f = 0$, $N = a$ *sich hinsichtlich* p_1 *und* p_2 *auflösen, so stehen auch die hervorgehenden Gleichungen:*

$$p_1 - f_1 = 0, \quad p_2 - f_2 = 0$$

in Involutionsbeziehung, das heißt, es ist: $(p_1 - f_1, p_2 - f_2) = 0$.

Da die beiden Gleichungen: $N = a$ und: $p_2 - f_2 = 0$ äquivalent sind, so ist dies auch mit den entsprechenden Differentialgleichungen:

$$\frac{dN}{dx_1} dx_1 + \cdots + \frac{dN}{dx_n} dx_n + \frac{dN}{dp_2} dp_2 + \cdots + \frac{dN}{dp_n} dp_n = 0,$$

$$-\frac{df_2}{dx_1} dx_1 + \cdots - \frac{df_2}{dx_n} dx_n + \quad dp_2 + \cdots - \frac{df_2}{dp_n} dp_n = 0$$

der Fall; folglich sind die entsprechenden Koeffizienten proportional. Daher ist die Gleichung:

$$(p_1 - f, N) = \frac{dN}{dx_1} + \sum_i^{2\ldots n} \left(\frac{df}{dx_i} \frac{dN}{dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{dN}{dx_i} \right) = 0$$

mit der folgenden:

$$\frac{df_2}{dx_1} - \frac{df}{dx_2} - \frac{df}{dp_2} \frac{df_2}{dx_2} + \sum_i^{3\ldots n} \left(\frac{df}{dx_i} \frac{df_2}{dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{df_2}{dx_i} \right) = 0$$

äquivalent. Nun ist aber:

$$-\frac{df}{dx_2} - \frac{df}{dp_2} \frac{df_2}{dx_2} = -\frac{df_1}{dx_2},$$

$$\sum_i^{3\ldots n} \left(\frac{df}{dx_i} \frac{df_2}{dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{df_2}{dx_i} \right) = -(f_1 f_2),$$

also kommt:

$$-\frac{df_2}{dx_1} + \frac{df_1}{dx_2} + (f_1 f_2) = 0 = (p_1 - f_1, \; p_2 - f_2), \qquad [288$$

was zu beweisen war.

Satz 33. *Ist:* $p_1 - f = 0$ *eine vorgelegte Gleichung und* X *eine bekannte Funktion der* x, *die zu* $p_1 - f$ *in Involutionsbeziehung steht, so ist es möglich, die Zahl der unabhängigen Variabeln in:* $p_1 - f = 0$ *um eine Einheit zu erniedrigen.*

Sei [nämlich]:

$$W = \text{Const.}, \qquad p_k = \frac{dW}{dx_k}$$

irgend eine Integral-M^{n-1} von: $p_1 - f = 0$. Ich führe: $x_1, \ldots, x_{n-1}, X$ als neue unabhängige Variable ein und bezeichne die Differentialquotienten von W hinsichtlich dieser Größen mit:

$$p'_1, \ldots, p'_{n-1}, P.$$

Alsdann ist für $k = 1, \ldots, n-1$:

$$p_k = p'_k + P \frac{dX}{dx_k}, \qquad p_n = P \frac{dX}{dx_n}.$$

Also geht: $p_1 - f = 0$ durch die Einführung der neuen Variabeln in:

$$p'_1 + P \frac{dX}{dx_1} - f\left(x_1, \ldots, x_n, p'_2 + P \frac{dX}{dx_2}, \ldots, P \frac{dX}{dx_n}\right) = 0$$

über. Bilde ich nun den Differentialquotienten der linken Seite hinsichtlich P, so finde ich:

$$\frac{dX}{dx_1} - \frac{df}{dp_2} \frac{dX}{dx_2} - \cdots - \frac{df}{dp_n} \frac{dX}{dx_n},$$

das heißt:

$$(p_1 - f, X),$$

welche Größe nach unserer Annahme gleich Null ist. Also kommt P in der transformierten Gleichung gar nicht vor.

Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen.

Satz 34. *Soll eine Gleichung von der Form:*

$$p_1 - f(x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

integriert werden, und kennt man irgend eine Funktion N *von:* $x_1, \ldots, x_n$, $p_2 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n$, *die zu* $p_1 - f$ *in Involutionsbeziehung steht, so ist es immer möglich, eine Gleichung zwischen* $n - 1$ *Variabeln aufzustellen, deren Integration diejenige von:* $p_1 - f = 0$ *nach sich zieht.*

Ist nämlich N eine Funktion der x allein, so führt man N zusammen mit $n-1$ der Größen x als neue Variabeln ein und erhält dadurch nach dem vorangehenden Satze eine Gleichung, die nur noch $n-1$ Differentialquotienten enthält.

Enthält dagegen N einige der Größen $p_2, \ldots, p_n$ etwa p_2, so löst [289 man die Gleichungen: $p_1 - f = 0$, $N = a$ hinsichtlich p_2 und p_1 auf. Die hervorgehenden Gleichungen:

$$p_1 - f_1 = 0, \quad p_2 - f_2 = 0$$

bilden (Satz 32) ein Involutionssystem, dessen Integration sich nach Theorem 8 auf diejenige einer Gleichung zwischen $n-1$ Variabeln reduzieren läßt. Ist diese neue Gleichung integriert, so bestimmt man nach der in dem zitierten Satze entwickelten Regel eine vollständige Lösung des Involutionssystems; und diese Lösung, die überdies die Konstante a enthält, ist eine vollständige Lösung von: $p_1 - f = 0$.

Hierauf begründe ich nun die folgende Integrationsmethode:

Theorem 9. *Um eine partielle Differentialgleichung zwischen n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$:*

$$p_1 - f = 0$$

zu integrieren, verfährt man folgendermaßen: Man sucht eine Funktion von: $x_1, \ldots, x_n, p_2 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n$, die der Gleichung:

$$(p_1 - f, N) = 0$$

genügt, und reduziert sodann: $p_1 - f = 0$ nach dem vorangehenden Satze auf eine äquivalente Gleichung zwischen $n-1$ Variabeln: $x_1', \ldots, x_{n-1}'$:

$$p_1^{(1)} - f^{(1)} = 0.$$

Sodann sucht man eine Lösung der Gleichung:

$$(p_1^{(1)} - f^{(1)}, N) = 0$$

und reduziert darnach in entsprechender Weise: $p_1^{(1)} - f^{(1)} = 0$ auf eine äquivalente Gleichung zwischen $n-2$ Variabeln: $p_1^{(2)} - f^{(2)} = 0$, und so weiter. Zuletzt kommt man zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln, die man integriert. Sodann geht man rückwärts und bestimmt sukzessive vermöge ausführbarer Operationen vollständige Lösungen aller Gleichungen: $p_1^{(k)} - f^{(k)} = 0$ und findet zuletzt eine vollständige Lösung der ursprünglich vorgelegten Gleichung.

Da sich nach Theorem 8 ein beliebiges Involutionssystem auf eine äquivalente partielle Differentialgleichung reduzieren läßt, so ist hiermit zugleich eine allgemeine Integrationsmethode eines beliebigen Involutionssystems begründet.

Note 1. [290

22. Mayer hat zuerst eine stringente Bestimmungsweise der gemeinsamen Integral-M_{n-1}^{n-1} von beliebigen vorgelegten Gleichungen gegeben. Indem ich diese Theorie im Anschluß an das Vorangehende in kurzen Zügen entwickele, habe ich eine kleine neue Bemerkung hinzuzufügen.

Die Sätze 24, 25 gelten eo ipso, wenn die betreffenden Integral-M_{n-1} insbesondere M_{n-1}^{n-1} sind. Deshalb können wir schließen (Satz 26), daß sich die gemeinsamen Integral-M^{n-1} von beliebigen gegebenen Gleichungen immer als die gemeinsamen Integral-M^{n-1} eines Involutionssystems von der Form:

$$x_i = f_i(x_{m+1}, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$p_k = h_k(x_{m+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m, p_{m+q+1}, \ldots, p_n) \qquad (k = m+1, \ldots, m+q)$$

definieren lassen.

Es fragt sich, wie man diese M^{n-1} findet.

Ist $m > 1$, so haben unsere Gleichungen selbstverständlicherweise keine gemeinsame Integral-M^{n-1}. Ist $m = 1$, so können sie höchstens eine solche M^{n-1} haben, nämlich:

$$x_1 - f_1(x_2, \ldots, x_n) = 0 = W, \quad p_k = \frac{dW}{dx_k}.$$

Ist endlich $m = 0$, so läßt sich zeigen, daß die Gleichungen:

$$p_k - h_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q)$$

vollständige Lösungen von der Form:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-q}) = 0$$

besitzen.

Zum Beweise nehmen wir eine Mannigfaltigkeit:

$$x_1 = a_1, \ldots, x_q = a_q$$

von allgemeiner Lage, die bekanntlich (Satz 27) eine allgemeine charakteristische M^q nur in einem Punkte (oder einigen Punkten) schneidet. Wir betrachten eine in ihr enthaltene Punktmannigfaltigkeit von der Gleichungsform:

$$x_1 = a_1, \ldots, x_q = a_q, \; x_{q+1} = c_{q+1} + c_{q+2} x_{q+2} + \cdots + c_n x_n,$$

wie auch die zugehörige Elementmannigfaltigkeit. Diejenigen Elemente dieser M_{n-1}, die dem Involutionssysteme: $p_k - h_k = 0$ genügen, bilden eine Integral-M_{n-q-1}:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x_1 = a_1, \ldots, x_q = a_q, \; x_{q+1} = c_{q+1} + \Sigma\, c_{q+i}\, x_{q+i}, \\ p_1 = h_1, \ldots, p_q = h_q, \; p_{q+i} = -c_{q+i} p_{q+1}, \end{cases}$$

und also erzeugen die durch diese Elemente hindurchgehenden charakteristischen M_q eine Integral-M_{n-1}. Faßt man endlich die c als Parameter [291 auf, so erhält man eine vollständige Lösung; denn jede charakteristische M_q enthält ein Element von der Gleichungsform (A) und gehört folglich einer unter den gefundenen Integral-M_{n-1} an.

Ich behaupte, daß die erhaltene vollständige Lösung die Form:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, c_{q+1}, \ldots, c_n) = 0$$

besitzt, daß also die betreffenden M_{n-1}, auch als Punktgebilde betrachtet, $(n-1)$-fach ausgedehnt sind.

Man setze voraus, daß unsere M_{n-1} $(n-k)$-fach ausgedehnte Punktgebilde sind, und k größer als 1 ist; dann gibt es in jedem Punkte einer solchen M_{n-1}^{n-k} unendlich viele Elemente, die ihr angehören. Unsere M_{n-1}^{n-k} enthält nun ∞^{n-q-1} Punkte, die den Gleichungen:

$$x_1 = a_1, \ldots, x_q = a_q$$

genügen; also hat sie noch mehr Elemente, welche dieselben Gleichungen befriedigen. Folglich enthält jede unter den ∞^{n-q-1} charakteristischen M_q, die sie erzeugen, unendlich viele Elemente von jener Lage. Hiermit sind wir aber auf Widerspruch geführt, und also, und so weiter.

Nachdem wir in dieser Weise eine vollständige Lösung von der verlangten Form gefunden haben, bestimmen wir die allgemeinste gemeinsame Integral-M_{n-1}^{n-1} in der gewöhnlichen Weise durch Variation der Konstanten.

Endlich möge auch folgender Satz, dessen Beweis in dem Vorangehenden liegt, hier ausgesprochen werden:

Satz 35. *Um alle Integral-M^{n-1} des q-gliedrigen Involutionssystems: $p_k - h_k = 0$ zu finden, kann man in folgender Weise verfahren. Man nimmt irgend eine M_{n-1}^{n-q-1}, unter deren Elementen nur ∞^{n-q-1} dem Involutionssysteme genügen. Die zu diesen Elementen gehörigen charakteristischen M_q erzeugen, wenn sie überhaupt eine Integral-M_{n-1} bilden, immer eine M_{n-1}^{n-1}.*

Note 2.

23. Wir haben gelehrt, das Involutionssystem:

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0$$

auf eine äquivalente Gleichung:

$$p - \sum_k \tau_k h_k^\tau = 0$$

zurückzuführen. Wir werden nun voraussetzen, daß man bei der Integration dieser neuen Gleichung einen Schritt vorwärts gekommen ist, daß man also eine Funktion Ω von:

$$x, x_{q+1}, \ldots, x_n, p_{q+1} : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n$$ [292

gefunden hat, die:

$$(p - \sum_k \tau_k h_k^\tau, \Omega) = 0$$

ergibt. Wir werden zeigen, daß man dann im allgemeinen mehrere Lösungen Ω der letzten Gleichung durch ausführbare Operationen finden kann.

Zunächst bemerken wir, daß Ω die Größen $x, \tau_1, \ldots, \tau_q$ nur in den Kombinationen: $\tau_1 x, \ldots, \tau_q x$ enthalten darf. Sind nämlich $W_1, \ldots, W_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen nullter Ordnung von:

$$(p_1 - h_1, W) = 0, \ldots, (p_q - h_q, W) = 0,$$

so sind die durch die Substitution:

$$x_k = a_k + \tau_k x \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 1, \ldots, q)}$$

hervorgehenden Funktionen: $W_1^\tau, \ldots, W_{2n-2q-1}^\tau$ ein System Lösungen nullter Ordnung von:

$$(p - \sum_k \tau_k h_k^\tau, W) = 0,$$

und also ist Ω eine Funktion von $W_1^\tau, \ldots, W_{2n-2q-1}^\tau$.

Wir bezeichnen diejenige Funktion, in welche Ω durch die Substitution:

$$\tau_1 x = x_1 - a_1, \ldots, \tau_q x = x_q - a_q$$

übergeht, mit W, und führen dann die entsprechende Substitution:

$$\tau_1 = \frac{x_1 - a_1}{x}, \ldots, \tau_q = \frac{x_q - a_q}{x}$$

auf die Gleichung:

$$\left(p - \sum_k \tau_k h_k^\tau, \; \Omega\right) = \frac{d\Omega}{dx} - \sum_k \tau_k (h_k^\tau \Omega) = 0$$

aus. Hierdurch kommt, da $d\Omega : dx$ durch diese Substitution in:

$$\sum_k \frac{x_k - a_k}{x} \frac{dW}{dx_k}$$

übergeht, die Gleichung:

$$\sum_k \frac{x_k - a_k}{x} \frac{dW}{dx_k} - \sum_k \frac{x_k - a_k}{x} (h_k W) = 0,$$

die durch Multiplikation mit x die Form:

$$\Big(\sum_k (x_k - a_k)(p_k - h_k),\ W\Big) = 0$$

annimmt.

Setzen wir nun in der Jacobischen Identität: [293

$$\big(A(BC)\big) + \big(B(CA)\big) + \big(C(AB)\big) = 0,$$

die wir als bekannt voraussetzen:

$$A = \sum_k (x_k - a_k)(p_k - h_k), \quad B = W, \quad C = (x_i - a_i)(p_i - h_i),$$

so kommt:

$$\Big(\sum_k (x_k - a_k)(p_k - h_k)\,\big(W,\ (x_i - a_i)(p_i - h_i)\big)\Big) = 0.$$

Ist also $\big(W, (x_i - a_i)(p_i - h_i)\big)$ keine Funktion von W, so finden wir eine neue Lösung von:

$$\Big(\sum_k (x_k - a_k)(p_k - h_k),\ W\Big) = 0,$$

und diese Lösung geht durch die Substitution:

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \ldots, x_q = a_q + \tau_q x$$

in eine neue Lösung von:

$$\Big(p - \sum_k \tau_k h_k^\tau,\ \Omega\Big) = 0$$

über.

Findet man in dieser Weise sukzessive alle Lösungen der letzten Gleichung, so ist hiermit die Gleichung: $p - \Sigma \tau_k h_k^\tau = 0$, und also auch das ursprüngliche Involutionssystem integriert. Findet man alle Lösungen, ausgenommen die letzte, so bestimmt man diese durch die Jacobische Multiplikatortheorie, und so weiter.

Entsprechende Bemerkungen lassen sich bekanntlich [in bezug] auf die Mayersche Integrationsmethode machen. Darauf gehe ich indes an diesem Orte nicht näher ein. Ich erinnere nur daran, daß ich in meiner letzten Abhandlung in den Mathematischen Annalen gezeigt habe, wie

man am besten verfahren muß, wenn man bei der Integration eines Involutionssystems: $p_k - h_k = 0$ gleichzeitig mehrere Lösungen der Gleichungen: $(p_k - h_k, \Omega) = 0$ gefunden hat.[1])

Aus dem Vorangehenden geht insbesondere hervor, daß der sogenannte ungünstigste Fall bei der Jacobischen Methode im Gegenteil der allergünstigste ist, insofern er gar keine weiteren Integrationen verlangt.

Note 3.

24. Stehen q [unabhängige] Funktionen nullter Ordnung: $F_1, \ldots, F_q$ von $x_1, \ldots, x_n$. $p_1, \ldots, p_n$ paarweise in der Beziehung:

$$(F_i F_k) = 0,$$ [294

so sagen wir, daß die Gleichungen:

$$F_1 = a_1, \ldots, F_q = a_q$$

ein q-gliedriges Involutionssystem bilden. Ich werde beweisen, daß diese Gleichungen die größtmögliche Anzahl gemeinsamer Integral-M_{n-1} besitzen. Dabei benütze ich allerdings einige Sätze, die nicht in dieser Abhandlung bewiesen sind.

Satz 36. *Sind $F_1, \ldots, F_q$ [unabhängige] Funktionen nullter Ordnung, die paarweise in Involutionsbeziehung stehen, so gibt es immer weitere Funktionen $F_{q+1}, \ldots, F_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$, beziehungsweise nullter und erster Ordnung, die den Relationen:*

$$(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i F_i) = 1$$

genügen.

Man findet den Beweis dieses Satzes in den Mathematischen Annalen Bd. VIII, S. 295 [hier Abh. I, S. 87f.].

Satz 37. *Sind $F_1, \ldots, F_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ homogene Funktionen, beziehungsweise nullter und erster Ordnung, welche die obenstehenden Gleichungen erfüllen, so besteht die Gleichung:*

$$\Sigma\, \Phi dF = \Sigma\, p dx.$$

Diesen Satz habe ich in meiner soeben zitierten Abhandlung bewiesen, indem ich die Clebschsche Theorie des Pfaffschen Problems als bekannt voraussetzte.[2]) Einen elementaren Beweis hat Mayer gegeben.

1) [Hier Abh. I, S. 63—73, 91—93.]
2) [Hier Abh. I, S. 11—26.]

Satz 38. *Sind $F_1, \ldots, F_q$ [unabhängige] Funktionen nullter Ordnung, die paarweise: $(F_i F_k) = 0$ ergeben, so lassen sich die Elemente des Involutionssystems:*

$$F_1 = a_1, \ldots, F_q = a_q$$

zu Integral-M_{n-1} zusammenfassen.

Denn nach den beiden vorangehenden Sätzen gibt es solche weitere Funktionen F und Φ, daß die Gleichung:

$$\Sigma p\, dx = \Sigma \Phi dF$$

besteht.

Satz 39. *Die Gleichungen eines Involutionssystems lassen sich durch Auflösung auf die Form eines allgemeinen Involutionssystems:*

$$x_i - f_i(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0, \quad p_k - h_k = 0$$

bringen.

Denn die gemeinsamen Integral-M_{n-1} des vorgelegten Involu- [295 tionssystems befriedigen keine weiteren Gleichungen.

Dieser Satz ist zuerst von Mayer gegeben. Dabei muß ich jedoch bemerken, daß der folgende Fundamentalsatz, der die Theorie der Involutionssysteme auf ihre einfachste Form bringt, früher von mir ohne Beweis gegeben war (Math. Annalen Bd. VIII, S. 281 [hier Abh. I, S. 73]).[1]

Satz 40. *Die Integration eines q-gliedrigen Involutionssystems [in n Variabeln] läßt sich auf diejenige einer einzigen Gleichung zwischen $n - q + 1$ Variabeln zurückführen.*

Dieser Satz folgt als Korollar aus dem vorangehenden in Verbindung mit Theorem 6 und 8.

25. In der Abhandlung „Über eine Erweiterung der Lieschen Integrationsmethode" erledigt Mayer mit seiner gewohnten Eleganz und Stringenz folgendes Problem:

Vorgelegt ist ein Involutionssystem:

$$F_1 = a_1, \ldots, F_{q+m} = a_{q+m},$$

aus dessen Gleichungen sich m Relationen zwischen den x allein herleiten lassen. Es wird vorausgesetzt, daß $F_1, \ldots, F_q$ hinsichtlich der p von einander unabhängig sind, und es wird verlangt, die Integration des Systems:

$$F_1 = a_1, \ldots, F_q = a_q$$

auf diejenige einer einzigen Gleichung zwischen $n - q - m + 1$ Variabeln zurückzuführen.

---

1) Auch die ersten Sätze waren früher von mir gegeben.

Ich werde zeigen, daß meine ursprünglichen Theorien sozusagen unmittelbar die Erledigung dieses Problems geben. Allerdings ist Mayers Behandlung in gewissem Sinne einfacher als die meinige.

Nach meiner Methode verlangt die Integration des Involutionssystems:

$$F_1 = a_1, \ldots, F_{q+m} = a_{q+m}$$

nur die Integration einer Gleichung zwischen $n - q - m + 1$ Variabeln. Ist diese geleistet, so kann man durch ausführbare Operationen weitere Funktionen F und Φ finden, welche die Relation:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

befriedigen; und dann ergeben die Gleichungen:

$$F_{q+1} = a_{q+1}, \ldots, F_n = a_n$$

eine vollständige Lösung des Involutionssystems: $F_1 = a_1, \ldots, F_q = a_q$. [296 Oder, wenn man will, dann sind:

$$F_{q+1}, \ldots, F_n, \Phi_{q+1} : \Phi_n, \ldots, \Phi_{n-1} : \Phi_n$$

ein System Lösungen der Gleichungen:

$$(F_1 \Psi) = 0, \ldots, (F_q \Psi) = 0, \quad \sum p \frac{d\Psi}{dp} = 0,$$

womit die charakteristischen M_q des q-gliedrigen Involutionssystems bestimmt sind.

Christiania, Juni 1875.

IIa.

Selbstanzeigen von II.

F. d. M. Bd. VII, Jahrg. 1875, S. 225–231. Berlin 1877.

Nach einer gedrängten Darstellung der von Jacobi und [225 Clebsch herrührenden Theorie vollständiger Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen wird das folgende Problem gestellt:

Problem 1. *Man soll alle Gleichungssysteme von der Form:*

$$\mathfrak{F}_k(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

bestimmen, vermöge deren die Differentialrelation:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch stattfindet.

Es ergibt sich, daß jedes solche Gleichungssystem n Gleichungen [226 von der Form:

$$x_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad (k = a, b, \ldots, l)$$

$$p_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad (m, \ldots, t)$$

enthält, wobei $a, b, \ldots, l, m, \ldots, t$ eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ sind, und H irgend eine Funktion von $x_m, \ldots, x_t, p_a, \ldots, p_t$ bezeichnet, die hinsichtlich der p homogen von erster Ordnung ist.

Beschränkt man sich für einen Augenblick auf den Fall $n = 3$ und faßt dabei x_1, x_2, x_3 als Cartesische Punktkoordinaten im Raume auf, p_1, p_2, p_3 als Bestimmungsstücke einer durch den Punkt x_1, x_2, x_3 gehenden Ebene:

$$p_1(x_1' - x_1) + p_2(x_2' - x_2) + p_3(x_3' - x_3) = 0,$$

so kann diese Theorie folgendermaßen interpretiert werden:

Die Größen: x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3 sind Bestimmungsstücke eines Flächenelements. Die Gleichung: $\Sigma\, p\, dx = 0$ sagt aus, daß die beiden benachbarten Flächenelemente x, p und $x + dx$, $p + dp$ vereinigt liegen. Das gestellte Problem kommt darauf hinaus, alle Scharen von Flächenelementen zu finden, in denen jedes Element mit allen benachbarten Elementen derselben Schar vereinigt liegt, und der gefundene Satz lehrt, daß die Elemente, die durch einen Punkt gehen, oder eine Kurve umhüllen, oder eine Fläche bedecken, die allgemeinste Schar mit der verlangten Eigenschaft sind.

Ist n größer als 3, so ließe sich eine entsprechende Interpretation geben, indem man die Betrachtungen der modernen Mannigfaltigkeitslehre benutzte. In diesem Referate wird es jedoch zweckmäßig sein, eine rein analytische Darstellung zu geben.

Problem 2. *Vorgelegt seien q Gleichungen:*

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q),$$

die hinsichtlich der p homogen von nullter Ordnung sind. Man soll in allgemeinster Weise $n - q$ weitere Gleichungen finden, welche zusammen mit den gegebenen den Ausdruck $\Sigma\, p\, dx$ identisch verschwinden lassen.

Es seien: [227

$$F_1 = a_1, \ldots, F_q = a_q$$

die vorgelegten Gleichungen. Gelingt es, solche weitere Funktionen: $F_{q+1}, \ldots, F_n$ zu finden, daß eine Relation von der Form:

$$\Sigma\, p\, dx = \Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n \tag{1}$$

stattfindet, so bilden:

$$F_{q+1} = a_{q+1}, \ldots, F_n = a_n \tag{2}$$

zusammen mit: $F_1 = a_1, \ldots, F_q = a_q$ ein Gleichungssystem der verlangten Art. Wir sagen in diesem Falle, daß die Gleichungen (2) eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichungen bilden. Ist erst eine vollständige Lösung bestimmt, so findet man durch ausführbare Operationen (Variation der Konstanten) das allgemeinste Gleichungssystem der verlangten Art.

Man beweist, daß Funktionen F und Φ, die die Identität (1) erfüllen, durch die folgenden Relationen:

$$\begin{cases} (F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i F_i) = 1, \\ \sum_k p_k \frac{\partial F_i}{\partial p_k} = 0, \qquad \sum_k p_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_k} = \Phi_i \end{cases} \tag{3}$$

verknüpft sind; daß ferner jedes Größensystem F, Φ, welches diese Relationen erfüllt, auch die Gleichung (1) befriedigt. Nun aber ist es, wenn überhaupt $q + m$ Größen: $F_\alpha, \ldots, F_\beta, \Phi_\gamma, \ldots, \Phi_\delta$ vorgelegt sind, welche (3) befriedigen, immer möglich, $2n - q - m$ weitere Größen F, Φ zu bestimmen, welche ebenfalls (3) erfüllen. Dies geschieht, indem man sukzessiv eine Anzahl vollständiger Systeme aufstellt und jedesmal eine Lösung bestimmt.

Hieraus schließen wir zunächst, indem wir $q = 1$, $m = 0$ annehmen, daß jede Gleichung: $F = a$ vollständige Lösungen besitzt, die durch Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen bestimmt werden.

Wir schließen ferner, daß jedes Gleichungssystem:

$$F_1 = a_1, \ldots, F_q = a_q,$$

wo $(F_i F_k) = 0$ ist, vollständige Lösungen besitzt, die man in derselben Weise findet.

Es sei jetzt vorgelegt ein Gleichungssystem von der Form:

$$p_k - h_k(p_{q+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n) = 0 = \Phi_k \qquad (k = 1, \ldots, q),$$

wo: [228

$$(p_i - h_i, p_k - h_k) = 0$$

ist. Nach dem obenstehenden ist es möglich, solche weitere Größen:

$$\Phi_{q+1}, \ldots, \Phi_n, F_1, \ldots, F_n$$

zu bestimmen, daß:

$$\Sigma\, p\, dx = \Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n$$

wird. Alsdann bilden die Gleichungen:

$$F_{q+1} = a_{q+1}, \ldots, F_n = a_n \tag{4}$$

zusammen mit den vorgelegten Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_q = 0$ ein Gleichungssystem der verlangten Art. Wir sagen, daß die Gleichungen (4) eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichungen bilden.

Endlich integriert man auch jedes Gleichungssystem von der Form:

$$x_k - \varphi_k(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0 = F_k \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,q)},$$

$$p_i - h_i(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, p_{q+m+1}, \ldots, p_n) = 0 = \Phi_i \qquad {\scriptstyle (i=q+1,\ldots,q+m)},$$

wo: $F_1, \ldots, F_q, \Phi_{q+1}, \ldots, \Phi_{q+m}$ die Relationen (3) erfüllen, indem man solche weitere Größen:

$$F_{q+1}, \ldots, F_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Phi_{q+m+1}, \ldots, \Phi_n$$

sucht, daß die Gleichung (1) befriedigt wird. Alsdann bilden die Gleichungen:

$$F_{q+m+1} = a_{q+m+1}, \ldots, F_n = a_n$$

eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichungen:

$$F_1 = 0, \ldots, F_q = 0, \Phi_{q+1} = 0, \ldots, \Phi_{q+m} = 0.$$

Sind nun q beliebige Gleichungen:

$$F_1 = 0, \ldots, F_q = 0$$

vorgelegt, so beweist man, daß jedes Gleichungssystem:

$$F_1 = 0, \ldots, F_q = 0, \Psi_{q+1} = 0, \ldots, \Psi_n = 0,$$

das den Ausdruck $\Sigma\, p\, dx$ identisch verschwinden läßt, die Gleichungen:

$$(F_i F_k) = 0$$

umfaßt. Durch Anwendung dieses Satzes gelingt es, das allgemeine Problem 2 auf den früher erledigten Fall zu reduzieren, daß die vorgelegten Gleichungen die Form:

$$p_k - h_k(p_{q+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,q)}$$

besitzen, und dabei alle Ausdrücke: $(p_i - h_i, p_k - h_k)$ gleich Null sind.

Die angegebene Erledigung des Problems 2, die theoretisch voll- [229
kommen ist, leidet an dem praktischen Übelstande, daß sie eine sehr große Anzahl Integrationsoperationen verlangt. Einfacher sind die folgenden Methoden.

Handelt es sich darum, die Gleichung: $p_n - h_n = 0$ zu integrieren, oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Ausdruck:

$$V = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + h_n dx_n$$

auf eine $(n-1)$-gliedrige Form:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-1} dF_{n-1}$$

zu bringen, so sind die Größen F_i und $\Phi_i : \Phi_{n-1}$ Lösungen der Gleichungen:

$$(p_n - h_n, U) = 0, \quad \sum p \frac{\partial U}{\partial p} = 0.$$

Bezeichnet man daher mit $\omega_1, \ldots, \omega_{2n-3}$ ein beliebiges System von Lösungen dieser Gleichungen, so besteht immer eine Relation von der Form:

$$V = \varrho \sum_{k=1,}^{2n-3} \Omega_k(\omega_1, \ldots, \omega_{2n-3}) d\omega_k.$$

Wählt man insbesondere die Größen:

$$\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n, \ldots, \omega_{2n-3}$$

derart, daß sie durch die Substitution: $x_n = \alpha_n$ beziehentlich die Werte:

$$x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1 : p_{n-1}, \ldots, p_{n-2} : p_{n-1}$$

annehmen, so ist:

$$V = \sigma(\omega_n d\omega_1 + \cdots + \omega_{2n-3} d\omega_{n-2} + d\omega_{n-1}).$$

Hiermit ist aber V auf eine $(n-1)$-gliedrige Form gebracht, und es bilden die Gleichungen:

$$\omega_1 = \text{const.}, \ldots, \omega_{n-1} = \text{const.}$$

eine vollständige Lösung von: $p_n - h_n = 0$.

Dies ist die Cauchysche Methode in ihrer wahren allgemeinen Form. Nach derselben verlangt die Integration der Gleichung: $p_n - h_n = 0$ nur die Bestimmung aller Lösungen der Gleichungen:

$$(p_n - h_n, U) = 0, \qquad \sum p \frac{\partial U}{\partial p} = 0.$$

Handelt es sich darum, die Gleichungen: [230

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0, (p_i - h_i, p_k - h_k) = 0$$

zu integrieren, das heißt, soll man den Ausdruck:

$$V = h_1 dx_1 + \cdots + h_q dx_q + p_{q+1} dx_{q+1} + \cdots + p_n dx_n$$

auf eine $(n-q)$-gliedrige Form:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-q} dF_{n-q}$$

bringen, so sind die Größen F_i und $\Phi_i : \Phi_{n-q}$ Lösungen von:

$$(p_1 - h_1, U) = 0, \ldots, (p_q - h_q, U) = 0, \qquad \sum p \frac{\partial U}{\partial p} = 0.$$

Bezeichnen wir daher mit $\omega_1, \ldots, \omega_{2n-2q-1}$ ein beliebiges System von Lösungen dieser Gleichungen, so besteht immer eine Relation von der Form:

$$V = \varrho \sum_{k=1}^{2n-2q-1} \Omega_k(\omega_1, \ldots, \omega_{2n-2q-1})\, d\omega_k.$$

Wählt man insbesondere die ω derart, daß sie durch die Substitution:

$$x_1 = \alpha_1, \ldots, x_q = \alpha_q$$

die Werte:

$$x_{q+1}, \ldots, x_n, p_{q+1} : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n$$

annehmen, so kommt:

$$V = \sigma(\omega_{n-q+1}\, d\omega_1 + \cdots + \omega_{2n-2q-1}\, d\omega_{n-q-1} + d\omega_{n-q}).$$

Hiermit ist V auf eine $(n-q)$-gliedrige Form gebracht, und es bilden die Gleichungen:

$$\omega_1 = \text{const.}, \ldots, \omega_{n-q} = \text{const.}$$

eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichungen:

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0.$$

Dies ist die vom Verfasser erweiterte Cauchysche Methode. Dieselbe reduziert die Integration des vorgelegten Gleichungssystems auf die Bestimmung aller Lösungen eines vollständigen Systems.

Noch einfacher ist die folgende Methode.

Es seien:

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0$$

die vorgelegten Gleichungen, die paarweise:

$$(p_i - h_i, p_k - h_k) = 0$$

ergeben. Man bezeichne mit $\Phi^{(\tau)}$ die Funktion, in welche die Sub- [231
stitution:

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \ldots, x_q = a_q + \tau_q x$$

die Größe Φ überführt, und ebenso mit $\Psi^{(x)}$ die Funktion, in welche die inverse Substitution:

$$\tau_k = \frac{x_k - a_k}{x}$$

die Größe Ψ transformiert.

Sind nun $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen von:

$$(5) \qquad (p_1 - h_1, \Phi) = 0, \ldots, (p_q - h_q, \Phi) = 0, \quad \sum p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0,$$

so sind: $\Phi_1^{(\tau)}, \ldots, \Phi_{2n-2q-1}^{(\tau)}$ ein System Lösungen von:

$$(6) \qquad (p - \sum_k \tau_k h_k^{(\tau)}, \Phi) = 0 = (p - h, \Phi).$$

Gibt man dagegen eine beliebige Lösung Ψ der letzten Gleichung, so ist die Größe $\Psi^{(x)}$ im allgemeinen keine Lösung von (5). Sind jedoch $\Psi_1, \ldots, \Psi_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen von (6), die durch die Substitution: $x = 0$ die Werte:

$$x_{q+1}, \ldots, x_n, p_{q+1} : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n$$

annehmen, so sind $\Psi_1^{(x)}, \ldots, \Psi_{2n-2q-1}^{(x)}$ ein System Lösungen von (5).

Hiermit ist die Integration des Gleichungssystems:

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0$$

auf diejenige der Gleichung: $p - h = 0$ reduziert.

Vermöge dieses Satzes kann die Integration einer vorgelegten Gleichung zwischen n Variabeln: $p_n - h_n = 0$, nachdem eine Lösung von:

$$(p_n - h_n, N) = 0, \qquad \sum p \frac{\partial N}{\partial p} = 0$$

gefunden ist, auf diejenige einer Gleichung zwischen $n-1$ Variabeln zurückgeführt werden. In derselben Weise reduziert man diese neue Gleichung auf eine mit nur $n-2$ Variabeln, und so weiter.

Dies ist diejenige einfache Integrationsmethode, die der Verfasser im Jahre 1872 veröffentlichte. Gleichzeitig fand Mayer durch eine ganz andere Methode entsprechende Integrationsvereinfachungen.

L.

2. Koenigsberger und Zeuner, Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, Bd. I, S. 27—33. Leipzig 1877.

Diese Anzeige stimmt zum Teile wörtlich mit der eben abgedruckten überein. Es genügt daher, im folgenden die Abschnitte mitzuteilen, wo sie abweicht.

S. 152, Z. 19. Und der gefundene Satz lehrt, daß die Elemente, die eine Fläche bedecken, oder eine Kurve umhüllen, oder endlich durch einen Punkt gehen, die allgemeinste Schar mit der verlangten Eigenschaft bilden. — Ist n eine beliebige Zahl, so ließe sich eine entsprechende Interpretation entwickeln, indem man nämlich die Betrachtungen . . .

S. 153, Z. 14. Nun aber kann man, wenn überhaupt $q + m$ Größen: $F_1, \ldots, F_q, \Phi_1, \ldots, \Phi_m$ vorgelegt sind, welche (3) befriedigen, immer, indem man sukzessiv eine Anzahl vollständiger Systeme aufstellt und jedes- [29
mal eine Lösung bestimmt, weitere Funktionen: $F_{q+1}, \ldots, F_n, \Phi_{m+1}, \ldots, \Phi_n$ finden, welche dieselben Relationen erfüllen.

Hieraus schließen wir zunächst, daß jede Gleichung: $F_1 = a_1$ vollständige Lösungen besitzt, und daß die Bestimmung einer solchen nur die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen verlangt.

Wir schließen ferner, daß jedes Gleichungssystem:

$$F_1 = a_1, \ldots, F_q = a_q \quad (F_i F_k) = 0$$

vollständige Lösungen besitzt, deren Bestimmung nur die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen verlangt.

Sei jetzt vorgelegt ein Gleichungssystem von der Form:

$$(4) \qquad p_k - h_k(p_{q+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,q)},$$

wo:

$$(p_i - h_i, p_k - h_k) = 0$$

ist. Es läßt sich beweisen, daß der Ausdruck:

$$\Omega = h_1 dx_1 + \cdots + h_q dx_q + p_{q+1} dx_{q+1} + \cdots + p_n dx_n$$

auf eine $(n-q)$-gliedrige Form:

$$\Omega = \Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-q} dF_{n-q}$$

gebracht werden kann. Die Größen F und Φ sind definiert durch die Gleichungen:

$$(p_k - h_k, F) = 0, (p_k - h_k, \Phi) = 0,$$

$$(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, (\Phi_i F_i) = 1,$$

$$\sum_k p_k \frac{dF}{dp_k} = 0, \qquad \sum_k p_k \frac{d\Phi}{dp_k} = \Phi.$$

Ist ein Größensystem F, Φ gefunden, welches diese Relationen erfüllt, so befriedigen die Gleichungen:

$$F_1 = a_1, \ldots, F_{n-q} = a_{n-q}$$

zusammen mit (4) die Relation: $\Sigma p dx = 0$; sie bilden, sage ich, eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichungen.

Von einer gegebenen vollständigen Lösung geht man über zu der allgemeinsten vollständigen Lösung, indem man die Gleichung:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-q} dF_{n-q} = \Phi_1' dF_1' + \cdots + \Phi_{n-q}' dF_{n-q}'$$

in allgemeinster Weise befriedigt. Wie dies geschieht, ist aus der Theorie des Pfaffschen Problems bekannt.

Sei endlich vorgelegt ein Gleichungssystem von der Form:

$$(5) \quad \begin{cases} x_k - \varphi_k(x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0 & {\scriptstyle (k=1,\ldots,q)}, \\ p_i - h_i(x_{q+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, p_{q'+1}, \ldots, p_n) = 0 & {\scriptstyle (i=q+1,\ldots,q')}, \end{cases}$$ [30

wo:

$$(x_k - \varphi_k, p_i - h_i) = 0, \quad (p_i - h_i, p_r - h_r) = 0.$$

Es wird bewiesen, daß sich der Ausdruck:

$$p_1 d\varphi_1 + \cdots + p_q d\varphi_q + h_{q+1} dx_{q+1} + \cdots + h_{q'} dx_{q'} +$$
$$+ p_{q'+1} dx_{q'+1} + \cdots + p_n dx_n$$

auf eine $(n-q')$-gliedrige Form:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-q'} dF_{n-q'}$$

bringen läßt; die Integration des Gleichungssystems (5) wird auf diejenige eines Systems von der Form (4) zurückgeführt.

Sind nun r ganz beliebige Gleichungen:

$$F_1 = 0, \ldots, F_r = 0$$

vorgelegt, so beweist man, daß jedes Gleichungssystem:

$$F_1 = 0, \ldots, F_r = 0, \quad \Phi_{r+1} = 0, \ldots, \Phi_n = 0,$$

das den Ausdruck $\Sigma p dx$ identisch verschwinden läßt, sämtliche Gleichungen von der Form:

$$(F_i F_k) = 0$$

enthält. Durch Anwendung dieses Satzes gelingt es, das allgemeine Problem 2 durch ausführbare Operationen auf den speziellen Fall zu reduzieren, daß die vorgelegten Gleichungen die Form (5), oder noch einfacher, die Form (4) besitzen, und da dieses spezielle Problem schon erledigt ist, so ist hiermit eine allgemeine Behandlungsweise des allgemeinen Problems 2 gefunden.

Die entwickelte Integrationsmethode verlangt eine große Anzahl Integrationsoperationen. Einfacher sind die folgenden Methoden.

Handelt es sich darum, $p_n - h_n = 0$ zu integrieren, das heißt:

$$V = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + h_n dx_n$$

auf eine $(n-1)$-gliedrige Form:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-1} dF_{n-1}$$

zu bringen, so weiß man, daß die Größen F_i und $\Phi_i : \Phi_{n-1}$ Lösungen von:

$$(p_n - h_n, U) = 0, \qquad \sum_k p_k \frac{dU}{dp_k} = 0$$

sind. Bezeichnet man daher mit:

$$\omega_1, \ldots, \omega_{2n-3}$$

ein beliebiges System Lösungen dieser Gleichungen, so kann V immer [31
die Form:

$$V = \varrho \sum_{k=1}^{2n-3} \Omega_k(\omega_1, \ldots, \omega_{2n-3})\, d\omega_k$$

erhalten. Wählt man insbesondere die Größen:

$$\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n, \ldots, \omega_{2n-3}$$

derart, daß sie durch die Substitution: $x_n = \alpha = \text{const.}$ die Werte:

$$x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1 : p_{n-1}, \ldots, p_{n-2} : p_{n-1}$$

annehmen, so ist:

$$V = \sigma(\omega_n d\omega_1 + \omega_{n+1} d\omega_2 + \omega_{n+2} d\omega_3 + \cdots + \omega_{2n-3} d\omega_{n-2} + d\omega_{n-1}),$$

und also bestimmen die Gleichungen:

$$\omega_1 = a_1, \ldots, \omega_{n-1} = a_{n-1}$$

eine vollständige Lösung von: $p_n - h_n = 0$.

Dies ist die Cauchysche Methode in ihrer wahren Allgemeinheit.

Soll man andererseits das System:

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0, \quad \text{wo:} \quad (p_i - h_i, p_k - h_k) = 0,$$

integrieren, oder anders ausgesprochen, soll man den Ausdruck:

$$V = h_1 dx_1 + \cdots + h_q dx_q + p_{q+1} dx_{q+1} + \cdots + p_n dx_n$$

auf eine $(n-q)$-gliedrige Form:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-q} dF_{n-q}$$

bringen, so sind F_i und $\Phi_i : \Phi_{n-q}$ ein System Lösungen von:

$$(p_1 - h_1, U) = 0, \ldots, (p_q - h_q, U) = 0, \quad \sum_k p_k \frac{dU}{dp_k} = 0.$$

Bezeichnet man daher überhaupt mit $\omega_1, \ldots, \omega_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen dieser Gleichungen, so besteht immer eine Relation von der Form:

$$V = \varrho \sum_{k=1}^{2n-2q-1} \Omega_k(\omega_1, \ldots, \omega_{2n-2q-1})\, d\omega_k.$$

Wählt man insbesondere die Größen:

$$\omega_1, \ldots, \omega_{n-q}, \omega_{n-q+1}, \ldots, \omega_{2n-2q-1}$$

derart, daß sie durch die Substitution: $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_q = \alpha_q$ die Werte:

$$x_{q+1}, \ldots, x_n, p_{q+1} : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n$$

annehmen, so verschwinden die $n - q - 1$ letzten Glieder in der letzten [32
Gleichung, es kommt:

$$V = \sigma(\omega_{n-q+1} d\omega_1 + \omega_{n-q+2} d\omega_2 + \cdots + \omega_{2n-2q-1} d\omega_{n-q-1} + d\omega_{n-q}),$$

und also bestimmen die Gleichungen:

$$\omega_1 = a_1, \ldots, \omega_{n-q} = a_{n-q}$$

eine vollständige Lösung von: $p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0$. Dies ist die vom Verfasser erweiterte Cauchysche Methode.

Noch einfacher ist die folgende vom Verfasser herrührende Integrationsmethode des Systems:

$$p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0,$$

wo:

$$(p_i - h_i, p_k - h_k) = 0.$$

Man bezeichne diejenige Funktion, in welche $\Phi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots p_n)$ durch die Substitution:

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \ldots, x_q = a_q + \tau_q x$$

übergeht, mit $\Phi^{(\tau)}$, und bilde sodann die Gleichung:

$$p - \sum_k \tau_k h_k^{(\tau)} = 0 = p - h.$$

Ist nun:

$$W(x_1, \ldots, x_n, p_{q+1} : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n)$$

eine Lösung von:

$$(6) \quad (p_1 - h_1, W) = 0, \ldots, (p_q - h_q, W) = 0, \quad \sum_k p_k \frac{dW}{dp_k} = 0,$$

so ist auch:

$$(7) \qquad (p - h, W^{(\tau)}) = 0.$$

Sind: $W_1, \ldots, W_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen von (6), so sind $W_1^{(\tau)}, \ldots, W_{2n-2q-1}^{(\tau)}$ ein System Lösungen von (7).

Nimmt man dagegen eine beliebige Lösung Ψ von (7) und führt auf sie die inverse Substitution:

$$\tau_k = \frac{x_k - a_k}{x}$$

aus, so ist die hervorgehende Funktion $\Psi^{(x)}$ im allgemeinen keine Lösung von (6). Wählt man indes ein System Lösungen:

$$\omega_1, \ldots, \omega_{n-q}, \omega_{n-q+1}, \ldots, \omega_{2n-2q-1}$$

von (7), welche die Eigenschaft besitzen, durch die Substitution: $x = 0$ die Werte:

$$x_{q+1}, \ldots, x_n, p_{q+1} : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n$$ [33

anzunehmen, so sind die Größen:

$$\omega_1^{(x)}, \ldots, \omega_{2n-2q-1}^{(x)}$$

ein System Lösungen von (6).

Hiermit ist die Integration des Systems: $p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_q - h_q = 0$ auf diejenige von: $p - h = 0$ zurückgeführt.

Vermöge dieses Satzes kann die Integration der Gleichung:

$$p_n - h_n(p_1, \ldots, p_{n-1}, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

nachdem eine Funktion N gefunden ist, welche die Gleichungen:

$$(p_n - h_n, N) = 0, \qquad \sum_k p_k \frac{dN}{dp_k} = 0$$

erfüllt, auf diejenige einer Gleichung zwischen $n - 1$ Variabeln:

$$p_{n-1} - h_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-2}, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$$

zurückgeführt werden. Um diese reduzierte Gleichung zu integrieren, kann man zunächst eine Lösung der Gleichungen:

$$(p_{n-1} - h_{n-1}, M) = 0, \qquad \sum_k p_k \frac{dM}{dp_k} = 0$$

suchen, und sodann eine äquivalente Gleichung zwischen $n - 2$ Variabeln aufstellen:

$$p_{n-2} - h_{n-2}(p_1, \ldots, p_{n-3}, x_1, \ldots, x_{n-2}) = 0.$$

Diese Gleichung wird in entsprechender Weise auf eine zwischen $n - 3$ Variabeln reduziert, und so weiter. Zuletzt kommt man zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln. Ist diese integriert, so findet man sukzessiv durch ausführbare Operationen vollständige Lösungen aller aufgestellten Gleichungen, insbesondere auch eine vollständige Lösung von: $p_n - h_n = 0$.

Es ist unmöglich gewesen, in diesem kurzen Referate die Beziehungen zwischen den hier dargestellten und den von Jacobi, Mayer, und so weiter herrührenden Theorien auseinanderzusetzen.

Christiania.

Sophus Lie.

III.

Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. [464

Zweite Abhandlung.

Math. Ann. Bd. XI, Heft 4, S. 464—557, ausgegeb. 27. 4. 1877.

In zwei größeren Arbeiten, die in diesem Journale gedruckt sind[1]), habe ich versucht, die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. (Math. Annalen Bd. IX, S. 245) und die verwandte Theorie der Berührungstransformationen (Math. Ann. Bd. VIII, S. 215) zu entwickeln.[2]) Diese neue Abhandlung schließt sich als Fortsetzung an jene beiden an. Im ersten Abschnitte entwickle ich, indem ich zugleich das Mayersche Theorem (Math. Annalen Bd. V, S. 465 f.) als bekannt voraussetze, mehrere neue und nach meiner Auffassung äußerst merkwürdige Integrationstheorien der partiellen Differentialgleichungen 1. O.

Im zweiten Abschnitte begründe ich eine allgemeine Theorie der infinitesimalen Transformationen, die mit der Eulerschen Theorie des Integrabilitätsfaktors und der Jacobischen Theorie des letzten Multiplikators in Verbindung steht. Ich dehne den Multiplikatorbegriff auf vollständige Systeme linearer partieller Differentialgleichungen aus. Indem ich diese neuen Theorien auf partielle Differentialgleichungen 1. O. anwende, finde ich die Resultate des ersten Abschnittes in neuer Weise wieder.

Im dritten Abschnitte behandle ich die schwierige Frage, ob es denkbar sei, daß die jetzigen Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1. O. künftig einmal durch noch einfachere ersetzt werden könnten. Indem ich zwei Hypothesen, deren Richtigkeit kaum bezweifelt werden wird, als Axiome aufstelle, gelingt es mir, nachzuweisen, daß die

1) [Hier Abh. II und I.]

2) Derjenige, welcher meine Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen und Berührungstransformationen zu studieren wünscht, fängt am besten mit meiner Abhandlung in Bd. IX dieses Journals an. Darnach mag er die Abhandlung in Bd. VIII und schließlich meine jetzige Arbeit lesen. Die beiden letzten Abhandlungen setzen das Mayersche Theorem als bekannt voraus.

von mir in dieser und in jenen Abhandlungen entwickelten Theorien, die bekanntlich teilweise der Jacobi-Mayerschen Integrationsmethode [465 (Math. Annalen Bd. V) äquivalent sind, das Größtmögliche leisten.

Den Schluß meiner Arbeit bilden einige Noten.

Abschnitt I.

Zuerst bestimme ich den allgemeinsten Fall, in welchem man aus gewissen bekannten Lösungen des vollständigen Systems:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad \text{wo:} \quad (f_i f_k) = 0,$$

die fehlenden Lösungen durch ausführbare Operationen ableiten kann. Unter den übrigen Resultaten dieses Abschnittes hebe ich noch hervor, daß die Bestimmung von $2m+1$ fehlenden Lösungen des obigen vollständigen Systems im allgemeinen nicht schwieriger ist, als die Bestimmung von $2m$ fehlenden Lösungen dieses Systems. Dieser Satz gibt, wenn $m = 0$ gesetzt wird, den von Jacobi herrührenden Satz, daß die Bestimmung der letzten Lösung immer eine ausführbare Operation ist.[1]

§ 1. Ein neuer Fundamentalsatz.

In diesem Paragraphen gebe ich eine Reihe neuer Fälle an, in denen man aus gewissen bekannten Lösungen des vollständigen Systems:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad \text{wo:} \quad (f_i f_k) = 0,$$

die fehlenden Lösungen durch ausführbare Operationen herleiten kann.

1. Satz 1. *Sind $f_1, \ldots, f_r$ bekannte Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$, die eine Relation von der Form:*

$$(1) \qquad p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU$$

erfüllen, so lassen sich die Größen F_k durch eine Anzahl Differentiationen bestimmen, nachdem U durch eine Quadratur gefunden ist.

Beweis. Ich drücke $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ als Funktionen von $f_1, \ldots, f_r$ und von $2n - r$ passend gewählten weiteren Größen $u_1, \ldots, u_{2n-r}$ aus, und führe sodann die f und u als unabhängige Variable ein. Hierdurch erhält die gegebene Gleichung die Form:

$$\sum_{i,k} p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} du_i + \sum_{j,k} p_k \frac{\partial x_k}{\partial f_j} df_j = \sum_j F_j df_j + \sum_i \frac{\partial U}{\partial u_i} du_i + \sum_j \frac{\partial U}{\partial f_j} df_j$$

1) Die Hauptresultate dieses Abschnitts finden sich in der Abhandlung „Résumé einer neuen Integrationstheorie", Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. I, Christiania 1876. [D. Ausg. Bd. III, Abh. XVIII.]

und zerfällt daher in die beiden Systeme: [466

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial u_i} = \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i},$$

$$(3) \qquad F_j = -\frac{\partial U}{\partial f_j} + \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial f_j}.$$

Das erste System gibt, wenn man es mit du_i multipliziert, nach i summiert und hierauf integriert:

$$(4) \qquad U = \int \sum_{i,k} p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} du_i + \Omega(f_1, \ldots f_r),$$

wo die Integrationskonstante Ω eine arbiträre Funktion der f ist. Nachdem U in dieser Weise durch eine Quadratur gefunden ist, ergeben sich die F_j vermöge der Formel (3) durch bloße Differentiationen, was eben zu beweisen war.

Man erhält übrigens einen eleganteren Ausdruck für F_j, wenn man U aus den Gleichungen (2) und (3) eliminiert. Dies gibt:

$$\frac{\partial F_j}{\partial u_i} = \sum_k \left(\frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial f_j} - \frac{\partial p_k}{\partial f_j} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right),$$

woraus durch Multiplikation mit du_i, Summation nach i und Integration folgt:

$$F_j = \int \sum_{i,k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial f_j} - \frac{\partial p_k}{\partial f_j} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right) du_i.$$

Diese Formel enthält als Integrationskonstante eine arbiträre Funktion der f, die durch Einsetzung in (1) bestimmt wird. Wendet man dagegen die Formeln (4) und (3) an, so kann Ω ganz willkürlich als Funktion der f gewählt werden.

Satz 2. *Die Gleichungen:*

$$(1) \qquad p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU,$$

$$(5) \qquad (f_1 f_2) = 0, \quad (f_1 f_3) = 0, \ldots, (f_1 f_r) = 0$$

ziehen die Relationen:

$$(F_1 f_1) = 1, \quad (f_1 F_k) = 0, \quad [f_1, z - U] = 0$$

nach sich.

Beweis. Die Bedingungsgleichung (1) löst sich in die $2n$ folgenden Gleichungen auf:

$$(6) \qquad p_k = \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k},$$

$$(7) \qquad 0 = \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k} + \frac{\partial U}{\partial p_k},$$

woraus durch Differentiation, indem wir die x und p als von einander [467 unabhängig auffassen:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_h} \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_h},$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_h} \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial p_h},$$

$$1 = \frac{\partial}{\partial p_k} \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k},$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_h} \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial p_h},$$

und durch Ausführung:

$$0 = \sum_i^{1\ldots r} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_h} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_h}\right),$$

$$0 = \sum_i^{1\ldots r} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_h} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial p_h}\right),$$

$$1 = \sum_i^{1\ldots r} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial p_k}\right),$$

$$0 = \sum_i^{1\ldots r} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_h} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} - \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial f_i}{\partial p_h}\right)$$

entsteht. Diese Relationen zeigen, daß die Gleichungen:

$$(8) \qquad u_i = \sum_k^{1\ldots n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial f_i}{\partial p_k} z_k\right), \quad v_i = \sum_k^{1\ldots n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial F_i}{\partial p_k} z_k\right) \quad (i = 1, \ldots, r)$$

die $2n$ folgenden nach sich ziehen:

$$\sum_i^{1\ldots r} \left(u_i \frac{\partial F_i}{\partial p_h} - v_i \frac{\partial f_i}{\partial p_h}\right) = y_h, \quad \sum_i^{1\ldots r} \left(u_i \frac{\partial F_i}{\partial x_h} - v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_h}\right) = -z_h.$$

Setzen wir diese Werte der y und z in (8) ein, so kommt:

$$u_i = \sum_\varrho^{1\ldots r} u_\varrho (F_\varrho f_i) - \sum_\varrho^{1\ldots r} v_\varrho (f_\varrho f_i),$$

und, wenn wir insbesondere $i = 1$ setzen und dabei die Relationen (5) [468 berücksichtigen:

$$(9) \qquad u_1 = \sum_\varrho^{1\ldots r} u_\varrho (F_\varrho f_1).$$

Da nun aber $f_1, f_2, \ldots, f_r$ unabhängige Funktionen der x, p sind, und es infolgedessen unmöglich ist, zwischen den r Gleichungen (8) die Größen

y_k und z_k zu eliminieren, so muß die Gleichung (9) an sich identisch, und folglich:

$$1 = (F_1 f_1), \quad (f_1 F_2) = 0, \quad (f_1 F_3) = 0, \ldots, (f_1 F_r) = 0$$

sein.

Setzen wir andererseits die Werte (6) und (7) der Differentialquotienten von U in:

$$[f_1, z - U] = \sum_k^{1\ldots n} p_k \frac{\partial f_1}{\partial p_k} + \sum_k^{1\ldots n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial p_k} - \frac{\partial f_1}{\partial p_k} \frac{\partial U}{\partial x_k}\right)$$

ein, so erhalten wir:

$$[f_1, z - U] = \sum_i^{1\ldots r} F_i (f_1 f_i),$$

oder, da alle $(f_1 f_i)$ gleich Null sind:

$$[f_1, z - U] = 0.$$

Hiermit ist unser Satz erwiesen.

Satz 3. *Besteht die Gleichung:*

$$(1) \qquad p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU,$$

und sind dabei $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_r$ Lösungen des vollständigen Systems:

$$(10) \qquad (f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0,$$

so sind: $F_{q+1}, \ldots, F_r$ die fehlenden Lösungen dieses Systems, und die Größe U erfüllt die Relationen:

$$(11) \qquad [f_1, z - U] = 0, \ldots, [f_q, z - U] = 0.$$

Beweis. Nach der Theorie des Pfaffschen Problems verlangt das Bestehen der Gleichung (1), daß $2n$ von den $2r$ Größen F_k und f_k von einander unabhängig sind. Demzufolge müssen unter den $2r - q$ Größen:

$$f_1, \ldots, f_r, F_{q+1}, \ldots, F_r$$

jedenfalls $2n - q$ von einander unabhängige vorkommen. Nach dem vorhergehenden Satze sind aber alle diese $2r - q$ Größen Lösungen des vollständigen Systems (10), weil nach Voraussetzung $f_1, \ldots, f_r$ demselben genügen. Nun besitzt dieses System eben nur $2n - q$ unabhängige Lösungen, also sind alle Lösungen desselben Funktionen von $f_1, \ldots, f_r$, $F_{q+1}, \ldots, F_r$. [469

Daß andererseits U den Gleichungen (11) genügt, folgt unmittelbar aus dem vorangehenden Satze.

Theorem I. *Kennt man von den Lösungen des vollständigen Systems:*

$$(f_1 f) = 0, \quad (f_2 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad \textit{wo:} \quad (f_i f_k) = 0,$$

eine so große Anzahl, etwa $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_r$, *daß eine Relation von der Form:*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU$$

stattfindet, so verlangt die Integration des Involutionssystems:

$$f_1 = a_1, \ldots, f_q = a_q,$$

nachdem U *durch eine Quadratur gefunden ist, nur gewisse Differentiationen und Eliminationen.*

Beweis. Wir bestimmen (Satz 1) U durch eine Quadratur und hierauf $F_{q+1}, \ldots, F_r$ durch Differentiation. Hiermit kennen wir (Satz 3) alle Lösungen des vollständigen Systems: $(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0$, und außerdem eine Lösung des Systems: $[f_1, z - U] = 0, \ldots, [f_q, z - U] = 0$. Also können wir mit Hilfe der erweiterten Cauchyschen Methode eine vollständige Lösung des vorgelegten Involutionssystems durch bloße Eliminationsoperationen ermitteln.

2. Um die Wichtigkeit und Tragweite des aufgestellten Theorems klar hervortreten zu lassen, werden wir zwei weitere allgemeine Sätze entwickeln.

Satz 4. *Kennt man unter den Lösungen des vollständigen Systems:*

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad \textit{wo:} \quad (f_i f_k) = 0,$$

eine so große Anzahl: $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_r$, *daß die von den* f *erzeugte Gruppe* n*-gliedrige Involutionssysteme enthält, so verlangt die Integration des Involutionssystems:*

$$f_1 = a_1, \ldots, f_q = a_q$$

nur noch ausführbare Operationen.

Beweis. Die aus den f durch Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems hervorgehende Gruppe: $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_r, \ldots, f_s$ besitzt unter der gemachten Voraussetzung die kanonische Form: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_m$.[1]) Folglich besteht eine Relation von der Form[2]):

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = Q_1 dX_1 + \cdots + Q_n dX_n + dV,$$

1) Vgl. Math. Annalen Bd. VIII, S. 267. [Hier Abh. I, S. 56, Satz 49, 50.]
2) Ebd. S. 228, Satz 6. [A. a. O. S. 15.]

und da die X_k Funktionen von $f_1, \ldots, f_s$ sind, so besteht auch eine Relation von der Form:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_s df_s + dV, \qquad [470$$

und also kann nach Theorem I die Integration des vorgelegten Involutionssystems vermöge ausführbarer Operationen bewirkt werden.

Satz 5. *Besteht die Gleichung:*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU,$$

so besitzt die von $f_1, \ldots, f_r$ *erzeugte Gruppe die kanonische Form:* $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_m$.

Beweis. Sei $X_1, \ldots, X_\alpha, P_1, \ldots, P_\beta$ eine kanonische Gruppe, welche die Größen $f_1, \ldots, f_r$ enthält. Drücken wir die f als Funktionen von $X_1, \ldots, X_\alpha, P_1, \ldots, P_\beta$ aus, so erhält die vorgelegte Bedingungsgleichung die Form:

$$\sum_k p_k dx_k = \sum_i^{1\ldots\alpha} A_i dX_i + \sum_i^{1\ldots\beta} B_i dP_i + dV.$$

Bilden andererseits $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ ein System kanonischer Variabeln, so ist:

$$\sum_k p_k dx_k = P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n + dW,$$

und also kommt:

$$\sum_i^{1\ldots n} P_i dX_i = \sum_i^{1\ldots\alpha} A_i dX_i + \sum_i^{1\ldots\beta} B_i dP_i + d(V - W).$$

Wären nun α und β beide kleiner als n, und dabei etwa $\beta \leqq \alpha$, so würde man durch die Substitutionen:

$$X_1 = \text{Const.}, \ldots, X_\alpha = \text{Const.}, \quad P_1 = \text{Const.}, \ldots, P_\beta = \text{Const.}$$

hieraus die Gleichung erhalten:

$$P_{\alpha+1} dX_{\alpha+1} + \cdots + P_n dX_n = d(V - W).$$

Diese ist aber wegen der Unabhängigkeit der Größen: $P_{\alpha+1}, \ldots, P_n, X_{\alpha+1}, \ldots, X_n$ unmöglich. Also muß die größere der beiden Zahlen α und β gleich n sein, was eben zu beweisen war.

§ 2. Bekannte Spezialfälle des aufgestellten Theorems.

3. Jacobis Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. liegt unter anderm der folgende Satz zu Grunde:

Bestimmen die Gleichungen: $f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$, in denen die f Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, die a konstante Parameter bezeichnen, die Größen $p_1, \ldots, p_n$ derart als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, daß: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ ein vollständiges Differential dU wird, so ist: $z - U = a$ eine vollständige Lösung einer jeden Gleichung: $f_k = \alpha_k$, und die Differentialquotienten von U hinsichtlich: $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, [471 $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ bilden zusammen mit den Größen f die Lösungen der Gleichung: $(f_k f) = 0$.

Diesen Satz verallgemeinerte ich schon längst folgendermaßen:

Sind $f_1, \ldots, f_n$ bekannte Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, die in solcher gegenseitiger Beziehung stehen, daß die Gleichungen: $f_1 = \text{Const.}, \ldots, f_n = \text{Const.}$ den Ausdruck: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ in ein vollständiges Differential umwandeln, sodaß also eine Relation von der Form:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n + dV$$

besteht, so findet man eine vollständige Lösung einer jeden Gleichung: $f_k = \alpha_k$ und zugleich alle Lösungen der Gleichung: $(f_k f) = 0$ durch eine Quadratur und gewisse Differentiations- und Eliminationsoperationen.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß sowohl die besprochene Jacobische Theorie, wie meine Verallgemeinerung derselben Spezialfälle meines Theorems I sind.

4. Überraschender ist es, daß die Bestimmung der letzten Lösung der Gleichung: $(f\varphi) = 0$, die Jacobi vermöge seiner Theorie des letzten Multiplikators ausführt, in allen Fällen, die nicht schon durch das Poisson-Jacobische Theorem erledigt werden, auch durch mein Theorem I geleistet wird.

Kennt man nämlich von den Lösungen der Gleichung: $(f_1 f) = 0$ alle, ausgenommen die letzte, und ist es dabei unmöglich, die fehlende Lösung ohne Quadratur durch das Poisson-Jacobische Theorem zu erhalten, so bilden die bekannten Lösungen eine Gruppe, welche n-gliedrige Involutionssysteme enthält.[1]) Folglich wird die Bestimmung der letzten Lösung durch Satz 4, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Theorem I geleistet.

1) Setzt man in der Tat: $f_1 = X_1$ und nimmt an, daß $X_1, \ldots, X_\alpha, P_2, P_3, \ldots, P_\beta$ die kanonische Form der von den bekannten Lösungen gebildeten Gruppe sei, so ist bei unserer Voraussetzung:

$$\alpha + \beta - 1 = 2n - 2, \qquad \text{also:} \qquad \alpha + \beta = 2n - 1.$$

Weiter ist:

$$\alpha \leqq n \quad \text{und:} \quad \beta \leqq n.$$

Also muß entweder α oder β gleich n sein, sodaß unsere Gruppe entweder die Form: $X_1, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_{n-1}$ oder die Form: $X_1, \ldots, X_{n-1}, P_2, \ldots, P_n$ besitzt.

Diese beiden, übrigens äquivalenten Formen zeigen, daß unsere Gruppe n-gliedrige Involutionssysteme enthält.

Doch ist es keineswegs so, daß sich die betreffende Spezialisation meines Theorems mit der entsprechenden Jacobischen Theorie deckt.

Die Jacobische Theorie leistet insofern mehr, als sie die letzte Lösung auch dann durch eine Quadratur liefert, wenn dieselbe sich einfacher durch das Poisson-Jacobische Theorem finden läßt.

Auf der anderen Seite ist meine Behandlungsweise insofern [472 vollkommner, als sie vermöge **einer** Quadratur nicht allein die fehlende Lösung von: $(f_1 f) = 0$, sondern auch eine Lösung von: $[f_1, z - U] = 0$ gibt, sodaß eine vollständige Lösung von: $f_1 = \alpha_1$ sich ohne weitere Quadratur aufstellen läßt. Die Jacobische Theorie braucht dagegen eine zweite Quadratur zur Aufstellung einer vollständigen Lösung der letzten Gleichung.

Soll also die Gleichung: $f_1 = \alpha_1$ integriert werden, so bringt, wenn nur noch eine Lösung von: $(f_1 f) = 0$ fehlt, im allgemeinen die Anwendung von Theorem I mehr Vorteil als die Jacobische Methode. Nur, wenn die fehlende Lösung von: $(f_1 f) = 0$ sich schon durch das Poisson-Jacobische Theorem bestimmen läßt, ist die Jacobische Theorie ebenso vorteilhaft wie die meinige.

5. Es gibt Fälle, in denen mein Theorem solche Lösungen gibt, die sich auch durch das Poisson-Jacobische Theorem bestimmen lassen. Kennt man nämlich von den Lösungen des vollständigen Systems:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad \text{wo:} \quad (f_i f_k) = 0,$$

eine so große Anzahl: $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_r$, daß eine Bedingungsgleichung von der Form:

$$\sum_k p_k dx_k = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU$$

stattfindet, so gibt mein Theorem unter allen Umständen die fehlenden Lösungen. Bilden nun $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_r$ keine Gruppe — es ist leicht, Beispiele zu konstruieren, in denen dies nicht der Fall ist —, so gibt das Poisson-Jacobische Theorem jedenfalls einige, und unter Umständen sogar alle fehlenden Lösungen durch Differentiation. Wenn aber auch alle Lösungen ohne Quadratur gefunden werden, so verlangt doch die Aufstellung einer vollständigen Lösung des Involutionssystems: $f_1 = \alpha_1, \ldots, f_q = \alpha_q$, gerade so, wie nach meiner Methode, immer noch eine Quadratur.

§ 3. Allgemeine Verwertung mehrerer bekannter Lösungen.

In diesem Paragraphen entwickele ich ein zweites Fundamentaltheorem. Zuerst ein Hilfssatz.

6. Satz 6. *Enthält eine gegebene Gruppe: $f_1, \ldots, f_r$ [gerade] m ausgezeichnete Funktionen: $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, so ist es, auch wenn die Ω unbe-*

kannt sind, möglich, ein vollständiges System aufzustellen, das dem Systeme: $(\Omega_1 f) = 0, \ldots, (\Omega_m f) = 0$ *äquivalent ist.*

Beweis. Unter den gemachten Voraussetzungen verschwindet (Math. Annalen Bd. VIII, S. 255)[1]) sowohl die Determinante: [473

$$D = \begin{vmatrix} (f_1 f_1) & (f_1 f_2) & \cdots & (f_1 f_r) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (f_r f_1) & (f_r f_2) & \cdots & (f_r f_r) \end{vmatrix}$$

als auch ihre sämtlichen Unterdeterminanten erster, zweiter, ..., $(m-1)$-ter Ordnung, während es jedenfalls eine nicht verschwindende Unterdeterminante m-ter Ordnung gibt.

Führen wir nun statt: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ neue unabhängige Variable ein, nämlich: $f_1, \ldots, f_r$ zusammen mit $2n - r$ weiteren Größen: $u_1, \ldots, u_{2n-r}$, so wird:

$$(f_k f) = \sum_i (f_k f_i) \frac{\partial f}{\partial f_i} + \sum_i (f_k u_i) \frac{\partial f}{\partial u_i};$$

und da die Determinante D verschwindet, so ist es möglich, aus den Gleichungen:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_r f) = 0$$

die Differentialquotienten von f hinsichtlich $f_1, \ldots, f_r$ zu eliminieren. Hierdurch erhält man m Gleichungen von der Form:

$$B_k(f) = \sum_i \varphi_{ki}(f_1, \ldots, f_r, u_1, \ldots, u_{2n-r}) \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0,$$

die von einander unabhängig sind. Bedenkt man nun, daß die Gleichungen: $(\Omega_k f) = 0$ sowohl die Form:

$$\sum_i \frac{\partial \Omega_k}{\partial f_i} (f_i f) = 0,$$

als auch die Form:

$$\sum_i (\Omega_k u_i) \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$$

erhalten können und dabei unabhängig von einander sind, so sieht man, daß die beiden Gleichungssysteme:

$$(\Omega_1 f) = 0, \ldots, (\Omega_m f) = 0$$

und:

$$B_1(f) = 0, \ldots, B_m(f) = 0$$

einander äquivalent sind.

1) [Hier Abh. I, S. 43f.]

7. Sei nun: $f_1 = a_1, \ldots, f_q = a_q$ ein vorgelegtes Involutionssystem, und seien: $f_{q+1}, \ldots, f_r$ bekannte Lösungen des Systems:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0,$$

die eine Gruppe bilden, welche außer $f_1, \ldots, f_q$ noch [gerade] m ausgezeichnete Funktionen: $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ enthält. Indem wir den Regeln der vorangehenden Nummer folgen, erhalten wir ein vollständiges System:

$$B_1(f) = 0, \ldots, B_{q+m}(f) = 0,$$

das dem Systeme:

$$(12) \qquad (f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad (\Omega_1 f) = 0, \ldots, (\Omega_m f) = 0$$

äquivalent ist. Und da $f_1, \ldots, f_r$ bekannte Lösungen dieses $(q+m)$-gliedrigen Systems sind, so gibt das Mayersche Theorem eine weitere Lösung φ_1 desselben durch eine Operation: $2n - r - q - m$. [474

Es können nun verschiedene Fälle eintreten, die wir sukzessiv betrachten wollen.

Es ist zunächst möglich, daß die Größen: $f_1, \ldots, f_r, \varphi_1$ eine Gruppe bilden, in der selbstverständlicherweise: $f_1, \ldots, f_q, \Omega_1, \ldots, \Omega_m$ ausgezeichnete Funktionen sind. Hätte diese Gruppe keine weitere ausgezeichnete Funktion, so müßte die Zahl:

$$(r+1) - (q+m)$$

als Differenz zwischen der Zahl der Glieder und der Zahl der ausgezeichneten Funktionen eine gerade Zahl sein (Math. Ann. Bd. VIII, S. 259).[1]) Dies ist jedoch unmöglich, da die r-gliedrige Gruppe $f_1, \ldots, f_r$ $q+m$ ausgezeichnete Funktionen enthält, und also die Zahl: $r - (q+m)$ gerade ist. Folglich enthält die Gruppe: $f_1, \ldots, f_r, \varphi_1$ [gerade] $q + m + 1$ ausgezeichnete Funktionen.[2])

Hiermit hat unser Problem die folgende Gestalt gewonnen: Vorgelegt zur Integration ist ein q-gliedriges Involutionssystem: $f_1 = a_1, \ldots, f_q = a_q$, und man kennt $r+1$ Lösungen des Systems: $(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0$, die eine Gruppe mit $q + m + 1$ ausgezeichneten Funktionen: $f_1, \ldots, f_q, \Omega_1, \ldots, \Omega_{m+1}$ bilden. Dieses neue Problem hat ganz dieselbe Gestalt wie das ursprüngliche, nur sind die Zahlen r und m bezüglich in $r+1$ und $m+1$ übergegangen. Wir können daher ganz so wie vorhin

1) [Hier Abh. I, S. 48, Satz 38.]

2) Es gilt überhaupt der Satz: „Enthält eine r-gliedrige Gruppe $u_1, \ldots, u_r$ m ausgezeichnete Funktionen, so enthält jede $(r-q)$-gliedrige Untergruppe $u_1, \ldots, u_{r-q}$ $(q < m)$ jedenfalls $m - q$ ausgezeichnete Funktionen." Dieser Satz ergibt sich als direktes Korollar aus dem Theoreme VIII, Math. Annalen Bd. VIII, S. 256, [hier Abh. I, S. 44.]

weitergehen; wir stellen also dasjenige vollständige System auf, welches dem Systeme:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad (\Omega_1 f) = 0, \ldots, (\Omega_{m+1} f) = 0$$

äquivalent ist, und bestimmen, da wir schon $r + 1$ Lösungen desselben kennen, eine weitere Lösung vermöge einer Operation: $2n - (r + 1) - (q + m + 1)$. Die Ordnung dieser Operation ist, wie man sieht, um zwei Einheiten geringer als diejenige der ersten Integrationsoperation.

Es ist aber auch denkbar, daß die bekannten Lösungen: $f_1, \ldots, f_r, \psi_1$ des Systems (12) keine Gruppe bilden. Alsdann gibt das Poisson-Jacobische Theorem noch weitere Lösungen, etwa: $\psi_2, \ldots, \psi_s$. In der hierdurch hervorgehenden Gruppe: $f_1, \ldots, f_r, \psi_1, \ldots, \psi_s$ sind jedenfalls: $f_1, \ldots, f_q, \Omega_1, \ldots, \Omega_m$, und unter Umständen noch einige weitere Größen: $\Omega_{m+1}, \ldots, \Omega_{m+m'}$ ausgezeichnete Funktionen. Und unser Problem hat wiederum seine ursprüngliche Gestalt angenommen, nur daß die Zahlen r und m sich respektive in $r + s$ und $m + m'$ verwandelt haben. [475 Daher hat die nächste Integrationsoperation die Ordnung:

$$2n - (r + s) - (q + m + m'),$$

welche Zahl, da $s \gtreqless 2$ ist, mindestens um zwei Einheiten niedriger ist als die Ordnung der ersten Integrationsoperation.

In beiden Fällen ist also die Ordnung der zweiten Integrationsoperation mindestens um zwei Einheiten niedriger als diejenige der ersten. Dementsprechend ist die Ordnung der dritten Integrationsoperation mindestens um zwei Einheiten niedriger als diejenige der zweiten, und so weiter.

In dieser Weise fährt man nun fort, bis man so viele Lösungen: $f_1, \ldots, f_\varrho$ des Systems:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0$$

gefunden hat, daß die Gruppe: $f_1, \ldots, f_\varrho$ so viel ausgezeichnete Funktionen: $f_1, \ldots, f_q, \Omega_1, \ldots, \Omega_\mu$ besitzt, daß das vollständige System:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad (\Omega_1 f) = 0, \ldots, (\Omega_\mu f) = 0$$

keine weiteren Lösungen als: $f_1, \ldots, f_\varrho$ zuläßt. Alsdann enthält unsere Gruppe n-gliedrige Involutionssysteme[1]), und folglich (Satz 4) verlangt die Integration unseres Involutionssystems nur noch eine Quadratur.

1) In der Tat, setzt man:

$$f_1 = X_1, \ldots, f_q = X_q, \quad \Omega_1 = X_{q+1}, \ldots, \Omega_\mu = X_{q+\mu},$$

so besitzt die Gruppe: $f_1, \ldots, f_\varrho$ die kanonische Form:

$$X_1, \ldots, X_{q+\mu}, X_{q+\mu+1}, \ldots, X_\omega, P_{q+\mu+1}, \ldots, P_\omega.$$

Wäre nun $\omega < n$, so gäbe es außer $f_1, \ldots, f_\varrho$, gegen die Voraussetzung, noch weitere Funktionen, die mit $X_1, \ldots, X_{q+\mu}$ in Involution liegen.

Da die Differenz zwischen der Zahl der Glieder und der Zahl der ausgezeichneten Funktionen einer Gruppe eine gerade Zahl sein muß, so ist:

$$r - (q + m) = 2t,$$

wo t eine ganze Zahl bezeichnet. Folglich ist:

$$r + (q + m) = 2(t + q + m)$$

und:

$$2n - r - q - m = 2(n - t - q - m),$$

das heißt, die Ordnung der ersten Integrationsoperation ist immer eine gerade Zahl. Und da die folgenden Integrationsoperationen ganz von derselben Art wie die erste sind, so folgt, daß sie sämtlich von gerader Ordnung sind.

Hiermit ist das folgende fundamentale Theorem bewiesen: [476

Theorem II. *Soll das Involutionssystem:*

$$f_1 = \alpha_1, \ldots, f_q = \alpha_q$$

integriert werden, und kennt man bereits eine Anzahl Lösungen des vollständigen Systems:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0,$$

etwa: $f_{q+1}, \ldots, f_r$, *so sucht man zunächst weitere Lösungen vermöge des Poisson-Jacobischen Theorems zu bestimmen. Sei:* $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_r, \ldots, f_s$ *die hierdurch bestimmte Gruppe, die außer:* $f_1, \ldots, f_q$ *noch [gerade]* m *unbekannte ausgezeichnete Funktionen enthalten mag. Alsdann verlangt die Integration des vorgelegten Involutionssystems im ungünstigsten Falle nur noch die Operationen:*

$$2n - q - s - m, \quad 2n - q - s - m - 2, \ldots, 6, 4, 2$$

[nebst einer Quadratur]. Unter Umständen können einige dieser Integrationsoperationen wegfallen.

§ 4. Schematische Beispiele.

8. Um die große Wichtigkeit des Theorems II hervortreten zu lassen, behandle ich einige Beispiele schematisch.

Sei: $f_1 = \alpha_1, \ldots, f_q = \alpha_q$ das vorgelegte Involutionssystem, und seien: $f_{q+1}, \ldots, f_s$ bekannte Lösungen des Systems:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0.$$

Ich setze sukzessiv voraus, daß 2, 3, 4, 5 Lösungen fehlen, und zähle die verschiedenen Fälle auf, die bei deren Bestimmung eintreten können. Hierbei hat man sich daran zu erinnern, daß, wenn die Gruppe: $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_s$ außer $f_1, \ldots, f_q$ noch [gerade] m ausgezeichnete Funktionen enthält, stets (Math. Annalen Bd. VIII, S. 259 u. S. 269)[1]):

$$s - (q + m) = \text{gerade}$$

und:

$$s + (q + m) \leqq 2n$$

ist, sodaß man, wenn die Anzahl $2n - q - s$ der fehlenden Lösungen des vorgelegten Systems durch μ bezeichnet wird:

$$\mu - m = \text{gerade und} \geqq 0$$

hat. Fehlt insbesondere eine ungerade Anzahl Lösungen, so erlauben meine neuen Theorien **immer**, die zurückstehenden Integrationsoperationen wesentlich zu vereinfachen.

1. Fehlen zwei Lösungen, so sind zwei Fälle möglich. Entweder ent- [477
hält die Gruppe der f außer $f_1, \ldots, f_q$ keine weiteren ausgezeichneten Funktionen, alsdann brauche ich eine Operation 2 und eine Quadratur, welche letzte Operation ich der Kürze wegen als eine Operation 0 bezeichnen werde. Oder aber diese Gruppe enthält noch zwei ausgezeichnete Funktionen: alsdann genügt eine Quadratur zur Aufstellung einer vollständigen Lösung.

Früher (das heißt, indem man die **Cauchy**sche, oder die erweiterte **Cauchy**sche Methode benutzte) brauchte man in beiden Fällen die Operationen: 2, 1, 0. War insbesondere $q = 1$, so konnte man die **Jacobi**sche Theorie des letzten Multiplikators anwenden, und brauchte dann nur die Operationen: 2, 0, 0.

Ich resumiere dieses Beispiel durch das folgende Schema:

0 ausgezeichnete Funktionen	2, 0
2 „ „	0
früher, wenn $q > 1$	2, 1, 0
früher, wenn $q = 1$	2, 0, 0.

2. Fehlen 3 Lösungen, so sind zwei Fälle möglich. Entweder enthält die Gruppe der f außer $f_1, \ldots, f_q$ noch eine ausgezeichnete Funktion;

1) [Hier Abh. I, S. 48, Satz 38 u. S. 59, Nr. 34.]

alsdann brauche ich die Operationen 2, 0. Oder aber es gibt noch drei ausgezeichnete Funktionen; alsdann genügt eine Quadratur zur Aufstellung einer vollständigen Lösung.

Früher brauchte man die Operationen: 3, 2, 1, 0; nur in dem Falle $q = 1$ genügten die Operationen 3, 2, 0, 0.

Wir haben hier also folgendes Schema:

1 ausgezeichnete Funktion	2, 0
3 „ Funktionen	0
früher, wenn $q > 1$	3, 2, 1, 0
früher, wenn $q = 1$	3, 2, 0, 0.

Man sieht, daß es nach meiner neuen Theorie nicht schwieriger ist, drei fehlende Lösungen zu bestimmen, als zwei fehlende.

3. Fehlen 4 Lösungen, so enthält die Gruppe der f entweder 4 oder 2 oder keine ausgezeichneten Funktionen außer $f_1, \ldots, f_q$. Die entsprechenden Integrationsoperationen sind:

0 ausgezeichnete Funktionen	4, 2, 0
2 „ „	2, 0
4 „ „	0
früher, wenn $q > 1$	4, 3, 2, 1, 0
früher, wenn $q = 1$	4, 3, 2, 0, 0.

4. Fehlen 5 Lösungen, so sind die folgenden Fälle möglich: [478

1 ausgezeichnete Funktion	4, 2, 0
3 „ Funktionen	2, 0
5 „ „	0
früher, wenn $q > 1$	5, 4, 3, 2, 1, 0
früher, wenn $q = 1$	5, 4, 3, 2, 0, 0.

Man sieht also, daß die Integration des gegebenen Involutionssystems gleichviele und gleichschwierige Integrationen verlangt, wenn 4 und wenn 5 Lösungen fehlen.

Und ebenso ergibt sich aus Theorem II allgemein:

Satz 7. *Die Bestimmung von $2m+1$ fehlenden Lösungen des Systems:*

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad wo: \quad (f_i f_k) = 0,$$

verlangt nicht schwierigere Integrationsoperationen als diejenige von $2m$ fehlenden Lösungen.

9. Ich werde eine Anwendung des Theorems II auf die Mechanik machen. Hierdurch erreiche ich in der einfachst möglichen Weise diejenigen Resultate, die sich aus Mayers und meinen Arbeiten aus dem Jahre 1872, verbunden mit den früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand ergaben.

Sei:

$$f_1(x_1, \ldots, x_9, p_1, \ldots, p_9) = a$$

diejenige partielle Differentialgleichung, auf die sich das allgemeine Problem dreier Körper nach Hamilton und Jacobi zurückführen läßt. Seien ferner: $f_2, f_3, \ldots, f_9$ diejenigen Lösungen von $(f_1 f) = 0$, die den Schwerpunktsintegralen und den Flächensätzen entsprechen. Bildet man nun (Math. Annalen Bd. VIII, S. 284)[1]) die Determinante, deren Elemente die $(f_i f_k)$ sind, so erkennt man, daß die Gruppe der f_k außer f_1 noch 2 ausgezeichnete Funktionen enthält. Folglich schließen wir unmittelbar aus Theorem II, daß die Integration der vorgelegten Gleichung im ungünstigsten Falle nur noch die Operationen: 6, 4, 2 verlangt.

In ganz entsprechender Weise behandelt man ein jedes mechanische Problem, das sich auf eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit gewissen bekannten Lösungen reduzieren läßt. Das betreffende mechanische Problem braucht sich nicht auf den Euklidischen Raum, sondern kann sich auf einen jeden Raum von n Dimensionen mit konstantem Krümmungsmaße beziehen.

§ 5. Partielle Differentialgleichungen 1. O., welche die unbekannte Funktion enthalten. [479

Um die vorangehenden Theorien auf Gleichungen, welche die unbekannte Funktion explicite enthalten, auszudehnen, brauchen wir nur, wie gewöhnlich, die betreffenden Gleichungen auf die Form:

$$f(x_1, \ldots, x_n, p_1 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n) = a$$

zu bringen. Hierbei treten unter Umständen gewisse Vereinfachungen ein.

1) [Hier Abh. I, S. 75f.]

10. Zunächst ist zu bemerken, daß die in Theorem I besprochene Quadratur zuweilen wegfällt, weil das betreffende Integral gleich Null gesetzt werden kann. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Satz 8. *Sind: $N_1, \ldots, N_r, H$ homogene Funktionen, beziehungsweise nullter und erster Ordnung, die eine Gruppe von der kanonischen Form: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_m$ bilden, so besteht eine Relation von der Form:*

$$\sum_k p_k dx_k = K_1 dN_1 + \cdots + K_r dN_r + dU,$$

in der U eine arbiträre Funktion der N ist und daher im besondern gleich Null gesetzt werden kann.

Beweis. Es sei: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_m$ die kanonische Form unserer Gruppe, und: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ ein System kanonischer Variabeln. Alsdann ist bekanntlich:

$$\Sigma p dx = \Sigma P dX,$$

und, wenn man hier die X_k, die von nullter Ordnung sind, als Funktionen von $N_1, \ldots, N_r$ ausdrückt, so erhält man eine Relation von der Form:

$$\Sigma p dx = \Sigma K dN,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Satz 9. *Sind: $N_1, \ldots, N_r, H$, homogene Funktionen, beziehungsweise nullter und erster Ordnung, die eine Gruppe von der kanonischen Form: $X_1, \ldots, X_m, P_1, \ldots, P_n$ bilden, so besteht, wenn $m < n$ ist, niemals eine Relation von der Form:*

$$\Sigma p dx = \Sigma K dN + dU.$$

Beweis. Bestände in der Tat eine solche Relation, so würde man, wenn man die N als Funktionen von: $X_1, \ldots, X_m, P_2 : P_1, \ldots, P_n : P_1$ ausdrückte, eine Gleichung von der Form:

$$\Sigma p dx = Q_1 dX_1 + \cdots + Q_m dX_m + \qquad [480$$
$$+ R_2 d(P_2 : P_1) + \cdots + R_n d(P_n : P_1) + dU,$$

oder, wenn: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ ein System kanonischer Variabeln bezeichnen, von der Form:

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n = Q_1 dX_1 + \cdots + Q_m dX_m +$$
$$+ R_2 d(P_2 : P_1) + \cdots + R_n d(P_n : P_1) + dU$$

erhalten, woraus:

$$P_k = Q_k + \frac{\partial U}{\partial X_k} \qquad (k=1,\ldots,m),$$

$$P_k = \frac{\partial U}{\partial X_k} \qquad (k=m+1,\ldots,n),$$

$$0 = -\frac{R_2 P_2 + \cdots + R_n P_n}{P_1^2} + \frac{\partial U}{\partial P_1},$$

$$0 = \frac{R_k}{P_1} + \frac{\partial U}{\partial P_k} \qquad (k=2,\ldots,n).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Elimination der R_k:

$$P_1 \frac{\partial U}{\partial P_1} + \cdots + P_n \frac{\partial U}{\partial P_n} = 0,$$

und die zweite Gleichung ergibt:

$$U = P_{m+1} X_{m+1} + \cdots + P_n X_n + V(X_1, \ldots, X_m, P_1, \ldots, P_n).$$

Also folgt:

$$P_{m+1} X_{m+1} + \cdots + P_n X_n + P_1 \frac{\partial V}{\partial P_1} + \cdots + P_n \frac{\partial V}{\partial P_n} = 0,$$

welche Gleichung indes unmöglich ist, da die Größen $X_{m+1}, \ldots, X_n$ in V nicht vorkommen.

Also ist unsere Annahme, daß eine Relation von der Form:

$$\Sigma p\,dx = \Sigma K\,dN + dU$$

bestände, unrichtig.

11. Die beiden aufgestellten Sätze erlauben, das angekündigte Resultat zu erreichen. Um aber diese Theorie möglichst eingehend zu behandeln, werden wir einige weitere Sätze entwickeln.

Hilfssatz. *Ist der Ausdruck:*

$$\Phi_1 du_1 + \cdots + \Phi_r du_r$$

ein vollständiges Differential, und sind die Φ homogen von nullter Ordnung hinsichtlich der u, so ist: $\Phi_1 u_1 + \cdots + \Phi_r u_r$ das Integral des vorgelegten Differentials.

Beweis. Es ist: [481

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_k \Phi_k u_k = \Phi_i + \sum_k u_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_i},$$

und, da:

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial u_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k}$$

ist, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_k \Phi_k u_k = \Phi_i + \sum_k u_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k},$$

oder, da Φ_i von nullter Ordnung ist:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_k \Phi_k u_k = \Phi_i,$$

woraus durch Integration:

$$\sum_k \Phi_k u_k = \int (\Phi_1 du_1 + \cdots + \Phi_r du_r),$$

wie behauptet wurde.

Satz 10. *Sind: $N_1, \ldots, N_r$ Funktionen nullter Ordnung, die eine Relation von der Form:*

$$\Sigma p\,dx = K_1 dN_1 + \cdots + K_r dN_r + dU$$

erfüllen, so ist U eine arbiträre Funktion der N und kann also gleich Null gesetzt werden.

Beweis. Früher (Satz 1) fanden wir die Formel:

$$U = \int \sum_{i,k} p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} du_i + \Omega(N_1, \ldots, N_r),$$

in welcher die unabhängigen Variabeln: $u_1, \ldots, u_{2n-r}$ nur der Beschränkung unterworfen sind, von einander und von den N unabhängig zu sein.

Wählen wir nun, wie es erlaubt ist, die u homogen von erster Ordnung hinsichtlich der p, so werden umgekehrt die x_k und p_k, aufgefaßt als Funktionen von den N und u, homogen hinsichtlich der u, und zwar werden die x_k homogen von nullter, die p_k homogen von erster Ordnung. Folglich sind die Ausdrücke:

$$\sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}$$

homogen von nullter Ordnung, und nach dem vorangehenden Satze wird daher:

$$U = \sum_i u_i \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} + \Omega(N_1, \ldots, N_r),$$

oder:

$$U = \sum_k p_k \sum_i u_i \frac{\partial x_k}{\partial u_i} + \Omega(N_1, \ldots, N_r);$$

und, da: [482

$$\sum_i u_i \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = 0$$

ist, so folgt:

$$U = \Omega(N_1, \ldots, N_r),$$

wie behauptet wurde.

Theorem III. *Ist ein Involutionssystem nullter Ordnung:*

$$N_1 = a_1, \ldots, N_q = a_q$$

zur Integration vorgelegt, und kennt man von den Lösungen nullter Ordnung des Systems:

$$(N_1 N) = 0, \ldots, (N_q N) = 0 \tag{13}$$

eine so große Anzahl: $N_{q+1}, \ldots, N_r$, *daß eine Bedingungsgleichung von der Form:*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = K_1 dN_1 + \cdots + K_r dN_r + dU,$$

und also auch eine Relation von der einfacheren Form:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = K_1 dN_1 + \cdots + K_r dN_r$$

stattfindet, so verlangt die Integration des vorgelegten Involutionssystems nur gewisse Eliminationen und Differentiationen, dagegen keine Quadratur.

Beweis. Die K sind bestimmt durch die Formel:

$$K_i = \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial N_i};$$

wählt man daher die unabhängigen Variabeln u wie bei dem Beweise des vorangehenden Satzes, so werden die K homogen von erster Ordnung hinsichtlich der u. Also sind sie, aufgefaßt als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$, auch homogen von erster Ordnung hinsichtlich der p.

Auf der anderen Seite wissen wir (Satz 3), daß $K_{q+1}, \ldots, K_r$ die fehlenden Lösungen des Systems (13) sind. Also sind die Verhältnisse dieser K die fehlenden Lösungen nullter Ordnung dieses Systems. Und da diese Lösungen ohne Quadratur gefunden werden, so verlangt die Integration unseres Involutionssystems wirklich nur gewisse Differentiationen und Eliminationen.

Aus den vorangehenden Sätzen ergibt sich das folgende Korollar:

Korollar. *Soll das Involutionssystem nullter Ordnung:* $N_1 = a_1, \ldots, N_q = a_q$ *integriert werden, so gibt es, wenn eine Anzahl Lösungen des Systems:*

$$(N_1 N) = 0, \ldots, (N_q N) = 0, \quad \sum p \frac{\partial N}{\partial p} = 0,$$

etwa: $N_{q+1}, \ldots, N_r$, *gefunden sind, zwei distinkte Fälle, in denen die Integration geleistet werden kann.*

Besitzt die von $N_1, \ldots, N_q, \ldots, N_r$ *erzeugte homogene Gruppe die kanonische Form:* $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_m$, *so verlangt die Integration* [483
nicht einmal eine Quadratur, sondern nur Differentiationen und Eliminationen. Hat sie dagegen die Form: $X_1, \ldots, X_m, P_1, \ldots, P_n$, *so ist noch eine Quadratur erforderlich.*

12. Auch bei der Anwendung der in § 3 entwickelten Theorie auf Involutionssysteme nullter Ordnung gibt es ausgezeichnete Fälle, die eine weitere Integrationserniedrigung gestatten.

Satz 11. *Sind:* $N_1, \ldots, N_r, H$ *homogene Funktionen, beziehungsweise nullter und erster Ordnung, die eine homogene Gruppe mit [gerade]* q' *ausgezeichneten Funktionen, sämtlich von nullter Ordnung, bilden, so verschwindet eine jede Determinante mit* $r - q' + 2$ *Reihen und Kolonnen, die der Matrix:*

$$M = \begin{vmatrix} (N_1 N_1) & \ldots & (N_1 N_r) & (N_1 H) \\ (N_2 N_1) & \ldots & (N_2 N_r) & (N_2 H) \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ (N_r N_1) & \ldots & (N_r N_r) & (N_r H) \\ (H N_1) & \ldots & (H N_r) & (H H) \\ 0 & \ldots & 0 & H \end{vmatrix}$$

entnommen ist. Dagegen gibt es jedenfalls eine nichtverschwindende Determinante desselben Ursprungs mit $r - q' + 1$ *Reihen und Kolonnen.*

Beweis. Faßt man U als Funktion von: $N_1, \ldots, N_r$ auf, so haben die $r + 1$ Gleichungen:

$$(N_1 U) = 0, \ldots, (N_r U) = 0, \quad (H U) = 0$$

nach Voraussetzung q' gemeinsame Lösungen. Daher verschwindet eine jede Determinante mit $r - q' + 1$ Reihen und Kolonnen, die der Matrix:

$$V = \begin{vmatrix} (N_1 N_1) & \ldots & (N_1 N_r) \\ (N_2 N_1) & \ldots & (N_2 N_r) \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ (N_r N_1) & \ldots & (N_r N_r) \\ (H N_1) & \ldots & (H N_r) \end{vmatrix}$$

entnommen ist. Dagegen gibt es jedenfalls eine nicht verschwindende Determinante desselben Ursprungs, die $r - q'$ Reihen und Kolonnen besitzt. Vergleicht man nun die Ausdrücke V und M, so erkennt man sogleich die Richtigkeit unseres Satzes.

Ich setze nun voraus, daß ein Involutionssystem nullter Ordnung: $N_1 = a_1, \ldots, N_q = a_q$ integriert werden soll, und daß man gewisse Lösungen des Systems:

$$(N_1 N) = 0, \ldots, (N_q N) = 0, \quad \sum p \frac{\partial N}{\partial p} = 0,$$

etwa: $N_{q+1}, \ldots, N_r$, kennt, die eine homogene Gruppe: $N_1, \ldots, N_q, \ldots, N_r, H$ bestimmen. Außer $N_1, \ldots, N_q$ möge unsere Gruppe noch [gerade] m ausgezeichnete Funktionen: $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, die sämtlich von [484
nullter Ordnung sind, enthalten.

Ich kann voraussetzen, daß die Polargruppe von $N_1, \ldots, N_r, H$ nicht aus lauter Funktionen nullter Ordnung besteht. Sonst nämlich würden (Math. Annalen Bd. VIII, S. 287)[1]) ihre $2n-(r+1)$ Glieder ein Involutionssystem bilden und daher sämtlich ausgezeichnete Funktionen auch der gegebenen Gruppe: $N_1, \ldots, N_r, H$ sein. Es müßte dann also:

$$2n-(r+1)=q+m, \quad \text{oder:} \quad 2n-(q+m)=r+1$$

sein. Die kanonische Form einer $(r+1)$-gliedrigen homogenen Gruppe, deren sämtliche $q+m$ ausgezeichnete Funktionen von nullter Ordnung sind, ist aber (ebd. S. 294, Kor. 1)[2]):

$$X_1, \ldots, X_\alpha, X_{\alpha+1}, \ldots, X_{\alpha+m+q}, P_1, \ldots, P_\alpha,$$

wo: $2\alpha+q+m=r+1$ ist. Also würde: $\alpha+q+m=n$, und: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_{n-q-m}$ die kanonische Form der Gruppe: $N_1, \ldots, N_r, H$ sein, sodaß die Integration des vorgelegten Involutionssystems bereits durch das Korollar von Nr. 11 absolviert würde.

Bei dieser Voraussetzung ist:

$$(14) \quad (N_1\Phi)=0, \ldots, (N_r\Phi)=0, \quad (H\Phi)=0, \quad \sum_k p_k \frac{\partial\Phi}{\partial p_k}=0$$

ein vollständiges System. Führt man nun an Stelle von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ neue unabhängige Variable ein, nämlich: $N_1, \ldots, N_r, H$, zusammen mit $2n-r-1$ anderen Größen: $u_1, u_2, \ldots$, so nimmt dieses System die Gestalt an:

$$\begin{gathered}
(N_1N_1)\frac{\partial\Phi}{\partial N_1}+\cdots+(N_1N_r)\frac{\partial\Phi}{\partial N_r}+(N_1H)\frac{\partial\Phi}{\partial H}+\sum_i(N_1u_i)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}=0,\\
\cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
(N_rN_1)\frac{\partial\Phi}{\partial N_1}+\cdots+(N_rN_r)\frac{\partial\Phi}{\partial N_r}+(N_rH)\frac{\partial\Phi}{\partial H}+\sum_i(N_ru_i)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}=0,\\
(H\,N_1)\frac{\partial\Phi}{\partial N_1}+\cdots+(H\,N_r)\frac{\partial\Phi}{\partial N_r}+(H\,H)\frac{\partial\Phi}{\partial H}+\sum_i(H\,u_i)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}=0,\\
H\frac{\partial\Phi}{\partial H}+\sum_i\Big(\sum_k p_k\frac{\partial u_i}{\partial p_k}\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}=0.
\end{gathered}$$

1) [Hier Abh. I, S. 79, Satz 56.]
2) [A. a. O. S. 87.]

Berücksichtigt man daher Satz 11, so sieht man, daß die Elimination der Differentialquotienten:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial N_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial N_r}, \frac{\partial\Phi}{\partial H}$$

aus diesem Systeme $q+m+1$ Gleichungen von der Form:

$$(15) \qquad B_k(\Phi)=\sum_i \Theta_{ki}(N_1, \ldots, N_r, H, u_1, u_2, \ldots)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}=0$$

ergibt.

Hätte man andererseits dieselben Differentialquotienten zwischen [485
den Gleichungen:

$$(N_1\Phi)=0, \ldots, (N_r\Phi)=0, \quad (H\Phi)=0$$

eliminiert, so würde man (§ 3, Nr. 7) $q+m$ Gleichungen erhalten haben, die dem vollständigen Systeme:

$$(16) \qquad (N_1\Phi)=0, \ldots, (N_q\Phi)=0, \quad (\Omega_1\Phi)=0, \ldots, (\Omega_m\Phi)=0$$

äquivalent wären.

Hieraus schließen wir, daß die Lösungen des Systems (15) zugleich auch das System (16) erfüllen. Und da das vollständige System (15) $q+m+1$ Gleichungen und $2n-r-1$ unabhängige Variable enthält, so finden wir eine Lösung Φ_1 von (16) durch eine Operation:

$$2n-(r+1)-(q+m+1).$$

Bilden nun: $N_1, \ldots, N_r, H, \Phi_1$ wiederum eine Gruppe, so wissen wir, daß diese Gruppe außer $N_1, \ldots, N_q$ noch $m+1$ ausgezeichnete Funktionen enthält. Ich behaupte, daß diese ausgezeichneten Funktionen, sämtlich von nullter Ordnung sind.

Um dies nachzuweisen, wollen wir die $q+m+1$ Gleichungen (15), die sich aus dem Systeme (14) durch Elimination der Differentialquotienten von Φ nach: $N_1, \ldots, N_r, H$ ergaben, etwas näher ins Auge fassen.

Nehmen wir an, daß:

$$X_1, \ldots, X_q, \ldots, X_{q+m}, X_{q+m+1}, \ldots, X_{q'}, P_{q+m+1}, \ldots, P_{q'}$$

die kanonische Form der Gruppe: $N_1, \ldots, N_r, H$, und zugleich: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ ein System kanonischer Variabeln sei. Dann können wir das System (14) ersetzen durch die Gleichungen:

$$(X_1\Phi)=0, \ldots, (X_{q'}\Phi)=0, \; (P_{q+m+1}\Phi)=0, \ldots, (P_{q'}\Phi)=0, \; \sum_k p_k\frac{\partial\Phi}{\partial p_k}=0,$$

oder, wenn wir unsere kanonischen Variabeln einführen, durch:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P_1}=0,\cdots,\frac{\partial\Phi}{\partial P_{q'}}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial X_{q+m+1}}=0,\cdots,\frac{\partial\Phi}{\partial X_{q'}}=0,\quad \sum_k^{1\ldots n} P_k\frac{\partial\Phi}{\partial P_k}=0.$$

Infolgedessen genügen die Lösungen des Systems (14) zugleich auch den $q+m+1$ Gleichungen:

$$(17)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial P_1}=0,\cdots,\frac{\partial\Phi}{\partial P_{q+m}}=0,\qquad P_{q'+1}\frac{\partial\Phi}{\partial P_{q'+1}}+\cdots+P_n\frac{\partial\Phi}{\partial P_n}=0.$$

Auf der anderen Seite, da $N_1,\ldots,N_r,H$ Funktionen von: $X_1,\ldots,X_{q'},P_{q+m+1},\ldots,P_{q'}$ allein sind, ist klar, daß durch Wiedereinführung der Variabeln: $N_1,\ldots,N_r,H,u_1,u_2,\ldots$ die Gleichungen (17) die Form:

$$\sum_i V_{ki}(N_1,\ldots,N_r,H,u_1,u_2,\ldots)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}=0$$ [486

annehmen. Und da sich aus dem Systeme (14) nur $q+m+1$ Gleichungen von dieser Form ableiten lassen, so sehen wir, daß die Systeme (15) und (17) einander äquivalent sind. Folglich besitzen die Lösungen des Systems (15) die Form:

$$\Phi=\Phi(X_1,\ldots,X_n,P_{q+m+1},\ldots,P_{q'},P_{q'+1}:P_n,\ldots,P_{n-1}:P_n).$$

Sei nun Φ_1 eine solche Lösung, die mit: $X_1,\ldots,X_{q'},P_{q+m+1},\ldots,P_{q'}$ eine Gruppe bildet. Jede ausgezeichnete Funktion Φ dieser Gruppe hat zunächst als Funktion von: $X_1,\ldots,X_{q'},P_{q+m+1},\ldots,P_{q'}$ und Φ_1 allein notwendig die obige Form; sie befriedigt aber überdies die Gleichungen:

$$(X_k\Phi)=\frac{\partial\Phi}{\partial P_k}=0\qquad (k=1,\ldots,q'),$$

$$(P_i\Phi)=-\frac{\partial\Phi}{\partial X_i}=0\qquad (i=q+m+1,\ldots,q');$$

also hat jede solche Funktion die Form:

$$\Phi=\Phi(X_1,\ldots,X_{q+m},X_{q'+1},\ldots,X_n,P_{q'+1}:P_n,\ldots,P_{n-1}:P_n)$$

und ist folglich eine Funktion nullter Ordnung, wie oben behauptet worden war.

Durch Auffindung einer solchen Lösung Φ_1 des Systems (15), die mit $N_1,\ldots,N_r,H$ eine Gruppe bildet, ist somit das ursprüngliche Problem zurückgeführt auf eins von ganz derselben Form, in welchem nur die Zahlen r und m respektive in $r+1$ und $m+1$ übergegangen sind. Wir können daher das neue Problem seinerseits wieder in genau derselben Weise einen Schritt weiter bringen und bedürfen hierzu nur einer Integrationsoperation, deren Ordnung um zwei Einheiten niedriger ist, als diejenige der ersten Operation.

Nehmen wir andererseits an, daß die gefundene Lösung Φ_1 des Systems (15) und die Funktionen: $N_1,\ldots,N_r,H$ keine Gruppe bilden. Sind dann $\Phi_2,\ldots,\Phi_s$ diejenigen weiteren Lösungen des Systems (16), die man durch Anwendung des Poisson-Jacobischen Satzes erhält, so besitzt die Gruppe: $N_1,\ldots,N_r,H,\Phi_1,\ldots,\Phi_s$ jedenfalls $q+m$ ausgezeichnete Funktionen nullter Ordnung, nämlich $N_1,\ldots,N_q,\Omega_1,\ldots,\Omega_m$, und folglich ist auch in diesem Falle die Ordnung der zweiten Integrationsoperation wenigstens um zwei Einheiten niedriger als diejenige der ersten.

Indem wir daher ganz analog wie in Nr. 7 weiter schließen, werden wir zu dem folgenden Satze geführt:

Theorem IV. *Vorgelegt sei ein Involutionssystem nullter* [487 *Ordnung:*

$$N_1=\alpha_1,\ldots,N_q=\alpha_q,$$

und seien: $N_1,\ldots,N_q,\ldots,N_r,H$ *bekannte Lösungen des Systems:*

$$(N_1\Phi)=0,\ldots,(N_q\Phi)=0,$$

die eine homogene Gruppe mit [gerade] $q+m$ *ausgezeichneten Funktionen, sämtlich von nullter Ordnung, bilden. Alsdann verlangt die Bestimmung der fehlenden* $2l+m$ *Lösungen im ungünstigsten Falle nur noch die Operationen:*

$$2l-1,2l-3,\ldots,5,3,1.$$

Sind dagegen die $q+m$ *ausgezeichneten Funktionen nicht sämtlich von nullter Ordnung, so sind im ungünstigsten Falle die Operationen:*

$$2l,2l-2,\ldots,6,4,2$$

notwendig.

Abschnitt II.

Theorie der Differentialgleichungen, die bekannte infinitesimale Transformationen gestatten.

In einer bekannten Abhandlung untersucht Abel diejenigen algebraischen Gleichungen, welche die Eigenschaft besitzen, daß eine gewisse bekannte rationale Funktion $f(x)$ einer beliebigen Wurzel x selbst wieder eine Wurzel der Gleichung ist. Er zeigt, daß die Auflösung einer solchen Gleichung entweder vollständig geleistet werden, oder doch auf die Auflösung von gewissen Hilfsgleichungen, deren Grade Divisoren des Grades der vorgelegten Gleichung sind, zurückgeführt werden kann. Jene Gleichungen können dadurch charakterisiert werden, daß sie eine gewisse rationale Transformation:

$$x' = f(x)$$

gestatten. Und die betreffende Abhandlung *Abels* gibt, können wir sagen, eine Theorie für die Auflösung von algebraischen Gleichungen, die entweder eine oder auch mehrere bekannte *permutable* Transformationen gestatten.

In der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen kann man sich, wie *Klein* und ich es getan haben[1]), ein analoges Problem stellen.

Um mich möglichst klar ausdrücken zu können, werde ich [488 zuerst einige einfache Beispiele betrachten.

Sei:

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

eine vorgelegte Differentialgleichung mit dem Integrale:

$$\varphi(x,\ y) = a = \text{Const.},$$

und man betrachte x und y, wie gewöhnlich, als Cartesische Punktkoordinaten in einer Ebene. Alsdann definiert: $\varphi = a$ einfach unendlich viele Kurven, die sogenannten Integralkurven. Führe ich nun auf die Ebene eine Translationsbewegung aus, zum Beispiel parallel mit der x-Achse, so verwandeln sich die Integralkurven in die Kurvenschar:

$$\varphi(x + a,\ y) = \text{Const.},$$

die im allgemeinen von der ursprünglichen Schar verschieden ist. Besteht indes zufälligerweise eine Relation von der Form:

$$\varphi(x + a,\ y) = \Omega(\varphi(x,\ y)),$$

so ist die neue Schar mit der ursprünglichen identisch, während jedoch im allgemeinen jede Integralkurve in eine neue übergegangen ist. In diesem Falle sage ich, daß die Differentialgleichung: $f = 0$ die betreffende Translation gestattet.

Es ist insbesondere möglich, daß $f = 0$ eine *infinitesimale* Translation längs der x-Achse gestattet. Dies tritt ein, wenn $f = 0$ die Form:

$$f\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

besitzt. In diesem Falle hat nämlich das Integral die Form:

$$\Phi(y) + x = \text{Const.},$$

1) Math. Annalen Bd. IV [d. Ausg. Bd. I, Abh. XIV.]

welche Gleichung zeigt, daß eine infinitesimale Translation längs der x-Achse jede Integralkurve in eine benachbarte überführt. Zu bemerken ist übrigens, daß $f = 0$ in diesem Falle zugleich jede *endliche* Translation längs der x-Achse gestattet.

Betrachten wir als zweites Beispiel eine Gleichung: $f = 0$, deren Integral die Form:

$$\Phi(y^2 + x^2) + \operatorname{arctg}(y : x) = \text{Const.}$$

besitzt. Führt man auf die Ebene eine infinitesimale Rotation um den Anfangspunkt aus, so geht jede Integralkurve in eine benachbarte Integralkurve über. In diesem Falle sage ich, daß $f = 0$ die betreffende infinitesimale Rotation gestattet. Man sieht, daß alsdann $f = 0$ zugleich jede *endliche* Rotation um den Anfangspunkt gestattet.

Wenn überhaupt[1]) die infinitesimale Transformation, vermöge [489 deren x und y die Inkremente:

$$\delta x = \xi(x,\ y)\delta t, \quad \delta y = \eta(x,\ y)\delta t$$

erhalten, jede Integralkurve der Gleichung: $f = 0$ in eine benachbarte Integralkurve überführt, so sage ich, daß diese Gleichung die betreffende infinitesimale Transformation *gestattet*.

In der zitierten Abhandlung zeigten nun *Klein* und ich, daß die Integration einer Gleichung: $f = 0$ mit einer *bekannten* infinitesimalen Transformation:

$$\delta x = \xi\delta t, \quad \delta y = \eta\delta t$$

vermöge einer Quadratur geleistet werden kann, wenn zuerst die Gleichung:

$$\eta dx - \xi dy = 0$$

integriert worden ist.[2]) Diese anscheinend triviale Bemerkung erlaubte uns, mehrere bekannte Integrationstheorien unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zu vereinigen.

Es lag nun nahe, überhaupt zu untersuchen, *welcher Vorteil sich für die Integration von beliebigen vorgelegten Differentialgleichungen aus bekannten infinitesimalen Transformationen derselben ziehen läßt.*

1) Ich definiere später *analytisch* den Sinn, den ich mit dem Ausdrucke, daß eine Differentialgleichung: $f = 0$ eine gewisse infinitesimale Transformation gestattet, verbinde.

2) In dem ersten Paragraphen dieses Abschnittes zeige ich, daß die Integration der Hilfsgleichung:

$$\eta dx - \xi dy = 0$$

unnötig ist.

Dieses allgemeine Problem behandle ich in diesem Abschnitte für lineare partielle Differentialgleichungen. Ich erhalte in dieser Weise mehrere bemerkenswerte Resultate, unter denen ich hier nur den genauen Zusammenhang der Theorie der infinitesimalen Transformationen mit der Theorie des Integrabilitätsfaktors und der Theorie des letzten Multiplikators hervorheben werde. Meine neue Theorie steht übrigens auch in genauem Zusammenhange mit meiner Theorie der Transformationsgruppen, die indes hier keineswegs als bekannt vorausgesetzt wird.

Um die Tragweite meiner neuen Theorie an einem guten Beispiele zu illustrieren, betrachte ich [in § 14] das vollständige System:

$$(f_1\varphi) = 0, \ldots, (f_q\varphi) = 0, \quad \text{wo:} \quad (f_i f_k) = 0,$$

und setze dabei voraus, daß gewisse Lösungen desselben gefunden sind. Ich zeige zunächst, daß jede bekannte Lösung unmittelbar eine infinitesimale Transformation aufzustellen erlaubt, welche das vollständige System invariant läßt. Sodann wende ich meine allgemeine Theorie auf diesen speziellen Fall an und finde dadurch in neuer Weise die Hauptresultate [490
der vorangehenden Paragraphen [1 bis 5] wieder, die übrigens eben in dieser Weise zuerst[1]) gewonnen wurden.[2])

1) Durch geometrische Untersuchungen wurde ich schon längst zur allgemeinen Betrachtung solcher infinitesimaler Transformationen geführt, die ein vorgelegtes geometrisches Gebilde invariant lassen. In diesem Sinne untersuchte ich im besondern zusammen mit Klein diejenigen Kurven, die ∞^1, und diejenigen Flächen, die ∞^2 permutable lineare Transformationen zulassen. Bei dieser Gelegenheit stellten wir, wenngleich nur implizite, das im Texte besprochene allgemeine Problem.

Klein machte mich aufmerksam auf die Analogie zwischen diesem Probleme und der Abelschen Theorie solcher algebraischer Gleichungen, die bekannte permutable Transformationen zulassen. In der Arbeit „Über Komplexe" (Math. Annalen Bd. V, S. 200 [d. Ausg. Bd. II, Abh. I, § 17]) betrachtete ich partielle Differentialgleichungen 1. O. mit bekannten infinitesimalen Transformationen; in späteren Arbeiten habe ich bei mehreren Gelegenheiten kurze Andeutungen über diese Theorie gemacht.

2) Was die Theorie der infinitesimalen Transformationen in ihrer Anwendung auf partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung betrifft, so beschränke ich mich hier auf den folgenden Satz:

Gestattet eine partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung zwischen n Variabeln eine bekannte infinitesimale Berührungstransformation, so ist es möglich, eine Gleichung derselben Ordnung mit $n-1$ Variabeln aufzustellen, deren Integrale ohne weiteres Integrale der vorgelegten Gleichung liefern.

Diese Bemerkung läßt sich zum Beispiel anwenden auf die partielle Differentialgleichung 3. O. zwischen 4 Variabeln, welche alle Orthogonalsysteme des Raumes bestimmt. Man kennt nämlich alle infinitesimalen Transformationen, welche diese

§ 6. Infinitesimale Transformationen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung.

13. Eine Transformation, die x und y bezüglich durch:

$$x + \xi\delta t, \quad y + \eta\delta t$$

ersetzt, wobei ξ und η gewisse Funktionen von x und y sind, und δt eine infinitesimale Größe bezeichnet, nenne ich eine infinitesimale Transformation. Ich bezeichne dieselbe durch die Gleichungen:

$$\delta x = \xi\delta t, \quad \delta y = \eta\delta t.$$

Führe ich diese Transformation auf irgend eine Funktion $\Omega(x, y)$ aus, so erhalte ich die neue Funktion:

$$\Omega(x + \xi\delta t, \quad y + \eta\delta t),$$

oder, wenn ich von infinitesimalen Größen zweiter Ordnung absehe:

$$\Omega + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\,\eta\right)\delta t.$$

Sei nun: $Ydx - Xdy = 0$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. O. und φ ein Integral derselben, alsdann ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\eta$$ [491

im allgemeinen nicht wieder ein Integral dieser Gleichung; ist dies jedoch der Fall, sodaß also eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\eta = \Omega(\varphi)$$

stattfindet, so sage ich, daß unsere Differentialgleichung die infinitesimale Transformation: $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ gestattet, oder daß diese infinitesimale Transformation die Gleichung: $Ydx - Xdy = 0$ in sich überführt.

Definition. *Die Differentialgleichung:* $Ydx - Xdy = 0$ *gestattet die infinitesimale Transformation:* $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$, *wenn jedes Integral der Gleichung in ein neues Integral übergeführt wird, wenn also der Ausdruck:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\eta$$

gleichzeitig mit φ *ein Integral ist.*

Gleichung invariant lassen. Nimmt man zum Beispiel eine beliebige infinitesimale Bewegung, so ist es möglich, eine Gleichung 3. O. zwischen z, x, y aufzustellen, deren Integralflächen jedesmal einem Orthogonalsysteme angehören, das bei der betreffenden Bewegung invariant bleibt.

Wir werden diejenige Bedingungsgleichung entwickeln, die zwischen X, Y, ξ und η stattfinden muß, wenn unsere Differentialgleichung die betreffende infinitesimale Transformation gestatten soll.

Zu diesem Zwecke bilden wir die identische Gleichung:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & X\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right)+Y\frac{\partial}{\partial y}\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\\ & -\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\eta\frac{\partial}{\partial y}\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\\ & =\left(X\frac{\partial \xi}{\partial x}+Y\frac{\partial \xi}{\partial y}-\xi\frac{\partial X}{\partial x}-\eta\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\\ & +\left(X\frac{\partial \eta}{\partial x}+Y\frac{\partial \eta}{\partial y}-\xi\frac{\partial Y}{\partial x}-\eta\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}\right.$$

und setzen in dieser statt f ein Integral φ der Differentialgleichung, das heißt, eine Lösung der Gleichung:

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Setzen wir nun voraus, daß unsere Differentialgleichung die infinitesimale Transformation: $\delta x=\xi\delta t$, $\delta y=\eta\delta t$ gestattet, so ist nach dem Vorangehenden auch:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta$$

eine Lösung, und also kommt:

$$\begin{aligned} 0=&\left(X\frac{\partial \xi}{\partial x}+Y\frac{\partial \xi}{\partial y}-\xi\frac{\partial X}{\partial x}-\eta\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\\ &+\left(X\frac{\partial \eta}{\partial x}+Y\frac{\partial \eta}{\partial y}-\xi\frac{\partial Y}{\partial x}-\eta\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y},\end{aligned}$$

was wieder heißt, daß die Differentialgleichung: [492

$$\begin{aligned} 0=&\left(X\frac{\partial \xi}{\partial x}+Y\frac{\partial \xi}{\partial y}-\xi\frac{\partial X}{\partial x}-\eta\frac{\partial X}{\partial y}\right)dy-\\ &-\left(X\frac{\partial \eta}{\partial x}+Y\frac{\partial \eta}{\partial y}-\xi\frac{\partial Y}{\partial x}-\eta\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\end{aligned}$$

dasselbe Integral wie die vorgelegte Gleichung:

$$0=Xdy-Ydx$$

zuläßt. Es bestehen daher zwei Relationen:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & X\frac{\partial \xi}{\partial x}+Y\frac{\partial \xi}{\partial y}-\xi\frac{\partial X}{\partial x}-\eta\frac{\partial X}{\partial y}=\lambda X,\\ & X\frac{\partial \eta}{\partial x}+Y\frac{\partial \eta}{\partial y}-\xi\frac{\partial Y}{\partial x}-\eta\frac{\partial Y}{\partial y}=\lambda Y,\end{aligned}\right.$$

die durch Elimination der unbekannten Größe λ die Bedingungsgleichung:

$$\frac{X\frac{\partial \xi}{\partial x}+Y\frac{\partial \xi}{\partial y}-\xi\frac{\partial X}{\partial x}-\eta\frac{\partial X}{\partial y}}{X}=\frac{X\frac{\partial \eta}{\partial x}+Y\frac{\partial \eta}{\partial y}-\xi\frac{\partial Y}{\partial x}-\eta\frac{\partial Y}{\partial y}}{Y},$$

oder die äquivalente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X}{X\eta-Y\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y}{X\eta-Y\xi}\right)=0$$

ergeben.

Besteht andererseits diese Gleichung, und also auch die äquivalenten Gleichungen (2), so zeigt (1), daß:

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

gleichzeitig mit φ ein Integral von: $Xdy-Ydx=0$ ist. Und also haben wir den Satz:

Satz 12. *Soll die Differentialgleichung: $Xdy-Ydx=0$ die infinitesimale Transformation: $\delta x=\xi\delta t$, $\delta y=\eta\delta t$ gestatten, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Bedingungsgleichung:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X}{X\eta-Y\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y}{X\eta-Y\xi}\right)=0$$

erfüllt ist.

14. Dieser Satz gibt eine merkwürdige Beziehung zwischen der Theorie der infinitesimalen Transformationen einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O. und der Eulerschen Theorie des Integrabilitätsfaktors.

Ein Integrabilitätsfaktor M der Gleichung: $Xdy-Ydx=0$ ist ja nämlich durch die Gleichung:

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x}+\frac{\partial(MY)}{\partial y}=0$$

definiert. Wenn wir aber diese Gleichung mit der obenstehenden Bedingungsgleichung vergleichen, so erhalten wir das folgende Theorem:

Theorem V. *Führt die infinitesimale Transformation:* [493 *$\delta x=\xi\delta t$, $\delta y=\eta\delta t$ die Gleichung: $Xdy-Ydx=0$ in sich über, so ist $1:(X\eta-Y\xi)$ ein Integrabilitätsfaktor. Kennt man andererseits einen Integrabilitätsfaktor M, und bestimmt man daraus zwei Funktionen ξ und η durch die Gleichung:*

$$X\eta-Y\xi=\frac{1}{M},$$

so gestattet unsere Differentialgleichung die infinitesimale Transformation: $\delta x=\xi\delta t$, $\delta y=\eta\delta t$.

Diesen Satz beweist man auch folgendermaßen. Man multipliziere die beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = \Delta \quad \text{und:} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

mit einander, so wird bekanntlich:

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{vmatrix} X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Y & \eta \end{vmatrix}.$$

Lassen wir hier φ eine Lösung von:

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

bedeuten, so folgt:

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - Y \left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right),$$

woraus:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : - Y = \frac{\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\Delta}.$$

Nun ist aber die linke Seite dieser Gleichung der allgemeine Ausdruck eines Integrabilitätsfaktors unserer Differentialgleichung. Setzen wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : - Y = N,$$

so kommt:

$$N = \frac{\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\Delta},$$

welche Gleichung die Richtigkeit unseres Satzes beweist.

In der Tat, gestattet die vorgelegte Differentialgleichung die infinitesimale Transformation: $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$, und besteht somit eine Relation:

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Omega(\varphi),$$

so wird:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Omega(\varphi)} N,$$ [494

was darauf hinauskommt, daß $1 : \Delta$ ein Integrabilitätsfaktor ist. Auf der anderen Seite, wenn $1 : \Delta$ ein Integrabilitätsfaktor ist, so zeigt die obenstehende Gleichung, daß:

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

das Verhältnis zweier Integrabilitätsfaktoren, das heißt ein Integral ist. Folglich gestattet die Differentialgleichung die betreffende Transformation.

Im Vorangehenden ist stillschweigend vorausgesetzt worden, daß die Determinante Δ von Null verschieden ist. Verschwindet dagegen Δ, ist also:

$$X\eta - Y\xi = 0,$$

so läßt sich kein Vorteil aus der bekannten infinitesimalen Transformation ziehen, die jetzt die Form:

$$\delta x = \lambda X \delta t, \quad \delta y = \lambda Y \delta t$$

besitzt. Und dies ist keineswegs überraschend, insofern unsere Differentialgleichung eine jede infinitesimale Transformation von der Form:

$$\delta x = \mu X \delta t, \quad \delta y = \mu Y \delta t$$

gestattet. Es besagt daher nichts, eine solche zu kennen.

§ 7. Infinitesimale Transformationen eines vollständigen Systems.

15. Ich bezeichne die infinitesimale Transformation, welche das Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ durch das unendlich benachbarte: $x_1 + \xi_1 \delta t, \ldots, x_n + \xi_n \delta t$ ersetzt, mit den Gleichungen:

$$\delta x_1 = \xi_1 \delta t, \ldots, \delta x_n = \xi_n \delta t,$$

oder kurzweg mit:

$$\delta x_k = \xi_k \delta t.$$

Sie transformiert eine Funktion der x:

$$\Pi(x_1, \ldots, x_n)$$

in:

$$\Pi(x_1 + \xi_1 \delta t, \ldots, x_n + \xi_n \delta t),$$

oder, wenn wir infinitesimale Größen zweiter Ordnung wegwerfen, in:

$$\Pi + \delta t \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \xi_1 + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \xi_n \right).$$

Ist Π eine Lösung eines vollständigen Systems mit den unabhängigen Variabeln: $x_1, \ldots, x_n$:

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \ldots, A_r(f) = 0,$$

so ist: [495

$$\Pi + \delta t \sum_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \xi_k$$

im allgemeinen keine solche Lösung. Ist dies indes zufälligerweise der Fall, so ist auch:

$$\sum_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \xi_k$$

eine Lösung.

Definition. *Ein vollständiges System:*

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \ldots, A_r(f) = 0$$

gestattet die infinitesimale Transformation:

$$\delta x_k = \xi_k \delta t,$$

wenn durch diese Transformation jede Lösung des Systems wiederum in eine solche übergeführt wird, wenn also der Ausdruck:

$$\sum_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \xi_k$$

gleichzeitig mit Π eine Lösung des vollständigen Systems ist.

Wir setzen voraus, daß das r-gliedrige vollständige System:

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

die infinitesimale Transformation:

$$\delta x_k = \xi_k \delta t$$

gestattet, und suchen die infolgedessen zwischen den X_k^i und ξ_k stattfindenden Relationen.

Wir setzen:

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = B(f)$$

und bilden den bekannten Ausdruck: $A_i(B(f)) - B(A_i(f))$. Dies gibt für jedes i eine Gleichung von der Form:

$$A_i(B(f)) - B(A_i(f)) = k_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + k_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{3}$$

wo:

$$k_j^i = \sum_m^{1\ldots n} \left(X_m^i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m} - \xi_m \frac{\partial X_j^i}{\partial x_m} \right).$$

Läßt man jetzt f irgend eine Lösung des vollständigen Systems bezeichnen, so verschwinden sowohl die Größen $A_i(f)$, als auch die Größen $A_i(B(f))$, und also wird die linke Seite der Gleichung (3) Null. Jede Lösung des vollständigen Systems genügt also auch der Gleichung:

$$k_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + k_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

was wieder heißt, daß eine Relation von der Form:

$$k_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + k_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha_1^i A_1(f) + \cdots + \alpha_r^i A_r(f),$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung:

$$A_i(B(f)) - B(A_i(f)) = \alpha_1^i A_1(f) + \cdots + \alpha_r^i A_r(f) \tag{4}$$ [496

stattfindet. Hier sind die α gewisse Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$.

Besteht andererseits für jedes i eine Relation von dieser Form, so behaupte ich, daß unsere infinitesimale Transformation das vollständige System: $A_i(f) = 0$ in sich selbst überführt. Denn lassen wir in (4) f irgend eine Lösung des vollständigen Systems bezeichnen, so kommt:

$$A_i(B(f)) = 0,$$

und also ist $B(f)$ selbst eine Lösung, wie behauptet wurde. Dies gibt:

Theorem VI. *Soll die infinitesimale Transformation:*

$$\delta x_k = \xi_k \delta t \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

sämtliche Lösungen des vollständigen Systems:

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \ldots, A_r(f) = 0$$

in ebensolche überführen, so ist, wenn wir:

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = B(f)$$

setzen, dazu notwendig und hinreichend, daß r Relationen von der Form:

$$A_i(B(f)) - B(A_i(f)) = \alpha_1^i A_1(f) + \cdots + \alpha_r^i A_r(f) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

stattfinden, wo die α Funktionen der x sind.

Eine jede der erhaltenen r Bedingungsgleichungen löst sich in n solche auf, weil die Koeffizienten der Größen $\partial f : \partial x$ links und rechts einander identisch gleich sein müssen. Man hat daher die $r \,.\, n$ Bedingungsgleichungen:

$$\sum_m^{1\ldots n} \left(X_m^i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_m} - \xi_m \frac{\partial X_k^i}{\partial x_m} \right) = \alpha_1^i X_k^1 + \cdots + \alpha_r^i X_k^r;$$

doch ist es im allgemeinen bequemer, diese $r \,.\, n$ Gleichungen in die r in Theorem VI aufgestellten Relationen zusammenzufassen.

Wenn ich im folgenden kurzweg von der infinitesimalen Transformation:

$$B(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{5}$$

spreche, so verstehe ich darunter immer die infinitesimale Transformation:

$$\delta x_k = \xi_k \delta t \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{6}$$

Dabei ist folgendes zu bemerken: Führt man statt: $x_1, \ldots, x_n$ neue unabhängige Variabeln: $x'_1, \ldots, x'_n$ ein, so erhält man einerseits:

$$\delta x'_k = \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_1}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial x'_k}{\partial x_n}\xi_n\right)\delta t,$$ [497

andererseits:

$$B(f) = \sum_k^{1\ldots n}\left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_1}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial x'_k}{\partial x_n}\xi_n\right)\frac{\partial f}{\partial x'_k},$$

sodaß sich der Ausdruck (5) und die Gleichungen (6) in genau derselben Weise transformieren. Hiermit ist die analytische Berechtigung der eben eingeführten Terminologie nachgewiesen.

§ 8. Reduktion des Problems.

Ich setze voraus, daß das r-gliedrige vollständige System:

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i=1,\ldots,r)$$

q bekannte infinitesimale Transformationen:

$$B_k(f) = \xi_1^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^k \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (k=1,\ldots,q)$$

gestattet, das heißt, daß Relationen von der Form:

$$A_i(B_k(f)) - B_k(A_i(f)) = \alpha_1^{ik} A_1 f + \cdots + \alpha_r^{ik} A_r f = (A_i B_k) \tag{7}$$

bestehen.

Ich führe in diesem Paragraphen die Aufgabe, diese bekannten infinitesimalen Transformationen für die Integration des vollständigen Systems möglichst zu verwerten, auf den Fall zurück, daß die $B(f)$ durch Relationen von der Form:

$$B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \sum_m b_m^{ik} B_m(f) + \sum_m \alpha_m^{ik} A_m(f),$$

in denen die b Konstanten bezeichnen, verbunden sind, und daß $q + r = n$ ist.

16. Es ist zunächst möglich, aus den bekannten infinitesimalen Transformationen gewisse weitere infinitesimale Transformationen und zugleich gewisse Lösungen des vollständigen Systems herzuleiten. Hierzu dienen die folgenden Sätze:

Satz 13. *Gestattet unser vollständiges System die infinitesimalen Transformationen: $B_k(f)$ und $B_{k'}(f)$, so gestattet es zugleich auch die infinitesimale Transformation, deren Symbol: $B_k(B_{k'}(f)) - B_{k'}(B_k(f))$ ist.*

Beweis. Wir bilden die Jacobische Identität:

$$(A_i(B_k B_{k'})) + (B_k(B_{k'} A_i)) + (B_{k'}(A_i B_k)) = 0$$

und ersetzen $(A_i B_k)$ und $(A_i B_{k'})$ durch ihre Werte (7). In dieser Weise finden wir, indem wir noch einmal die Formeln (7) anwenden, daß sich $(A_i(B_k B_{k'}))$ linear durch die $A_i(f)$ ausdrückt. Und folglich ist [498 $(B_k B_{k'})$, oder ausgeführt: $B_k(B_{k'}(f)) - B_{k'}(B_k(f))$, das Symbol einer infinitesimalen Transformation des vollständigen Systems.

Theorem VII. *Gestattet das vollständige System:*

$$A_1(f) = 0, \ldots, A_r(f) = 0$$

die infinitesimalen Transformationen: $B_1(f), \ldots, B_q(f)$, und sind dabei die $A(f)$ und $B(f)$ durch [gerade] m Relationen:

$$\sum_k a_k A_k(f) + \sum_k b_k B_k(f) = 0,$$

in denen die a_k und b_k Funktionen der x sind, verbunden, so findet man folgendermaßen eine Anzahl Lösungen des vollständigen Systems:

Man löst die m Relationen nach m von den Größen $B(f)$ auf. Dies ist immer möglich, da keine lineare Relation zwischen den $A_i(f)$, die ein vollständiges System bilden, stattfinden darf. Erhält man hierdurch:

$$B_k(f) = \beta_{m+1}^k B_{m+1}(f) + \cdots + \beta_q^k B_q(f) + \Sigma \alpha A(f) \qquad (k=1,\ldots,m),$$

so sind sämtliche Größen β Lösungen des vollständigen Systems.

Beweis. Die Gleichung:

$$(A_i B_k) = (A_i, \beta_{m+1}^k B_{m+1} + \cdots + \beta_q^k B_q + \Sigma \alpha A)$$

ergibt wegen (7) eine Relation von der Form:

$$A_i(\beta_{m+1}^k) B_{m+1}(f) + \cdots + A_i(\beta_q^k) B_q(f) + \Sigma \alpha' A(f) = 0.$$

Nun aber haben wir vorausgesetzt, daß nur m Relationen zwischen den A und B stattfinden, und zwar solche, die sich hinsichtlich: $B_1, \ldots, B_m$ auflösen lassen. Also müssen die Größen: $A_i(\beta_{m+1}^k), \ldots, A_i(\beta_q^k)$ gleich Null sein, weil sonst eine Relation zwischen: $B_{m+1}(f), \ldots, B_q(f)$ und den $A(f)$ bestände. Und folglich sind die β Lösungen unseres vollständigen Systems, was zu beweisen war.

Schließlich erinnere ich noch daran, daß schon die Definition des Begriffs infinitesimale Transformation $B(f)$ eines vollständigen Systems: $A_i(f) = 0$ uns eine Operation zur Auffindung von weiteren Lösungen angibt. Die Forderung ist ja nämlich die, daß $B(\varphi)$ gleichzeitig mit φ eine

Lösung sein soll; dabei wird aber $B(\varphi)$ im allgemeinen eine von φ unabhängige Lösung sein.

17. Ich setze voraus, daß man durch sukzessive Anwendung der in diesem Paragraphen angegebenen Operationen ν Lösungen: $\Pi_1, \ldots, \Pi_\nu$ und q' infinitesimale Transformationen: $B_1(f), \ldots, B_{q'}(f)$ bestimmt [499
habe, und keine weiteren finden könne. Ich verstehe dies so, daß alle übrigen: $B_{q'+k}(f)$ und zugleich alle: $(B_i B_k)$ sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\sum_k^{1\ldots q'} \psi_k(\Pi_1, \ldots, \Pi_\nu) B_k(f) + \sum_i^{1\ldots r} \Theta_i A_i(f),$$

während keine solche Relation zwischen $B_1, \ldots, B_{q'}$ und den A bestehen darf, und daß überdies alle $B_i(\Pi_k)$ sich als Funktionen von $\Pi_1, \ldots, \Pi_\nu$ darstellen lassen.

Ist nun die Zahl ν der gefundenen Lösungen gleich $n-r$, so ist das Integrationsgeschäft eo ipso erledigt, insofern ein r-gliedriges vollständiges System zwischen n Variabeln eben nur $n-r$ Lösungen besitzt. Wir haben daher nur den Fall:

$$\nu < n - r$$

zu betrachten.

Wir führen neue unabhängige Variable ein, nämlich: $\Pi_1, \ldots, \Pi_\nu$ zusammen mit $n-\nu$ anderen Größen, die $x'_1, \ldots, x'_{n-\nu}$ heißen mögen. Da die Π Lösungen sind, so nimmt unser vollständiges System hierdurch die Form an:

$$A'_i(f) = X'^i_1 \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \cdots + X'^i_{n-\nu} \frac{\partial f}{\partial x'_{n-\nu}} = 0 \qquad (i=1,\ldots,r),$$

während sich seine infinitesimalen Transformationen $B_k(f)$ in Ausdrücke von der Form verwandeln:

$$B'_k(f) = \xi'^k_1 \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \cdots + \xi'^k_{n-\nu} \frac{\partial f}{\partial x'_{n-\nu}} + \sum_i B_k(\Pi_i) \frac{\partial f}{\partial \Pi_i} \quad (k=1,\ldots,q'),$$

in denen die $B_k(\Pi_i)$ Funktionen der Π sind. Und da jede Lösung des ursprünglichen Systems: $A_i(f) = 0$ durch Einführung der neuen Variabeln in eine Lösung des transformierten Systems: $A'_i(f) = 0$ übergeht, so ist mit φ zugleich immer auch $B'_k(\varphi)$ eine Lösung des letzteren Systems.

Verstehen wir daher unter $\psi_1, \ldots, \psi_{q'}$ beliebige Funktionen von $\Pi_1, \ldots, \Pi_\nu$, so gilt das über $B'_i f$ gesagte auch von dem Ausdrucke:

$$B''(f) = \psi_1 B'_1(f) + \cdots + \psi_{q'} B'_{q'}(f),$$

und somit besitzt jede infinitesimale Transformation von der Form $B''(f)$ die Eigenschaft, das vollständige System: $A'_i(f) = 0$ in sich selbst überzuführen.

Ist es nun im besondern, wie ich von jetzt ab annehmen will, möglich, die Multiplikatoren ψ so zu wählen, daß die Differentialquotienten $\partial f : \partial \Pi_i$ in $B''(f)$ nicht mehr vorkommen, so erhalten wir hierdurch eine oder mehrere, etwa q'' infinitesimale Transformationen:

$$B''_k(f) = \xi''^k_1 \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \cdots + \xi''^k_{n-r} \frac{\partial f}{\partial x'_{n-r}} \quad (k=1,\ldots,q''),$$ [500

deren analytische Ausdrücke nur dieselben Differentialquotienten, wie die Gleichungen des transformierten vollständigen Systems enthalten. Wir nehmen im folgenden nur auf diese infinitesimalen Transformationen $B''_k(f)$ Rücksicht.[1])

Hiermit ist das vorgelegte Integrationsproblem darauf zurückgeführt, das r-gliedrige vollständige System: $A'_i(f) = 0$ mit $n - \nu = n'$ unabhängigen Variabeln $x'_1, \ldots, x'_{n'}$ und mit q'' bekannten infinitesimalen Transformationen: $B''_1(f), \ldots, B''_{q''}(f)$ zu integrieren. Jedes $(B''_i B''_k)$ drückt sich in der Weise aus:

$$(B''_i B''_k) = \sum_h^{1\ldots q''} \psi^{ik}_h B''_h(f) + \sum_\varrho \Theta^{ik}_\varrho A'_\varrho(f),$$

wo die ψ^{ik}_ϱ Funktionen der Π und als solche nunmehr als Konstanten aufzufassen sind, weil die Π_k sowohl in den $A'_i(f)$, wie in den $B''_k(f)$ nur als Konstanten auftreten.

Die Zahl $r + q''$ kann nun höchstens gleich n' sein, da sonst lineare Relationen zwischen den $A'_i f$ und $B''_k f$ stattfinden würden, was nach dem Vorangehenden ausgeschlossen ist.

Den Fall, daß $r + q'' = n'$ ist, behandeln wir in § 10 [und 12].

Den Fall $r + q'' < n'$ reduzieren wir durch Integration auf den ersten Fall. Zu diesem Zwecke bestimmen wir nach den von Mayer und mir gegebenen Regeln die $n' - r - q''$ Lösungen: $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots$ des vollständigen Systems:

$$A'_1(f) = 0, \ldots, A'_r(f) = 0, \quad B''_1(f) = 0, \ldots, B''_{q''}(f) = 0,$$

führen sodann neue unabhängige Variabeln:

$$\Pi'_1, \ldots, \Pi'_{n'-r-q''}, \; x''_1, \ldots, x''_{r+q''}$$

ein, wodurch die Ausdrücke $A'_i(f)$ und $B''_k(f)$ übergehen mögen in $A''_i(f)$ und $B'''_k(f)$, und erhalten hierdurch schließlich ein r-gliedriges vollständiges System: $A''_1(f) = 0, \ldots, A''_r(f) = 0$

1) Bei einer anderen Gelegenheit werde ich nachweisen, daß man wirklich aus den $B''_k(f)$ denselben Vorteil ziehen kann, wie aus den $B_k(f)$ selbst, daß man also im allgemeinen aus den bekannten infinitesimalen Transformationen gar keinen Nutzen ziehen kann, wenn keine $B''_k(f)$ existieren.

mit $r + q''$ unabhängigen Variabeln und mit q'' bekannten infinitesimalen Transformationen: $B_1'''(f), \ldots, B_{q''}'''(f)$, zwischen denen keine lineare Relation von der Form:

$$\sum_i \alpha_i A_i''(f) + \sum_k \gamma_k B_k'''(f) = 0$$

besteht, während jedes $(B_i''' B_k''')$ sich linear durch die $B_h'''(f)$ und die [501 $A_\varrho''(f)$ ausdrückt, und zwar so, daß in diesen Ausdrücken:

$$(B_i''' B_k''') = \sum_h \gamma_h' B_h'''(f) + \sum_\varrho \alpha_\varrho' A_\varrho''(f)$$

die γ_h' Konstanten sind.

Hiermit ist die angekündigte Reduktion erreicht.

§ 9. Multiplikator eines vollständigen Systems.

In diesem Paragraphen dehne ich den Jacobischen Multiplikatorbegriff auf vollständige Systeme aus.

18. Es sei:

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

ein vollständiges System, und $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}$ ein System Lösungen desselben. Ich bilde das Determinantenverhältnis:

$$M = \begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots \Pi_{n-r} \\ x_a \ldots x_g \end{pmatrix} : (X_k^1 X_l^2 \ldots X_v^r),$$

wo: $a, \ldots, g, k, l, \ldots, v$ eine Permutation der Zahlen: $1, 2, \ldots, n$ bezeichnen, und beweise eine Reihe Eigenschaften desselben.

Ich zeige zuerst, daß der Wert von M, [vom Vorzeichen abgesehen], ungeändert bleibt, wenn man die Zahlen: $a, \ldots, g, k, \ldots, v$ beliebig permutiert.

Eliminiert man nämlich zwischen den $n - r$ Gleichungen:

$$\begin{gathered} X_1^i \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_n} = 0, \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ X_1^i \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_n} = 0 \end{gathered}$$

etwa die Größen: $X_1^i, \ldots, X_{n-r-1}^i$, so kommt:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots \Pi_{n-r} \\ x_1 \ldots x_{n-r} \end{pmatrix} X_{n-r}^i + \begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots & \cdot & \Pi_{n-r} \\ x_1 \ldots & x_{n-r-1} & x_{n-r+1} \end{pmatrix} X_{n-r+1}^i + \cdots = 0,$$

und, wenn man dem Index i sukzessiv die Werte: $1, 2, \ldots, r$ gibt, und zwischen den entsprechenden r Gleichungen etwa die $r - 1$ ersten Funktionaldeterminanten eliminiert, so findet man: [502

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots & \cdot & \Pi_{n-r} \\ x_1 \ldots & x_{n-r-1} & x_{n-1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} X_{n-r}^1 \ldots X_{n-1}^1 \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ X_{n-r}^r \ldots X_{n-1}^r \end{vmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots & \cdot & \Pi_{n-r} \\ x_1 \ldots & x_{n-r-1} & x_n \end{pmatrix} \begin{vmatrix} X_{n-r}^1 \ldots X_{n-2}^1 X_n^1 \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ X_{n-r}^r \ldots X_{n-2}^r X_n^r \end{vmatrix} = 0,$$

woraus die Gleichheit zweier Formen von M hervorgeht. Ganz in derselben Weise erkennt man, daß zwei beliebige Formen von M einander gleich sind, [wenn vom Vorzeichen abgesehen wird].

Bildet man das Verhältnis M mit einem anderen Systeme Lösungen: $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-r}$, so geht der neue Ausdruck aus dem alten durch Multiplikation mit einer Funktion von $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}$ hervor. Es ist nämlich:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \ldots \Omega_{n-r} \\ x_a \ldots x_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \ldots \Omega_{n-r} \\ \Pi_1 \ldots \Pi_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots \Pi_{n-r} \\ x_a \ldots x_g \end{pmatrix},$$

und hier ist die erste Determinante rechts eine Funktion von den Π, und zwar, solange das System $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-r}$ nicht festgestellt ist, eine arbiträre Funktion jener Größen.

Hiermit ist eine zweite wichtige Eigenschaft von M nachgewiesen.

Endlich zeige ich, daß sich M bei der Einführung neuer unabhängiger Variabeln $y_1, \ldots, y_n$ als Invariante verhält, das heißt, nur mit einer Potenz der Transformationsdeterminante:

$$D = \begin{pmatrix} y_1 \ldots y_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix}$$

multipliziert wird.

Es ist nämlich, wenn $a, \ldots, g$ sukzessiv beliebige $n - r$ unter den Zahlen $1, \ldots, n$ bezeichnen:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots \Pi_{n-r} \\ y_1 \ldots y_{n-r} \end{pmatrix} = \sum_{a \ldots g} \begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots \Pi_{n-r} \\ x_a \ldots x_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \ldots x_g \\ y_1 \ldots y_{n-r} \end{pmatrix};$$

ferner ist, wie ich etwas später in diesem Paragraphen beweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{n-r} \\ y_1 \ldots y_{n-r} \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} y_{n-r+1} \ldots y_n \\ x_{n-r+1} \ldots x_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

also kommt:

$$(9)\qquad \begin{pmatrix}\Pi_1 \dots \Pi_{n-r}\\ y_1 \dots y_{n-r}\end{pmatrix} = D^{-1}\sum \begin{pmatrix}\Pi_1 \dots \Pi_{n-r}\\ x_a \dots x_g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{n-r+1} \dots y_n\\ x_k \quad \dots x_v\end{pmatrix},$$

wo: $a, \dots, g, k, \dots, v$ eine Permutation der Zahlen: $1, 2, \dots, n$ bezeichnen.

Auf der anderen Seite nehmen die Gleichungen: $A_i(f) = 0$ durch unsere Transformation die Form an:

$$A_i'(f) = Y_1^i \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + Y_n^i \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0, \qquad [503$$

wo:

$$Y_k^i = X_1^i \frac{\partial y_k}{\partial x_1} + \dots + X_n^i \frac{\partial y_k}{\partial x_n}.$$

Also kommt:

$$(Y_{n-r+1}^1 Y_{n-r+2}^2 \dots Y_n^r) = \sum_{k \dots v} (X_k^1 \dots X_v^r)\begin{pmatrix}y_{n-r+1} \dots y_n\\ x_k \quad \dots x_v\end{pmatrix},$$

welche Gleichung man nur mit (9) zu vergleichen braucht, um die Richtigkeit unserer Behauptung zu erkennen.

Die Formel (8) beweist man folgendermaßen. Man bezeichne mit D_i^k die Unterdeterminante hinsichtlich $\partial y_k : \partial x_i$ von:

$$D = \begin{pmatrix}y_1 \dots y_n\\ x_1 \dots x_n\end{pmatrix}.$$

Alsdann ist nach einem bekannten Satze:

$$(10)\qquad (D_1^1 D_2^2 \dots D_\varrho^\varrho) = D^{\varrho-1}\begin{pmatrix}y_{\varrho+1} \dots y_n\\ x_{\varrho+1} \dots x_n\end{pmatrix}.$$

Andererseits geben die Gleichungen:

$$dy_k = \frac{\partial y_k}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_k}{\partial x_n} dx_n$$

durch Auflösung:

$$dx_i = \frac{1}{D}\sum_k D_i^k dy_k,$$

woraus:

$$D_i^k = D\frac{\partial x_i}{\partial y_k}.$$

Und wenn wir diesen Wert in (10) einsetzen, kommt:

$$\begin{pmatrix}x_1 \dots x_\varrho\\ y_1 \dots y_\varrho\end{pmatrix} = D^{-1}\begin{pmatrix}y_{\varrho+1} \dots y_n\\ x_{\varrho+1} \dots x_n\end{pmatrix},$$

wie behauptet wurde.

19. Das Verhältnis:

$$\begin{pmatrix}\Pi_1 \dots \Pi_{n-r}\\ x_1 \dots x_{n-r}\end{pmatrix} : (X_{n-r+1}^1 \dots X_n^r),$$

dessen wesentliche Bedeutung wir nachgewiesen haben, nennen wir den Multiplikator des betreffenden vollständigen Systems.

Ist $r = 1$, so deckt sich dieser Begriff mit dem Jacobischen Multiplikator. Ist $r = n - 1$, so gibt es nur eine Lösung, die bekanntlich auch als Integral der totalen Differentialgleichung:

$$\sum_k (-1)^{k-1}(X_1^1 \dots X_{k-1}^{k-1} X_{k+1}^k \dots X_n^{n-1})\, dx_k = 0 \qquad [504$$

definiert werden kann. Offenbar ist der Integrabilitätsfaktor dieser Gleichung:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} : (X_1^1 \dots X_{k-1}^{k-1} X_{k+1}^k \dots X_n^{n-1})$$

eben der Multiplikator des betreffenden vollständigen Systems.

Der von mir aufgestellte Multiplikator eines vollständigen Systems umfaßt also als Grenzfälle sowohl den **Jacobi**schen Multiplikator einer linearen partiellen Differentialgleichung, wie den **Euler**schen Integrabilitätsfaktor einer linearen totalen Differentialgleichung.

Kennt man eine Lösung Π eines r-gliedrigen vollständigen Systems:

$$\sum_k^{1 \dots n} X_k^i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, \dots, r),$$

so erhält man bekanntlich ein äquivalentes r-gliedriges System zwischen $n - 1$ Variabeln:

$$\sum_k^{1 \dots n-1} Y_k^i(x_1, \dots, x_{n-1}, \Pi)\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, \dots, r),$$

indem man $x_1, \dots, x_{n-1}$ und Π als neue unabhängige Variabeln einführt.

Kennt man nun zugleich einen Multiplikator M des ursprünglichen Systems, so ist es immer möglich, einen Multiplikator des reduzierten Systems aufzustellen. Nach dem Vorangehenden ist nämlich:

$$\begin{pmatrix}\Pi_1 \quad \dots \Pi_{n-r-1}\Pi\\ x_{r+1} \dots x_{n-1} \quad \Pi\end{pmatrix} : (Y_1^1 Y_2^2 \dots Y_r^r) = M : \begin{pmatrix}x_1 \dots x_{n-1}\Pi\\ x_1 \dots \quad . \quad x_n\end{pmatrix},$$

also:

$$\begin{pmatrix}\Pi_1 \quad \dots \Pi_{n-r-1}\\ x_{r+1} \dots x_{n-1}\end{pmatrix} : (Y_1^1 Y_2^2 \dots Y_r^r) = M : \frac{\partial \Pi}{\partial x_n},$$

und da die linke Seite dieser Gleichung der allgemeine Ausdruck eines Multiplikators des reduzierten Systems ist, so findet man einen solchen Multiplikator, indem man die Größe:

$$M : \frac{\partial \Pi}{\partial x_n}$$

als Funktion von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ und Π ausdrückt.

20. Der Multiplikator eines vollständigen Systems läßt sich auch definieren als die gemeinsame Lösung von r linearen partiellen Differentialgleichungen, die wir jetzt aufstellen werden.

Zu diesem Zwecke lösen wir die r Gleichungen des vollständigen [505 Systems nach r Differentialquotienten, etwa:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

auf. Hierdurch nimmt unser vollständiges System die Form an:

$$\begin{vmatrix} X_1^1 \ldots X_r^1 \\ \cdot \;\cdots\; \cdot \\ X_1^r \ldots X_r^r \end{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} + (-1)^{r-k} \sum_i \begin{vmatrix} X_1^1 \ldots X_{k-1}^1 X_{k+1}^1 \ldots X_r^1 X_{r+i}^1 \\ \cdot \;\cdots\; \cdot \qquad \cdot \;\cdots\; \cdot \quad \cdot \\ X_1^r \ldots X_{k-1}^r X_{k+1}^r \ldots X_r^r X_{r+i}^r \end{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{r+i}} = 0$$
$$(k = 1, \ldots, r).$$

Von jeder dieser r Gleichungen ist nun:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & \ldots \Pi_{n-r} \\ x_{r+1} & \ldots x_n \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} X_1^1 \ldots X_r^1 \\ \cdot \;\cdots\; \cdot \\ X_1^r \ldots X_r^r \end{vmatrix}$$

ein Jacobischer Multiplikator. Unsere r Gleichungen haben also einen gemeinsamen Jacobischen Multiplikator, der nach meiner Definition zugleich der Multiplikator des vollständigen Systems ist.

Nun aber hat Jacobi gezeigt, daß man den Multiplikator einer linearen partiellen Differentialgleichung auch durch eine partielle Differentialgleichung definieren kann. Daher finden wir unmittelbar r Gleichungen, die der Multiplikator unseres vollständigen Systems befriedigen muß. Und da der Quotient zweier Lösungen dieser neuen r Gleichungen offenbar immer eine Lösung des vollständigen Systems: $A_i(f) = 0$ ist, so erkennen wir, daß eine jede Lösung der gefundenen r Gleichungen einen Multiplikator des vollständigen Systems darstellt. Dies gibt:

Satz 14. *Bilden die r Gleichungen:*

$$F_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i^{r+1\ldots n} F_k^i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

ein vollständiges System, so definieren die r linearen Gleichungen:

$$\frac{\partial (F_k M)}{\partial x_k} + \sum_i^{r+1\ldots n} \frac{\partial (F_k^i M)}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

den Multiplikator dieses vollständigen Systems.

21. Hier möge noch der folgende Satz seinen Platz finden:

Satz 15. *Sind: $A_1(f) = 0, \ldots, A_r(f) = 0$ lineare partielle Differentialgleichungen, die paarweise in der Beziehung:*

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0 \tag{11}$$

stehen, so haben dieselben einen gemeinsamen Jacobischen Multiplikator.

Zum Beweise betrachten wir die r Gleichungen: [506

$$C_i(V) = A_i(V) - M \frac{\partial V}{\partial M} \left(\frac{\partial X_1^i}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n^i}{\partial x_n} \right) = 0$$

und bilden die Ausdrücke:

$$C_i(C_k(V)) - C_k(C_i(V)) =$$
$$= A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V)) - M \frac{\partial V}{\partial M} \sum_{j,q} \left(X_j^i \frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j \partial x_q} - X_j^k \frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_j \partial x_q} \right),$$

die sich auf:

$$-M \frac{\partial V}{\partial M} \sum_{j,q} \left(X_j^i \frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j \partial x_q} - X_j^k \frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_j \partial x_q} \right)$$

reduzieren.

Nun aber zerlegt sich die Bedingung (11) in die $2n$ folgenden:

$$\sum_j \left(X_j^i \frac{\partial X_q^k}{\partial x_j} - X_j^k \frac{\partial X_q^i}{\partial x_j} \right) = 0,$$

woraus durch Differentiation:

$$\sum_j \left(X_j^i \frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j \partial x_q} - X_j^k \frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_j \partial x_q} \right) + \sum_j \left(\frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} \frac{\partial X_q^k}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j^k}{\partial x_q} \frac{\partial X_q^i}{\partial x_j} \right) = 0$$

und durch Summation:

$$\sum_{q,j} \left(X_j^i \frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j \partial x_q} - X_j^k \frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_j \partial x_q} \right) + \sum_{q,j} \left(\frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} \frac{\partial X_q^k}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j^k}{\partial x_q} \frac{\partial X_q^i}{\partial x_j} \right) = 0,$$

oder, da das letzte Glied identisch verschwindet:

$$\sum_{q,j} \left(X_j^i \frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j \partial x_q} - X_j^k \frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_j \partial x_q} \right) = 0$$

folgt.

Es verschwinden also alle: $C_i(C_k(V)) - C_k(C_i(V))$, was wieder heißt, daß die Gleichungen: $C_1(V) = 0, \ldots, C_r(V) = 0$ gemeinsame Lösungen besitzen. Ist V eine solche, so findet man durch Auflösung der Gleichung:

$$V(x_1, \ldots, x_n, M) = \text{Const.}$$

hinsichtlich M einen gemeinsamen Jacobischen Multiplikator der Gleichungen: $A_i(f) = 0$.

§ 10. Beziehungen zwischen den Lösungen, Multiplikatoren und infinitesimalen Transformationen eines vollständigen Systems.

Zwischen den Lösungen, den Multiplikatoren und den infinitesimalen Transformationen eines vollständigen Systems bestehen mehrere merkwürdige Beziehungen, die jetzt entwickelt werden sollen.

22. Zunächst zeigen wir, daß man einen Multiplikator aufstellen [507
kann, wenn man hinlänglich viele infinitesimale Transformationen gefunden hat.

Theorem VIII. *Gestattet ein r-gliedriges vollständiges System mit n unabhängigen Variabeln:*

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

n − r bekannte infinitesimale Transformationen:

$$B_k(f) = \xi_1^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^k \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (k = 1, \ldots, n-r),$$

und ist die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1^1 & \ldots X_n^1 \\ \cdot & \ldots \cdot \\ X_1^r & \ldots X_n^r \\ \xi_1^1 & \ldots \xi_n^1 \\ \cdot & \ldots \cdot \\ \xi_1^{n-r} & \ldots \xi_n^{n-r} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so ist $1 : \Delta$ *ein Multiplikator des vollständigen Systems:* $A_i f = 0$.

Zum Beweis multiplizieren wir nach der bekannten Regel die beiden Determinanten Δ und:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_{n-r}} & \ldots\ldots & \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_{n-r}} & \ldots\ldots & \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_n} \\ 0 & 0 \,.\,. & 0 & 1 \; 0 \,.\,. & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots 0 & 1 \end{vmatrix},$$

wo $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}$ ein System Lösungen des vollständigen Systems: $A_i(f) = 0$ bezeichnen, mit einander, und finden so:

$$\Delta \begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots \Pi_{n-r} \\ x_1 \ldots x_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_1(\Pi_1) & \ldots A_r(\Pi_1) & B_1(\Pi_1) & \ldots B_{n-r}(\Pi_1) \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ A_1(\Pi_{n-r}) & \ldots A_r(\Pi_{n-r}) & B_1(\Pi_{n-r}) & \ldots B_{n-r}(\Pi_{n-r}) \\ X_{n-r+1}^1 & \ldots X_{n-r+1}^r & \xi_{n-r+1}^1 & \ldots \xi_{n-r+1}^{n-r} \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ X_n^1 & \ldots X_n^r & \xi_n^1 & \ldots \xi_n^{n-r} \end{vmatrix},$$

oder, da alle $A_i(\Pi_k)$ gleich Null sind: [508

$$\Delta \begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots \Pi_{n-r} \\ x_1 \ldots x_{n-r} \end{pmatrix} = \pm \begin{vmatrix} B_1(\Pi_1) & \ldots B_{n-r}(\Pi_1) \\ \cdot & \ldots \cdot \\ B_1(\Pi_{n-r}) & \ldots B_{n-r}(\Pi_{n-r}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_{n-r+1}^1 & \ldots X_{n-r+1}^r \\ \cdot & \ldots \cdot \\ X_n^1 & \ldots X_n^r \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, da alle $B_i(\Pi_k)$ Funktionen der Lösungen: $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}$ sind, eine Gleichung von der Form:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \ldots \Pi_{n-r} \\ x_1 \ldots x_{n-r} \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} X_{n-r+1}^1 & \ldots X_{n-r+1}^r \\ \cdot & \ldots \cdot \\ X_n^1 & \ldots X_n^r \end{vmatrix} = \frac{\Omega(\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r})}{\Delta}.$$

Und da hier die linke Seite der allgemeine Ausdruck eines Multiplikators ist, so muß auch $1 : \Delta$ ein Multiplikator sein, wie behauptet wurde.

23. Kennt man andererseits einen Multiplikator und eine infinitesimale Transformation eines vollständigen Systems, so ist es im allgemeinen möglich, eine Lösung des Systems aufzustellen.

Hierzu brauchen wir den Satz:

Satz 16. *Sei M ein Multiplikator und:*

$$B(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

eine infinitesimale Transformation des vollständigen Systems: $A_i(f) = 0$, *sodaß:*

$$B(A_i(f)) - A_i(B(f)) = \lambda_{i1} A_1(f) + \cdots + \lambda_{ir} A_r(f)$$

ist. *Setzt man nun voraus, daß das vollständige System auf eine solche Form gebracht ist, daß alle:* $A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f))$ *identisch verschwinden, so ist:*

$$B(\log M) + \sum_{\alpha}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha}^{1\ldots r} \lambda_{\alpha\alpha}$$

entweder eine Konstante oder aber eine Lösung des vollständigen Systems.

Zum Beweis differentiieren wir die Gleichung:

$$\sum_q \left(\xi_q \frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} - X_q^i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_q} \right) = \lambda_{i1} X_j^1 + \cdots + \lambda_{ir} X_j^r$$

nach x_j, und summieren sodann nach j. Dies gibt, wenn wir die sich aufhebenden Glieder weglassen:

$$\sum_{j,q} \left(\xi_q \frac{\partial^2 X_j^i}{\partial x_q \partial x_j} - X_q^i \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_q \partial x_j} \right) = A_1(\lambda_{i1}) + \cdots + A_r(\lambda_{ir}) +$$
$$+ \lambda_{i1} \sum_j \frac{\partial X_j^1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_{ir} \sum_j \frac{\partial X_j^r}{\partial x_j},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$B\left(\sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j} \right) - A_i \left(\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} \right) = A_1(\lambda_{i1}) + \cdots + A_r(\lambda_{ir}) + \qquad [509$$
$$+ \lambda_{i1} \sum_j \frac{\partial X_j^1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_{ir} \sum_j \frac{\partial X_j^r}{\partial x_j}.$$

Nun aber ist:

$$\sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j} = - A_i(\log M)^{1)},$$

also folgt:

$$- B(A_i(\log M)) - A_i \left(\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} \right) = A_1(\lambda_{i1}) + \cdots + A_r(\lambda_{ir}) -$$
$$- \lambda_{i1} A_1(\log M) - \cdots - \lambda_{ir} A_r(\log M),$$

und, wenn wir die Gleichung:

$$B(A_i(f)) - A_i(B(f)) = \lambda_{i1} A_1 f + \cdots + \lambda_{ir} A_r f$$

berücksichtigen:

$$(12) \qquad - A_i(B(\log M)) - A_i \left(\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} \right) = A_1(\lambda_{i1}) + \cdots + A_r(\lambda_{ir}).$$

---

1) Erst während des Druckes bin ich von Mayer darauf aufmerksam gemacht worden, daß diese Formel, die hier direkt auf den Multiplikator des vollständigen Systems: $A_i(f) = 0$ angewandt wird, zunächst nur für den gemeinsamen Jacobischen Multiplikator der Gleichungen: $A_i(f) = 0$ gilt, daß aber unter den Voraussetzungen: $(A_i A_k) = 0$ in der Tat diese beiden Begriffe zusammenfallen.

Bei der Redaktion des Textes dachte ich mir das gegebene System durch Auflösung nach r Differentialquotienten auf diejenige Form gebracht, für welche die Identität beider Multiplikatoren in Nr. 20 nachgewiesen wurde.

Um diese Gleichung noch weiter zu transformieren, bilden wir die Jacobische Identität:

$$((A_i A_j) B) + ((A_j B) A_i) + ((B A_i) A_j) = 0.$$

Diese ergibt, wenn wir die Werte der Größen: $(A_i A_j)$, $(A_j B)$ und $(B A_i)$ einsetzen:

$$- (\lambda_{j1} A_1 + \cdots + \lambda_{jr} A_r, A_i) + (\lambda_{i1} A_1 + \cdots + \lambda_{ir} A_r, A_j) = 0,$$

und durch Ausführung:

$$[A_j(\lambda_{i1}) - A_i(\lambda_{j1})] A_1 + \cdots + [A_j(\lambda_{ir}) - A_i(\lambda_{jr})] A_r = 0,$$

welche Gleichung sich wegen der Unabhängigkeit der Größen $A_1(f), \ldots, A_r(f)$ in die r folgenden zerlegt:

$$A_j(\lambda_{i1}) = A_i(\lambda_{j1}), \ldots, A_j(\lambda_{ir}) = A_i(\lambda_{jr}).$$

Setzen wir diese Werte in (12) ein, so kommt:

$$- A_i \left(B(\log M) + \sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} + \lambda_{11} + \lambda_{22} + \cdots + \lambda_{rr} \right) = 0,$$

welche Gleichung die Richtigkeit unseres Satzes nachweist.

24. Wir setzen jetzt voraus, daß wir vermöge des Theorems VIII [510 einen Multiplikator gefunden haben, und stellen die Frage, ob wir vermöge des eben aufgestellten Satzes eine oder mehrere Lösungen unseres vollständigen Systems bestimmen können.

Um diese Frage allgemein behandeln zu können, entwickeln wir zunächst einen Hilfssatz:

Satz 17. *Sind die n Größen:* $A_1(f), \ldots, A_n(f)$*:*

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

durch die Relationen:

$$(13) \qquad A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = \lambda_{ik}^1 A_1(f) + \cdots + \lambda_{ik}^n A_n(f)$$

verbunden, und ist dabei die Determinante:

$$\Delta = (X_1^1 X_2^2 \ldots X_n^n)$$

von Null verschieden, so ist:

$$A_i(\log \Delta) - \sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j} = \lambda_{i1}^1 + \cdots + \lambda_{i,i-1}^{i-1} + \lambda_{i,i+1}^{i+1} + \cdots + \lambda_{in}^n.$$

Beweis. Setzen wir:

$$\Delta_i^k = \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots X_n^1 \\ \cdot & \dots\, \cdot \\ X_1^{k-1} & \dots X_n^{k-1} \\ A_i(X_1^k) & \dots A_i(X_n^k) \\ X_1^{k+1} & \dots X_n^{k+1} \\ \cdot & \dots\, \cdot \\ X_1^n & \dots X_n^n \end{vmatrix},$$

so ist:

$$A_i(\Delta) = \Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \cdots + \Delta_i^n = \sum_k \Delta_i^k.$$

Aus (13) aber folgt:

$$A_i(X_q^k) = A_k(X_q^i) + \lambda_{ik}^1 X_q^1 + \cdots + \lambda_{ik}^n X_q^n.$$

Setzen wir daher:

$$D_i^k = \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots X_n^1 \\ \cdot & \dots\, \cdot \\ X_1^{k-1} & \dots X_n^{k-1} \\ A_k(X_1^i) & \dots A_k(X_n^i) \\ \cdot & \dots\, \cdot \\ X_1^n & \dots X_n^n \end{vmatrix},$$

so erhalten wir:

$$\Delta_i^k = D_i^k + \lambda_{ik}^k \Delta$$

und folglich: [511

$$A_i(\Delta) = \sum_k D_i^k + \Delta \sum_k \lambda_{ik}^k.$$

Bezeichnen wir aber für einen Augenblick die Unterdeterminante von Δ hinsichtlich X_q^k durch (X_q^k), so haben wir:

$$D_i^k = \sum_{j,q} \frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} X_q^k (X_j^k),$$

also:

$$\sum_k D_i^k = \sum_{k,j,q} \frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} X_q^k (X_j^k) = \sum_{j,q} \frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} \sum_k X_q^k (X_j^k),$$

woraus, da $\sum_k X_j^k (X_j^k) = \Delta$ und $\sum_k X_q^k (X_j^k) = 0$ ist, folgt:

$$\sum_k D_i^k = \Delta \sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j},$$

und also:

$$A_i(\Delta) = \Delta \sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j} + \Delta \sum_k \lambda_{ik}^k,$$

oder:

$$A_i(\log \Delta) = \sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j} + \sum_k \lambda_{ik}^k,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Satz 18. *Sei:* $A_1(f) = 0, \dots, A_r(f) = 0$, *wo:*

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ und: } (A_i A_k) = 0$$

ist, ein gegebenes vollständiges System mit $n - r$ *bekannten infinitesimalen Transformationen:*

$$B_k(f) = \xi_1^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^k \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (k = 1, \dots, n-r).$$

Bestimmt man dann vermöge des Theorems VIII einen Multiplikator, so ergibt die Anwendung des Satzes 16 *nur solche Lösungen, die man einfacher durch Theorem VII erhält.*

Beweis. Setze ich wie gewöhnlich:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots X_n^1 \\ \cdot & \dots\, \cdot \\ X_1^r & \dots X_n^r \\ \xi_1^1 & \dots \xi_n^1 \\ \cdot & \dots\, \cdot \\ \xi_1^{n-r} & \dots \xi_n^{n-r} \end{vmatrix},$$

so ist $M = 1 : \Delta$ ein Multiplikator; setze ich ferner:

$$B_k(A_i(f)) - A_i(B_k(f)) = \lambda_{ki}^1 A_1 f + \cdots + \lambda_{ki}^r A_r f, \qquad [512$$

so ist (Satz 16) der Ausdruck:

$$B_k(\log M) + \sum_j \frac{\partial \xi_j^k}{\partial x_j} + \lambda_{k1}^1 + \cdots + \lambda_{kr}^r$$

entweder eine Konstante oder eine Lösung des vollständigen Systems.

Der vorangehende Satz erlaubt, diesen Ausdruck auf eine andere Form zu bringen. Da nämlich Δ von Null verschieden ist, und also die Größen: $A_1(f), \dots, A_r(f), B_1(f), \dots, B_{n-r}(f)$ unabhängig sind, so müssen Relationen von der Form bestehen:

$$(B_k B_q) = \mu_{kq}^1 B_1(f) + \cdots + \mu_{kq}^{n-r} B_{n-r}(f) + \sum_j \nu_j A_j(f).$$

Folglich ist nach dem vorangehenden Satze:

$$B_k(\log\Delta) = \sum_j \frac{\partial \xi_j^k}{\partial x_j} + \lambda_{k1}^1 + \cdots + \lambda_{kr}^r + \mu_{k1}^1 + \cdots + \mu_{k,n-r}^{n-r},$$

und da $M = 1 : \Delta$ ist, folgt:

$$B_k(\log M) + \sum_j \frac{\partial \xi_j^k}{\partial x_j} + \lambda_{k1}^1 + \cdots + \lambda_{kr}^r = -(\mu_{k1}^1 + \cdots + \mu_{k,n-r}^{n-r}).$$

In unserem Falle lehrt also Satz 16 nur, daß der Ausdruck:

$$\mu_{k1}^1 + \cdots + \mu_{k,n-r}^{n-r}$$

entweder eine Konstante oder eine Lösung unseres vollständigen Systems ist. Und da nach Theorem VII eine jede der Größen μ_{kq}^i eine Lösung ist, so gibt Satz 16 wirklich keine neue Lösung.

Nichtsdestoweniger haben die Sätze 16, 17 eine bedeutende Wichtigkeit, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde.

§ 11. Durchführung der Theorie für drei Variabeln.

In diesem Paragraphen zeige ich, indem ich mich auf vollständige Systeme zwischen drei unabhängigen Variabeln beschränke, wie man verfahren muß, um den größten Vorteil aus bekannten infinitesimalen Transformationen zu ziehen.

I.

25. Ist unser vollständiges System zweigliedrig:

$$A_1(f) = X_1\frac{\partial f}{\partial x} + Y_1\frac{\partial f}{\partial y} + Z_1\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$A_2(f) = X_2\frac{\partial f}{\partial x} + Y_2\frac{\partial f}{\partial y} + Z_2\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

so bildet man, wenn eine infinitesimale Transformation desselben: [513

$$B(f) = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

bekannt ist, die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix};$$

alsdann ist $1 : \Delta$ ein Multiplikator des vollständigen Systems und gleichzeitig ein Integrabilitätsfaktor der totalen Gleichung:

$$(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)dx + (Z_1X_2 - Z_2X_1)dy + (X_1Y_2 - X_2Y_1)dz = 0,$$

deren Integral:

$$\Pi = \int \frac{1}{\Delta}\{(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)dx + (Z_1X_2 - Z_2X_1)dy + (X_1Y_2 - X_2Y_1)dz\}$$

die gesuchte Lösung des vollständigen Systems ist.

Kennt man zwei infinitesimale Transformationen $B_1(f)$ und $B_2(f)$ des vorgelegten Systems, so bildet man die lineare Relation:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 = 0$$

die selbstverständlicherweise zwischen den A und den B bestehen muß. Ist nun das Verhältnis $\mu_1 : \mu_2$ keine Konstante, so ist es nach Theorem VII die gesuchte Lösung, die sich somit in diesem Falle ohne Integration bestimmen läßt.

Im übrigen könnte man auch vermöge jeder infinitesimalen Transformation einen Integrabilitätsfaktor bilden; dann ist das Verhältnis derselben:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}$$

bekanntlich eine Lösung.

Es ist selbstverständlich, und man verifiziert es auch leicht, daß man in dieser Weise eben die früher aufgestellte Lösung wiederfindet.

Ist dagegen $\mu_1 : \mu_2$ eine Konstante, so ist es unmöglich, einen größeren Vorteil aus den beiden infinitesimalen Transformationen als aus der einen zu ziehen. In diesem Falle muß man die beiden Transformationen als wesentlich identisch auffassen.

Gestattet überhaupt ein vollständiges System:

$$A_1(f) = 0, \ldots, A_r(f) = 0$$

die infinitesimale Transformation $B(f)$, so gestattet es zugleich, wie man unmittelbar verifiziert, eine jede [infinitesimale] Transformation von der Form:

$$C(f) = \text{Const.}\, B(f) + \lambda_1 A_1(f) + \cdots + \lambda_r A_r(f),$$

wo die λ beliebige Funktionen der unabhängigen Variabeln sind.

II. [514

26. Sei jetzt unser vollständiges System eingliedrig:

$$A(f) = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Kennt man nur eine infinitesimale Transformation von: $A(f) = 0$, etwa:

$$B(f) = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z},$$

so verlangt die Integration von: $A(f) = 0$, wie wir jetzt zeigen, die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O. zwischen zwei Variabeln und eine Quadratur.

Die beiden Gleichungen:

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0$$

bilden nämlich ein vollständiges System, dessen Lösung Π durch die Integration einer Differentialgleichung 1. O. gefunden wird. Sodann führt man x, y und Π als neue Variabeln ein und bringt dadurch $A(f)$ und $B(f)$ auf die Form:

$$A'(f) = X' \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y}, \quad B'(f) = \xi' \frac{\partial f}{\partial x} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y},$$

wobei die Gleichung: $A'(f) = 0$ selbstverständlicherweise die infinitesimale Transformation $B'(f)$ gestattet. Also ist:

$$\Phi = \int \frac{1}{X'\eta' - Y'\xi'} (Y'dx - X'dy)$$

eine Lösung von: $A'(f) = 0$ und mithin auch von: $A(f) = 0$, deren Integration hiermit geleistet ist.

III.

27. Jetzt behandeln wir den wichtigen Fall, daß: $A(f) = 0$ zwei bekannte infinitesimale Transformationen $B_1(f)$ und $B_2(f)$ gestattet, und daß dabei keine lineare Relation zwischen A, B_1 und B_2 stattfindet.

Man bildet in diesem Falle den Ausdruck $(B_1 B_2)$, der sich notwendigerweise linear durch A, B_1 und B_2 ausdrückt:

$$(B_1 B_2) = \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \lambda A = B_3.$$

Hier sind μ_1 und μ_2 entweder Konstanten oder auch Lösungen von: $A(f) = 0$.

Findet man hierdurch oder durch Bildung von $(B_1 B_3)$ und $(B_2 B_3)$ zwei verschiedene Lösungen, so ist das Integrationsgeschäft abgeschlossen.

Findet man nur eine Lösung Π_1, so bildet man vermöge $B_1(f)$ und $B_2(f)$ den Multiplikator $1 : \Delta$; alsdann verlangt die Bestimmung einer weiteren Lösung, wie Jacobi gezeigt hat, nur eine Quadratur. Zu [515
diesem Zwecke hat man die Größen x, y und Π als unabhängige Variabeln einzuführen, wodurch $A(f) = 0$ die Form:

$$A'(f) = X' \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

annimmt. Man bestimmt sodann nach Jacobis Regel den Multiplikator der reduzierten Gleichung: $A'(f) = 0$ und findet hierauf eine Lösung derselben durch eine Quadratur.

Sind endlich sowohl μ_1 wie μ_2 Konstanten, so gibt es keine Lösung von: $A(f) = 0$, die sich ohne Quadratur aufstellen läßt. Dann verfährt man verschieden, jenachdem die Konstanten μ_1 und μ_2 beide gleich Null sind, oder wenigstens eine von Null verschieden ist.

a) Sind μ_1 und μ_2 beide gleich Null, so ist:

$$A(f) = 0, \quad B_1(f) = 0$$

ein vollständiges System mit einer bekannten infinitesimalen Transformation B_2; dessen Lösung ist:

$$\Pi_1 = \int \frac{1}{\Delta} [(Z\eta_1 - Y\zeta_1)dx + \cdots].$$

Ebenso ist:

$$A(f) = 0, \quad B_2(f) = 0$$

ein vollständiges System mit der infinitesimalen Transformation $B_1(f)$ und der Lösung:

$$\Pi_2 = \int \frac{1}{\Delta} [(Z\eta_2 - Y\zeta_2)dx + \cdots].$$

Hiermit sind zwei Lösungen von: $A(f) = 0$ gefunden; dabei bemerken wir, daß es gleichgültig ist, in welcher Ordnung diese beiden Quadraturen ausgeführt werden.

b) Sei jetzt jedenfalls eine der beiden Größen μ, etwa μ_2 von Null verschieden. Alsdann setze ich:

$$\mu_1 B_1(f) + \mu_2 B_2(f) = B(f)$$

und ersetze die beiden Transformationen B_1 und B_2 durch B und B_1. Man findet:

$$(B_1 B) = \mu_2 B(f) + \mu_2 \lambda A(f).$$

Folglich ist:

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0$$

ein vollständiges System mit einer bekannten infinitesimalen Transformation $B_1(f)$. Also findet man die Lösung Π_1 dieses Systems durch eine Quadratur. Führt man darnach x, y und Π_1 als unabhängige Variabeln ein, so erhält man an Stelle von: $A(f) = 0$ eine äquivalente Gleichung:

$$A'(f) = 0 = X' \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y}$$

mit einer bekannten infinitesimalen Transformation $B'(f)$, und findet [516
also die Lösung Π_2 von: $A'(f) = 0$ durch eine zweite Quadratur. Hiermit sind zwei Lösungen von: $A(f) = 0$, nämlich Π_1 und Π_2 gefunden.

Dabei ist zu bemerken, daß es in diesem Falle nur eine einzige Lösung, Π_1 nämlich, gibt, die sich durch eine Quadratur bestimmen läßt. Um Π_2 zu finden, muß man dagegen zwei Quadraturen ausführen.

IV.

28. Kennt man zwei infinitesimale Transformationen: $B_1(f)$ und $B_2(f)$ von: $A(f) = 0$, und besteht dabei eine lineare Relation:

$$\alpha A(f) + \beta_1 B_1(f) + \beta_2 B_2(f) = 0,$$

so ist $\beta_1 : \beta_2$ eine Lösung von $A(f) = 0$. Ich bilde den Ausdruck $(B_1 B_2)$, der sich immer linear durch $A(f)$ und $B_1(f)$ ausdrücken läßt:

$$(B_1 B_2) = \delta B_1(f) + \varepsilon A(f).$$

Ist δ keine Konstante und auch keine Funktion der früher gefundenen Lösung $\beta_1 : \beta_2$, so ist hiermit eine zweite Lösung gefunden, womit alles fertig ist.

Im entgegengesetzten Falle muß man x, y und $\beta_1 : \beta_2 = \omega$ als neue Variabeln einführen. Hierdurch nimmt: $A(f) = 0$ die Form:

$$A'(f) = X' \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

an, und die infinitesimalen Transformationen, von denen wir nur die eine zu berücksichtigen brauchen, erhalten die Form:

$$B'(f) = \xi' \frac{\partial f}{\partial x} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi(\omega) \frac{\partial f}{\partial \omega}.$$

Ist φ von Null verschieden, so läßt sich kein weiterer Vorteil aus den infinitesimalen Transformationen ziehen. Ist dagegen $\varphi = 0$, so stellt man den Multiplikator von: $A'(f) = 0$ auf, und findet sodann die fehlende Lösung durch eine Quadratur.

Aus dem obenstehenden fließt unter anderm der Satz:

Satz 19. *Gestattet die Gleichung:*

$$A(f) = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

zwei bekannte infinitesimale Transformationen: $B_1(f)$ und $B_2(f)$, die keine lineare Relation von der Form:

$$\alpha A + \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 = 0$$

erfüllen, so kann die Integration von: $A(f) = 0$ immer vermöge bloßer Quadraturen geleistet werden.

§ 12. Behandlung einiger spezieller Fälle. [517

Eine allgemeine Integrationstheorie eines r-gliedrigen vollständigen Systems:

$$A_1(f) = 0, \ldots, A_r(f) = 0$$

mit n unabhängigen Variabeln und mit $n - r$ bekannten infinitesimalen Transformationen:

$$B_1(f), \ldots, B_{n-r}(f),$$

die keine lineare Relation:

$$\Sigma \alpha A(f) + \Sigma \beta B(f) = 0$$

erfüllen, läßt sich erst dann geben, wenn die Theorie der Transformationsgruppen weiter entwickelt worden ist.

Hier werde ich nur einen allgemeinen Fall angeben, der sich vermöge $n - r$ Quadraturen erledigen läßt. Zuerst betrachte ich einen Unterfall.

I.

29. Sind die infinitesimalen Transformationen durch Relationen von der Form:

$$(B_i B_k) = \Sigma \alpha_{iks} A_s(f)$$

verbunden, so bilden die Gleichungen:

$$A_1(f) = 0, \ldots, A_r(f) = 0,$$

$$B_1(f) = 0, \ldots, B_{k-1}(f) = 0, \quad B_{k+1}(f) = 0, \ldots, B_{n-r}(f) = 0$$

ein vollständiges System mit einer bekannten infinitesimalen Transformation $B_k(f)$. Man stellt den Multiplikator $1 : \Delta$ dieses $(n-1)$-gliedrigen Systems auf und findet sodann vermöge einer Quadratur eine Lösung Π_k desselben, die eo ipso die Gleichungen: $A_i(f) = 0$ befriedigt. Läßt man k sukzessiv die Werte: $1, 2, \ldots, n - r$ annehmen, so erhält man auf diese Weise $n - r$ von einander unabhängige Lösungen:

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}$$

und hat damit also die Integration des vorgelegten r-gliedrigen Systems vermöge $n - r$ Quadraturen absolviert.

In diesem Falle gibt es offenbar $n - r$ von einander unabhängige Lösungen, deren jede durch eine Quadratur bestimmt wird.

II.

30. In dem allgemeinen Falle bestehen Relationen von der Form:

$$(B_i B_k) = \sum_{\varrho}^{1\ldots k-1} \beta_{ik}^{\varrho} B_\varrho(f) + \sum \alpha_{ik}^{s} A_s(f),$$

wo $\beta_{ik}^{\varrho} =$ const., und i und k der Beschränkung: [518

$$i < k$$

unterworfen sind.

Auch in diesem Falle, der offenbar den soeben erledigten umfaßt, ist es möglich, das Integrationsgeschäft zu erledigen, und zwar vermöge $n-r$ sukzessiver Quadraturen.

Man bildet zunächst das vollständige System:

$$A_1(f)=0,\ldots,A_r(f)=0,\quad B_1(f)=0,\ldots,B_{n-r-1}(f)=0$$

mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_{n-r}f$, bestimmt den Multiplikator $1:\Delta$ und findet durch eine Quadratur eine gemeinsame Lösung Π_1 der aufgestellten $n-1$ Gleichungen. Sodann führt man x_1, $\ldots$, x_{n-1} und Π_1 als neue unabhängige Variabeln ein und bringt hierdurch die $A_k(f)$ und $B_1(f),\ldots,B_{n-r-1}(f)$ auf die Form:

$$A'_k(f)=X'_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+X'_{k,n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}=0,$$

$$B'_i(f)=\xi'_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+\xi'_{i,n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},$$

wobei die $A'_k(f)$ und $B'_i(f)$ durch dieselben Relationen, wie die entsprechenden Größen $A_k(f)$ und $B_i(f)$, verbunden sind. Also ist:

$$A'_1(f)=0,\ldots,A'_r(f)=0,\quad B'_1(f)=0,\ldots,B'_{n-r-2}(f)=0$$

ein vollständiges System mit einer bekannten infinitesimalen Transformation $B'_{n-r-1}(f)$; daher finden wir die gemeinsame Lösung Π_2 dieser $n-2$ Gleichungen durch eine Quadratur. Indem man in dieser Weise fortfährt, findet man sukzessiv alle $n-r$ Lösungen der Gleichungen: $A_i(f)=0$ vermöge $n-r$ Quadraturen.

In diesem Falle gibt es im allgemeinen nur e i n e Lösung, deren Bestimmung nur eine Quadratur verlangt.

31. Bis jetzt ist es mir noch nicht gelungen, das allgemeine im Anfange dieses Paragraphen aufgestellte Problem durch Quadraturen zu erledigen. Und ich vermute sogar, daß eine solche Erledigung nicht allgemein möglich ist.

Dagegen kann man in jedem speziellen Falle das allgemeine Integrationsproblem in mehrere einfachere zerlegen. Bei einer anderen Gelegenheit werde ich diese Andeutung ausführen. Ein besonderes Interesse bietet die Anwendung dieser Theorie auf gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen zwei Variabeln mit mehreren bekannten infinitesimalen Berührungstransformationen.

Ist $n-r=3$, so kann entweder das betreffende Problem auf den in diesem Paragraphen betrachteten Fall reduziert und somit durch Quadratur erledigt werden, oder aber es kann die folgende Gestalt erhalten: Die Gleichung:

$$A(f)=X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+X_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+X_4\frac{\partial f}{\partial x_4}=0$$ [519

soll integriert werden, und man kennt drei infinitesimale Transformationen derselben: $B_1(f)$, $B_2(f)$ und $B_3(f)$, die durch Relationen von der Form:

$$(B_1B_2)=B_1+\lambda A,\quad (B_1B_3)=B_2+\mu A,\quad (B_2B_3)=B_3+\nu A$$

verbunden sind.

Diesen speziellen Fall habe ich nicht durch Quadraturen zu erledigen vermocht. Dagegen kann man ihn, indem man nur die Transformationen B_1 und B_2 berücksichtigt, durch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O. zwischen zwei Variabeln erledigen. Wie dies geschieht, ist in dem Vorangehenden angegeben.

Den Fall $n-r=4$ kann ich immer auf den Fall $n-r=3$ reduzieren, und daher ist höchstens die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O. zwischen zwei Variabeln notwendig.

Der Fall $n-r=6$ verlangt im ungünstigsten Falle die sukzessive Integration zweier Differentialgleichungen 1. O., und so weiter.

§ 13. Direkte Bestimmung der letzten Lösung der Gleichung: $(f_1f)=0$.

32. J a c o b i hat bekanntlich gezeigt, daß die letzte Lösung der Gleichung: $(f_1f)=0$ vermöge einer Quadratur gefunden werden kann.

So schön und überraschend dieser Satz auch ist, und so großartig die analytischen Hilfsmittel sind, vermöge deren J a c o b i dieses Resultat erreicht, so kann man doch einen doppelten Einwurf gegen seine Begründung dieser Theorie machen. Einerseits kann man nämlich einwenden, daß sie nicht direkt ist, andererseits läßt sich nicht leugnen, daß sie die Sache mehr kompliziert, als notwendig ist.

Im ersten Abschnitte (Paragraph 2) habe ich eine neue und äußerst einfache Begründung dieser J a c o b ischen Theorie als Korollar aus einer allgemeineren Theorie gezogen.

Handelt es sich darum, die Gleichung: $f_1=a_1$ zu integrieren, so glaube ich, behaupten zu können, daß meine Behandlung, die übrigens auch eine Quadratur erspart, sich nicht wesentlich verbessern läßt. Wünscht man dagegen nur, zu beweisen, daß sich die letzte Lösung der Gleichung: $f_1=a_1$ durch Quadratur leisten läßt, so kann man vielleicht auch gegen meine Bestimmung den Einwurf machen, daß sie nicht direkt ist.

Daher werde ich in diesem Paragraphen eine direkte und zugleich einfache Bestimmung der letzten Lösung der Gleichung: $(f_1f)=0$ geben.

Dabei stütze ich mich einerseits auf meinen Satz über die Äquivalenz zwischen einer infinitesimalen Transformation und einem Integrabilitätsfaktor einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen zwei Va- [520 riabeln. Andererseits setze ich das Poisson-Jacobische Theorem als bekannt voraus.

33. Sei vorgelegt die Gleichung:

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_1,$$

und seien $f_1, f_2, \ldots, f_{2n-2}$ bekannte Lösungen der Gleichung:

$$(f_1 f) = 0,$$

aus denen sich keine weiteren Lösungen durch Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems herleiten lassen.

Setze ich nun:

$$(f_1 f) = A(f) = 0$$

und:

$$(f_2 f) = B_2(f), \ldots, (f_{2n-2} f) = B_{2n-2}(f),$$

so sind, wenn ich mit f_0 eine beliebige Lösung von: $A(f) = 0$ bezeichne, auch die Größen: $B_2(f_0), \ldots, B_{2n-2}(f_0)$ Lösungen. Wende ich daher die im Anfange dieses Abschnittes eingeführte Terminologie an, so kann ich sagen, daß ich einerseits $2n-2$ Lösungen: $f_1, \ldots, f_{2n-2}$ von: $A(f) = 0$, und andererseits $2n-3$ infinitesimale Transformationen: $B_2(f), \ldots, B_{2n\,2-}(f)$ dieser Gleichung kenne.

Statt $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ führe ich neue unabhängige Variabeln ein, nämlich $f_1, f_2, \ldots, f_{2n-2}$ zusammen mit zwei weiteren Größen u_1 und u_2. Hierdurch wird:

$$\begin{aligned}
A(f) &= (f_1 u_1)\frac{\partial f}{\partial u_1} + (f_1 u_2)\frac{\partial f}{\partial u_2} = 0,\\
B_2(f) &= (f_2 u_1)\frac{\partial f}{\partial u_1} + (f_2 u_2)\frac{\partial f}{\partial u_2} + \sum_k^{1\ldots 2n-2} (f_2 f_k)\frac{\partial f}{\partial f_k},\\
&\quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot\\
B_{2n-2}(f) &= (f_{2n-2} u_1)\frac{\partial f}{\partial u_1} + (f_{2n-2} u_2)\frac{\partial f}{\partial u_2} + \sum_k^{1\ldots 2n-2} (f_{2n-2} f_k)\frac{\partial f}{\partial f_k}.
\end{aligned}$$

Setze ich sodann, indem ich unter $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{2n-2}$ beliebige Funktionen von $f_1, f_2, \ldots, f_{2n-2}$ verstehe:

$$C(f) = \varphi_2 B_2(f) + \cdots + \varphi_{2n-2} B_{2n-2}(f),$$

so ist klar, daß $C(f)$ immer eine infinitesimale Transformation darstellt, die: $A(f) = 0$ in sich selbst überführt.

Es fragt sich, ob die φ_k derart gewählt werden können, daß der analytische Ausdruck von $C(f)$ nur die Differentialquotienten $\partial f : \partial u_1$ und $\partial f : \partial u_2$, dagegen keine von den Größen:

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}, \frac{\partial f}{\partial f_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial f_{2n-2}}$$

enthält. Diese Frage kommt darauf hinaus, ob die Gleichungen: [521

$$\begin{aligned}
\varphi_2(f_2 f_1) &+ \varphi_3(f_3 f_1) + \cdots + \varphi_{2n-2}(f_{2n-2} f_1) = 0,\\
\varphi_2(f_2 f_2) &+ \varphi_3(f_3 f_2) + \cdots + \varphi_{2n-2}(f_{2n-2} f_2) = 0,\\
&\cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot\\
\varphi_2(f_2 f_{2n-2}) &+ \varphi_3(f_3 f_{2n-2}) + \cdots + \varphi_{2n-2}(f_{2n-2} f_{2n-2}) = 0,
\end{aligned}$$

von denen übrigens die erste an sich identisch ist, durch passende Wahl der φ_k befriedigt werden können. Da die schiefe Determinante:

$$\begin{vmatrix}
(f_2 f_2) & (f_3 f_2) & \cdots (f_{2n-2} f_2)\\
\cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot\\
(f_2 f_{2n-2}) & (f_3 f_{2n-2}) & \cdots (f_{2n-2} f_{2n-2})
\end{vmatrix}$$

eine ungerade Anzahl Reihen und Kolonnen enthält und also identisch verschwindet, so können unsere linearen Gleichungen befriedigt werden. Sind $\varphi_2^0, \ldots, \varphi_{2n-2}^0$ Größen, die diese Gleichungen erfüllen, so besitzt der Ausdruck:

$$C^0(f) = \varphi_2^0 B_2(f) + \cdots + \varphi_{2n-2}^0 B_{2n-2}(f),$$

den wir bilden können, die Form:

$$C^0(f) = U_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + U_2 \frac{\partial f}{\partial u_2},$$

wobei U_1 und U_2 Funktionen von $f_1, f_2, \ldots, u_1, u_2$ sind. Nun aber wissen wir, daß die Gleichung:

$$A(f) = (f_1 u_1)\frac{\partial f}{\partial u_1} + (f_1 u_2)\frac{\partial f}{\partial u_2} = 0$$

die infinitesimale Transformation $C^0(f)$ gestattet. Folglich lehrt Theorem V, daß:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{U_2(f_1 u_1) - U_1(f_1 u_2)}$$

ein Integrabilitätsfaktor von: $(f_1 u_1)du_2 - (f_1 u_2)du_1 = 0$ ist. Und also ist:

$$\int \frac{1}{\Delta}\,[(f_1 u_1)du_2 - (f_1 u_2)du_1]$$

die gesuchte Lösung von: $A(f) = 0$.

§ 14. Anwendung der Theorie der infinitesimalen Transformationen auf partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung.

34. Die in diesem Abschnitte entwickelte Theorie der infinitesimalen Transformationen veröffentlichte ich zum ersten Male im Jahre 1874 (Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania).[1]

Im Anfange dieses Jahres (1876) versuchte ich, diese Theorie auf beliebige (nicht eben lineare) partielle Differentialgleichungen 1. O. anzuwenden. Ich fand zu meinem größten Erstaunen, daß meine neue Theorie sozusagen unmittelbar wesentliche Vereinfachungen in der allgemeinen [522 Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. bewirkt. Hinterher fand ich, daß es noch einfacher ist, diese neuen Entdeckungen, wie ich dies im ersten Abschnitte dieser Abhandlung getan habe, unabhängig von der Theorie der infinitesimalen Transformationen darzustellen. Nichtsdestoweniger halte ich es für richtig, diese Resultate zugleich auf dem Wege herzuleiten, auf dem sie zuerst gefunden wurden.

Allerdings wird der aufmerksame Leser bemerken, daß die Darstellung des ersten Abschnittes nicht allein in formeller, sondern auch in reeller Rücksicht besser als die nun folgende ist. So zum Beispiel gibt meine Theorie der infinitesimalen Transformationen allerdings den allgemeinsten Fall, in dem man die fehlenden Lösungen des Systems:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0, \quad \text{wo:} \quad (f_i f_k) = 0,$$

durch Quadraturen bestimmen kann. Dagegen lehrt sie nicht unmittelbar, daß hierzu nur *eine* Quadratur erforderlich ist.

35. Sei:

$$f_1 = \alpha_1, \ldots, f_q = \alpha_q$$

ein vorgelegtes Involutionssystem, und seien $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_r$ bekannte, von einander und von $f_1, \ldots, f_q$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems:

$$(f_1 \varphi) = 0, \ldots, (f_q \varphi) = 0, \quad \text{wo:} \quad (f_i f_k) = 0.$$

Setzen wir nun:

$$(f_k \varphi) = A_k(\varphi), \quad (\varphi_k \varphi) = B_k(\varphi)$$

und bezeichnen für einen Augenblick eine beliebige Lösung der Gleichungen: $A_k(\varphi) = 0$ mit φ^0, so werden auch sämtliche Größen $B_k(\varphi^0)$ Lösungen der Gleichungen: $A_k(\varphi) = 0$. Wir kennen daher, können wir sagen, nicht allein r Lösungen: $f_1, \ldots, f_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_r$ des vollständigen Systems: $A_k(\varphi) = 0$, sondern auch $r - q$ infinitesimale Transformationen: $B_{q+1}(\varphi), \ldots, B_r(\varphi)$, die unser vollständiges System invariant lassen.

---

1) [Bd. III d. Ausg., Abh. XIII, XIV.]

In diesem Abschnitte haben wir nun gelehrt, den Umstand, daß gleichzeitig gewisse Lösungen und gewisse infinitesimale Transformationen eines zur Integration vorgelegten vollständigen Systems bekannt sind, zu verwerten. Wir werden den aufgestellten Regeln folgen.

Zuerst müssen wir (§ 8, Nr. 16) versuchen, durch ausführbare Operationen weitere Lösungen und weitere infinitesimale Transformationen unseres Systems aufzustellen.

Zu diesem Zwecke haben wir die Ausdrücke: $B_k(\varphi_i)$ und: $B_i(B_k(\varphi)) - B_k(B_i(\varphi))$, die beziehungsweise Lösungen und infinitesimale Transformationen unseres vollständigen Systems darstellen, zu bilden. Es ist:

$$B_k(\varphi_i) = (\varphi_k \varphi_i), \quad B_i(B_k(\varphi)) - B_k(B_i(\varphi)) = ((\varphi_i \varphi_k)\varphi);$$

daß aber $(\varphi_k \varphi_i)$ eine Lösung ist, lehrt eben das Poisson-Jacobische Theorem. Und daß $((\varphi_i \varphi_k)\varphi)$ eine infinitesimale Transformation unseres vollständigen Systems darstellt, oder anders ausgesprochen, daß [523 $((\varphi_i \varphi_k)\varphi)$ gleichzeitig mit φ eine Lösung darstellt, kommt wiederum darauf hinaus, daß $(\varphi_i \varphi_k)$ eine Lösung ist.

Endlich haben wir zu untersuchen, ob Relationen von der Form:

$$\sum_k \lambda_k (f_k \varphi) + \sum_k \mu_k (\varphi_k \varphi) = 0$$

stattfinden. Wäre dies der Fall, so beständen Funktionalrelationen zwischen $f_1, \ldots, f_q$ und den Lösungen: $\varphi_{q+1}, \varphi_{q+2}, \ldots$, was indes ausgeschlossen ist.

Vorläufig geben also unsere allgemeinen Regeln nur das Poisson-Jacobische Theorem, das übrigens als bekannt vorausgesetzt wurde. Seien $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_r, \ldots, \varphi_s$ diejenigen unabhängigen Lösungen, die wir in dieser Weise erhalten, und seien:

$$(\varphi_{q+1} \varphi) = B_{q+1}(\varphi), \ldots, (\varphi_s \varphi) = B_s(\varphi)$$

die entsprechenden infinitesimalen Transformationen.

Jetzt müssen wir die Größen:

$$f_1, \ldots, f_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_s$$

zusammen mit $2n - s$ passend gewählten weiteren Größen: $u_1, \ldots, u_{2n-s}$ als unabhängige Variabeln anstatt: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ einführen. Dies gibt:

$$A_k(\varphi) = (f_k \varphi) = \sum_i (f_k u_i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \qquad (k = 1, \ldots, .),$$

$$B_k(\varphi) = (\varphi_k \varphi) = \sum_i (\varphi_k \varphi_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} + \sum_i (\varphi_k u_i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \qquad (k = q+1, \ldots, s).$$

Wir wissen, daß das vollständige System der: $A_k(\varphi) = 0$ jede infinitesimale Transformation von der allgemeinen Form:

$$C(\varphi) = \sum_k \pi_k(f_1, \ldots, f_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_s)\, B_k(\varphi)$$

gestattet; und wir müssen versuchen, die Größen π_k derart zu wählen, daß der Ausdruck $C(\varphi)$ nur die Differentialquotienten von φ hinsichtlich der u_i, dagegen keine Differentialquotienten hinsichtlich der φ_i enthält. Es fragt sich, ob die $s - q$ Gleichungen:

$$\pi_{q+1}(\varphi_{q+1}\varphi_k) + \cdots + \pi_s(\varphi_s\varphi_k) = 0 \qquad (k=q+1,\ldots,s) \tag{14}$$

befriedigt werden können, ob also die Determinante:

$$D = [(\varphi_{q+1}\varphi_{q+1}) \cdots (\varphi_s\varphi_s)]$$

verschwindet, oder von Null verschieden ist.

Setzen wir voraus, daß die Gruppe: $f_1, \ldots, f_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_s$ außer den f noch [gerade] m ausgezeichnete Funktionen: $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ enthält, so verschwindet sowohl D wie ihre Unterdeterminanten erster, zweiter, ..., $(m-1)$-ter Ordnung, während es jedenfalls eine nicht verschwindende Unterdeterminante m-ter Ordnung gibt. Und folglich können [524 die Gleichungen (14) befriedigt werden; man kann sogar m Größen π, etwa $\pi_{q+1}, \ldots, \pi_{q+m}$, arbiträr wählen. Alsdann drücken sich die übrigen π linear durch diese aus:

$$\pi_{q+m+j} = \psi^j_{q+1}\pi_{q+1} + \cdots + \psi^j_{q+m}\pi_{q+m}.$$

Die allgemeinste infinitesimale Transformation $C(\varphi)$ besitzt daher die Form:

$$C(\varphi) = \pi_{q+1}C_1(\varphi) + \cdots + \pi_{q+m}C_m(\varphi),$$

wo die $C_k(\varphi)$ ganz bestimmte Größen, die π_k dagegen arbiträre Funktionen der f und φ bezeichnen. Insbesondere sind $C_1(\varphi), \ldots, C_m(\varphi)$ selbst unabhängige infinitesimale Transformationen von der verlangten Form, die unser vollständiges System invariant lassen.

Fehlen nun mehr als m Lösungen der Gleichungen: $A_k(\varphi) = 0$, so müssen wir nach unseren allgemeinen Regeln das vollständige System:

$$A_1(\varphi) = 0, \ldots, A_q(\varphi) = 0, \quad C_1(\varphi) = 0, \ldots, C_m(\varphi) = 0$$

aufstellen und eine Lösung desselben vermöge einer Operation:

$$2n - s - q - m$$

bestimmen. Aus der gefundenen Lösung, verbunden mit den früheren hat man dann eventuell neue Lösungen vermöge des Poisson-Jacobischen Theorems zu bestimmen, und so weiter.

Man wird, wie man sieht, genau zu der in § 3 entwickelten Methode geführt. Wie damals bestimmt man daher sukzessive vermöge der Operationen:

$$2n - s - q - m, \quad 2n - s - q - m - 2, \ldots, 6, 4, 2$$

eine so große Anzahl weiterer Lösungen:

$$\varphi_{s+1}, \ldots, \varphi_t,$$

daß die Gruppe: $f_1, \ldots, f_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_s, \ldots, \varphi_t$ n-gliedrige Involutionssysteme enthält.

Hiermit hat unser Problem die folgende Gestalt gewonnen: Vorgelegt ist das q-gliedrige vollständige System:

$$(f_k\varphi) = A_k(\varphi) = 0,$$

und man kennt $2n - q - m$ Lösungen: $f_1, \ldots, f_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_{2n-q-m}$ desselben, die eine Gruppe bilden, welche außer: $f_1, \ldots, f_q$ noch [gerade] m ausgezeichnete Funktionen: $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ enthält. Man kennt zugleich die infinitesimalen Transformationen:

$$B_{q+1}(\varphi) = (\varphi_{q+1}\varphi), \ldots, B_{2n-q-m}(\varphi) = (\varphi_{2n-q-m}\varphi).$$

Nun führt man wiederum statt: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ neue Variabeln ein, nämlich: $f_1, \ldots, f_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_{2n-q-m}$ zusammen mit $q + m$ weiteren Größen: $u_1, u_2, \ldots, u_{q+m}$, und findet so:

$$A_k(\varphi) = \sum_i (f_k u_i)\frac{\partial\varphi}{\partial u_i},$$

$$B_k(\varphi) = \sum_i (\varphi_k\varphi_i)\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_i} + \sum_i (\varphi_k u_i)\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}. \qquad [525$$

Man bestimmt wie früher durch lineare Kombination der $B_k(\varphi)$ die allgemeinste infinitesimale Transformation:

$$C(\varphi) = \pi_{q+1}C_1(\varphi) + \cdots + \pi_{q+m}C_m(\varphi),$$

die nur Differentialquotienten hinsichtlich der u_i enthält. Wir werden zeigen, daß die infinitesimalen Transformationen $C_k(\varphi)$ paarweise die Relation: $C_i(C_k(\varphi)) - C_k(C_i(\varphi)) = 0$ erfüllen.

Da die ausgezeichneten Funktionen Ω Funktionen von den f und φ sind, so folgt, daß sich die $(\Omega_k\varphi)$ folgendermaßen ausdrücken lassen:

$$(\Omega_k\varphi) = \sum_i \Theta_{ki}(f_1, \ldots, f_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_{2n-q-m})B_i(\varphi) + \sum_i \alpha_{ki}A_i(\varphi),$$

wo die α_{ki} Funktionen der f und φ sind; auf der anderen Seite ist:

$$(\Omega_k\varphi) = \sum_i (\Omega_k u_i)\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}.$$

Also bestehen m Relationen von der Form:

$$(\Omega_k\varphi) = \sum_i \pi_{ki}(f_1, \ldots, f_q, \varphi_{q+1}, \varphi_{q+2}, \ldots) C_i(\varphi) + \sum_i \alpha_{ki} A_i(\varphi),$$

und, da keine lineare Relation zwischen den $(\Omega_k\varphi)$ und den $A_k(\varphi)$ bestehen darf, so folgt einerseits, daß die m Ausdrücke: $\Sigma\pi_{ki}C_i(\varphi)$ von einander unabhängig sind, andererseits, daß sich die $C_i(\varphi)$ linear durch die $(\Omega_k\varphi)$ und die $A_k(\varphi)$ ausdrücken:

$$C_i(\varphi) = \sum_k \psi_{ik}(f_1, \ldots f_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_{2n-q-m})(\Omega_k\varphi) + \sum_k \beta_{ik} A_k(\varphi).$$

Bildet man daher die: $C_i(C_k(\varphi)) - C_k(C_i(\varphi))$ und berücksichtigt dabei, daß die $C_i(\varphi)$ nur Differentialquotienten hinsichtlich der u enthalten, daß ferner alle $(\Omega_i\Omega_k)$ verschwinden, so erkennt man, daß alle:

$$C_i(C_k(\varphi)) - C_k(C_i(\varphi)) = 0$$

sind.

Hiermit hat unser Problem die folgende Gestalt gewonnen:

Vorgelegt ist ein q-gliedriges vollständiges System zwischen $q + m$ Variabeln:

$$A_k(\varphi) = \sum_i (f_k u_i) \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q),$$

und man kennt m Ausdrücke: $C_1(\varphi), \ldots, C_m(\varphi)$, welche die Gleichungen:

$$A_i(C_k(\varphi)) - C_k(A_i(\varphi)) = \sum_\mu \lambda_{ik\mu} A_\mu(\varphi), \quad C_i(C_k(\varphi)) - C_k(C_i(\varphi)) = 0$$

erfüllen. [Überdies besteht zwischen: $A_1(\varphi), \ldots, A_q(\varphi), C_1(\varphi), \ldots, C_m(\varphi)$ keine lineare homogene Relation.] Man soll das vollständige System integrieren. [526

Nach § 12, Nr. 29 geschieht dies, indem man das vollständige System:

$$A_1(\varphi) = 0, \ldots, A_q(\varphi) = 0,$$

$$C_1(\varphi) = 0, \ldots, C_{r-1}(\varphi) = 0, \quad C_{r+1}(\varphi) = 0, \ldots, C_m(\varphi) = 0,$$

oder auch die entsprechende totale Differentialgleichung:

$$W_{r,1}du_1 + \cdots + W_{r,m+q}du_{m+q} = 0$$

aufstellt und darnach die durch die $q + m$ Ausdrücke:

$$A_k(\varphi) = \sum_i U_{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \quad C_k(\varphi) = \sum_i V_{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$$

bestimmte Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \ldots & U_{1,m+q} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ U_{q,1} & U_{q,2} & \ldots & U_{q,m+q} \\ V_{11} & V_{12} & \ldots & V_{1,m+q} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ V_{m,1} & V_{m,2} & \ldots & V_{m,m+q} \end{vmatrix}$$

bildet. Alsdann ist $1 : \Delta$ ein Integrabilitätsfaktor, also:

$$L_r = \int \frac{1}{\Delta}(W_{r,1}du_1 + \cdots + W_{r,m+q}du_{m+q})$$

ein Integral unserer totalen Gleichung und gleichzeitig eine Lösung der: $A_k(\varphi) = 0$. Gibt man r sukzessiv die Werte: $1, 2, \ldots, m$, so erhält man m Lösungen: $L_1, \ldots, L_m$, die von einander, wie von den f und φ unabhängig und somit die fehlenden Lösungen des Systems: $A_k(\varphi) = 0$ sind.

Hiermit haben wir das angekündigte Resultat erreicht.

36. Auch die Ergebnisse des § 5 fließen als Korollar aus meiner allgemeinen Theorie der infinitesimalen Transformationen.

Sei:

$$N_1 = a_1, \ldots, N_q = a_q$$

ein Involutionssystem nullter Ordnung, und seien: $N_1, \ldots, N_q, H_{q+1}, \ldots, H_{2n-q-m}$ [bekannte] homogene Lösungen des Systems:

$$(N_1H) = 0, \ldots, (N_qH) = 0,$$

die eine [homogene] Gruppe bilden, welche außer $N_1, \ldots, N_q$ noch [gerade] m ausgezeichnete Funktionen, sämtlich von nullter Ordnung, enthält und daher die kanonische Form: $X_1, \ldots, X_n, P_{q+m+1}, \ldots, P_n$ besitzt.

Alsdann sind die ausgezeichneten Funktionen dieser Gruppe die Lösungen des vollständigen Systems:

$$(N_1\Phi) = 0, \ldots, (N_q\Phi) = 0, \quad (H_{q+1}\Phi) = 0, \ldots, (H_{2n-q-m}\Phi) = 0; \text{[527}$$

außerdem befriedigen sie die Gleichung:

$$\sum p\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0,$$

die somit eine algebraische Konsequenz der vorhergehenden Gleichungen ist. Also besteht eine lineare Relation:

$$(15)\quad \alpha_1(N_1\Phi) + \cdots + \alpha_q(N_q\Phi) + \beta_{q+1}(H_{q+1}\Phi) + \cdots + \sum p\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0,$$

die wir aufstellen können. Setzen wir nun:

$$(N_k\Phi) = A_k(\Phi), \quad (H_{q+i}\Phi) = B_{q+i}(\Phi), \quad \sum p\frac{\partial\Phi}{\partial p} = B(\Phi),$$

so gestattet, können wir sagen, das vollständige System: $A_k(\Phi) = 0$ die $[2n - 2q - m + 1]$ infinitesimalen Transformationen $B_i(\Phi)$, $B(\Phi)$. Infolgedessen sind die β (Theorem VII) Lösungen der: $A_k(\Phi) = 0$.

Ich behaupte, daß man in dieser Weise sämtliche fehlende Lösungen der: $A_k(\Phi) = 0$ findet.

Zum Beweis setze ich:

$$N_1 = X_1, \ldots, N_q = X_q$$

und denke mir die Gruppe der N und H auf ihre kanonische Form:

$$X_1, \ldots, X_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q+m}, X_{q+m+1}, \ldots, X_n, P_{q+m+1}, \ldots, P_n$$

gebracht. Hierdurch nimmt die Gleichung (15) die Form an:

$$\alpha_1'(X_1\Phi) + \cdots + \alpha_q'(X_q\Phi) + \beta_{q+1}'(X_{q+1}\Phi) + \cdots + \beta_n'(X_n\Phi) +$$
$$+ \beta_{n+1}'(P_{q+m+1}\Phi) + \cdots + \beta_{2n-q-m}'(P_n\Phi) + \sum_k P_k \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} = 0,$$

oder ausgeführt:

$$\alpha_1' \frac{\partial \Phi}{\partial P_1} + \cdots + \alpha_q' \frac{\partial \Phi}{\partial P_q} + \beta_{q+1}' \frac{\partial \Phi}{\partial P_{q+1}} + \cdots + \beta_n' \frac{\partial \Phi}{\partial P_n} -$$
$$- \beta_{n+1}' \frac{\partial \Phi}{\partial X_{q+m+1}} + \cdots - \beta_{2n-q-m}' \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} - \sum_k P_k \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} = 0,$$

woraus:

$$\alpha_1' = P_1, \ldots, \alpha_q' = P_q, \quad \beta_{q+1}' = P_{q+1}, \ldots, \beta_n' = P_n, \quad \beta_{n+k}' = 0.$$

Man sieht, daß $\beta_{q+1}', \ldots, \beta_{q+m}'$ die fehlenden Lösungen des Systems:

$$(X_1\Phi) = 0, \ldots, (X_q\Phi) = 0$$

sind, während die übrigen β' Funktionen der bereits bekannten Lösungen sind. Berücksichtigt man daher, daß die beiden Größenreihen:

$$\beta_{q+1}, \ldots, \beta_{2n-q-m},$$
$$\beta_{q+1}', \ldots, \beta_{2n-q-m}'$$

in solcher gegenseitiger Beziehung stehen, daß sich jede Größe der einen Reihe durch die Größen der andern Reihe und die bekannten Lösungen ausdrückt, so folgt, daß auch die Größen $\beta_{q+1}, \ldots, \beta_{2n-q-m}$ die [528 fehlenden Lösungen liefern, wie behauptet wurde.

Um den Zusammenhang zwischen dieser und meiner alten Begründung möglichst klar hervortreten zu lassen, füge ich noch das Folgende hinzu.

Die Gleichung (15) gilt identisch für jedes Φ. Setzen wir Φ sukzessive gleich: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, so finden wir die $2n$ Gleichungen:

$$\sum_k \alpha_k \frac{\partial N_k}{\partial p_i} + \sum_k \beta_k \frac{\partial H_k}{\partial p_i} = 0,$$
$$\sum_k \alpha_k \frac{\partial N_k}{\partial x_i} + \sum_k \beta_k \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = p_i,$$

deren Inbegriff offenbar mit (15) äquivalent ist. Diese Gleichungen lassen sich in die eine Gleichung:

$$\sum_k \alpha_k dN_k + \sum_k \beta_k dH_k = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

die daher mit (15) äquivalent ist, zusammenfassen. In Nummer 1 (Satz 3) sahen wir aber eben, daß die β die fehlenden Lösungen der Gleichungen: $(N_1\Phi) = 0, \ldots, (N_q\Phi) = 0$ sind.

37. Die Theorie der Nummer 12 ergibt sich noch unmittelbarer aus der Theorie der infinitesimalen Transformationen.

Sei wiederum:

$$N_1 = \alpha_1, \ldots, N_q = \alpha_q$$

ein vorgelegtes Involutionssystem nullter Ordnung, und seien $H_{q+1}, \ldots, H_r$ homogene Lösungen [erster Ordnung] der Gleichungen:

$$(N_1\Phi) = 0, \ldots, (N_q\Phi) = 0,$$

die zusammen mit $N_1, \ldots, N_q$ eine Gruppe bilden, welche außer $N_1, \ldots, N_q$ noch [gerade] m ausgezeichnete Funktionen, sämtlich von nullter Ordnung, enthalte.

Setzen wir:

$$(N_k\Phi) = A_k(\Phi), \quad (H_k\Phi) = B_k(\Phi), \quad \sum p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = B(\Phi),$$

so gestattet, können wir sagen, das vollständige System: $A_k(\Phi) = 0$ die infinitesimalen Transformationen $B_k(\Phi)$, $B(\Phi)$. Und wenn wir, wie in Nr. 12, die Voraussetzung machen, daß die Polargruppe der Gruppe $N_1, \ldots, N_q, H_{q+1}, \ldots, H_r$ nicht nur Funktionen nullter Ordnung enthalte, so bilden die Gleichungen:

$$A_k(\Phi) = 0, \quad B_k(\Phi) = 0, \quad B(\Phi) = 0$$

ein vollständiges System. Es besteht somit keine lineare Relation zwischen den $A_k(\Phi)$, $B_k(\Phi)$ und $B(\Phi)$.

Nach den Regeln von § 8 führen wir neue Variabeln $N_1, \ldots, N_q$, [529 $H_{q+1}, \ldots, H_r, u_1, \ldots, u_{2n-r}$ ein, und finden so:

$$\begin{aligned} A_k(\Phi) &= && \sum_i (N_k u_i) \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \\ B_k(\Phi) &= \sum_i (H_k H_i) \frac{\partial \Phi}{\partial H_i} && + \sum_i (H_k u_i) \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \\ B(\Phi) &= \sum_i H_i \frac{\partial \Phi}{\partial H_i} && + \sum_i \Big(\sum_k p_k \frac{\partial u_i}{\partial p_k} \Big) \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}. \end{aligned}$$

Nunmehr müssen wir durch lineare Kombination aus den $B_k(\Phi)$ und aus $B(\Phi)$ die allgemeinste infinitesimale Transformation:

$$C(\Phi) = \pi_{q+1} C_1(\Phi) + \pi_{q+2} C_2(\Phi) + \cdots$$

suchen, die nur Differentialquotienten hinsichtlich der u_i enthält; darnach das vollständige System:

$$A_1(\Phi) = 0, \ldots, A_q(\Phi) = 0, \quad C_1(\Phi) = 0, \quad C_2(\Phi) = 0, \ldots$$

aufstellen und eine Lösung desselben bestimmen, und so weiter. Dies ist aber eben die in Nr. 12 auseinandergesetzte Methode.

Abschnitt III.

Gibt es noch bessere Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung?

In Eulers Integralrechnung werden mehrere spezielle partielle Differentialgleichungen 1. O. integriert. Lagrange zeigte in einer berühmten Arbeit, die in den Abhandlungen der Akademie zu Berlin für 1772 gedruckt ist, daß die Integration der allgemeinen Gleichung:

$$q = f(x, y, z, p)$$

auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Er stellt das simultane System:

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{q - p\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}}$$

auf und sucht ein Integral desselben. Gelingt es, ein solches zu finden, so verlangt die Erledigung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung nur die Integration einer linearen totalen Differentialgleichung:

$$dz - A\,dx - B\,dy = 0,$$

in der A und B bekannte Funktionen von x, y und z sind.

Die Mathematiker strebten lange ohne Erfolg, eine allgemeine [530
Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung:

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

zu finden. Merkwürdig ist dabei, daß Pfaff, dem dies zuerst gelang (Abhandl. der Akademie zu Berlin, 1814—1815), den Umweg machte, das vorliegende Problem als speziellen Fall eines scheinbar weit schwierigeren Problems aufzufassen.

Pfaff zeigte nämlich, daß jeder $2n$-gliedrige Ausdruck:

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

auf eine n-gliedrige Form:

$$F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$$

gebracht werden kann, und zwar in der Weise, daß man sukzessive eine Reihe simultaner Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig integriert. Und da das Problem, die Gleichung:

$$p_n = f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1})$$

zu integrieren, darauf hinauskommt, den Ausdruck:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_{n-1} dx_{n-1} - f\,dx_n$$

auf eine n-gliedrige Form zu bringen, so gibt die Erledigung des soeben besprochenen allgemeinen Problems zugleich eine allgemeine Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. Um die Gleichung:

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

nach dieser Methode zu integrieren, muß man sukzessive ein simultanes System, bestehend aus $2n-1$ Gleichungen, ein System mit $2n-3$ Gleichungen, eins mit $2n-5$ Gleichungen, und so weiter, zuletzt eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. O. zwischen zwei Variabeln integrieren. Bezeichne ich daher die Operation, ein Integral eines simultanen Systems von q gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. O. zu bestimmen, durch die Zahl q, sodaß die vollständige Integration eines solchen Systems die Operationen:

$$q, q-1, q-2, \ldots, 3, 2, 1$$

erfordert, so verlangt, kann ich sagen, die Integration der Gleichung: $F = 0$ nach der Pfaffschen Methode die in folgendem Schema angegebenen Operationen:

Die Pfaffsche Methode.

$$\begin{array}{r} 2n-1,\ 2n-2,\ 2n-3,\ 2n-4,\ 2n-5, \ldots, 3, 2, 1, \\ 2n-3,\ 2n-4,\ 2n-5, \ldots, 3, 2, 1, \\ 2n-5, \ldots, 3, 2, 1, \\ \cdots\ \cdot\ \cdot \\ 3, 2, 1, \\ 1. \end{array}$$

Cauchy, der Pfaffs Theorie nicht kannte, gab im Jahre 1819 eine [531
neue, äußerst einfache Methode, die darauf hinauskommt, daß es hinreichend ist, das erste Pfaffsche System zu integrieren. Diese Cauchysche Methode, die man als eine Verallgemeinerung der von Monge herrührenden Theorie der Charakteristiken der Gleichung: $f(z, x, y, p, q) = 0$ aufzufassen hat, scheint mir, hinsichtlich der zu Grunde liegenden Gedanken, die einfachste Methode zu sein, die gegeben worden ist, und zugleich die einfachste Methode, die überhaupt gegeben werden kann. Allerdings verlangt sie schwierigere Integrationsoperationen als mehrere spätere Methoden.

Jacobi, der für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. so außerordentlich viel geleistet hat, veröffentlichte 1837 (Crelles Journal, Bd. 17) die Grundzüge einer neuen Methode, die ich die Jacobische Methode nenne. Erst 1862 (Crelles Journal, Bd. 60), mehrere Jahre nach Jacobis Tode, veröffentlichte Clebsch eine ausgeführte Redaktion dieser Methode, die unter Jacobis nachgelassenen Manuskripten gefunden worden war. In dem langen Zeitraume 1837—1862 gingen die Bestrebungen der Mathematiker, die sich mit dieser Disziplin beschäftigten, zum größten Teile darauf hinaus, die Jacobische Methode nach Jacobis Andeutungen zu rekonstruieren. Dies gelang Bour (Journal de l'École Polytechnique, 39. cahier), der sich überhaupt in mehreren Richtungen um die allgemeine Theorie verdient gemacht hat.

Um die Cauchysche und die Jacobische Methode zu vergleichen, stelle ich die nach beiden Methoden notwendigen Operationen in dem folgenden Schema zusammen:

Die Cauchysche Methode.	Die Jacobische Methode.
$2n-1$	$2n-1 \quad 2n-3 \quad 2n-5 \ldots 3 \; 1$
$2n-2$	$2n-3 \quad 2n-5 \ldots 3 \; 1$
$2n-3$	$2n-5 \ldots 3 \; 1$
.	. . . . .
3	3 1
2	1
1	

Wie man sieht, verlangt Jacobis Methode, wenn $n > 2$ ist, eine größere Anzahl Integrationsoperationen, die jedoch eine geringere Ordnung haben als bei Cauchys Methode. Zu bemerken ist übrigens, daß bei der Jacobischen Methode häufig mehrere Integrationsoperationen wegfallen können. Man hält jedenfalls die Jacobische Methode für einfacher als die Cauchysche.

Man betrachtet allgemein die Jacobische Methode als ein Meisterwerk; und diese Auffassung ist ohne Zweifel wohl begründet. Doch glaube ich, daß die zur Begründung dieser Methode entwickelten großartigen [532
Hilfstheorien in noch höherem Grade als die Methode selbst einen bleibenden Wert behalten werden. Insbesondere möchte ich das Poisson-Jacobische Theorem neben der Lagrangeschen, der Pfaffschen und der Cauchyschen Integrationstheorie als die wichtigste Entdeckung bezeichnen, die überhaupt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. gemacht worden ist.

Im Jahre 1863 veröffentlichte Weiler in Schlömilchs Journal eine wesentliche Vereinfachung der Jacobischen Methode. Da Weilers Darstellung seiner Methode, die mir leider unzugänglich gewesen ist, nicht hinlänglich klar schien, unternahm es Clebsch in einer bekannten Abhandlung (Crelles Journal Bd. 65), eine neue Darstellung der Weilerschen Methode zu geben. Nach späteren Untersuchungen von Mayer (Mathem. Annalen, Bd. IX) ist jedoch diese Clebschsche Methode von der Weilerschen, die Mayer selbst in der zitierten Abhandlung aufs neue entwickelt hat, verschieden. Doch stimmen diese beiden Methoden hinsichtlich der Zahl und der Ordnung der notwendigen Integrationsoperationen, wie das folgende Schema zeigt, überein.

Die Weilersche Methode.	Die Clebschsche Methode.
$2n-1$	$2n-1$
$2n-3 \quad 2n-3$	$2n-3 \quad 2n-3$
$2n-5 \quad 2n-5$	$2n-5 \quad 2n-5$
. .	. .
3 3	3 3
1 1	1 1

Im Jahre 1872 endlich, genau ein Jahrhundert nach dem Erscheinen von Lagranges oben zitierter bahnbrechender Arbeit, veröffentlichten Mayer (Math. Ann. Bd. V) und ich (Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania)[1]) gleichzeitig und unabhängig von einander zwei verschiedene Theorien, die dieselbe Reduktion in der Zahl und der Ordnung der notwendigen Integrationsoperationen erzielten.

Mayers Arbeit enthielt ein merkwürdiges Theorem, das sogenannte Mayersche Theorem, welches ihm erlaubte, nicht allein die Jacobische Integrationsmethode, sondern auch die allgemeine Theorie des Pfaffschen Problems wesentlich zu vereinfachen.

1) [Bd. III d. Ausg., Abh. II.]

Meine Methode nimmt gewissermaßen eine Zwischenstelle zwischen der Cauchyschen und der Jacobischen ein; sie basiert auf einer Verallgemeinerung der Cauchyschen Methode.

Die Mayersche Methode.	Meine Methode. [533
$2n-1$	$2n-1$
$2n-3$	$2n-3$
$2n-5$	$2n-5$
.	.
3	3
1	1

Bei der Jacobischen, der Weilerschen, der Clebschschen, der Mayerschen und meiner Methode stellt man sukzessive eine Reihe simultaner Systeme auf und sucht jedesmal ein Integral. Hierbei kann es gelegentlich eintreten, daß man gleichzeitig mehrere Integrale eines solchen Systems findet; man kennt überdies Operationen, die dazu dienen, aus einem bekannten Integrale neue herzuleiten. Es stellt sich daher das Problem, den Umstand, daß man gleichzeitig mehrere Integrale gefunden hat, zur Vereinfachung des zurückstehenden Integrationsgeschäfts möglichst zu verwerten. Dieses Problem behandelte ich eingehend in meiner „Invariantentheorie der Berührungstransformationen"[1]; ich zeigte, daß sich aus dem besprochenen Umstande im allgemeinen ein sehr großer Vorteil ziehen läßt. Und im ersten Abschnitte meiner jetzigen Arbeit habe ich gelehrt, bekannte Integrale in noch viel höherem Grade zu verwerten.

Es stellt sich nun die Frage, ob es denkbar ist, daß eine spätere Zeit noch bessere Integrationstheorien der partiellen Differentialgleichungen entdecken werde. Ich zweifle nicht, daß jeder Mathematiker, der die jetzige Lage dieser Disziplin kennt, dazu geneigt sein wird, eine solche Frage ohne weiteres mit Nein zu beantworten.

Hierauf ist jedoch wenig Gewicht zu legen. Denn in der Entwickelungsgeschichte dieser Theorie hat es sich mehreremal wiederholt, daß die mathematische Welt die Theorie für fertig gehalten hat. Schon Jacobi fand sich veranlaßt[2]), gegen die Ansicht aufzutreten, daß mit Lagranges und Pfaffs Arbeiten diese Theorie abgeschlossen wäre. Dagegen meinte er, daß sie noch ein fruchtbares Gebiet für Forschung sei. Und die Arbeiten Jacobis haben die Richtigkeit seines Urteils gezeigt. Es ist mir auf der anderen Seite keineswegs bekannt, daß Jacobi irgendwo die Auffassung

1) [Hier Abh. I. Vgl. auch Bd. III d. Ausg., Abh. VI, VII, VIII (1872, 73).]
2) Vorlesungen über Dynamik, S. 304.

ausgesprochen hat, daß mit seinen Arbeiten diese Disziplin zum Abschluß gebracht worden sei. Nichtsdestoweniger verbreitete sich die Ansicht, daß nun in dieser Theorie nichts mehr zu machen wäre, und auch die Entdeckungen von Weiler und von Clebsch vermochten nicht, diese Auffassung zu erschüttern.

Um nun die Frage, ob noch einfachere Integrationsmethoden als die [534 bis jetzt bekannten überhaupt möglich sind, rationell behandeln zu können, scheint es mir zunächst notwendig, diese Frage näher zu präzisieren. Ich stelle daher ausdrücklich fest, daß ich bei der Vergleichung zweier Integrationsmethoden nur auf die notwendigen Integrationsoperationen Rücksicht nehmen werde, während ich von den sogenannten ausführbaren Operationen, das heißt, von Differentiationen und Eliminationen ganz absehe. Ich betrachte dabei eine Operation q (das heißt, die Bestimmung eines Integrals eines simultanen Systems von q Gleichungen) als schwieriger, als eine Operation $q-1$. Ich finde es ferner notwendig, als Axiom festzustellen, daß die Integration der allgemeinen Gleichung:

$$f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

nicht durch ausführbare Operationen geleistet werden kann, woraus als Korollar hervorgeht, daß auch die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1. O. keine ausführbare Operation sein kann. Endlich stelle ich als Axiom fest, daß es nicht zufällig ist, sondern aus der Natur der Sache hervorgeht, daß bei allen bekannten Methoden die erste Operation, welche zur Integration der gegebenen Gleichung:

$$f(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$

erforderlich ist, darauf hinausläuft, eine Lösung eines solchen vollständigen Systems mit den unabhängigen Variabeln: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ zu finden, welches zu: $f = a$ in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung steht.

Indem ich diese Axiome und den aufgestellten Maßstab zu Grunde lege, gelingt es mir, nachzuweisen, daß sich keine allgemeine Integrationsmethode mit einfacheren Operationen als die Mayersche und die meinige begnügen kann; daß ferner die von mir gegebenen Theorien den größtmöglichen Nutzen aus mehreren bekannten Integralen zu ziehen lehren.

Hiermit ist die Frage, ob noch einfachere Methoden existieren, wenn nicht erledigt, so doch jedenfalls darauf zurückgeführt, die Richtigkeit der aufgestellten Axiome zu untersuchen.

§ 15. Infinitesimale Berührungstransformationen und vollständige Systeme.

38. Ich sage, daß eine Funktion: $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ die infinitesimale Transformation:

$$\delta x_k = \xi_k(x_1, \ldots, x_n)\delta t \qquad (k=1,\ldots,n)$$

gestattet, wenn die transformierte Funktion:

$$\Pi(x_1 + \xi_1\delta t, \ldots, x_n + \xi_n\delta t)$$

identisch gleich Π ist, wenn also:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n}\xi_n = 0$$ [535

ist.

Bezeichnen wir die infinitesimale Transformation: $\delta x_k = \xi_k \delta t$ wieder mit dem Symbole:

$$B(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

so können wir diese und die entsprechende, früher (Nr. 15) in bezug auf ein vollständiges System gegebene Definition so formulieren:

Definition. *Die Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ gestattet die infinitesimale Transformation $B(f)$, wenn $B(\Pi)$ gleich Null ist.*

Definition. *Ein vollständiges System gestattet die infinitesimale Transformation $B(f)$, wenn $B(\Phi)$ gleichzeitig mit Φ eine Lösung des Systems ist.*

39. Im folgenden haben wir nur infinitesimale Berührungstransformationen zwischen: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ zu betrachten. Wir bestimmen zuerst die allgemeine Form einer solchen Transformation:

$$x_i' = x_i + A_i\delta t, \quad p_k' = p_k + B_k\delta t.$$

Die Größen A und B befriedigen bekanntlich (Math. Ann. Bd. VIII, S. 236)[1]) die Gleichungen:

$$(x_i + A_i\delta t,\ x_k + A_k\delta t) = 0, \quad (x_i + A_i\delta t,\ p_k + B_k\delta t) = 0,$$
$$(p_i + B_i\delta t,\ p_k + B_k\delta t) = 0, \quad (p_i + B_i\delta t,\ x_i + A_i\delta t) = 1,$$

oder ausgeführt:

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_k} = \frac{\partial A_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial B_i}{\partial x_k} = \frac{\partial B_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial B_k}{\partial p_i};$$

diese Gleichungen werden aber in allgemeinster Weise befriedigt, wenn man setzt:

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad B_k = -\frac{\partial F}{\partial x_k},$$

wo F eine beliebige Funktion von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ bezeichnet. Also:

1) [Hier Abh. I, S. 23.]

Satz 20. *Eine jede infinitesimale Berührungstransformation [zwischen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$] besitzt die Form:*

$$\text{(1)} \qquad \delta x_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta t, \quad \delta p_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta t \qquad (i=1,\ldots,n),$$

wo F eine beliebige Funktion von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ ist.

Halten wir an der eingeführten Bezeichnungsweise fest, so ist die infinitesimale Berührungstransformation (1) mit:

$$B(f) = \sum_i^{1\ldots n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = (Ff)$$

zu bezeichnen. Wir nennen diese Transformation kurzweg die infini- [536 tesimale Berührungstransformation F.

Angewandt auf infinitesimale Berührungstransformationen ergeben die aufgestellten Definitionen die beiden folgenden Sätze:

Satz 21. *Eine Funktion $\Phi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ gestattet die infinitesimale Berührungstransformation F, wenn $(F\Phi)$ gleich Null ist.*

Satz 22. *Ein vollständiges System mit den unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ gestattet die infinitesimale Berührungstransformation F, wenn $(F\Phi)$ immer gleichzeitig mit Φ eine Lösung desselben ist.*

40. Wir werden das allgemeinste vollständige System bestimmen, das zu einer vorgelegten Funktion: $X(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ in solcher Beziehung steht, daß alle infinitesimalen Berührungstransformationen, die X invariant lassen, gleichzeitig das vollständige System in sich selbst überführen. Um dieses Problem zu erledigen, werden wir zunächst einige Hilfssätze entwickeln, wobei wir wie früher mit den Buchstaben: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ immer kanonische Variabeln bezeichnen.

Satz 23. *Gestattet ein vollständiges System alle infinitesimalen Transformationen von der Form $F(X_1, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n)$, und ist dabei X_2 eine Lösung desselben, so sind auch die übrigen in F enthaltenen Größen Lösungen.*

Beweis. Nach Voraussetzung gestattet unser vollständiges System unter anderen auch die infinitesimalen Transformationen:

$$X_k P_2 \quad \text{und:} \quad P_i P_2,$$

wo $i > 1$, also sind (Satz (22)):

$$(X_2, X_k P_2) \quad \text{und:} \quad (X_2, P_i P_2),$$

das heißt X_k und P_i, Lösungen, was eben zu beweisen war.

Satz 24. *Wenn ein vollständiges System eine Lösung von der Form $u\varphi(v)$ zuläßt, wo φ eine willkürliche Funktion ist, so sind u und v selbst Lösungen des Systems.*

Denn im besondern sind dann auch u und uv Lösungen, also ist auch ihr Quotient v eine solche.

Satz 25. *Besitzt ein vollständiges System, das alle infinitesimalen Transformationen von der Form $\Omega(X_2)$ gestattet, eine Lösung, deren analytischer Ausdruck in den kanonischen Variabeln: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ die Größe P_2 enthält, so ist X_2 eine Lösung desselben.*

Beweis. Sei Φ eine Lösung von der angegebenen Art. Wenden wir dann auf Φ die infinitesimale Transformation $\Omega(X_2)$ an, so erhalten wir die neue Lösung:

$$(\Omega\Phi) = -\Omega'(X_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial P_2}.$$

Diese enthält aber eine willkürliche Funktion von X_2 als Faktor, also ist nach dem vorhergehenden Satze X_2 selbst eine Lösung.

Theorem IX. *Es gibt nur zwei vollständige Systeme, die* [537 *zu einer vorgelegten Funktion X_1 in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung stehen. Das eine ist:*

$$(X_1\Phi) = 0,$$

das andere hat keine andere Lösung als X_1.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, daß das betreffende vollständige System jedenfalls eine Lösung besitzt, deren analytischer Ausdruck in den Variabeln: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ eine von den Größen: $X_2, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n$, etwa P_2, enthält. Berücksichtigen wir sodann, daß unser vollständiges System alle infinitesimalen Transformationen von der Form $F(X_1, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n)$, im besondern also auch von der Form $\Omega(X_2)$ gestatten soll, weil diese die gegebene Funktion X_1 invariant lassen, so sehen wir aus Satz 25, daß X_2 selbst eine Lösung sein muß. Hieraus aber folgt (Satz 23), daß sämtliche Größen: $X_1, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n$ Lösungen sein müssen, und daher kann das betreffende vollständige System nur die *eine* Gleichung:

$$(X_1\Phi) = 0$$

enthalten.

Gibt es daher noch andere vollständige Systeme, die zu X_1 in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung stehen, so müssen sämtliche Lösungen derselben Funktionen von X_1 und P_1 allein sein. Sei Φ eine solche Lösung, die P_1 enthält. Auf Φ wenden wir die infinitesimale Transformation $X_1\Omega(X_2)$ an und erhalten dadurch die neue Lösung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_1}\,\Omega(X_2),$$

die eine arbiträre Funktion von X_2 als Faktor enthält. Also muß X_2 selbst eine Lösung sein. Dies steht aber im Widerspruche mit dem Vorangehenden. Und also gibt es keine Lösung, die P_1 enthält; das heißt: X_1 ist die einzige Lösung.

§ 16. Bestimmung der besten Integrationsmethode.

41. Zunächst entwickle ich einige allgemeine Sätze:

Satz 26. *Stehen zwei Integrationsprobleme, die sich durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erledigen lassen, in solcher gegenseitiger Beziehung, daß man, wenn ein Problem der einen Kategorie vorgelegt ist, immer vermöge ausführbarer Operationen ein Problem der andern Kategorie aufstellen kann, dessen Erledigung diejenige des vorgelegten Problems nach sich zieht, so ist das Minimum der notwendigen Integrationsoperationen für beide Kategorien dasselbe.*

Dieser Satz ist unmittelbar evident.

In den folgenden Sätzen werden unter partiellen Differential- [538 gleichungen und Involutionssystemen immer nur solche verstanden, welche die unbekannte Funktion selbst nicht enthalten.

Satz 27. *Die Integration eines zweigliedrigen Involutionssystems mit n unabhängigen Variabeln:*

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_1, \quad X_2(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_2$$

läßt sich auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung 1. O. mit nur noch $n-1$ unabhängigen Variabeln zurückführen.

Dies ist ja der Fundamentalsatz der neuen Integrationsmethode, die ich 1872 veröffentlichte.

Satz 28. *Die Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung 1. O. mit $n-1$ unabhängigen Variabeln:*

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}) = b$$

läßt sich zurückführen auf die Integration eines zweigliedrigen Involutionssystems mit n unabhängigen Variabeln.

Denn die Integration des Involutionssystems:

$$f = b, \quad p_n = \text{Const.}$$

zieht diejenige der Gleichung: $f = b$ nach sich.

Theorem X. *Die einfachste Integrationsmethode eines zweigliedrigen Involutionssystems mit n unabhängigen Variabeln braucht genau so viele und so hohe Integrationsoperationen* *wie die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen partiellen Differentialgleichung* 1. O. *mit* $n-1$ *unabhängigen Variabeln.*

Dieses wichtige Theorem ist eine direkte Konsequenz aus den vorhergehenden Sätzen dieser Nummer.

42. Um jetzt die Frage nach der einfachsten Integrationsmethode beantworten zu können, scheint es notwendig, zwei Forderungssätze aufzustellen:

Erster Forderungssatz. Die Integration der allgemeinen Differentialgleichung:

$$f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

läßt sich nicht durch ausführbare Operationen leisten.

Aus diesem Satze folgt als Korollar, daß auch die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. nicht allgemein geleistet werden kann.

Zweiter Forderungssatz. Die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung:

$$X(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$

beginnt mit der Bestimmung einer Lösung eines voll- [539
ständigen Systems mit den unabhängigen Variabeln: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, welches zu X in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung steht.

43. Indem ich diese beiden Forderungssätze admittiere, bestimme ich leicht die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung:

$$X_1^1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_1.$$

Zuerst muß man nach unserem zweiten Forderungssatze ein vollständiges System aufstellen, das mit X_1^1 invariant verknüpft ist. Es gibt nur ein solches System, nämlich:

$$(X_1^1 \Phi) = 0,$$

dessen Integration sich nicht allgemein leisten läßt. Daher bestimmen wir vermöge einer Operation $2n-2$ eine Lösung X_2^1 von $(X_1^1\Phi) = 0$. Sodann stellen wir die dem Involutionssysteme:

$$X_1^1 = a_1, \quad X_2^1 = a_2$$

äquivalente Gleichung mit $n-1$ unabhängigen Variabeln:

$$X_1^2 = \text{Const.}$$

auf und behandeln diese in entsprechender Weise. Man wird, wie man sieht, eben auf meine neue Methode geführt.

Um jetzt das allgemeinste vorgelegte Gleichungssystem in einfachster Weise zu integrieren, bemerken wir, daß jedes Gleichungssystem durch ausführbare Operationen auf ein äquivalentes Involutionssystem reduziert werden kann. Sodann reduzieren wir das gefundene Involutionssystem auf eine einzige äquivalente Gleichung[1]) zwischen einer geringeren Anzahl von Variabeln und behandeln diese nach meiner Methode.

Wir werden also auch in dem allgemeinen Falle auf meine neue Methode als die einfachste geführt. Erinnern wir uns daher, daß diese meine Methode hinsichtlich der Zahl und der Ordnung der notwendigen Integrationsoperationen mit der Mayerschen völlig übereinstimmt, so können wir das folgende merkwürdige Theorem aussprechen:

Theorem XI. *Stellt man als Axiome fest: erstens, daß sich die Integration der allgemeinen Gleichung:*

$$f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

nicht vermöge ausführbarer Operationen leisten läßt, [540
zweitens, daß die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung:

$$f(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$

mit der Bestimmung einer Lösung eines mit f *invariant verknüpften vollständigen Systems zwischen den unabhängigen Variabeln:* $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ *anfangen muß, so läßt sich beweisen, daß sich keine Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen* 1. O. *mit einfacheren Integrationsoperationen begnügen kann, als die Mayersche oder die meinige.*

---

1) Ein q-gliedriges Involutionssystem mit n unabhängigen Variabeln kann, wie ich gezeigt habe, auf eine einzige partielle Differentialgleichung 1. O. mit nur noch $n-q+1$ unabhängigen Variabeln zurückgeführt werden. Umgekehrt läßt sich die Gleichung:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-q+1}, p_1, \ldots, p_{n-q+1}) = a$$

auf ein q-gliedriges Involutionssystem zurückführen. Denn die Integration des Involutionssystems:

$$f = a, \quad p_{n-q+2} = a_{n-q+2}, \ldots, p_n = a_n$$

zieht diejenige der Gleichung: $f = a$ nach sich.

§ 17. Beste Verwertung der zufälligen Umstände.

44. Integriert man eine oder mehrere partielle Differentialgleichungen 1. O. nach der Mayerschen oder nach meiner Methode, so wird man bekanntlich häufig in den Fall kommen, daß man gleichzeitig mehrere Integrale der zur Anwendung kommenden simultanen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen findet. Es stellt sich daher naturgemäß die Frage, wie man das Eintreten eines solchen Umstandes am vorteilhaftesten zur Vereinfachung des zurückstehenden Integrationsgeschäftes verwerten kann. Ich werde zeigen, indem ich mich auf die Axiome und Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen stütze, daß die von mir in dieser Abhandlung gegebenen Theorien das Größtmögliche leisten.

Sei vorgelegt das Involutionssystem:

$$X_1 = a_1, \ldots, X_q = a_q, \tag{1}$$

und seien gefunden eine Anzahl Lösungen: $f_{q+1}, \ldots, f_r$ des Systems:

$$(X_1 f) = 0, \ldots, (X_q f) = 0,$$

die zusammen mit $X_1, \ldots, X_q$ eine Gruppe von der kanonischen Form:

$$X_1, \ldots, X_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q'}, X_{q'+1}, \ldots, X_{q''}, P_{q'+1}, \ldots, P_{q''} \tag{2}$$

bilden. Die Regeln des Paragraphen 3 erlauben, dieses Involutionssystem vermöge der Operationen:

$$2(n-q''),\ 2(n-q'')-2, \ldots, 6, 4, 2 \tag{3}$$

zu erledigen. Ich werde beweisen, daß sich keine Methode mit einfacheren Integrationsoperationen begnügen kann.

Gäbe es in der Tat eine solche bessere Methode, so könnte man diese auf das allgemeine q gliedrige Involutionssystem:

$$f_1 = \alpha_1, \ldots, f_q = \alpha_q \tag{4}$$

zwischen den Variabeln $x_1, \ldots, x_{n-q''+q}, p_1, \ldots, p_{n-q''+q}$ anwenden. Obgleich nämlich die f nur die eben genannten Größen enthalten, so könnte man sie doch als Funktionen von: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ auffassen. [541 Dann aber wären die Größen:

$$f_1, \ldots, f_q, x_{n-q''+q+1}, \ldots, x_{n-q''+q'},$$
$$x_{n-q''+q'+1}, \ldots, x_n, p_{n-q''+q'+1}, \ldots, p_n,$$

die offenbar eine Gruppe von der kanonischen Form (2) bilden, bekannte Lösungen des Systems: $(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0$. Und also könnte das Involutionssystem (4) vermöge der vorausgesetzten besseren Integrationsmethode durch einfachere Operationen als (3) integriert werden. Nun

aber lehrt Theorem XI, daß die Integration des allgemeinen q-gliedrigen Involutionssystems zwischen $n - q'' + q$ Variabeln eben die Operationen (3) verlangt. Daher schließen wir:

Theorem XII. *Die in dieser Abhandlung (§ 3) entwickelten Theorien erlauben, aus bekannten Lösungen des Systems:*

$$(X_1 f) = 0, \ldots, (X_q f) = 0$$

den größtmöglichen Vorteil für die Integration des gegebenen Involutionssystems:

$$X_1 = a_1, \ldots, X_q = a_q$$

zu ziehen.

§ 18. Gleichungen, die die unbekannte Funktion explizite enthalten.

Ich werde jetzt zeigen, daß auch meine Methode zur Integration von Gleichungen, die die unbekannte Funktion explizite enthalten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von Gleichungen von der Form:

$$N(x_1, \ldots, x_n, p_1 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n) = 0,$$

so einfach wie möglich ist.

45. Zunächst entwickeln wir einige Sätze über vollständige Systeme, die gewisse homogene infinitesimale Berührungstransformationen gestatten.

Satz 29. *Eine jede homogene infinitesimale Berührungstransformation besitzt die Form:*

$$\delta x_i = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_i}\delta t, \quad \delta p_i = -\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}\delta t \qquad (i=1,\ldots,n),$$

wo H *eine beliebige Funktion von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ bezeichnet, die hinsichtlich der p homogen von erster Ordnung ist.*

Den Beweis dieses Satzes habe ich bereits in Math. Ann. Bd. VIII, S. 239[1]) gegeben.

Satz 30. *Gestattet ein vollständiges System alle infinitesimalen homogenen Transformationen von der Form* $\mathsf{H}(X_1, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n)$, *und ist dabei irgend eine nichtausgezeichnete Funktion nullter Ordnung der Gruppe: $X_1, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n$, etwa X_2, eine Lösung, so sind sämt-* [542 *liche Funktionen nullter Ordnung der Gruppe Lösungen des Systems.*

Beweis. Unser vollständiges System gestattet die infinitesimalen Transformationen:

$$X_k P_2 \quad \text{und:} \quad P_2^2 : P_i, \quad \text{wo:} \quad i > 1,$$

1) [Hier Abh. I, S. 26f.]

also sind (Satz 22) die Ausdrücke:

$$(X_2, X_k P_2) \quad \text{und:} \quad (X_2, P_2^2 : P_i), \quad \text{wo:} \quad i > 1,$$

oder ausgeführt:

$$X_k \quad \text{und:} \quad P_2 : P_i, \quad \text{wo:} \quad i > 1,$$

Lösungen, womit unser Satz bewiesen ist.

Satz 31. *Besitzt ein vollständiges System, das alle infinitesimalen Transformationen von der Form $\Omega(X_2) P_2$ gestattet, eine Lösung, deren analytischer Ausdruck in den Variabeln: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ jedenfalls eine der beiden Größen: X_2 und P_2 enthält, so ist X_2 eine Lösung des Systems.*

Beweis. Sei Φ eine Lösung, die entweder X_2 oder P_2 enthält. Wir wenden auf Φ die infinitesimale Transformation $\Omega(X_2) P_2$ an und finden so die neue Lösung:

$$(\Phi, \Omega(X_2) P_2) = -\frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \Omega(X_2) + \frac{\partial \Phi}{\partial P_2} \Omega'(X_2) P_2.$$

Geben wir nun der willkürlichen Funktion $\Omega(X_2)$ sukzessive die Werte $1, X_2$ und X_2^2, so erhalten wir die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial X_2} && = L, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial X_2} X_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial P_2} P_2 && = L_1, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial X_2} X_2^2 - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial P_2} P_2 X_2 && = L_2, \end{aligned}$$

die unter allen Umständen X_2 als Funktion der Lösungen L, L_1 und L_2 bestimmen. Folglich ist X_2 selbst eine Lösung, wie behauptet wurde.

Theorem XIII. *Steht ein vollständiges System zu einer Funktion nullter Ordnung X_1 in einer durch homogene Berührungstransformationen invarianten Beziehung, so sind zwei Fälle möglich: Entweder sind sämtliche Funktionen nullter Ordnung die mit X_1 in Involution liegen, Lösungen des Systems, oder aber das betreffende vollständige System hat keine andere Lösung als X_1.*

Beweis. Setzen wir zunächst voraus, daß das betreffende vollständige System jedenfalls eine Lösung besitzt, deren analytischer Ausdruck in den Variabeln: $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ eine der Größen: $X_2, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n$, etwa: X_2 oder P_2 enthält. Berücksichtigen wir sodann, daß [543 unser vollständiges System alle infinitesimalen Transformationen von der Form $\Omega(X_2) P_2$ gestattet, so können wir schließen (Satz 31), daß X_2 und also auch (Satz 30) alle Größen nullter Ordnung der Gruppe: $X_1, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n$ Lösungen desselben sind.

Nehmen wir andererseits an, daß sämtliche Lösungen unseres vollständigen Systems Funktionen von X_1 und P_1 allein seien. Enthielte nun eine solche Lösung die Größe P_1, so würden wir durch Anwendung der homogenen infinitesimalen Transformation $X_1 \Omega(X_2) P_2$ finden, daß auch X_2 eine Lösung wäre. Da indes dies unserer Voraussetzung widerspricht, so kann das betreffende vollständige System keine andere Lösung als X_1 haben.

46. Um jetzt gewisse vorgelegte Gleichungen nullter Ordnung in einfachst möglicher Weise zu integrieren, stellen wir zunächst das äquivalente Involutionssystem auf und reduzieren dieses sodann auf eine einzige Gleichung. Es kommt also alles darauf an, eine vorgelegte Gleichung von der allgemeinen Form:

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, p_1 : p_n, \ldots, p_{n-1}, : p_n) = a_1$$

durch die einfachst möglichen Operationen zu integrieren. Um dieses Problem behandeln zu können, ist es notwendig, den folgenden Forderungssatz aufzustellen:

Dritter Forderungssatz. Die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung:

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, p_1 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n) = a$$

beginnt mit der Bestimmung einer Lösung eines vollständigen Systems mit den unabhängigen Variabeln: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, das zu X_1 in einer durch homogene Berührungstransformationen invarianten Beziehung steht.

Da nun die Integration desjenigen vollständigen Systems, dessen einzige Lösung X_1 ist, eine ausführbare Operation ist, so lehrt Theorem XIII, daß die einfachste Integrationsmethode der Gleichung:

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, p_1 : p_n, \ldots, p_{n-1} : p_n) = a$$

mit der Bestimmung einer von X_1 verschiedenen Lösung des Systems:

$$(X_1 \Phi) = 0, \quad \sum_k p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = 0$$

anfangen muß. Ist eine solche Lösung X_2 gefunden, so stellt man die dem Systeme:

$$X_1 = a_1, \quad X_2 = a_2$$

äquivalente Gleichung mit $n-1$ unabhängigen Variabeln auf, und [544 behandelt diese in entsprechender Weise, und so weiter.

Man wird, wie man sieht, auf meine neue Methode geführt. Dies gibt:

Theorem XIV. *Die einfachste Integrationsmethode eines q-gliedrigen Involutionssystems nullter Ordnung zwischen n Variabeln verlangt die Operationen:* $2(n-q)-1, 2(n-q)-3, \ldots, 5, 3, 1$.

47. Es stellt sich jetzt das Problem, ein vorgelegtes Involutionssystem nullter Ordnung:

$$X_1 = a_1, \ldots, X_q = a_q \tag{5}$$

in möglichst einfacher Weise zu integrieren, wenn man bereits gewisse Lösungen der Gleichungen:

$$(X_1\Phi) = 0, \ldots, (X_q\Phi) = 0$$

kennt.

Setzen wir zunächst voraus, daß die bekannten Lösungen eine homogene Gruppe von der kanonischen Form:

$$X_1, \ldots, X_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q'}, X_{q'+1} \ldots, X_{q''}, P_{q'+1}, \ldots, P_{q''}$$

bilden. Die Regeln des § 5 erlauben in diesem Falle, das Integrationsgeschäft vermöge der Operationen:

$$2n-2q''-1, 2n-2q''-3, \ldots, 5, 3, 1 \tag{6}$$

zu absolvieren. Existierte nun eine bessere Integrationsmethode, so ließe sich beweisen, indem man wie in § 17 räsonnierte, daß auch die Integration des allgemeinen q-gliedrigen Involutionssystems nullter Ordnung zwischen:

$$x_1, \ldots, x_{n-q''+q}, p_1, \ldots, p_{n-q''+q}$$

durch einfachere Operationen als (6) geleistet werden könnte. Nun haben wir aber gefunden, daß das letztbesprochene Problem im allgemeinen die Operationen (6) verlangt. Folglich kann auch das Involutionssystem (5) nicht durch einfachere Operationen erledigt werden.

Setzen wir andererseits voraus, daß die bekannten Lösungen eine homogene Gruppe von der kanonischen Form:

$$X_1, \ldots, X_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q'}, X_{q'+1}, \ldots, X_{q''}, P_{q'+1} \ldots, P_{q''}, P_{q''+1}$$

bilden, und nehmen wir an, daß sich die Integration des Involutionssystems (5) in diesem Falle durch einfachere Operationen als die früher (§ 5) angegebenen:

$$2n-2q''-2, \quad 2n-2q''-4, \ldots, 6, 4, 2 \tag{7}$$

leisten ließe. Ich werde zeigen, daß eine solche Annahme mit den Ergebnissen des vorangehenden Paragraphen im Widerspruche steht.

Sei in der Tat:

$$Y_1 = \alpha_1, \ldots, Y_q = \alpha_q$$

ein allgemeines Involutionssystem (also keines von nullter Ordnung) [545 zwischen den Variabeln:

$$y_1, \ldots, y_{n-1}, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}, \quad \text{wo: } \pi_k = \frac{\partial z}{\partial y_k},$$

und seien:

$$Y_1, \ldots, Y_q, Y_{q+1}, \ldots, Y_{q'}, Y_{q'+1}, \ldots, Y_{q''}, Q_{q'+1}, \ldots, Q_{q''} \tag{8}$$

bekannte kanonische Lösungen der Gleichungen:

$$(Y_1\Phi) = 0, \ldots, (Y_q\Phi) = 0.$$

Ich führe neue Variabeln ein durch die Gleichungen:

$$y_k = x'_k, \quad z = x'_n, \quad \pi_k = -p'_k : p'_n$$

und verwandle hierdurch das vorgelegte Involutionssystem in ein System nullter Ordnung:

$$X'_1 = \alpha_1, \ldots, X'_q = \alpha_q.$$

Indem ich dieselbe Substitution in den Größen (8) ausführe, erhalte ich aus denselben $2q''-q'$ Lösungen nullter Ordnung der Gleichungen:

$$(X'_1\Phi) = 0, \ldots, (X'_q\Phi) = 0, \tag{9}$$

die verbunden mit der evidenten Lösung p'_n eine Gruppe von der kanonischen Form:

$$X_1, \ldots, X_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q'}, X_{q'+1}, \ldots, X_{q''}, P_{q'+1}, \ldots, P_{q'}, P_{q''+1}$$

bilden. Ließen sich nun die fehlenden Lösungen von (9) einfacher als durch die Operationen (7) bestimmen, so hätte man eo ipso eine einfachere Integrationsmethode des Systems: $Y_k = \alpha_k$, als die in § 3 auseinandergesetzte. Da nun aber das System: $Y_k = \alpha_k$ nach den Ergebnissen des § 17 im allgemeinen die Operationen (7) verlangt, so erkennen wir, daß auch das allgemeine System nullter Ordnung:

$$X_1 = \alpha_1, \ldots, X_q = \alpha_q,$$

mit den bekannten Lösungen:

$$X_1, \ldots, X_q, X_{q+1}, \ldots, X_{q'}, X_{q'+1}, \ldots, X_{q''}, P_{q'+1}, \ldots, P_{q'}, P_{q''+1}$$

des Systems: $(X_1\Phi) = 0, \ldots, (X_q\Phi) = 0$ dieselben Operationen verlangt.

Hiermit ist gezeigt, daß die in dieser Abhandlung entwickelten Theorien das Größtmögliche leisten, vorausgesetzt natürlich, daß die aufgestellten Axiome richtig sind.

Will man daher versuchen, noch einfachere Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1. O. zu entdecken, so scheint es naturgemäß, die Frage so zu stellen: Sind die aufgestellten Axiome richtig?

Es ist übrigens möglich, die Axiome 2 und 3 durch noch einfachere zu ersetzen, wie in Note 4 angedeutet wird.

Note 1. [546

Synthetische Betrachtungen über Theorem I.

48. Nachdem ich die neuen Integrationstheorien des ersten Abschnittes durch meine Theorie der infinitesimalen Transformationen gefunden hatte, wie im zweiten Abschnitte gezeigt worden ist, gelang es mir, durch synthetische Betrachtungen die im ersten Abschnitte entwickelte einfache Begründung dieser Theorien aufzufinden. In dieser Note werde ich die einfachen synthetischen Überlegungen, die mich zu Theorem I führten, auseinandersetzen.

Sei vorgelegt eine beliebige Gleichung nullter Ordnung:

$$N_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

und seien: $N_1, \ldots, N_r$ bekannte Lösungen nullter Ordnung der Gleichung: $(N_1 \Phi) = 0$. Ich setze überdies voraus, daß die Gleichungen:

$$N_1 = a_1 = \text{Const.}, \ldots, N_r = a_r = \text{Const.}$$

eine Schar vereinigter Elemente bestimmen, die (Math. Ann. Bd. IX, S. 253)[1]) eine M_{2n-1-r}, oder, wenn ich:

$$2n - 1 - r = q$$

setze, eine M_q bilden. Gebe ich den a_k benachbarte Werte: $a_k + \Delta a_k$, so erhalte ich eine benachbarte Elementmannigfaltigkeit, die M_q' heißen mag. Und es ist einleuchtend, daß sowohl M_q' wie M_q von charakteristischen Streifen der vorgelegten Gleichung erzeugt ist.

Nehme ich nun ein beliebiges auf M_q gelegenes Element, so liegt dasselbe im allgemeinen nicht vereinigt mit den benachbarten Elementen der Mannigfaltigkeit M_q'. Es gibt im allgemeinen ∞^{q-1} Elemente, welche diese Bedingung erfüllen. Dieselben bilden eine Mannigfaltigkeit M_{q-1}, und nach meinen früheren Untersuchungen (Math. Ann. Bd. IX, S. 261, Satz 11)[2]) ist auch diese M_{q-1} von charakteristischen Streifen erzeugt. Lassen wir die Verhältnisse der Größen Δa_k variieren, so erhalten wir im

1) [Hier Abh. II, S. 105.]
2) [A. a. O., S. 114.]

allgemeinen mehrfach unendlich viele Elementmannigfaltigkeiten M_{q-1}, die sämtlich von charakteristischen Streifen erzeugt sind. Zwei solche M_{q-1} haben im allgemeinen ∞^{q-2} Elemente gemein; die entsprechende M_{q-2} ist wiederum von charakteristischen Streifen erzeugt, und so weiter.

Es ließe sich leicht durch synthetische Betrachtungen nachweisen, daß eine fortgesetzte Anwendung der gegebenen Operationen zuletzt die charakteristischen Streifen gibt. Das Obenstehende genügt jedenfalls zum Nachweis des genauen Zusammenhangs zwischen Theorem I meiner jetzigen Arbeit und Satz 11 meiner Abhandlung in Bd. IX dieses Journals.

Note 2. [547

Zur Theorie der Berührungstransformationen.

49. Ich benutze diese Gelegenheit zur Erledigung einer Lücke in der Theorie der Berührungstransformationen, die sich zugleich in der verwandten Theorie der vollständigen Lösungen, so wie auch in der allgemeinen Theorie des Pfaffschen Problems fühlbar gemacht hat.

In allen diesen Theorien handelt es sich bekanntlich darum, eine Gleichung von der Form:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = p_1' dx_1' + \cdots + p_n' dx_n' \tag{1}$$

in allgemeinster Weise zu befriedigen, dabei vorausgesetzt, daß $x_1', \ldots, x_n'$, $p_1', \ldots, p_n'$ als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, die selbst unabhängige Variabeln sind, aufgefaßt werden.

In früheren Arbeiten (Math. Ann. Bd. VIII, S. 238)[1]) habe ich gezeigt, daß die x_i', p_i' die folgenden Relationen erfüllen:

$$(x_i' x_k') = (x_i' p_k') = (p_i' p_k') = 0, \quad (p_i' x_i') = 1,$$

$$\sum_k p_k \frac{\partial x_i'}{\partial p_k} = 0, \quad \sum_k p_k \frac{\partial p_i'}{\partial p_k} = p_i',$$

daß ferner Größen x_i', p_i', die diese Gleichungen befriedigen, die Bedingungsgleichung (1) erfüllen.

Schon längst kannte man eine andere allgemeine Methode zur Auffindung von Größensystemen x_i', p_i', welche die Gleichung (1) befriedigen. Man nehme in der Tat q beliebige Relationen zwischen den x_k und x_i' an:

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') = 0, \ldots, \Omega_q = 0 \tag{2}$$

und setze sodann:

$$p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}, \quad p_k' = -\sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k'}. \tag{3}$$

1) [Hier Abh. I, S. 26.]

Alsdann folgt durch Differentiation von (2):

$$\sum_{k,i} \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_{k,i} \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x'_k} dx'_k = 0$$

und durch Benutzung von (3):

$$\sum_k p_k dx_k - \sum_k p'_k dx'_k = 0.$$

Bestimmen daher die Gleichungen (2) und (3) die Größen x'_i, p'_i als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, so befriedigen die hervorgehenden Werte x'_i, p'_i die Bedingungsgleichung (1).

Es ist aber denkbar, daß die Gleichungen (2) und (3) die x'_i, p'_i nicht als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ bestimmen, sondern gewisse Relationen von der Form:

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$ [548

nach sich ziehen. Nach den obenstehenden Entwickelungen ist auch in diesem Falle die Gleichung (1) eine Konsequenz von (2) und (3).

Dieser Ausnahmefall, der früher kaum berücksichtigt worden ist, soll in dieser Note eingehend untersucht werden. Wir beweisen zunächst, daß sich aus (2) und (3) immer ebensoviele Relationen zwischen den Größen x, p, wie zwischen den Größen x', p' herleiten lassen.

50. Um zu entscheiden, wie viele Relationen zwischen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ sich aus den Gleichungen:

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \ldots, \Omega_q = 0,$$

$$p_k = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_k} + \cdots + \lambda_{q-1} \frac{\partial \Omega_{q-1}}{\partial x_k} + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_k} = \frac{\partial W}{\partial x_k} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

durch Elimination der Größen $\lambda_1, \ldots, \lambda_q, x'_1, \ldots, x'_n$ herleiten lassen, hat man nach einer bekannten Regel die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x'_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x'_1} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x'_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x'_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x'_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x'_n} & \frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x'_n} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x'_n} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x'_n} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x'_n} \end{vmatrix}$$

zu bilden. Verschwindet dieselbe nebst allen ihren Unterdeterminanten erster, zweiter, ..., $(m-1)$-ter Ordnung, während es jedenfalls eine nicht verschwindende Unterdeterminante m-ter Ordnung gibt, so bestimmen

die obenstehenden Gleichungen m, und auch nicht mehr als m Relationen zwischen: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$.

Wünscht man andererseits zu wissen, wie viele Relationen zwischen den x'_i, p'_i sich aus den Gleichungen:

$$\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_q = 0, \quad p'_k = -\sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x'_k} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

herleiten lassen, so muß man ganz analoge Betrachtungen anstellen. Man bildet die mit der obenstehenden analoge Determinante und untersucht, ob sie und ihre Unterdeterminanten verschwinden. Nun aber ist die neue Determinante mit der alten identisch, nur mit dem formalen Unterschiede, daß die Reihen und Kolonnen vertauscht sind. Folglich gibt es m und auch nicht mehr Relationen zwischen $x'_1, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_n$. [549
Dies ergibt den:

Satz 32. *Ist es möglich, aus den Gleichungen:*

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \ldots, \Omega_q = 0,$$

$$p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}, \quad p'_k = -\sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x'_k} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

[gerade] m Relationen zwischen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ herzuleiten, so ziehen diese Gleichungen immer auch genau dieselbe Anzahl Relationen zwischen $x'_1, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_n$ nach sich.

51. Die Gleichungen (2) und (3) ziehen nach dem obenstehenden immer die Relation:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = p'_1 dx'_1 + \cdots + p'_n dx'_n$$

nach sich. Fassen wir daher für einen Augenblick $x'_1, \ldots, x'_n$ als Parameter auf, so wird durch diese Gleichungen:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0.$$

Dies können wir so aussprechen, daß die Gleichungen:

$$\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_q = 0, \quad p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

durch Elimination der λ_i eine Anzahl Relationen zwischen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ und den Parametern $x'_1, \ldots, x'_n$ ergeben:

$$\Theta_k(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, x'_1, \ldots, x'_n) = 0,$$

welche die Gleichung: $\Sigma p_k dx_k = 0$ identisch erfüllen. Eliminiert man sodann die x'_i, so lassen sich (Math. Ann. Bd. IX, S. 277)[1] die hervor-

1) [Hier Abh. II, S. 131 f.]

gehenden m Relationen zwischen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ auf die Form eines m-gliedrigen Involutionssystems bringen.

Ich werde der Kürze wegen voraussetzen, daß sich dieses Involutionssystem nach m von den Größen p, etwa nach $p_1, \ldots, p_m$ auflösen läßt, sodaß es die Form:

$$(4) \qquad p_1 - h_1 = 0, \ldots, p_m - h_m = 0$$

annimmt, wo:

$$(p_i - h_i, p_k - h_k) = 0$$

ist.

In ganz entsprechender Weise erkennt man, daß sich die m zwischen $x'_1, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_n$ bestehenden Relationen auf die Form eines Involutionssystems, etwa:

$$p'_1 - h'_1 = 0, \ldots, p'_m - h'_m = 0, \quad \text{wo:} \ (p'_i - h'_i, p'_k - h'_k) = 0$$

bringen lassen.

In die früher gefundene Relation: [550

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = p'_1 dx'_1 + \cdots + p'_n dx'_n$$

substituieren wir statt: $p_1, \ldots, p_m, p'_1, \ldots, p'_m$ die Werte dieser Größen, nämlich: $h_1, \ldots, h_m, h'_1, \ldots, h'_m$. Dies gibt:

$$\sum_k^{1\ldots m} h_k dx_k + \sum_k^{m+1\ldots n} p_k dx_k = \sum_k^{1\ldots m} h'_k dx'_k + \sum_k^{m+1\ldots n} p'_k dx'_k,$$

in welcher Gleichung sowohl die linke, wie die rechte Seite eine $(n-m)$-gliedrige Form annehmen kann.

Da nämlich (4) ein Involutionssystem ist, so gibt es solche Funktionen: $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-m}, F_1, \ldots, F_{n-m}$ von $x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n$, daß:

$$(5) \qquad \sum_k^{1\ldots m} h_k dx_k + \sum_k^{m+1\ldots n} p_k dx_k = \Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-m} dF_{n-m}$$

wird. Ebenso seien $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_{n-m}, F'_1, \ldots, F'_{n-m}$ Funktionen von $x'_1, \ldots, x'_n, p'_{m+1}, \ldots, p'_n$, die:

$$(6) \qquad \sum_k^{1\ldots m} h'_k dx'_k + \sum_k^{m+1\ldots n} p'_k dx'_k = \Phi'_1 dF'_1 + \cdots + \Phi'_{n-m} dF'_{n-m}$$

ergeben. Hierdurch kommt:

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-m} dF_{n-m} = \Phi'_1 dF'_1 + \cdots + \Phi'_{n-m} dF'_{n-m}.$$

Läßt man hier die Φ_i, F_i ein bestimmtes Größensystem, das (5) befriedigt, bedeuten, so kann man immer unter den Größensystemen Φ'_i, F'_i, die (6) befriedigen, ein solches wählen, daß:

$$\Phi_i = \Phi'_i, \quad F_i = F'_i \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n-m)}$$

wird.

Aus den Gleichungen (2), (3) lassen sich daher jedenfalls $2n$ unabhängige Relationen zwischen: $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ und $x'_1, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_n$ herleiten, nämlich:

$$p_k - h_k = 0, \quad p'_k - h'_k = 0, \quad \Phi_i = \Phi'_i, \quad F_i = F'_i.$$

Es fragt sich, ob man noch mehr solche Relationen finden kann.

Um diese Frage zu beantworten, berücksichtigen wir, daß $\Omega_1, \ldots, \Omega_q$ unabhängige Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ sind, und daß sich daher die Gleichungen:

$$p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}, \quad p'_k = -\sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x'_k} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

hinsichtlich $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ auflösen lassen. Hieraus schließen wir, daß diese Gleichungen verbunden mit: $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_q = 0$ nicht mehr als $2n$ von den λ_i freie Relationen ergeben können.

52. Berücksichtigen wir endlich, daß die Größen Φ_i und F_i wegen [551
(5) die Relationen:

$$(p_i - h_i, \Phi_k) = 0, \quad (p_i - h_i, F_k) = 0,$$
$$(\Phi_i \Phi_k) = (\Phi_i F_k) = (F_i F_k) = 0, \quad (\Phi_k F_k) = 1$$

erfüllen und dabei hinsichtlich der p homogen, beziehungsweise von erster und nullter Ordnung sind, so können wir das folgende Theorem aussprechen:

Theorem XV. *Aus den Gleichungen:*

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \ldots, \Omega_q = 0,$$
$$p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}, \quad p'_k = -\sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x'_k} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

lassen sich immer $2n$ und niemals mehr Relationen zwischen den Größen: $x_1, \ldots, p_n, x'_1, \ldots, p'_n$ ableiten. Können diese Relationen hinsichtlich $x'_1, \ldots, p'_n$, und demzufolge auch hinsichtlich $x_1, \ldots, p_n$, aufgelöst werden, so bestimmen sie eine gewöhnliche Berührungstransformation. Lassen sich dagegen aus ihnen m Relationen zwischen $x_1, \ldots, p_n$ herleiten, so sind auch $x'_1, \ldots, p'_n$ durch m Relationen verbunden. Diese beiden m-glied-

rigen Gleichungssysteme sind, aufgefaßt als partielle Differentialgleichungen, m-gliedrige Involutionssysteme. Seien:

$$p_1 = h_1, \ldots, p_m = h_m \quad \textit{und:} \quad p_1' = h_1', \ldots, p_m' = h_m'$$

diese Involutionssysteme. Die fehlenden $2n - 2m$ Relationen zwischen $x_1, \ldots, p_n, x_1', \ldots, p_n'$ können dann die Form erhalten:

$$F_i = F_i', \quad \Phi_i = \Phi_i', \qquad (i = 1, \ldots, n - m),$$

wo F_i und Φ_i Funktionen, beziehungsweise nullter und erster Ordnung von $x_1, \ldots, p_n$, welche die Gleichungen:

$$(p_i - h_i, F_k) = 0, \quad (p_i - h_i, \Phi_k) = 0,$$

$$(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i F_i) = 1$$

erfüllen, wo ferner F_i' und Φ_i' Funktionen von $x_1', \ldots, p_n'$ sind, welche die entsprechenden Relationen erfüllen.

Dieses Theorem bleibt mit den notwendigen Änderungen noch bestehen, wenn die beiden Involutionssysteme, welche die zwischen $x_1, \ldots, p_n$ und die zwischen $x_1', \ldots, p_n'$ bestehenden Relationen ausdrücken, sich nicht auf die spezielle Form: $p_k = h_k$ und: $p_k' = h_k'$ bringen lassen.

Note 3.

Zur Theorie des Integrabilitätsfaktors.

53. Ich werde zunächst Theorem V durch mehrere möglichst einfache Beispiele illustrieren.

Sei: [552

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

die allgemeine homogene Differentialgleichung 1. O. Ziehe ich eine Gerade durch den Anfangspunkt und konstruiere zu jeder Integralkurve die Tangente in ihrem Schnittpunkte mit dieser Geraden, so sind alle diese Tangenten parallel. Hieraus ließe sich mit voller Stringenz schließen, daß jede Integralkurve durch eine beliebige Ähnlichkeitstransformation, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfang ist:

$$x' = ax, \quad y' = ay,$$

insbesondere also durch die infinitesimale Transformation:

$$\delta x = x\delta t, \quad \delta y = y\delta t$$

in eine neue Integralkurve übergeführt wird. Man verifiziert übrigens, daß unsere Differentialgleichung die betreffende infinitesimale Transformation gestattet, indem man in:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X}{X\eta - Y\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y}{X\eta - Y\xi}\right)$$

die Substitution:

$$X = 1, \quad Y = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad \xi = x, \quad \eta = y$$

macht und sich überzeugt, daß der hervorgehende Ausdruck identisch verschwindet. Hiermit ist der folgende, übrigens längst bekannte Satz bewiesen:

Satz. *Ist die Gleichung: $Y\,dx - X\,dy = 0$ homogen, so ist $1 : (Xy - Yx)$ ein Integrabilitätsfaktor.*

Als zweites Beispiel betrachte ich die lineare Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0. \tag{1}$$

Auch jetzt ist es leicht, eine Transformation, und zwar zunächst eine endliche anzugeben, welche jede Integralkurve in eine solche transformiert. Es sei nämlich z eine Funktion, welche die reduzierte Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + Xy = 0$$

befriedigt, das heißt, es sei:

$$z = e^{-\int X dx}.$$

Ist dann $y = y_1$ irgend eine Lösung von (1), so ist bekanntlich auch: $y = y_1 + cz$, wo c eine beliebige Konstante bezeichnet, eine Lösung. Dies kommt darauf hinaus, daß die Transformation:

$$y' = y + cz = y + ce^{-\int X dx}, \quad x' = x$$

jede Integralkurve von (1) in eine solche überführt. Wählen wir insbe- [553
sondere c infinitesimal, so erhalten wir eine infinitesimale Transformation:

$$\delta y = e^{-\int X dx}\delta t, \quad \delta x = 0,$$

welche (1) invariant läßt. Folglich ist, wenn wir setzen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -(Xy + X_1) \\ 0 & e^{-\int X dx} \end{vmatrix} = e^{-\int X dx},$$

die Größe $1 : \Delta$, das heißt $e^{\int X dx}$, ein Integrabilitätsfaktor. Also:

Die lineare Gleichung: $dy + (Xy + X_1)dx = 0$ wird durch Multiplikation mit $e^{\int X dx}$ ein vollständiges Differential.

Sei endlich: $X dy - Y dx = 0$ eine vorgelegte Differentialgleichung, deren Integralkurven durch eine infinitesimale Rotation um den Anfangspunkt:

$$\delta x = y\delta t, \quad \delta y = -x\delta t$$

unter einander vertauscht werden. Alsdann ist die Determinante Δ gleich: $Xx + Yy$. Dies gibt:

Gestattet die Gleichung: $X dy - Y dx = 0$ eine infinitesimale Rotation um den Anfangspunkt, so ist $1 : (Xx + Yy)$ ein Integrabilitätsfaktor.

Dieser Satz erlaubt zum Beispiel, die Krümmungslinien einer Schraubenfläche zu bestimmen. Wählen wir nämlich die Schraubenachse zur z-Achse, und schreiben die Gleichung der Fläche in der Form:

$$z = f(x, y),$$

so definiert die bekannte Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$[pqt - (1+q^2)s]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\frac{dy}{dx} + [(1+p^2)s - pqr] = 0$$

die Projektionen dieser Kurven auf einer zur Schraubenachse senkrechten Ebene. Wir führen die infinitesimale Schraubenbewegung aus, welche die Fläche in sich verschiebt. Hierbei werden die Krümmungslinien und also auch die Projektionen dieser Kurven unter einander vertauscht, und zwar werden die Projektionen durch eine infinitesimale Rotation transformiert. Bringen wir daher die obenstehende Differentialgleichung auf die Form: $X dy - Y dx = 0$, so ist $1 : (Xx + Yy)$ ein Integrabilitätsfaktor.

In ganz entsprechender Weise findet man die Krümmungslinien, oder die Haupttangentenkurven auf einer jeden Fläche, die eine beliebige lineare Transformation, welche den imaginären Kugelkreis invariant läßt, gestattet.

Hier mag auch die Bemerkung ihren Platz finden, daß unsere Be- [554
trachtungen sich ohne weiteres auf infinitesimale Berührungstransformationen ausdehnen lassen. Gestattet nämlich die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = Y : X$$

die infinitesimale Berührungstransformation:

$$\delta x = \xi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\delta t, \quad \delta y = \eta\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\delta t, \quad \delta\frac{dy}{dx} = \zeta\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\delta t,$$

so ist klar, daß sie auch die infinitesimale Punkttransformation:

$$\delta x = \xi(x, y, f)\delta t, \quad \delta y = \eta(x, y, f)\delta t$$

gestattet; und folglich ist $1 : (X\eta - Y\xi)$ ein Integrabilitätsfaktor.[1])

Geometrische Interpretation des Integrabilitätsfaktors.

54. Sei: $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ eine infinitesimale Transformation, welche: $Y dx - X dy = 0$ in sich selbst überführt.

Ich wähle einen beliebigen Punkt x, y, ziehe die Tangente an die hindurchgehende Integralkurve und trage vom Punkte x, y aus auf derselben die Länge $\sqrt{X^2 + Y^2}$ ab. Die Projektionen dieser Linie längs der x- und y-Achse sind beziehungsweise X und Y. Ich ziehe ferner die Gerade, nach welcher unser Punkt sich vermöge der infinitesimalen Transformation bewegt, und trage auf derselben die Länge $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ mit den Projektionen ξ und η ab. Die beiden besprochenen Geraden bestimmen ein Parallelogramm, dessen Flächenraum bekanntlich gleich: $X\eta - Y\xi$, das heißt, gleich dem inversen Integrabilitätsfaktor ist. Zuweilen ist es noch bequemer, anstatt dieses Parallelogramms das äquivalente Rechteck zu betrachten, dessen Seiten beziehungsweise $\sqrt{X^2 + Y^2}$ und die Projektion ΔN der Geraden $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ auf die Normale sind. Also:

Der Integrabilitätsfaktor der Gleichung: $X dy - Y dx = 0$ ist gleich dem reziproken Inhalte eines Rechteckes, dessen eine Seite die Länge $\sqrt{X^2 + Y^2}$ auf der Tangente ist, während die andere der Distanz im betreffenden Punkte x, y zwischen der hindurchgehenden Integralkurve und einer benachbarten proportional ist.[2])

Sind zum Beispiel die Integralkurven Parallelkurven, so ist die genannte Distanz konstant, und der Integrabilitätsfaktor somit gleich:

$$1 : \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

55. Die gefundene geometrische Interpretation des Integrabilitäts- [555
faktors erlaubt, eine jede Gleichung:

$$X dy - Y dx = 0,$$

deren Integralkurven isotherme Kurven sind, zu integrieren.

Nach unserer Voraussetzung ist es nämlich möglich, die Ebene x, y in der Weise mit konsekutiven Integralkurven und Trajektorien zu be-

1) Es ist klar, daß sich diese Bemerkung auf beliebige totale Gleichungen: $X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n = 0$ ausdehnen läßt.

2) Der Jacobische Multiplikator einer linearen partiellen Differentialgleichung gestattet eine ähnliche Interpretation.

decken, daß für einen beliebig gewählten Punkt die Distanz zwischen zwei benachbarten Integralkurven gleich der Distanz zwischen den beiden benachbarten Trajektorien ist. Bringt man daher die Differentialgleichung der Trajektorien auf die Form:

$$Xdx + Ydy = 0,$$

so haben unsere beiden Differentialgleichungen einen gemeinsamen Integrabilitätsfaktor M, den man folgendermaßen findet. M genügt den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(MY)}{\partial x} - \frac{\partial(MX)}{\partial y} = 0,$$

oder ausgeführt:

$$X\frac{\partial M}{\partial x} + Y\frac{\partial M}{\partial y} + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0,$$
$$Y\frac{\partial M}{\partial x} - X\frac{\partial M}{\partial y} + M\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0,$$

woraus:

$$\frac{\partial}{\partial x}\log M = \frac{-X\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - Y\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)}{X^2 + Y^2} = A,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\log M = \frac{-Y\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + X\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)}{X^2 + Y^2} = B,$$

und:

$$M = e^{\int(A\,dx + B\,dy)}.$$

Hiermit ist ein Integrabilitätsfaktor durch eine Quadratur gefunden. Also:

Weiß man, daß die Integralkurven einer vorgelegten Gleichung: $Xdy - Ydx = 0$ isotherme Kurven in der x, y-Ebene sind, so findet man einen Integrabilitätsfaktor vermöge einer Quadratur; eine zweite Quadratur gibt die Integralkurven selbst.

Sind zwei Gleichungen:

$$Xdy - Ydx = 0, \quad X'dy - Y'dx = 0$$

vorgelegt, die zwei Integrabilitätsfaktoren M und M' besitzen, deren Verhältnis eine bekannte Funktion von x und y ist:

$$M' : M = \varphi(x, y),$$ [556

so verlangt die Bestimmung von M' und M nur eine Quadratur. Es gelten nämlich die beiden Relationen:

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(M\varphi X')}{\partial x} + \frac{\partial(M\varphi Y')}{\partial y} = 0,$$

welche die Differentialquotienten von $\log M$ hinsichtlich x und y bestimmen. Eine jede der vorgelegten Differentialgleichungen läßt sich daher durch zwei Quadraturen erledigen.

Diese Bemerkung erlaubt, wie ich nicht näher auszuführen brauche, eine Schar isothermer Kurven, die auf irgend einer Fläche liegen und durch eine Gleichung:

$$Xdy - Ydx = 0$$

definiert sind, vermöge zweier konsekutiver Quadraturen zu bestimmen. Schneidet man zum Beispiel eine beliebige Minimalfläche durch parallele Ebenen, so bilden die Schnittkurven, und also auch die Trajektorien derselben, eine Schar isothermer Kurven. Daher können die letzten Kurven durch zwei Quadraturen bestimmt werden.

Man kann ferner allein aus dem Umstande, daß die Krümmungslinien oder Haupttangentenkurven einer Minimalfläche isotherme Kurven sind, eine Methode zu ihrer Bestimmung herleiten. Hierbei ist es nicht notwendig, wie man sonst pflegt, zuerst die auf der Fläche gelegenen Kurven, deren Länge gleich Null ist, zu bestimmen.

Note 4.

56. Ich werde andeuten, wie man die durch meinen zweiten Forderungssatz festgestellten Voraussetzungen durch noch allgemeinere ersetzen kann. Dabei beschränke ich mich der Kürze wegen auf Gleichungen von der Form:

(1) $$f(z, x, y, p, q) = 0.$$

Ich setze wie gewöhnlich:

(2) $$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

und bilde die Gleichungen:

(3) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}s = 0,$$

(4) $$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \frac{\partial f}{\partial p}s + \frac{\partial f}{\partial q}t = 0.$$

Ich suche das allgemeinste vollständige System zwischen den unabhängigen Variabeln: z, x, y, p, q, r, s, t, welches jede Berührungstransformation gestattet, die (1) und infolgedessen (3) und (4) invariant läßt.

Ich habe gefunden, was ich hier nicht näher ausführe, daß es nur ein [557 solches System gibt, dessen Integration keine ausführbare Operation ist, diejenige Gleichung nämlich, die die charakteristischen Streifen bestimmt.[1]) Hätte man die Differentialquotienten dritter, vierter, ..., m-ter Ordnung von z mitgenommen, so würde man ebenso nur diejenige Gleichung, die die charakteristischen Streifen bestimmt, erhalten haben.

Für Gleichungen mit n unabhängigen Variabeln gilt ein entsprechender Satz.

Christiania, 15. Oktober 1876.

IIIa.

Selbstanzeige von III.

Repertorium Bd. II, S. 67–69. Leipzig 1879.

Die Selbstanzeige bezieht sich zugleich auf die drei schon früher erschienenen Abhandlungen XVIII, XIV und XVI von Bd. III dieser Ausgabe.

Die letzte Abhandlung [hier Abh. III], deren Resultate sich [67
größtenteils schon in den drei ersten Arbeiten finden, zerfällt in drei Abschnitte.

Sei: $f_1 = a_1, \ldots, f_q = a_q$ ein vorgelegtes Involutionssystem in den Variabeln $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, und seien $f_{q+1}, \ldots, f_r$ bekannte Lösungen von:

$$(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0. \tag{1}$$

Es gibt einen sehr allgemeinen Fall, dessen Grenzfälle allein früher bekannt waren, in dem man die fehlenden Lösungen des Systems (1) durch ausführbare Operationen bestimmen kann.

Gibt es in der Tat Funktionen $F_1, \ldots, F_r, \Omega$, welche die Gleichung:

$$\Sigma p\,dx = F_1 df_1 + \cdots + F_q df_q + \cdots + F_r df_r + d\Omega \tag{2}$$

befriedigen, so sind $F_{q+1}, \ldots, F_r$ die fehlenden Lösungen von (1), während Ω die Gleichungen:

$$[f_1, z - \Omega] = 0, \ldots, [f_q, z - \Omega] = 0$$

erfüllt. Besteht überhaupt eine Relation von der Form (2), so verlangt die Bestimmung von Ω und den F_k nur eine einzige Quadratur zusammen mit gewissen Differentiationen. Hiermit ist die Integration des vorgelegten Involutionssystems geleistet.

---

1) Indem ich die schönen Untersuchungen von Bäcklund in diesem Journale (Bd. IX) berücksichtige, kann ich sagen, daß die Gleichung der charakteristischen Streifen das einzige vollständige System ist, das eine jede Transformation zwischen z, x, y, p, q, r, s, t gestattet, die (1) und (2) invariant läßt.

Setzt man $q = 1$, $r = 2n - 2$, so erhält man Jacobis Bestimmung [68
der letzten Lösung der Gleichung: $(f_1 f) = 0$ vermöge des letzten Multiplikators, wobei jedoch zu bemerken ist, daß die neue Theorie in diesem Falle eine Quadratur erspart.

Setzt man andererseits $r = n$ und setzt außerdem voraus, daß $f_1, \ldots, f_n$ hinsichtlich $p_1, \ldots, p_n$ unabhängig sind, so erhält man einen zweiten bekannten Jacobischen Satz.

Ist $f_1, \ldots, f_s$ eine vorgelegte Gruppe mit m unbekannten ausgezeichneten Funktionen $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, so ist es immer möglich, ein vollständiges System in den Variabeln x, p aufzustellen, dessen Lösungen zugleich die Lösungen des Systems:

$$(\Omega_1 F) = 0, \ldots, (\Omega_m F) = 0$$

sind.

Durch Verbindung dieser beiden neuen Theorien erhält man das folgende fundamentale Theorem:

Sei: $f_1 = a_1, \ldots, f_q = a_q$ ein vorgelegtes Involutionssystem, und seien $f_{q+1}, \ldots, f_s$ bekannte Lösungen des Systems: $(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0$. Enthält nun die Gruppe: $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_s$ außer $f_1, \ldots, f_q$ noch m ausgezeichnete Funktionen, so verlangt die Integration des vorgelegten Involutionssystems im ungünstigsten Falle nur noch die Operationen:

$$2n - q - m - s,\ 2n - q - m - s - 2, \ldots, 6, 4, 2.$$

Hieraus folgt insbesondere, daß die Bestimmung von $2l + 1$ fehlenden Lösungen des Systems: $(f_1 f) = 0, \ldots, (f_q f) = 0$ nicht schwieriger als diejenige von $2l$ fehlenden Lösungen ist. Setzt man in diesem Korollar $l = 0$, so erhält man wiederum den Jacobischen Satz, daß die Bestimmung der letzten Lösung eine ausführbare Operation ist.

Diese Integrationstheorien dehnen sich mit gewissen Änderungen auf solche Gleichungen aus, welche die unbekannte Funktion explizite enthalten.

Der zweite Abschnitt behandelt die Integration von vollständigen Systemen. Dabei wird vorausgesetzt, daß gewisse infinitesimale Transformationen, welche das betreffende vollständige System invariant lassen, von vornherein bekannt sind. Es wird gezeigt, daß dieser Umstand immer eine wesentliche Vereinfachung in dem Integrationsgeschäft bewirkt. Unter den neuen Theorien, die zu diesem Zwecke entwickelt werden, möge hier nur die Ausdehnung des Jacobischen Multiplikatorbegriffs auf vollständige Systeme erwähnt werden.

Der dritte Abschnitt stellt die Frage, ob es denkbar ist, daß die [69 jetzigen Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung künftig einmal durch noch einfachere ersetzt werden.

Um diese Frage zu präzisieren, wird zunächst festgestellt, daß man bei der Vergleichung zweier Integrationsoperationen nur auf die Integrationsoperationen, dagegen nicht auf die sogenannten ausführbaren Operationen (das heißt: Differentiationen, Quadraturen und Eliminationsoperationen) Rücksicht nehmen soll. Darnach werden die beiden folgenden Axiome aufgestellt:

1. Die Integration der allgemeinen Gleichung:

$$f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

läßt sich nicht durch ausführbare Operationen leisten.

2. Die einfachste Integrationsmethode der Gleichung:

$$f(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$

beginnt, wie alle bisherigen Methoden, mit der Bestimmung einer Lösung eines vollständigen Systems, das in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung zu: $f = a$ steht.

Indem diese beiden Axiome als richtig vorausgesetzt werden, wird bewiesen, daß die vom Verfasser gegebenen Integrationstheorien, die bekanntlich teilweise mit gleichzeitigen Methoden Mayers äquivalent sind, das Größtmögliche leisten.

Christiania.

Sophus Lie.

IV.

Zur Theorie der Berührungstransformationen.

Leipz. Abh. Bd. XIV, Nr. XII, S. 537—562. Das Manuskript übergeben am 7. 8. 1888, der Abdruck vollendet am 30. 9. 1888.

Die nachstehende Abhandlung behandelt die Theorie der par- [537 tiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und die Theorie der Berührungstransformationen. Ich versuche, die Grundbegriffe und die wichtigsten Sätze dieser verwandten Theorien durch möglichst durchsichtige Betrachtungen abzuleiten. Darnach gebe ich eine kurzgefaßte Zusammenstellung von einigen allgemeinen Resultaten, zu denen mich meine Untersuchungen über Gruppen von Berührungstransformationen geführt haben.

§ 1.

1. Sind $z, x_1, \ldots, x_n$ Cartesische Punktkoordinaten in einem $(n+1)$-fach ausgedehnten Raume R_{n+1}, so kann die Gleichung einer durch den Punkt $z, x_1, \ldots, x_n$ gehenden n-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit E_n die Form:

$$(1) \qquad z' - z - p_1(x_1' - x_1) - \cdots - p_n(x_n' - x_n) = 0$$

erhalten; hier sind $z', x_1', \ldots, x_n'$ Koordinaten eines laufenden Punktes unserer ebenen Mannigfaltigkeit E_n. Bezeichnen wir daher den Inbegriff eines Punktes $z, x_1, \ldots, x_n$ und einer hindurchgehenden ebenen Mannigfaltigkeit E_n als ein Element des Raumes R_{n+1}, so können wir, wie in früheren Untersuchungen[1]), die $2n+1$ Größen:

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$$

als Koordinaten eines Elements des Raumes R_{n+1} betrachten.

Für den Begriff Element hat später Clebsch[2]) die Bezeichnung Element des identischen Konnexes, und Herr Lindemann[3]) die

1) Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 1871 und 3. Mai 1872. Vgl. auch Göttinger Nachrichten Juni und Oktober 1872, sowie Math. Annalen Bd. V, Bd. IX [d. Ausg. Bd. I, Abh. XI, XII und Bd. III, Abh. I; Bd. III, Abh. III und IV; Bd. II, Abh. I; Bd. IV, Abh. II].

2) Clebsch, Göttinger Nachrichten, 18. September 1872.

3) Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann.

Bezeichnung Hauptelement angewandt. In der Theorie der Kon- [538
nexe sind möglicherweise diese schwerfälligeren Bezeichnungen berechtigt. Dagegen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und der Berührungstransformationen ist meine ursprüngliche einfachere Terminologie vorzuziehen; sie ist auch längst von mehreren Verfassern, insbesondere von den Herren Mansion, Darboux, Bäcklund und Jordan adoptiert worden. Jedenfalls hat die Lehre von den Differentialgleichungen durch explizite Einführung des Begriffes Element an Einfachheit gewonnen.

2. Wählen wir eine ganz beliebige Relation zwischen $z, x_1, \ldots, x_n$:

$$z = F(x_1, \ldots, x_n)$$

und fügen zu derselben die n Gleichungen:

$$p_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \qquad (k=1,\ldots,n)$$

hinzu, so besitzt das Gleichungssystem:

$$z = F,\; p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial F}{\partial x_n} \tag{2}$$

die Eigenschaft, die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0 \tag{3}$$

zu befriedigen.

Wir verstehen dies so, daß die Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ für jedes Wertsystem z, x, p, dz, dx, dp besteht, welches die Gleichungen (2) und die aus diesen durch einmalige Differentiation entstehenden Gleichungen erfüllt.

Es gibt indes noch weitere Gleichungssysteme[1]):

$$\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$$

in den Veränderlichen z, x, p, welche in dem erklärten Sinne die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllen. Dies ist in der Tat der Fall mit jedem Gleichungssysteme von der Form:

1) Wenn wir im folgenden von einem Gleichungssysteme: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$ in gewissen Veränderlichen $y_1, \ldots, y_n$ reden, so setzen wir immer voraus, daß dasselbe in einer solchen Form vorliegt, daß nicht alle m-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}\right]$$

vermöge: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$ gleich Null werden.

$$\left\{\begin{aligned} z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q &= \Omega(p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n), \\ x_1 = -\frac{\partial \Omega}{\partial p_1}, \ldots, x_q &= -\frac{\partial \Omega}{\partial p_q}, \\ p_{q+1} = \frac{\partial \Omega}{\partial x_{q+1}}, \ldots, p_n &= \frac{\partial \Omega}{\partial x_n}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

welche unter den Zahlen $0, 1, \ldots, n$ die Zahl q auch sein mag. Man [539
beweist leicht[1]), daß jedes Gleichungssystem: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$, welches die Pfaffsche Gleichung (3) erfüllt, $n+1$ Gleichungen von der Form (4) umfaßt; zu diesen können aber weitere Gleichungen hinzutreten, welche gar keiner Beschränkung unterworfen sind.

3. Das Problem, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

zu integrieren, kommt darauf hinaus, alle Gleichungssysteme:

$$z - F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \qquad (k=1,\ldots,n)$$

zu finden, welche mit der Gleichung: $\Phi = 0$ verträglich sind. Es ist vorteilhaft, dieses Problem durch das allgemeinere[2]) zu ersetzen:

Alle mit der Gleichung: $\Phi = 0$ verträglichen Gleichungssysteme: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ zu finden, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllen.

Diese letzte Fragestellung gibt, wie auch bei dieser Gelegenheit hervorgehoben werden mag, der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eine Allgemeinheit und Einfachheit, welche der Jacobischen Theorie fehlt.

Sagen wir, daß ein Gleichungssystem: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$, welches die Pfaffsche Gleichung (3) erfüllt, eine Elementmannigfaltigkeit oder kurz eine Element-M_n bestimmt, so können wir das Integrationsproblem einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung: $\Phi = 0$ auch so aussprechen: es sollen alle Element-M_n bestimmt werden, deren Gleichungen mit: $\Phi = 0$ verträglich sind, kurz, welche: $\Phi = 0$ erfüllen.

1) Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, November 1874; Math. Ann. Bd. IX, S. 250 [d. Ausg. Bd. III, Abh. XII; Bd. IV, Abh. II, S. 102]. In Graßmanns Ausdehnungslehre (1861), S. 352 findet sich ein Satz, der scheinbar meinen soeben besprochenen Satz als speziellen Fall umfaßt. Dabei ist aber zu bemerken, daß Graßmanns Beweis unrichtig und sein Satz nicht allgemein gültig ist.

2) Gött. Nachrichten Oktober 1872 [d. Ausg. Bd. III, Abh. IV].

§ 2.

[540

4. Ist das Gleichungssystem:

$$(5) \qquad z - F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

mit der Gleichung: $\Phi(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$ verträglich, so geht die Gleichung: $\Phi = 0$ durch die Substitution: $z = F, p_k = \partial F : \partial x_k$ in eine Identität über. Wenn aber eine Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ identisch verschwindet, so verschwinden auch die Differentialquotienten derselben hinsichtlich $x_1, \ldots, x_n$. Es ist also einleuchtend, daß die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x_k} + \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

vermöge des Gleichungssystems (5) bestehen.

Bezeichnen wir den Ausdruck:

$$\sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) - \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \Psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right),$$

wie gewöhnlich, mit dem Symbole $[\Phi\Psi]$, so können wir somit sagen, daß die n Gleichungen:

$$\left[\Phi, p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}\right] = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

vermöge des Gleichungssystems (5) bestehen. Nun aber verschwindet der Ausdruck:

$$[\Phi, z - F] = \sum_k^{1\ldots n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\left(p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}\right)$$

ebenfalls vermöge des Gleichungssystems (5). Also erhalten wir den folgenden Satz, der sich nur hinsichtlich der Form von einem längst bekannten Satze unterscheidet:

Satz 1. *Ist das Gleichungssystem:*

$$z - F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

mit der Gleichung: $\Phi(z, x_1, \ldots, p_n) = 0$ verträglich, so bestehen die Gleichungen:

$$[\Phi, z - F] = 0, \ \left[\Phi, p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right] = 0, \ldots, \left[\Phi, p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}\right] = 0$$

vermöge des Gleichungssystems: $z - F = 0, p_k - \partial F : \partial x_k = 0$.

5. Benutzen wir den Begriff der infinitesimalen Transformation und betrachten überdies: [541

$$[\Phi f] = \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} +$$
$$+ \left(p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial \Phi}{\partial p_n}\right)\frac{\partial f}{\partial z} - \sum_i^{1\ldots n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

als Symbol einer solchen Transformation in den Veränderlichen: $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, so können wir den Satz 1 auch folgendermaßen formulieren:

Satz 2. *Ist das Gleichungssystem:*

$$z - F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ldots, p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

mit der Gleichung: $\Phi(z, x_1, \ldots, p_n) = 0$ verträglich, so gestattet es die infinitesimale Transformation $[\Phi f]$.

Diese nur hinsichtlich der Form neue Bemerkung, die wir später verallgemeinern, liefert eine einfache und durchsichtige Begründung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wie auch der Theorie der Berührungstransformationen. Dabei setzen wir als bekannt voraus, daß die Invarianz eines Gleichungssystems bei einer infinitesimalen Transformation eine Eigenschaft desselben ist, die sowohl von der Wahl der Veränderlichen, wie von der Form des Gleichungssystems unabhängig ist.

Wir werden annehmen, daß ein vorgelegtes, aus $n+1$ Gleichungen bestehendes Gleichungssystem:

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n+1)}$$

durch Auflösung auf die Form:

$$(5) \qquad z = F(x_1, \ldots, x_n), \quad p_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

gebracht werden kann. Alsdann ist es nach dem Vorangehenden sicher, daß unser Gleichungssystem jede infinitesimale Transformation $[\Phi_i f]$ gestattet; das heißt, es verschwinden sämtliche Ausdrücke $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$.

Es fragt sich nun, ob diese Eigenschaft für Gleichungssysteme, welche die Form (5) erhalten können, charakteristisch ist.

Um diese Frage beantworten zu können, schicken wir eine allgemeine Bemerkung voraus, die im folgenden mehrfache Anwendung finden wird. [542

6. Gestattet ein Gleichungssystem, welches sowohl die Form: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$ wie die Form: $\Psi_1 = 0, \ldots, \Psi_m = 0$ annehmen kann, jede infinitesimale Transformation $[\Phi_i f]$, so ist leicht zu erkennen, daß es auch jede infinitesimale Transformation $[\Psi_k f]$ gestattet.

Nach unserer Voraussetzung verschwindet nämlich jedes $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$, und gleichzeitig jedes $[\Phi_i \Psi_k]$ vermöge: $\Psi_1 = 0, \ldots, \Psi_m = 0$. Dann aber verschwindet jedes $[\Psi_k \Phi_i] = -[\Phi_i \Psi_k]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$, und folglich auch jedes $[\Psi_k \Psi_i]$ vermöge: $\Psi_1 = 0, \ldots, \Psi_m = 0$, wie behauptet wurde. Hiermit haben wir nun zunächst den folgenden von mir herrührenden allgemeinen Satz:

Satz 3. *Stehen m Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$ in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ in solcher Beziehung, daß jedes $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge des Gleichungssystems: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$ verschwindet, so besitzt jede andere Form: $\Psi_1 = 0, \ldots, \Psi_m = 0$ unseres Gleichungssystems dieselbe Eigenschaft: es verschwindet jedes $[\Psi_i \Psi_k]$ vermöge: $\Psi_1 = 0, \ldots, \Psi_m = 0$.*

Stehen $n+1$ unabhängige Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ in solcher Beziehung, daß jedes $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ verschwindet, so folgt daraus nicht, daß sich unsere Gleichungen hinsichtlich $z, p_1, \ldots, p_n$ auflösen lassen. Ist aber eine solche Auflösung:

$$(5^*) \qquad z - F(x) = 0, \quad p_1 - F_1(x) = 0, \ldots, p_n - F_n(x) = 0$$

möglich, so verschwindet nach dem Satze 3 jeder Ausdruck:

$$[p_k - F_k, z - F] = p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}$$

vermöge der Gleichungen (5*), und es ist daher $F_k = \partial F : \partial x_k$. Also haben wir den

Satz 4. *Ein nach $z, p_1, \ldots, p_n$ auflösbares Gleichungssystem: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ bestimmt dann und nur dann eine Element-M_n, wenn jedes $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge des Gleichungssystems verschwindet.*

Gleichzeitig können wir unter anderem den folgenden Satz aufstellen:

Satz 5. *Ein nach $z, p_1, \ldots, p_n$ auflösbares Gleichungssystem:* [543 *$\Phi_1 = a_1, \ldots, \Phi_{n+1} = a_{n+1}$ mit den willkürlichen Konstanten $a_1, \ldots, a_{n+1}$ stellt dann und nur dann für jedes Wertsystem der a_k eine Element-M_n dar, wenn alle $[\Phi_i \Phi_k]$ identisch null sind.*

Dieser letzte Satz bildet bekanntlich die Grundlage für Jacobis Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 3.

7. Enthält die Gleichung:

$$z - F(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0$$

$n+1$ Parameter $a_1, \ldots, a_{n+1}$, so stellt das Gleichungssystem:

$$(6) \qquad z - F(x_1, \ldots, a_{n+1}) = 0, \quad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ldots, p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

für jedes Wertsystem der Parameter a_k eine Element-M_n dar. Ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \end{vmatrix}$$

nicht identisch null, so sind die Gleichungen (6) nach den a_k auflösbar, und dann bestimmen die hervorgehenden Gleichungen:

$$a_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) \qquad (k=1, \ldots, n+1)$$

∞^{n+1} verschiedene Element-M_n, deren Elemente z, x, p keine von den a freie Relation erfüllen.

Es verschwindet somit der Pfaffsche Ausdruck: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$ für jedes Wertsystem z, x, p und für jedes Wertsystem dz, dx, dp, welches die $n+1$ Gleichungen:

$$d\varphi_k = \sum_i^{1 \ldots n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dz + \sum_i^{1 \ldots n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} dp_i = 0$$

erfüllt. Daher ist es möglich, $n+1$ Funktionen $\pi_1, \ldots, \pi_{n+1}$ von $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ anzugeben, welche die Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \pi_1 d\varphi_1 + \cdots + \pi_{n+1} d\varphi_{n+1}$$

identisch erfüllen.

8. Sind auf der anderen Seite $2q$ Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_q, \pi_1, \ldots, \pi_q$ vorgelegt, welche die Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \pi_1 d\varphi_1 + \cdots + \pi_q d\varphi_q$$

identisch erfüllen, so können wir ohne Beschränkung annehmen, daß $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ unabhängige Funktionen sind; sonst ließe sich nämlich offenbar eine analoge Gleichung aufstellen, in welcher die Zahl q einen [544 kleineren Wert besäße. Sind aber $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ unabhängige Funktionen, so bestimmen die Gleichungen:

$$\varphi_1 = a_1, \ldots, \varphi_q = a_q$$

für jeden Wert der Parameter a eine Elementmannigfaltigkeit. Folglich ist die Zahl q mindestens gleich $n+1$; denn eine Elementmannigfaltigkeit enthält höchstens ∞^n Elemente. Setzen wir insbesondere voraus, daß $q = n + 1$ ist, so erhalten wir durch Verknüpfung der vorangehenden Entwickelungen den Satz:

Satz 6. *Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ hinsichtlich $z, p_1, \ldots, p_n$ unabhängige Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$, so ist zum Bestehen einer identischen Gleichung von der Form:*

$$(6') \qquad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \pi_1 d\varphi_1 + \cdots + \pi_{n+1} d\varphi_{n+1}$$

erforderlich und hinreichend, daß alle $[\varphi_i \varphi_k]$ identisch gleich Null sind. Alsdann sind die π_i eindeutig bestimmt.

Dieser Satz ist längst von meinen Vorgängern, wenn auch möglicherweise nicht eben in dieser Form aufgestellt worden. Es ist aber wohl zu beachten, daß es zum Bestehen einer Identität von der Form (6′) keineswegs notwendig ist, daß $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ hinsichtlich $z, p_1, \ldots, p_n$ unabhängig sind.

§ 4.

9. Eine Transformation:

$$(7) \qquad \begin{cases} z' = Z(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n), \quad x'_k = X_k(x_1, \ldots, p_n), \\ \qquad p'_k = P_k(x_1, \ldots, z, \ldots, p_n) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,n)} \end{cases}$$

in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ heißt nach mir eine Berührungstransformation, wenn eine Identität von der Form:

$$(7^*) \qquad dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

besteht.

Es ist dabei klar, daß die Größe ϱ von Null verschieden sein muß; denn sonst bestände zwischen $Z, X_1, \ldots, X_n$ mindestens eine Relation; da aber die Gleichungen (7) eine Transformation bestimmen sollen, so ist von vornherein vorausgesetzt, daß $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ unabhängige Funktionen von $z, x_1, \ldots, p_n$ sind.

Das allgemeinste Gleichungssystem in den Z, X, P, z, x, p, welches die Gleichung (7*) oder die äquivalente Gleichung:

$$\varrho(dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n) = \sigma(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

erfüllt, wird nach der Theorie des Pfaffschen Problems erhalten durch [545
Elimination der Größen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \varrho$ und σ zwischen $2n + m + 2$ Relationen von der Form:

$$(8) \qquad \begin{cases} \Omega_k(z, x_1, \ldots, x_n, Z, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,m)}, \\ \varrho = \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial Z} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \Omega_m}{\partial Z}, \ \sigma = -\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} - \cdots - \lambda_m \dfrac{\partial \Omega_m}{\partial z}, \\ -\varrho P_i = \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial X_i} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \Omega_m}{\partial X_i}, \ \sigma p_i = \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \Omega_m}{\partial x_i}, \end{cases}$$

in denen: $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_m = 0$ m beliebige, unabhängige Gleichungen zwischen $z, x_1, \ldots, x_n, Z, X_1, \ldots, X_n$ bezeichnen sollen.

Hierbei ist aber wohl zu beachten, daß das hervorgehende Gleichungssystem keineswegs immer eine Transformation zwischen den beiden Variabelnsystemen z, x, p und Z, X, P liefert. Wählt man m bestimmte Gleichungen: $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_m = 0$, so entscheidet man nach den gewöhnlichen Regeln durch Determinantenbildung, ob sich aus den Gleichungen (8) Relationen zwischen den Größen z, x, p oder zwischen den Größen Z, X, P ableiten lassen. Hierbei gilt der bemerkenswerte Satz, daß sich immer gleich viele Relationen zwischen z, x, p, wie zwischen den Z, X, P herleiten lassen.[1] Sind insbesondere die Größen des einen Systems von einander unabhängig, so ist dies auch mit den Größen des zweiten Systems der Fall.

Hiermit erhalten wir den folgenden aus der Theorie des Pfaffschen Problems bekannten

Satz 7. *Sind $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ gegebene Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, welche die Gleichung:*

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) \qquad {\scriptstyle (\varrho \neq 0)}$$

identisch erfüllen, so sind die Größen Z, X, P unabhängige Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$.

Durch Verknüpfung dieses Satzes mit den früheren Betrachtungen erhalten wir ohne weiteres den Satz:

Satz 8. *Sind $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ gegebene Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, welche die Bedingungsgleichung:*

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) \qquad {\scriptstyle (\varrho \neq 0)}$$

identisch erfüllen, so liefern die Gleichungen:

$$z' = Z, \quad x'_k = X_k, \quad p'_i = P_i$$ [546

immer eine Berührungstransformation.

Deuten wir eine Berührungstransformation: $z' = Z$, $x'_k = X_k$, $p'_k = P_k$ in den Veränderlichen z, x, p als eine Operation, welche jedes

1) Archiv for Math. Christiania 1876; Math. Ann. Bd. XI, S. 551 [d. Ausg. Bd. III, Abh. XVII; Bd. IV, Abh. III, S. 255f.].

Element z, x, p in das Element z', x', p' überführt, so können wir sagen, daß eine Berührungstransformation jede Elementmannigfaltigkeit von allgemeiner Lage in eine ebensolche überführt. Diese Eigenschaft der Berührungstransformationen ließe sich natürlich als Definition derselben benutzen.

10. Eine besonders wichtige Berührungstransformation, die von Euler herrührt, wird dargestellt durch Gleichungen von der Form:

$$(9)\qquad \begin{cases} z' = z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q,\; p_1' = -x_1, \ldots, p_q' = -x_q, \\ x_1' = p_1, \ldots, x_q' = p_q;\; p_{q+k}' = p_{q+k};\; x_{q+k}' = x_{q+k}. \end{cases}$$

Es besteht ja identisch die Gleichung:

$$d(z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q) + \sum_k^{1\ldots q} x_k dp_k - \sum_i^{q+1\ldots n} p_i dx_i = \\ = dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n.$$

In diesem Falle ist ϱ gleich 1. Die Eulersche Transformation umfaßt die Dualität im Raume $z, x_1, \ldots, x_n$ als speziellen Fall.

Eine andere einfache Berührungstransformation wird definiert durch die Gleichungen:

$$(10)\qquad \begin{cases} z' = z - \dfrac{a}{\sqrt{1 + p_1^2 + \cdots + p_n^2}} = z - \dfrac{a}{\sqrt{\varDelta}}, \\ x_k' = x_k + \dfrac{a p_k}{\sqrt{\varDelta}},\; p_k' = p_k \qquad (k = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Es ist ja:

$$d\left(z - \frac{a}{\sqrt{\varDelta}}\right) - \sum_k^{1\ldots n} p_k d\left(x_k + \frac{a p_k}{\sqrt{\varDelta}}\right) = dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n.$$

Ist insbesondere $n = 2$, so stellen die Gleichungen (10) eine sogenannte Dilatation (Paralleltransformation) des Raumes z, x_1, x_2 dar.

§ 5.

11. Wünschen wir die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation:

$$\delta z = \zeta \delta t, \quad \delta x_k = \xi_k \delta t, \quad \delta p_i = \pi_i \delta t$$

in den Veränderlichen z, x, p zu finden, so bilden wir die Gleichung: [547

$$\frac{\delta}{\delta t}(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) = \sigma(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n),$$

oder, ausgeführt, die Gleichung:

$$d\zeta - p_1 d\xi_1 - \cdots - p_n d\xi_n - \pi_1 dx_1 - \cdots - \pi_n dx_n = \\ = \sigma(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n),$$

die sich in die folgenden Relationen zerlegt:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} - p_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \cdots - p_n \frac{\partial \xi_n}{\partial z} = \sigma,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_k} - p_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} - \cdots - p_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_k} + p_k \sigma = \pi_k,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - p_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial p_i} - \cdots - p_n \frac{\partial \xi_n}{\partial p_i} = 0$$

$$(k, i = 1, 2, \ldots, n).$$

Schreiben wir diese Relationen folgendermaßen:

$$\frac{\partial(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n)}{\partial z} = \sigma,$$

$$\frac{\partial(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n)}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n)}{\partial z} = \pi_k,$$

$$\frac{\partial(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n)}{\partial p_i} = -\xi_i$$

und setzen:

$$\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n = -W,$$

so erhalten wir für ζ, ξ_i und π_k einfache Ausdrücke, welche nur die Größe W und deren Ableitungen enthalten.

In dieser Weise finden wir den Satz:

Satz 9. *Jede infinitesimale Berührungstransformation in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ besitzt die Form:*

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta x_i}{\delta t} = \dfrac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \dfrac{\delta z}{\delta t} = -W + \displaystyle\sum_k^{1\ldots n} p_k \dfrac{\partial W}{\partial p_k}, \\ \dfrac{\delta p_i}{\delta t} = -\dfrac{\partial W}{\partial x_k} - p_k \dfrac{\partial W}{\partial z}. \end{cases}$$

Hier bedeutet W eine ganz beliebige Funktion von den z, x, p.

Wir nennen W die charakteristische Funktion der infini- [548
tesimalen Berührungstransformation (11). Das Symbol derselben ist offenbar:

$$[Wf] - W \frac{\partial f}{\partial z}.$$

12. Führen wir in diese infinitesimale Transformation neue Veränderliche z', x', p' ein, und zwar vermöge einer Eulerschen Transformation:

$$(9)\qquad \begin{cases} z' = z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q, \quad p_1' = -x_1, \ldots, p_q' = -x_q, \\ p_{q+k}' = p_{q+k}; \quad x_1' = p_1, \ldots, x_q' = p_q; \quad x_{q+k}' = x_{q+k}, \end{cases}$$

so ist es von vornherein einleuchtend, daß wir wiederum eine infinitesimale Berührungstransformation in z', x', p' erhalten müssen. Indem wir dies durch Rechnung bestätigen, erhalten wir die Formel:

$$[Wf]_{zxp} - W\frac{\partial f}{\partial z} = [Wf]_{z'x'p'} - W\frac{\partial f}{\partial z'}, \tag{12}$$

welche uns den Satz liefert:

Satz 10. *Führt man in eine infinitesimale Berührungstransformation:*

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

neue Veränderliche z', x', p' vermöge einer Eulerschen Substitution ein, so wird die charakteristische Funktion der neuen infinitesimalen Transformation ohne weiteres erhalten, wenn in die alte charakteristische Funktion die neuen Veränderlichen eingeführt werden.

Aus den soeben angestellten Betrachtungen läßt sich noch ein Schluß ziehen. Es ist ja: $\partial f : \partial z = \partial f : \partial z'$, und also folgt:

$$[Wf]_{zxp} = [Wf]_{z'x'p'}.$$

Dies gibt uns den Satz:

Satz 11. *Bei der Eulerschen Transformation* (9) *bleibt jeder Ausdruck $[Wf]$ absolut invariant.*

Am einfachsten beweist man übrigens diesen Satz, indem man verifiziert, daß derselbe richtig ist, wenn W und f zwei beliebige unter den Größen z', x', p' sind. Daraus folgt leicht die allgemeine Gültigkeit desselben.

§ 6.

13. Stellen $n+1$ gegebene Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ eine Element-M_n dar, so können die aufgelösten Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} & z - p_1x_1 - \cdots - p_qx_q - F(p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) = 0, \\ & x_1 + \frac{\partial F}{\partial p_1} = 0, \ldots, x_q + \frac{\partial F}{\partial p_q} = 0, \quad p_{q+k} - \frac{\partial F}{\partial x_{q+k}} = 0 \end{aligned}\right. \tag{13}$$ [549

durch eine Eulersche Transformation die Form:

$$z' - F(x_1', \ldots, x_n') = 0, \quad p_k' - \frac{\partial F}{\partial x_k'} = 0 \qquad (k=1,\ldots,n)$$

erhalten. Nun aber ist:

$$\left[z' - F,\ p_k' - \frac{\partial F}{\partial x_k'}\right] = \frac{\partial F}{\partial x_k'} - p_k' = 0, \quad \left[p_i' - \frac{\partial F}{\partial x_i'},\ p_k' - \frac{\partial F}{\partial x_k'}\right] = 0;$$

also (Satz 11) stehen die Gleichungen (13) in derselben Beziehung zu einander; kurz (Satz 3), es verschwinden alle $[\Phi_i\Phi_k]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$. Also:

Satz 12. *Stellen $n+1$ Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ eine Element-M_n dar, so verschwinden alle $[\Phi_i\Phi_k]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$.*

Hieraus folgt nun ohne weiteres der Satz:

Satz 13. *Besteht eine Gleichung von der Form:*

$$dz - p_1dx_1 - \cdots - p_ndx_n = \Psi dZ + \Psi_1 dX_1 + \cdots + \Psi_n dX_n,$$

so sind die Ausdrücke: $[ZX_i]$, $[X_iX_k]$ sämtlich identisch null.

14. Stehen andererseits $n+1$ unabhängige Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ paarweise in solchen gegenseitigen Beziehungen, daß jedes $[\Phi_i\Phi_k]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ verschwindet, so ist es immer möglich, die Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ hinsichtlich z und n Größen x_i oder p_k mit lauter verschiedenen Indices aufzulösen.

Wäre in der Tat keine derartige Auflösung möglich, so würde der Satz 3 auf einen Widerspruch führen. Kann nun unser Gleichungssystem etwa nach $z, x_1, \ldots, x_q, p_{q+1}, \ldots, p_n$ aufgelöst werden, so kann es offenbar auch die Form:

$$\begin{aligned} z - p_1x_1 - \cdots - p_qx_q - F(p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) &= 0, \\ x_i + F_i(p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) &= 0 \qquad (i=1,\ldots,q), \\ p_k - \Phi_k(p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) &= 0 \qquad (k=q+1,\ldots,n) \end{aligned}$$

erhalten. Dabei müssen (Satz 3) die Ausdrücke:

$$[z - p_1x_1 - \cdots - p_qx_q - F,\ x_i + F_i] = -\left(x_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\right) \qquad (i=1,\ldots,q)$$

$$[z - p_1x_1 - \cdots - p_qx_q - F,\ p_k - \Phi_k] = -\left(p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}\right) \qquad (k=q+1,\ldots,n)$$

vermöge des Gleichungssystems verschwinden; also ist: [550

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \Phi_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \qquad (i=1,\ldots,q;\ k=q+1,\ldots,n)$$

Wir erhalten somit zunächst den

Satz 14. *Ein System von $n+1$ unabhängigen Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ stellt dann und nur dann eine Element-M_n dar, wenn alle $[\Phi_i\Phi_k]$ vermöge des Gleichungssystems verschwinden.*

Hieraus ergibt sich ferner der Satz:

Satz 15. *Ein System von $n+1$ unabhängigen Gleichungen: $\Phi_1 = a_1, \ldots, \Phi_{n+1} = a_{n+1}$, mit den $n+1$ willkürlichen Parametern $a_1, \ldots, a_{n+1}$, stellt dann und nur dann für jedes Wertsystem der a eine Element-M_n dar, wenn alle $[\Phi_i \Phi_k]$ identisch gleich Null sind.*

Gleichzeitig erhalten wir den Satz:

Satz 16. *Sind $Z, X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Funktionen von $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, so bestimmen die Gleichungen:*

$$z' = Z, \quad x_1' = X_1, \ldots, x_n' = X_n$$

dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn alle $[ZX_i]$, $[X_i X_k]$ identisch gleich Null sind. Die hinzutretenden Gleichungen: $p_i' = P_i$ werden aus der Bedingungsgleichung:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

bestimmt.[1])

Wenn zwei Funktionen Φ und Ψ von $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ in der Beziehung: $[\Phi\Psi] = 0$ stehen, so sagen wir, daß dieselben in Involution liegen.

§ 7.

15. Bestimmen die Gleichungen:

$$z' = Z, \quad x_k' = X_k, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation, ist also:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) \quad (\varrho \neq 0),$$

so liefern auch die Gleichungen: [551

$$\begin{aligned} z' = Z - P_1 X_1 - \cdots - P_q X_q, \quad p_1' &= -X_1, \ldots, p_q' = -X_q, \quad p_{q+k}' = P_{q+k}, \\ x_1' &= P_1, \ldots, x_q' = P_q, \quad x_{q+k}' = X_{q+k} \end{aligned}$$

eine derartige Transformation, und also zeigt Satz 16, daß die Funktionen: $Z - P_1 X_1 - \cdots - P_q X_q$, $P_1, \ldots, P_q, X_{q+1}, \ldots, X_n$ paarweise in Involution liegen.

---

1) Gesellsch. d. Wissensch. zu Christiania, 1873, S. 245 [d. Ausg. Bd. III, Abh. IX, S. 103].

Soll die Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \Phi_0 d\varphi_0 + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

bestehen, so können die Größen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nicht alle von z frei sein. Es ist daher erlaubt, wie an der zitierten Stelle geschehen, unter φ_n eine Größe zu verstehen, welche z wirklich enthält.

In dieser Weise erhalten wir die Relationen:

$$[P_i P_k] = 0, \quad [X_i P_k] = 0 \qquad (i \neq k),$$

$$[Z P_k] - P_k [X_k P_k] = 0 = [Z - P_k X_k, P_k].$$

Es bestimmen aber auch die Gleichungen:

$$z'' = Z - \frac{a}{\sqrt{1 + P_1^2 + \cdots + P_n^2}} = Z - \frac{a}{\sqrt{\Delta}},$$

$$x_k'' = X_k + \frac{a P_k}{\sqrt{\Delta}}, \quad p_k'' = P_k$$

eine Berührungstransformation; folglich ist:

$$\left[X_i + \frac{a P_i}{\sqrt{\Delta}}, \quad X_k + \frac{a P_k}{\sqrt{\Delta}}\right] = 0,$$

woraus folgt:

$$[X_1 P_1] = [X_2 P_2] = \cdots = [X_n P_n].$$

Betrachten wir endlich die Berührungstransformation:

$$z' = Z, \quad x_1' = X_1, \ldots, x_n' = X_n, \quad x_{n+1}' = x_{n+1},$$

$$p_1' = P_1, \ldots, p_n' = P_n, \quad p_{n+1}' = \varrho p_{n+1}$$

in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_{n+1}, p_1, \ldots, p_{n+1}$, so finden wir die Gleichungen:

$$[X_1 P_1] = \cdots = [X_n P_n] = -\varrho.$$

Hiermit haben wir den

Satz 17. *Bilden die Gleichungen:*

$$z' = Z, \quad x_k' = X_k, \quad p_k' = P_k$$

eine Berührungstransformation, so bestehen die Relationen:

$$(14) \qquad \begin{cases} [ZX_i] = [X_i X_k] = [X_i P_k] = [P_i P_k] = 0, \\ \qquad [P_i X_i] = \varrho, \quad [P_i Z] = \varrho P_i \end{cases} \qquad (\varrho \neq 0).$$

16. Es läßt sich nun umgekehrt zeigen, daß jedes Größensystem: $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$, welches die Bedingungsgleichungen (14) [552
erfüllt, eine Berührungstransformation liefert.

Es ist zunächst leicht, zu sehen, daß die Größen Z, X, P unabhängig sein müssen. Bestände in der Tat etwa die Gleichung:

$$P_1 = \Psi(Z, X_1, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n),$$

so käme:

$$[P_1 X_1] = [\Psi, X_1];$$

diese Gleichung ist indes unmöglich, da die rechte Seite gleich Null, die linke von Null verschieden ist. Bestände andererseits eine Relation von der Form:

$$Z = \varphi(X_1, \ldots, X_n),$$

so ergäbe die Gleichung:

$$[P_1 Z] = [P_1 \varphi]$$

die Relation:

$$P_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_1},$$

welche nach dem eben Gesagten unmöglich ist. In ganz analoger Weise ergibt sich, daß auch keine Relation zwischen $X_1, \ldots, X_n$ allein bestehen kann.

Da nun $Z, X_1, \ldots, X_n$ sicher von einander unabhängig sind und überdies paarweise in Involution liegen, so gibt es immer (Satz 16) n Größen $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$, welche eine Relation:

$$\sigma(dZ - \Pi_1 dX_1 - \cdots - \Pi_n dX_n) = dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$$

identisch erfüllen. Es bestehen daher unter anderm die Gleichungen:

$$[X_k \Pi_i] = 0, \quad [\Pi_i Z] - \Pi_i [\Pi_i X_i] = 0.$$

Bilden wir jetzt die $n-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$[X_2 f] = 0, \ldots, [X_n f] = 0,$$

so erkennen wir zunächst, indem wir f der Reihe nach die Werte $P_2, P_3, \ldots, P_n$ erteilen, daß unsere $n-1$ Gleichungen unabhängig sind und somit höchstens $n+2$ unabhängige Lösungen besitzen. Wir kennen aber schon so viele unabhängige Lösungen, nämlich:

$$Z, X_1, X_2, \ldots, X_n, P_1.$$

Folglich besitzt jede Lösung, zum Beispiel Π_1, die Form:

$$\Pi_1 = W(Z, X_1, X_2, \ldots, X_n, P_1).$$

Tragen wir diesen Wert in die Gleichung: [553

$$[Z\Pi_1] - \Pi_1[X_1 \Pi_1] = 0$$

ein, so kommt:

$$\frac{\partial W}{\partial P_1}\{[ZP_1] - W[X_1 P_1]\} = 0,$$

oder, da W wegen der Gleichung: $\sigma[\Pi_1 X_1] = 1$ nicht von P_1 frei sein kann:

$$[ZP_1] - W[X_1 P_1] = 0.$$

Andererseits aber ist:

$$[ZP_1] - P_1[X_1 P_1] = 0,$$

also folgt: $W = P_1$, und überhaupt: $\Pi_k = P_k$.

17. Also:

Satz 18. *Zum Bestehen einer identischen Relation von der Form:*

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \frac{1}{\varrho}(dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n)$$

ist erforderlich und hinreichend, daß die $2n+1$ Größen Z, X_i und P_k die Bedingungsgleichungen:

$$[ZX_i] = 0, \quad [X_i X_k] = 0, \quad [X_i P_k] = 0, \quad [P_i P_k] = 0,$$
$$[P_1 X_1] = \cdots = [P_n X_n] = \varrho, \quad [P_i Z] = \varrho P_i$$

erfüllen.

Diesen fundamentalen Satz veröffentlichte ich in dieser Form in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 1872 und 1873, S. 258.[1]) Derselbe ist übrigens nur eine andere Form des folgenden von mir an der angegebenen Stelle bewiesenen schönen Satzes:

Satz 19. *Zum Bestehen einer identischen Relation von der Form:*

$$p_0 dx_0 + p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = P_0 dX_0 + P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n$$

ist erforderlich und hinreichend, daß die $2n+2$ Funktionen X und P von den x, p die Relationen:

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (P_i X_i) = 1,$$
$$\sum_k p_k \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0, \quad \sum_k p_k \frac{\partial P_i}{\partial p_k} = P_i$$

erfüllen.

§ 8.

18. Eine infinitesimale Berührungstransformation in den Veränderlichen: $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ erteilt den x_i und p_k Inkremente, die nur von den x und p abhängen, wenn die charakteristische Funktion derselben die Form: [554

$$Az + u(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$$

besitzt, und dabei A eine Konstante bedeutet.

Besonders wichtig ist der Fall $A = 0$; alsdann ist:

$$(uf) + \left(\sum p_k \frac{\partial u}{\partial p_k} - u\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

1) [D. Ausg. Bd. III, Abh. I, S. 1; Abh. IX, S. 116.]

das Symbol der infinitesimalen Transformation. Zwei derartige Transformationen u_1 und u_2 sind vertauschbar, wenn $(u_1 u_2) = 0$ ist; sieht man von z ab, so genügt schon, daß $(u_1 u_2)$ gleich einer Konstanten ist.

Sind u und v Funktionen von den x, p, so bleibt der Klammerausdruck (uv) bei jeder Berührungstransformation in den x, p invariant. Dies gilt im besonderen auch, wenn die besprochene Transformation infinitesimal ist. Indem man dies analytisch ausdrückt, erhält man die allgemeine Jacobische Identität.

Eine andere Deutung[1]) der Jacobischen Identität erhält man, indem man zwei infinitesimale Berührungstransformationen in den x, p, etwa u_1 und u_2, betrachtet. Dieselben lassen den Pfaffschen Ausdruck: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$ invariant. Setzt man daher:

$$(u_k f) + \left(\sum p_i \frac{\partial u_k}{\partial p_i} - u_k\right)\frac{\partial f}{\partial z} = B_k f,$$

so ist einleuchtend, daß auch die [infinitesimale] Transformation: $B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f))$ jenen Pfaffschen Ausdruck invariant läßt und somit die Form:

$$(\omega f) + \left(\sum p_k \frac{\partial \omega}{\partial p_k} - \omega\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

besitzt. Hierdurch wird man wiederum auf die Jacobische Identität geführt.

Die Mayersche Identität gestattet eine ganz ähnliche Deutung.

19. Sind W_1 und W_2 die charakteristischen Funktionen zweier infinitesimaler Berührungstransformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ in den Veränderlichen z, x, p, so ist:

$$[W_1 W_2] - \left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z}\right)$$ [555

die charakteristische Funktion der infinitesimalen Transformation:

$$X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)).$$

Wird auf die infinitesimale Berührungstransformation W die endliche Berührungstransformation:

$$z' = Z, \quad x_k' = X_k, \quad p_i' = P_i$$

ausgeführt, und ist dabei:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n).$$

1) Math. Ann. Bd. XVI, S. 528 [d. Ausg. Bd. VI, Abh. I, S. 93].

so ist ϱW die charakteristische Funktion der neuen infinitesimalen Berührungstransformation (Arch. for Math., Christiania 1876).[1])

Sind $u_1, \ldots, u_r$ Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, welche paarweise Relationen von der Form:

$$(u_i u_k) = \omega_{ik}(u_1, \ldots, u_r)$$

erfüllen, so bilden die u_k und alle Funktionen u derselben nach meiner alten Terminologie eine Funktionengruppe oder noch kürzer eine Gruppe.

Ich wählte diese Bezeichnung, weil alle infinitesimalen Berührungstransformationen: (uf) eine unendliche Gruppe von Berührungstransformationen erzeugen.

§ 9.

20. Eine Berührungstransformationsgruppe in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ heißt reduzibel, wenn sie durch eine Berührungstransformation in diesen Veränderlichen in eine Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $z, x_1, \ldots, x_n$ übergeführt werden kann. Sonst heißt sie irreduzibel.

In den Veränderlichen z, x, p ist somit eine reduzible Gruppe imprimitiv. Eine irreduzible Gruppe kann natürlich auch imprimitiv sein. Eine Berührungstransformationsgruppe ist reduzibel dann und nur dann, wenn sie ein n-gliedriges vollständiges System invariant läßt, dessen Lösungen paarweise in Involution liegen.

21. Es ist mir gelungen, alle endlichen Berührungstransformationsgruppen des dreifach ausgedehnten Raumes zu bestimmen, welche im fünffach ausgedehnten Raume: z, x_1, x_2, p_1, p_2 primitive Gruppen liefern.

Auch das allgemeine, sehr schwierige Problem, überhaupt alle endlichen Berührungstransformationsgruppen des dreifachen Raumes zu [556 bestimmen, habe ich im Prinzip gelöst; nur einige Detailrechnungen bleiben noch übrig.

22. Aus meiner alten Bestimmung aller Berührungstransformationsgruppen einer Ebene ergibt sich ohne Schwierigkeit (Archiv for Math. Bd. X, 1884,85)[2]) die Bestimmung aller Gruppen von Punkttransformationen des dreifachen Raumes, bei denen eine nicht lineare partielle Diffe-

1) [D. Ausg. Bd. V, Abh. III, S. 66ff.]
2) [D. Ausg. Bd. V, Abh. XIX, S. 493—497.]

rentialgleichung erster Ordnung invariant bleibt. Eine derartige Gruppe ist *immer endlich*. Ist sie intransitiv, so enthält sie weniger als drei Parameter.

In dieser Weise erhält man unter anderm den Ausgangspunkt für die Bestimmung aller Mannigfaltigkeiten im R_4, die eine projektive Gruppe gestatten, und zugleich einen Ansatz zur Bestimmung aller Mannigfaltigkeiten im R_4, die eine Gruppe von konformen Punkttransformationen gestatten.

23. Wünscht man, alle irreduzibeln Berührungstransformationsgruppen des dreifachen Raumes zu bestimmen, die eine Schar von Gleichungen:

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = \text{Const.}$$

invariant lassen, so kann man zunächst $F = x_2$ setzen. Jede derartige Gruppe enthält eine invariante irreduzible Untergruppe, welche alle Ebenen: $x_2 = \text{Const.}$ stehen läßt. Diese Untergruppe Γ transformiert die Linienelemente jeder Ebene: $x_2 = \text{Const.}$ durch eine irreduzible Berührungstransformationsgruppe g dieser Ebene. Es sind daher drei verschiedene Fälle zu untersuchen. Ist insbesondere die Parameterzahl der Gruppe g gleich zehn, so ist die Gruppe Γ ebenfalls zehngliedrig.

24. Bei einer irreduzibeln Berührungstransformationsgruppe einer Ebene bleibt immer eine (Gött. Nachr. 1874)[1]) und nur eine Differentialgleichung *dritter Ordnung* invariant. Dieselbe kann auf die Form: $y''' = 0$ oder, wenn man es vorzieht, auf die Form: $y'y''' - \frac{3}{2}y''^2 = 0$ gebracht werden.

§ 10.

25. Bestimmen die Gleichungen:

$$(1) \qquad z' = Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \quad x_k' = X_k, \quad p_k' = P_k \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

eine Berührungstransformation, so sind, wie schon früher bemerkt, [557 die linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$[X_1 f] = 0, \ldots, [X_n f] = 0$$

sicher unabhängig. Es sind daher nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left| \frac{\partial X_k}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial X_k}{\partial p_n} \sum_i^{1\ldots n} p_i \frac{\partial X_k}{\partial p_i} \; \frac{\partial X_k}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_k}{\partial z} \cdots \frac{\partial X_k}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_k}{\partial z} \right|$$

1) [D. Ausg. Bd. V, Abh. I, S. 6.]

identisch gleich Null, und offenbar auch nicht alle n-reihigen Determinanten der einfacheren Matrix:

$$\left| \frac{\partial X_k}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial X_k}{\partial p_n} \; \frac{\partial X_k}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_k}{\partial z} \cdots \frac{\partial X_k}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_k}{\partial z} \right|.$$

Unsere Transformation hat, wie wir wissen, die Eigenschaft, die *Pfaffsche* Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ invariant zu lassen. Es ist nun möglich, eine *erweiterte* Transformation in den Veränderlichen:

$$x_1, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad r_{11}, \ldots, r_{ik} = r_{ki}, \ldots, r_{nn}$$

von der Form:

$$z' = Z, \quad x_k' = X_k, \quad p_k' = P_k, \quad r_{ik}' = R_{ik}(x, z, p, r_{\alpha\beta})$$

zu bilden, welche das System der *Pfaffschen* Gleichungen:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0, \quad \underset{(k=1,\ldots,n)}{dp_k - r_{k1} dx_1 - \cdots - r_{kn} dx_n = 0}$$

invariant läßt. Unsere Forderung wird ja, wenn wir allgemein:

$$\frac{dU(x,z,p)}{dx_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial U}{\partial z} + \sum_j^{1\ldots n} \frac{\partial U}{\partial p_j} r_{ji}$$

setzen, durch die Gleichungen:

$$\frac{dP_k}{dx_i} = r_{k1}' \frac{dX_1}{dx_i} + \cdots + r_{kn}' \frac{dX_n}{dx_i}$$

ausgedrückt.

Es fragt sich, ob die n-reihige Determinante:

$$\Delta = \left| \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_j}{\partial z} p_i + \sum_\nu \frac{\partial X_j}{\partial p_\nu} r_{\nu i} \right|$$

vermöge: $r_{\nu k} = r_{k\nu}$ verschwindet. Nach der an die Spitze dieser Nummer gestellten Bemerkung ist dies offenbar nicht der Fall. Man erhält also eine Bestimmung aller r_{ki}' durch die Größen $x, z, p, r_{\alpha\beta}$:

$$r_{ki}' = R_{ki}(x_1, \ldots, z, \ldots, p_n, \ldots, r_{nn}),$$

und dabei ergibt sich, daß jedes R_{ki} vermöge: $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$ gleich R_{ik} ist. [558

Unsere Berührungstransformation transformiert daher nicht allein $z, x_1, \ldots, x_n$ und die *ersten* Differentialquotienten von z nach den x_k, sondern auch die zweiten Differentialquotienten von z. Ähnliche Überlegungen zeigen, daß auch die höheren Differentialquotienten unter sich transformiert werden.

Ist nun eine Gruppe von Berührungstransformationen vorgelegt, so findet man durch Mitberücksichtigung von allen Differentialquotienten erster, zweiter bis m-ter Ordnung eine erweiterte Gruppe. Deren Invarianten sind Differentialinvarianten der ursprünglichen Gruppe.

§ 11.

26. Wir werden annehmen, daß einerseits eine Element-M_n, andererseits eine infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion $W(x, z, p)$ vorgelegt ist.

Wünschen wir nun, zu entscheiden, ob das Gleichungssystem: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ unserer Element-M_n die infinitesimale Transformation W gestattet, so bilden wir, wenn unser Gleichungssystem die Form:

$$z - F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

erhalten kann, die Ausdrücke:

$$[W, z - F] - W = \sum_k^{1\ldots n} \frac{\partial W}{\partial p_k}\left(p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}\right) - W,$$

$$\left[W, p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}\right] = -\frac{\partial W}{\partial x_k} - \frac{\partial W}{\partial z} p_k - \sum_i \frac{\partial W}{\partial p_i} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i},$$

führen sodann in diesen die Substitution: $z = F$, $p_k = \partial F : \partial x_k$ aus und verlangen schließlich, daß die hervorgehenden Ausdrücke identisch verschwinden sollen.

Hierdurch erhalten wir die Bedingungsgleichungen:

$$W\left(x_1, \ldots, x_n, F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad \frac{\partial W\left(x, F, \frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial x_k} = 0 \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)},$$

welche sich auf die erste reduzieren. Das Gleichungssystem: $z - F = 0$, $p_k - \partial F : \partial x_k = 0$ gestattet daher die infinitesimale Berührungstransformation W dann und nur dann, wenn es mit der Gleichung: $W = 0$ verträglich ist.

27. Kann das Gleichungssystem der vorgelegten Element-M_n nicht [559
die Form: $z - F(x) = 0$, $p_k - \partial F : \partial x_k = 0$ erhalten, so ist es, wie wir

wissen, immer möglich, dasselbe durch eine Eulersche Transformation auf diese Form zu bringen. Gleichzeitig verwandelt sich die infinitesimale Berührungstransformation W in eine Berührungstransformation in den neuen Veränderlichen, deren charakteristische Funktion wiederum W ist. Das eben abgeleitete Resultat gilt daher immer, kurz es besteht der Satz:

Satz 20. *Das Gleichungssystem*[1]) *einer Element-M_n gestattet eine infinitesimale Berührungstransformation W dann und nur dann, wenn es mit der Gleichung: $W(x, z, p) = 0$ verträglich ist.*[2])

Dieser schöne, wenn auch im Grunde selbstverständliche Satz, den ich im Jahre 1871 oder 1872 entdeckte, war der Ausgangspunkt für meine Untersuchungen über infinitesimale Berührungstransformationen.

28. Wir wollen jetzt annehmen, daß $q > n + 1$ unabhängige Gleichungen:

$$\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0, \ldots, \Phi_q = 0$$

eine Elementmannigfaltigkeit bestimmen, welche natürlich ∞^{2n+1-q} Elemente enthält. Man übersieht leicht, daß diese Elementmannigfaltigkeit dann und nur dann die infinitesimale Berührungstransformation W gestattet, wenn sie von charakteristischen Streifen der Gleichung: $W = 0$ erzeugt ist.

29. Wir wollen nun annehmen, daß eine Element-M_{n-1} vorgelegt ist, welche die infinitesimale Berührungstransformation W nicht gestattet. Bilden wir dann alle endlichen Transformationen derjenigen eingliedrigen Gruppe, deren infinitesimale Transformation W ist, und führen alle diese Transformationen auf die Elemente unserer M_{n-1} aus, so erhalten wir [560
∞^n Elemente, deren Inbegriff eine Element-M_n bildet, welche die infinitesimale Transformation W gestattet, welche also die Gleichung: $W = 0$ erfüllt.

In dieser Weise findet man offenbar alle Element-M_n, welche die Gleichung: $W = 0$ erfüllen.

---

1) Der Satz 20 gilt ohne Ausnahme, also insbesondere auch, wenn die betreffende Element-M_n eine singuläre Integral-M_n [von: $W = 0$] liefert.

2) Man kann den Satz des Textes auch so aussprechen:

Eine Elementmannigfaltigkeit gestattet die infinitesimale Berührungstransformation W dann und nur dann, wenn sie von charakteristischen Streifen der Gleichung: $W = 0$ erzeugt ist.

Diese Formulierung ist aber insofern spezieller als diejenige des Textes, als sie singuläre Integralmannigfaltigkeiten nicht berücksichtigt. Was die Theorie der singulären Integralmannigfaltigkeiten einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung betrifft, verweise ich auf Darbouxs gekrönte Preisschrift.

Diese von mir herrührende Methode umfaßt die Cauchysche Integrationstheorie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung als speziellen Fall.

30. Hieran schließen wir einige Betrachtungen über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die eine vorgelegte infinitesimale Berührungstransformation W gestatten.

Ist: $\Phi = 0$ eine derartige Gleichung m-ter Ordnung, so bestimmt jedes Wertsystem:

$$z, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m}$$

ein Element der Gleichung. Es ist nun immer möglich, jedes Element der Gleichung: $\Phi = 0$ zu finden, welches von der infinitesimalen Transformation in ein benachbartes Element übergeführt wird, das mit dem vorgelegten vereinigt liegt. Der Inbegriff aller derartigen Elemente gestattet die infinitesimale Transformation, und es ist leicht zu erkennen, daß sich alle diese Elemente zu Elementmannigfaltigkeiten zusammenordnen lassen.

In dieser Weise gelingt es, eine ausgezeichnete Klasse Integrale[1]) der Gleichung: $\Phi = 0$ zu finden, und zwar durch Integration einer partiellen Differentialgleichung m-ter Ordnung in n Veränderlichen: $\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Die betreffenden Integralmannigfaltigkeiten genügen alle der Gleichung: $W = 0$.

31. Die vorangehenden Betrachtungen dehnen sich ohne weiteres auf den Fall aus, daß eine vorgelegte Gleichung m-ter Ordnung: $\Phi = 0$ mehrere vertauschbare infinitesimale Transformationen gestattet, deren charakteristische Funktionen: $W_1, \ldots, W_q$ keine Funktionalrelation von der Form:

$$\Omega(W_1 : W_q, \ldots, W_{q-1} : W_q) = 0$$

erfüllen.

Gestattet überhaupt ein integrables System partieller Differentialgleichungen irgend eine endliche oder unendliche Gruppe von Berührungstransformationen, so läßt sich hieraus immer Vorteil für die [561
Integration desselben ziehen. Freilich findet man im allgemeinen nur spezielle Klassen von Integralen.

1) Math. Annalen, Bd. XI, S. 490, Anmerkung [Hier Abh. III, S. 190, Anm. 2].

§ 12.

32. Kennt man die Definitionsgleichungen einer endlichen Transformationsgruppe, so ist es natürlich immer möglich, beliebig viele Glieder in den Reihenentwickelungen der betreffenden infinitesimalen Transformationen zu berechnen. Sodann findet man die Zusammensetzung der Gruppe durch ausführbare Rechnungen.

33. Enthält eine r-gliedrige Gruppe: $X_1, \ldots, X_{r-1}, Y$ eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe: $X_1, \ldots, X_{r-1}$, welche nicht invariant ist, so gibt es $r-2$ [unabhängige] infinitesimale Transformationen:

$$Z_k = e_{k1} X_1 + \cdots + e_{k,r-1} X_{r-1},$$

welche Relationen von der Form:

$$(Z_k Y) = d_{k1} X_1 + \cdots + d_{k,r-1} X_{r-1} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,r-2)}$$

erfüllen. Diese $r-2$ infinitesimalen Transformationen bilden eine $(r-2)$-gliedrige Gruppe, die in der $(r-1)$-gliedrigen Gruppe invariant ist.

Dieser Satz läßt sich nach mehreren Richtungen verallgemeinern.

34. Enthält eine einfache r-gliedrige Gruppe weniger als neun Parameter, so ist sie dreigliedrig oder achtgliedrig. Im ersten Falle ist sie holoedrisch isomorph mit der allgemeinen projektiven Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Im zweiten Falle ist sie holoedrisch isomorph mit der allgemeinen projektiven Gruppe einer Ebene.

Die zur Bestimmung aller einfachen Gruppen mit neun Parametern erforderlichen Rechnungen habe ich größtenteils durchgeführt; nach den Ergebnissen derselben ist es wahrscheinlich, daß es keine einfache Gruppe mit neun Parametern gibt.

35. Enthält eine einfache r-gliedrige Gruppe Untergruppen mit $r - \varrho$ Parametern und keine Untergruppe mit mehr Parametern, so gibt es gleichzusammengesetzte Gruppen Γ in einem ϱ-fach ausgedehnten Raume. Für kleine Werte der Zahl ϱ (jedenfalls für $\varrho = 1, 2, 3$ oder 4) kann nun die Gruppe Γ so gewählt werden, daß sie mit einer projektiven Gruppe des ϱ-fachen Raumes ähnlich ist. Dieser Satz gilt aber nicht allgemein für jeden Wert der Zahl ϱ. Diese Bemerkung ist von Wichtigkeit für die Integralrechnung.

§ 13.

36. In früheren Arbeiten entwickelte ich eine allgemeine Inte- [562
grationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen

Transformationen. Die Erledigung eines solchen Problems verlangte jedesmal die Integration gewisser Hilfsgleichungen, die aber unter Umständen in mehreren Weisen gewählt werden konnten.

Ich will jetzt ausdrücklich hervorheben, daß die Ordnungszahlen dieser Hilfsgleichungen immer dieselben bleiben.

Auch in diesem Punkte besteht eine vollständige Analogie zwischen der Galoisschen Theorie der algebraischen Gleichungen und meiner Integrationstheorie (vgl. C. Jordans Traité des substitutions).

V.

Die linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen. [253

Leipz. Ber. 1891, Heft II, abgeliefert 30. 6. 1891, S. 253–270. Vorgelegt in der Sitzung vom 11. 5. 1891.

1. Wir denken uns eine lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung vorgelegt:

$$y^{(n)} - \alpha_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} - \cdots - \alpha_1(x)\,y' - \alpha_0(x)\,y = 0 \tag{1}$$

und verstehen unter:

$$y_0 = f_0(x), \quad y_1 = f_1(x), \ldots, y_{n-1} = f_{n-1}(x) \tag{2}$$

irgend n solche partikuläre Lösungen von (1), die keine lineare homogene Relation:

$$c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}(x) = 0 \tag{3}$$

mit konstanten Koeffizienten erfüllen.

Wir nehmen ferner an, daß wir zufällig l von einander unabhängige Relationen:

$$F_\lambda(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{4}$$

kennen, die identisch erfüllt werden, wenn man für $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ die, uns übrigens unbekannten, partikulären Lösungen (2) der Differentialgleichung (1) einsetzt.

Unsere Aufgabe soll sein, die Kenntnis der Relationen (4) so viel wie möglich für die Integration von (1) zu verwerten.

§ 1.

2. Da die partikulären Lösungen (2) die Gleichungen (4) identisch erfüllen, so müssen sie auch die aus (4) durch Differentiation nach x entstehenden Gleichungen identisch befriedigen. Wir wollen diesen Umstand benutzen, um aus den gegebenen Gleichungen (4) neue Gleichungen für $y_0, \ldots, y_{n-1}$ abzuleiten. [254

Durch einmalige Differentiation von (4) ergeben sich l Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} + \sum_i^{0\dots n-1} y_i' \frac{\partial F_\lambda}{\partial y_i} = 0 \qquad {\scriptstyle (\lambda = 1, \dots, l),}$$

für die wir kürzer schreiben wollen:

$$(4') \qquad F_1' = 0, \dots, F_l' = 0.$$

Durch Differentiation der Gleichungen (4′) ergibt sich weiter:

$$\frac{\partial F_\lambda'}{\partial x} + \sum_i^{0\dots n-1} y_i' \frac{\partial F_\lambda'}{\partial y_i} + \sum_i^{0\dots n-1} y_i'' \frac{\partial F_\lambda'}{\partial y_i'} = 0 \qquad {\scriptstyle (\lambda = 1, \dots, l),}$$

wofür wir schreiben wollen:

$$(4'') \qquad F_1'' = 0, \dots, F_l'' = 0.$$

In dieser Weise fahren wir fort und bekommen der Reihe nach die Gleichungen:

$$(4''') \qquad F_1''' = 0, \dots, F_l''' = 0,$$

$$\cdot \quad \cdots \quad \cdot$$

$$(4^{(n-1)}) \qquad F_1^{(n-1)} = 0, \dots, F_l^{(n-1)} = 0.$$

3. Bei der Differentiation der Gleichungen ($4^{(n-1)}$) müssen wir berücksichtigen, daß $y_0, \dots, y_{n-1}$ partikuläre Lösungen von (1) sind; wir finden daher:

$$\frac{\partial F_\lambda^{(n-1)}}{\partial x} + \sum_i^{0\dots n-1} y_i' \frac{\partial F_\lambda^{(n-1)}}{\partial y_i} + \dots + \sum_i^{0\dots n-1} y_i^{(n-1)} \frac{\partial F_\lambda^{(n-1)}}{\partial y_i^{(n-2)}} +$$
$$+ \sum_i^{0\dots n-1} \left\{ \alpha_{n-1}(x)\, y_i^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)\, y_i' + \alpha_0(x)\, y_i \right\} \frac{\partial F_\lambda^{(n-1)}}{\partial y_i^{(n-1)}} = 0$$
$${\scriptstyle (\lambda = 1, \dots, l).}$$

Sind diese Gleichungen keine Folge von: (4), (4′), …, ($4^{(n-1)}$), so bezeichnen wir sie mit:

$$(4^{(n)}) \qquad F_1^{(n)} = 0, \dots, F_l^{(n)} = 0$$ [255

und bilden nunmehr die Gleichungen:

$$\frac{\partial F_\lambda^{(n)}}{\partial x} + \sum_i^{0\dots n-1} y_i' \frac{\partial F_\lambda^{(n)}}{\partial y_i} + \dots + \sum_i^{0\dots n-1} y_i^{(n-1)} \frac{\partial F_\lambda^{(n)}}{\partial y_i^{(n-2)}} +$$
$$+ \sum_i^{0\dots n-1} \left\{ \alpha_{n-1}(x)\, y_i^{(n-1)} + \dots + \alpha_0(x)\, y_i \right\} \frac{\partial F_\lambda^{(n)}}{\partial y_i^{(n-1)}} = 0.$$

Sind auch diese keine Folge der vorhergehenden Gleichungen: (4), …, ($4^{(n)}$), so behandeln wir sie genau so, wie eben die Gleichungen ($4^{(n)}$), und so weiter.

4. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens können wir niemals auf Gleichungen stoßen, die mit den vorher gefundenen unverträglich sind; denn es gibt ja nach unserer Voraussetzung ein System (2) von partikulären Lösungen der Differentialgleichung (1), das die Gleichungen (4) und mithin auch alle die daraus abgeleiteten Gleichungen: (4′), (4″), … identisch befriedigt.

Hieraus folgt, daß wir bei Fortsetzung unseres Verfahrens schließlich zu einem Gleichungensysteme:

$$(4^{(n+h)}) \qquad F_1^{(n+h)} = 0, \dots, F_l^{(n+h)} = 0 \qquad {\scriptstyle (h \gtreqless 0)}$$

gelangen müssen, das eine Folge der Gleichungen: (4), (4′), …, ($4^{(n+h-1)}$) ist.

5. Fassen wir alle die gefundenen Gleichungen zusammen, so erhalten wir ein Gleichungssystem von der Form:

$$(5) \qquad \begin{cases} F_1 = 0, \dots, F_l = 0, \\ F_1' = 0, \dots, F_l' = 0, \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ F_1^{(n+h-1)} = 0, \dots, F_l^{(n+h-1)} = 0, \end{cases}$$

das folgende Eigenschaften besitzt:

Erstens wird es identisch befriedigt, wenn man für $y_0, \dots, y_{n-1}$, $y_0', \dots, y_{n-1}'$, und so weiter die Funktionen: $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$ und deren Ableitungen einsetzt; zweitens aber ergibt es bei einmaliger Differentiation nach x lauter Gleichungen, die bereits eine Folge von (5) sind, dabei vorausgesetzt, daß man nach geschehener Differentiation die n-ten Ableitungen von $y_0, \dots, y_{n-1}$ vermöge der Gleichungen:

$$(6) \qquad y_i^{(n)} = \alpha_{n-1}(x)\, y_i^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)\, y_i' + \alpha_0(x)\, y_i \qquad {\scriptstyle (i = 0, 1, \dots, n-1)}$$ [256

durch die Ableitungen niedrigerer Ordnung ausgedrückt hat.

Die zweite dieser beiden Eigenschaften kann übrigens kürzer auch so gefaßt werden: Das Gleichungensystem (5) in den $nn+1$ Veränderlichen: $x, y_0, \dots, y_{n-1}, y_0', \dots, y_{n-1}^{(n-1)}$ gestattet die infinitesimale Transformation:

$$(7) \qquad \begin{cases} Xf = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \displaystyle\sum_i^{0\dots n-1} y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i} + \dots + \sum_i^{0\dots n-1} y_i^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-2)}} + \\ \qquad + \displaystyle\sum_i^{0\dots n-1} \left\{ \alpha_{n-1}(x)\, y_i^{(n-1)} + \dots + \alpha_0(x)\, y_i \right\} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}} \end{cases}$$

in diesen Veränderlichen.

6. Der Sinn der Gleichungen (5) ist klar: sie bilden mit (6) zusammen ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die n Unbekannten: $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$; kennt man die allgemeinsten Lösungen: $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ dieses Systems von Differentialgleichungen, so kennt man damit zugleich das allgemeinste System von partikulären Lösungen der Differentialgleichung (1), das die vorgelegten Relationen (4) befriedigt.

Wir schließen hieraus, daß unsere Aufgabe, die vorgelegten Relationen (4) so viel wie möglich für die Integration von (1) zu verwerten, folgende schärfere Fassung erhalten kann:

Es soll das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (5), (6) auf möglichst einfache Hilfsgleichungen zurückgeführt werden.

7. Unter Umständen kann es vorkommen, daß das System (5), (6) gar kein wirkliches System von Differentialgleichungen ist. Aus den Gleichungen (5) ergeben sich nämlich eine gewisse Anzahl, $m \geqq l$ von einander unabhängige Relationen zwischen $x, y_0, \ldots, y_{n-1}$ allein:

$$F_\mu(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

Diese Gleichungen (8) können selbstverständlich keine von $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ freie Relation nach sich ziehen, sie sind daher nach m von den y auflösbar. Ist nun insbesondere $m = n$, so bekommen wir ohne weiteres $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ als Funktionen von x ausgedrückt und haben damit [257 ohne Integration ein System von n partikulären Lösungen der Differentialgleichung (1).

Tritt der eben besprochene Fall nicht ein, so ist (5), (6) ein wirkliches System von Differentialgleichungen und kann natürlich im allgemeinen nicht ohne Integration gelöst werden. Mit diesem Integrationsprobleme haben wir uns nunmehr zu beschäftigen.

§ 2.

8. Wir beginnen damit, daß wir gewisse geometrische Vorstellungen einführen.

Die $nn + 1$ Veränderlichen:

$$x, y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n-1)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

deuten wir als Punktkoordinaten in einem $(nn + 1)$-fach ausgedehnten Raume R_{nn+1}. Sind nun wie auf S. 253 [hier S. 291] die Funktionen $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ solche partikuläre Lösungen der Differentialgleichung (1), die keine Relation von der Form (3) befriedigen, so stellen die nn Gleichungen:

$$y_i = f_i(x), \quad y_i' = f_i'(x), \ldots, y_i^{(n-1)} = f_i^{(n-1)}(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{9}$$

eine Kurve des Raumes R_{nn+1} dar, die wir kurz als eine I n t e g r a l k u r v e bezeichnen wollen.

9. Die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (1) hat unter den gemachten Voraussetzungen die Form:

$$C_0 f_0(x) + C_1 f_1(x) + \cdots + C_{n-1} f_{n-1}(x),$$

wo die C willkürliche Konstanten sind. Wir sehen hieraus, daß die Differentialgleichung (1) vollständig integriert ist, sobald man eine Integralkurve von der angegebenen Beschaffenheit kennt. Ferner sehen wir, daß es im Raume R_{nn+1} gerade ∞^{nn} solche Integralkurven gibt, und daß man aus einer von diesen sofort alle anderen herleiten kann; man erhält nämlich alle ∞^{nn} Integralkurven, wenn man auf die Integralkurve (9) die allgemeinste Transformation von der Gestalt: [258

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x, \\ \mathfrak{y}_i &= \sum_\nu^{0 \ldots n-1} c_i^{(\nu)} y_\nu, \\ \mathfrak{y}_i' &= \sum_\nu^{0 \ldots n-1} c_i^{(\nu)} y_\nu', \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{y}_i^{(n-1)} &= \sum_\nu^{0 \ldots n-1} c_i^{(\nu)} y_\nu^{(n-1)} \\ &(i = 0, 1, \ldots, n-1) \end{aligned}\right. \tag{10}$$

ausführt, unter den $c_i^{(\nu)}$ Parameter verstanden, deren Determinante natürlich nicht verschwinden darf.

Es liegt auf der Hand, daß die ∞^{nn} Transformationen (10) eine nn-gliedrige Gruppe bilden. Bei dieser Gruppe werden unsere ∞^{nn} Integralkurven unter einander vertauscht, und zwar, wie man leicht sieht, einfach transitiv. Es gibt nämlich in der Gruppe (10) stets eine aber auch nur eine Transformation, die eine beliebig gewählte unserer ∞^{nn} Integralkurven in eine andere beliebig gewählte Integralkurve überführt. Insbesondere ist die identische Transformation die einzige in der Gruppe (10) enthaltene Transformation, bei der eine beliebig gewählte Integralkurve in sich übergeht.

10. Wir bemerken weiter, daß das Gleichungensystem (9) die infinitesimale Transformation:

$$\left\{\begin{aligned} Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_i^{0 \ldots n-1} y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i} + \cdots + \sum_i^{0 \ldots n-1} y_i^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-2)}} + \\ + \sum_i^{0 \ldots n-1} \left\{ \alpha_{n-1}(x) y_i^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0(x) y_i \right\} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

gestattet, und schließen hieraus, daß unsere ∞^{nn} Integralkurven sämtlich Bahnkurven der infinitesimalen Transformation Xf sind.

Das Umgekehrte gilt allerdings nicht; es sind nicht alle Bahnkurven von Xf zugleich auch Integralkurven. Aber es hat keine Schwierigkeit, anzugeben, wann eine Bahnkurve von Xf zugleich eine Integralkurve ist.

Augenscheinlich wird jede Bahnkurve von Xf durch nn Glei- [259
chungen von der Form:

$$y_i = \varphi_i(x), \quad y_i' = \varphi_i'(x), \quad \ldots, \quad y_i^{(n-1)} = \varphi_i^{(n-1)}(x) \qquad {\scriptstyle (i=0,1,\ldots,n-1)} \tag{11}$$

dargestellt. Soll nun die Bahnkurve (11) keine Integralkurve sein, so ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionen $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ eine Relation:

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) = 0 \tag{12}$$

identisch erfüllen. Durch Differentiation nach x ergibt sich, daß dann mit (12) zugleich auch die $n-1$ Gleichungen:

$$c_0\varphi_0^{(i)}(x) + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}^{(i)}(x) = 0 \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n-1)}$$

identisch bestehen, daß also die Gleichungen (11) die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & \cdot & y_{n-1} \\ y_0' & y_1' & \cdot & y_{n-1}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \cdot & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

nach sich ziehen. Mit andern Worten: jede Bahnkurve von Xf, die keine Integralkurve ist, liegt auf der durch die Gleichung (13) dargestellten Mannigfaltigkeit.

Eine Integralkurve kann selbstverständlich niemals auf der Mannigfaltigkeit (13) liegen. Berücksichtigen wir daher noch, daß diese Mannigfaltigkeit die infinitesimale Transformation Xf gestattet und demnach von Bahnkurven von Xf erzeugt ist, so erkennen wir folgendes:

Jede Bahnkurve von Xf, die durch einen nicht auf der Mannigfaltigkeit (13) gelegenen Punkt geht, ist eine Integralkurve. Denkt man sich alle derartigen Bahnkurven konstruiert, so erhält man alle ∞^{nn} Integralkurven. Diese ∞^{nn} Integralkurven erfüllen den ganzen R_{nn+1} mit Ausnahme der Mannigfaltigkeit (13), und zwar geht durch jeden Punkt des R_{nn+1}, der nicht auf dieser Mannigfaltigkeit liegt, stets eine aber auch nur eine Integralkurve.

Wir gehen jetzt dazu über, die gewonnenen Vorstellungen zur Integration der Gleichungen (5), (6) zu verwerten.

§ 3.

11. Die Integration der Differentialgleichungen (5), (6) kommt [260
darauf hinaus, alle Integralkurven des R_{nn+1} zu finden, die auf der Mannigfaltigkeit liegen, welche durch die Gleichungen (5) dargestellt wird. Von dieser Mannigfaltigkeit wissen wir aber nach S. 256 [hier S. 293], daß sie die infinitesimale Transformation Xf gestattet. Wir können also schließen, daß sie von lauter Bahnkurven von Xf erzeugt ist, und da sie unter den von uns gemachten Voraussetzungen jedenfalls eine Integralkurve enthält, so sind die auf ihr liegenden Bahnkurven offenbar im allgemeinen zugleich auch Integralkurven. Wir können demnach unser Integrationsproblem auch so aussprechen:

Es sollen die Integralkurven aufgestellt werden, von denen die Mannigfaltigkeit (5) erzeugt ist.

12. Wir wollen annehmen, daß die Gleichungen (5) nach gerade $nn - s$ von den nn Veränderlichen: $y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n-1)}$ auflösbar sind, daß sie also eine $(s+1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit des R_{nn+1} darstellen. Diese Mannigfaltigkeit, die wir kurz M_{s+1} nennen, ist dann natürlich von ∞^s Integralkurven erzeugt, und zwar geht durch jeden Punkt der M_{s+1} eine und nur eine Integralkurve.

Führen wir auf die M_{s+1} alle ∞^{nn} Transformationen der Gruppe:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x, \\ \mathfrak{y}_i &= \sum_{\nu}^{0\ldots n-1} c_i^{(\nu)} y_\nu, \\ \mathfrak{y}_i' &= \sum_{0}^{0\ldots n-1} c_i^{(\nu)} y_\nu', \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{y}_i^{(n-1)} &= \sum_{\nu}^{0\ldots n-1} c_i^{(\nu)} y_\nu^{(n-1)} \\ &{\scriptstyle (i=0,1,\ldots,n-1)} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

aus, so erhalten wir unendlich viele neue $(s+1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die alle ebenfalls von je ∞^s Integralkurven erzeugt sind; denn nach S. 257 [hier S. 295] verwandelt sich jede Integralkurve bei jeder Transformation von der Form (10) wieder in eine Integralkurve. [261

Haben nun irgend zwei dieser $(s+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten einen Punkt gemein, so haben sie notwendig auch die durch diesen Punkt gehende Integralkurve gemein; wenn sie daher einander überhaupt schneiden, schneiden sie einander sicher in einer Mannigfaltigkeit, die wiederum von Integralkurven erzeugt ist. Wir haben somit hier ein Mittel, um aus der uns bekannten Mannigfaltigkeit M_{s+1} Mannigfaltigkeiten von geringerer Dimensionenzahl herzuleiten, die ebenfalls von Integralkurven erzeugt sind; es fragt sich nur: welches sind die kleinsten von Integralkurven erzeugten Mannigfaltigkeiten, die wir auf diese Weise finden können?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Schar von Mannigfaltigkeiten, die sich aus M_{s+1} bei Ausführung der ∞^{nn} Transformationen (10) ergibt, etwas näher untersuchen.

13. Unsere M_{s+1} wird eine gewisse Anzahl infinitesimale Transformationen der Gruppe (10) gestatten. Wir wollen annehmen, daß sie deren gerade $q \gtreqless 0$ unabhängige gestattet, die natürlich eine q-gliedrige Untergruppe der Gruppe (10) erzeugen. Da jede Integralkurve von M_{s+1} bei den ∞^q Transformationen dieser Untergruppe ∞^q verschiedene Lagen annimmt, deren Inbegriff eine $(q+1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bildet, so muß die ganze Zahl q jedenfalls $\leq s$ sein. Unter der gemachten Voraussetzung wird dann unsere M_{s+1} bei den ∞^{nn} Transformationen (10) in gerade ∞^{nn-q} verschiedene $(s+1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten übergehen, deren Inbegriff selbstverständlich bei der Gruppe (10) invariant bleibt.

Da bei der Gruppe (10) jede Integralkurve in jede andere übergeführt wird, und da außerdem durch jeden Punkt des R_{nn+1} eine und nur eine Integralkurve geht, so können wir schließen, daß von den ∞^{nn-q} eben definierten Mannigfaltigkeiten durch jeden Punkt des R_{nn+1} gerade:

$$\frac{\infty^{nn-q} \cdot \infty^{s+1}}{\infty^{nn+1}} = \infty^{s-q}$$

verschiedene gehen. Ist insbesondere $q = s$, so geht durch jeden Punkt des R_{nn+1} eine und nur eine solche Mannigfaltigkeit, und der Inbegriff dieser ∞^{nn-s} Mannigfaltigkeiten bestimmt eine bei der Gruppe (10) invariante Zerlegung des R_{nn+1}.

14. Wir betrachten jetzt irgend einen Punkt P des R_{nn+1}. Durch P gehen, wie soeben gezeigt wurde, ∞^{s-q} von unseren ∞^{nn-q} $(s+1)$-fach [262
ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. Diese ∞^{s-q} Mannigfaltigkeiten haben jedenfalls die durch P gehende Integralkurve gemein, jedoch werden sie einander im allgemeinen in einer größeren, etwa gerade in einer $(p+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_{p+1}$ schneiden, die natürlich von ∞^p Integralkurven erzeugt ist. Für jeden andern Punkt P' dieser $\mathfrak{M}_{p+1}$ werden dann die ∞^{s-q} durch P' gehenden $(s+1)$-fach ausgedehnten

Mannigfaltigkeiten mit den ∞^{s-q} durch P gehenden zusammenfallen und einander demnach ebenfalls gerade in der $\mathfrak{M}_{p+1}$ schneiden.

Wir sehen also, daß unsere ∞^{nn-q} $(s+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten jedem Punkte des R_{nn+1} eine hindurchgehende $(p+1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_{p+1}$ zuordnen, die von ∞^p Integralkurven erzeugt ist, und zwar derart, daß jeder Punkt des R_{nn+1} bloß einer solchen $\mathfrak{M}_{p+1}$ angehört. Es gibt folglich im ganzen ∞^{nn-p} verschiedene derartige $\mathfrak{M}_{p+1}$, und der Inbegriff dieser $\mathfrak{M}_{p+1}$ bestimmt eine Zerlegung des Raumes R_{nn+1}. Da überdies der Inbegriff unserer ∞^{nn-q} $(s+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten die Gruppe (10) gestattet, so ist zugleich klar, daß auch die eben definierte Zerlegung des R_{nn+1} in ∞^{nn-p} $\mathfrak{M}_{p+1}$ bei dieser Gruppe invariant bleibt.

Endlich ist noch zu bemerken, daß unsere ∞^{nn-p} $\mathfrak{M}_{p+1}$ augenscheinlich die kleinsten Mannigfaltigkeiten des R_{nn+1} sind, die wir aus unseren ∞^{nn-q} $(s+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten durch Schneidung erhalten können.

15. Die im Vorstehenden besprochene Zerlegung des R_{nn+1} in ∞^{nn-p} $\mathfrak{M}_{p+1}$ blieb bei der Gruppe (10) invariant; da nun diese Gruppe ∞^{nn} Transformationen enthält und außerdem jede unserer ∞^{nn-p} $\mathfrak{M}_{p+1}$ in jede andere überführen kann, so muß jede dieser $\mathfrak{M}_{p+1}$ bei gerade ∞^p Transformationen der Gruppe (10) invariant bleiben, und die betreffenden ∞^p Transformationen müssen eine p-gliedrige Untergruppe $\mathfrak{G}_p$ der Gruppe (10) bilden. Zu zwei verschiedenen unserer $\mathfrak{M}_{p+1}$ gehören dabei im allgemeinen zwei verschiedene Untergruppen $\mathfrak{G}_p$ der Gruppe (10), aber diese beiden Untergruppen sind stets innerhalb der Gruppe (10) mit einander gleichberechtigt.

16. Wir denken uns jetzt die Gleichungen einer beliebigen unserer ∞^{nn-p} $\mathfrak{M}_{p+1}$ aufgestellt, was immer ausführbar ist. Diese Gleichungen haben die Form:

$$(14) \qquad \Phi_\nu(x, y_0, \ldots, y_{n-1}, y_0', \ldots, y_{n-1}^{(n-1)}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, nn-p) \quad [263$$

und sind nach $nn-p$ von den Veränderlichen $y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n-1)}$ auflösbar. Da die $\mathfrak{M}_{p+1}$ von ∞^p Integralkurven erzeugt ist, so gestattet überdies das Gleichungensystem (14) die infinitesimale Transformation Xf.

Ist nun $p = 0$, so stellen die Gleichungen (14) schon eine Integralkurve dar; es ist infolgedessen gar keine Integration erforderlich, und die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (1) läßt sich unmittelbar angeben.

Ist dagegen $p > 0$, so denken wir uns die p-gliedrige Untergruppe $\mathfrak{G}_p$ der Gruppe (10) bestimmt, bei der das Gleichungensystem (14) invariant bleibt. Auch diese Untergruppe kann stets aufgestellt werden, und es können nicht bloß ihre infinitesimalen Transformationen, sondern auch ihre endlichen Gleichungen angegeben werden. Wir wollen uns aber nur ihre infinitesimalen Transformationen aufgestellt denken, und zwar werden diese die Form haben:

$$Y_k f = \sum_{i,\nu,j}^{0,1\ldots n-1} c_{kij} y_i^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial y_j^{(\nu)}} \qquad (k=1,\ldots,p). \tag{15}$$

Es bleibt nunmehr noch, zu zeigen, wie die Gruppe (15) verwertet werden kann, wenn man die auf der Mannigfaltigkeit (14) liegenden Integralkurven bestimmen will.

§ 4.

17. Die Aufgabe, um deren Erledigung es sich jetzt handelt, ist folgende:

Gegeben ist in dem Raume R_{nn+1} eine $(p+1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit (14), die von ∞^p Integralkurven erzeugt ist und die infinitesimale Transformation:

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_i^{0\ldots n-1} y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i} + \cdots + \sum_i^{0\ldots n-1} y_i^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-2)}} + \\ + \sum_i^{0\ldots n-1} \{\alpha_{n-1}(x) y_i^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0(x) y_i\} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}}$$

gestattet. Diese Mannigfaltigkeit gestattet außerdem eine bekannte [264
p-gliedrige Gruppe (15), bei der die ∞^p Integralkurven der Mannigfaltigkeit unter einander vertauscht werden. Es sollen alle auf der Mannigfaltigkeit (14) liegenden Integralkurven oder, was auf dasselbe hinauskommt, alle auf ihr liegenden Bahnkurven von Xf bestimmt werden.

18. Um dieses Integrationsproblem auf eine möglichst einfache Form zu bringen, denken wir uns zunächst die Gleichungen (14) nach $nn-p$ von den nn Veränderlichen $y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n-1)}$ aufgelöst. Die $nn-p$ Veränderlichen, nach denen diese Auflösung ausgeführt wird, nennen wir $z_{p+1}, \ldots, z_{nn}$; die übrigen p von den $y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n-1)}$ nennen wir $z_1, \ldots, z_p$. Dann wird das Gleichungensystem (14) in der Form erscheinen:

$$z_{p+\nu} = \varphi_\nu(x, z_1, \ldots, z_p) \qquad (\nu=1,\ldots,nn-p). \tag{16}$$

Nunmehr denken wir uns aus der infinitesimalen Transformation Xf die $nn-p$ Differentialquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial z_{p+1}}, \frac{\partial f}{\partial z_{p+2}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{nn}} \tag{17}$$

weggelassen und in den Koeffizienten der übrigen Differentialquotienten die Veränderlichen $z_{p+1}, \ldots, z_{nn}$ vermöge (16) durch $z_1, \ldots, z_p$ und x ausgedrückt. Auf diese Weise erhalten wir in den $p+1$ Veränderlichen $x, z_1, \ldots, z_p$ eine verkürzte infinitesimale Transformation:

$$\overline{X}f = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_\mu^{1\ldots p} \xi_\mu(x, z_1, \ldots, z_p) \frac{\partial f}{\partial z_\mu}.$$

Die Bestimmung aller auf der Mannigfaltigkeit (14) liegenden Integralkurven kommt dann darauf hinaus, irgend p unabhängige Lösungen der Differentialgleichung:

$$\overline{X}f = 0 \tag{18}$$

zu bestimmen; denn sind: $\omega_1(x, z_1, \ldots, z_p), \ldots, \omega_p(x, z_1, \ldots, z_p)$ irgend p unabhängige Lösungen von (18), so stellen die Gleichungen:

$$\omega_1(x, z_1, \ldots, z_p) = \text{const.}, \ldots, \omega_p(x, z_1, \ldots, z_p) = \text{const.}$$

zusammen mit den Gleichungen (16) augenscheinlich die ∞^p Integral- [265
kurven dar, von denen die Mannigfaltigkeit (14) erzeugt ist.

19. Die infinitesimalen Transformationen (15) behandeln wir jetzt gerade so, wie vorhin Xf. Wir lassen aus ihnen die $nn-p$ Differentialquotienten (17) fort und drücken in den übrigen Gliedern $z_{p+1}, \ldots, z_{nn}$ vermöge (16) durch $x, z_1, \ldots, z_p$ aus. In dieser Weise erhalten wir in $x, z_1, \ldots, z_p$ die p verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{Y}_k f = \sum_\mu^{1\ldots p} \eta_{k\mu}(x, z_1, \ldots, z_p) \frac{\partial f}{\partial z_\mu} \qquad (k=1,\ldots,p). \tag{19}$$

Da nun die infinitesimalen Transformationen (15) eine Gruppe erzeugen, bei der das Gleichungensystem (14) und also auch das äquivalente Gleichungensystem (16) invariant bleibt, so müssen auch die verkürzten infinitesimalen Transformationen (19) in den Veränderlichen $x, z_1, \ldots, z_p$ eine Gruppe erzeugen. Da außerdem die Gruppe (15) die ∞^p Integralkurven der Mannigfaltigkeit (14) unter einander vertauscht, so ist klar, daß die verkürzte Gruppe (19) jede Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung (18) wieder in eine Lösung von (18) überführt, daß also die Differentialgleichung (18) die Gruppe (19) gestattet.

Bedenken wir endlich noch, daß die p-gliedrige Gruppe (15) jede der ∞^p Integralkurven auf der Mannigfaltigkeit (14) in jede andere überführt, so erkennen wir, daß auch die verkürzte Gruppe (19) p-gliedrig ist, und daß zwischen den $p+1$ infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}f, \quad \overline{Y}_1 f, \ldots, \overline{Y}_p f$$

keine Relation von der Form:

$$\psi(x, z_1, \ldots, z_p)\overline{X}f + \sum_k^{1\ldots p} \psi_k(x, z_1, \ldots, z_p) Y_k f = 0 \tag{20}$$

besteht.

20. Unser Integrationsproblem kann nunmehr folgendermaßen gefaßt werden:

In den $p+1$ Veränderlichen $x, z_1, \ldots, z_p$ ist eine lineare partielle Differentialgleichung (18) gegeben, die eine bekannte p-gliedrige Gruppe (19) gestattet, und zwar besteht zwischen $\overline{X}f$ und den infinitesimalen Transformationen der Gruppe keine Relation von der Form (20). Die Differentialgleichung (18) ist zu integrieren.

Dieses Integrationsproblem aber kann nach der von mir in [266 Band XXV der Mathematischen Annalen[1]) entwickelten Methode behandelt werden. Es ist stets möglich, die niedrigsten Hilfsgleichungen aufzustellen, deren Integration zur Lösung des ganzen Integrationsproblems erforderlich ist; die Ordnung der betreffenden Hilfsgleichungen wird dabei durch die Zusammensetzung der Gruppe (19) bestimmt. Gehört diese Gruppe insbesondere zu den von mir sogenannten integrabeln Gruppen, so wird die Erledigung des ganzen Integrationsproblems nur Quadraturen erfordern.

21. Im Vorstehenden ist ganz allgemein gezeigt, wie man die Kenntnis der Relationen (4) zwischen den partikulären Lösungen: $y_0, y_1, \ldots, y_n$ der Differentialgleichung (1) für die Integration der Gleichung (1) verwerten kann. Es ist das eine Aufgabe, die für spezielle Werte der Zahl n und für spezielle Formen der Relationen (4) in den letzten Jahren von einer ganzen Reihe von Mathematikern mit verschiedenen Methoden behandelt worden ist.

Mir kam es darauf an, zu zeigen, daß sich die genannte Aufgabe stets auf das von mir zuerst formulierte und erledigte Integrationsproblem zurückführen läßt: eine vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung zu integrieren, die eine bekannte Gruppe gestattet.

22. Halphen, der sich um die Theorie der linearen Differentialgleichungen so hervorragende Verdienste erworben hat, untersucht unter anderm den Fall, daß die partikulären Lösungen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ durch eine homogene Relation zweiten Grades:

$$\sum_{i,\nu}^{0,1\ldots n-1} \alpha_{i\nu} y_i y_\nu = 0 \tag{21}$$

1) [Bd. VI d. Ausg., Abh. III (1885), S. 208 ff.]

verknüpft sind, aus der sich durch Differentiation nach x keine neue Relation zwischen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ allein herleiten läßt. Wir wollen noch andeuten, wie man auf Grund der vorstehenden Theorie die von Halphen gefundenen Ergebnisse wiederfinden und für $n = 6$ sogar vervollständigen kann.

Ist $n = 4$, so hat die bei dem Integrationsprobleme in Betracht kommende einfache Gruppe dieselbe Zusammensetzung, wie die sechsgliedrige projektive Gruppe einer Fläche zweiten Grades im R_3. Diese Gruppe zerfällt in zwei dreigliedrige einfache Gruppen, die so beschaffen sind, [267 daß jede Transformation der einen mit jeder Transformation der andern vertauschbar ist. Nach meiner Integrationstheorie (Math. Ann. Bd. XXV) ist daher (außer einer Quadratur) nur die Integration von zwei Riccatischen Gleichungen erforderlich. Auf dasselbe Ergebnis kommt Halphen.

Ist $n = 5$, so ist die in Betracht kommende Gruppe zehngliedrig und mit der projektiven Gruppe eines linearen Komplexes im R_3 gleichzusammengesetzt. Nach meiner Integrationstheorie ist daher, in Übereinstimmung mit Halphen, die Integration einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung nötig.

Ist endlich $n = 6$, so ist nach einer von Klein herrührenden Bemerkung die in Betracht kommende Gruppe mit der fünfzehngliedrigen allgemeinen projektiven Gruppe des R_3 gleichzusammengesetzt; es kommt daher alles auf die Integration einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung zurück. In diesem Falle hat Halphen das Problem nicht auf seine einfachste Form zurückgeführt, denn er braucht außer der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung noch eine überflüssige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

23. Erwähnt sei noch, daß im Falle $n > 6$ das Integrationsproblem auf eine Differentialgleichung $(n-2)$-ter Ordnung hinauskommt, die sich nicht auf eine lineare Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung zurückführen läßt.

Die in Betracht kommende Gruppe ist nämlich gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen konformen Gruppe des Raumes von $n-2$ Dimensionen, die gerade $\frac{1}{2}n(n-1)$ Parameter enthält. Aus den durch Killing bestätigten Untersuchungen von Werner (Math. Annalen Bd. XXXV) geht nun hervor, daß es, sobald $n > 6$ ist, keine Gruppe in weniger als $n-2$ Veränderlichen gibt, die mit der allgemeinen konformen Gruppe des Raumes von $n-2$ Dimensionen gleichzusammengesetzt ist. Zugleich ergibt sich, daß jede Gruppe in $n-2$ Veränderlichen, welche die betreffende Zusammensetzung hat, durch eine Punkttransformation mit der konformen Gruppe des Raumes von $n-2$ Dimensionen ähnlich ist. Für $n=7$ und $n>8$ folgt das schon aus den Wernerschen Ergebnissen selbst. Für $n=8$ läßt es sich ohne Schwierigkeit beweisen, wie F. Klein, einer schriftlichen Mitteilung zufolge, bereits vor längerer Zeit erkannt hat. Berücksichtigt man schließlich noch, daß die konforme Gruppe [268 nicht in eine projektive Gruppe übergeführt werden kann, so sieht man die Richtigkeit der oben aufgestellten Behauptung unmittelbar ein.

24. Die oben entwickelte Theorie habe ich bereits im Jahre 1885 in den Verhandlungen der Ges. der Wiss. zu Kristiania skizziert[1]), allerdings in zu knapper Form. Sie soll seiner Zeit in den dritten Abschnitt meiner Theorie der Transformationsgruppen aufgenommen werden, den ich gegenwärtig mit dem tätigen Beistande des Herrn Prof. Engel vorbereite. Die hier gegebene Darstellung ist daher nach meinen Angaben von Herrn Professor Engel ausgearbeitet worden.

Schließlich will ich nicht unterlassen, auf eine soeben in den Comptes Rendus erschienene Mitteilung von Vessiot hinzuweisen. Diese wichtige Mitteilung, die allerdings andere Ziele verfolgt, als ich im Vorstehenden verfolgt habe, zeigt ebenfalls, wie meine Theorie der Transformationsgruppen für die Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen nutzbar gemacht werden kann.

25. Ich benutze diese Gelegenheit, um zu meiner zweiten Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie (diese Berichte 1890, S. 355 ff.)[2]) einige Bemerkungen hinzuzufügen.

Auf S. 375 [in § 3] der genannten Arbeit spreche ich von den sechsgliedrigen reellen Gruppen des Raumes x, y, z, die eine irreduzible Differentialgleichung zweiten Grades:

$$0 = \alpha dx^2 + \beta dy^2 + \gamma dz^2 + 2\varepsilon dx dy + 2\varphi dy dz + 2\psi dz dx$$

invariant lassen. Wenn ich dort sage, daß ich diesen Fall schon in früheren Arbeiten erledigt habe, so ist das nicht ganz korrekt ausgedrückt; ich dürfte eigentlich bloß sagen, daß die Erledigung dieses Falles ohne Schwierigkeit auf Grund meiner früheren Arbeiten geleistet werden kann.

Ich werde jetzt zeigen, wie das zu machen ist.

Läßt eine reelle Gruppe des Raumes x, y, z, bei der freie Beweglichkeit im Riemann-Helmholtzschen Sinne stattfindet, eine Differential-

1) [Bd. V d. Ausg., Abh. XXI.]
2) [Bd. II d. Ausg., Abh. VII.]

gleichung von der oben stehenden Form invariant, so ist sie durch eine reelle Transformation ähnlich entweder mit der projektiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades, oder mit einer sechs- [269 gliedrigen projektiven Gruppe, die einen Kegelschnitt invariant läßt und die Punkte dieses Kegelschnitts dreigliedrig transformiert. Das folgt unmittelbar aus meinen früheren Arbeiten. Nun aber kann die Fläche zweiten Grades und ebenso der Kegelschnitt reell oder imaginär sein.

Im zweiten Falle ist die Forderung der freien Beweglichkeit entweder ausnahmelos erfüllt, oder doch für alle Punkte, die nicht auf der Ebene des imaginären Kegelschnitts liegen. Im ersten Falle ist die Forderung der freien Beweglichkeit nur bei solchen Punkten erfüllt, für welche der Tangentenkegel an die invariante Fläche oder den invarianten Kegelschnitt imaginär ist. Gehört nämlich zu einem Punkte P ein reeller Tangentenkegel, so bleibt, wenn P festgehalten wird, auch der zugehörige Kegel invariant. Nach dem Prinzipe der freien Beweglichkeit muß aber, wenn P festgehalten wird, jeder Punkt noch in jeden andern Punkt der durch ihn gehenden, zu P gehörigen Pseudokugel übergehen können. Es müßte also jeder Punkt des besprochenen Kegels, der ja eine von diesen Pseudokugeln ist, in jeden andern und somit auch in den Punkt P übergehen können, was unmöglich ist. Folglich ist bei solchen Punkten, zu denen ein reeller Tangentenkegel gehört, das Axiom der freien Beweglichkeit nicht erfüllt.

Wir schließen hieraus, daß die sechsgliedrige Gruppe, die einen reellen Kegelschnitt invariant läßt, gar nicht in Betracht kommt, und daß die Fläche zweiten Grades, wenn sie reell ist, nicht geradlinig sein darf. Wir kommen also in der Tat, wie a. a. O. auf S. 376 gesagt ist, nur auf die euklidische Gruppe und die beiden nichteuklidischen Gruppen.

26. Im Vorstehenden haben wir gesehen, daß die Forderung der freien Beweglichkeit für den Punkt P nicht erfüllt ist, wenn eine der zu P gehörigen Pseudokugeln durch P geht. Diese Tatsache wird am Schlusse meiner genannten Abhandlung (auf S. 418) benutzt. Leider ist aber die dort gegebene Begründung der betreffenden Tatsache zwar richtig, aber nicht so durchsichtig, wie wünschenswert.

Es wird nämlich auf S. 418 gesagt: Wenn ein Punkt P festgehalten wird und er liegt auf einer der zugehörigen Pseudokugeln, so müßte er nach dem Prinzipe der freien Beweglichkeit in jeden andern Punkt der betreffenden Kugel übergehen können, und darin wird der Widerspruch gefunden. Daß dieser Schluß richtig ist, erkennt man am schnellsten, wenn man sich so ausdrückt: Unter den gemachten Voraussetzungen müßte jeder Punkt der besprochenen Pseudokugel in den Punkt P übergehen [270 können. Denn Herr v. Helmholtz verlangt ausdrücklich, daß, wenn ein Punkt P festgehalten wird, sich jeder andere Punkt ganz frei auf einer Fläche bewegen kann.

An einer anderen Stelle werde ich auf diese Betrachtungen zurückkommen. Dann werde ich auch noch zeigen, daß alle die Gruppen, die ich in meiner mehrfach erwähnten Abhandlung aufgestellt habe, so beschaffen sind, daß jede Invariante von q Punkten sich durch die Invarianten von Punktepaaren ausdrücken läßt (a. a. O. S. 359 Anm.).

VI.
Über Differentialgleichungen, die Fundamentalintegrale besitzen. [341

Leipz. Ber. 1893, Heft IV, abgeliefert 12. 10. 1893, S. 341—348. Vorgelegt in der Sitzung vom 8. 5. 1893.

1. Ein ausgezeichneter französischer Mathematiker, E. Vessiot (ancien élève de l'Ecole normale supérieure) hat neuerdings in einigen kurzen Noten[1]) eine Theorie solcher Differentialgleichungen 1. O.:

$$f(x, y, y') = 0$$

entwickelt, deren allgemeines Integral y sich durch m beliebige partikuläre Integrale: $y_1, \ldots, y_m$ folgendermaßen:

$$y = F(y_1, y_2, \ldots, y_m, a)$$

ausdrückt. Durch eine interessante Anwendung meiner allgemeinen gruppentheoretischen Sätze gelingt es ihm, alle derartigen Gleichungen zu bestimmen. Ihre Integrationstheorie deckt sich mit meiner Theorie der Definitionsgleichungen einer Gruppe:

$$x_1 = \Phi(x, a_1, a_2, \ldots).$$

2. In der letzten Sitzung (1. Mai 1893) der Académie des Sciences in Paris dehnt nun Herr Vessiot diese Theorie auf Gleichungen zweiter Ordnung:

$$f_2(x, y, y', y'') = 0$$

aus, während andrerseits Herr Alf Guldberg versucht, eine allgemeine Theorie für beliebige simultane Systeme zu begründen.

Es ist zu vermuten, daß die mir noch unbekannte Arbeit des ersten Verfassers sich durch dieselben Eigenschaften, wie seine ältern [342 Untersuchungen auszeichnet.

Herrn Guldbergs interessante Arbeit benutzt diejenigen von mir herrührenden Theorien, welche schon Vessiots ältere Noten verwerteten. Er kommt dabei zu bemerkenswerten Resultaten, welche indes anscheinend mit gewissen von mir herrührenden Untersuchungen (Math. Ann.

1) Journal de l'Ecole Normale 1893, Comptes Rendus 1893.

Bd. XXV, S. 128)[1]) im Widerspruche stehen. In der soeben zitierten Arbeit betrachte ich nämlich eine außerordentlich ausgedehnte Kategorie von simultanen Systemen, welche Fundamentalsysteme besitzen. Da nun Herr Guldberg, der alle derartigen Systeme bestimmen will, nur einen Teil von meinen Systemen findet, so liegt es nahe, zu vermuten, daß seine Betrachtungen nicht ganz vollständig sein können.

Wenn ich nicht irre, ist es mir gelungen, die wirkliche Tragweite seiner Betrachtungen festzustellen. Ich gehe um so lieber hierauf näher ein, da meine soeben zitierten Untersuchungen in den Math. Ann. Bd. XXV in so knapper Form dargestellt sind, daß es nicht ganz leicht ist, meine damaligen Auseinandersetzungen zu verstehen. Ist auch der wichtigste Inhalt jener Abhandlung jetzt ziemlich bekannt, so sind doch die wichtigen Anwendungen meiner allgemeinen Theorien, die ich in einigen Paragraphen jener Arbeit skizzierte, größtenteils wenig berücksichtigt worden.

I.

3. Herr Guldberg betrachtet ein simultanes System:

$$\frac{dx_k}{dz} = \eta_k(x_1, \ldots, x_n, z) \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{1}$$

und setzt voraus, daß sich aus m beliebigen partikulären Lösungssystemen:

$$x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)} \qquad (i=1,\ldots,m)$$

das allgemeine Lösungssystem $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ durch ein Formelsystem:

$$\mathfrak{x}_k = f_k(x_1', \ldots, x_n', \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, a_1, \ldots, a_n) \tag{2}$$

mit n arbiträren Konstanten ableiten läßt. Dabei versäumt er aber, an die Möglichkeit zu denken, daß unendlich viele wesentlich verschiedene derartige Formelsysteme (2) vorhanden sein können.

4. Herrn Guldbergs allgemeine Entwickelungen sind, soweit ich es übersehe, richtig, sobald die Annahme ausdrücklich hinzugefügt [343 wird, daß das allgemeinste Formelsystem (2) aus einem speziellen derartigen Systeme durch Einführung neuer Parameter:

$$a_k' = A_k(a_1, \ldots, a_n) \qquad (k=1,\ldots,n)$$

abgeleitet werden kann.

1) [Bd. VI d. Ausg., Abh. III, S. 199f.]

Nur unter dieser Voraussetzung läßt sich nämlich der Schluß ziehen, daß die mn Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_k^{(i)} = f_k(x_1', \ldots, x_n^{(m)}, a_1^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$$

eine kontinuierliche Gruppe zwischen den mn Größen: $x_1', \ldots, x_n', \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}$, den mn Größen: $\mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_n', \ldots, \mathfrak{x}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{x}_n^{(m)}$ und den Parametern: $a_1', \ldots, a_n', \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)}$ bilden.

Ist diese Bedingung erfüllt, so sind Guldbergs allgemeine Betrachtungen, soweit ich es übersehe, richtig. Auf die Frage, ob die von ihm für den Fall $n = 2$ angegebenen speziellen Resultate ganz richtig sind, brauche ich hier nicht einzugehen.

II.

5. Wenn zu einem simultanen Systeme (1) unendlich viele wesentlich verschiedene Formelsysteme (2) gehören, bleiben Guldbergs Entwickelungen nicht mehr gültig.

Daß dieser Fall wirklich eintreten kann, zeigen meine Entwickelungen in den Math. Ann. Bd. XXV (S. 128)[1]).

In dieser Arbeit betrachte ich eine beliebige r-gliedrige Gruppe in $x_1, \ldots, x_n$ mit den infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und entwickele eine allgemeine Integrationstheorie für jede lineare partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + Z_1(z) X_1 f + \cdots + Z_r(z) X_r f = 0, \tag{3}$$

wobei ich sogar ausdrücklich hinzufüge, daß meine Betrachtungen sich auch auf den Fall ausdehnen lassen, daß die ξ_{ki} die Größe z enthalten.

Ich hebe ausdrücklich (S. 128)[1]) hervor, daß sich aus hinlänglich vielen partikulären Integralsystemen:

$$x_k', x_k'', \ldots, x_k^{(m)}$$

immer das allgemeinste Integralsystem ableiten läßt. Obgleich nun [344 diejenigen, die meine gruppentheoretischen Untersuchungen genauer kennen, unmittelbar übersehen, wie sich in jedem einzelnen Falle das allgemeine Integralsystem aus partikulären ableiten läßt, so halte ich es doch nicht für überflüssig, dies hier auszuführen.

1) [Bd. VI d. Ausg., S. 200, Z. 1—4.]

6. Liegt eine ganz beliebige Transformationsgruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ eines n-fach ausgedehnten Raumes vor, so ist es nach meinen Untersuchungen immer möglich, die Zahl m so groß zu wählen, daß $m + 1$ Punkte:

$$x_1', \ldots, x_n'; \; x_1'', \ldots, x_n''; \; \ldots; x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}; \; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$$

n hinsichtlich $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ unabhängige Invarianten:

$$J_k(x', \ldots, x^{(m)}, \mathfrak{x}) \qquad (k=1, \ldots, n)$$

besitzen. Setzen wir dabei voraus, daß m Punkte gar keine Invarianten haben, so ist das System der Invarianten:

$$J_1, J_2, \ldots, J_n$$

wesentlich bestimmt. Wenn dagegen schon m Punkte Invarianten haben, so gibt es unendlich viele, wesentlich verschiedene Systeme $J_1, \ldots, J_n$.

7. Setzen wir zunächst voraus, daß m Punkte keine Invariante haben. Setzen wir dann:

$$\sum_i \xi_{ki}(x^{(\nu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\nu)}} = X_k^{(\nu)} f, \quad \sum_i \xi_{ki}(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_i} = \mathfrak{X}_k f,$$

so haben die linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$X_k' f + X_k'' f + \cdots + X_k^{(m)} f = 0$$

keine gemeinsame Lösung, während die Gleichungen:

$$X_k' f + \cdots + X_k^{(m)} f + \mathfrak{X}_k f = 0$$

genau n unabhängige Lösungen besitzen.

Wir können dabei immer annehmen, daß diese Lösungen $J_1, \ldots, J_n$ so gewählt sind, daß die Gleichungen:

$$J_k(x_1', \ldots, x_n^{(m)}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = a_k \qquad (k=1, \ldots, n)$$

eine kontinuierliche Gruppe mit der identischen Transformation bestimmen (vgl. meinen zweiten Fundamentalsatz), in welcher die a ur- [345
sprüngliche, die $\mathfrak{x}$ transformierte Veränderliche sind, während die $x', \ldots, x^{(m)}$ Parameter darstellen. Es ist dieser Fall, den Guldberg gefunden hat.

8. Wenden wir uns nun zu meinem allgemeinen Falle.

Wir können annehmen, daß die Ausdrücke:

$$X_k' f + \cdots + X_k^{(m)} f = W_k f$$

durch keine lineare Relation verknüpft sind. Dann haben die Gleichungen:

$$X_k' f + \cdots + X_k^{(m)} f + \mathfrak{X}_k f = 0$$

$n + \omega$ Lösungen, unter denen ω von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ frei sind:

$$U_\nu(x', \ldots, x^{(m)}) \qquad (\nu=1, \ldots, \omega),$$

während die übrigen:

$$J_k(x', \ldots, x^{(m)}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) \qquad (k=1, \ldots, n)$$

hinsichtlich $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ unabhängig sind.

Bilden wir nun wiederum die Gleichungen:

$$J_k(x_1', \ldots, x_n^{(m)}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = a_k,$$

so bestimmen dieselben fortwährend eine Gruppe zwischen den a und $\mathfrak{x}$; dies folgt unmittelbar aus meinem Beweise meines zweiten Fundamentalsatzes, den ich oft als den Hauptsatz meiner Gruppentheorie bezeichne. Jetzt dürfen wir aber keineswegs behaupten, daß diese Gruppe mn wesentliche Parameter hat.

Dieser allgemeine Fall ist Herrn Guldberg entgangen.

Die Frage nach den allgemeinsten simultanen Systemen mit Fundamentalsystemen ist somit durch die bisherigen Untersuchungen keineswegs erledigt. Es ist aber leicht, zu beweisen, daß die frühere Gleichung (3) das allgemeinste derartige System liefert.

III.

9. In den Math. Annalen, Bd. XXV, S. 124—130[1]) entwickelte ich allgemeine Integrationstheorien für lineare partielle Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + Z_1(z) X_1 f + \cdots + Z_r(z) X_r f = 0, \tag{3}$$

wobei ich zunächst annahm, daß die r infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad [346$$

die eine Gruppe erzeugen, die Veränderliche z gar nicht enthalten. Da meine soeben zitierten Entwickelungen einen sehr allgemeinen Charakter haben und teilweise nur skizziert sind, dürfte es nützlich sein, den einfachen Fall, der jetzt gerade vorliegt, etwas ausführlicher zu behandeln.

10. Seien:

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_r)$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$. Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß diese Gleichungen schon bekannt sind.

1) [Bd. VI d. Ausg., Abh. III, S. 195—202.]

Es bestehen nun nach meinen allgemeinen Theorien Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial y_i}{\partial b_k} = \sum_j \psi_{jk}(b_1, \ldots, b_r)\xi_{ji}(y_1, \ldots, y_n),$$

$$X_k f = \sum_j \sigma_{kj}(b_1, \ldots, b_r)\sum_\nu \xi_{j\nu}(y)\frac{\partial f}{\partial y_\nu}.$$

Mit Benutzung dieser Gleichungen erkennt man leicht, daß es möglich ist, die Größen $b_1, \ldots, b_r$ derart als Funktionen von z zu bestimmen, daß unsere lineare partielle Differentialgleichung (3) in den Veränderlichen $z, y_1, \ldots, y_n$ die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_k Z_k(z)X_k f$$

annimmt.

11. Sind nun:

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, b_1(z), \ldots, b_r(z))$$

und:

$$\mathfrak{y}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, \beta_1(z), \ldots, \beta_r(z))$$

zwei verschiedene Substitutionen, welche diese Forderung erfüllen, so bestehen Relationen:

$$\mathfrak{y}_i = f_i(y_1, \ldots, y_n, \gamma_1(z), \ldots, \gamma_r(z)), \tag{4}$$

in denen die γ Funktionen von z sind. Bei der Substitution (4) muß die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ihre Form bewahren; folglich müssen die $\mathfrak{y}$, aufgefaßt als Funktionen [347 der Größen z und y_i, von z unabhängig sein, und somit die Gleichungen:

$$\sum_k \frac{\partial f_i(y, \gamma)}{\partial \gamma_k}\frac{d\gamma_k}{dz} = 0,$$

sowie die äquivalenten:

$$\sum_k \frac{d\gamma_k}{dz}\sum_j \psi_{jk}(\gamma)\xi_{ji}(\mathfrak{y}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

bestehen. Hieraus ergibt sich in bekannter Weise, daß die Ausdrücke:

$$\sum_k \psi_{jk}\frac{d\gamma_k}{dz}$$

sämtlich verschwinden, und daß dementsprechend alle γ_k absolute Konstanten sind.

12. Diejenigen Differentialgleichungen, welche die Größen:

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, b_1(z), \ldots, b_r(z)) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, z)$$

derart als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, z$ bestimmen, daß die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \sum Z_k(z)X_k f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

besteht, besitzen daher die fundamentale Eigenschaft, daß das allgemeinste Lösungssystem:

$$\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$$

aus einem partikulären $y_1, \ldots, y_n$ durch Formeln:

$$\mathfrak{y}_k = f_k(y_1, \ldots, y_n, c_1, \ldots, c_r)$$

ausgedrückt wird, die eine bekannte Gruppe bilden.

Diese Differentialgleichungen findet man, indem man zuerst diejenigen Differentialgleichungen:

$$W_k\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = 0$$

bildet, welche die Größen: $y_k = f_k(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_r)$ als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ bestimmen, und sodann zu den $W_k = 0$ die n Gleichungen:

$$\frac{\partial y_i}{\partial z} + Z_1 . X_1 y_i + \cdots + Z_r . X_r y_i = 0 = \Omega_i = 0 \qquad [348$$

hinzufügt.

Jetzt bilden die vereinigten Gleichungen:

$$\Omega_i = 0, \quad W_k = 0$$

ein System von Differentialgleichungen, das sich unmittelbar auf ein vollständiges System mit einer bekannten endlichen Gruppe reduziert.

Zu einem äquivalenten Resultate kommt man offenbar, wenn man die $b_k(z)$ als Funktionen von z bestimmt.